



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

**“ESTUDIO DE LA RECUPERACIÓN DE ACEITE EN UN MEDIO POROSO A  
TRAVÉS DEL USO DE SURFACTANTES Y SU ESCALAMIENTO”**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRA EN CIENCIAS DE LA TIERRA**

PRESENTA:

**FÍS. ELVIA PÉREZ RAMÍREZ**

TUTOR:  
**DR. JOSÉ JOAQUÍN LIZARDI DEL ANGEL**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

*MÉXICO D.F., FEBRERO DE 2016*



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Instituto de Geofísica  
*Orientación: Modelación*

## *Jurado*

Presidente: Dr. Federico Méndez Lavielle,  
*Investigador titular C, UNAM.*

Vocal: Dra. Graciela Herrera Zamarrón,  
*Investigador titular A, UNAM.*

Vocal: Dr. Eric Morales Casique,  
*Investigador de carrera asociado C, UNAM.*

Vocal: Dr. Erick Emanuel Luna,  
*Gerente de ingeniería de yacimientos, IMP.*

Secretario: Dr. José Joaquín Lizardi del Angel  
*Profesor investigador de tiempo completo, UACM.*

*Dedicada a mis padres con mucho cariño,  
por su apoyo incondicional, su amor,  
su ejemplo y confianza en mí.*



# Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me ayudaron para que esta tesis fuera posible, por su apoyo, sus consejos, su tiempo, amistad y confianza.

Primeramente quiero agradecer a mis padres por apoyarme incondicionalmente en cada etapa de mi vida.

A mis abuelitas por estar siempre al pendiente de mí.

A mis tíos, primos y amigos, por sus ánimos y consejos, por estar para mí en todo momento sin importar tiempo, lugar ni situación.

A mi asesor el Dr. José Joaquín Lizardi del Angel por su paciencia, enseñanzas y apoyo incondicional, brindándome además su confianza y amistad en todo momento.

A mis sinodales el Dr. Eric Morales Casique, la Dra. Graciela Herrera Zamarrón, el Dr. Erick Emanuel Luna y al Dr. Federico Méndez Lavielle, por dedicar parte de su tiempo a la revisión de esta tesis y por sus buenas recomendaciones.

Al Dr. Eduardo Vargas por su algoritmo para solución de Thomas.

A la UNAM y a mis profesores de Maestría por compartir su conocimiento con mucho gusto y entusiasmo. También agradezco a la UACM por el apoyo brindado para equipo de cómputo e instalaciones.

Al Instituto de Geofísica de la UNAM, por permitirme continuar con mis estudios de Posgrado.

A Araceli Chamán Gamez, por ayudarme en toda la documentación durante mi estancia en el Instituto de Geofísica, siempre con una sonrisa y un consejo.



# Índice general

<b>1. Revisión literaria</b>	<b>9</b>
1.1. Recuperación mejorada de petróleo . . . . .	9
1.2. Proceso de inyección de agua para la recuperación de petróleo . .	12
1.3. Efecto de la temperatura dentro de un yacimiento . . . . .	12
1.4. Efecto de surfactantes para la recuperación de petróleo . . . . .	13
1.5. Nociones de escalamiento y adimensionalización . . . . .	15
<b>2. Modelo teórico y matemático</b>	<b>17</b>
2.1. Planteamiento físico del problema . . . . .	17
2.2. Modelación matemática . . . . .	18
2.3. Análisis de órdenes de magnitud . . . . .	22
2.4. Formulación del sistema de ecuaciones . . . . .	25
2.4.1. Introducción . . . . .	25
2.4.2. Presión . . . . .	26
2.4.3. Saturación . . . . .	28
2.4.4. Temperatura . . . . .	29
2.4.5. Concentración . . . . .	31
2.4.6. Ecuaciones conjugadas . . . . .	33
<b>3. Modelo numérico</b>	<b>35</b>
3.1. Los métodos numéricos . . . . .	35
3.2. Resolución de las ecuaciones . . . . .	35
3.3. Método de diferencias finitas . . . . .	36
3.4. Método de volumen finito . . . . .	37
3.5. Solución del sistema de ecuaciones . . . . .	39
<b>4. Modelo computacional</b>	<b>41</b>
4.1. Descripción del código . . . . .	41
4.2. Diagrama de flujo . . . . .	41
4.3. Diagrama de subrutinas . . . . .	44
<b>5. Análisis de Datos y Resultados</b>	<b>45</b>
5.1. Empuje con agua . . . . .	46
5.2. Flujo de calor en el sistema . . . . .	49
5.2.1. Viscosidad dependiente de la temperatura . . . . .	49
5.2.2. Puntos de saturación de agua residual dependientes de la temperatura . . . . .	52
5.3. Interacción con un surfactante . . . . .	55

5.4. Efectos compuestos . . . . .	58
5.4.1. Consecuencias de la temperatura en la viscosidad de las fases y en los puntos de saturación de agua residual . . . . .	58
5.4.2. Variación del parámetro $\Omega$ . . . . .	62
5.4.3. La temperatura en la viscosidad de las fases con la temperatura y concentración en los puntos de saturación de agua residual . . . . .	63
5.4.4. Variación en el número de Péclet . . . . .	69
5.5. Curvas de comparación y recuperación . . . . .	73
<b>6. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>A. Variables empleadas</b>	<b>81</b>
A.1. Valores numéricos empleados . . . . .	81
<b>B. Deducción de las ecuaciones empleadas</b>	<b>83</b>
B.1. Presión-Saturación . . . . .	83
B.2. Temperatura . . . . .	85
<b>C. Adimensionalización de las ecuaciones</b>	<b>89</b>
C.1. Adimensionalización para la ecuación de la presión del aceite . . . . .	89
C.2. Adimensionalización para la ecuación de la saturación del agua . . . . .	90
C.3. Adimensionalización de la ecuación de la temperatura . . . . .	91
C.4. Adimensionalización de la ecuación de la concentración . . . . .	94
<b>D. Discretización de las ecuaciones</b>	<b>97</b>
D.1. Discretización para la ecuación de la Presión con el método de diferencias finitas . . . . .	97
D.2. Discretización para la ecuación de la Saturación con el método de Volúmen finito QUICK . . . . .	98
D.3. Discretización para la ecuación de la temperatura con el método de diferencias finitas . . . . .	101
D.4. Discretización para la ecuación de la concentración con el método de diferencias finitas . . . . .	103
<b>E. Código generado para el modelo</b>	<b>107</b>

# Índice de figuras

1.1. Proceso de bombeo, imagen obtenida de [4] . . . . .	10
2.1. Modelo físico propuesto. . . . .	18
2.2. Modelos para curvas de permeabilidades relativas, [13] . . . . .	22
3.1. Notación convencional usada para el nombramiento de los nodos para el método de volumen finito. . . . .	38
3.2. Esquema QUICK. . . . .	39
4.1. Diagrama de flujo para realizar el modelo computacional del pro- blema propuesto . . . . .	43
4.2. Diagrama de subrutinas empleadas . . . . .	44
5.1. Perfiles de saturación de agua, presión de aceite y presión capilar para empuje mecánico con agua con valores $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	47
5.2. Perfiles de saturación de agua, presión de aceite y presión capilar para empuje mecánico con agua con valores $Om = 10^{-2}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 4$ y $g = 0.01$ . . . . .	48
5.3. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando la viscosidad depende de la temperatura para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	50
5.4. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando la viscosidad depende de la temperatura para $Om = 10^{-2}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 4$ y $g = 0.01$ . . . . .	51
5.5. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la temperatura para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	53
5.6. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la temperatura para $Om = 10^{-2}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 4$ y $g = 0.01$ . . . . .	54
5.7. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la concentración para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	56
5.8. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la concentración para $Om = 10^{-2}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 4$ y $g = 0.01$ . . . . .	57

5.9. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.001$ . . . . .	59
5.10. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	60
5.11. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para $Om = 10^{-2}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 4$ y $g = 0.01$ . . . . .	61
5.12. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para $Om = 10^{-5}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	63
5.13. Perfiles de saturación de agua, presión capilar, temperatura y concentración cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura y de los puntos de saturación de agua residual con la concentración para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.001$ . . . . .	65
5.14. Perfiles de saturación de agua, presión capilar, temperatura y concentración cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura y de los puntos de saturación de agua residual con la concentración para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	67
5.15. Perfiles de saturación de agua, presión capilar, temperatura y concentración cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para $Om = 10^{-2}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 4$ y $g = 0.01$ . . . . .	69
5.16. Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^7$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	71
5.17. Perfiles de saturación de agua, presión capilar, temperatura y concentración cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura y con la concentración para $Om = 10^{-2}$ , $Pe = 10^7$ , $\eta = 4$ y $g = 0.01$ . . . . .	73
5.18. Perfiles para la Presión del aceite con $\eta = 1$ , $q = 0.001$ y $q = 0.002$	75
5.19. Perfiles para la Saturación del agua con $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.001$ . . . . .	75
5.20. Perfiles para la Saturación del agua con $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	76
5.21. Perfiles para la Presión capilar con $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.001$ . . . . .	76
5.22. Perfiles para la Presión capilar con $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	77
5.23. Perfiles para la Saturación del agua con $Om = 10^{-4}$ , $10^{-5}$ , $10^{-6}$ , $Pe = 10^4$ , $10^7$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	77

5.24. Curvas de porcentajes de petróleo recuperado para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.001$ . . . . .	78
5.25. Curvas de porcentajes de petróleo recuperado para $Om = 10^{-4}$ , $Pe = 10^4$ , $\eta = 1$ y $q = 0.002$ . . . . .	78
E.1. Programa principal: main.f90 . . . . .	108
E.2. Subrutina de variables empleadas: var.f90 . . . . .	109
E.3. Subrutina de parámetros empleados: param.f90 . . . . .	110
E.4. Subrutina para los valores iniciales: initcon.f90 . . . . .	111
E.5. Subrutina para las ecuaciones presión-saturación: presat.f90 . . .	113
E.6. Subrutina para la ecuación de temperatura: temperature.f90 . . .	115
E.7. Subrutina para la ecuación de concentración: concentration.f90 .	116
E.8. Subrutina para generar los archivos de salida: sout.f90 . . . . .	117



# Nomenclatura de variables usadas en unidades m-k-s

Pe: número de Péclét  
Re: número de Reynolds  
Pr: número de Prandtl  
L: longitud del pozo [m]  
Pc: presión capilar  $[Pa = \frac{Kg}{m \cdot s^2}]$   
Pu: presión umbral  $[Pa = \frac{Kg}{m \cdot s^2}]$   
Co: número de Courant  
 $P_\alpha$ : presión de la fase alfa  $[Pa = \frac{Kg}{m \cdot s^2}]$   
 $\Psi_\alpha$ : presión de la fase alfa [adimensional]  
 $P_\infty$ : presión de referencia [Pa]  
 $P_0$ : presión inicial [Pa]  
 $S_\alpha$ : saturación de la fase alfa  
T: temperatura del yacimiento [°K]  
 $T_0$ : temperatura inicial del yacimiento [°K]  
 $\theta$ : temperatura [adimensional]  
 $T_\infty$ : temperatura de referencia [°K]  
C: concentración [M]  
 $\varsigma$ : concentración [adimensional]  
 $C_\infty$ : concentración de referencia [M]  
 $C_0$ : concentración inicial [M]  
x: posición [adimensional]  
 $\bar{x}$ : posición dimensional [m]  
t: tiempo [adimensional]  
 $\bar{t}$ : tiempo dimensional [s]  
 $\tau$ : tiempo de referencia [s]  
 $t_c$ : tiempo característico [s]  
 $\phi$ : porosidad  
g: aceleración de la gravedad  $[\frac{m}{s^2}]$   
 $\lambda_\alpha$ : movilidad de la fase alfa  $[\frac{m \cdot s}{Kg}]$   
 $\lambda_r$ : movilidad de referencia  $[\frac{m \cdot s}{Kg}]$   
 $\lambda_T$ : movilidad Total  $[\frac{PermeabilidadRelativa}{Viscosidad} = \frac{1}{Pa \cdot s} = \frac{1}{\frac{Kg}{s^2 \cdot m} \cdot s} = \frac{m \cdot s}{Kg}]$   
 $u_\alpha$ : velocidad de Darcy para la fase alfa  $[\frac{m}{s}]$   
 $U_\infty$ : velocidad de Darcy de referencia  
dt= diferencial de tiempo [s]

$dx$  = espacio entre nodos [m]

$K$  : permeabilidad Absoluta o intrínseca [ $m \cdot m$ ]

$k_{r\alpha}$  : permeabilidad relativa de la fase alfa

$D$  : coeficiente de difusividad térmica media ,  $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

$\alpha_i$  : difusividad térmica de  $i$   $\left[\frac{m^2}{s}\right]$ , con  $i = w, o, roc$

$\kappa_i$  : conductividad térmica de la fase  $i$  [Watt/m\*K] =  $\left[\frac{Kg \cdot m}{s^3 \cdot K}\right]$

$\rho_i$  : densidad de la fase  $i$  [Kg/m<sup>3</sup>]

$Cp_i$  : capacidad calorífica [J/Kg\*K] =  $\left[\frac{m^2}{s^2 \cdot K}\right]$

$\mu_\alpha$  : viscosidad dinámica de la fase alfa  $\left[\frac{Kg}{m \cdot s}\right]$

$m_i$ : número de nodos

$C$ : concentración de surfactante dimensional  $\left[\frac{Kg}{m^3}\right]$

$\varsigma$  : concentración [adimensional]

$D_{mas}$ : difusividad másica  $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

$\Upsilon$ : factor de decaimiento del surfactante

# Resumen

En esta tesis se estudia el modelo matemático y computacional unidimensional, de un flujo bifásico conformado de agua y aceite, el cual que se encuentra en un medio poroso homogéneo. Dichas fases se suponen incompresibles e inmiscibles.

Se modela el desplazamiento del aceite debido a la inyección de agua, en un medio poroso que se encuentra saturado con petróleo y agua. De manera que el aceite es desplazado hasta el extremo donde se encuentra el pozo extractor. Posteriormente se agregan los efectos de la temperatura en las viscosidades y en los puntos de agua residual <sup>1</sup>. Así como los efectos de la concentración de un surfactante que también modifica los puntos de agua residual.

Las ecuaciones empleadas, como la de conservación de energía, conservación de masa y ley de Darcy, fueron acopladas y adimensionalizadas. Este procedimiento es importante pues permite obtener soluciones universales ya que las variables físicas quedan contenidas en números adimensionales, como en este caso que se estudian las variaciones del número de Péclet térmico, el número de Péclet másico y un parámetro al que llamamos  $\Omega$  el cual está constituido por parámetros como la longitud y la permeabilidad del yacimiento.

Posteriormente las ecuaciones se discretizaron empleando para unas el método de diferencias finitas y para otras el de volumen finito.

De las soluciones obtenidas, en cada caso representativo se analizan los perfiles de saturación de agua, presión de aceite, presión capilar, temperatura en el yacimiento y concentración de surfactante. Se espera que el efecto de la concentración de surfactante y el aumento de la temperatura del flujo inyectado logren una mejor recuperación de petróleo. Como apoyo a las predicciones, adicionalmente se realiza el análisis de órdenes de magnitud de las ecuaciones empleadas.

---

<sup>1</sup>Estos puntos son conocidos en inglés como End-Points de la saturación



# Introducción

Con el avance del conocimiento científico y tecnológico, la modelación matemática y computacional se ha vuelto una necesidad fundamental para el estudio y predicción en una amplia gama de problemas. Estas herramientas se utilizan para comprender sistemas complejos de la naturaleza, de manera que se pueden modelar escenarios antes de llevar a cabo su implementación y prevenir situaciones indeseables, pues se obtiene una solución numérica al problema planteado, es decir, al realizar un modelo o una simulación, lo que se pretende es predecir ciertos comportamientos dinámicos proporcionando una base de información para poder tomar decisiones con base a ella.

Así pues, la modelación y la simulación son un medio seguro para obtener resultados sin tener que invertir recursos económicos ni tiempo en construir prototipos físicos.

En el proceso de modelación se plantean las leyes de la física que reproducen de mejor manera al problema propuesto y se complementa con valores numéricos que se obtienen de mediciones realizadas previamente a la realización del modelo. La industria petrolera es una de las áreas donde la modelación y simulación son empleadas para predecir el comportamiento de yacimientos y procesos. Por ejemplo cuando se realiza recuperación mejorada, que será explicada más adelante, ayudan a evaluar las características para una recuperación de hidrocarburos exitosa como realizar ajustes de tasas de inyección/producción de los pozos, hacer una evaluación de desempeño para expandir un proyecto, evaluar los diseños, generar patrones de ubicación de pozos, mejorar los procedimientos utilizados, etc.

Para este trabajo se desarrolla el modelo matemático y computacional unidimensional y bifásico para un yacimiento al que se le realizan dos procesos, el primero es la inyección de un flujo de agua caliente, de manera que la temperatura es capaz de modificar la viscosidad del petróleo y del agua existente en el yacimiento. La temperatura también ejerce un efecto en los puntos finales de la saturación residual del agua. El segundo proceso consiste en inyectar agua con un surfactante con una cierta concentración, de manera que éste es capaz de modificar los puntos finales de la saturación residual del agua. Con esto se pretende conocer la forma en que la inyección de un flujo de calor y la presencia de un surfactante influyen para el proceso de recuperación de petróleo. Además de calcular el porcentaje de recuperación para cada proceso con respecto a uno donde solo se inyecta agua.

Para generar el modelo matemático se resolvieron cuatro ecuaciones diferenciales, una para la presión del aceite, para la saturación del agua, para la temperatura del yacimiento y finalmente otra para la concentración de surfactante. En general las técnicas numéricas utilizadas para flujos multifásicos

consisten en generar la discretización espacial de las ecuaciones de conservación utilizando algún esquema como diferencias finitas, volumen finito o elemento finito, seguido de una discretización implícita para el tiempo, posteriormente se generan iteraciones para resolver las ecuaciones discretizadas no lineales del sistema.

Para resolver las aproximaciones numéricas que integran a las ecuaciones no lineales de las dos fases, agua y aceite, existen distintas formulaciones como la de la presión-saturación, presión-saturación modificado y presión-presión. En este trabajo se utiliza la formulación presión saturación, en la cual se considera la presión del aceite y la saturación del agua como variables principales. Esta formulación ya ha sido empleada anteriormente por Faust(1985), Kueper y Friend(1991), Moridies y Reddell (1991) y Prues(1987) como se menciona en [1].

Posteriormente se resuelve la ecuación para la temperatura, la cual proviene de la ecuación de conservación de energía. La ecuación se propone en [2]. Esta es resuelta implícitamente y para su discretización se utilizó el método de diferencias finitas.

La cuarta ecuación diferencial corresponde a la ecuación de transporte de solutos en un medio poroso, para modelar la presencia del surfactante en el agua inyectada al yacimiento. En este caso la velocidad del fluido es conocida y calculada de antemano y la variable a resolver es la concentración del surfactante. La ecuación es propuesta en [3]. Esta ecuación presenta en su estructura matemática un término de pérdida de surfactante, el cual físicamente puede representar, algún proceso de sorción o decaimiento radiactivo, conforme avanza el flujo inyectado a través del yacimiento.

