UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

FACULTAD DE CIENCIAS
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
DIRECCIÓN GENERAL DE DIVULGACIÓN DE LA CIENCIA

CAMPO DE CONOCIMIENTO: HISTORIA DE LA CIENCIA

EL TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER COMO GÉNESIS DEL CONCEPTO DE GAVILLA

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:
MARÍA ANAID LINARES AVIÑA

TUTOR: DR. ALEJANDRO R. GARCIADIEGO DANTAN
FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

MÉXICO, D.F., FEBRERO 2016.

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco de forma muy particular a mi tutor, Alejandro, que confió en mi trabajo e hizo posible mi incursión en la Historia. Sus consejos han sido siempre atinados y precisos. A mis sinodales por su apoyo.

A mis compañeros y amigos, con los que compartí aprendizajes y experiencias y que hicieron estos años inolvidables. Gracias a Marcela en quien encontré una amistad reconfortante en los tiempos difíciles y valiosa compañía en los demás al lado del Serch.

A todos aquellos que me apoyaron en este viraje. Gracias a Mónica Puertas, por tus sabios consejos; Mónica Canales, por tu compañía; Luis, por tu amistad; Paulo, por estar, Eli, por su perseverancia, Germán, por su escucha, Ara y Pablo por el café y las risas.

A los amigos de Ciencias porque no sería quien soy sin ellos.

A mi familia y en especial a Rodrigo porque ahora le toca a él.

Agradezco también a CONACYT por la beca otorgada para la realización de este trabajo en el periodo de agosto de 2013 a julio de 2015.

Índice general

Introducción

El concepto de ***gavilla*** es fundamental en la matemática moderna. Esto se debe a que sirve como base para conceptos tan poderosos como cohomología o esquemas. Se utiliza también para la construcción de variedades algebraicas y topos. Posee gran versatilidad debido a una naturaleza dual geométrico-algebraica la cual hace que tenga utilidad dentro de la geometría algebraica, topología, álgebra homológica, geometría diferencial y lógica entre otras áreas. Su riqueza está en la facilidad con la que permite el paso de lo local a lo global.

Las gavillas nos permiten redefinir objetos geométricos en términos algebraicos con lo cual se convierte en una valiosa herramienta para resolver una gran cantidad de problemas. Pero también dota de nuevos significados a objetos abstractos.

Su nombre refiere por analogía a un atado de trigo. La idea es que si buscamos explicar a alguien que no ha visto una gavilla lo que es, basta mostrarle una espiga de trigo y la forma en la que se ven reunidas un par de ellas. Con estas dos imágenes podrá entonces imaginar una gavilla. Como analogía contiene un gran poder visual porque en términos generales todas las gavillas son semejantes a pesar de su grosor, en otras palabras, corresponden a una misma estructura.

Al llevar esta idea al contexto algebraico lo que se obtiene es un objeto que organiza información. Esto, mediante pequeños trozos –llamados tallos– y una cierta forma en la que estos se unen –asignando condiciones de pegado–. El nombre en inglés es aún más descriptivo pues el término *sheaf* además de denotar un atado de trigo, también refiere a un grupo de hojas de papel apiladas, con lo cual se hace una analogía a cómo el objeto puede definirse a través de trozos tomados verticalmente, como los trigos; pero también de forma horizontal, como las hojas de papel. Gray también menciona al respecto una descripción en la que define la teoría de gavillas como “un objeto en el que se hace topología de forma horizontal y álgebra de forma vertical” [Gray 1979, 1].

Para aclarar ideas podemos imaginar pequeños círculos. Estos pueden traslaparse y cubrir, por ejemplo, una esfera. Pero también pueden pegarse de forma que cubran una superficie con forma de dona. Si sólo nos fijamos en los pequeños círculos de una figura o de la otra, ambas figuras parecerán la misma. En cambio, cuando nos alejamos un poco podemos ver que son completamente distintas; una tiene un agujero que la otra no. En términos formales, las figuras no son topológicamente equivalentes. Mediante la introducción de las gavillas se logra que este paso de lo local a lo global suceda sin problemas, este paso es frecuentemente un obstáculo para resolver diversos problemas geométricos.

El término *gavilla* fue definido por primera vez por Leray [1946], con él, refiere a una cierta función que toma componentes algebraicos y les asigna un componente geométrico, con lo que se obtiene una estructura topológica bien definida en todo el conjunto.

Las primeras aportaciones de Leray a la matemática fueron sobre dinámica de fluidos, mecánica y análisis. En 1940, durante la Segunda Guerra Mundial, fue hecho prisionero por los alemanes en un campo de concentración en Austria (Oflag). Temía que las autoridades quisieran obligarlo a trabajar para ellos tomando en cuenta las aplicaciones prácticas de sus investigaciones, por lo que declaró que su trabajo estaba dedicado a la topología algebraica, una disciplina principalmente teórica. Con ayuda de algunos colegas fundó ahí una universidad; el resultado más importante de esta etapa de cautiverio fue un curso de topología algebraica que se publicó entre 1949 y 1951 como una serie de artículos.

Al término de la guerra Leray regresó a París y publicó un par de notas en la revista *Comptes rendus*, marcando el nacimiento de la teoría de gavillas.[1]

El camino que le llevó a la definición de gavilla surge de una necesidad específica. Leray buscaba eliminar las hipótesis que consideraba inútiles y asociar espacios topológicos a ciertos invariantes algebraicos de una forma que no requirieran construcciones complementarias. Su meta principal era construir una teoría de ecuaciones y transformaciones que fuera aplicable a espacios topológicos generales. Para esto requería una nueva definición de homología. Por lo cual introduce las gavillas y diferencia entre la cohomología y la homología de forma que al aplicarla a este nuevo objeto el resultado sea independiente de la fibra elegida [Houzel 1998, 107].

Alrededor de 1935, los objetos básicos de la topología algebraica eran los grupos de homología, que estaban definidos usualmente para complejos simpliciales. Poco después se descubrió que no se requería asumir una variedad como el espacio base. De Rham muestra que la homología de variedades compactas puede expresarse en términos del producto exterior de formas diferenciales, Alexander toma esta idea y construye unos nuevos complejos definibles de forma directa y no como objetos duales de unos pre-existentes. [Borel 1998, 4]

Con estas ideas, Leray logra suprimir casi completamente el uso de grupos de homología tradicionales. Toma como inspiración para esta nueva teoría las herramientas de la geometría diferencial y las adquiridas en la redacción de las notas del curso de Cartan,[2] pero evita cualquier condición de diferenciabilidad, orientabilidad o linealidad local y pone el acento sobre la cohomología.

[1] Los artículos que surgieron de ese curso fueron: Leray, J. (1945), "Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations". *J. Math. Pures et Appl.* **24**:95-67; Leray, J. (1945), "Sur la position d'un ensembre fermé de points d'un espace topologique". *J. Math. Pures et Appl.* **24**:169-199; Leray, J. (1945), "Sur les équations et les transformations". *J. Math. Pures et Appl.* **24**:200-248

[2] É. Cartan (1935), *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces generalices*, redactado por J. Leray, Hermann, París.

La primera definición de *gavilla* dada por Leray consta de dos condiciones, la primera asigna a conjuntos cerrados un módulo o anillo y señala que la gavilla se anula cuando los conjuntos son vacíos. La segunda considera dos conjuntos cerrados, uno contenido en el otro y especifica la relación que tendrán los elementos de la gavilla que corresponden a estos.

En términos actuales esta definición corresponde mejor al concepto de pregavilla. Esta contiene una función que asigna a cada conjunto un objeto algebraico y una restricción. La definición actual implementa nuevas herramientas y puede ser vista como concepto pero también como un programa de investigación debido a que dio paso a una nueva área, la teoría de gavillas. En 1950 Cartan desarrolla una definición de gavilla identificada con un espacio étalé lo cual la vuelve más adecuada para un uso geométrico, posteriormente Grothendieck la ajusta para que sea aún más general. Actualmente se hace una diferencia entre las dos definiciones pero se reconoce que son equivalentes. No profundizaremos en estos cambios pues nos llevan lejos del objetivo del texto.

Las gavillas, como hemos mencionado, son importantes como objetos que permiten construir poderosas herramientas y solucionar diversos problemas geométricos de forma relativamente sencilla. Pero me parece que su importancia se dimensiona al tomar en cuenta la gran cantidad de áreas en las que se utiliza el concepto. Podemos describir su uso mediante la metáfora de la relación entre un ladrillo y la arquitectura. Entender este concepto nos permite comprender cómo se fueron modelando los cimientos de una de las partes más novedosas de la matemática del siglo XX.

0.1. Objetivo

Las gavillas pueden considerarse uno de los conceptos clave de la matemática del siglo XX, pero ¿cuáles fueron las ideas que dieron origen al mismo? En este texto se rastrean las ideas previas al surgimiento de la definición del concepto dada por Leray. Tomamos como punto de partida el teorema de Mittag-Leffler, y analizamos el contexto en el que fue introducido, las distintas versiones que tuvieron lugar entre 1872 y 1884, hasta su posterior generalización en el teorema de Cousin. El objetivo es identificar cuáles fueron los cambios y herramientas implementados en el desarrollo de la teoría para caracterizar las ideas que forman el nicho en el que surgió el concepto. Ambos teoremas se enmarcan dentro de la teoría de funciones analíticas, es por eso que la investigación toma como punto de corte precisamente el teorema de Cousin.

0.2. Análisis historiográfico

Entre los trabajos que tratan la historia del concepto de gavilla podemos encontrar los siguientes: Gray [1979] menciona la dificultad de hacer una única historia de la teoría de gavillas debido a que esta es 'un pulpo que se extiende en la historia de las demás áreas' por lo que realiza un análisis de las gavillas mediante su relación con distintas áreas de la matemática. Para ello relaciona los temas bajo los cuales fueron archivados los primeros trabajos en la *Mathematical Review*. Rastrea los conceptos utilizados en los textos y hace comparaciones que le permiten describir la relación de la teoría de gavillas con disciplinas específicas como la topología algebraica, análisis complejo, ecuaciones diferenciales y teoría de categorías. El análisis es principalmente teórico.

A su vez, Fasanelly [1981], basándose en el artículo seminal de Serre de 1952[3] hace una recopilación de resultados asociados al concepto de gavilla de forma muy esquemática. Emplea para ello los resultados en su forma original lo que le permite analizar el desarrollo de la terminología. Este es un trabajo realizado en forma de tesis en el cual el gran acierto es la búsqueda bibliográfica que le permite rastrear los resultados. Sin embargo, carece de un análisis que permita entender las razones por las cuales los conceptos fueron modificados.

[3] Nos referimos al clásico Serre, J-P- (1952) "Faisceaux algebriques Coherents" *Annals of mathematics*, **61**:197-278

También encontramos el trabajo de Houzel [1998] que parte de la introducción que hizo para el libro de Kashiwara sobre gavillas en variedades. En este analiza paso a paso, las herramientas utilizadas por Leray en la creación del concepto y los conceptos que a su vez generó. Se trata de un texto en el cual esboza el contexto dentro del cual Leray desarrolla su teoría. En este se encuentra un enfoque más histórico que en los anteriormente mencionados.

