UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TEMAS DESTACADOS DE LA TEORÍA DE CONTINUOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JIMMY ANEL NARANJO MURILLO

DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F., DICIEMBRE DE 2015

Índice general

Agradecimientos

Resulta difícil plasmar en unas líneas lo agradecido que estoy con tanta gente que de una u otra manera ha contribuido a elaborar esta tesis y a formarme como persona. Sin embargo, intentaré expresarles mi sentir.

Quiero agradecer a mi mamá, a mi abuela Enriqueta y a mi tía Chuy quienes aunque ya no están entre nosotros me siguen guiando desde el cielo.

A mi esposa Betty por su apoyo incondicional, por el cariño y el tiempo que me ofrece, y porque sus palabras de aliento siempre llegan en el mejor momento.

A mi hermana Kristel, a mi tía Yoli, y a mis primos Cristian y Gibran, con quienes he compartido tantos momentos y desde pequeño me han ayudado de muchas maneras (desde un jalón de orejas hasta una travesía del kínder a la casa).

A toda mi familia, por ser los cimientos sobre los cuales se forjó mi vida.

A mis amigos; Adrian, Alicia, Ana, Aranza, Diablo, Diego, Elisandro, Emmanuel, Eros, Eva, Grecia, Juan, Marlen, Maza, Nora, Oscar, Sigala y Yaneri; quienes me han acompañado a lo largo de mis estudios profesionales y me ayudaron a elaborar este trabajo.

En cuanto a mi desarrollo profesional quiero agradecerle a todos mis profesores porque cada uno me ha aportado valiosos conocimientos que llevo conmigo.

A mi tutor de la maestría, Jorge Marcos Martínez Montejano, quien desde antes de mi ingreso a la UNAM ya me había asesorado para realizar algunos trámites, y durante la maestría estuvo al pendiente de que realizara las actividades en tiempo y forma.

A mi directora de tesis, Verónica Martínez de la Vega, y al profesor Alejandro Illanes Mejía, porque gracias a su apoyo y exigencia constantes logré realizar este trabajo.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM por haberme brindado la beca de lugar.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme otorgado un estímulo económico como ayudante del investigador nacional nivel III Alejandro Illanes Mejía.

Por último, quiero agradecer a todas las personas que han sido parte de mi vida porque han aportado algo a mi formación como persona. A todos ustedes...

GRACIAS.

Introducción

En esta tesis presentamos cinco gemas de la teoría de continuos. La característica común de casi todas ellas es que son resultados populares e importantes, pero por razones que escapan a nuestro conocimiento, sus pruebas no han sido tan difundidas.

Como es costumbre en este tipo de trabajos, el primer capítulo es una recopilación de resultados que se usarán a lo largo de la tesis. Debemos advertirle al lector que estamos suponiendo que tiene conocimientos básicos de la teoría de continuos e hiperespacios. De cualquier manera ponemos referencias en los resultados para quien se interese o lo necesite.

En el segundo capítulo presentamos el teorema clásico de Kuratowski que dice que si X es un continuo irreducible cuyos subcontinuos indescomponibles tienen interior vacío, entonces existe una función con fibras conexas de interior vacío de X sobre el intervalo $[0, 1]$. Uno podría comparar este resultado con una leyenda urbana, pues todo mundo sabe que viene disperso en el segundo volumen del libro Topología de Kuratowski y que si uno se esfuerza lo puede rescatar de ese libro, y además que, como un acto de fe, todo mundo sabe que es cierto. En este trabajo lo rescatamos de su condición de leyenda. Tal vez no somos los primeros y la prueba se pueda encontrar en alguna tesis o algún trabajo que no ha sido muy difundido. Bueno, pues nosotros ofrecemos su prueba completa aquí, sin cosas innecesarias.

En el tercer capítulo presentamos la demostración de que el cubo de Hilbert es homogéneo. Aquí agradecemos a Mauricio Estebán Chacón Tirado que nos hizo ver que esta prueba es muy accesible (como se puede ver en este trabajo), nosotros completamos un poco el escrito previo de Mauricio.

En el capítulo cuatro en realidad hicimos algo que se puede considerar regresivo. Tomamos la prueba, basada en el lema de Sperner, de que las n-celdas tienen la propiedad del punto fijo (ppf), y extrajimos de ella las ideas necesarias para mostrar que una 2-celda tiene esta propiedad. ¿Por qué hicimos esto?, pues por tres razones: (a) con la prueba que presentamos se puede convencer a cualquier persona de que el cuadrado $[0, 1]^2$ tiene la ppf en un dos por tres, (b) la mayoría de los matemáticos piensan que para probar este teorema para $[0, 1]^2$ se tiene que aprender la teoría básica del grupo fundamental (o de unicoherencia). En realidad, la prueba que damos aquí muestra que este teorema es relativamente elemental, (c) si hubiéramos escrito el teorema en toda su generalidad (para toda n), hubieramos tenido que hacer un capítulo largo con bastantes cuentas y hubiéramos roto con la filosofía con la que nos propusimos hacer este trabajo, a saber, mostrar pruebas relativamente sencillas de resultados importantes de la teoría de los continuos.

En el capítulo cinco, desarrollamos la teoría básica de las selecciones definidas en el hiperespacio de subcontinuos de un continuo. Incluimos este tema, no sólo porque contiene algunas ideas simples y poderosas, sino porque rescata la filosofía con la que crearon los lagos de Wada. Recordemos que éstos surgieron para resolver el problema de encontrar n regiones en el plano con frontera común. Esta propiedad de los lagos de Wada es la idea clave para definir selecciones abiertas para ciertos continuos.

El capítulo seis está dedicado a mostrar la existencia de continuos hereditariamente indescomponibles de dimensiones mayores que uno. El teorema que prueba esto se debe a RH Bing y también se maneja en el ambiente como una leyenda urbana. Todo mundo sabe que es cierto, pero pocos revisan la prueba porque suponen que es muy complicada. Por esas razones lo incluimos aquí. Como se puede ver a pesar del misterio que envuelve a estos continuos, la demostración de este teorema no es tan elaborada. Como es de sospecharse, en esta prueba se tienen que usar resultados de la teoría de la dimensión. No es nuestra intención hacer en esta tesis un minicurso de dimensión, por lo que esperamos que el lector tenga preparación en este tema o, en su defecto crea los resultados respectivos, que como casi siempre ocurre en esta área, son bastante naturales.

Es importante mencionar aquí que también trabajamos para presentar la función f, del intervalo $[0,1]$ en él mismo, que produce el seudoarco cuando se toma $\lim_{\leftarrow}\{[0,1],f\}$. Lo hicimos porque en las notas no publicadas de Wayne Lewis aparece como si fuera relativamente simple y accesible. Pero como siempre, el diablo está en los detalles. Cuando intentamos escribir la prueba claramente, nos dimos cuenta que W. Lewis omitió aclarar muchas cosas, además también acudimos al trabajo original y vimos que está más enredado todavía. Como nuestra intención es la de poner temas que no sean demasiado elaborados, después de dedicarle un buen rato, desistimos de presentar este tema.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos definiciones, notación básica y resultados que usaremos en esta tesis. La mayoría de los lemas y teoremas que mencionaremos en este capítulo no serán demostrados pues se perdería el objetivo de este trabajo; sin embargo, para su tranquilidad, le podemos decir que son resultados bastante conocidos y que se darán las referencias pertinentes en cada caso.

Sean X un espacio topólogico y A un subconjunto de X. Denotaremos por $Int_X(A)$ al interior de A en X, y cuando no haya confusión respecto al espacio escribiremos simplemente $Int(A)$. En la mayor parte del trabajo usaremos $\overline{A}$ para denotar a la cerradura de A en X, y en un par de ocasiones usaremos $Cl_X(A)$ para hacer énfasis de que se trata de la cerradura de A en el espacio X. La frontera de A en X la denotaremos por $Fr_X(A)$, y cuando no se preste a confusión simplemente escribiremos $Fr(A)$. Para denotar el complemento de A en X usaremos $X \setminus A$.

Los continuos son los espacios sobre los cuales nos moveremos, así que presentamos su definición. Un *continuo* es un espacio topológico métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Un *subcontinuo* de un continuo X es un subconjunto conexo, cerrado y no vacío de X. Notemos que a diferencia de los continuos, los subcontinuos pueden constar de un solo punto.

El siguiente teorema nos proporciona una manera de construir continuos, su prueba es bastante sencilla y usted puede verificarla en [1, Teorema 1.1, pág. 11].

Teorema 1.1 *Si X es un continuo y A_1, $A_2, ...$ son subcontinuos de X tales que $A_1 \supset A_2 \supset ...$, entonces el conjunto $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ...$ es un subcontinuo de X.*

Sea X un continuo con métrica d. Los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular. Los más estudiados son:

$$
\begin{aligned}
2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\
C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\
F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \ (n \in \mathbb{N}), \\
C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \ (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}
$$

Si $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$ definimos la *bola de radio ε centrada en p y la nube de radio ε centrada en A*, respectivamente, como:

$$B(\varepsilon, p) = \{x \in X : d(p, x) < \varepsilon\},$$
$$N(\varepsilon, A) = \{q \in X : \text{existe } x \in A \text{ tal que } d(x, q) < \varepsilon\}.$$

Dados A, $B \in 2^X$ definimos

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

En [1, Proposición 2.1, pág. 22] usted puede consultar la demostración de que H es una métrica para 2^X, y como éste contiene a todos los demás hiperespacios, entonces tenemos una métrica en cada uno de ellos, llamada la *métrica de Hausdorff.* Si $A \in 2^X$ (o en algún otro hiperespacio) y $\varepsilon > 0$, similarmente a lo hecho con los puntos de X, usaremos $B(\varepsilon, A)$ para denotar a la bola de radio ε centrada en A con la métrica de Hausdorff, es decir,

$$B(\varepsilon, A) = \{C \in 2^X : H(A, C) < \varepsilon\}.$$

El siguiente lema es conocido como el Principio de Brouwer, lo usaremos para esquivar el lema de Zorn y su prueba se encuentra en [2, Teorema 4.8, pág. 34]

Lema 1.2 (Principio de Brouwer) *Sea X un espacio con una base numerable. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos cerrados de X que satisface que para cada sucesión anidada $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$ (es decir $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$) existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $M \in \mathcal{A}$ que es minimal con respecto a la inclusión, esto quiere decir que M no contiene propiamente a ningún elemento de $\mathcal{A}$.*

Los siguientes dos resultados son tan usados que hasta se les conoce con un nombre en particular, pero si usted no los recuerda, puede consultarlos en [3, Teorema 5.6, pág. 74] y en [3, Proposición 6.3, pág. 88], respectivamente.

Teorema 1.3 (Teorema de los golpes en la frontera) *Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si A es una componente de E, entonces $\overline{A} \cap Fr\,(E) \neq \emptyset$.*

Lema 1.4 (Lema de las orejas) *Sean X un espacio conexo y C un subconjunto conexo de X. Si U y V son conjuntos separados en X (es decir $\overline{U} \cap V = \emptyset = U \cap \overline{V}$) tales que $X \setminus C = U \cup V$, entonces $C \cup U$ y $C \cup V$ son conexos.*

Dados dos continuos X y Y, se dice que una función continua $f : X \to Y$ es *monótona* si es suprayectiva y $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$. Respecto a las funciones monótonas se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *Sean X y Y dos continuos. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es monótona si y sólo si $f^{-1}(C)$ es conexo para todo subconjunto conexo C de Y.*

Demostración. Supongamos que f es monótona y supongamos que C es un subconjunto de Y tal que $f^{-1}(C)$ no es conexo en X. Entonces existen dos conjuntos no vacíos A y B de X tales que $f^{-1}(C) = A \cup B$, $Cl_X(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap Cl_X(B) = \emptyset$.

Si $y \in C$ y $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, como $f^{-1}(y)$ es un conexo contenido en $A \cup B$, $f^{-1}(y) \subset A$. Análogamente, si $y \in C$ y $f^{-1}(y) \cap B \neq \emptyset$, $f^{-1}(y) \subset B$. Sean $M = \{y \in C : f^{-1}(y) \subset A\}$ y $N = \{y \in C : f^{-1}(y) \subset B\}$.

Dada $a \in A$, sea $y = f(a)$, entonces $y \in C$ y $a \in f^{-1}(y)$. Así que $A \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ y entonces $f^{-1}(y) \subset A$. Esto muestra que $y \in M$ y que $a \in f^{-1}(M)$. Por tanto $A \subset f^{-1}(M)$. Por otra parte, si $p \in f^{-1}(M)$, entonces $y = f(p) \in M$ y $p \in f^{-1}(y) \subset A$. Así que $f^{-1}(M) \subset A$. Esto prueba que $A = f^{-1}(M)$. Similarmente, $B = f^{-1}(N)$.

Se tiene que M y N son subconjuntos no vacíos (porque A y B son no vacíos) de Y tales que $C = M \cup N$. Veamos que son mutuamente separados en Y. Supongamos que existe $y \in Cl_Y(M) \cap N$. Como $y \in N$, $f^{-1}(y) \subset B$. Como $y \in Cl_Y(M)$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de M que converge a y. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(y_n) \subset A$. Como f es suprayectiva, podemos tomar $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Como X es compacto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$. Entonces $x \in Cl_X(A)$, y por la continuidad de f, $f(x) = y$. Entonces $x \in Cl_X(A) \cap f^{-1}(y) \subset Cl_X(A) \cap B$, lo cual es una contradicción. Por tanto $Cl_Y(M) \cap N = \emptyset$, y similarmente se prueba que $M \cap Cl_Y(N) = \emptyset$. Por tanto, hemos probado que C no es conexo.

Hemos probado que si C es conexo, entonces $f^{-1}(C)$ es conexo. Esto termina la prueba de la implicación ($\Rightarrow$).

Para probar ($\Leftarrow$), notemos que si $f^{-1}(C)$ es conexo para todo subconjunto conexo C de Y, en particular tenemos que $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$. $\blacksquare$

Dados un continuo X y un elemento $p \in X$, se dice que p *separa a* X si existen dos subconjuntos abiertos ajenos y no vacíos U y V de X tales que $X \setminus \{p\} = U \cup V$. Respecto a esta propiedad usaremos los siguientes dos resultados, cuyas demostraciones se encuentran en [3, Teorema 6.6, pág. 89] y en [3, Teorema 6.17, pág. 96], respectivamente.

Teorema 1.6 *Cada continuo tiene al menos dos puntos que no lo separan.*

Teorema 1.7 $[0,1]$ *es el único continuo (salvo homeomorfismos) con exactamente dos puntos que no lo separan.*

Capítulo 2

Continuos irreducibles

Como habíamos anunciado en la introducción, este capítulo está dedicado a probar el teorema clásico de Kuratowski que dice que si X es un continuo irreducible entre dos puntos y sus subcontinuos indescomponibles tienen interior vacío, entonces existe una función continua, suprayectiva y monótona de X en $[0,1]$ tal que sus fibras tienen interior vacío.

La existencia de esta función no caracteriza a tales continuos, pues la primera proyección $\pi : [0,1]^2 \to [0,1]$ tiene todas las propiedades mencionadas y, por supuesto, el espacio $[0,1]^2$ no es irreducible.

Estos continuos han sido muy usados en la investigación de los continuos, una de las razones por las que esto ocurre es porque sus subcontinuos tiene un comportamiento relativamente simple: o son subcontinuos de una fibra (y entonces tiene interior vacío) o casi son bloques de fibras.

Los modelos más simples para este tipo de continuos son las compactaciones del rayo $[0,\infty)$ o "sumas lineales"de compactaciones del rayo.

En todo este capítulo, siempre que denotemos un espacio como X, supondremos que es métrico y separable, a menos que especifiquemos lo contrario.

2.1. Irreducibilidad

Un espacio conexo X es *irreducible entre los puntos a y b* si ningún subconjunto propio cerrado y conexo de X los contiene a ambos. El punto a (y también b) es un *punto de irreducibilidad de X*. En otras palabras, el espacio es irreducible con respecto a la propiedad de ser un subconjunto cerrado y conexo que contiene a $\{a,b\}$. Un espacio conexo X es *irreducible* si contiene a dos puntos a y b tales que X es irreducible entre a y b.

Como primer ejemplo de espacio irreducible tenemos el intervalo $[0,1]$, el cual es irreducible entre sus extremos. Otro ejemplo es el continuo $sen(\frac{1}{x})$, que es irreducible entre el punto (1,sen(1)) y entre cada punto $(0,y)$, donde $-1 \leq y \leq 1$ (vea [7, pág. 190]).

Teorema 2.1 *Sea X un continuo. Si a y b son dos puntos cualesquiera de X, entonces existe un subcontinuo irreducible entre ellos.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{B \subset X : B \text{ es subcontinuo de } X \text{ y } a, b \in B\}$. Como $X \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de subconjuntos cerrados de X. Consideremos una sucesión anidada $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}$ (es decir $A_1 \supset A_2 \supset ...$). Si se define $A := \cap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, por el Teorema 1.1 se tiene que A es un subcontinuo de X y $a, b \in A$, de donde $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces por el Principio de Brouwer existe $M \in \mathcal{F}$ que es minimal con respecto a la inclusión. Por lo tanto M es un subcontinuo irreducible entre a y b. ■

Teorema 2.2 *Sean X y Y continuos. Si $f : X \to Y$ es una función continua tal que $f(X)$ es irreducible entre dos puntos, entonces X contiene un subcontinuo C irreducible entre dos puntos tal que $f(C) = f(X)$.*

Demostración. Sean $x, y \in f(X)$ tales que $f(X)$ es irreducible entre x y y. Luego, existen puntos $a, b \in X$ tales que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Por el Teorema 2.1, existe un subcontinuo C de X que es irreducible entre a y b. Entonces $f(C)$ es un subcontinuo de $f(X)$ que contiene a $\{x, y\}$. Por lo tanto $f(C) = f(X)$. ■

Teorema 2.3 *Sean X y Y continuos. Si X es irreducible entre a y b, y $f : X \to Y$ es una función monótona, entonces Y es irreducible entre $f(a)$ y $f(b)$.*

Demostración. Sea C un subcontinuo de Y tal que $f(a), f(b) \in C$. Como f es monótona, $f^{-1}(C)$ es un subcontinuo de X que contiene a los puntos a y b. Así que por hipótesis, $f^{-1}(C) = X$. Entonces, como f es suprayectiva, se tiene que $C = f\left(f^{-1}(C)\right) = f(X) = Y$. Por lo tanto Y es irreducible entre $f(a)$ y $f(b)$. ■

2.2. Espacios irreducibles

En toda esta sección X denotará un espacio conexo e irreducible entre los puntos a y b. Observemos que no estamos pidiendo que X sea un continuo.

Teorema 2.4 *Si C es un subconjunto conexo de X que contiene a los puntos a y b, entonces C es irreducible entre ellos.*

Demostración. Sea F un subconjunto conexo y cerrado en C tal que $a, b \in F$. Se tiene que $Cl_X(F)$ es un subconjunto conexo y cerrado en X, de donde $Cl_X(F) = X$. Entonces $F = Cl_C(F) = Cl_X(F) \cap C = X \cap C = C$. Por lo tanto, C es irreducible entre a y b. ■

Teorema 2.5 *No existen dos subconjuntos cerrados y conexos A y B de X tales que $X = A \cup B$, $a \in A \cap B$ y $A \neq X \neq B$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que sí existen tales conjuntos. Como A y B juegan papeles simétricos, podemos suponer que $b \in A$. Entonces $a, b \in A$, lo cual contradice que X es irreducible entre a y b. ■

Teorema 2.6 *Sea C un subconjunto conexo y cerrado de X. Si $X \setminus C$ no es conexo, entonces es la unión de dos subconjuntos abiertos conexos U y V de X, tales que $a \in U$ y $b \in V$. Si $a \in C$ o $b \in C$, entonces $X \setminus C$ es conexo.*

Demostración. Si $X \setminus C$ no es conexo, entonces existen dos abiertos ajenos no vacíos U y V de X tales que $X \setminus C = U \cup V$. Por el Lema de las orejas, $A := C \cup U$ y $B := C \cup V$ son conexos, y además son cerrados en X. Entonces $X = A \cup B$, $A \cap B = C$ y $A \neq X \neq B$, así que por el Teorema 2.5, $a \notin A \cap B = C$ y $b \notin A \cap B$. Por lo tanto, $\{a, b\} \subset X \setminus C$ y la segunda parte del teorema queda demostrada.

Por la irreducibilidad, $\{a, b\} \nsubseteq A$ y $\{a, b\} \nsubseteq B$. Supongamos $a \in A$ y $b \notin A$. Como A es un conexo y cerrado de X que contiene a a, por lo que se probó en el párrafo anterior se tiene que $V = X \setminus A$ es conexo y contiene a b. Análogamente $U = X \setminus B$ es conexo y $a \in U$. ■

Teorema 2.7 *Si A y B son subconjuntos cerrados y conexos de X tales que $a \in A$ y $b \in B$, entonces $X \setminus (A \cup B)$ es conexo.*

Demostración. Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es un subconjunto conexo y cerrado de X que contiene a $\{a, b\}$, así que $A \cup B = X$ y $X \setminus (A \cup B) = \emptyset$ es conexo.

Ahora supongamos que $A \cap B = \emptyset$. El conjunto $C = X \setminus A$ es conexo por el Teorema 2.6 y $B \subset C$. Supongamos que existen abiertos ajenos U y V de X tales que $C \setminus B = X \setminus (A \cup B) = U \cup V$. Por el Lema de las orejas aplicado al subespacio C, $B \cup U$ y $B \cup V$ son conexos, así que también lo son $B \cup \overline{U}$ y $B \cup \overline{V}$. Se tiene que $X = A \cup B \cup \overline{[X \setminus (A \cup B)]} = A \cup B \cup \overline{(U \cup V)}$ y $A \cap B = \emptyset$, así que la conexidad de X implica que $A \cap \overline{(U \cup V)} \neq \emptyset$. Si $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$, entonces $A \cup B \cup \overline{U}$ es un subconjunto conexo y cerrado de X que contiene a $\{a, b\}$, por lo que es igual a X. Así, $V \subset X \setminus (A \cup B) \subset \overline{U}$ y por lo tanto $V = \emptyset$. Similarmente, si $A \cap \overline{V} \neq \emptyset$ se obtiene que $U = \emptyset$. Por lo tanto $X \setminus (A \cup B)$ es conexo. ■

Teorema 2.8 *Sea C un subconjunto cerrado y conexo de X. Entonces $Int(C)$ es conexo.*

Demostración. Si $C = X$ el resultado es inmediato.

Ahora, si $C \neq X$, entonces $\{a, b\} \nsubseteq \dot{C}$. Supongamos que $a \in X \setminus C$. Si $X \setminus C$ es conexo, su cerradura también lo es, y $a \in \overline{X \setminus C}$. Así que por el Teorema 2.6, $Int\,(C) = X \setminus \left(\overline{X \setminus C}\right)$ es conexo. Por otro lado, si $X \setminus C$ no es conexo, por el Teorema 2.6 existen subconjuntos abiertos conexos U y V de X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $X \setminus C = U \cup V$. Tomando $A = \overline{U}$ y $B = \overline{V}$ en el Teorema 2.7 se obtiene que $Int\,(C) = X \setminus \left(\overline{X \setminus C}\right) = X \setminus \left(\overline{U \cup V}\right) = X \setminus \left(\overline{U} \cup \overline{V}\right)$ es conexo. ■

Teorema 2.9 *Si C es un subconjunto cerrado y conexo de X tal que $a \in Fr(C)$, entonces C es denso en ninguna parte (esto significa que $Int(Cl_X(C)) = \emptyset$).*

Demostración. Como $a \in Fr(C) \subset \overline{C} = C$, por el Teorema 2.6, $X \setminus C$ es conexo. Entonces $X = C \cup \left(\overline{X \setminus C}\right)$, donde C y $\overline{X \setminus C}$ son dos conexos y cerrados en X tales que $a \in Fr(C) = C \cap \left(\overline{X \setminus C}\right)$. Luego, por el Teorema 2.5, $C = X$ o $\overline{X \setminus C} = X$. Como $a \in Fr(C)$ y $Fr(X) = \emptyset$, $C \neq X$. Por lo tanto, $\overline{X \setminus C} = X$, de donde, $Int(\overline{C}) = Int(C) = X \setminus \left(\overline{X \setminus C}\right) = \emptyset$. ■

Teorema 2.10 *Si C es un subconjunto propio cerrado y conexo de X tal que $a \in C$, entonces $\overline{X \setminus C}$ es irreducible entre b y cada punto de $Fr(C)$. En particular, si C es denso en ninguna parte, el espacio X es irreducible entre b y cada punto de C.*

Demostración. Como $C \neq X$ y $a \in C$, se tiene que $b \in X \setminus C$. El Teorema 2.6 asegura que $X \setminus C$ es conexo, y entonces $\overline{X \setminus C}$ es un subconjunto conexo que contiene a b y a $Fr(C)$. Además, $Fr(C) \neq \emptyset$ porque X es conexo. Sean $x \in Fr(C)$ y F un subconjunto conexo y cerrado de $\overline{X \setminus C}$ tales que $b, x \in F$. Como $\overline{X \setminus C}$ es un cerrado de X, también F lo es. Como $x \in Fr(C) \cap F \subset C \cap F$, se tiene que $C \cup F$ es un subconjunto conexo y cerrado de X que contiene a los puntos a y b, de donde $C \cup F = X$. Entonces $X \setminus C \subset F$ y $\overline{X \setminus C} \subset F$. Por lo tanto $\overline{X \setminus C} = F$, lo cual concluye la demostración. ■

2.3. Dominios cerrados

Al igual que en la sección anterior, en ésta X denotará un espacio conexo irreducible entre los puntos a y b.

En esta sección es necesario un poco de conocimiento de ciertos subconjuntos de X llamados dominios cerrados. Por esta razón, a continuación presentamos algunas de sus propiedades. Por definición, D es un *dominio cerrado* de X si $D = \overline{Int(D)}$ (recuerde que $Int(E) = X \setminus \left(\overline{X \setminus E}\right)$ para todo subconjunto E de X). Algunas propiedades de los dominios cerrados son:

1. Los dominios cerrados también pueden ser definidos como las cerraduras de conjuntos abiertos. Es decir, D es dominio cerrado si y sólo si existe un abierto G tal que $D = \overline{G}$.