Con este trabajo se logra obtener un modelo donde se puede evaluar, de forma rápida y sencilla, la recuperación de petróleo implementando un flujo de calor y la presencia de un surfactante. Para lograrlo se proponen los siguientes objetivos:

#### **Objetivos generales de la tesis**

- Desarrollar un modelo matemático y computacional que describa el proceso de recuperación mejorada y que represente los efectos térmicos del flujo inyectado, efectos en la concentración de surfactante presente y efectos sobre las escalas del yacimiento.
- Evaluar los efectos de la temperatura y la concentración en el proceso de recuperación de petróleo con el modelo generado.
- Prever cual podría ser la recuperación de petróleo bajo la inyección de agua caliente y de un surfactante a un yacimiento.

#### **Objetivos específicos de la tesis**

Para poder realizar el modelo y obtener los resultados correspondientes se debe:

- Plantear el problema físico y las condiciones que se considerarán.
- Realizar una revisión y análisis bibliográfico de los métodos y resultados que se han obtenido hasta hoy en día con el uso de dichos métodos, esto incluye desde la petrofísica hasta la parte numérica y computacional del problema planteado.

- Desarrollar el modelo matemático, el cual considera las ecuaciones diferenciales que se desean resolver, así como las consideraciones específicas del problema mediante las ecuaciones constitutivas. Debe ser capaz de representar las características físicas planteadas en el problema físico.
- Crear el modelo numérico de las ecuaciones propuestas mediante el método de diferencias finitas y volumen finito.
- Generar el modelo computacional mediante el algoritmo y código correspondientes, capaz de resolver el modelo numérico discretizado.

La estructura de la tesis se basa en ir desarrollando los objetivos, primero se presenta un marco teórico con algunos términos básicos para su mejor entendimiento, después se plantea el modelo físico, se propone el modelo matemático, se genera el modelo computacional, se obtienen y analizan resultados del modelo y finalmente se presentan conclusiones.



# Capítulo 1

## Revisión literaria

La recuperación total de los hidrocarburos no siempre es posible con la simple presión del reservorio, pues a medida que éste se va drenando y se comienza la producción comienza a disminuir la presión del yacimiento. Para continuar con el proceso de extracción existen métodos para la recuperación del petróleo cuyo objetivo es el de mantener la presión del yacimiento mediante la inyección de algún fluido, como agua o fluidos miscibles. Aunque la distribución de los fluidos dentro del yacimiento estará determinada en gran medida por la mojabilidad de la roca y la tensión interfacial entre las fases inmiscibles.

### 1.1. Recuperación mejorada de petróleo

Durante el tiempo de producción de un pozo petrolero se pueden llevar a cabo tres etapas de recuperación: la primaria, secundaria y terciaria, no necesariamente en este orden. La recuperación primaria basa su producción inicial como resultado de la presión contenida en el yacimiento, pues en este punto los fluidos contenidos en el yacimiento se encuentran a presiones muy altas, por lo que al momento de ser perforados se produce petróleo sin la necesidad de bombearlo. Este proceso llega a su fin cuando el yacimiento petrolero alcanza la presión de equilibrio con la atmósfera. El método se aplica cuando la presión del yacimiento es mayor que la presión hidrostática. A medida que los fluidos se van expandiendo por el yacimiento la presión de éste va disminuyendo, la forma en que esto ocurra dependerá de los mecanismos involucrados como la compactación del sedimento o presencia de gas en expansión. El proceso termina cuando la presión ha disminuido demasiado o cuando comienza la producción de otros fluidos, como gas o agua. Éste mecanismo es muy importante pues permite recopilar información del yacimiento para seguirlo explotando con otros métodos. Con la recuperación primaria se obtiene de 12 a 15% de los hidrocarburos in situ.

Las operaciones de recuperación secundaria son el resultado de la inyección de agua o gas mediante pozos inyectoros, lo que genera un aumento en la presión del yacimiento permitiendo el desplazamiento del crudo hacia los pozos productores, manteniendo así, las presiones y tasas de producción. En este caso, si tenemos dos fases, como agua y petróleo, mientras el petróleo se mantenga

por arriba del punto burbuja <sup>1</sup> el flujo entre las dos fases será inmisible<sup>2</sup>. Con esto se puede recuperar un 15 a 50 % de petróleo in situ adicional.

La distribución de las fases inmiscibles en el reservorio es de gran interés para el proceso de recuperación de petróleo, pues influye en la tasa de flujo de cada fase y la eficiencia de la recuperación. Muchas veces es necesario interpretar la presión capilar para inferir la distribución del fluido.



**Figura 1.1:** Proceso de bombeo, imagen obtenida de [4]

La recuperación terciaria es la etapa en la que se utilizan técnicas más avanzadas para recuperar los hidrocarburos restantes o muy pesados que no pueden recuperarse por métodos primarios o secundarios. A estos también se les conoce como Métodos de Recuperación Mejorada o EOR <sup>3</sup> por sus siglas en inglés. Se llega a tener de un 60-80 % de petróleo in situ aun después de emplear los métodos anteriores. Esto se debe principalmente por dos factores:

- A nivel microscópico el crudo se encuentra atrapado debido a la existencia de fuerzas capilares que son mayores que las fuerzas viscosas de drenaje.
- A nivel macroscópico debido a la geometría del yacimiento, a la permeabilidad de las rocas o la existencia de caminos preferenciales, existen zonas donde los fluidos inyectados no pueden penetrar.

Dentro de los métodos de recuperación mejorada más importantes se encuentran:

- a. Inyección de agua: ya sea convencional, alternada con gas o con polímeros.
- b. Inyección de gases miscibles: como nitrógeno, dióxido de carbono o gases de combustión.
- c. Inyección química: con los distintos tipos de surfactantes.
- d. Recuperación térmica: como inyección de vapor, inyección cíclica de vapor, inyección de agua caliente o combustión in situ.

Estos procesos pueden interactuar generando condiciones físicas y químicas favorables para la recuperación del petróleo, por ejemplo, pueden reducir ten-

<sup>1</sup>Presión a la que el gas natural comienza a salir de la solución y forma burbujas.

<sup>2</sup>No existe intercambio de masa entre las fases. Las fases no se mezclan entre ellas por lo tanto existe una interfase.

<sup>3</sup>Enhanced Oil Recovery

sión interfacial o la viscosidad, generar hinchamiento<sup>4</sup> del petróleo o modificar la mojabilidad. Para hidrocarburos muy viscosos, se pueden llegar a emplear métodos de recuperación mejorada sin haber empleado métodos de recuperación primaria o secundaria anteriormente. Estos métodos son muy atractivos pues la mayor parte de los de los yacimientos ya explotados con métodos primarios o secundarios contienen más de la mitad del petróleo original in situ. Aunque su aplicación dependerá tanto de las características del petróleo, del yacimiento, de los precios del petróleo y de las ganancias, pues muchas veces resultan ser procedimientos muy caros.

A pesar de todo esto se estima que para el año 2020 los EOR representarán el 50 % de la producción mundial de petróleo. Con una aplicación del 55 % para métodos térmicos, 35 % para inyección de gases y de 10 % para químicos.

Con experimentos de drenaje e imbibición se ha observado que no es posible desplazar un fluido con otro completamente, como ya mencionamos, debido a los poros desconectados y a las fuerzas capilares. Al petróleo que queda después de un proceso de inyección se le conoce como **saturación residual**,  $S_{or}$ . Éste es un valor límite que en la práctica no se alcanza tan fácilmente.

La saturación residual del petróleo es la saturación de petróleo que permanece atrapada en el reservorio después de un proceso de desplazamiento. Este valor depende de muchas variables como el tamaño y distribución de los poros, la mojabilidad de la roca, propiedades de desplazamiento del fluido como viscosidad y fuerzas capilares, la temperatura, la concentración de un surfactante, si éste está presente, etc. En nuestro caso nos interesa la temperatura y la concentración de un surfactante.

La saturación residual es importante pues va a establecer la eficiencia máxima del desplazamiento del petróleo por agua a nivel microscópico además puede considerarse como la saturación inicial para procesos de recuperación mejorada cuando ya se ha inyectado agua.

El petróleo residual se encuentra confinado en el medio poroso por fuerzas interfaciales que existen entre el petróleo y agua actuando en los poros.

Idealmente se esperaría que un proceso EOR remueva todo el petróleo de los poros contactados por el agua inyectada y así  $S_{or} \rightarrow 0$ . Al realizar las operaciones nos vamos a dar cuenta, que generalmente, la saturación residual de petróleo permanecerá aun después de un proceso de barrido con agua ya sea porque el petróleo no ha sido contactado por el agua inyectada o porque fue desplazado a zonas no barridas en la roca. Sin embargo, existen otras maneras de realizar desplazamientos eficientes por ejemplo con la disminución de la tensión interfacial, la reducción de la viscosidad, reacciones que generan miscibilidad de fluidos, etc.

Reducir la saturación residual de petróleo es uno de los objetivos más importantes de la EOR.

---

<sup>4</sup>Es la expansión en el volumen de aceite debida a la disolución total o parcial de las moléculas de disolvente en el líquido del depósito. Depende de la presión, la temperatura, la composición y las propiedades físicas del disolvente y el depósito. Puede mejorar la movilización de aceite residual atrapado en los poros inaccesibles.

## 1.2. Proceso de inyección de agua para la recuperación de petróleo

La inyección de agua utilizada como método EOR fue descubierto en 1870 en Pennsylvania, debido a la presencia de una fuga acuífera que redujo la producción del pozo afectado, pero que aumentó la producción de los pozos vecinos. Con este método el agua desplaza los hidrocarburos, aumentando la presión del yacimiento. Una de las desventajas de utilizar solamente este método es que puede quedar más del 50 % del petróleo en el yacimiento.

Durante el desplazamientos de un fluido por otro, las saturaciones de ambos cambian con el tiempo y también se modificarán la presión, la viscosidad y la permeabilidad relativa de las fases involucradas.

En un proceso inyección existen cuatro fases que se deben considerar:

- a. Condiciones antes de la inyección: se refiere a las condiciones iniciales del yacimiento, presión, saturación, temperatura y en general el estado en el que se encuentra el yacimiento.
- b. Invasión: durante este proceso la inyección del agua genera un aumento en la presión del yacimiento. La presión será mayor cerca del pozo de inyección e irá decayendo conforme se acerca a la zona de extracción. El agua desplaza el petróleo, detrás de este petróleo solo irá quedando el agua inyectada y el petróleo residual.
- c. Ruptura de agua: este proceso se alcanza cuando comienza la producción de agua no solamente de petróleo.
- d. Posterior a la ruptura de agua: la producción de agua inyectada aumenta a expensas de la producción de petróleo. La recuperación del petróleo solo es posible con la inyección de grandes volúmenes de agua. Hasta llegar a un punto en que el yacimiento contiene solo agua inyectada y el petróleo residual. La recuperación para este punto deberá ser evaluada conforme a los costos del proyecto.

Dentro de los factores que afectan la recuperación de los hidrocarburos en la inyección de agua se encuentran, la profundidad y permeabilidad del yacimiento, la saturaciones iniciales de los fluidos, la tasa de inyección y la razón de movilidad. Ésta última es muy importante para el trabajo de simulación de esta tesis, se verá con mayor detalle en el Capítulo 2.

Por ahora podemos decir que la movilidad es la facilidad con la que se mueve un fluido dentro del yacimiento.

## 1.3. Efecto de la temperatura dentro de un yacimiento

La recuperación térmica es el proceso en el que se inyecta o se origina energía térmica en un yacimiento, ésta puede tener muchas finalidades, entre ellas la reducción de la viscosidad del petróleo para mejorar su movilidad, lo cual resulta

#### 1.4. EFECTO DE SURFACTANTES PARA LA RECUPERACIÓN DE PETRÓLEO<sup>13</sup>

muy atractivo para petróleos viscosos (5-15° API <sup>5</sup>). Aunque siempre se deben tomar en cuenta los parámetros básicos del yacimiento como porosidad, estratificación, espesor, profundidad, movilidad, permeabilidad, saturación de agua y petróleo. Otra finalidad es que se puede utilizar para reducir la saturación del petróleo residual debido a la expansión térmica o a la mejora en la razón de la movilidad. Esta última es la razón por la que se han introducido algunos efectos térmicos en esta tesis.

El efecto de la temperatura se expresa con la primera ley de la termodinámica en un medio poroso. Donde se define calor como la energía no mecánica ni eléctrica que pasa a través de un sistema cerrado, siendo un balance energético.

La ecuación de balance de energía se deriva suponiendo que la energía es función solamente de la temperatura y que el flujo en el reservorio ocurre por advección y conducción de calor (Ver Apéndice B).

Dentro de los múltiples métodos de recuperación térmica que existen, se simula en esta tesis la inyección de agua caliente (con surfactante y sin surfactante), que es uno de los métodos mas simples, económicos y seguros que se usa en los yacimientos. El proceso considera el desplazamiento inmisible por agua caliente. Cabe aclarar que aun cuando en un yacimiento real, el calor inyectado puede perderse en las formaciones adyacentes, lo cual suele ser una desventaja de éste método;

El flujo de calor inyectado se mueve a través del yacimiento alejándose del pozo de inyección y mezclándose con el petróleo a temperatura original del yacimiento. Se forma entonces, una zona caliente en la que la temperatura varía desde la temperatura de inyección en el pozo de inyección hasta la temperatura del yacimiento a cierta distancia de la zona de inyección. Esta zona aumenta con el tiempo pero su temperatura es menor que la temperatura de inyección. Para aplicar esta técnica se deben conocer algunas propiedades térmicas de la roca y de los fluidos que conforman el yacimiento.

#### 1.4. Efecto de surfactantes para la recuperación de petróleo

También nos interesa estudiar el transporte de un soluto, que llamaremos surfactante, en un fluido en movimiento en el medio poroso. Para ello es importante conocer la velocidad de las partículas del fluido como función de la posición y del tiempo. En este trabajo la velocidad se calcula y se actualiza antes de ser utilizada en el modelo de transporte, mediante la ecuación de Darcy.

Además se considera que la concentración de soluto (surfactante) es pequeña, por lo que la densidad del fluido (agua) es independiente de la concentración.

En un proceso de transporte de una sustancia disuelta en un fluido, se pueden encontrar tres fenómenos:

- Advección: esta ocurre debido a que la sustancia disuelta es acarreada por el fluido cuando éste se mueve. La velocidad del fluido es diferente de cero, por lo que se debe conocer esta información.
- Difusión: este proceso es modelado por la Ley de Fick<sup>6</sup>. Para un medio

<sup>5</sup>Es una unidad de densidad adoptada por el Instituto Americano del Petróleo (API). Según la escala API, cuanto más alto es el valor, menos denso es el crudo.

<sup>6</sup>El flujo de la masa del soluto  $=\phi D \nabla C$ .

poroso coexisten dos tipos de fenómenos:

\* Difusión molecular: es un fenómeno a nivel microscópico (átomos, iones o moléculas) donde las partículas de soluto se encuentran en permanente agitación y siguen caminos aleatorios conocido como movimiento Browniano.

\* Dispersión mecánica: debido a la tortuosidad del flujo del fluido que se atribuye a la aleatoriedad del espacio poroso.

- Generación de masa: esta puede deberse a un suministro externo, o por fuentes o sumideros como un decaimiento radiactivo, una reacción química o por adsorción. Esto no significa que se viole el principio de conservación de masa, pues recordemos que éste se aplica a sistemas aislados.

El término "transferencia de masa" se utiliza para designar el transporte de una sustancia que participa como una componente en una mezcla de fluidos. En nuestro caso el transporte del surfactante en el agua.

Los surfactantes usualmente son compuestos orgánicos que provienen del petróleo crudo. Su utilización se debe a que ayudan a recobrar el petróleo residual, pues reducen la tensión interfacial entre el petróleo y el agua haciendo el petróleo más móvil por lo que es más fácil desplazarlo con el fluido inyectado. Los surfactantes ayudan a recuperar de un 10 a 15% más de petróleo.

La técnica consiste en inyectar diferentes fluidos sucesivamente, de manera que a cierta cantidad de fluido que se vaya inyectando se le conoce como tapón. Idealmente estos tapones desplazarán todo el petróleo como si fuera un pistón.

En el estado inicial, el yacimiento se encuentra con la saturación residual del petróleo atrapado en los poros debido a las fuerzas capilares. Posteriormente el surfactante disminuye la tensión interfacial y la mezcla de agua más surfactante desplaza el aceite movilizado hasta que se llega al pozo productor. La movilización es debida a los procesos físico-químicos en los que se ha disminuido la tensión interfacial y a que se ha hinchado el crudo. Un defecto que presenta este método es el fenómeno de transferencia de masa, en el que existirá la pérdida de surfactante debido a que puede ser adsorbido sobre la roca o por si es transferido hacia el aceite. Esto hará que se vaya reduciendo la cantidad de surfactante inicial, conforme éste vaya atravesando el yacimiento.

En experimentos realizados por Somasundaran, P., & Zhang, L. en 2006 publicados en [5], encontraron que los surfactantes son capaces de alterar la mojabilidad de manera que aumentan las tasas de recuperación de petróleo al disminuir la tensión interfacial. La mojabilidad juega un papel muy importante en la recuperación de petróleo y puede ser afectada por muchos factores como adsorción, composición mineral, condiciones de PH y salinidad.

La adsorción debe ser tomada muy en cuenta pues puede tornar muy caro el proceso de recuperación.

Existen gran variedad de surfactantes, que se pueden clasificar como lo hace Mohanty, K. K en [6]:

- Aniónicos: Tienen carga negativa en su grupo hidrofílico. Como sulfonatos, sulfatos, carboxilatos, fosfatos, etc. Que son utilizados frecuentemente en métodos de recuperación mejorada, debido a su baja adsorción.
- Catiónicos: Con carga positiva en su grupo hidrofílico. Como el amonio, piridinio, imidazolinio, piperidinio, etc. Estos no son buenos candidatos

en recuperación mejorada para yacimientos arenosos, debido a que tienen una alta adsorción. Se consideran buenos para aplicaciones cercanas a los pozos.

- No iónicos: Sin carga en su grupo hidrofílico. Como compuestos que tienen radicales alquilo, arilo, acilo, acilamino, glicol-éter, poliglicol éter, etc. Se consideran para yacimientos con carbonatos.
- Anfotéricos: Presentan cargas positivas y negativas en su grupo hidrofílico. Como los ácidos aminocarboxílicos.

En concentraciones bajas los surfactantes se presentan como monómeros, mientras que al aumentar la concentración existen más comúnmente como agregados como miscelas o cristales líquidos.

Si queremos reducir lo suficiente la tensión interfacial, se deben usar surfactantes que no sean ni muy hidrofílicos ni muy lipofílicos. Se usan con frecuencia los sulfonatos de petróleo del orden de 430-460 dalton<sup>7</sup>, como lo sugiere Salager, J. L. en [7], debido a su amplia distribución de pesos moleculares y a que no son costosos; sin embargo, la desventaja es que no son muy solubles en agua por lo que tenderán a buscar zonas favorables para ellos, por ejemplo, hacia la fase aceite, perdiendo así la capacidad de reducir la tensión interfacial.