Por último mencionaremos el texto de Chorlay [2010] en el cual analiza el uso de problemas en la creación de teoría. Para ello utiliza como eje los problemas de Cousin desde Poincaré hasta Cartan. En este, muestra la historia del diseño de estructuras en contextos geométricos lo que ayuda a proveer una visión crítica del 'momento estructuralista'. También ayuda a entender cómo a pesar de que el teorema de Cousin puede pensarse como generalización del teorema de Poincaré, el contexto y el tipo de problemas a resolver, lo enmarcan dentro de la investigación sobre funciones analíticas, lo que lo relaciona con el teorema de Mittag-Leffler.

Estos trabajos se usaron tangencialmente en el presente texto ya que si bien, presentan una historia general del concepto de gavilla no señalan directamente los orígenes del mismo. Fueron más bien el punto de partida de dónde se comenzó la investigación.

A finales del siglo XIX, la matemática como disciplina sufre una profunda transformación. Respecto al análisis funcional se da un cambio de enfoque en el que se pregunta por sus fundamentos. Esto, relacionado también con la preocupación de las comunidades de matemáticos por la enseñanza, genera nuevas preguntas a responder y nuevas formas de caracterizar los objetos matemáticos.

Respecto a este cambio encontramos la compilación editada por Parshall y Rice [2002] en la que se analizan desde un punto de vista histórico las organizaciones e instituciones de matemáticos durante el siglo XIX y la primera mitad del siglo XX. De los artículos en esta compilación debemos señalar el de Archivald [2002] el cual trata la relación entre matemáticos franceses y alemanes en los años finales del siglo XIX y el de Gispert [2002] donde se analiza el papel de la guerra franco-prusiana en la organización de matemáticos franceses.

Para establecer las relaciones entre Weierstrass, Hermite, Cantor, Poincaré y Mittag-Leffler, se revisó gran cantidad de correspondencia entre Mittag-Leffler y Hermite además de entre otros matemáticos de la época como Poincaré, Appel, Enriques, Kovalevsy, Castorati, etc. Gran parte de la correspondencia con Hermite y Poincaré se encuentra ya publicada. También se visitó la biblioteca de Mittag-Leffler en el Instituto Mittag-Leffler en Suecia con lo cual se tuvo acceso a las cartas enviadas a Mittag-Leffler por sus colegas.

El texto sobre la historia del análisis complejo de Bottazzini y Gray [2013] hace un estudio muy preciso de la relación entre Mittag-Leffler y Weierstrass. Detalla, además, los resultados trabajados por Weierstrass en el tema de las funciones analíticas. Se trata de un texto que relaciona el contexto de los trabajos, las prácticas y los resultados mismos.

También se revisó la exhaustiva biografía de Mittag-Leffler realizada por Stubhaug [2010] en la que podemos encontrar las impresiones de Mittag-Leffler de sus contemporáneos, los cursos que tomó tanto en París como en Berlín y una gran cantidad de datos personales.

En el texto de Turner [2007], la autora analiza paso por paso las demostraciones de las distintas versiones del teorema de Mittag-Leffler comparándolas. También analiza la relación de Mittag-Leffler con su maestro Weierstrass y su colega Cantor. El texto, que fue presentado como tesis de maestría en matemáticas, utiliza fuentes originales, algunas traducidas del sueco por lo cual resulta muy valioso.

Para contrastar los textos anteriores se utilizaron, en su mayoría, los artículos originales traducidos al francés. De gran importancia fueron la versión de 1879 publicada en el *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, las versiones aparecidas en el *Comptes Rendus* en 1882, la versión final del teorema de 1884 aparecido en *Acta Mathematica* y el teorema de Cousin aparecido en la misma publicación el año de 1895. Estos artículos permitieron también identificar los precedentes utilizados mediante las referencias.

0.3. Estructura del trabajo

El trabajo se divide en 5 capítulos. El primero trata del marco histórico dentro del cual tuvo origen el teorema de Mittag-Leffler. Las relaciones entre matemáticos franceses y alemanes eran tensas debido a la guerra franco-prusiana de 1870. En ese contexto, tanto Hermite como Weierstrass fueron excepcionales en el sentido que dejaban de lado los sentimientos nacionalistas y apostaban por una comunidad internacional de matemáticos.

El segundo capitulo trata de los antecedentes del teorema. El conocido rigor de Weierstrass moldeó la forma en la que se hacían matemáticas en Berlin, que como consecuencia de la guerra, se había vuelto preponderante para los matemáticos que trabajaban en el área de análisis funcional. Mittag-Leffler tenía interés en el teorema de Cauchy desde sus estudios universitarios pero fue bajo la guía de Weierstrass que se interesó en los teoremas de representación.

Las primeras versiones del teorema de Mittag-Leffler son analizadas en el tercer capítulo. La primera versión trataba sólo el caso en el que se tiene una singularidad esencial en el infinito. La demostración de 1880 dada por Weierstrass le permitió a Mittag-Leffler generalizar aún más este teorema. Esto nos muestra lo importante que es la notación en la generalización del resultado.

En el cuarto capítulo se analizan las últimas versiones. En las versiones publicadas en el *Comptes rendus* hay una notoria introducción de la teoría de conjuntos de Cantor. Al hacer el cambio de las singularidades como serie a las singularidades como conjunto, Mittag-Leffler logra generalizar su teorema al trabajar con una función que contiene una infinidad de singularidades esenciales.

El último capítulo trata de la generalización del teorema llevada a cabo Cousin, los problemas que tuvo debido a la restricción de dominio y la recepción del mismo.

Capítulo 1

Marco Histórico

1.1. Relación entre matemáticos franceses y alemanes.

Lo que ahora conocemos como el teorema de Mittag-Leffler fue el resultado de una serie de teoremas, los cuales fueron desarrollados entre 1876 y 1884. Estos años fueron convulsos para los matemáticos franceses y alemanes debido a la guerra Franco-Prusiana, que si bien duró solamente un año, de 1870 a 1871, dejó –como todas las guerras– profundas huellas en las sociedades de estos países.

En Francia, las consecuencias para la comunidad matemática fueron diversas. Podemos mencionar, que debido al aumento de nacionalismo, surge la necesidad de crear sociedades que enaltecieran el trabajo nacional. Por ello, se crea en 1872 la *Sociedad de Matemáticos Franceses* (SMF) con el objetivo de reforzar la institucionalización del gremio mediante la construcción de una comunidad fuerte de nivel internacional [Gispert 2002, 105]

Otra de las consecuencias fue la creación de reformas en la educación superior. La universidad se vuelve un centro de profesionalización para la Matemática y existe un gran interés tanto en la investigación como en la enseñanza. Entre 1870 y 1900 se duplican los puestos universitarios y se crean nuevas instituciones para diversificar la oferta de centros de investigación [Gispert 2002, 106].

También se dio un cambio de escenario respecto a la importancia de París como centro científico. Durante las primeras cuatro décadas del siglo XIX era incuestionable la primacía de las matemáticas francesas. Varios matemáticos viajaban a Francia para completar su educación. Entre ellos podemos mencionar a Dirichlet, que llega a París en 1822 debido a que las matemáticas alemanas le parecían insuficientes. Klein también viajó a Francia para completar su formación, quedó tan satisfecho que lo recomendaba a sus colegas [Segal 2002, 360].

En esos años, las matemáticas en Francia seguían las pautas de Cauchy. El matemático francés estaba dedicado desde el principio de su actividad al análisis complejo. La necesidad de rigor geométrico al trabajar con cantidades imaginarias era una de sus preocupaciones principales ya que aunque mediante el plano real podemos representar puntos complejos, los planos no son equivalentes pues la geometría de sus operaciones es muy diferente. Crea una reformulación del análisis mediante su trabajo *Cours d'analyse* de 1821 en el que presentaba una nueva imagen de 'análisis moderno'.

El panorama cambia hacia finales del siglo XIX. El análisis seguía gozando de fuerza entre la comunidad matemática francesa, pero esta había perdido su lugar preponderante en el mundo matemático. Berlín ganó este lugar al alcanzar una posición dominante respecto a otras universidades, en particular Königsberg y Göttingen [Segal 2002, 361].

Como consecuencia, la imagen de las matemáticas que prevalecía era la trabajada por los alemanes. En Berlín, Weierstrass comienza su labor como profesor en 1856, un año antes de la muerte de Cauchy. Resume y refina el programa iniciado por el francés, se decide a reformar los fundamentos del análisis matemático y establece una particular teoría de funciones. De hecho, después de la muerte de Steiner en 1863, su predecesor, la geometría virtualmente desapareció de la agenda de los matemáticos de Berlín y se hizo patente la búsqueda de rigor aritmético en análisis así como un interés por la 'matemática pura' en contraposición con la aplicada. Se forma así el célebre trío que dominó las matemáticas en Berlín por 20 años: Weierstrass, Kronecker y Kummer [Botazzini 1986, 32].

No sólo había una diferencia de posiciones en el terreno matemático internacional, también existían ligeras diferencias respecto al papel que jugaban las universidades en estos países. Esto se reflejaba específicamente en el papel del profesor en la enseñanza. En Alemania, el profesor usualmente exponía su investigación, por lo que los cursos eran en cierta forma originales. En Francia había menos énfasis en la exposición del profesor, el acento se ponía en los libros de texto. Los libros y cursos publicados usualmente tenían largas vidas por lo que el contenido de los cursos sólo se modificaba ligeramente llevando a una falta de originalidad en los resultados [Archivald 2002, 131].

La comunicación entre los científicos franceses y alemanes en esos años no estaba en buena posición. No era común que un matemático francés leyera alemán por lo que el acceso a los artículos alemanes era complicado por el idioma, además no era fácil suscribirse individualmente a las revistas y se requería para lo mismo una gran inversión. Existían traducciones de pocos artículos, la práctica de compartir sus resultados mediante cartas no era efectiva y no se organizaban reuniones internacionales. Debido a esto el intercambio de información era más bien escaso. La situación comenzó a cambiar en 1870 cuando Darboux y Houël editaron el primer volumen de su *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* en el que presentaban resúmenes y títulos además de algunas traducciones de artículos de gran importancia como la tesis de Riemann sobre **series trigonométricas** [Gispert 2002, 106].

1.2. Relación entre Hermite y Weierstrass

Hermite fue una figura excepcional en este contexto pues no solo admiraba profundamente el trabajo de sus pares alemanes, en particular de Kronecker y Weierstrass, sino que realizó un gran esfuerzo para difundir sus ideas en Francia. Trabajó para traducir artículos más grandes que los aparecidos en las revistas y darlos a conocer entre sus colegas. Esta necesidad de fungir el papel de enlace entre los matemáticos franceses y alemanes estaba relacionada con la anterior guerra ya que había en él un anhelo de una comunidad internacional de científicos de elite que pudieran convivir en armonía [Archivald 2002, 124].

