UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUBIERTAS CELULARES DE GRUPOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ALEXANDER SEVILLA ESPEJEL

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS
2016

Ciudad Universitaria, D. F.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno
   Sevilla
   Espejel
   Alexander
   56 18 82 16
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   308207099

2. Datos del Tutor
   Dr
   Francisco
   Marmolejo
   Rivas

3. Datos del Sinodal 1
   Dr
   Alejandro Javier
   Díaz-Barriga
   Casales

4. Datos del Sinodal 2
   Dra
   Edith Corina
   Sáenz
   Valadez

5. Datos del Sinodal 3
   Dra
   Eugenia
   O Reilly
   Regueiro

6. Datos del Sinodal 4
   Dra
   Martha
   Takane
   Imay

7. Datos del Trabajo Escrito
   Cubiertas Celulares de Grupos
   94 p
   2016

Contenido

Agradecimientos

Quisiera aprovechar este espacio para agradecer:

A mi familia, por su paciencia, apoyo y esfuerzo.

A mi asesor, el Dr. Francisco Marmolejo Rivas, por el tiempo dedicado a leer este trabajo, por sus explicaciones y sugerencias, y por el préstamo del equipo para escribir esta tesis.

A los sinodales, por leer el texto y sus sugerencias.

Finalmente, a las personas que han contribuido a mi formación matemática y humana.

Introducción

En esta tesis discutiremos el concepto de cubierta celular en la categoría de grupos. Una cubierta celular de un grupo M es un homomorfismo de grupos $c : G \to M$ tal que la función $\mathrm{Hom}(G, c) : \mathrm{Hom}(G, G) \to \mathrm{Hom}(G, M)$ dada por $\mathrm{Hom}(G, c)(\psi) = c \circ \psi$ es una biyección. El concepto de cubierta celular se originó en la topología algebraica y el álgebra homológica, donde está relacionado con el estudio de la localización de espacios y otros objetos. Como veremos más adelante, también está relacionado con el concepto de cubierta A-celular (su análogo topológico es llamado aproximación celular, el lector curioso de este término puede referirse a [24]).

Antes de adentrarnos en el tema de las cubiertas celulares (dicho tema es abordado en el capítulo 4), hablaremos un poco de las cubiertas A-celulares, para lo cual es necesario mencionar primero lo que es una A-equivalencia y un grupo A-celular (temas que intoducimos en el capítulo 2):

(1) Un homomorfismo $f : X \to Y$ es una A-equivalencia, si la función $\mathrm{Hom}(A, f) : \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A, Y)$ es una biyección.

(2) Un grupo Z es A-celular, si toda A-equivalencia es una Z-equivalencia (la noción de objeto A-celular en la categoría de grupos fue introducida en [24]).

De esta forma decimos que $c_A : G \to M$ es una cubierta A-celular de M si c_A es una A-equivalencia y G es un grupo A-celular.

A partir de las definiciones anteriores podemos observar que toda cubierta A-celular de un grupo M también es una cubierta celular de M, sin embargo veremos que si existe una cubierta A-celular de un grupo M entonces es única. De hecho, (en el capítulo 3) construiremos la cubierta A-celular de un grupo G, para lo cual introduciremos los términos A-inyección, A-suprayección, A-generado y A-construible.

A partir de una cubierta celular $c : G \to M$ podemos ver que M le hereda a G las propiedades de ser finito, abeliano o nilpotente según las posea. También veremos que el núcleo de c está contenido en el centro de G (por lo que es un grupo abeliano) y que se ve afectado de cierta manera por las propiedades que poseen tanto G como M.

Este trabajo está basado en [7] y [4], y pretende ser una introducción al concepto de cubierta celular en la categoría de grupos. Más análisis y resultados sobre cubiertas celulares de grupos partículares y de grupos con propiedades específicas adicionales pueden verse, por ejemplo, en [5], [12], [13], [14], [8] y [25].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo reunimos las definiciones y los resultados básicos que nos ayudarán a entender posteriormente parte del texto.

1.1 Categorías

En esta sección introducimos hechos básicos relativos a las categorías. Algunas referencias son: [2] y [28].

Definición 1.1 *Una categoría $\mathcal{C}$ está conformada por una colección de objetos $\mathcal{C}_0$ y una colección de flechas $\mathcal{C}_1$, esta última tiene la siguiente estructura:*

(a) *Cada flecha $f \in \mathcal{C}_1$ tiene asociados dos objetos de $\mathcal{C}$, llamados el dominio y el codominio que denotamos, respectivamente, por $dom(f)$ y $cod(f)$. Escribiremos $f : X \to Y$ para indicar que $X = dom(f)$ y que $Y = cod(f)$.*

(b) *Dadas dos flechas f y g con $cod(f) = dom(g)$, digamos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, hay una flecha $g \circ f : X \to Z$ llamada la composición de f y g, cuyo dominio es el de f y cuyo codominio es el de g.*

(c) *La composición de flechas es asociativa, es decir, dadas tres flechas $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$ tenemos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

(d) *Para cada objeto X hay una flecha identidad $1_X : X \to X$ que satisface $1_X \circ h = h$, para cada $h : Z \to X$ y $f \circ 1_X = f$, para cada $f : X \to Y$.*

Definición 1.2 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de dos operaciones $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ y $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ tales que:*

(a) *Cada $f : X \to Y \in \mathcal{C}_1$ va a dar a $F_1(f) : F_0(X) \to F_0(Y) \in \mathcal{D}_1$.*

(b) *Para cualesquiera $f : X \to Y, g : Y \to Z \in \mathcal{C}_1$ se cumple que $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$.*

(c) *$F_1(1_X) = 1_{F_0(X)}$, para cada $X \in \mathcal{C}_0$.*

Para definir un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sólo cambiamos (a) y (b) por los siguientes incisos, respectivamente:

(a') Cada $f : X \to Y \in \mathcal{C}_1$ va a dar a $F_1(f) : F_0(Y) \to F_0(X) \in \mathcal{D}_1$.

(b') Para cualesquiera $f : X \to Y, g : Y \to Z \in \mathcal{C}_1$ tenemos que $F_1(g \circ f) = F_1(f) \circ F_1(g)$.

En adelante escribiremos F en vez de F_0 y F_1, y $\mathcal{C}$ en lugar de $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$. También, utilizaremos el término morfismo en vez de flecha.

Notación 1.3 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $A, B \in \mathcal{C}$. Denotamos por* $\mathrm{Hom}(A, B)$, *al conjunto de morfismos en $\mathcal{C}$ que van de A a B y por $End(A)$ al conjunto de morfismos que van de A a A, es decir, $End(A) = \mathrm{Hom}(A, A)$.*

Observamos que cualquier morfismo $f : B \to B'$ en $\mathcal{C}$ induce una función $\mathrm{Hom}(A, f) : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B')$ tal que $g \mapsto f \circ g$. De hecho, el funtor $\mathrm{Hom}(A, -) : \mathcal{C} \to Conj$ es un funtor covariante (donde $Conj$ denota a la categoría de conjuntos, cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones entre ellos).

Definición 1.4 *Una transformación natural entre dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de una familia de morfismos $(\mu_C : FC \to GC)_{C \in \mathcal{C}}$ que satisface la siguiente condición:*

Para cada morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "Ff"'] & GC \arrow[d, "Gf"] \\ FC' \arrow[r, "\mu_{C'}"] & GC' \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{D}$.

Diremos que $\mu = (\mu_C)_{C \in \mathcal{C}} : F \Rightarrow G$ es una transformación natural de F en G y que μ_C es la componente de μ en C.

Definiciones 1.5 (1) *Dado un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, un cono para F consiste de un objeto $D \in \mathcal{D}$ junto con una transformación natural $\mu : \Delta_D \Rightarrow F$ (donde $\Delta_D : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es el funtor constante con valor D en los objetos de $\mathcal{C}$ y 1_D en los morfismos de $\mathcal{C}$). Es decir, un cono para F es una familia de morfismos $(\mu_C : D \to FC)_{C \in \mathcal{C}}$ tal que para cada morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$, el triángulo*

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[dd, "Ff"'] & \\ & D \arrow[ul, "\mu_C"'] \arrow[dl, "\mu_{C'}"] \\ FC' & \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{D}$ (con este diagrama se intenta explicar el nombre de cono).

Denotamos al cono anterior por (D, μ) (a D se le llama el vértice del cono).

(2) *Un morfismo de conos $(D', \mu') \to (D, \mu)$ es un morfismo $g : D' \to D$ tal que $\mu_C \circ g = \mu'_C$, para todo $C \in \mathcal{C}$.*

De esta forma obtenemos una categoría, denotada $Cono(F)$, que tiene como objetos a los conos para F y cuyos morfismos son los morfismos entre conos. Un cono límite para F es un objeto terminal en $Cono(F)$ y como un objeto terminal es único salvo isomorfismo, cualesquiera dos conos límites son isomorfos en $Cono(F)$ y, en particular, sus vértices son isomorfos en $\mathcal{D}$. Denotamos por $\varprojlim_{C\in\mathcal{C}} FC$ al vértice del cono límite.

Dualizando obtenemos la definición de colímite.

Definiciones 1.6 (1) *Dado un funtor $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, un cocono para G consiste de un objeto $D\in\mathcal{D}$ junto con una transformación natural $\eta: G\to\Delta_D$ (donde $\Delta_D:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ es el funtor constante con valor D en los objetos de $\mathcal{C}$ y 1_D en los morfismos de $\mathcal{C}$). Es decir, un cocono para G es una familia de morfismos $(\eta_C: GC\to D)_{C\in\mathcal{C}}$, tal que para cada morfismo $f:C\to C'$ en $\mathcal{C}$, el triángulo*

$$\begin{tikzcd} GC \arrow[dd, "Gf"'] \arrow[dr, "\eta_C"] & \\ & D \\ GC' \arrow[ur, "\eta_{C'}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{D}$.

Denotamos al cocono anterior por (D,η) (donde D es llamado el vértice del cocono).

(2) *Un morfismo de coconos $(D,\eta)\to(D',\eta')$ es un morfismo $g:D\to D'$ tal que $g\circ\eta_C=\eta'_C$, para todo $C\in\mathcal{C}$.*

De esta forma obtenemos una categoría, denotada $Cocono(G)$, que tiene como objetos a los coconos para G y como morfismos a los morfismos entre ellos. Un cocono colímite para G es un objeto inicial en $Cocono(G)$ y como los objetos iniciales son únicos salvo isomorfismo, cualesquiera dos coconos colímites son isomorfos en $Cocono(G)$ y, en particular, sus vértices son isomorfos en $\mathcal{D}$. Denotamos por $\varinjlim_{C\in\mathcal{C}} GC$ al vértice del cocono colímite.

Proposición 1.7 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $C\in\mathcal{C}$. Entonces, el funtor contravariante* $\mathrm{Hom}(-,C):\mathcal{C}\to Conj$ *manda colímites a límites.*

Demostración. Sea $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ un funtor cuyo colímite $\varinjlim_I FI$ existe, de manera que el siguiente diagrama conmuta para todo morfismo $f:I\to J$ en $\mathcal{D}$, es decir, $(\lambda_I: FI\to\varinjlim_I FI)_{I\in\mathcal{D}}$ es el cocono colímite para F:

$$\begin{tikzcd} FI \arrow[dd, "Ff"'] \arrow[dr, "\lambda_I"] & \\ & \varinjlim_I FI \\ FJ \arrow[ur, "\lambda_J"'] & \end{tikzcd}$$

En particular, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(FI,C) & \\
& \mathrm{Hom}(\varinjlim_I FI,C) \arrow[ul, "\mathrm{Hom}(\lambda_I,C)"'] \arrow[dl, "\mathrm{Hom}(\lambda_J,C)"] \\
\mathrm{Hom}(FJ,C) \arrow[uu, "\mathrm{Hom}(Ff,C)"] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Veamos que éste es un diagrama límite. Sea $(\sigma_I : X \to \mathrm{Hom}(FI, C))$ otro cono para $\mathrm{Hom}(-, C) \circ F$. Luego, $\sigma_I = \mathrm{Hom}(Ff, C) \circ \sigma_J$ para todo $f : I \to J \in \mathcal{D}$ por lo que $\sigma_I(x) = \mathrm{Hom}(Ff, C) \circ \sigma_J(x) = \sigma_J(x) \circ Ff$, para todo $x \in X$. Entonces, existe un único morfismo $\theta_x : \varinjlim_I FI \to C$ tal que $\sigma_I(x) = \theta_x \circ \lambda_I$ para cada $I \in \mathcal{D}$ y $x \in X$.

Ahora, definimos el morfismo $\theta : X \to \mathrm{Hom}(\varinjlim_I FI, C)$ tal que $x \mapsto \theta_x$.

Como $\sigma_I(x) = \theta_x \circ \lambda_I = \theta(x) \circ \lambda_I = \mathrm{Hom}(\lambda_I, C) \circ \theta(x)$ para todo $I \in \mathcal{D}$ y $x \in X$, $\sigma_I = \mathrm{Hom}(\lambda_I, C) \circ \theta$.

Supongamos que existe otro morfismo $\eta : X \to \mathrm{Hom}(\varinjlim_I FI, C)$ tal que $\sigma_I = \mathrm{Hom}(\lambda_I, C) \circ \eta$, para todo $I \in \mathcal{D}$. Entonces $\sigma_I(x) = \mathrm{Hom}(\lambda_I, C) \circ \eta(x) = \eta(x) \circ \lambda_I$ para todo $I \in \mathcal{D}$ y, por la unicidad de θ_x, $\eta(x) = \theta_x$. Por lo tanto, $\eta = \theta$. $\square$

Lema 1.8 *Sean $\mathcal{D}$ una categoría pequeña y $F : \mathcal{D} \to Conj$ un funtor. Entonces, $\varprojlim_I FI = \{\langle x_I \rangle_{I \in \mathcal{D}} \in \prod_{I \in \mathcal{D}} FI \mid F(f)(x_I) = x_J$ para todo $f : I \to J \in \mathcal{D}\}$.*

Demostración. Sean $A := \{\langle x_I \rangle_{I \in \mathcal{D}} \in \prod_{I \in \mathcal{D}} FI \mid F(f)(x_I) = x_J$ para todo $f : I \to J \in \mathcal{D}\}$ y $\{\lambda_I : A \to FI\}_{I \in \mathcal{D}}$ la familia de morfismos tal que $\lambda_I(\langle x_I \rangle_{I \in \mathcal{D}}) = x_I$ para cualesquiera $I \in \mathcal{D}$ y $\langle x_I \rangle_{I \in \mathcal{D}} \in A$.

Veamos que $(\lambda_I : A \to FI)_{I \in \mathcal{D}}$ es el cono límite para el funtor F en $Conj$.

Sea $\langle x_I \rangle_{I \in \mathcal{D}} \in A$. Entonces, $F(f) \circ \lambda_I(\langle x_I \rangle_{I \in \mathcal{D}}) = F(f)(x_I) = x_J = \lambda_J(\langle x_I \rangle_{I \in \mathcal{D}})$ para todo $f : I \to J$ en $\mathcal{D}$, por lo que $F(f) \circ \lambda_I = \lambda_J$ para todo $f : I \to J$ en $\mathcal{D}$. Por lo tanto, $(\lambda_I : A \to FI)_{I \in \mathcal{D}}$ es un cono para F en $Conj$.

Sea $(\sigma_I : B \to FI)_{I \in \mathcal{D}}$ otro cono para F en $Conj$ y definamos $U : B \to A$ tal que $b \mapsto \langle \sigma_I(b) \rangle_{I \in \mathcal{D}}$. Como $\langle \sigma_I(b) \rangle_{I \in \mathcal{D}} \in \prod_{I \in \mathcal{D}} FI$ y para todo $f : I \to J$ en $\mathcal{D}$, $F(f) \circ \sigma_I(b) = \sigma_J(b)$ concluimos que $U(b) \in A$. Además, $\lambda_I \circ U(b) = \lambda_I(\langle \sigma_I(b) \rangle_{I \in \mathcal{D}}) = \sigma_I(b)$ para cualesquiera $b \in B$ e $I \in \mathcal{D}$ de donde $\lambda_I \circ U = \sigma_I$, para todo $I \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, U es un morfismo de conos.

Sean $V : B \to A$ otro morfismo de conos y $b \in B$. Luego, $V(b) \in A$ por lo que $V(b) = \langle y_I \rangle_{I \in \mathcal{D}} \in \prod_{I \in \mathcal{D}} FI$. Así $\sigma_I(b) = \lambda_I \circ V(b) = \lambda_I(\langle y_I \rangle_{I \in \mathcal{D}}) = y_I$ para todo $I \in \mathcal{D}$, de donde $V(b) = \langle y_I \rangle_{I \in \mathcal{D}} = \langle \sigma_I(b) \rangle_{I \in \mathcal{D}} = U(b)$. Por lo tanto, $V = U$.

Podemos ver lo hecho antes en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
FI \arrow[dd, "F(f)"'] & & \\
& A \arrow[ul, "\lambda_I"'] \arrow[dl, "\lambda_J"] & B \arrow[l, dashed, "\exists ! U"'] \arrow[ull, "\sigma_I"'] \arrow[dll, "\sigma_J"] \\
FJ & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Definición 1.9 *Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un par de funtores entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Decimos que F es adjunto izquierdo de U o que U es adjunto derecho de F, denotando ambos hechos por $F \dashv U$, si para cada $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ existe un isomorfismo $\phi : \mathrm{Hom}(FC, D) \to \mathrm{Hom}(C, UD)$ que es natural tanto en C como en D.*

Lema 1.10 *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $F \dashv U$.

(2) *Existe una transformación natural $\epsilon : F \circ U \to 1_{\mathcal{D}}$ con la siguiente propiedad universal: Para cada $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ y $g \in \mathrm{Hom}(FC, D)$, existe un único $f \in \mathrm{Hom}(C, UD)$ tal que $g = \epsilon_D \circ F(f)$.*

Demostración. Ver ([2], Corolario 9.5, pág. 214).

1.2 Grupos

En esta sección hablaremos del concepto de grupo y mencionaremos hechos básicos que utilizaremos a lo largo del texto. Como referencia se puede ver [3], [19], [23] y [26].

Definición 1.11 *Un grupo es una pareja $(G, \cdot)$, donde G es un conjunto y $\cdot : G \times G \to G$ es una operación binaria de G tal que se satisfacen los siguientes axiomas:*

(1) *La operación binaria $\cdot$ es asociativa.*

(2) *Existe un elemento $e \in G$ tal que $e \cdot x = x = x \cdot e$, para todo $x \in G$.*

(3) *Para cada $a \in G$, existe un elemento $b \in G$ tal que $a \cdot b = e = b \cdot a$.*

A e lo llamamos el elemento identidad de G y a b el elemento inverso de a, los denotaremos por 1 y a^{-1}, respectivamente.

Definición 1.12 *Un grupo $(G, \cdot)$ es abeliano si $a \cdot b = b \cdot a$, para cualesquiera $a, b \in G$.*

Si $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano, se acostumbra denotar por $+$ a su operación binaria, por 0 a su elemento identidad y por $-a$ al elemento inverso de $a \in G$.

Definiciones 1.13 (1) *Sean* $(G, \cdot)$ *y* $(H, \diamond)$ *dos grupos. Una función* $f : G \to H$ *es un homomorfismo de grupos si* $f(a \cdot b) = f(a) \diamond f(b)$, *para cualesquiera* $a, b \in G$.
(2) *Un monomorfismo es un homomorfismo inyectivo.*
(3) *Un epimorfismo es un homomorfismo suprayectivo.*
(4) *Un isomorfismo es un homomorfismo biyectivo.*

Cuando es clara la notación de la operación binaria, con frecuencia se omite y escribimos G en vez de $(G, \cdot)$. Además, si x y y son elementos de G denotaremos a $x \cdot y$ como xy para simplificar la notación.

Definiciones 1.14 (1) *Sean* G *y* H *dos grupos. Decimos que* G *es isomorfo a* H, *hecho que denotamos por* $G \cong H$, *si existe un isomorfismo* $f : G \to H$.
(2) *Un automorfismo de un grupo* G *es un isomorfismo* $\varphi : G \to G$.

Observación 1.15 *Si* G *es un grupo entonces el conjunto de todos los automorfismos de* G *bajo la operación de composición es un grupo, que denotamos por* $Aut(G)$ *y lo llamamos el grupo de automorfismos de* G.

Definición 1.16 *Sean* G *y* M *dos grupos. El homomorfismo que manda a todos los elementos de* G *al elemento identidad de* M *es llamado homomorfismo cero y lo denotamos por* $0 : G \to M$.

Observación 1.17 *Sea* G *un grupo. Para cada* $x \in G$, *la función* $i_x : G \to G$ *dada por* $y \mapsto x^{-1}yx$ *es un automorfismo de* G, *llamado automorfismo interior determinado por* x.

Definición 1.18 *Decimos que un subconjunto no vacío* S *de un grupo* G *es un subgrupo de* G, *denotando este hecho por* $S \leq G$, *si:*
(1) *Para todo* $s \in S$, $s^{-1} \in S$.
(2) *Para cualesquiera* $s, t \in S$, $st \in S$.

Definición 1.19 *Sea* G, H *dos grupos y* $f : G \to H$ *un homomorfismo. Definimos el núcleo de* f, *denotado por* $\ker f$, *como* $\ker f := \{a \in G \mid f(a) = 1\}$.

Observamos que $nucf$ es un subgrupo de G y que f es un monomorfismo si y sólo si $nucf = 1$.

Observación 1.20 *Si* G *es un grupo y* $a \in G$ *entonces el conjunto de todas las potencias de* a, *denotado por* $\langle a \rangle$, *es un subgrupo de* G *y lo llamamos el subgrupo cíclico generado por* a.

Definiciones 1.21 (1) *Decimos que un grupo* G *cíclico si hay un* $b \in G$ *tal que* $G = \langle b \rangle$.
(2) *El orden de* a *es el número de elementos en* $\langle a \rangle$.

Observación 1.22 *Si* G *es un grupo y* $a \in G$ *tiene orden finito* m, *entonces* m *es el mínimo entero positivo tal que* $a^m = 1$.

Observación 1.23 *La intersección de cualquier familia de subgrupos de un grupo G es un subgrupo de G.*

Definición 1.24 *Sea X un subconjunto no vacío de un grupo G. Definimos el subgrupo generado por X, denotado por $\langle X\rangle$, como la intersección de todos los subgrupos de G que contienen a X.*

Observamos que siempre hay por lo menos un subgrupo de G que contiene a X (G, por ejemplo), que $\langle X\rangle$ es un subgrupo y que de hecho es el mínimo subgrupo de G que contiene a X.

Teorema 1.25 *Sea X un subconjunto de un grupo G.*

(1) *Si $X = \emptyset$, entonces $\langle X\rangle = 1$.*

(2) *Si X es no vacío, entonces $\langle X\rangle$ es el conjunto de todos los elementos de la forma $x_1^{\epsilon_1}\cdots x_k^{\epsilon_k}$ donde $\epsilon_i = +, -1$, $x_i \in X$ y $k \geq 0$ (cuando $k = 0$, el producto se interpreta como 1).*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 2.7, pág. 23).

Definiciones 1.26 (1) *Sea n un entero positivo. Se dice que un grupo es n-generado si puede ser generado por algún n-subconjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

(2) *Un grupo es finitamente generado, si es un grupo n-generado para algún entero positivo n.*

(3) *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subgrupos de G. El subgrupo generado por los X_λ se define como $\langle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\rangle$. Usualmente es escrito como $\langle X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\rangle$.*

Definición 1.27 *Sean S un subgrupo de G y $t \in G$. Una clase lateral izquierda de S en G es el subconjunto de G $tS = \{ts \mid s \in S\}$ (una clase lateral derecha es $St = \{st \mid s \in S\}$). Decimos que t es un representante de tS (igualmente lo es de St).*

Definición 1.28 *Sea S un subgrupo de G. El índice de S en G, denotado por $[G : S]$, es el número de clases laterales izquierdas de S en G.*

Definición 1.29 *Sea G un grupo. El orden de G, denotado por $|G|$, es el número de elementos en G.*

Teorema 1.30 *Sea G un grupo finito y S un subgrupo de G. Entonces, $|S|$ divide a $|G|$ y $[G : S] = |G|/|S|$.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 2.11, pág. 26).

Corolario 1.31 *Sean G un grupo finito y $a \in G$. Entonces, el orden de a divide al orden de G.*

Corolario 1.32 *Sean p un número primo y G un grupo finito cuyo orden es p. Entonces G es un grupo cíclico.*

Definición 1.33 *Un grupo G tiene exponente n si $x^n = 1$, para todo $x \in G$.*

A veces se utiliza el término exponente para denotar al mínimo entero positivo n tal que $x^n = 1$, para todo $x \in G$.

Observación 1.34 *Un grupo finito G de orden n tiene exponente n.*

Definición 1.35 *Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Decimos que H es un subgrupo normal de G, denotando este hecho por $H \trianglelefteq G$, si $g^{-1}Hg \subseteq H$ para todo $g \in G$.*

Observación 1.36 *Todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.*

Observación 1.37 *Si G es un grupo, entonces el conjunto de todos los $a \in G$ que conmutan con todos con todos los elementos de G es un grupo, que denotamos por $Z(G)$ y lo llamamos el centro de G. También observamos que $Z(G)$ es un subgrupo normal abeliano de G.*

Teorema 1.38 *Sean G un grupo y N un subgrupo normal de G. Entonces las clases laterales de N en G forman un grupo, denotado por G/N, cuyo orden es $[G : N]$.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 2.21, pág. 32).

Corolario 1.39 *Sean G un grupo y N un subgrupo normal de G. Entonces el homomorfismo cociente $p : G \to G/N$ definido por $p(a) = aN$ es un homomorfismo suprayectivo o epimorfismo tal que $\ker p = N$.*

Teorema 1.40 *(Primer teorema de isomorfismo). Sean G, H dos grupos y $f : G \to H$ un homomorfismo. Entonces $\ker f$ es un subgrupo normal de G y $G/\ker f \cong Imf$.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 2.24, pág. 35).

Teorema 1.41 *(Segundo teorema de isomorfismo). Sean G un grupo, T un subgrupo de G y N un subgrupo normal de G. Entonces $N \cap T$ es un subgrupo normal de T y $T/(N \cap T) \cong NT/N$.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 2.26, pág. 36).

Teorema 1.42 *(Tercer teorema de isomorfismo). Sean G, H y K tres grupos tales que $K \leq H \leq G$ y K y H son dos subgrupos normales de G. Entonces H/K es un subgrupo normal de G/K y $(G/K)/(H/K) \cong G/H$.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 2.27, pág. 37).

Definición 1.43 *Sean H y K dos grupos. Su producto directo, denotado por $H \times K$, es el grupo cuyos elementos son todas las parejas ordenadas (h, k), con $h \in H$ y $k \in K$, y cuya operación binaria está definida por $(h, k)(h'.k') = (hh', kk')$. El elemento identidad es $(1, 1)$ y el elemento inverso de (h, k) es $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$.*

Observamos que ni H ni K son subgrupos de $H \times K$, pero $H \times K$ contiene replicas isomorfas de cada uno, a saber, $H \times 1 = \{(h, 1) \mid h \in H\}$ y $1 \times K = \{(1, k) \mid k \in K\}$.

También observamos que $(h, 1) \in H \times 1$ y $(1, k) \in 1 \times K$ conmutan, $H \times 1$ y $1 \times K$ son subgrupos normales de $H \times K$, y que $(H \times 1) \cap (1 \times K) = 1$ y $(H \times 1)(1 \times K) = H \times K$.

Teorema 1.44 *Sean G un grupo y H, K dos subgrupos normales de G. Si $HK = G$ y $H \cap K = 1$ entonces $G \cong H \times K$.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 2.29, pág. 40).

Teorema 1.45 *Sean A, B, H y K cuatro grupos. Si $A \trianglelefteq H$ y $B \trianglelefteq K$, entonces $A \times B \trianglelefteq H \times K$ y $(H \times K)/(A \times B) \cong (H/A) \times (K/B)$.*

Corolario 1.46 *Si $G = H \times K$ entonces $G/(H \times 1) \cong K$.*

Definición 1.47 *Sean G un grupo y p un número primo. Decimos que G es un p-grupo si el orden de cada uno de sus elementos es una potencia de p.*

Observación 1.48 *Sean G un grupo y H un subgrupo normal de G. Si H y G/H son p-grupos, entonces G también es un p-grupo.*

Teorema 1.49 *Si G es un grupo finito cuyo orden es divisible por un primo p, entonces G contiene un elemento de orden p.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 4.2, pág. 74).

Corolario 1.50 *Un grupo finito G es un p-grupo si y sólo si $|G|$ es una potencia de p.*

Teorema 1.51 *Sea G un grupo finito. Entonces, todo subgrupo maximal de G es normal y tiene índice p.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 4.6(*ii*), pág. 75).

Teorema 1.52 *Sea G un grupo de orden $p^n m$ donde p es un número primo que no divide a m y $n \geq 1$. Entonces, G contiene un subgrupo de orden p^i para cada i tal que $1 \leq i \leq n$, y todo subgrupo H de G de orden p^i es un subgrupo normal de un subgrupo de orden p^{i+1} para $1 \leq i \leq n$.*

Definición 1.53 *Sea p es un número primo. Un p-subgrupo de Sylow P de un grupo G es un p-subgrupo maximal.*

Teorema 1.54 (1) *Si P es un p-subgrupo de Sylow de un grupo finito G, entonces todo p-subgrupo de Sylow de G es conjugado con P.*

(2) *Si hay r p-subgrupos de Sylow, entonces r es un divisor de $|G|$ y $r \equiv 1$ mod p.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 4.12, pág. 79).

Corolario 1.55 *Un grupo finito G tiene un único p-subgrupo de Sylow P, para algún primo p si y sólo si $P \trianglelefteq G$.*

Teorema 1.56 *Si G es un grupo finito de orden $p^e m$, donde $(p, m) = 1$, entonces todo p-subgrupo de Sylow P de G tiene orden p^e.*

La demostración se puede ver en ([26], Teorema 4.14, pág. 80).

Corolario 1.57 *Sean G un grupo finito y p un número primo. Si p^k divide a $|G|$, entonces G contiene un subgrupo de orden p^k.*

Definición 1.58 *Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Decimos que H es un subgrupo característico de G si $f(H) \subseteq H$, para todo $f \in Aut(G)$.*

Observamos que $Z(G)$ es un subgrupo característico de G.

Proposición 1.59 *Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Si H es un subgrupo característico de G, entonces es un subgrupo normal de G.*

Demostración. Como para todo $g \in G$, $i_g : G \to G$ es un automorfismo de G y H es un subgrupo característico de G, concluimos que $g^{-1}Hg = i_g(H) \subseteq H$ para todo $g \in G$. □

Teorema 1.60 *Sean G un grupo y H, K dos subgrupos de G.*

(1) *Si H es un subgrupo característico de K y K es un subgrupo característico de G, entonces H es un subgrupo característico de G.*

(2) *Si H es un subgrupo característico de K y $K \trianglelefteq G$, entonces $H \trianglelefteq G$.*

(3) *Si $H \trianglelefteq G$ entonces $f(H) \trianglelefteq G$, para todo $f \in Aut(G)$.*

(4) *Si $H \leq K \leq G$, H es un subgrupo característico de G y K/H es un subgrupo característico de G/H, entonces K es un subgrupo característico de G.*

Demostración. (1) Sea $\varphi \in Aut(G)$. Entonces, $\varphi(K) = K$ por lo que su restricción $\varphi_1 : K \to K$ es un automorfismo de K. Luego, $\varphi(H) = \varphi_1(H) = H$ y, por lo tanto, H es un subgrupo característico de G.

(2) Sea $g \in G$. Como $i_g \in Aut(G)$ y $K \trianglelefteq G$, $K = i_g(K)$ por lo que su restricción $(i_g)_1 : K \to K$ es un automorfismo de K y como H es un subgrupo característico de K, $H = i_g(H)$. Por lo tanto, $H \trianglelefteq G$.

(3) Sean $f \in Aut(G)$ y $g \in G$. Entonces, existe $h \in G$ tal que $g = f(h)$ y como $H \trianglelefteq G$, $H = i_h(H)$ por lo que $f(H) = i_g(f(H))$. Por lo tanto, $f(H) \trianglelefteq G$ para todo $f \in Aut(G)$.

(4) Sea $f \in Aut(G)$. Como $f(H) = H$, $\bar{f} : G/H \to G/H$ tal que $\bar{f}(gH) = f(g)H$ es un automorfismo de G/H. Luego, $K/H = \bar{f}(K/H) = f(K)/H$ por lo que $K = f(K)$. Por lo tanto, K es un subgrupo característico de G. □

Definiciones 1.61 *Sea G un grupo.*

(1) *Sean $a, b \in G$. El conmutador de a y b, denotado por $[a, b]$, se define como $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$.*

(2) *Sean $A, B \leq G$. Definimos $[A, B] := \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$.*

(3) *A $G' := [G, G]$ se le llama subgrupo conmutador o subgrupo derivado de G.*

(4) *Decimos que G es perfecto si $G = G'$.*

Proposición 1.62 (1) *Si $\phi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos entonces $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, para todo $x, y \in G$.*

(2) *Si $H, K \leq G$ y $\psi : G \to L$ es un homomorfismo entonces $\psi([H, K]) = [\psi(H), \psi(K)]$.*

Demostración. (1) Sean $x, y \in G$ y $\phi \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Entonces, $\phi([x, y]) = \phi(x^{-1}y^{-1}xy) = \phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1}\phi(x)\phi(y) = [\phi(x), \phi(y)]$.

(2) Es consecuencia de (1). □

Observamos que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G, pues es un subgrupo característico de G.

Notación 1.63 *Para todo grupo G, $Ab(G) := G/[G, G]$ es la abelianización de G.*

Teorema 1.64 *Sean G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Entonces, G/N es abeliano si y sólo si $G' \leq N$.*

Demostración. (1) Supongamos que G/N es abeliano y sean $g, h \in G$. Entonces, $(gN)(hN) = (hN)(gN)$ por lo que $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh \in N$, para todo $g, h \in G$. Por lo tanto, $G' \leq N$.

(2) Supongamos que $G' \leq N$ y sean $gN, hN \in G/N$. Entonces, $g^{-1}h^{-1}gh = [g, h] \in N$ por lo que $(gN)(hN) = (hN)(gN)$. Por lo tanto, G/N es abeliano. □

1.3 Grupos nilpotentes

Para esta parte el lector puede referirse a [18], [23], [26] y [29].

Definición 1.65 *Un grupo G es nilpotente si tiene una serie de subgrupos*

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G$$

tal que $G_{i-1} \trianglelefteq G$ y $G_i/G_{i-1} \subseteq Z(G/G_{i-1})$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una serie de subgrupos como la anterior se llama serie central de G.

Definición 1.66 *Sea G un grupo. Definimos recursivamente una serie descendente de subgrupos característicos $\Gamma_i(G)$ de G como sigue:*

$$\Gamma_1(G) = G$$

y

$$\Gamma_{i+1}(G) = [\Gamma_i(G), G]$$

La serie anterior es llamada serie central inferior de G.

Definición 1.67 *Sea G un grupo. Definimos recursivamente una serie ascendente de subgrupos característicos $Z_i(G)$ de G como sigue:*

$$Z_0(G) = 1,$$

$$Z_1(G) = Z(G)$$

y

$$Z_{i+1}(G) = p_i^{-1}[Z(G/Z_i(G))]$$

donde $p_i : G \to G/Z_i(G)$ es el homomorfismo canónico.

A la serie central anterior la llamamos serie central superior de G.

Teorema 1.68 *Sea G un grupo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) *G es nilpotente.*
(2) *Existe un entero positivo m tal que $Z_m(G) = G$.*
(3) *Existe un entero positivo n tal que $\Gamma_n(G) = 1$.*

Demostración. Ver ([21], Teorema 4.6, pág. 79).

Al mínimo entero positivo k tal que $Z_k(G) = G$ y $\Gamma_{k+1}(G) = 1$, se le llama la clase de nilpotencia de G.

Observación 1.69 *Todo grupo no trivial G es abeliano si y sólo si es un grupo nilpotente de clase 1.*

Teorema 1.70 (1) *Si G es un grupo nilpotente y H es un subgrupo de G, entonces H también es un grupo nilpotente.*

(2) *Si G es un grupo nilpotente y H es un subgrupo normal de G, entonces G/H también es un grupo nilpotente.*

(3) *Si G y H son dos grupos nilpotentes, entonces $G \times H$ también es un grupo nilpotente. En general, el producto directo finito de grupos nilpotentes es nilpotente.*

Demostración. (1) Ver ([26], Teorema 5.35, pág. 115).

(2) Ver ([26], Teorema 5.36, pág. 116).

(3) Ver ([26], Teorema 5.37, pág. 116).

Teorema 1.71 *Un grupo finito G es nilpotente si y sólo si es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.*

Demostración. Ver ([26], Teorema 5.39, pág. 116).

Definiciones 1.72 *Sea π un conjunto de primos.*

(1) *Un entero n es un π-número si todos sus primos divisores están en π.*

(2) *Un grupo G es un grupo de π-torsión si el orden de cada uno de sus elementos es un π-número.*

(3) *Un grupo G es libre de π-torsión si el único elemento cuyo orden es un π-número es la identidad, o bien, si no tiene elementos de orden p para todo $p \in \pi$.*

(4) *Si π sólo tiene un elemento p, un grupo de π-torsión es llamado un grupo de p-torsión y un π-número es llamado un p-número.*

(5) *n es un p-número si su único primo divisor es p, es decir, si $n = p^k$ para algún $k \geq 1$.*

(6) *Un grupo G es libre de p-torsión si no tiene elementos de orden p.*

(7) *Un grupo G es un grupo de p-torsión si el orden de todo elemento es un p-número (es decir, una potencia de p). Es decir, los grupos de p-torsión son los p-grupos.*

Teorema 1.73 *Sean G un grupo nilpotente, N un subgrupo y π un conjunto de números primos. Entonces, $\{x \in G \mid x^m \in N$ para algún π-número $m\}$ es un subgrupo de G.*

La demostración se puede ver en [[29], Teorema 3.25, pág. 14] o en [[18], Teorema 2.5.8, pág. 50].

El subgrupo anterior es llamado el π-aislador de N, denotado $I_\pi(N)$. Si π es el conjunto de todos los primos, es llamado el aislador de N y es denotado $I(N)$. Si $I_\pi(N) = N$, diremos que N es π-aislado en G.

Observamos que el π-aislador del subgrupo identidad $I_\pi(1)$ es el subgrupo que consiste de todos los elementos de π-torsión del grupo, y lo llamamos la parte de π-torsión de G (es la torsión del grupo si π es el conjunto de todos los primos). Escribiremos G_π en vez de $I_\pi(1)$ para la parte de π-torsión de G. Si $\pi = \{p\}$, $G_\pi := G_p = \{x \in G \mid x^{p^k} = 1$ para algún $k \geq 1\}$.

1.4 $C(p^\infty)$

En esta sección hablaremos del grupo casi-cíclico y de algunas de las propiedades que posee. Como referencias tenemos: [10], [11], [15], [17], [23] y [26].

Definición 1.74 *Si p es un número primo, $C(p^\infty)$ denota al grupo casi-cíclico. Éste es el grupo de las p^k-ésimas raíces complejas de la unidad, para todo entero positivo k. Escrito aditivamente, está generado por los elementos $c_1, c_2, c_3, \ldots$ tales que $c_1 \neq 0$, $pc_1 = 0$ y $pc_{i+1} = c_i$ para todo $i \geq 1$.*

Observamos que el orden de c_n es p^n y que todo elemento de $C(p^\infty)$ es un múltiplo de algún c_n.

Todos los subgrupos propios de $C(p^\infty)$ son grupos cíclicos finitos de orden p^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Éstos forman una cadena con respecto a la inclusión:

$$0 < \langle c_1 \rangle < \langle c_2 \rangle < \ldots < \langle c_n \rangle < \ldots$$

Dado n existe uno y sólo un subgrupo de orden p^n, a saber, el generado por c_n (es lo que mencionamos en la proposición 1.76(1)).

Como los subgrupos de $C(p^\infty)$ son del tipo $C(p^k)$, los cocientes no triviales de $C(p^\infty)$ son isomorfos a $C(p^\infty)$.

$C(p^\infty)$ puede ser definido de diferentes maneras equivalentes:

(1) $C(p^\infty)$ es la componente p-primaria de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, cuyos elementos son de la forma $(m/p^i)+\mathbb{Z}$ y está generado por los elementos de la forma $b_i = (1/p^i)+\mathbb{Z}$ con $i = 1, 2, \ldots$. Éstos satisfacen las relaciones $pb_1 = 0$ y $pb_{i+1} = b_i$ para $i \geq 1$.

(2) $C(p^\infty)$ es la cápsula inyectiva (ver ([10], cáp. 4, pág. 106)) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ (viendo a los grupos abelianos como $\mathbb{Z}$-módulos).