## 1.5. Nociones de escalamiento y adimensionalización

Escalar es el proceso de extrapolar los resultados obtenidos de una determinada escala a otra, generalmente mucho más grande. Este procedimiento puede llevarse a cabo gracias a las simulaciones.

Para representar y entender mejor el comportamiento de un yacimiento petrolero primero se realizan estudios en muestras llevadas al laboratorio, las cuales son del orden de cm, que son usadas para estudiar el fenómeno de interés bajo condiciones controladas. También se obtienen datos fundamentales y necesarios para realizar la recuperación del petróleo como lo sugieren Moran, M. J., Shapiro, et. al. en [8]. Estos datos se usan para desarrollar formulaciones empíricas, y realizar predicciones y con esta información se complementan los modelos físicos y computacionales que intenten reproducir las características del yacimiento real que es del orden de metros o kilómetros. Sin embargo, es necesario establecer la relación entre el modelo del laboratorio y el de tamaño real como lo hacen Cruz, N. M. S., & Portillo, M. L. T con sus modelos propuestos en [9].

Para reproducir el comportamiento a ambas escalas debemos considerar la misma geometría, las mismas direcciones de la velocidad del flujo, masas y concentraciones proporcionales, temperaturas y fuerzas en puntos homólogos.

Sabemos que la complejidad de un yacimiento no puede ser reproducido fielmente en el laboratorio. Por lo tanto van a existir errores inherentes observados en los modelos de escalamiento. Sin embargo, uno de los objetivos del proceso de escalamiento es identificar las variables que más afectan en un proceso de recuperación mejorada.

<sup>7</sup>Unidad de masa atómica unificada, equivalente a  $1.660538921 \times 10^{-27}$ kg

Para probar qué variables son relevantes para el problema se debe realizar un análisis adimensional. Con este se estudian las variables respecto a sus órdenes de magnitud.

La adimensionalización es el proceso de reescribir las variables, dependientes e independientes, que caracterizan a un problema, por variables adimensionales. De acuerdo a Moreau, P., Morvan, en [10], este procedimiento se basa en el hecho de que para describir un fenómeno físico se requieren menor número de variables adimensionales que número de variables físicas (dimensionales), lo cual ayuda a simplificar el problema .

Muchas veces se adimensionalizan las ecuaciones que se intentan resolver, de manera que resulte más cómodo utilizar las ecuaciones sin preocuparse de las unidades. También se pueden despreciar términos que tengan valores pequeños comparados con los otros términos de la ecuación.

Para llevar a cabo una adimensionalización se divide cada variable del problema, entre su valor característico, donde el valor característico es un valor de referencia para cada variable y que son parámetros del problema.

Boyadjiev, C. propone en [11] que para realizar una adimensionalización se utilicen como escalas las máximas dimensiones de las variables con lo cual sus valores están en el intervalo  $[0,1]$ , cuando se desconocen los valores máximos las escalas se utilizan los promedios de los valores. Posteriormente se reescriben las ecuaciones en términos de las variables adimensionales .

Algunos números adimensionales importantes que resultan del proceso de adimensionalización y que aparecen en este trabajo son:

$Re$  : el número de Reynolds relaciona la densidad, viscosidad, velocidad y dimensión típica de un flujo.

$Pr$  : el número de Prandtl es el cociente entre la velocidad de difusión de cantidad de momento (viscosidad) y la difusividad térmica.

$Pe$  : el número de Péclet térmico es el producto del Reynolds térmico por el número adimensional de Prandtl, relaciona la velocidad de advección de un flujo y la velocidad de difusión.

$Le$  : el número de Lewis es el cociente entre la difusividad térmica  $\alpha$  y la difusividad másica  $D_{mas}$ . Se puede expresar también como el cociente del número de Schmidt entre el número de Prandtl.

$Sc$  : el número de Schmidt es definido como el cociente entre la difusión de cantidad de movimiento y la difusión másica.

$Pe_{mas}$  : el número de Péclet másico que es el producto del Péclet térmico por el número adimensional de Schmidt

## Capítulo 2

# Modelo teórico y matemático

### 2.1. Planteamiento físico del problema

Se considera un problema unidimensional de flujo de dos fases (agua,  $w$  y aceite,  $o$ ) inmiscibles e incompresibles, a través de un medio poroso homogéneo.

Se tiene un pozo de inyección de agua en la frontera A, el cual va desplazando al petróleo conforme barre el yacimiento hasta un pozo de extracción localizado en la frontera B, como se muestra en la figura 2.2.

El yacimiento de longitud  $l$  está saturado con 30 % de agua connata, que es considerada la saturación inicial de agua, y 70 % de petróleo. También presenta una saturación residual de petróleo de  $S_{ro} = 0.1$  y una saturación de agua irreducible  $S_{rw} = 0.2$ .

Las propiedades térmicas de la roca y de los fluidos que conforman el yacimiento se consideraron constantes para hacer una simplificación; sin embargo, muchas veces éstas dependen de la temperatura y pueden ser determinadas experimentalmente. Dentro de dichas propiedades se incluyen la capacidad calorífica  $Cp_i$ , la conductividad térmica  $\kappa_i$ , difusividad térmica  $\alpha_i$  y la densidad  $\rho_i$ . Se desea observar el efecto de un flujo de calor en el yacimiento, por lo que se inyecta agua caliente de manera que la temperatura modifica la viscosidad ( $\mu$ ) de las fases y los puntos de saturación de agua residual. Así pues, la viscosidad fue considerada como variable dependiente de la temperatura, recordemos que la temperatura juega un papel importante en la viscosidad del petróleo pues ésta tiende a disminuir dramáticamente cuando se eleva la temperatura, mucho más rápido que el agua, mejorando la movilidad y el proceso de desplazamiento.

En este trabajo se considera el flujo temporal de calor por unidad de área. Se supone que el medio es isotrópico y que los cambios en la densidad son despreciables. También suponemos que existe equilibrio local térmico donde la temperatura de la roca del yacimiento y la temperatura de las fases fluidas son iguales. También se considera que el calor no escapa del yacimiento.

Estamos suponiendo que la superficie porosa es igual a la porosidad que es constante, de manera que en el término conductivo tenemos la tasa neta de conducción de calor en una unidad de volumen del sólido. También se presenta el término conductivo debido a la presencia de la velocidad. Este término repre-

senta la tasa de cambio de la temperatura en un elemento de volumen debido a la convección del fluido dentro de éste.

También se inyecta un surfactante disuelto en el agua inyectada que es capaz de modificar la saturación residual de agua. Por lo tanto los puntos finales de saturación residual del agua dependen de la concentración del surfactante presente.

Además para hacer un análisis universal del problema se adimensionalizan las ecuaciones de presión de aceite ( $\psi_o$ ), saturación de agua ( $S_w$ ), temperatura del yacimiento ( $\theta$ ) y concentración de surfactante ( $\zeta$ ).

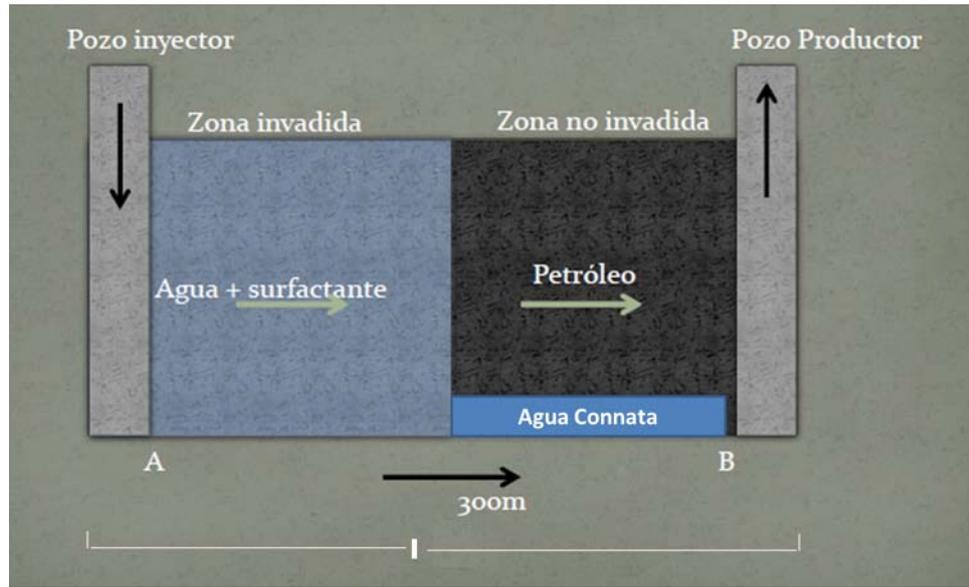


Figura 2.1: Modelo físico propuesto.

## 2.2. Modelación matemática

El modelo matemático consiste en el conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de los fluidos en el reservorio de petróleo, con sus condiciones iniciales y condiciones de frontera que nos permiten delimitar el problema.

Las condiciones de frontera determinan el comportamiento de la solución en las fronteras externas  $\partial\Omega$  de lo que consideramos dominio espacial  $\Omega$ . La solución de la ecuación diferencial depende de las condiciones físicas que existen en las fronteras del medio. En general existen tres tipos de condiciones de frontera:

**Dirichlet:** corresponde a una situación en la que se fija el valor de la solución en esa parte de la frontera. Físicamente implica que se conoce el valor de la variable en la frontera, (éste puede ser variable en el tiempo, pero se conoce dicha variación).

$$F(\underline{x}, t) = \gamma(\underline{x}, t) \quad (2.1)$$

**Neumann:** en este caso se especifica el valor de la derivada espacial de la solución. Si hablamos de un flujo en medios porosos, esta condición se escribe

en términos del flujo en dirección normal a la frontera. Es decir, la derivada implica la existencia de un flujo (para las ecuaciones de cantidad de movimiento será un flujo de masa mientras que para las ecuaciones de energía será un flujo de calor) cuyo valor es conocido. Existe un caso especial en el que la derivada es igual a cero, en cuyo caso corresponde a una superficie impermeable.

$$\frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}, t) = \gamma(\underline{x}, t) \quad (2.2)$$

**Robin:** Este tipo especifica la relación entre el valor de la solución y su derivada. Se puede ver como una generalización de las condiciones Neumann y Dirichlet. Puede considerarse como un flujo que cambia de acuerdo a cierta función:

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}, t) + \beta F(\underline{x}, t) = \gamma(\underline{x}, t) \quad (2.3)$$

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega$$

Para  $t > 0$ , donde la función  $\gamma(\underline{x}, t)$  es un dato del problema y con  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  donde se admite que  $\alpha$  y  $\beta$  cambien de punto a punto y de tiempo a tiempo, es decir, pueden ser funciones del tiempo y del espacio y no pueden ser simultáneamente iguales a cero.

Las condiciones iniciales se requieren cuando un problema es dependiente del tiempo, éstas suelen ser un dato del problema, y especifican el estado de un sistema a un tiempo inicial  $t = 0$ .

### Ecuaciones constitutivas

Para poder plantear un problema específico, se requiere, además de las ecuaciones diferenciales, un conjunto de ecuaciones auxiliares para poder solucionar correctamente el problema.

Algunos de los términos importantes se presentan a continuación.

La movilidad de un fluido es definida como la relación de la permeabilidad efectiva de la roca para una fase dada, dividida por la viscosidad del fluido o fase  $\alpha$ :

$$\lambda_\alpha = \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} \quad (2.4)$$

También se puede definir la movilidad total en términos de la saturación como:

$$\lambda = \frac{1}{(1 - S_{rw} - S_{ro})^\eta} \left[ \frac{(S_w - S_{rw})^\eta}{\mu_w} + \frac{(1 - S_{rw} - S_{ro})^\eta}{\mu_o} \right] \quad (2.5)$$

y movilidad del agua, definida como:

$$\lambda_w = \frac{1}{\mu_w} \left( \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{ro}} \right)^\eta \quad (2.6)$$

Cuando se tienen múltiples fluidos en el reservorio, se deberá utilizar la permeabilidad relativa con las viscosidades de los fluidos para definir lo que se conoce como movilidad del fluido.

La eficiencia de la inyección depende de la razón de movilidad del fluido desplazante al fluido desplazado, para inyección de agua se tiene:

$$M = \frac{k_{rw}}{\mu_w} / \frac{k_{ro}}{\mu_o} \quad (2.7)$$

Donde  $k_{r\alpha}$  es la permeabilidad relativa de la fase  $\alpha$  y es muy importante en el movimiento de fases inmiscibles, es el resultado de experimentos de laboratorio e incorpora varios parámetros del flujo de fluidos dentro de los reservorios. Esta depende fuertemente de la saturación de los fluidos.

La razón de movilidad  $M$ , definida en [12], es una medida relativa del petróleo que se mueve delante del frente de invasión respecto al movimiento del agua detrás del frente. Suponiendo que los gradientes de presión en ambos son iguales. Podemos distinguir tres casos:

- Si  $M = 1$  significa que el petróleo y el agua se mueven a la misma velocidad relativa.
- Si  $M < 1$  el agua se mueve más lento que el petróleo. Lo que genera gran eficiencia de desplazamiento
- Si  $M > 1$  el agua detrás del frente se mueve más rápido que el petróleo que está por delante esto reduce la eficiencia de desplazamiento y habrá que inyectar grandes volúmenes de agua para recuperar petróleo.

También es importante definir algunas propiedades para dar una mejor interpretación al problema:

Cuando existen dos fluidos en un poro, uno de ellos será atraído preferencialmente por la superficie de la estructura sólida. Este fluido se conoce como la fase mojante, mientras que el otro se llama fase no mojante. Así pues, cuando consideramos fluidos inmiscibles, éstos están separados por una interfase bien definida. Como la cohesión entre las moléculas de los fluidos de un lado de la interfase son diferentes que del otro lado, se puede caracterizar la interfase por alguna energía superficial o tensión superficial, que será la medida de las fuerzas que deben ser superadas para cambiar su forma. Una consecuencia de la existencia de la tensión superficial es la diferencia en el equilibrio de presiones de las fases, que están separadas por una curva interfacial, debido al desbalanceo de las fuerzas tangenciales que dividen la superficie. La presión entre ambas fases, se conoce como presión capilar,  $P_c$ , y puede ser calculada como la presión de la fase no mojante  $P_{nw}$  menos la presión de la fase mojante  $P_w$ :

$$\Delta P = P_c = P_{nw} - P_w \quad (2.8)$$

**Porosidad:** es el porcentaje de espacios vacíos en el volumen total de la roca,  $\phi$ .

**Saturación:** es el porcentaje de el volumen de poro ocupado por las fracciones de volumen de la fase  $\alpha$  de la formación. Matemáticamente podemos definir la saturación como:

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_{poro}} \quad (2.9)$$

Para un modelo bifásico agua-petróleo se considera que la saturación cumple con:

$$S_w + S_o = 1 \quad (2.10)$$

**Permeabilidad:** capacidad de la roca de permitir que un flujo la atraviese sin alterar su estructura interna. Puede relacionarse con la porosidad pero no siempre depende de ella, ésta es controlada por el tamaño de los pasajes que unen los poros y se mide en darcies o milidarcies,  $k$ . La capacidad de transmitir un solo fluido cuando esta 100 % saturada se llama permeabilidad absoluta. La permeabilidad eficaz se refiere cuando existen dos fluidos en una roca, y es la capacidad de la roca de transmitir un fluido en presencia de otro fluido cuando los dos son inmiscibles. La presencia de agua connata sostenida por presión del capilar en los poros de la roca inhibe la transmisión de hidrocarburos.

**Permeabilidad relativa:** Es el cociente entre la permeabilidad efectiva de un fluido a una saturación determinada entre la permeabilidad absoluta de ese fluido en condiciones de saturación total. Alternativamente y para nuestra conveniencia de acuerdo al modelo de Corey se puede definir la permeabilidad relativa del agua y la permeabilidad relativa del petróleo, respectivamente, como:

$$k_{rw} = Se^\eta \quad (2.11)$$

$$k_{ro} = (1 - Se)^\eta \quad (2.12)$$

Donde  $Se$  es la saturación efectiva definida en nuestro caso como:

$$Se = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{ro}} \quad (2.13)$$

Existen varios modelos matemáticos para representar las curvas de permeabilidad relativa, por mencionar algunos otros se presenta la Tabla 2.2.

Autor	Modelo
Burdine	$k_{rw} = S_{ov}^2 \left[ \frac{\int_0^{S_w} \frac{dS_{ov}}{P_c^2}}{\int_0^1 \frac{dS_{ov}}{P_c^2}} \right]$ $k_{rov} = (1 - S_{ov})^2 \left[ \frac{\int_0^{S_w} \frac{dS_{ov}}{P_c^2}}{\int_0^1 \frac{dS_{ov}}{P_c^2}} \right]$
Mualein	$k_{rw} = S_{ov}^7 \left[ \frac{\int_0^{S_w} \frac{dS_{ov}}{P_c} \right]^2$ $k_{rov} = (1 - S_{ov})^9 \left[ \frac{\int_0^{S_w} \frac{dS_{ov}}{P_c} \right]^2$
Timmerman	$k_{rw} = S_w \left[ \frac{\int_0^{S_w} \frac{dS_{ov}}{P_c^2} \right]^{2.5}$ $k_{rov} = S_w \left[ \frac{\int_0^{S_w} \frac{dS_{ov}}{P_c^2} \right]^{2.5}$
Fatt-Dykstra	$k_{rw} = \frac{\int_0^{S_w} \frac{dS_{ov}}{P_c^3}}{\int_0^1 \frac{dS_{ov}}{P_c^3}}$ $k_{rov} = (1 - S_{ov}) \frac{\int_0^{S_w} \frac{dS_{ov}}{P_c^3}}{\int_0^1 \frac{dS_{ov}}{P_c^3}}$
Fulcher – Ertekin	$k_{rov} = 0,6135 S_{ov}^{[1,25875 - 0,070612 \ln(\mu_w / \mu_o / \gamma)]}$ $k_{rw} = 1,33874 S_{ov}^{[1,28610 - 0,09187 \ln \gamma]} \left( \frac{\mu_w}{\mu_o} \right)^{0,08524}$
Honarpur	$k_{rw} = 0,035388 \left( \frac{S_w - S_{wir}}{1 - S_{wir} - S_{ov}} \right) - 0,010874 \left( \frac{S_w - S_{wir}}{1 - S_{wir} - S_{ov}} \right)^{2,9} +$ $+ 0,56556 (S_w)^{0,6} (S_w - S_{wir})$ $k_{rov} = 0,76067 \left[ \frac{\left[ \frac{S_{ov}}{1 - S_{wir}} \right] - S_{wir}}{1 - S_{wir}} \right]^{1,5} \left[ \frac{S_{ov} - S_{wir}}{1 - S_{wir} - S_{ov}} \right]^2 +$ $+ 2,6318 \theta (1 - S_{wir}) (S_{ov} - S_{wir})$
Naar – Henderson	$k_{rw} = S_{ov}^4$ $k_{rov} = \frac{(1 - 2S_w + S_{wir})^{0,5}}{2(1 - S_{wir})^{0,5} - (1 - 2S_w + S_{wir})^{0,5} (1 - S_{ov})}$
Pirson	$k_{rw} = S_w^{0,3} S_w^3$ $k_{rov} = \left( \frac{1 - S_w - S_{wir}}{1 - S_{wir} - S_{ov}} \right)^2$
Corey	$k_{rw} = S_{ov}^4$ $k_{rov} = (1 - S_{ov}^2) (1 - S_{ov})^2$
Corey Modificado	$k_{rw} = \frac{1 - S_w - S_{wir}}{1 - S_{wir}} (1 - S_{ov}^2) (1 - S_{ov})^2$

Figura 2.2: Modelos para curvas de permeabilidades relativas, [13]

Otro término que es importante es la saturación de agua  $S_w$ , pues con ella se puede determinar la saturación del hidrocarburo en el depósito.