En una carta dirigida a Du Bois-Reymond, en 1876 expresaba que "la analogía de nuestras situaciones crea una simpatía legítima y natural, de la cual, por encima y en contra de los resentimientos de la política y la guerra, me declaro el mediador"[Archivald 2002, 128].

Los cursos de Hermite comenzaban introduciendo las conocidas como **funciones elementales trascendentes**, es decir, funciones trigonométricas y exponenciales. Establecía algunas propiedades de la función exponencial y su aproximación mediante fracciones continuas. También una prueba de que e^x es irracional si x es un número entero o racional. Posteriormente desarrollaba las funciones elípticas y funciones trigonométricas enfocándose en su periodicidad. Definía *función de una variable* en términos de series de fracciones. En términos generales la teoría de funciones elípticas presentada por Hermite en estos cursos se basaba en las series theta de Jacobi, en el que incluía los resultados de Cauchy, Liouville y los suyos propios con atención particular a los aspectos teóricos de números [Bottazzini y Gray 2013, 419].

Por las cartas de Hermite a Du Bois-Reymond podemos saber que preparaba sus clases con gran dedicación. Incorporó una gran cantidad de resultados alemanes recientes a su curso de análisis en la *Faculté des Sciences*, entre ellos, los notables resultados de Weierstrass sobre factorización primaria de funciones de variable compleja. Estos novedosos resultados los había aprendido en el memorial que se organizó para Gauss en 1874, tres años antes de que aparecieran por primera vez en los cursos de Weierstrass. Según

Hermite, los estudiantes se verían muy favorecidos al aprender tan novedosos resultados además de que esto permitía dedicar más tiempo a las funciones elípticas ya que al introducirlos al principio del curso se podía abreviar el tratamiento de algunos temas.

Pero los estudiantes no lo vieron con agrado. Al ser resultados con un tratamiento distinto al que estaban acostumbrados y con terminología de reciente creación, a los alumnos les resultaban difíciles de entender, seguir su curso era un gran reto. Mittag-Leffler comentaba que las lecturas eran "extremadamente difíciles de seguir" [Stubhaug 2010, 157] por lo que muchos abandonaban el curso.

El enfoque de Weierstrass era completamente analítico y la geometría se tocaba muy ligeramente, casi como una ilustración. A Mittag-Leffler le parecía una gran ventaja respecto a la escuela de Riemann, más geométrica. Opinaba que " Debía ser cierto que una teoría de funciones pueda construirse rigurosamente tomando como base las propiedades de las funciones abelianas conocidas hasta ahora, pero por un lado, no es suficiente reproducir las propiedades de las funciones trascendentes de órdenes mayores y por otro lado, de esta forma los elementos que surgen en la teoría de funciones al final son ajenos a ella" [Garding 1994, 75].

Otra de las características que distinguían el enfoque de Weierstrass era que evitaba dar definiciones y teoremas generales. Para él una función es una serie de potencias, al ser las funciones las bases del análisis, todo se deduce de las series de potencias. Esto se contraponía con las definiciones generales aunque rigurosas dadas por Cauchy y Liouville. La continuación analítica era otro de los conceptos clave para Weierstrass.

Respecto al estilo de enseñanza de Weierstrass, Mittag-Leffler decía que desde un punto formal estaba más allá de cualquier crítica. Se mostraba entusiasmado por los resultados, tanto que el 19 de febrero de 1875 escribe a Holmgren, su maestro en Estocolmo, para comentarle: "En ningún lado he encontrado tanto como he aprendido aquí" [Bottazzini y Gray 2013, 424].

Bottazzini [1986] opina que las diferencias entre Weierstrass y Cauchy tal vez se debían a la diferencia de la educación recibida. Weierstrass no compartía con Cauchy el interés por las matemáticas aplicadas, trabajaba aislado, sus intereses estaban dominados por la teoría de integrales elípticas y abelianas y casi no publicaba sus resultados, estos los daba a conocer directamente en sus clases.

En términos generales, la diferencia entre Hermite y Weierstrass tenía que ver más bien con la visión de las funciones analíticas. En el caso de Hermite, él pensaba más en términos intuitivos, una visión más cercana a la que se tenía a principios de siglo. En cambio, Weierstrass usaba sistemáticamente las series de potencias locales, la convergencia uniforme y la continuación analítica. En las clases de Weierstrass eran comunes las nociones de límites superiores e inferiores, épsilons y deltas. La precisión que obtuvo con estas herramientas le permitió construir su famoso ejemplo de funciones continuas diferenciables en ningún punto [Garding 1994, 75].

Lo que unía a Hermite y a Weierstrass era su interés por construir una comunidad internacional de matemáticos. Weierstrass también estaba impresionado por los jóvenes matemáticos franceses como Picard, Poincaré y Appel. A su vez, la introducción del nuevo material por parte de Hermite fue exitoso al final y eso se reflejó en la siguiente generación de matemáticos conformada por individuos como Maurice Frechet y Emile Borel, y el trabajo que realizaron sobre funciones de variable real en nuevas direcciones [Archivald 2002, 136].

1.3. Mittag-Leffler como alumno de Hermite y Weierstrass

Mittag-Leffler nació el 16 de marzo de 1846. Es el primer hijo de Johan Olof Leffler y Gustava Wilhemina Leffler. Su padre fue profesor de enseñanza elemental, con su madre tuvo una estrecha relación que dejaría una gran cantidad de correspondencia. Tuvo tres hermanos, Anne Charlote Edgren-Leffler, escritora; Fritz Läffler, lingüista y Artur Leffler, ingeniero civil [Garding 1994, 73]. Desde temprana edad mostró talento e interés en las matemáticas, estudió en Uppsala en la época en la que el matemático más sobresaliente era Göran Dillner, tanto en investigación como en enseñanza.

Mittag-Leffler trabajaba en temas relacionados con la *teoría sinéctica* –conocida ahora como la teoría de funciones analíticas– la cual representaba una novedad en esa época. En 1872 defendió una tesis de doctorado admirable la cual trata sobre aplicaciones del **principio del argumento**. Este trabajo le permitió obtener un puesto como docente. En realidad el puesto no otorgaba ninguna gratificación pero garantizaba cierto salario en un tiempo limitado.

El año siguiente, en 1873,[1] Mittag-Leffler da una prueba directa del teorema integral de Cauchy.[2] Este teorema causaba mucho interés en Uppsala. Malmsten dio una prueba en 1865 usando sumas de Riemann e integrales de superficie. Ese mismo año obtuvo un apoyo económico conocido como el estipendio Bizantino, este especificaba que el propietario debía vivir tres años fuera de Suecia. Mittag-Leffler tenía 27 años.

Llega a París en octubre de 1873 con su disertación doctoral y cartas de recomendación de Malmsten. Por su diario sabemos que Darboux fue el primer matemático que conoció ahí, posteriormente tuvo contacto con Chasles, Liouville, Briot, Bouquet y otros aunque su contacto principal fue con Hermite al acudir a su curso sobre funciones elípticas [Garding 1994, 74].

Llamó su atención la forma en la que hablaba Hermite sobre Weierstrass, Riemann y, en general, sobre las matemáticas alemanas. Hermite sentía gran admiración por estas y

[1] Este resultado lo dio a conocer en el artículo Mittag-Leffler, G. (1873) “Försök till ett nytt bevis för en sats inom de definita integralernas teori” *Översikt Vet.-ak. Stockholm* **30**

[2] También conocido como teorema de Cauchy-Goursat, enuncia que la integral de una función analítica alrededor de una trayectoria cerrada es localmente independiente de la trayectoria

afirmaba que no podía imaginar mayor felicidad que asistir a las lecturas de Weierstrass, Neumann o Fuchs. Según lo dicho por Mittag-Leffler en un discurso en Copenhague en 1925, esta fue la primera vez que escuchó el nombre de Weierstrass. Admirablemente, Hermite le recomienda trasladarse a Berlin. "Ha cometido usted un error, señor, dijo. Debe usted atender las clases de Weierstrass en Berlin; él es el maestro de todos nosotros" [Stubhaug 2010, 156].

Mittag-Leffler sigue los consejos de su maestro y viaja a Berlín para asistir a las clases de Weierstrass sobre **funciones elípticas** y ecuaciones diferenciales durante 1874 y 1875. Asíste también al curso de Kronecker sobre ecuaciones algebraicas y teoría de números [Bottazzini y Gray 2013, 424][Stubhaug 2010, 182].

En 1875 mientras estaba en Berlín, se abre un puesto de docente en Helsingfords. Le otorgan a Mittag-Leffler el puesto y durante su tiempo ahí (regresa a Estocolmo en 1881) imparte cursos sobre análisis básico y funciones elípticas siguiendo los métodos y resultados de Weierstrass [Garding 1994].

Los cursos que tomó Mittag-Leffler en París y Berlín ocurrieron al final de la guerra franco-prusiana. Como habíamos mencionado, en Francia el patriotismo y rechazo a Alemania era el sentimiento común en los círculos académicos. En Berlín, también se sentía gran patriotismo, adoración por el Kaiser y una visión arrogante de las que consideraban naciones inferiores. Hermite y Weierstrass no compartían esas ideas patrióticas, lo que impresionó fuertemente a Mittag-Leffler. En el congreso matemático de Escandinavia en 1925 mencionó: "Tuve una vívida impresión de la aguda tensión entre los círculos académicos en París y Berlín durante mis visitas a las dos capitales. Fue impactante la experiencia de que Hermite y Weierstrass estuvieran libres de esos sentimientos nacionalistas" [Garding 1994, 75].

Mittag-Leffler de cierta forma hace suya esta actitud de sus maestros pues a través de los años se convirtió en una de las figuras centrales en las matemáticas internacionales de finales del siglo XIX. Esto debido al papel de transmisor de conocimientos entre París y Berlín. Mantuvo contacto regular con los matemáticos de esas ciudades y su revista *Acta Mathematica* ayudó a la difusión de los resultados tanto alemanes como franceses y por supuesto, suecos.

Capítulo 2

Antecedentes

El trabajo realizado por Mittag-Leffler estuvo fuertemente influido por la visión del análisis de Weierstrass, sus métodos y el rigor que acompañaba su trabajo. Para comprender el trabajo de Mittag-Leffler analizaremos brevemente los intereses de su maestro, Weierstrass, en el análisis funcional.

2.1. Weierstrass

Durante el siglo XIX y más marcadamente a finales de este, el análisis matemático, tanto en Francia como en Berlín, se identifica con la búsqueda de fundamentos. Una búsqueda que podemos relacionar con la necesidad de incorporar rigor en los argumentos. No hay una única razón por la cual sucedió esto. Uno de los factores fue que los matemáticos encontraban errores en su trabajo.

Más específicamente, el cálculo infinitesimal se encontraba en una paradoja, pues a pesar de su aplicación universal y de la gran cantidad de resultados que producía, los principios que lo sostenían no estaban bien definidos. Uno de sus conceptos básicos, el de función, no estaba claramente especificado y algunas de sus propiedades no estaban establecidas. Por ejemplo, no se sabía qué pasaba con las funciones que se expresaban como series infinitas de funciones. Si todas las componentes son continuas en un punto

¿la suma también lo será?¿bajo qué condiciones? [Bottazzini 1986, 90].