(3) $C(p^\infty)$ es el límite directo de los grupos $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{p^n}$.

Proposición 1.75 (1) *Sea $\mathbb{Q}_p$ el grupo de todos los números racionales cuyos denominadores son primos con p. Entonces, $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_p \cong C(p^\infty)$.*

(2) *Sea $\mathbb{Q}^{(p)}$ el grupo de todos los números racionales cuyos denominadores son potencias de p. Entonces, $\mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Z} \cong C(p^\infty)$.*

Demostración. Ver ([10], Ejercicio 7, pág. 19).

Proposición 1.76 (1) *Para cada $n \geq 1$, $C(p^\infty)$ tiene un único subgrupo de orden p^n.*

(2) *El conjunto de todos los subgrupos de $C(p^\infty)$ está bien ordenado por la inclusión.*

Demostración. Ver ([26], Ejercicios 10.5(i) y 10.5(ii), pág. 317).

1.5 Grupos divisibles

En esta sección hablaremos de los grupos divisibles. Algunas referencias son: [10], [15], [17] y [26].

Definición 1.77 *Sean A un grupo abeliano, $a \in A$ y n un entero positivo. Decimos que n divide a a, hecho que simbolizamos por $n|a$, si existe $b \in A$ tal que $a = nb$. Es decir, $n|a$ si $a \in nA$.*

Proposición 1.78 *Sean A un grupo abeliano, $a \in A$, n un entero positivo y t el orden de a. Si $(n,t) = 1$ entonces $n|a$.*

Demostración. Como $(n,t) = 1$, existen enteros r y s tales que $1 = nr + ts$, por lo que $a = nra + tsa = n(ra) \in nA$. Por lo tanto, $n|a$. □

Proposición 1.79 *Si $m|a$ y $n|a$ entonces $[m,n]|a$.*

Demostración. Sean $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $mr + ns = d = (m,n)$ y $b, c \in A$ tales que $mb = a$, $nc = a$. Entonces $[m,n](rc + sb) = mnd^{-1}(rc + sb) = md^{-1}ra + nd^{-1}sa = a$ y $[m,n]|a$. □

Proposición 1.80 *Sean p y q dos primos distintos. Entonces $pA \cap qA = pqA$.*

Demostración. Sea $x \in pqA$. Entonces $x = pqa$ con $a \in A$, lo cual implica que $x = p(qa) \in pA$ y $x = q(pa) \in qA$. Por lo tanto, $pqA \subseteq pA \cap qA$.

Sea $y \in pA \cap qA$. Luego $y = pb$ y $y = qc$ con $b, c \in A$, por lo que $p|y$ y $q|y$, lo cual implica que $pq = [p, q]|y$. Entonces $y = pqa \in pqA$. Por lo tanto $pA \cap qA \subseteq pqA$.

Por lo tanto, $pA \cap qA = pqA$. $\square$

Observamos que si n tiene una factorización en primos de la forma $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ entonces $nA = p_1^{r_1} A \cap \ldots \cap p_k^{r_k} A$.

Definición 1.81 *Un grupo abeliano D es divisible si para todo $a \in D$ y todo entero positivo n, $n|a$. Es decir, D es divisible si y sólo si $nD = D$ para todo entero positivo n.*

Como siempre se cumple que $nD \subseteq D$ para todo entero positivo n, podemos decir que D es divisible si y sólo si $D \subseteq nD$ para todo entero positivo n.

Observamos que 0, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$ son ejemplos de grupos divisibles y que $(\mathbb{Z}, +)$ es un ejemplo de un grupo que no es divisible.

Definición 1.82 *Un grupo abeliano D es p-divisible si $p^k D = D$ para todo entero positivo k.*

Observación 1.83 *Un grupo abeliano D es p-divisible si y sólo si $pD = D$.*

Como siempre pasa que $pD \subseteq D$, podemos decir que D es p-divisible si y sólo si $D \subseteq pD$.

Proposición 1.84 (1) *Un grupo abeliano D es divisible si y sólo si es p-divisible, para todo primo p.*

(2) *Un p-grupo abeliano D es divisible si y sólo si es p-divisible.*

(3) *Todo cociente de un grupo abeliano divisible es divisible, es decir, si D es un grupo abeliano divisible y $N \trianglelefteq D$ entonces D/N es divisible.*

(4) *Todo grupo abeliano divisible no trivial es infinito.*

(5) *Sea D un grupo abeliano. Entonces D es divisible si y sólo si todo cociente no trivial de D es infinito.*

Demostración. (1) Supongamos que D es divisible y sea p un número primo. Entonces $D = pD$ y, por lo tanto, D es divisible para todo primo p.

Supongamos que D es p-divisible, para todo primo p y sea n un entero positivo. Factorizando a n de la forma $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ con $p_1, \ldots, p_k$ primos, tenemos que $nD = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} D = D$. Por lo tanto, D es divisible.

(2) Supongamos que D es divisible. Entonces, por (1), D es p-divisible.

Supongamos que D es p-divisible y sean q un primo distinto de p y $a \in D$. Como D es un p-grupo, el orden de a es una potencia de p por lo que, por la proposición 1.78, $q|a$. Entonces, D es q-divisible para todo primo $q \neq p$. Por lo tanto, por (1), D es divisible.

(3) Sea n un entero positivo. Como $nD = D$, $n(D/N) = nD/N = D/N$. Por lo tanto, D/N es divisible.

(4) Supongamos lo contrario. Sea D un grupo abeliano divisible no trivial y finito. Luego, existe un entero positivo $n = |D|$ tal que $0 = nD$, es decir, tal que $D \neq 0 = nD$ lo cual contradice el hecho de que D es divisible.

(5) Supongamos que D es divisible. Luego, por (3), todo cociente de D es divisible y, por (4), todo cociente no trivial de D es infinito.

Ahora, supongamos que todo cociente no trivial de D es infinito y que $pD \subsetneq D$ (con p un primo). Entonces D/pD es infinito y como todos los elementos de D/pD tienen orden p, D/pD es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial, por lo que $D/pD \cong \bigoplus \mathbb{Z}_p$. Luego $\psi := \pi_1 \circ \theta \circ q \in \operatorname{Hom}(D, \mathbb{Z}_p)$ (donde $\pi_1 : \bigoplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ es la proyección canónica, $\theta : D/pD \to \bigoplus \mathbb{Z}_p$ es el isomorfismo y $q : D \to D/pD$ es el homomorfismo cociente) es un epimorfismo y no es trivial. Entonces $\mathbb{Z}_p \cong D/\ker\psi$ es infinito, lo cual es falso. Luego $D = pD$ para todo primo p, lo cual implica que D es divisible. $\square$

Proposición 1.85 (1) *Sean A, B dos grupos abelianos. Si B es un subgrupo p-divisible de A y A/B es p-divisible, entonces A es p-divisible.*

(2) *Un grupo cíclico no es divisible.*

(3) *Sean A, B y C tres grupos abelianos. Si $A = B \oplus C$ entonces $n|a = b + c$ si y sólo si $n|b$ y $n|c$.*

(4) *Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos. Si $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ entonces $n|a = \sum_{i\in I} a_i$ (con $a_i \in A_i$) si y sólo si $n|a_i$ para todo $i \in I$.*

(5) *Una suma directa de grupos es divisible si y sólo si cada sumando es divisible.*

(6) *$C(p^\infty)$ es divisible.*

Demostración. (1) Supongamos que B es un subgrupo p-divisible de A y que A/B es p-divisible y sea $a \in A$. Entonces, $aB \in A/B = p(A/B)$ por lo que existe $dB \in A/B$ tal que $aB = p(dB) = pdB$. Luego, $a - pd \in B = pB$ de donde existe $b \in B$ tal que $a - pd = pb$, por lo que $a = pd + pb = p(d + b) \in pA$. Por lo tanto, $A \leq pA$ y A es p-divisible.

(2) Si G es un grupo cíclico finito no trivial de orden n, entonces $G \neq 0 = nG$.

Si G es un grupo cíclico infinito, $G \cong \mathbb{Z}$ y como $\mathbb{Z}$ no es divisible (pues $\mathbb{Z} \nsubseteq n\mathbb{Z}$ para todo entero positivo n), G no es divisible.

Por lo tanto, un grupo cíclico no es divisible.

(3) Supongamos que $n|a$. Entonces, $a = na_1$ con $a_1 \in A$ por lo que $b + c = a = n(b_1 + c_1) = nb_1 + nc_1$. Luego, $nb_1 - b = c - nc_1 \in B \cap C = 0$ de donde $b = nb_1$ y $c = nc_1$. Por lo tanto, $n|b$ y $n|c$.

Supongamos que $n|b$ y que $n|c$. Entonces, $b = nb_1$ y $c = nc_1$ (con $b_1 \in B$ y $c_1 \in C$) por lo que $a = nb_1 + nc_1 = n(b_1 + c_1)$. Por lo tanto, $n|a$.

(4) Supongamos que $n|a_i$ para todo $i \in I$. Entonces $a_i = nb_i$ (con $b_i \in A_i$) para todo $i \in I$, por lo que $a = \sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} nb_i = n\sum_{i\in I} b_i$. Por lo tanto, $n|a$.

Supongamos que $n|a$. Luego $\sum_{i\in I} a_i = a = nb = n\sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I} nb_i$. Entonces $a_i - nb_i = \sum_{i\neq j\in I} nb_j - \sum_{i\neq j\in I} a_j = \sum_{i\neq j\in I} nb_j - a_j \in A_i \cap \sum_{i\neq j\in I} A_j = 0$, por lo que $a_i = nb_i$ y $n|a_i$ para todo $i\in I$.

(5) Es consecuencia de (4).

(6) Como $\mathbb{Q}$ es divisible, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible y como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_p C(p^\infty)$, $C(p^\infty)$ es divisible. □

Definición 1.86 *Sea H un grupo abeliano. Decimos que H es reducido si el único subgrupo divisible que tiene es el* 0. *Esto es equivalente a decir que H no es reducido si tiene subgrupos isomorfos a $\mathbb{Q}$ o a $C(p^\infty)$ (ver ([10], Teorema 23.1, pág. 104)).*

1.6 Grupos puros

Al igual que en la sección anterior, trataremos con grupos abelianos. Algunas referencias son: [10], [15], [17] y [26].

Definición 1.87 *Un subgrupo G de A es puro en A si $n|g$ en A implica que $n|g$ en G, para todo $g\in G$ y todo $n\in\mathbb{Z}$. Es decir, G es puro en A si y sólo si $nG = G\cap nA$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.*

Una generalización natural de la pureza es la p-pureza.

Definición 1.88 *Un subgrupo G de A es p-puro (con p un número primo) si $p^kG = G\cap p^kA$ para todo entero $k\geq 1$.*

Proposición 1.89 (1) *Todo sumando directo es un subgrupo puro, es decir, si G es un grupo y A es un sumando directo de G entonces A es un subgrupo puro de G.*

(2) *Si $S\leq G$ y G/S es libre de torsión entonces S es un subgrupo puro de G.*

(3) *Si H es p-puro en G para todo primo p entonces H es un subgrupo puro de G.*

(4) *Un p-subgrupo p-puro H de G es puro.*

Demostración. (1) Como A es un sumando directo de G, $G = A\oplus B$ con $B\leq G$.

Sea $a\in A\cap nG$. Entonces, $a\in A$ y $a = ng$ con $g\in G$. Luego $g = a' + b'$ con $a'\in A$ y $b'\in B$, por lo que $a = ng = na' + nb'$ y $nb' = a - na' \in A\cap B = 0$. Entonces, $a = ng = na' \in nA$ y $A\cap nG \leq nA$. Por lo tanto, A es un subgrupo puro de G.

(2) Sea $s\in S\cap nG$. Luego $s\in S$ y $s = ng$ con $g\in G$, por lo que $n(g+S) = ng + S = S$ y como G/S es libre de torsión, $g + S = S$. Entonces, $g\in S$ y $s = ng\in nS$. Por lo tanto, $S\cap nG\leq nS$ y S es un subgrupo puro de G.

(3) Sea $n\in\mathbb{Z}$ y supongamos que H es p-puro en G, para todo primo p. Como n tiene una factorización en primos de la forma $n = p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$, tenemos que

$nH = p_1^{k_1}H\cap\ldots\cap p_r^{k_r}H = (H\cap p_1^{k_1}G)\cap\ldots\cap(H\cap p_r^{k_r}G) = H\cap(p_1^{k_1}G\cap\ldots\cap p_r^{k_r}G) = H \cap nG$. Por lo tanto, H es puro en G.

(4) Como H es un p-grupo, $q^kH = H$ para todo primo $q \neq p$ por lo que $H \cap q^kG = q^kH \cap q^kG = q^kH$ y H es un subgrupo q-puro de G. Como H es p-puro, por (3), H es un subgrupo puro de G. □

Definiciones 1.90 (1) *Si G es un grupo abeliano su grupo de torsión es $tor(G) = \{g \in G \mid nx = 0$ para algun entero $n \neq 0\}$.*

(2) *Decimos que un grupo abeliano G es de torsión si $tor(G) = G$ y que es libre de torsión si $tor(G) = 0$.*

Observaciones 1.91 (1) *Para todo grupo G, $G/tor(G)$ es libre de torsión.*

(2) *Para todo grupo G, $tor(G)$ es un subgrupo puro de G.*

1.7 Algunas propiedades destacadas

En esta sección se enlistan algunas propiedades de grupos abelianos y nilpotentes que se necesitarán más adelante.

Definición 1.92 *Sea H un grupo abeliano. Un subgrupo A de H es un sumando directo absoluto si para cada subgrupo B de H maximal con respecto a la propiedad $A \cap B = 0$ tenemos que $H = A \oplus B$.*

Definición 1.93 *Sean H un grupo nilpotente, p un número primo y $a \in H$. Al máximo entero no negativo k tal que $x^{p^k} = a$ tiene solución en H se le llama la p-altura de a y se denota por $h_{H,p}(a)$. Si no existe tal k, decimos que a tiene p-altura infinita y denotamos este hecho por $h_{H,p}(a) = \infty$. Cuando no hay peligro de confusión, escribimos $h_p(a)$ en lugar de $h_{H,p}(a)$.*

Teorema 1.94 *Sean H un grupo abeliano, p un número primo y D un grupo abeliano divisible.*

(1) *Si D es un subgrupo de H, entonces D es un sumando directo absoluto de H.*

(2) *Para todo subgrupo U de H, cada $\alpha \in \mathrm{Hom}(U, D)$ se extiende a un homomorfismo en $\mathrm{Hom}(H, D)$.*

(3) *Si A es un subgrupo cíclico puro de H cuyo orden es p^l, entonces A es un sumando directo de H.*

(4) *Sea $a \in H_p$. Luego, existe un sumando directo $A \leq H$ con $a \in A$ tal que*

(i) Si $a = p^kb$ (con $k \geq 0$) para algún $b \in H$ con $h_p(b) = 0$, podemos tomar $A = \langle b\rangle$.

(ii) Si no se cumple (i), sea $a_1 = a$ y definamos a_{i+1} tal que $pa_{i+1} = a_i$, entonces podemos tomar $A = \langle a_1, a_2, \ldots\rangle \cong C(p^\infty)$.

Demostración. (1) Ver ([10], Teorema 21.2, pág. 100).

(2) Ver ([10], Teorema 21.1, pág. 99).

(3) Ver ([10], Teorema 27.1, pág. 117).

(4)(i) Supongamos que $a = p^k b$ para algún $b \in H$ tal que $h_p(b) = 0$. Como $a \in H_p$, existe un entero positivo s tal que $0 = p^s a = p^s(p^k b) = p^{s+k} b$, por lo que el orden de b es p^l con $1 \leq l \leq s + k$ y $A = \langle b \rangle$ es un grupo cíclico de orden p^l.

Sólo nos falta ver, por (3), que A es un subgrupo puro de H para lo cual basta demostrar, por la proposición 1.89(4), que A es un subgrupo p-puro de H (pues A es un p-subgrupo de H).

Veamos que $A \cap pH = pA$.

Sea $z \in A \cap pH$. Entonces $z = tb$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $z = ph$ con $h \in H$. Como $h_p(b) = 0$, $t \neq 1$.

Sea $m = (p, t)$. Luego, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tales que $m = \alpha p + \beta t$ y como $m|p$, $m = 1, p$.

Supongamos que $m = 1$. Entonces $b = \alpha pb + \beta tb = \alpha pb + \beta ph = p(\alpha b + \beta h) \in pH$, lo cual contradice el hecho de que $h_p(b) = 0$. Por lo tanto, $m \neq 1$.

Luego $m = p$ y como $m|t$, $t = pv$ con $v \in \mathbb{Z}$. Entonces $z = tb = pvb \in pA$.

Veamos que $A \cap p^2 H = p^2 A$.

Sea $z \in A \cap p^2 H$. Entonces $z = tb$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $z = p^2 h$ con $h \in H$. Como $h_p(b) = 0$, $t \neq 1$.

Sea $m = (p^2, t)$. Luego, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tales que $m = \alpha p^2 + \beta t$ y como $m|p^2$, $m = 1, p, p^2$.

Supongamos que $m = 1$. Entonces $b = \alpha p^2 b + \beta tb = \alpha p^2 b + \beta p^2 h = p^2(\alpha b + \beta h) \in p^2 H$, lo cual contradice el hecho de que $h_p(b) = 0$. Por lo tanto $m \neq 1$.

Supongamos que $m = p$. Como $m|t$, $t = pv$ con $v \in \mathbb{Z}$. Luego $p(ph) = p^2 h = z = tb = pvb \in pA$, por lo que $ph \in A$. Entonces $ph \in A \cap pH = pA$, de donde $ph = px$ con $x \in A$ y $z = p^2 h = p^2 x \in p^2 A$.

Supongamos que $m = p^2$. Como $p^2 = m|t$, $t = p^2 w$ con $w \in \mathbb{Z}$. Luego $z = tb = p^2 wb \in p^2 A$.

Supongamos que $A \cap p^d H = p^d A$ para todo $d \in \{1, 2 \ldots, r-1\}$ y veamos que $A \cap p^r H = p^r A$.

Sea $z \in A \cap p^r H$. Entonces $z = tb$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $z = p^r h$ con $h \in H$. Como $h_p(b) = 0$, $t \neq 1$.

Sea $m = (p^r, t)$. Luego, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tales que $m = \alpha p^r + \beta t$ y como $m|p^r$, $m = 1, p, \ldots, p^{r-1}$.

Supongamos que $m = 1$. Entonces $b = \alpha p^r b + \beta tb = \alpha p^r b + \beta p^r h = p^r(\alpha b + \beta h) \in p^r H$.

Supongamos que $m = p^c$ con $c \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$. Como $m|t$, $t = p^c v$ con $v \in \mathbb{Z}$. Luego $p^c(p^{r-c} h) = p^r h = z = tb = p^c vb \in p^c A$, por lo que $p^{r-c} h \in A$. Entonces $p^{r-c} h \in A \cap p^{r-c} H = p^{r-c} A$, de donde $p^{r-c} h = p^{r-c} x$ con $x \in A$ y $z = p^r h = p^r x \in p^r A$.

Supongamos que $m = p^r$. Como $m|t$, $t = p^r w$ con $w \in \mathbb{Z}$. Luego $z = tb = p^r wb \in p^r A$.

Por lo tanto, A es un subgrupo p-puro de H.

(4)(ii) Supongamos que no se cumple (i). Sea $a_1 := a$ y definamos a_{i+1} tal que $pa_{i+1} = a_i$. Luego $A = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle \cong C(p^\infty)$ es divisible. Por lo tanto, por (1), A es un sumando directo de H. $\square$

En el teorema anterior demostramos la siguiente:

Proposición 1.95 *Sean H un grupo abeliano y $a \in H_p$. Si $a = p^k b$ con $k \geq 0$ y $b \in H$ tal que $h_p(b) = 0$, entonces $A := \langle b \rangle$ es un subgrupo puro de H.*

Notación 1.96 *Para un entero positivo n, $C(n)$ denota un grupo cíclico de orden n.*

Definición 1.97 *Decimos que un grupo H es de orden acotado si, en primera instancia, es un grupo de torsión (esto es, todo elemento tiene orden finito) y si, además, existe una cota superior fija para los órdenes de los elementos. Es decir, un grupo H es de orden acotado si existe un entero positivo n tal que $nx = 0$, para todo $x \in H$.*

Observación 1.98 *Todo grupo finito es de orden acotado.*

Proposición 1.99 *Sean G un grupo abeliano y S un subgrupo puro de orden acotado. Entonces, S es un sumando directo de G.*

Demostración. Ver ([17], Teorema 7, pág. 18).

Proposición 1.100 *Para todo grupo G y todo $n \geq 1$, hay un epimorfismo $\bigotimes^n Ab(G) \to \Gamma_n(G)/\Gamma_{n+1}(G)$.*

Demostración. Ver ([29],Teorema 3.1, pág. 9) o ([18], Teorema 2.5.2, pág 48).

Proposición 1.101 *Sean H un grupo nilpotente y p un número primo (escribiremos Γ_i es vez de $\Gamma_i(H)$ y H' en vez de $[H, H]$).*

(1) Para $n \geq 1$, la función $\theta_n : Ab(H)^n \to \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ tal que

$$(x_1H', x_2H', \ldots, x_nH') \mapsto [x_1, x_2, \ldots, x_n]\Gamma_{n+1}$$

(donde $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_n]$) es un homomorfismo en cada variable. Además, la imagen de θ_n genera a Γ_n/Γ_{n+1}.

(2) Sean $n \geq 1$, $y_1, \ldots, y_n \in H$ y $x = [y_1, \ldots, y_n]$. Entonces, existe un homomorfismo $\alpha_x : H \to \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ tal que $x\Gamma_{n+1} \in \alpha_x(H)$.

(3) Si $n \geq 1$ y V es un subgrupo propio de Γ_n/Γ_{n+1}, entonces existe $\alpha \in \mathrm{Hom}(H, \Gamma_n/\Gamma_{n+1})$ tal que $\alpha(H) \nsubseteq V$.

(4) Si $H_p \neq 1$ entonces H contiene un subgrupo normal K tal que $H/K \cong C(p^k)$, donde k es un entero positivo o $k = \infty$.

Demostración. (1) Primero definimos, para cada $i \geq 1$, una función $\psi_i : (\Gamma_i/\Gamma_{i+1}) \times Ab(H) \to \Gamma_{i+1}/\Gamma_{i+2}$ tal que $\psi_i(a\Gamma_{i+1}, hH') = [a, h]\Gamma_{i+2}$.

Como $\Gamma_{i+1} = [\Gamma_i, H]$ y $\Gamma_{i+1}/\Gamma_{i+2} \leq Z(H/\Gamma_{i+2})$ tenemos que:

(*a*) $\psi_i(ab\Gamma_{i+1}, hH') = [ab, h]\Gamma_{i+2} = [a, h]^b[b, h]\Gamma_{i+2} = [a, h][b, h]\Gamma_{i+2} = \psi_i(a\Gamma_{i+1}, hH')\psi_i(b\Gamma_{i+1}, hH')$.

(*b*) $\psi_i(a\Gamma_{i+1}, hgH') = [a, hg]\Gamma_{i+2} = [a, g][a, h]^g\Gamma_{i+2} = [a, h][a, g]\Gamma_{i+2} = \psi_i(a\Gamma_{i+1}, hH')\psi_i(a\Gamma_{i+1}, gH')$.

Por lo tanto, para todo $i \geq 1$, ψ_i es un homomorfismo en cada variable.

Veamos que, para cada $i \geq 1$, ψ_i está bien definido:

Sean $(x\Gamma_{i+1}, yH') \in (\Gamma_i/\Gamma_{i+1}) \times Ab(H)$ y $z \in H'$. Entonces tenemos que $\psi_i(x\Gamma_{i+1}, yzH') = [x, yz]\Gamma_{i+2} = [x, z][x, y]^z\Gamma_{i+2} = [x, y]^z[x, z]\Gamma_{i+2}$, pues $\Gamma_{i+1}/\Gamma_{i+2}$ es abeliano. Como $[x, z] \in [\Gamma_i, \Gamma_2] \leq \Gamma_{i+2}$, $\psi_i(x\Gamma_{i+1}, yzH') = [x, y]^z\Gamma_{i+2} = z^{-1}[x, y]z\Gamma_{i+2}$. Como $[x, y]^{-1}z^{-1}[x, y]z = [[x, y], z] \in [\Gamma_{i+1}, \Gamma_2] \leq \Gamma_{i+3} \leq \Gamma_{i+2}$ tenemos que $[x, y]\Gamma_{i+2} = z^{-1}[x, y]z\Gamma_{i+2}$. Luego $\psi_i(x\Gamma_{i+1}, yzH') = [x, y]\Gamma_{i+2} = \psi_i(x\Gamma_{i+1}, yH')$.

Sea $(x\Gamma_{i+1}, yH') \in (\Gamma_i/\Gamma_{i+1}) \times Ab(H)$ y $w \in \Gamma_{i+1}$. Entonces tenemos que $\psi_i(xw\Gamma_{i+1}, yH') = [xw, y]\Gamma_{i+2} = [x, y]^w[w, y]\Gamma_{i+2} = [x, y]^w\Gamma_{i+2} = [x, y]\Gamma_{i+2} = \psi_i(x\Gamma_{i+1}, yH')$.

Sean $(x\Gamma_{i+1}, yH'), (x_1\Gamma_{i+1}, y_1H') \in (\Gamma_i/\Gamma_{i+1}) \times Ab(H)$ tales que se cumple $(x\Gamma_{i+1}, yH') = (x_1\Gamma_{i+1}, y_1H')$. Luego $x_1^{-1}x \in \Gamma_{i+1}$ y $y_1^{-1}y \in H'$, por lo que $\psi_i(x\Gamma_{i+1}, yH') = \psi_i(x_1(x_1^{-1}x)\Gamma_{i+1}, y_1(y_1^{-1}y)H') = \psi_i(x_1\Gamma_{i+1}, y_1H')$.

Para $n = 1$, $\theta_1 = 1_{Ab(H)}$ es un homomorfismo.

Para $n = 2$, $\theta_2 : Ab(H) \times Ab(H) \to \Gamma_2/\Gamma_3$ tal que $\theta_2(x_1H', x_2H') = [x_1, x_2]\Gamma_3$ es un homomorfismo en cada variable, pues $\theta_2 = \psi_1$.

Supongamos que para $n = k$, $\theta_k : Ab(H)^k \to \Gamma_k/\Gamma_{k+1}$ es un homomorfismo en cada variable y sea $\mu : Ab(H)^{k+1} \to (\Gamma_k/\Gamma_{k+1}) \times Ab(H)$ la función tal que $\mu(v_1H', \ldots, v_{k+1}H') = (\theta_k(v_1H', \ldots, v_kH'), v_{k+1}H')$. Luego $\theta_{k+1} = \psi_k \circ \mu$ pues $\psi_k \circ \mu(v_1H', \ldots, v_{k+1}H') = \psi_k(\theta_k(v_1H', \ldots, v_kH'), v_{k+1}H') = \psi_k([v_1, \ldots, v_k]\Gamma_{k+1}, v_{k+1}H') = [[v_1, \ldots, v_k], v_{k+1}]\Gamma_{k+2} = [v_1, \ldots, v_{k+1}]\Gamma_{k+2} = \theta_{k+1}(v_1H', \ldots, v_{k+1}H')$ para todo $(v_1H', \ldots, v_{k+1}H') \in Ab(G)^{k+1}$. Como θ_k y ψ_k son homomorfismos en cada variable, θ_{k+1} es un homomorfismo en cada variable.

Por lo tanto, para todo $n \geq 1$, la función $\theta_n : Ab(H)^n \to \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ es un homomorfismo en cada variable.

(2) Como $\theta_n : Ab(H)^n \to \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ es un homomorfismo en cada variable, la función $\beta : Ab(H) \to \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ tal que $\beta(yH') = [y, y_2, \ldots, y_n]\Gamma_{n+1}$ es un homomorfismo. Luego $\alpha_x := \beta \circ \pi \in \mathrm{Hom}(H, \Gamma_n/\Gamma_{n+1})$ (donde $\pi : H \to Ab(H)$ es el homomorfismo cociente) cumple que $x\Gamma_{n+1} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]\Gamma_{n+1} = \beta \circ \pi(y_1) = \alpha_x(y_1) \in \alpha_x(H)$.

(3) Como $V \subsetneq \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ y Γ_n está generado por los conmutadores de la forma $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in H$, existe $z = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ con $b_1, b_2, \ldots, b_n \in H$ tal que $z\Gamma_{n+1} \notin V$. Por (2), existe un homomorfismo $\alpha_z : H \to \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ tal que $z\Gamma_{n+1} \in \alpha_z(H)$. Por lo tanto, existe $\alpha_z \in \mathrm{Hom}(H, \Gamma_n/\Gamma_{n+1})$ tal que $\alpha_z(H) \nsubseteq V$.

(4) Supongamos que $H_p \neq 1$.

Supongamos que H es un grupo nilpotente de clase 1, es decir, que H es abeliano. Luego, por el teorema 1.94(4), existe un subgrupo A de H tal que $H = A \oplus B$ con $B \leq H$ y $A \cong C(p^k)$, donde k es un entero positivo o $k = \infty$. Entonces $C(p^k) \cong A \cong H/\ker \pi_1$ (donde $\pi_1 : H \to A$ es la proyección canónica) y, por lo tanto, H contiene un subgrupo normal $\ker \pi_1$ tal que $H/\ker \pi_1 \cong C(p^k)$, donde k es un entero positivo o $k = \infty$.

En general, sea $n \geq 1$ tal que Γ_n/Γ_{n+1} tiene p-torsión. Entonces, tenemos que $(\Gamma_n/\Gamma_{n+1})_p \neq 1$ y como Γ_n/Γ_{n+1} es abeliano, por el teorema 1.94(4), existe

$A \leq \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ tal que $\Gamma_n/\Gamma_{n+1} = A \oplus B$ con $B \leq \Gamma_n/\Gamma_{n+1}$ y $A \cong C(p^l)$, donde l es un entero positivo o $l = \infty$. Como B es un subgrupo propio de Γ_n/Γ_{n+1}, por (3), existe $\alpha \in \mathrm{Hom}(H, \Gamma_n/\Gamma_{n+1})$ tal que $\alpha(H) \nsubseteq B$.

Sea $\beta := \pi_1 \circ \alpha$ (donde $\pi_1 : \Gamma_n/\Gamma_{n+1} \to A$ es la proyección canónica). Luego, $H/\ker\beta \cong \beta(H)$ es un subgrupo no trivial de $A \cong C(p^l)$ por lo que $H/\ker\beta \cong C(p^k)$ con k un entero positivo o $k = \infty$. $\square$

Proposición 1.102 *Sean H un grupo nilpotente y p un número primo.*

(1) *Si $Ab(H)$ es p-divisible entonces $\Gamma_n(H)/\Gamma_{n+1}(H)$ es p-divisible, para todo $n \geq 1$.*

(2) *H es p-divisible si y sólo si $Ab(H)$ es p-divisible.*

(3) *H tiene un único subgrupo p-divisible maximal.*

Demostración. (1) Supongamos que $Ab(H)$ es p-divisible. Luego, $\bigotimes^n Ab(H)$ es p-divisible y como, por la proposición 1.100, hay un epimorfismo $\varphi : \bigotimes^n Ab(H) \to \Gamma_n(H)/\Gamma_{n+1}(H)$ para todo $n \geq 1$, concluimos que $\Gamma_n(H)/\Gamma_{n+1}(H)$ es p-divisible para todo $n \geq 1$.

(2) Supongamos que H es p-divisible. Como $Ab(H)$ es un cociente de H, concluimos que $Ab(H)$ es p-divisible.

Ahora, supongamos que $Ab(H)$ es p-divisible. Veamos, por inducción, que $H/\Gamma_k(H)$ es p-divisible para todo $k \geq 1$:

Primero observamos que para $k = 1$ y $k = 2$, $H/\Gamma_k(H)$ es p-divisible.

Ahora, supongamos que $H/\Gamma_{k-1}(H)$ es p-divisible.

Veremos que como $\Gamma_{k-1}(H)/\Gamma_k(H)$ es p-divisible (esto es una consecuencia de (1)) y $H/\Gamma_{k-1}(H) \cong (H/\Gamma_k(H))/(\Gamma_{k-1}(H)/\Gamma_k(H))$ también es p-divisible, $H/\Gamma_k(H)$ es p-divisible.

Sea $h\Gamma_k(H) \in H/\Gamma_k(H)$. Como $h\Gamma_{k-1}(H) \in H/\Gamma_{k-1}(H)$ y $H/\Gamma_{k-1}(H)$ es p-divisible, existe $g\Gamma_{k-1}(H) \in H/\Gamma_{k-1}(H)$ tal que $h\Gamma_{k-1}(H) = [g\Gamma_{k-1}(H)]^p = g^p\Gamma_{k-1}(H)$. Luego, $h = g^p m$ con $m \in \Gamma_{k-1}(H)$ y como $\Gamma_{k-1}(H)/\Gamma_k(H)$ es p-divisible, existe $n\Gamma_k(H) \in \Gamma_{k-1}(H)/\Gamma_k(H)$ tal que $m\Gamma_k(H) = [n\Gamma_k(H)]^p = n^p\Gamma_k(H)$, por lo que $m = n^p l$ con $l \in \Gamma_k(H)$. Entonces, $h = g^p m = g^p n^p l$ y $h\Gamma_k(H) = g^p n^p l\Gamma_k(H) = g^p n^p \Gamma_k(H) = [g\Gamma_k(H)]^p[n\Gamma_k(H)]^p = [gn\Gamma_k(H)]^p$ pues $\Gamma_{k-1}(H)/\Gamma_k(H) \leq Z(H/\Gamma_k(H))$. Por lo tanto, $H/\Gamma_k(H)$ es p-divisible.

Por lo tanto, $H/\Gamma_n(H)$ es p-divisible para todo $n \geq 1$.

Como H es nilpotente, existe un entero positivo c tal que $\Gamma_{c+1}(H) = 1$. Por lo tanto, $H \cong H/\Gamma_{c+1}(H)$ es p-divisible.

(3) Sean A y B dos subgrupos p-divisibles de H.

Veamos que $\langle A, B\rangle$ también es p-divisible.

Por (2), basta ver que $Ab(\langle A, B\rangle) = \langle A, B\rangle/[\langle A, B\rangle, \langle A, B\rangle]$ es p-divisible. Luego, podemos suponer que $[\langle A, B\rangle, \langle A, B\rangle] = 1$. Como $A \leq \langle A, B\rangle$ y $B \leq \langle A, B\rangle$, $[A, B] \leq [\langle A, B\rangle, \langle A, B\rangle] = 1$. Luego, $[A, B] = 1$ por lo que $\langle A, B\rangle = AB$.

Veamos que AB es p-divisible:

Sea $w \in AB$. Entonces, $w = ab$ con $a \in A$ y $b \in B$. Como A y B son p-divisibles, existen $x \in A$ y $y \in B$ tales que $a = x^p$ y $b = y^p$. Luego, $w = ab = x^p y^p = (xy)^p \in (AB)^p$ pues $[A, B] = 1$. Por lo tanto, AB es p-divisible. $\square$

Lema 1.103 *Sean $x, y \in G$ y supongamos que x y y conmutan con $[x, y]$. Entonces, $[x, y]^n = [x^n, y] = [x, y^n]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Para $n = 0$, se cumple que $[x, y]^0 = 1 = [x, y^0] = [x^0, y]$.

Para $n = 1$, se cumple que $[x, y]^1 = [x^1, y] = [x, y^1]$.

Para $n = 2$, tenemos que $[x, y]^2 = x^{-1}y^{-1}xy[x, y] = x^{-1}[x, y]y^{-1}xy = x^{-1}x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}xy = x^{-2}y^{-1}x(xx^{-1})yy^{-1}xy = x^{-2}y^{-1}x^2y = [x^2, y]$. También, tenemos que $[x, y]^2 = [x, y]x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}x[x, y]y = x^{-1}y^{-1}xx^{-1}y^{-1}xy^2 = x^{-1}y^{-1}xx^{-1}yy^{-1}xy^2 = x^{-1}y^{-1}yy^{-2}xy^2 = x^{-1}y^{-2}xy^2 = [x, y^2]$.

Ahora supongamos que para $n = k$, $[x, y^k] = [x^k, y] = [x, y^k]$. Entonces, tenemos que $[x, y]^{k+1} = [x, y][x, y]^k = x^{-1}y^{-1}xy[x, y]^k = x^{-1}[x, y]^ky^{-1}xy = x^{-1}[x^k, y]y^{-1}xy = x^{-1}x^{-k}y^{-1}x^kyy^{-1}xy = x^{-(k+1)}y^{-1}x^{k+1}y = [x^{k+1}, y]$.

También, $[x, y]^{k+1} = [x, y]^k[x, y] = [x, y]^kx^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}x[x, y]^ky = x^{-1}y^{-1}x[x, y^k]y = x^{-1}y^{-1}xx^{-1}y^{-k}xy^{k+1} = x^{-1}y^{-(k+1)}xy^{k+1} = [x, y^{k+1}]$.

Por lo tanto, $[x, y]^n = [x^n, y] = [x, y^n]$ para $n \geq 0$.

Como $x[x, y] = [x, y]x$, $y^{-1}xy = xx^1y^1xy = x^{-1}y^{-1}xyx$ y $y^{-1}xyx^{-1} = x^{-1}y^{-1}xy$, es decir, $[x, y] = [y, x^{-1}]$ por lo que $[x, y]^{-1} = [y, x^{-1}]^{-1} = [x^{-1}, y]$.

Como $y[x, y] = [x, y]y$, $yx^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}xy^2$ y $yx^{-1}y^{-1}x = x^{-1}y^{-1}xy$, es decir, $[y^{-1}, x] = [x, y]$ por lo que $[x, y]^{-1} = [y^{-1}, x]^{-1} = [x, y^{-1}]$.

Por lo tanto, $[x^{-1}, y] = [x, y]^{-1} = [x, y^{-1}]$ por lo que para $n \geq 0$, $[x^{-n}, y] = [x, y]^{-n} = [x, y^{-n}]$. □

Proposición 1.104 *Sean p un número primo y H un grupo nilpotente y p-divisible. Luego,*

(1) *$H_p \leq Z(H)$.*

(2) *$Z(H)$ es p-divisible.*

(3) *$H/Z_i(H)$ es libre de p-torsión, para todo $i \geq 1$.*

(4) *$Z_{i+1}(H)/Z_i(H)$ es libre de p-torsión y p-divisible, para todo $i \geq 1$.*

(5) *Si $H_p \neq 1$ entonces H contiene un subgrupo normal K tal que $H/K \cong C(p^\infty)$.*

Demostración. (1) Si H es un grupo nilpotente de clase 1 entonces $H = Z(H)$. Por lo tanto, $H_p \leq H = Z(H)$.

Ahora, supongamos que H es un grupo nilpotente de clase 2 y sean $h \in H_p$ y $g \in H$. Luego, existe $s \geq 1$ tal que $h^{p^s} = 1$ y como H es p-divisible, existe $g_1 \in H$ tal que $g = g_1^p$. De la misma forma, como $g_1 \in H$ y H es p-divisible, existe $g_2 \in H$ tal que $g_1 = g_2^p$ de donde $g = g_2^{p^2}$. Continuando con este procedimiento llegamos a que existe $g_s \in H$ tal que $g = g_s^{p^s}$, por lo que $[h, g] = [h, g_s^{p^s}]$ y como $H = Z_2(H)$, $[h, g] = [h, g_s^{p^s}] = [h^{p^s}, g_s] = [1, g_s] = 1$. Por lo tanto, $h \in Z(H)$ y $H_p \leq Z(H)$.

Supongamos que H es un grupo nilpotente de clase 3 y sean $h \in H_p$ y $g \in H$. Luego, como antes, existen $s \leq 1$ tal que $h^{p^s} = 1$ y $g_s \in H$ tal que $g = g_s^{p^s}$. Como H es un grupo nilpotente de clase 3, $H/Z(H)$ es un grupo nilpotente de clase 2 por lo que $(H/Z(H))_p \leq Z(H/Z(H)) = Z_2(H)/Z(H)$ y como $hZ(H) \in (H/Z(H))_p$, $h \in Z_2(H)$. Luego, $[h, g] = [h, g_s^{p^s}] = [h^{p^s}, g_s] = [1, g_s] = 1$. Por lo tanto, $h \in Z(H)$ y $H_p \leq Z(H)$.

Ahora, supongamos que si H es un grupo nilpotente de clase k entonces $H_p \leq Z(H)$. Sean H un grupo nilpotente de clase $k+1$, $h \in H_p$ y $g \in H$. Luego, existen $s \geq 1$ tal que $h^{p^s} = 1$ y $g_s \in H$ tal que $g = g_s^{p^s}$. Como H es un grupo nilpotente de clase $k+1$, $H/Z(H)$ es un grupo nilpotente de clase k por lo que $(H/Z(H))_p \leq Z(H/Z(H)) = Z_2(H)/Z(H)$ y como $hZ(H) \in (H/Z(H))_p$, $h \in Z_2(H)$. Luego, $[h,g] = [h, g_s^{p^s}] = [h^{p^s}, g_s] = [1, g_s] = 1$. Por lo tanto, $h \in Z(H)$ y $H_p \leq Z(H)$.