La **saturación de agua irreducible** es el agua que está atrapada en la roca, o que se sostiene por fuerzas capilares en los poros, pero que ya no se moverá sin importar cuanto mas se aumente la presión, es el valor de saturación de agua mas bajo. Su permeabilidad relativa es igual a cero.

### 2.3. Análisis de órdenes de magnitud

El análisis de órdenes de magnitud nos permite estimar en el modelo el orden de los términos que representan los efectos físicos.

Cuando estamos trabajando con una amplia variedad de características, el

autor Boyadjiev, C. en [11] propone intentar describirlas de manera cualitativa y cuantitativa. El análisis cualitativo identifica la naturaleza o tipo de característica y se da en términos de las variables primarias como longitud,  $l$ , tiempo,  $t$ , masa,  $m$ , temperatura,  $T$ . El análisis cuantitativo provee una medida numérica de dicha característica. Se utiliza para obtener una medida de las contribuciones de los procesos elementales como difusión y convección al momento de realizar un modelo. Con el resultado se pueden despreciar algunos términos debido a su pequeño orden, reduciendo así el modelo matemático.

Se ha realizado el análisis de los tiempos característicos para obtener más información acerca de los órdenes de magnitud que gobiernan el problema. Esto para obtener una primera aproximación de los tiempos que rigen los procesos físicos. Los valores de las constantes usadas se presentan en el Apéndice A.

### I. SATURACIÓN

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k\lambda_w(S) \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) \\ \left[ \phi \frac{\Delta S_w}{t_c} \right] &\sim \left[ \frac{1}{L} k\lambda_w \frac{\Delta P_o}{L} \right] \\ t_c &\sim \left[ \frac{\phi \Delta S_w L^2}{k\lambda_w \Delta P_o} \right]\end{aligned}$$

que con los valores empleados, Apéndice A, se obtiene un tiempo aproximado de

$$t_c \sim 1 \times 10^8 s$$

### II. TEMPERATURA

$$\begin{aligned}\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ \left[ \frac{\rho C_p \Delta T}{t_c} \right] + \left[ u \frac{\rho C_p \Delta T}{L} \right] &\sim \left[ \frac{1}{L} \kappa \frac{\Delta T}{L} \right]\end{aligned}$$

**Convectivo:**<sup>1</sup>

$$\frac{1}{t_c} \sim \frac{u}{L}$$

donde  $u$  es la velocidad de Darcy dada como:

$$u \sim \lambda K \frac{\Delta P}{L}$$

---

<sup>1</sup>El movimiento convectivo se refiere al transporte de calor por el movimiento de un fluido.

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_c} &\sim \frac{\lambda K \Delta P}{L^2} \\ t_c &\sim \frac{L^2}{\lambda K \Delta P}\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$t_c \sim 1 \times 10^8 s$$

**Difusivo:**<sup>2</sup>

Sea

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\kappa}{\rho C_p} \\ t_c &\sim \frac{L^2}{\alpha}\end{aligned}\quad (2.15)$$

Se obtiene:

$$t_c \sim 1 \times 10^{12} s$$

### III. CONCENTRACIÓN

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$\left[ \frac{\Delta C}{t_c} \right] + \left[ u \frac{\Delta C}{L} \right] \sim \left[ \frac{1}{L} D \frac{\Delta C}{L} \right]$$

donde  $u$  es la velocidad de Darcy:

$$u \sim \lambda K \frac{\Delta P}{L}$$

**Convectivo:**

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_c} &\sim \frac{u}{L} \\ t_c &\sim \frac{L^2}{\lambda K \Delta P}\end{aligned}\quad (2.16)$$

---

<sup>2</sup>Se refiere a la difusión molecular conocido como movimiento browniano.

Se obtiene

$$t_c \sim 1 \times 10^5 s$$

**Difusivo:**

$$\frac{1}{t_c} \sim \frac{D}{L^2}$$

$$t_c \sim \frac{L^2}{D}$$

Se obtiene un tiempo aproximado de:

$$t_c \sim 1 \times 10^{14} s$$

## 2.4. Formulación del sistema de ecuaciones

### 2.4.1. Introducción

Las leyes de la física que gobiernan el flujo de fluidos en medios porosos tienen su origen en las leyes de conservación de masa, momento y energía. Las ecuaciones resultantes son ecuaciones diferenciales parciales que muchas veces se encuentran acopladas.

Las propiedades matemáticas de estos sistemas de ecuaciones reflejan las propiedades físicas del flujo. Tal es el caso de la **ley de Darcy** que, en su forma más simple, relaciona el volumen de flujo  $q$  de un fluido Newtoniano con el gradiente de la presión a través de una sección transversal de área unitaria de medio poroso.

$$q = - (k/\mu) \nabla P \quad (2.17)$$

La ley de Darcy es válida para medios porosos siempre y cuando se encuentren en un régimen laminar con valores de Reynolds de uno a diez.

Así pues el flujo de la fase  $\alpha$  está dada empíricamente por la ley de Darcy para sistemas multifásicos y extendida por Muskat(1949):

$$u_\alpha = -k\lambda_\alpha (\nabla P_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z) \quad (2.18)$$

donde  $P_\alpha$  es la presión de la fase  $\alpha$ ,  $\rho_\alpha$  es la densidad de la fase  $\alpha$ ,  $g$  es la aceleración de la gravedad, que en este caso es cero por ser despreciable,  $\nabla z$  es el vector direccional de la gravedad,  $k$  es el tensor de permeabilidad absoluta que para efectos prácticos se considerara un escalar,  $\lambda_\alpha$  es la movilidad de la fase  $\alpha$  definida como en la ecuación 2.4.

Cuando realizamos un modelo, una de las dificultades más importantes y complejas es la selección del conjunto de ecuaciones con las que se describirá el

proceso físico que se va a modelar. Con las ecuaciones utilizadas en este trabajo se plantea un sistema donde existen cinco incógnitas que son: la saturación del agua ( $S_w$ ), la saturación de petróleo ( $S_o$ ), la presión del agua ( $P_w$ ), la presión del petróleo ( $P_o$ ) y la presión capilar ( $P_c$ ), dicho sistema puede ser resuelto partiendo de las siguientes cinco ecuaciones:

$$\phi \frac{\partial S_w \rho_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_w \bar{\lambda}_w K \left( \frac{\partial}{\partial x} P_o - \frac{\partial}{\partial x} P_c \right) \right) = 0 \quad (2.19)$$

$$\phi \frac{\partial S_o \rho_o}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_o \bar{\lambda}_o K \left( \frac{\partial}{\partial x} P_o \right) \right) = 0 \quad (2.20)$$

$$S_w + S_o = 1 \quad (2.21)$$

$$P_w = P_o - P_c \quad (2.22)$$

$$P_c = P_u S e^{-\frac{1}{n_o}} \quad (2.23)$$

Así, mediante el desarrollo del álgebra correspondiente y considerando la formulación presión-saturación se obtienen las ecuaciones a resolver, de manera que se escriben solamente en términos de la saturación de agua y de la presión del aceite. Esta formulación se presenta en el apéndice B. Ha sido aplicada por Faust (1985), Kueper y Frind (1991), Moridies y Reddel (1991) y Pruess(1987) según el trabajo desarrollado en [1] por Ataie-Ashtiani, B., & Raeesi-Ardekani, D. (2010), y mas recientemente usado por de la Cruz, L. M., & Monsivais, D. (2014) en [14].

Posteriormente se introduce la existencia de un flujo de calor y de una surfactante, las ecuaciones plateadas para estos procesos provienen de las ecuaciones de conservación de energía y de momento.

Se propone resolver, por tanto, las ecuaciones de las siguientes secciones.

## 2.4.2. Presión

De las ecuaciones de conservación y de la formulación axiomática desarrollada por Herrera, I., & Pinder, G. F. en [3], se obtiene un sistema de ecuaciones fuertemente acopladas, en las que se utiliza la formulación presión-saturación para desacoplarlas.

Dichas ecuaciones provienen de la ecuación diferencial de balance de masa de sistemas multifásicos y de la ley de Darcy. Donde la propiedad extensiva es la masa y la propiedad intensiva de la fase  $\alpha$  viene dada como  $\psi_\alpha = \phi S_\alpha \rho_\alpha$ , con  $S_\alpha$  la saturación,  $\phi$  la porosidad de la roca y  $\rho$  la densidad de la fase  $\alpha$  de acuerdo con [3]. De manera que si la porosidad y las densidades son constantes y los efectos de gravedad despreciables, realizando el álgebra correspondiente, (Ver Apéndice B) entre las ecuaciones de balance de masa y la ecuación de Darcy se obtiene el sistema de ecuaciones propuesto como lo muestra Zhangxin Chen, et. al. en [15].

$$\nabla \cdot (k \bar{\lambda}(S_w) \nabla P_o) - \nabla \cdot (k \bar{\lambda}_w(S_w) \nabla P_c) = 0 \quad (2.24)$$

La ecuación se ha representado en función de la presión del petróleo  $P_o$  y se incluye el término de la presión capilar  $P_c$ , además  $k$  representa la permeabilidad absoluta,  $\lambda$  es la movilidad total, mientras que  $\lambda_w$  es la movilidad del agua, éstas últimas dos variables dependen de la saturación del agua  $S_w$ .

Con condiciones de frontera para dos casos estudiados, dadas como:

1) Inyección a presión constante:

$$\begin{aligned} P_o|_{x=A} &= M \text{ [Pa]} && \text{Dirichlet} \\ \frac{dP_o}{dx}|_{x=B} &= N \text{ [Pa]} && \text{Neumann} \end{aligned}$$

2) Flujo másico de inyección constante:

$$\begin{aligned} \frac{dP_o}{dx}|_{x=A} &= O \text{ [Pa]} && \text{Neumann} \\ \frac{dP_o}{dx}|_{x=B} &= P \text{ [Pa]} && \text{Neumann} \end{aligned}$$

con M,N,O y P constantes.

### Adimensionalización para la ecuación de la presión del aceite

La ecuación para la presión descrita anteriormente se encuentra en forma dimensional, lo que corresponde a un problema concreto, sin embargo, es necesario hacer una descripción universal del problema, por lo que se propone un cambio de variables que adimensionalice las ecuaciones para resolverlas bajo cualquier condición.

Se realiza el siguiente cambio de variables:

$$\Psi_o = \frac{P_o - P_0}{P_\infty - P_0}, \Psi_c = \frac{P_c - P_0}{P_\infty - P_0}, \lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_r}, \lambda_w = \frac{\bar{\lambda}_w}{\lambda_r}, x = \frac{\bar{x}}{L}, t = \frac{\bar{t}}{\tau}$$

de manera que

$$\begin{aligned} P_o &= \Psi_o (P_\infty - P_0) + P_0 \\ P_c &= \Psi_c (P_\infty - P_0) + P_0 \end{aligned}$$

donde  $P_{o\infty}$ ,  $\lambda_r$ ,  $L$  y  $\tau$  son valores de referencia,  $P_0$  es la presión al tiempo inicial y  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\lambda}_w$ ,  $\bar{x}$  y  $\bar{t}$  son las variables dimensionales, para presión, movilidad total, movilidad del agua, posición y tiempo, respectivamente.

Calculamos  $\tau = \frac{U_\infty}{L}$  y  $U_\infty = k \frac{L}{\Delta P}$ .

Al realizar el proceso de adimensionalización y reescribiendo la ecuación 2.24 en una dimensión se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial x} \Psi_o \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w \frac{\partial}{\partial x} \Psi_c \right) \quad (2.25)$$

Cuyas correspondientes condiciones de frontera son:

1) Inyección a valor constante:

$$\Psi_o|_{x=A} = 2; \text{ Dirichlet}$$

$$\frac{\partial \Psi_o}{\partial x}|_{x=B} = q; \text{ Neumann}$$

donde:

$$q = 0.001 \text{ ó } q = 0.002$$

2) Flujo de inyección constante:

$$\frac{\partial \Psi_o}{\partial x}|_{x=A} = g; \text{ Neumann}$$

$$\frac{\partial \Psi_o}{\partial x}|_{x=B} = 0; \text{ Neumann}$$

donde:

$$g = 0.01 \text{ ó } g = 0.1$$

### 2.4.3. Saturación

Del planteamiento del sistema de ecuaciones dimensional, ecuación B.10, se obtiene, además de la ecuación para la presión del aceite, una ecuación para la saturación del agua, dada como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( K \bar{\lambda}_w(S_w) \left( \frac{\partial P_o}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial P_c}{\partial \bar{x}} \right) \right) \quad (2.26)$$

cuyas condiciones de frontera son:

$$S_w|_{x=A} = P \quad [\text{Adimensional}] \quad \text{Dirichlet}$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial x}|_{x=B} = Q \quad [\text{Adimensional}] \quad \text{Neumann}$$

y su condición inicial es:

$$S_w|_{t=0} = R \quad [\text{Adimensional}]$$

con P,Q y R constantes

### Adimensionalización para la ecuación de la saturación del agua

Nuevamente se realiza un cambio de variable de manera que:

$$\Psi_o = \frac{P_o - P_0}{P_\infty - P_0}, \Psi_c = \frac{P_o - P_0}{P_\infty - P_0}, \lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_r}, \lambda_w = \frac{\bar{\lambda}_w}{\lambda_r}, x = \frac{\bar{x}}{L}, t = \frac{\bar{t}}{\tau}$$

$$(P_\infty - P_0) = \Delta P$$

Entonces de la ecuación obtenida en la sección anterior:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( K \bar{\lambda}_w(S_w) \left( \frac{\partial P_o}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial P_c}{\partial \bar{x}} \right) \right) \quad (2.27)$$

Se obtiene la ecuación adimensional:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} + \lambda_w \frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \right) \quad (2.28)$$

con

$$\Omega = \frac{\tau K \lambda_r \Delta P}{\phi L^2} = \frac{\tau K \Delta P}{\phi \mu_r L^2} \quad (2.29)$$

Note que  $\Omega$  contiene algunas de las variables físicas del problema, como la longitud del yacimiento  $L$ , y la permeabilidad  $K$ .

Con condiciones de frontera e inicial:

$$S_w|_{x=A} = 0.8; \text{ Dirichlet}$$

$$\frac{\partial^2 S_w}{\partial x^2} |_{x=B} = 0;$$

$$S_w|_{t=0} = 0.3;$$

#### 2.4.4. Temperatura

Una vez que se han presentado los efectos de la Presión de aceite y la saturación de agua para el yacimiento, se propone estudiar los efectos térmicos dentro del yacimiento. Como ya se mencionó en el capítulo 1, la ecuación de balance de energía es la que describe la transferencia de calor que existe en un sistema donde supondremos que la energía es función solamente de la temperatura. Aquí el flujo de energía en el acuífero es debida a la difusión y a la convección de calor. Cada fase tiene su ecuación térmica, sin embargo, se supondrá que los fluidos y el sólido están en equilibrio térmico local para cada volumen de control, por lo que realizando el álgebra correspondiente, ver apéndice B, se obtiene una sola ecuación térmica dada como:

$$\begin{aligned} & (\rho_s C p_r (1 - \phi) + \rho_w C p_w \phi S_w + \rho_o C p_o \phi (1 - S_w)) \frac{\partial T}{\partial t} + \\ & (\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \cdot \nabla T \\ & = (\phi (1 - S_w) \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1 - \phi) \kappa_s) \nabla^2 T \end{aligned}$$

Donde  $\vec{u}_\alpha$  es la velocidad de Darcy,  $\kappa_\alpha$  representa la conductividad térmica,  $\phi$  es la porosidad,  $\rho_\alpha$  es la densidad y  $C p_\alpha$  es la capacidad calorífica de la

fase alfa, que puede ser agua  $w$  o aceite  $o$ , éstas últimas tres variables son considerados constantes.

Esta ecuación es consecuencia de la primera ley de la termodinámica. El término donde aparece  $(\phi u_o \rho_o C p_o + \phi u_w \rho_w C p_w)$  representa la rapidez de cambio de la energía interna (transferencia convectiva) mientras que el término  $(\phi(1 - S_w) \lambda_o + \phi S_w \lambda_w + (1 - \phi) \lambda_s)$  representa la rapidez a la cual se adiciona calor por conducción.

Esta ecuación tiene condiciones de frontera:

$$T|_{x=A} = R_{in} \text{ [K]} \quad \text{Dirichlet}$$

$$\frac{dT}{dx}|_{x=B} = R_{out} \text{ [K]} \quad \text{Neumann}$$

y condición inicial:

$$T|_{t=0} = W \text{ [K]}$$

con  $R_{in}, R_{out}$ , y  $W$  constantes.

### Adimensionalización de la ecuación de la temperatura

Nuevamente para hacer la descripción universal del problema se propone un sistema de cambio de variables que adimensionalice la ecuación:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}, t = \frac{\bar{t}}{\tau}, u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}$$

$$(T_\infty - T_0) = \Delta T$$

La ecuación para la temperatura en una dimensión se reescribe como:

$$\begin{aligned} & (\rho_s C p_r (1 - \phi) + \rho_w C p_w \phi S_w + \rho_o C p_o \phi (1 - S_w)) \frac{\partial T}{\partial t} + \\ & (\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \frac{\partial T}{\partial x} \\ & = (\phi(1 - S_w) \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1 - \phi) \kappa_s) \frac{\partial T}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Si ahora se aplica el cambio de variable sugerido a la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta T \rho_w C p_w}{\tau} \left( \frac{\rho_s C p_r}{\rho_w C p_w} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} \phi (1 - S_w) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\ & \frac{\phi \rho_w C p_w U_\infty \Delta T}{L} \left( u_o \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} + u_w \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ & = \frac{\Delta T \kappa_w}{L^2} \left( \phi(1 - S_w) \frac{\kappa_o}{\kappa_w} + \phi S_w + (1 - \phi) \frac{\kappa_s}{\kappa_w} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho_s C_{p_r} (1 - \phi) + \rho_w C_{p_w} \phi S_w + \rho_o C_{p_o} \phi (1 - S_w)) \frac{\partial T}{\partial t} + \quad (2.30) \\
& (\phi u_o \rho_o C_{p_o} + \phi u_w \rho_w C_{p_w}) \cdot \nabla T \\
= & (\phi (1 - S_w) \lambda_o + \phi S_w \lambda_w + (1 - \phi) \lambda_s) \nabla^2 T
\end{aligned}$$

Cuya adimensionalización, que se obtiene en el Apéndice C, es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_m \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{D_m}{Pe_w} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2.31)$$

con

$$u_m = \frac{\phi \left( u_o \frac{\rho_o C_{p_o}}{\rho_w C_{p_w}} + u_w \right)}{\left( \frac{\rho_s C_{p_r}}{\rho_w C_{p_w}} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C_{p_o}}{\rho_w C_{p_w}} \phi (1 - S_w) \right)} \quad (2.32)$$

$$D_m = \frac{\left( \phi (1 - S_w) \frac{\kappa_o}{\kappa_w} + \phi S_w + (1 - \phi) \frac{\kappa_s}{\kappa_w} \right)}{\left( \frac{\rho_s C_{p_r}}{\rho_w C_{p_w}} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C_{p_o}}{\rho_w C_{p_w}} \phi (1 - S_w) \right)} \quad (2.33)$$

Donde definimos el número de Péclet, Reynolds y Prandtl como se muestra a continuación:

$$Pe = Re \cdot Pr \quad (2.34)$$

$$Re = \frac{ul}{v} = \frac{ul\rho}{\mu} \quad (2.35)$$

$$Pr = \frac{v}{\alpha} \quad (2.36)$$

Con condiciones de frontera:

$$\theta|_{x=A} = 1; \quad \text{Dichlet}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=B} = 0; \quad \text{Neumann}$$

y condición inicial:

$$\theta|_{t=0} = 0;$$

### 2.4.5. Concentración

Definimos la concentración de la componente  $i$  como:

$$C_i = \frac{m_i}{V} \quad (2.37)$$

donde se considera una mezcla de fluidos de volumen  $V$ , con masa  $m$  y se designa el subíndice  $i$  para referirse a la componente  $i$ ésima de la mezcla. La

masa total es igual a la suma de las masas de cada componente de manera que  $m = \sum m_i$ .