   Demostración. (Necesidad) Se obtiene tomando $G = Int(D)$.
   (Suficiencia) Se tiene que $G \subset Int(D) \subset D$, lo cual implica que $D = \overline{G} \subset \overline{Int(D)} \subset \overline{D} = D$, y así $D = \overline{D} = \overline{Int(D)}$. ■

2. La propiedad $Fr(D) \subset \overline{Int(D)}$ diferencía a los dominios cerrados de los conjuntos cerrados. Esto es, D es dominio cerrado si y sólo si D es cerrado y $Fr(D) \subset \overline{Int(D)}$.

   Demostración. (Necesidad) $Fr(D) \subset \overline{D} = D = \overline{Int(D)}$.
   (Suficiencia) $D = \overline{D} = Fr(D) \cup Int(D) \subset Fr(D) \cup \overline{Int(D)} = \overline{Int(D)} \subset \overline{D} = D$. ■

3. Si D es dominio cerrado, entonces $Fr(D) = Fr(\overline{X \setminus D}) = Fr(Int(D))$.

   Demostración. De la definición de frontera y usando que D es dominio cerrado, tenemos que $Fr(D) = \overline{D} \cap \left(\overline{X \setminus D}\right) = D \cap \left(\overline{X \setminus D}\right) = \overline{Int(D)} \cap (\overline{X \setminus D}) = \left(\overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus D}\right)}\right) \cap (\overline{X \setminus D})$, lo cual es igual a $Fr(\overline{X \setminus D})$. Así que se tiene la igualdad $Fr(D) = Fr(\overline{X \setminus D})$. Como la frontera de un conjunto es igual a la frontera de su complemento, se tiene que $Fr(\overline{X \setminus D}) = Fr\left(X \setminus \left(\overline{X \setminus D}\right)\right) = Fr(Int(D))$. ■

4. La unión de dos dominios cerrados es un dominio cerrado, y un resultado más general es: si $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de dominios cerrados, entonces $(\bigcup\{D_\alpha : \alpha \in A\})^-$ es un dominio cerrado.

   Demostración. Para simplificar la demostración, en lugar de $\bigcup\{D_\alpha : \alpha \in A\}$, escribiremos $\bigcup D_\alpha$.
   Dado $\beta \in A$, se tiene que $D_\beta \subset \bigcup D_\alpha$ y al tomar la cerradura, luego el interior y de nuevo la cerradura, se obtiene $[Int(\overline{D_\beta})]^- \subset [Int(\overline{\bigcup D_\alpha})]^-$. Entonces $\bigcup[Int(\overline{D_\alpha})]^- \subset [Int(\overline{\bigcup D_\alpha})]^-$. Luego $\bigcup D_\alpha = \bigcup[Int(D_\alpha)]^- \subset \bigcup[Int(\overline{D_\alpha})]^- \subset [Int(\overline{\bigcup D_\alpha})]^-$, ya que cada D_α es un dominio cerrado. Así, $[\bigcup D_\alpha]^- \subset [Int(\overline{\bigcup D_\alpha})]^-$ y se tiene que $Fr[\overline{\bigcup D_\alpha}] \subset [Int(\overline{\bigcup D_\alpha})]^-$. Por lo tanto, por la propiedad 2, $\overline{\bigcup D_\alpha}$ es un dominio cerrado. ■

La familia de dominios cerrados conexos de X que contienen al punto a, aumentada con el conjunto vacío, será denotada $\mathcal{D}(X,a)$. Es decir,

$$\mathcal{D}(X,a) = \{D \subset X : D \text{ es conexo, } D = \overline{Int(D)} \text{ y } a \in D\} \cup \{\emptyset\}.$$

Teorema 2.11 *Si $D \in \mathcal{D}(X,a)$ y $\emptyset \neq D \neq X$, entonces D es irreducible entre a y cualquier punto de $Fr(D)$.*

Demostración. Dado que X es irreducible entre a y b, y D es un subconjunto propio cerrado y conexo de X que contiene a a, se sigue que $b \notin D$. Luego, por el Teorema 2.6, $\overline{X \setminus D}$ es un subconjunto conexo de X que contiene a b, y además es distinto de X, ya que en caso contrario se tendría que $D = \overline{Int(D)} = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus D}\right)} = \emptyset$, lo cual es falso. Entonces por el Teorema 2.10, $\overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus D}\right)}$ es irreducible entre a y cada punto de $Fr(\overline{X \setminus D})$. Como $D = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus D}\right)}$ y, por la propiedad 3 de dominios cerrados, $Fr(D) = Fr(\overline{X \setminus D})$, se concluye que D es irreducible entre a y cada punto de $Fr(D)$. ■

Teorema 2.12 *$\mathcal{D}(X,a)$ es una familia estrictamente monótona. Esto quiere decir que si $A, D \in \mathcal{D}(X,a)$ y $A \neq D$, se tiene que $A \subset Int(D)$ o $D \subset Int(A)$.*

Demostración. Como $\emptyset \subset Int(A)$, podemos suponer que $D \neq \emptyset$. Entonces $a \in D$. Supongamos que $A \not\subset Int(D)$.

Se tiene que $\emptyset \neq A \cap (X \setminus Int(D)) = A \cap \left(\overline{X \setminus D}\right)$. Por otro lado, D contiene a a y es distinto de X (ya que $A \not\subset Int(D)$), de donde $\overline{X \setminus D}$ contiene a b y es conexo por el Teorema 2.6. Luego $A \cup \left(\overline{X \setminus D}\right)$ es un subconjunto conexo y cerrado de X que contiene a $\{a,b\}$, así que debe ser igual a X. Entonces $X \setminus \left(\overline{X \setminus D}\right) \subset A$, y de aquí, $D = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus D}\right)} \subset \overline{A} = A$. Si existiera un elemento $x \in D \cap Fr(A)$, entonces D sería un subconjunto propio ($A \neq D$, por hipótesis del teorema) conexo y cerrado de A que contiene a $\{a,x\}$, lo cual contradiría el Teorema 2.11. Por lo tanto $D \subset Int(A)$. ■

Teorema 2.13 *La familia $\mathcal{D}(X,a)$ no tiene huecos. Esto quiere decir que si ordenamos a $\mathcal{D}(X,a)$ por la contención y $\mathcal{D}(X,a)$ se descompone en dos familias no* *vacías $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ tales que cada elemento de $\mathcal{D}_1$ es subconjunto de cada elemento de $\mathcal{D}_2$, entonces existe un elemento de $\mathcal{D}(X,a)$ que, o bien es el primer elemento de $\mathcal{D}_2$ o es el último elemento de $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Sea $D_0 = \overline{\bigcup\{D : D \in \mathcal{D}_1\}}$. Por la propiedad 4 de dominios cerrados, D_0 es un dominio cerrado. Si $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset\}$, entonces $D_0 = \emptyset \in \mathcal{D}(X,a)$. Si $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$, entonces $D_0 = \overline{\bigcup\{D : D \in \mathcal{D}_1 \setminus \{\emptyset\}\}}$ es la cerradura de una unión de conexos que tienen a a, por lo que D_0 es conexo y $D_0 \in \mathcal{D}(X,a)$. En cualquier caso, $D_0 \in \mathcal{D}(X,a) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Si $D_0 \in \mathcal{D}_1$, como contiene a todos los elementos de $\mathcal{D}_1$, tenemos que es su máximo. Si $D_0 \in \mathcal{D}_2$, dada $E \in \mathcal{D}_2$, $D \subset E$ para toda $D \in \mathcal{D}_1$, así que $D_0 \subset E$, por lo que D_0 es el mínimo de $\mathcal{D}_2$. ■

Lema 2.14 *Si el espacio X es irreducible entre a y b, al igual que entre c y d, entonces también es irreducible entre a y c, o entre b y c.*

Demostración. Supongamos por el contrario que X no es irreducible entre a y c ni entre b y c. Entonces existen subconjuntos propios conexos y cerrados, K y L, de X tales que $c \in K \cap L$, $a \in K$ y $b \in L$. Luego, como X es irreducible entre c y d, se tiene que $d \in (X \setminus K) \cap (X \setminus L) = X \setminus (K \cup L)$, así que $K \cup L \neq X$, lo cual es una contradicción ya que $a, b \in K \cup L$. ■

Teorema 2.15 *Se cumple que $\mathcal{D}(X,b)$, la colección de todos los dominios cerrados conexos de X que contienen al punto b (aumentada con el conjunto vacío), coincide con la familia de conjuntos $\overline{X \setminus D}$ donde $D \in \mathcal{D}(X,a)$. Con otra notación, si se define $M_D := \overline{X \setminus D}$, entonces $\mathcal{D}(X,b) = \{M_D \subset X : D \in \mathcal{D}(X,a)\}$. Además, si c es un punto de irreducibilidad del espacio X, la familia $\mathcal{D}(X,c)$ de dominios cerrados conexos de X que contienen a c (aumentada con el conjunto vacío) coincide con $\mathcal{D}(X,a)$ o con $\mathcal{D}(X,b)$.*

Demostración. Para la primera parte del teorema, sea $D \in \mathcal{D}(X,a)$. Si $D \in \{\emptyset, X\}$ trivialmente $M_D \in \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{D}(X,b)$. Ahora, cuando $\emptyset \neq D \neq X$, por el Teorema 2.6, se tiene que M_D es un subconjunto conexo y cerrado de X que además contiene a b (pues $D \neq X$). Entonces usando la definición de M_D y que D es un dominio cerrado, se obtiene $\overline{Int(M_D)} = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus M_D}\right)} = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus (\overline{X \setminus D})}\right)} = \overline{X \setminus D} = M_D$, de donde M_D es un dominio cerrado de X, así que es un elemento de $\mathcal{D}(X,b)$. Por otro lado, si $M \in \mathcal{D}(X,b)$, análogamente a lo anterior se prueba que $\overline{X \setminus M} \in \mathcal{D}(X,a)$, y como M es dominio cerrado de X, se tiene que $M = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus M}\right)} = M_{\overline{X \setminus M}}$, lo cual concluye la demostración de la primera parte del teorema.

Para la segunda parte del teorema, sea c un punto de irreducibilidad de X. Entonces, por el Lema 2.14, X es irreducible entre a y c, o entre b y c. Así que, en el primer caso $\mathcal{D}(X,c) = \{M_D \subset X : D \in \mathcal{D}(X,a)\} = \mathcal{D}(X,b)$, y en el segundo caso $\mathcal{D}(X,c) = \{M_E \subset X : E \in \mathcal{D}(X,b)\} = \mathcal{D}(X,a)$. ■

Dado $D \in \mathcal{D}(X,a)$, sean

$$I_D := \{x \in D : D \text{ es irreducible entre } a \text{ y } x\},$$
$$J_D := \{x \in M_D : M_D \text{ es irreducible entre } b \text{ y } x\}.$$

Teorema 2.16 *Si $A, B, D \in \mathcal{D}(X, a)$, se satisface:*
(a) $D = \overline{X \setminus M_D}$, $Fr(D) = Fr(M_D) = D \cap M_D = I_D \cap J_D$,
(b) si $A \subsetneq B$, entonces $A \cap I_B = \emptyset = M_B \cap J_A$ y $A \cap M_B = \emptyset$,
(c) si $A \subsetneq B$, entonces $I_A \cap I_B = \emptyset = J_A \cap J_B$ y $I_A \cap J_B = \emptyset$,
(d) si $A \subsetneq B \subsetneq D$, entonces $I_D \cap J_A = \emptyset$.

Demostración.
(a) Como $\overline{X \setminus M_D} = \overline{X \setminus (\overline{X \setminus D})} = \overline{Int(D)} = D$, $M_D = \overline{X \setminus D}$ y $D = \overline{X \setminus M_D}$, se tiene que $Fr(D) = D \cap \left(\overline{X \setminus D}\right) = D \cap M_D = \left(\overline{X \setminus M_D}\right) \cap M_D = Fr(M_D)$. Por Teorema 2.11, $Fr(D) \subset I_D$ y $Fr(M_D) \subset J_D$ (aun en los casos en que $D \in \{\emptyset, X\}$), lo que implica que $Fr(D) = Fr(M_D) \subset I_D \cap J_D$. Por otro lado, $I_D \cap J_D \subset D \cap M_D = Fr(D)$.
(b) Si $x \in I_B$, entonces x no puede estar en A porque si ocurriera que $x \in A$ se contradiría la definición de I_B, así que $A \cap I_B = \emptyset$. Como $A \subsetneq B$, $M_B = \overline{X \setminus B} \subset \overline{X \setminus A} = M_A$, y esta última contención es propia, ya que de darse la igualdad, el inciso (a) implicaría que $B = A$, lo que es un absurdo, de modo que $M_B \subsetneq M_A$, similar a lo anterior se tiene que $M_B \cap J_A = \emptyset$. La parte restante se cumple ya que por Teorema 2.12 $A \subset Int(B) = X \setminus \left(\overline{X \setminus B}\right) = X \setminus M_B$.
(c) Usando (b), $I_A \cap I_B \subset A \cap I_B = \emptyset$, $J_A \cap J_B \subset J_A \cap M_B = \emptyset$ e $I_A \cap J_B \subset A \cap M_B = \emptyset$.
(d) Por (b), se tiene que $M_B \cap J_A = \emptyset$ y $B \cap I_D = \emptyset$, de donde $J_A \subset X \setminus M_B \subset B \subset X \setminus I_D$. Entonces $I_D \cap J_A = \emptyset$. ∎

Teorema 2.17 *Se cumple que $X = \bigcup \{I_D \cup J_D : D \in \mathcal{D}(X, a)\}$. Esto es, a cada punto $p \in X$ le corresponde un dominio cerrado conexo de X que es irreducible entre a y p, o entre b y p.*

Demostración. Sea $p \in X$. Definimos $\mathcal{D}_1 = \{D \in \mathcal{D}(X, a) : p \in X \setminus D\}$ y $\mathcal{D}_2 = \{D \in \mathcal{D}(X, a) : p \in D\}$. Las familias $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son ajenas no vacías y su unión es $\mathcal{D}(X, a)$. Dados $A \in \mathcal{D}_1$ y $B \in \mathcal{D}_2$, por el Teorema 2.12, se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$. Como la segunda contención implica que $p \in A$ y esto contradice que $A \in \mathcal{D}_1$, tenemos que $A \subset B$. Entonces por el Teorema 2.13, existe $B \in \mathcal{D}(X, a)$ tal que B es el primer elemento de $\mathcal{D}_2$ o el último elemento de $\mathcal{D}_1$.

Caso 1: $B \in \mathcal{D}_2$.

En este caso $B \subset D$, para todo $D \in \mathcal{D}_2$.
Si B es irreducible entre a y p, entonces $p \in I_B$ y ya terminamos. Supongamos entonces que B no es irreducible entre a y p. Entonces, existe un subconjunto propio conexo y cerrado C de B (y por lo tanto cerrado de X) tal que $a, p \in C$. Por el Teorema 2.8, $Int(C)$ es conexo y entonces $\overline{Int(C)}$ es un dominio cerrado conexo de X.

Veamos que $\overline{Int(C)} \in \mathcal{D}(X, a)$. Si $a \in Fr(C)$, por el Teorema 2.9, C es denso en ninguna parte, así que $Int(C) = \emptyset$ y $\overline{Int(C)} = \emptyset \in \mathcal{D}(X, a)$. Si por el contrario $a \in C \setminus Fr(C)$, entonces $a \in Int(C)$ y $\overline{Int(C)} \in \mathcal{D}(X, a)$. De cualquier modo, $\overline{Int(C)} \in \mathcal{D}(X, a)$.

Como B es el primer elemento de $\mathcal{D}_2$ y $\overline{Int(C)} \subset \overline{C} = C \subsetneq B$, se tiene que $\overline{Int(C)} \in \mathcal{D}_1$. Así, $p \in X \setminus \overline{Int(C)} = X \setminus (\overline{X \setminus (\overline{X \setminus C})}) = Int(\overline{X \setminus C}) \subset \overline{X \setminus C}$, y por lo tanto $p \in Fr(C)$ (ya teníamos que $p \in C = \overline{C}$ y acabamos de probar que $p \in \overline{X \setminus C}$). Entonces, por los Teoremas 2.6 y 2.10, $\overline{X \setminus C}$ es un dominio cerrado conexo de X, irreducible entre b y p. Entonces $\overline{X \setminus C} \in \mathcal{D}(X,b)$ y si definimos $D = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus C}\right)}$, tenemos que $D \in \mathcal{D}(X,a)$ y $p \in J_D$.

Caso 2: $B \in \mathcal{D}_1$.

En este caso $D \subset B$, para todo $D \in \mathcal{D}_1$, $p \in X \setminus B \subset M_B$ y $M_B = \overline{X \setminus B} \in \mathcal{D}(X,b)$. Si M_B es un elemento mínimo de $\mathcal{D}(X,b)$ que contiene a p, podríamos proceder como en el Caso 1 y concluir que M_B es irreducible entre p y b, lo que nos dice que $p \in J_B$ y con esto terminaríamos.

En el caso en que M_B no es mínimo, existe $N \in \mathcal{D}(X,b)$ tal que $p \in N \subsetneq M_B$. Luego, $\overline{X \setminus N} \in \mathcal{D}(X,a)$ y $B = \overline{X \setminus M_B} \subset \overline{X \setminus N}$. Esta última contención es propia porque si $\overline{X \setminus M_B} = \overline{X \setminus N}$, entonces $Int(M_B) = X \setminus \left(\overline{X \setminus M_B}\right) = X \setminus \left(\overline{X \setminus N}\right) = Int(M_N)$ y, tomando la cerradura de ambos conjuntos y usando que M_B y N son dominios cerrados, concluimos que $M_B = N$, lo cual es una contradicción. Como B es el último elemento de $\mathcal{D}_1$, se tiene que $\overline{X \setminus N} \in \mathcal{D}_2$. Por lo tanto $p \in Fr(\overline{X \setminus N})$ y por el Teorema 2.10, $\overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus N}\right)}$ es irreducible entre b y p, de donde $p \in J_{\overline{X \setminus N}}$. ■

Lema 2.18 *Si $D, E \in \mathcal{D}(X,a)$ y $D \subsetneq E$, entonces $\overline{E \setminus D}$ es conexo.*

Demostración. Si $D = \emptyset$, $\overline{E \setminus D} = E$ es conexo. Supongamos entonces que $D \neq \emptyset$. Si $E = X$, el resultado se sigue por el Teorema 2.6. Cuando $E \neq X$, se tiene que $Fr(E) \neq \emptyset$ y por el Teorema 2.11, E es irreducible entre a y cualquier punto de $Fr(E)$. Entonces, aplicando el Teorema 2.6 al espacio E y al subconjunto conexo y cerrado D de E que además contiene al punto a, se obtiene que $E \setminus D$ es conexo. Por lo tanto $\overline{E \setminus D}$ es conexo. ■

Lema 2.19 *Sea X un continuo irreducible entre a y b tal que todos sus subcontinuos indescomponibles tienen interior vacío. Entonces dados $D, E \in \mathcal{D}(X,a)$ que cumplen $D \subsetneq E$, existe $C \in \mathcal{D}(X,a)$ tal que $D \subsetneq C \subsetneq E$. En otras palabras, entre cada par de elementos de $\mathcal{D}(X,a)$ se puede encontrar uno intermedio.*

Demostración. Analizamos dos casos.

Caso 1. $D \neq \emptyset$.

Por el Teorema 2.12 se tiene que $D \subset Int(E)$, y como X es conexo, D no es abierto, así que existe $p \in Int(E) \setminus D$. Sea $U = Int(E) \setminus D$. Entonces U es abierto en X, $p \in U$ y $U \subset E \setminus D$. Así que $p \in Int(E \setminus D)$, lo cual implica que $Int(\overline{E \setminus D}) \neq \emptyset$. El Lema 2.18 garantiza que $\overline{E \setminus D}$ es un subcontinuo de X, y además se acaba de probar que su interior es no vacío. Entonces por hipótesis, $\overline{E \setminus D}$ es un subcontinuo descomponible de X, esto es, existen subcontinuos A y B de X tales que $\overline{E \setminus D} = A \cup B$ y $A \neq \overline{E \setminus D} \neq B$. Se tiene que $E = D \cup \left(\overline{E \setminus D}\right) = D \cup A \cup B$, y la conexidad de E implica que $D \cap A \neq \emptyset$ o $D \cap B \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $D \cap A \neq \emptyset$. Notemos que $E \setminus D \not\subseteq A$ y $E \setminus D \not\subseteq B$ (pues $E \setminus D \subset A$ implica que $A = \overline{E \setminus D}$). Ahora consideraremos dos subcasos:

Caso 1.1. $E \neq X$.

Si $A \cap Fr(E) \neq \emptyset$ se cumple que $D \cup A$ es un subcontinuo propio de E que tiene al punto a y toca a $Fr(E)$, lo cual contradice el Teorema 2.11. Por lo tanto

$D \cup A \subset Int(E)$. Como X es conexo, se tiene que $\emptyset \neq Fr(E) \subset B$, y usando nuevamente el Teorema 2.11, $D \cap B = \emptyset$. Como $(X \setminus B) \cap Int(E)$ es abierto y $D \neq X$, $D \subsetneq \overline{(X \setminus B) \cap Int(E)} = \overline{(X \setminus B) \cap (X \setminus (\overline{X \setminus E}))} = \overline{X \setminus \left(B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)\right)} \subset D \cup A \subsetneq E$. Definimos $C := \overline{X \setminus (B \cup (\overline{X \setminus E}))}$. Como $\emptyset \neq Fr(E) \subset B \cup (\overline{X \setminus E})$, tenemos que $B \cup (\overline{X \setminus E})$ es un subcontinuo de X que tiene a b. Por el Teorema 2.6, $C \in \mathcal{D}(X, a)$ y $D \subsetneq C \subsetneq E$.

Caso 1.2. $E = X$.

En este caso se tiene que $X = D \cup A \cup B$. Si $b \notin B$, entonces $b \in D \cup A$ y $D \cup A$ es un subcontinuo de X que contiene a a y a b. Por la irreducibilidad de X entre a y b, $D \cup A = X = E$. Entonces $E \setminus D \subset A$, lo cual no es cierto. Por lo tanto, $b \in B$. Como $a, b \in D \cup B$, si $D \cap B \neq \emptyset$, similarmente a lo anterior obtenemos que $E \setminus D \subset B$, lo cual no se cumple. Entonces $D \cap B = \emptyset$. Como X es conexo y $X \setminus B$ es un abierto distinto de X, se tiene que $D \subset X \setminus B \subsetneq \overline{X \setminus B}$. Como B es un subcontinuo propio de X que contiene a b, por el Teorema 2.10, $\overline{X \setminus B}$ es irreducible entre a y cualquier punto de $Fr(B)$. Como $X \setminus B$ es abierto en X, $\overline{X \setminus B}$ es un dominio cerrado conexo. Entonces $\overline{X \setminus B} \in \mathcal{D}(X, a)$. Además $\overline{X \setminus B} \subset \overline{D \cup A} = D \cup A \subsetneq X = E$. Por lo tanto, al tomar $C = \overline{X \setminus B}$, se cumple que $C \in \mathcal{D}(X, a)$ y $D \subsetneq C \subsetneq E$.

Caso 2. $D = \emptyset$.

Consideraremos dos subcasos:

Caso 2.1. $E \neq X$.

Como E es dominio cerrado, $E = \overline{Int(E)}$, y entonces $Int(E) \neq \emptyset$. Por hipótesis, existen subcontinuos A y B de X tales que $E = A \cup B$ y $A \neq E \neq B$. Entonces $a \in A$ o $a \in B$. Supongamos que $a \in A$. Mostraremos que $C := \overline{X \setminus \left(B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)\right)}$ satisface la conclusión del teorema. Claramente C es un dominio cerrado. Como X es conexo y $X = E \cup \left(\overline{X \setminus E}\right) = A \cup B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)$, $A \cap \left(\overline{X \setminus E}\right) \neq \emptyset$ o $B \cap \left(\overline{X \setminus E}\right) \neq \emptyset$. Por el Teorema 2.15, $\overline{X \setminus E}$ es un subcontinuo de X. Si $A \cap \left(\overline{X \setminus E}\right) \neq \emptyset$, entonces $A \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)$ es un subcontinuo de X que contiene a a y a b. Así que $A \cup \left(\overline{X \setminus E}\right) = X$ y $E = \overline{Int(E)} = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus E}\right)} \subset A$, lo cual es una contradicción. Entonces $A \cap \left(\overline{X \setminus E}\right) = \emptyset$ y $B \cap \left(\overline{X \setminus E}\right) \neq \emptyset$. Tenemos que $B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)$ es un subcontinuo de X que contiene a b. Si ocurre que $B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right) = X$, entonces $E = \overline{X \setminus \left(\overline{X \setminus E}\right)} \subset B$, y esto último no es cierto. Por tanto, $B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right) \subsetneq X$. Por el Teorema 2.10, $\overline{X \setminus \left(B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)\right)} = C$ es un subcontinuo de X, que es irreducible entre a y cualquier punto de $Fr\left(B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)\right)$. Como $X \setminus \left(B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)\right)$ es abierto, $C \in \mathcal{D}(X, a)$. Por último, dado que $X \setminus A \subset B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)$, se tiene que $X \setminus \left(B \cup \left(\overline{X \setminus E}\right)\right) \subset A$ y $C \subset \overline{A} = A \subsetneq E$. Hemos probado que $C \in \mathcal{D}(X, a)$ y que $D = \emptyset \subsetneq C \subsetneq E$.

Caso 2.2. $E = X$.

Como $Int(X) \neq \emptyset$, por hipótesis, existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Supongamos que $a \in A$. Por la irreducibilidad de X entre a y b, $b \notin A$. Entonces $b \in B$. Por el Teorema 2.10, $\overline{X \setminus B}$ es un subcontinuo irreducible entre a y cualquier punto de $Fr(B)$. Como $X \setminus B$ es abierto, $\overline{X \setminus B} \in \mathcal{D}(X, a)$ y $D = \emptyset \subsetneq \overline{X \setminus B} \subset A \subsetneq X = E$.