Otro de los factores fue que, como consecuencia de la guerra franco-prusiana, en Francia, la mayoría de matemáticos dirigieron sus esfuerzos a la enseñanza en las grandes écoles, de forma que una de sus grandes preocupaciones era la reorganización de los resultados matemáticos con propósitos didácticos [Bottazzini 1986, 91]. Esto llevaba a una pregunta natural por los fundamentos de los conceptos.

En Alemania, en 1870, Weierstrass encuentra un contraejemplo para una de las tres propiedades en las cuales se basaba la solución al Problema de Dirichlet.[1] Se da entonces a la tarea de brindar fundamentos sólidos al cálculo para reformular los resultados clásicos que generaban estos contraejemplos. En su discurso de ingreso a la Academia de Berlín en 1857, afirma que su motivación principal en esos años era el estudio de funciones elípticas y abelianas lo cual implica profundizar en la teoría de funciones de variable compleja. Con esto en mente desarrolla la teoría desde una perspectiva independiente de toda referencia a la intuición geométrica, una aproximación original que sería la característica de lo que se conoce como el rigor Weierstrasiano [Dieudonée 1978, 154].

Este interés por el rigor en Weierstrass se hizo patente cuando comenzó a impartir su curso introductorio al análisis. Por lo antes mencionado, se había percatado de la necesidad de fundamentos rigurosos en la teoría de funciones analíticas. Para él, estas funciones podían considerarse las bases de la teoría de funciones elípticas y abelianas [Bottazzini y Gray 2013, 379].

Weierstrass se interesa entonces en las funciones como *representaciones* de funciones, esta es una forma más general de analizarlas. Mediante su caracterización, se puede trabajar con ellas de una forma indirecta lo que hace más eficiente el análisis.

[1] En este se pregunta por la existencia de una función que cumple ciertas condiciones de diferenciabilidad.

El punto de partida de la construcción de Weierstrass es la noción de función analítica: una función f definida sobre un abierto U del plano complejo se dice *analítica* sobre U si se puede desarrollar en una serie entera en una vecindad para todo punto de U, esto es, si para todo $a \in U$ existe una serie entera de centro a donde la suma es igual a $f(z)$ en un disco de centro a. En términos formales $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$

La noción de función analítica adoptada por Weierstrass resulta una herramienta muy flexible para estudiar la continuación analítica de una cierta función. Si f es analítica sobre un disco abierto D de centro a y radio r, se puede desarrollar como una serie con centro en b para todo punto $b \in D$. El radio de convergencia de esta serie es al menos igual a $r - |b-a|$ pero puede ser estrictamente superior: la serie de centro b converge ahora en un disco Δ de centro b que 'sale' del disco D y el principio de continuación analítica permite continuar f en $D \cup \Delta$ [Turner 2007, 9].

Esta definición permite también distinguir los puntos singulares de los regulares, aquellos que no admiten una continuación analítica de los que sí.

2.2. Influencia de Weierstrass

En 1876, Weierstrass publicó *Sobre la teoría de funciones analíticas de una variable*. Este texto aborda el problema de la representación y clasificación de funciones complejas de una variable. Betti había trabajado el tema previamente. En 1860, había probado que las funciones enteras pueden escribirse como producto de una infinidad de factores de grado uno y funciones exponenciales [Bottazzini 1986, 280-281]. El interés de Weierstrass es determinar cuándo una función está determinada por sus ceros.

El teorema fundamental del álgebra implica que cualquier polinomio puede escribirse como producto de factores lineales, esto mediante sus raíces. Weierstrass utiliza esta idea y se pregunta: ¿es posible escribir una representación de otras funciones enteras como un producto de factores que involucren los ceros de la función? [Turner 2007, 10].

En cartas dedicadas a Schwarz y Kovalevskaya, Weierstrass reformula esta pregunta de la siguiente manera: Dada una sucesión infinita de constantes $\{a_n\}$ tal que $\lim |a_n| = \infty$ ¿existe siempre una función entera con $\{a_n\}$ como los ceros de la misma? Al seguir esta idea, llegaría posteriormente a completar la teoría de funciones analíticas de una variable con un número finito de singularidades esenciales mediante el concepto de función principal [Bottazzini y Gray 2013, 434].

Otra muestra del interés de Weierstrass por la caracterización de funciones la encontramos en la segunda parte de su curso sobre funciones elípticas el cual comenzaba con la pregunta ¿Existen funciones de una variable compleja $f(u), f(v)$ tales que f((u+v)/2) y las anteriores satisfagan una ecuación algebraica? [Bottazzini 1986, 425]

Durante la estancia de Mittag-Leffler en Berlín, Weierstrass demostró su famoso *teorema de factorización* en el que afirma que dada una sucesión $\{a_n\}$ y otra $\{m_n\}$ de enteros positivos, existe una **función entera** $G(z)$ con un cero en $x = a_n$ para cada n con multiplicidad m_n de forma correspondiente y sin otros ceros. Es decir, las funciones enteras pueden ser representadas a través de sus ceros. Encuentra además la representación de la misma mediante el producto

$$G(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_n})^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}(\frac{z}{a_n})^{m_n}}}$$

Poincaré, en un artículo publicado en el *Acta mathematica* [1899] menciona que la teoría moderna de funciones analíticas tiene cuatro fundadores, Gauss, Cauchy, Riemmann y Weierstrass. Respecto a este menciona.

> El punto de partida [para Weierstrass] es la serie de potencias, el elemento de la función que está confinado a un círculo de convergencia; para continuar la función fuera del círculo, debemos aplicar la continuación analítica; todo resulta así, una consecuencia de la teoría de series y esta teoría está establecida sobre bases aritméticas

> y sólidas. Nos liberamos de dudas que en el siglo pasado y en la primera mitad de este siglo, nos asaltaban a menudo acerca de los principios del cálculo infinitesimal y también de aquellas que podían provocar brechas en la teoría de funciones analíticas de Lagrange [Poincaré 1899, 7]

Mittag-Leffler nota la importancia de estas caracterizaciones y decide trabajar sobre la representación de funciones enteras, el paso siguiente será aplicar estos conceptos a las **funciones meromorfas**. Esto, de manera análoga a lo realizado por Weierstrass.

En su artículo de 1876, en el cual Mittag-Leffler publica la primera versión de su teorema menciona: "El autor del presente trabajo, quien ha tenido la fortuna de estar entre la audiencia de los cursos de Weierstrass en ese tiempo [Invierno 1875], se propone debido a los mismos proponer un problema análogo al de Weierstrass" [Turner 2007, 12].

Para realizar el análisis de las funciones meromorfas, Mittag-Leffler comienza con **funciones racionales** e intenta generalizarlas a meromorfas utilizando el concepto de descomposición en fracciones parciales. Esto siguiendo el ejemplo de Weierstrass que comenzó utilizando polinomios y generalizó usando la idea de factorización a funciones enteras.

Capítulo 3

Primeras versiones del teorema de Mittag-Leffler

3.1. Primera versión del teorema

Como hemos comentado en la sección anterior, Mittag-Leffler sigue los pasos de Weierstrass para la creación de su teorema.

La primera versión del teorema de Mittag-Leffler, trata con una **singularidad esencial** en el infinito, fue publicada el 7 de junio de 1876 por la Real Academia Sueca de la Ciencia con el título *Un método para representar analíticamente una función de carácter racional que tiende a infinito exactamente en ciertos puntos infinitos dados, cuyas constantes fueron dadas de antemano*. La pregunta que responde es: ¿una función está definida de forma única por sus puntos singulares y los coeficientes de su **serie de Laurent**? [Turner 2007, 14]

Para construir tal función ordena las singularidades dependiendo de su distancia al origen y utiliza la **prueba de convergencia de Abel** para construir una serie **absolutamente convergente**. La clave está en cómo convertir a una serie no necesariamente convergente en una que sí lo sea. El procedimiento ha sido tan utilizado en análisis que se conoce como el procedimiento de Mittag-Leffler [Mujica 1995, 309]

En la segunda parte del artículo hace un procedimiento análogo para el caso en el que los **polos** no son necesariamente simples.

El objetivo de este artículo es básicamente demostrar que siempre se puede construir una función meromorfa $f(z)$ con **partes principales** de la serie de Laurent dadas $G_n(z)$ en una sucesión de polos $\{a_n\}$ también dados que cumplen que $\text{lím}_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Con esas condiciones, la función tal se puede escribir de la forma

$$\Phi(z) + \sum_{1}^{\infty}(G_n(z) + P_n(z))$$

donde $\Phi(z)$ es una función entera y $\{P_n(z)\}$ son polinomios que garantizan la convergencia de la expansión [Turner 2007, 17].

Al final de su artículo, Mittag-Leffler observa que si se restringe la sucesión de singularidades para que sean polos simples y suponiendo que cada coeficiente de las partes principales sea igual a uno obtenemos el teorema de factorización de Weierstrass como caso particular del teorema de Mittag-Leffler.

En los siguientes años Mittag-Leffler publica varios artículos en sueco que contienen variaciones de esta versión. Los artículos aumentan la complejidad de las singularidades esenciales. Recordemos que esta versión de 1876 trata con una singularidad esencial en el infinito [pues los polos tienden a infinito]. Una versión de 1877 [Mittag-Leffler 1877a] mueve la singularidad esencial del infinito a un valor finito. En otro artículo de 1877 [Mittag-Leffler 1877b] trata el caso de un número finito de singularidades esenciales [Botazzini y Gray 2010, 439].

El progreso de estos trabajos puede compararse con el artículo de 1876 de Weierstrass *Zur Theorie de eindeutigen analytischen Funktionen* en el cual Weierstrass se hace las preguntas análogas pero con respecto a los ceros de una función.

Turner [2007, 20] conjetura que la razón por la cual estos artículos fueron escritos en sueco en lugar de en francés o alemán (lo cual le hubiera dado más difusión a los resultados) fue que buscaba una posición en Suecia para dejar Finlandia. En una carta enviada el 8 de junio de 1878 a Weierstrass comenta que le molesta el exacerbado nacionalismo Finlandés pues le parece contrario al espíritu que una ciencia 'tan cosmopolita' como la matemática debe tener.

Hermite estaba al tanto de estos teoremas. En una carta del 29 de septiembre de 1879, comenta de una reunión con Weierstrass y Bouhardt en la que se mencionó sus resultados y le pide que haga una descripción en francés de la memoria que le envió, pues no le es posible comprender el método debido al obstáculo del idioma. Elogia ' los resultados de gran importancia que ha obtenido al trabajar con el cociente de dos series de funciones', le menciona el interés específico de Briot y Buquet y la relación que tienen con el trabajo de Picard.