(2) Primero veamos que para todo $h \in H$, si $h^p \in Z(H)$ entonces $h \in Z(H)$:

Sean $h \in H$ tal que $h^p \in Z(H)$ y $g \in H$. Como H es p-divisible, existe $k \in H$ tal que $g = k^p$. Como H es nilpotente y p-divisible, $H/Z(H)$ es nilpotente y p-divisible por lo que, por (1), $(H/Z(H))_p \leq Z(H/Z(H)) = Z_2(H)/Z(H)$. Como $hZ(H) \in (H/Z(H))_p$, $h \in Z_2(H)$ de donde $[h,g] = [h,k^p] = [h^p,k] = 1$, pues $h^p \in Z(H)$. Por lo tanto, $h \in Z(H)$.

Finalmente, veamos que $Z(H)$ es p-divisible:

Sea $g \in Z(H)$. Luego, $g \in H$ y como H es p-divisible, existe $h \in H$ tal que $h^p = g \in Z(H)$ por lo que $h \in Z(H)$. Por lo tanto, $Z(H)$ es p-divisible.

(3) Ya vimos que para todo $h \in H$, si $h^p \in Z(H)$ entonces $h \in Z(H)$.

Ahora, sea $hZ(H) \in H/Z(H)$ tal que $h^pZ(H) = [hZ(H)]^p = Z(H)$. Luego, $h^p \in Z(H)$ por lo que $h \in Z(H)$. Por lo tanto, $hZ(H) = Z(H)$ y $H/Z(H)$ es libre de p-torsión.

Como H es p-divisible, $H/Z_i(H)$ es p-divisible para todo $i \geq 1$ por lo que, por lo antes mostrado, $H/Z_{i+1}(H) \cong (H/Z_i(H))/(Z_{i+1}(H)/Z_i(H)) = (H/Z_i(H))/Z(H/Z_i(H))$ es libre de p-torsión.

(4) Como H es p-divisible, por (2), $H/Z_i(H)$ es libre de p-torsión para todo $i \geq 1$. Luego, $Z(H/Z_i(H)) = Z_{i+1}(H)/Z_i(H)$ es libre de p-torsión para todo $i \geq 1$.

Como H es p-divisible, $H/Z_i(H)$ es p-divisible y, por (1), $Z(H/Z_i(H)) = Z_{i+1}(H)/Z_i(H)$ es p-divisible.

(5) Supongamos que $H_p \neq 1$. Como H es nilpotente, por la proposición 1.101(4), H contiene un subgrupo normal K tal que $H/K \cong C(p^k)$ donde k es un entero positivo o $k = \infty$.

Supongamos que k es un entero positivo. Como H es p-divisible, $H/K \cong C(p^k)$ es p-divisible, lo cual es falso. Por lo tanto, $k = \infty$ y $H/K \cong C(p^\infty)$. $\square$

1.8 El producto libre y el producto amalgamado

Como referencias para lo hecho a continuación tenemos: [23], [26] y [27].

Un ejemplo interesante de grupo es el grupo libre en dos generadores: Sea E el conjunto de las palabras finitas (incluida la palabra vacía) que se pueden formar al yuxtaponer los símbolos a^p y b^q, con $p, q \in \mathbb{Z}$. Dada una palabra, está permitido efectuar las siguientes reducciones:

(a) Remplazar un grupo de símbolos consecutivos $a^p a^q$ por el símbolo a^{p+q}.

(b) Remplazar un grupo de símbolos consecutivos $b^p b^q$ por el símbolo b^{p+q}.

(c) Suprimir a^0 y b^0.

Una palabra para la que toda reducción es imposible es una palabra reducida. Una palabra reducida está formada por una sucesión de símbolos alternados de la forma a^p y b^q, con exponentes no nulos. Además, toda palabra admite una única reducción.

Se denota por $L(a, b)$ o $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$, al conjunto de las palabras reducidas dotado de la ley de composición siguiente: El producto $m \cdot m'$ de dos palabras, es la palabra reducida asociada a la palabra (no necesariamente reducida) obtenida al escribir m y m' consecutivamente.

Para esta ley, $L(a, b)$ es un grupo para el cual la palabra vacía es el elemento neutro y $a^{-p_n}b^{-q_n} \cdots a^{-p_1}b^{-q_1}$ es la inversa de la palabra $b^{q_1}a^{p_1} \cdots b^{q_n}a^{p_n}$. Las aplicaciones $\hat{a}, \hat{b} : \mathbb{Z} \to L(a, b)$ definidas por $\hat{a}(p) = a^p$ y $\hat{b}(q) = b^q$ son monomorfismos. Además, si G es un grupo y $\varphi, \psi : \mathbb{Z} \to G$ son dos homomorfismos, existe un único homomorfismo $\theta : L(a, b) \to G$ tal que $\theta \circ \hat{a} = \varphi$ y $\theta \circ \hat{b} = \psi$, dado por $\theta(b^{q_1}a^{p_1} \cdots b^{q_n}a^{p_n}) = \psi(q_1)\varphi(p_1) \cdots \psi(q_n)\varphi(p_n)$.

Más en general tenemos el grupo libre sobre un conjunto arbitrario: En vez de formar palabras con la ayuda de letras a y b, se utilizan todos los elementos de un conjunto S. En particular, si S es un conjunto finito de n elementos, se obtiene el grupo libre de n generadores, denotado $L(S)$.

Dados dos grupos podemos formar un nuevo grupo llamado el producto libre de ellos: Es otra generalización de la primera noción. Sean G_1 y G_2 dos grupos. Se considera el conjunto de las palabras finitas constituidas por elementos de G_1 y G_2. Se permite reemplazar dos letras consecutivas g_1 y g_1' si están en el mismo grupo G_1 por la única letra $g_1 \cdot g_1' \in G_1$, y lo mismo con letras en G_2. Además, se suprimen los elementos neutros. Como antes, una palabra reducida es una sucesión finita de elementos provenientes alternadamente de G_1 y G_2. El conjunto de las palabras reducidas, dotado de la ley de composición evidente constituye el grupo $G_1 \star G_2$, producto libre de ambos grupos.

Para $i \in \{1, 2\}$, las aplicaciones $\theta_i : G_i \to G_1 \star G_2$ dadas por $\theta_i(g_i) = g_i$, son homomorfismos inyectivos. Además, si G es un grupo y tenemos los homomorfismos $\mu_i : G_i \to G$, existe un único homomorfismo $\mu : G_1 \star G_2 \to G$ tal que $\mu \circ \theta_i = \mu_i$. A esta propiedad la llamamos propiedad universal del producto libre de dos grupos.

Observamos de esta forma, que el producto libre de dos grupos es su coproducto en la categoría de grupos.

De forma general:

Definición 1.105 *Un producto libre de una familia de grupos $\{A_i\}_{i \in I}$ es un grupo P y una familia de homomorfismos $\{j_i : A_i \to P\}_{i \in I}$ de forma que, para cada grupo G y toda familia de homomorfismos $\{\phi_i : A_i \to G\}_{i \in I}$ existe un único homomorfismo $\phi : P \to G$ tal que $\phi \circ j_i = \phi_i$, para todo índice $i \in I$.*

La construcción explícita del producto libre puede verse en [23] o [26].

Proposición 1.106 *Si P es un producto libre de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$, entonces los homomorfismos $j_i : A_i \to P$ son inyectivos.*

Demostración. Sean $i \in I$ y $\{f_k : A_k \to A_i\}_{k \in I}$ la familia de homomorfismos tal que $f_k = 1_{A_i}$ si $k = i$ y $f_k = 0$ si $k \neq i$. Entonces, existe un único homomorfismo

$\varphi : P \to A_i$ tal que $\varphi \circ j_k = f_k$ para todo $k \in I$, por lo que $\varphi \circ j_i = f_i = 1_{A_i}$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $j_i : A_i \to P$ es un homomorfismo inyectivo para cada $i \in I$. □

En vista de la proposición anterior, los homomorfismos $j_i : A_i \to P$ a veces son llamados encajes.

Teorema 1.107 *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos. Si P y Q son productos libres de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces $P \cong Q$.*

Demostración. Sean $j_i : A_i \to P$ y $k_i : A_i \to Q$ los respectivos encajes. Como P es un producto libre de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$, existe un único homomorfismo $\varphi : P \to Q$ tal que $\varphi \circ j_i = k_i$ para todo $i \in I$. Análogamente, como Q es un producto libre de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$, existe un único homomorfismo $\psi : Q \to P$ tal que $\psi \circ k_i = j_i$ para todo $i \in I$.

Como existe un único homomorfismo $\theta : P \to P$ tal que $\theta \circ j_i = j_i$, para todo $i \in I$ y $\psi \circ \varphi \circ j_i = j_i = 1_P \circ j_i$ para todo $i \in I$, $\psi \circ \varphi = 1_P$.

Como existe un único homomorfismo $\eta : Q \to Q$ tal que $\eta \circ k_i = k_i$, para todo $i \in I$ y $\varphi \circ \psi \circ k_i = k_i = 1_Q \circ k_i$ para todo $i \in I$, $\varphi \circ \psi = 1_Q$.

Por lo tanto, $Q \cong P$. □

Como consecuencia podemos hablar del producto libre P de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ y denotarlo por $P = \star_{i\in I} A_i$.

Teorema 1.108 *Si $g \in \star_{i\in I} A_i$ y $g \neq 1$, entonces g tiene una única factorización*

$$g = a_1 \cdots a_n$$

donde $a_k \in A_{i_k}$, $a_k \neq 1$ e $i_k \neq i_{k+1}$.

Demostración. Ver ([26], Teorema 11.52, pág. 390).

Otra construcción que podemos hacer es el producto amalgamado de dos grupos: Sean G_0, G_1 y G_2 tres grupos, $\varphi_1 : G_0 \to G_1$ y $\varphi_2 : G_0 \to G_2$ dos homomorfismos, N el menor subgrupo normal en $G_1 \star G_2$ que contiene todos los elementos de la forma:

$$\{(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}) : g \in G_0\}$$

y $\mu : G_1 \star G_2 \to (G_1 \star G_2)/N$ el epimorfismo canónico. Escribimos $G_1 \star_{G_0} G_2 := (G_1 \star G_2)/N$ y lo llamamos el producto de G_1 y G_2 amalgamado por G_0.

Para $i \in \{1,2\}$, los homomorfismos $\mu_i = \mu \circ \theta_i$ (donde $\theta_1 : G_1 \to G_1 \star G_2$ y $\theta_2 : G_2 \to G_1 \star G_2$ son los encajes) satisfacen la relación $\mu_1 \circ \varphi_1 = \mu_2 \circ \varphi_2$. En efecto, para $g \in G_0$ los elementos $\theta_1(\varphi_1(g))$ y $\theta_2(\varphi_2(g))$ difieren en un elemento que está en $N = \ker \mu$.

Además, si H es un grupo y para $i \in \{1,2\}$ los homomorfismos $\psi_i : G_i \to H$ verifican la identidad $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, tenemos que existe un único homomorfismo $\psi : G_1 \star_{G_0} G_2 \to H$ tal que $\psi_i = \psi \circ \mu_i$. En efecto, por la propiedad universal del producto libre, existe un único homomorfismo $\psi' : G_1 \star G_2 \to H$ tal que $\psi_i = \psi' \circ \theta_i$, pero la identidad $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ prueba que

$\{(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}), (\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1}) : g \in G_0\} \subseteq \ker\psi'$ y por lo tanto, también $N \subseteq \ker\psi'$, con lo que ψ' pasa al cociente por N.

Observamos que $G_1 \star_{G_0} G_2$ es el coproducto fibrado en la categoría de grupos de φ_1 y φ_2.

1.9 Extensiones centrales de grupos

En esta sección daremos las definiciones y proposiciones necesarias para entender la proposición 4.23 y su demostración. El lector que desee adentrarse en el tema de extensiones centrales puede referirse a [1].

Definiciones 1.109 (1) *Una extensión central de un grupo G es una pareja (H,π), donde H es un grupo y $\pi : H \to G$ es un epimorfismo tal que* $\ker\pi \leq Z(H)$.

(2) *Un morfismo de extensiones centrales de G, $\alpha : (G_1,\pi_1) \to (G_2,\pi_2)$, es un homomorfismo de grupos $\alpha : G_1 \to G_2$ tal que $\pi_1 = \pi_2 \circ \alpha$.*

(3) *Una extensión central $(\tilde{G},\pi)$ de G es universal si para cada extensión central (H,σ) de G, existe un único morfismo $\alpha : (\tilde{G},\pi) \to (H,\sigma)$ de extensiones centrales.*

Proposición 1.110 *Salvo isomorfismo hay a lo más una extensión central universal de un grupo G.*

Demostración. Ver ([1], (33.1), pág. 166).

Proposición 1.111 *Si $(\tilde{G},\pi)$ es una extensión central universal de G entonces $\tilde{G}$ y G son perfectos.*

Demostración. Ver ([1], (33.2), pág. 166).

Proposición 1.112 *Sean G un grupo perfecto y (H,π) una extensión central de G. Entonces, $H = (\ker\pi)[H,H]$ con $[H,H]$ perfecto.*

Demostración. Ver ([1], (33.3), pág. 167).

Proposición 1.113 *Para todo grupo G, G posee una extensión central universal si y sólo si G es perfecto.*

Demostración. Ver ([1], (33.4), pág. 167).

Definiciones 1.114 (1) *Si G es un grupo perfecto y $(\tilde{G},\pi)$ es su extensión central universal entonces $\tilde{G}$ es llamado el grupo cubriente universal de G y* $\ker\pi$ *el multiplicador de Schur de G, denotado por $H_2(G,\mathbb{Z})$. Observamos que, por la proposición 1.111, $\tilde{G}$ es perfecto.*

(2) *Una extensión central perfecta de un grupo perfecto G es una extensión central (H,α) de G tal que H es perfecto.*

Proposición 1.115 *Sean* $\tilde{G}$ *el grupo cubriente universal de un grupo perfecto* G *y* (H, α) *una extensión central perfecta del grupo perfecto* $\tilde{G}$*. Entonces,* α *es un isomorfismo.*

Demostración. Ver ([1], (33.7), pág. 168).

Por último mencionaremos a la inducción transfinita, que será necesaria para algunas pruebas que desarrollaremos posteriormente.

1.10 Inducción transfinita

Como referencia tenemos: [16].

Teorema 1.116 *(Inducción transfinita). Sea* C *una clase de ordinales y supongamos que:*

(1) $0 \in C$

(2) *Si* $\alpha \in C$ *entonces* $\alpha + 1 \in C$

(3) *Si* α *es un ordinal límite no trivial y* $\beta \in C$ *para todo* $\beta < \alpha$*, entonces* $\alpha \in C$.

Entonces C *es la clase de todos los ordinales.*

Capítulo 2

A-equivalencias y grupos A-celulares

En este capítulo introducimos los conceptos de grupo A-celular y de A-equivalencia. Damos ejemplos de grupos A-celulares y demostramos proposiciones y lemas relacionados con estos dos conceptos. El lector puede referirse al artículo [7].

Definiciones 2.1 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in \mathcal{C}$.*

(1) *Un morfismo $f : X \to Y$ es una A-equivalencia si la función*

$$\mathrm{Hom}(A, f) : \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A, Y)$$

definida por $\mathrm{Hom}(A, f)(\psi) = f \circ \psi$ es una biyección.

(2) *Un objeto $T \in \mathcal{C}$ es A-celular si toda A-equivalencia es una T-equivalencia.*

Observación 2.2 *La condición de que f sea una A-equivalencia quiere decir que para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, Y)$, existe un único $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $\varphi = f \circ \hat{\varphi}$. Es decir, $f : X \to Y$ es una A-equivalencia si el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "f"'] \\ & A \arrow[ul, "\forall\varphi"] \arrow[u, dashed, "\exists!\hat{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

Al morfismo $\hat{\varphi}$ lo llamaremos el levantamiento de φ (a lo largo de f).

Las anteriores definiciones se aplicarán más adelante a la categoría de grupos.

Lema 2.3 *Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$ dos categorías, $\Gamma : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Si f es una ΓI-equivalencia para todo $I \in \mathcal{D}$ y $\varinjlim_I \Gamma I$ existe, entonces f es una $\varinjlim_I \Gamma I$-equivalencia.*

Demostración. Supongamos que f es una ΓI-equivalencia, para todo $I \in \mathcal{D}$. Sean $G := \varinjlim_I \Gamma I$, $(f_I : \Gamma I \to G)_{I\in\mathcal{D}}$ el cocono colímite para Γ (ver definiciones 1.6) y $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, Y)$. Como $g_I := \varphi \circ f_I \in \mathrm{Hom}(\Gamma I, Y)$, existe un único $\hat{g}_I \in \mathrm{Hom}(\Gamma I, X)$ tal que $g_I = f \circ \hat{g}_I$ y esto último se cumple, por hipótesis, para cada $I \in \mathcal{D}$.

Ahora, para cada morfismo $\alpha : I \to J$ en $\mathcal{D}$ tenemos que $f \circ \hat{g}_I = g_I = \varphi \circ f_I = \varphi \circ f_J \circ \Gamma(\alpha) = g_J \circ \Gamma(\alpha) = f \circ \hat{g}_J \circ \Gamma(\alpha)$ y, por la unicidad de $\hat{g}_I$, $\hat{g}_I = \hat{g}_J \circ \Gamma(\alpha)$. Entonces $(\hat{g}_I : \Gamma I \to X)_{I\in\mathcal{D}}$ es un cocono para Γ, por lo que existe un único homomorfismo $\psi : G \to X$ tal que $\psi \circ f_I = \hat{g}_I$. Luego, $\varphi \circ f_I = g_I = f \circ \hat{g}_I = f \circ \psi \circ f_I$ y como $G := \varinjlim_I \Gamma I$, $\varphi = f \circ \psi$.

Ahora, sea $\psi_1 \in \mathrm{Hom}(G, X)$ tal que $\varphi = f \circ \psi_1$. Entonces $f \circ \psi_1 \circ f_I = \varphi \circ f_I = g_I = f \circ \hat{g}_I$ y, por la unicidad de $\hat{g}_I$, $\psi_1 \circ f_I = \hat{g}_I = \psi \circ f_I$. Por lo tanto, por la unicidad de ψ, $\psi_1 = \psi$. $\square$

Proposición 2.4 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $\Gamma : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor y $A \in \mathcal{C}$. Si ΓI es A-celular para todo $I \in \mathcal{D}$ y $\varinjlim_I \Gamma I$ existe, entonces $\varinjlim_I \Gamma I$ es A-celular.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una A-equivalencia. Como ΓI es A-celular, para todo $I \in \mathcal{D}$ tenemos que f es una ΓI-equivalencia, para todo $I \in \mathcal{D}$. Luego, por el lema 2.3, f es una $\varinjlim_I \Gamma I$-equivalencia. Por lo tanto, $\varinjlim_I \Gamma I$ es A-celular. $\square$

O bien, otra forma de ver lo anterior es la siguiente:

Proposición 2.5 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in \mathcal{C}$. Consideremos un funtor $\Gamma : \mathcal{D} \to A$-cel que va de una categoría arbitraria $\mathcal{D}$ a la subcategoría plena A-cel de $\mathcal{C}$ conformada por los objetos A-celulares. Supongamos que Γ tiene colímite en $\mathcal{C}$, entonces $\varinjlim_I \Gamma I \in A$-cel.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición 2.4 $\square$

Definición 2.6 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $R, G \in \mathcal{C}$. Decimos que R es un retracto de G si existen dos morfismos $r : G \to R$ y $s : R \to G$ tales que $r \circ s = 1_R$.*

Proposición 2.7 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $A, R, G \in \mathcal{C}$. Si G es A-celular y R es un retracto de G, entonces R también es A-celular.*

Demostración. Supongamos que G es A-celular y que R es un retracto de G. Sean $f : X \to Y$ una A-equivalencia y $\varphi : R \to Y$ un morfismo. Como R es un retracto de G, existen dos morfismos $r : G \to R$ y $s : R \to G$ tales que $r \circ s = 1_R$. Luego, tenemos un morfismo $\varphi \circ r : G \to Y$ y como f también es una G-equivalencia (pues G es A-celular), existe un único morfismo $\psi : G \to X$ tal que $\varphi \circ r = f \circ \psi$. Por lo tanto, existe un morfismo $\psi \circ s : R \to X$ tal que $f \circ \psi \circ s = \varphi \circ r \circ s = \varphi \circ 1_R = \varphi$.

Ahora, sea $\theta : R \to X$ un morfismo tal que $\varphi = f \circ \theta$. Como $\theta \circ r : G \to X$ es un morfismo tal que $\varphi \circ r = f \circ \theta \circ r$, por la unicidad de ψ, $\theta \circ r = \psi$. Por lo tanto, $\psi \circ s = \theta \circ r \circ s = \theta \circ 1_R = \theta$.

Por lo tanto, f es una R-equivalencia y R es A-celular. $\square$

A partir de ahora consideraremos las nociones de objeto A-celular y de A-equivalencia en la categoría de grupos. La siguiente proposición es un ejemplo de un grupo A-celular.

Proposición 2.8 *Para todo grupo A, el grupo trivial es A-celular.*

Demostración. Como 1 es el colímite para el funtor $\Gamma : \emptyset \to Grp$ y ΓI es A-celular para todo $I \in \emptyset$, por la proposición 2.4, tenemos que 1 es A-celular. $\square$

Cualquier grupo A es un grupo A-celular, al igual que cualquier producto libre $\star A$ de copias de A. En general,

Proposición 2.9 *Si M_i es un grupo A-celular, para cada $i \in I$ entonces $\star_{i\in I} M_i$ es A-celular.*

Demostración. Supongamos que M_i es A-celular, para cada $i \in I$. Como $\star_{i\in I} M_i = \varinjlim_{i\in I} M_i$, por la proposición 2.4, $\star_{i\in I} M_i$ es A-celular. $\square$

Proposición 2.10 *Para cualesquiera tres grupos A-celulares G, H y Γ, y cualesquiera dos homomorfismos $\varphi_1 : \Gamma \to G$, $\varphi_2 : \Gamma \to H$, el producto amalgamado $G \star_\Gamma H$ es un grupo A-celular.*

Demostración. Como $G \star_\Gamma H$ es un coproducto fibrado y el coproducto fibrado es un ejemplo de colímite, por la proposición 2.4, $G \star_\Gamma H$ es un grupo A-celular. $\square$

Lema 2.11 *Sean G un grupo, $f : X \to Y$ una G-equivalencia, $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, Y)$ y $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}(G, X)$ su levantamiento. Entonces, $f^{-1}(C_Y(\varphi G)) = C_X(\hat{\varphi} G)$.*

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(C_Y(\varphi G))$. Como $f(x) \in C_Y(\varphi G)$, tenemos que $\varphi(g) = f(x)^{-1}\varphi(g)f(x) = f(x^{-1}\hat{\varphi}(g)x) = f \circ i_x \circ \hat{\varphi}(g)$ para todo $g \in G$, por lo que $\varphi = f \circ i_x \circ \hat{\varphi}$. Por lo tanto, por la unicidad de $\hat{\varphi}$, $i_x \circ \hat{\varphi} = \hat{\varphi}$ para todo $x \in f^{-1}(C_Y(\varphi G))$.

Ahora, sea $b \in \hat{\varphi} G$. Luego existe $h \in G$ tal que $b = \hat{\varphi}(h) = i_x \circ \hat{\varphi}(h) = x^{-1}\hat{\varphi}(h)x$, de donde $xb = bx$. Por lo tanto, $x \in C_X(\hat{\varphi} G)$ y $f^{-1}(C_Y(\varphi G)) \leq C_X(\hat{\varphi} G)$.

Sean $y \in C_X(\hat{\varphi} G)$ y $z \in \varphi G$. Luego, existe $g \in G$ tal que $z = \varphi(g) = f \circ \hat{\varphi}(g)$ y como y conmuta con $\hat{\varphi}(g)$, $f(y)z = f(y\hat{\varphi}(g)) = f(\hat{\varphi}(g)y) = zf(y)$. Entonces, $f(y) \in C_Y(\varphi G)$ y $y \in f^{-1}(C_Y(\varphi G))$. Por lo tanto $C_X(\hat{\varphi} G) \leq f^{-1}(C_Y(\varphi G))$. $\square$

Lema 2.12 *Sean G y H dos grupos tales que $H \trianglelefteq G$. Si $\pi : G \to G/H$ es el homomorfismo cociente y $K := \pi^{-1}(Z(G/H))$, entonces $K \trianglelefteq G$.*

Demostración. Como $Z(G/H) \trianglelefteq G/H$ y $\pi : G \to G/H$ es un epimorfismo, $K := \pi^{-1}(Z(G/H)) \trianglelefteq G$. $\square$

Lema 2.13 *Sean G, N, X y Y cuatro grupos y $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, Y)$ tal que $\varphi = f \circ \hat{\varphi}$, donde $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ y $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}(G, X)$.*

(1) Si $N \trianglelefteq \varphi G$ y $M := f^{-1}(N) \cap \hat{\varphi}G$, entonces $M \trianglelefteq \hat{\varphi}G$.

(2) Además, si $p : \varphi G \to \varphi G/N$ y $q : \hat{\varphi}G \to \hat{\varphi}G/M$ son los homomorfismos cocientes, $K := p^{-1}(Z(\varphi G/N))$ y $L := q^{-1}(Z(\hat{\varphi}G/M))$ entonces tenemos que $L = f^{-1}(K) \cap \hat{\varphi}G$.

Demostración. (1) Sean $\hat{\varphi}(g) \in \hat{\varphi}G$ y $m \in M$. Luego, $m \in \hat{\varphi}G$ y $f(m) \in N$ por lo que $f(\hat{\varphi}(g)^{-1}m\hat{\varphi}(g)) = [f(\hat{\varphi}(g)^{-1})]f(m)[f(\hat{\varphi}(g))] = \varphi(g)^{-1}f(m)\varphi(g) \in N$, pues $N \trianglelefteq \varphi G$. Entonces $\hat{\varphi}(g)^{-1}m\hat{\varphi}(g) \in f^{-1}(N) \cap \hat{\varphi}G = M$ y, por lo tanto, $M \trianglelefteq \hat{\varphi}G$.

(2) Sea $a \in L$. Luego $a \in \hat{\varphi}G$, $q(a) = aM \in Z(\hat{\varphi}G/M)$ y $f(a) \in \varphi G$.

Para demostrar que $a \in f^{-1}(K) \cap \hat{\varphi}G$, sólo nos resta ver que $f(a) \in K$:

Sea $\varphi(g)N \in \varphi G/N$. Como $[\hat{\varphi}(g)M][aM] = [aM][\hat{\varphi}(g)M]$, tenemos que $\hat{\varphi}(g)a\hat{\varphi}(g)^{-1}a^{-1} \in M = f^{-1}(N) \cap \hat{\varphi}G$, de donde $\varphi(g)f(a)\varphi(g)^{-1}f(a)^{-1} = f(\hat{\varphi}(g)a\hat{\varphi}(g)^{-1}a^{-1}) \in N$, por lo que $[\varphi(g)N][f(a)N] = [f(a)N][\varphi(g)N]$. Por lo tanto, $p(f(a)) = f(a)N \in Z(\varphi G/N)$ y $f(a) \in K$.

Sea $b \in f^{-1}(K) \cap \hat{\varphi}G$. Entonces, $b \in \hat{\varphi}G$ y $f(b) \in K$ de donde $p(f(b)) = f(b)N \in Z(\varphi G/N)$.

Para ver que $b \in L$, sólo nos resta demostrar que $q(b) = bM \in Z(\hat{\varphi}G/M)$:

Sea $\hat{\varphi}(g)M \in \hat{\varphi}G/M$. Como $[\varphi(g)N][f(b)N] = [f(b)N][\varphi(g)N]$, tenemos que $f(\hat{\varphi}(g)b\hat{\varphi}(g)^{-1}b^{-1}) = \varphi(g)f(b)\varphi(g)^{-1}f(b)^{-1} \in N$, por lo que $\hat{\varphi}(g)b\hat{\varphi}(g)^{-1}b^{-1} \in f^{-1}(N) \cap \hat{\varphi}G = M$. Luego $[\hat{\varphi}(g)M][bM] = [bM][\hat{\varphi}(g)M]$ y, por lo tanto, tenemos que $q(b) \in Z(\hat{\varphi}G/M)$. $\square$

Recordemos que en la sección 1.3 vimos, entre otras cosas, que un grupo G es nilpotente de clase n si n es el mínimo entero positivo k tal que $Z_k(G) = G$.

Lema 2.14 *Sean G un grupo, $f : X \to Y$ una G-equivalencia, $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, Y)$ y $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}(G, X)$ su levantamiento. Entonces φG es nilpotente si y sólo si $\hat{\varphi}G$ es nilpotente. Además, la clase de nilpotencia de φG es la misma que la de $\hat{\varphi}G$.*

Demostración. Primero demostraremos que $f^{-1}(Z_n(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G = Z_n(\hat{\varphi}G)$, para todo $n \geq 1$. Haremos la prueba por inducción sobre n.

Veamos que $f^{-1}(Z(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G = Z(\hat{\varphi}G)$, es decir, que la igualdad se cumple para $n = 1$:

Sea $a \in f^{-1}(Z(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G$. Entonces $a \in f^{-1}(Z(\varphi G)) \leq f^{-1}(C_Y(\varphi G)) = C_X(\hat{\varphi}G)$ (ver lema 2.11) y $a \in \hat{\varphi}G$, por lo que $a \in \hat{\varphi}G \cap C_X(\hat{\varphi}G) = Z(\hat{\varphi}G)$. Por lo tanto, $f^{-1}(Z(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G \leq Z(\hat{\varphi}G)$.

Sean $b \in Z(\hat{\varphi}G)$ y $d \in \varphi G$. Entonces $b \in \hat{\varphi}G$, $f(b) \in \varphi G$ y existe $h \in G$ tal que $d = \varphi(h)$. Como b conmuta con los elementos de $\hat{\varphi}G$, $f(b)d = f(b)\varphi(h) = f(b)f(\hat{\varphi}(h)) = f(b\hat{\varphi}(h)) = f(\hat{\varphi}(h)b) = \varphi(h)f(b) = df(b)$. Luego, $f(b) \in Z(\varphi G)$ y $b \in f^{-1}(Z(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G$. Por lo tanto, $Z(\hat{\varphi}G) \leq f^{-1}(Z(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G$.

Ahora, supongamos que $f^{-1}(Z_n(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G = Z_n(\hat{\varphi}G)$ y veamos que la igualdad se cumple para $n+1$, es decir, que $f^{-1}(Z_{n+1}(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G = Z_{n+1}(\hat{\varphi}G)$:

Sean $N := Z_n(\varphi G)$ y $M := f^{-1}(N) \cap \hat{\varphi}G = Z_n(\hat{\varphi}G)$. Si $K := Z_{n+1}(\varphi G)$ y $L := Z_{n+1}(\hat{\varphi}G)$ tenemos, por definición, que $K = p_n^{-1}[Z(\varphi G/N)]$ y $L =$

$q_n^{-1}[Z(\hat{\varphi}G/M)]$ (donde $p_n : \varphi G \to \varphi G/N$ y $q_n : \hat{\varphi}G \to \hat{\varphi}G/M$ son los homomorfismos cocientes). Por lo tanto, por el lema 2.13, $L = f^{-1}(K) \cap \hat{\varphi}G$, es decir, $Z_{n+1}(\hat{\varphi}G) = f^{-1}(Z_{n+1}(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G$.

Así, concluimos que $f^{-1}(Z_n(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G = Z_n(\hat{\varphi}G)$ para todo $n \geq 1$.

Veamos que $Z_n(\varphi G) = \varphi G$ si y sólo si $Z_n(\hat{\varphi}G) = \hat{\varphi}G$:

Supongamos que $Z_n(\varphi G) = \varphi G$. Como $Z_n(\hat{\varphi}G) = f^{-1}(Z_n(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G$, tenemos que $Z_n(\hat{\varphi}G) = f^{-1}(\varphi G) \cap \hat{\varphi}G = \hat{\varphi}G$.

Ahora, supongamos que $Z_n(\hat{\varphi}G) = \hat{\varphi}G$. Entonces, $\hat{\varphi}G = f^{-1}(Z_n(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G$ por lo que $\varphi G = f \circ \hat{\varphi}(G) \leq Z_n(\varphi G) \leq \varphi G$, es decir, $Z_n(\varphi G) = \varphi G$.

Por lo tanto, $Z_n(\varphi G) = \varphi G$ si y sólo si $Z_n(\hat{\varphi}G) = \hat{\varphi}G$.

Entonces φG es nilpotente de clase n si y sólo si $\hat{\varphi}G$ es nilpotente de clase n. □

Proposición 2.15 *Sea G un grupo. Entonces, $G/\Gamma_s(G)$ es un grupo G-celular para todo $s \geq 1$ (donde $\Gamma_s(G)$ es el s-ésimo término de la serie central inferior de G).*

Demostración. Primero veamos que si $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$, entonces $\varphi(\Gamma_s(G)) = \Gamma_s(\varphi G)$ para todo $s \geq 1$. Haremos la prueba por inducción sobre s:

La igualdad se cumple para $s = 1$, pues $\varphi(\Gamma_1(G)) = \varphi G = \Gamma_1(\varphi G)$.

Observamos que la igualdad también se cumple para $s = 2$, pues $\varphi(\Gamma_2(G)) = \varphi([G, G]) = [\varphi G, \varphi G] = \Gamma_2(\varphi G)$.

Supongamos que $\varphi(\Gamma_s(G)) = \Gamma_s(\varphi G)$. Luego, $\varphi(\Gamma_{s+1}(G)) = \varphi([\Gamma_s(G), G]) = [\varphi(\Gamma_s(G)), \varphi G] = [\Gamma_s(\varphi G), \varphi G] = \Gamma_{s+1}(\varphi G)$.

Por lo tanto, $\varphi(\Gamma_s(G)) = \Gamma_s(\varphi G)$ para todo $s \geq 1$.

Ahora, sean $f : X \to Y$ una G-equivalencia y $\psi \in \mathrm{Hom}(G/\Gamma_s(G), Y)$. Como $\varphi := \psi \circ \pi_s \in \mathrm{Hom}(G, Y)$ (donde $\pi_s : G \to G/\Gamma_s(G)$ es el homomorfismo cociente), existe un único $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}(G, X)$ tal que $\varphi = f \circ \hat{\varphi}$. Además, $\Gamma_s(G) \leq \ker \varphi$ (pues $\varphi(\Gamma_s(G)) = \psi \circ \pi_s(\Gamma_s(G)) = \psi(\Gamma_s(G)) = 1$) por lo que $\Gamma_s(\varphi G) = \varphi(\Gamma_s(G)) = 1$ y φG es un grupo nilpotente de clase menor o igual que $s - 1$. Por el lema 2.14, $\hat{\varphi}G$ también es un grupo nilpotente de clase menor o igual que $s - 1$, de donde $1 = \Gamma_s(\hat{\varphi}G) = \hat{\varphi}(\Gamma_s(G))$. Entonces $\Gamma_s(G) \leq \ker \hat{\varphi}$ y, por el primer teorema de isomorfismo, existe un único $\hat{\psi} \in \mathrm{Hom}(G/\Gamma_s(G), X)$ tal que $\hat{\varphi} = \hat{\psi} \circ \pi_s$. Luego, $\psi \circ \pi_s = \varphi = f \circ \hat{\varphi} = f \circ \hat{\psi} \circ \pi_s$ y como π_s es un epimorfismo, $\psi = f \circ \hat{\psi}$.

Veamos que $\hat{\psi}$ es el único homomorfismo que cumple con lo último:

Sea $\beta \in \mathrm{Hom}(G/\Gamma_s(G), X)$ tal que $\psi = f \circ \beta$. Entonces $\varphi = f \circ \hat{\psi} \circ \pi_s = \psi \circ \pi_s = f \circ \beta \circ \pi_s$ y, por la unicidad de $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi} \circ \pi_s = \beta \circ \pi_s$ por lo que $\hat{\psi} = \beta$ (pues π_s es un epimorfismo).

Otra forma de ver lo anterior es la siguiente:

Sean $f : X \to Y$ una G-equivalencia y $\psi \in \mathrm{Hom}(G/\Gamma_s(G), Y)$. Como $\varphi := \psi \circ \pi_s \in \mathrm{Hom}(G, Y)$, existe un único $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}(G, X)$ tal que $\varphi = f \circ \hat{\varphi}$. Además, $[\Gamma_{s-1}(G), G] = \Gamma_s(G) \leq \ker \varphi$ por lo que $1 = \varphi([\Gamma_{s-1}(G), G]) = [\varphi(\Gamma_{s-1}(G)), \varphi G]$, lo cual implica que $\varphi(\Gamma_{s-1}(G)) \leq Z(\varphi G)$ y por consiguiente que $\Gamma_{s-1}(G) \leq \varphi^{-1}(Z(\varphi G))$.

Como $\hat{\varphi}[\varphi^{-1}(Z(\varphi G))] \leq f^{-1}(Z(\varphi G)) \cap \hat{\varphi}G = Z(\hat{\varphi}G)$, tenemos que $1 = [\hat{\varphi}[\varphi^{-1}(Z(\varphi G))], \hat{\varphi}G] = \hat{\varphi}[\varphi^{-1}(Z(\varphi G)), G]$, de donde $[\varphi^{-1}(Z(\varphi G)), G] \leq \ker \hat{\varphi}$. Luego $\Gamma_s(G) = [\Gamma_{s-1}(G), G] \leq [\varphi^{-1}(Z(\varphi G)), G] \leq \ker \hat{\varphi}$ y, por el primer teorema de isomorfismo, existe un único $\hat{\psi} \in \mathrm{Hom}(G/\Gamma_s(G), X)$ tal que $\hat{\varphi} = \hat{\psi} \circ \pi_s$. Entonces, $\psi \circ \pi_s = \varphi = f \circ \hat{\varphi} = f \circ \hat{\psi} \circ \pi_s$ y como π_s es un epimorfismo, $\psi = f \circ \hat{\psi}$.

Veamos que $\hat{\psi}$ es el único homomorfismo que cumple con lo último:

Sea $\beta \in \mathrm{Hom}(G/\Gamma_s(G), X)$ tal que $\psi = f \circ \beta$. Entonces $\varphi = f \circ \hat{\psi} \circ \pi_s = \psi \circ \pi_s = f \circ \beta \circ \pi_s$ y, por la unicidad de $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi} \circ \pi_s = \beta \circ \pi_s$ por lo que $\hat{\psi} = \beta$. □

Ejemplo 2.16 *El grupo diédrico $D_{2n} = (x, y \mid x^n = 1,\ y^2 = 1,\ yxy = x^{-1})$ es nilpotente si y sólo si n es una potencia de 2 (ver ([26], ejercicio 5.41, pág. 118)). De hecho D_{2^n} es nilpotente de clase n (ver ([19], pág. 91)), por lo que tenemos la siguiente serie central inferior:*

$$1 = \Gamma_{n+1}(D_{2^n}) \leq \Gamma_n(D_{2^n}) \leq \ldots \leq \Gamma_2(D_{2^n}) \leq \Gamma_1(D_{2^n}) = D_{2^n}$$

Luego $D_{2^n}/\Gamma_s(D_{2^n})$ es un grupo D_{2^n}-celular, para todo $s \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Definición 2.17 *El producto directo restringido de una familia $\{G_i\}_{i\in I}$ de grupos es el subgrupo del producto directo $\prod_{i\in I} G_i$ que consiste de aquellos elementos con soporte finito. Es decir, si denotamos por P al producto directo restringido de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$, $P = \{\langle g_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \mid g_i = 1$ para casi todo $i \in I\}$.*

Observamos que si la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ consiste únicamente de grupos abelianos, entonces su producto directo restringido coincide con su suma directa.

Lema 2.18 *El producto directo restringido de una familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$, denotado por P, es un colímite de productos directos finitos de grupos de dicha familia.*

Demostración. Sea $A = \{J \subseteq I \mid J \text{ es finito}\}$. Luego, $\mathcal{D} := (A, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Además, $\mathcal{D}$ también es un conjunto dirigido ya que es no vacío y para cualesquiera $J, K \in A$, existe $J \cup K \in A$ tal que $J \subseteq J \cup K$ y $K \subseteq J \cup K$.