Como ya se han cubierto todos los casos, hemos concluido la demostración. ■

Lema 2.20 *Sea X un continuo irreducible entre a y b tal que todos sus subcontinuos indescomponibles tienen interior vacío. Entonces*

$$\bigcap\{M \subset X : M \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}\} = \{x \in X : X \text{ es irreducible entre } a \text{ y } x\}.$$

Demostración. Primero probaremos que

$$\{x \in X : X \text{ es irreducible entre } a \text{ y } x\} \subset \bigcap\{M \subset X : M \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}\}.$$

Sea $y \notin \bigcap\{M \subset X : M \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}\}$. Entonces existe $N \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $y \notin N$, de donde $\overline{N \neq X}$. La irreduciblidad de X entre a y b implica que $a \notin N$. Como $N \neq \emptyset$ y $N = \overline{Int(N)}$, tenemos que $Int(N) \neq \emptyset$, de modo que $\overline{X \setminus N} \neq X$. Así que $\overline{X \setminus N}$ es un subcontinuo propio de X que contiene a $\{a, y\}$. Por lo tanto, X no es irreducible entre a y y.

Ahora probaremos que

$$\bigcap\{M \subset X : M \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}\} \subset \{x \in X : X \text{ es irreducible entre } a \text{ y } x\}.$$

Sea $y \notin \{x \in X : X$ es irreducible entre a y $x\}$. Entonces existe un subcontinuo propio D de X tal que $a, y \in D$. Por el Teorema 2.10, $\overline{X \setminus D} \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}$. Por el Lema 2.19, existe $B \in \mathcal{D}(X,b)$ tal que $\emptyset \subsetneq B \subsetneq \overline{X \setminus D}$. Entonces $B \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}$. Si $y \in B$, entonces $B \cup D$ es un subcontinuo de X que contiene a $\{a, b\}$. De manera que $X = B \cup D$. Entonces $X \setminus D \subset B$ y $\overline{X \setminus D} \subset B$, lo cual contradice la elección de B. Esto prueba que $y \notin B$, y por lo tanto $y \notin \bigcap\{M \subset X : M \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}\}$. ■

Lema 2.21 *Sea X un continuo irreducible entre a y b tal que todos sus subcontinuos indescomponibles tienen interior vacío. Sean $D \in \mathcal{D}(X,a)$, $\emptyset \neq D \neq X$ y $p \in Fr(D)$ (el Teorema 2.11 garantiza que D es irreducible entre a y p). Entonces*

$$\bigcap\{M \subset D : M \in \mathcal{D}(D,p) \setminus \{\emptyset\}\} = \{x \in D : D \text{ es irreducible entre } a \text{ y } x\}.$$

Demostración. Vamos a aplicar el Lema 2.20 al continuo D. Sea E un subcontinuo indescomponible de D, necesitamos ver que $Int_D(E) = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe un abierto no vacío W de D tal que $W \subset E$. Sea U abierto en X tal que $U \cap D = W$. Entonces $W = U \cap \overline{Int(D)}$. Sea $q \in W$. Entonces $q \in U$ y $q \in \overline{Int(D)}$, así que $U \cap Int(D) \neq \emptyset$. Por tanto, $U \cap Int(D)$ es un abierto no vacío de X contenido en $W \subset E$. Esto contradice la hipótesis para X. Hemos visto que D satisface las hipótesis del Lema 2.20. Entonces la igualdad que queremos probar es inmediata pues sólo hay que sustituir X por D. ■

Lema 2.22 *Si X es un continuo irreducible entre a y b, entonces para todo $D \in \mathcal{D}(X,a)$, se cumple que $Int(I_D) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que existe un elemento $p \in Int(I_D)$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(\varepsilon,p)} \subset I_D$. Se tiene que $D \setminus B(\varepsilon,p)$ es un subconjunto propio de D que contiene a a, así que por el Teorema de los Golpes en la Frontera se cumple que $\overline{A} \cap Fr_D(D \setminus B(\varepsilon,p)) \neq \emptyset$, donde A es la componente de $D \setminus B(\varepsilon,p)$ que contiene a a. Sea $q \in \overline{A} \cap Fr_D(D \setminus B(\varepsilon,p))$. Entonces $d(p,q) = \varepsilon$ y $q \in I_D$. Por otro lado, como $A \subset D \setminus B(\varepsilon,p)$, se tiene que $\overline{A} \subset \overline{D \setminus B(\varepsilon,p)} \subset \overline{X \setminus B(\varepsilon,p)}$, de donde $p \notin \overline{A}$ y $\overline{A}$ es un subcontinuo propio de D que contiene a a y a q. Así, $q \notin I_D$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Int(I_D) = \emptyset$. ■

Lema 2.23 *Todo continuo linealmente ordenado es homeomorfo a* $[0,1]$.

Demostración. Sea Y un continuo linealmente ordenado, con la topología del orden. Denotemos su orden por $\leq$. Por el Teorema 1.6, existen dos elementos x, $y \in Y$ que no lo separan. Además, como $\leq$ es orden lineal, se puede suponer que $x < y$. Sea $z \in Y$ distinto de x y de y. De nuevo, ya que el orden es lineal, se tiene que $z < x$ o $x < z$, y también, $z < y$ o $y < z$. Pero $z < x$ implica que los conjuntos $U := \{p \in Y : p < x\}$ y $V := \{p \in Y : x < p\}$ son abiertos no vacíos de Y tales que $Y \setminus \{x\} = U \cup V$, lo cual contradice que x no separa a Y. Así, $x < z$; y similarmente se prueba que $z < y$. Entonces $\{p \in Y : p < z\}$ y $\{p \in Y : z < p\}$ son dos conjuntos abiertos ajenos y no vacíos de Y tales que su unión es $Y \setminus \{z\}$, lo cual significa que z separa a Y. Por lo tanto, Y tiene exactamente dos puntos que no lo separan y entonces el Teorema 1.7 asegura que Y es homeomorfo a $[0,1]$. ■

2.4. Teorema principal

El siguiente teorema es la conclusión de este capítulo.

Teorema 2.24 *Sea X un continuo irreducible entre a y b tal que todos sus subcontinuos indescomponibles tienen interior vacío. Entonces existe una función monótona $f : X \to [0,1]$ tal que $Int\left(f^{-1}(t)\right) = \emptyset$ para todo $t \in [0,1]$.*

Demostración. Para cada $D \in \mathcal{D}(X,a)$ Definamos $T_D := I_D \cup J_D$. La relación $\leq$ en el conjunto $\mathcal{T} = \{T_D : D \in \mathcal{D}(X,a)\}$, definida por $T_D \leq T_E$ si y sólo si $D \subset E$, es un orden lineal; así que $\mathcal{T}$ con la topología del orden dada por $\leq$ es un espacio topológico. Nótese que $T_\emptyset \leq T_D \leq T_X$ para todo $D \in \mathcal{D}(X,a)$. Sea $g : X \to \mathcal{T}$ definida por $g(x) = T_D$ si y sólo si $x \in T_D$. Se probará que g está bien definida, es monótona, $\mathcal{T}$ es un continuo y $Int(g^{-1}(T)) = \emptyset$ para todo $T \in \mathcal{T}$.

Dados dos elementos distintos $D, E \in \mathcal{D}(X,a)$, por el Teorema 2.12, se tiene que $D \subsetneq E$ o $E \subsetneq D$. Supongamos que $D \subsetneq E$. Entonces por (c) del Teorema 2.16, $I_D \cap I_E = J_D \cap J_E = I_D \cap J_E = \emptyset$, y combinando el Lema 2.19 con (d) del Teorema 2.16, $I_E \cap J_D = \emptyset$. Así, $T_D \cap T_E = (I_D \cup J_D) \cap (I_E \cup J_E) = (I_D \cap I_E) \cup (I_D \cap J_E) \cup (J_D \cap I_E) \cup (J_D \cap J_E) = \emptyset$. Ahora, notemos que por el Teorema 2.17, dado $x \in X$, existe $D \in \mathcal{D}(X,a)$ tal que $x \in T_D$, y con lo anterior se tiene que dicho D es único. Por lo tanto, g está bien definida.

Para ver la suprayectividad de g, consideremos un elemento cualquiera $T_D \in \mathcal{T}$. Si $D = \emptyset$, entonces $T_D = T_\emptyset = I_\emptyset \cup J_\emptyset = J_\emptyset = \{x \in X : X$ es irreducible entre b y $x\}$, y claramente $a \in T_D$, lo cual implica que $g(a) = T_D$. Si $D = X$, entonces $T_D = T_X = I_X \cup J_X = I_X = \{x \in X : X$ es irreducible entre a y $x\}$, de donde, $b \in T_D$ y $g(b) = T_D$. Ahora, cuando $\emptyset \neq D \neq X$, existe $x \in Fr(D)$ y por el Teorema 2.11, D es irreducible entre a y x, por lo que $x \in I_D \subset T_D$ y $g(x) = T_D$. Por lo tanto, g es suprayectiva.

Sea $D \in \mathcal{D}(X,a)$ y sea $x \in X$ tal que $g(x) < T_D$. Sea $g(x) = T_E$ con $E \in \mathcal{D}(X,a)$. Como $T_E < T_D$, tenemos que $E \subsetneq D$. Por el Lema 2.19, existe $F \in \mathcal{D}(X,a)$ tal que $E \subsetneq F \subsetneq D$. Mostraremos que $x \in Int(F)$ y que $Int(F) \subset [T_\emptyset, T_D)$. Si $x \notin Int(F)$, entonces $\{b,x\} \subset \overline{X \setminus F} \subsetneq \overline{X \setminus E}$. Si aplicamos el Teorema 2.16 (b) a los conjuntos $A = \overline{X \setminus F}$, $B = \overline{X \setminus E}$ con a y b intercambiados, tenemos que $A \cap J_E = \emptyset$ y $A \cap E = \emptyset$. De manera que $x \notin J_E \cup I_E = T_E$, lo cual es absurdo. Por tanto, $x \in Int(F)$. Ahora tomemos $y \in Int(F)$ y sea $G \in \mathcal{D}(X,a)$ tal que $y \in T_G = I_G \cup J_G$. En el caso en que $y \in I_G$, tenemos que G es irreducible entre a y y. Como $a, y \in F$, no puede ocurrir que $F \subsetneq G$. Por el Teorema 2.12, tenemos que $G \subset F$, así que $G \subsetneq D$. Por tanto $g(y) = T_G < T_D$. En el caso en que $y \in J_G$, tenemos que $\overline{X \setminus G}$ es irreducible entre b y y. Si ocurriera que $F \subset G$, entonces $y \in \overline{X \setminus G} \subset \overline{X \setminus F}$, y como $y \in Int(F)$, tendríamos que $Int(F) \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Por el Teorema 2.12 concluimos que $G \subset F \subsetneq D$. Por tanto $g(y) = T_G < T_D$. Hemos probado que $g(Int(F)) \subset [T_\emptyset, T_D)$.

En resumen, hemos mostrado que si $g(x) < T_D$, entonces x tiene una vecindad, $Int(F)$, en X tal que $Int(F) \subset g^{-1}([T_\emptyset, T_D))$. Esto demuestra que $g^{-1}([T_\emptyset, T_D))$ es abierto en X.

Ya que a y b juegan papeles simétricos y, por el Teorema 2.15, también lo hacen $\mathcal{D}(X,a)$ y $\mathcal{D}(X,b)$, podemos concluir que para toda $D \in \mathcal{D}(X,a)$, $g^{-1}((T_D, T_X])$ también es abierto. Como la familia $\{[T_\emptyset, T_D) : D \in \mathcal{D}(X,a)\} \cup \{(T_D, T_X] : D \in \mathcal{D}(X,a)\}$ es una subbase para la topología de $\mathcal{T}$, concluimos que g es continua.

Para ver que g es monótona resta probar que $g^{-1}(T)$ es conexo para todo $T \in \mathcal{T}$. Por el Lema 2.20, $g^{-1}(T_X) = T_X = I_X = \{x \in X : X$ es irreducible entre a y $x\} = \bigcap\{M \subset X : M \in \mathcal{D}(X,b) \setminus \{\emptyset\}\}$ y, dado que a y b juegan papeles simétricos, $g^{-1}(T_\emptyset) = T_\emptyset = J_\emptyset = \{x \in X : X$ es irreducible entre b y $x\} = \bigcap\{D \subset X : D \in \mathcal{D}(X,a) \setminus \{\emptyset\}\}$. Por el Teorema 2.12, $g^{-1}(T_\emptyset)$ es una intersección anidada de continuos y lo mismo ocurre con $g^{-1}(T_X)$. Por tanto, $g^{-1}(T_X)$ y $g^{-1}(T_\emptyset)$ son subcontinuos de X. Ahora, si $E \in \mathcal{D}(X,a)$ con $\emptyset \neq E \neq X$, por el Lema 2.21 se cumple que $I_E = \{x \in E : E$ es irreducible entre a y $x\} = \bigcap\{D \subset E : D \in \mathcal{D}(E,p) \setminus \{\emptyset\}\}$ y, de nuevo por la simetría de a y b, $J_E = \{x \in M_E : M_E$ es irreducible entre b y $x\} = \bigcap\{M \subset M_E : M \in \mathcal{D}(M_E,p) \setminus \{\emptyset\}\}$. Así, I_E y J_E son subcontinuos de X, y dado que $I_E \cap J_E = Fr(E) \neq \emptyset$, también $g^{-1}(T_E)$ es un subcontinuo de X. Por lo tanto, g es monótona.

Sea $D \in \mathcal{D}(X,a)$. El Lema 2.22 garantiza que $Int(I_D) = \emptyset$, y dada la simetría de las familias $\mathcal{D}(X,a)$ y $\mathcal{D}(X,b)$ se sigue que $Int(J_D) = \emptyset$. Luego, como I_D y J_D son subconjuntos cerrados de X, se tiene que $Int(I_D \cup J_D) = \emptyset$, y usando que $I_D \cup J_D = T_D = g^{-1}(T_D)$ se cumple entonces que $Int(g^{-1}(T_D)) = \emptyset$. Con esto se ha probado que las fibras de g tienen interior vacío.

Dados $T_D, T_E \in \mathcal{T}$ con $T_D < T_E$, se tiene que $D \subsetneq E$, y por el Lema 2.19 existe un elemento $C \in \mathcal{D}(X,a)$ tal que $D \subsetneq C \subsetneq E$, así que $[T_\emptyset, T_C)$ y $(T_C, T_X]$ son dos abiertos ajenos de $\mathcal{T}$ tales que $T_D \in [T_\emptyset, T_C)$ y $T_E \in (T_C, T_X]$. Con esto se ha probado que $\mathcal{T}$ es un espacio de Hausdorff. Entonces se tiene que $\mathcal{T}$ es imagen continua y Hausdorff del continuo X, lo cual implica que $\mathcal{T}$ es un continuo ($\mathcal{T}$ es conexo y compacto porque es la imagen continua de un conexo y compacto, y es metrizable por [3, Lema 3.2, pág. 37]). Además $\mathcal{T}$ es linealmente ordenado. Por el Lema 2.23, existe un homeomorfismo $h : \mathcal{T} \to [0,1]$. Luego $f = h \circ g : X \to [0,1]$ es la función buscada. ■

Capítulo 3

Homogeneidad del cubo de Hilbert

Un espacio topológico X se llama *homogéneo* si para cualquier par de puntos $x,\ y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Ejemplos de espacios homogéneos son el intervalo $(0, 1)$, las bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$, la circunferencia unitaria, los grupos topológicos y las variedades compactas, conexas y sin frontera de cualquier dimensión.

Si X y Y son homogéneos, entonces $X \times Y$ es homogéneo, pues si $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2) \in X \times Y$, entonces existen homeomorfismos $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ tales que $f(x_1) = x_2$ y $g(y_1) = y_2$, con lo cual $f \times g$ es el homeomorfismo de $X \times Y$ que manda $(x_1,\ y_1)$ a $(x_2,\ y_2)$. Más aún, un producto arbitrario de espacios homogéneos es también homogéneo.

El propósito de este capítulo es demostrar que el espacio $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, llamado el *cubo de Hilbert*, es homogéneo. Notemos que el espacio $[0, 1]^n$ no es homogéneo para ningún natural n, pues los puntos de su frontera como variedad no pueden intercambiarse con los del complemento por homeomorfismos. Esto es consecuencia directa del Teorema de Invariancia del Dominio (vea [5, Teorema 19.2, pág. 106]).

Denotemos el cubo de Hilbert por $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ y definamos la métrica usual para Q por $d((a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}$. También definimos el *seudointerior* P de Q como $P = (0, 1)^{\mathbb{N}}$, y la *seudofrontera* F de Q como $F = Q \setminus P$.

Teorema 3.1 *Si $(a_1, a_2, \ldots),\ (b_1, b_2, \ldots) \in P$, entonces existe un homeomorfismo $h : Q \to Q$ tal que $h(a_1, a_2, \ldots) = (b_1, b_2, \ldots)$.*

Demostración. Para cada natural i, se tiene que $a_i, b_i \in (0, 1)$, y existe un homeomorfismo $h_i : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $h_i(a_i) = b_i$, simplemente definiendo $h_i(a_i) = b_i,\ h_i(0) = 0,\ h_i(1) = 1$ y extendiendo linealmente h_i. En la Figura 3.1 se puede observar la gráfica de h_i.

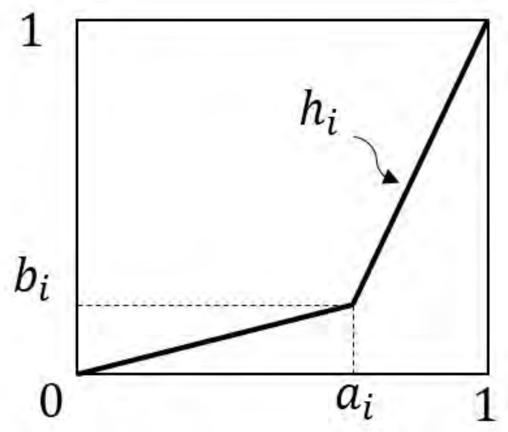


Figura 3.1

Entonces el homeomorfismo $h = (h_1 \times h_2 \times \cdots) : Q \to Q$ dado por $h(x_1, x_2, \ldots) = (h_1(x_1), h_2(x_2), \ldots)$, satisface que $h(a_1, a_2, \ldots) = (b_1, b_2, \ldots)$. ■

Definamos $\mathcal{H}(Q) = \{h : Q \to Q : h \text{ es homeomorfismo}\}$. Dados $f, g \in \mathcal{H}(Q)$, sean

$$\begin{array}{c} \rho(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in Q\}, \text{ y} \\ D(f,g) = \rho(f,g) + \rho(f^{-1}, g^{-1}). \end{array}$$

Para cualesquiera $f, g, h \in \mathcal{H}(Q)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \rho(f \circ h, g \circ h) &= \sup\{d(f(h(x)), g(h(x))) : x \in Q\} \\ &= \sup\{d(f(y), g(y)) : y \in h(Q) = Q\} \\ &= \rho(f,g), \end{aligned}$$

en particular,

$$\begin{aligned} \rho(h, id) &= \rho(h \circ h^{-1}, id \circ h^{-1}) \\ &= \rho(id, h^{-1}) \\ &= \rho(h^{-1}, id). \end{aligned}$$

Por supuesto que ρ es la métrica usual del supremo en $\mathcal{H}(Q)$. Veremos que ρ no es completa en $\mathcal{H}(Q)$ y que D es una métrica equivalente a ρ, que además es completa.

Para ver que ρ no es completa, consideremos los homeomorfismos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...$ de $[0,1]$ en $[0,1]$ y la función continua $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ definidos como se muestra en la Figura 3.2.

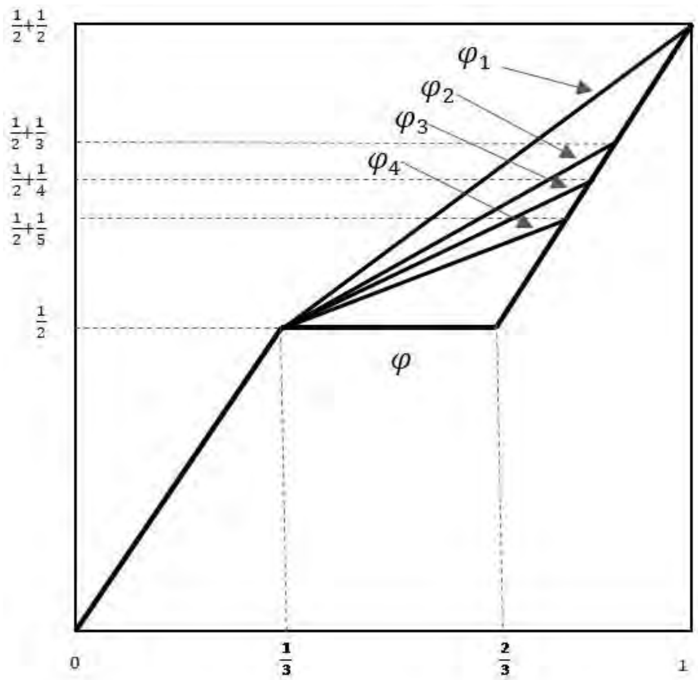


Figura 3.2

Para cada $n \in \mathbb{N}$, Definamos $f_n = (\varphi_n \times id \times id \times \cdots)$ y $f = (\varphi \times id \times id \times \cdots)$. Se tiene que f y f_n son funciones continuas de Q a Q tales que $f_n \in \mathcal{H}(Q)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $f \notin \mathcal{H}(Q)$. Es fácil ver que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$ que no converge, pues en caso de que convergiera, lo haría a la función f. Hemos probado entonces que ρ no es una métrica completa.

Teorema 3.2 *Las funciones ρ y D son métricas equivalentes en $\mathcal{H}(Q)$.*

Demostración. Es fácil ver que ρ y D son métricas, así que esa prueba será omitida. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{H}(Q)$. Como $\rho(f,g) \leq D(f,g)$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{H}(Q)$, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a f en la métrica D, también lo es en la métrica ρ. Esto demuestra que la identidad $id : (\mathcal{H}(Q), D) \to (\mathcal{H}(Q), \rho)$ es continua.

Supongamos ahora que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{H}(Q)$ que converge en la métrica ρ a $f \in \mathcal{H}(Q)$. Como $\rho(k,g) = \rho(k \circ h, g \circ h)$ para cualesquiera $k, g, h \in \mathcal{H}(Q)$, entonces la sucesión $\{f_n \circ f^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge en la métrica ρ a la función identidad $id : Q \to Q$. Se tiene que $\rho(h, id) < \varepsilon$ implica $\rho(h^{-1}, id) < \varepsilon$, para cualquier $h \in \mathcal{H}(Q)$. Por tanto la sucesión $\{f \circ f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a la identidad en la métrica ρ. Si vemos que $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f^{-1} en la métrica ρ, tendremos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en la métrica D.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f^{-1} es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in Q$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que $f \circ f_n^{-1}$ converge a la identidad con ρ, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f \circ f_n^{-1}, id) < \delta$ para todo $n \geq N$. Esto implica que $d(f \circ f_n^{-1}(x), x) < \delta$ para todo $x \in Q$ y para todo $n \geq N$, de donde, $d(f_n^{-1}(x), f^{-1}(x)) = d(f^{-1}(f \circ f_n^{-1}(x)), f^{-1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in Q$ y para todo $n \geq N$. Entonces $\rho(f_n^{-1}, f^{-1}) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto prueba que $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f^{-1} en la métrica ρ. Con esto hemos probado que la identidad $id : (\mathcal{H}(Q), \rho) \to (\mathcal{H}(Q), D)$ es continua. Por tanto esta identidad es un homeomorfismo y las topologías en $\mathcal{H}(Q)$, inducidas por ρ y D son la misma. ■

Teorema 3.3 *La métrica D es completa.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en D. De la definición de D, se tiene que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en ρ, por tanto para cada $x \in Q$, se tiene que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n^{-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en Q. Como Q es compacto, para cada $x \in Q$, podemos definir $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{-1}(x)$.

Veamos que f es continua. Sean $x \in Q$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en ρ, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{4}$ para cualesquiera $n, m \geq N_1$. Dado que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $n \geq N_2$. Tomando $M = \max\{N_1, N_2\}$, se cumple que $\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$ para cualesquiera $n, m \geq M$. De la continuidad de f_M, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(f_M(x), f_M(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces, si $n \geq M$ y $d(x, y) < \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(f(x), f_n(y)) &\leq d(f(x), f_M(x)) + d(f_M(x), f_M(y)) + d(f_M(y), f_n(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Con lo cual $d(f(x), f(y)) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta$. Por tanto f es continua.

De manera análoga se demuestra que F es continua.

Ahora veamos que $f \circ F = F \circ f = id$. Sean $x \in Q$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en ρ, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{4}$ para cualesquiera $n, m \geq N_1$. Ya que $f(F(x)) = \lim_{n\to\infty} f_n(F(x))$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(F(x)), f(F(x))) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $n \geq N_2$. Sea $M = \max\{N_1, N_2\}$. Dado que f_M es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que $d(p, q) < \delta$ implica que $d(f_M(p), f_M(q)) < \frac{\varepsilon}{4}$. De la igualdad $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{-1}(x)$, existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n^{-1}(x), F(x)) < \delta$ para todo $n \geq N_3$. Así, haciendo $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, si $m \geq N$ se tiene que $d(f_m(f_m^{-1}(x)), f_M(f_m^{-1}(x))) \leq \rho(f_m, f_M) < \frac{\varepsilon}{4}$, $d(f_M(f_m^{-1}(x)), f_M(F(x))) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $d(f_M(F(x)), f(F(x))) < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces, para toda $m \geq N$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(x, f(F(x))) &\leq d(f_m(f_m^{-1}(x)), f_M(f_m^{-1}(x))) + d(f_M(f_m^{-1}(x)), f_M(F(x))) \\ &\quad + d(f_M(F(x)), f(F(x))) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, entonces $x = f(F(x))$. Análogamente se tiene que $x = F(f(x))$.

