UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

El uso de ecuaciones diferenciales en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en el bachillerato.

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

Miguel Ángel Mejía Rojas

Dr. Ernesto Rosales González. (Facultad de Ciencias)

Dra. Mirna Villavicencio Torres. (Facultad de Ciencias)

Dra. Martha Rosa del Moral Nieto. (Facultad de Ciencias)

México D. F., Enero de 2016

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han sido y son un reto para estudiantes y docentes en todas las instituciones educativas, pues prácticamente en todos los niveles académicos se tienen altos índices de reprobación en las asignaturas dedicadas a su estudio.

El objetivo de este trabajo es presentar una estrategia didáctica que coadyuve en la comprensión y manejo de las matemáticas en el nivel medio superior, en particular en lo que respecta a Cálculo, tanto en su forma diferencial como integral.

La estrategia didáctica que se propone tiene como sustento didáctico-pedagógico al Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) el cual, aunque no es una propuesta nueva, permite obtener buenos resultados en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que los alumnos se involucran en la resolución de problemas que son de su interés, logrando además que durante el proceso desarrollen diferentes habilidades.

A lo largo de este trabajo, se planteó a estudiantes de dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, seis problemas ligados a la vida cotidiana y cuya resolución involucra el uso del Cálculo Diferencial e Integral.

Analizando las evaluaciones llevadas a cabo, se observó que la motivación, comprensión y en general, el aprendizaje alcanzado, fue más que significativo.

Abstract

The teaching and learning of mathematics have been and are a challenge for students and teachers in all educational institutions, virtually in all academic levels there are high failure rates in the subjects dedicated to its study.

The purpose of this paper is to present a teaching strategy which contributes to the improve the understanding and management of mathematics at the high school level, particularly Calculus, differential and integral.

The teaching strategy proposed has as pedagogical training to problem based learning (PBL). Although, it is not innovating approach, it supports goods results due to the students engagement in solving of natural interest, in the process of developing different skills.

Throughout this work students were given 6 different is raised six issues located in everyday life, the resolution involves the use of differential and integral calculus.

The problems were solved by students in two courses in differential and integral calculus of the College of Sciences and Humanities of the UNAM.

Analyzing the evaluations carried out, we can see that the motivation, understanding and overall learning obtained was more than significant.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

A partir del análisis de la información que proporcionan los organismos internacionales, nacionales e institucionales sobre el aprendizaje de las matemáticas y la experiencia adquirida durante la práctica docente, en la que se impartieron clases de matemáticas en el nivel medio superior, se planteó la idea del diseño, aplicación y evaluación de una estrategia didáctica pedagógica en la que, en un marco teórico constructivista de aprendizaje basado en problemas (ABP), se enseñaran temas de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II del plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

La descripción del trabajo realizado durante el desarrollo de esta Tesis se encuentra organizada en capítulos:

En el primer capítulo, Planteamiento del Problema, se presentan los datos proporcionados por diversas organizaciones sobre el nivel de comprensión de las matemáticas que presentan nuestros estudiantes, así como los problemas a los que se enfrentan profesores y estudiantes. Se establecen además los objetivos de este trabajo y la hipótesis de trabajo.

El segundo capítulo llamado Antecedentes, tiene como objetivo establecer una panorámica del Cálculo Diferencial e Integral, a través de un bosquejo de su desarrollo histórico haciendo énfasis en el desarrollo de los modelos matemáticos y las ecuaciones diferenciales para finalmente hablar de su enseñanza en el nivel Medio Superior. El objetivo específico del tercer capítulo, Marco Teórico, consiste en analizar las bases teóricas constructivistas del el ABP, lo que da sustento teórico a este trabajo. Para ello, se describen sus características y objetivos y se lleva a cabo un comparativo entre la enseñanza empleando ABP, y la enseñanza tradicional, donde se utiliza primordialmente la clase magistral. Se describe la forma en que se implementa el ABP en el aula y se hace énfasis en la importancia de la resolución de problemas matemáticos.

En el tercer capítulo, Marco Teórico, Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), se analizan las bases teóricas constructivistas del ABP, para ello, se describen sus características y objetivos y se lleva a cabo un comparativo entre la enseñanza empleando ABP y la enseñanza tradicional, en la cual se emplea, primordialmente, la clase magistral. El capítulo finaliza con una descripción de la implementación del ABP en el aula.

El cuarto capítulo, Estrategia Didáctica basada en el ABP, presenta el diseño y la aplicación de la estrategia didáctica a los estudiantes de dos grupos del CCH.

En el quinto capítulo se presentan los resultados y el análisis de las evaluaciones realizadas a los alumnos. Además, se dan algunas sugerencias que podrían llevar a obtener mejores resultados, en futuras aplicaciones. Se describen las secuencias didácticas que especifican y detallan los problemas planteados, así como los pormenores ocurridos durante la aplicación de la estrategia.

Finalmente se analizan los resultados obtenidos en la evaluación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas continúan siendo un reto para los estudiantes y docentes de las diferentes instituciones educativas ya que prácticamente en todos los niveles educativos, las asignaturas de matemáticas presentan un grado de dificultad tal que se tiene como consecuencia un alto índice de reprobación.

Diferentes estudios muestran que el conocimiento, la habilidad y la competencia matemática, tanto a nivel nacional como internacional, es deficiente. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), a través de su Programa de Evaluación Internacional de los Estudiantes, y la prueba PISA (por sus siglas en inglés *Programme for International Student Assessment*) determinaron que la mayoría de los estudiantes, de diferentes países, se ubican en los niveles 2, 3 y 4 entre los 6 posibles. Aunque los estudiantes de algunos países, como Finlandia, Canadá, Corea, China y Japón, alcanzan niveles de eficiencia cercana al nivel 6[1] (PISA-OCDE, 2006), México ha obtenido una muy baja calificación.

En las pruebas llevadas a cabo en 2006, en el rubro de competencias matemáticas, los estudiantes de México se ubicaron en promedio en el nivel 1, de acuerdo a la escala de PISA, con 406 puntos de 600 posibles de la escala global. En las pruebas del 2009 y de acuerdo con el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación[2] (INEE), los alumnos mexicanos evaluados obtuvieron 419 puntos en promedio, es decir, que de 2006 a 2009, hubo un avance muy poco significativo (INEE, 2010). La pruebas realizadas en 2009, mostraron que alrededor del 60% de los estudiantes mexicanos se ubica entre los niveles 1 y 2, donde el 28.9% corresponde al nivel 1 y el 28.3% al nivel 2.

---

[1] La descripción de los niveles de desempeño completos pueden consultarse en el Anexo 1. El archivo fue consultado en el sitio: http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/93128/2/Mex_PISA-OCDE2006.pdf

[2] Instituto responsable de coordinar la aplicación de dichas pruebas en México en todas sus fases, también se encarga de analizar los resultados obtenidos y publicar los resultados. Se obtiene en http://www.inee.edu.mx

En el nivel 1, los estudiantes son capaces de contestar preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas; son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas; pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

En el nivel 2, los estudiantes son capaces de interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa; saben extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un único modelo de representación; pueden utilizar algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos elementales y son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados (INEE, 2010).

En el año 2012, y más recientemente, los resultados no han sido los esperados pues únicamente se obtuvieron en promedio 413 puntos. En la Tabla 1. Se pueden observar los puntajes alcanzados por los estudiantes mexicanos a lo largo de doce años.

Competencia	PISA 2000	PISA 2003	PISA 2006	PISA 2009	PISA 2012
Matemáticas	387	385	406	419	413

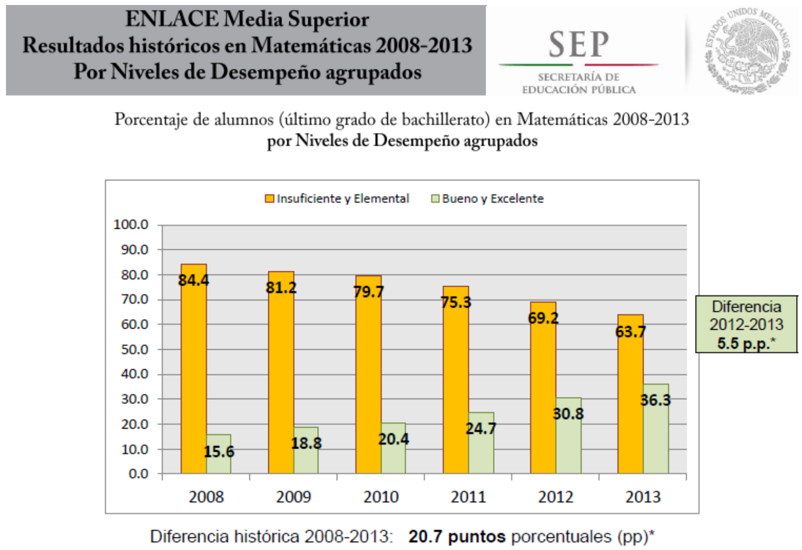
Tabla 1. *Cuadro comparativo de resultados**

Además de la prueba PISA, en México la Secretaría de Educación Pública (SEP), aplica una Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares, llamada prueba ENLACE[3], con el objetivo de evaluar, entre otros, los conocimientos y habilidades matemáticas.

Los resultados publicados por la SEP muestran que de 2008 a 2013 (Gráfica 1) los resultados que predominaron en la habilidad matemática son muy bajos. Además, puede

[3] Las estadísticas de los resultados de las pruebas, pueden consultarse en la dirección electrónica: http://enlace.sep.gob.mx/gr/

observarse que los estudiantes presentan grandes deficiencias en la comprensión matemática.



Gráfica 1. Se muestran los resultados obtenidos, en el área de matemáticas, correspondientes al último grado de bachillerato desde 2008 hasta 2013. Obtenida de http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2013/ENLACE_

En México, la educación media superior atiende a 4 500 000 estudiantes presentando un alto grado de deserción y reprobación, lo que obviamente repercute en la pérdida de recursos económicos, profesionales, culturales y sociales, mientras que las deficiencias académicas se ven reflejadas en la interrelación humana en diferentes aspectos laborales y profesionales.

Un hecho que llama la atención es que a pesar de que los estudiantes de bachillerato tienen por lo menos una trayectoria escolar de 9 años (seis de educación básica y tres de educación media) presentan problemas en el aprendizaje de las matemáticas siendo que esta asignatura les ha sido impartida en todo los niveles educativos.

Los estudiantes que egresan de la educación media superior y no pueden continuar con una carrera universitaria, presentan dificultades para encontrar trabajo principalmente por las deficiencias académicas que presentan, entre las que destaca su escaso y poco manejo de los conocimientos en matemáticas. De hecho, algunos estudiantes deciden no continuar sus estudios porque consideran que se les dificulta aprender matemáticas.

Por otra parte, los alumnos que egresan del nivel medio superior y que continúan con sus estudios profesionales en el área físico-matemática y las ingenierías, tienen un perfil basado, en gran medida, en su habilidad para la resolución de ejercicios algebraicos, pero poseen una baja competencia en cuanto a la resolución de ejercicios con aplicaciones, es decir, no pueden aplicar el conocimiento adquirido a la solución de problemas reales o novedosos que se les plantean ocasionando muchas veces la deserción en los cursos de matemáticas en el nivel superior.

En el caso específico del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, la Dirección General del CCH a través de su Secretaría de Informática publicó la siguiente tabla:

Materia	% de reprobación
Cálculo Diferencial e Integral I	19
Estadística y Probabilidad I	16
Física III	13
Cibernética y Computación I	12
Cálculo Diferencial e Integral II	15
Estadística y Probabilidad II	11
Cibernética y Computación II	10
Física IV	9

Tabla 2. Las materias de mayor índice de reprobación en la generación 2012*

donde claramente se observa que las asignaturas de matemáticas son las que representan un desafío para los estudiantes.

Estos resultados demuestran que la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos matemáticos que se presenta en los distintos niveles educativos en nuestro país, y particularmente en el bachillerato, requiere de una atención especial y de una investigación educativa permanente.

Aunque las dificultades involucradas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en otras áreas, dependen de múltiples factores, mencionaremos algunas distinguiendo las que corresponden al profesorado de las asociadas al estudiantado.

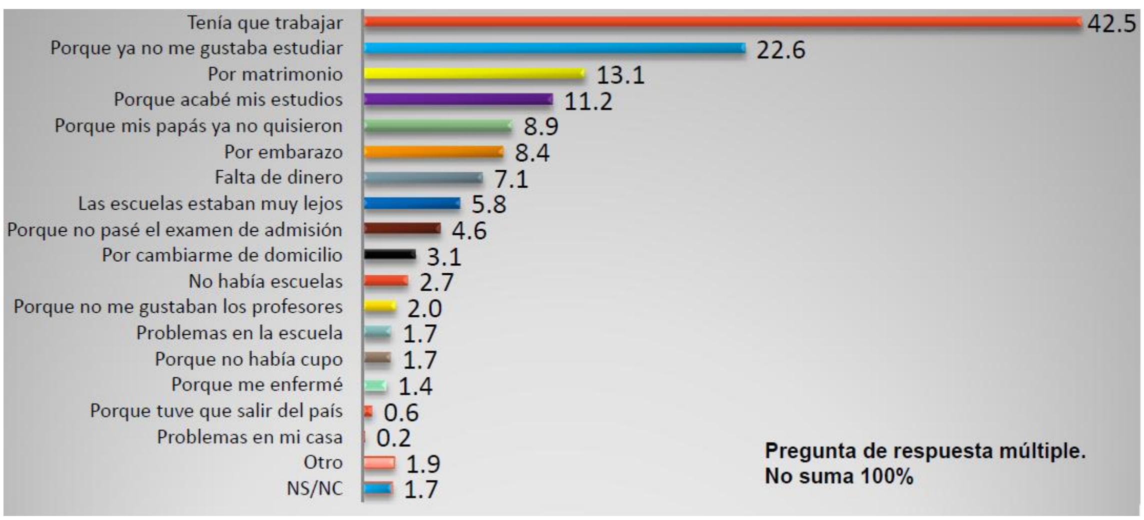
Profesorado

- "Muchos profesores siguen basando su enseñanza en exposiciones magisteriales, apoyadas en libros de texto cuyo enfoque es totalmente algorítmico y no proporcionan el desarrollo del pensamiento matemático" (CCH-UNAM, 2012, p. 20). Es decir, los docentes no aplican otras estrategias de enseñanza fuera de la de tipo cátedra.
- La enseñanza de algunos conceptos matemáticos es muy compleja, debido al grado de abstracción, por lo que los estudiantes los encuentran difíciles de asimilar pues además les son muy poco familiares y no les encuentran una aplicación directa y sencilla en la vida cotidiana. Esto representa una dificultad a los profesores pues no encuentran una estrategia didáctica que les permitan enseñarlos.
- Los cursos de formación docente no cumplen con su cometido. Si bien se ofrece una variedad de opciones de formación y actualización permanente, algunos informes señalan que éstos no siempre responden a las necesidades imperantes (Zorrilla, 2008), no poseen la calidad necesaria, se encuentran fragmentados o bien, su duración es muy corta para poder generar cambios en la prácticas docente. Aunado a lo anterior, son relativamente escasos los procesos de seguimiento y evaluación del impacto de estas medidas sobre el ejercicio de la docencia.
- La gran mayoría de los profesores de matemáticas consideran que todos los ejercicios que deben resolverse en clase, tareas o exámenes deben ser solo de tipo cuantitativo, sin ningún significado para el estudiante y muchas veces, cuando se aplican ejercicios matemáticos que aparentan tener una aplicación en la vida cotidiana en la práctica no la tienen. El uso de estos ejercicios puede traer resultados contraproducentes.
- Algunos profesores consideran que el alto índice de reprobación en sus asignaturas, los coloca como buenos profesores exigentes.
- Una cantidad considerable del profesorado en el bachillerato, no cuenta con una formación sólida en matemáticas o bien, carecen de los conocimientos básicos de la disciplina.

Estudiantado

- De acuerdo a la Encuesta Nacional de valores en Juventud (ENJ) realizada en 2012, la mayor parte de los jóvenes que abandonaron sus estudios lo hicieron durante su estancia en el bachillerato, entre los 15 y 17 años de edad, indicando que la principal causa se debe a motivos de índole económico (IMJUVE, 2012). La ENJ señala también, que alrededor del 25% de los encuestados, manifestó que el motivo por el cual abandonó la escuela era que "ya no le gustaba estudiar".

- Por su parte, Guerra (2000) comenta: "se ha observado que uno de los motivos más relevantes es la pérdida de sentido y la sensación de irrelevancia que existe en buena parte de los estudiantes, ocasionada por la ausencia de propuestas pedagógicas acordes con las expectativas y necesidades formativas de la juventud actual" (p. 243). Ver Gráfica 2.



Gráfica 2. Gráfico que representa los porcentajes de los motivos que los jóvenes expresaron al preguntarles ¿Por qué dejaron de estudiar? De acuerdo con la encuesta nacional de Valores en Juventud 2012. Tomado de http://www.juridicas.unam.mx/invest/areas/opinion/envaj/pdf/1-educacion.pdf

- Los estudiantes presentan deficiencias en el manejo del material y conocimiento de cursos anteriores, lo cual les impide asociar el conocimiento previo con el nuevo, causando atrasos en el aprendizaje.

- Frecuentemente los alumnos asocian a las matemáticas con la resolución de problemas que solamente tienen sentido en el salón de clases, pero que en la práctica difícilmente le encuentran utilidad.
- Culturalmente se genera en los estudiantes una apatía y temor hacia las matemáticas, desde que son pequeños y casi nunca las relacionan con aspectos de la vida diaria, aunque las usen continuamente.

Esta breve panorámica sobre el nivel de aprendizaje de los estudiantes del sistema educativo mexicano, particularmente de los estudiantes del nivel medio superior con especificidad del CCH de la UNAM, y la problemática antes mencionada nos llevan a formular los objetivos de este trabajo de Tesis:

Objetivo General

Coadyuvar en la enseñanza y el aprendizaje, en el nivel medio superior, de las matemáticas, a través de una estrategia didáctico pedagógica, basada en la resolución de problemas ligados a las actividades y sucesos cotidianos, que permita a los estudiantes alcanzar un aprendizaje significativo de los conceptos básicos contenidos en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II, que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Objetivos específicos

- Diseñar una estrategia didáctico-pedagógica, basada en la teoría constructivista del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), en la que se desarrollen actividades y se resuelvan problemas cotidianos ellos en los que se apliquen directamente los conceptos básicos del Cálculo Diferencial e Integral.
- Motivar al estudiante presentando a las matemáticas como un área del conocimiento presente en todas las actividades cotidianas
- Aplicar la estrategia propuesta en grupos del nivel medio superior del CCH de la UNAM, que cursen la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral,
- Evaluar la aplicación de la estrategia didáctico-pedagógica constructivista de ABP con estudiantes del CCH de la UNAM, con el fin de determinar si hubo una mejora significativa en la comprensión y en general el aprendizaje del cálculo.

- Evaluar las ventajas de aplicar el ABP desde el inicio de un curso de matemáticas.

Cabe mencionar que la estrategia didáctica que se propone en este trabajo es diferente a la que sugieren los programas de estudio oficiales, en los que se propone que el estudio de las aplicaciones del Cálculo debe realizarse al final del curso una vez que le han sido planteados al estudiante los conceptos básicos.

La hipótesis que da sustento a este trabajo es la siguiente:

Hipótesis

El conocimiento del Cálculo Diferencial e Integral que necesitan aprender los estudiantes del nivel medio superior puede lograrse mediante la resolución de problemas obtenidos de las actividades y sucesos cotidianos que les son familiares, lo cual se convierte en un aprendizaje significativo.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES

En este capítulo se presenta un breve panorama del tema de Cálculo Diferencial e Integral a través de un recorrido histórico que va de su creación hasta llegar a su enseñanza en el nivel medio superior. También, se hace un análisis de la forma en la que actualmente se enseña este tema en las escuelas del nivel mencionado y se hace una propuesta tratando de que la comprensión y uso de esta herramienta matemática sea más eficaz.

2.1 Breve historia del Cálculo Diferencial e Integral

El Cálculo Diferencial e Integral tiene su origen en la antigua geometría griega, inspirada por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras.

Demócrito calculó el volumen de pirámides y conos considerándolos formados por un número infinito de secciones de grosor infinitesimal (infinitamente pequeño). Eudoxo y Arquímedes utilizaron el “método de agotamiento” o exhaución para encontrar el área de un círculo con la exactitud finita requerida mediante el uso de polígonos regulares inscritos de cada vez mayor número de lados. Pappus, de Alejandría, también hizo contribuciones sobresaliente en este ámbito. Sin embargo, las dificultades para trabajar con números irracionales y las paradojas de Zenón impidieron formular una teoría sistemática del Cálculo en el periodo antiguo.

En el siglo XVII, Cavalieri y Torricelli ampliaron el uso de los infinitesimales. Descartes y Fermat utilizaron la geometría analítica y el álgebra para encontrar el área de distintas figuras geométricas y las tangentes, siendo que Fermat y Barrow tenían la certeza de que ambos cálculos estaban relacionados aunque no podían explicar de qué manera.

Ya para finales del siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Wilhem Leibniz de manera independiente, uno en Inglaterra y el otro en Alemania, respectivamente, desarrollaron una nueva herramienta matemática, que más tarde sería conocida como Cálculo Diferencial e Integral. Fueron ellos quienes dieron a los procedimientos infinitesimales la perspectiva científica e histórica apropiada. Newton y Leibniz demostraron que los problemas del área y la tangente son inversos, lo que se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo.

En su tratado “Principios Matemáticos de Filosofía Natural”, Newton utilizó el Cálculo en el estudio de la Mecánica, llamando a su método “fluxiones”. Leibniz utilizó el Cálculo en el problema de la tangente a una curva en un punto, como límite de aproximaciones sucesivas.

Esta herramienta fue desarrollada por el interés de resolver problemas de índole geométrico y algebraico que no podían ser resueltos con la matemática que hasta ese momento se conocía. Para Newton, la motivación radicaba en la necesidad de explicar las trayectorias de los planetas alrededor del Sol, pues aunque las propiedades de estas órbitas ya habían sido observadas y planteadas por Johannes Kepler, no se contaba con una explicación matemática.

Una vez inventado el Cálculo, pudieron resolverse problemas que hasta ese entonces eran irresolubles, dando muestra de su gran poder de aplicación en el mundo de la Física y otras áreas de la Ciencia.