Sea *Grp* la categoría de grupos. Definimos un funtor $\Gamma : \mathcal{D} \to Grp$ tal que $J \mapsto \prod_{j\in J} G_j$ y $(f : J \hookrightarrow L) \mapsto (\Gamma(f) : \prod_{j\in J} G_j \to \prod_{l\in L} G_l)$ donde $\Gamma(f)$ es el homomorfismo inducido por la propiedad universal de $\prod_{l\in L} G_l$, explícitamente:

Sea $\{\phi_l : \prod_{j\in J} G_j \to G_l\}_{l\in L}$ la familia de homomorfismos tal que $\phi_l = \pi_l$ si $l \in J$ y $\phi_l = 0$ si $l \notin J$. Entonces, por la propiedad universal de $\prod_{l\in L} G_l$, existe un único homomorfismo $\Gamma(f) : \prod_{j\in J} G_j \to \prod_{l\in L} G_l$ tal que $\phi_l = \pi_l \circ \Gamma(f)$ para todo $l \in L$.

Veamos que $\Gamma : \mathcal{D} \to Grp$ es un funtor.

(a) Sea $J \in \mathcal{D}$. Veamos que $\Gamma(1_J) = 1_{\Gamma(J)}$.

Como $\{\pi_j : \prod_{j\in J} G_j \to G_j\}_{j\in J}$ es una familia de homomorfismos, por la propiedad universal de $\prod_{j\in J} G_j$, existe un único homomorfismo $\Gamma(1_J) : \prod_{j\in J} G_j \to$

$\prod_{j\in J} G_j$ tal que $\pi_j = \pi_j \circ \Gamma(1_J)$ para todo $j \in J$. Como $\pi_j = \pi_j \circ 1_{\Gamma(J)}$ para todo $j \in J$, por la unicidad de $\Gamma(1_J)$, $1_{\Gamma(J)} = \Gamma(1_J)$.

(b) Sean $f : J \hookrightarrow L, \varphi : L \hookrightarrow K \in \mathcal{D}$. Veamos que $\Gamma(\varphi \circ f) = \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(f)$.

Sea $\{\theta_k : \prod_{j\in J} G_j \to G_k\}_{k\in K}$ la familia de homomorfismos que induce $\Gamma(\varphi\circ f)$ a través de la propiedad universal de $\prod_{k\in K} G_k$, es decir, tal que $\theta_k = \pi_k$ si $k \in J$ y $\theta_k = 0$ si $k \notin J$. Así, tenemos que $\theta_k = \pi_k \circ \Gamma(\varphi\circ f)$ para cada $k \in K$.

Sea $\{\phi_l : \prod_{j\in J} G_j \to G_l\}_{l\in L}$ la familia de homomorfismos que induce $\Gamma(f)$ a través de la propiedad universal de $\prod_{l\in L} G_l$, es decir, tal que $\phi_l = \pi_l$ si $l \in J$ y $\phi_l = 0$ si $l \notin J$. De esta forma tenemos que $\phi_l = \pi_l \circ \Gamma(f)$ para todo $l \in L$.

Sea $\{\psi_k : \prod_{l\in L} G_l \to G_k\}_{k\in K}$ la familia de homomorfismos que induce $\Gamma(\varphi)$ a través de la propiedad universal de $\prod_{k\in K} G_k$, es decir, tal que $\psi_k = \pi_k$ si $k \in L$ y $\psi_k = 0$ si $k \notin L$. De aquí tenemos que $\psi_k = \pi_k \circ \Gamma(\varphi)$ para cada $k \in K$.

Veamos que $\theta_k = \pi_k \circ \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(f)$ para todo $k \in K$.

Sea $k \in K$. Tenemos tres casos:

(1) Si $k \in J \subseteq L \subseteq K$ entonces $\pi_k \circ \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(f) = \psi_k \circ \Gamma(f) = \pi_k \circ \Gamma(f) = \phi_k = \pi_k = \theta_k$.

(2) Si $k \in L \subseteq K$ y $k \notin J$ entonces $\pi_k \circ \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(f) = \psi_k \circ \Gamma(f) = \pi_k \circ \Gamma(f) = \phi_k = 0 = \theta_k$.

(3) Si $k \notin L$ entonces $k \notin J$. Luego, $\pi_k \circ \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(f) = \psi_k \circ \Gamma(f) = 0 \circ \Gamma(f) = 0 = \theta_k$.

Por lo tanto, $\theta_k = \pi_k \circ \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(f)$ para todo $k \in K$ y por la unicidad de $\Gamma(\varphi \circ f)$, $\Gamma(\varphi \circ f) = \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(f)$.

Por lo tanto, Γ es un funtor.

Sea $\{\eta_i : \prod_{j\in J} G_j \to G_i\}_{i\in I}$ la familia de homomorfismos tal que $\eta_i = \pi_i$ si $i \in J$ y $\eta_i = 0$ si $i \notin J$. Entonces, por la propiedad universal de $\prod_{i\in I} G_i$, existe un único homomorfismo $\beta_J : \prod_{j\in J} G_j \to \prod_{i\in I} G_i$ tal que $\eta_i = \pi_i \circ \beta_J$ para cada $i \in I$.

Ahora, denotamos por P al producto directo restringido de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ y observamos que para todo $J \in \mathcal{D}$, β_J se factoriza a través de P:

Para cada $J \in \mathcal{D}$, definimos un homomorfismo $\lambda_J : \prod_{j\in J} G_j \to P$ tal que $\lambda_J(\langle g_j\rangle_{j\in J}) = \langle x_i\rangle_{i\in I}$ donde $x_i = g_i$ si $i \in J$ y $x_i = 1$ si $i \notin J$. Observamos que para todo $J \in \mathcal{D}$, λ_J es inyectivo. Como $\eta_i = \pi_i \circ \alpha \circ \lambda_J$ (donde $\alpha : P \hookrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ es la inclusión) para cada $i \in I$, por la unicidad de β_J, $\alpha \circ \lambda_J = \beta_J$.

Queremos demostrar que $(\lambda_J : \prod_{j\in J} G_j \to P)_{J\in\mathcal{D}}$ es un cocono colímite.

Sea $f : J \hookrightarrow L \in \mathcal{D}$. Veamos que $\lambda_J = \lambda_L \circ \Gamma(f)$:

Sean $\{\phi_l : \prod_{j\in J} G_j \to G_l\}_{l\in L}$ la familia de homomorfismos que induce $\gamma(f)$ a través de la propiedad universal de $\prod_{l\in L} G_l$, y $\{\psi_i : \prod_{l\in L} G_l \to G_i\}_{i\in I}$ tal que $\psi_i = \pi_i$ si $i \in L$ y $\psi_i = 0$ si $i \notin L$. Entonces, por la propiedad universal de $\prod_{i\in I} G_i$, existe un único homomorfismo $\gamma : \prod_{i\in L} G_i \to \prod_{i\in I} G_i$ tal que $\psi_i = \pi_i \circ \gamma$ para todo $i \in I$.

Veamos que $\beta_J = \gamma \circ \Gamma(f)$, para lo cual basta ver que $\eta_i = \pi \circ \gamma \circ \Gamma(f)$ para cada $i \in I$.

Sea $i \in I$. Tenemos tres casos:

(1) Si $i \in J \subseteq L \subseteq I$ entonces $\pi_i \circ \gamma \circ \Gamma(f) = \psi_i \circ \Gamma(f) = \pi_i \circ \Gamma(f) = \phi_i = \pi_i = \eta_i$.

(2) Si $i \in L$ e $i \notin J$ entonces $\pi_i \circ \gamma \circ \Gamma(f) = \psi_i \circ \Gamma(f) = \pi_i \circ \Gamma(f) = \phi_i = 0 = \eta_i$.

(3) Si $i \notin L$ entonces $i \notin J$. Luego, $\pi_i \circ \gamma \circ \Gamma(f) = \psi_i \circ \Gamma(f) = 0 \circ \Gamma(f) = 0 = \eta_i$.

Por lo tanto, $\eta_i = \pi_i \circ \gamma \circ \Gamma(f)$ para cada $i \in I$ y por la unicidad de β_J, $\beta_J = \gamma \circ \Gamma(f)$.

Como $\psi_i = \pi_i \circ \alpha \circ \lambda_L$ para todo $i \in I$, por la unicidad de γ, $\gamma = \alpha \circ \lambda_L$. Luego, $\alpha \circ \lambda_J = \beta_J = \gamma \circ \Gamma(f) = \alpha \circ \lambda_L \circ \Gamma(f)$ y como α es inyectivo, $\lambda_J = \lambda_L \circ \Gamma(f)$. Por lo tanto, $(\lambda_J : \prod_{j \in J} G_j \to P)_{J \in \mathcal{D}}$ es un cocono para Γ en *Grp*.

Sea $(\sigma_J : \prod_{j \in J} G_j \to H)_{J \in \mathcal{D}}$ otro cocono para Γ en *Grp*. Observamos que para cada $x \in P$, existen $J \in \mathcal{D}$ y $y \in \prod_{j \in J} G_j$ tal que $\lambda_J(y) = x$. Luego, definimos $\varphi : P \to H$ tal que $x \mapsto \sigma_J(y)$. De esta forma $\varphi \circ \lambda_J(y) = \sigma_J(y)$, para todo $J \in \mathcal{D}$ y todo $y \in \prod_{j \in J} G_j$.

Veamos que φ está bien definido:

Sea $x \in P$. Supongamos que existen $J, K \in \mathcal{D}$ y $y \in \prod_{j \in J} G_j$ y $z \in \prod_{k \in K} G_k$ tales que $\lambda_J(y) = x = \lambda_K(z)$. Veamos que $\sigma_J(y) = \varphi(x) = \sigma_K(z)$:

Sean $f_1 : J \hookrightarrow J \cup K, f_2 : K \hookrightarrow J \cup K \in \mathcal{D}$. Luego, $\lambda_J = \lambda_{J \cup K} \circ \Gamma(f_1)$ y $\lambda_K = \lambda_{J \cup K} \circ \Gamma(f_2)$ por lo que $\lambda_{J \cup K} \circ \Gamma(f_1)(y) = \lambda_J(y) = \lambda_K(z) = \lambda_{J \cup K} \circ \Gamma(f_2)(z)$ y como $\lambda_{J \cup K}$ es inyectivo, $\Gamma(f_1)(y) = \Gamma(f_2)(z)$. Como $\sigma_J = \sigma_{J \cup K} \circ \Gamma(f_1)$ y $\sigma_K = \sigma_{J \cup K} \circ \Gamma(f_2)$, tenemos que $\sigma_J(y) = \sigma_{J \cup K} \circ \Gamma(f_1)(y) = \sigma_{J \cup K} \circ \Gamma(f_2)(z) = \sigma_K(z)$.

Veamos que φ es un homomorfismo:

Sean $x, y \in P$. Entonces, existen $J, K \in \mathcal{D}$ y $w \in \prod_{j \in J} G_j$, $z \in \prod_{k \in K} G_k$ tales que $x = \lambda_J(w)$ y $y = \lambda_K(z)$. Luego, $x = \lambda_{J \cup K} \circ \Gamma(f_1)(w)$ y $y = \lambda_{J \cup K} \circ \Gamma(f_2)(z)$ de donde se tiene que $xy = [\lambda_{J \cup K} \circ \Gamma(f_1)(w)][\lambda_{J \cup K} \circ \Gamma(f_2)(z)] = \lambda_{J \cup K}[\Gamma(f_1)(w)\Gamma(f_2)(z)]$. Así, tenemos que $\varphi(xy) = \sigma_{J \cup K}[\Gamma(f_1)(w)\Gamma(f_2)(z)] = [\sigma_{J \cup K} \circ \Gamma(f_1)(w)][\sigma_{J \cup K} \circ \Gamma(f_2)(z)] = \sigma_J(w)\sigma_K(z) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Sea $\psi : P \to H$ otro homomorfismo tal que $\sigma_J = \psi \circ \lambda_J$, para cada $J \in \mathcal{D}$ y $x \in P$. Entonces, existen $J \in \mathcal{D}$ y $y \in \prod_{j \in J} G_j$ tal que $\lambda_J(y) = x$. Luego, $\varphi(x) = \sigma_J(y) = \psi \circ \lambda_J(y) = \psi(x)$. Por lo tanto, $\varphi = \psi$. $\square$

Proposición 2.19 *Sea A un grupo.*

(1) *Si G y H son dos grupos A-celulares entonces $G \times H$ es A-celular. De aquí se sigue que cualquier producto directo finito de grupos A-celulares es A-celular.*

(2) *El producto directo restringido de cualquier familia de grupos A-celulares es A-celular.*

(3) *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos abelianos. Si para toda $i \in I$ A_i es A-celular, entonces $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es A-celular.*

(4) (i) *Si V es un espacio vectorial sobre un campo K (de dimensión cualquiera), entonces el grupo abeliano subyacente de V es A-celular, donde A es el grupo abeliano subyacente de K.*

(ii) *Si el grupo abeliano subyacente de un campo K es A-celular entonces también lo es el grupo abeliano subyacente de cualquier K-espacio vectorial.*

Demostración. (1) Sean $f : X \to Y$ una A-equivalencia y $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, Y)$. Como f es una G-equivalencia (pues G es A-celular) y $\varphi \circ i_G \in \mathrm{Hom}(G, Y)$ (donde $i_G : G \to G \times H$ es tal que $g \mapsto (g, 1)$), existe un único $\hat{\varphi}_G \in \mathrm{Hom}(G, X)$

tal que $f \circ \hat{\varphi}_G = \varphi \circ i_G$. Análogamente, sustituyendo G por H, existe un único $\hat{\varphi}_H \in \mathrm{Hom}(H, X)$ tal que $f \circ \hat{\varphi}_H = \varphi \circ i_H$.

Como $i_G(G) = G \times 1$ conmuta con $i_H(H) = 1 \times H$ en $G \times H$, $\varphi \circ i_G(G)$ conmuta con $\varphi \circ i_H(H)$ en Y, es decir, $\varphi \circ i_G(G) \leq C_Y(\varphi \circ i_H(H))$ por lo que $\hat{\varphi}_G(G) \leq f^{-1}(C_Y(\varphi \circ i_H(H)))$ (pues $f \circ \hat{\varphi}_G(G) = \varphi \circ i_G(G)$). Pero, por el lema 2.11, $f^{-1}(C_Y(\varphi \circ i_H(H))) = C_X(\hat{\varphi}_H(H))$ de donde $\hat{\varphi}_G(G) \leq C_X(\hat{\varphi}_H(H))$. Por lo tanto, $\hat{\varphi}_G(G)$ conmuta con $\hat{\varphi}_H(H)$ en X.

Ahora, definimos la función $\hat{\varphi} : G \times H \to X$ tal que $(g, h) \mapsto \hat{\varphi}_G(g)\hat{\varphi}_H(h)$.

Como consecuencia de que $\hat{\varphi}_G(G)$ conmute con $\hat{\varphi}_H(H)$ en X, tenemos que $\hat{\varphi}$ es un homomorfismo:

Sean $(g, h), (g', h') \in G \times H$. Entonces, $\hat{\varphi}[(g, h)(g', h')] = \hat{\varphi}[(gg', hh')] = \hat{\varphi}_G(gg')\hat{\varphi}_H(hh') = \hat{\varphi}_G(g)\hat{\varphi}_G(g')\hat{\varphi}_H(h)\hat{\varphi}_H(h') = \hat{\varphi}_G(g)\hat{\varphi}_H(h)\hat{\varphi}_G(g')\hat{\varphi}_H(h') = [\hat{\varphi}(g, h)][\hat{\varphi}(g', h')]$.

Ahora, veamos que $f \circ \hat{\varphi} = \varphi$:

Sea $(g, h) \in G \times H$. Luego, tenemos que $f \circ \hat{\varphi}(g, h) = f[\hat{\varphi}_G(g)\hat{\varphi}_H(h)] = [f \circ \hat{\varphi}_G(g)][f \circ \hat{\varphi}_H(h)] = [\varphi \circ i_G(g)][\varphi \circ i_H(h)] = [\varphi(g, 1)][\varphi(1, h)] = \varphi[(g, 1)(1, h)] = \varphi(g, h)$. Por lo tanto, $f \circ \hat{\varphi} = \varphi$.

Por último, veamos la unicidad:

Sea $k \in \mathrm{Hom}(G \times H, X)$ tal que $f \circ k = \varphi$. Entonces, $f \circ \hat{\varphi} = \varphi = f \circ k$. Luego $f \circ k \circ i_G = \varphi \circ i_G = f \circ \hat{\varphi} \circ i_G$ y, por la unicidad de $\hat{\varphi}_G$, $k \circ i_G = \hat{\varphi} \circ i_G$. También, como $f \circ \hat{\varphi} \circ i_H = \varphi \circ i_H = f \circ k \circ i_H$ tenemos, por la unicidad de $\hat{\varphi}_H$, que $\hat{\varphi} \circ i_H = k \circ i_H$. Entonces, $k(g, 1) = \hat{\varphi}(g, 1)$ y $k(1, h) = \hat{\varphi}(1, h)$. Por lo tanto, $\hat{\varphi} = k$.

(2) Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos A-celulares. Por el lema 2.18, el producto directo restringido P de la familia $\{G_i\}_{i \in I}$ es un colímite de productos directos finitos de grupos de $\{G_i\}_{i \in I}$, es decir, $P = \varinjlim_{J \in \mathcal{D}} \prod_{j \in J} G_j$ donde $\mathcal{D} = \{J \subset I | J \text{ es finito}\}$. Como G_i es A-celular para cada $i \in I$, por (1), $\prod_{j \in J} G_j$ es A-celular para cada $J \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, por la proposición 2.4, P es A-celular.

(3) Como A_i es un grupo A-celular para cada $i \in I$ y $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es el producto directo restringido de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$, por (2), $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es A-celular.

O bien, como A_i es un grupo A-celular para cada $i \in I$ y $\varinjlim_I A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i$, por la proposición 2.4, $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es A-celular.

(4) (i) Sean V_+ el grupo abeliano subyacente de V y K_+ el grupo abeliano subyacente de K. Como V_+ es un producto directo restringido de copias de K_+ y K_+ es K_+-celular, por (2), V_+ es K_+-celular.

(ii) Sean V un K-espacio vectorial, V_+ su grupo abeliano subyacente y K_+ el grupo abeliano subyacente de K. Como V_+ es un producto directo restringido de copias de K_+ y K_+ es A-celular, por (2), V_+ es A-celular. $\square$

Proposición 2.20 *Sean G un grupo y A un grupo perfecto. Si G es un grupo A-celular, entonces también es un grupo perfecto.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo A-celular y sea $e : 1 \to Ab(G)$ el homomorfismo definido por $e(1) = \Gamma_2(G)$.

Veamos que el único homomorfismo que hay de A a $Ab(G)$ es el trivial.

Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, Ab(G))$. Como $\varphi(A) \leq Ab(G)$, $\varphi([A, A]) = [\varphi(A), \varphi(A)] \leq [Ab(G), Ab(G)] = \Gamma_2(G)$ por lo que $\varphi = 0$. Por lo tanto, el único homomorfismo que hay de A a $Ab(G)$ es el trivial.

Como el único homomorfismo que hay de A a 1 es el trivial, e es una A-equivalencia y, por consiguiente, e también es una G-equivalencia (pues G es A-celular). Por la proposición 2.15, sabemos que $Ab(G)$ es un grupo G-celular, lo cual implica que e es una $Ab(G)$-equivalencia. Luego, $1_{Ab(G)} \in \mathrm{Hom}(Ab(G), Ab(G))$ es igual a $e \circ 0 = 0$, por lo que $\Gamma_2(G) = 0(Ab(G)) = 1_{Ab(G)}(Ab(G)) = Ab(G) = G/\Gamma_2(G)$. Por lo tanto, G es perfecto. □

Corolario 2.21 *Para todo grupo A, un producto directo infinito de A consigo mismo puede no ser A-celular.*

Demostración. Sea A un grupo perfecto tal que el número de conmutadores que se requieren para escribir un elemento de A como un producto de conmutadores no está acotado (ver [6] o [22] para la existencia de tal A). Luego, la potencia directa infinita de A no es un grupo perfecto por lo que, por la proposición anterior, concluimos que la potencia directa infinita de A no es un grupo A-celular. □

Capítulo 3

Construcción de la cubierta A-celular

En este capítulo estudiaremos los grupos y los homomorfismos de grupos desde la perspectiva de un grupo arbitrario A, esto quiere decir que todo lo aquí mostrado es válido para cualquier grupo A. El lector puede consultar el artículo [4].

Motivados por los conceptos de celularidad establecidos en espacios topológicos, consideraremos conceptos similares en la categoría de grupos. En paralelo con la noción de un complejo CW (el cual es un espacio topológico construido a partir de bolas, es decir, las células básicas son bolas) consideraremos grupos en los cuales las células básicas serán A y sus imágenes homomórficas, llamaremos a tales grupos A-celulares (de forma más precisa, un grupo G es A-celular si es construido a partir de A, es decir, construido a partir de copias de A, usando el colímite como herramienta básica).

Como ocurre con los espacios topológicos, una vez que tenemos la noción de un grupo construido a partir de copias de A, una pregunta natural es si todo grupo puede ser construido de esta manera, es decir, si todo grupo es A-celular y si no es así, establecer una medida razonable que nos permita saber que tan lejos está un grupo de ser A-celular. Esto nos conduce al concepto de cubierta A-celular de un grupo G, la cual está conformada por el único grupo A-celular más cercano (en cierto sentido) a G.

El motivo de trabajar con cubiertas A-celulares es claro (como en el caso de las aproximaciones de espacios topológicos): Aproximándonos a un grupo complicado G por medio de un grupo sencillo A, podemos dar información útil sobre G (a pesar de perder otro tipo de información). Además, trabajar con cubiertas A-celulares en la categoría de grupos, puede aclarar y dar intuición sobre el mismo concepto en la teoría homotópica.

3.1 A-propiedades de grupos

En esta sección hablamos, como introducción, de algunas de las propiedades básicas que poseen los grupos A-celulares, A-generados, A-construibles y A-nulos para lo cual también mencionaremos propiedades de las A-equivalencias y de las A-inyecciones.

Definiciones 3.1 *Sean X, Y dos grupos y $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$.*

(1) *f es una A-equivalencia si la función*

$$\mathrm{Hom}(A,f) : \mathrm{Hom}(A,X) \to \mathrm{Hom}(A,Y)$$

tal que $\psi \mapsto f \circ \psi$ es biyectiva.

(2) *f es una A-inyección si la función*

$$\mathrm{Hom}(A,f) : \mathrm{Hom}(A,X) \to \mathrm{Hom}(A,Y)$$

es inyectiva.

(3) *f es una A-suprayección si la función*

$$\mathrm{Hom}(A,f) : \mathrm{Hom}(A,X) \to \mathrm{Hom}(A,Y)$$

es suprayectiva.

(4) *f es A-trivial si la imagen de la función*

$$\mathrm{Hom}(A,f) : \mathrm{Hom}(A,X) \to \mathrm{Hom}(A,Y)$$

consiste únicamente del homomorfismo trivial.

A estas A-nociones para homomorfismos les siguen las siguientes A-nociones para grupos:

Definiciones 3.2 (1) *Un grupo G es A-celular si toda A-equivalencia es una G-equivalencia.*

(2) *Un grupo G es A-generado si todo homomorfismo A-trivial es G-trivial.*

(3) *Un grupo G es A-nulo si* $\mathrm{Hom}(A,G) = 0$.

(4) *Un grupo G es A-construible si todo grupo A-nulo es G-nulo.*

La razón por la cual llamamos a un grupo G A-generado es que, como veremos más adelante, dicho grupo es igual al subgrupo de G generado por las imágenes de todos los homomorfismos que van de A a G, es decir, por las imágenes homomorficas de A en G.

El motivo por el cual llamamos a un grupo G A-construible, es que dicho grupo resultará ser construible a partir de A y de sus imágenes homomórficas.

Como consecuencia de las definiciones anteriores tenemos las siguientes

Observaciones 3.3 *Sean G, H y K tres grupos.*

(1) *Si K es H-celular y H es G-celular, entonces K es G-celular.*

(2) *Si K es H-generado y H es G-generado, entonces K es G-generado.*

(3) *Si K es H-construible y H es G-construible, entonces K es G-construible.*

Proposición 3.4 *Sean G y H dos grupos.*
(1) *Si G es A-celular y $H \cong G$, entonces H es A-celular.*
(2) *Si G es A-generado y $H \cong G$, entonces H es A-generado.*
(3) *Si G es A-construible y $H \cong G$, entonces H es A-construible.*

Demostración. (1) Supongamos que G es A-celular y sean $\theta : G \to H$ un isomorfismo, $f : X \to Y$ una A-equivalencia y $\varphi \in \mathrm{Hom}(H, Y)$. Entonces, f es una G-equivalencia y como $\varphi \circ \theta \in \mathrm{Hom}(G, Y)$, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(G, X)$ tal que $\varphi \circ \theta = f \circ \psi$. Luego, $\psi \circ \theta^{-1} \in \mathrm{Hom}(H, X)$ satisface que $\varphi = f \circ (\psi \circ \theta^{-1})$.

Ahora, sea $\alpha \in \mathrm{Hom}(H, X)$ tal que $\varphi = f \circ \alpha$. Entonces, $\varphi \circ \theta = f \circ \alpha \circ \theta$ y, por la unicidad de ψ, $\alpha \circ \theta = \psi$ por lo que $\alpha = \psi \circ \theta^{-1}$.

Por lo tanto, f es una H-equivalencia y H es A-celular.

(2) Supongamos que G es A-generado y sean $\theta : G \to H$ un isomorfismo, $f : X \to Y$ un homomorfismo A-trivial y $\varphi \in \mathrm{Hom}(H, X)$. Luego, f es G-trivial y como $\varphi \circ \theta \in \mathrm{Hom}(G, X)$, $f \circ \varphi \circ \theta = 0 = f \circ 0 \circ \theta$ por lo que $f \circ \varphi = f \circ 0 = 0$. Por lo tanto, f es H-trivial y H es A-generado.

(3) Supongamos que G es A-construible y sean $\theta : G \to H$ un isomorfismo, K un grupo A-nulo y $\varphi \in \mathrm{Hom}(H, K)$. Entonces, K es un grupo G-nulo y como $\varphi \circ \theta \in \mathrm{Hom}(G, K)$, $\varphi \circ \theta = 0$ por lo que $\varphi = \varphi \circ 1_H = \varphi \circ \theta \circ \theta^{-1} = 0 \circ \theta^{-1} = 0$. Por lo tanto, K es H-nulo y H es A-construible. $\square$

Proposición 3.5 *Sean X, Y dos grupos y $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$.*
(1) *Si f es un monomorfismo entonces f es una A-inyección.*
(2) *Si f es un isomorfismo entonces f es una A-equivalencia.*

Demostración. (1) Supongamos que f es un monomorfismo y sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tales que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Como f es un monomorfismo, $\varphi_1 = \varphi_2$. Por lo tanto, f es una A-inyección.

(2) Supongamos que f es un isomorfismo. Como f es un monomorfismo, por (1), f es una A-inyección.

Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, Y)$. Luego, $\psi = f^{-1} \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ satisface que $f \circ \psi = \varphi$. Por lo tanto, f es una A-suprayección.

Por lo tanto, f es una A-equivalencia. $\square$

Proposición 3.6 *Sean X, Y dos grupos y $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Entonces f es una $\mathbb{Z}$-equivalencia si y sólo si f es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f es una $\mathbb{Z}$-equivalencia.

Veamos que f es un isomorfismo.

Sea $y \in Y$. Definimos un homomorfismo $\varphi_y : \mathbb{Z} \to Y$ tal que $\varphi_y(n) = y^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como f es una $\mathbb{Z}$-equivalencia, existe un único homomorfismo $\hat{\varphi}_y : \mathbb{Z} \to X$ tal que $\varphi_y = f \circ \hat{\varphi}_y$ para todo $y \in Y$. Definimos $g : Y \to X$ tal que $g(y) = \hat{\varphi}_y(1)$. Luego $f \circ g(y) = f \circ \hat{\varphi}_y(1) = \varphi_y(1) = y = 1_Y(y)$ para todo $y \in Y$, lo cual implica que $f \circ g = 1_Y$.

Sea $x \in X$. Definimos un homomorfismo $\psi_x : \mathbb{Z} \to X$ tal que $\psi_x(n) = x^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f \circ \psi_x(n) = f(x^n) = f(x)^n = \varphi_{f(x)}(n) = f \circ \hat{\varphi}_{f(x)}(n)$

para cada $n \in \mathbb{Z}$, por lo que $f \circ \psi_x = \varphi_{f(x)} = f \circ \hat{\varphi}_{f(x)}$ y por la unicidad de $\hat{\varphi}_{f(x)}$, $\psi_x = \hat{\varphi}_{f(x)}$ para todo $x \in X$. Luego $g \circ f(x) = g(f(x)) = \hat{\varphi}_{f(x)}(1) = \psi_x(1) = x = 1_X(x)$ para todo $x \in X$, lo cual implica que $g \circ f = 1_X$.

Por lo tanto, f es un isomorfismo.

Ahora, supongamos que f es un isomorfismo. Entonces, por la proposición anterior, f es una $\mathbb{Z}$-equivalencia. □

Corolario 3.7 *Todo grupo es $\mathbb{Z}$-celular.*

Demostración. Sean G un grupo y $f : X \to Y$ una $\mathbb{Z}$-equivalencia. Entonces, por la proposición anterior, f es un isomorfismo por lo que, por la proposición 3.5(2), f es una G-equivalencia. Por lo tanto, G es un grupo $\mathbb{Z}$-celular. □

Observamos que, por la proposición 3.18, todo grupo es $\mathbb{Z}$-generado y $\mathbb{Z}$-construible.

Proposición 3.8 *Sean X, Y y Z tres grupos, $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ y $g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$.*

(1) *Si $g \circ f \in \mathrm{Hom}(X,Z)$ es A-inyectivo, entonces f también es A-inyectivo.*

(2) *Si $g \circ f \in \mathrm{Hom}(X,Z)$ es A-suprayectivo, entonces g también es A-suprayectivo.*

Demostración. (1) Supongamos que $g \circ f \in \mathrm{Hom}(X,Z)$ es A-inyectivo. Luego $\mathrm{Hom}(A, g \circ f) = \mathrm{Hom}(A,g) \circ \mathrm{Hom}(A,f)$ es inyectiva, por lo que $\mathrm{Hom}(A,f)$ es inyectiva. Por lo tanto f es A-inyectivo.

(2) Supongamos que $g \circ f$ es A-suprayectivo. Entonces $\mathrm{Hom}(A, g \circ f) = \mathrm{Hom}(A,g) \circ \mathrm{Hom}(A,f)$ es suprayectiva, lo cual implica que $\mathrm{Hom}(A,g)$ es suprayectiva. Por lo tanto g es A-suprayectivo. □

Corolario 3.9 *Sean X, Y dos grupos y $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$.*

(1) *Si f es una A-inyección entonces su correstricción $f' : X \to f(X)$ también es una A-inyección.*

(2) *Si f es una A-suprayección entonces la inclusión $j : f(X) \hookrightarrow Y$ es una A-equivalencia.*

Demostración. (1) Supongamos que f es una A-inyección. Como $f = j \circ f'$, por la proposición anterior, f' es una A-inyección.

(2) Supongamos que f es una A-suprayección. Como $f = j \circ f'$, por la proposición anterior, j es una A-suprayección. Además, j es una A-inyección (pues es un monomorfismo). Por lo tanto, j es una A-equivalencia. □

Proposición 3.10 *Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Si G es A-nulo entonces H es A-nulo.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,H)$. Como G es A-nulo e $i \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(A,G)$ (donde $i : H \hookrightarrow G$ es la inclusión), $i \circ \varphi = 0$. Luego, $i \circ \varphi = i \circ 0$ y como i es un monomorfismo, $\varphi = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}(A,H) = 0$ y H es A-nulo. □

Proposición 3.11 *Sea G un grupo.*

(1) *G es A-nulo si, y sólo si $e : 1 \to G$ es una A-equivalencia.*

(2) *G es A-nulo si, y sólo si $1_G : G \to G$ es un homomorfismo A-trivial.*

(3) *$e : 1 \to G$ es una A-equivalencia si, y sólo si $1_G : G \to G$ es un homomorfismo A-trivial.*

Demostración. (1) Supongamos que G es A-nulo. Entonces, $\mathrm{Hom}(A, G) = 0$ y como $\mathrm{Hom}(A, 1) = 0$, $\mathrm{Hom}(A, e) : \mathrm{Hom}(A, 1) \to \mathrm{Hom}(A, G)$ es una biyección. Por lo tanto, e es una A-equivalencia.

Supongamos que $e : 1 \to G$ es una A-equivalencia y sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$. Luego, existe un único $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}(A, 1)$ tal que $\varphi = e \circ \hat{\varphi}$ y como $\mathrm{Hom}(A, 1) = 0$, $\hat{\varphi} = 0$ de donde $\varphi = e \circ 0 = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}(A, G) = 0$ y G es A-nulo.

(2) Supongamos que G es A-nulo y sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$. Como $\mathrm{Hom}(A, G) = 0$, $\varphi = 0$ por lo que $\mathrm{Hom}(A, 1_G)(\varphi) = 1_G \circ \varphi = 1_G \circ 0 = 0$. Por lo tanto, 1_G es un homomorfismo A-trivial.

Ahora, supongamos que $1_G : G \to G$ es A-trivial. Entonces, $h = 1_G \circ h = \mathrm{Hom}(A, 1_G)(h) = 0$ para todo $h \in \mathrm{Hom}(A, G)$. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}(A, G) = 0$ y G es A-nulo.

(3) Es consecuencia de (1) y (2). □

Proposición 3.12 *Sólo el grupo trivial puede ser A-nulo y A-celular.*

Demostración. Ya sabemos que 1 es A-nulo y A-celular. Ahora, sea G un grupo A-nulo y A-celular. Como G es A-nulo, por la proposición anterior, $e : 1 \to G$ es una A-equivalencia por lo que también es una G-equivalencia, pues G es A-celular. Luego, por la proposición anterior, G es G-nulo y se sigue que $1_G = 0$. Por lo tanto, $G = 1_G(G) = 0(G) = 1$. □

Corolario 3.13 *Si $\mathbb{Z}$ es un grupo A-celular entonces no es A-nulo.*

Observación 3.14 *Es falso que para cualesquiera dos grupos G y A, si G es A-celular entonces A es G-celular.*

Un ejemplo que nos ayuda a comprobar nuestra observación es la siguiente

Proposición 3.15 *El grupo $\mathbb{Z}_2$ es $\mathbb{Z}$-celular, pero $\mathbb{Z}$ no es $\mathbb{Z}_2$-celular.*

Demostración. Sabemos, por el corolario 3.7, que $\mathbb{Z}_2$ es $\mathbb{Z}$-celular. Sin embargo, $\mathbb{Z}$ no es un grupo $\mathbb{Z}_2$-celular pues $\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}_2$-nulo:

Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$. Entonces, $\varphi([0]) = 0$ y $\varphi([1]) + \varphi([1]) = \varphi([1] + [1]) = \varphi([0]) = 0$, por lo que $\varphi([1]) = -\varphi([1])$ y $\varphi([1]) = 0$. Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}_2$-nulo. □

Una forma más clara de escribir la demostración de la proposición 2.20 es la siguiente:

Proposición 3.16 *Sean G un grupo y A un grupo perfecto. Si G es un grupo A-celular, entonces G es un grupo perfecto.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo A-celular. Recordemos que, por la proposición 2.15, $Ab(G)$ es G-celular por lo que $Ab(G)$ también es un grupo A-celular. Además, como A es perfecto y $Ab(G)$ es abeliano tenemos que $Ab(G)$ es A-nulo. Luego, por la proposición 3.12, $Ab(G)$ es trivial y por lo tanto, G es perfecto. □

Lema 3.17 *Sean X, Y dos grupos y $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$.*

(1) *Si f es un monomorfismo, entonces f es una A-equivalencia si y sólo si $\varphi(A) \leq f(X)$, para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, Y)$.*

(2) *f es A-trivial si y sólo si $\varphi(A) \leq \ker f$, para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, X)$.*

(3) *f es A-trivial si y sólo si la inclusión $i : \ker f \hookrightarrow X$ es una A-equivalencia.*

(4) *$i : \ker f \hookrightarrow X$ es una A-equivalencia si y sólo si $\varphi(A) \leq \ker f$, para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, X)$.*

Demostración. (1) Supongamos que f es un monomorfismo.

Supongamos que f es una A-equivalencia y sea $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, Y)$. Luego, existe un único $\hat{\varphi} \in \operatorname{Hom}(A, X)$ tal que $\varphi = f \circ \hat{\varphi}$, por lo que $\varphi(A) = f \circ \hat{\varphi}(A) = f(\hat{\varphi}(A)) \leq f(X)$. Por lo tanto, $\varphi(A) \leq f(X)$ para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, Y)$.

Supongamos que $\varphi(A) \leq f(X)$, para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, Y)$ y sea $\alpha \in \operatorname{Hom}(A, Y)$. Entonces, $\alpha(A) \leq f(X)$ y $f^{-1}(\alpha(A)) \leq X$. Definimos un homomorfismo $\hat{\alpha} : A \to X$ tal que $\hat{\alpha}(a) = x$, donde x es el único elemento de $f^{-1}(\alpha(a))$. Luego $f \circ \hat{\alpha}(a) = f(x) = \alpha(a)$ para toda $a \in A$, por lo que $f \circ \hat{\alpha} = \alpha$ y f es una A-suprayección. Además, f es una A-inyección (pues f es un monomorfismo). Por lo tanto, f es una A-equivalencia.

(2) Supongamos que f es A-trivial y sea $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, X)$. Entonces, $f \circ \varphi = 0$ por lo que $f(\varphi(A)) = 0(A) = 1$ y $\varphi(A) \leq \ker f$. Por lo tanto, $\varphi(A) \leq \ker f$ para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, X)$.

Ahora, supongamos que $\varphi(A) \leq \ker f$ para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, X)$. Luego, $f \circ \varphi(a) = 1 = 0(a)$ para todo $a \in A$ y todo $\psi \in \operatorname{Hom}(A, X)$ lo cual implica que $f \circ \psi = 0$ para cada $\psi \in \operatorname{Hom}(A, X)$. Por lo tanto, f es A-trivial.

(3) Supongamos que f es A-trivial. Entonces, por (2), $\varphi(A) \leq \ker f = i(\ker f)$ para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, X)$. Por lo tanto, por (1), i es una A-equivalencia.

Supongamos que la inclusión $i : \ker f \hookrightarrow X$ es una A-equivalencia. Por (1), $\varphi(A) \leq i(\ker f) = \ker f$ para todo $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, X)$. Por lo tanto, por (2), $f : X \to Y$ es A-trivial.

(4) Es consecuencia de (2) y (3). □

Proposición 3.18 *Sea G un grupo.*

(1) *Si G es un grupo A-celular entonces es un grupo A-generado.*

(2) *Si G es un grupo A-generado entonces es un grupo A-construible.*

Demostración. (1) Supongamos que G es un grupo A-celular y sea $f : X \to Y$ un homomorfismo A-trivial. Por el lema 3.17(3), $i : \ker f \hookrightarrow X$ es una A-equivalencia y como G es A-celular, i también es una G-equivalencia. Luego, por el lema 3.17(3), f es un homomorfismo G-trivial. Por lo tanto, G es un grupo A-generado.

(2) Supongamos que G es un grupo A-generado y sea X un grupo A-nulo. Por la proposición 3.11(2), $1_X : X \to X$ es un homomorfismo A-trivial y como G es A-generado, 1_X también es G-trivial. Entonces, por la proposición 3.11(2), X es G-nulo. Por lo tanto, G es A-construible. □

Proposición 3.19 *Sean X y Y dos grupos. Si $f : X \to Y$ es una A-equivalencia entonces también lo es su restricción $f_1 : f^{-1}(Z) \to Z$, para todo subgrupo $Z \leq Y$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, Z)$. Como $i \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(A, Y)$ (donde $i : Z \hookrightarrow Y$ es la inclusión) y f es una A-equivalencia, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $i \circ \varphi = f \circ \psi$. Luego, $f(\psi(A)) = i \circ \varphi(A) = \varphi(A) \leq Z$ por lo que $\psi(A) \leq f^{-1}(Z)$. Como la correstricción $\psi_1 : A \to f^{-1}(Z)$ cumple que $j \circ \psi_1 = \psi$ (donde $j : f^{-1}(Z) \hookrightarrow X$ es la inclusión) y $i \circ f_1 = f \circ j$, tenemos que $i \circ \varphi = f \circ \psi = f \circ j \circ \psi_1 = i \circ f_1 \circ \psi_1$ de donde $\varphi = f_1 \circ \psi_1$ (pues i es un monomorfismo).

Veamos que ψ_1 es el único homomorfismo que satisface la última condición:

Sea $\theta \in \mathrm{Hom}(A, f^{-1}(Z))$ tal que $f_1 \circ \theta = \varphi$. Entonces, tenemos que $i \circ \varphi = i \circ f_1 \circ \theta = f \circ j \circ \theta$ y, por la unicidad de ψ, $j \circ \theta = \psi$. Como $j \circ \psi_1 = \psi = j \circ \theta$ y j es un monomorfismo, $\psi_1 = \theta$. □

3.2 El subgrupo A-generado de G

Ahora definiremos un grupo que, posteriormente, nos permitirá caracterizar a los grupos A-generados. Empezaremos por observar dos propiedades básicas de los grupos A-generados.