Ahora se puede definir la ecuación para la concentración, ésta proviene del principio de conservación de masa, donde la masa del soluto es la propiedad extensiva dada para cualquier tiempo  $t$ , y cuya propiedad intensiva asociada es la concentración del soluto por la porosidad de la roca, como lo proponen Herrera, I., & Pinder en [3] para un flujo multicomponente en un medio poroso, y como lo desarrolla Nield, D. A., & Bejan en [17], entonces la ecuación para el transporte de un soluto en un medio poroso se puede expresar como:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{u}_\zeta \cdot \nabla C + \phi \nabla \cdot (D_{mas} \nabla C) - \Upsilon C \quad (2.38)$$

Donde  $C$  es la concentración de surfactante,  $u_\zeta$  nuevamente es el flujo de Darcy cuyo valor es distinto a la del flujo térmico,  $D_{mas}$  Difusividad másica y  $\Upsilon$  se propone como el factor de pérdida en la concentración del surfactante. Lo cual puede representar un proceso de sorción o de decaimiento.

Esta ecuación tiene condiciones de frontera:

$$C|_{x=B} = E \left[ \frac{Kg}{m^3} \right] \quad \text{Dirichlet}$$

$$\frac{dC}{dx}|_{x=B} = F \left[ \frac{Kg}{m^3} \right] \quad \text{Neumann}$$

y condición inicial:

$$C|_{t=0} = G \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$$

con E,F y G constantes.

### Adimensionalización de la ecuación de la concentración

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de temperatura, sin embargo se introduce un nuevo término que llamamos  $\Upsilon C$  que es una primera aproximación a un proceso de pérdida del surfactante, por ejemplo, por adsorción.

Para adimensionalizar la ecuación de transporte de solutos en un medio poroso se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\varsigma = \frac{C - C_0}{C_\infty - C_0}, t = \frac{\bar{t}}{\tau}, u = \frac{\bar{u}}{u_0}, x = \frac{\bar{x}}{L}$$

$$Q = \frac{1}{PeLe}$$

$$Pe = \frac{u}{l\alpha}$$

$$Le = \frac{\alpha}{D_{mas}}$$

y reescribiendo la ecuación de la sección anterior en una dimensión:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} + \frac{\phi \partial}{\partial \bar{x}} \left( D_{mas} \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} \right) - \Upsilon C$$

que en forma adimensional, ver Apéndice C, se escribe como:

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} = -u \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + Q \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} - \Upsilon' \quad (2.39)$$

con:

$$\Upsilon' = \frac{\tau \Upsilon \varsigma}{\phi}$$

y sus correspondientes de frontera son:

$$\varsigma|_{x=A} = 1; \quad \text{Dirichlet}$$

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial x}|_{x=B} = 0; \quad \text{Neumann}$$

y condición inicial:

$$\varsigma|_{t=0} = 0;$$

#### 2.4.6. Ecuaciones conjugadas

Uno de los efectos que se desean estudiar en esta tesis es cuando la temperatura modifica la viscosidad para ambas fases.

En esta tesis como una aproximación sencilla, se propone la siguiente dependencia de viscosidad con temperatura:

$$\mu_w = miu_{wT} \times (1 - Ep_w \times \theta) \quad (2.40)$$

$$\mu_o = miu_{oT} \times (1 - Ep_o \times \theta) \quad (2.41)$$

donde:

$$miu_{wT} = 3 \times 10^{-1}$$

$$miu_{oT} = 4 \times 10^{-1}$$

$$Ep_w = 1 \times 10^{-7}$$

$$Ep_o = 3 \times 10^{-7}$$

También se desea estudiar la dependencia de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura  $\theta$  y con la concentración  $\varsigma$  de surfactante como propiedades independientes y ambas al mismo tiempo.

Bennion, D. B., Thomas, F. B., Schulmeister en [18] realizaron un experimento donde proponen que la saturación residual de petróleo disminuye conforme aumenta la temperatura, de acuerdo a una correlación cúbica, en un rango de  $10 < T < 280^\circ C$ .

Según dicho estudio, la reducción de la saturación residual por agua caliente, ocurre más rápidamente a temperaturas menores a  $100^\circ C$  debido a la disminución de la viscosidad del petróleo. Por arriba de los  $200^\circ C$  la reducción de la viscosidad es menor conforme aumenta la temperatura, por lo que la reducción de la saturación residual en este rango de temperatura está más relacionado

con la mojabilidad de la roca hacia una fuerte condición de mojabilidad del agua, que reduce la permeabilidad efectiva al agua y mejora la proporción de movilidad agua-petróleo.

Para esta tesis se propone, como primera aproximación, una dependencia lineal de la siguiente manera:

$$S_{rwT} = S_{rwTini} \times (1 - Es_w \times \theta) \quad (2.42)$$

con

$$\begin{aligned} S_{rwTini} &= 0.2 \\ Es_w &= 0.5 \end{aligned}$$

También se ha relacionado la saturación residual de petróleo con la Concentración de surfactante en un experimento realizado por Alveskog, P. L., Holt, T., & Torsaeter expuesto en [19] encontrando que la saturación residual de petróleo disminuye al aumentar la concentración de surfactante. En nuestro caso se propone una relación lineal entre estos parámetros, dada por:

$$S_{rwT} = S_{rwTini} \times (1 - Es_{wc} \times \varsigma) \quad (2.43)$$

con

$$Es_{wc} = 0.4$$

## Capítulo 3

# Modelo numérico

### 3.1. Los métodos numéricos

Cuando se busca solución a un problema matemático, no siempre es posible encontrar una solución exacta, no porque no sepamos la forma de encontrarla, sino porque no siempre es posible expresarla con funciones elementales o funciones conocidas para nosotros. Es aquí donde los métodos numéricos juegan un papel muy importante.

Chapra, S. C. en [20] define los métodos numéricos como técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse mediante operaciones aritméticas. La solución obtenida con los métodos numéricos usualmente es aproximada, es decir, tiene algo de error. Las fuentes de error pueden deberse a: 1) La falta de correspondencia entre el problema matemático y el fenómeno real bajo consideración (modelo matemático); 2) error en los datos de entrada del modelo; 3) error en el método de solución; y 4) errores de redondeo en la aritmética y otro tipo de operaciones involucradas.

Aun cuando existen muchos tipos de métodos numéricos, todos comparten la característica de que se realizan, invariablemente, un gran número de cálculos aritméticos, dependiendo de la complejidad del problema van desde docenas hasta billones de operaciones posibles de llevarse a cabo gracias al uso de las computadoras.

Desde finales de la década de los cuarenta, la disponibilidad de las computadoras ha llevado a una explosión en el uso y desarrollo de dichos métodos para la solución de distintos problemas en ciencias e ingeniería.

### 3.2. Resolución de las ecuaciones

Las ecuaciones diferenciales que rigen las leyes físicas, en especial en mecánica de fluidos, son tan complejas que casi nunca tienen una solución exacta, por lo que se deben buscar métodos alternativos para predecir una solución numérica aproximada.

La solución numérica aproximada se obtiene de una serie de relaciones algebraicas obtenidas de la discretización de las ecuaciones diferenciales parciales.

Generalmente se llevan a cabo básicamente tres pasos:

1. Generación de la malla: Se discretiza el espacio físico de manera que generamos un número de puntos, conocidos como nodos, que en conjunto generan una malla. Lo hacemos sobre todo el dominio del espacio físico considerado. En estos puntos se buscará la función solución.
2. Discretización de las ecuaciones: implica dar aproximaciones algebraicas de las ecuaciones diferenciales de manera que se pueda pasar del modelo físico (continuo)-matemático al modelo numérico (discreto)-computacional. Ver Apéndice D, para las discretizaciones.
3. Solución del sistema de ecuaciones: El sistema de ecuaciones obtenido de los pasos anteriores se expresa en una matriz de coeficientes con bandas o dispersa, que dependiendo del problema que se esté tratando se usan métodos directos o iterativos para resolverlo.

### 3.3. Método de diferencias finitas

Éste es uno de los métodos numéricos más antiguos y populares para la resolución de ecuaciones diferenciales. Era conocido desde 1768 por Leonhard Euler en una dimensión de acuerdo con Hirsch, C. en [21], sin embargo, comenzó a tener aplicaciones a principios de los 1950's y a tener más auge con el surgimiento de las computadoras con aplicaciones en ciencia y tecnología.

El método consiste en la aproximación de un operador diferencial donde se reemplazan las derivadas de la ecuación por coeficientes. El dominio es particionado en espacio y tiempo y se calculan aproximaciones de la solución en los puntos, en el espacio o en el tiempo. El error entre la solución numérica y la solución exacta dependerá del error generado por la aproximación hecha entre el operador diferencial y el operador de diferencias. A este error se le conoce como error de discretización o de truncamiento y refleja el hecho de la parte finita de las series de Taylor usadas para hacer las aproximaciones como lo indica Ledesma, A. C. en [22].

En nuestro caso utilizamos la aproximación unidimensional. El esquema de diferencias finitas esta relacionado con la definición de derivada de una función  $f$  en un punto  $x \in R$  de manera que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.1)$$

Recordemos que existen distintas formas para generar la aproximación de una derivada, pero es importante considerar la que nos de mayor precisión y menor esfuerzo computacional.

De la definición de la expansión en series de Taylor, donde, sea  $f(x)$  una función definida en  $(a, b)$  que tiene hasta  $k$ -ésima derivada, definimos la serie de Taylor de  $f(x)$  alrededor del punto  $x_i$  en el intervalo  $(a, b)$  como:

$$f(x) = f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{1!} \left[ \frac{df}{dx} \right]_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_{x_i} + \dots + \frac{(x - x_i)^k}{k!} \left[ \frac{d^k f}{dx^k} \right]_{x_i} \quad (3.2)$$

donde  $\varepsilon = x_i + \theta(x - x_i)$  y  $0 < \theta < 1$

Podemos obtener las siguientes aproximaciones para una primera derivada:

- DIFERENCIAS PROGRESIVAS: supongamos  $k = 2$  y  $x = x_i + \delta x$  donde realizando el álgebra correspondiente obtenemos:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (3.3)$$

- DIFERENCIAS REGRESIVAS: supongamos  $k = 2$  y  $x = x_i - \delta x$ , con el álgebra correspondiente se obtiene:

$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{x-1}}{\Delta x} \quad (3.4)$$

- DIFERENCIAS CENTRADAS: supongamos  $k = 3$  con  $x = x_i - \delta x$  y  $x = x_i + \delta x$  realizando el álgebra correspondiente:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{x-1}}{2\Delta x} \quad (3.5)$$

También se realizan las aproximaciones mencionadas para derivadas de órdenes mayores. Además se pueden emplear más puntos para obtener una mejor aproximación de cualquiera de las derivadas, en este trabajo se utilizaron hasta cinco puntos para derivadas de primer y segundo orden con el objeto de generar un mejor resultado numérico y una buena convergencia, ver Apéndice D. Los coeficientes pueden ser verificados en [23].

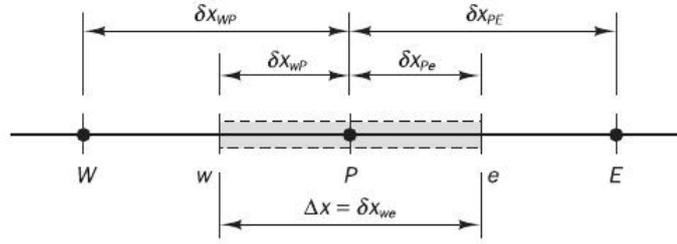
### 3.4. Método de volumen finito

Este método permite discretizar y resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, de manera alternativa al método de diferencias finitas o al de elemento finito.

El método consiste en generar un volumen de control alrededor de cada uno de los nodos que conforman la malla de manera que ninguno de éstos volúmenes se traslapen con los vecinos, esto se hará sobre todo el dominio de estudio. Entonces el volumen total de fluido resulta la suma de cada uno de los volúmenes de control. A continuación se integra la ecuación diferencial que se quiere resolver, sobre cada uno de los volúmenes de control con lo que se obtiene la discretización de la ecuación. Considere la Figura 3.1 para el nombramiento de los nodos.

Para realizar las aproximaciones se deben considerar las siguientes reglas según Patankar (1980) como se presenta en [24]:

- Los flujos a través de los volúmenes de control deben ser consistentes, es decir, que el flujo que sale de un volumen de control es igual al flujo que entra en el volumen de control que se encuentra a su lado. Esto nos lleva a que la función de interpolación utilizada debe ser igual cuando se aproxima por la izquierda o por la derecha.
- Para tener un modelo físicamente concordante, los coeficientes  $a_E$ ,  $a_W$  y  $a_P$  que son utilizados para nombrar los nodos, deberán ser positivos.



**Figura 3.1:** Notación convencional usada para el nombramiento de los nodos para el método de volumen finito.

- Si se hace una linealización del término fuente, deberá tener pendiente negativa. Esto para evitar que  $a_P$  sea negativo si el término fuente es muy grande.
- La suma de los coeficientes  $a_i$  vecinos será igual al coeficiente  $a_P$ .

Supongamos que nos paramos en alguno de los nodos centrales (no los de las orillas) al cual se va a nombrar nodo  $P$ , donde los nodos de la derecha y la izquierda de éste, serán identificados como nodos  $E$  (este) y  $W$  (oeste) respectivamente. Mientras que el lado este y oeste del control de volumen se identifican como  $e$  y  $w$  respectivamente.

Cuando se llega a las orillas, se utilizan por practicidad las fronteras de los controles de volumen de las orillas de manera que coincidan con las fronteras del problema físico.

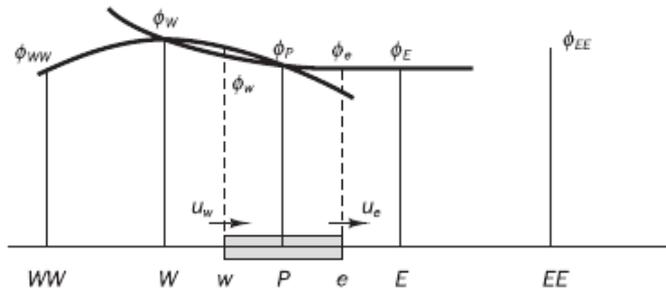
Con este método, las ecuaciones discretizadas se expresan de manera que la propiedad extensiva que se estudia se va a conservar en cada control de volumen, se dice que es un método conservativo. Dicha característica es válida independientemente del número de volúmenes de control utilizados lo que conlleva a un balance físicamente realista, y por lo tanto muy atractivo, aunque si se desea mayor precisión se requiere mayor número de volúmenes de control.

A veces cuando utilizamos aproximaciones de primer orden, la precisión genera errores de difusión numérica. Es por ello que se emplean órdenes de discretización mayores para minimizar dichos errores. Cuando utilizamos esquemas de diferenciación de orden superior se involucran más puntos vecinos reduciendo el error en la discretización.

El esquema de diferencias centradas tiene una aproximación de segundo orden, sin embargo, al no considerar la dirección del flujo puede volverse inestable por lo que se requieren esquemas de mayor aproximación que consideren la estabilidad y sensibilidad de a dirección del flujo. Uno de dichos esquemas, y de los más antiguos es el Esquema QUICK<sup>8</sup> propuesto en 1978 por Leonard.

El esquema QUICK utiliza una interpolación cuadrática de tres puntos ponderada aguas arriba para los valores en las caras de los controles de volumen. El valor de la función en el punto buscado es obtenida de una función cuadrática que pasa a través de los nodos que encierran al nodo que se desea estudiar, uno de cada lado, y el tercer punto pasa por el nodo próximo localizado aguas arriba, como se observa en la imagen.

<sup>8</sup>Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics



**Figura 3.2:** Esquema QUICK.

En este trabajo se utilizó dicho método para la ecuación de la saturación, ver Apéndice D.

### 3.5. Solución del sistema de ecuaciones

Con cada volumen obtenemos una ecuación discretizada con lo que se genera un sistema lineal de ecuaciones. La matriz obtenida es simétrica, definida positiva y bandada.

De aquí comenzamos con el paso tres, la resolución del sistema de ecuaciones. Aunque existen bastantes métodos para hacerlo, la disponibilidad de los recursos computacionales fija una fuerte restricción.

Podemos clasificar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en métodos directos y métodos indirectos o iterativos. Dentro de los primeros encontramos el método de eliminación Gaussiana, la regla de Cramer, factorización LU y factorización de Cholesky; sin embargo, el número de operaciones para solucionar un sistema de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas, es de  $N^3$ . Además requieren del almacenamiento simultáneo en memoria de los  $N^2$  del conjunto de coeficientes de las ecuaciones. Por ello es más recomendable utilizar métodos iterativos, por ejemplo, el de Gauss-Seidel, Jacobi, método del gradiente conjugado, o método residual mínimo generalizado. En éstos, el número de operaciones es del orden de  $N$  por ciclo de operación. Aunque se deberá garantizar la convergencia que además es lenta. Su gran ventaja es que solamente se almacenan en memoria los coeficientes que son distintos de cero. Cuando utilizamos de diez mil a un millón de ecuaciones resulta más económico computacionalmente la utilización de métodos iterativos.

En esta tesis se utiliza uno de los métodos mas empleados para solución de matrices tridiagonales, conocido como el algoritmo de Thomas o TDMA por sus siglas en inglés (Tri-diagonal matrix algorithm) que es un método directo para problemas unidimensionales pero que puede ser aplicado iterativamente para resolver problemas multi dimensionales. Este método tiene la ventaja de que no es costoso computacionalmente hablando, requiere la mínima cantidad de almacenamiento y es muy eficaz en problemas de fluido dinámica computacional. Una de sus principales propiedades es que la solución obtenida satisface de manera exacta a las ecuaciones de conservación consideradas, sin importar el tamaño de la malla como mencionan Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. en su libro [24]. El algoritmo de Thomas puede ser adaptado para matrices pentadiagonales

de manera que se utilizan factorizaciones LU con sustituciones tanto para atrás como para adelante.