En el siglo XVIII aumentó considerablemente el número de aplicaciones del cálculo, pero el uso impreciso de las cantidades infinitas e infinitesimales, así como la intuición geométrica, causaban todavía confusión y duda sobre sus fundamentos. De hecho, la noción de límite, central en el estudio de Cálculo, era aún vaga e imprecisa en ese entonces.

En el siglo XIX el trabajo de los analistas matemáticos sustituyó esas vaguedades por fundamentos sólidos basados en cantidades finitas: Bolzano y Cauchy definieron con precisión los conceptos de límite y de derivada. Cauchy y Riemann hicieron lo propio con las integrales, y Dedekind y Weierstrass con los números reales. Este fue el periodo en el que se establecieron los fundamentos del Cálculo.

En el siglo XX, el análisis no convencional reforzó el uso de los infinitesimales, al mismo tiempo que la aparición de la computadoras incrementó las aplicaciones y la velocidad del Cálculo.

El éxito del Cálculo ha sido extendido con el tiempo a las ecuaciones diferenciales, al cálculo de vectores, al cálculo de variaciones, al análisis numérico y al análisis real entre muchas otras ramas.

El extraordinario avance registrado por las matemáticas, la física y la técnica durante los siglos XVIII, XIX y XX, se lo debemos al Cálculo y por eso se puede considerar como una de las joyas de la creación intelectual de la que el hombre puede sentirse orgulloso.

Las aplicaciones del Cálculo son difíciles de cuantificar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia; y las diferentes partes del andamiaje matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

2.2 El Cálculo Diferencial e Integral en el Bachillerato

Los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, se estudian hasta el tercer año de bachillerato[4], luego de haber estudiado funciones, álgebra, trigonometría, geometría y otros tópicos matemáticos en las materias que le anteceden.

De acuerdo con los programas de estudio, en lo que respecta al Cálculo diferencial e integral en el bachillerato, se puede observar que, independientemente de la institución educativa que se trate, los temas y el orden en el que se enseñan es más o menos el siguiente:

Para Cálculo Diferencial

- Definiciones de la derivada
- Técnicas de derivación en gran variedad de funciones
- Ejemplos de aplicación
- Aplicaciones a problemas de optimización

Para Cálculo Integral

- Formulación de las integrales
- Técnicas de integración para integrales definidas e indefinidas
- Ejemplos de aplicación

[4] Aunque no en todas las instituciones de nivel Medio Superior se imparte hasta el tercer año, por ejemplo, en el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) del IPN, los cursos de Cálculo se imparten en el cuarto y quinto semestre.

❖ Aplicaciones “cotidianas” del cálculo.

En general, las aplicaciones tanto en situaciones del mundo real o en situaciones cotidianas a los estudiantes, son planteadas hasta el final de los cursos. En la Figura 1 se describe la manera en la que se enseña matemáticas en la mayoría de los cursos.

.

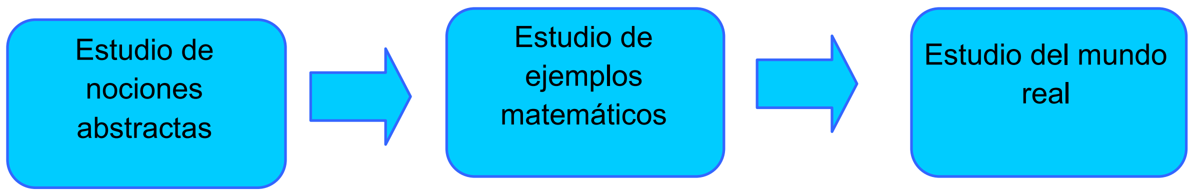


Figura 1. Diagrama que muestra el flujo de la enseñanza de las matemáticas de acuerdo con la forma de enseñanza propuesto en los programas de estudio en las asignaturas de matemáticas.

A modo de ejemplo, en el CCH el programa de Cálculo Diferencial e Integral I (CCH, 2006) es el siguiente:

Unidad I. Procesos infinitos y la noción de límite.

Unidad II. La derivada, estudio de la variación y el cambio.

Unidad III. Derivada de funciones algebraicas.

Unidad IV. Comportamiento gráfico y problemas de optimización.

Para el caso de Cálculo Diferencial e Integral II:

Unidad I: Derivadas de funciones trascendentales.

Unidad II: La integral como anti derivada.

Unidad III: La integral definida.

Unidad IV: Modelos y predicciones.

Recurriendo a la experiencia personal, no es muy conveniente la forma en la que se estudia el Cálculo siguiendo los programas presentados ya que:

- Los alumnos tienen que esperar hasta la última unidad para poder trabajar con aplicaciones posibles.
- En muchos casos los profesores asignan un mayor tiempo de clase a las primeras unidades por lo que llegan reducidos de tiempo para la última unidad con lo que disminuye la cantidad de problemas de aplicaciones o bien definitivamente eliminan ese tema.
- Pareciera que no se pueden enseñar las aplicaciones del Cálculo, si previamente los alumnos no saben operar herramientas del mismo.

De acuerdo con la propuesta de esta tesis, la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo pueden mejorar si se trabaja con un orden distinto; donde las aplicaciones sean las generadoras de la utilización de herramientas del Cálculo, es decir, de acuerdo con el diagrama de la Figura 2:

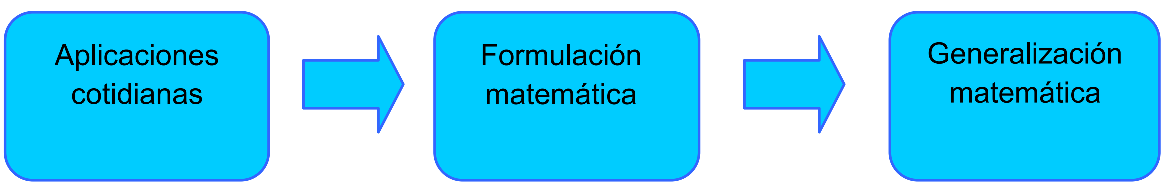


Figura 2. Diagrama que muestra el flujo de la enseñanza de las matemáticas propuestos en esta tesis.

La importancia de estudiar Cálculo Diferencial e Integral en el bachillerato radica principalmente en que:

- Se pueden construir modelos matemáticos de comportamientos de fenómenos de diferente naturaleza.
- Se construyen modelos matemáticos que pueden resultar de utilidad ya que se pueden hacer análisis gráficos y/o geométricos del comportamiento de sistemas físicos, además de que se pueden realizar predicciones que nos pueden ayudar a tomar decisiones.
- Proporciona herramientas para el desarrollo individual y social del individuo. El manejo correcto de la matemática le proporciona al alumno un esquema formal y sólido para estructurar su pensamiento.

2.3 La enseñanza y el aprendizaje del Cálculo

Debieron pasar muchos años desde que el ser humano empezó a trabajar en la Matemática hasta el descubrimiento del Cálculo. Se requería de una buena cantidad de conocimientos previos pero sobre todo de un nivel de abstracción de los conceptos e ideas que se trabajaban de manera empírica desde la antigüedad y que no eran nada triviales. Así pues, el ser humano tuvo que madurar para poder plantear y comprender situaciones matemáticas que estaban fuera de su vida cotidiana.

El aprendizaje del Cálculo se dificulta si los alumnos no poseen habilidades en lo que respecta a la manipulación algebraica y geométrica, mientras que el nivel de abstracción de muchos de sus conceptos complica el que el estudiante acepte una relación más cercana a ellos.

Así pues, la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos fundamentales del Cálculo se dificultan, sobre todo cuando el estudiante no los considera cercanos a la vida cotidiana principalmente debido a la dificultad intrínseca de su comprensión, visualización e interpretación. Conceptos como sucesiones, procesos infinitos y límites al infinito, entre otros, son de difícil asimilación y por ello difíciles de enseñar.

Al respecto Fernando Hitt (2003) en el resumen de su artículo: “El concepto de Infinito: Un obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones”, escribe

> *La idea del infinito potencial surgió de manera natural entre los filósofos de esa época, permitiendo designar la posibilidad de ir más lejos. En cambio, del concepto de infinito actual y su uso sistemático surgieron en los trabajos matemáticos hasta el siglo XIX. Esto indica que la distinción entre los dos conceptos fue posible después de un desarrollo de la filosofía y de la matemática durante varios siglos, lo cual a su vez muestra que dicha distinción requirió haber franqueado obstáculos cognitivos. Para aprender el concepto de límite no es suficiente dominar procesos algorítmicos asociados al mismo: se requiere, además, traspasar obstáculos que no permiten distinguir el concepto de infinito potencial -entiéndase como “la posibilidad de ir más lejos”- del infinito actual en su uso coherente en las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos. ¿Podría uno esperar que ese obstáculo de corte epistemológico se presentara entre los estudiantes? ¿Entre profesores de matemáticas de enseñanza Media y Superior? (p. 91).*

Más adelante, Hitt describe varios obstáculos en el aprendizaje del concepto de límite, algunos de ellos son:

- Los alumnos visualizan al límite, como idea primitiva, desde un punto de vista geográfico.
- La expresión “tender hacia” no forma parte del vocabulario del alumno
- Distingue, dentro de un contexto matemático, varios modelos, pero predomina en ellos el carácter inalcanzable del límite.

Es frecuente que los cursos de Cálculo en el bachillerato sean impartidos de forma tradicional[5], es decir, el docente en la gran mayoría de sus sesiones, centra su actividad en la exposición; él es quien resuelve los ejercicios y los explica, mientras que el alumno se limita a copiar. Para resolver los ejercicios que el profesor plantea, el estudiante solo requiere de habilidad algebraica para llegar a la solución final, con lo que se fomenta la mecanización del aprendizaje.

A los estudiantes se les proporciona una gran variedad de herramientas para la solución de derivadas e integrales, capacitándolos para resolver de manera analítica ejercicios de gran complejidad algebraica. Desafortunadamente éstos ejercicios no suelen ser acompañados de aplicaciones en lo que a problemas cotidianos se refiere dando al estudiante la impresión del Cálculo como un instrumento matemático que debe ser aprendido a fuerza y sin sentido. Por otro lado, al emplear en demasía el uso del álgebra en la solución de ejercicios se deja de lado otras técnicas de solución como la graficación o la aproximación numérica.

Sería más provechoso que los estudiantes obtuvieran una mejor comprensión, al menos intuitiva, de los conceptos fundamentales del Cálculo y que pudieran estimar las ventajas de su uso y aplicación. Es claro que no sólo es importante resolver ejercicios en los que se calculen derivadas o integrales y se empleen métodos algebraicos, sino que también es interesante emplear otras técnicas, como son los métodos numéricos o análisis geométricos, en los que se haga uso de computadoras o de calculadoras[6].

5

En el siguiente capítulo se hará una descripción más amplia de lo que se entiende, en este trabajo por enseñanza tradicional.

6

El CCH Plantel Sur, cuenta con un aula llamada “sala de vanguardia” dedicada exclusivamente a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. La sala cuenta con alrededor de 25 computadoras (una por

Ahora bien, los textos más utilizados en los cursos de Cálculo en la educación media y superior han sido impulsados por la competencia editorial, centrada en su mayoría en el *marketing* editorial que EUA provee. Una muestra de esto es que los autores y libros más citados en la bibliografía de los programas de estudio de diferentes bachilleratos son: "Cálculo con Geometría Analítica" de Leithold (1987), "Cálculo con Geometría Analítica" de Sokwoski (1989), "Cálculo Diferencial e Integral" de Granville (1980) y "Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera" de Boyce (1997). El problema con esta bibliografía no es solo que tiene al menos 10 años de antigüedad, sino que en todos estos libros predominan ejercicios que promueven la mecanización, y aunque hay ejercicios de aplicación, éstos se plantean como una aplicación de lo aprendido y no como una propuesta de aprendizaje.

Libros de texto más recientes como son: "Cálculo aplicado" de Hughes-Hallet (2004), "Cálculo aplicado" de Waner-Costenoble (2002) y "Matemáticas para Administración y Economía" de Haeussler–Paul (2002), por mencionar algunos, plantean una propuesta más atractiva, los problemas tratados no sólo sirven para explicar el uso de la herramienta matemática, y aplicar técnicas del Cálculo, sino que además utiliza problemas reales o semejantes a los reales. Algunos de los problemas planteados son problemas cotidianos (desafortunadamente más cotidianos para los alumnos del Norte de este continente), cuya solución no se limita al uso algebraico sino que hay que hacer una mayor investigación. De aquí que se necesita hacer una nueva propuesta bibliográfica para los cursos del bachillerato.

Actualmente, nos encontramos con que las actividades de enseñanza se ven fortalecidas si se utiliza la tecnología. Se observa que las competencias de pensamiento y razonamiento matemático, así como las de resolución de problemas y modelación, se desarrollan mejor si se utilizan las nuevas tecnologías, en particular las herramientas computacionales que facilitan las tareas matemáticas y la comunicación entre los integrantes del grupo.

alumno aproximadamente) con Software especializado. También cuenta con una la sala de Cómputo (Sala Telmex) con la que se puede contar con alrededor de 50 computadoras disponibles.

2.4 Modelos matemáticos

En este trabajo se entiende a la Modelación Matemática como el proceso mediante el cual se obtiene un modelo que reproduce los datos de un fenómeno. Un modelo matemático puede ser una ecuación, una función, una desigualdad o cualquier otro objeto matemático que sirva a este propósito.

Modelar matemáticamente un fenómeno puede ser complejo principalmente por la cantidad de variables involucradas, a lo que se suma la dificultad para describirlo. Sin embargo, hay fenómenos de diferente índole cuyo comportamiento puede ser representado con bastante precisión mediante algunas ecuaciones matemáticas.

Modelar es importante en cuestiones de aprendizaje, ya que desarrolla diferentes beneficios en los alumnos como:

- Proporciona capacidades críticas y analíticas.
- Ayuda a comprender conceptos matemáticos
- Permite analizar el comportamiento de numerosos fenómenos en forma aproximada.
- Favorece la creatividad y curiosidad matemática a través de descubrimientos, lo cual, motiva que los estudiantes perciban las necesidades reales de los contenidos.
- Tiene relevancia en el sentido de participación y control en la solución de procesos, ya que ayuda a descubrir dinámicas inherentes a muchas situaciones complejas y a la vez, sirve como medio para introducir nuevos conceptos.

En Aravena et al (2008) se mencionan algunas de las ventajas en la construcción y el uso de modelos matemáticos, entre las que se encuentran:

- Aquellos alumnos que no manifiestan un interés por las matemáticas, pueden ser persuadidos a aprenderlas por las aplicaciones, de ahí que sean vistas como una herramienta para solucionar problemas prácticos.
- Algunas aplicaciones de matemáticas forman parte de una herencia cultural de la sociedad; dicho factor justificaría por sí mismo la inclusión de las aplicaciones.

- Las aplicaciones y la construcción de modelos pueden ser trabajados como dos medios adecuados para desarrollar competencias en los alumnos. De este modo se estimula su interés por el descubrimiento, la creatividad y la confianza en sus actividades y recursos.
- La sociedad está cada vez más matematizada con el empleo de modelos matemáticos en todas las actividades. Por ello, es necesario desarrollar en los alumnos competencias críticas (entendidas como la capacidad de reconocer, comprender, analizar y evaluar ejemplos actuales a través de la disciplina) que les permitan intervenir en la sociedad como ciudadanos activos, y puedan contribuir a la solución de problemas relevantes.
- Ayudan a que los estudiantes adquieran destrezas e interioricen conceptos y métodos matemáticos. Además, los motiva en el estudio de situaciones interesantes que pueden ser explotadas. Desde el punto de vista del aprendizaje, algunos temas muestran tendencia a lograr mayor consistencia cuando son enseñados en contextos de aplicación.
- Preparar a los alumnos en el uso de las matemáticas para resolver problemas de la vida real y de otras áreas.

En los problemas de modelación, el estudiante debe tomar decisiones acerca del modelo matemático que mejor se adapte a la situación y sobre el procedimiento para obtenerlo.

En las actividades de modelación se tienen objetivos diferenciados para el estudiante y el profesor. Para el primero, el objetivo es hallar un modelo que mejor reproduzca el fenómeno que se está estudiando, y para el segundo, que sea el estudiante el que aprenda y use la matemática que está detrás del proceso de construir o encontrar un modelo.

2.5 Las Ecuaciones Diferenciales en la Enseñanza Media Superior

En este trabajo se empleará al Cálculo como el medio para obtener modelos del comportamiento de fenómenos que presentan variaciones. Estos modelos son llamados Ecuaciones Diferenciales y en ellos aparece la derivada de la función (la cual describe los cambios de una variable del fenómeno con respecto a otra que frecuentemente es el tiempo). Dependiendo de las variables del fenómeno, la modelación requiere de una ecuación o de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Si resolver una Ecuación Diferencial no es posible por la complejidad de la ecuación o porque no tiene solución explícita, entonces habrá que considerar una estrategia diferente, ya que se espera tener un resultado o una aproximación de éste, debido a que físicamente algo debe suceder. Al respecto, el matemático francés Joseph Liouville (1809-1882), mostró que no es posible resolver explícitamente una gran cantidad de Ecuaciones Diferenciales debido al tipo de variables involucradas. Poincaré (1854-1912) en su "Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales", propuso entender lo mejor posible el comportamiento de las ecuaciones diferenciales sin necesidad de resolverlas explícitamente[7].

Lo que podríamos hacer es realizar simulaciones del comportamiento de la solución sin necesidad de resolverla para lo que se pueden utilizar herramientas matemáticas que estén al alcance del nivel bachillerato. Con esto se dotará al estudiante de herramientas más útiles y la enseñanza estará más cerca del análisis real de las ecuaciones.

La formulación de un modelo matemático para un sistema se inicia mediante la identificación de las variables causantes del cambio del sistema. Podemos elegir no incorporar todas las variables en el modelo desde el comienzo. Después, se establece un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que tratamos de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas que pudieran ser aplicables al sistema.

7

"La historia de un empujón: Un vistazo a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y a los Sistemas Dinámicos" de los autores: Laura Ortiz y Ernesto Rosales, es un libro que presenta una buena cantidad de ejemplos de aplicación del análisis de las Ecuaciones Diferenciales desde el punto de vista de los Sistemas Dinámicos, éste análisis es poco empleado en la enseñanza del nivel Medio Superior y sin embargo su uso sería de gran utilidad.

Una vez que se cuenta con un modelo matemático (sea una ecuación diferencial o un sistema de ellas), pasamos al problema de resolverlo. Si se puede resolver analíticamente se puede comprobar que el modelo sea razonable si su solución es consistente con los datos experimentales, o los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se basan en la solución son deficientes, tendremos que hacer correcciones del modelo propuesto o elaborar hipótesis alternativas sobre el mecanismo y posteriormente repetir los pasos del proceso de modelado matemático.

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales aparece en los programas del nivel medio superior hasta el momento en que se realiza el modelado de fenómenos, que en el caso del CCH corresponde a la cuarta unidad. Cabe mencionar que no aparece la palabra Ecuación Diferencial en forma explícita, solo el término, *modelado de sistemas*. No se hacen sugerencias acerca de la solución de las ecuaciones pues solamente se pide que a partir de la obtención de la anti derivada se determine la solución (CCH, 1996)

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

En la escuela tradicional, en todos los niveles, el modelo de enseñanza consiste en que el docente expone cierto material y pone ejemplos, el estudiante atiende las indicaciones y toma nota. Los ejercicios y problemas se plantean con la intención de que el alumno refuerce el material aprendido. Los ejercicios suelen ser tales que los alumnos ya tienen de antemano un modelo de solución y sólo reproducen lo aprendido. Ante esta situación, es posible que los problemas como vía de aprendizaje no logren su cometido.

Los pobres resultados obtenidos en pruebas nacionales e internacionales apuntan a una clara necesidad de cambiar de metodología. Una estrategia que puede ayudar a obtener mejores resultados en la enseñanza y el aprendizaje es el llamado “Aprendizaje Basado en Problemas” o simplemente ABP.

3.1 Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

El ABP es una estrategia didáctica de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos y con ello desarrollar, el razonamiento y el juicio crítico. El principio básico del ABP consiste en enfrentar al alumno a una situación y darle una tarea, un desafío como fuente de aprendizaje; los alumnos son estimulados a explorar los problemas basándose en métodos científicos junto con aspectos sociales, psicológicos, éticos o profesionales involucrados en el problema.

Torp y Sage (1999) en su libro “Aprendizaje Basado en Problemas” mencionan que: “El ABP puede entenderse como una experiencia pedagógica (práctica) organizada para investigar y resolver problemas que se presentan inmersos en el mundo real” (p. 37).

De acuerdo con Barrows y Tamblyn (1980), el ABP, como expresión educativa tiene sus orígenes en los estudios de medicina, en la década de 1960, en la Facultad de Ciencias de la Salud de la Universidad de McMaster de Ontario Canadá. Casi simultáneamente, el ABP fue puesto en marcha por educadores de la Universidad Case Western Reserve de los Estados Unidos. Ambas universidades aplicaron esta propuesta pedagógica por primera vez, aunque personajes de la antigüedad como Arquímedes y Amos Comenius hacían referencia a esta metodología sin proponérselo ya que les planteaban a sus estudiantes problemas de aplicación de los temas vistos en clase y para su solución, necesitaban integrar diferentes áreas del conocimiento.

Es importante mencionar que el ABP, desde sus inicios hasta hoy en día, es una estrategia muy empleada por los docentes. Diversos artículos muestran que la aplicación del ABP en las aulas, independientemente del nivel educativo o área académica que se trate, la aplicación del ABP, ha tenido buenos resultados, pues se ha comprobado que los estudiantes aprenden más y con mayor profundidad conceptual con este tipo de cursos que en los tradicionales (ver por ejemplo: González et al (2009); García y Azcárate (2010); Pere Ponsa (2009); Riverón et al (2000); Matus y Guzmán (2009); Matsuo y Anzawa (2010); Prieto (2006); Barrón (1998); Boss y Krauss (2007); Calvo et al (2010); González-Hernándo et al (2013); Martínez et al (2011); Latorre Dardé (2007); de Miguel (2005)).