Proposición 3.20 (1) *Sean $\mathcal{D}$ una categoría y $F : \mathcal{D} \to Grp$ un funtor. Si FI es A-generado para cada $I \in \mathcal{D}$ y $\varinjlim_I FI$ existe, entonces $\varinjlim_I FI$ es A-generado. En particular, el producto libre (coproducto) de grupos A-generados es A-generado.*

(2) *Sean G un grupo y $H \trianglelefteq G$. Si G es A-generado, entonces G/H también es A-generado. Es decir, un cociente de un grupo A-generado es A-generado.*

(3) *Sean G un grupo y $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto de subgrupos A-generados de G tales que $G = \langle G_i \mid i \in I \rangle$, entonces G es A-generado.*

Demostración. (1) Supongamos que FI es A-generado para cada $I \in \mathcal{D}$. Sean $G := \varinjlim_I FI$, $(\sigma_I : FI \to G)_{I \in \mathcal{D}}$ el cocono colímite de F, $f : X \to Y$ un homomorfismo A-trivial y $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, X)$. Luego, f es FI-trivial para todo $I \in \mathcal{D}$ (pues FI es A-generado para cada $I \in \mathcal{D}$) y como $\varphi \circ \sigma_I \in \mathrm{Hom}(FI, X)$, $f \circ \varphi \circ \sigma_I = \mathrm{Hom}(FI, f)(\varphi \circ \sigma_I) = 0$ para todo $I \in \mathcal{D}$. Pero, $f \circ \varphi \circ \sigma_I = f \circ \varphi \circ \sigma_J \circ Fg$ para cada $g : I \to J \in \mathcal{D}$ (pues $\sigma_I = \sigma_J \circ Fg$ para todo $g : I \to J \in \mathcal{D}$) y como $G = \varinjlim_I FI$, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(G, Y)$ tal que

$\psi \circ \sigma_I = f \circ \varphi \circ \sigma_I$ para cada $I \in \mathcal{D}$. Observamos que $f \circ \varphi$ y 0 satisfacen la condición anterior por lo que, por la unicidad de ψ, $\mathrm{Hom}(FI, f)(\varphi) = f \circ \varphi = 0$. Por lo tanto, f es G-trivial y G es A-generado.

(2) Supongamos que G es un grupo A-generado y sean $f : X \to Y$ un homomorfismo A-trivial y $\psi \in \mathrm{Hom}(G/H, X)$. Entonces, f también es G-trivial de donde, por el lema 3.17(2), $\varphi(G) \leq \ker f$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, X)$. Como $\psi \circ \pi \in \mathrm{Hom}(G, X)$ (donde $p : G \to G/H$ es el homomorfismo cociente), tenemos que $\psi(G/H) = \psi \circ \pi(G) \leq \ker f$. Por lo tanto, por el lema 3.17(2), f es G/H-trivial y G/H es A-generado.

(3) Sean $f : X \to Y$ un homomorfismo A-trivial y $\psi \in \mathrm{Hom}(G, X)$. Luego, f es G_i-trivial para todo $i \in I$, por lo que $\varphi(G_i) \leq \ker f$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_i, X)$. Como $\psi \circ k_i \in \mathrm{Hom}(G_i, X)$ para cada $i \in I$ (donde $k_i : G_i \hookrightarrow G$ es la i-ésima inclusión), $\psi(G_i) = \psi \circ k_i(G_i) \leq \ker f$ para todo $i \in I$ por lo que $\psi(G) \leq \ker f$. Por lo tanto, por el lema 3.17(2), f es G-trivial y G es A-generado.

Otra forma:

Sabemos, por (1), que $\star_{i\in I} G_i$ es A-generado. Para ver que G es A-generado, por (2), basta hallar un epimorfismo $\pi : \star_{i\in I} G_i \to G$. Definiremos π a través de la propiedad universal de $\star_{i\in I} G_i$.

Sea $\{k_i : G_i \to G\}_{i\in I}$ la familia de las inclusiones. Entonces, por la propiedad universal de $\star_{i\in I} G_i$, existe un único homomorfismo $\pi : \star_{i\in I} G_i \to G$ tal que $k_i = \pi \circ j_i$ para todo $i \in I$ (donde $j_i : G_i \to \star_{i\in I} G_i$ es el i-ésimo encaje). Como todo $g \in \star_{i\in I} G_i$ no trivial tiene una factorización única de la forma $g = g_1 \cdots g_n$ (donde $g_l \in G_{i_l}, g_l \neq 1$ e $i_l \neq i_{l+1}$), el homomorfismo $\psi : \star_{i\in I} G_i \to G$ tal que $\psi(g) = \psi(g_1 g_2 \cdots g_n) = k_1(g_1) k_2(g_2) \cdots k_n(g_n)$ satisface que $k_i = \psi \circ j_i$ para cada $i \in I$. Por la unicidad de π, $\psi = \pi$.

Por último, veamos que π es suprayectivo:

Sea $g \in G = \langle G_i \mid i \in I \rangle$. Luego, $g = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \cdots g_s^{\alpha_s}$ con $g_s \in \bigcup_{i\in I} G_i$. Como $Im(\pi) \leq G$, para ver que $g \in Im(\pi)$ basta demostrar que $g_1, g_2, \ldots, g_s \in Im(\pi)$.

Como $g_1 \in G_r$, $g_1 = k_r(g_1) = \pi \circ j_r(g_1) = \pi(g_1)$, $g_1 \in Im(\pi)$. Análogamente, $g_2, \ldots, g_s \in Im(\pi)$. □

Definición 3.21 *Definimos* $gen_A G := \langle \varphi A \mid \varphi \in \mathrm{Hom}(A, G) \rangle$.

Dos características del grupo definido son las siguientes:

Lema 3.22 *Para todo grupo G, $gen_A G$ es un subgrupo A-generado de G.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$. Por el primer teorema de isomorfismo, $\varphi A \cong A/\ker\varphi$ y como A es un grupo A-generado, por la proposición 3.20(2), φA es un grupo A-generado. Por lo tanto, φA es un grupo A-generado para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$ y, por la proposición 3.20(3), $gen_A G$ es un grupo A-generado.

Otra forma:

Ahora, buscamos definir un epimorfismo $\psi : \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)} A_\varphi \to gen_A G$ (donde A_φ es una copia de A para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$). Primero observamos que para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$, existe un epimorfismo $\theta_\varphi : A_\varphi \to \varphi A$ tal que $\theta_\varphi(a) =$

$\varphi(a)$ para todo $a \in A_\varphi$, por lo que tenemos un epimorfismo $\theta : \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)} A_\varphi \to \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)}\varphi A$ tal que $\theta(a_1 a_2 \cdots a_n) = \varphi_1(a_1)\varphi_2(a_2)\cdots\varphi_n(a_n)$ (donde $a_n \in A_{\varphi_n}$, $a_n \neq 1$ e $\varphi_k \neq \varphi_{k+1}$).

Ahora, definiremos un homomorfismo $\eta : \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)}\varphi A \to gen_A G$ a través de la propiedad universal de $\star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)}\varphi A$:

Sea $\{f_\varphi : \varphi A \to gen_A G\}_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)}$ la familia de las inclusiones. Luego, por la propiedad universal de $\star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)}\varphi A$, existe un único homomorfismo $\eta : \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)}\varphi A \to gen_A G$ tal que $f_\varphi = \eta \circ j_\varphi$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,G)$ (donde $j_\varphi : \varphi A \to \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)}\varphi A$ es el φ-ésimo encaje).

Como $\epsilon : \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)}\varphi A \to gen_A G$ tal que $\epsilon(\varphi_1(a_1)\varphi_2(a_2)\cdots\varphi_n(a_n)) = f_{\varphi_1}(\varphi_1(a_1))f_{\varphi_2}(\varphi_2(a_2))\cdots f_{\varphi_n}(\varphi_n(a_n))$ satisface que $f_\varphi = \epsilon \circ j_\varphi$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,G)$, por la unicidad de η, $\epsilon = \eta$.

Veamos que η es suprayectivo:

Sea $z \in gen_A G = \langle \varphi A \mid \varphi \in \mathrm{Hom}(A,G)\rangle$. Entonces, $z = b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \cdots b_n^{\beta_n}$ con $b_n \in \bigcup_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)} \varphi A$ y $\beta_n = +1, -1$. Como $Im(\eta) \leq gen_A G$, para ver que $z \in Im(\eta)$ basta ver que $b_1, b_2, \ldots, b_n \in Im(\eta)$.

Como $b_i \in \varphi_r A$, $b_1 = f_{\varphi_r}(b_1) = \eta \circ j_{\varphi_r}(b_1) = \eta(b_1) \in Im(\eta)$. Analógamente, $b_2, \ldots, b_n \in Im(\eta)$. Por lo tanto, $z \in Im(\psi)$.

Luego, $\psi := \eta \circ \theta : \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)} A_\varphi \to gen_A G$ es un epimorfismo por lo que $gen_A G \cong \star_{\varphi\in\mathrm{Hom}(A,G)} A_\varphi / \ker\psi$ es A-generado. □

Por el lema anterior, llamaremos a $gen_A G$ el subgrupo A-generado de G.

Proposición 3.23 *Para todo grupo G, $gen_A G \trianglelefteq G$.*

Demostración. Sea $g \in G$. Como $g^{-1}\varphi(A)g = i_g(\varphi(A)) = i_g \circ \varphi(A) \leq gen_A G$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,G)$, $g^{-1}(gen_A G)g \leq gen_A G$ para todo $g \in G$. Por lo tanto, $gen_A G \trianglelefteq G$. □

Ahora observamos que como consecuencia del lema 3.17 tenemos la siguiente

Proposición 3.24 *Sean X y Y dos grupos.*

(1) *Para todo monomorfismo $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, f es una A-equivalencia si y sólo si $gen_A Y \leq f(X)$.*

(2) *Para todo $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, f es A-trivial si y sólo si $gen_A X \leq \ker f$.*

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos el siguiente

Corolario 3.25 *Sea G un grupo.*

(1) *La inclusión $i : gen_A G \hookrightarrow G$ es una A-equivalencia.*

(2) *El homomorfismo cociente $p : G \to G/gen_A G$ es A-trivial.*

Demostración. (1) Como i es un monomorfismo y $gen_A G \leq gen_A G = i(gen_A G)$, por la proposición anterior, i es una A-equivalencia.

(2) Como $gen_A G \leq gen_A G = \ker p$, por la proposición anterior, p es A-trivial. □

La siguiente proposición nos permite caracterizar a los grupos A-generados y a $gen_A G$, para todo grupo G.

Proposición 3.26 (1) *Un grupo G es A-generado si y sólo si $G = gen_A G$.*

(2) *$gen_A G$ es el mínimo subgrupo normal N de G tal que el homomorfismo cociente $G \to G/N$ es A-trivial.*

(3) *$gen_A G$ contiene a cualquier subgrupo A-generado de G.*

Demostración. (1) Supongamos que G es un grupo A-generado. Luego, el homomorfismo cociente $p : G \to G/gen_A G$ es G-trivial (pues, por el corolario anterior, sabemos que p es A-trivial) y como $1_G \in \mathrm{Hom}(G, G)$, $p \circ 1_G = 0$ por lo que $gen_A G = 0(h) = p \circ 1_G(h) = p(h) = h gen_A G$. Entonces $h \in gen_A G$ para todo $h \in G$ y, por lo tanto, $G = gen_A G$.

Supongamos que $G = gen_A G$. Como $gen_A G$ es A-generado (lema 3.22), G es A-generado.

(2) Ya sabemos que el homomorfismo cociente $p : G \to G/gen_A G$ es A-trivial. Ahora, sea $M \trianglelefteq G$ tal que el homomorfismo cociente $\tau : G \to G/M$ es A-trivial. Luego, $gen_A G \leq \ker \tau = M$.

(3) Sea H un subgrupo A-generado de G. Entonces, $H = gen_A H \leq gen_A G$ pues todo homomorfismo que va de A a H también va de A a G. □

Proposición 3.27 *Sean X, Y y G tres grupos.*

(1) *Para todo $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $f(gen_A X)$ es un subgrupo A-generado de Y y $f(gen_A X) \subseteq gen_A Y$.*

(2) *Para todo $f \in End(G)$, $f(gen_A G) \subseteq gen_A G$.*

(3) *$gen_A G$ es un subgrupo característico de G.*

Demostración. (1) Sean $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ y $f_1 : gen_A X \to Y$ su restricción. Entonces, por el primer teorema de isomorfismo, $f(gen_A X) = f_1(gen_A X) \cong gen_A X/ \ker f_1$ y como $gen_A X$ es un grupo A-generado, por la proposición 3.20(2), $f(gen_A X)$ es un subgrupo A-generado de Y. Además, por la proposición anterior, $f(gen_A X) \subseteq gen_A Y$.

(2) Es consecuencia de (1).

(3) Se sigue de (2). □

Observamos que, si denotamos por A-*gen* a la subcategoría plena de *Grp* conformada por los grupos A-generados y por $gen_A f : gen_A X \to gen_A Y$ a la restricción de f, obtenemos un funtor $gen_A : Grp \to A\text{-}gen$ tal que la familia de inclusiones $(i_G : gen_A G \hookrightarrow G)_{G \in Grp}$ es una transformación natural de gen_A al funtor identidad 1_{Grp}.

Proposición 3.28 *El funtor $gen_A : Grp \to A\text{-}gen$ es adjunto derecho del funtor inclusión $j : A\text{-}gen \to Grp$.*

Demostración. Sean G un grupo A-generado, H un grupo y $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Por la proposición anterior, $\varphi(G) = \varphi(gen_A G) \subseteq gen_A H$ por lo que $gen_A \varphi \in \mathrm{Hom}(G, gen_A H)$ tal que $g \mapsto \varphi(g)$ satisface que $\varphi = i_H \circ gen_A \varphi$. Entonces i_H es una G-suprayección y como i_H es un monomorfismo, i_H también es una G-inyección. Por lo tanto i_H es una G-equivalencia y $gen_A \varphi : G \to gen_A H$ es el único homomorfismo en $\mathrm{Hom}(G, gen_A H)$ que satisface $\varphi = i_H \circ gen_A \varphi$.

Así tenemos que existe una transformación natural $i : j \circ gen_A \to 1_{Grp}$ tal que para cada $G \in A\text{-}gen$, $H \in Grp$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}(j(G), H)$, existe un único $gen_A\varphi \in \mathrm{Hom}(G, gen_A H)$ tal que $\varphi = i_H \circ j(gen_A\varphi)$. $\square$

Proposición 3.29 *Sean Y un grupo, $(\mathbb{Z}_n, +)$ y $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, Y)$. Entonces f es una $\mathbb{Z}_n$-equivalencia si y sólo si f es un monomorfismo y $gen_{\mathbb{Z}_n} Y \leq f(\mathbb{Z}_n)$.*

Demostración. Supongamos que f es una $\mathbb{Z}_n$-equivalencia.

Veamos que f es un monomorfismo.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}_n$ tales que $f(a) = f(b)$. Definimos los homomorfismos $\theta_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ tal que $x \mapsto x + a$ y $\theta_b : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ tal que $x \mapsto x + b$. Luego $f \circ \theta_a(x) = f(x + a) = f(x)f(a) = f(x)f(b) = f(x + b) = f \circ \theta_b(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}_n$, por lo que $f \circ \theta_a = f \circ \theta_b$ y como f es una $\mathbb{Z}_n$-inyección, $\theta_a = \theta_b$ lo cual implica que $a = 0 + a = \theta_a(0) = \theta_b(0) = 0 + b = b$. Por lo tanto, f es un monomorfismo.

Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, Y)$. Entonces, como f es una $\mathbb{Z}_n$-equivalencia, existe un único $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n)$ tal que $\varphi = f \circ \hat{\varphi}$, por lo que $\varphi(\mathbb{Z}_n) = f \circ \hat{\varphi}(\mathbb{Z}_n) \leq f(\mathbb{Z}_n)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, Y)$. Por lo tanto $gen_{\mathbb{Z}_n} Y \leq f(\mathbb{Z}_n)$.

Ahora, supongamos que f es un monomorfismo y que $gen_{\mathbb{Z}_n} Y \leq f(\mathbb{Z}_n)$. Por lo tanto, por la proposición 3.24(1), f es una $\mathbb{Z}_n$-equivalencia. $\square$

Proposición 3.30 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *$f : X \to Y$ es una A-equivalencia.*

(2) *La restricción $f_1 : gen_A X \to Y$ de f es una A-equivalencia.*

(3) *$gen_A f : gen_A X \to gen_A Y$ es una A-equivalencia.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que f es una A-equivalencia. Como $i : gen_A X \hookrightarrow X$ es una A-equivalencia, $f_1 = f \circ i$ es una A-equivalencia.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que f_1 es una A-equivalencia y sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, Y)$. Entonces, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(A, gen_A X)$ tal que $\varphi = f_1 \circ \psi = f \circ i \circ \psi$. Por lo tanto, existe $i \circ \psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $\varphi = f \circ (i \circ \psi)$.

Sea $\theta \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $\varphi = f \circ \theta$. Como $\theta(A) \leq gen_A X$, $\theta = i \circ k \circ \theta'$ (donde $\theta' : A \to \theta(A)$ es la correstricción de θ y $k : \theta(A) \hookrightarrow gen_A X$ es la inclusión) por lo que $\varphi = f \circ \theta = f \circ i \circ k \circ \theta' = f_1 \circ k \circ \theta'$ y, por la unicidad de ψ, $k \circ \theta' = \psi$. Por lo tanto, $\theta = i \circ \psi$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $gen_A f$ es una A-equivalencia. Como la inclusión $j : gen_A Y \hookrightarrow Y$ es una A-equivalencia, $f_1 = j \circ gen_A f$ es una A-equivalencia.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que f_1 es una A-equivalencia.

Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, gen_A Y)$. Luego, $j \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(A, Y)$ por lo que existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(A, gen_A X)$ tal que $j \circ \varphi = f_1 \circ \psi = j \circ gen_A f \circ \psi$. Como j es un monomorfismo, $\varphi = gen_A f \circ \psi$

Sea $\theta \in \mathrm{Hom}(A, gen_A X)$ tal que $\varphi = gen_A f \circ \theta$. Entonces, tenemos que $j \circ \varphi = j \circ gen_A f \circ \theta = f_1 \circ \theta$. Por lo tanto, por la unicidad de ψ, $\theta = \psi$. $\square$

Observamos que la proposición anterior sigue siendo válida, si al enunciarla sustituimos el término A-equivalencia por A-inyección.

Proposición 3.31 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) $f : X \to Y$ *es una A-inyección.*
(2) *La restricción* $f_1 : gen_A X \to Y$ *de* f *es una A-inyección.*
(3) $gen_A f : gen_A X \to gen_A Y$ *es una A-inyección.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que f es una A-inyección. Como i es una A-inyección, $f_1 = f \circ i$ es una A-inyección.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que f_1 es una A-inyección. Como $f_1 = j \circ gen_A f$, $gen_A f$ es una A-inyección.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $gen_A f$ es una A-inyección y sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tales que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Como $\varphi_1 = i \circ k_1 \circ \varphi_1'$ y $\varphi_2 = i \circ k_2 \circ \varphi_2'$ (donde $\varphi_1' : A \to \varphi_1(A)$, $\varphi_2' : A \to \varphi_2(A)$ son las correstricciones y $k_1 : \varphi_1(A) \hookrightarrow gen_A X$, $k_2 : \varphi_2(A) \hookrightarrow gen_A X$ son las inclusiones), tenemos que $f_1 \circ k_1 \circ \varphi_1' = f \circ i \circ k_1 \circ \varphi_1' = f \circ i \circ k_2 \circ \varphi_2' = f_1 \circ k_2 \circ \varphi_2'$ y como f_1 es una A-inyección (pues j y $gen_A f$ son A-inyecciones), $k_1 \circ \varphi_1' = k_2 \circ \varphi_2'$ por lo que $\varphi_1 = \varphi_2$. Por lo tanto, f es una A-inyección. □

Proposición 3.32 *Sean* G *y* Y *dos grupos. Si* G *es A-generado entonces* $gen_G Y \leq gen_A Y$.

Demostración. Como el homomorfismo cociente $p : Y \to Y/gen_A Y$ es A-trivial y G es A-generado, p es G-trivial. Por lo tanto, por la proposición 3.26(2), $gen_G Y \leq gen_A Y$. □

Proposición 3.33 *Sean* G, X *y* Y *tres grupos, y* $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. *Entonces,*
(1) G *es A-generado si y sólo si toda A-equivalencia inyectiva es una G-equivalencia.*
(2) *Si* f *es A-suprayectivo entonces la inclusión* $j : f(X) \hookrightarrow Y$ *es una G-equivalencia, para todo grupo A-generado* G.
(3) *Si* f *es A-suprayectivo y* X *es A-generado, entonces la inclusión* $j : f(X) \hookrightarrow Y$ *es una* $f(X)$*-equivalencia.*

Demostración. (1) Supongamos que G es A-generado y sea $g : W \to Z$ una A-equivalencia inyectiva. Entonces, por la proposición anterior, $gen_G Z \leq gen_A Z$ y como g es una A-equivalencia inyectiva, por la proposición 3.24(1), $gen_G Z \leq gen_A Z \leq g(W)$. Por lo tanto, por la proposición 3.24(1), g es una G-equivalencia.

Ahora, supongamos que toda A-equivalencia inyectiva es una G-equivalencia. Luego, $i : gen_A G \hookrightarrow G$ es una G-equivalencia (pues i es una A-equivalencia inyectiva) y como $1_G \in \mathrm{Hom}(G, G)$, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(G, gen_A G)$ tal que $1_G = i \circ \psi$ por lo que $g = 1_G(g) = i \circ \psi(g) = \psi(g) \in gen_A G$, para todo $g \in G$. Por lo tanto, $gen_A G = G$ y G es A-generado.

(2) Supongamos que f es A-suprayectivo y sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, Y)$. Entonces existe un $\psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $\varphi = f \circ \psi = j \circ f' \circ \psi$ (donde $f' : X \to f(X)$ es la correstricción de f), lo cual implica que j es una A-suprayección. Además, como j es un monomorfismo, j es una A-inyección. Por lo tanto, j es una

A-equivalencia inyectiva y, por (1), j es una G-equivalencia para todo grupo A-generado G.

(3) Como X es A-generado y $f(X) \cong X/\ker f$, $f(X)$ es A-generado. Por (2), $j : f(X) \hookrightarrow Y$ es una $f(X)$-equivalencia. □

Corolario 3.34 *Sean X y Y dos grupos y $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Si f es A-supra-yectivo entonces la inclusión $j : f(X) \hookrightarrow Y$ es una G-equivalencia, para todo grupo A-celular G.*

3.3 El subgrupo A-construible de G

Primero veamos algunas propiedades de los grupos A-construibles.

Proposición 3.35 *Sean X un grupo y $N \trianglelefteq X$.*

(1) *Si G es N-nulo y X/N-nulo, entonces también es X-nulo.*

(2) *Si N y X/N son A-construibles, entonces X es A-construible.*

(3) *Si X es A-construible, entonces X/N es A-construible.*

(4) *Sean $\mathcal{D}$ una categoría y $F : \mathcal{D} \to Grp$ un funtor. Si FI es A-construible para cada $I \in \mathcal{D}$ y $\varinjlim_I FI$ existe, entonces $\varinjlim_I FI$ es A-construible. En particular, el producto libre (coproducto) de grupos A-construibles es A-construible.*

(5) *Sea $X = \langle X_i \mid i \in I\rangle$. Si X_i es A-construible para cada $i \in I$, entonces X es A-construible.*

Demostración. (1) Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(X,G)$. Como G es N-nulo y $\varphi \circ k \in \mathrm{Hom}(N,G)$ (donde $k : N \hookrightarrow X$ es la inclusión), $\varphi \circ k = 0$ por lo que $1 = 0(N) = \varphi \circ k(N) = \varphi(N)$. Entonces $N \leq \ker \varphi$ y, por el primer teorema de isomorfismo, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(X/N, G)$ tal que $\varphi = \psi \circ p$ (donde $p : X \to X/N$ es el homomorfismo cociente). Pero G es X/N-nulo, lo cual implica que $\psi = 0$ y $\varphi = 0 \circ p = 0$. Por lo tanto, G es X-nulo.

(2) Sea G un grupo A-nulo. Como N y X/N son A-construibles, G es N-nulo y X/N-nulo. Luego, por (1), G es X-nulo. Por lo tanto, X es A-construible.

(3) Sean G un grupo A-nulo y $\varphi \in \mathrm{Hom}(X/N, G)$. Como X es A-construible, G es X-nulo por lo que $\varphi \circ p = 0$ (donde $p : X \to X/N$ es el homomorfismo cociente). Entonces $1 = 0(x) = \varphi \circ p(x) = \varphi(xN)$, lo cual implica que $\varphi = 0$. Por lo tanto, G es X/N-nulo y X/N es A-construible.

(4) Sean $G := \varinjlim_I FI$, $(\sigma_I : FI \to G)_{I \in \mathcal{D}}$ el cocono colímite, X un grupo A-nulo y $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,X)$. Como FI es A-construible para cada $I \in \mathcal{D}$, X es un grupo FI-nulo para todo $I \in \mathcal{D}$ por lo que $\varphi \circ \sigma_I = 0$ para todo $I \in \mathcal{D}$.

Como $\varphi \circ \sigma_I = \varphi \circ \sigma_J \circ Fg$, para todo $g : I \to J \in \mathcal{D}$ y $G = \varinjlim_I FI$, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(G,X)$ tal que $\psi \circ \sigma_I = \varphi \circ \sigma_I$ para cada $I \in \mathcal{D}$. Pero, φ y 0 satisfacen la condición anterior de donde, por la unicidad de ψ, $\varphi = 0$. Por lo tanto, X es un grupo G-nulo y G es un grupo A-construible.

(5) Supongamos que X_i es A-construible, para cada $i \in I$ y sean G un grupo A-nulo y $\varphi \in \mathrm{Hom}(X,G)$. Entonces G es X_i-nulo para todo $i \in I$, lo cual

implica que $\varphi \circ j_i = 0 = 0 \circ j_i$ (donde $j_i : X_i \hookrightarrow X$ es la i-ésima inclusión) y como j_i es un monomorfismo, $\varphi = 0$. Por lo tanto, G es X-nulo. $\square$

A continuación definimos un grupo que nos ayudará a caracterizar a los grupos A-construibles.

Definición 3.36 *Sea G un grupo. Definimos una sucesión ascendente de subgrupos característicos (ver proposición 3.38) $\mathcal{A}_i(G)$ de G para todo ordinal i, como sigue:*
(a) $\mathcal{A}_0(G) = gen_A G$.
(b) Si $\beta = \alpha + 1$, $\mathcal{A}_\beta(G)$ es la preimagen en G de $gen_A(G/\mathcal{A}_\alpha(G))$, es decir, $\mathcal{A}_\beta(G) = p_\alpha^{-1}(gen_A(G/\mathcal{A}_\alpha(G)))$ (donde $p_\alpha : G \to G/\mathcal{A}_\alpha(G)$ es el homomorfismo cociente).
(c) Si β es un ordinal límite, $\mathcal{A}_\beta(G) := \bigcup_{i<\beta} \mathcal{A}_i(G)$.

Observamos que el proceso que utilizamos para definir a los $\mathcal{A}_\beta(G)$ eventualmente se estaciona pues:
(1) Tenemos una sucesión ascendente de subgrupos de G

$$\mathcal{A}_0(G) \leq \mathcal{A}_1(G) \leq \mathcal{A}_2(G) \leq \dots$$

(2) Sólo hay un conjunto de subgrupos de G.
(3) Si $\mathcal{A}_\alpha(G) = \mathcal{A}_{\alpha+1}(G)$ entonces $\mathcal{A}_\alpha(G) = \mathcal{A}_\gamma(G)$, para todo $\gamma > \alpha$.

Definición 3.37 *Definimos $con_A G := \bigcup_\beta \mathcal{A}_\beta(G)$.*

Proposición 3.38 *Para todo ordinal β, $\mathcal{A}_\beta(G)$ es un subgrupo característico de G.*

Demostración. Ya sabemos que $\mathcal{A}_0(G) = gen_A(G)$ es un subgrupo característico de G.

Ahora, supongamos que $\mathcal{A}_\alpha(G)$ es un subgrupo característico de G. Como $\mathcal{A}_\alpha(G) \leq \mathcal{A}_{\alpha+1}(G) \leq G$ y $\mathcal{A}_{\alpha+1}(G)/\mathcal{A}_\alpha(G) = gen_A(G/\mathcal{A}_\alpha(G))$ es un subgrupo característico de $G/\mathcal{A}_\alpha(G)$, concluimos que $\mathcal{A}_{\alpha+1}(G)$ es un subgrupo característico de G.

Sea β un ordinal límite y supongamos que $\mathcal{A}_\alpha(G)$ es un subgrupo característico de G, para todo $i < \beta$. Como $\mathcal{A}_\beta(G) = \bigcup_{i<\beta} \mathcal{A}_i(G)$, $f(\mathcal{A}_\beta(G)) = f(\bigcup_{i<\beta} \mathcal{A}_i(G)) = \bigcup_{i<\beta} f(\mathcal{A}_i(G)) \leq \bigcup_{i<\beta} \mathcal{A}_i(G) = \mathcal{A}_\beta(G)$ para todo $f \in Aut(G)$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_\beta(G)$ es un subgrupo característico de G. $\square$

Corolario 3.39 *Para todo ordinal β, $\mathcal{A}_\beta(G) \trianglelefteq G$.*

Demostración. Como todo subgrupo característico de G es un subgrupo normal de G y $\mathcal{A}_\beta(G)$ es un subgrupo característico de G para todo ordinal β, concluimos que $\mathcal{A}_\beta(G) \trianglelefteq G$ para todo ordinal β. $\square$

Proposición 3.40 *Para todo ordinal β, $\mathcal{A}_\beta(G)$ es A-construible.*

Demostración. Como $\mathcal{A}_0(G) = gen_A G$ es A-generado, por la proposición 3.18, $\mathcal{A}_0(G)$ es A-construible.

Supongamos que $\mathcal{A}_\alpha(G)$ es A-construible. Como $\mathcal{A}_{\alpha+1}(G)/\mathcal{A}_\alpha(G)$ es un grupo A-generado (pues $\mathcal{A}_{\alpha+1}(G)/\mathcal{A}_\alpha(G) = gen_A(G/\mathcal{A}_\alpha(G))$), por la proposición 3.18, también es A-construible. Por lo tanto, por la proposición 3.35(2), $\mathcal{A}_{\alpha+1}(G)$ es A-construible.

Sea β un ordinal límite y supongamos que para todo $i < \beta$, $\mathcal{A}_i(G)$ es A-construible. Como $\mathcal{A}_\beta(G) = \bigcup_{i<\beta} \mathcal{A}_i(G)$, por la proposición 3.35(5), $\mathcal{A}_\beta(G)$ es A-construible. □

Corolario 3.41 *El subgrupo $con_A G$ es A-construible.*

Demostración. Como $\mathcal{A}_\beta(G)$ es A-construible para todo ordinal β y $con_A G = \bigcup_\beta \mathcal{A}_\beta(G)$, por la proposición 3.35(5), $con_A G$ es A-construible. □

Lema 3.42 *Sean β un ordinal límite cuya cofinalidad es mayor que $|A|$, G un grupo, M_i un subgrupo normal de G para cada $i < \beta$ tal que para $i < j$ tenemos que $M_i \leq M_j$, $M := \bigcup_{i<\beta} M_i$ y $\eta \in \mathrm{Hom}(A, G/M)$. Entonces existen $\alpha := \alpha_\eta < \beta$ y $\mu := \mu_\eta \in \mathrm{Hom}(A, G/M_\alpha)$ tal que $\eta = \tau \circ \mu$, donde $\tau : G/M_\alpha \to G/M$ proviene de la inclusión $M_\alpha \leq M$.*

Demostración. Para cada $a \in A$ elegimos un representante $\mu_0(a) \in G$ de la clase lateral de $\eta(a)$, de manera que $\eta(a) = \mu_0(a)M$. Como para cualesquiera $a, b \in A$, $\eta(ab) = \eta(a)\eta(b)$ tenemos que $\mu_0(ab)M = [\mu_0(a)M][\mu_0(b)M] = \mu_0(a)\mu_0(b)M$ y, por consiguiente, que $\mu_0(b)^{-1}\mu_0(a)^{-1}\mu_0(ab) \in M$ para cualesquiera $a, b \in A$.

Definimos la función $f : A \times A \to M$ tal que $f(a, b) = \mu_0(b)^{-1}\mu_0(a)^{-1}\mu_0(ab)$ para cada $(a, b) \in A \times A$, es decir, $\mu_0(ab) = \mu_0(a)\mu_0(b)f(a, b)$ para cada $(a, b) \in A \times A$. Como $f(a, b) \in M = \bigcup_{i<\beta} M_i$ para todo $(a, b) \in A \times A$, existe $\alpha_{(a,b)} < \beta$ tal que $f(a, b) \in M_{\alpha_{(a,b)}}$ para todo $(a, b) \in A \times A$.

Sea $\alpha = \sup\{\alpha_{(a,b)} \mid (a, b) \in A \times A\}$. Luego, $|\{\alpha_{(a,b)} \mid (a, b) \in A \times A\}| \leq |A \times A| < cf(\beta)$ porque si A es finito, $|A \times A| < cf(\beta)$ y si A es infinito, $|A \times A| \leq |A| < cf(\beta)$ por hipótesis. Entonces, $\alpha < \beta$ y $f(a, b) \in M_\alpha$, para cada $(a, b) \in A \times A$.

Ahora, definamos una función $\mu : A \to G/M_\alpha$ tal que $\mu(a) = \mu_0(a)M_\alpha$.

Veamos que μ es un homomorfismo:

Sean $a, b \in A$. Luego, $\mu(a)\mu(b) = [\mu_0(a)M_\alpha][\mu_0(b)M_\alpha] = \mu_0(a)\mu_0(b)M_\alpha = \mu_0(a)\mu_0(b)f(a, b)M_\alpha = \mu_0(ab)M_\alpha = \mu(ab)$. Por lo tanto, $\mu(a)\mu(b) = \mu(ab)$ para cualesquiera $a, b \in A$.

Además, $[\mu_0(e)M_\alpha][\mu_0(e)M_\alpha] = \mu_0(e)\mu_0(e)M_\alpha = \mu_0(e)\mu_0(e)f(e, e)M_\alpha = \mu_0(ee)M_\alpha = \mu_0(e)M_\alpha$ por lo que $\mu(e) = \mu_0(e)M_\alpha = M_\alpha$.

Por lo tanto, μ es un homomorfismo.

Finalmente, como $\tau \circ \mu(a) = \tau(\mu_0(a)M_\alpha) = \mu_0(e)M = \eta(a)$ para todo $a \in A$, $\tau \circ \mu = \eta$. □

Proposición 3.43 *Sea β un ordinal límite cuya cofinalidad es mayor que $|A|$. Entonces, $G/\mathcal{A}_\beta(G)$ es A-nulo.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G/\mathcal{A}_\beta(G))$. Luego, por el lema anterior, existen $\alpha < \beta$ y $\mu \in \mathrm{Hom}(A, G/\mathcal{A}_\alpha(G))$ tales que $\varphi = \tau \circ \mu$, donde $\tau : G/\mathcal{A}_\alpha(G) \to G/\mathcal{A}_\beta(G)$ proviene de la inclusión $\mathcal{A}_\alpha(G) < \mathcal{A}_\beta(G)$. Como $\mathcal{A}_{\alpha+1}(G)$ es igual a $p_\alpha^{-1}(gen_A(G/\mathcal{A}_\alpha(G)))$ (donde $p_\alpha : G \to G/\mathcal{A}_\alpha(G)$ es el homomorfismo cociente), tenemos que $\mu(A) \leq gen_A(G/\mathcal{A}_\alpha(G)) = \mathcal{A}_{\alpha+1}(G)/\mathcal{A}_\alpha(G)$. Pero $\alpha + 1 < \beta$, pues $\alpha < \beta$ y β es un ordinal límite, por lo que $\mathcal{A}_{\alpha+1}(G) \leq \mathcal{A}_\beta(G)$ y, por consiguiente, $\mu(A) \leq \mathcal{A}_\beta(G)/\mathcal{A}_\alpha(G)$. Entonces, $\varphi(a) = \tau \circ \mu(a) = \tau(n_\beta \mathcal{A}_\alpha(G)) = n_\beta \mathcal{A}_\beta(G) = \mathcal{A}_\beta(G) = 0(a)$ para todo $a \in A$. Por lo tanto, $\varphi = 0$ y $G/\mathcal{A}_\beta(G)$ es A-nulo. □

Proposición 3.44 *Sea β un ordinal límite cuya cofinalidad es mayor que $|A|$. Entonces, $\mathcal{A}_\beta(G) = \mathcal{A}_\gamma(G)$ para todo $\gamma > \beta$.*

Demostración. Sabemos que si β es un ordinal límite cuya cofinalidad es mayor que $|A|$, $G/\mathcal{A}_\beta(G)$ es A-nulo. Como $\mathcal{A}_{\beta+1}(G) = p_\beta^{-1}[gen_A(G/\mathcal{A}_\beta(G))]$, tenemos que $\mathcal{A}_{\beta+1}(G)/\mathcal{A}_\beta(G) = gen_A(G/\mathcal{A}_\beta(G)) = 1$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_{\beta+1}(G) = \mathcal{A}_\beta(G)$.

Por lo tanto, $\mathcal{A}_\gamma(G) = \mathcal{A}_\beta(G)$ para todo $\gamma > \beta$. □

La siguiente proposición caracteriza a los grupos A-construibles y a $con_A G$.

Proposición 3.45 (1) *G es A-construible si y sólo si $G = con_A G$.*

(2) *$con_A G$ es el mínimo subgrupo normal N de G tal que G/N es A-nulo.*

(3) *$con_A G$ contiene a cualquier subgrupo A-construible de G.*

Demostración. (1) Supongamos que $G = con_A G$. Como $con_A G$ es A-construible, concluimos que G es A-construible.

Supongamos que G es A-construible y sea β un ordinal límite cuya cofinalidad es mayor que $|A|$. Sabemos, por la proposición 3.43, que $G/\mathcal{A}_\beta(G)$ es A-nulo y como G es A-construible, $G/\mathcal{A}_\beta(G)$ es G-nulo por lo que el homomorfismo cociente $\pi : G \to G/\mathcal{A}_\beta(G)$ es igual a 0. Luego, $\mathcal{A}_\beta(G) = 0(G) = \pi(G) = G/\mathcal{A}_\beta(G)$ y, por lo tanto, $G = \mathcal{A}_\beta(G)$.

Sólo nos resta ver que $con_A G = \mathcal{A}_\beta(G)$ lo cual es inmediato de la proposición anterior y la definición de $con_A G$.

(2) Ya vimos en (1) que $G/con_A G$ es A-nulo. Ahora, sea $K \trianglelefteq G$ tal que G/K es A-nulo. Como $con_A G$ es A-construible, G/K es $con_A G$-nulo por lo que $p \circ i = 0$ (donde $i : con_A G \hookrightarrow G$ es la inclusión y $p : G \to G/K$ es el homomorfismo cociente). Por lo tanto, $con_A G \leq K$.

(3) Sea H un subgrupo A-construible de G. Como $G/con_A G$ es A-nulo, $G/con_A G$ es H-nulo lo cual implica que $\pi \circ j = 0$ (donde $j : H \hookrightarrow G$ es la inclusión y $\pi : G \to G/con_A G$ es el homomorfismo cociente). Por lo tanto, $H \leq con_A G$. □

Proposición 3.46 *Para todo $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $f(con_A X)$ es un subgrupo A-construible de Y y $f(con_A X) \subseteq con_A Y$.*

Demostración. (1) Sean $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ y $f_1 : con_A X \to Y$ su restricción. Entonces, por el primer teorema de isomorfismo, $f(con_A X) = f_1(con_A X) \cong con_A X/\ker f_1$ y como $con_A X$ es un grupo A-construible, por la proposición 3.35(3), $f(con_A X)$ es un subgrupo A-construible de Y. Además, por la proposición anterior, $f(con_A X) \subseteq con_A Y$. □

De esta forma, si denotamos por *A-con* a la subcategoría plena de *Grp* conformada por los grupos A-construibles y por $con_A f : con_A X \to con_A Y$ a la restricción de f, obtenemos un funtor $con_A : Grp \to A\text{-}con$ tal que la familia de inclusiones $(i_G : con_A G \hookrightarrow G)_{G \in Grp}$ es una transformación natural entre con_A y el funtor identidad 1_{Grp}.