Mittag-Leffler manda un esbozo de su trabajo sin demostraciones el cual es publicado en el *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* y que se titula: "Extrait d'une lettre à M. Hermite".[1] El artículo menciona que es un resumen con los resultados principales de un artículo en alemán enviado a Weierstrass pero este nunca fué publicado debido a que Weierstrass creyó que no era indicado publicar los teoremas en esta forma. Afirmaba que había una forma de enunciarlos en una forma más concreta y simple para que los colegas pudieran comprender su importancia. Esto se lo expresa en la carta del 7 de junio de 1880 en la que también le solicita permiso para compartirlos con la academia para trabajarlos libremente.

El artículo en cuestión está dividido en cuatro teoremas sin más introducción que la aclaración en la que afirma que las demostraciones de tales se encuentran en la memo-

[1]Para no entorpecer la lectura y debido a su extensión, los teoremas serán enunciados en el Apéndice

ria *Arithmetische Darstellung eindeutiger analytisher Functionen einer Veränderlichen* antes mencionada.

El primer teorema es equivalente a la primera versión del teorema en la que la función $F(x)$ es analítica en x con polos dados y una singularidad esencial en el infinito (en el original $x = \frac{1}{0}$). La forma de la función está dada en término de polinomios y una función entera para la cual remite al artículo de Weierstrass de 1876

El segundo teorema es más general que el anterior pues la función entera que menciona es arbitraria. Es también un poco más complicado pues para forzar la convergencia se ve obligado a introducir una tercera serie de coeficientes. Pero es esencialmente el mismo método aplicado en el primer teorema.

En el tercer teorema trata el mismo problema pero considerando en esta ocasión los ceros de la función a diferencia de los anteriores en los que se especifican los polos.

En el cuarto teorema utiliza los resultados anteriores para construir una función que 'se puede escribir como cociente de dos series de potencias enteras y positivas de x que no se anulan a la vez y que comprenden todas las funciones con las propiedades enunciadas con anterioridad' [Mittag-Leffler 1878, 274].

También menciona que se encuentra trabajando en un nuevo artículo en alemán que va a contener otros teoremas semejantes a los cuatro precedentes en los que dará una representación analítica general de funciones uniformes con una infinidad de singularidades esenciales.

Mittag-Leffler no encuentra, hasta este punto, cómo generalizar el teorema de forma efectiva. Para llegar a estos resultados será necesario introducir los resultados del trabajo de Cantor, cuestión que trataremos en el siguiente capítulo.

3.2. Versión de 1880

En 1880 Weierstrass publica una nueva versión del teorema, reformula el enunciado y simplifica la prueba. Para resaltar esta modificación comparemos dos versiones simplificadas por Bottazzini [1986, 439-440] de los teoremas.

Teorema 1 (Versión de Mittag-Leffler) *Dada una sucesión infinita de números complejos* $\{a_n\}$ *tales que* $a_i \neq a_j$ *para* $i \neq j$ *y* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$*, y en cada* a_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ *un polinomio arbitrario*

$$g_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = \frac{A_1^{(n)}}{x-a_n} + ... + \frac{A_{\nu_n}^{(n)}}{(x-a_n)^{\nu_n}},$$

existe una función analítica de una variable $f(x)$ *con polos únicamente en los puntos* a_n*, con expansión de Laurent dada por* g_n*, y regular para los demás valores de* x*. La función* $f(x)$ *puede representarse como*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - \gamma_n(x)\right),$$

tal que $\gamma_n(x)$ *es cualquier polinomio y la serie es uniformemente convergente en cualquier región finita, acotada que no contenga ningún punto de la forma* a_n*. Entonces la función general* $F(x)$ *con las propiedades prescritas se puede escribir como* $F(x) = f(x) + G(x)$ *donde* $G(x)$ *es una función entera arbitraria.*

Teorema 2 (Versión de Weierstrass) *Dada una sucesión infinita de números complejos* $\{a_n\}$ *tales que* $a_i \neq a_j$ *para* $i \neq j$ *y* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ *y una sucesión infinita de funciones racionales* $\{f_n(x)\}$ *tales que para cada* n $f_n(x)$ *se vuelve infinita sólo en* a_n *y se anula en* $x = \infty$*, entonces siempre existe una función analítica* $F(x)$ *con singularidad esencial en* ∞ *que alcanza el valor infinito solo en los puntos* $\{a_n\}$ *de forma que para cada* n *la diferencia* $F(x) - f_n(x)$ *tiene un valor finito en* $x = a_n$*. Lo que es más, en una vecindad apropiada del punto* $x = a$ *puede representarse como* $F(x) = f(x) + P(x - a_n)$*, donde* P *es una serie de* *potencias de* $(x - a_n)$

La demostración dada por Weierstrass es muy similar a la dada por Mittag-Leffler pero encuentra una forma más sencilla para dar las funciones que obligan la convergencia uniforme. Esta demostración incluye el conocido rigor de Weierstrass por lo que Mittag-Leffler mismo la adopta. En una carta del 7 de junio de 1880 Weierstrass expone sus razones para estas revisiones.

> Estoy tan impresionado por la importancia de su teorema que en una revisión más cercana no puedo dejar pasar que el establecimiento del teorema debe ser significativamente más corto y simple si debe hallar su lugar en los elementos del análisis a donde pertenece. El largo aparato de formulas que usted aplica, me temo, puede asustar a varios lectores; en cualquier caso hace más difícil penetrar en la esencia de la materia. Creo que no es ese su interés al publicar en la presente forma y quiero sugerirle que me dé permiso para presentar los teoremas en cuestión en un tratamiento libre en nuestra academia, lo anterior debido a que ya ha sido publicado su resultado y los derechos están asegurados [Turner 2007, 24].

Para ese entonces el resultado era ya bien conocido por la comunidad matemática alemana y francesa. A finales de 1880 Dini produce una prueba del teorema. En la carta del 21 de marzo de 1881 Hermite pregunta a Mittag-Leffler sobre esta prueba y el sueco responde que es equivalente a la dada por Weierstrass y conjetura que Dini no conocía el artículo.

Hermite estudia el teorema con el mayor interés y construye otra demostración ligeramente distinta a las anteriores, utilizando derivadas logarítmicas para encontrar las funciones racionales. En diciembre de 1880 le comunica a Mittag-Leffler este método mediante una carta.

También Schering realiza una demostración. Por lo que el 24 de febrero de 1881 Hermite escribe a Mittag-Leffler una carta donde comenta lo satisfecho que debe de estar de tener cuatro pruebas distintas de su teorema. En otra carta del 29 de junio de 1881 Hermite comenta que los estudiantes de la École Normale estudian estos resultados y que Darboux confirma que se ha convertido en un clásico [Bottazzini y Gray 2013, 443].

Capítulo 4

Últimas versiones del teorema

En el año de 1882, Hermite publica en el *Comptes rendus* una serie de ocho cartas en las que se expondrán las siguientes versiones del teorema. Las cartas van completando sucesivamente las versiones debido a que la longitud de las mismas no podía exceder tres páginas.

La simplificación del teorema dada por la versión de Weierstrass en 1880 permitió a Mittag-Leffler extender su teorema a funciones con un número infinito de polos o de singularidades esenciales con un sólo punto de acumulación [Bottazzini y Gray 2013, 443].

El enunciado de la primera carta comienza con la serie de valores $\{a_n\}$ que tiende a infinito y una serie de funciones enteras, racionales o trascendentes de γ que se anulan cuando $\gamma = 0$. Cita específicamente el teorema del 29 de junio de 1879 y que utiliza casi literalmente el método dado por Weierstrass en el *Berlinen Monalsbericht* de agosto de 1880. Es por esto que el teorema es sólo un poco distinto, al añadir la demostración de Weierstrass obtiene una versión más elegante.

En esta versión se indica que es posible construir con un conjunto (infinito) dado de polos y una singularidad en el infinito, con partes principales (funciones enteras racionales o trascendentes) y con coeficientes específicos. La prueba dada en esta versión es más esquemática que la de 1879 [Turner 2007, 29]. En la última de las publicaciones del *Comptes rendus* Mittag-Leffler altera la prueba original de este resultado ya que en una comunicación con Schwarz, se le notifica que el argumento considera una misma épsilon para mostrar la convergencia de una serie, el texto corrige este problema.

La segunda carta expone el problema inverso: ¿dada una función conocida siempre es posible expresarla como una serie del tipo que el teorema de Mittag-Leffler establece? [Turner 2007, 30]. En esta versión comienza con la función dada en la carta anterior y utiliza el teorema de Cauchy para reescribir los polos. El uso de este teorema permite únicamente un número finito de puntos singulares dentro del contorno simplemente conexo por lo que necesariamente Mittag-Leffler trata con una singularidad esencial en el infinito [Turner 2007, 36].

En la carta tercera retoma la fórmula obtenida en la carta anterior y considera ciertas condiciones para los polos bajo las cuales obtiene el mismo resultado que en la versión de 1879. Además, menciona que explorará ejemplos en los cuales aplicar la fórmula encontrada.

La siguiente carta reformula los puntos singulares al trasladarlos a valores finitos. Para hacerlo utiliza las funciones trigonométricas y obtiene una expresión que es particularmente útil para las funciones doblemente periódicas. Bajo ciertas condiciones encuentra que este resultado es equivalente a las fórmulas que Gyldén obtuvo para las funciones trigonométricas y resalta su importancia para la teoría de funciones elípticas [Mittag-Leffler 1882d, 783].

Las siguientes versiones del teorema Mittag-Leffler introducen la teoría de números transfinitos de Cantor, lo cual le permite generalizar aún más el teorema. Habíamos mencionado el gran impulso que obtuvo el teorema a partir de la reformulación de Weierstrass.

Ahora, la introducción de la terminología de Cantor logra la generalización buscada por Mittag-Leffler. Es por ello que analizaremos brevemente la relación entre Cantor y Mittag-Leffler.

4.1. Contacto con Cantor

Mittag-Leffer tiene contacto con el trabajo de Cantor por primera vez en 1881. Esto lo sabemos debido a una carta escrita el 9 de mayo de 1881 en la que Hermite le pregunta ¿podría satisfacer mi gran curiosidad sobre el tema de infinitos de un nuevo tipo considerados por Mr Cantor en la teoría de funciones? Mittag-Leffler responde a Hermite el 22 de junio que tan pronto como estudie su trabajo le dará una respuesta. [Hermite 1884, 122]

Cantor publicó entre 1879 y 1884 una serie de seis artículos en el *Mathematische Annalen* en los cuales ofrece una introducción básica a la teoría de conjuntos. De hecho fue el análisis funcional el que generó el interés de Cantor en la teoría de conjuntos y lo que inspiró su descubrimiento de los números transfinitos. La teoría de conjuntos fue, en parte, una respuesta a las investigaciones de Riemann sobre series trigonométricas y funciones discontinuas. Estos temas llevan de manera natural al análisis de conjuntos de puntos pues se relacionan con los dominios de definición de funciones con ciertos tipos de discontinuidades [Dauben 1990, 6].