3.1.1 Características y Objetivos del ABP

El ABP tiene las siguientes características:

- El uso de problemas adecuados es un mecanismo para aprender y el objetivo no es sólo su solución sino todos los procesos llevados a cabo.
- Los problemas a emplear son cercanos (“reales”) a la cotidianidad de los estudiantes, lo que permite establecer relaciones significativas entre el conocimiento y la vida cotidiana.
- Los problemas suelen ser complejos y retadores.
- El docente cumple con el rol de estimulador, para que el alumno vaya elaborando, reconstruyendo y haciendo suyo el conocimiento.
- Los problemas son el centro del trabajo y estímulo para el aprendizaje.
- Los problemas que son de final abierto o de estructura incompleta ayudan a aprender un conjunto de conceptos, ideas y técnicas importantes, ya que permiten generar discusiones grupales y suministran a los alumnos la experiencia

de resolver problemas que también enfrentan los expertos en la materia o disciplina.

- Se da prioridad a la actividad cognoscitiva independiente del alumno.
- Fomenta la formación de una personalidad intelectual activa en los estudiantes.
- El trabajo se realiza en grupos pequeños de trabajo.
- Los alumnos alcanzan niveles más profundos de comprensión y desarrollan su capacidad de investigación.
- Exige un esfuerzo mental, imaginación y creatividad.
- Genera un ambiente de aprendizaje en el que los docentes motivan a sus alumnos a pensar, guiarlos y orientarlos.
- Tiene una especial incidencia en el estudiante, al ser una metodología activa de trabajo.
- Permite el desarrollo de habilidades del pensamiento, desde el punto de vista crítico y analítico, y permiten la interacción con otras disciplinas del conocimiento.
- Busca un desarrollo integral y plural en los estudiantes, lo que permite enlazar de manera particular la construcción de conocimiento matemático con aquel que le es propio al área o especialidad de estudio.
- Se requiere de una labor más profunda en el ámbito intelectual por parte del maestro.

Entre los objetivos del ABP se encuentran:

- Promover, en los estudiantes, la responsabilidad de su propio aprendizaje.
- Desarrollar habilidades para la evaluación crítica y la adquisición de nuevos conocimientos con un compromiso de aprendizaje de por vida.
- Plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno.
- Promover un aprendizaje continuo y significativo.
- Generar aprendizaje auto dirigido en los alumnos.

- Desarrollar una serie de habilidades y competencias indispensables en el entorno profesional actual.
- Desarrollar relaciones interpersonales
- Promover la elaboración de hipótesis.
- Estimular el desarrollo del sentido de colaboración como miembro de un equipo para alcanzar una meta común.

Promueve, entre otras, las siguientes habilidades:

- Comunicar los resultados de una investigación así como ideas y conceptos a otras personas en forma oral, gráfica y por escrito.
- Razonar crítica y creativamente.
- Tomar decisiones razonadas en situaciones originales.
- Identificar, encontrar y analizar la información requerida para una tarea particular.
- Lograr la autoconfianza necesaria para usar sus habilidades de comunicación y de pensamiento en un grupo de personas.

3.1.2 Implementación del ABP

No hay una forma estandarizada de la implementación del ABP. Aunque de acuerdo a algunas Universidades del mundo (PBL workshop, 1999) y a diferentes autores como Díaz Barriga (2006) y NCTM (2000), se han distinguido distintas fases en el proceso de solución de problemas, entre ellas se señalan las siguientes:

1. Identificación del problema por resolver.

   Se clarifican los conceptos o términos imprecisos, con el fin de establecer una terminología común y. lo que se necesita saber para resolver el problema.

2. Se formula y define la dificultad.

   Se establecen la(s) pregunta(s) del problema que se desprenden de una situación problemática planteada.

3. Se sugieren soluciones.

Analizar el problema representa establecer lo que se sabe del problema (conocimientos previos), diseñar experimentos, analizar datos y buscan patrones y relaciones entre los conceptos involucrados. En base al análisis, se dan posibles explicaciones, o soluciones tentativas, así como hipótesis y perspectivas y se comunican los resultados.

4. Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba.

   Se prepara una reunión para compartir los resultados de la búsqueda en relación a los objetivos de aprendizaje, se construye una síntesis del nuevo conocimiento adquirido y se evalúa la ejecución por medio de la retroalimentación.

Puede ocurrir que las soluciones encontradas a los problemas planteados sean insuficientes para lograr las metas de aprendizaje propuestas, lo cual puede implicar regresar algunos pasos para refrendar o para modificar las metas planteadas y continuar. Una vez que las metas de aprendizaje son logradas, el proceso de aprendizaje continúa con nuevos problemas.

En el libro ¿*Cómo plantear y resolver problemas*? de Polya (1998) se identifican cuatro principios básicos.

Primer Principio: Comprender el problema

Los estudiantes a menudo ven obstaculizados sus esfuerzos por resolver los problemas simplemente porque no entienden por completo la naturaleza del problema. Polya sugiere que los maestros formulen a sus alumnos preguntas como las siguientes:

¿Entiendes todas las palabras usadas en el planteamiento del problema?

¿Qué te ha pedido encontrar o mostrar?

¿Puedes repetir el problema con tus propias palabras?

¿Puedes realizar un dibujo o un diagrama que pueda ayudarte a entender el problema?

¿Hay suficiente información para encontrar una solución?

Segundo Principio: Elaborar un plan

Son muchas maneras razonables de resolver problemas. La habilidad en la elección de una estrategia apropiada se adquiere mediante la solución de muchos problemas. Los alumnos poco a poco elegirán una estrategia cada vez más fácil. Una lista parcial de las estrategias incluye:

- Propone y comprueba tus resultados
- Elimina las posibilidades que no te resulten
- Utiliza simetrías
- Considera la posibilidad de emplear casos especiales
- Utiliza el razonamiento directo
- Busca un patrón
- Haz un dibujo
- Resuelve un problema más sencillo
- Utiliza un modelo
- Trabaja hacia atrás
- Utiliza una fórmula
- Se ingenioso

Tercer principio: Llevar a cabo el plan

Este paso suele ser más fácil que la elaboración del plan. Todo lo que se necesita es cuidado y paciencia, puesto que el estudiante tiene las habilidades necesarias. Hay que ser persistente con el plan que se ha elegido. Si no da resultados hay que descartarlo y elegir otro.

Cuarto Principio: Mirar hacia atrás

Polya menciona, que se puede ganar mucho al tomarse el tiempo necesario para reflexionar y mirar hacia atrás en lo que se ha hecho, lo que funcionó y lo que no. Hacer esto permitirá predecir qué estrategia utilizar para resolver problemas en el futuro.

La propuesta de Polya sigue aún vigente, de hecho es considerado como el padre de la resolución de problemas.

3.2 Aportes del ABP y diferencias con la enseñanza tradicional.

Debido a los cambios que se han generado dentro del sistema de educación mundial, la enseñanza ha experimentado modificaciones considerables, llevando al profesor a utilizar una metodología más activa en la que el estudiante tiene una mayor participación en la obtención de su conocimiento.

Entre los aportes que proporciona el empleo del ABP, de acuerdo con Godino et al (2003; p.39), el alumno:

1. Investiga y trata de resolver problemas, predice su solución (formula conjeturas).
2. Trata de probar que su solución es correcta.
3. Propone y construye modelos matemáticos.
4. Usa lenguaje y conceptos matemáticos.
5. Trabaja cooperativamente e intercambia ideas con sus compañeros.
6. Reconoce cuáles de sus ideas propuestas son correctas y entre todas ellas elige las que le sean útiles.

A modo de comparación, y para observar algunas de las diferencias más significativas entre la forma de enseñanza tradicional y la enseñanza empleando al ABP, en lo que a matemáticas se refiere, se presenta el siguiente cuadro comparativo.

Aprendizaje Basado en Problemas	La enseñanza tradicional
Primero se presenta el problema a los alumnos, quienes investigan y recopilan la información, para finalmente volver al problema y darle una solución.	Primero se expone la información y luego se busca la aplicación en la solución de un problema.
Los estudiantes reconocen a los problemas planteados como relevantes por lo que es probable que se sientan motivados para trabajar en ellos, no sólo	El conjunto de problemas o ejercicios que se le proponen son tomados de libros de textos en los cuales es común encontrarse con ejercicios donde sólo se

porque comprenden que los conocimientos que obtienen les serán útiles en el futuro, sino también porque reciben oportunidades para desplegar su creatividad y flexibilidad en la solución de los problemas.	prioriza la observación de la adquisición de una técnica matemática adquirida. Los alumnos no encuentran mucha motivación en la solución de este tipo de ejercicios.
El protagonista del proceso enseñanza-aprendizaje es el alumno	El protagonista del proceso enseñanza-aprendizaje es el profesor.
Los alumnos trabajan en grupos pequeños donde prolifera la discusión y la reflexión.	En muchos de los casos los alumnos trabajan de forma individualizada.
La interconexión entre áreas afines les permite a los alumnos mantener activos los conceptos de diversas áreas.	El estudiante está obligado a memorizar los contenidos para su posterior aplicación en áreas afines.

Tabla 3. Cuadro comparativo entre una enseñanza basada en problemas y la enseñanza tradicional.

3.3 Sobre los problemas matemáticos

El marco matemático del estudio PISA/OCDE se sostiene en la creencia de que aprender a matematizar debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes. La actividad matemática se concreta en la actividad de matematización, que se identifica en el estudio con la solución de problemas.

Plantear problemas y establecer estrategias para resolverlos así como a la modelación tiene importantes repercusiones desde el punto de vista educativo.

En lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas, las reflexiones anteriores deben tomarse en cuenta y adaptarse a la edad y conocimiento de los alumnos, ya que es claro que no se deben proponer los mismos problemas a un matemático, a un adulto, a un adolescente o a un niño, puesto que hay diferentes necesidades y habilidades cognitivas. Hay que tener claro que la realidad de los alumnos incluye su propia percepción del entorno físico y social con componentes imaginarios y lúdicos que despiertan su interés.

Al respecto Godino *et al* (2003) comentan que la activación del conocimiento matemático mediante la solución de problemas reales no se consigue estudiando de forma mecánica situaciones "reales" aunque éstas sean muy pertinentes y significativas para el adulto, ya que éstas pueden no interesar a los alumnos. (p. 22).

CAPÍTULO 4

ESTRATEGIA DIDÁCTICA BASADA EN ABP

En este capítulo se presenta el diseño y aplicación de la estrategia didáctico-pedagógica para la enseñanza del cálculo diferencial e Integral. Se plantean los ejercicios y las secuencias de actividades llevadas a cabo dentro de la aplicación en la actividad docente.

La secuencia de ejercicios consta de 6 problemas. También se describen las características de la aplicación y las evaluaciones llevadas a cabo.

4.1 Diseño de la estrategia

Los aportes del ABP en la enseñanza y el aprendizaje son considerables, además, esta propuesta pedagógica se adapta muy bien en la enseñanza de la matemática. Resolver problemas ayuda a tener una mejor comprensión de la herramienta matemática que se pretende enseñar y genera, de manera más eficiente, la obtención de diversas habilidades. Es por esta causa que el ABP se utiliza en la propuesta didáctica que realiza esta Tesis.

Si bien no existe una receta única para el diseño y solución de los problemas del ABP, es necesario seguir una serie de pasos o actividades básicas, aunque es necesario pensar que las actividades propuestas puedan sufrir algunas variaciones dependiendo de: el número de alumnos, el tiempo disponible, los objetivos que se quieren alcanzar, la bibliografía disponible, los recursos con que cada profesor y entidad educativa cuentan, entre otros.

En particular para la realización de los problemas de este trabajo fueron considerados los siguientes aspectos:

1. El diseño de los problemas propuestos se basó en situaciones cotidianas reales o semejantes a ellas. Se procuró que su temática fuera de interés de los estudiantes para motivarlos en la solución de los mismos y para examinar de manera profunda los conceptos y objetivos por aprender.

2. En la solución de estos problemas, los alumnos tendrán que tomar decisiones, sugerir hipótesis o hacer juicios basados en hechos e información lógica y fundamentada. Los estudiantes tendrán que definir qué suposiciones son necesarias y por qué, qué información es relevante y qué pasos o procedimientos son necesarios con el propósito de resolver el problema.
3. La cooperación de todos los integrantes del grupo de trabajo es necesaria para poder abordar el problema de manera eficiente.
4. Las preguntas de inicio deben lograr que todos los alumnos se interesen y participen en la solución de los problemas propuestos. Los problemas están planteados de tal manera, que al solucionarlos implique la investigación, la discusión y el análisis. Posteriormente será necesaria la aplicación de la herramienta del Cálculo tanto en su forma Diferencial como Integral. Para ello se tendrá que plantear un modelo matemático.

El con el fin de darle orden y sistematizar las actividades a desarrollar en cada uno de los problemas de esta Tesis, se propuso la siguiente secuencia de actividades:

Escenario: Se plantea una situación cotidiana que requiere ser analizada y resuelta. Se describe el contexto en donde se presenta el problema, se describen las posibles condiciones iniciales.

¿Qué se quiere hacer?: Se identifica plenamente lo que se quiere resolver.

Pregunta de estudio: Se identifica el problema a resolver y se emite en forma de pregunta.

Lo que se debe saber: En este apartado se plantean las preguntas fundamentales, las temáticas que hay alrededor de lo que se quiere resolver y que probablemente los alumnos desconozcan o conozcan parcialmente pero es necesarias profundizarlas o tenerlas presentes para poder comprender en la totalidad el problema. Para ello los alumnos deberán investigar, discutir para orientarse y poder plantearse y perfilarse a dar respuesta a la pregunta de estudio.

Algo de información: El profesor proporciona información básica y elemental de tal forma, que ayude a los estudiantes a orientarse y evitar que se desvíen hacia caminos no convenientes para la solución del problema por resolver. Esta información será dada en el salón de clases.

Respuesta a la pregunta de estudio: En este apartado se solicita a los estudiantes que respondan a las preguntas de investigación apoyados en su experiencia

¿Qué y cómo se hace? Por medio de las respuestas a las interrogantes planteadas y generadoras de la contextualización del problema, se propondrá una ecuación matemática tal que para resolverla sea necesario aplicar los conocimientos propios del Cálculo en sus formas Diferencial e Integral.

¿Qué resultado se obtuvo? Una vez que se tiene una respuesta a la pregunta de estudio, el siguiente paso es verificar si cumple con las condiciones del problema analizado, esto sirve para estimar la efectividad del modelo propuesto; se hace además un contraste entre la respuesta esperada y la obtenida, para verificar si se cumplió lo esperado.

Algo para reflexionar: Los problemas planteados no sólo tienen como fin emplear técnicas matemáticas o resolver problemas, las temáticas están relacionadas con otras disciplinas. Resolver este tipo de ejercicios brinda información significativa a los estudiantes.

4.2. Implementación de la estrategia

Esta estrategia didáctica fue diseñada para ser implementada bajo las siguientes características:

Institución: Colegio de Ciencias y Humanidades. Plantel Sur

Semestre: Sexto

Grupos: 648 y 665 **Número de alumnos:** 28 en el grupo 648 y 35 en el grupo 665 ambos del semestre 2010-2

Asignatura: Cálculo Diferencial e Integral II

Objetivo de aprendizaje de la asignatura: Estudiar herramientas del Cálculo Diferencial e Integral para resolver situaciones en donde sea necesaria su aplicación.

Tema: Modelos y predicciones

Objetivo de aprendizaje del tema: Obtener modelos matemáticos, empleando para ello derivadas e integrales, que puedan resolver diversos problemas tomados de situaciones reales.

Número de sesiones: 6

Actividades de enseñanza: Tanto las actividades de enseñanza como de aprendizaje se pueden consultar en las secuencias didácticas ubicadas en el anexo 4

Actividades de aprendizaje: Tanto las actividades de enseñanza como de aprendizaje se pueden consultar en las secuencias didácticas ubicadas en el anexo 4

Material didáctico: Para estas actividades se desarrolló material didáctico el cual puede consultarse en esta Tesis entre las páginas 58 a la 92.

Estrategia de evaluación: En esta actividad se llevaron a cabo evaluaciones de tipo Diagnóstica y Formativa, las cuales se detallarán en el capítulo 5.

CAPÍTULO 5

EVALUACIÓN DE LA APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA DIDÁCTICO PEDAGÓGICA

En este capítulo se presentan las evaluaciones realizadas a los alumnos en la aplicación de las secuencias didácticas llevadas a cabo, también se presentan algunas posibles acciones que puedan ayudar para futuras aplicaciones de estas actividades.

5.1 Evaluación diagnóstica

Ésta evaluación, se llevó a cabo, en la primera sesión, antes de comenzar con la secuencia didáctica, mediante la aplicación de un cuestionario, cuyo contenido se localiza en el anexo 2, los resultados se muestran en las tablas 4, 5, 6 y 7 y sus representaciones en las gráficas 3, 4, 5 y 6 respectivamente.

Respuesta	Alumnos	Porcentaje
Para resolver problemas de matemáticas	34	63
Para resolver muchos problemas de diferentes áreas	12	22
No tiene claro su uso	8	15
Total	54	100

Tabla 4. Contiene los resultados relacionados con la pregunta ¿Para qué sirve el Cálculo Diferencial e Integral?. Los 54 alumnos considerados en esta tabla corresponden a la totalidad de alumnos de los grupos 648 y 665

Gráfica 3. Representación gráfica de los porcentajes mencionados en la tabla 6.

De acuerdo con la gráfica 3, podemos observar que más de la mitad de los alumnos diagnosticados consideran que el Cálculo les sirve para resolver problemas solo de índole matemático, el 22% piensa que el Cálculo lo pueden utilizar para resolver problemas en diferentes áreas y el 15% no tienen idea clara de en qué se puede usar.

Respuesta	Alumnos	Porcentaje
Para seguir estudiando o cree que lo va a ocupar en la licenciatura	21	39
El Cálculo está en todas las áreas y por eso es importante saber ocuparlo	24	44
Es bueno saber de todas las matemáticas	6	11
No lo tiene claro o no lo sabe	3	6
Total	54	100

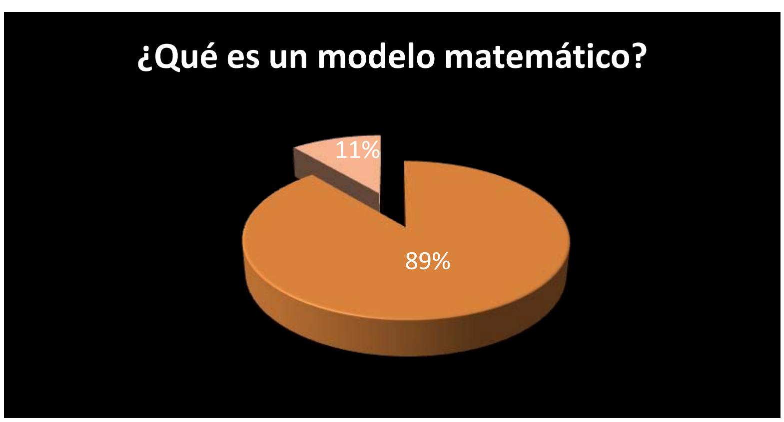
Tabla 5. Contiene los resultados relacionados con la pregunta ¿Por qué crees que es importante estudiar Cálculo Diferencial e Integral?

Gráfica 4. Representación gráfica de los porcentajes mencionados en la tabla 5.

El 44% de los alumnos piensa que el Cálculo puede emplearse en muchas partes, de allí la importancia de saberlo. Alrededor del 40%, piensa que el Cálculo lo seguirán usando en sus estudios superiores, por lo cual están interesados en aprenderlo.

Respuesta	Alumnos	Porcentaje
Es una especie de ecuación o función matemática	48	89
No saben, no tienen una idea clara	6	11
Total	54	100

Tabla 6. Contiene los resultados relacionados con la pregunta ¿Qué es un modelo matemático?

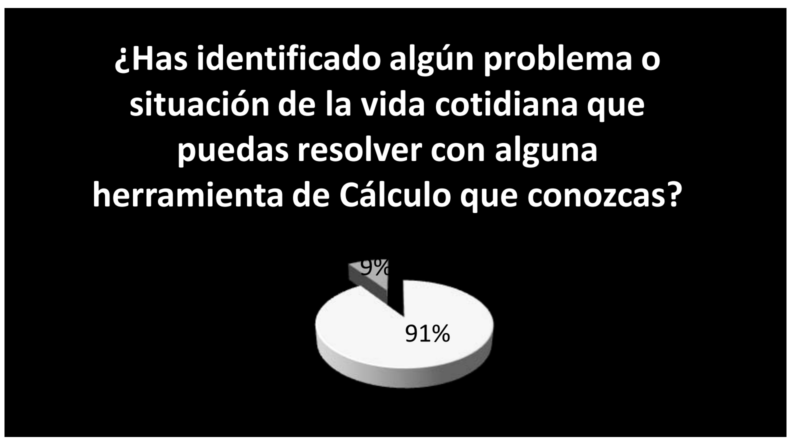


Gráfica 5. Representación gráfica de los porcentajes mencionados en la tabla 6.

El 89% de los cuestionados indican que tienen una idea de qué es modelo matemático aunque resalta que no tienen claro si un modelo matemático es una ecuación o una función matemática. El 11% no tiene claro que es un modelo.

Respuesta	Alumnos	Porcentaje
Creen que si pueden resolver un problema de su vida cotidiana o entorno pero no sabrían como plantearlo	49	91
No han identificado ninguno	5	9
Total	54	100

Tabla 7. Contiene los resultados relacionados con la pregunta ¿Has identificado algún problema o situación de la vida cotidiana que puedas resolver con alguna herramienta de Cálculo que conozcas?



Gráfica 6. Representación gráfica de los porcentajes mencionados en la tabla 7.

De acuerdo con los resultados, se puede observar que los alumnos identifican situaciones de su entorno que podrían resolver aplicando alguna de las herramientas que conocen del Cálculo, sin embargo también argumentan que no tienen claro cómo lo podrían plantear. Por lo regular a los alumnos, al plantearles problemas en clase, se le proporcionan los datos a emplear por lo que no están acostumbrados a recabar su propia información para plantear un problema.

5.2 Evaluación Formativa

Para cada uno de los ejercicios llevados a cabo, en la secuencia didáctica aplicada en esta tesis, se aplicaron las listas de cotejo, ubicadas en las Tablas 10 y 11. Estas listas servirán para llevar a cabo un registro del desempeño de los alumnos.

Preguntas por resolver	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
¿Se entendió el problema por resolver?							
¿Se planteó una ecuación diferencial?							
¿Determinaron correctamente los datos del problema?							
¿La ecuación diferencial planteada fue correcta?							
¿Las condiciones iniciales empleadas fueron las adecuadas?							
¿Resolvieron correctamente la ecuación planteada?							
¿El resultado satisface las condiciones del problema?							