Proposición 3.47 *El funtor $con_A : Grp \to A\text{-}con$ es adjunto derecho del funtor inclusión $j : A\text{-}con \to Grp$.*

Demostración. Sean G un grupo A-construible, H un grupo y $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,H)$. Por la proposición anterior, $\varphi(G) = \varphi(con_A G) \subseteq con_A H$ por lo que $con_A\varphi \in \mathrm{Hom}(G, con_A H)$ tal que $g \mapsto \varphi(g)$ satisface que $\varphi = i_H \circ con_A\varphi$. Entonces i_H es una G-suprayección y como i_H es un monomorfismo, i_H también es una G-inyección. Por lo tanto i_H es una G-equivalencia y $con_A\varphi : G \to con_A H$ es el único homomorfismo en $\mathrm{Hom}(G, con_A H)$ tal que $\varphi = i_H \circ con_A\varphi$.

Así tenemos una transformación natural $i : j \circ con_A \to 1_{Grp}$ tal que para todo $G \in A\text{-}con$, $H \in Grp$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}(j(G),H)$ existe un único $con_A\varphi \in \mathrm{Hom}(G, con_A H)$ tal que $\varphi = i_H \circ j(con_A\varphi)$. □

3.4 A-inyección y A-equivalencia

Proposición 3.48 *Sean X, Y dos grupos y $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Entonces, f es una A-inyección si y sólo si $\ker f$ es A-nulo y $[gen_A X, \ker f] = 1$.*

Demostración. Supongamos que f es una A-inyección y sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \ker f)$. Como $j \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(A,X)$ (donde $j : \ker f \hookrightarrow X$ es la inclusión) y $f \circ j \circ \varphi = 0 = f \circ j \circ 0$ tenemos que $\varphi = 0$, pues $f \circ j$ es una A-inyección. Por lo tanto, $\ker f$ es A-nulo.

Ahora, sean $\psi \in \mathrm{Hom}(A,X)$ y $k \in \ker f$. Como $f \circ i_k \circ \psi(a) = f(k^{-1}\psi(a)k) = f(k)^{-1} f(\psi(a)) f(k) = f \circ \psi(a)$ para todo $a \in A$, $f \circ i_k \circ \psi = f \circ \psi$ por lo que $i_k \circ \psi = \psi$, pues f es una A-inyección. Por lo tanto, $[\psi A, \ker f] = 1$ para todo $\psi \in \mathrm{Hom}(A,X)$ y $[gen_A X, \ker f] = 1$.

Supongamos que $\ker f$ es A-nulo y que $[gen_A X, \ker f] = 1$, y sean $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Hom}(A,X)$ tales que $f \circ \psi_1 = f \circ \psi_2$. Ahora, definimos una función $\psi : A \to X$ tal que $\psi(a) = \psi_1(a)\psi_2(a)^{-1}$, para todo $a \in A$.

Veamos que $\psi \in \mathrm{Hom}(A, \ker f)$:

Como $f(\psi(a)) = f(\psi_1(a)\psi_2(a)^{-1}) = [f \circ \psi_1(a)][f \circ \psi_2(a^{-1})] = [f \circ \psi_2(a)][f \circ \psi_2(a^{-1})] = f \circ \psi_2(aa^{-1}) = f \circ \psi_2(1) = 1$ para todo $a \in A$, $\psi(a) \in \ker f$ para todo $a \in A$.

Como $\psi_1 A, \psi_2 A \leq gen_A X$ y $[gen_A X, \ker f] = 1$, tenemos que $[\psi_1 A, \ker f] = 1$ y $[\psi_2 A, \ker f] = 1$. Luego, vemos que $\psi(a)\psi(b) = \psi_1(a)\psi_2(a)^{-1}\psi(b) = \psi_1(a)\psi(b)\psi_2(a)^{-1} = \psi_1(a)\psi_1(b)\psi_2(b)^{-1}\psi_2(a)^{-1} = \psi_1(ab)\psi_2(ab)^{-1} = \psi(ab)$ para cualesquiera $a, b \in A$ (pues $\psi(b) \in \ker f$). Por lo tanto, $\psi \in \mathrm{Hom}(A, \ker f)$.

Ahora, como $\ker f$ es A-nulo y $\psi \in \mathrm{Hom}(A, \ker f)$, tenemos que $\psi = 0$ de donde $1 = 0(a) = \psi(a) = \psi_1(a)\psi_2(a)^{-1}$ y $\psi_1(a) = \psi_2(a)$, para todo $a \in A$. Por lo tanto, $\psi_1 = \psi_2$ y f es una A-inyección. $\square$

Corolario 3.49 *Para todo $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, f es una A-equivalencia si y sólo si f es A-suprayectivo, $\ker f$ es A-nulo y $[gen_A X, \ker f] = 1$.*

Proposición 3.50 *Para todo $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, si f es una A-inyección entonces $[gen_A X, f^{-1}(C_Y(gen_A Y))] = 1$*

Demostración. Sean $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ una A-inyección, $z \in f^{-1}(C_Y(gen_A Y))$ y $\psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$. Como $f(z) \in C_Y(gen_A Y)$ y $f \circ \psi(A) \leq gen_A Y$, $f \circ i_z \circ \psi(a) = f(z^{-1}\psi(a)z) = f(z)^{-1}f(\psi(a))f(z) = f(z)^{-1}f(z)f(\psi(a)) = f \circ \psi(a)$ para todo $a \in A$. Luego, $f \circ i_z \circ \psi = f \circ \psi$ y como f es una A-inyección, $i_z \circ \psi = \psi$ para todo $\psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ y todo $z \in f^{-1}(C_Y(gen_A Y))$. Por lo tanto, $1 = [\psi(A), z]$ para cualesquiera $\psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ y $z \in f^{-1}(C_Y(gen_A Y))$, de donde $1 = [gen_A X, f^{-1}(C_Y(gen_A Y))]$. $\square$

Proposición 3.51 *Para toda A-inyección $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, si X es A-generado entonces $f^{-1}(Z(fX)) = Z(X)$ y $\ker f \leq Z(X)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ una A-inyección y supongamos que X es A-generado. Luego, $X = gen_A X$ y por la proposición 3.48, $[X, \ker f] = 1$. Por lo tanto, $\ker f \leq Z(X)$.

Ahora veamos que $f^{-1}(Z(fX)) = Z(X)$:

Sean $a \in Z(X)$ y $y \in fX$. Entonces, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ y como $ax = xa$, $f(a)y = f(a)f(x) = f(ax) = f(xa) = f(x)f(a) = yf(a)$. Por lo tanto, $a \in f^{-1}(Z(fX))$ y $Z(X) \leq f^{-1}(Z(fX))$.

Sean $b \in f^{-1}(Z(fX))$ y $x \in X$. Luego, $f(b) \in Z(fX)$ por lo que $f(b)f(x) = f(x)f(b)$, de donde $f(x) = f(b)^{-1}f(x)f(b) = f(b^{-1}xb) = f \circ i_b(x)$. Entonces, $f \circ 1_X = f = f \circ i_b$ y como f es una A-inyección, $1_X = i_b$. Luego, $x = 1_X(x) = i_b(x) = b^{-1}xb$ por lo que $bx = xb$. Por lo tanto, $b \in Z(X)$ y $f^{-1}(Z(fX)) \leq Z(X)$.

Otra forma de demostrar lo anterior es la siguiente:

Observamos que, por el corolario 3.9(1), podemos suponer que f es suprayectivo. Además sabemos, por la proposición 3.50, que $[X, f^{-1}(C_Y(gen_A Y))] = 1$. Como X es A-generado, $f(X) = Y$ es A-generado por lo que $gen_A Y = Y$ y $1 = [X, f^{-1}(C_Y(Y))] = [X, f^{-1}(Z(Y))] = [X, f^{-1}(Z(fX))]$. Por lo tanto, $f^{-1}(Z(fX)) \leq Z(X)$. $\square$

Proposición 3.52 *Sean $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ una A-equivalencia y $N \trianglelefteq A$.*

(1) *Si $\ker f$ es N-nulo, f es una A/N-equivalencia.*

(2) *Si N es A-construible, f es una A/N-equivalencia.*

Demostración. (1) Supongamos que $\ker f$ es N-nulo.

Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(A/N, X)$ tales que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Luego, $f \circ \varphi_1 \circ p = f \circ \varphi_2 \circ p$ (donde $p : A \to A/N$ es el homomorfismo cociente) y como f es una A-inyección, $\varphi_1 \circ p = \varphi_2 \circ p$ por lo que $\varphi_1 = \varphi_2$ (pues p es un epimorfismo). Por lo tanto, f es una A/N-inyección.

Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(A/N, Y)$. Entonces, $\varphi \circ p \in \mathrm{Hom}(A, Y)$ y como f es una A-equivalencia, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $f \circ \psi = \varphi \circ p$.

Ahora, veamos que $N \leq \ker \psi$:

Sea $n \in N$. Luego, $f \circ \psi(n) = \varphi \circ p(n) = \varphi(N) = 1$ por lo que $\psi(n) \in \ker f$ para todo $n \in N$, es decir, $\psi(N) \leq \ker f$. Pero como $\mathrm{Hom}(N, \ker f) = 0$, $\psi(n) = 1$ para todo $n \in N$. Por lo tanto, $N \leq \ker \psi$.

Por el primer teorema de isomorfismo, existe un único $\hat{\psi} \in \mathrm{Hom}(A/N, X)$ tal que $\psi = \hat{\psi} \circ p$, por lo que $\varphi \circ p = f \circ \psi = f \circ \hat{\psi} \circ p$ y como p es un epimorfismo, $\varphi = f \circ \hat{\psi}$. Por lo tanto, f es una A/N-suprayección.

(2) Supongamos que N es A-construible. Como f es A-inyectivo, por la proposición 3.48, $\ker f$ es A-nulo lo cual implica que $\ker f$ es N-nulo. Por lo tanto, por (1), f es una A/N-equivalencia. □

Proposición 3.53 *Sea $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ una A-equivalencia.*

(1) *Si $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, Y)$ y $\psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ es su levantamiento, entonces $[\varphi^{-1}(Z(\varphi A)), A] \leq \ker \psi$.*

(2) *Si N es un subgrupo normal de A, entonces f es una $A/[A, N]$-equivalencia.*

Demostración. (1) Basta con demostrar que para todo $a \in \varphi^{-1}(Z(\varphi A))$, $\psi \circ i_a = \psi$:

Sean $a \in \varphi^{-1}(Z(\varphi A))$ y $b \in A$. Luego, $\varphi(a) \in Z(\varphi A)$ por lo que $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$, de donde $\varphi(b) = \varphi(a)^{-1}\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a^{-1}ba) = \varphi \circ i_a(b)$. Por lo tanto, $\varphi = \varphi \circ i_a = f \circ \psi \circ i_a$ y, por la unicidad de ψ, $\psi = \psi \circ i_a$.

(2) Supongamos que $N \trianglelefteq A$. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(A/[A, N], X)$ tales que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Como $f \circ \varphi_1 \circ \pi = f \circ \varphi_2 \circ \pi$ (donde $\pi : A \to A/[A, N]$ es el homomorfismo cociente) y f es una A-inyección, $\varphi_1 \circ \pi = \varphi_2 \circ \pi$ lo cual implica que $\varphi_1 = \varphi_2$. Por lo tanto, f es una $A/[A, N]$-inyección.

Ahora, veamos que f es una $A/[A, N]$-suprayección:

Sea $\alpha \in \mathrm{Hom}(A/[A, N], Y)$. Como $\varphi := \alpha \circ \pi \in \mathrm{Hom}(A, Y)$ y f es una A-equivalencia, existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $\varphi = f \circ \psi$. Además, $[A, N] \leq \ker \varphi$ por lo que $1 = \varphi(a^{-1}n^{-1}an) = \varphi(a^{-1})\varphi(n^{-1})\varphi(a)\varphi(n)$ y $\varphi(n)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(n)$ para todo $a \in A$ y todo $n \in N$. Luego, $\varphi(N) \leq Z(\varphi A)$ lo cual implica que $N \leq \varphi^{-1}(Z(\varphi A))$ y, por (1), $[A, N] \leq \ker \psi$. Entonces, por el primer teorema de isomorfismo, existe un único $\beta \in \mathrm{Hom}(A/[A, N], X)$ tal que $\psi = \beta \circ \pi$, de donde $\alpha \circ \pi = \varphi = f \circ \psi = f \circ \beta \circ \pi$ y, por consiguiente, $\alpha = f \circ \beta$. Por lo tanto, f es una $A/[A, N]$-suprayección. □

Corolario 3.54 *Para todo $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, si f es una A-equivalencia entonces es una $A/\Gamma_n(A)$-equivalencia para todo n.*

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ una A-equivalencia.

Para $n = 1$, f es una $A/\Gamma_1(A)$-equivalencia pues $A/\Gamma_1(A) = A/A \cong 1$ es A-celular.

Como $\Gamma_1(A) = A$ es un subgrupo normal de A, por la proposición anterior, f es una $A/\Gamma_2(A)$-equivalencia.

Sea $n > 2$. Como $\Gamma_{n-1}(A) = [A, \Gamma_{n-2}(A)]$ es un subgrupo normal de A, por la proposición anterior, f es una $A/\Gamma_n(A)$-equivalencia.

Por lo tanto, f es una $A/\Gamma_n(A)$-equivalencia para todo n. □

Corolario 3.55 *Para todo grupo G y todo n, $G/\Gamma_n(G)$ es un grupo G-celular.*

3.5 La cubierta A-celular

Proposición 3.56 *Sean G un grupo A-celular y N un subgrupo normal de G.*

(a) Si N es A-construible entonces G/N es A-celular.

(b) Si $N = [G, M]$ para algún subgrupo normal M de G entonces G/N es A-celular.

Demostración. (a) Supongamos que N es A-construible y sea $f : X \to Y$ una A-equivalencia. Entonces, f es una G-equivalencia (pues G es A-celular) y como f es una A-inyección, por la proposición 3.48, $\ker f$ es A-nulo. Luego, $\ker f$ es N-nulo (pues N es A-construible) y, por la proposición 3.52(1), f es una G/N-equivalencia. Por lo tanto, G/N es A-celular.

(b) Supongamos que $N = [G, M]$ para algún $M \trianglelefteq G$ y sea $f : X \to Y$ una A-equivalencia. Entonces, f es una G-equivalencia y como $M \trianglelefteq G$, por la proposición 3.53(2), f es una $G/N = G/[G, M]$-equivalencia. Por lo tanto, G/N es A-celular. □

Definición 3.57 *Una cubierta A-celular de un grupo G es un homomorfismo $c : X \to G$ tal que X es A-celular y c es una A-equivalencia.*

Proposición 3.58 *Si la cubierta A-celular de un grupo G existe entonces es única, es decir, si $c_1 : X_1 \to G$ y $c_2 : X_2 \to G$ son dos cubiertas A-celulares de G entonces existe un único isomorfismo $\varphi : X_1 \to X_2$ tal que $c_1 = c_2 \circ \eta$.*

Demostración. Como X_1 es A-celular y c_2 es una A-equivalencia, c_2 es una X_1-equivalencia. Además, $c_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, G)$ por lo que existe un único $\varphi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ tal que $c_1 = c_2 \circ \varphi$. De manera similar, tenemos que existe un único $\psi \in \mathrm{Hom}(X_2, X_1)$ tal que $c_2 = c_1 \circ \psi$, lo cual implica que $c_1 = c_2 \circ \varphi = c_1 \circ \psi \circ \varphi$. Como c_1 es una A-equivalencia y X_1 es A-celular, c_1 es una X_1-equivalencia y, por consiguiente, existe un único $\alpha \in \mathrm{Hom}(X_1, X_1)$ tal que $c_1 = c_1 \circ \alpha$. Pero, $c_1 \circ 1_{X_1} = c_1 = c_1 \circ \psi \circ \varphi$ por lo que $1_{X_1} = \psi \circ \varphi$.

Análogamente, $1_{X_2} = \varphi \circ \psi$.

Por lo tanto, existe un único isomorfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ tal que $c_1 = c_2 \circ \varphi$. □

Proposición 3.59 *Sean H un grupo A-celular, $ev : H \to G$ un homomorfismo A-suprayectivo, $R = \ker ev$, $S := H/[H,R]$, $e : S \to G$ el homomorfismo inducido por ev, $N := \ker e$ (por lo que $N = R/[H,R]$), $X := S/con_A N$ y finalmente, $c : X \to G$ el homomorfismo inducido por e. Entonces, c es la cubierta A-celular de G.*

Demostración. Como H es A-celular y $[H,R] \trianglelefteq H$ tal que $R \trianglelefteq H$, por la proposición 3.56(b), $S = H/[H,R]$ es A-celular y como $con_A N$ es A-construible, por la proposición 3.56(a), $X = S/con_A N$ es A-celular.

Sólo nos falta ver que c es una A-equivalencia. Primero veamos que c es una A-suprayección:

Como $ev = e \circ \pi_1$ (donde $\pi_1 \in \mathrm{Hom}(H,S)$ es el homomorfismo canónico) es una A-suprayección, por la proposición 3.8(2), $e = c \circ \pi_2$ (donde $\pi_2 \in \mathrm{Hom}(S,X)$ es el homomorfismo canónico) es una A-suprayección por lo que, de nuevo por la proposición 3.8(2), c es una A-suprayección.

Ahora veamos que c es una A-inyección, lo cual es equivalente a ver que $[gen_A X, \ker c] = 1$ y que $\ker c$ es A-nulo.

Primero observamos que $\ker c = \ker e / con_A(\ker e)$, pues $\pi_2 \in \mathrm{Hom}(S,X)$ nos permite definir un epimorfismo $\gamma : \ker e \to \ker c$ tal que $a \mapsto \pi_2(a)$, para todo $a \in \ker e$.

Como consecuencia tenemos, por la proposición 3.45(2), que $\ker c$ es A-nulo.

También observamos, como antes, que $N = \ker e = R/[H,R]$ pues $\pi_1 \in \mathrm{Hom}(H,S)$ induce un epimorfismo $\delta : R = \ker ev \to \ker e$ tal que $b \mapsto \pi_1(b)$, para todo $b \in \ker ev$.

Ahora, como $[\ker e, S] = [R/[H,R], H/[H,R]] = 1$ tenemos que $[\ker c, X] = [\ker e/con_A(\ker e), S/con_A(\ker e)] = 1$ y como $gen_A X \leq X$, $[\ker c, gen_A X] = 1$.

Por lo tanto, c es una cubierta A-celular de G. □

Notación 3.60 *Sea G un grupo. Con base en la proposición anterior definimos:*

(1) *$G_A = \star_{\varphi \in \mathrm{Hom}(A,G)} A_\varphi$ es el producto libre de la familia $\{A_\varphi\}_{\varphi \in \mathrm{Hom}(A,G)}$, donde A_φ es una copia de A para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,G)$.*

(2) *$ev : G_A \to G$ es el homomorfismo evaluación (el cual restringido a A_φ es φ).*

(3) *$R_A = \ker ev$.*

(4) *$S_A := G_A/[G_A, R_A]$.*

(5) *$e : S_A \to G$ es el homomorfismo inducido por ev.*

(6) *$N_A := \ker e = R_A/[G_A, R_A]$.*

(7) *$cel_A G := S_A/con_A(N_A)$ y $c_A : cel_A G \to G$ es el homomorfismo inducido por e.*

El siguiente diagrama ilustra la situación:

$$\begin{tikzcd} G_A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "ev"'] & S_A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "e"] & cel_A G \arrow[dl, "c_A"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Corolario 3.61 *Para cualesquiera dos grupos A y G, el homomorfismo $c_A : cel_A G \to G$ es la cubierta A-celular de G.*

Demostración. Como A es A-celular, A_φ es A-celular para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$ por lo que el grupo G_A de la notación anterior es A-celular. Además, $ev : G_A \to G$ es A-suprayectivo. Por lo tanto, por la proposición 3.59, c_A es la cubierta A-celular de G. $\square$

Proposición 3.62 *La cubierta A-celular de M, $c_A : cel_A M \to M$ es un isomorfismo si y sólo si M es A-celular.*

Demostración. Supongamos que c_A es un isomorfismo. Como $cel_A M$ es un grupo A-celular y $M \cong cel_A M$, M también es un grupo A-celular.

Supongamos que M es A-celular. Luego, 1_M es una cubierta A-celular de M y, por la proposición 3.58, existe un isomorfismo $\theta : cel_A M \to M$ tal que $c_A = 1_M \circ \theta = \theta$. Por lo tanto, c_A es un isomorfismo. $\square$

Observamos que la cubierta A-celular de un grupo nos indica si dicho grupo es A-celular.

Proposición 3.63 *La imagen de la cubierta A-celular $c_A : cel_A G \to G$ es $gen_A G$. Además, los grupos $cel_A G$ y $gen_A G$ son isomorfos si y sólo si c_A es inyectivo.*

Demostración. Como $ev = e \circ \pi_1$ y $e = c_A \circ \pi_2$ (donde $\pi_1 : G_A \to S_A$ y $\pi_2 : S_A \to cel_A G$ son los homomorfismos cocientes), $ev = c_A \circ \pi_2 \circ \pi_1$ por lo que $ev(G_A) = c_A \circ \pi_2 \circ \pi_1(G_A) = c_A \circ \pi_2(S_A) = c_A(cel_A G)$, es decir, $Im(ev) = Im(c_A)$ y como $Im(ev) = gen_A G$ (ver lema 3.22), $Im(c_A) = gen_A G$.

Otra forma de ver lo anterior es la siguiente:

Como $cel_A G$ es A-celular, por la proposición 3.18, también es A-generado por lo que $c_A(cel_A G) \cong cel_A G / \ker c_A$ es A-generado. Pero $c_A(cel_A G) \leq G$ de donde, por la proposición 3.26(3), $c_A(cel_A G) \leq gen_A G$.

Como c_A es A-suprayectivo, para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$ existe un $\psi \in \mathrm{Hom}(A, cel_A G)$ tal que $\varphi = c_A \circ \psi$. Luego, $\varphi(A) = c_A \circ \psi(A) \leq c_A(cel_A G)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$ por lo que $gen_A G \leq c_A(cel_A G)$.

Por lo tanto, $c_A(cel_A G) = gen_A G$.

Ahora, veamos que $cel_A G$ y $gen_A G$ son isomorfos si y sólo si c_A es inyectivo.

Supongamos que c_A es inyectivo. Entonces, $cel_A G \cong c_A(cel_A G) = gen_A G$.

Supongamos que $cel_A G \cong gen_A G$. Luego, $gen_A G$ es A-celular y como $i : gen_A G \hookrightarrow G$ es una A-equivalencia, por la unicidad de la cubierta A-celular, i es la cubierta A-celular de G. Por lo tanto, c_A es inyectivo. $\square$

Así, $c_A = j \circ i \circ c'_A$ donde $c'_A : cel_A G \to gen_A G$ es la correstricción de c_A a su imagen, $i : gen_A G \hookrightarrow con_A G$ es la inclusión del subgrupo A-generado de G en el subgrupo A-construible de G y $j : con_A G \hookrightarrow G$ es la inclusión del subgrupo A-construible de G en G.

Ya vimos que para todo grupo G, la cubierta A-celular existe y que es única salvo isomorfismo. La siguiente proposición nos permite caracterizar a la cubierta A-celular de G.

Proposición 3.64 *Sean A, X y G tres grupos y $c \in \mathrm{Hom}(X, G)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(CA) $c : X \to G$ es una cubierta A-celular de G.

(CA-Inicial) c es una A-equivalencia que es inicial entre todas las A-equivalencias que van de un grupo a G. Es decir, c se factoriza de manera única a través de cualquier A-equivalencia $f : Y \to G$

$$\begin{tikzcd} G & Y \arrow[l, "f"'] \\ & X \arrow[ul, "c"] \arrow[u, dashed, "\exists!\hat{c}"'] \end{tikzcd}$$

(CA-Terminal) X es un grupo A-celular y c es terminal entre todos los homomorfismos que van de un grupo A-celular a G. Es decir, todo $f \in \mathrm{Hom}(Y, G)$ de un grupo A-celular Y a G se factoriza de forma única a través de c.

$$\begin{tikzcd} G & X \arrow[l, "c"'] \\ & Y \arrow[ul, "\forall f"] \arrow[u, dashed, "\exists!\hat{f}"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. (CA) $\Rightarrow$ (CA-*Terminal*). Supongamos que (X, c) es una cubierta A-celular de G. Entonces, por definición, X es A-celular.

Ahora, sean Y un grupo A-celular y $f \in \mathrm{Hom}(Y, G)$. Como c es una A-equivalencia, también es una Y-equivalencia. Por lo tanto, existe un único $\hat{f} \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ tal que $f = c \circ \hat{f}$.

(CA-*Terminal*) $\Rightarrow$ (CA). Supongamos que X es A-celular y que c es terminal entre todos los homomorfismos que van de un grupo A-celular a G.

Sólo nos falta ver que c es una A-equivalencia.

Sea $f \in \mathrm{Hom}(A, G)$. Como A es A-celular, por hipótesis, existe un único $\hat{f} \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $f = c \circ \hat{f}$. Por lo tanto, c es una A-equivalencia.

(CA) $\Rightarrow$ (CA-*Inicial*) Supongamos que (X, c) es una cubierta A-celular de G. Entonces, por definición, $c : X \to G$ es una A-equivalencia.

Sean Y un grupo y $f : Y \to G$ una A-equivalencia. Como X es A-celular, f es una X-equivalencia y como $c \in \mathrm{Hom}(X, G)$, existe un único $\hat{c} \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ tal que $c = f \circ \hat{c}$.

(CA-*Inicial*) $\Rightarrow$ (CA) Primero veamos que si la pareja (X, c) cumple con (CA-*Inicial*) entonces es única salvo isomorfismo.

Sean $c : X \to G$ y $d : X' \to G$ dos A-equivalencias que son iniciales entre todas las A-equivalencias que van de un grupo a G. Como c es una A-equivalencia que va de un grupo a G, existen un único $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, X)$ tal que $c = c \circ \varphi$ y un único $\psi \in \mathrm{Hom}(X, X')$ tal que $c = d \circ \psi$. Similarmente, como d es una A-equivalencia que va de un grupo a G, existen un único $\alpha \in \mathrm{Hom}(X', X')$ tal que $d = d \circ \alpha$ y un único $\beta \in \mathrm{Hom}(X', X)$ tal que $d = c \circ \beta$.

Como $c = d \circ \psi = c \circ \beta \circ \psi$ y $c = c \circ 1_X$, por la unicidad de φ, $1_X = \varphi = \beta \circ \psi$. Similarmente, como $d = c \circ \beta = d \circ \psi \circ \beta$ y $d = d \circ 1_{X'}$, por la unicidad de α,

$1_{X'} = \alpha = \psi \circ \beta$. Entonces, ψ es un isomorfismo y $X \cong X'$. Por lo tanto, la pareja (X, c) es única salvo isomorfismo.

Sean $f : cel_A G \to G$ la cubierta A-celular de G y $g : W \to G$ una A-equivalencia. Como $cel_A G$ es un grupo A-celular, g es una $cel_A G$-equivalencia. Luego, existe un único $\hat{f} \in \mathrm{Hom}(cel_A G, W)$ tal que $f = g \circ \hat{f}$.

Por lo tanto, f es una A-equivalencia que es inicial entre todas las A-equivalencias que van de un grupo a G. Por lo tanto, $c : X \to G$ es isomorfo a $f : cel_A G \to G$ y X es A-celular. □

Así, la cubiera A-celular $c_A : cel_A G \to G$ tiene dos propiedades universales: El homomorfismo $c_A : cel_A G \to G$ es inicial entre las A-equivalencias con codominio G y también es terminal entre los homomorfismos con dominio A-celular y codominio G.

Observamos que tenemos un funtor $cel_A : Grp \to A\text{-}cel$ tal que $G \mapsto cel_A G$ y $(f : G \to H) \mapsto (cel_A f : cel_A G \to cel_A H)$ donde $cel_A f$ se obtiene como sigue:

Sean $c_G : cel_A G \to G$ la cubierta A-celular de G y $c_H : cel_A H \to H$ la cubierta A-celular de H. Como $f \circ c_G \in \mathrm{Hom}(cel_A G, H)$ y $cel_A G$ es A-celular, por $(CA\text{-}Terminal)$, existe un único homomorfismo $cel_A f : cel_A G \to cel_A H$ tal que $f \circ c_G = c_H \circ cel_A f$.

Además, la familia de las cubiertas A-celulares $(c_G : cel_A G \to G)_{G \in Grp}$ es una transformación natural entre cel_A y el funtor identidad 1_{Grp}.

Proposición 3.65 *El funtor $cel_A : Grp \to A\text{-}cel$ es adjunto derecho del funtor inclusión $j : A\text{-}cel \to Grp$.*

Demostración. Sean G un grupo A-celular, H un grupo y $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Por $(CA\text{-}Terminal)$, existe un único $cel_A \varphi \in \mathrm{Hom}(cel_A G, cel_A H)$ tal que $\varphi \circ c_G = c_H \circ cel_A \varphi$. Como G es un grupo A-celular, por la proposición 3.62, c_G es un isomorfismo, por lo que $\varphi = c_H \circ cel_A \varphi \circ c_G^{-1}$.

Observamos que $cel_A \varphi \circ c_G^{-1}$ es el único elemento de $\mathrm{Hom}(G, cel_A H)$ que cumple con lo anterior pues, si $\alpha \in \mathrm{Hom}(G, cel_A H)$ satisface que $c_H \circ \alpha = \varphi$ entonces $c_H \circ \alpha \circ c_G = \varphi \circ c_G = c_H \circ cel_A \varphi$ y, por la unicidad de $cel_A \varphi$, $\alpha \circ c_G = cel_A \varphi$ lo cual implica que $\alpha = cel_A \varphi \circ c_G^{-1}$.

Asi tenemos una transformación natural $c : j \circ cel_A \to 1_{Grp}$ tal que para todo $G \in A\text{-}cel$, $H \in Grp$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}(j(G), H)$ existe un único $cel_A \varphi \circ c_G^{-1} \in \mathrm{Hom}(G, cel_A H)$ tal que $\varphi = c_H \circ j(cel_A \varphi \circ c_G^{-1})$. □

He aquí un ejemplo de una cubierta A-celular, con $A = \mathbb{Q}$.

Ejemplo 3.66 *Sean M un grupo abeliano, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M), +)$. Entonces $ev : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M) \to M$ tal que $ev(\tau) = \tau(1)$ para todo $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)$ es la cubierta $\mathbb{Q}$-celular de M.*

Demostración. Primero observamos que si para todo $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)$ y cualesquiera $r, s \in \mathbb{Q}$ definimos $(r\tau)(s) := \tau(rs)$, entonces $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M), +)$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Como $(\mathbb{Q}, +)$ es $\mathbb{Q}$-celular, por la proposición 2.19(4), $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M), +)$ es un grupo $\mathbb{Q}$-celular.

Sólo nos resta ver que ev es una $\mathbb{Q}$-equivalencia, es decir, que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, ev) : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)$ es una biyección.

Primero veamos que $\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$, para lo cual definimos los homomorfismos $\mu : \mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que $r \otimes s \mapsto rs$ y $\eta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tal que $q \mapsto q \otimes 1$. Como $\eta \circ \mu(r \otimes s) = \eta(rs) = rs \otimes 1 = r \otimes s$, para todo $r \otimes s \in \mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (pues si $s = \frac{s_1}{s_2}$, $rs \otimes 1 = r(\frac{s_1}{s_2}) \otimes \frac{s_2}{s_2} = \frac{r}{s_2} \otimes \frac{s_1}{s_2} s_2 = \frac{r}{s_2} \otimes s_2 s = r \otimes s$) y $\mu \circ \eta(q) = \mu(q \otimes 1) = q1 = q$, para todo $q \in \mathbb{Q}$ tenemos que $\eta \circ \mu = 1_{\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}$ y $\mu \circ \eta = 1_{\mathbb{Q}}$. Por lo tanto, $\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

Luego, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M)$ pues tenemos dos homomorfismos $\beta : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M)$ tal que $f \mapsto f \circ \mu$ y $\gamma : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)$ tal que $g \mapsto g \circ \eta$, que cumplen $\gamma \circ \beta = 1_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)}$ y $\beta \circ \gamma = 1_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M)}$.

Ahora veamos que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))$ para lo cual definimos los siguientes dos homomorfismos:

(1) $\epsilon : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))$ tal que $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$, donde $\bar{\varphi} : \mathbb{Q} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)$ está definido por $\bar{\varphi}(r)(s) = \varphi(r \otimes s)$ para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Q}$

(2) $\alpha : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M)$ tal que $\theta \mapsto \hat{\theta}$, donde $\hat{\theta} : \mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to M$ está definido por $\hat{\theta}(r \otimes s) = \theta(r)(s)$.

Como $\alpha \circ \epsilon(\varphi) = \alpha(\bar{\varphi}) = \hat{\bar{\varphi}}$, para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M)$ y $\hat{\bar{\varphi}}(r \otimes s) = \bar{\varphi}(r)(s) = \varphi(r \otimes s)$, para todo $r \otimes s \in \mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tenemos que $\alpha \circ \epsilon(\varphi) = \varphi$, para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M)$. Por lo tanto, $\epsilon \circ \alpha = 1_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))}$.

Como $\epsilon \circ \alpha(\theta) = \bar{\hat{\theta}}$, para todo $\theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))$ y $\bar{\hat{\theta}}(r)(s) = \hat{\theta}(r \otimes s) = \theta(r)(s)$, para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Q}$ tenemos que $\epsilon \circ \alpha = 1_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))}$.

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, M) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))$.

Luego, tenemos un isomorfismo $\gamma \circ \alpha : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)$ tal que $\gamma \circ \alpha(\theta) = \gamma(\hat{\theta}) = \hat{\theta} \circ \eta$, para todo $\theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))$. Como $\hat{\theta} \circ \eta(q) = \hat{\theta}(q \otimes 1) = \theta(q)(1) = ev(\theta(q)) = ev \circ \theta(q)$, para todo $q \in \mathbb{Q}$ tenemos que $\hat{\theta} \circ \eta = ev \circ \theta$ para todo $\theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))$. Entonces para todo $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)$, existe un único $\tau' \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M))$ tal que $\tau = \gamma \circ \alpha(\tau') = ev \circ \tau'$. Por lo tanto, ev es una $\mathbb{Q}$-equivalencia.

Por lo tanto, ev es la cubierta $\mathbb{Q}$-celular de M.

Además, podemos ver como está definido el levantamiento τ':

Tenemos un isomorfismo $\epsilon \circ \beta(f) = \epsilon(f \circ \mu) = \overline{f \circ \mu}$, para todo $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, M)$. Como $\overline{f \circ \mu}(r)(s) = f \circ \mu(r \otimes s) = f(rs) = (rf)(s)$ para todo $s \in \mathbb{Q}$, $\overline{f \circ \mu}(r) = rf$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Como $\tau' = \epsilon \circ \beta \circ \gamma \circ \alpha(\tau') = \epsilon \circ \beta(\tau) = \overline{\tau \circ \mu}$, tenemos que $\tau'(r) = \overline{\tau \circ \mu}(r) = r\tau$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. $\square$

Capítulo 4

Cubiertas celulares

En este capítulo nos centraremos en el concepto de cubierta celular. Empezaremos por definir lo que es y observar algunas de las propiedades que posee. Además, demostraremos lemas y proposiciones que se relacionan con una cubierta celular de un grupo M y veremos los casos particulares en que M es un grupo nilpotente o finito. El lector puede tomar como referencia el artículo [7].

4.1 Propiedades básicas de las cubiertas celulares

En esta sección daremos la definición de cubierta celular, mencionaremos algunos ejemplos y hablaremos de ciertas propiedades que posee.

Definición 4.1 *Una cubierta celular de un grupo M es una pareja (G, c), donde G es un grupo y el homomorfismo $c : G \to M$ es una G-equivalencia.*

Si c es un homomorfismo suprayectivo o epimorfismo, diremos que (G, c) es una cubierta celular suprayectiva de M y si c es un homomorfismo inyectivo o monomorfismo, diremos que (G, c) es una cubierta celular inyectiva de M.

Proposición 4.2 *Sean G y M dos grupos. Si $c : G \to M$ es un isomorfismo entonces (G, c) es una cubierta celular de M.*

Demostración. Supongamos que $c : G \to M$ es un isomorfismo. Entonces, c es una G-equivalencia y, por lo tanto, (G, c) es una cubierta celular de M. $\square$

Ejemplos 4.3 (1) *Si M es un grupo cíclico finito de orden n, por la proposición anterior, tenemos una cubierta celular $(\mathbb{Z}_n, \theta)$ de M (donde $\theta : \mathbb{Z}_n \to M$ es un isomorfismo entre $\mathbb{Z}_n$ y M).*

(2) *Si M es un grupo cíclico infinito, por la proposición anterior, tenemos una cubierta celular $(\mathbb{Z}, \theta_1)$ de M (donde $\theta_1 : \mathbb{Z} \to M$ es un isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y M).*

(3) *Sea* $2^{\mathbb{Z}} := \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *y* $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$ *tal que* $n \mapsto 2^n$. *Entonces* $(\mathbb{Z}, \varphi)$ *es una cubierta celular de* $2^{\mathbb{Z}}$, *pues* φ *es un isomorfismo.*

El siguiente ejemplo muestra que un grupo puede tener varias cubiertas celulares.

Ejemplo 4.4 *Sea* $G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_2$. *Entonces las inclusiones* $i : \mathbb{Q} \hookrightarrow G$ *y* $j : \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow G$ *son cubiertas celulares de* G.

Demostración. Veamos que la inclusión $j : \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow G$ es una cubierta celular de G.

Sean $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, G)$ y $t \in \mathbb{Z}_2$. Luego $\psi(t) \in G$ por lo que $\psi(t) = (r, x)$ con $r \in \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{Z}_2$.

Sea $\psi([0]) = (r_0, x_0)$. Entonces $(0, 0) = \psi([0]) = (r_0, x_0)$ de donde $r_0 = 0$ y $\psi([0]) = (0, x_0)$.

Sea $\psi([1]) = (r_1, x_1)$. Luego $(0, 0) = \psi([0]) = \psi([1]+[1]) = \psi([1]) + \psi([1]) = (r_1, x_1) + (r_1, x_1) = (2r_1, 2x_1)$ de donde $0 = 2r_1$ con $r_1 \in \mathbb{Q}$, lo cual implica que $r_1 = 0$. Entonces $\psi([1]) = (0, x_1)$.

Luego $\psi(\mathbb{Z}_2) \leq 0 \oplus \mathbb{Z}_2 = j(\mathbb{Z}_2)$ para todo $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, G)$, por lo que $gen_{\mathbb{Z}_2} G \leq j(\mathbb{Z}_2)$. Por lo tanto, por la proposición 3.24(1), j es una $\mathbb{Z}_2$-equivalencia y $(\mathbb{Z}_2, j)$ es una cubierta celular de G.

Veamos que la inclusión $i : \mathbb{Q} \hookrightarrow G$ es una cubierta celular de G.

Sean $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, G)$ y $r \in \mathbb{Q}$. Entonces $r = \frac{r_1}{s_1} = \frac{2}{2}\frac{r_1}{s_1} = 2\frac{r_1}{2s_1} := 2v$.

Sea $\varphi(v) = (q, t)$. Luego $\varphi(r) = \varphi(2v) = 2\varphi(v) = 2(q, t) = (2q, 0) := (q_1, 0) \in \mathbb{Q} \oplus 0$. Entonces $\varphi(\mathbb{Q}) \leq \mathbb{Q} \oplus 0 = i(\mathbb{Q})$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, G)$, lo cual implica que $gen_{\mathbb{Q}} G \leq i(\mathbb{Q})$. Por lo tanto, por la proposición 3.24(1), i es una $\mathbb{Q}$-equivalencia y $(\mathbb{Q}, i)$ es un cubierta celular de G. $\square$

Ejemplo 4.5 *La inclusión* $i : \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ *es una cubierta celular de* $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

Demostración. Primero veamos que $gen_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \leq i(\mathbb{Z}_2)$.

Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3)$ y $[x]_2 \in \mathbb{Z}_2$. Si $\varphi([x]_2) := ([y]_2, [z]_3)$, tenemos que $([0]_2, [0]_3) = \varphi([0]_2) = \varphi([x]_2 + [x]_2) = \varphi([x]_2) + \varphi([x]_2) = ([y]_2, [z]_3) + ([y]_2, [z]_3) = ([y]_2 + [y]_2, [z]_3 + [z]_3) = ([0]_2, [z]_3 + [z]_3)$. Luego $[z]_3 + [z]_3 = [0]_3$ y, por consiguiente, $[z]_3 = [0]_3$ lo cual implica que $\varphi([x]_2) = ([y]_2, [0]_3) = i([y]_2) \in i(\mathbb{Z}_2)$ para todo $[x]_2 \in \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto, $\varphi(\mathbb{Z}_2) \leq i(\mathbb{Z}_2)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3)$ y $gen_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \leq i(\mathbb{Z}_2)$.