Al estudiar el trabajo de Cantor, Mittag-Leffler lo encuentra esencial para el propio. Comienza así la relación entre ambos. Mittag-Leffler fue uno de los primeros matemáticos en tener un interés activo en la teoría de conjuntos de Cantor e hizo un gran trabajo en su difusión mediante su revista *Acta Mathematica*. Para 1887 Cantor da por terminada su colaboración profesional con él y se negó a seguir publicando en su revista debido a una sugerencia de Mittag-Leffler de no imprimir una versión prematura de una teoría general

[Dauben 1990, 3].

Mittag-Leffler sentía gran admiración por el genio de Cantor, afirmaba que, después de Weierstrass, Cantor era la “mente más brillante de Alemania” [Stubhaug 2010, 281].

Es interesante notar que en la era de matemáticas pre-Cantor, el punto al infinito se podía pensar como un valor válido. Tenía un significado, no existía como símbolo únicamente [Dauben 1990, 9].

Cantor utiliza las ideas existentes y crea nuevas con lo cual establece la unicidad de las representaciones de funciones utilizando las series trigonométricas. En este proceso, Cantor crea un nuevo tema de investigación, la teoría de números transfinitos [Dauben 1990, 29]

Cantor completa sus estudios el 14 de diciembre de 1866 en la Universidad de Berlín. Tuvo como maestros a Kummer, Kronecker y Weierstrass. Tenía un gran interés en la teoría de números. Uno de sus colegas en la Universidad de Halle, Heine, lo motiva a responder una pregunta particularmente difícil: dada una función arbitraria representada como series trigonométricas, ¿es la representación necesariamente única? [Dauben 1990, 30].

Para resolver la pregunta, reformula las sucesiones como conjuntos de puntos. Una idea que le permite trabajar con gran cantidad de elementos. Define en este sentido los puntos límite utilizando un conjunto infinito de puntos [Dauben 1990, 41]. Es en la búsqueda de solución a problemas específicos de las representaciones trigonométricas como gana autonomía propia la teoría de conjuntos [Dauben 1990, 45].

4.2. Últimas versiones del teorema

La quinta publicación comienza con una afirmación de que lo expresado en las publicaciones anteriores es la base de una teoría más general e indica que estos resultados forman una generalización de su resultado del 12 de diciembre de 1877 aparecido en el *Comptes Rendus de l'academie des Sciences de Stockolm.*

En esta versión es notorio el cambio de terminología, no comienza como en las otras versiones con una sucesión de singularidades sino con un conjunto de puntos singulares de la función **monogénica** $F(x)$.[1]

Posteriormente introduce el concepto de valor límite,[2] esto lo lleva a la definición de conjunto límite y de valores de 'primer género y enésima especie'.[3] Menciona además que esta clasificación es la misma que la utilizada por Cantor en las investigaciones sobre números reales situados entre valores finitos. En este punto se debe notar que Mittag-Leffler trata sólo con conjuntos numerables de polos pues el uso de subíndices corre sólo en los enteros positivos. Esto puede generar a lo más una cantidad numerable de singularidades esenciales, aunque mediante este método es posible construir funciones con una cantidad no numerable de puntos singulares [Turner 2007, 42].

En la sexta de las cartas sigue la introducción de la terminología de Cantor. Enuncia un teorema un poco más general al considerar una sucesión de conjuntos de puntos singulares.

La séptima y octava publicaciones fueron publicadas en el orden incorrecto, en una carta del 8 de mayo de 1882 Hermite refiere a este error, pide disculpas y sugiere que

[1] Hay que señalar el importante cambio conceptual de una serie de puntos a un conjunto de ellos.

[2] También conocido como punto límite

[3] Mittag-Leffler define como P' el conjunto derivado, es decir, el conjunto de puntos de acumulación de P; $P^{(n)}$ es el conjunto derivado de $P^{(n-1)}$, si para alguna n sucede que $P^{(n+1)} = 0$ se dice que el conjunto es de primer género y enésima especie.

esto puede corregirse en una fe de erratas al final del volumen. Debido a la redacción de las mismas el error es fácilmente identificable por el lector. En estas dos cartas se muestra de forma inductiva que el teorema de Mittag-Leffler se cumple, utilizando la notación de Cantor para un conjunto infinito de polos y un conjunto finito de singularidades esenciales [Turner 2007, 44].

Además, menciona que el teorema fue modificado para que sirviera al estudio de las nuevas funciones que Poincaré introduce en su análisis. Al final del artículo propone una pregunta que deja sin contestar ¿hay un método simple y directo para determinar $G(x)$ donde $G(x)$ es una serie de potencias enteras, convergente? [Mittag-Leffler 1882g, 1042].

4.2.1. Última versión del teorema

La versión final del teorema aparece en el volumen 4 de su revista *Acta Mathematica*, en 1884 con el título *Sobre las representaciones analíticas de las funciones monogénicas uniformes de una variable independiente* [Mittag-Leffler 1884]. El artículo contiene la generalización final del teorema de Mittag-Leffler e incluye pruebas completas con una ligera modificación de la teoría de conjuntos de Cantor. El concepto de conjunto derivado es decir, el conjunto de puntos de acumulación, permanece fundamental. En esta versión la idea de conjuntos densos en ningún lado da pie a la noción de que el conjunto de singularidades debe ser un conjunto aislado [Turner 2007, 54].

El artículo comienza con una nota en la que afirma que las investigaciones que va a exponer fueron antes publicadas en el Bulletin (öfversigt) de la academia real de ciencias de Suecia, así como en los *Comptes rendus*. Posteriormente define el concepto de vecindad e introduce la definición de continuo de Weierstrass, en una nota al pie explica la diferencia de los términos de Cantor de continuo, semicontinuo y continuo perfecto. También enfatiza la terminología de Weierstrass utilizada. Este es un concepto complicado pues no había una versión unificada entre los matemáticos. Turner señala que la diferencia importante es que mientras que para el concepto de Weierstrass se requiere una función como base, para el de Cantor, es un objeto más general y el concepto clave [Turner 2007, 57]

Esta versión es el resultado de las anteriores pero en la cual especifica cada uno de los pasos seguidos, setenta y nueve páginas en los que lleva al lector por las definiciones y demostraciones completas.

Respecto a la recepción del teorema, podemos estimarla utilizando el hecho de que sus contemporáneos lo consideraban de tal importancia que se volvió común su enseñanza en los cursos. Hermite lo enseñaba en la facultad de ciencias en París. Pero no era el único. Otra de las muestras de su aceptación es el hecho de que varios matemáticos trabajaron en mejorar su demostración, habíamos mencionado que para 1881 ya contaba con cuatro pruebas distintas. También existen artículos de Appel [1885] y Hermite en los que se muestra específicamente una aplicación.

Con Poincaré comienza una relación debido a que los resultados de Mittag-Leffler son de gran utilidad para las investigaciones del francés sobre funciones fuschianas. En una carta del 11 de abril de 1881 le comenta su impaciencia por los resultados. Respecto a esta relación trataremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Generalización al teorema de Cousin

5.1. Mittag-Leffler y Poincaré

Los primeros trabajos de Poincaré se dieron entre 1879 y 1880 y tenían como tema la teoría de números. En estos temas seguía los pasos de Hermite, su maestro en la École Politechnique, quien estaba complacido con su trabajo [Gray 2013, 157].

Hermite introduce a Poincaré con Mittag-Leffler mediante una carta el 28 de marzo de 1881 en la que le comenta de la excelente opinión que tiene del joven matemático y le expresa su deseo de que su trabajo gozara de mayor atención. En otra carta, del 26 de abril, Hermite pide a Mittag-Leffler que presente cierto trabajo de Poincaré a fin de que sea publicado en las Actas de la sociedad de Helsingfors y le comenta que le gustaría conocer la opinión de Weierstrass sobre ese trabajo. A partir de entonces Mittag-Leffler se vuelve en cierto sentido su protector.

El contacto entre Mittag-Leffler y Poincaré comenzó en 1881, a partir de ciertos resultados sobre teoría de funciones que Hermite [1881] publicó en la *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

Los resultados eran interesantes para ambos matemáticos debido a su trabajo sobre cierto tipo de funciones enteras que no pueden ser prolongadas analíticamente fuera del disco de convergencia, conocidas como *fonctions lacunaires*. A partir de entonces tienen contacto regular e intercambian ideas. A Mittag-Leffler, acostumbrado al rigor de Weierstrass, le parece que el trabajo de Poincaré es poco formal, demasiado intuitivo. Sin embargo, reconoce en él a uno de los grandes matemáticos de la época.

La relación entre Mittag-Leffler y Poincaré es más conocida por los trabajos sobre funciones fuschianas publicados en el *Acta Mathematica* ya que estos trabajos jugaron un papel fundamental en la consolidación de la revista al ser resultados novedosos y de gran importancia para la época.

5.2. Poincaré y Pierre Cousin

A finales del siglo XIX la meta de los matemáticos que trabajaban sobre análisis funcional era producir una teoría que pudiera generalizar la teoría de funciones elípticas a funciones de varias variables [Gray 2013, 395]. Esto es un paso natural en el avance de la teoría y tanto Poincaré como Picard trabajaban esos temas.

Cousin nació en París el 18 de marzo de 1867 y en 1886 entra a estudiar a la École Normale Supérieure [Maurey y Tacchi 2005, 174]. Poincaré estaba al tanto de sus avances y en 1893 escribe a Mittag-Leffler para recomendar la publicación de su tesis sobre la generalización a varias variables del teorema de Mittag-Leffler. Cousin está de acuerdo con publicar su trabajo en la revista *Acta Mathematica* y expresa que la tesis no está todavía terminada pero que en cuanto lo haga estará honrado de enviarlo a Mittag-Leffler.

El 8 de junio de 1894 presenta su tesis *Sur les fonctions de n variables complexes* en la Facultad de Ciencias de París. Entre los revisores Darboux cumplió el papel de presidente y Poincaré y Appel, los examinadores.

En 1895 publica su tesis en el *Acta mathematica*. En un principio este teorema de Cousin, se atribuyó a Lebesgue quien afirma que conoció el resultado en 1898 y publicó una prueba en 1902 [Hildebrandt 1926, 425]. La poca atención que recibió el resultado pudo ser consecuencia de que en la misma época se dio a conocer el ahora conocido Teorema de Heine-Borel[1] sobre recubrimientos finitos. El resultado de Cousin no es propiamente un resultado sobre estos temas, como lo menciona en la introducción, trata más bien con el tema de funciones holomorfas de varias variables complejas, los intereses son distintos, sin embargo los resultados son semejantes. Publicó una decena de artículos. En los años 1930, se desarrolló el concepto de variedad analítica. La introducción de nuevas herramientas –como la antes mencionada– permitieron que el nombre de Cousin fuera conocido. Cartan en su trabajo [1934] reformula el teorema de Cousin como un par de problemas, uno aditivo y otro multiplicativo.

Debido a esto, la vida de Cousin es poco conocida. Se encuentran algunas notas biográficas en los archivos de la École Normal y su esquela en *Le Figaro* del 21 de enero de 1933 en la que se menciona que fue profesor de la Facultad de Ciencias de Bourdeaux, de donde era su familia.