Todo lo anterior demuestra que $f, F \in \mathcal{H}(Q)$.

Ahora demostraremos que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0 = \lim_{n\to\infty} \rho(f_n^{-1}, F)$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_M, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq M$. Así, para todo $x \in Q$, se tiene que $d(f_M(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq M$. Esto demuestra que $\rho(f, f_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq M$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$. Análogamente se demuestra que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n^{-1}, F) = 0$. Este párrafo demuestra que $\lim_{n\to\infty} D(f_n, f) = 0$, con lo cual D es una métrica completa. ■

Lema 3.4 *Sean $f \in \mathcal{H}(Q)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(g, id) < \delta$, entonces $D(g \circ f, f) < \varepsilon$.*

Demostración. Como f^{-1} es uniformemente continua, existe $\gamma > 0$ tal que si $d(x, y) < \gamma$, entonces $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta < \min\{\gamma, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Si $\rho(g, id) < \delta$, entonces $\rho(g^{-1}, id) < \delta$, y para todo $x \in Q$ se tiene que $d(f^{-1}(g^{-1}(x)), f^{-1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} D(g \circ f, f) &= \rho(g \circ f, f) + \rho(f^{-1} \circ g^{-1}, f^{-1}) \\ &\leq \rho(g, id) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Lema 3.5 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathcal{H}(Q)$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $h_{n+1} \in \mathcal{H}(Q)$ y $\rho(h_{n+1}, id) < \delta$ implican que $D(h_{n+1} \circ h_n \circ \cdots \circ h_1, h_n \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ h_1) < \frac{1}{2^n}$.*

Demostración. Aplíquese el Lema 3.4 con $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ y $f = h_n \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ h_1$. ■

Lema 3.6 *Sean $(a_1, a_2, \ldots) \in Q$, $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $h \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $\rho(h, id) < \delta$, h no mueve las primeras $n - 1$ coordenadas de cada punto $x \in Q$ y a a_n la envía a $(0, 1)$, es decir, si $(b_1, b_2, \ldots) = h(a_1, a_2, \ldots)$, entonces $b_n \in (0, 1)$.*

Demostración. Si $a_n \in (0, 1)$, tomemos $h = id$.

En el caso en que $a_n = 1$, sea $k > n$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{3}$.

Explicaremos cómo construir un homeomorfismo $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ con las siguientes propiedades:

- $f|_{[0,1-\frac{\delta}{2}]\times[0,1]}$ es la identidad, y
- $f(\{1\} \times [0, 1]) \subset (1 - \frac{\delta}{2}, 1) \times \{1\}$ (vea Figura 3.3)

Sean $L = \{1 - \frac{\delta}{2}\} \times [0, 1]$, $M = \{1\} \times [0, 1]$ y K un arco (no degenerado) contenido en $(1 - \frac{\delta}{2}, 1) \times \{1\}$ (observe la Figura 3.3). Tomemos homeomorfismos φ_1 y φ_2 definidos del rectángulo $[1 - \frac{\delta}{2}, 1] \times [0, 1]$ al semicirculo de la Figura 3.3 tales que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = x$, para cada $x \in L$. Después, tome un homeomorfismo ρ del semicirculo mencionado en sí mismo tal que $\rho(\varphi_1(M)) = \varphi_2(K)$ y Definamos $g : [1 - \frac{\delta}{2}, 1] \times [0, 1] \to [1 - \frac{\delta}{2}, 1] \times [0, 1]$ como $g = \varphi_2^{-1} \circ \rho \circ \varphi_1$. Entonces, $g(M) = K$ y $g(x) = x$ para cada $x \in L$. Por último, definimos $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1 - \frac{\delta}{2}] \times [0, 1] \\ g(x), & \text{si } x \in [1 - \frac{\delta}{2}, 1] \times [0, 1]. \end{cases}$$

Entonces f satisface las propiedades requeridas.

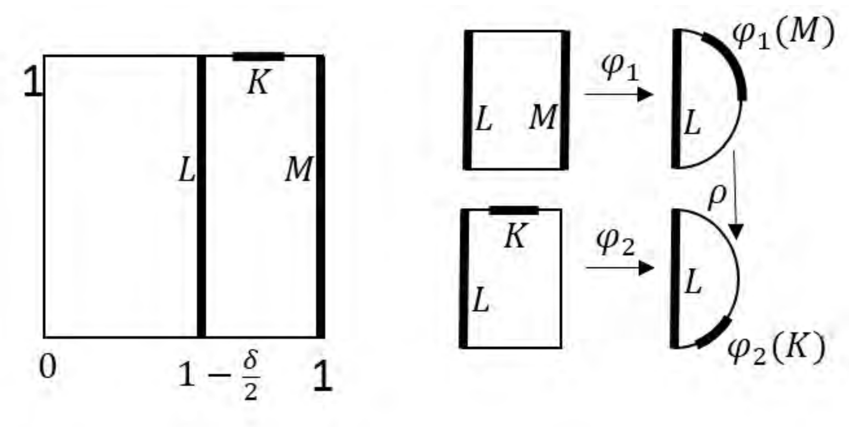


Figura 3.3

Sean $\pi_1, \pi_2 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ las proyecciones sobre la primera y segunda coordenadas, respectivamente, y Definamos $h : Q \to Q$ por

$$h(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots),$$

donde $y_i = x_i$ si $i \in \mathbb{N} \setminus \{n, k\}$, $y_n = \pi_1(f(x_n, x_k))$ y $y_k = \pi_2(f(x_n, x_k))$, notemos que h es una función que sólo mueve las coordenadas x_n y x_k de cualquier elemento $(x_1, x_2, \ldots) \in Q$. Veamos que h es un homeomorfismo.

• h es continua:
Observemos las funciones coordenadas de h. Vemos que, salvo las coordenadas n y k, las demás son funciones proyecciones y por tanto continuas. Por otra parte, claramente las funciones que definen a las coordenadas n y k también son continuas (pues π_1, π_2 y f lo son). Por tanto, h es continua.

• h es inyectiva:
Si $(x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \in Q$ y $h(x_1, x_2, \ldots) = h(y_1, y_2, \ldots)$, entonces $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N} \setminus \{n, k\}$ y $\pi_j(f(x_n, x_k)) = \pi_j(f(y_n, y_k))$ para todo $j \in \{1, 2\}$. Así que $f(x_n, x_k) = f(y_n, y_k)$ y entonces $(x_n, x_k) = (y_n, y_k)$. De manera que $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De modo que $(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots)$. Por tanto, h es inyectiva.

• h es suprayectiva:
Sea $(y_1, y_2, \ldots) \in Q$. Como f es suprayectiva, existe $(a, b) \in [0,1] \times [0,1]$ tal que $f(a, b) = (y_n, y_k)$, de donde $y_n = \pi_1(f(a, b))$ y $y_k = \pi_2(f(a, b))$. Por lo cual $h(y_1, \ldots, y_{n-1}, a, y_{n+1}, \ldots, y_{k-1}, b, y_{k+1}, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots)$.
Como Q es compacto y Hausdorff, esto concluye la prueba de que h es un homeomorfismo.
Sean $(x_1, x_2, \ldots) \in Q$ y $(y_1, y_2, \ldots) = h(x_1, x_2, \ldots)$. Notemos que si $x_n \leq 1 - \frac{\delta}{2}$, entonces $f(x_n, x_k) = (x_n, x_k)$, así que $y_n = \pi_1(f(x_n, x_k)) = x_n$; y si $x_n > 1 - \frac{\delta}{2}$,

$\pi_2(f(x_n, x_k)) > 1 - \frac{\delta}{2}$, así que $y_n > 1 - \frac{\delta}{2}$, así,

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\ &= \frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \frac{|x_k - y_k|}{2^k} \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2^k} \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{3} < \delta. \end{aligned}$$

Entonces $\rho(h, id) < \delta$. Como $a_n = 1$ y $f(\{1\} \times [0,1]) \subset (0,1) \times \{1\}$, entonces $h(a_1, a_2, \ldots) = (b_1, b_2, \ldots)$ implica que $b_n = \pi_1(f(a_n, a_k)) = \pi_1(f(1, a_k)) \in (0,1)$.

El caso $a_n = 0$ se resuelve de manera similar. ■

Recordemos que el seudointerior de Q es $P = (0,1)^{\mathbb{N}}$ y la seudofrontera de Q es $F = Q \setminus P$.

Teorema 3.7 *Si* $(c_1, c_2, \ldots) \in F$, *existe un homeomorfismo* $h : Q \to Q$ *tal que* $h(c_1, c_2, \ldots) \in P$.

Demostración. Definiremos, inductivamente, una sucesión de homeomorfismos $h_1, h_2, \ldots$ que satisfacen las siguientes propiedades para todo $n \in \mathbb{N}$:

1. Las primeras n coordenadas de $(h_n \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ h_1)(c_1, c_2, \ldots)$ pertenecen a $(0,1)$,

2. $h_n(x_1, x_2, \ldots)$ no mueve las primeras $n-1$ coordenadas de $(x_1, x_2, \ldots)$, para todo $(x_1, x_2, \ldots) \in Q$,

3. $D(h_n \circ \cdots \circ h_1, h_{n-1} \circ \cdots \circ h_1) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Veamos cómo definir h_1: sea $\delta > 0$ dado por el Lema 3.4, aplicado a $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $f = id$, y tomemos h_1 igual al homeomorfismo h dado por el Lema 3.6, para $(a_1, a_2, \ldots) = (c_1, c_2, \ldots) \in Q$, $n = 1$ y δ el ya definido. Los puntos 1 y 3 se satisfacen por la definición de h_1(en este caso interpretamos que $h_{n-1} \circ \cdots \circ h_1 = id$) y el punto 2 se satisface por vacuidad.

Supongamos que hemos encontrado homeomorphismos $h_1, h_2, \ldots, h_k$ que satisfacen 1, 2 y 3. Ahora mostraremos que existe h_{k+1}. Tomemos $\delta > 0$ como en el Lema 3.5 para $n = k$. Entonces tenemos que si $f \in \mathcal{H}(Q)$ y $\rho(f, id) < \delta$, entonces $D(f \circ h_k \circ \cdots \circ h_1, h_k \circ \cdots \circ h_1) < \frac{1}{2^{k+1}}$. Sea $(a_1, a_2, \ldots) = (h_k \circ \cdots \circ h_1)(c_1, c_2, \ldots)$. Por el Lema 3.6, existe $h_{k+1} \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $\rho(h_{k+1}, id) < \delta$ (y entonces $D(h_{k+1} \circ h_k \circ \cdots \circ h_1, h_k \circ \cdots \circ h_1) < \frac{1}{2^{k+1}}$), h_{k+1} no mueve las primeras k coordenadas de cada punto $x \in Q$ y envía la $(k+1)$-ésima coordenada de $(a_1, a_2, \ldots)$ al intervalo $(0,1)$.

Por hipótesis de inducción las primeras k coordenadas de $(a_1, a_2, \ldots) = (h_k \circ \cdots \circ h_1)(c_1, c_2, \ldots)$ pertenecen a $(0,1)$ y como h_{k+1} no las mueve, lo mismo ocurre con $(h_{k+1} \circ h_k \circ \cdots \circ h_1)(c_1, c_2, \ldots)$. Además $h_{k+1}(a_1, a_2, \ldots)$ tiene la $(k+1)$-ésima coordenada en $(0,1)$, así que las primeras $k+1$ coordenadas de $(h_{k+1} \circ h_k \circ \cdots \circ h_1)(c_1, c_2, \ldots)$ pertenecen a $(0,1)$. Como ya hemos dicho, 2 y 3 se cumplen para $k+1$. Esto termina la construcción inductiva.

Por el punto 3, la sucesión $\{h_n \circ \cdots \circ h_1\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesíon de Cauchy con la métrica D, y como D es completa, existe el límite $h = \lim_{n\to\infty} (h_n \circ \cdots \circ h_1)$, que es un homeomorfismo de Q en Q. Si $h(c_1, c_2, \ldots) = (b_1, b_2, \ldots)$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \notin (0,1)$, ponemos $(h_n \circ \cdots \circ h_1)(c_1, c_2, \ldots) = (d_1, d_2, \ldots)$. Por el punto 1 se tiene que $d_n \in (0,1)$ y $|d_n - b_n| > 0$. Luego, por el punto 2, para toda $k \geq n$,

$$\begin{aligned} D(h, h_k \circ \cdots \circ h_1) &\geq d(h(c_1, c_2, \ldots), (h_k \circ \cdots \circ h_1)(c_1, c_2, \ldots)) \\ &= d((b_1, b_2, \ldots), (h_k \circ \cdots \circ h_1)(c_1, c_2, \ldots)) \\ &\geq \frac{|d_n - b_n|}{2^n} \end{aligned}$$

lo cual contradice que $h = \lim_{n\to\infty} (h_n \circ \cdots \circ h_1)$. Por lo tanto, todas las coordenadas de $h(c_1, c_2, \ldots)$ pertenecen a $(0,1)$, con lo cual $h(c_1, c_2, \ldots)$ es un elemento del seudointerior del cubo de Hilbert. Con esto se termina la prueba. ■

Teorema 3.8 *El cubo de Hilbert $Q = [0,1]^{\mathbb{N}}$ es homogéneo.*

Demostración. Sean $a, b \in Q$. Consideremos los siguientes casos:

• $a, b \in P$. Por el Teorema 3.1, existe $h \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h(a) = b$.

• $a \in P$, $b \in F$. Por el Teorema 3.7, existe $h_1 \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h_1(b) \in P$, y el Teorema 3.1 nos da un homeomorfismo $h_2 \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h_2(a) = h_1(b)$. Entonces $(h_1^{-1} \circ h_2)(a) = b$.

• $a, b \in F$. Por el Teorema 3.7 existen homeomorfismos $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(Q)$ tales que $h_1(a) \in P$ y $h_2(b) \in P$. Por el Teorema 3.1 existe $h_3 \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h_3(h_1(a)) = h_2(b)$. Entonces $\left(h_2^{-1} \circ h_3 \circ h_1\right)(a) = b$. ■

Capítulo 4

Propiedad del punto fijo en $[\mathbf{0,1}]^2$

Un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* (de aquí en adelante abreviado p.p.f.) si para cualquier función continua $f : X \to X$ existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$. El punto p es llamado *punto fijo* de f.

Ejemplos de espacios con la p.p.f. son el intervalo $[0, 1]$ (vea [4, Ejemplo 1.1, pág. 5]), el triodo simple (vea [4, Ejemplo 1.5, pág. 6]), el continuo *sen*$(\frac{1}{x})$ (vea [4, Ejemplo 1.7, pág. 7]), el circulo de Varsovia (vea [4, Ejercicio 1.15, pág. 14]), la n-celda $[0, 1]^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (vea [4, Teorema 2.1, pág. 19]), los dendroides (vea [4, Teorema 3.4, pág. 33]) y los continuos encadenables (vea [4, Teorema 4.1, pág. 40]). En contraste, la circunferencia S^1 no tiene la p.p.f. pues la rotación por un ángulo de 90° es una función continua de S^1 en S^1 que no tiene puntos fijos. Notemos que todos los ejemplos que mencionamos con esta propiedad son espacios conexos, esto no es extraño pues es fácil de probar que si un espacio tiene la p.p.f., entonces es conexo.

El teorema que asegura que la n-celda tiene la p.p.f. es conocido como el Teorema de Brouwer. El objetivo de este capítulo es dar una demostración de este teorema para el caso particular $n = 2$, usando el lema de Sperner. Sin más preámbulos iniciemos el camino hacia el teorema.

Sea A un subconjunto finito de $[0, 1]$ tal que $0, 1 \in A$. Supongamos que se usan los colores rojo y azul para colorear los puntos de A de tal forma que 0 es rojo y 1 es azul. Un *segmento bicolor respecto a* A es un intervalo de la forma $[a, b]$, donde un extremo es rojo, el otro azul y $[a, b] \cap A = \{a, b\}$.

Lema 4.1 *Sea A un subconjunto finito de $[0, 1]$ tal que $0, 1 \in A$ y que es coloreado con la misma regla del párrafo anterior (rojo y azul, 0 es rojo y 1 es azul). Entonces A tiene exactamente un numero impar de segmentos bicolores.*

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre la cardinalidad de A. Se tiene que $|A| \geqslant 2$, y si $|A| = 2$, entonces $A = \{0, 1\}$ y $[0, 1]$ es el único segmento bicolor. Ahora supongamos que cada subconjunto de n elementos de $[0,1]$ que es coloreado con la misma regla (rojo y azul, 0 es rojo y 1 es azul) tiene un número impar de segmentos bicolores. Tomemos un conjunto A con $n+1$ elementos y escribámoslo $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$, con $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 1$ y $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$. Por hipótesis de inducción, el conjunto $B = \{a_1, a_3, \dots, a_{n+1}\}$ tiene un número impar de segmentos bicolores, digamos k. Si a_3 y a_2 son rojos, entonces $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$ y $[a_1, a_3]$ no son bicolores, así que A tiene los mismos segmentos bicolores que B. Si a_3 es rojo y a_2 es azul, entonces $[a_1, a_3]$ no es bicolor en B, mientras que $[a_1, a_2]$ y $[a_2, a_3]$ son bicolores en A, por lo que A tiene $k+2$ segmentos bicolores. Si a_3 y a_2 son azules, entonces $[a_2, a_3]$ no es bicolor, mientras que $[a_1, a_2]$ y $[a_1, a_3]$ sí lo son, el primero en A y el segundo en B, de donde A tiene $(k-1)+1 = k$ segmentos bicolores. Por último, si a_3 es azul y a_2 es rojo, entonces $[a_1, a_2]$ no es bicolor, pero $[a_1, a_3]$ es bicolor en B y $[a_2, a_3]$ es bicolor en A, así que A tiene $(k-1)+1 = k$ segmentos bicolores. Como estos son todos los casos posibles, se cumple que A tiene exactamente un número impar de segmentos bicolores. Con esto se concluye la prueba. ■

Sea T un triángulo convexo en $\mathbb{R}^2$. Una partición en subtriángulos convexos $R_1, R_2, \dots, R_m$ de T es *simplicial* si $T = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m$ y, si $i \neq j$, $R_i \cap R_j$ sólo puede ser $\emptyset$, un vértice común o una arista común.

Lema 4.2 (de Sperner) *Sean T un triángulo convexo en $\mathbb{R}^2$ y $R_1, R_2, \dots, R_m$ una partición simplicial de T. Supongamos que los vértices de los triángulos de la partición se colorean con tres colores, amarillo, verde y rosa, de tal forma que: (a) T es tricolor (sus vértices usan los tres colores) y, (b) si $i \in \{1, \dots, m\}$ y un vértice p de R_i pertenece a un lado L de T, entonces p está coloreado con uno de los dos colores que se usaron para los extremos de L. Entonces existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que R_i es tricolor.*

Demostración. Denotemos por L_{ar}, L_{rv} y L_{va} los lados de T cuyos extremos están coloreados de amarillo y rosa, rosa y verde, y, verde y amarillo, respectivamente. En la Figura 4.1 se muestran estas asignaciones.

Figura 4.1

Notemos que para cada lado L de T, los vértices de los triángulos de la partición que intersectan a L conforman el conjunto finito: $\{x \in L : \text{existe } i \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } x \text{ es vértice de } R_i\}$, contiene a los extremos de L y que está coloreado de dos colores, entonces satisface las hipótesis del Lema 4.1, por lo cual tiene un numero impar de segmentos bicolores.

Probaremos el teorema por contradicción. Supongamos que cada triángulo de la partición usa a lo más dos colores en sus vértices. Consideremos un segmento bicolor S_0 en uno de los lados de T. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que S_0 está en el lado L_{ar} como se muestra en la Figura 4.2.

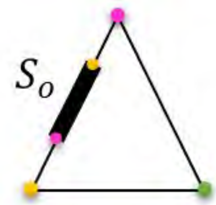


Figura 4.2

Construiremos un arco, del punto medio de S_0 al punto medio de un segmento bicolor S_n distinto de S_0 en el mismo lado de T, de la siguiente manera:

1. Sea a_0 el punto medio de S_0.
2. Como S_0 es bicolor y pertenece al lado L_{ar}, uno de sus extremos es de color amarillo y el otro de color rosa.
3. S_0 es arista de un triángulo R_{i_1}.
4. El vértice de R_{i_1} que no está en S_0 debe estar coloreado de amarillo o rosa (porque R_{i_1} no es tricolor), así que R_{i_1} tiene una arista con dos extremos del mismo color y dos aristas bicolores, una de estas últimas es S_0, y a la otra llamémosla S_1.
5. Sea a_1 el punto medio de S_1, y unamos a_0 con a_1 a través del segmento convexo que existe entre ellos. Los pasos del 1 al 5 se muestran en la Figura 4.3.

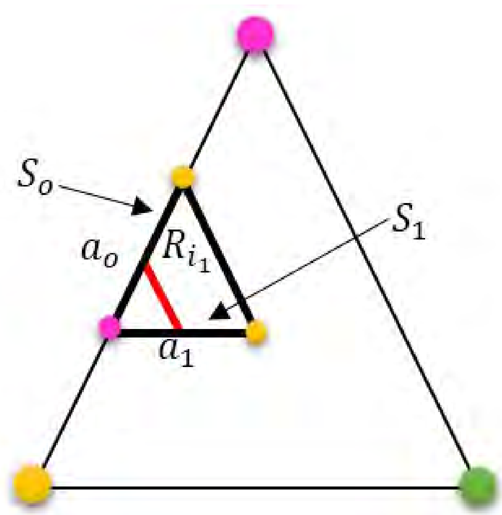
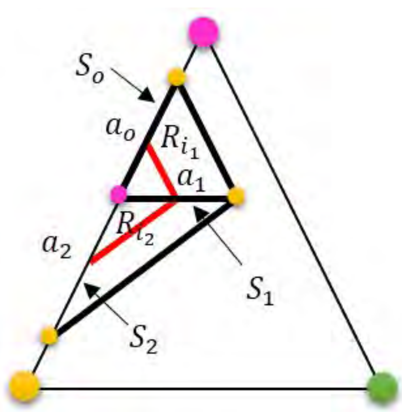


Figura 4.3

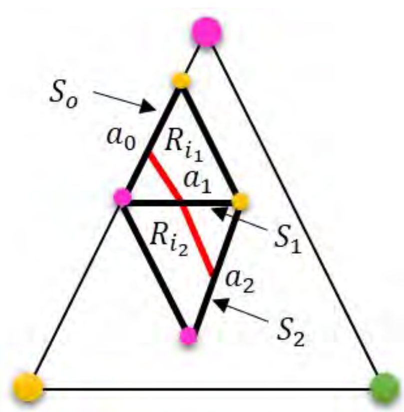
6. S_1 es arista común de dos triángulos, uno de ellos es R_{i_1} y al otro llamémosle R_{i_2}.

7. Análogamente a los puntos 4 y 5, sea S_2 la arista bicolor de R_{i_2} distinta de S_1 y sea a_2 el punto medio de S_2. Unamos a_1 con a_2 a través del segmento convexo que existe entre ellos.

8. Si S_2 no es arista de otro triángulo R_i, diferente de R_{i_1}, entonces S_2 está en uno de los lados de T, y como los extremos de S_2 son uno de color amarillo y el otro de color rosa, por la condición (b), S_2 debe estar en L_{ar}. Si S_2 es arista común de dos triángulos, se repiten los pasos 6 y 7. El primer caso se muestra en la Figura 4.4 (a) y el segundo en la Figura 4.4 (b).



(a)



(b)

Figura 4.4

9. Notemos que los triángulos $R_{i_1}, R_{i_2}, \ldots$ que se van encontrando son distintos.

10. Procediendo de este modo, como solamente se tiene una cantidad finita de triángulos $R_1, R_2, \ldots, R_m$, se debe llegar al punto medio a_n de la arista bicolor S_n que sólo pertenece al triángulo R_{i_n}, por lo cual, S_n está en el lado L_{ar} y es distinta de S_0.

Notemos que la unión de los segmentos de recta $a_{i-1}a_i$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, es un arco de a_0 a a_n. Si el segmento bicolor con el que iniciamos es S_n, entonces realizando estos 10 pasos finalizaremos en S_0. Además, si iniciamos el proceso en un segmento bicolor S' del mismo lado L_{ar}, con S' distinto de S_0 y S_n, no pasaremos por ningún triángulo que fue atravesado por el arco de a_0 a a_n, así que finalizaremos en un segmento bicolor de L_{ar} distinto de S_0, S_n y S'.

Con este proceso, hemos probado que el número de segmentos bicolores en el lado L_{ar} es par, lo cual contradice el Lema 4.1. Por lo tanto, existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que R_i es tricolor. ■

Teorema 4.3 *Sean T un triángulo convexo en $\mathbb{R}^2$ y $f : T \to T$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que T es un triángulo equilatero con un lado paralelo al eje de las abscisas. Supongamos que para cada $p \in T$, $f(p) \neq p$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $p \in T$, $d(p, f(p)) > \varepsilon$, donde d es la métrica usual de T. Por la continuidad uniforme de f, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\varepsilon}{10}$ y, si $p, q \in T$ y $d(p, q) < \delta$, entonces $d(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{10}$.

Ahora vamos a usar los colores amarillo, rosa y verde para colorear todos los puntos de T con la regla dibujada en la Figura 4.5 y explicada en el siguiente párrafo.