Como i es un monomorfismo y $gen_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \leq i(\mathbb{Z}_2)$, por la proposición 3.24(1), i es una $\mathbb{Z}_2$-equivalencia. Por lo tanto, $(\mathbb{Z}_2, i)$ es una cubierta celular de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. $\square$

Ejemplo 4.6 *Sea* $c \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^k})$ *tal que* $c([x]_p) = p^{k-1}[x]_{p^k} = [p^{k-1}x]_{p^k}$. *Entonces* $(c, \mathbb{Z}_p)$ *es una cubierta celular de* $\mathbb{Z}_{p^k}$ *con* $k \geq 2$.

Demostración. Sean $[a]_p, [b]_p \in \mathbb{Z}_p$ y supongamos que $c([a]_p) = c([b]_p)$. Luego $[p^{k-1}a]_{p^k} = [p^{k-1}b]_{p^k}$, por lo que $p^{k-1}a \equiv p^{k-1}b \bmod p^k$, lo cual implica que

$p^{k-1}a = p^{k-1}b + p^k t$ con $t \in \mathbb{Z}$. Entonces $0 = p^{k-1}b + p^k t - p^{k-1}a = p^{k-1}(b + pt - a)$, por lo que $a = b + pt$ y $a \equiv b \bmod p$. Por lo tanto, $[a]_p = [b]_p$ y c es un monomorfismo.

Como $gen_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_{p^k} = \langle [y]_{p^k} \in \mathbb{Z}_{p^k} \mid p[y]_{p^k} = [0]_{p^k} \rangle = \langle [0p^{k-1}]_{p^k},\ [p^{k-1}]_{p^k},\ [2p^{k-1}]_{p^k}, \ldots, [(p-1)p^{k-1}]_{p^k} \rangle = c(\mathbb{Z}_p)$ y c es un monomorfismo, por la proposición 3.24(1), $(\mathbb{Z}_p, c)$ es una cubierta celular de $\mathbb{Z}_{p^k}$ con $k \geq 2$. $\square$

El siguiente lema establece la relación que hay entre una cubierta A-celular y una cubierta celular.

Proposición 4.7 *Sea M un grupo. Luego,*

(1) *La cubierta A-celular de M $c_A : cel_A M \to M$ es una cubierta celular de M.*

(2) *Si (G, c) es una cubierta celular de M, entonces $c : G \to M$ es isomorfo a la cubierta G-celular de M $c_G : cel_G M \to M$.*

Demostración. (1) Por definición, $cel_A M$ es un grupo A-celular y c_A es una A-equivalencia. Luego c_A es una $cel_A M$-equivalencia y, por lo tanto, c_A es una cubierta celular de M.

(2) Supongamos que (G, c) es una cubierta celular del grupo M. Por definición, $c : G \to M$ es una G-equivalencia y como G es G-celular, $c : G \to M$ es una cubierta G-celular de M. Pero, por la proposición 3.58, existe un isomorfismo $\theta : G \to cel_G M$ lo cual implica que $c : G \to M$ es isomorfo a $c_G : cel_G M \to M$. $\square$

Proposición 4.8 *Sea (G, c) una cubierta celular de M. Luego,*

(1) $c^{-1}(Z(c(G))) = Z(G)$ *y* $\ker c \leq Z(G)$.

(2) *Para todo $\theta \in \mathrm{Hom}(c(G), M)$, $\theta(c(G)) \leq c(G)$. Es decir, $gen_{c(G)} M \leq c(G)$.*

(3) *Para todo $\mu \in End(M)$, $\mu(c(G)) \leq c(G)$.*

(4) $\ker c$ *es G-nulo.*

Demostración. (1) Como c es una G-inyección y G es G-generado, por la proposición 3.51, $c^{-1}(Z(c(G))) = Z(G)$ y $\ker c \leq Z(G)$.

(2) Ya sabemos, por la proposición 3.63, que $c_G(cel_G M) = gen_G M$. Pero, por la proposición anterior, $c : G \to M$ es isomorfo a $c_G : cel_G M \to M$ de donde $c(G) = gen_G M$. Por lo tanto, $\theta(c(G)) \leq c(G)$ para todo $\theta \in \mathrm{Hom}(c(G), M)$ (ver proposición 3.27(1)).

(3) Como $c(G) = gen_G M$, por la proposición 3.27(2), $\mu(c(G)) \leq c(G)$ para todo $\mu \in End(M)$.

(4) Como c es una G-inyección, por la proposición 3.48, $\ker c$ es G-nulo. $\square$

Proposición 4.9 *Sea $d \in \mathrm{Hom}(G, M)$ tal que $\ker d \leq Z(G)$. Entonces son equivalentes:*

(1) *d es una G-inyección.*

(2) $\ker d$ *es G-nulo.*

Demostración. Es consecuencia de la proposición 3.48.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que d es una G-inyección. Por la proposición 3.48, $\ker d$ es G-nulo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $\ker d$ es G-nulo. Como G es G-generado y $\ker d \leq Z(G)$, $1 = [G, \ker d] = [gen_G G, \ker d]$. Por la proposición 3.48, d es una G-inyección. □

Corolario 4.10 *Para todo $d \in \mathrm{Hom}(G, M)$, (G, d) es una cubierta celular de M si y sólo si $\ker d \leq Z(G)$, $\ker d$ es G-nulo y d es una G-suprayección.*

Definición 4.11 *Sea G un grupo. Un subgrupo $U \leq G$ es un factor directo (sumando directo, si G es abeliano) de G si $G = U \times V$, para algún subgrupo V de G.*

Lema 4.12 *Sea (G, c) una cubierta celular de M y supongamos que $U \leq G$ es un factor directo de G que contiene a $\ker c$. Entonces (U, c_1) es una cubierta celular suprayectiva de $c(U)$, donde $c_1 : U \to c(U)$ es la restricción de c a U.*

Demostración. Primero, observamos que $c^{-1}(c(U)) = U$:

Sea $a \in U$. Entonces $c(a) \in c(U)$ y, por lo tanto, $a \in c^{-1}(c(U))$.

Sea $b \in c^{-1}(c(U))$. Luego, $c(b) \in c(U)$ por lo que $c(b) = c(w)$ con $w \in U$. Como $1 = c(b)c(w)^{-1} = c(bw^{-1})$, $bw^{-1} \in \ker c \subseteq U$. Entonces $bw^{-1} = z$ con $z \in U$ y, por lo tanto, $b = zw \in U$.

Como c es una G-equivalencia y $c(U) \leq c(G) \leq M$, por la proposición 3.19, $c_1 : U = c^{-1}(c(U)) \to c(U)$ es una G-equivalencia. Además, U es un retracto de G (pues es un factor directo suyo) por lo que, por la proposición 2.7, U es G-celular. Luego c_1 es una U-equivalencia y, por lo tanto, (U, c_1) es una cubierta celular suprayectiva de $c(U)$. □

Proposición 4.13 *Sea (G, c) una cubierta celular de M. Entonces,*

(1) *(G, c') es una cubierta celular de $c(G)$, donde $c' : G \to c(G)$ es la correstricción de c.*

(2) *La inclusión $i : c(G) \hookrightarrow M$ también es una cubierta celular de M.*

Demostración. (1) Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, c(G))$. Como $i \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(G, M)$ y c es una G-equivalencia, existe un único $\psi \in End(G)$ tal que $i \circ \varphi = c \circ \psi$. Pero $c = i \circ c'$ por lo que $i \circ \varphi = i \circ c' \circ \psi$. Como i es inyectivo, $\varphi = c' \circ \psi$. Por lo tanto, c' es G-suprayectivo.

Como c es G-inyectivo, por el corolario 3.9(1), c' es G-inyectivo.

Por lo tanto, c' es una G-equivalencia y (G, c') es una cubierta celular de $c(G)$.

Otra forma de ver lo anterior es la siguiente:

Si consideramos $G = G \times 1$ entonces G es un factor directo de G que contiene a $\ker c$ y por lo tanto, por el lema anterior, (G, c') es una cubierta celular (suprayectiva) de $c(G)$.

(2) Por la proposición 4.8(2), $gen_{c(G)}M \leq c(G) = i(c(G))$ y como i es un monomorfismo, por la proposición 3.24(1), i es una $c(G)$-equivalencia. Por lo tanto, $i : c(G) \hookrightarrow M$ es una cubierta celular de M.

O bien:

Como $c : G \to M$ es G-suprayectivo y G es G-generado, por la proposición 3.33(3), la inclusión $i : c(G) \hookrightarrow M$ es una cubierta celular de M. □

La proposición anterior nos dice que podemos ver a toda cubierta celular de M, $c : G \to M$ como $c = i \circ c'$ donde la correstricción $c' : G \to c(G)$ es una cubierta celular de $c(G)$ y la inclusión $i : c(G) \hookrightarrow M$ es una cubierta celular de M.

Lema 4.14 *Para todo grupo G, si $G/Z(G)$ es un grupo cíclico entonces G es un grupo abeliano.*

Demostración. Supongamos que $G/Z(G)$ es un grupo cíclico y sean $g, h \in G$. Entonces, existe $aZ(G) \in G/Z(G)$ tal que $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$ y como $gZ(G), hZ(G) \in G/Z(G)$ tenemos que $gZ(G) = (aZ(G))^r = a^r Z(G)$ y $hZ(G) = (aZ(G))^s = a^s Z(G)$, donde r y s son enteros positivos. Entonces, $(a^r)^{-1}g \in Z(G)$ y $(a^s)^{-1}h \in Z(G)$ por lo que $g = a^r x$ y $h = a^s y$, con $x, y \in Z(G)$. Luego, $gh = (a^r x)(a^s y) = a^r(xa^s)y = a^r(a^s x)y = (a^{r+s}x)y = y(a^{r+s}x) = y(a^{s+r}x) = (ya^s)(a^r x) = (a^s y)(a^r x) = hg$. Por lo tanto, G es abeliano. □

Proposición 4.15 *Sea (G, c) una cubierta celular de M. Entonces para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, M)$ tal que φG es un grupo cíclico finito, su levantamiento $\hat{\varphi} \in End(G)$ satisface $\ker \hat{\varphi} = \ker \varphi$ y $\hat{\varphi} G \cong \varphi G$.*

Demostración. Primero veamos que $\varphi G \cong \hat{\varphi} G/(\hat{\varphi} G \cap \ker c)$, para lo cual definimos un homomorfismo $\psi : \hat{\varphi} G \to \varphi G$ tal que $\psi(a) = c(a)$, para todo $a \in \hat{\varphi} G$. Como ψ es un epimorfismo y $\ker \psi = \hat{\varphi} G \cap \ker c$, por el primer teorema de isomorfismo, $\varphi G \cong \hat{\varphi} G/(\hat{\varphi} G \cap \ker c)$.

Ya sabemos que $\ker c \leq Z(G)$, por lo que $\hat{\varphi} G \cap \ker c \leq Z(\hat{\varphi} G) \leq \hat{\varphi} G$ y, como $\hat{\varphi} G \cap \ker c \trianglelefteq \hat{\varphi} G$ y $Z(\hat{\varphi} G) \trianglelefteq \hat{\varphi} G$, por el tercer teorema de isomorfismo, $\hat{\varphi} G/Z(\hat{\varphi} G) \cong (\hat{\varphi} G/(\hat{\varphi} G \cap \ker c))/(Z(\hat{\varphi} G)/(\hat{\varphi} G \cap \ker c))$. Luego, $\hat{\varphi} G/Z(\hat{\varphi} G)$ es un grupo cíclico, pues $\varphi G \cong \hat{\varphi} G/(\hat{\varphi} G \cap \ker c)$ es un grupo cíclico, por lo que, por el lema anterior, $\hat{\varphi} G$ es un grupo abeliano.

Ahora, sea $n = |\varphi G|$. Veamos que $\ker c$ no tiene p-torsión para todo primo p que divida a n, es decir, $a^p = 1$ implica que $a = 1$ para todo $a \in \ker c$ y todo primo p que divida a n:

Sean $a \in \ker c$ y p un número primo tal que $p|n$. Supongamos que $a^p = 1$ y sea $\epsilon : \mathbb{Z}_p \to \langle a \rangle$ un epimorfismo.

Como φG es un grupo abeliano, φG es un grupo nilpotente (de clase 1) y como φG es finito, φG es la suma directa de sus subgrupos de Sylow, es decir, $\varphi G = \bigoplus_q (\varphi G)_q$. Como φG es un grupo cíclico finito, $(\varphi G)_p$ es un p-grupo cíclico finito por lo que $(\varphi G)_p \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, para algún entero positivo k.

Luego $j \circ \epsilon \circ \eta \circ \theta \circ \pi_p \circ \varphi' \in \mathrm{Hom}(G, \ker c)$ (donde $\varphi' : G \to \varphi G$ es la correstricción de φ, $\pi_p : \varphi G \to (\varphi G)_p$ es la proyección canónica, $\theta : (\varphi G)_p \to \mathbb{Z}_{p^k}$

es el isomorfismo, $\eta : \mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_p$ es el epimorfismo definido por $\eta([m]_{p^k}) = [m]_p$ y $j : A \hookrightarrow \ker c$ es la inclusión) y como $\ker c$ es G-nulo, $j \circ \epsilon \circ \eta \circ \theta \circ \pi_p \circ \varphi' = 0 = j \circ 0$ por lo que $\epsilon \circ \eta \circ \theta \circ \pi_p \circ \varphi' = 0$ (pues j es un monomorfismo). Como $\epsilon \circ \eta \circ \theta \circ \pi_p \circ \varphi' \in \mathrm{Hom}(G, A)$ es un epimorfismo y $a \in A$, existe $b \in G$ tal que $a = \epsilon \circ \eta \circ \theta \circ \pi_p \circ \varphi'(b)$, lo cual implica que $a = 0(b) = 1$.

Por lo tanto, para todo $a \in \ker c$ y todo primo p que divida a n, $a^p = 1$ implica que $a = 1$.

Ahora, definimos una función $\beta : G \to \ker c$ tal que $g \mapsto \hat{\varphi}(g)^n$.

Veamos que $\beta \in \mathrm{Hom}(G, \ker c)$:

Observamos que $c(\beta(g)) = c(\hat{\varphi}(g)^n) = c(\hat{\varphi}(g^n)) = \varphi(g^n) = \varphi(g)^n = 1$, para todo $g \in G$ por lo que $\beta(g) \in \ker c$, para todo $g \in G$. Además, $\beta(g)\beta(h) = [\hat{\varphi}(g)^n][\hat{\varphi}(h)^n] = \hat{\varphi}(gh)^n = \beta(gh)$ para cualesquiera $g, h \in G$. Por lo tanto, $\beta \in \mathrm{Hom}(G, \ker c)$.

Como $\ker c$ es G-nulo, $\beta = 0$ de donde $1 = 0(g) = \beta(g) = \hat{\varphi}(g)^n$ para todo $g \in G$. Luego, $\hat{\varphi}G$ es un grupo de torsión cuyo exponente divide a n por lo que $\hat{\varphi}G \cap \ker c$ es un subgrupo de torsión de $\ker c$ cuyo exponente divide a n.

Como $a^p = 1$ implica que $a = 1$ para cada $a \in \ker c$ y todo primo p que divida a n, se sigue que $\hat{\varphi}G \cap \ker c = 1$. Luego, $\varphi G \cong \hat{\varphi}G$.

Finalmente, veamos que $\ker \hat{\varphi} = \ker \varphi$:

Como $\hat{\varphi}(\ker \varphi) \leq \ker c \cap \hat{\varphi}G = 1$, tenemos que $\ker \varphi \leq \ker \hat{\varphi}$.

Ahora, sea $z \in \ker \hat{\varphi}$. Entonces, $\varphi(z) = c(\hat{\varphi}(z)) = c(1) = 1$ por lo que $z \in \ker \varphi$. Por lo tanto, $\ker \hat{\varphi} \leq \ker \varphi$.

Por lo tanto, $\ker \hat{\varphi} = \ker \varphi$. □

Proposición 4.16 *Sean (G, c) una cubierta celular de M y $\hat{M}$ un grupo que contiene a M tal que $gen_G\hat{M} \leq M$. Entonces $(G, \hat{c})$ es una cubierta celular de $\hat{M}$, donde $\hat{c} = j \circ c$ con $j : M \hookrightarrow \hat{M}$ la inclusión de M en $\hat{M}$.*

Demostración. Como j es un monomorfismo y $gen_G\hat{M} \leq M = j(M)$, por la proposición 3.24(1), j es una G-equivalencia y como c es una G-equivalencia, $\hat{c} = j \circ c$ es una G-equivalencia. Por lo tanto, $(G, \hat{c})$ es una cubierta celular de $\hat{M}$. □

Ahora, daremos algunos ejemplos que son consecuencias de la proposición anterior. Uno inmediato es el siguiente:

Corolario 4.17 *Sean (G, c) una cubierta celular de M y N un grupo G-nulo. Entonces $(G, \bar{c})$ es una cubierta celular de $M \times N$, donde $\bar{c} : G \to M \times N$ se define como $x \mapsto (c(x), 1)$.*

Demostración. Primero observamos que $M \cong M \times 1 \leq M \times N$ y que $\bar{c} = i \circ c$ (donde $i : M \hookrightarrow M \times N$ es la inclusión, es decir, i es tal que $m \mapsto (m, 1)$).

Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, M \times N)$. Entonces $\pi_2 \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(G, N) = 0$ (donde $\pi_2 : M \times N \to N$ es el homomorfismo cociente), por lo que $1 = 0(g) = \pi_2 \circ \varphi(g)$ para todo $g \in G$. Como $\varphi(g) \in M \times N$, $\varphi(g) = (m, n)$ de donde $1 = \pi_2 \circ \varphi(g) = n$, de modo que $\varphi(g) = (m, 1)$ para todo $g \in G$. Así $\varphi(G) \leq M \times 1 \cong M$, para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, M \times N)$ lo que equivale a que $gen_G(M \times N) \leq M$. Por lo antes visto y el hecho de que (G, c) es una cubierta celular de M, concluimos que $(G, \bar{c})$ es una cubierta celular de $M \times N$. $\square$

Otro ejemplo es el siguiente:

Corolario 4.18 *Sean p un número primo, G un p-grupo, $\hat{M}$ un grupo nilpotente, $M = \hat{M}_p$ y (G, c) una cubierta celular de M. Entonces $(G, \hat{c})$ es una cubierta celular de $\hat{M}$, donde $\hat{c} = j \circ c$ con $j : M \hookrightarrow \hat{M}$ la inclusión de M en $\hat{M}$.*

Demostración. Como $\hat{M}$ es nilpotente, $M \leq \hat{M}$ y como (G, c) es una cubierta celular de M, sólo nos falta ver que $gen_G\hat{M} \leq M$ para concluir, por la proposición 4.16, que $(G, \hat{c})$ es una cubierta celular de $\hat{M}$.

Sean $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \hat{M})$ y $h \in \varphi G$. Luego, existe $g \in G$ tal que $h = \varphi(g)$. Como G es un p-grupo, existe un entero $k \geq 1$ tal que $g^{p^k} = 1$ por lo que $1 = \varphi(1) = \varphi(g^{p^k}) = \varphi(g)^{p^k} = h^{p^k}$. Entonces, $h \in \hat{M}_p = M$ y $\varphi G \leq M$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \hat{M})$. Por lo tanto, $gen_G\hat{M} \leq M$. $\square$

Ahora, unos ejemplos de cubiertas celulares de G.

Ejemplo 4.19 *La inclusion $i : gen_A G \hookrightarrow G$ es una cubierta celular de G.*

Demostración. Como i es un monomorfismo y $\varphi(gen_A G) \leq gen_A G = i(gen_A G)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(gen_A G, G)$, por el lema 3.17(1), i es una $gen_A G$-equivalencia. Por lo tanto, la inclusión $i : gen_A G \hookrightarrow G$ es una cubierta celular de G. $\square$

En particular, si A es un grupo cíclico de orden p^n con p un primo y n un entero positivo, $gen_A G = \Omega_{p,n}(G) := \langle g \in G \mid g^{p^n} = 1\rangle$. Así, $(\Omega_{p,n}(G), i)$ es una cubierta celular de G.

Ejemplo 4.20 *La inclusion $i : con_A G \hookrightarrow G$ es una cubierta celular de G.*

Demostración. Como i es un monomorfismo y $\varphi(con_A G) \leq con_A G = i(con_A G)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(con_A G, G)$, por el lema 3.17(1), i es una $con_A G$-equivalencia. Por lo tanto, la inclusión $i : con_A G \hookrightarrow G$ es una cubierta celular de G. $\square$

Proposición 4.21 *Sean G_1, G_2, M_1 y M_2 cuatro grupos y definimos $G := G_1 \times G_2$ y $M := M_1 \times M_2$. Supongamos que (G_i, c_i) es una cubierta celular inyectiva de M_i, para cada $i \in \{1, 2\}$ y que para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, M)$, $\varphi \circ i_{G_1}(G_1) \leq i_{M_1}(M_1)$ y $\varphi \circ i_{G_2}(G_2) \leq i_{M_2}(M_2)$ (donde $i_{G_1} : G_1 \hookrightarrow G$, $i_{G_2} : G_2 \hookrightarrow G$, $i_{M_1} : M_1 \hookrightarrow M$ y $i_{M_2} : M_2 \hookrightarrow M$ son las inclusiones). Entonces, $(G, c_1 \times c_2)$ es una cubierta celular de M.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, M)$. Definimos $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G_1, M_1)$ como $\varphi_1 := \pi_1 \circ \varphi \circ i_{G_1}$ y $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(G_2, M_2)$ como $\varphi_2 := \pi_2 \circ \varphi \circ i_{G_2}$ (donde $\pi_1 : M \to M_1$ y $\pi_2 : M \to M_2$ son las proyecciones canónicas).

Veamos que $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$.

Sea $(g,h) \in G$. Por hipótesis, $\varphi \circ i_{G_1}(g) = i_{M_1}(m_1) = (m_1, 1)$ con $m_1 \in M_1$ y $\varphi \circ i_{G_2}(h) = i_{M_2}(m_2) = (1, m_2)$ con $m_2 \in M_2$. Luego, si $\varphi(g,h) = (a,b)$ tenemos que:

(1) $a = \pi_1(a,b) = \pi_1 \circ \varphi(g,h) = [\pi_1 \circ \varphi \circ i_{G_1}(g)][\pi_1 \circ \varphi \circ i_{G_2}(h)] = [\varphi_1(g)][\pi_1(1,m_2)] = \varphi_1(g)$.

(2) $b = \pi_2(a,b) = \pi_2 \circ \circ\varphi(g,h) = [\pi_2 \circ \varphi \circ i_{G_1}(g)][\pi_2 \circ \varphi \circ i_{G_2}(h)] = [\pi_2(m_1,1)][\varphi_2(h)] = \varphi_2(h)$.

Por lo tanto $\varphi(g,h) = (\varphi_1 \times \varphi_2)(g,h)$ para todo $(g,h) \in G$ y $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$.

Ahora, si $\hat{\varphi}_1 \in \mathrm{Hom}(G_1, G_1)$ y $\hat{\varphi}_2 \in \mathrm{Hom}(G_2, G_2)$ son los levantamientos de φ_1 y φ_2, tenemos que $\hat{\varphi}_1 \times \hat{\varphi}_2 \in \mathrm{Hom}(G,G)$ cumple que $\varphi = (c_1 \times c_2) \circ (\hat{\varphi}_1 \times \hat{\varphi}_2)$. Por lo tanto $c_1 \times c_2$ es una G-suprayección.

Como c_1 y c_2 son monomorfismos, $c_1 \times c_2$ es un monomorfismo. Por lo tanto $c_1 \times c_2$ es una G-inyección.

Por lo tanto $c_1 \times c_2$ es una G-equivalencia y $(G, c_1 \times c_2)$ es una cubierta celular de M. □

La siguiente proposición también es un ejemplo de una cubierta celular, antes de enunciarla observamos lo siguiente:

Observación 4.22 *Si (G,c) es una cubierta celular suprayectiva de M, también es una extensión central de M pues c es suprayectivo y* $\ker c \leq Z(G)$.

Proposición 4.23 *Sean P un grupo perfecto y $0 \to H_2(P,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{c} P \to 1$ la extensión central universal (E,c) de P. Entonces, (E,c) es una cubierta celular suprayectiva de P.*

Demostración. Como (E,c) es una extensión central de P, c es suprayectivo y $\ker c \leq Z(E)$. Además, como (E,c) es la extensión central universal del grupo perfecto P, E también es perfecto por lo que $\ker c$ es E-nulo.

Sólo nos falta ver que c es una E-suprayección.

Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(E,P)$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker c \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "c"] & P \arrow[r] & 1 \\
0 \arrow[r] & \ker c \arrow[r, "j"] \arrow[u, "1_{\ker c}"] & \tilde{E} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, "\pi_1"] & E \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & 1
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{E} = \{(x,y) \in E \times E \mid c(x) = \varphi(y)\}$, π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas, i es la inclusión y $j : \ker c \hookrightarrow \tilde{E}$ es tal que $a \mapsto (a,1)$ para todo $a \in \ker c$.

Como $\ker c \leq Z(E)$, $\ker \pi_2 = j(\ker c) = \ker c \times 1 \leq Z(\tilde{E})$ y como π_2 es suprayectivo, $(\tilde{E}, \pi_2)$ es una extensión central del grupo perfecto E por lo que, por la proposición 1.112, $\tilde{E} = (\ker \pi_2)[\tilde{E}, \tilde{E}]$ con $[\tilde{E}, \tilde{E}]$ perfecto.

Ahora, sea $\mu := \pi_2 \circ k \in \mathrm{Hom}([\tilde{E}, \tilde{E}], E)$ (donde $k : [\tilde{E}, \tilde{E}] \hookrightarrow \tilde{E}$ es la inclusión). Veamos que $([\tilde{E}, \tilde{E}], \mu)$ es una extensión central perfecta de E.

Como π_2 es suprayectivo y E es perfecto, tenemos que $\mu([\tilde{E},\tilde{E}]) = \pi_2 \circ k([\tilde{E},\tilde{E}]) = \pi_2([\tilde{E},\tilde{E}]) = [\pi_2(\tilde{E}),\pi_2(\tilde{E})] = [E,E] = E$ por lo que μ es suprayectivo. Además, $\ker\mu = [\tilde{E},\tilde{E}] \cap \ker\pi_2 \leq [\tilde{E},\tilde{E}] \cap Z(\tilde{E}) \leq Z([\tilde{E},\tilde{E}])$. Por lo tanto, $([\tilde{E},\tilde{E}],\mu)$ es una extensión central perfecta del grupo perfecto E.

Como E es el grupo cubriente universal del grupo perfecto P, por la proposición 1.115, μ es un isomorfismo. Luego, $\pi_1 \circ k \circ \mu^{-1} \in \mathrm{Hom}(E,E)$ satisface que $c \circ \pi_1 \circ k \circ \mu^{-1} = \varphi \circ \pi_2 \circ k \circ \mu^{-1} = \varphi \circ \mu \circ \mu^{-1} = \varphi$. Por lo tanto, c es una G-suprayección. $\square$

4.2 Cubiertas celulares de grupos nilpotentes

En esta sección veremos el caso en el que (G,c) es una cubierta celular de un grupo nilpotente M. Observaremos que M le herada a G, a través de la cubierta (G,c), la propiedad de ser nilpotente. Además, si M en vez de ser nilpotente es abeliano entonces G es abeliano.

Para la prueba del siguiente teorema utilizaremos el lema 2.14.

Teorema 4.24 *Sea (G,c) una cubierta celular de un grupo nilpotente M. Entonces, G es nilpotente de clase de nilpotencia igual a la de $c(G)$.*

Demostración. Como $c : G \to M$ es una cubierta celular de M, por la proposición 4.13, su correstricción $c' : G \to c(G)$ es una cubierta celular de $c(G)$. Luego, c' es una G-equivalencia y como $c' \in \mathrm{Hom}(G,c(G))$, existe un único $\widehat{c'} \in \mathrm{Hom}(G,G)$ tal que $c' = c' \circ \widehat{c'}$. Pero, $c' = c' \circ 1_G$ por lo que $\widehat{c'} = 1_G$. Además, como M es nilpotente tenemos que $c(G) = c'(G)$ también es nilpotente, digamos de clase n. Por lo tanto, por el lema 2.14, $1_G(G) = G$ es un grupo nilpotente de clase n. $\square$

Corolario 4.25 *Sea (G,c) una cubierta celular de un grupo abeliano M. Entonces, G también es abeliano.*

Demostración. Primero observamos que $c(G)$ es abeliano, pues M es abeliano. Además, como todo grupo no trivial es abeliano si y sólo si es un grupo nilpotente de clase 1, $c(G)$ y M son grupos nilpotentes de clase 1. Como (G,c) es una cubierta celular del grupo nilpotente M, por el teorema anterior, G es un grupo nilpotente de clase 1. Por lo tanto, G es abeliano.

O bien, otra forma de ver lo anterior es la siguiente:

Como (G,c) es una cubierta celular de M y $c(G)$ es abeliano, por la proposición 4.8(1), $G \leq c^{-1}(c(G)) = c^{-1}(Z(c(G))) = Z(G) \leq G$. Por lo tanto, $G = Z(G)$ y G es abeliano. $\square$

(El corolario anterior nos dice que la cubierta A-celular de un $\mathbb{Z}$-módulo es un $\mathbb{Z}$-módulo).

A partir de la proposición 4.7(1) y el ejemplo 3.66, tenemos el siguiente:

Ejemplo 4.26 *Sean M un grupo abeliano, $G := (\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},M),+)$ y el homomorfismo $ev : G \to M$ tal que $ev(\tau) = \tau(1)$ para todo $\tau \in G$. Entonces (G,ev) es una cubierta celular de M.*

Lema 4.27 *Un subgrupo de torsión de un grupo nilpotente finitamente generado es finito.*

Demostración. Ver ([29], Ejercicio 3.10, pág. 11).

Lema 4.28 *Si N es un grupo nilpotente y $Ab(N)$ es un grupo de π-torsión, entonces N es un grupo de π-torsión.*

Demostración. Ver ([29], Corolario 3.13, pág. 11).

Lema 4.29 *Todo subgrupo de un grupo nilpotente finitamente generado es finitamente generado.*

Demostración. Ver ([21], Corolario 5.6, pág. 88) o ([18], pág. 49).

Teorema 4.30 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo nilpotente M. Si M es finitamente generado, entonces c es inyectivo.*

Demostración. Primero observamos que si $c : G \to M$ es una cubierta celular de un grupo nilpotente M, entonces su correstricción $c' : G \to c(G)$ es una cubierta celular del grupo nilpotente $c(G)$.

Supongamos que M es finitamente generado. Como M es nilpotente, por el lema 4.29, $c(G)$ es finitamente generado. Luego, si (G, c) es una cubierta celular de un grupo nilpotente y finitamente generado M entonces (G, c') es una cubierta celular del grupo nilpotente y finitamente generado $c(G)$, por lo que podemos suponer que c es suprayectivo.

A partir de ahora, escribimos $A := Ab(M)$. Tenemos dos casos:

Caso 1: A no es un grupo de torsión.

Como M es finitamente generado, A es finitamente generado lo cual implica que $A/tor(A)$ también es finitamente generado. Luego, $A/tor(A)$ es un grupo abeliano libre de torsión no trivial y finitamente generado, por lo que $A/tor(A) = \bigoplus \mathbb{Z}$. Entonces, $\mathbb{Z}$ es una imagen homomórfica de $A/tor(A)$ y como $A/tor(A)$ es una imagen homomórfica de A, $\mathbb{Z}$ es una imagen homomórfica de A. Además, A es una imagen homomórfica de M y M es una imagen homomórfica de G (pues c es suprayectivo), lo cual implica que $\mathbb{Z}$ es una imagen homomórfica de G. Por lo tanto, como todo grupo cíclico es una imagen homomórfica de $\mathbb{Z}$, todo grupo cíclico es una imagen homomórfica de G.

Ahora, veamos que $\ker c = 1$:

Sea $a \in \ker c$. Como $D := \langle a \rangle$ es un grupo cíclico, existe un epimorfismo $\psi : G \to D$, por lo que $i \circ \psi \in \mathrm{Hom}(G, \ker c)$ (donde $i : D \hookrightarrow \ker c$ es la inclusión) y como $\ker c$ es G-nulo, $i \circ \psi = 0$. Luego, $1 = 0(G) = i \circ \psi(G) = i(D)$ y, por consiguiente, $a = 1$. Por lo tanto, $\ker c = 1$ y c es inyectivo.

Caso 2: A es un grupo de torsión.

Como M es nilpotente y A es un grupo de torsión, por el lema 4.28, M es un grupo de torsión. Luego, por el lema 4.27, M es un grupo finito y como (G, c) es una cubierta celular de M, por el teorema 4.44, G es un grupo finito. Además, sabemos que G es nilpotente (por el teorema 4.24) por lo que G es un producto directo de sus subgrupos de Sylow, es decir, $G = G_{p_1} \times \cdots \times G_{p_r}$.

Supongamos que c no es inyectivo, es decir, que $\ker c \neq 1$ y sea p un número primo tal que $p\big||\ker c|$. Por lo tanto existe $a \in \ker c$ de orden p, por lo que $B := \langle a \rangle$ es un subgrupo cíclico de $\ker c$ cuyo orden es p. Además, $p\big||G|$ (pues $|\ker c|\big||G|$) de donde $p = p_n$ con $n \in \{1, \ldots, r\}$, digamos $p = p_1$.

Sea V un subgrupo maximal de G_p. Entonces, V es normal y tiene índice p por lo que $G_p/V \cong \mathbb{Z}_p$. Luego, $j \circ \theta_1 \circ \theta \circ q \circ \pi_1 \in \mathrm{Hom}(G, \ker c)$ (donde $\pi_1 : G \to G_p$ es la proyección canónica, $q : G_p \to G_p/V$ es el homomorfismo cociente, $\theta : G_p/V \to \mathbb{Z}_p$ y $\theta_1 : \mathbb{Z}_p \to B$ son los isomorfismos, y $j : B \hookrightarrow \ker c$ es la inclusión) y como $\ker c$ es G-nulo, $0 = j \circ \theta_1 \circ \theta \circ q \circ \pi_1$ de donde $0 = \theta_1 \circ \theta$. Entonces $1 = 0(G_p/V) = \theta_1 \circ \theta(G_p/V) = B$ y se sigue que $a = 1$, lo cual es falso, pues a es de orden p. Por lo tanto, c es inyectivo. □

Corolario 4.31 *Si (G, c) es una cubierta celular de un grupo nilpotente y finitamente generado M, entonces G es nilpotente y finitamente generado.*

Teorema 4.32 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo finito M. Si $c(G)$ es nilpotente entonces c es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $c(G)$ es nilpotente. Como M es finito, $c(G)$ es finito por lo que también es finitamente generado. Entonces (G, c') es una cubierta celular del grupo nilpotente y finitamente generado $c(G)$ (donde $c' : G \to c(G)$ es la correstricción de c) y, por el teorema 4.30, c' es inyectivo. Por lo tanto, c es inyectivo. □

Corolario 4.33 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo abeliano finito M. Entonces, G es un grupo abeliano finito y c es inyectivo.*

Lema 4.34 *Sean G un grupo y p un número primo. Supongamos que G contiene una cadena de subgrupos*

$$G \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \ldots$$

tal que $N_i \lhd G$ y $G/N_i \cong C(p^\infty)$ para todo i.

Si $N := \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i$, entonces

(1) G/N es abeliano.

(2) G/N es libre de torsión.

Demostración. (1) Como para todo i, $G/N_i \cong C(p^\infty)$ es abeliano tenemos que para cada i, $[G, G] \leq N_i$. Por lo tanto, $[G, G] \leq N$ y G/N es abeliano.

(2) Como $G \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \ldots$ tenemos que $G/N \supsetneq N_1/N \supsetneq N_2/N \supsetneq \ldots$. Además, $(G/N)/(N_i/N) \cong G/N_i \cong C(p^\infty)$ para todo i. Luego podemos suponer que $N = \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$.

Primero veamos que G es libre de p-torsión. Recordemos que $C(p^\infty)$ contiene un único subgrupo de orden p y que dicho subgrupo está contenido en cualquier subgrupo no trivial de $C(p^\infty)$.

Sea $a \in G$ tal que $a^p = 1$. Luego, $aN_{i+1} \in G/N_{i+1}$ y $[aN_{i+1}]^p = a^p N_{i+1} = N_{i+1}$. Entonces $A := \langle aN_{i+1} \rangle$ es un subgrupo cíclico de $G/N_{i+1} \cong C(p^\infty)$

cuyo orden es 1 o p. Como N_i/N_{i+1} es un subgrupo no trivial de G/N_{i+1}, $A \leq N_i/N_{i+1}$ de donde $aN_{i+1} \in N_i/N_{i+1}$ y $a \in N_i$ para cada i. Luego $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = N = 1$ y $a = 1$. Por lo tanto G es libre de p-torsión.

Veamos que $C(p^\infty)$ es libre de q-torsión, para todo primo $q \neq p$.

Sea $\frac{b}{p^r} + \mathbb{Z} \in C(p^\infty)$ tal que $q(\frac{b}{p^r} + \mathbb{Z}) = 0 + \mathbb{Z}$. Entonces, $\frac{qb}{p^r} \in \mathbb{Z}$ y $p^r|qb$. Como $(p, q) = 1$, $p^r|b$ por lo que $\frac{b}{p^r} \in \mathbb{Z}$ y $\frac{b}{p^r} + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$. Por lo tanto $C(p^\infty)$ es libre de q-torsión.

Sea $a \in G$ tal que $a^q = 1$ (con $q \neq p$). Entonces $[aN_i]^q = a^q N_i = N_i$ y como $G/N_i \cong C(p^\infty)$ es libre de q-torsión, $aN_i = N_i$ y $a \in N_i$ para todo i. Luego, $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$ y $a = 1$. Por lo tanto G es libre de q-torsión.

Por lo tanto, G es libre de torsión. □

Proposición 4.35 *Sean (G, c) una cubierta celular de un grupo nilpotente M, $H := c(G)$ y p un número primo. Supongamos que $(\ker c)_p \neq 1$, entonces*

(1) *G y H son p-divisibles. Además, G contiene un subgrupo normal K tal que $G/K \cong C(p^\infty)$.*

(2) *$G_p \leq Z(G)$ y $H_p \leq Z(H)$, G_p y H_p son grupos divisibles y $H_p \neq 1$.*

(3) *G contiene un subgrupo A tal que $A \cong C(p^\infty)$, $A \cap \ker c$ es un subgrupo cíclico puro no trivial de $\ker c$. Además, existe $\varphi \in \operatorname{Hom}(G, H)$ tal que $\varphi(G) = c(A)$ y para todo homomorfismo φ que cumpla con lo anterior, existe una cadena de subgrupos*

$$G \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \dots$$

tal que $N_1 = \ker \varphi$ y $G/N_i \cong C(p^\infty)$ para todo i.

(4) *$Ab(G)$ es libre de p-torsión.*

Demostración. (1) Sea $v \in (\ker c)_p$ no trivial. Luego, existe un entero $l \geq 1$ tal que $v^{p^l} = 1$, lo cual implica que el orden de v es p^s con $s \geq 1$.

Si $s = 1$ entonces $\langle v \rangle$ es un subgrupo cíclico de $\ker c$ cuyo orden es p.

Si $s > 1$ entonces $\langle v^{p^{s-1}} \rangle$ es un subgrupo cíclico de $\ker c$ cuyo orden es p.

Por lo tanto $\ker c$ contiene un subgrupo cíclico E de orden p.

Veamos que $Ab(G)$ no tiene subgrupos de índice p.

Sea I un subgrupo de $Ab(G)$ cuyo índice es p. Entonces $Ab(G)/I$ es un grupo cíclico isomorfo a E, por lo que $i \circ \psi \circ q \circ \pi \in \operatorname{Hom}(G, \ker c)$ (donde $i : E \hookrightarrow \ker c$ es la inclusión, $\psi : Ab(G)/I \to E$ es el isomorfismo y $\pi : G \to Ab(G)$ y $q : Ab(G) \to Ab(G)/I$ son los homomorfismos cocientes). Como $\ker c$ es G-nulo, $i \circ \psi \circ q \circ \pi = 0$ de donde $\psi = 0$ (pues i es un monomorfismo y π y q son epimorfismos), lo cual es falso (pues $E \neq 1$). Por lo tanto $Ab(G)$ no tiene subgrupos de índice p.

Veamos que $Ab(G) = Ab(G)^p$, es decir, que $Ab(G)$ es p-divisible.