Tabla 8. Tabla utilizada para llevar a cabo una lista de cotejo para apoyar la observación del trabajo de los alumnos. E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7 representan los equipos desde el 1 hasta el 7 en cada salón. En el grupo 648 los equipos estaban conformados por 4 alumnos y de 5 alumnos en cada equipo en el grupo 665. En las tablas se indicará mediante una ✓ si el equipo logró lo cuestionado en la pregunta, en caso contrario se usará el símbolo X.

Trabajo en equipo	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
¿Hubo buena comunicación en el equipo?							
¿La participación de cada individuo del equipo fue buena?							
¿Los resultados obtenidos fueron los correctos?							
¿Las ideas individuales fueron respetadas?							
¿La exposición de los resultados fue clara y convincente?							
¿La coordinación del equipo al momento de la exposición fue la adecuada?							
En caso de no haber llegado al modelo indicado, ¿Se explicó de manera correcta el por qué?							

Tabla 9. Tabla utilizada para llevar a cabo una lista de cotejo que apoye la observación del trabajo tanto de forma individual como en equipo. En esta tabla evaluará el trabajo de los estudiantes, tanto en equipo como individual.

En las siguientes tablas se describen los resultados obtenidos de acuerdo con lo especificado en las tablas 8 y 9.

Pre 1	¿Entendieron el problema por resolver?
Pre 2	¿Plantearon una ecuación diferencial?
Pre 3	¿Determinan correctamente los datos del problema?
Pre 4	¿La ecuación diferencial planteada es correcta?
Pre 5	¿Las condiciones iniciales empleadas fueron las adecuadas?
Pre 6	¿Resolvieron correctamente la ecuación planteada?
Pre 7	¿El resultado satisface las condiciones del problema?

P1	¿A qué hora murió?
P2	El problema del consumo de alcohol
P3	El problema de las dietas
P4	El ayate de Juan Diego
P5	El salto desde la estratósfera
P6	La población de México

Tabla 10. Descripción de las abreviaciones. En la columna de la izquierda de la primera tabla, las abreviaciones corresponden a cada una de las 7 preguntas, al lado derecho está la pregunta completa. En la segunda tabla en la columna izquierda P1, P2, P3, P4, P5 y P6 son cada uno de los 6 problemas llevados a cabo.

	Equipo 1						Equipo 2						Equipo 3						Equipo 4					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Pre1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre3	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre4	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	X	✓
Pre5	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	X	✓
Pre6	X	✓	X	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	X	✓
Pre7	X	✓	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	X	✓

	Equipo 5						Equipo 6						Equipo 7					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Pre1	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	X	X	✓	X
Pre2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre3	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓
Pre4	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓
Pre5	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓
Pre6	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓
Pre7	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓

Tabla 11. Evaluación del grupo 648

	Equipo 1						Equipo 2						Equipo 3						Equipo 4					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Pre1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre3	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre4	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre5	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre7	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

	Equipo 5						Equipo 6						Equipo 7					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Pre1	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre5	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X
Pre6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre7	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X

Tabla 12. Evaluación del grupo 665

De acuerdo con las tablas 11 y 12 anteriores podemos observar que:

- Con respecto al grupo 648, la mayoría de los equipos, salvo el equipo 7, pudieron contestar correctamente la pregunta 1 referente a la comprensión del problema por resolver. Con respecto al grupo 665, casi todos los equipos entendieron el problema excepto el equipo 5, que en 2 problemas tuvieron dificultad y el equipo 6 en el problema 1.
- Todos los equipos de ambos grupos, pudieron plantear una ecuación diferencial (pregunta 2) para poder responder a las preguntas solicitadas.
- Los integrantes de los equipos 3 y 4, del grupo 648, interpretaron correctamente todos los datos proporcionados en cada ejercicio (pregunta 3), los equipos restantes tuvieron dificultadas cada uno de ellos en 2 problemas diferentes. Para el grupo 665, solamente los equipos 1 y 2 tuvieron dificultades, ambos en un problema únicamente.
- De acuerdo con la información de la tabla, en el grupo 648, podemos observar que a la mayoría de los equipos les costó trabajo plantear la ecuación diferencial solicitada (pregunta 4), de manera correcta, solo los integrantes del equipo 3 si lo hicieron correctamente en todos los problemas. Con respecto al grupo 665 en

dicha pregunta, observamos que solo los equipos 1 y 2, no plantearon la ecuación solicitada, el resto de equipos no tuvo problemas.

- La lista de cotejo notifica, todos los equipos del grupo 648, que no plantearon correctamente la ecuación diferencial solicitada, también tuvieron dificultades con el empleo de las condiciones iniciales de los ejercicios (pregunta 5), con respecto al grupo 665 podemos notar que el equipo 6 tuvo en general serias dificultades para emplear las condiciones solicitadas, el resto de los equipos, que no planteó la ecuación correcta, también tuvo dificultades con las condiciones iniciales.
- En lo referente a la pregunta 6, en el grupo 648, notamos que aunque los equipos pudieron plantear correctamente la ecuación diferencial solicitada, no todos pudieron resolverla de manera correcta. En el grupo 665 se observa que solamente el equipo 3, en 2 problemas, no resolvieron correctamente a la ecuación planteada, el resto de los equipos lo hizo bien.
- Todos los equipos del grupo 648, que resolvieron correctamente a la ecuación diferencial planteada, fueron capaces de verificar que su ecuación se ajustaba a las condiciones del problema resuelto, sin embargo, en el grupo 665, aunque algunos equipos si resolvieron correctamente a la ecuación, algunos equipos tuvieron dificultades al momento de verificar si sus resultados se ajustaban con las condiciones iniciales del problema.

En las siguientes tablas 13, 14 y 15, se pueden observar los resultados obtenidos en las evaluaciones del trabajo individual y por equipo.

Pre 1	¿Hubo buena comunicación en el equipo?
Pre 2	¿La participación de cada integrante del equipo fue buena?
Pre 3	¿Las ideas individuales fueron respetadas?
Pre 4	¿La exposición de los resultados fue clara y convincente?
Pre 5	¿La coordinación del equipo al momento de la exposición fue la adecuada?
Pre 6	En caso de no haber llegado al modelo matemático solicitado ¿Se explicaron adecuadamente las causas?

P1	¿A qué hora murió?
P2	El problema del consumo de alcohol
P3	El problema de las dietas
P4	El ayate de Juan Diego
P5	El salto desde la estratósfera
P6	La población de México

na = no aplica

Tabla 13. Descripción de las abreviaciones. La abreviación na equivalente a no aplica se lleva a cabo cuando el equipo de trabajo no fue capaz de obtener el modelo matemático solicitado.

	Equipo 1						Equipo 2						Equipo 3						Equipo 4					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Pre1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre3	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	X	✓
Pre4	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	X	✓
Pre5	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	X	✓
Pre6	na	Na	X	na	na	X	na	X	na	na	X	na	na	na	na	na	X	na	na	X	X	na	X	na

	Equipo 5						Equipo 6						Equipo 7					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Pre1	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	X	X	✓	X
Pre2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre3	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓
Pre4	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓
Pre5	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓
Pre6	na	X	na	na	X	na	na	X	na	na	na	X	na	na	X	X	na	na

Tabla 14. Evaluación Grupo 648

	Equipo 1						Equipo 2						Equipo 3						Equipo 4					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Pre1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Pre3	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓
Pre4	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	✓	✓
Pre5	X	✓	X	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	X	✓	✓	✓
Pre6	✓	Na	✓	na	na	✓	na	X	na	na	X	na	na	X	na	na	X	na	na	X	X	na	na	na

	Equipo 5						Equipo 6						Equipo 7					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Pre1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre3	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre4	✓	X	✓	✓	X	✓	X	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre5	✓	X	✓	✓	X	✓	X	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pre6	na	X	na	na	X	na	✓	✓	na	na	na	na	na	na	na	na	na	na

Tabla 15. Evaluación Grupo 665

De acuerdo con las tablas 14 y 15 podemos observar lo siguiente:

- Todos los integrantes de los equipos, de ambos grupos, mostraron buena comunicación entre ellos, con excepción del equipo 6 en el problema 1 del grupo 665.
- La participación individual (pregunta 2) en todos los equipos de ambos grupos fue buena.
- Las ideas individuales (pregunta 3) fueron muy importantes, pero en la mayoría de los equipos estas ideas no fueron respetadas por el resto de los integrantes. En el grupo 648, los equipos 1, 2, 5, 6 y 7 mostraron esa dificultad en 2 problemas, el equipo 4 en 3 problemas. En el equipo 3 fueron respetaron todas las ideas. Para el

grupo 665, los equipos 1, 2, 4 y 6 tuvieron dificultades en un problema, el equipo 5 en 2 problemas y los equipos 3 y 7 no tuvieron dificultades.

- Con respecto a la pregunta 4, referente a la claridad en la exposición, en el grupo 648 sólo el equipo 3 realizó todas sus exposiciones de forma clara, todos los demás equipos tuvieron dificultades en 2 de sus exposiciones, el equipo 4 en tres de ellas. Para el grupo 665, sólo el equipo 7 realizó todas sus exposiciones de forma clara, los equipos 1, 2, 4, 5 y 6 tuvieron dificultad en 2 problemas; el equipo 3 solamente en una exposición.
- Con respecto a la coordinación entre los equipos, es de destacar que en la mayoría de ellas la preparación entre los participantes fue muy buena, lo que se observa es que cuando los resultados obtenidos no fueron los esperados, las exposiciones y su coordinación entre sus integrantes no fue lo esperado.
- Solamente los equipos 1 y 6 del grupo 665 aunque no llegaron al modelo matemático solicitado, fueron capaces de explicar las causas del porque no llegaron al resultado esperado.

5.3 Recomendaciones, sugerencias y análisis de la aplicación de la secuencia didáctica

Los resultados encontrados son los siguientes:

De acuerdo con las experiencias obtenidas de la aplicación en la secuencia didáctica aplicada, se mencionan las observaciones referentes a las problemáticas encontradas:

1. Los estudiantes no están familiarizados con los temas a trabajar, así como de terminología empleada tales como: razón de cambio, ecuación diferencial, condiciones iniciales, etc., que aunque se explicaron en clase, resultaron ser de difícil comprensión.
2. Los problemas de manipulación algebraica son muy significativos.
3. Los alumnos presentan bajo dominio de conocimientos matemáticos previos, tales como: función exponencial (correspondiente a la cuarta unidad de la asignatura Matemáticas IV), variación proporcional (correspondiente a la primera unidad de la

asignatura Matemáticas I), entre otros.

4. La modelación mediante ecuaciones diferenciales requiere de un proceso de abstracción considerable, por lo cual a los estudiantes les costó mucho trabajo la asimilación.
5. El ausentismo estuvo presente. Los alumnos que participaron en esta aplicación, tuvieron un promedio de asistencia de alrededor del 60%.

Es posible que las problemáticas mencionadas puedan mejorarse si se llevan a cabo actividades como las siguientes:

- ❖ Llevar a cabo repasos de temas, que los estudiantes deben de saber pero que en la práctica no lo saben, haciendo énfasis en la parte que nos interesa que tengan presente.
- ❖ Aunque los términos no les sean familiares hay que trabajar con ellos de manera constante y no solamente emplearlos en dicha unidad temática, ya que estos son de gran utilidad en el lenguaje, principalmente el de las ciencias (desafortunadamente hay mucha desconexión entre términos que pudieran emplearse en otras ramas como la física o la química y que en la práctica no son así).

Por otro lado, también se pueden mencionar resultados positivos, entre los cuales se encuentran las temáticas de los problemas, los cuales les parecieron interesantes. Esta afirmación está apoyada con los comentarios, que los estudiantes hicieron[8]:

- *"En primer modelo que realizamos en clase me pareció muy interesante ya que no había reflexionado sobre las aplicaciones de las matemáticas en un caso zoobiológico, y admito que estas clases me han ayudado en resolver muchas cosas externas…"*

[8] Las opiniones completas pueden consultarse en la dirección http://matemticasaventuradelpensamiento.wordpress.com/profesor-miguel/ es importante mencionar que las opiniones fueron modificadas solamente en aquellos casos donde había errores ortográficos pero siempre respetando el sentido de la opinión.

- *“…encontramos un modelo que hacía referencia a los problemas que te puede ocasionar una borrachera, vuelvo a ratificar que las matemáticas debemos, tenemos que darle la importancia que se merece, las clases que he tenido a lo largo de este semestre me ha ayudado a reforzar conocimientos…”*
- *“…las actividades que hemos desarrollado en clase se me hacen muy interesantes y didácticas pues aprender mediante ejemplos que pasan durante nuestra vida cotidiana se me hace una propuesta muy buena de aprender de una manera entretenida.”*
- *“…las actividades, que hemos realizado, se me han hecho muy interesantes ya que son ejemplos de cómo aplicar lo que se va aprendiendo en clase, con esto se lleva más allá el conocimiento no sólo sabes hacerlo sino como aplicarlo como en ejemplos que son muy curiosos como el del aire en los pulmones o la cantidad de alcohol son muy buenos, me costó un poco plantear bien los problemas pero ahí la llevamos.”*
- *“…la clase me parece algo, ¿cómo lo diré?, entretenida desde cierto punto porque cuando acaba de dar la explicación el maestro (nos ponía) manos a la obra a trabajar y eso es padre porque así podemos ejercitar más la mente…”*
- *“…me gusta mucho su clase y me agrada la manera en cómo te enseña los temas en que se tiene que enfocar. Y más por los ejercicios que pone para que nos quede claro el tema que estemos tratando.*
- *“continuando con los ejercicios, realizamos 2 problemas de aplicación. El primero buscaba saber cuánta nicotina tiene una persona fumadora a lo largo del día. El segundo más complejo…trataba de saber la edad del sudario de Turín a través de pruebas de carbono 14. la verdad el segundo no lo resolvimos mi compañera ni yo.”*
- *“…me parece que la dinámica que está usando es muy buena; ya que nos ha llevado a reflexionar sobre la importancia de las matemáticas, en todas las ramas del saber, así como poder predecir y saber porque ocurren diferentes fenómenos en la naturaleza… se me hace algo muy interesante.”*

- *“El primer modelo que vimos fue el que representaba la velocidad de las muertes de las aves con respecto al tiempo, algo muy interesante. El segundo modelo: fue aplicado a las borracheras, trataba de explicar el tiempo en el cual se desechaba de la sangre en alcohol etílico consumido y sobre toda la velocidad de desecho, en donde intervenían varios factores.”*

CONCLUSIONES

A modo de conclusión, y de acuerdo con lo expuesto en los capítulos anteriores, es posible comentar que enseñar y aprender matemáticas, por medio de la resolución de problemas proporciona habilidades y destrezas en los alumnos así como dificultades en la aplicación, en este apartado analizaremos cuales son algunas de ellas.

Entre las habilidades y destrezas observadas en los alumnos, se encuentran las siguientes:

- Capacidad de identificar las variables y constantes, así como capacidad para resolver problemas.
- Desarrollo de la capacidad de aprender por cuenta propia.
- Aprender a tomar decisiones de manera científica.
- Habilidades del pensamiento crítico.
- Educación que puede servir a lo largo de la vida.
- Habilidad para escuchar, analizar y participar en discusiones y en general para trabajar en equipo.
- Motivación y afectividad en el aprendizaje.
- Búsqueda de información que le sea útil para resolver problemas.

Con respecto a las dificultades identificadas, menciono las siguientes:

- Muchos docentes no cuentan con suficiente habilidad para desempeñarse como guía para que los estudiantes resuelvan los problemas planteados. Además, los docentes debe contar con los conocimientos necesarios para orientar y guiar a los alumnos en este proceso y desafortunadamente no siempre es así.
- Algunos alumnos presentan dificultad en entender la estrategia a emplear, debido a la falta de experiencia educativa en esa forma de trabajo, por lo que le puede ocasionar confusión.
- Resolver un problema requiere de un considerable tiempo, desde la investigación, discusión del equipo, toma de decisiones etc.

Desafortunadamente los tiempos en los cursos están limitados por lo que complica su aplicación y hay que contemplar modificar las planeaciones.

- Plantear problemas puede resultar una tarea no muy sencilla. Los problemas deben ser de tal forma que haga que los alumnos se involucren en la resolución.
- Los problemas deben ser retadores e interesantes para que los alumnos tengan motivación. De hecho, este punto es muy importante pues lo que para un adulto (como el profesor) puede resultar atractivo e interesante, para los jóvenes (los alumnos) puede no serlo, de allí la dificultad.
- Dificultad para poder identificar nuevos problemas.

Precisamente hablando de la participación del profesor, y apelando a la experiencia obtenida durante la aplicación de los problemas en la práctica docente, enuncio algunas de las dificultades en las que me enfrenté:

- El nivel de los productos a obtener, en los problemas planteados, no correspondía con el nivel planteado en los objetivos establecidos en las planificaciones. Para mejorar se requiere entablar conexiones entre lo solicitado en los objetivos y los productos a evaluar, revisar previamente que los niveles entre objetivos y productos sean compatibles.
- Los criterios que se seguirán para valorar los conocimientos y habilidades de los estudiantes. El problema radica en la planeación por lo que hay que hacer ajustes. Para mejorar, hay que revisar la planeación de los tiempos propuestos, así como los objetivos generales, los objetivos específicos y los objetivos por sesión lo cual ayudará a que los objetivos sean llevados a cabo tal y como fueron planeados y con ello no hacer modificaciones.
- Verificar previamente el nivel de exigencia de los alumnos al solicitarles tareas o en la aplicación de exámenes, pues en ocasiones se cometió el error de solicitar actividades consideradas como adecuadas, pero al analizar los resultados se observa que no fueron los esperados. Para tratar de obtener mejores resultados es conveniente que el docente resuelva, previamente, los ejercicios solicitados y valore el tiempo a emplear para su resolución lo cual ayudará a tomar mejores

decisiones en cuanto a la aplicación o no de estas actividades.

A modo de propuesta, y con apoyo de Castillo y Cabrerizo (2006), para resolver algunos de los problemas mencionados anteriormente se propone lo siguiente:

- Llevar a cabo repasos de los conocimientos previos, no es conveniente dar por sentado que los alumnos ya lo saben, hay que hacer énfasis e invertir un tiempo si es necesario en los temas que nos interesan que los alumnos tengan presente.
- Aunque la terminología de los ejercicios no sean familiares a los chicos, hay que trabajar con ellos de manera constante y seguirlos empleando en otras actividades, no solamente emplearlos en ésta unidad temática, ya que estos representan una gran utilidad en el lenguaje principalmente el de las ciencias (desafortunadamente hay mucha desconexión entre términos que pudieran emplearse en otras ramas como la física o la química).

Finalmente, realizar estas actividades (elaboración y ejecución de estrategias de secuencias didácticas, así como, su análisis y reflexión del planteamiento y los resultados obtenidos), no solamente ayuda en la elaboración de trabajos como lo es esta Tesis, si no que el uso constante de ellos ayudan de manera muy significativa, en nuestra formación como docentes, por lo que resulta muy importante seguir con este tipo de prácticas de manera constante, ya que ello ayudará a tener una mejor actuación en el aula y con ello ser cada día mejores MAESTROS.

MATERIAL DIDÁCTICO

Problema 1

¿A qué hora murió?

Escenario: La nota periodística de la imagen 3 publica que una persona es encontrada sin vida en vía pública, presuntamente asesinada. La actividad consiste en determinar la posible hora en que la persona de la nota, fue aparentemente asesinada.

¿Qué se quiere hacer?: De acuerdo con los datos publicados en la noticia, los alumnos tendrán que plantear un modelo matemático para determinar la hora en la que esta persona murió. El modelo deberá estar relacionado con la ley de enfriamiento de Newton la cual determina la forma en la que se pierde calor.

Pregunta de estudio: ¿A qué hora ocurrió el presunto asesinato?

Para resolver la pregunta se debe investigar:

A. Los alumnos tienen que consultar la información que aparece en la nota periodística de la figura 3.

B. Será necesario que realice una investigación extra basada en las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los primeros cambios que el cuerpo está sufriendo?
2. ¿Por qué los cuerpos de las personas que recién mueren se enfrían?
3. ¿Por qué los objetos “calientes” se “enfrían”?
4. ¿De qué depende este enfriamiento?
5. ¿Cuál es la temperatura de una persona viva y sana?
6. Si denotamos por $T(t)$ a la temperatura del cadáver al tiempo t, ¿Cuál es la temperatura inicial $T(0)$ del cadáver?
7. ¿Cuál es la temperatura $T(3)$ después de 3 horas de tomar la primera medición del cadáver?
8. ¿Cómo podrías modelar matemáticamente la función temperatura $T(t)$?

Algo de información:

De acuerdo con Hewitt (2007) en su libro Física Conceptual, a la Ley de enfriamiento de Newton la describe como: “Un objeto a temperatura diferente de la de sus alrededores terminará alcanzando una temperatura igual a la de sus alrededores. Un objeto relativamente caliente se enfría al calentar a sus alrededores; un objeto frío se calienta cuando enfría a sus alrededores" (p. 316).

La rapidez de pérdida de calor, sea por conducción, convección o radiación, es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y sus alrededores. Esto matemáticamente se expresa así:

$$\text{Rapidez de enfriamiento } = K\Delta T$$

donde K representa la constante de proporcionalidad y su valor depende de la capacidad del objeto para absorber o emitir calor. La ley también es válida para el calentamiento. Si un objeto está más frío que sus alrededores, también su rapidez de calentamiento es proporcional a ΔT. En general, tanto la temperatura inicial como la final, no son valores constantes sino que son funciones que dependen del tiempo. La diferencia de la temperatura es entonces $\Delta T = T(t) - M(t)$.

EL UNIVERSAL

EL GRAN DIARIO DE MÉXICO DOMINGO 2 de septiembre de 2007

eluniversal.com.mx México, DF | 252 páginas

No cesan los asesinatos en El Arenal, ayer otro muerto

Diez grados centígrados marcaba el termómetro a las 7:00 de la mañana del día de ayer cuando los policías Jerónimo Sánchez y Martha Luna a bordo de la patrulla 95846 encontraron el cuerpo sin vida de una persona aparentemente asesinada durante las últimas horas. La colonia el Arenal se ha caracterizado por este tipo de actos de tipo vandálico en estos últimos meses. El oficial, quien tiene ciertos conocimientos de medicina forense, tomó la temperatura que el cuerpo tenía en ese momento siendo ésta de 34 grados; acto seguido, notificó el hallazgo tanto al ministerio público como al servicio medico forense para que recogiera el cuerpo. Después de tres horas por fin llegó el forense y antes de recoger el cuerpo, se le tomó nuevamente la temperatura siendo ésta de 30 grados centígrados.