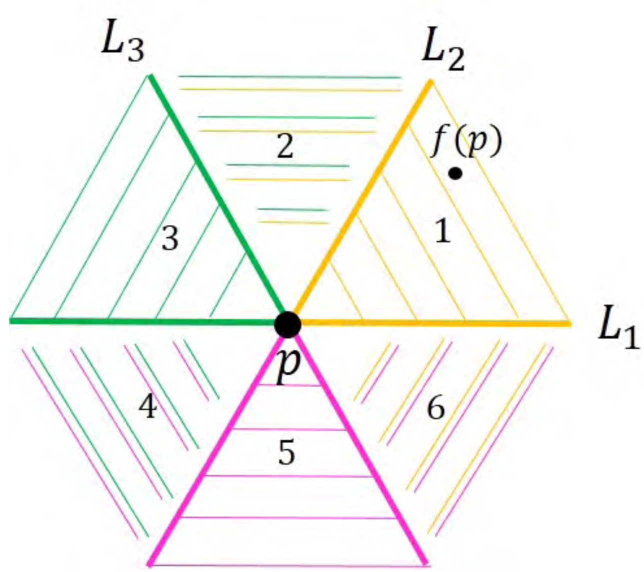


Figura 4.5

Dado un punto $p \in T$, dividimos el plano en 6 regiones numeradas con los números 1,2,3,4,5 y 6, como se muestra en la Figura 4.5; donde la línea L_1 (amarilla y verde) es paralela al eje de las abscisas y las líneas L_2 (amarilla y rosa) y L_3 (verde y rosa) pasan por p con un ángulo de $60°$ y $120°$, respectivamente, respecto a L_1. Las regiones numeradas con números impares son cerradas, en el sentido de que incluyen a las rectas que las separan de las otras regiones, mientras que las pares son abiertas y no incluyen nada de las rectas. Como $f(p) \neq p$, $f(p)$ debe estar en una de las 6 regiones. Si $f(p)$ está en una región impar, entonces p será coloreado del color de esa región; mientras que si $f(p)$ pertenece a una región par, entonces p será coloreado con uno cualquiera, el que usted guste, de los dos colores de esa región. Notemos que con esta regla los vértices de T están coloreados uno de cada color. Es decir, T es un triángulo tricolor y es mostrado explícitamente en la Figura

4.6.

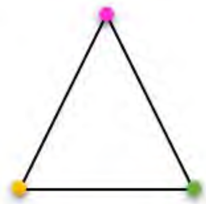


Figura 4.6

Consideremos una partición simplicial de subtriángulos $R_1, R_2, \ldots, R_m$ de T como se muestra en la Figura 4.7, de modo que el diámetro de cada subtriángulo sea menor que δ.

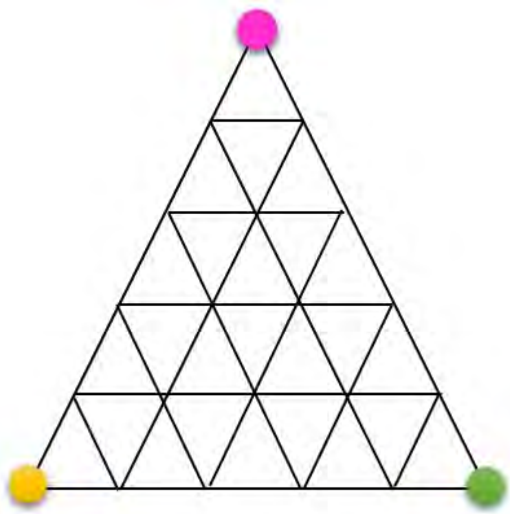


Figura 4.7

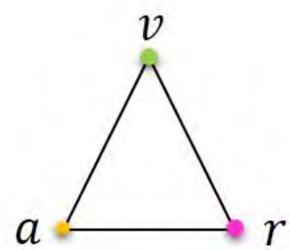


Figura 4.8

Observe que al colorear los vértices de los subtriángulos con la regla dada, se cumplen las hipótesis de Lema de Sperner, de donde existe un subtriángulo tricolor R_i (sus vértices están coloreados uno de cada color). Supondremos que dicho triángulo R_i es como el de la Figura 4.8. En el caso en que los colores ocupen otras posiciones, la prueba es similar. A los vértices amarillo, rosa y verde los llamamos a, r y v, respectivamente. Sea p el baricentro de R_i y consideremos la bola centrada en p de radio ε. Se tiene que $d(p, a) < diámetro(R_i) < \delta$, de donde $d(f(p), f(a)) < \frac{\varepsilon}{10}$, y como $d(p, f(p)) > \varepsilon$, entonces $f(a) \notin B(\frac{9}{10}\varepsilon, p)$. Luego, de acuerdo a la regla con que se coloreó el punto a, $f(a)$ debe estar en la región A rayada de amarillo en la Figura 4.9 y limitada por la línea punteada amarilla. Entonces, como $d(f(p), f(a)) < \frac{\varepsilon}{10}$, se tiene que $f(p) \in N(\frac{\varepsilon}{10}, A)$. Esta nube también se muestra en la Figura 4.9, contiene a A y está limitado por la línea gruesa amarilla (la que contiene parte de la circunferencia centrada en p de radio $\frac{9}{10}\varepsilon$).

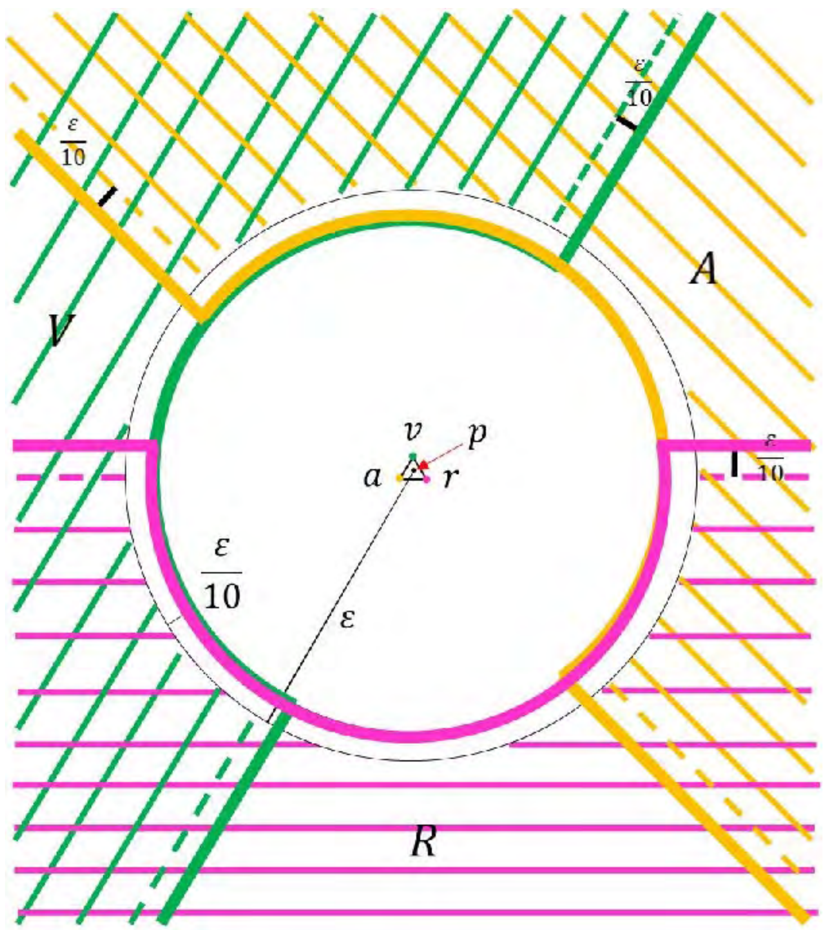


Figura 4.9

Análogamente, para los puntos v y r, se obtiene que $f(v)$ está en la región V rayada de verde y limitada por la línea punteada del mismo color en la Figura 4.9, y $f(r)$ está en la región R rayada de rosa y limitada por la línea punteada del mismo color. Entonces $f(p)$ también está en los conjuntos $N(\frac{\varepsilon}{10}, V)$ y $N(\frac{\varepsilon}{10}, R)$, los cuales se muestran en la figura anterior y se pueden describir igual que $N(\frac{\varepsilon}{10}, A)$ con los respectivos colores. Hemos llegado a que $f(p) \in N(\frac{\varepsilon}{10}, A) \cap N(\frac{\varepsilon}{10}, V) \cap N(\frac{\varepsilon}{10}, R)$, lo cual no es posible porque esta intersección es vacía. De la contradicción, se concluye que existe $p \in T$ tal que $f(p) = p$. ■

Lema 4.4 *Si X y Y son espacios homeomorfos, y X tiene la p.p.f., entonces Y también tiene la p.p.f.*

Demostración. Sean $f : Y \to Y$ una función continua y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ es una función continua, así que existe $p \in X$ tal que $p = (h^{-1} \circ f \circ h)(p)$, de donde, $h(p) = f(h(p))$. Por lo tanto $h(p)$ es un punto fijo de f. ■

El Teorema 4.3 nos garantiza que cualquier triángulo convexo de $\mathbb{R}^2$ tiene la p.p.f. Por otro lado, el triángulo y $[0,1]^2$ son homeomorfos, así que por el Lema 4.4 cualquier 2-celda tiene la p.p.f.

Capítulo 5

Selecciones

Dado un continuo X, se tiene que $X \approx F_1(X)$ y $F_1(X) \subset C(X)$, donde $C(X)$ es el hiperespacio de subcontinuos de X y $F_1(X)$ es el hiperespacio de subconjuntos de X con un solo elemento, ambos considerados con la métrica de Hausdorff H definida en el Capítulo 1.

Una *selección* para el hiperespacio $C(X)$ es una función continua $s : C(X) \to X$ tal que $s(A) \in A$ para toda $A \in C(X)$.

Para cada $x \in X$ se cumple que $s(\{x\}) = x$, así que la selección puede pensarse como una retracción de $C(X)$ a $F_1(X)$, más aún, como X y $F_1(X)$ son homeomorfos, la selección puede ser pensada como una retracción de $C(X)$ a X.

La pregunta que surge de modo natural es cuáles continuos admiten selecciones. Además, en caso de haberlas, es de interés saber si cumplen (o podemos construirlas) con alguna propiedad como ser monótonas o abiertas. En este capítulo se dará una selección para las dendritas y se darán selecciones abiertas para el intervalo $[0,1]$ y para el triodo simple.

Comenzamos nuestro análisis con un continuo que no admite selecciones: la circunferencia. Como es usual, denotemos por S^1 a la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio 1. Se sabe que el hiperespacio $C(S^1)$ es homeomorfo al disco unitario en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y $F_1(S^1)$ queda identificado con la frontera del disco como subespacio de $\mathbb{R}^2$ (vea [1. Ejemplo 3.2]). Como $S^1 \approx F_1(S^1)$, en caso de haber una selección $s : C(S^1) \to S^1$ se tendría una retracción del disco a su frontera. Por otro lado, en el Capítulo 4 probamos que el cuadrado (y por lo tanto el disco unitario) en $\mathbb{R}^2$ tiene la propiedad del punto fijo, así que por [4, Lema 2.3, pág. 23], la circunferencia no es retracto del disco. Esto prueba que la circunferencia no admite selecciones, y de acuerdo al siguiente lema, si un continuo admite selecciones entonces no puede contener circunferencias.

Lema 5.1 *Sean X un continuo, $s : C(X) \to X$ una selección y $Y \in C(X)$. Entonces la restricción de s a $C(Y)$, $s|_{C(Y)} : C(Y) \to Y$ es una selección.*

Demostración. $s|_{C(Y)}$ es continua por ser una restricción de una función continua y para cada $A \in C(Y)$, $s|_{C(Y)}(A) = s(A) \in A \subset Y$, por lo que $s|_{C(Y)}$ es selección.
■

Entre los continuos que admiten selecciones, uno de los más simples es el intervalo $[0,1]$. Aquí presentamos una selección en $[0,1]$ que además es abierta.

Lema 5.2 *Sean $I=[0,1]$ y $\sigma_1 : C(I)\to I$ la función definida por $\sigma_1(A)=\min A$ para cada $A\in C(I)$. Entonces σ_1 es una selección abierta.*

Demostración. Notemos que σ_1 está bien definida pues todos los subcontinuos de $[0,1]$ tienen su mínimo en $[0,1]$. Lo que hace σ_1 es que a cada subcontinuo A de I le asocia el punto de A más cercano al 0. Se sabe que $C(I)$ es homeomorfo al triángulo $T=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq a\leq b\leq 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ (vea [1, Ejemplo 3.1, pág. 29]), así que para lo siguiente supondremos que $C(I)$ es igual a dicho triángulo. Entonces para cada $(a,b)\in C(I)$ se tiene que $\sigma_1((a,b))=a$. De manera que σ_1 es la restricción a T de la proyección sobre la primera coordenada. Por tanto σ_1 es continua. De manera que σ_1 es selección y sólo resta ver que es abierta. Como la imagen directa de funciones abre uniones, bastará con que probemos que para todo $(x,y)\in T$ y toda $\varepsilon>0$, $\sigma_1(B(\varepsilon,(x,y)))$ es abierto en I, y para esto es suficiente ver que $\sigma_1(B(\varepsilon,(x,y)))=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I$. Si $\|(u,v)-(x,y)\|<\varepsilon$, entonces $|u-x|<\varepsilon$, así que $\sigma_1((u,v))=u\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I$. Por otra parte, si $u\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I$, entonces: si $u\leq y$, tenemos que $(u,y)\in T$, $\|(u,y)-(x,y)\|<\varepsilon$ y $\sigma_1((u,y))=u$; y si $y<u$, tenemos que $(u,u)\in T$, $\|(u,u)-(x,y)\|<\varepsilon$ y $\sigma_1((u,u))=u$. Por tanto $\sigma_1(B(\varepsilon,(x,y)))=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I$. Esto completa la prueba de que σ_1 es abierta. ■

Esta selección será usada más adelante para dar seleciones en otros continuos. Notemos que similarmente a la función σ_1, se puede definir $\sigma_2 : C(I)\to I$ como $\sigma_2(A)=\max A$ para cada $A\in C(I)$, la cual también es una selección abierta. Otra selección para el intervalo es la que a cada subcontinuo le asocia su punto medio. Esta función está dada por la asignación $(x,y)\to\frac{x+y}{2}$, la cual es continua.

Ahora daremos una selección para el triodo simple. Sea T el espacio que consiste en la unión de tres segmentos convexos de longitud 1, I_1, I_2 y I_3 en $\mathbb{R}^2$, tales que los tres tienen un extremo en común, denotado por v, y que dos a dos sólo se intersectan en el punto v. Para cada $j\in\{1,2,3\}$, sea $\sigma_1^{(j)} : C(I_j)\to I_j$ la función que a cada elemento $A\in C(I_j)$ le asocia el punto de A más cercano a v; es decir, $\sigma_1^{(j)}$ es la función σ_1 del Lema 5.2 considerada en el arco I_j cambiando al 0 por v, así que $\sigma_1^{(j)}$ es una selección. Ahora ya estamos en condiciones para definir una selección en el triodo. Sea $\sigma_2 : C(T)\to T$ definida por

$$\sigma_2(A)=\begin{cases}\sigma_1^{(j)}(A), & \text{si } A\in C(I_j),\\ v, & \text{si } v\in A.\end{cases}$$

Lema 5.3 *La función $\sigma_2 : C(T)\to T$ definida en el párrafo anterior es una selección.*

Demostración. Si $A\in C(I_k)\cap C(I_l)$ para algunos $k,l\in\{1,2,3\}$, $k\neq l$, entonces $A=\{v\}$ y $\sigma_1^{(k)}(A)=v=\sigma_1^{(l)}(A)$. Si $A\in C(I_k)$ para algún $k\in\{1,2,3\}$ y $v\in A$, entonces A es un subcontinuo de I_k que contiene al extremo v, entonces $\sigma_2(A) = \sigma_1^{(j)}(A) = v$. Por lo tanto σ_2 está bien definida. De la definición se cumple que $\sigma_2(A) \in A$ para cada $A \in C(T)$. Para la continuidad de σ_2 consideremos una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $C(T)$ que converge a un elemento $A \in C(T)$. Si $v \notin A$, entonces $A \subset I_j \setminus \{v\}$, para algún $j \in \{1, 2, 3\}$, así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset I_j \setminus \{v\}$ para todo $n \geq N$, de donde, $\sigma_2(A) = \sigma_1^{(j)}(A)$ y $\sigma_2(A_n) = \sigma_1^{(j)}(A_n)$ para todo $n \geq N$. Como $\sigma_1^{(j)}$ es continua, la subsucesión $\{\sigma_2(A_n)\}_{n\geq N}$ converge a $\sigma_2(A)$, de donde obtenemos que la sucesión $\{\sigma_2(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma_2(A)$. Ahora supongamos que $v \in A$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Entonces existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a_n, v) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Como $\sigma_2(A_n)$ es igual al punto de A_n más cercano a v, y $\sigma_2(A) = v$, se cumple que $d(\sigma_2(A_n), \sigma_2(A)) = d(\sigma_2(A_n), v) \leq d(a_n, v) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En cualquier caso, hemos probado que $\{\sigma_2(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma_2(A)$. Entonces, σ_2 es continua y, por lo tanto, es una selección. ■

Nuestra siguiente meta es mostrar que es posible dar una selección abierta para el triodo simple T. Como describimos antes, T es la unión de tres arcos I_1, I_2 y I_3, con punto de ramificación v. Antes de probar este resultado, consideremos una función continua, suprayectiva y abierta $f : C(T) \to T$ y un elemento $A \in f^{-1}(v)$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $C(T)$ que contiene a A. Entonces $f(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de T que contiene a v, así que $f(\mathcal{U}) \cap (I_j \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. Luego, $\mathcal{U} \cap f^{-1}(I_j \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, 2, 3\}$.

Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, hacemos $\mathcal{W}_j = f^{-1}(I_j \setminus \{v\})$. Como $I_j \setminus \{v\}$ es abierto en T, tenemos que $\mathcal{W}_j$ es abierto en $C(T)$. Claramente, $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_3$ son ajenos dos a dos. También hacemos $\mathcal{F} = f^{-1}(v)$. Entonces $\mathcal{F}$ es cerrado en $C(T)$. Por lo que vimos en el párrafo previo, para cada $A \in \mathcal{F}$ y cada $j \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que $A \in Cl_{C(T)}(\mathcal{W}_j)$. De modo que $\mathcal{F} \subset Cl_{C(T)}(\mathcal{W}_1) \cap Cl_{C(T)}(\mathcal{W}_2) \cap Cl_{C(T)}(\mathcal{W}_3)$. Con esto hemos visto que $C(T)$ es la unión de un cerrado $\mathcal{F}$ y tres abiertos ajenos dos a dos $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_3$ tales que $\mathcal{F} \subset Cl_{C(T)}(\mathcal{W}_1) \cap Cl_{C(T)}(\mathcal{W}_2) \cap Cl_{C(T)}(\mathcal{W}_3)$.

Es bien sabido (vea [1, Ejemplo 3.3, pág. 35]) que $C(T)$ es la unión de un cubo $[0, 1]^3$ con tres triángulos (alas) pegadas por tres de sus aristas. Por lo que vimos en el párrafo anterior, para dar una selección abierta en $C(T)$, en particular, deberíamos ser capaces de descomponer a $[0, 1]^3$ como la unión del cerrado $\mathcal{F} \cap [0, 1]^3$ y los tres abiertos ajenos dos a dos $\mathcal{W}_1 \cap [0, 1]^3$, $\mathcal{W}_2 \cap [0, 1]^3$ y $\mathcal{W}_3 \cap [0, 1]^3$ tales que $\mathcal{F} \cap [0, 1]^3 \subset Cl_{[0,1]^3}(\mathcal{W}_1 \cap [0, 1]^3) \cap Cl_{[0,1]^3}(\mathcal{W}_2 \cap [0, 1]^3) \cap Cl_{[0,1]^3}(\mathcal{W}_3 \cap [0, 1]^3)$.

Si usted nunca ha visto cómo se hace esto, inténtelo y verá que no es nada fácil. Si usted tiene alguna experiencia en la Teoría de Continuos, entonces posiblemente se dé cuenta que estamos hablando de algo parecido a los lagos de Wada. De hecho, estos lagos se definieron precisamente para dar regiones en $[0, 1]^2$ que tuvieran una frontera común. A continuación daremos la descripción de cómo se construyen túneles de Wada en $[0, 1]^3$.

Túneles de Wada

Consideremos el cubo $C = [0, 1]^3$ como si fuera una montaña o un queso al cual

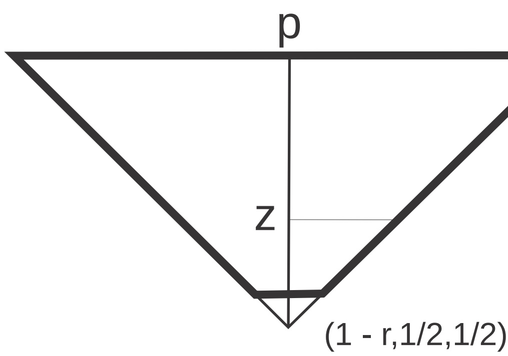


Figura 5.1:

le haremos perforaciones. Consideremos los puntos $p_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $p_2 = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ y $p_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, tomamos un disco D_j de radio $\frac{\sqrt{2}}{10}$, centrado en el punto p_j y contenido en la cara de C_j que tiene a p_j.

Tomamos un cono truncado recto $R_1^{(j)}$, con ángulo de 45^0, cuya base mayor sea D_j, de altura $\frac{9\sqrt{2}}{10^2}$. Sea E_j la base menor de $R_1^{(j)}$, notemos que el radio de E_j es igual a $\frac{\sqrt{2}}{10^2}$. Sea $P_j = Cl[(\text{la pared de } R_1^{(j)}) \smallsetminus (D_j \cup E_j)]$. Notemos que el punto de $R_1^{(j)}$ más alejado de la pared P_j es el punto p_j y $d(p_j, P_j) = \frac{1}{10}$.

A continuación veremos que para cada punto $z = (z_1, z_2, z_3) \in R_1^{(j)}$, $d(z, P_1) < \frac{z_1}{10}$.

Para fijar ideas, probaremos esto para $j = 1$, obviamente, los otros casos son similares.

En la Figura 4.1 puede verse un corte recto del cono $R_1^{(1)}$.

En este dibujo, $r = \frac{\sqrt{2}}{10}$. De todos los puntos $z \in R_1^{(1)}$ que tienen la coordenada z_1, el más alejado de P_1 pertenece al eje de simetría del cono. Por lo que, de los puntos que tienen la primera coordenada z_1, $d(z, P_1)$ alcanza su máximo en el punto z de la figura y, $d(z, P_1)$ puede calcularse usando el triángulo rectángulo isósceles que pasa por z. Entonces $d(z, P_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - (1 - r))$, y la desigualdad buscada es $\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - (1 - \frac{\sqrt{2}}{10})) \leq \frac{z_1}{10}$, la cual es equivalente a $z_1(1 - \frac{\sqrt{2}}{10}) \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{10}$, que se cumple porque $z_1 \leq 1$.

Procediendo de la misma manera para $j \in \{2, 3\}$, podemos afirmar que para cada $j \in \{1, 2, 3\}$ y cada $z = (z_1, z_2, z_3) \in R_1^{(j)}$, $d(z, P_j) < \frac{z_j}{10}$.

Empecemos a cavar los túneles:

El primer paso es remover la tierra o el queso de los conos (truncados) $R_1^{(1)}$, $R_1^{(2)}$ y $R_1^{(3)}$.

Claramente estos túneles son subconjuntos abiertos, conexos y ajenos dos a dos del cubo C.

Hasta aquí hemos completado la primera etapa.

Ahora veremos cómo continua la construcción de los túneles de Wada. Describimos la segunda etapa de la construcción en tres pasos.

Alargamos el túnel empezando en el disco E_1 de $R_1^{(1)}$ para obtener un túnel $R_2^{(1)}$ que tenga las siguientes propiedades: $R_1^{(1)} \subset R_2^{(1)}$, $Cl(R_2^{(1)})$ es ajena a $Cl(R_1^{(2)} \cup R_1^{(3)})$, el conjunto $C \smallsetminus (R_2^{(1)} \cup R_1^{(2)} \cup R_1^{(3)})$ es una 3-celda y todos sus puntos distan de uno de los puntos de $R_2^{(1)}$ en menos de $\frac{1}{2}$ (es decir, $C \smallsetminus (R_2^{(1)} \cup R_1^{(2)} \cup R_1^{(3)}) \subset N(\frac{1}{2}, R_2^{(1)})$), $R_2^{(1)}$ es abierto y conexo en C y la intersección de $R_2^{(1)}$ con la frontera de C es lo mismo que $R_1^{(1)} \cap F_r(C)$ (este conjunto es el disco D_1 sin su orilla).

El siguiente paso consiste en alargar el túnel $R_1^{(2)}$, desde el disco E_2, para obtener un túnel $R_2^{(2)}$ que tenga las siguientes propiedades: $R_1^{(2)} \subset R_2^{(2)}$, $Cl(R_2^{(2)})$ es ajena a (la cerradura de lo que ya teníamos construido) $Cl(R_2^{(1)} \cup R_1^{(3)})$, el conjunto $C \smallsetminus (R_2^{(1)} \cup R_2^{(2)} \cup R_1^{(3)})$ es una 3-celda y todos sus puntos distan de uno de los puntos de $R_2^{(2)}$ en menos de $\frac{1}{2}$ (es decir, $C \smallsetminus (R_2^{(1)} \cup R_2^{(2)} \cup R_1^{(3)}) \subset N(\frac{1}{3}, R_2^{(2)})$), $R_2^{(2)}$ es abierto y conexo en C y la intersección de $R_2^{(2)}$ con la frontera de C es lo mismo que $R_1^{(2)} \cap F_r(C)$ (este conjunto es el disco D_2 sin su orilla).

El siguiente paso consiste en alargar el túnel $R_1^{(3)}$, desde el disco E_3, para obtener un túnel $R_2^{(3)}$ que tenga las siguientes propiedades: $R_1^{(3)} \subset R_2^{(3)}$, $Cl(R_2^{(3)})$ es ajena a lo que ya teníamos construido, el conjunto $C \smallsetminus (R_2^{(1)} \cup R_2^{(2)} \cup R_2^{(3)})$ es una 3-celda y todos sus puntos distan de uno de los puntos de $R_2^{(3)}$ en menos de $\frac{1}{2}$, $R_2^{(3)}$ es abierto y conexo en C y la intersección de $R_2^{(3)}$ con la frontera de C es lo mismo que $R_1^{(3)} \cap F_r(C)$ (igual al disco D_3 sin su orilla).