5.3. Teorema de Cousin

En la introducción de su artículo, Cousin nos deja claro que su punto de partida es el teorema de Poincaré en el cual establece las condiciones bajo las cuales una función analítica de dos variables complejas puede escribirse como cociente de funciones enteras. En su trabajo busca establecer una teoría de funciones de varias variables que tenga la mayor analogía posible con la teoría de funciones de una variable compleja.

[1]El 12 de febrero de 1894, Borel da a conocer los resultados de su tesis en una nota en el *Comptes rendus*

Posteriormente enuncia el resultado obtenido por Mittag-Leffler y lo relaciona con dos teoremas de Weierstrass, el primero trata de la existencia de una función entera con ceros prescritos –recordemos que es de este teorema del que parte Mittag-Leffler– y el segundo trata sobre la expresión de esta función como cociente de dos funciones. Considera estos resultados como 'consecuencias sucesivas' del teorema de Mittag-Leffler.

Luego afirma que estos tres teoremas "forman un conjunto de tres proposiciones 'íntimamente relacionadas'. Creo estar dando para las funciones de n variables complejas un grupo de tres proposiciones correspondientes a las tres precedentes." [Cousin 1895, 2] Cousin no fue el primero en considerar que el teorema sobre las singularidades implica el teorema sobre los ceros. Appell dio en 1883 una generalización del teorema de Mittag-Leffler a dos variables complejas. El método usado por Appell para modificar los puntos con singularidades en ceros mediante el uso de logaritmos fue usado por Cousin en este trabajo [Chorlay 2010, 25].

El artículo está dividido en cuatro partes. Comienza con algunas proposiciones preliminares que le servirán para construir la argumentación. La segunda parte trata de la demostración de un teorema que toma como tesis central, las tres proposiciones son corolarios de este 'teorema fundamental'. En la tercera parte enuncia un teorema en el que bajo ciertas condiciones una función de n variables complejas puede expresarse como cociente de dos series enteras convergentes en cierto dominio.

En la cuarta y última parte utiliza estos resultados para dar una generalización del teorema de Mittag-Leffler para n variables complejas. De su maestro Poincaré toma este enfoque de ir de lo local a lo global. Esto mediante el uso de policilindros (producto de discos) que le permiten, hasta cierto punto, mantener la analogía con las funciones de una variable compleja [Chorlay 2010, 28].

La generalización no es enteramente directa, explica a qué se refiere con que dos funciones son equivalentes y luego enuncia un teorema en el cual mediante la equivalencia de funciones puede escribirlas de cierta manera que conviene a su argumento. De esta forma logra reescribir los ceros de la función para que no fueran puntos aislados.

En 1917, Gronwall publica su artículo “On the expressability of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character” en el que hace una crítica a Cousin además de presentar resultados propios. Muestra que el teorema se restringe a ciertos dominios y que existe una diferencia de fondo entre la teoría de funciones complejas en una y varias variables. Para ciertos resultados no se requiere restringir el domino al hacer la generalización a varias variables pero en otros casos, como en este, es necesario [Bottazzini y Gray 2013, 682].

La recepción del trabajo de Cousin es difícil de describir, habíamos mencionado que no tuvo el impacto esperado. Aún así debe considerarse un resultado esencial en el campo de funciones complejas de varias variables. Actualmente los problemas de Cousin se tratan no en este contexto, sino en el de la cohomología.

Conclusiones

A lo largo del trabajo se analizaron las ideas y herramientas que dieron forma al teorema de Mittag-Leffler. En la evolución de éste varios aspectos fueron importantes pero podemos identificar dos momentos en los que el teorema avanza notablemente. En primer lugar, como mencionamos en el segundo capítulo, la versión de 1880 cobra relevancia debido a que la reformulación del resultado y la simplificación de la prueba dada por Weierstrass permitieron a Mittag-Leffler extender su teorema a funciones con un número infinito de polos y singularidades esenciales. También permite una mejor comprensión por parte de sus contemporáneos, lo cual ayudó a la difusión del resultado.

En segundo lugar, la incorporación de la notación de Cantor le permite la generalización buscada. Esto mediante el cambio de concepción de una sucesión de puntos singulares a un conjunto de puntos singulares. La versión final del teorema adapta las herramientas de la teoría de números transfinitos de Cantor con lo que obtiene una exposición muy clara y completa. En términos generales se puede considerar un trabajo autocontenido.

Las herramientas utilizadas en la demostración del teorema hacían necesario considerar únicamente funciones de una variable compleja. Cousin intenta la generalización a varias variables en una forma ingeniosa, utiliza el producto de conjuntos abiertos, pero no basta con una reconsideración del dominio; es por ello que falla su método.

Mediante el análisis de la evolución del teorema pudimos observar el trabajo de una comunidad de matemáticos. Resulta interesante considerar los sucesos políticos y sociales que influían en su trabajo. Como mencionamos en el primer capítulo, la relación entre matemáticos franceses y alemanes era ríspida debido a la guerra franco-prusiana. En este contexto Mittag-Leffler supo identificar 'lo mejor de ambos mundos' al establecer relaciones con figuras pivotales de las comunidades tanto en Francia como en Alemania. Me refiero a Hermite y Weierstrass. Llama la atención el papel que jugaron los matemáticos como comunidad, ya que si bien, Mittag-Leffler comenzó el trabajo al responder una pregunta sobre representación de funciones meromorfas, fue a través del trabajo con Hermite, Weierstrass y Appel, entre otros, como el teorema tomó fuerza y forma.

Para Mittag-Leffler la importancia de la comunicación de resultados no pasa desapercibida. Con miras a fomentar una comunidad internacional de matemáticos crea su revista *Acta Mathematica* con la cual da impulso a varios colegas, en particular mencionamos los trabajos de Cantor, Poincaré y Cousin. Nos encontramos ante un grupo de matemáticos extraordinarios que logran vencer las barreras del idioma, las ideologías y la distancia para establecer una red de trabajo.

El rastreo del origen del concepto de gavilla nos permite una visión general de las relaciones entre matemáticos y su forma de trabajo. Dejando de lado que el concepto resulta de gran importancia para la matemática moderna -con lo cual justifica su análisis- nos permite comprender, como habíamos mencionado, el cambio de visión dado a finales del siglo XIX y el intercambio de información y difusión que se hacía de los resultados en esos años. A través de este análisis comprendemos las ideas que permiten la construcción de diversas herramientas, pero también percibimos a los matemáticos como entes sociales que comparten afinidades y que construyen conceptos de una belleza extraordinaria.

Anexo

5.3.1. Definiciones

Incluimos aquí algunas definiciones de los conceptos más relevantes utilizados en el texto que fueron marcados en negritas.

Función doblemente periódica Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dice que es *doblemente periódica* si tiene dos periodos ω_1 y ω_2 tales que ω_1/ω_2 no es real. Es decir $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$ [Ahlfors 1985, 265]

Función elemental Se denomina *función elemental* a aquella que puede expresarse como una combinación finita de funciones constates y funciones algebraicas, exponenciales y logarítmicas así como sus inversos utilizando operaciones elementales. Algunos ejemplos de funciones elementales son el logaritmo, las potencias y funciones trigonométricas.

Función elíptica Las *funciones elípticas* se identificaban con lo que ahora conocemos con las integrales elípticas, es decir, integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$ donde R es una función racional y P es un polinomio de grado tres o cuatro. En la notación actual, las funciones elípticas son prácticamente equivalentes a las funciones doblemente periódicas. [Ahlfors 1985, 265]

Función entera Una función se denomina *entera* si es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ [Ahlfors 1985, 193]

Función meromorfa Una función $f(z)$ que es analítica en una región Ω, excepto en los polos, se conoce como *meromorfa* en Ω. [Ahlfors 1985, 128]

Función monogénica Una función puede representarse como serie de Taylor que converge a la función en una vecindad de un punto x_0 del dominio. Weierstrass se refería a estas representaciones como *elementos función* y los representaba como $P(x|x_0)$. Recordemos que para Weierstrass las funciones eran series de potencias. Con esto en mente podemos definir una *función monogénica* $f(z)$ como aquella que si puede representarse como serie de potencias en una vecindad de x_0 implica que todos sus elementos $P(x|x_0)$ pueden derivarse de un único elemento. [Turner 2007, 9]

Función racional Se conoce como *función racional* a aquella que puede escribirse como cociente de dos polinomios, es decir, de la forma $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$) tales que $P(z)$ y $Q(z)$ no tienen factores comunes. [Ahlfors 1985, 30]

Función trascendente Una *función trascendente* es aquella que no es racional.

Función trigonométrica Las *funciones trigonométricas* son las definidas por $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ y $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ [Ahlfors 1985, 43]

Gavilla Una gavilla sobre D consta de un espacio topológico $\mathfrak{G}$ y un mapeo $\pi : \mathfrak{G} \to D$ que cumple las siguientes propiedades:

1. El mapeo π es un homeomorfismo local; esto significa que para cada $s \in \mathfrak{G}$ existe una vecindad abierta Δ tal que $\pi(\Delta)$ es abierto en D y la restricción de π a Δ es un homeomorfismo
2. Para cada $\zeta \in D$ el tallo $\pi^{-1}(\zeta) = \mathfrak{G}_\zeta$ tiene estructura de grupo abeliano [en general cualquier estructura algebraica, como módulo o anillo].
3. El grupo de operaciones son continuas en la topología de $\mathfrak{G}$ [Ahlfors 1985, 286]

Parte principal de serie de Laurent Se denomina *parte principal* a la serie de potencias negativas en una serie de Laurent.

Polo Sea $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ una función racional. Los ceros de $Q(z)$ se conocen como los *polos* de $R(z)$. [Ahlfors 1985, 30]

Principio del argumento Si $f(z)$ es moromorfa en Ω con a_j ceros y b_j polos, entonces $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_j n(\gamma, a_j) - \sum_k n(\gamma, b_k)$ para cualquier curva simple cerrada γ sin ceros ni polos en esta. Donde $n(\gamma, a_j)$ denota, para a_j el índice de la curva en el punto a_j, es decir, el número de vueltas que da la curva en el punto el cual es un número entero. Análogamente para b_j. [Ahlfors 1985, 152]

Prueba de convergencia de Abel Tomemos la serie $a_0c_0 + a_1c_1 + ...$ Si c_n es una sucesión positiva decreciente y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum a_nc_n$ converge. Es decir, si tomamos el producto de una sucesión convergente con una sucesión positiva y decreciente, entonces la serie resultante también será convergente. En el caso de la convergencia uniforme de la suma $\sum a_nc_n$, la serie $\sum a_n$ debe ser uniformemente convergente también. [Turner 2007, 16]

Serie absolutamente convergente Se denomina así a las series $a_0 + a_1 + ... + a_n ...$ tales que al aplicar a cada término el valor absoluto convergen, es decir, $|a_0| + |a_1| + ... + |a_n| + ...$ es una serie convergente.