¿Cómo podrías saber la hora exacta o bien con suficiente aproximación en la que ocurrió el asesinato y ¿Cuál sería ésta?.

Ayer en la mañana, los policías encontraron el cuerpo sin vida de una persona presuntamente asesinada, con ésta ya van 6 en lo que va del mes en la colonia El Arenal.

Figura 3. Nota periodística acerca de un presunto asesinato.

De acuerdo con lo anterior lo podemos expresar el modelo matemático mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dT(t)}{dt} = -K\left[T(t) - M(t)\right] \qquad (1.1)$$

donde $T(t)$ representa la función temperatura del cuerpo del cadáver en función del tiempo, y $\frac{dT(t)}{dt}$ representa la variación que tiene la temperatura con respecto al tiempo. La función $M(t)$ representa la temperatura (final), y que en este caso, influirá el valor de la temperatura ambiente al tiempo t. La diferencia $M(t)-T(t)$ es distinta de cero al menos en lapsos de tiempos cortos. K representa la constante de enfriamiento y su valor dependerá de las propiedades físicas del objeto o la persona que en este caso se enfría.

Respuesta a la pregunta de estudio: En este apartado, se solicita a los alumnos que de acuerdo a su experiencia previa y lo que han investigado emitan una respuesta inicial a la pregunta de estudio.

¿Qué y cómo se hace?: Planteamiento y solución de la ecuación diferencial

Si suponemos que la temperatura ambiental no tuvo cambios significativos entre las 7:00 a.m. y las 10:00 a.m., entonces podemos considerar a la temperatura ambiente como constante, digamos 10ºC, lo cual se puede expresarse como $M(t) = 10^{\circ}C$. Entonces

$$\frac{dT(t)}{dt} = -K\left[T(t) - 10\right] \qquad (1.2)$$

Puesto que $T(t)-10$ es distinto de cero por lo expresado con anterioridad, podemos pasarlo dividiendo quedándonos

$$\frac{dT(t)}{\left[T(t)-10\right]dt} = -K \qquad (1.3)$$

Integrando en ambos lados con respecto al tiempo t

$$\int \frac{dT(t)}{[T(t)-10]dt}\,dt = -\int K dt \qquad (1.4)$$

La integral del lado izquierdo de la igualdad corresponde al logaritmo de la diferencia de las temperaturas más una constante, es decir

$$\int \frac{dT(t)}{T(t)-10} = \ln\left|T(t)-10\right| + C_1 \tag{1.5}$$

El valor absoluto puede quitarse en aquellos casos en los que la temperatura no es menor a los 10º C, y dado que la temperatura ambiental tiende a aumentar conforme avanzan las horas matutinas no será necesario emplear el valor absoluto.

Para la integral del lado derecho de la igualdad en (1.4) es

$$-\int Kdt = -Kt + C_2 \tag{1.6}$$

De (1.5) y (1.6)

$$\ln\left[T(t)-10\right] = -Kt + C_3 \tag{1.7}$$

con $C_3 = C_2 - C_1$

Despejando $T(t)$ de (1.7) se obtiene

$$T(t) = Ce^{-Kt} + 10 \tag{1.8}$$

donde C es una constante con valor $C = e^{C_3}$.

Para obtener los valores de las constantes C y K hay que hacer uso de las condiciones iniciales $T(0) = 34$ y $T(3) = 30$ y sustituirlas en (1.8) quedando finalmente

$$T(t) = 24e^{-0.0607t} + 10 \tag{1.9}$$

La ecuación anterior representa la función que modela la forma en que el cadáver se va enfriamiento de acuerdo con los datos del problema.

Ahora estamos en condiciones de responder a la pregunta de estudio ¿a qué hora ocurrió el asesinato? Llamaremos t_0 al momento del asesinato y suponiendo que la temperatura que poseía la persona era de 37° C, es decir $T(t_0) = 37$.

Si queremos saber cuánto tiempo ha pasado desde que tenía 37° C hasta 34°C

$$T(t_0) = 10 + 24e^{-0.0607t_0} = 37 \quad (1.10)$$

Obteniendo que $t_0 = -1.94 \approx -2$ horas, es decir que, desde que persona fallecida tenía 37°C hasta 34°C han transcurrido, aproximadamente, 2 horas desde el hallazgo.

¿Qué resultados se obtuvieron? Finalmente se puede concluir que, el presunto asesinato se cometió alrededor de las 5:00 a. m.

Consideraciones extras: De acuerdo a los cálculos realizados, se obtiene como respuesta, que pasaron aproximadamente 2 horas a partir del asesinato y la ubicación del cadáver, esto considerando que la temperatura ambiental no cambio en el lapso de 3 horas, pero ¿es esta suposición válida?, tampoco se tomó en cuenta las características de la persona asesinada, es decir no sabemos si estaba sana o enferma, o si estaba vestida o desnuda después del asesinato. Estas condiciones que no fueron consideradas pudieran arrojar un resultado muy diferente al presentado con este modelo matemático.

Además la función que modela el comportamiento del enfriamiento expresada en (1.9) muy probablemente pierda efectividad para periodos de tiempo largos puesto que no podrá considerarse como constante con lo que el modelo tendrá una forma muy distinta.

Algo para reflexionar: Muy probablemente, los especialistas en el área de medicina forense, consideran otros aspectos además de tomar la temperatura de los cadáveres y tal vez, sus técnicas a emplear, no estén basadas en modelos matemáticos, sin embargo resulta muy interesante proponer modelos de comportamientos en ámbitos que aunque no sean familiares a los alumnos pero si les permite observar que se pueden matematizar un sinfín de fenómenos, y que contar con un modelo puede ayudar a comprender su comportamiento.

Problema 2

El problema del consumo de alcohol

Escenario: Un viernes por la tarde un alumno invita a otro diciéndole: “vamos a una fiesta este domingo y nos tomamos unos tragos” a lo que el otro responde: “no puedo ya que el lunes a las 4 de la tarde tengo examen de Cálculo y no quiero llegar ebrio a la clase”.

¿Será posible que el alumno se vaya a la fiesta, beba y para la hora del examen ya no tenga efectos del alcohol consumido? ¿Cuánto tiempo debe pasar, como mínimo, para que los efectos del alcohol ingerido no muestren efectos evidentes?

Figura 4. Es muy común encontrar a jóvenes ingiriendo algún tipo de bebida alcohólica

¿Qué se quiere hacer? Analizar, matemáticamente, cómo se va disminuyendo el concentrado de alcohol en el cuerpo, para ello se requiere construir un modelo matemático.

Pregunta de estudio: ¿Será posible que este alumno se vaya a la fiesta, consuma alcohol y para la hora del examen ya no tenga efectos de ebriedad visibles?

.

Figura 5. Existen una gran variedad de cervezas, vinos y licores en el mercado, cada uno de ellos con diferentes concentrados de alcohol

Para resolver la pregunta deberás investigar:

1. ¿Cuánto es el concentrado de alcohol (etanol) que contienen las botellas de las bebidas más populares que se consumen en las fiestas?
2. ¿Cuánto alcohol en promedio consume una persona en una fiesta?
3. ¿Cuáles son las formas en las que se desecha el alcohol del cuerpo?
4. ¿Cómo se mide el nivel de alcoholemia?
5. ¿Cuánta cantidad de alcohol se requiere para que se manifiesten efectos de embriaguez en las personas?
6. ¿Cuáles son los riesgos que implican el consumo del alcohol entre los adolescentes?

Algo de información: El consumo de alcohol no es solamente un problema de adultos o sólo de hombres, también las mujeres son grandes consumidoras. Una gran cantidad de adolescentes, inclusive menores de edad, estudiantes o no, también lo consumen.

Las bebidas alcohólicas contienen diferentes cantidades de alcohol. La tabla 16 muestra la cantidad de alcohol que contienen algunas bebidas alcohólicas más populares.

Bebida	ml	contenido de etanol en gr.
Cerveza	100	4.4
Jerez	100	17.0
Licores	100	25 / 38
Sidra	100	3.6
Vino	100	9.6
Whisky	100	34
Tequila	100	35/40
Vodka	100	30/50

Tabla 16. Concentrado de alcohol (etanol) en la bebidas alcohólicas.

No existe una dosis estándar de alcohol que pueda ser considerada “normal” para todas las personas dado que la misma cantidad de alcohol las afectará de forma diferente, según sus características personales y según el entorno en donde se consuma. Es decir, debemos de tener en cuenta, entonces, que el alcohol afecta a cada persona de forma diferente dependiendo del peso corporal, del metabolismo, de la tolerancia desarrollada previamente, de la comida que se encuentre en el estómago en ese momento, y de otros factores. Además, el alcohol tiene también diferentes efectos sobre una misma persona de acuerdo al momento y el lugar en que se lo consuma.

Una dosis estándar se define en base a la cantidad de alcohol puro que se consuma. Esto variará de acuerdo al tipo de bebida que se tome. Siempre es recomendable saber el contenido alcohólico de las bebidas que se consumen para entender mejor cuánto consumir sin que haga daño o provoque algunos efectos.

Una vez consumido el alcohol, ingresa al torrente sanguíneo rápidamente y allí permanece hasta que el hígado lo descompone. La cantidad de alcohol en la sangre se denomina "nivel de alcoholemia", el cual se calcula:

$$Nivel\ de\ alcoholemia = \frac{Cantidad\ de\ alcohol\ en\ la\ sangre}{Cantidad\ de\ sangre\ en\ el\ individuo}$$

Conocer el nivel de alcoholemia es muy importante porque es el índice que utilizan las autoridades o los servicios de salud para determinar el nivel de embriaguez de las personas. El nivel de alcohol en la sangre se utiliza para definir legalmente si se está o no "embriagado". En la tabla 17 aparecen los niveles de alcohol en la sangre, los probables síntomas y el riesgo que conlleva.

Se puede tener síntomas de "estar ebrio" en niveles de alcoholemia por debajo de la definición legal para el hecho de estar embriagado o borracho. Igualmente, las personas que frecuentemente beben alcohol pueden no tener síntomas hasta que alcancen niveles de alcoholemia más altos.

Alcoholemia $(\frac{gr}{Lt})$	Efectos en la persona	Riesgo
0.0	Dominio pleno de facultades	Nulo
0.3	Disminuye la capacidad de atender a situaciones de peligro. La respuesta a las mismas se comienza a enaltecer y se hace más confusa	Bajo
0.5	Se reduce la visión con dificultades de enfoque y esto ocasiona pequeños accidentes como tropezones o caminar con dificultad.	Alto
0.8	La motricidad se ve afectada, se retardan los movimientos. Aparece una sensación de euforia y confianza. Algunas personas se vuelven agresivas y temerarias, sin razonar.	Alto
1.5	Estado de embriaguez importante. Reflejos alterados y reacción lenta e imprecisa. La contracción visual se deteriora y cuesta trabajo mantener la atención, se dificulta en extremo	Muy alto
2.5	Ebriedad completa. La persona aparece como "narcotizado" y confuso. Su conducta es imprevisible y le es imposible tomar decisiones con certeza.	Severo
3.0	Ebriedad profunda. Se pierde paulatinamente la conciencia como antesala al coma y principio de riesgo de muerte.	Extremo

Tabla 17. Tabla en la que se muestra el nivel de alcoholemia en la sangre, sus características en las personas que lo consumen así como el nivel de riesgo.

Respuesta a la pregunta de estudio: En este apartado, se solicita a los alumnos que de acuerdo a su experiencia previa y lo que han investigado emitan una respuesta inicial a la pregunta de estudio.

¿Qué y cómo se hace?: Planteamiento y solución de la ecuación diferencial

Suponiendo, que el consumo de la persona de éste problema en la fiesta es de $250\ ml$ de una botella de tequila que tiene un concentrado de $35\ ml$ de alcohol por cada $100\ ml$.

Para obtener el concentrado en gramos utilizamos la siguiente conversión, además de la tabla 16:

$$gr\ de\ alcohol = Cantidad\ consumida\ (ml) \times graduación\ alcohólica \times 0.8\frac{gr}{ml}$$

Lo que implica que $250\ ml$ corresponde a $70\ gr$.

Partiendo, en que la hora que dejó de consumir bebida fue a las 12:00 p.m. Esto implica que $t = 0$ será a las 12 horas p.m.

Sea $A(t)$ la función que representa la cantidad de alcohol que va permaneciendo en el cuerpo al tiempo t ; $\frac{dA(t)}{dt}$ representará las variaciones de la cantidad de alcohol que va quedando en el cuerpo a un tiempo t dado.

Considerando que el desecho o pérdida de alcohol es proporcional al concentrado de éste último, esto es matemáticamente

$$\frac{dA}{dt} = -KA \qquad (2.1)$$

donde K es una constante cuyos valores dependerán de cómo desecha el alcohol en cada individuo consumidor.

La ecuación (2.1) se resuelve de manera análoga a (1.2) quedando como resultado

$$A(t) = Ce^{-Kt} \qquad (2.2)$$

Para obtener los valores de las constantes C y K hacemos uso de las condiciones iniciales, esto es, para el tiempo $t = 0$, la cantidad de alcohol en el cuerpo $A(0) = 70\ gr$, lo que implica que $C = 70$

Por otro lado, de acuerdo con la Organización Mundial de la Salud, se tiene que en promedio, en las primera horas de la ingesta de alcohol, se desecha aproximadamente el 8% de lo consumido debido a cuestiones como orina, sudor, aliento, entre otros, entonces, para este caso particular, al cabo de una hora solamente habrá $56\ gr$ en el cuerpo del chico, es decir con $A(1) = 56gr$ lo cual implica que con $K = 0.22314355$, entonces la función que define la cantidad de alcohol en el cuerpo es la siguiente:

$$A(t) = 70e^{-0.22314355t} \tag{2.3}$$

Puesto que, lo que se requiere es saber si al momento de presentar el examen (supuesto a las 16 horas), el alumno aún tendrá efectos debido al alcohol consumido, sustituiremos en la ecuación (2.3) para con $t = 16$ quedando como resultado

$$A(16) = 1.97 \text{ gr} \tag{2.4}$$

Y para calcular el nivel de alcoholemia considerando que el 8% de la masa de una persona es sangre y si suponemos que la masa del chico es de $70\ Kg$ entonces cuanta con 5.6 litros.

Finalmente encontramos que $\frac{1.97\ gr}{5.6\ litros} = 0.35\ \frac{gr}{Lt}$.

¿Qué resultados se obtuvieron?:

De acuerdo con la tabla 17, el tener un nivel de alcoholemia de 0.35 implica que el alumno tendrá efectos de estar mareado pero muy probablemente en condiciones de hacer el examen.

Análisis de resultados:

Es muy probable que en la realidad, el nivel de alcoholemias del chico debe estar por debajo del obtenido con este modelo, las causa son múltiples y éstas no están consideradas en el modelo de allí que se esperen variaciones considerables entre los valores calculados y los reales.

Algo para reflexionar: El alcohol incrementa los riesgos de:

- Alcoholismo o dependencia del alcohol.
- Caídas, ahogamientos y otros accidentes.
- Cánceres de cabeza, cuello, estómago y mamas.

- Accidentes automovilísticos.
- Comportamientos sexuales arriesgados, embarazo no deseado o no planeado e infecciones de transmisión sexual (ITS).
- Suicidio y homicidio.

Además, beber alcohol durante el embarazo puede causarle daño al feto.

Si se bebe alcohol, es mejor hacerlo con moderación, es decir, no intoxicarse o embriagarse y no consumir más de 1 trago al día si es una mujer y no más de 2 si es un hombre.

A continuación se presentan algunas maneras de beber responsablemente, con tal de que no se tenga un problema con la bebida, se cuente con la edad legal para tomar alcohol y que las mujeres no estén embarazadas:

- Nunca beber alcohol y conducir un automóvil.
- Si va a beber, designe a otro conductor, o planear una forma alternativa de llegar a casa, como un taxi o autobús.
- No beba con el estómago vacío. Tome refrigerios antes y mientras se ingiera alcohol.

No tomar licor en lo absoluto si se cuenta con antecedentes de abuso del alcohol o de alcoholismo.

Si el alcoholismo se ha dado en la familia, puede estar en mayor riesgo de desarrollar este problema y tal vez se requiera abstenerse de beber alcohol del todo.

Problema 3

El problema de las dietas

Escenario: En la actualidad existe un gran interés por las dietas y la pérdida de peso. Algunas personas quieren perder peso para verse bien, otras por razones de salud. Muchas veces el verse delgado es una presión social, pues en las revistas, televisión, cine y cuanto medio masivo de información existe, toma como estereotipo de belleza a las personas delgadas.

Resulta interesante preguntarse si se podrá desarrollar un modelo matemático que describa la pérdida (o ganancia) de peso considerando solamente como condición la ingesta de una dieta basada en bajo contenido calórico (pudiera ser de alto contenido calórico).

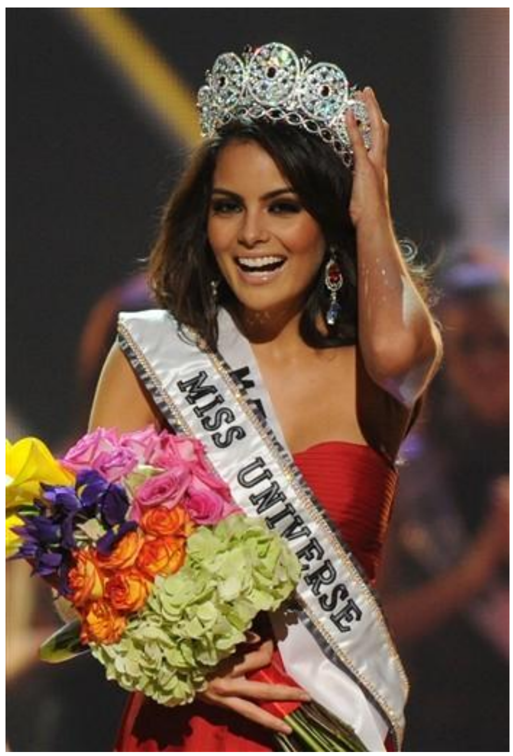


Figura 6. Ximena Navarrete es una joven mexicana que en 2010 ganó el concurso de belleza “Miss Universo”. Ella es un prototipo de la belleza mundial.

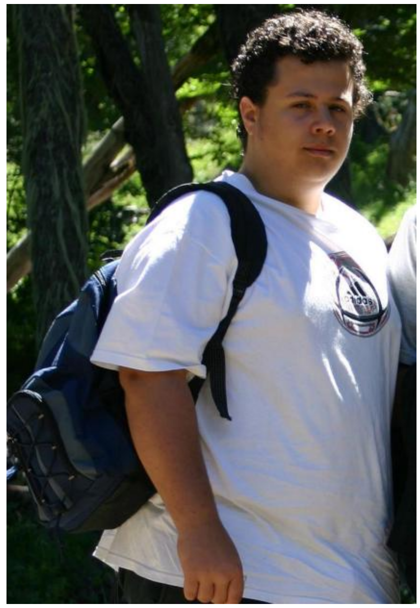


Figura 7. La población mexicana ocupa los primeros lugares a nivel mundial en obesidad.

¿Qué se quiere hacer? Obtener un modelo matemático que describa la pérdida de peso basado en un consumo alimenticio de bajo contenido calórico.

Pregunta de estudio: Si una persona con un peso de 85 Kg quiere llegar a un peso de 75 Kg empleando para ello una dieta baja en calorías, ¿cuánto tiempo le llevará en llegar al peso deseado?

Para resolver la pregunta deberás investigar:

1) ¿Qué son las calorías?
2) ¿Cuántas calorías en promedio se requieren para que una persona lleve a cabo sus actividades rutinarias?
3) ¿Cómo podemos saber cuál es el peso ideal de una persona de acuerdo a su talla y edad?
4) ¿Qué es una dieta?
5) ¿En qué consiste una dieta baja en contenido calórico?

Algo de información: La población mexicana cuenta con los porcentajes más altos, en cuestiones de obesidad, en el mundo, de hecho es el país con mayor obesidad infantil y juvenil. La obesidad causa diversas enfermedades como diabetes, hipertensión, problemas cardiovasculares, entre otros. Por otro lado, los medios masivos de comunicación muestran, como prototipo de belleza y salud, a mujeres y hombres de complexión delgada, causando esto, principalmente entre la población joven, la búsqueda de diferentes métodos para poder bajar de peso, siendo uno de ellos el sometimiento a una dieta.

La gente se pone a dieta por muchos motivos diferentes. Algunas personas tienes sobrepeso y necesitan cuidar más sus hábitos alimentarios y de ejercicio. Otras hacen deporte y desean estar en condiciones físicas óptimas. Otras creen que se sentirán mejor anímicamente y tendrán mejor aspecto si pierden unos kilos.

Algunas personas hacen dieta porque creen que deberían tener determinado aspecto. Los actores y actrices suelen estar delgados, y la mayoría de modelos de moda son delgadísimas. Pero ese aspecto no es realista para la mayoría de personas.

Cuando se somete a una dieta baja en contenido calórico, lo que se busca es que el cuerpo queme la grasa almacenada. Desafortunadamente, en la realidad, a mucha gente, este tipo de dietas, acaba con ellos antes de que se haya eliminado la grasa excedida. Sucede porque los fundamentos de esta dieta, en esencia, son equivocados. Cuando comemos menos de lo que necesitamos, nuestro cuerpo lo percibe como señal de inanición (estado de extrema debilidad y desnutrición por falta de alimento). Es una simple respuesta biológica.

Hay muchos factores que pueden influenciar el número de calorías que necesitamos, como la genética, el estilo de vida, nuestros hábitos de ejercicio, etc. Conviene observar que según la Organización Mundial de la Salud, la inanición se empieza a producir por debajo de 2,100 calorías al día.

Respuesta a la pregunta de estudio: En este apartado, se solicita a los alumnos que de acuerdo a su experiencia previa y lo que han investigado emitan una respuesta inicial a la pregunta de estudio.

¿Qué y cómo se hace? Planteamiento y solución de la ecuación diferencial

El peso de una persona depende tanto de la tasa diaria de energía ingerida, digamos calorías, como de la tasa diaria de energía consumida y tiene valores de entre 30 y 40 calorías por día por cada Kg de peso del cuerpo. Esto desde luego depende de la actividad del individuo, su sexo, masa y otros factores que intervienen.