Hasta aquí hemos alargado los tres túneles originales (los conos $R_1^{(1)}$, $R_1^{(2)}$ y $R_1^{(3)}$) para obtener los túneles $R_2^{(1)}$, $R_2^{(2)}$ y $R_2^{(3)}$.

Con esto completamos la segunda etapa.

En la tercera etapa, alargamos los túneles $R_2^{(1)}$, $R_2^{(2)}$ y $R_2^{(3)}$, para obtener túneles $R_3^{(1)}$, $R_3^{(2)}$ y $R_3^{(3)}$. Con propiedades similares a las que hemos descrito. Es decir, se construyen en orden, primero $R_3^{(1)}$, luego $R_3^{(2)}$ y al final $R_3^{(3)}$, cada túnel es un abierto conexo de C y contiene al túnel previo correspondiente (el que tiene el mismo superíndice, pero subíndice menos en uno), la cerradura de un nuevo túnel no toca a los otros dos que se construyeron antes, el complemento de todo lo construido es una 3-celda contenida en la nube $\frac{1}{3}$ centrada en el nuevo túnel y la intersección del túnel con la frontera de C es el disco original de radio $\frac{\sqrt{2}}{10}$ correspondiente.

Como se puede suponer este proceso continúa hasta que se construyen tres sucesiones de túneles $\{R_m^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{R_m^{(2)}\}_{m=1}^{\infty}$, y $\{R_m^{(3)}\}_{m=1}^{\infty}$, con las propiedades similares a las descritas en el párrafo previo.

Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, hacemos $W_j = \bigcup\{R_m^{(j)} : m \in \mathbb{N}\}$. También hacemos $F = C \smallsetminus (W_1 \cup W_2 \cup W_3)$. Entonces tenemos las siguientes propiedades:

(a) cada W_j es un abierto conexo de C que toca a la frontera de C en un disco de radio $\frac{\sqrt{2}}{10}$, y entonces W_j no toca a las aristas del cubo,

(b) F es cerrado en C y $F \subset Cl(W_1) \cap Cl(W_2) \cap Cl(W_3)$, pues para cada $m \in \mathbb{N}$

y cada $j \in \{1,2,3\}$, cada punto de F dista en menos que $\frac{1}{m}$ de un punto de $R_m^{(j)} \subset W_j$,

(c) F es un subcontinuo de C, pues F es una intersección anidada de 3-celdas (lo que queda en cada uno de los pasos),

(d) $C = F \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3$,

(e) podemos pensar que excavamos de tal manera que los túneles se van haciendo más angostos a medida que avancemos,

(f) veamos cómo conseguir que si $z = (z_1, z_2, z_3) \in W_j$ para alguna $j \in \{1,2,3\}$, entonces $d(z, F) \leq \frac{z_j}{10}$.

Recordemos que ya vimos que para cada $j \in \{1,2,3\}$ y cada $z = (z_1, z_2, z_3) \in R_1^{(j)}$, $d(z, P_j) < \frac{z_j}{10}$.

Veamos cómo se puede hacer la segunda etapa para que se siga cumpliendo la propiedad (f) para los puntos de $R_1^{(j)} \cup R_2^{(j)}$.

Supongamos que estamos en el paso en que ya está construida la primera etapa, es decir, supongamos que ya construimos los conos $R_1^{(j)}$, $R_2^{(j)}$ y $R_3^{(j)}$.

Para construir $R_2^{(1)}$ lo que hicimos fue alargar $R_1^{(1)}$. Alarguémoslo de la siguiente manera. Fijémonos en el punto central del disco E_1 (la tapa menor del cono truncado $R_1^{(1)}$). Llamémosle q_1 a tal punto, tracemos un arco α que empiece en q_1 y que satisfaga que $\alpha \cap (R_1^{(1)} \cup R_1^{(2)} \cup R_1^{(3)}) = \{q_1\}$; a no toca a la frontera de C y $C \setminus (R_1^{(1)} \cup R_2^{(1)} \cup R_3^{(1)}) \subset N(\frac{1}{2}, \alpha)$. Para tener una idea más clara y precisa, podemos construir α con un número finito de segmentos paralelos a los ejes coordenados.

Para construir $R_2^{(1)}$ hacemos un tubo alrededor de α que se vaya haciendo cada vez más angosto. Este tubo se construye de tal forma que lo único que modificamos de la pared del primer cono $R_1^{(1)}$ es el disco E_1, por lo que el resto de la pared va a ser parte de F y entonces tenemos ya garantizada la propiedad (f) para todos los puntos de $R_1^{(1)}$ que no están cerca de E_1.

Vamos a poner un límite al ancho del tubo para asegurar que se cumple (f) para los puntos que nos faltan de $R_1^{(1)}$ y los puntos de $R_2^{(1)}$.

Como α no toca la frontera del cubo, tenemos que $\delta = \frac{1}{30} \min\{z_1 \in [0,1] : (z_1, z_2, z_3) \in \alpha\} > 0$. Entonces podemos tomar el tubo de ancho menor que δ. Nos cuidamos de ya no tocar la pared del tubo (salvo el final, cuando hagamos la tercera etapa), para que esta pared permanezca en el conjunto F. Ahora tomemos $z = (z_1, z_2, z_3) \in R_2^{(1)}$ y acotemos su distancia a la pared de $R_2^{(1)}$. Como el tubo tiene ancho menor que δ, existe $w = (w_1, w_2, w_3) \in \alpha$ tal que $\|w - z\| < \delta \leq \frac{w_1}{30}$. En particular, $w_1 - z_1 \leq \|w - z\| < \frac{w_1}{30}$, así que $\frac{29w_1}{30} < z_1$ y $\frac{29w_1}{300} < \frac{z_1}{10}$. Ya que el ancho del tubo es menor que δ, existe un punto q en la pared del tubo, el cual va a quedar finalmente en F tal que $\|w - q\| < \delta \leq \frac{w_1}{30}$. De manera que $d(z, F) \leq \|z - w\| + \|w - q\| < \frac{w_1}{15} < \frac{29w_1}{300} < \frac{z_1}{10}$.

Con esta manera de construir los túneles podemos garantizar que también se cumple (f).

Notemos que se tiene que, para cada $j \in \{1,2,3\}$, $d(p_j, F) = \frac{1}{10}$ y, si $x \in W_j \setminus \{p_j\}$, entonces $d(x,F) < \frac{1}{10}$.

Ahora estamos en condiciones de dar una selección abierta en el triodo.

Para fijar ideas, para cada $j \in \{1,2,3\}$, sea $I_j = \{te_j : 0 \leq t \leq 1\}$, donde e_1, e_2 y e_3 son los vectores básicos unitarios de $\mathbb{R}^3$. Al origen lo denotamos por v. Pensaremos al triodo X como la unión de los segmentos I_1, I_2 y I_3. Recordemos que el hiperespacio $C(X)$ es homeomorfo (así que supondremos la igualdad) al cubo C con unas alas pegadas cada una en uno de los segmentos I_1, I_2 y I_3. Para cada $j \in \{1,2,3\}$ se tiene definida la selección abierta $\sigma_1^{(j)} : C(I_j) \to I_j$, la cual a cada subcontinuo de I_j le asocia su punto más cercano al origen v. Definamos $\sigma : C(X) \to X$ por

$$\sigma(A) = \begin{cases} \sigma_1^{(j)}(A), & \text{si } A \in C(I_j) \text{ para alguna } j \in \{1,2,3\}, \\ v, & \text{si } A \in F, \\ 10d(A,F)e_j, & \text{si } A \in W_j \text{ para alguna } j \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Teorema 5.4 *Para este triodo X, la función $\sigma : C(X) \to X$ es una selección abierta.*

Demostración. Para probar este teorema, mostraremos una serie de afirmaciones que nos facilitarán el trabajo.

Afirmación 1. La función σ está bien definida.

Si $A \in F \cap C(I_j)$ para alguna $j \in \{1,2,3\}$, entonces A es un subarco de I_j que contiene al punto v. Por la definición de $\sigma_1^{(j)}(A)$, tenemos que $\sigma_1^{(j)}(A) = v$ y entonces la definición de $\sigma(A)$ no depende de si tomamos a A en $C(I_j)$ o en F.

Ya que $C(I_j)$ sólo puede intersectar al cubo C en una arista y, por (a) ningún W_j intersecta a una arista, tenemos que $C(I_j) \cap W_i = \emptyset$ para cualesquiera $i,j \in \{1,2,3\}$.

Finalmente, ningún W_j intersecta a F. Esto termina la prueba de que σ está bien definida.

Afirmación 2. La función σ es continua.

Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ y $A \in C(X)$ tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Se tienen tres casos.

Caso 1. A está en alguna de las alas y no está en el cubo. Esto es, $A \in C(I_j) \setminus C$, para algún $j \in \{1,2,3\}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, A) \subset C(I_j)$, de donde, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in B(\varepsilon, A)$ para todo $n \geq N$. Como ahí la función σ es igual a $\sigma_1^{(j)}$, y ésta es continua, se cumple que $\{\sigma(A_n)\}_{n\geq N}$ converge a $\sigma(A)$. Por lo tanto, $\{\sigma(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma(A)$.

Caso 2. A está en el cubo y no está en ninguna de las alas. Se tienen dos subcasos:

Subcaso 2.1. $A \in W_j$, para algún $j \in \{1,2,3\}$. En este caso, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, A) \subset W_j$, porque W_j es abierto, así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in B(\varepsilon, A)$ para todo $n \geq N$. Entonces $\sigma(A) = 10d(A,F)e_j$ y para cada $n \geq N$, $\sigma(A_n) = 10d(A_n, F)e_j$. Luego, como la distancia es una función continua, $\{\sigma(A_n)\}_{n\geq N}$ converge a $\sigma(A)$. Por lo tanto $\{\sigma(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma(A)$.

Subcaso 2.2. $A \in F$. Como A no está en ninguna de las alas, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in C$ para todo $n \geq N$. Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$, de donde, $\lim_{n\to\infty} d(A_n, F) = 0$. Ya que $\sigma(A_n) = v$ o es de la forma $10d(A_n, F)e_j$ para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} A_n = v = \sigma(A)$.

Caso 3. A está en el cubo y en algún ala. Como ya probamos que σ es continua en el cubo y en las alas, sin importar por donde converja la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a A, se tiene que $\{\sigma(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma(A)$.

Por lo tanto, σ es continua.

Afirmación 3. La función σ es abierta.

Sean $\mathcal{V}$ un abierto de $C(X)$ y $A \in \mathcal{V}$. Tenemos que probar que $\sigma(A)$ es un punto interior de $\sigma(\mathcal{V})$. Analizamos tres casos.

Caso 1. $v \notin A$.

En este caso, $A \subset I_j \setminus \{v\}$ para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$.

Como $\sigma_1^{(j)}$ es una selección, $\sigma_1^{(j)}(A) \in I_j \setminus \{v\}$. Como $\mathcal{V}$ es abierto, $I_j \setminus \{v\}$ es abierto en X, $C(I_j \setminus \{v\})$ es abierto en $C(X)$ y $\sigma_1^{(j)}$ es continua, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $B \in C(X)$ y $H(A, B) < \varepsilon$, entonces $B \in \mathcal{V}$, $B \subset I_j \setminus \{v\}$ y $\sigma_1^{(j)}(B) \subset I_j \setminus \{v\}$; de modo que $\sigma(B) = \sigma_1^{(j)}(B)$. Sea $\mathcal{V}_1 = B^H(\varepsilon, A)$. Entonces $\sigma(\mathcal{V}_1) \subset I_j \setminus \{v\}$ y $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, por lo que será suficiente mostrar que $\sigma(A)$ es interior a $\sigma(\mathcal{V}_1)$. Como $\sigma_1^{(j)}$ es abierta y $\mathcal{V}_1 \subset C(I_j)$, tenemos que $\sigma_1^{(j)}(\mathcal{V}_1)$ es un abierto de I_j que no tiene a v, de manera que $\sigma_1^{(j)}(\mathcal{V}_1)$ es un abierto de I_j que está contenido en el abierto $I_j \setminus \{v\}$ de X. Esto implica que $\sigma_1^{(j)}(\mathcal{V}_1) = \sigma(\mathcal{V}_1)$ es abierto en X. Por tanto $\sigma(A)$ es un punto interior de $\sigma(\mathcal{V})$.

Caso 2. $v \in A$.

En este caso A pertenece al cubo C. Entonces distinguimos dos subcasos.

Subcaso 2.1. $A \in F$.

En este subcaso, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, $A \in Cl_C(W_j)$. Tomamos un abierto conexo $\mathcal{U}$ de C tal que $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{C}$. Entonces podemos encontrar $A_j \in \mathcal{U} \cap W_j$. Notemos que $A_j \notin F$, de manera que $d(A_j, F) > 0$. De modo que $\sigma(A) = 10d(A_j, F)e_j$ es un punto en el segmento ve_j diferente de v. Como $\mathcal{U}$ es conexo y $\sigma(A) = v$, todo el segmento que une a v con $\sigma(A_j)$ está contenido en $\sigma(\mathcal{U}) \subset \sigma(\mathcal{V})$. Por tanto, $\sigma(\mathcal{V})$ contiene un subtriodo de X con tres segmentos no degenerados saliendo de v. Así que $v \in Int_X(\sigma(\mathcal{V}))$. Por tanto $\sigma(A)$ es un punto interior de $\sigma(\mathcal{V})$.

Subcaso 2.2. $A \in W_j$ para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$.

Aquí tenemos que dividir a su vez en dos subcasos.

Subcaso 2.2.1. $A \neq p_j$.

En este subcaso, $\sigma(A) = 10d(A, F)e_j$. Tomamos un abierto conexo $\mathcal{U}$ de C tal que $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \cap W_j$. Como $A \neq p_j$, A no está situada en donde empieza el túnel W_j. Por la propiedad (e), si avanzamos, dentro de $\mathcal{U}$, hacia el lado donde empieza el túnel W_j, como el túnel se hace menos angosto hacia esta parte, vamos a obtener un elemento $B_1 \in \mathcal{U}$ tal que $d(A, F) < d(B_1, F)$. De manera que el punto $\sigma(B_1) = 10d(B_1, F)e_j$ está más alejado de v que el punto $\sigma(A) = 10d(A, F)e_j$. Por otra parte, si avanzamos dentro de $\mathcal{U}$, dirigiéndonos directamente hacia F, podemos obtener un elemento $B_2 \in \mathcal{U}$ tal que $d(A,F) > d(B_1,F)$. De manera que el punto $\sigma(B_2) = 10d(B_2,F)e_j$ está más cercano de v que el punto $\sigma(A) = 10d(A,F)e_j$. Por tanto, $\sigma(\mathcal{U})$ es un subconjunto conexo de X que tiene puntos en el segmento I_j, que están más cercanos a v que $\sigma(A)$ y también tiene puntos que están más alejados de v que $\sigma(A)$. Esto muestra que $\sigma(A)$ es un punto interior a $\sigma(\mathcal{U})$ y, en consecuencia, $\sigma(A)$ es un punto interior de $\sigma(\mathcal{V})$.

Subcaso 2.2.2. $A = p_j$.

En este caso $\sigma(A) = e_j$, que es un extremo del segmento I_j. Como en el subcaso anterior, si caminamos directamente hacia F podemos obtener un subintervalo no degenerado del segmento I_j, contenido en $\sigma(\mathcal{V})$. Por tanto $\sigma(A)$ es un punto interior de $\sigma(\mathcal{V})$.

Esto termina la prueba de la Afirmación 3.

Afirmación 4. $\sigma(A) \in A$ para todo $A \in C(X)$.

Si $v \notin A$, entonces $A \subset I_j \setminus \{v\}$ para algún $j \in \{1,2,3\}$, de donde $\sigma(A) = \sigma_1^{(j)}(A) \in A$, porque $\sigma_1^{(j)}$ es selección.

Si $v \in A$, entonces $A \in C$, así que $A \in F$ o $A \in W_j$ para algún $j \in \{1,2,3\}$. En el primer caso $\sigma(A) = v \in A$. Entonces sólo resta ver qué sucede cuando $A \in W_j$ para algún $j \in \{1,2,3\}$. Si $A = (z_1, z_2, z_3)$, entonces, por la condición (f), $d(A,F) \leq \frac{z_j}{10}$, así que, $\sigma(A) = 10d(A,F)e_j$ es un punto del triodo que está más cerca de v que el punto z_je_j. Por tanto $\sigma(A)$ pertenece al segmento $v(z_je_j)$ que va de v a z_je_j. De acuerdo a la manera en que se construye el modelo para $C(X)$, $v(z_je_j)$ es precisamente la intersección de A con I_j. De manera que $\sigma(A) \in v(z_je_j) \subset A$, por lo que $\sigma(A) \in A$.

Por las afirmaciones 1, 2 y 4, σ es una selección, y por la afirmación 3, σ es abierta. ■

Un continuo X es *hereditariamente unicoherente* si la intersección de cualquier par de subcontinuos de X es conexa. Un *dendroide* es un continuo arco conexo hereditariamente unicoherente. El Teorema 5.5 nos asegura que los continuos que admiten selecciones sólo hay que buscarlos entre los dendroides. La prueba de este resultado no se dará, pero puede ser vista en [1, Teorema 10.10, página 145].

Teorema 5.5 *Si existe una selección $s : C(X) \to X$, entonces X es un dendroide.*

Ahora veremos que hay una clase especial de dendroides que admiten selecciones: las dendritas. Una *dendrita* es un continuo de Peano que no contiene curvas cerradas simples. Si X es un continuo de Peano, entonces es arco conexo ([3, Teorema 8.23, pág. 130]), y es una dendrita si y sólo si es hereditariamente unicoherente ([3, Teorema 10.35, pág. 180]). Entonces un continuo es una dendrita si y sólo si es un dendroide localmente conexo. Como las dendritas no contienen curvas cerradas simples, son únicamente arco conexas (dados dos puntos p y q de la dendrita, existe un único arco en la dendrita de p a q).

Para demostrar que las dendritas admiten seleciones usaremos el Lema 5.6, cuya demostración se encuentra en [3, Proposición 10.9, pág. 169].

Lema 5.6 *Si X es una dendrita y A es un subconjunto conexo de X, entonces A es arco conexo.*

Teorema 5.7 *Si X es una dendrita, entonces existe una selección $s : C(X) \to X$.*

Demostración. Dados dos puntos $x, y \in X$, denotaremos por xy al arco único de x a y en X, si $x \neq y$; en el caso en que $x = y$, escribimos $xy = \{x\}$. Elegimos un punto $p \in X$. La selección que daremos dependerá del punto p. Sea $A \in C(X)$ tal que $p \notin A$.

Afirmación. Existe un único elemento $x_A \in A$ tal que $x_A \in pa$ para todo $a \in A$.

Sean $x \in A$ y $\alpha : [0, 1] \to X$ una parametrización del arco px, es decir, α es continua e inyectiva, $\alpha([0, 1]) = px$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = x$. Sea $t_0 = \text{ínf}\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \in A\} = \text{ínf}\, \alpha^{-1}(A)$. Por la compacidad de A, se tiene que $\alpha(t_0) \in A$, así que, $0 < t_0 \leq 1$ y $\alpha(t) \notin A$ para todo $t \in [0, t_0)$. Veamos que $x_A = \alpha(t_0)$ satisface lo requerido en la afirmación. Notemos que $px_A = \alpha([0, t_0])$ y $px_A \cap A = \{x_A\}$. Consideremos un elemento cualquiera $a \in A$. Como A es arco conexo, $x_A a \subset A$. Entonces $px_A \cap x_A a = \{x_A\}$, de donde $px_A \cup x_A a$ es un arco que une a p con a, y como tal arco es único, $px_A \cup x_A a = pa$. Esto prueba que $x_A \in pa$ y concluye la prueba de la existencia de x_A. Para la unicidad, supongamos que existe $y \in A$ tal que $y \in pa$ para todo $a \in A$. Como $y \in A$, $x_A \in py$, de donde $px_A \subset py$. Por otro lado, también se tiene que $y \in px_A$, así que $py \subset px_A$. Por lo tanto $px_A = py$, y $x_A = y$. Con esto queda demostrada la afirmación.

Definamos $s : C(X) \to X$ por

$$s(A) = \begin{cases} p, & \text{si } p \in A, \\ x_A, & \text{si } p \notin A. \end{cases}$$

Por la afirmación, s está bien definida y satisface que $s(A) \in A$ para todo $A \in C(X)$. Resta ver que s es continua, para hacer esto, consideremos una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $C(X)$ que converge a un elemento $A \in C(X)$.

CASO 1: $p \in A$. Sea $\varepsilon > 0$. Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U$ y $\textit{diámetro}(U) < \varepsilon$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $B(\delta, p) \subset U$. Como $\text{lím}_{n\to\infty} A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \delta$ para todo $n \geq N$. Entonces, para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a_n, p) < \delta$, de donde se sigue que $a_n \in U$. Así, dado que el lema anterior nos garantiza que U es arco conexo, $pa_n \subset U$. De la definición de s, si $p \notin A_n$, entonces $s(A_n) = x_{A_n} \in pa_n \subset U$, y si $p \in A_n$, entonces $s(A_n) = p$. De cualquier modo, $d(s(A_n), p) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Así, $\text{lím}_{n\to\infty} s(A_n) = p = s(A)$.

CASO 2: $p \notin A$. Tenemos que $s(A) = x_A \neq p$. Definamos $x_n = s(A_n)$ y supongamos que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = q$ con $q \neq x_A$. Como $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}_{n\to\infty} A_n = A$, entonces $q \in A$ (vea [1, Ejercicio 4.4, pág. 70]). Usando de nuevo que A_n converge a A y $x_A \in A$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = x_A$. Como X es localmente conexo y normal, existen abiertos conexos U y V de X tales que $q \in U$, $x_A \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in U$ y $a_N \in V$. Por el lema anterior U y V son arco conexos, así que $qx_N \subset U$ y $x_A a_N \subset V$. Por la definición de x_A, $x_A \in qp \subset qx_N \cup x_N p$. Como $qx_N \subset U$ y $x_A \notin U$, $x_A \in x_N p$, y entonces $x_N \notin x_A p$ ($x_N \neq x_A$ porque $x_N \in U$ y $x_A \notin U$). Por otro lado, $a_N x_A \subset V \subset X \setminus \{x_N\}$ implica que $x_N \notin a_N x_A$. Entonces, como $a_N p \subset a_N x_A \cup x_A p$, se tiene que $x_N \notin a_N p$. Hemos encontrado un elemento $a_N \in A_N$ tal que $s(A_N) = x_N \notin a_N p$, lo cual contradice la definición de x_N. Por lo tanto, $q = x_A$. La compacidad de X implica entonces que $\lim_{n\to\infty} s(A_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = q = x_A = s(A)$. Con esto hemos probado que s es continua, de donde concluimos que s es una selección. ■

Capítulo 6

Continuos hereditariamente indescomponibles de altas dimensiones

Un continuo es *indescomponible* si no es la unión de dos subcontinuos propios. Es *hereditariamente indescomponible* si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible.

Como ejemplos de continuos indescomponibles tenemos el continuo de Knaster (vea [3, Ejemplo 2.9, pág. 22]) y el seudoarco (vea [3, Ejemplo 1.10, pág. 7]). Centraremos nuestra atención en los continuos hereditariamente indescomponibles y en sus dimensiones, y para comenzar podemos decir que el seudoarco ejemplifica un continuo hereditariamente indescomponible de dimensión 1 (vea [3, 1.23, pág. 13]). Probaremos que existen continuos hereditariamente indescomponibles de cualquier dimensión.

Dados un espacio topológico X y $A, B, C \subset X$, decimos que C *separa a* A *de* B en X si $X \setminus C = P \cup Q$, donde P y Q son subconjuntos abiertos ajenos y no vacíos de $X \setminus C$ tales que $A \subset P$ y $B \subset Q$. Si alguno de los conjuntos A, B o C es de un sólo punto, digamos $\{x\}$, para hacer referencia a él en la definición anterior omitiremos las llaves, es decir, diremos simplemente que x separa a y de z en lugar de $\{x\}$ separa a $\{y\}$ de $\{z\}$. Si b y c son dos puntos distintos de $\mathbb{R}^n$ y C es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ que separa a b de c, tal que ningún subconjunto cerrado propio de C los separa, diremos que C *separa irreduciblemente a* b *de* c.

Un continuo X es *unicoherente* si cada vez que se pone en la forma $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados y conexos de X, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

En este capítulo usaremos que los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ y el cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ son unicoherentes y que si X es un continuo localmente conexo y unicoherente, y D es un subconjunto abierto de X que separa a dos puntos p y q en X, entonces existe una componente C de D que también separa a p y q en X [8, Teorema, pág. 198].

Un arco A es ε-*torcido* si para cada par de puntos $p, q \in A$ existen puntos $r, s \in A$

entre p y q tales que r está entre p y s, $d(p,s) < \varepsilon$ y $d(r,q) < \varepsilon$, donde $d(x,y)$ denota la distancia entre x y y (vea la Figura 6.1). Notemos que si $\varepsilon' > \varepsilon$ y un arco es ε-torcido, entonces también es ε'-torcido. Un arco que intersecta a dos conjuntos L y K es llamado *ε-torcido con respecto a ellos* si cada uno de sus subarcos pq con extremos $p \in L$ y $q \in K$ contiene puntos r y s tales que r está entre p y s, $d(s,L) < \varepsilon$ y $d(r,K) < \varepsilon$.

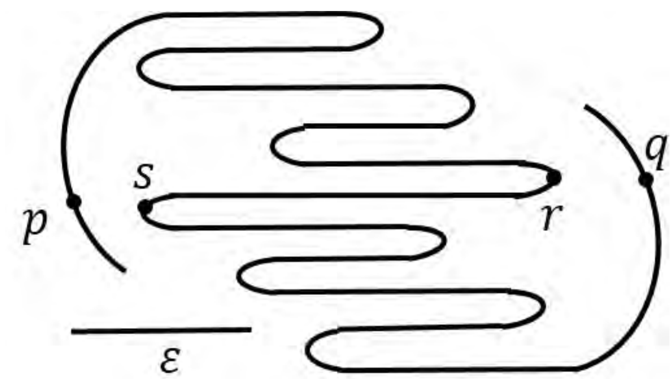


Figura 6.1

6.1. Teoría de la dimensión

En esta sección daremos algunos resultados acerca de teoría de la dimensión que serán usados en este capítulo. Como el objetivo de este trabajo no es presentar la teoría de la dimensión, sólo usaremos estos resultados, sin probarlos. Sin embargo daremos la referencia precisa donde se encuentran sus demostraciones. Todos los espacios que consideraremos serán métricos separables.