Supongamos que $Ab(G)^p \subsetneq Ab(G)$. Como todos los elementos no triviales de $Ab(G)/Ab(G)^p$ tienen orden p, $Ab(G)/Ab(G)^p$ es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial. Luego $Ab(G)/Ab(G)^p \cong \bigoplus \mathbb{Z}_p$ por lo que $i \circ \theta_1 \circ \pi_1 \circ \theta \circ q_1 \circ \pi \in \operatorname{Hom}(G, \ker c)$ (donde $\theta_1 : \mathbb{Z}_p \to E$ y $\theta : Ab(G)/Ab(G)^p \to \bigoplus \mathbb{Z}_p$ son los isomorfismos, $\pi_1 : \bigoplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ es la proyección y $q_1 : Ab(G) \to Ab(G)/Ab(G)^p$ es el homomorfismo cociente) y como $\ker c$ es G-nulo, $i \circ \theta_1 \circ \pi_1 \circ \theta \circ q_1 \circ \pi = 0$ de donde $\theta_1 = 0$, lo cual es falso. Por lo tanto, $Ab(G)^p = Ab(G)$ y $Ab(G)$ es p-divisible.

Como G es nilpotente y $Ab(G)$ es p-divisible, por la proposición 1.102(2), G es p-divisible. Luego $H = c(G) = c(G^p) = c(G)^p = H^p$ y H también es p-divisible. Además, como $G_p \neq 1$ (pues $(\ker c)_p \neq 1$) tenemos, por la proposición 1.104(5), que G contiene un subgrupo normal K tal que $G/K \cong C(p^\infty)$.

(2) Como G es nilpotente y p-divisible, por la proposición 1.104(1), $G_p \leq Z(G)$. Análogamente, $H_p \leq Z(H)$.

Veamos que G_p es divisible.

Sea $h \in G_p$. Luego, existe $t \geq 1$ tal que $h^{p^t} = 1$ y como $h \in G = G^p$, existe $g \in G$ tal que $h = g^p$. Observamos que $g \in G_p$ (pues $t+1$ cumple que $g^{p^{t+1}} = (g^p)^{p^t} = h^{p^t} = 1$), por lo que $h \in (G_p)^p$ y $G_p \leq (G_p)^p$. Entonces G_p es p-divisible y como G_p es un p-grupo, tenemos que G_p es q-divisible para todo primo $q \neq p$. Por lo tanto G_p es divisible.

Análogamente, H_p es divisible.

Sólo nos falta ver que $H_p \neq 1$.

Veamos que $(\ker c)_p$ es un grupo reducido.

Supongamos que $(\ker c)_p$ no es un grupo reducido. Entonces existe un subgrupo D de $(\ker c)_p$ tal que $D \cong C(p^\infty)$ o $D \cong \mathbb{Q}$.

Supongamos que $D \cong C(p^\infty)$. Luego $i_p \circ k \circ \epsilon_1 \circ \epsilon \circ \pi_K \in \operatorname{Hom}(G, \ker c)$ (donde $i_p : (\ker c)_p \hookrightarrow \ker c$ y $k : D \hookrightarrow (\ker c)_p$ son las inclusiones, $\epsilon : G/K \to C(p^\infty)$ y $\epsilon_1 : C(p^\infty) \to D$ son los isomorfismos y $\pi_K : G \to G/K$ es el homomorfismo cociente) y como $\ker c$ es G-nulo, $i_p \circ k \circ \epsilon_1 \circ \epsilon \circ \pi_K = 0$ de donde $\epsilon_1 = 0$, lo cual es falso. Por lo tanto D no es isomorfo a $C(p^\infty)$.

Supongamos que $D \cong \mathbb{Q}$. Como D es un p-grupo (pues $D \leq (\ker c)_p$), $\mathbb{Q}$ es un p-grupo, lo cual es falso. Por lo tanto, D tampoco es isomorfo a $\mathbb{Q}$.

Por lo tanto, $(\ker c)_p$ es un grupo reducido.

Como $(\ker c)_p$ es un p-grupo reducido entonces no es p-divisible, es decir, $(\ker c)_p$ tiene elementos que no son divisibles por p. Sea $a \in (\ker c)_p$ tal que p no divide a a en $(\ker c)_p$ ($h_p(a) = 0$). Como G_p es abeliano y $a \in G_p$, por el teorema 1.94(4), existe un sumando directo A de G_p tal que $a \in A$ y $A \cong C(p^k)$, donde k es un entero positivo o $k = \infty$. Luego, $G_p/\ker \pi_1 \cong A$ (donde $\pi_1 : G_p = A \oplus F \to A$ es la proyección canónica) y como G_p es divisible, A es divisible por lo que $A \cong C(p^\infty)$.

Observamos que, como $A \leq G_p \leq Z(G)$ y $\ker c \leq Z(G)$, $A \ker c$ es un grupo abeliano.

Veamos que $A \cap \ker c = \langle a \rangle$.

Como $a \in A$ y $a \in (\ker c)_p \leq \ker c$, $\langle a \rangle \leq A \cap \ker c$.

Sea $x \in A \cap \ker c$. Entonces $x \in \ker c$ y $x \in A \cong C(p^\infty)$, lo cual implica que el orden de x es una potencia de p. Luego $x \in (\ker c)_p$, por lo que $\langle x \rangle$ es un subgrupo cíclico de A cuyo orden es p^w para alguna w. Análogamente, como $a \in A$ y $a \in (\ker c)_p$, $\langle a \rangle$ es un subgrupo cíclico de A cuyo orden es p^r para alguna r. Como el conjunto de todos los subgrupos de $A \cong C(p^\infty)$ está bien ordenado por la inclusión, $\langle x \rangle \subseteq \langle a \rangle$ o $\langle a \rangle \subseteq \langle x \rangle$.

Supongamos que $\langle a \rangle \subseteq \langle x \rangle$. Entonces $a \in \langle x \rangle$, por lo que existe un entero t

tal que $a = tx$. Como p no divide a a en $(\ker c)_p$, p no divide a t, lo cual implica que $1 = (t, p^w) = \alpha t + \beta p^w$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Luego, $x = \alpha tx + \beta p^w x = \alpha tx = \alpha a \in \langle a \rangle$ y $\langle x \rangle \subseteq \langle a \rangle$.

Por lo tanto, $A \cap \ker c = \langle a \rangle$.

Como $\ker c$ es abeliano, $a \in (\ker c)_p$, $a = p^0 a$ con $a \in \ker c$ tal que $h_p(a) = 0$ entonces, por la proposición 1.95, $\langle a \rangle$ es un subgrupo puro de $\ker c$.

Como $\langle a \rangle$ es un subgrupo cíclico puro de $\ker c$ cuyo orden es p^r, por el teorema 1.94(3), $A \cap \ker c = \langle a \rangle$ es un sumando directo de $\ker c$. Es decir, $\ker c = \langle a \rangle \oplus B$ con $B \leq \ker c$ de donde $\ker c = \langle a \rangle B$ y $\langle a \rangle \cap B = 1$. Luego $A \ker c = A\langle a \rangle B = AB$ y $1 = \langle a \rangle \cap B = A \cap \ker c \cap B = A \cap B$, por lo que $A \ker c = A \times B$ con $B \leq \ker c$.

Como $A \cap \ker c$ es finito, $c(A) \cong A/(A \cap \ker c) \cong A \cong C(p^\infty)$ y $H_p \neq 1$ (pues, $c(A) \leq H$).

(3) Ya vimos, en (2), que G contiene un subgrupo A tal que $A \cong C(p^\infty)$ y que $A \cap \ker c$ es un subgrupo cíclico puro no trivial de $\ker c$. Entonces $\varphi := i_H \circ \delta_1 \circ \epsilon \circ \pi_K \in \mathrm{Hom}(G, H)$ (donde $\delta_1 : C(p^\infty) \to c(A)$ es el isomorfismo e $i_H : c(A) \hookrightarrow c(G) = H$ es la inclusión) satisface $\varphi(G) = c(A)$.

Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ tal que $\varphi(G) = c(A)$. Como la correstricción $c' : G \to H$ es una cubierta celular de H (pues $c : G \to M$ es una cubierta celular de M), existe un único $\hat{\varphi} \in End(G)$ tal que $\varphi = c' \circ \hat{\varphi}$. Luego $c(A) = \varphi(G) = c' \circ \hat{\varphi}(G) = c(\hat{\varphi}(G))$.

Veamos que $\hat{\varphi}(G) \leq A \ker c$.

Sea $h \in \hat{\varphi}(G)$. Entonces $c(h) \in c(\hat{\varphi}(G)) = c(A)$, por lo que $c(h) = c(b)$ con $b \in A$. Luego $1 = c(h)c(b)^{-1} = c(hb^{-1})$, lo cual implica que $hb^{-1} \in \ker c$, de donde $h = bx$ con $x \in \ker c$. Por lo tanto, $h = bx \in A \ker c$ y $\hat{\varphi}(G) \leq A \ker c = A \times B$.

Entonces $i_B \circ \pi_2 \circ i_{\hat{\varphi}(G)} \circ \hat{\varphi}' \in \mathrm{Hom}(G, \ker c)$ (donde $\hat{\varphi}' : G \to \hat{\varphi}(G)$ es la correstricción de $\hat{\varphi}$, $\pi_2 : A \ker c \to B$ es la proyección canónica, $i_{\hat{\varphi}(G)} : \hat{\varphi}(G) \hookrightarrow A \ker c$ e $i_B : B \hookrightarrow \ker c$ son las inclusiones) y como $\ker c$ es G-nulo, $i_B \circ \pi_2 \circ i_{\hat{\varphi}(G)} \circ \hat{\varphi}' = 0$ lo cual implica que $\pi_2 \circ i_{\hat{\varphi}(G)} = 0$. Luego, $1 = 0(\hat{\varphi}(G)) = \pi_2 \circ i_{\hat{\varphi}(G)}(\hat{\varphi}(G)) = \pi_2(\hat{\varphi}(G))$ de donde $\hat{\varphi}(G) \leq A$. Como $\hat{\varphi}(G)/(\hat{\varphi}(G) \cap \ker c) \cong c(\hat{\varphi}(G)) = c' \circ \hat{\varphi}(G) = \varphi(G) = c(A) \cong C(p^\infty)$, $\hat{\varphi}(G)$ es infinito por lo que $\hat{\varphi}(G) = A \cong C(p^\infty) \cong c(A) = \varphi(G)$.

Veamos que $\hat{\varphi}(\ker \varphi) = A \cap \ker c$.

Como $\ker \varphi \leq G$, $\hat{\varphi}(\ker \varphi) \leq \hat{\varphi}(G) = A$ y como $\hat{\varphi}(\ker \varphi) \leq \ker c$, $\hat{\varphi}(\ker \varphi) \leq A \cap \ker c$.

Sea $y \in A \cap \ker c$. Entonces $y \in \ker c$ y $y \in A = \hat{\varphi}(G)$, de donde $y = \hat{\varphi}(g)$ con $g \in G$. Luego $1 = c(y) = c \circ \hat{\varphi}(g) = \varphi(g)$ y, por consiguiente, $g \in \ker \varphi$. Entonces, $y = \hat{\varphi}(g) \in \hat{\varphi}(\ker \varphi)$ por lo que $A \cap \ker c \leq \hat{\varphi}(\ker \varphi)$.

Por lo tanto, $\hat{\varphi}(\ker \varphi) = A \cap \ker c$.

Como $A \cap \ker c \neq 1$, $\ker \varphi \nsubseteq \ker \hat{\varphi}$ lo cual implica que $\ker \varphi \neq \ker \hat{\varphi}$.

Veamos que $\ker \hat{\varphi} \leq \ker \varphi$.

Sea $z \in \ker \hat{\varphi}$. Luego, $\varphi(z) = c' \circ \hat{\varphi}(z) = c'(1) = 1$ y $z \in \ker \varphi$. Por lo tanto, $\ker \hat{\varphi} \leq \ker \varphi$.

Observamos que $G/\ker \hat{\varphi} \cong \hat{\varphi}(G) = A$.

Por lo tanto, para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,H)$ tal que $\varphi(G) = c(A)$ tenemos que $\ker\hat{\varphi} \subsetneq \ker\varphi$ y $\hat{\varphi}(G) = A$.

Ahora, sean $\varphi_1 := \varphi \in \mathrm{Hom}(G,H)$ y $\varphi_{i+1} \in \mathrm{Hom}(G,H)$ tal que $\ker\varphi_{i+1} = \ker\hat{\varphi}_i$ y $\varphi_{i+1}(G) = c(A)$. Si $N_i := \ker\hat{\varphi}_i$ para cada i, tenemos una cadena de subgrupos

$$G \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \dots$$

tal que para todo i, $N_i \lhd G$ y $G/N_i \cong C(p^\infty)$:

Por definición, $N_i \subseteq G$ y $N_i \trianglelefteq G$ para cada i. Además, $G/N_i = G/\ker\varphi_i \cong \varphi_i(G) = c(A) \cong C(p^\infty)$ para todo i.

Ahora, si $\ker\varphi_1 = N_1 = G$ entonces $1 = \varphi_1(G) = \varphi(G) = c(A)$, lo cual es falso pues $A \nsubseteq \ker c$ (si $A \subseteq \ker c$ entonces $\langle a\rangle = A \cap \ker c = A$ y A es un p-grupo cíclico finito, lo cual es falso pues $A \cong C(p^\infty)$). Por lo tanto $N_1 \subsetneq G$.

Ya vimos que $N_2 = \ker\hat{\varphi}_1 = \ker\hat{\varphi} \subsetneq \ker\varphi = \ker\varphi_1 = N_1$.

Como $\varphi_{i+1} \in \mathrm{Hom}(G,H)$ satisface que $\varphi_{i+1}(G) = c(A)$, $N_{i+2} = \ker\varphi_{i+2} = \ker\hat{\varphi}_{i+1} \subsetneq \ker\varphi_{i+1} = N_{i+1}$ para cada i.

(4) Supongamos que $Ab(G)$ no es libre de p-torsión. Entonces $Ab(G)_p \neq 1$ y, por el teorema 1.94(4), existe un sumando directo U de $Ab(G)$ tal que $U \cong C(p^k)$ con k un entero positivo o $k = \infty$, pero como $Ab(G)$ es p-divisible (hecho que vimos en (1)), $U \cong C(p^\infty)$. Queda así establecido, que $Ab(G)$ contiene un subgrupo U tal que $U \cong C(p^\infty) \cong c(A)$.

Sea $\psi_1 : U \to c(A)$ un isomorfismo. Por el teorema 1.94(2), ψ_1 se extiende a un homomorfismo $\eta : Ab(G) \to c(A)$, es decir, $\psi_1 = \eta \circ i_U$ (donde $i_U : U \hookrightarrow Ab(G)$ es la inclusión). Luego, $\alpha := i_H \circ \eta \circ \pi \in \mathrm{Hom}(G,H)$ satisface que $\alpha(G) = c(A)$ (pues como ψ_1 es un epimorfismo, η es un epimorfismo por lo que $\alpha(G) = i_H \circ \eta \circ \pi(G) = i_H \circ \eta(Ab(G)) = i_H(c(A)) = c(A)$) y, por (3), tenemos una cadena de subgrupos

$$G \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \dots$$

tal que $N_1 = \ker\alpha$, $N_i \lhd G$ y $G/N_i \cong C(p^\infty)$.

Sea $N := \bigcap_{i=1}^\infty N_i$. Por el lema anterior, G/N es abeliano lo cual implica que $[G,G] \leq N$ y, por el tercer teorema de isomorfismo, $Ab(G)/(N/[G,G]) \cong G/N$. Entonces, tenemos un epimorfismo $\beta := \delta \circ q_3 \in \mathrm{Hom}(Ab(G), G/N)$ (donde $q_3 : Ab(G) \to Ab(G)/(N/[G,G])$ es el homomorfismo cociente y $\delta : Ab(G)/(N/[G,G]) \to G/N$ es el isomorfismo).

Como el homomorfismo cociente $\pi_{N_1} : G \to G/N_1$ cumple que $[G,G] \leq N \leq N_1 = \ker\pi_{N_1}$, existe un único $q_{N_1} \in \mathrm{Hom}(Ab(G), G/N_1)$ tal que $\pi_{N_1} = q_{N_1} \circ \pi$. Luego $q_{N_1}(g[G,G]) = q_{N_1} \circ \pi(g) = \pi_{N_1}(g) = gN_1$ para todo $g[G,G] \in Ab(G)$ y observamos que $\ker q_{N_1} = N_1/[G,G]$. Además, q_{N_1} es un epimorfismo pues π_{N_1} es un epimorfismo.

Veamos que $q_{N_1}(U)$ no es trivial.

Sea $u = g[G,G] \in U$ no trivial. Como $\ker\psi_1 = 1$, $u \notin \ker\psi_1$ por lo que $\eta(u) = \eta \circ i_U(u) = \psi_1(u) \neq 1$. Entonces $\alpha(g) = i_H \circ \eta \circ \pi(g) = i_H \circ \eta(u) = \eta(u) \neq 1$, lo cual implica que $g \notin \ker\alpha = N_1$. Luego $u = g[G,G] \notin N_1/[G,G]$, por lo que $U \nsubseteq N_1/[G,G]$. Por lo tanto $q_{N_1}(U)$ no es trivial.

Veamos que $\beta(U)$ no es trivial.

Como $q_{N_1} = \pi_3 \circ \beta$ (donde $\pi_3 : G/N \to G/N_1$ es el homomorfismo tal que $gN \mapsto gN_1$) y $q_{N_1}(U)$ no es trivial, $\beta(U)$ no es trivial.

Como $U \cong C(p^\infty)$, U es un p-subgrupo de $Ab(G)$ lo cual implica que $\beta(U)$ es un p-subgrupo no trivial de G/N, por lo que G/N no es libre de torsión, contradiciendo el lema anterior. Por lo tanto, $Ab(G)$ es libre de p-torsión. □

Corolario 4.36 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo nilpotente M. Luego,*

(1) *Si* $\ker c \neq 1$ *entonces G y $Ab(G)$ no son grupos de torsión.*

(2) $\ker c$ *es un grupo reducido.*

Demostración. (1) Supongamos que $\ker c \neq 1$ y que $Ab(G)$ es un grupo de torsión. Como (G, c) es una cubierta celular de un grupo nilpotente M, por el teorema 4.24, G es un grupo nilpotente y como $Ab(G)$ es un grupo de torsión, por el lema 4.28, G es un grupo de torsión. Luego $\ker c$ es un grupo de torsión, por lo que $(\ker c)_p \neq 1$ para algún primo p. Por la proposición 4.35(3), existe una cadena de subgrupos

$$G \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \dots$$

Sea $N := \bigcap_{i=1}^\infty N_i$. Por el lema 4.34(1), G/N es abeliano, lo cual implica que $[G, G] \leq N$. Entonces $G/N \cong Ab(G)/(N/[G, G])$ y como $Ab(G)$ es un grupo de torsión, G/N es un grupo de torsión. Pero, por el lema 4.34(2), G/N también es un grupo libre de torsión por lo que G/N es trivial. Luego $G = N$ lo cual es falso pues, como $N_i \subsetneq G$ para todo i tenemos que $N \subsetneq G$. Por lo tanto, $Ab(G)$ no es un grupo de torsión y, por consiguiente, G tampoco es un grupo de torsión (si G es un grupo de torsión entonces $Ab(G)$ es un grupo de torsión, lo cual contradice lo ya probado).

(2) Supongamos que $\ker c$ no es reducido. Entonces existe $D \leq \ker c$ tal que $D \cong C(p^\infty)$ o $D \cong \mathbb{Q}$. Luego $\ker c \neq 1$ por lo que, por (1), $Ab(G)$ no es un grupo de torsión. Como $Ab(G)$ no es trivial (pues si $Ab(G)$ es trivial entonces es un grupo de torsión), existe $[G, G] \neq g[G, G] \in Ab(G)$ tal que $g^n[G, G] = (g[G, G])^n \neq [G, G]$ para todo n, es decir, $g^n \notin [G, G]$ para todo n. Luego $U := \langle g[G, G]\rangle$ es un subgrupo cíclico de $Ab(G)$ con orden infinito, por lo que $U \cong \mathbb{Z}$.

Sea $a \in \ker c$ no trivial. Definimos el homomorfismo $\beta : \mathbb{Z} \to \ker c$ tal que $\beta(m) = ma$. Como D es un subgrupo divisible de $\ker c$, por el teorema 1.94(1), $\ker c = D \oplus B$ con $B \leq \ker c$. Luego $\pi_1 \circ \beta \circ \theta_1 \in \mathrm{Hom}(U, D)$ (donde $\theta_1 : U \to \mathbb{Z}$ es el isomorfismo y $\pi_1 : \ker c = D \oplus B \to D$ es la proyección canónica) no es trivial. Como $U \leq Ab(G)$ y D es divisible, por el teorema 1.94(2), $\pi_1 \circ \beta \circ \theta_1$ se extiende a un homomorfismo no trivial $\psi : Ab(G) \to D$, es decir, $\pi_1 \circ \beta \circ \theta_1 = \psi \circ j$ (donde $j : U \hookrightarrow Ab(G)$ es la inclusión). Entonces $k \circ \psi \circ \pi \in \mathrm{Hom}(G, \ker c)$ (donde $\pi : G \to Ab(G)$ es el homomorfismo cociente y $k : D \hookrightarrow \ker c$ es la inclusión) no es trivial, lo cual contradice el hecho de que $\ker c$ es G-nulo. Por lo tanto, $\ker c$ es reducido. □

Corolario 4.37 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo nilpotente M. Si G es un grupo de torsión entonces c es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo de torsión y que c no es inyectivo, es decir, que $\ker c \neq 1$. Entonces, por el corolario anterior, G no es un grupo de torsión lo cual es una contradicción. Por lo tanto, c es inyectivo. □

Teorema 4.38 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo abeliano M. Entonces,* $\ker c$ *es un grupo reducido y libre de torsión.*

Demostración. Como M es un grupo nilpotente de clase 1 (pues es abeliano), por el corolario 4.36(2), $\ker c$ es un grupo reducido.

Ahora, supongamos que $\ker c$ no es un grupo de libre de torsión. Entonces, existe un número primo p tal que $(\ker c)_p \neq 1$ por lo que, por la proposición 4.35(4), $Ab(G)$ es un grupo libre de p-torsión. Como M es abeliano, por el corolario 4.25, G es abeliano lo cual implica que $G \cong Ab(G)$. Por lo tanto, G es grupo libre de p-torsión de donde $\ker c$ también es un grupo libre de p-torsión, lo cual contradice el hecho de que $(\ker c)_p \neq 1$. □

4.3 Cubiertas celulares de grupos finitos

En esta sección veremos el caso en el que (G, c) es una cubierta celular de un grupo finito M. Los resultados principales son que si M es finito entonces G es finito, y que si $c(G)$ es perfecto entonces G es perfecto.

Proposición 4.39 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo cíclico finito M. Entonces, c es inyectivo y G es un grupo cíclico finito.*

Demostración. Como $c(G)$ es un grupo cíclico finito y $c \in \mathrm{Hom}(G, M)$, por la proposición 4.15, su levantamiento $1_G \in End(G)$ satisface $1 = \ker 1_G = \ker c$ y $G = 1_G(G) \cong c(G)$. Por lo tanto, c es inyectivo y G es un grupo cíclico finito. □

Lema 4.40 *Sea G un grupo tal que $G/Z(G)$ es finito, entonces $[G, G]$ es finito.*

La demostración se puede ver en ([1],(33.9), pág. 169) o también en ([26], Teorema 5.32, pág. 114).

Lema 4.41 *Sean H un grupo abeliano y X un subgrupo finito de H. Si H/X contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Q}$ o a $C(p^\infty)$ entonces H también (es decir, si H/X no es reducido entonces H tampoco es reducido).*

Demostración. Sea n el orden de X y supongamos que H/X no es un grupo reducido. Entonces existe un subgrupo D de H/X tal que $D \cong \mathbb{Q}$ o $D \cong C(p^\infty)$. Definimos $\mathcal{D} := \pi^{-1}(D)$ (donde $\pi : H \to H/X$ es el homomorfismo cociente) y el homomorfismo $\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tal que $\psi(d) = nd$ para todo $d \in \mathcal{D}$. Como

$\mathcal{D}/X = D$ es divisible, $n\mathcal{D} = \psi(\mathcal{D}) \neq 0$ Además, por el primer teorema de isomorfismo, $n\mathcal{D} = \psi(\mathcal{D}) \cong \mathcal{D}/\ker\psi$. También observamos que $X \leq \ker\psi$, pues $\psi(x) = nx = 0$ para todo $x \in X$.

Supongamos que $D \cong \mathbb{Q}$ y sea $a \in \ker\psi$. Entonces $0 = \psi(a) = na$, por lo que $0+X = na+X = n(a+X)$. Como $\mathcal{D}/X = \pi(\mathcal{D}) = D \cong \mathbb{Q}$, $0+X = a+X$, lo cual implica que $a \in X$. Luego $\ker\psi \leq X$ y, por consiguiente, $\ker\psi = X$. Por lo tanto $\mathbb{Q} \cong D = \mathcal{D}/X = \mathcal{D}/\ker\psi \cong n\mathcal{D} \leq H$.

Supongamos que $D \cong C(p^\infty)$. Observamos que tenemos un epimorfimo $\theta : \mathcal{D}/X \to \mathcal{D}/\ker\psi$ tal que $\theta(d+X) = d + \ker\psi$. Entonces $n\mathcal{D} = \psi(\mathcal{D}) \cong \mathcal{D}/\ker\psi = \theta(\mathcal{D}/X) \cong (\mathcal{D}/X)/\ker\theta = (\mathcal{D}/X)/(\ker\psi/X)$ y como $n\mathcal{D} \neq 0$, $\ker\psi/X \lneq \mathcal{D}/X = D \cong C(p^\infty)$, lo cual implica que $\ker\psi/X$ es finito. Por lo tanto $C(p^\infty) \cong D = \mathcal{D}/X \cong (\mathcal{D}/X)/(\ker\psi/X) \cong n\mathcal{D} \leq H$. □

Proposición 4.42 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo finito M. Entonces,*

(1) *$Ab(G)$ es un grupo reducido.*

(2) *$tor(\ker c) = [G, G] \cap \ker c$ y $\ker c$ se escinde sobre $[G, G] \cap \ker c$.*

(3) *G es finito y $\ker c \leq [G, G]$.*

Demostración. (1) Sea $K := \ker c$. Como M es finito, $G/K \cong c(G)$ es finito por lo que $G/(K[G, G]) \cong (G/K)/(K[G, G]/K)$ también es finito.

Observamos que como un grupo abeliano divisible no tiene imágenes homomórficas finitas (es decir, todo cociente no trivial de un grupo abeliano divisible es infinito), todo subgrupo divisible de $Ab(G)$ está contenido en $K[G, G]/[G, G] \cong K/(K \cap [G, G])$:

Sea B un subgrupo divisible de $Ab(G)$. Definimos un homomorfismo $\alpha : B \to Ab(G)/(K[G, G]/[G, G])$ tal que $\alpha(b) = b(K[G, G]/[G, G])$. Como tenemos que $Ab(G)/(K[G, G]/[G, G]) = (G/[G, G])/(K[G, G]/[G, G]) \cong G/(K[G, G])$ es finito y que $\ker\alpha = B \cap (K[G, G]/[G, G])$, $B/(B \cap (K[G, G]/[G, G])) = B/\ker\alpha \cong \alpha(B) \leq Ab(G)/(K[G, G]/[G, G])$ es finito. Por lo tanto, $B \cap (K[G, G]/[G, G]) = B$ y $B \subseteq K[G, G]/[G, G]$.

Ahora, supongamos que $Ab(G)$ no es un grupo reducido. Entonces existe un subgrupo D de $Ab(G)$ tal que $D \cong \mathbb{Q}$ o $D \cong C(p^\infty)$. En cualquiera de los dos casos D es divisible por lo que $D \subseteq K[G, G]/[G, G] \cong K/(K \cap [G, G])$. Como G/K es finito y $K \leq Z(G)$ tenemos que $G/Z(G) \cong (G/K)/(Z(G)/K)$ es finito de donde, por el lema 4.40, $[G, G]$ es finito. De esta forma tenemos un subgrupo finito $K \cap [G, G]$ de un grupo abeliano K tal que $K/(K \cap [G, G]) \cong K[G, G]/[G, G]$ contiene un subgrupo D isomorfo a $\mathbb{Q}$ o a $C(p^\infty)$. Entonces, por el lema 4.41, K también contiene un subgrupo U isomorfo a $\mathbb{Q}$ o a $C(p^\infty)$. Luego, existe un isomorfismo $\psi : D \to U$ y como U es divisible, por el teorema 1.94(2), ψ se extiende a un homomorfismo $\varphi : Ab(G) \to U$, es decir, $\psi = \varphi \circ i$ (donde $i : D \hookrightarrow Ab(G)$ es la inclusión). Entonces, $j \circ \varphi \circ \pi \in \mathrm{Hom}(G, K)$ (donde $\pi : G \to Ab(G)$ es el homomorfismo cociente y $j : U \hookrightarrow K$ es la inclusión) y como K es G-nulo, $j \circ \varphi \circ \pi = 0$. Luego, $\varphi = 0$ por lo que $\psi = 0$ lo cual es falso. Por lo tanto, $Ab(G)$ es un grupo reducido.

(2) Sea $a \in [G,G] \cap \ker c$. Entonces, $a \in \ker c$ y como $[G,G]$ es finito, $a^n = 1$ (donde $n = |[G,G]|$). Por lo tanto, $a \in tor(\ker c)$ y $[G,G] \cap \ker c \subseteq tor(\ker c)$.

Ahora, supongamos que $[G,G] \cap \ker c \subsetneq tor(\ker c)$. Luego existe $v \in tor(\ker c)$ tal que $v \notin [G,G]$, de donde $v \in \ker c$ y existe un entero $l \neq 0$ tal que $v^l = 1$.

Sea $l = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ la factorización de l en primos y definamos $l_i := l/p_i^{k_i}$. Luego, v^{l_i} tiene orden $p_i^{k_i}$ y como $(l_1, l_2, \ldots, l_s) = 1$, existen enteros $r_1, r_2, \ldots, r_s$ tales que $1 = r_1 l_1 + \cdots + r_s l_s$, por lo que $v = v^{r_1 l_1 + \cdots + r_s l_s} = v^{r_1 l_1} \cdots v^{r_s l_s}$.

Si $v^{l_i} \in [G,G]$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ entonces $v \in [G,G]$, lo cual es una contradicción. Luego existe $j \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $v^{l_j} \notin [G,G]$ y, por consiguiente, existe $x := v^{l_j} \in \ker c$ cuyo orden es p^k (donde $p := p_j$ y $k := k_j$) tal que $x \notin [G,G]$. Como $x^{p^k} = 1 \in [G,G]$ y $x \notin [G,G]$, existe $s \in \{1, p, \ldots, p^{k-1}\}$ tal que $x^s \notin [G,G]$ pero $(x^s)^p \in [G,G]$, es decir, existe $y := x^s \in \ker c$ (con $s \in \{1, p, \ldots, p^{k-1}\}$) tal que $y \notin [G,G]$ pero $y^p \in [G,G]$.

Observamos que el orden de $y[G,G]$ es p, es decir, que $y[G,G] \in Ab(G)_p$. Como $Ab(G)$ es abeliano y reducido, por el teorema 1.94(4), existe un sumando directo $A \leq Ab(G)$ tal que $y[G,G] \in A$ y $A \cong C(p^t)$ con t un entero positivo. Entonces $\psi := \theta_2 \circ \eta \circ \theta_1 \circ \theta \circ \pi_1 \in \operatorname{Hom}(Ab(G), C(p))$ (donde $\pi_1 : Ab(G) = A \oplus B \to A$ es la proyección canónica, $\theta : A \to C(p^t)$, $\theta_1 : C(p^t) \to \mathbb{Z}_{p^t}$ y $\theta_2 : \mathbb{Z}_p \to C(p)$ son los isomorfismos, y $\eta : \mathbb{Z}_{p^t} \to \mathbb{Z}_p$ es un epimorfismo tal que $[m]_{p^t} \mapsto [m]_p$) es un epimorfismo, por lo que $Ab(G)/\ker \psi \cong \psi(Ab(G)) = C(p)$.

Como $x^{p^{k-1}} \in \ker c$ tiene orden p, $E := \langle x^{p^{k-1}} \rangle$ es un subgrupo cíclico de $\ker c$ cuyo orden es p, de donde $E \cong C(p)$. Luego, $\epsilon \circ \theta_3 \circ \psi \circ \pi \in \operatorname{Hom}(G, \ker c)$ (donde $\pi : G \to Ab(G)$ es el homomorfismo cociente, $\theta_3 : C(p) \to E$ es el isomorfismo y $\epsilon : E \hookrightarrow \ker c$ es la inclusión) y como $\ker c$ es G-nulo, $\epsilon \circ \theta_3 \circ \psi \circ \pi = 0$ por lo que $\psi = 0$ lo cual es falso. Por lo tanto, $tor(\ker c) = [G,G] \cap \ker c$.

Como $[G,G]$ es un grupo finito, $tor(\ker c)$ es un subgrupo puro finito y, por la proposición 1.99, $tor(\ker c)$ es un sumando directo de $\ker c$.

(3) Como $tor(\ker c)$ es un factor directo de $\ker c$, $\ker c = tor(\ker c) \times V = ([G,G] \cap \ker c) \times V$ con $V \leq \ker c$. Recordemos que $Ab(G)/([G,G]\ker c/[G,G]) \cong G/([G,G]\ker c)$ es finito.

Sea $m := |Ab(G)/([G,G]\ker c/[G,G])|$. Definimos un homomorfismo $\theta : Ab(G) \to [G,G]\ker c/[G,G]$ tal que $g[G,G] \mapsto (g[G,G])^m$, por lo que tenemos un homomorfismo $\psi := \theta \circ \pi : G \to [G,G]\ker c/[G,G]$ (donde $\pi : G \to Ab(G)$ es el homomorfismo cociente). Además, como $V \cong \ker c/([G,G] \cap \ker c) \cong [G,G]\ker c/[G,G]$, existe un isomorfismo $\beta : [G,G]\ker c/[G,G] \to V$ por lo que $i \circ \beta \circ \psi \in \operatorname{Hom}(G, \ker c)$ (donde $i : V \hookrightarrow \ker c$ es la inclusión). Como $\ker c$ es G-nulo, $i \circ \beta \circ \psi = 0$ de donde $\theta = 0$ (pues i es un monomorfismo, β es un isomorfismo y π es un epimorfismo). Entonces $1 = 0(g) = \theta(g[G,G]) = (g[G,G])^m = g^m[G,G]$ para todo $g \in G$, lo cual implica que $Ab(G)$ es un grupo de torsión.

Como $\ker c/([G,G] \cap \ker c) \cong [G,G]\ker c/[G,G] \leq Ab(G)$, tenemos que $\ker c/([G,G] \cap \ker c)$ es un grupo de torsión. Además, $\ker c/([G,G] \cap \ker c) = \ker c/tor(\ker c)$ también es libre de torsión por lo que $\ker c/([G,G] \cap \ker c)$ es trivial. Entonces, $\ker c = [G,G] \cap \ker c = tor(\ker c) \leq [G,G]$ y como $[G,G]$ es finito, $\ker c$ es finito.

Como G es una extensión de un grupo finito ($\ker c$) por un grupo finito ($c(G)/\ker c$), G es finito. $\square$

Lema 4.43 *Sea G un grupo finito y $H \trianglelefteq G$. Supongamos que $(|H|, |G/H|) = 1$ y que H o G/H son grupos solubles. Entonces, G se escinde sobre H.*

Demostración. Ver ([1], (18.1), pág. 70).

Teorema 4.44 *Sea (G, c) una cubierta celular de un grupo finito M. Entonces,*
(1) *G es finito tal que para todo primo p, si $p\big||G|$ entonces $p\big||M|$.*
(2) *Si $c(G)$ es perfecto entonces G es perfecto.*

Demostración. (1) Ya sabemos, por la proposición 4.42(3), que G es finito.

Supongamos que existe un primo p tal que p divide al orden de G, pero p no divide al orden de M y sea S un p-subgrupo de Sylow de G. Entonces $c(S) = 1$, por lo que $S \leq \ker c \leq Z(G)$ y $S \trianglelefteq G$. Además, $(|S|, |G/S|) = 1$ y S es soluble (pues S es un p-grupo finito) de donde, por el lema anterior, G se escinde sobre S. Luego tenemos un epimorfismo $\psi : G \to S$, por lo que $i \circ \psi \in \mathrm{Hom}(G, \ker c)$ (donde $i : S \hookrightarrow \ker c$ es la inclusión) y como $\ker c$ es G-nulo, $i \circ \psi = 0$ de donde se sigue que $\psi = 0$, lo cual es falso. Por lo tanto, para todo primo p, si $p\big||G|$ entonces $p\big||M|$.

(2) Supongamos que $c(G)$ es perfecto. Entonces, $c(G) = [c(G), c(G)] = c([G, G])$. Como (G, c) es una cubierta celular del grupo finito M, por la proposición 4.42(3), $\ker c \leq [G, G]$ por lo que $G/\ker c \cong c(G) = c([G, G]) \cong [G, G]/([G, G] \cap \ker c) = [G, G]/\ker c$. Luego, $1 \cong (G/\ker c)/([G, G]/\ker c) \cong G/[G, G]$. Por lo tanto $G = [G, G]$ y G es perfecto. $\square$

Corolario 4.45 *Sea (G, c) una cubierta celular suprayectiva de un grupo finito M. Si M es un grupo perfecto entonces G también es un grupo perfecto.*

Bibliografía

[1] M. Aschbacher, Finite Group Theory, Cambridge University Press, 1986.

[2] S. Awodey, Category Theory, Second Edition, Oxford University Press, 2010.

[3] F. Barrera Mora, Introducción a la Teoría de Grupos, 2004.

http://www.sociedadmatematicamexicana.org.mx/SEPA/ECMS/resumen/P1TE13_1.pdf.

[4] W. Chachólski, E. Damian, E. D. Farjoun, Y. Segev, The A-core and A-cover of a group, J. Algebra 321 (2009), 631-666.

[5] W. Chachólski, E. D. Farjoun, R. Gobel, Y. Segev, Cellular covers of divisible abelian groups, Alpine Perspectives on Algebraic Topology, Third Arolla Conference on Algebraic Topology, Contemp. Math. 504 (2009), 77-97.

[6] R. K. Denis, L. N. Vaserstein, On a question of M. Newman on the number of commutators, J. Algebra 118 (1988) 150-161.

[7] E. D. Farjoun, R. Gobel, Y. Segev, Cellular covers of groups, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), 61-76.

[8] E. D. Farjoun, R. Gobel, Y. Segev, S. Shelah, On kernels of cellular covers, Groups, Geometry and Dynamics 1 (2007) 409-419.

[9] J. B. Fraleigh, Álgebra Abstracta, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

[10] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups, vol. 1., Academic Press, New York, London, 1970.

[11] L. Fuchs, Abelian Groups, Pergamon Press, Budapest, 1960.

[12] L. Fuchs, Cellular covers of totally ordered abelian groups, Math. Slovaca 61(3) (2011), 429-438.

[13] L. Fuchs, R. Gobel, Cellular covers of abelian groups, Res. Math. 53 (2009), 59-76.

[14] R. Gobel, Cellular covers for R-modules and varieties of groups, Forum. Math. 24 (2012), 317-337.

[15] P. A. Griffith, Infinite Abelian Group Theory, University of Chicago Press, 1970.

[16] T. Jech, Set Theory, Academic Press, New York, London, 1978.

[17] I. Kaplansky, Infinite Abelian Groups, University of Michigan Press, 1969.

[18] E. I. Khukhro, Nilpotent Groups and their Automorphisms, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.

[19] J. S. Milne, Group Theory, 2013.

http://www.jmilne.org/math/CourseNotes.GT.pdf.

[20] E. Lluis-Puebla, Teoría de grupos un primer curso, Segunda Edición, 2014.

http://www.sociedadmatematicamexicana.org.mx/SEPA/ECMS/resumen/P1TE18_1.pdf.

[21] C. Polcino Milies, Grupos Nilpotentes: Una Introducción, 2003.

http://www.rmu.sbm.org.br/conteudo/n34/n34_Artigo04.pdf.

[22] A. H. Rhemtulla, A problem of bounded expressibility in free products, Proc. Cambridge Philos. Soc. 64 (1968) 573-584.

[23] D. J. S. Robinson, A Course in the Theory of Groups, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1996.

[24] J. L. Rodríguez, J. Scherer, Cellular approximation using Moore spaces, in: Cohomological Methods in Homotopy Theory, Progress in Math. 196(2001) 357-374.

[25] J. L. Rodríguez, L. Strungmann, On cellular covers with free kernels, Mediterr. J. Math. 9 (2012), 295-304.

[26] J. J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1995.

[27] M. M. Stadler, Fundamentos de Topología, 2010.

http://www.ehu.es/∼mtwmastm/FT1011.pdf.

[28] J. Van Oosten, Basic Category Theory, 2002.

http://www.staff.science.uu.nl/∼ooste110/syllabi/catsmoeder.pdf.

[29] R. B. Warfield, Nilpotent Groups, in: Lecture Notes in Matematics, vol. 513, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1976.