Para un valor promedio de 35 calorías x Kg de la persona x día, una persona que pese W Kg requiere de $N = 35W$ calorías por día y si esto es lo que consume entonces su peso permanecerá constante, de otra manera habrá ganancias o pérdidas de peso según si N es mayor o menor que $35W$.

Llamaremos $W(t)$ a la función relacionada con el peso al tiempo t, de una persona que consume N calorías. Entonces, las variaciones del peso al tiempo t estarán dadas por $\frac{dW(t)}{dt}$.

¿Qué tan rápido ocurrirá la ganancia o pérdida de peso? La hipótesis fisiológica más aceptada es que sea proporcional a la diferencia entre las calorías consumidas y las necesarias, es decir

$$\frac{dW(t)}{dt} = K\left[N - 35W(t)\right] \qquad (3.1)$$

donde K es una constante con unidades $\frac{Kg}{calorías}$. Esta constante está relacionada con el factor dietético que indica que alrededor de 7 000 calorías equivalen a 1 Kg, por lo que

$$K = \frac{1}{7000}\frac{Kg}{cal}$$

entonces la ecuación (3.1) se expresa como

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{1}{7000}\left[N - 35W(t)\right] \qquad (3.2)$$

La ecuación (3.2) se resuelve de manera análoga a (1.2) y considerando que $W(0) = W_0$ con W_0 como el peso inicial. La solución final de la ecuación (3.2) es

$$W(t) = \frac{N}{35} + \left(W_0 - \frac{N}{35}\right)e^{-0.005t} \qquad (3.3)$$

Para resolver el caso particular propuesto de la pregunta de estudio, es decir determinar el tiempo en que tardará una persona de 85 Kg, que se somete a una dieta basa en 2300 calorías, para llegar a un peso de 75 Kg.

Entonces $N = 2300$ y $W_0 = 85$ por lo que la ecuación (3.3) queda en la forma

$$W(t) = \frac{2300}{35} + \left(85 - \frac{2300}{35}\right)e^{-0.005t} \tag{3.4}$$

Lo que se quiere es determinar el valor de t para cuando $W(t) = 75$ que resulta tener un valor de $t = 146.18$

¿Qué resultados se obtuvieron?: Se requieren aproximadamente 146 días para que una persona de 85 kilogramos pueda llegar a una masa de 75 kilogramos si tiene una dieta basada en 2300 calorías

Consideraciones extras: Es necesario tomar en cuenta, que suponer que solamente se baja el peso por déficit de calorías no es posible

Algo para reflexionar: 146 días son alrededor de 21 semanas, por lo regular las personas que se someten a este tipo de dietas esperan resultados más rápido motivo por lo cual en muchas ocasiones abandonan la dieta seguida sin obtener resultados significativos.

Cualquier dieta que implique ingerir diariamente una cantidad de calorías inferior a la necesaria, como la propuesta en este ejercicio, puede ser peligrosa.

.Cuando una persona se pone a dieta es posible que empiece a recibir multitud de elogios y cumplidos de sus amigos y familiares en cuanto empiece a perder kilos, lo que le hará sentirse bien. Pero, a la larga, su pérdida de peso se estancará y dejará de perder tanto peso como al principio porque su cuerpo intentará mantenerse en un peso saludable. Las personas que se encuentran en esta situación, acaban dándose cuenta de que, incluso aunque consigan perder peso, nunca acabarán de sentirse satisfechas.

A algunas personas les cuesta mucho controlar lo que comen, de modo que siguen una dieta extrema durante un tiempo y luego se atiborran de comida. Al sentirse culpables por el atracón, vomitan lo que han comido o abusan de los laxantes. Comer demasiado poco (anorexia) o comer sólo para vomitar lo ingerido (bulimia) son dos trastornos de la conducta alimentaria que son nocivos para la salud. Las personas que padecen trastornos de la conducta alimentaria necesitan tratamiento médico, algunas de forma inmediata.

Problema 4

El ayate de Juan Diego

Escenario: Cuenta la leyenda que el 9 de diciembre de 1531 en las cercanías de la Ciudad de México, la Virgen de Guadalupe se le apareció a Juan Diego, y le pide que transmita al obispo del lugar su voluntad de que se construya un templo dedicado a la virgen en el cerro del Tepeyac. El obispo, al escuchar el relato de Juan Diego, le pide una prueba de la presencia de la Virgen. La Virgen hace crecer un jardín de rosas en un cerro inhóspito y semidesértico, y se las hace recoger en su ayate (especie de poncho o manta) a Juan Diego. Luego le pide se las presente como prueba de su presencia al obispo. Cuando Juan Diego abre su ayate frente al obispo, caen las flores al piso y aparece milagrosamente retratada la imagen de la Virgen María en la rústica tela.

Desde entonces, esta imagen representa una prueba contundente de la veracidad de la fe, de acuerdo con la religión católica.

Es muy importante aclarar, que la intención de este ejercicio es únicamente didáctico, no intenta probar ni la veracidad ni la falsedad de dicha prenda, simplemente es un ejercicio que me pareció atractivo en cuanto a su aplicación.

Figura 8.En el ayate de Juan Diego, la Virgen de Guadalupe plasmó su imagen de acuerdo con la tradición católica mexicana.

Figura 9.La autenticidad de la imagen de la Virgen de Guadalupe es hoy en día un misterio.

¿Qué se quiere hacer? Determinar el fechado de la imagen de la virgen plasmada en el ayate de Juan Diego, utilizando para ello la técnica del decaimiento del carbono 14 contenido en la prenda.

Pregunta de estudio: ¿El fechado de la imagen en el ayate corresponderá con los sucesos de las apariciones que manifiesta la religión católica?

Para resolver la pregunta deberás investigar:

1) ¿Qué es el carbono 14?
2) ¿En qué consiste el decaimiento atómico?
3) ¿Cuál es la vida media del carbono 14?
4) ¿Por qué se utiliza el carbono 14 para estas pruebas?
5) ¿Cómo se realizan las pruebas?
6) ¿Cuál sería el impacto en la sociedad mexicana (creyente) si se supiera que los datos realizados del carbono 14 en el ayate de Juan Diego mostrara que no es del siglo XVI?

Algo de información: Cuando un organismo está vivo participa activamente en el ciclo de carbono y, por ello, la cantidad de carbono 14 en sus tejidos se mantiene a través de procesos biológicos como la fotosíntesis y la alimentación. Sin embargo, cuando estos procesos llegan a su fin, con la muerte del organismo, ya no se incorpora mas carbono y se comienza a perder el carbono 14, los restos antiguos son menos radiactivos que los actuales.

Los átomos de carbono 14 se van perdiendo poco a poco porque son inestables desde el punto de vista radiactivo y después de cierto tiempo se transforma en átomos de carbono 12. Esta transformación ocurre constantemente siguiendo la “ley de decaimiento radiactivo” que señala que el porcentaje de átomos de carbono 14 que pierde un material es constante por unidad de tiempo. El químico norteamericano William Lobby, creador de esta propuesta, determinó que un material orgánico muerto pierde la mitad (50%) de sus átomos de carbono 14 después de 5 730 años de ocurrida la muerte del organismo.

Debido a que se conoce la velocidad a la que se pierde el carbono 14 y también la cantidad presente en los seres vivos, para determinar la antigüedad de un material sólo hace falta contar el número de átomos de carbono 14 que aún no han desaparecido. Para contarlos, una posibilidad es aprovechar las propiedades radiactivas del carbono 14 y medir la cantidad de radiación que tiene la muestra debido a su contenido de carbono. En este caso las muestras arqueológicas tienen que pasar por una serie de procedimientos químicos que permiten transformarlas en una forma adecuada para medir su radiactividad.

México cuenta con 2 laboratorios de fechamiento por radiocarbono: uno en el Instituto Nacional de Antropología e Historia y otro, en el Instituto de Investigaciones Antropológicas de la UNAM.

La técnica del carbono 14 permite determinar qué tan antiguos son todos los materiales que se originan de un ser vivo o cualquiera de sus tejidos, lo cual incluye madera, carbón, telas, cuernos, huesos y restos de plantas.

Un aspecto muy importante a considerar es que el fechamiento por carbono 14 se consideran únicamente las proporciones de átomos de carbono 14 contenidos en una muestra para determinar el tiempo transcurrido, y en ella no intervienen otros factores como el tamaño de la muestra, la temperatura, las condiciones de enterramiento o el tipo de muerte, por lo que es posible comparar las muestras de todo el mundo sin tener que medir los factores mencionados en cada lugar.

Limitaciones: el fechamiento por radiocarbono tiene un límite: los restos con una antigüedad mayor a 50 mil años no pueden fecharse por radio carbono, pues su bajo contenido de carbono 14 hace muy difícil su medición, por lo que algunos problemas como la evolución de las especies o la formación de los continentes, no podrían ser analizados empleando esta técnica. Por otra parte, esta técnica puede aplicarse únicamente a restos de seres vivos, con lo cual otro tipo de materiales como la cerámica, el vidrio, los metales, los fósiles o la roca quedan descartados a pesar de que son muy importantes para el Arqueólogo. Además en muchos lugares, los materiales orgánicos pueden descomponerse y perderse mucho tiempo antes de que los arqueólogos los encuentren y por ello, en estos sitios, el fechamiento tiene que hacerse de otra forma. (Lazos (2000); pp. 32 y 33).

Respuesta a la pregunta de estudio: En este apartado, se solicita a los alumnos que de acuerdo a su experiencia previa y lo que han investigado emitan una respuesta inicial a la pregunta de investigación.

¿Qué y cómo se hace?: Planteamiento y solución de la ecuación diferencial

Llamaremos $Q(t)$ a la función que determina la cantidad de carbono presente en el ayate al tiempo t medido en años. Con el pasar de los años, la cantidad de carbono irá disminuyendo de acuerdo con la desintegración del carbono 14, a esta variación matemáticamente la denotaremos como $\frac{dQ(t)}{dt}$.

La disminución, de los átomos del carbono, es proporcional a la concentración por lo que matemáticamente se representa por

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -KQ(t) \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) se resuelve de manera análoga a (1.2) dando como resultado

$$Q(t) = Ce^{-Kt} \tag{4.2}$$

Para obtener los valores de las constantes C y K consideremos que la cantidad inicial de carbono, al tiempo $t = 0$, es decir en 1531, era Q_0. Después de 5 730 años se habrá perdido la mitad de los átomos, esto es $0.5Q_0$ para $t = 5730$. Sustituyendo los datos anteriores $Q(0) = Q_0$ y $Q(5730) = 0.5Q_0$ obtenemos

$$Q(t) = Q_0 e^{-(1.2097x10^{-4})t} \tag{4.3}$$

Para saber la cantidad de sustancia que habrá en 483 años (del año 1531 al año 2014 hay 483 años de diferencia) por lo que $Q(483) = 0.9432Q_0$ lo que implica un 94.32% de Q_0.

¿Qué resultados se obtuvieron?: De acuerdo a los resultados anteriores, si se realizaran pruebas al Ayate de Juan Diego, éste debe contener el 94.32% del carbono 14 que contenía en 1531 cuando, de acuerdo a la tradición Católica, se le plasmó la Virgen de Guadalupe, para que sea datificado con 483 años de antigüedad.

Análisis de resultados: Si solamente se considera el decaimiento del carbono 14 de dicha sustancia, entonces la prenda debería contener el 94.32% de la concentración que debió tener al momento de la aparición de la virgen en 1531, sin considerar otros deterioros que pudo sufrir el ayate como exposición a la intemperie, humo de veladoras o la humedad de las paredes. Esto pude inferir de una forma muy significativa en la obtención de resultados de la datación.

Algo para reflexionar: No es el objetivo de este ejercicio, el desmitificar o, por el contrario, validar la autenticidad de una prenda religiosa, se trata más bien de aplicar herramientas matemáticas a diferentes áreas de conocimiento.

Pruebas reales de carbono 14 se le han aplicado al ayate con todo el rigor de los laboratorios profesionales y los conocimientos de los especialistas, sin embargo los resultados no han sido definitorios.

Problema 5

El salto desde la estratósfera

Escenario: Un ex militar paracaidista austriaco de nombre Félix Baumgartner, patrocinado por la empresa Red Bull, intentó realizar varias hazañas nunca antes logradas por un ser humano. El 14 de octubre de 2012 se lanzó de una cápsula suspendida de un globo inflado con helio desde una altura localizada en la capa de aire llamada estratósfera. Baumgartner descendió bajo la acción de la fuerza de la gravedad y solamente opuesto a otra fuerza, la resistencia del aire. La velocidad que alcanzó fue tal que logró superar la velocidad del sonido.

Figura 10. Imagen en la que aparece Felix Baumgartner antes de realizar su salto.

Figura 11. Baumgartner en plena caída.

¿Qué se quiere hacer?: Proponer un modelo matemático que describa la velocidad de un cuerpo que desciende pero presenta resistencia del aire.

Pregunta de estudio: ¿A partir de qué momento, la velocidad de Baumgartner llegó a la velocidad del sonido?

Para resolver la pregunta se debe investigar:

1. ¿Qué es la estratósfera?
2. ¿A qué altura se encuentra la estratósfera?
3. ¿Qué es la resistencia del aire?
4. ¿Cuál es la velocidad del sonido?
5. ¿Por qué crees que una empresa como Red Bull patrocine eventos de esa magnitud?
6. ¿Qué importancia tendrá para la humanidad lograr hazañas como la realizada por Baumgartner?

Algo de información: El 14 de Octubre de 2012, Félix Baumgartner despegó desde Roswell (Nuevo México) a bordo de una cápsula impulsada por un globo aerostático, ascendió hasta llegar aproximadamente a 39,000 metros de altura, desde la cápsula realizó un descenso en caída libre. Este hecho le atribuyo romper 3 records históricos:

- Primer ser humano en romper la barrera del sonido, sin apoyo mecánico y en caída libre. Los cálculos concluyeron que el paracaidista austriaco rompió la barrera del sonido durante los 40 primeros segundos de caída, al llegar a unos 1,342.8 km/h.
- La caída libre desde el punto más alto, 39 068 metros, cuando el récord anterior, establecido hacía 52 años, era de 31,333 metros.
- El vuelo tripulado en globo al punto más alejado de La Tierra a 39,045 metros de altura —siendo el anterior récord de 34,668 metros—. El globo, impulsado por helio, tenía paredes de apenas 0.02 mm de espesor

La altura desde la cual se lanzó el paracaidista se localiza en una capa de aire llamada estratósfera. La estratósfera es una de las capas más importantes de la atmósfera, se extiende en un rango que va desde los 10 hasta los 50 km de altura aproximadamente.

La velocidad del sonido en la atmósfera terrestre, tiene un valor de 343 m/s (a 20 °C de temperatura y a nivel del mar). La velocidad del sonido varía en función del medio en el que se trasmite.

Respuesta a la pregunta de estudio:

La respuesta en este apartado es propuesta por los estudiantes de acuerdo a su experiencia y lo investigado previamente.

¿Qué y cómo se hace?: Planteamiento y solución de la ecuación diferencial

El paracaidismo es uno de los deportes extremos que día a día cuenta con mayor número de adeptos, el salto desde la estratósfera realizado por Baumgartner, fue todavía más extremo. Los que practican estas actividades se tiran desde un avión en movimiento o desde una cápsula, al inicio descienden en caída libre, luego extienden su cuerpo perpendicularmente a la trayectoria de caída y finalmente abren su paracaídas para aterrizar suavemente.

Es notorio el cambio de la velocidad de caída del paracaidista de una etapa a la siguiente. El cambio observado se debe precisamente a la interacción del aire (del medio) con la persona y luego con el paracaídas. Interacción que se traduce en una resistencia del aire al movimiento del paracaidista.

Para analizar la caída de Baumgartner es necesario dividir en dos eventos: Caída libre (al inicio) y caída con fricción.

1. Caída libre, es el tipo de movimiento donde la resistencia del aire o del medio es despreciable, por lo que se considera nula.

2. Caída no libre o con fricción, que es el tipo de movimiento donde la resistencia del aire o del medio no es despreciable. En este caso el medio se opone al movimiento del paracaidista.

Analizaremos las ecuaciones para ambos casos:

1. Caída libre. Obsérvese la figura 12

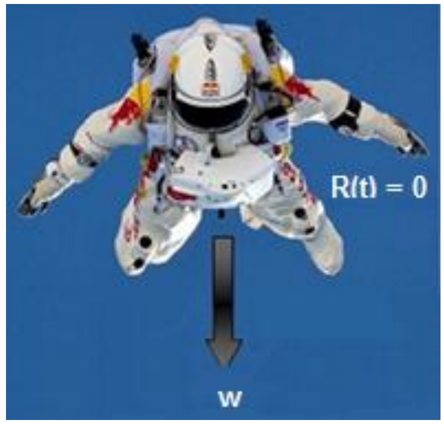


Figura 12. Diagrama de fuerzas para un cuerpo en caída libre.

La fuerza, que actúa sobre el cuerpo del paracaidista de masa m, se comporta de acuerdo a la segunda ley de Newton como

$$F = ma(t) \tag{5.1}$$

Donde F es la fuerza y $a(t)$ la aceleración. En una caída libre la aceleración es constante $a = g = 9.8\frac{m}{s^2}$ y la dirección positiva se considera hacia abajo. La fuerza que siente el paracaidista está relacionada a su peso w y está dada por

$$w = mg \tag{5.2}$$

El cuerpo obedece las ecuaciones para un movimiento uniformemente acelerado, es decir:

La velocidad al tiempo t está definida por

$$v(t) = v_0 + gt \tag{5.3}$$

v_0 es la velocidad inicial.

La posición x al tiempo t está definida por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \tag{5.4}$$

con x_0 como la posición inicial.

2. Caída no libre

Todo fluido (por ejemplo: aire, agua y aceite) se opone al movimiento de todo cuerpo u objeto que pasa a través de él. Dicha oposición al movimiento se manifiesta mediante una fuerza de resistencia que tiene dirección contraria al movimiento del cuerpo y con una magnitud que, para velocidades pequeñas, es directamente proporcional a la magnitud de la velocidad instantánea (rapidez) del cuerpo.

$R(t)$ es la fuerza de resistencia del fluido al movimiento de m y es directamente proporcional a la rapidez $v(t)$ del objeto de masa m. Esto es $R(t) = \beta v(t)$, donde β es una constante de proporcionalidad cuyo valor depende del fluido en el que se ejercerá el movimiento. Además

$$R(t) = -\beta v(t) \tag{5.5}$$

por ser $R(t)$ y $v(t)$ de sentidos opuestos.

El diagrama de fuerzas involucrado está representado en la figura 13

Figura 13. Diagrama de fuerzas involucradas en un cuerpo que cae siendo frenado por la resistencia del aire.

Considerando hacia abajo la dirección positiva:

$$F = w + R(t) \tag{5.6}$$

Sustituyendo (5.1), (5.2) y (5.5) en (5.6)

$$ma(t) = mg - \beta v(t) \tag{5.7}$$

y dado que la aceleración está definida como $a = \frac{dv(t)}{dt}$ entonces

$$m\frac{dv(t)}{dt} + \beta v(t) = mg \tag{5.8}$$

o también

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\beta}{m}v(t) = g \tag{5.9}$$

La ecuación (5.9) es una Ecuación Diferencial de primer orden, lineal pero no homogénea. Los pasos para resolver la ecuación (5.9) se encuentra en el anexo 2, la solución de esta ecuación es:

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} \tag{5.10}$$

que es la velocidad instantánea del cuerpo de masa m en el tiempo t.

Para obtener la respuesta a la pregunta de estudio será necesario realizar varias suposiciones: que la masa de Baumgartner junto con su traje era de alrededor de al momento del salto, la caída es causada por la acción de la fuerza de la gravedad, pero es fundamental considerar a esta fuerza como constante durante todo el trayecto, aquí es importante mencionar que esto no es del todo cierto ya que esta fuerza varía de acuerdo a la altura en la que se encuentre y que para este salto, dada la gran altura a la que se encontraba, la acción de la fuerza no es constante.

También supondremos que el salto fue realizado a una altura de 39 000 m y que la velocidad inicial es cero.

El salto de Baumgartner, fue en su mayoría en caída libre, al menos hasta los 256 segundos (4 minutos con 16 segundos) que fue el momento en que abrió su paracaídas después del salto. Sustituyendo para $t = 256\ s$ y considerando $v_0 = 0$ en la ecuación (5.3) obtenemos que

$$v(t) = 2508 \frac{m}{s} \tag{5.11}$$

la cual será la velocidad inicial para el movimiento en caída con resistencia del aire.

Si la fuerza, debida a la resistencia del aire, tiene un valor de $20 \frac{Kg \cdot m}{s^2}$ entonces el valor de la constante β será de acuerdo con (5.5) y sustituyendo (5.11)

$$\beta = \frac{R}{v(t)} = 0.0079744 \frac{Kg}{s} \tag{5.12}$$

Para saber el tiempo en que se alcanza la velocidad del sonido (331 $^{m}/_{s}$ que es la velocidad cuando la temperatura es de $0°\ C$, tal como se encontraba, aproximadamente, el paracaidista al momento del salto) podemos ver que esta velocidad se obtuvo cuando el movimiento era de caída libre por lo que solamente es necesario despejar t de (5.3) obteniendo como resultado

$$t = 33.775s \tag{5.13}$$

¿Qué resultados se obtuvieron?: Alrededor de 34 segundos bastaron para que Baumgartner descendiera a una velocidad mayor que la del sonido.

Análisis de resultados: De acuerdo con lo presentado por la prensa[9] la velocidad del sonido se obtuvo alrededor de los 40 segundos después del lanzamiento, por lo cual

[9] Ver, por ejemplo el video ubicado en https://www.youtube.com/watch?v=7QFbC1jMres

podemos concluir que el resultado obtenido, de acuerdo con nuestras suposiciones y cálculos, es bastante cercano.

Contraste con la actividad real: Muy probablemente los resultados obtenidos en este ejercicio no difieren mucho de los reales, entre las posibles discrepancias podemos identificar algunas debido a factores que no se han considerado como por ejemplo los cambios de la densidad del aire conforme va descendiendo, además de que el cuerpo del paracaidista, en su mayoría del tiempo, estuvo rotando.