En una dimensión hablamos, por lo general, de una matriz tridiagonal aunque depende del número de puntos con el que se hagan las discretizaciones, así como del método empleado, en esta tesis se resuelven matrices pentadiagonales, para lograr la convergencia de las ecuaciones.

## Capítulo 4

# Modelo computacional

### 4.1. Descripción del código

A continuación se presenta el modelo computacional asociado a la resolución del sistema de ecuaciones planteados anteriormente. Su desarrollo es una parte muy importante del proceso de modelación, puesto que nos permite enlazar el problema matemático-numérico con su resolución a nivel computacional, haciéndolo por lo tanto más rápido y preciso.

El código fuente fue realizado en FORTRAN 90<sup>1</sup>, uno de los lenguajes de programación más utilizados para el cómputo científico.

El programa fue ejecutado en un servidor con procesador AMD de 2.4 GHz y 24 núcleos físicos. Éste tiene instalado Debian de 64 bits versión 8.2.

Se usó la versión de Intel Cluster con FORTRAN a 64 bits para ejecutar el código de forma serial, este desarrollo en específico se corrió en un solo hilo por tratarse de una solución para una sola dimensión, si se deseara expandir el mismo modelo en dos y tres dimensiones se podría hacer la consideración de agregar las directrices en paralelo al código.

### 4.2. Diagrama de flujo

Desarrollando el diagrama de flujo para dicho código, ver figura 4.1, se tiene lo siguiente:

- Nombre del programa.
- Se declararon variables y se inicializaron valores: se hizo con valores reales a doble precisión y enteros de 64 bits.
- Se generó de la malla.
- Se declaran condiciones para poder inicializar el código.
- Se formó el sistema tipo  $Ax = b$  (donde  $A$  es una matriz y  $b$  y  $x$  vectores), para la ecuación de la presión y se resuelve con el método de Thomas para cinco puntos.

---

<sup>1</sup>FORmula TRANslator

- Se recalculan algunas ecuaciones constitutivas, que especifican las condiciones de problema físico.
- Se propone la solución explícita de la ecuación de saturación para cinco puntos, con los valores generados anteriormente de la presión.
- Se recalcula la presión capilar.
- Se calculó la velocidad alcanzada por la temperatura.
- Se genera un sistema distinto al anterior del tipo  $Ax = b$  para la ecuación de la temperatura y se resuelve nuevamente con el método de Thomas para cinco puntos.
- Se proponen condiciones de convergencia para la temperatura.
- Se calcula la velocidad para la concentración.
- Se genera un nuevo sistema, diferente a los anteriores, del tipo  $Ax = b$  para la ecuación de la concentración y se resuelve con el método de Thomas para cinco puntos.
- Se proponen condiciones de convergencia para la concentración.
- Se calculan la cantidad de recuperación de petróleo.
- Se introducen la dependencia de los parámetros que se propuso  $S_{rw}(\theta, \varsigma)$ ,  $\mu_w(\theta)$  y  $\mu_o(\theta)$ .
- El código se detiene cuando se haya saturado en un 60% del el último punto, si no es así, vuelve a recalcular todo.
- Se generan archivos de salida para analizar los resultados obtenidos.

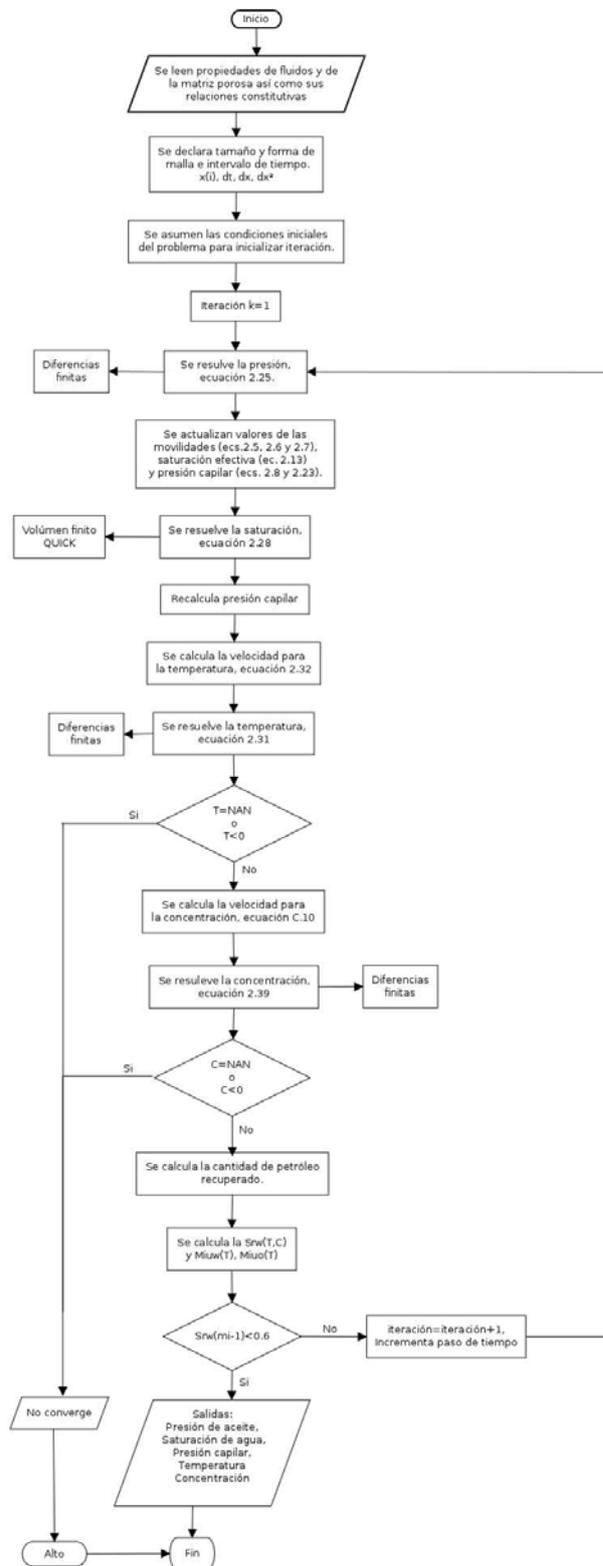
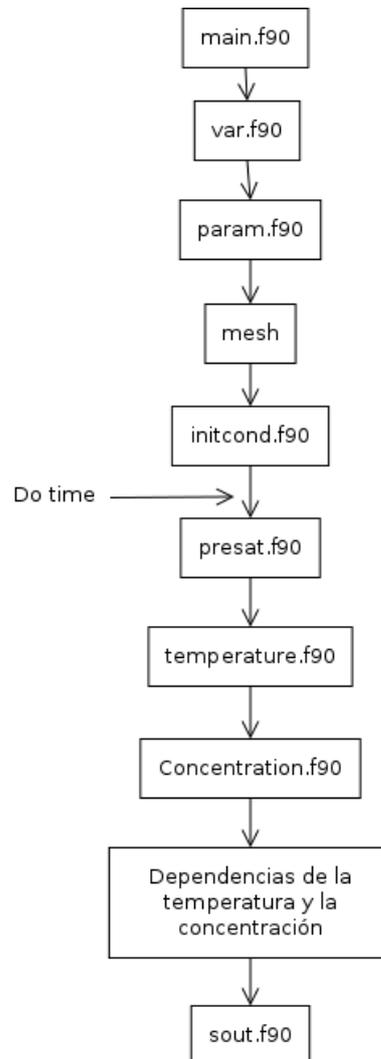


Figura 4.1: Diagrama de flujo para realizar el modelo computacional del problema propuesto

### 4.3. Diagrama de subrutinas

En el siguiente diagrama se presenta la estructura del uso de las subrutinas que se generaron para resolver el problema planteado, figura 4.2.



**Figura 4.2:** Diagrama de subrutinas empleadas

Las subrutinas empleadas se presentan en el apéndice E.

## Capítulo 5

# Análisis de Datos y Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos de las ejecuciones correspondientes del código generado para resolver las ecuaciones planteadas anteriormente. Se realizaron simulaciones para  $Pe = 10^3$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $Pe = 10^5$ ,  $Pe = 10^6$  y  $Pe = 10^7$  con sus respectivos valores del parámetro adimensional  $\Omega = 10^{-2}$ ,  $\Omega = 10^{-3}$ ,  $\Omega = 10^{-4}$  y  $\Omega = 10^{-5}$  que contiene los parámetros físicos empleados para la ecuación la saturación del agua, a su vez se emplea una presión de salida  $q = 0.001$  y  $q = 0.002$  para cada caso mencionado. Así mismo para un segundo caso se varía la presión de entrada  $g = 0.01$  y  $g = 0.1$  en vez de la de salida. Esto se resume en la tabla 5.1.

En los resultados se exponen solamente algunos casos representativos con  $\Omega = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $q = 0.002$  y  $\eta = 1$  al que se llamó “*Inyección a valor constante (Caso 1)*”, donde  $\eta$  es el exponente de las ecuaciones para la movilidad 2.5 y 2.6. También se presenta el caso para  $\Omega = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $g = 0.01$  y  $\eta = 4$ , al que se llamó “*Flujo de inyección constante (Caso 2)*”, observamos que los resultados son similares; sin embargo, se modifica la forma estructural de las curvas. La forma de éstas se verifican en el trabajo realizado por Hoteit, H., & Firoozabadi, A. en [25].

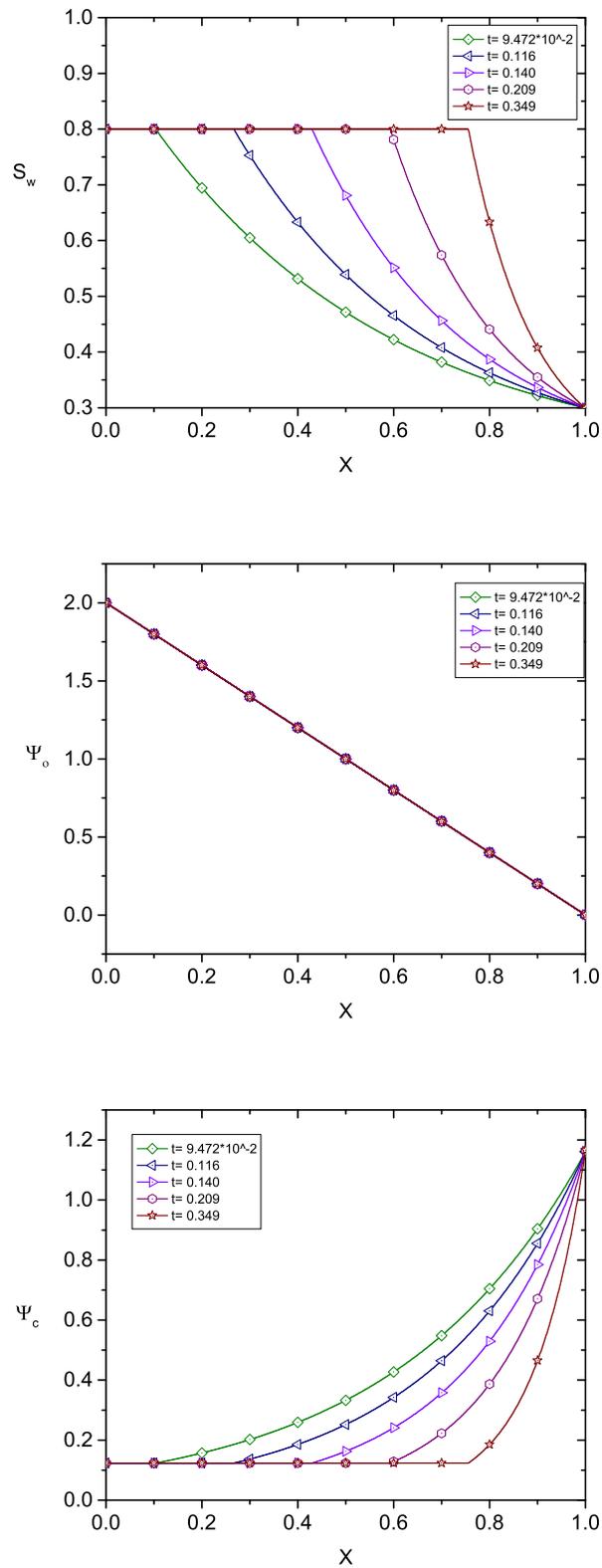
Se utilizó un valor para diferencial de tiempo de  $dt = 1 \times 10^{-8}$  y para tamaño de celda de  $dx = 1 \times 10^{-3}$ , con una malla de 1000 puntos. De donde se obtiene que el número de Courant es  $Co = 9 \times 10^{-7}$ .

	Inyección a valor constante (Caso 1)	Flujo de inyección constante (Caso 2)
Presión $CF_A$	$\Psi_o _{x=A} = 2;$	$\frac{\partial \Psi_o}{\partial x} _{x=A} = g$
Presión $CF_B$	$\frac{\partial \Psi_o}{\partial x} _{x=B} = q;$	$\frac{\partial \Psi_o}{\partial x} _{x=B} = 0$
g	—	0.01 ó 0.1
q	0.001 ó 0.002	—
$\eta$	1	4
Saturación $CF_A$	$S_w _{x=A} = 0.8$	$S_w _{x=A} = 0.8$
Saturación $CF_B$	$\frac{\partial^2 S_w}{\partial x^2} _{x=B} = 0$	$\frac{\partial^2 S_w}{\partial x^2} _{x=B} = 0$
Saturación $CI$	$S_w _{t=0} = 0.3$	$S_w _{t=0} = 0.3$
Temperatura $CF_A$	$\theta _{x=A} = 1$	$\theta _{x=A} = 1$
Temperatura $CF_B$	$\frac{\partial \theta}{\partial x} _{x=B} = 0$	$\frac{\partial \theta}{\partial x} _{x=B} = 0$
Temperatura $CI$	$\theta _{t=0} = 0$	$\theta _{t=0} = 0$
Concentración $CF_A$	$\varsigma _{x=A} = 1$	$\varsigma _{x=A} = 1$
Concentración $CF_B$	$\frac{\partial \varsigma}{\partial x} _{x=B} = 0$	$\frac{\partial \varsigma}{\partial x} _{x=B} = 0$
Concentración $CI$	$\varsigma _{t=0} = 0$	$\varsigma _{t=0} = 0$
Péclet $Pe$	$Pe = 10^3, Pe = 10^4, Pe = 10^5, Pe = 10^6$ y $Pe = 10^7$	$Pe = 10^3, Pe = 10^4, Pe = 10^5, Pe = 10^6$ y $Pe = 10^7$
Omega $\Omega$	$\Omega = 10^{-2}, \Omega = 10^{-3}, \Omega = 10^{-4}$ y $\Omega = 10^{-5}$	$\Omega = 10^{-2}, \Omega = 10^{-3}, \Omega = 10^{-4}$ y $\Omega = 10^{-5}$
Empuje con agua	Si	Si
$\mu_w(\theta)$ y $\mu_o(\theta)$	Si	Si
$S_{rw}(\theta)$	Si	Si
$S_{rw}(\varsigma)$	Si	Si
$\mu_w(\theta), \mu_o(\theta)$ y $S_{rw}(\varsigma)$	Si	Si
$\mu_w(\theta), \mu_o(\theta)$ y $S_{rw}(\varsigma, \theta)$	Si	Si

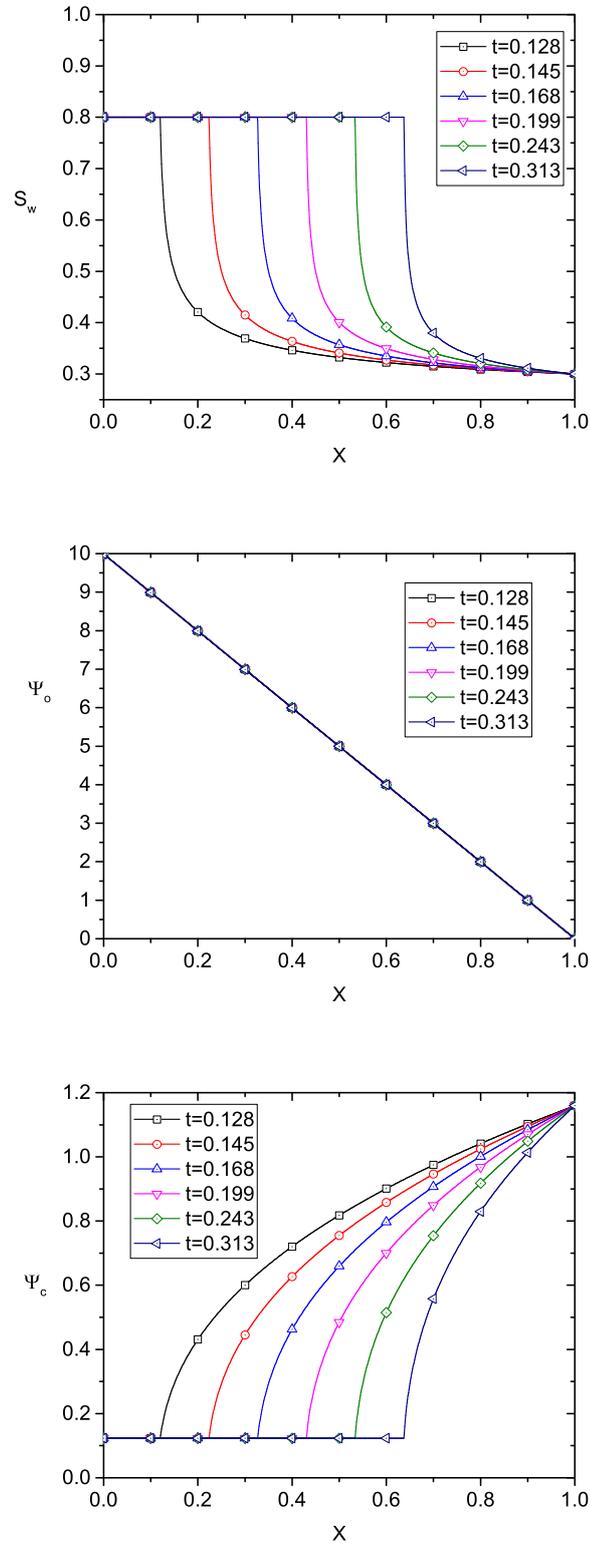
Cuadro 5.1: Resumen de casos ejecutados para esta tesis.

## 5.1. Empuje con agua

Se presentan las curvas de saturación de agua ( $S_w$ ), presión de aceite ( $Poil$ ) y presión capilar ( $PC$ ) cuando la recuperación del petróleo se debe solamente a la inyección de agua. Este es el caso más sencillo en el que el petróleo es desplazado por el agua en cuanto ésta comienza a saturar el yacimiento hasta alcanzar el valor de 0.8. Este caso es un desplazamiento puramente mecánico. Esto se debe a que la presión de umbral ha sido superada y se comienza así el desplazamiento del petróleo, figuras 5.1 y 5.2.