Para comenzar, tenemos la definición de dimensión (vea [5, Definición 1.1, pág. 5]).

Definición 6.1

1. $\dim(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$.
2. Supongamos inductivamente que hemos definido $\dim(Y) \leq n-1$ para un entero dado $n \geq 0$ y cualquier espacio Y. Entonces, para un espacio X y un punto $p \in X$, definimos
$$\dim_p(X) \leq n$$
ssi p tiene una base de vecindades abiertas en X cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual que $n-1$.
3. $\dim(X) \leq n$ si $\dim_p(X) \leq n$ para cada $p \in X$.
4. $\dim(X) = n$ si $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) \nleq n-1$.

5. $\dim_p(X) = n$ si $\dim_p(X) \leq n$ y $\dim_p(X) \nleq n-1$.
6. $\dim(X) = \infty$ si $\dim(X) \nleq n$ para ninguna $n \geq -1$.
7. $\dim_p(X) = \infty$ si $\dim_p(X) \nleq n$ para ninguna $n \geq -1$.

Ahora damos un resultado sobre la dimensión de subespacios y una caracterización en términos de separación, las demostraciones se encuentran en [5, Teorema 3.2, pág. 15] y [5, Teorema 8.2, pág. 38], respectivamente.

Teorema 6.2 *Si X es un espacio tal que* $\dim(X) \leq n$ *y Y es un subespacio de X, entonces* $\dim(Y) \leq n$.

Teorema 6.3 *Para un entero dado $n \geq 0$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\dim(X) \leq n$;
2. *cualquier punto en X y cualquier subconjunto cerrado no vacío de X que no contiene al punto están separados en X por un subconjunto cerrado de X de dimensión menor o igual que $n-1$;*
3. *cualquier par de cerrados ajenos no vacíos de X están separados en X por un subconjunto cerrado de X de dimensión menor o igual que $n-1$.*

Una *variedad de Cantor de dimensión n,* donde $n \geq 1$, es un espacio compacto de dimensión n que no puede ser separado por un subconjunto de dimensión menor o igual que $n-2$. Una *variedad de Cantor de dimensión* ∞ es un espacio compacto de dimensión infinita que no puede ser separado por un subconjunto de dimensión finita. Los siguientes tres resultados son acerca de variedades de Cantor, para las pruebas vea [5, Teorema 23.3, pág. 150], [5, Corolario 23.4, pág. 151] y [5, Teorema 24.15, pág. 161], respectivamente.

Teorema 6.4 *Si X es un espacio compacto y* $\dim(X) = n$*, donde $1 \leq n < \infty$, entonces X contiene una variedad de Cantor de dimensión n.*

Corolario 6.5 *Si X es un espacio compacto tal que* $\dim(X) = n < \infty$*, entonces X tiene una componente de dimensión n.*

Teorema 6.6 *Sea C un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Si C separa irreduciblemente a los puntos p y q en $\mathbb{R}^n$, entonces C es una variedad de Cantor de dimensión $n-1$.*

6.2. Abiertos torcidos

Los siguientes dos teoremas se cumplen en $\mathbb{R}^n$, para cualquier $n \geq 3$, y en $[0,1]^{\mathbb{N}}$, así que X denotará a alguno de estos dos espacios.

Teorema 6.7 *Sean b y c dos puntos distintos de X. Sean D un abierto acotado de X que separa a b de c, L y K dos subconjuntos de X y ε un número positivo. Entonces existe un abierto $E \subset D$ que separa a b de c y es tal que cada arco en E de un punto de L a un punto de K es ε-torcido con respecto a L y K.*

Demostración. Si $L = \emptyset$, elegimos $E = D$. Entonces, por vacuidad, E satisface las condiciones que buscamos. Supongamos que $L \neq \emptyset$. Sea $K' = \{x \in K : d(x, L) \geq \varepsilon\}$. Si $K' = \emptyset$, $d(x, L) < \varepsilon$ para cualquier $x \in K$, y definimos $E = D$. Por hipótesis E separa a b de c. Sea A un arco en E de un punto de L a un punto de K. Consideremos un subarco pq de A con extremos $p \in L$ y $q \in K$. Como $q \in K$, $d(q, L) < \varepsilon$. Existe $h_q \in L$ tal que $d(q, h_q) < \varepsilon$. Sea $\eta = \varepsilon - d(q, h_q)$. Elegimos $r \in pq \cap B(\eta, q)$, $r \neq q$. Se tiene que

$$d(r, K) \leq d(r, q) < \eta < \varepsilon.$$

Sea $\eta' = d(q, r) < \eta$. Elegimos $s \in pq \cap B(\eta', q)$, $s \neq q$, y s entre r y q en pq. Entonces

$$\begin{aligned} d(s, h_q) &\leq d(s, q) + d(q, h_q) \\ &< \eta' + d(q, h_q) \\ &< \varepsilon - d(q, h_q) + d(q, h_q) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces $d(s, L) < \varepsilon$. Por lo tanto A es torcido con respecto a L y K.

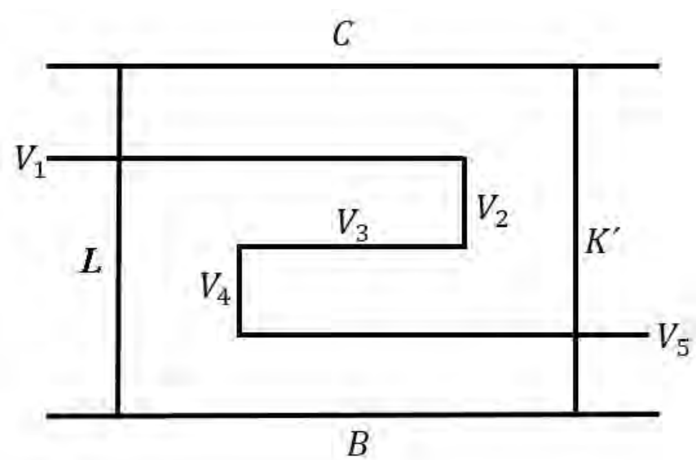


Figura 6.2

Ahora supongamos que L y K' son no vacíos. Supongamos que $X \setminus D = B \cup C$, donde B y C son cerrados, ajenos y no vacíos de X tales que $b \in B$ y $c \in C$.

En el caso en que $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, B y C son compactos ajenos.

En el caso en que $X = \mathbb{R}^n$, como D es acotado, existe $M > 0$ tal que $D \subset B(M, \theta)$, donde $\theta = (0, \ldots, 0)$. Entonces $X \setminus B(M, \theta)$ es conexo y $X \setminus B(M, \theta) \subset$

$X \setminus D \subset B \cup C$. De manera que $X \setminus B(M,\theta) \subset B$ o $X \setminus B(M,\theta) \subset C$. En el primer caso $C \subset B(M,\theta)$ y en el segundo $B \subset B(M,\theta)$. Por tanto alguno de los conjuntos B o C es compacto. En cualquier caso, podemos tomar $\delta > 0$ tal que $\delta < \inf\{d(x,y) : x \in B\ y \in C\}$.

Definimos

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{x \in X : d(x,B) = \frac{3}{4}\delta \text{ y } d(x,K') \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \\
V_2 &= \left\{x \in X : \frac{\delta}{2} \leq d(x,B) \leq \frac{3}{4}\delta \text{ y } d(x,K') = \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \\
V_3 &= \left\{x \in X : d(x,B) = \frac{\delta}{2} \text{ y } d(x,L \cup K') \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \\
V_4 &= \left\{x \in X : \frac{\delta}{4} \leq d(x,B) \leq \frac{\delta}{2} \text{ y } d(x,L) = \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \\
V_5 &= \left\{x \in X : d(x,B) = \frac{\delta}{4} \text{ y } d(x,L) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \\
V &= V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5.
\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{x \in X : d(x,B) \leq \frac{\delta}{4}\right\}, \\
A_2 &= \left\{x \in X : \frac{\delta}{4} \leq d(x,B) \leq \frac{\delta}{2} \text{ y } d(x,L) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \\
A_3 &= \left\{x \in X : \frac{\delta}{2} \leq d(x,B) \leq \frac{3}{4}\delta \text{ y } d(x,K') \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Definimos $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Notemos que A es cerrado.

La Figura 6.2 es un esquema que ilustra los conjuntos definidos.

Probaremos que $Fr(A) \subset V$.

Sea $x \in Fr(A) \subset A$.

• Si $d(x,B) < \frac{\delta}{4}$, entonces $x \in Int(A_1) \subset Int(A)$, lo cual es absurdo. Por tanto, $d(x,B) \geq \frac{\delta}{4}$.

• Si $d(x,B) = \frac{\delta}{4}$ y $d(x,L) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $x \in Int(A_1 \cup A_2) \subset Int(A)$, lo cual no es cierto. Así que si $d(x,B) = \frac{\delta}{4}$, de donde $d(x,L) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, de modo que $x \in V_5 \subset V$. Por tanto, podemos suponer que $d(x,B) > \frac{\delta}{4}$.

• Si $d(x,B) < \frac{\delta}{2}$, entonces x tiene una vecindad que no intersecta a $A_1 \cup A_3$. Como $x \in A$, tenemos que $d(x,L) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si $d(x,L) < \frac{\varepsilon}{2}$, se tiene que $x \in Int(A_2)$, lo que sería absurdo. Así que $d(x,L) = \frac{\varepsilon}{2}$. De modo que $x \in V_4 \subset V$. Por tanto, podemos suponer que $d(x,B) \geq \frac{\delta}{2}$.

• Si $d(x,B) = \frac{\delta}{2}$ y $d(x,L \cup K') \geq \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $x \in V_2 \subset V$.

• Si $d(x,B) = \frac{\delta}{2}$ y $d(x,L \cup K') < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $d(x,L) < \frac{\varepsilon}{2}$ o $d(x,K') < \frac{\varepsilon}{2}$. En el caso en que $d(x,L) < \frac{\varepsilon}{2}$, como $K' = \{y \in K : d(y,L) \geq \varepsilon\}$, no puede ocurrir que $d(x,K') \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de manera que $d(x,K') > \frac{\varepsilon}{2}$. Así $x \in Int(A_2 \cup A_3)$, lo cual es absurdo.

En el caso en que $d(x,K') < \frac{\varepsilon}{2}$, por la definición de K', tenemos que $d(x,L) > \frac{\varepsilon}{2}$, y entonces $x \notin A$, lo cual también es absurdo. Esto termina el análisis del caso $d(x,B) = \frac{\delta}{2}$. Por tanto, podemos suponer que $d(x,B) > \frac{\delta}{2}$.

Notemos que ningún punto de A puede satisfacer que $d(x,B) > \frac{3\delta}{4}$. Por tanto, $\frac{\delta}{2} < d(x,B) \leq \frac{3\delta}{4}$.

• Si $\frac{\delta}{2} < d(x,B) < \frac{3\delta}{4}$, y ocurriera que $d(x,K') < \frac{\varepsilon}{2}$, por la definición de K', tenemos que $d(x,L) > \frac{\varepsilon}{2}$ y entonces $x \notin A$, lo cual es absurdo. Por tanto, si $\frac{\delta}{2} < d(x,B) < \frac{3\delta}{4}$, se tiene que $d(x,K') \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Si $d(x,K') > \frac{\varepsilon}{2}$, se cumple que $x \in Int(A_3)$, lo cual no se puede. De manera que $d(x,K') = \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto $x \in V_2$.

• Finalmente, si $d(x,B) = \frac{3\delta}{4}$, como $x \in A$, tenemos que $x \in A_3$, así que $d(x,K') \geq \frac{\varepsilon}{2}$ y $x \in V_1$.

Esto termina la prueba de que $Fr(A) \subset V$.

Como todos los puntos de V tienen distancia positiva a B, tenemos que $B \cap V = \emptyset$. Ya que para todo $x \in V$, $d(x,B) < \delta$, tenemos que $V \cap C = \emptyset$. Por tanto $V \cap (B \cup C) = \emptyset$.

Notemos que A es cerrado, $B \subset Int(A_1) \subset Int(A)$ y como para toda $x \in A$, $d(x,B) < \delta$, tenemos que $A \cap C = \emptyset$. Dado que $Fr(A) \subset V$, tenemos que $Int(A) \setminus V$ y $(X \setminus A) \setminus V$ son abiertos en $X \setminus V$ cuya unión es $X \setminus V$ y que contienen a B y C, respectivamente. Por lo tanto V separa a B de C.

Sean $\gamma = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\delta}{16}\}$, $E = N(\gamma, V)$ y para cada $i \in \{1,2,3,4,5\}$, $E_i = N(\gamma, V_i)$.

Si $x \in B \cup C$, $d(x,V) \geq \frac{\delta}{4} > \frac{\delta}{16} \geq \gamma$, así que $x \in X \setminus \overline{N(\gamma,V)} = X \setminus \overline{E}$. Entonces $B \cup C \subset X \setminus \overline{E}$, de donde $\overline{E} \subset X \setminus (B \cup C) = D$. Como $V \subset E$ y $E \cap (B \cup C) = \emptyset$, E también separa a b de c.

Si $x \in E_4$, existe $y \in V_4$ tal que $d(x,y) < \gamma \leq \frac{\varepsilon}{4}$; como $y \in V_4$, $d(y,L) = \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $d(x,L) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$.

Similarmente se demuestra que, si $x \in E_2$, $d(x,K') < \varepsilon$, y como $K' \subset K$, $d(x,K) < \varepsilon$.

Veamos que $E_1 \cap (E_3 \cup E_4 \cup E_5) = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe un punto $x \in E_1 \cap (E_3 \cup E_4 \cup E_5)$. Sean $y \in V_1$ y $z \in V_3 \cup V_4 \cup V_5$ tales que $d(x,y) = d(x,z) < \gamma \leq \frac{\delta}{16}$. De las definiciones de los conjuntos V_i, $d(z,B) \leq \frac{\delta}{2}$ y $d(y,B) = \frac{3\delta}{4}$. Entonces $\frac{3\delta}{4} = d(y,B) \leq d(y,x) + d(x,z) + d(z,B) < \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{2} = \frac{5\delta}{8}$, lo cual es absurdo. Por tanto $E_1 \cap (E_3 \cup E_4 \cup E_5) = \emptyset$.

En forma similar se prueba que $(E_1 \cup E_2 \cup E_3) \cap E_5 = \emptyset$.

Probaremos que $K' \cap E \subset E_5$. Sea $x \in K' \cap E = K' \cap N(\gamma, V)$. Entonces existe $v \in V$ tal que $d(x,v) < \gamma$. Si $v \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$, $d(v,K') \geq \frac{\varepsilon}{2}$, así que $d(v,K') \leq d(x,v) \leq \gamma \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} \leq d(v,K')$, lo cual es una contradicción. Así $v \notin V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Si $v \in V_4$, $d(x,L) \leq d(x,v) + d(v,L) \leq \gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, así que $x \notin K'$, lo cual es absurdo, entonces $x \notin V_4$. Por lo tanto $v \in V_5$ y $x \in N(\gamma, V_5) = E_5$.

Ahora mostraremos que $L \cap E \subset E_1$. Sea $x \in L \cap E = L \cap N(\gamma, V)$. Entonces existe $v \in V$ tal que $d(x,v) < \gamma$. Si $x \in V_3 \cup V_4 \cup V_5$, $d(v,L) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, así que $d(v,L) \leq d(v,x) < \gamma \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} \leq d(v,L)$, lo cual es una contradicción. Así $v \notin V_3 \cup V_4 \cup V_5$. Si $v \in V_2$, $d(x,K') \leq d(x,v) + d(v,K') \leq \gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, por la definición de K' tenemos que $x \notin L$, lo cual es absurdo, entonces $x \notin V_2$. Por lo tanto $v \in V_1$ y $x \in N(\gamma, V_1) = E_1$.

Lo que nos falta probar es que cada arco en E de un punto de L a un punto de K es ε-torcido con respecto a L y K.

Tomemos un arco pq en E de un punto $p \in L$ a un punto $q \in K$.

Tenemos que mostrar que existen puntos r y s en pq tales que r está entre p y s, $d(s, L) < \varepsilon$ y $d(r, K) < \varepsilon$.

Si $d(q, L) < \varepsilon$, sea $\eta = \varepsilon - d(q, L)$. Elegimos $r \in pq \cap B(\eta, q)$, $r \neq q$. Entonces $d(r, K) \leq d(r, q) < \eta < \varepsilon$. Sea $\eta' = d(q, r)$. Elegimos $s \in pq \cap B(\eta', q)$, $s \neq q$, y s entre r y q en pq. Se cumple que $d(s, L) \leq d(s, q) + d(q, L) < \eta' + d(q, L) < \varepsilon$. Esto termina la prueba de la existencia de r y s para este caso.

Supongamos ahora que $d(q, L) \geq \varepsilon$. Ya vimos que $L \cap E \subset E_1$ y $K' \cap E \subset E_5$, así que $p \in E_1$ y $q \in E_5$. Por tanto $pq \cap E_1 \neq \emptyset \neq pq \cap E_5$. Como $pq \subset E$, $E \setminus E_2 \subset E_1 \cup (E_3 \cup E_4 \cup E_5)$ y los conjuntos E_1 y $E_3 \cup E_4 \cup E_5$ son abiertos ajenos, la conexidad de pq, implica que existe $r \in E_2 \cap pq$. Usando que $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ y E_5 también son abiertos ajenos y la conexidad del arco rq, se obtiene que existe $s \in E_4 \cap rq$. Como ya probamos que $d(x, L) < \varepsilon$ para cada $x \in E_4$, y que $d(y, K) < \varepsilon$ para cada $y \in E_2$, se cumple que $d(s, L) < \varepsilon$ y $d(r, K) < \varepsilon$. Por lo tanto, cualquier arco en E de un punto de L a un punto de K es ε-torcido con respecto a L y K. ■

Lema 6.8 *Sean F un abierto acotado de X que separa el punto b del punto c y $\mathcal{B}$ una base de la topología de X. Entonces existe un abierto G de X que es unión finita de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $\overline{G} \subset F$ y G separa a b de c.*

Demostración. Sea $Z = X \setminus F$. Ya que F es acotado, existe $M > 0$ tal que $\overline{F} \cup \{b, c\} \subset B(M, \theta)$, donde $\theta = (0, \ldots)$. Ya que $X \setminus B(M, \theta)$ es conexo y está contenido en Z, existe una componente D de Z tal que $X \setminus B(M, \theta) \subset D$, en el caso en que X sea el cubo de Hilbert, escogemos $M = 2$, entonces $X \setminus B(M, \theta) = \emptyset$ y elegimos cualquier componente D de Z. Entonces las componentes de Z, diferentes de D, son acotadas. Ya que b y c pertenecen a componentes diferentes de Z (pues Z separa a b de c) y juegan papeles simétricos, podemos suponer que $b \notin D$. Sean E_b y E_c las componentes de Z que tienen a b y c, respectivamente, por supuesto que puede ocurrir que $E_c = D$, pero seguro sabemos que $E_b \neq E_c$. Sea $Z_0 = Z \cap \overline{B(M, \theta)}$. Entonces Z_0 es métrico y compacto.

Como $E_b \subset \overline{B(M, \theta)}$, tenemos que $E_b \subset Z_0$. Ya que E_b es componente de Z y $Z_0 \subset Z$, no puede haber un subconjunto conexo de Z_0 que contenga propiamente a E_b, de manera que E_b es una componente de Z_0. Notemos que E_b es ajena a $(E_c \cup D) \cap Z_0$, el cual es cerrado en Z_0.

Por el Teorema del Cable Cortado (ver Teorema 6.4 de [1]) existen dos subconjuntos compactos y ajenos L y K_0 de Z_0 tales que $Z_0 = L \cup K_0$, $E_b \subset L$ y $(E_c \cup D) \cap Z_0 \subset K_0$.

Hacemos $K = K_0 \cup (X \setminus B(M, \theta))$. Entonces K es cerrado en X. Como $X \setminus B(M, \theta) \subset D$ y D es ajeno a L, tenemos que $K \cap L = \emptyset$. Ya que $K = K_0 \cup (X \setminus B(M, \theta)) \subset Z_0 \cup D \subset Z$, tenemos que $K \cup L \subset Z$. Por otra parte $Z = (Z \cap \overline{B(M, \theta)}) \cup (Z \setminus B(M, \theta)) \subset L \cup K_0 \cup (X \setminus B(M, \theta)) = L \cup K$. Por tanto $Z = L \cup K$. Hemos visto entonces que L y K son dos cerrados ajenos de X, cuya unión es Z.

Por la normalidad de X, existen abiertos ajenos U y V de X tales que $L \subset U$ y $K \subset V$. Sea $T = X \setminus (U \cup V) \subset X \setminus (L \cup K) = X \setminus Z = F$. Entonces T es cerrado en X, $T \subset F$ y $X \setminus T = U \cup V$. Así que T separa a L y K en X.

Ya que T es ajeno a K, $T \subset B(M, \theta)$, de manera que T es compacto. Así que podemos cubrir a T por un número finito de elementos $G_1, \ldots, G_k$ de $\mathcal{B}$ tales que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\overline{G_i} \subset F$. Sea $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$. Entonces G es una unión finita de elementos de $\mathcal{B}$ y $\overline{G} \subset F$.

Además $X \setminus G \subset X \setminus T = U \cup V$, así que $X \setminus G = (U \cap (X \setminus G)) \cup (V \cap (X \setminus G))$. De manera que $(U \cap (X \setminus G))$ y $(V \cap (X \setminus G))$ son abiertos ajenos de $X \setminus G$, y como $b \in E_b \subset L \subset U$, $b \in X \setminus F \subset X \setminus G$, $c \in E_c \cap Z_0 \subset K_0 \subset K \subset V$ y $c \in X \setminus F \subset X \setminus G$, concluimos que G separa a b de c. ■

Una *caja* en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, donde para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i < b_i$. Al conjunto de todas las cajas lo denotaremos por $\mathcal{B}_0$. Notemos que $\mathcal{B}_0$ es una base para la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

Lema 6.9 *Sea G un conjunto en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ que es unión finita de cajas. Entonces $\mathbb{R}^n \setminus G$ tiene un número finito de componentes.*

Demostración. Supongamos que $G \neq \emptyset$ y que $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$, donde cada G_j es una caja. Dada $j \in \{1, \ldots, k\}$, escribimos $G_j = (a_1^{(j)}, b_1^{(j)}) \times \ldots \times (a_n^{(j)}, b_n^{(j)})$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $A_i = \{a_i^{(j)} : j \in \{1, \ldots, k\}\} \cup \{b_1^{(j)} : j \in \{1, \ldots, k\}\}$. Ordenamos los elementos de A_i en una sucesión ordenada, es decir, ponemos $A_i = \{c_1^{(i)}, \ldots, c_{r_i}^{(i)}\}$, donde $c_1^{(i)} < \ldots < c_{r_i}^{(i)}$. Como $G \neq \emptyset$, G consta de al menos una caja y entonces A_i tiene al menos dos elementos.

Una semipared S de G es un conjunto de la forma $S = L_1 \times \ldots \times L_n$, donde para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, o bien $L_i = \{c_l^{(i)}\}$, para alguna $l \in \{1, \ldots, r_i\}$ o bien $L_i = (c_{l-1}^{(i)}, c_l^{(i)})$, para alguna $l \in \{2, \ldots, r_i\}$, para que S sea semipared también requerimos exista al menos un índice i tal que el conjunto L_i es de la forma $L_i = \{c_l^{(i)}\}$.

Notemos que el conjunto de semiparedes de G es finito. Sean $\mathcal{K}$ el conjunto de componentes de $\mathbb{R}^n \setminus G$ y $\mathcal{S}$ el conjunto de semiparedes de G. Probaremos que el número de elementos de $\mathcal{K}$ no supera al número de semiparedes de G y esto terminará la prueba del lema. Para hacer esto, daremos una función inyectiva $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{S}$. Fijamos un punto z_0 en G.

Dada $C \in \mathcal{K}$, elegimos un punto $p_C \in C$. Nos fijamos en el segmento convexo $p_C z_0$ que une a p_C con z_0. Ya que $\overline{G}$ es compacto, $p_C \notin G$ y $z_0 \in G$, tenemos que existe un primer punto q_C en el segmento $p_C z_0$, caminando de p_C a z_0, que pertenece a $\overline{G}$. Como G es abierto, $q_C \notin G$, de manera que $p_C q_C$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n \setminus G$ que contiene a p_C. Entonces $p_C q_C \subset C$.

Notemos que q_C pertenece a $\overline{G_j}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, k\}$, pero que $q_C \notin G_j$ (pues G_j es abierto). De manera que $q_C \in ([a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \times \ldots \times [a_n^{(j)}, b_n^{(j)}]) \setminus ((a_1^{(j)}, b_1^{(j)}) \times \ldots \times (a_n^{(j)}, b_n^{(j)}))$. Entonces algunas de sus coordenadas q_i (al menos una) pertenecen al respectivo conjunto $\{a_i^{(j)}, b_i^{(j)}\}$ y las demás pertenecen al respectivo conjunto $(a_i^{(j)}, b_i^{(j)})$. De manera que algunas de sus coordenadas q_i (al menos una) pertenecen al respectivo conjunto $\{c_1^{(i)}, \ldots, c_{r_i}^{(i)}\}$ y las demás a un conjunto de la forma $(c_{l-1}^{(i)}, c_l^{(i)})$. Esto muestra que q_C está en una semipared S_C de G.

Definimos $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{S}$ como $\varphi(C) = S_C$.