Algo para reflexionar: Podemos aprovechar el interés, que tienen los jóvenes acerca de los deportes o actividades extremas como es el caso de este salto, para realizar ejercicios de índole matemático. Los problemas a trabajar deben ser atractivos para los estudiantes, pues el interés en la resolución del problema es la base para lograr su solución.

Problema 6

La Población de México

Escenario: Cada vez somos más mexicanos, cada 5 años el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) realiza una consulta mediante un censo económico y cada 10 años realiza un conteo poblacional, con lo que tenemos información de cuantos mexicanos somos. Estas consultas muestran que la población sigue creciendo aunque, en los últimos años, éste crecimiento es relativamente pequeño.

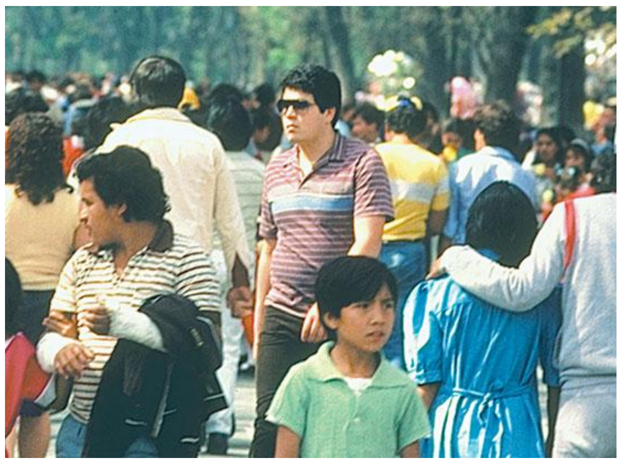


Figura 14. En las últimas décadas, la población mexicana ha crecido de manera exponencial.

Figura 15. Cada 5 años el INEGI realiza conteos poblacionales los cuales nos dan información de la forma en la que crece la población mexicana.

¿Qué se quiere hacer?: Proponer un modelo matemático que describa como es el crecimiento de la población mexicana y con este modelo, emplearlo para predecir la cantidad de compatriotas que habitarán este país en un determinado tiempo.

Pregunta de estudio: ¿Cuántos mexicanos habrá para el año 2015?

Para resolver la pregunta se debe investigar:

A. consultar las estadísticas proporcionadas por el INEGI. Con estos datos, los alumnos deben obtener las constantes de crecimiento de la población mexicana por lo menos de los censos más recientes ya que los crecimientos van cambiando.

B. Investigar lo relacionado a las siguientes preguntas

1. ¿Cuáles son los valores de las razones de crecimiento de la población mexicana de los últimos 20 años?
2. ¿Cuáles podrían ser las causas por las que la razón de crecimiento ha disminuido en las últimas décadas?
3. ¿Cuál es el número de habitantes proporcionado por el INEGI en el año 2000, 2005, 2010?
4. ¿En qué podría ser útil, conocer la población esperada para cierto año?
5. Conociendo los datos esperados para cierto año, ¿qué medidas podrían llevarse a cabo para no tener a toda la población esperada? (las medidas tienen que ser lógicas, es decir, sin pensar en matanzas o exterminios por ejemplo)

Algo de información: De acuerdo al II Conteo de Población y Vivienda 2005 realizada por el INEGI (imagen 3.13) presenta como resultados que la población mexicana en el año 2000 era de 97.5 millones de habitantes y en el año 2005, la población creció a 103.3 millones de habitantes lo que da un promedio de crecimiento de 1.17% anual.

Respuesta a la pregunta de estudio: En este apartado, se solicita a los alumnos que de acuerdo a su experiencia previa y lo que han investigado emitan una respuesta inicial a la pregunta de estudio.

¿Qué y cómo se hace?: Planteamiento y solución de la ecuación diferencial

Suponiendo que el crecimiento poblacional, a partir de 2005, continuó siendo del 1.17% anual y que el crecimiento es proporcional a la población existente, entonces el modelo de crecimiento es análogo al de la ecuación (1.2), es decir $A(t) = Ce^{Kt}$ donde, para este caso $A(t)$ representa la totalidad de población al tiempo t medido en años, C es la cantidad inicial y K es el coeficiente de crecimiento. Nótese que el signo de la exponencial es positivo puesto que hubo aumento en la población.

Considerando $t = 0$ en el año 2005, el cual de acuerdo con la imagen 3.13, había 103.3 millones de habitantes, es decir $A(0) = 103.3$. Además en el año 2010, es decir en $t = 5$, de acuerdo con el INEGI, había 112.337 millones de habitantes por lo que $A(5) = 112.337$, con esta información podemos obtener los valores de C y K quedando entonces

$$A(t) = 103.3e^{0.01677t} \tag{6.1}$$

Ahora, para predecir la cantidad de población mexicana que habrá en el año 2015, es decir $t = 10$, por lo que al sustituir los valores en (6.1) obtenemos

$$A(10) = 122.16 \tag{6.2}$$

¿Qué resultados se obtuvieron?: De acuerdo con los resultados obtenidos con el modelo propuesto, se espera que para el año 2015, la población mexicana cuente con 122.16 millones de habitantes.

Análisis de resultados: Si el crecimiento continúa con la tendencia como en los últimos 5 años, se espera que la población crezca hasta llegar alrededor de los 122 millones de habitantes, no es un resultado descabellado, los crecimientos poblacionales en el país se han mantenido más o menos estables en los últimos años y realmente tendría que ocurrir un gran fenómeno social o natural para que las variaciones en los crecimientos de la población cambien de manera significativa.

Algo para reflexionar: Cada 5 años el INEGI realiza encuestas para determinar la totalidad de la población, esto nos ayuda para constatar la efectividad de los modelos poblacionales propuestos. Los modelos que se emplean en la realidad con mucho más complejos, difícilmente un chico de bachillerato lo comprendería, sin embargo los modelos propuestos no se alejan mucho de los valores reales.

Anexo 1

Nivel	Límite puntos	Descripción del nivel de las tareas
6	Desde 669,3	En el nivel 6 los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones y problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento avanzado. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a sus situaciones originales.
5	[607,0; 669,3)	En el nivel 5, los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	[544,7; 607,0)	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionalmente o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	[482,4; 544,7)	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones

		secuenciales. Pueden aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos
2	[420,1; 482,4)	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo de representación. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	[357,7; 420,1)	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Anexo 2

Evaluación diagnóstica

Nombre: ____

Materia: ______________________________ Grupo: ________________________

1.- ¿Para qué sirve el Cálculo Diferencial e Integral?

2.- ¿Por qué crees que es importante estudiar Cálculo Diferencial e Integral?

3.- ¿Qué es un modelo matemático?

4.- ¿Haz identificado algún problema o situación de la vida cotidiana que se pueda resolver con algún tema de Cálculo?

Anexo 3

Para resolverla, la multiplicaremos en ambos lados de la ecuación por $e^{\frac{\beta}{m}t}$ (esto se conoce como factor integrante),

$$e^{\frac{\beta}{m}t}\left[v'(t)+\frac{\beta}{m}v(t)\right]=ge^{\frac{\beta}{m}t} \qquad \text{(A.1)}$$

al realizar los productos obtenemos

$e^{\frac{\beta}{m}t}v'(t)+\frac{\beta}{m}e^{\frac{\beta}{m}t}v(t)=ge^{\frac{\beta}{m}t}$, reconociendo que el lado izquierdo de la igualdad es precisamente $\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{\beta}{m}t}v(t)\right]$, podemos escribir entonces

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{\beta}{m}t}v(t)\right]=ge^{\frac{\beta}{m}t} \qquad \text{(A.2)}$$

haciendo separación de variables e integrando:

$$\int de^{\frac{\beta}{m}t}v(t)=g\int e^{\frac{\beta}{m}t}dt$$

obtenemos como resultado

$$e^{\frac{\beta}{m}t}v(t)=g\left(\frac{m}{\beta}\right)e^{\frac{\beta}{m}t}+C \qquad \text{(A.3)}$$

despejando $v(t)$

$$v(t)=\left(\frac{mg}{\beta}e^{\frac{\beta}{m}t}+C\right)e^{-\frac{\beta}{m}t}=\frac{mg}{\beta}+C_1e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

entonces

$$v(t)=\frac{mg}{\beta}+Ce^{-\frac{\beta}{m}t} \qquad \text{(A.4)}$$

Ahora bien, dada la condición inicial $v(0) = v_0$, sustituyendo en (8)

$$v(0) = \frac{mg}{\beta} + Ce^0 = v_0 \qquad \Rightarrow \qquad C = v_0 - \frac{mg}{\beta}$$

y finamente sustituyendo en el valor de la constante en (8)

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} \qquad \text{(A.5)}$$

que es la velocidad instantánea del cuerpo de masa m en el tiempo t.

Anexo 4

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">PLANEACIÓN DE CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="4">Institución: Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materia: Cálculo Diferencial e Integral II</td><td colspan="2">Sesión 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grupo:665</td><td colspan="2">Duración: 2 Horas</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Problema 1: Determinar la hora del fallecimiento de una persona</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivos de la sesión:
El estudiante será capaz de proponer un modelo matemático con el que se pueda describir la perdida de calor en un sujeto recién fallecido.
El estudiante será capaz de emplear un modelo matemático que le sirva para determinar la hora en que falleció una persona.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">APERTURA</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td align="center">Material.</td><td align="center">Tiempo</td></tr>
<tr><td align="center">El profesor</td><td align="center">Los alumnos</td><td rowspan="2">Material impreso

Computadora o teléfono celular con acceso a internet

Pizarrón Blanco

Plumones y</td><td rowspan="2">10 de 90 min

10 de 90 min</td></tr>
<tr><td>1.- Saluda al grupo.
2.- Expresa cual es el tema a tratar, el objetivo de la clase y como se va a trabajar.
3.-Organiza equipos de 4 integrantes. (Estos equipos se conservarán en toda la secuencia didáctica)

4.- Entrega una nota periodística a cada equipo; solicita que la lean y la analicen.

5.- Explica cómo deben obtener un modelo matemático del</td><td>1.- Los estudiantes deberán leer la nota periodística, en equipo, que contiene la información del fallecimiento de una persona.

2.- Discutirán y evaluarán qué información extra requerirán para intentar solucionar el problema.</td></tr>
</table>

enfriamiento de los cuerpos cuando fallecen, y con ello determinar la posible hora del asesinato.		borrador.	
DESARROLLO			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material.	Tiempo
El profesor	El alumno	Computadora o teléfono celular con acceso a internet Pizarrón Blanco Plumones	30 de 90 min 40 de 90 min
1.- Para poder complementar la información necesaria y con ello resolver el problema solicitado, el profesor solicitará una serie de preguntas, ubicadas en el anexo 5. 2.- Una vez que los equipos cuentan la información necesaria, se obtiene el modelo matemático que describa el enfriamiento de los cuerpos. 3.- Mientras los alumnos obtienen el modelo, el profesor monitorea a cada equipo, cuestionándolos y guiándolos en caso de tener dudas.	1.- De acuerdo con sus conocimientos previos, además de la discusión grupal y haciendo búsquedas en sitios de internet, los alumnos contestan las preguntas solicitadas. 2.- Con ayuda de la información obtenida, cada equipo obtendrá, mediante el uso de una ecuación diferencial, un modelo matemático que describa la pérdida de calor del cuerpo y con ello poder responder a la pregunta de estudio: ¿a qué hora murió?		

<table>
<tr><th colspan="4">CIERRE</th></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td>Material</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>El profesor</td><td>Los alumnos</td><td rowspan="2">Pizarrón

Plumones

Borrador</td><td rowspan="2">30 de 90 min</td></tr>
<tr><td>1.- Organiza las exposiciones de cada equipo, los cuales, explicarán la forma en la que resolvieron el problema, la metodología empleada para obtener el modelo solicitado y los resultados a los que llegaron.

2.- Finalmente el profesor pedirá al grupo, en general, que expresen sus ideas sobre la importancia de contar con modelos matemáticos para poder obtener respuestas a diferentes acciones como determinar la hora de la muerte de una persona.</td><td>1.- Los integrantes de cada equipo expone el trabajo desarrollado, la metodología empleada y los resultados obtenidos.

2.- De manera individual, los alumnos expresarán su opinión sobre la importancia a de conocer modelos que expliquen diferentes sucesos como es el determinar la hora de fallecimiento de un ser humano.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observaciones y recomendaciones.

Es recomendable dejar, una sesión antes, las preguntas de investigación, para que la búsqueda de información pueda ser más amplia, completa y de diferentes fuentes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">PLANEACIÓN DE CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="4">Institución: Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur</td></tr>
<tr><td>Materia: Cálculo Diferencial e Integral II</td><td colspan="3">Sesión 2</td></tr>
<tr><td>Grupo:665</td><td colspan="3">Duración: 2 Horas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Problema 2: El problema del consumo de alcohol</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivos de la sesión:
El estudiante será capaz de plantear y resolver una ecuación diferencial para obtener un modelo matemático que modele el comportamiento del desecho de alcohol en la sangre.
El estudiante será capaz de determinar los posibles efectos, de acuerdo con el modelo obtenido, que tendrá una persona luego de 16 horas de haber consumido alcohol etílico.</td></tr>
<tr><td colspan="4">APERTURA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td>Material</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>El profesor</td><td>Los alumnos</td><td rowspan="2">Pizarrón blanco
Plumones y borrador</td><td rowspan="2">20 de 90 min</td></tr>
<tr><td>1.- Saluda al grupo
2.- Expresa cual es el tema a tratar, los objetivos de la clase y como se va a trabajar.
3.-Organiza los equipos
4.- El docente expone en la clase, el contexto que da origen al problema por resolver:
“Un viernes por la tarde, dos alumnos del Colegio platican su interés de asistir a una fiesta el próximo domingo, previo a un examen, y quieren saber si para</td><td>1.- Se organizan en equipos
2.- Ponen atención a la presentación y hacen preguntas de acuerdo con la temática que expone el profesor.</td></tr>
</table>

las 4 de la tarde del día siguiente, ¿la cantidad de alcohol que ingieran en la fiesta habrá sido desalojada, en su totalidad, de su cuerpo o por lo menos una cantidad considerable, de tal forma, que sus efectos sean mínimos?			
DESARROLLO			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material.	Tiempo
El profesor	El alumno		
1.- Una vez conocido la problemática, se procede a resolver. Para determinar la solución del problema, el profesor propone una lluvia de ideas en los estudiantes referentes al consumo y desecho del alcohol en el cuerpo de una persona.	1.- Los alumnos participan de manera individual mediante lluvia de ideas acerca del consumo y desecho de alcohol.	Computadora o teléfono celular con acceso a internet Pizarrón Blanco Plumones y borrador	10 de 90 min
2.- Para poder complementar la información necesaria y con ello resolver el problema solicitado, el profesor solicitará una serie de preguntas, ubicadas en el anexo 5.	2.- Con ayuda de internet se busca información que ayude a contestar las preguntas requeridas para solucionar el problema.		30 de 90 min
3.- Realiza una pequeña exposición acerca de la forma en que el alcohol se aloja y posteriormente se desecha el alcohol en la sangre.	3.- Atienden la exposición y participan con dudas y comentarios.		10 de 90 min
4.- Una vez que los equipos			

cuentan la información necesaria, se obtiene el modelo matemático que describe la forma en la que el cuerpo desecha al alcohol ingerido. 5.- Mientras los alumnos obtienen el modelo, el profesor monitorea a cada equipo, cuestionándolos y guiándolos en caso de tener dudas.	4.- Se plantea una ecuación diferencial de acuerdo con los datos proporcionados con el problema y se resuelve para obtener el modelo solicitado.		20 de 90 min
CIERRE			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material	Tiempo
El profesor	Los alumnos		
1.- Organiza las exposiciones de cada equipo, los cuales, explicarán la forma en la que resolvieron el problema, la metodología empleada para obtener el modelo solicitado y los resultados a los que llegaron.	1.- Los integrantes de cada equipo expone el trabajo desarrollado, la metodología empleada y los resultados obtenidos.	Pizarrón blanco Marcadores y pizarrón	20 de 90 min
2.- Finalmente el profesor pedirá al grupo, en general, que expresen sus ideas sobre la importancia de contar con modelos matemáticos para poder obtener respuestas a diferentes acciones como determinar la forma con la que se desecha el alcohol en el cuerpo de las personas.	2.- Se estimará la eficacia del modelo obtenido en la descripción de la pérdida de alcohol en la sangre.		10 de 90 min

Observaciones y recomendaciones. Se recomienda que el docente se documente acerca de la forma en que se aloja y posteriormente se desecha el alcohol en la sangre, puede apoyarse con alguna presentación visual de un video o de algunos diagramas, esta presentación debe ser breve, clara y concisa.

<table>
<tr><td colspan="4">PLANEACIÓN DE CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="4">Institución: Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materia: Cálculo Diferencial e Integral II</td><td colspan="2">Sesión 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grupo:665</td><td colspan="2">Duración: 2 Horas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Problema 3: El problema de las dietas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivos de la sesión:
El estudiante será capaz de obtener un modelo matemático que describa la manera de cómo va perdiendo peso una persona que se somete a una dieta baja en contenido calórico.
El estudiante será capaz de emplear el modelo matemático para estimar las ventajas y desventajas que presenta el uso de las dietas para poder bajar de peso.</td></tr>
<tr><td colspan="4">APERTURA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td>Material.</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>El profesor</td><td>Los alumnos</td><td rowspan="2">Pizarrón blanco

Plumones y borrador.</td><td rowspan="2">10 de 90 min

10 de 90 min</td></tr>
<tr><td>1.- Saluda al grupo

2.- Expresa cual es el tema a tratar, los objetivos de la clase y como se va a trabajar.

3.-Organiza los equipos

4.- El docente expone en la clase, el problema y la pregunta de investigación.</td><td>1.- Atienden las indicaciones del docente.

2.- Ponen atención a la presentación y hacen preguntas de acuerdo con la temática que expone el profesor.</td></tr>
<tr><td colspan="4">DESARROLLO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td>Material.</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>El profesor</td><td>El alumno</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1.-Una vez conocido la problemática, se procede obtener el modelo mencionado. Para determinar la solución del problema, el profesor genera una lluvia de ideas entre los estudiantes correspondientes a las dietas.	1.- Participa en la lluvia de ideas aportando sus conocimientos previos sobre el tema.	Pizarrón Blanco. Plumones y borrador	10 de 90 min
2.- Para poder complementar la información necesaria y con ello resolver el problema solicitado, el profesor solicitará una serie de preguntas, ubicadas en el anexo 5.	2.- De acuerdo con sus conocimientos previos, además de emplear la lluvia de ideas y haciendo búsquedas en sitios de internet, los alumnos contestan las preguntas.		30 min
3.- Para complementar la información, el docente realiza una pequeña exposición acerca de la pérdida de peso, tales como: Consumo calórico por día, peso de una persona, pérdida de peso debido a una dieta. Además se analizará de manera breve la las causas que llevan a las personas a someterse a las dietas tales como: Presión social, alza de autoestima, presión laboral entre otros.	3.- Atienden la exposición del profesor, pregunta sus dudas y aporta comentarios sobre el tema.		10 min
4.- Una vez que los equipos cuentan la información necesaria, se obtiene el modelo matemático que describa la forma en la que el cuerpo desecha el alcohol ingerido.	4.- Se plantea una ecuación diferencial de acuerdo con los datos proporcionados con el problema y se resuelve para obtener el modelo solicitado.		20 min

5.- Mientras los alumnos obtienen el modelo, el profesor monitorea a cada equipo, cuestionándolos y guiándolos en caso de tener dudas.			
CIERRE			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material	Tiempo
El profesor	Los alumnos	Pizarrón blanco Marcadores y borrador	20 de 90 min 10 de 90 min
1.- Organiza las exposiciones de cada equipo, los cuales, explicarán la forma en la que resolvieron el problema, la metodología empleada para obtener el modelo solicitado y los resultados a los que llegaron. 2.- El profesor pedirá al grupo, en general, que expresen sus ideas sobre la importancia de contar con modelos matemáticos para poder obtener respuestas a diferentes acciones como bajar de peso, empleando para ello, una dieta baja en calorías.	1.- Los integrantes de cada equipo expone el trabajo desarrollado, la metodología empleada y los resultados obtenidos. 2.- Se estimará la eficacia del modelo obtenido en la descripción de la pérdida de alcohol en la sangre.		
Observaciones y recomendaciones. Es recomendable dejar, una sesión antes, las preguntas de investigación, para que la búsqueda de información pueda ser más amplia, completa y de diferentes fuentes.			

<table>
<tr><td colspan="4">PLANEACIÓN DE CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="4">Institución: Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materia: Cálculo Diferencial e Integral II</td><td colspan="2">Sesión 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grupo:665</td><td colspan="2">Duración: 2 Horas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Problema 4: El ayate de Juan Diego</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivos de la sesión:
El estudiante será capaz de obtener un modelo matemático que describa como se puede calcular el fechado, de un objeto, empleando para ello la técnica del decaimiento para el carbono 14.
El estudiante será capaz de determinar la posible fecha de la aparición de la virgen de Guadalupe en el ayate de Juan Diego.</td></tr>
<tr><td colspan="4">APERTURA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td>Material.</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>El profesor</td><td>Los alumnos</td><td rowspan="2">Pizarrón blanco

Plumones y borrador.</td><td rowspan="2">10 de 90 min

10 min</td></tr>
<tr><td>1.- Saluda al grupo

2.- Expresa cual es el tema a tratar, los objetivos de la clase y como se va a trabajar.

3.-Organiza los equipos

4.- El docente expone en la clase, el problema y la pregunta de investigación.</td><td>1.- Atienden las indicaciones del docente.