**Figura 5.1:** Perfiles de saturación de agua, presión de aceite y presión capilar para empuje mecánico con agua con valores  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$



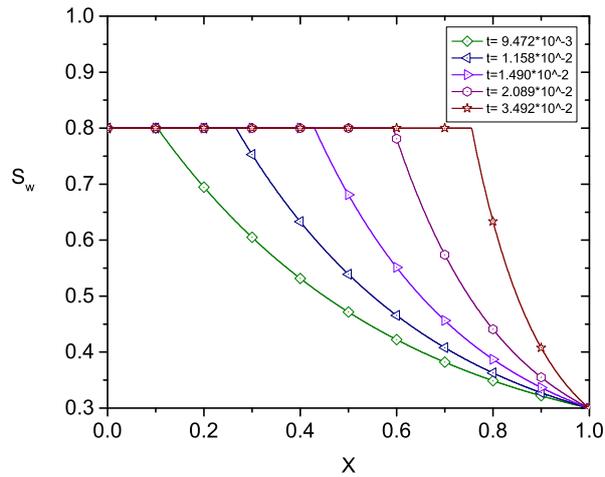
**Figura 5.2:** Perfiles de saturación de agua, presión de aceite y presión capilar para empuje mecánico con agua con valores  $Om = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 4$  y  $g = 0.01$

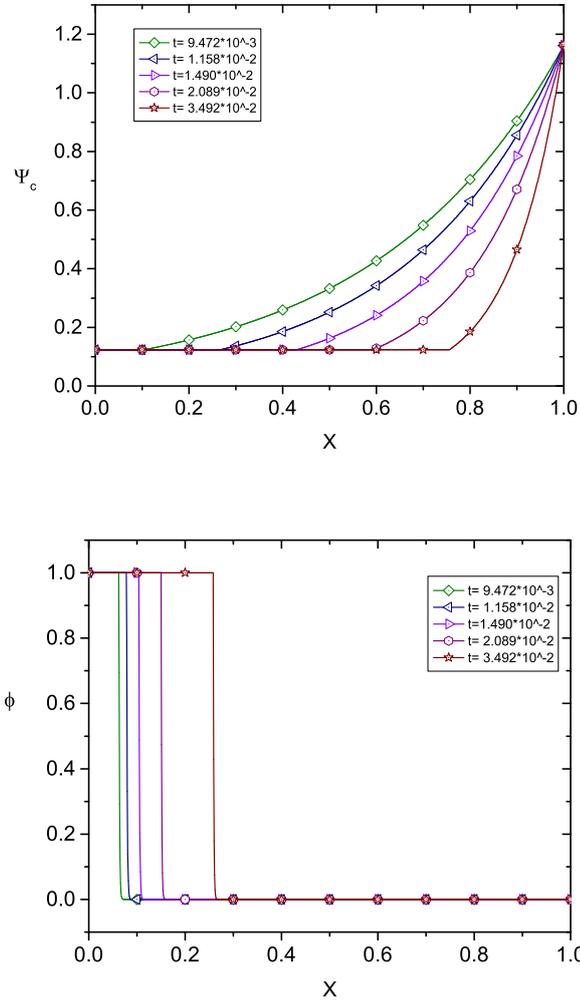
## 5.2. Flujo de calor en el sistema

Se analizan dos casos de los posibles efectos que puede generar el aumento de la temperatura en el yacimiento, cuando las viscosidades dependen de la temperatura y cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la temperatura. Para ello se seleccionaron algunas gráficas representativos de cada fenómeno.

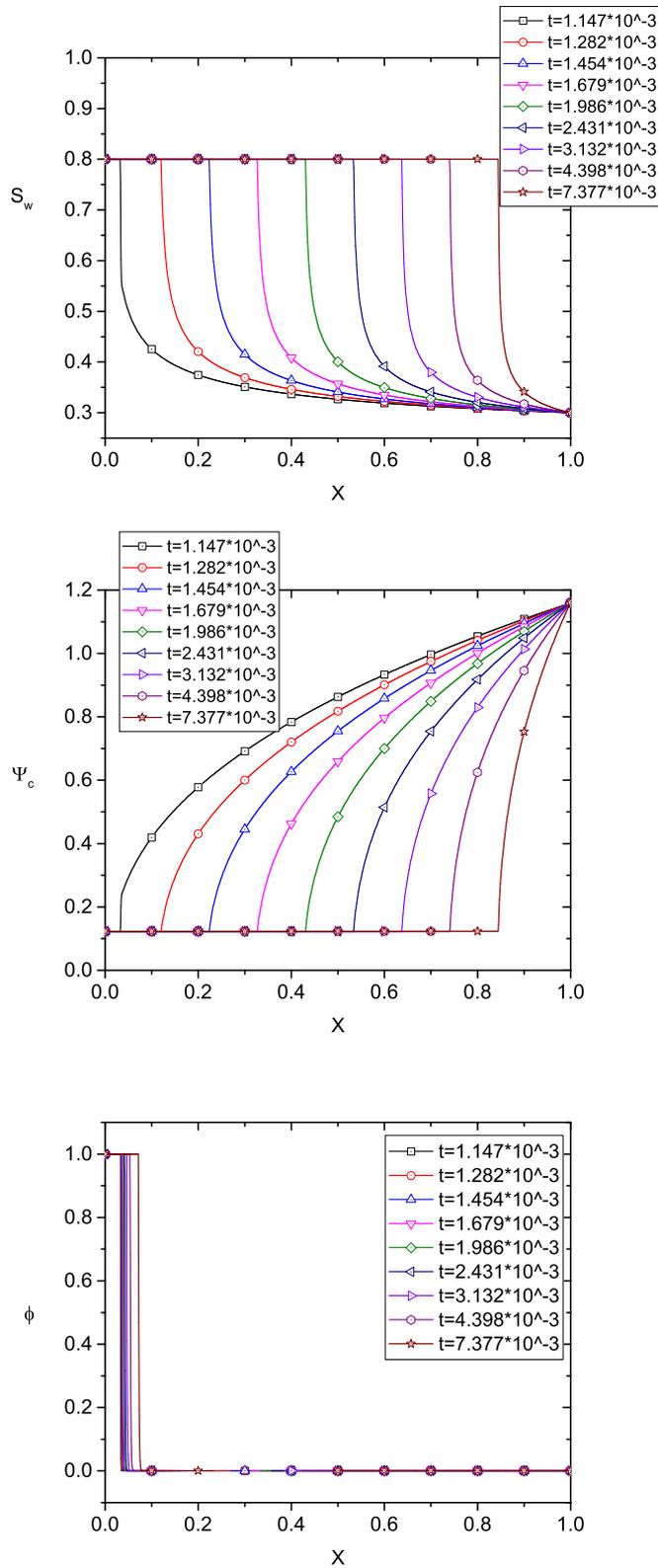
### 5.2.1. Viscosidad dependiente de la temperatura

Si hacemos que la viscosidad dependa de la temperatura como se propone en las ecuaciones 2.40 y 2.41 se presentan gráficas de la figura 5.3 y de la figura 5.4 las cuales pueden compararse con las figuras de empuje meramente mecánico, 5.1 y 5.2 respectivamente. Se puede observar que cuando la viscosidad se ve modificada con la temperatura, existen efectos notorios en los tiempos de recuperación, pues la viscosidad al ser función de la temperatura hace que el proceso de recuperación sea más rápido. En este caso con dos y hasta tres órdenes de magnitud para el perfil de saturación de agua como para el perfil de presión capilar.





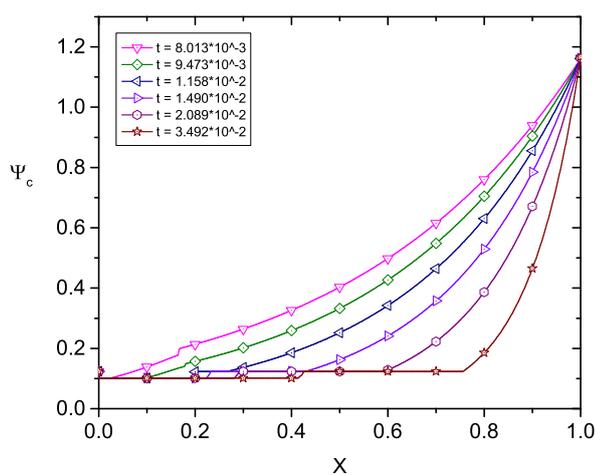
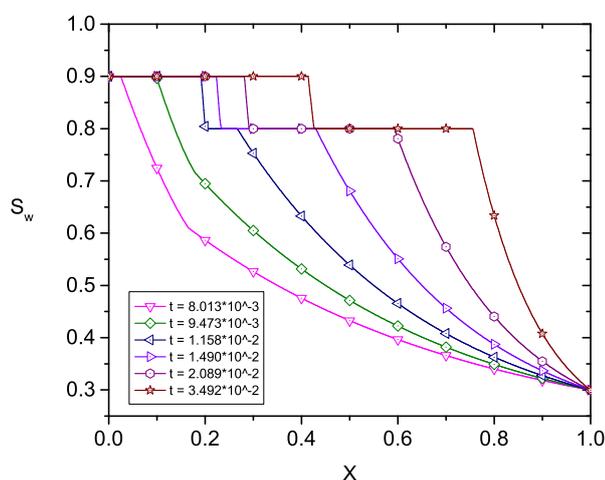
**Figura 5.3:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando la viscosidad depende de la temperatura para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$

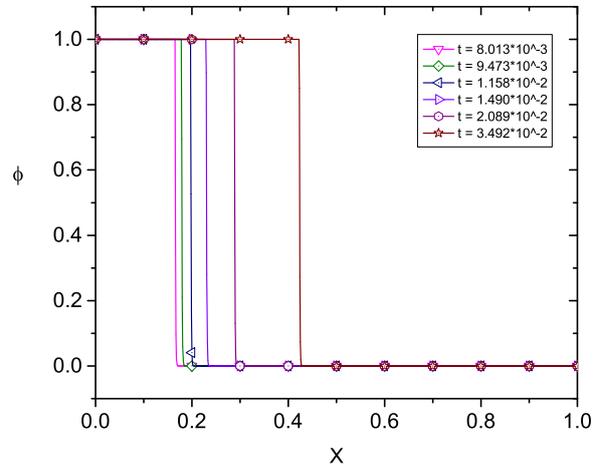


**Figura 5.4:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando la viscosidad depende de la temperatura para  $Om = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 4$  y  $g = 0.01$

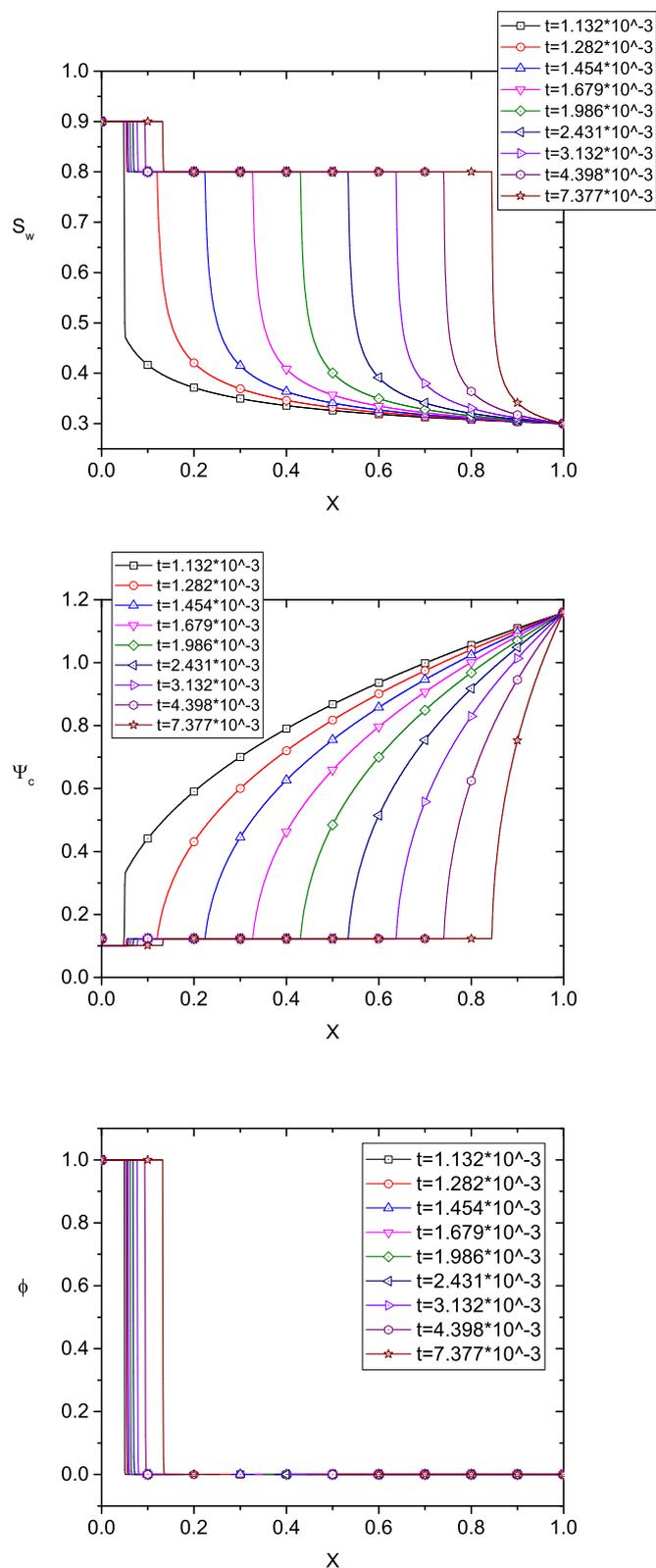
### 5.2.2. Puntos de saturación de agua residual dependientes de la temperatura

Con la aproximación realizada en la ecuación D.2 se obtienen las gráficas de la Figura 5.5 y de la Figura 5.6. Se observa que el perfil de saturación y de presión capilar cambian cuando existe dependencia de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura. La saturación comienza a subir hasta el valor de 0.9, lo que nos indica que se está recuperando mayor cantidad de petróleo que en los casos anteriores. En los perfiles de saturación se tiene una doble caída la primera es de 0.9 a 0.8, que es el petróleo recuperado, pues si observamos el perfil de temperaturas, es hasta ahí donde ha entrado el flujo de calor, sin embargo el flujo del agua ya ha avanzado más allá que es la segunda caída donde sube a 0.8 y baja hasta la saturación de agua connata cuyo valor es de 0.3.





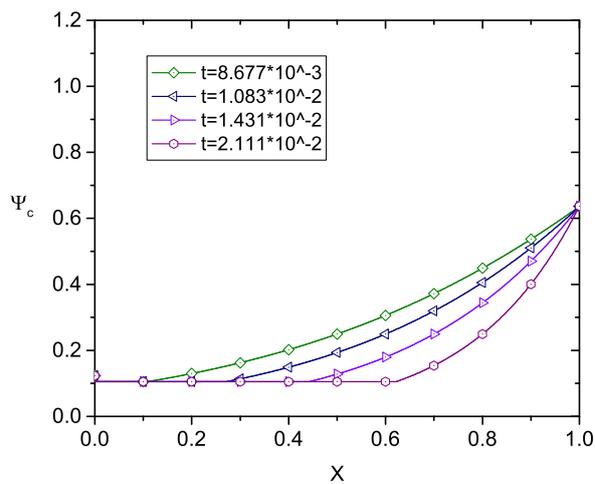
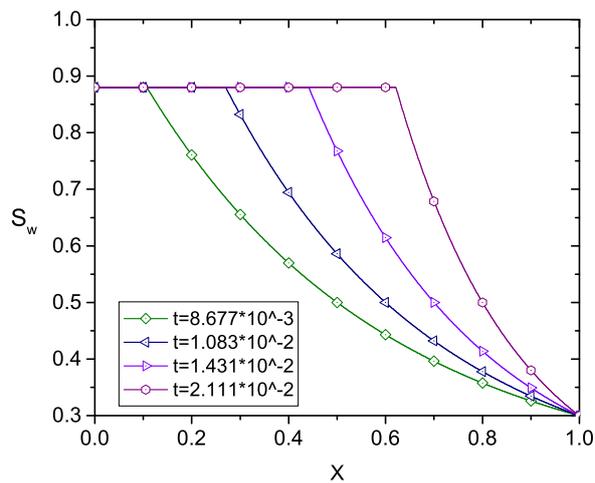
**Figura 5.5:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la temperatura para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$

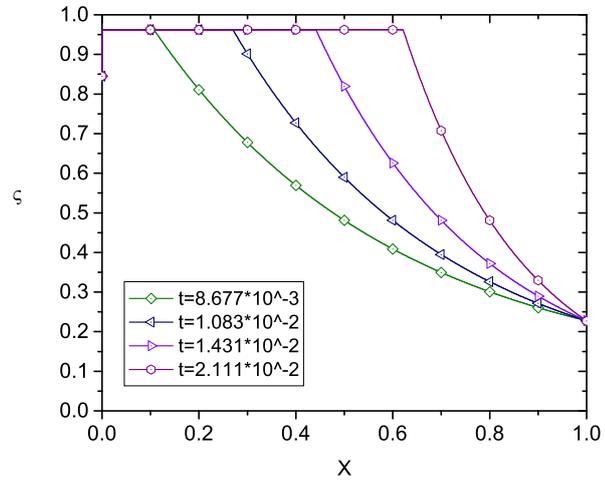


**Figura 5.6:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la temperatura para  $Om = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 4$  y  $g = 0.01$