Veamos que φ es inyectiva. Supongamos que $C, D \in \mathcal{K}$ son tales que $C \neq D$ y $\varphi(C) = \varphi(D)$. Por la definición de $S_C = S_D$, sabemos S_C es un producto que tiene al menos un factor degenerado y puede o no tener factores no degenerados, para simplificar la notación, supongamos, por ejemplo que sus primeros factores son degenerados y los útimos no lo son. Entonces podemos escribir $S_C = S_D = \{c^{(1)}_{l_1}\} \times \ldots \times \{c^{(s)}_{l_s}\} \times (c^{(s+1)}_{l_{s+1}-1}, c^{(s+1)}_{l_{s+1}}) \times \ldots \times (c^{(n)}_{l_n-1}, c^{(n)}_{l_n})$, donde $s \geq 1$, $\{l_1, \ldots, l_s\} \subset \{1, \ldots, r_i\}$ y $\{l_{s+1}, \ldots, l_n\} \subset \{2, \ldots, r_i\}$.

Por definición $q_C, q_D \in S_C$. Si el segmento convexo $q_C q_D$ que une a q_C con q_D está contenido en $\mathbb{R}^n \setminus G$, entonces el conjunto $p_C q_C \cup q_C q_D \cup q_D p_D$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n \setminus G$ que tiene a $p_C \in C$ y a $p_D \in D$, y entonces $C = D$, lo cual es absurdo. Por tanto podemos suponer que existe un punto $z \in q_C q_D \cap G$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $z = (z_1, \ldots, z_n) \in q_C q_D \cap G_j = q_C q_D \cap ((a^{(j)}_1, b^{(j)}_1) \times \ldots \times (a^{(j)}_n, b^{(j)}_n))$.

Como S_C es convexo, $z \in S_C$, de manera que $z_1 = c^{(1)}_{l_1}$, $\ldots$, $z_s = c^{(s)}_{l_s}$, $z_{s+1} \in (c^{(s+1)}_{l_{s+1}-1}, c^{(s+1)}_{l_{s+1}})$, $\ldots$, $z_n \in (c^{(n)}_{l_n-1}, c^{(n)}_{l_n})$. Dada $i \in \{s+1, \ldots, n\}$, como $c^{(i)}_{l_i-1}$ y $c^{(i)}_{l_i}$ son elementos consecutivos del conjunto A_i, tenemos que $(c^{(i)}_{l_i-1}, c^{(i)}_{l_i}) \cap A_i = \emptyset$. De manera que $a^{(j)}_i, b^{(j)}_i \notin (c^{(i)}_{l_i-1}, c^{(i)}_{l_i})$. Dado que $z_i \in (c^{(i)}_{l_i-1}, c^{(i)}_{l_i}) \cap (a^{(j)}_i, b^{(j)}_i)$, tenemos que $(c^{(i)}_{l_i-1}, c^{(i)}_{l_i}) \subset (a^{(j)}_i, b^{(j)}_i)$ (pues son dos intervalos que se intersectan y los extremos del intervalo de la derecha no pertenecen al de la izquierda).

Escribimos $q_C = (q_1, \ldots, q_n) \in S_C$. Entonces $q_1 = c^{(1)}_{l_1} = z_1 \in (a^{(j)}_1, b^{(j)}_1)$, $\ldots$, $q_s = c^{(s)}_{l_s} = z_s \in (a^{(j)}_s, b^{(j)}_s)$, $q_{s+1} \in (c^{(s+1)}_{l_{s+1}-1}, c^{(s+1)}_{l_{s+1}}) \subset (a^{(j)}_{s+1}, b^{(j)}_{s+1})$, $\ldots$,$q_n \in (c^{(n)}_{l_n-1}, c^{(n)}_{l_n}) \subset (a^{(j)}_n, b^{(j)}_n)$. Esto prueba que $q_C \in (a^{(j)}_1, b^{(j)}_1) \times \ldots \times (a^{(j)}_n, b^{(j)}_n) = G_j \subset G$. Esto es una contradicción pues desde su elección sabíamos que $q_C \notin G$.

Esta nueva contradicción demuestra que no pueden existir $C, D \in \mathcal{K}$ como los supusimos. Por tanto φ es inyectiva. Esto completa la prueba del lema. ∎

Teorema 6.10 *Si E es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) que separa el punto b del punto c y ε es un número positivo, entonces existe un abierto conexo F que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\overline{F} \subset E$,
2. *F separa a b de c,*
3. *$\mathbb{R}^n \setminus F$ tiene exactamente dos componentes y cada punto de F dista a lo más ε de cada una de ellas.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}_0$ la base para la topología de $\mathbb{R}^n$ que consta de todas las cajas. Por el Lema 6.8, existe un abierto G_0 de $\mathbb{R}^n$ que es unión finita de elementos de $\mathcal{B}_0$ y que cumple que $\overline{G_0} \subset F$ y G_0 separa a b de c. Como $\mathbb{R}^n$ es unicoherente y G_0 separa a b de c, por [8, Teorema, pág. 198], existe una componente G de G_0 que también separa a b de c. Sea $G_0 = R_1 \cup \ldots \cup R_k$, donde cada R_i es una caja de $\mathbb{R}^n$. Podemos suponer que $R_1, \ldots, R_s$ son las cajas que intersectan a G. Entonces $G \subset R_1 \cup \ldots \cup R_s$. Como las cajas son conexas y G también lo es, $G \cup R_1 \cup \ldots \cup R_k$ es un subconjunto conexo de G_0. Pero G es componente, así que $G = G \cup R_1 \cup \ldots \cup R_k = R_1 \cup \ldots \cup R_k$. Por tanto, G también es unión finita de cajas. La ventaja que tenemos ahora es que G también es conexo.

Vamos a usar que los abiertos conexos en $\mathbb{R}^n$ no pueden ser separados por un subconjunto de dimensión uno. El teorema clásico en esta dirección afirma que $\mathbb{R}^n$ tiene esta propiedad. Para los abiertos conexos de $\mathbb{R}^n$ se puede argumentar así: Sean W un abierto conexo en $\mathbb{R}^n$ y Z un subconjunto de W de dimensión uno. Sean $p, q \in W \setminus Z$. Podemos unir a p con q dentro de W por un arco α que sea una poligonal con lados paralelos a los ejes coordenados. Si hacemos un tubo delgado Y, alrededor de α, de tal manera que $Y \subset W$, podemos conseguir que Y sea una n-celda que tiene a p y a q en su interior. Entonces $Int(Y)$ es un subespacio homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ dentro de W y tiene a p y a q. Como $\mathbb{R}^n$ no puede ser separado por Z, $Y \setminus Z$ es un subconjunto conexo de $W \setminus Z$ y contiene a p y a q. Esto muestra que $W \setminus Z$ es conexo, que es lo que queríamos probar.

Primero veamos que se puede conseguir una F_0 conexa que cumpla todo lo requerido con la posible excepción de que F_0 dista a lo más ε de cada una de las dos componentes.

Por el Lema 6.9, $\mathbb{R}^n \setminus G$ tiene un número finito de componentes $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Suponemos que $b \in C_1$ y $c \in C_2$. Si $m = 2$, hacemos $F_0 = G$. Supongamos entonces que $m > 2$. Elegimos un punto $p \in C_3 \cup \ldots \cup C_m$. Tomamos el primer punto z del segmento convexo pc, yendo de p a c tal que $z \in C_1 \cup C_2$. Tomando últimos y primeros puntos y renumerando si fuera necesario, podemos suponer que $z \in C_2$, $p \in C_3$ y el segmento pz sólo intersecta a $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m$ en los puntos p y z.

Hacemos $F_1 = G \setminus pz$, entonces F_1 es abierto, y como pz no puede separar a G (por lo que vimos antes), F_1 es conexo. Además $\mathbb{R}^n \setminus F_1 = \mathbb{R}^n \setminus (G \setminus pz) = (\mathbb{R}^n \setminus G) \cup pz = C_1 \cup (C_2 \cup pz \cup C_3) \cup \ldots \cup C_m$. Como los conjuntos C_1, $(C_2 \cup pz \cup C_3)$, $\ldots$, C_m son cerrados, conexos, no vacíos y ajenos dos a dos, tenemos que son las componentes de $\mathbb{R}^n \setminus F_1$. De manera que F_1 satisface los puntos 1 y 2, F_1 es conexo y $\mathbb{R}^n \setminus F_1$ tiene una componente menos que $\mathbb{R}^n \setminus G$. En caso de que $\mathbb{R}^n \setminus F_1$ tenga más de dos componentes podemos repetir lo que hicimos hasta conseguir un abierto F_0 de $\mathbb{R}^n$ que satisfaga 1 y 2, que cumpla que F_0 es conexo y que $\mathbb{R}^n \setminus F_0$ tiene sólo dos componentes, podemos suponer que éstas se llaman C_1 y C_2, y que $b \in C_1$ y $c \in C_2$.

Como C_1 y C_2 son cerrados, podemos elegir un punto $q \in Fr(C_2)$ y tomar una vecindad conexa U de q tal que $U \cap C_1 = \emptyset$. Tomamos un punto $x \in U \cap (\mathbb{R}^n \setminus C_2)$ y un arco α en U que una a x con q. Podemos suponer que $\alpha \cap C_2 = \{q\}$. Notemos que $x \in F_0$.

Ya que F_0 es acotado, $\overline{F_0}$ es compacto Entonces existen $t \in \mathbb{N}$ y $q_1, \ldots, q_t \in \overline{F_0}$ tales que $\overline{F_0} \subset B(\frac{\varepsilon}{2}, q_1) \cup \ldots \cup B(\frac{\varepsilon}{2}, q_t)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$ elegimos un punto $p_i \in B(\frac{\varepsilon}{2}, q_i) \cap F_0$. Entonces $B(\frac{\varepsilon}{2}, q_i) \subset B(\varepsilon, p_i)$. De manera que $F_0 \subset B(\varepsilon, p_1) \cup \ldots \cup B(\varepsilon, p_t)$. Ya que F_0 es un abierto conexo, existe un árbol $T \subset F_0$ tal que $\{x, p_1, \ldots, p_t\} \subset T$.

Hacemos $F_2 = F_0 \setminus (T \cup \alpha)$. Como $T \cup \alpha$ tiene dimensión uno y F_0 es un abierto conexo, $T \cup \alpha$ no separa a F_0, de manera que F_2 es abierto conexo. Notemos que $\mathbb{R}^n \setminus F_2 = \mathbb{R}^n \setminus (F_0 \setminus (T \cup \alpha)) = (\mathbb{R}^n \setminus F_0) \cup (T \cup \alpha) = C_1 \cup (C_2 \cup T \cup \alpha)$. Como los conjuntos C_1 y $C_2 \cup T \cup \alpha$ son cerrados, conexos, no vacíos y ajenos dos a dos, tenemos que son las componentes de $\mathbb{R}^n \setminus F_2$. De manera que F_2 satisface los puntos 1 y 2, F_2 es conexo, $\mathbb{R}^n \setminus F_2$ tiene exactamente dos componentes y todo punto de F_2 dista de algún punto de $C_2 \cup T \cup \alpha$ en menos que ε.

Ahora podemos hacer el mismo proceso para F_2 en lugar de F_1, empezando con un punto en $Fr(C_1)$ y extendiendo C_1 con un arco y un árbol hasta construir un abierto conexo F, dentro de F_2 que satisfaga las propiedades pedidas. ■

Teorema 6.11 *Si D es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ que separa el punto b del punto c y ε es un número positivo, entonces existe un abierto conexo E que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\overline{E} \subset D$,
2. *E separa a b de c,*
3. *$\mathbb{R}^n \setminus E$ tiene exactamente dos componentes y cada punto de F dista a lo más ε de cada una de ellas.*
4. *Cada arco en E es ε-torcido.*

Demostración. Hacemos $D_0 = D$. Como $\overline{D_0}$ es compacto, existe una cubierta abierta finita $\mathcal{U}$ de D_0 cuyos elementos tienen diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\{V_1, V_1'\}$, $\{V_2, V_2'\}, ..., \{V_m, V_m'\}$ la colección finita de pares de elementos distintos de $\mathcal{U}$. Usando el Teorema 6.7 en repetidas ocasiones, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, existe un abierto conexo D_i de $\mathbb{R}^n$ tal que $D_i \subset D_{i-1}$, D_i separa a b de c, y cada arco en D_i de V_i a V_i' es $\frac{\varepsilon}{2}$-torcido con respecto a V_i y V_i'. Claramente D_m satisface las condiciones 1 y 2. Veamos que D_m satisface 4. Sea pq un arco en D_m. Como $D_m \subset D_0$ y $\mathcal{U}$ es cubierta de D_0, existen dos elementos U y V de $\mathcal{U}$ tales que $p \in U$ y $q \in V$. Si ocurriera que $U = V$, entonces existen puntos $r, s \in pq \cap U$ tales que r está entre p y s en pq, y como el diámetro de U es menor que $\frac{\epsilon}{2}$, $d(p, s) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(r, q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces el arco pq es ε-torcido. Si $U \neq V$, entonces $U = V_i$ y $V = V_i'$, para algún $i \in \{1, ..., m\}$. Como pq es un arco en $D_m \subset D_i$, pq es $\frac{\varepsilon}{2}$-torcido con respecto a V_i y V_i'. Entonces, existen puntos $r, s \in pq$ tales que r está entre p y s en pq, $d(s, V_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(r, V_i') < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $p \in V_i$, $q \in V_i'$ y ambos conjuntos tienen diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, se sigue que $d(s, p) < \varepsilon$ y $d(r, q) < \varepsilon$. Entonces, el arco pq es ε-torcido. Hemos probado que D_m satisface 4.

Como $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo y unicoherente, y D_m es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que separa los puntos b y c, existe una componente C de D_m que también los separa (vea [8, Teorema, pág. 198]). Aplicamos el Teorema 6.10 a $\mathbb{R}^n$, C, b y c, y obtenemos un abierto conexo E que satisface las propiedades 1, 2 y 3 de tal teorema y, en consecuencia, las propiedades 1, 2, y 3 del teorema que estamos probando. Claramente también se satisface la propiedad 4. ■

6.3. Un continuo hereditariamente indescomponible de dimensión 2

Teorema 6.12 *Existe un continuo hereditariamente indescomponible de dimensión 2.*

Demostración. Mostraremos que si b y c son dos puntos distintos de $\mathbb{R}^3$, existe una sucesión $S_1, S_2, \ldots$ de abiertos conexos acotados de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen las siguientes condiciones para cada $i \in \mathbb{N}$:

1. $\overline{S_{i+1}} \subset S_i$,
2. S_i separa a b de c,
3. $\mathbb{R}^3 \setminus S_i$ tiene exactamente dos componentes y cada punto de S_i dista a lo más $\frac{1}{i}$ de cada una de ellas,
4. Cada arco en S_i es $\frac{1}{i}$-torcido.

Sean $r = \text{mín}\{\frac{1}{4}, \frac{d(b,c)}{3}\}$ y $S_1 = \{p \in \mathbb{R}^3 : r < d(p,b) < 2r\}$. S_1 satisface claramente 2 y 3, 1 se satisface por vacuidad y 4 porque $d(x,y) \leq d(x,b) + d(b,y) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ para cada par de puntos $x, y \in S_1$. Del Teorema 6.11 se sigue que podemos elegir abiertos conexos $S_2, S_3, \ldots$ de modo que satisfagan 1, 2, 3 y 4.

Definimos $S = \bigcap\{\overline{S_i} : i \in \mathbb{N}\}$. Por 1, S es una intersección anidada de continuos, así que es un continuo. Probaremos que S es un continuo hereditariamente indescomponible de dimensión 2, que su complemento tiene exactamente dos componentes y que es un conjunto que separa irreduciblemente a b de c.

Para simplificar la notación, en lugar de $\bigcap\{\overline{S_i} : i \in \mathbb{N}\}$ escribiremos $\bigcap \overline{S_i}$.

Veamos que S separa a b de c. Para cada $i \in \mathbb{N}$, dado que S_i separa a b de c y S_i es abierto en $\mathbb{R}^3$, existen dos cerrados conexos ajenos y no vacíos B_i y C_i de $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbb{R}^3 \setminus S_i = B_i \cup C_i$ (de hecho B_i y C_i son las componentes de $\mathbb{R}^3 \setminus S_i$), con $b \in B_i$ y $c \in C_i$. Como $S_{i+1} \subset S_i$, $B_i \cup C_i = \mathbb{R}^3 \setminus S_i \subset \mathbb{R}^3 \setminus S_{i+1} = B_{i+1} \cup C_{i+1}$, y ya que $b \in B_i \cap B_{i+1}$ y $c \in C_i \cap C_{i+1}$, se tiene que $B_i \subset B_{i+1}$ y $C_i \subset C_{i+1}$. Sean $B = \bigcup\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $C = \bigcup\{C_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Mostraremos que $\mathbb{R}^3 \setminus S = B \cup C$, que B y C son abiertos ajenos de $\mathbb{R}^3$ y, que $b \in B$ y $c \in C$. Primero mostraremos la igualdad. Por un lado, se tiene que $\mathbb{R}^3 \setminus S = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcap \overline{S_i} = \bigcup \left(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{S_i}\right) \subset \bigcup \left(\mathbb{R}^3 \setminus S_i\right) = \bigcup (B_i \cup C_i) = B \cup C$, lo cual prueba que $\mathbb{R}^3 \setminus S \subset B \cup C$. Si $x \in B$, $x \in B_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$, así que $x \notin S_i$, y por 1, $x \notin \overline{S_{i+1}}$. Entonces $x \notin S$. Esto prueba que $B \subset \mathbb{R}^3 \setminus S$. Similarmente se prueba que $C \subset \mathbb{R}^3 \setminus S$. Por lo tanto $\mathbb{R}^3 \setminus S = B \cup C$. Veamos que B es abierto en $\mathbb{R}^3$. Sea $x \in B$. Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_i$. Entonces $x \notin S_i \cup C_i$ y, usando que $\overline{S_{i+1}} \subset S_i$ y que $B_i \subset B_{i+1}$, tenemos que $x \notin \overline{S_{i+1}} \cup C_{i+1}$. Entonces $\mathbb{R}^3 \setminus \left(\overline{S_{i+1}} \cup C_{i+1}\right)$ es abierto en $\mathbb{R}^3$ y $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \left(\overline{S_{i+1}} \cup C_{i+1}\right) \subset B_{i+1}$. Por tanto, $x \in Int(B_{i+1}) \subset B$. Hemos probado que B es abierto en $\mathbb{R}^3$, y similarmente se prueba que C también es abierto en $\mathbb{R}^3$. Para ver que son ajenos, supongamos que existe $x \in B \cap C$. Entonces $x \in B_i \cap C_j$ para algunos $i, j \in \mathbb{N}$. Si $i \geq j$, $C_j \subset C_i$, así que $x \in B_i \cap C_i$, lo cual no es posible. Si $j \geq i$, $B_i \subset B_j$ y $x \in B_j \cap C_j$, y de nuevo obtenemos una contradicción. Por lo tanto, $B \cap C = \emptyset$. Sólo resta ver que $b \in B$ y $c \in C$, pero esto es inmediato ya que $b \in B_1$ y $c \in C_1$. Hemos probado que S separa a b de c.

A continuación veremos que las componentes de $\mathbb{R}^3 \setminus S$ son B y C. Como B es una unión de conexos que tienen a b, tenemos que B es conexo. Similarmente se ve que C es conexo. Como $\mathbb{R}^3 \setminus S$ es la unión de B y C, y estos son abiertos ajenos, son las componentes de $\mathbb{R}^3 \setminus S$.

Mostraremos que S separa irreducciblemente a b de c, pero antes observemos lo siguiente. Si $x \in S = \bigcap \overline{S_i}$, $x \in \overline{S_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y por 1, $x \in S_{i-1}$ para cada $i > 1$. Entonces $d(x, B) \leq d(x, B_{i-1}) \leq \frac{1}{i-1}$ y $d(x, C) \leq d(x, C_{i-1}) \leq \frac{1}{i-1}$ para cada $i > 1$. Por tanto, $d(x, B) = d(x, C) = 0$. De manera que $x \in \overline{B} \cap \overline{C}$, así que $B \cup \{x\}$, $C \cup \{x\}$ y $B \cup C \cup \{x\}$ son conexos. Si L es un subconjunto propio de $\mathbb{R}^3$, escogemos $x \in S \setminus L$. Como $B \cup C \cup \{x\}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^3 \setminus L$ que tiene a b y c, tenemos que L no separa a b de c. Por tanto, S separa irreduciblemente a b de c. Entonces, por Teorema 6.6, S tiene dimensión 2.

Sólo nos resta ver que S es hereditariamente indescomponible. Supongamos por el contrario, que S no es hereditariamente indescomponible. Entonces existen dos subcontinuos L y K de S tales que $L \cap K \neq \emptyset$, $L \not\subseteq K$ y $K \not\subseteq L$. Elegimos $p \in L \setminus K$ y $q \in K \setminus L$. Entonces $d(p, K) > 0$ y $d(q, L) > 0$, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, K) > \frac{1}{n}$ y $d(q, L) > \frac{1}{n}$. Sea $r = \text{mín}\{\frac{1}{2}(d(p, K) - \frac{1}{n}), \frac{1}{2}(d(p, L) - \frac{1}{n})\}$. Como S_n es abierto en $\mathbb{R}^3$, para cada $x \in K$, $B(r, x) \cap S_n$ es un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a x ($x \in S_n$ porque $S \subset S_n$). Entonces existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $\varepsilon_x < r$ y $B(\varepsilon_x, x) \subset B(r, x) \cap S_n$. Como $B(\varepsilon_x, x)$ es un abierto conexo de S_n, $O_K = \bigcup\{B(\varepsilon_x, x) : x \in K\} = (\bigcup\{B(\varepsilon_x, x) : x \in K\}) \cup K$ es un abierto conexo de S_n que contiene a K.

Veamos que $d(p, O_K) > \frac{1}{n}$. Si ocurre que existe $z \in O_K$ tal que $d(p, z) < \frac{1}{n}$, entonces existe $k \in K$ tal que $d(z, x) < \varepsilon_x < r$. Así que $d(p, K) \leq d(p, x) < r + \frac{1}{n} < d(p, K)$, lo que es un absurdo. Por tanto, $d(p, O_K) > \frac{1}{n}$.

Similarmente, existe un abierto conexo O_L de S_n que contiene a L tal que $d(q, O_L) > \frac{1}{n}$.

Sea $y \in L \cap K$. Como O_L es arcoconexo, existe un arco py en O_L de p a y. Análogamente existe un arco yq en O_K de y a q. Entonces $py \cup yq$ contiene un arco pq tal que $px \subset O_L$ y $xq \subset O_K$ para algún $x \in pq$. Como $d(p, xq) > \frac{1}{n}$ y $d(q, px) > \frac{1}{n}$, el arco pq no es $\frac{1}{n}$-torcido. Debido a que esto contradice la condición 4, S es hereditariamente indescomponible. ∎

6.4. Continuos hereditariamente indescomponibles de altas dimensiones

Usando el mismo esquema que en el Teorema 6.12 para definir S en $\mathbb{R}^3$, podemos definir continuos hereditariamente indescomponibles en $\mathbb{R}^n$, para cualquier $n > 3$. En esta sección veremos que existen continuos hereditariamente indescomponibles de cualquier dimensión finita.

Teorema 6.13 *Sean L y K dos continuos ajenos en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un continuo hereditariamente indescomponible en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) tal que su complemento tiene exactamente dos componentes y que separa irreduciblemente a L de K.*

Demostración. Como L y K son continuos ajenos, $d(L, K) = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in L, y \in K\} > 0$. Sea $r = \text{mín}\{\frac{1}{4}, \frac{d(L,K)}{3}\}$ y $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : r < d(x, L) < 2r$. S_1 es un abierto conexo de X que separa a L de K. Elegimos $h_0 \in L$ y $k_0 \in K$. De manera similar a lo hecho en el Teorema 6.12, se prueba que existe un continuo hereditariamente indescomponible $S \subset S_1$ tal que su complemento tiene exactamente dos componentes y que separa irreducíblemente a h_0 de k_0. Entonces $\mathbb{R}^n \setminus S = B \cup C$, donde B y C son dos abiertos conexos ajenos y no vacíos de X tales que $h_0 \in B$ y $k_0 \in C$. Como L es conexo, $L \subset \mathbb{R}^n \setminus S_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus S = B \cup C$ y $h_0 \in L \cap B$, $L \subset B$. Análogamente, $K \subset C$. Hemos probado que S separa a L de K. Ahora probaremos que es irreducible con respecto a esta propiedad. Supongamos que Y es un cerrado de X que está contenido en S y que separa a L de K. Entonces Y separa a h_0 de k_0, y como S es separa irreducíblemente a h_0 de k_0, $Y = S$. Esto concluye la demostración. ■

Usando el Teorema 6.13 se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 6.14 *Existen continuos hereditariamente indescomponibles de dimensión n en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. Tomamos $L = \left([0, \frac{1}{3}] \times \{0\}^n\right)$ y $K = \left([\frac{2}{3}, 1] \times \{0\}^n\right)$, entonces existe un subcontinuo hereditariamente indescomponible M en $\mathbb{R}^{n+1}$ que separa irreducíblemente a L de K. Por el Teorema 6.6, M es una variedad de Cantor de dimensión n. ■

Bibliografía

[1] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas; Textos No. 28, Sociedad Matemática Mexicana, (2004).

[2] V. Martínez de la Vega, *El Espacio de continuos con la topología producto*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM (1998).

[3] Sam B. Nadler Jr., *Continuum theory, an introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied mathematics, 158, Marcel Dekker, Inc., New York, (1992).

[4] Sam B. Nadler Jr., *The fixed point property for continua*, Aportaciones Matemáticas; Textos No. 30, Sociedad Matemática Mexicana, (2005).

[5] Sam B. Nadler Jr., *Dimension theory: an introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas; Textos No. 18, Sociedad Matemática Mexicana, (2002).

[6] K. Kuratowski, *Topology*, Vol I, Academic Press, New York, N. Y., (1966).

[7] K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, N. Y., (1968).

[8] J. H. V. Hunt, *A characterization of unicoherence in terms of separating open sets*, Fund Math 107 (1980): 195-199.