2.- Ponen atención a la presentación y hacen preguntas de acuerdo con la temática que expone el profesor.</td></tr>
</table>

DESARROLLO			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material.	Tiempo
El profesor	El alumno		
1.-Una vez conocido la problemática, se procede obtener el modelo mencionado. Para determinar la solución del problema, el profesor genera una lluvia de ideas entre los estudiantes correspondientes al fechado de objetos empleando la técnica de carbono 14.	1.- Participa en la lluvia de ideas aportando sus conocimientos previos sobre el tema.	Computadora o teléfono celular con acceso a internet	10 de 90 min
2.- Para poder complementar la información necesaria y con ello resolver el problema solicitado, el profesor solicitará una serie de preguntas, ubicadas en el anexo 5.	2.- De acuerdo con sus conocimientos previos, además de emplear la lluvia de ideas y haciendo búsquedas en sitios de internet, los alumnos contestan las preguntas.	Pizarrón Blanco Plumones	30 de 90 min
3.-Para complementar la información, el docente realiza una pequeña exposición acerca de la el decaimiento radiactivo y en particular el caso de carbono 14, además de algunas técnicas que existen para estimar el fechado de objetos.	3.- Atienden la exposición del profesor, pregunta sus dudas y aporta comentarios sobre el tema.		10 de 90 min
4.- Una vez que los equipos cuentan la información necesaria, se obtiene el modelo matemático.	4.- Se plantea una ecuación diferencial de acuerdo con los datos proporcionados con el problema y se resuelve para		20 de 90 min

5.- Mientras los alumnos obtienen el modelo, el profesor monitorea a cada equipo, cuestionándolos y guiándolos en caso de tener dudas.	obtener el modelo solicitado.		
CIERRE			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material	Tiempo
El profesor	Los alumnos	Pizarrón blanco Marcadores y borrador	20 de 90 min
1.- Organiza las exposiciones de cada equipo, los cuales, explicarán la forma en la que resolvieron el problema, la metodología empleada para obtener el modelo solicitado y los resultados a los que llegaron.	1.- Los integrantes de cada equipo expone el trabajo desarrollado, la metodología empleada y los resultados obtenidos.		
2.- El profesor pedirá al grupo, en general, que expresen sus ideas sobre la importancia de contar con modelos matemáticos.	2.- Se estimará la eficacia del modelo obtenido en el fechado de objetos empleando la técnica del carbono 14.		10 de 90 min
Observaciones y recomendaciones. Es recomendable dejar, una sesión antes, las preguntas de investigación, para que la búsqueda de información pueda ser más amplia, completa y de diferentes fuentes.			

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">PLANEACIÓN DE CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="4">Institución: Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materia: Cálculo Diferencial e Integral II</td><td colspan="2">Sesión 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grupo:665</td><td colspan="2">Duración: 2 Horas</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Problema 5: El salto desde la estratósfera</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivos de la sesión:
El estudiante será capaz de obtener un modelo matemático que describa la caída libre de un cuerpo tanto con resistencia como sin resistencia del aire.
El estudiante será capaz de determinar el tiempo en el que se alcanza la velocidad del sonido de un paracaidista que se lanza, sin resistencia del aire, desde la estratósfera.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">APERTURA</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td align="center">Material.</td><td align="center">Tiempo</td></tr>
<tr><td align="center">El profesor</td><td align="center">Los alumnos</td><td rowspan="2">Cañón proyector

Bocinas

Computadora con acceso a internet

Pizarrón Blanco

Plumones</td><td rowspan="2">8 de 90 min

12 de 90 min

10 de 90 min</td></tr>
<tr><td>1.- Saluda al grupo

2.- Expresa cual es el tema a tratar, los objetivos de la clase y como se va a trabajar.

3.-Organiza los equipos

4.- El docente proyecta el video del salto desde la estratósfera, dicho video se descarga de <u>https://www.youtube.com/watch?v=bS10lIyM41I</u>

5.- El docente expone en la clase, el problema y la pregunta de investigación.</td><td>1.- Atienden las indicaciones del docente.

2.- Ponen atención a la presentación al video y hacen preguntas de acuerdo con la temática.</td></tr>
</table>

DESARROLLO			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material.	Tiempo
El profesor	El alumno		
1.-Una vez conocido la problemática, se procede obtener el modelo mencionado. Para determinar la solución del problema, el profesor genera una lluvia de ideas entre los estudiantes correspondientes a la caída libre de los cuerpos con y sin resistencia de aire.	1.- Participa en la lluvia de ideas aportando sus conocimientos previos sobre el tema.	Computadora o teléfono celular con acceso a internet Pizarrón Blanco Plumones	10 de 90 min
2.- Para poder complementar la información necesaria y con ello resolver el problema solicitado, el profesor solicitará una serie de preguntas, ubicadas en el anexo 5.	2.- De acuerdo con sus conocimientos previos, además de emplear la lluvia de ideas y haciendo búsquedas en sitios de internet, los alumnos contestan las preguntas.		30 min
3.-Para complementar la información, el docente realiza una pequeña exposición acerca de la el decaimiento radiactivo y en particular el caso de carbono 14, además de algunas técnicas que existen para estimar el fechado de objetos.	3.- Atienden la exposición del profesor, pregunta sus dudas y aporta comentarios sobre el tema.		10 min
4.- Una vez que los equipos cuentan la información necesaria, se obtiene el modelo matemático.	4.- Se plantea una ecuación diferencial de acuerdo con los datos proporcionados con el problema y se resuelve para obtener el modelo solicitado.		20 de 90 min

5.- Mientras los alumnos obtienen el modelo, el profesor monitorea a cada equipo, cuestionándolos y guiándolos en caso de tener dudas.			
CIERRE			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material	Tiempo
El profesor	Los alumnos		
1.- Organiza las exposiciones de cada equipo, los cuales, explicarán la forma en la que resolvieron el problema, la metodología empleada para obtener el modelo solicitado y los resultados a los que llegaron.	1.- Los integrantes de cada equipo expone el trabajo desarrollado, la metodología empleada y los resultados obtenidos.	Pizarrón blanco Marcadores y borrador	20 de 90 min
2.- El profesor pedirá al grupo, en general, que expresen sus ideas sobre la importancia de contar con modelos matemáticos.	2.- Se estimará la eficacia del modelo obtenido en la descripción de la caída libre de los cuerpos con o sin resistencia del aire.		10 min

Observaciones y recomendaciones.

Es necesario tener el video descargado previamente y no verlo directamente desde el sitio señalado pues en ocasiones el funcionamiento de la red no trabaja de manera óptima.

Además, es recomendable dejar, una sesión antes, las preguntas de investigación, para que la búsqueda de información pueda ser más amplia, completa y de diferentes fuentes.

<table>
<tr><td colspan="4">PLANEACIÓN DE CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="4">Institución: Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materia: Cálculo Diferencial e Integral II</td><td colspan="2">Sesión 6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grupo:665</td><td colspan="2">Duración: 2 Horas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Problema 6: La población de México</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivos de la sesión:
El estudiante será capaz de obtener un modelo matemático que describa la forma en la que crece la población mexicana.
El estudiante será capaz de determinar la cantidad de mexicanos que habrá en el año 2015.</td></tr>
<tr><td colspan="4">APERTURA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td>Material.</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>El profesor</td><td>Los alumnos</td><td rowspan="2">Material impreso

Pizarrón Blanco

Plumones</td><td rowspan="2">10 de 90 min

10 de 90 min</td></tr>
<tr><td>1.- Saluda al grupo

2.- Expresa cual es el tema a tratar, los objetivos de la clase y como se va a trabajar.

3.-Organiza los equipos

4.- El docente expone en la clase, el problema y la pregunta de investigación.</td><td>1.- Atienden las indicaciones del docente.

2.- Ponen atención a la presentación a la presentación y hacen preguntas de acuerdo con la temática.</td></tr>
<tr><td colspan="4">DESARROLLO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.</td><td>Material.</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>El profesor</td><td>El alumno</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1.-Una vez conocido la problemática, se procede obtener el modelo mencionado. Para determinar la solución del problema, el profesor genera una lluvia de ideas entre los estudiantes correspondientes a la caída libre de los cuerpos con y sin resistencia de aire.	1.- Participa en la lluvia de ideas aportando sus conocimientos previos sobre el tema.	Computadora o teléfono celular con acceso a internet Pizarrón Blanco Plumones	10 de 90 min
2.- Para poder complementar la información necesaria y con ello resolver el problema solicitado, el profesor solicitará una serie de preguntas, ubicadas en el anexo 5.	2.- De acuerdo con sus conocimientos previos, además de emplear la lluvia de ideas y haciendo búsquedas en sitios de internet, los alumnos contestan las preguntas.		30 min
3.-Para complementar la información, el docente realiza una pequeña exposición acerca de la el decaimiento radiactivo y en particular el caso de carbono 14, además de algunas técnicas que existen para estimar cantidad de población que habrá en nuestro país en el año 2015.	3.- Atienden la exposición del profesor, pregunta sus dudas y aporta comentarios sobre el tema.		10 min
4.- Una vez que los equipos cuentan la información necesaria, se obtiene el modelo matemático.	4.- Se plantea una ecuación diferencial de acuerdo con los datos proporcionados con el problema y se resuelve para obtener el modelo solicitado.		20 de 90 min
5.- Mientras los alumnos obtienen el modelo, el profesor monitorea a cada equipo, cuestionándolos y			

guiándolos en caso de tener dudas.			
CIERRE			
Actividades y estrategias de enseñanza–aprendizaje.		Material	Tiempo
El profesor	Los alumnos		
1.- Organiza las exposiciones de cada equipo, los cuales, explicarán la forma en la que resolvieron el problema, la metodología empleada para obtener el modelo solicitado y los resultados a los que llegaron.	1.- Los integrantes de cada equipo expone el trabajo desarrollado, la metodología empleada y los resultados obtenidos.	Pizarrón blanco Marcadores y borrador	20 de 90 min
2.- El profesor pedirá al grupo, en general, que expresen sus ideas sobre la importancia de contar con modelos matemáticos.	2.- Se estimará la eficacia del modelo obtenido en la descripción de la cantidad de población que habrá en el año 2015.		
3.- El profesor agradece a los estudiantes por toda su valiosa participación en esta aplicación de la secuencia didáctica.			10 min
Observaciones y recomendaciones. Es recomendable dejar, una sesión antes, las preguntas de investigación, para que la búsqueda de información pueda ser más amplia, completa y de diferentes fuentes.			

Anexo 5

Preguntas problema 1

Para resolver el problema es necesario que los alumnos respondan a las preguntas:

1. ¿Cuáles son los primeros cambios que el cuerpo está sufriendo?
2. ¿Por qué los cuerpos de las personas que mueren se enfrían?
3. ¿Por qué los objetos “calientes” se “enfrían”?
4. ¿De qué depende este enfriamiento?
5. ¿Cuál es la temperatura de una persona viva y sana?
6. Si denotamos por $T(t)$ a la temperatura del cadáver al tiempo t, ¿Cuál es la temperatura inicial $T(0)$ del cadáver?
7. ¿Cuál es la temperatura $T(3)$ después de 3 horas de tomar la primera medición de la temperatura del cadáver?
8. ¿Cómo podrías modelar matemáticamente la función temperatura $T(t)$?

Preguntas del problema 2

Entre las preguntas complementarias para resolver el problema se encuentran:

1. ¿Qué cantidad de alcohol (etanol) contienen las bebidas más populares que son consumidas en fiestas y reuniones?
2. ¿Qué cantidad de alcohol consume, en promedio, una persona que asiste a una fiesta?
3. ¿Cuáles son las formas en las que se elimina el alcohol del cuerpo?
4. ¿Cómo se mide el nivel de alcoholemia?
5. ¿Cuánta cantidad de alcohol se requiere para que se manifiesten efectos de embriaguez en las personas?
6. ¿Cuáles son los riesgos que implican el consumo del alcohol entre los adolescentes?

Preguntas del problema 3

Entre las preguntas complementarias para resolver el problema se encuentran:

1. ¿Qué son las calorías?
2. ¿Cuántas calorías en promedio se requieren para que una persona lleve a cabo sus actividades rutinarias?
3. ¿Cómo podemos saber cuál es el peso ideal de una persona de acuerdo a su talla y edad?
4. ¿Qué es una dieta?
5. ¿En qué consiste una dieta baja en contenido calórico?

Preguntas del problema 4

Para resolver el problema es necesario que los alumnos respondan a las preguntas:

1. ¿Qué es el carbono 14?
2. ¿En qué consiste el decaimiento atómico?
3. ¿Cuál es la vida media del carbono 14?
4. ¿Por qué se utiliza el carbono 14 para estas pruebas?
5. ¿Cómo se realizan las pruebas?
6. ¿Cuál sería el impacto en la sociedad mexicana (creyente) si se supiera que los datos realizados del carbono 14 en el ayate de Juan Diego mostrara que no es del siglo XVI?

Preguntas del problema 5

Para complementar la información del problema por solucionar, es necesario que los alumnos investiguen las respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es la estratósfera?
2. ¿A qué altura se encuentra la estratósfera?
3. ¿Qué es la resistencia del aire?
4. ¿Cuál es la velocidad del sonido?
5. ¿Por qué crees que una empresa como Red Bull patrocine eventos de esa magnitud?

6. ¿Qué importancia tendrá para la humanidad lograr hazañas como la realizada por Baumgartner?

Preguntas del problema 6

Para resolver el problema es necesario que los alumnos respondan a las preguntas:

1. ¿Cuáles son los valores de las razones de crecimiento de la población mexicana de los últimos 20 años?
2. ¿Cuáles podrían ser las causas por las que la razón de crecimiento ha disminuido en las últimas décadas?
3. ¿Cuál es el número de habitantes proporcionado por el INEGI en el año 2000, 2005, 2010?
4. ¿En qué podría ser útil, conocer la población esperada para cierto año?
5. Conociendo los datos esperados para cierto año, ¿qué medidas podrían llevarse a cabo para no tener a toda la población esperada? (las medidas tienen que ser lógicas, es decir, sin pensar en matanzas o exterminios por ejemplo).

Bibliografía

Aravena, M., Caamaño C. y Giménez J. (2008). Modelos Matemáticos a través de Proyectos. Revista Latinoamericana en Matemática Educativa. Volumen 11, número 001.

Barrows, H., Tamblyn, R (1980). Problem-based learning an approach to medical education. Medical Education. Volume 1. New York: Springer Publishing Company.

Barrón, B. (1998). "Doing with understanding: Lessons from research on problem- and project based learning" Journal of the Learning Sciences, 7(3&4), 271-311

Boss, S. y Krauss, J. (2007). "Reinventing project-based learning: Your field guide to real-world projects in the digital age." International Society for Technology in Education, E.U.A.

Boyce, W. y Di Prima, R. (1997). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa. México.

Calvo, I., Lopez-Guede, J.M., Zulueta, E. (2010). "Aplicando la metodología Project Based Learning en la docencia de Ingeniería Técnica en Informática de Gestión", Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria, Vol.3, Nº. 4

Castillo, S. y Cabrerizo, J. (2006). *Formación del profesorado en educación superior. Didáctica y Currículum*. McGraw-Hill. España.

CCH (1996). Programas de estudio de Cálculo Diferencial e Integral I y II de la Escuela Nacional Escuela de Ciencias y Humanidades, UNAM. México

CCH (2006). Programas de estudio del área de matemática. Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. México.

CCH-UNAM (2012). Diagnóstico del área de matemáticas para la actualización del plan y los programas de estudio del Colegio de Ciencias y Humanidades. Proceso de Actualización del Plan y los Programas de Estudio. México.

De Miguel, M. (2005) (coord.). Metodologías de enseñanza para el desarrollo de competencias. Orientaciones para el profesorado universitario ante el Espacio Europeo de Educación Superior. Madrid: Alianza.

Díaz Barriga, F. (2006). *Enseñanza Situada: vínculo entre la escuela y la vida*. Ed. Mc Graw Hill. México.

García L., Moreno, M. y Azcárate, C (2010). *EBP como metodología activa para la enseñanza del Cálculo Diferencial*.

Godino, J., Batanero C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada España.

González-Hernándo, C., Carbonero-Martin, MA., Lara-Ortega F., Martín-Villamur P. (2013). “Aprender a aprender” en la Educación Superior en Enfermería. Volumen 31 No. 3 pp. 473-479.

González, J.L., López, I., Toledo, D. (2009) “Portafolio y aprendizaje basado en problemas (ABP): Comparación en la adquisición de competencias transversales” Revista ROL de enfermería. 32(7). Pp. 51-58.

Granville, W. (1980). *Cálculo diferencial e integral.* Editorial Limusa. Grupo Noriega Editores.

Guerra, M. (2000). "¿Qué significa estudiar el bachillerato? La perspectiva de los jóvenes en diferentes contextos socioculturales" en Revista Mexicana de Investigación Educativa. Vol. 5, Núm. 10. (Julio-diciembre), p. 243-272.

Haeussler E. y Paul R. (2002). *Matemáticas para administración y economía*. Décima edición. Pearson Prentice Hall. U.S.A

Hewitt, P. (2007). Física Conceptual. Décima edición. Pearson Addison Wesley

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones. En Filloy, E. (Ed.) *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual.* México: Fondo de Cultura Económica.

Hughes-Hallet, Gleason et al (2004), *Cálculo aplicado*. Segunda edición. CECSA.

IMJUVE (2012). Encuesta Nacional de Valores en la Juventud 2012. México. Instituto Mexicano de la Juventud. Área de Investigación Aplicada y Opinión.

INEE (2010). México en PISA 2009. México.

Latorre Dardé, R. (2007). "Diseño de actividades de aprendizaje activo en la asignatura Procesos Industriales de Ingeniero Industrial" Actas del 15º Congreso de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas Valladolid, España, 18-20 de julio, 2007

Lazos, L. (2000). ¿Cómo ves? Revista de divulgación de la Ciencia de la Universidad Nacional Autónoma de México. “Un cronómetro para el pasado. Las técnicas para conocer la antigüedad de las piezas arqueológicas”. Año 2, Número 16.

Leithold, L. (1987). *El cálculo con geometría analítica 1.* Quinta edición, Editorial Harla. México.

Martinez, F.; Herrero, L.C.; De Pablo, S. (2011), "Project-Based Learning and Rubrics in the Teaching of Power Supplies and Photovoltaic Electricity," IEEE Transactions on Education, vol.54, no.1, pp.87-96.

Matsuo, K.; Anzawa, S. (2010) "Work in progress — Project practices of agile software development for undergraduate students," Frontiers in Education Conference (FIE), 2010 IEEE , vol., no., pp.S2D-1,S2D-2, 27-30

NCTM (2000). *National Council of Teachers of Mathematics.* Principles and Standards for the school Mathematics, Reston.

Ortiz, L. y Rosales, E. (2007). *La historia de un empujón: Un vistazo a las Ecuaciones Diferenciales y a los Sistemas Dinámicos*. Número 3. Temas de Matemáticas para el Bachillerato. Instituto de Matemáticas, UNAM. 2da edición.

PBL workshop. Maastricht (1999), The Netherlands: The Faculty of Psychology, Maastricht University.

Pere Ponsa, M., (2009), Aplicación del aprendizaje basado en proyectos en robótica. Catalunya, España.

Polya, G (1998). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Trillas.

Prieto, L. (2006). Aprendizaje activo en el aula universitaria: el caso del aprendizaje basado en problemas, en Miscelánea Comillas. Revista de Ciencias Humanas y Sociales Vol.64. Núm.124. Pp 173-196.

Programas de estudio de Cálculo Diferencial e Integral I y II de la Escuela Nacional Escuela de Ciencias y Humanidades.

Riverón, P. O., A. J. A. Martín, A. A. C. Gómez y M. C. Gómez (2000). Aprendizaje basado en problemas: una alternativa educativa. Revista Contexto Educativo, 3(18), Extraído el 26 de enero de 2009 de http://contexto-educativo. com.ar/2001/4/nota-02.htm

Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con geometría analítica.* Segunda edición. Grupo Editorial Ibeoroamérica. México.

Torp, L. y Sage, S. (1999). *El aprendizaje basado en problemas: desde el jardín de infantes hasta el final de la escuela secundaria*. Editores Amorrortu. Argentina.

Waner, S. y Costenoble, S. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda edición. Thomson Learning. México.

Zorrilla, J. (2008). El bachillerato: un sistema académicamente precario. Causas y consecuencias. México: UNAM.

Sitios Web

Consumo y nivel seguro del Alcohol. (2015). Biblioteca Nacional de Medicina de los Estados Unidos. {Electrónico}. {Consultado el 8 de Marzo de 2015}. Disponible en: <www.nlm.nih.gov/medlineplus/spanish/ency/article/001944.htm>

Consumo y nivel seguro del alcohol. University of Maryland Medical Center. {Electrónico}. {Consultado el 8 de diciembre de 2013}. Disponible en: <www.umm.edu/esp_ency/article/001944.htm>

En directo: Felix Baumgarrtner salta desde la Estratósfera. (2012). {Electrónico}. ABC.es. {Consultado el 17 de Octubre de 2012}. Disponible en: <http://www.abc.es/20121009/deportes/alminuto-abci-minuto-salto-baumgartner-estratosfera-201210091407.html>

Estratósfera. (2012). {Electrónico}. Astromía. {Consultado el 17 de Octubre de 2012}. Disponible en: <http://www.astromia.com/glosario/estratosfera.htm>

Fundación de investigaciones sociales A.C. Consumo de alcohol entre las chilenas 20% en dos años. (2009). {Electrónico}. {Consultado el 8 de diciembre de 2013}. Disponible en: <www.alcoholinformate.org.mx/estadisticas.cfm?articulo=353>

García, J. La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. {Electrónico}. {Consultado el 13 de noviembre de 2013}. Disponible en: <www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm#resdid>

Lois, A. y Milevicich, L. (2008). Revista Iberoamericana de Educación. *“La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento”*. *Revista Iberoamericana de educación*. Nº 47/5. Edita: Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). {Consultado el 17 de Octubre de 2012} Disponible en: <http://www.rieoei.org/index.php>

Matus, R. X. y Guzmán, J. M. (2009). Uso del aprendizaje basado en problemas en un curso de matemáticas. CETYS: Centro de Enseñanza Técnica y Superior de Baja California. Tijuana, Baja California. {Consultado el12 de noviembre de 2015} Disponible en <http://fimpes.org.mx/phocadownload/Premios/1Investigacion2009.pdf>

Misión Red Bull Stratos: Salta desde la Estratósfera Felix Baumgartner (14 de Octubre 2014). (2014). {Electrónico}. You Tube. {Consultado el 03 de Marzo de 2015}. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=7QFbC1jMres>

PISA-OCDE (2006). Análisis de los resultados de la participación de México en las pruebas PISA en 2006. {Consultado el 11 de Marzo de 2013} Disponible en: <http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/93128/2/Mex_PISA-OCDE2006.pdf>

SEP-SEMS (2008). Reforma Integral de la Educación Media Superior en México: la creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad. México: SEP-SEMS-ANUIES. {Electrónico}. {Consultado el 25 de enero de 2012}. Disponible en: <http://www.profordems.cfie.ipn.mx/profordems3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema_Nacional_Bachillerato.pdf>