Serie de Laurent La *serie de Laurent* de una función compleja $f(z)$ es una representación de la misma en términos de series de potencias y es de la forma $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(z-a)^n$ donde los coeficientes A_n son de la forma $A_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$. γ una curva simple cerrada que no pasa por los polos ni por los ceros de la función. [Ahlfors 1985, 185]

Singularidad esencial Se denomina *singularidad esencial* aquella que no es no es una singularidad evitable ni un polo.

5.3.2. Teoremas

Enunciaremos aquí el primero de los teoremas de la carta enviada a Hermite publicada en el *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* en 1879. Los 3 siguientes teoremas, contenidos en el mismo artículo siguen un esquema similar.

Teorema 3 *Sea una sucesión infinita dada* $x_1, x_2, x_3, ..., x_\nu, ...$ *que satisface la condición* $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ *y sean* $m_1, m_2, m3, ..., m_\nu, ...$ *números dados enteros y positivos en los que la expresión*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (x-x_\nu)^{-m_\nu} G_{m_\nu-1}(x-x_\nu)\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu_\nu} ...,$$

determina de varias maneras los números enteros no negativos $\mu_1, \mu_2, \mu_3, ..., \mu_\nu, ...$ *y las expresiones enteras y racionales* $G_{m_1-1}, G_{m_2-1}, G_{m_3-1}, ..., G_{m_\nu-1}, ...$ *con grados respectivos* $m_1 - 1, m_2 - 1, m_3 - 1, ...,$ *de tal forma que la expresión deviene en una función analítica de la variable* x *que tiene las siguientes propiedades: La función será uniforme; tendrá un punto singular esencial* $x = \frac{1}{0}$*, y puntos singulares no esenciales* $x_1, x_2, x_3, ..., x_\nu, ...$ *y para los valores arbitrarios dados de*

$$\begin{array}{ccccc}
c_{1-m_1}, & c_{1-(m_1-1)}, & c_{1-(m_1-2)}, & \dots, & c_{1-1}, \\
c_{2-m_2}, & c_{2-(m_2-1)}, & c_{2-(m_2-2)}, & \dots, & c_{2-1}, \\
c_{3-m_3} & c_{3-(m_3-1)} & c_{3-(m_3-2)} & \dots & c_{3-3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
c_{\nu-m_\nu} & c_{\nu-(m_\nu-1)} & c_\nu & \dots & c_{p\lambda_p} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

y los valores suficientemente pequeños de $|x - x_\nu|$ *se puede escribir de la forma*

$$c_{\nu-m_\nu}(x-x_\nu)^{-m_\nu} + c_{\nu-(m_\nu-1)}(x-x_\nu)^{-(m_\nu-1)} + ... + c_{\nu-1}(x-x_\nu)^{-1} + \mathfrak{P}(x-x_\nu).$$

Si añadimos a la sumatoria una función entera cualquiera, de la variable compleja x, obtenemos así la representación de todas las funciones con las propiedades enunciadas ante-

riormente.

Enunciamos aquí el teorema de Cousin simplificado, tal como aparece en la página 680 del libro de Bottazzini y Gray.

Teorema 4 (Cousin) *Sea $S_1 \times S_2$ una región de $\mathbb{C}^2$, donde S_1, S_2 son regiones finitas y simplemente conexas de $\mathbb{C}$ que contienen dos regiones s_1, s_2 no necesariamente conexas, respectivamente. Supongamos que para cada punto interior (a, b) de $S_1 \times S_2$ existe una función f_{ab} definida en una vecindad N_{ab} de (a, b) tal que si $(a', b') \in N_{ab}$ entonces $f_{ab} - f_{a'b'}$ es regular. Entonces existe una función F definida en el interior de $s_1 \times s_2$ que difiere de f_{ab} por una función regular.*

Referencias

Ahlfors, Lars [1985]. *Complex Analysis*. McGraw Hill, N.Y.

Appel, P. Carta a Mittag-Leffler 11 febrero 1883, manuscrito sin publicar, Instituto Mittag-Leffler.

Appel, P. Carta a Mittag-Leffler 31 octubre 1882, manuscrito sin publicar, Instituto Mittag-Leffler.

Appel, P. [1884]. "Application du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques de troiesième espèce". *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, **2**: 67–74.

Archibald, T. [2002]. "Charles Hermite and German Mathematics in France". En Parshall, K y Rice, A., editores, *Mathematics Unbound: the evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945*. Páginas 123–137. AMS.

Barrow-Green, J. [2002]. "Gösta Mittag-Leffler and the foundation and administration of *Acta Mathematica*". En Parshall, K y Rice, A., editores, *Mathematics Unbound: the evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945*. Páginas 139–161. AMS.

Borel, A. [1998]. *Selected Papers: Oeuvres Scientifiquey*, capítulo Jean Leray and algebraic topology, páginas 1–21. Springer and Soc. Math. Franc.

Bottazzini, Umberto y Gray, J. [2013]. *Hidden Harmony-Geometry Fantasies. The Rise of Complex Function Theory*. Springer Verlag, N.Y.

Bottazzini, U. [1986]. *The higher Calculus: A history of real and complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer Verlag.

Cartan, H. [1934]. "Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **199**: 1284–1287.

Cartan, H. [1944]. "Idéaux de fonctions analytiques de *n* variables complexes". *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, **61**: 149–197.

Castorati, F. Carta a Mittag-Leffler 2 marzo 1882, manuscrito sin publicar, Instituto Mittag-Leffler.

Chorlay, R. [2010]. From problems to structures: the Cousin problems and the emergence of the sheaf concept. *Archive for history of Exact sciences*, **64**(1): 1–73.

Corry, L. [2004]. *Modern algebra and the rise of mathematical structures.* Birkhauser Verlag.

Cousin, P. [1895]. “Sur les fonctions de n variables complexes”. *Acta Mathematica*, **19**: 1–61.

Dauben, J. W. [1990]. *Georg Cantor: His mathematics and philosphy of the infinite*. Princeton University Press.

Dieudonné, J. [1978]. *Abregé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, volume II. Hermann.

Dieudonné, J. [2009]. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Springer.

Enriques, F. Carta a Mittag-Leffler sin fecha, año 1900, manuscrito sin publicar, Instituto Mittag-Leffler.

Fasanelli, F. D. [1981]. *The creation of sheaf theory*. Tesis de doctorado, The american university.

Garding, L. [1994]. *Mathematics and Mathematicians, Mathematics in Sweden before 1950*. AMS.

Gispert, H. [2002]. “The effects of War on France's Internationl role in Mathematics, 1870-1914”. En Parshall, K y Rice, A., editores, *Mathematics Unbound: the evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945*. Páginas 105–120. AMS.

Godement, R. [1958]. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris.

Gray, J. [1979]. “Fragments of the history of Sheaf Theory”. En Fourman, M.P. y Mulvey, C., editores, *Applications of Sheaves*. Páginas 1–79. Springer.

Gray, J. [2013]. *Henri Poincaré, A scientific Biography*. Princeton.

Hermite, C. [1881]. “Sur quelques points de la théorie des fonctions.(Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Mittag-Leffler)”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **91**: 54–78.

Hermite, C. [1882]. “Extrait d'une lettre adressée a M. Mittag-Leffler, de Stockholm, par M. Ch Hermite, de Paris, sur une Application du Théorème de M. Mittag-Leffer dans la Théorie des Fonctions". *Journal de Crelle*, **92**: 145–155.

Hermite, C. [1884]. "Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffer (1874-1883)". *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, **5**: 49–283.

Hildebrandt, T. [1926]. "The Borel Theorem". *Bull. Amer. Math. Soc.*, **32** :423–474. Consultado en https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183487130.

Houël, G.-J. Carta a Mittag-Leffler 3 febrero 1878, manuscrito sin publicar, Instituto Mittag-Leffler.

Houzel, C. [1990]. "Les débuts de la théorie des faisceaux". En Kashiwara, Masaki y Shapira, P., editores, *Sheaves on Manifolds*. Páginas 7–22. Springer Science.

Houzel, C. [1998]. "Histoire de la théorie des faisceaux". *Société mathematiqué de France*, páginas 101–119. Consultado en http://www.researchgate.net/publication/266865292, Septiembre 2015.

Leray, J. [1946]. "L'anneau d'homologie d'une représentation". *C.R. Acad. Sci. Paris*, **222**: 1366–1368.

Leray, J. [1998]. *Selected Papers: Oeuvres Scientifiques*. Springer Science & Soc. Math. France.

Maurey, Bernard y Tacchi, J.-P. [2005]. "La genèse du theoréme de recouvrement de Borel". *Revue d'histoire des mathématiques*, **11**: 163–204.

Mittag-Leffler, G. [1877a]. "Om den analystiska framställningen af en funktion af rationel karakter med ett ändkigt antal godtyckligt föreskrifna gränspunkter". *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhablingar Stockholm* , **2**: 33–43.

Mittag-Leffler, G. [1877b]. "Om den analystiska framställningen af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspunkt". *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhablingar Stockholm*, **1**: 33–43.

Mittag-Leffler, G. [1879]. "Extrait d'une lettre à M. Hermite". *Bulletin des sciences mathematiques et astronomiques*, **3**: 269–278.

Mittag-Leffler, G. [1882a]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **94**: 414–416.

Mittag-Leffler, G. [1882b]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **94**: 511–514.

Mittag-Leffler, G. [1882c]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **94**: 714–715.

Mittag-Leffler, G. [1882d]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **94**: 781–783.

Mittag-Leffler, G. 1882e]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **94**: 938–941.

Mittag-Leffler, G. [1882f]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **94**: 1040–1042.

Mittag-Leffler, G. [1882g]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **94**: 1163–1165.

Mittag-Leffler, G. [1882h]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **94**: 1105–1107.

Mittag-Leffler, G. [1882i]. "Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite". *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **95**: 335–336.

Mittag-Leffler, G. [1884]. "Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante". *Acta Mathematica*, **4**: 1–79.

Mújica, J. [1995]. "Mittag-Leffler Methods in Analysis". *Matemática Complutense*, **8**: 309–325.

Nabonnand, P., editor [1998]. *La Correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler*. Birkhäuser.

Poincaré, H. [1899]. "L'oeuvre mathématique de Weierstrass". *Acta mathematica*, **22**: 1–18.

Parshall, K. H. y Rice, A. C. editores. [2002]. *Mathematics Unbound: The evolution of an international mathematical research community, 1800-1945*, volumen 23. American Mathematical Soc.

Segal, S. [2002]. “War, Refugees, and the creation of an International Mathematical Community”. En Parshall, K y Rice, A., editores, *Mathematics Unbound: the evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945*. Páginas 359–380. AMS.

Stubhaug, A. [2010]. *Gösta Mittag-Leffler. A man of conviction*. Springer Verlag.

Turner, L. E. [2007]. The Mittag-Leffler theorem: The Origin, Evolution, and Reception of a mathematical result, 1876-1884. Tesis de maestría, Simon Fraser.