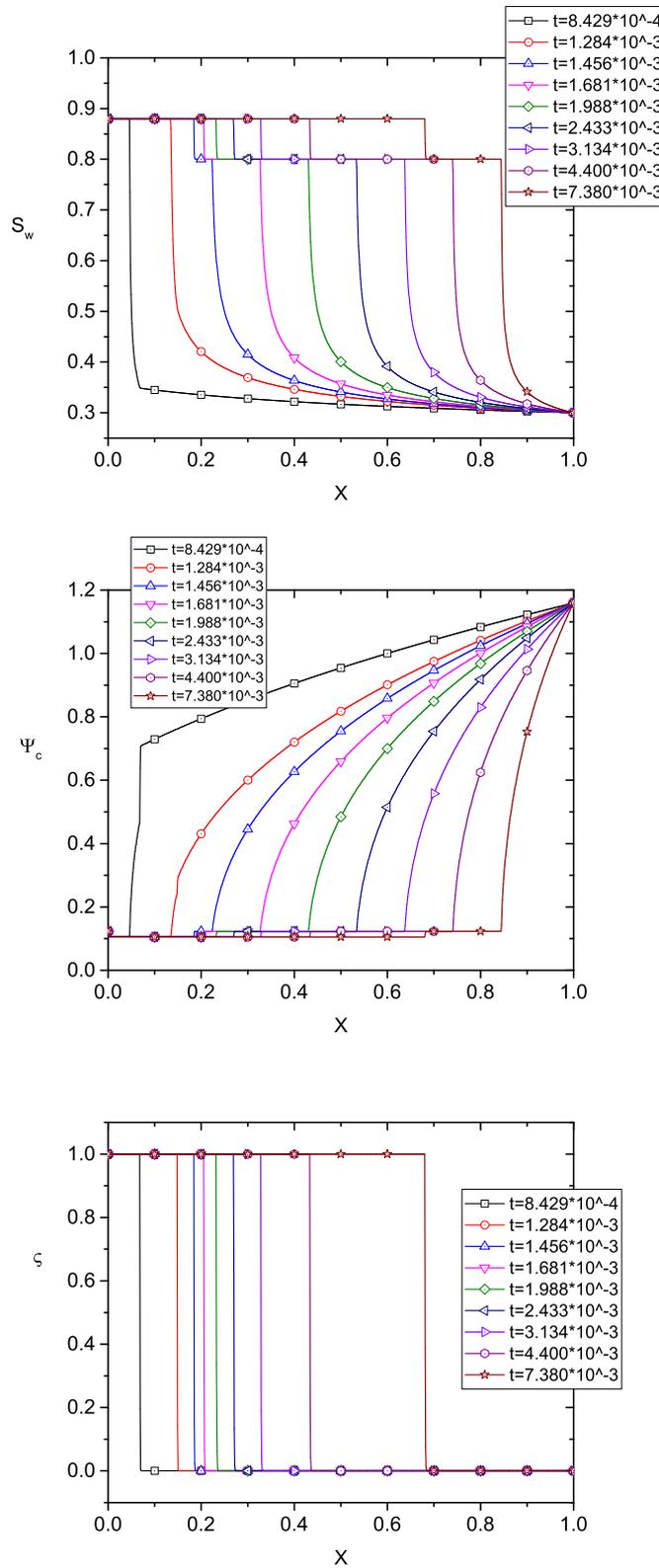
### 5.3. Interacción con un surfactante

Para conocer los efectos del surfactante se propone la dependencia puntos de saturación de agua residual con la concentración de la ecuación 2.43. Cuando esto sucede, se obtienen los perfiles de las figuras 5.7 y 5.8. En estos se observa que el perfil de saturación avanza un poco más rápido que cuando depende de la temperatura, comparando con la figura 5.5. Además se observa que el perfil de saturación del agua tiene una sola caída y aunque no llega hasta 0.9 como en el caso anterior, esta caída hace que se recupere más petróleo que si solo depende de la temperatura. Con respecto al perfil de presión capilar note que ésta ha disminuido casi hasta la mitad, el surfactante tiene efectos que reduce la presión capilar. Por su parte el perfil de saturación del agua va a la par del perfil de concentración





**Figura 5.7:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la concentración para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$



**Figura 5.8:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la concentración para  $Om = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 4$  y  $g = 0.01$

## 5.4. Efectos compuestos

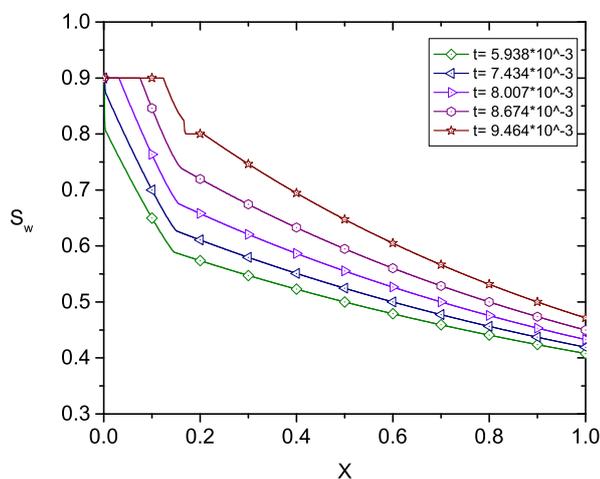
Se presentan también los efectos sumados de los casos anteriores. Se modificó el parámetro,  $\Omega$ , Pécelet y flujo en la presión de salida  $q$  y se obtuvo lo siguiente.

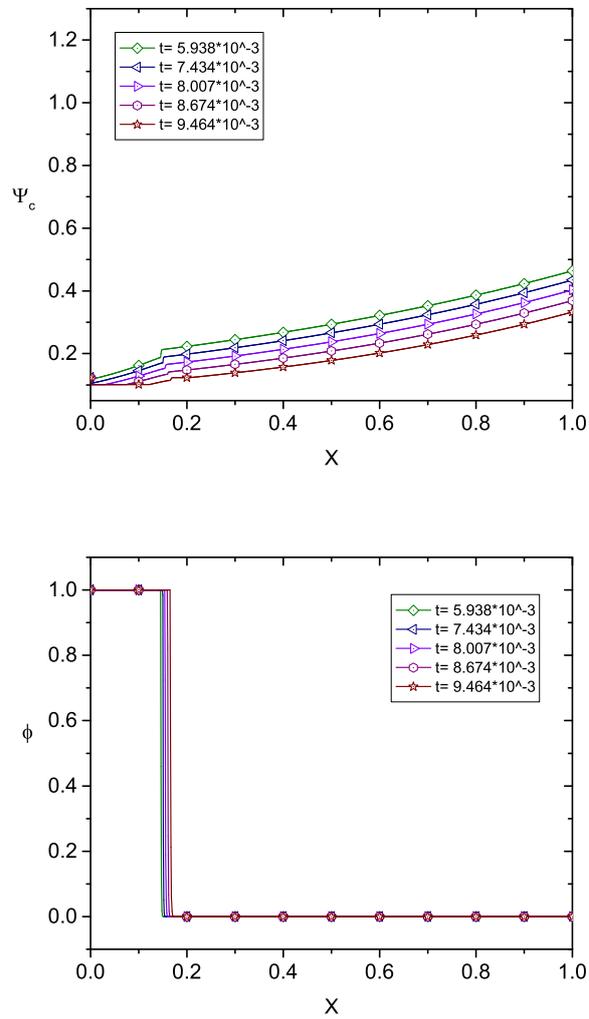
### 5.4.1. Consecuencias de la temperatura en la viscosidad de las fases y en los puntos de saturación de agua residual

Además de presentar los efectos de modificar las viscosidades cuando dependen de la temperatura tanto para el agua como para el aceite en las figuras 5.9 y 5.11, se presenta el caso con una ligera variación en la presión de salida  $q$ , en la figura 5.10.

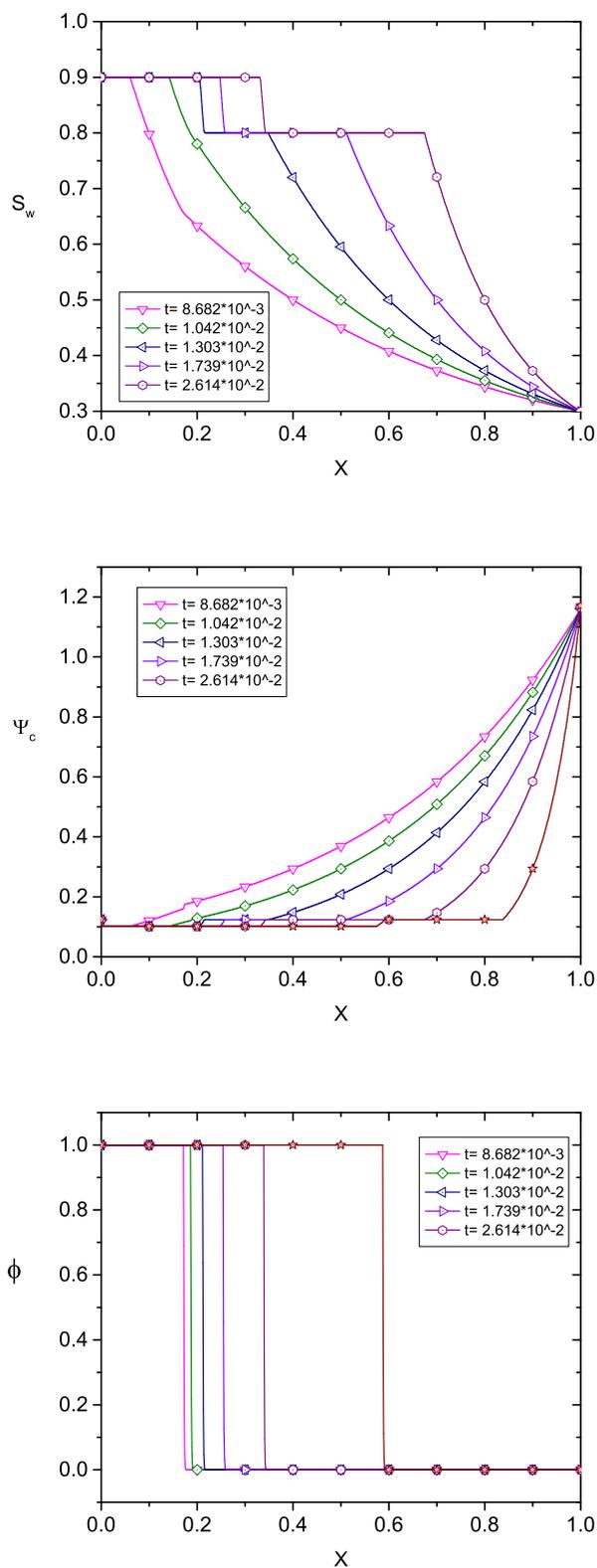
Cuando los efectos térmicos afectan a los punto de la saturación de agua residual y a la viscosidad los efectos se suman, si observa en el perfil de saturación de la figura 5.9 se ha recuperado más petróleo debido al efecto térmico en los puntos de saturación de agua residual y en tiempos menores debido al efecto termino en la viscosidad, que si compara donde solo se presenta el empuje por agua en 5.1.

Por otro lado, el cambio en la presión de salida,  $q$ , genera diferencia en la forma de los perfiles de Saturación de agua y de Presión capilar, figura 5.9. Se observa que con  $q = 0.001$  los perfiles de saturación presentan una caída más lenta que cuando  $q = 0.002$  donde el paso de la presión es mayor.

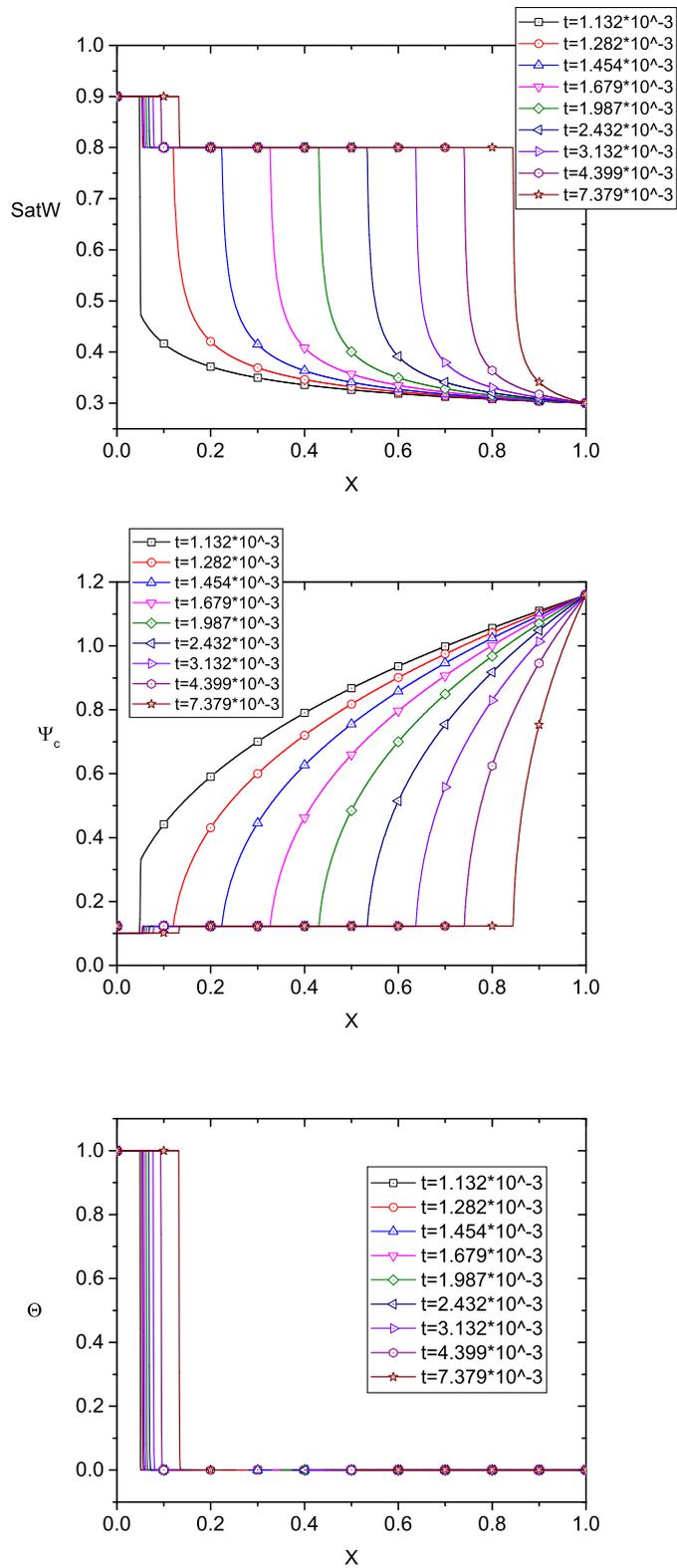




**Figura 5.9:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.001$



**Figura 5.10:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$

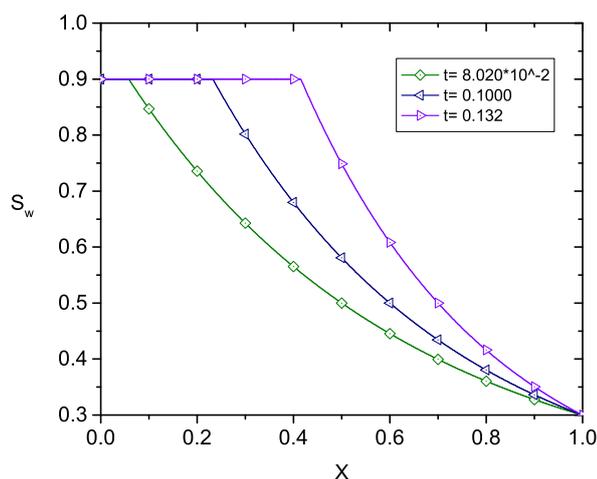


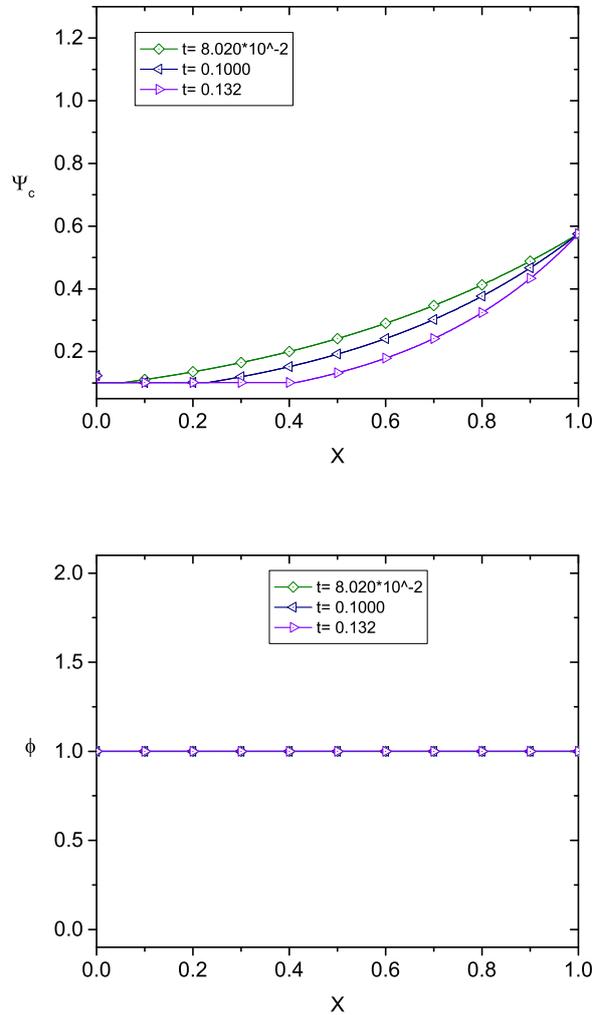
**Figura 5.11:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para  $Om = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 4$  y  $g = 0.01$

### 5.4.2. Variación del parámetro $\Omega$

El efecto de la figura 5.12 donde se presentan los efectos de la viscosidad del agua y del aceite y de los puntos de saturación de agua residual dependientes de la temperatura es compararla con la figura 5.10 pues se ha cambiado  $\Omega = 10^{-5}$ .

Recuerde que  $\Omega$  contiene mucha de la física del problema, como la permeabilidad. Un valor  $\Omega = 10^{-4}$  es generado por una permeabilidad de  $k = 10^{-12}$ , mientras que cuando  $\Omega = 10^{-5}$   $k = 10^{-13}$ . Cuando  $\Omega = 10^{-5}$  el perfil de temperatura entra con una velocidad menor pues es menos permeable, esto se verifica si comparamos los tiempos y distancias recorridos y comparamos las figuras 5.12 y 5.10; sin embargo, en la figura 5.12 se puede visualizar el caso en el que el yacimiento ya ha sido calentado por completo. En este caso el proceso de dispersión de temperatura es más lento pero el calentamiento más homogéneo por la forma en que se distribuye el flujo de calor dentro del yacimiento. Así mismo se observa que la presión capilar disminuye casi a la mitad por estos efectos lentos del calentamiento lento.





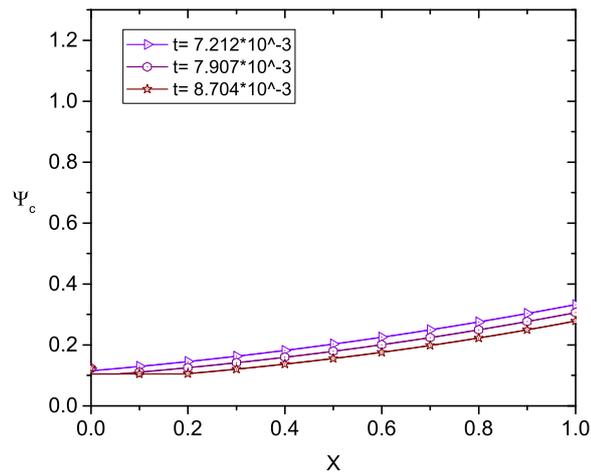
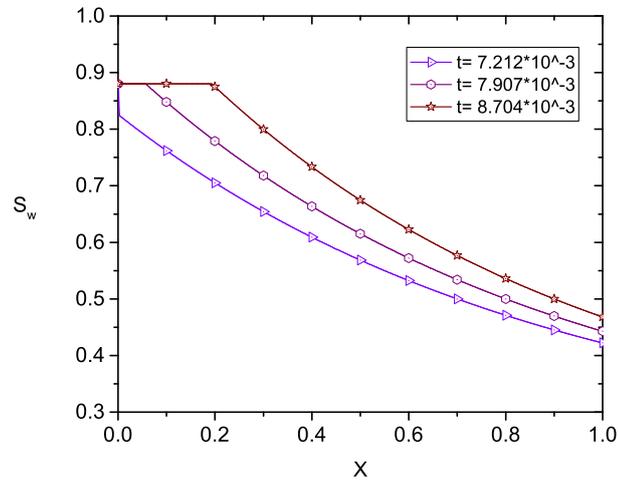
**Figura 5.12:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para  $Om = 10^{-5}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$

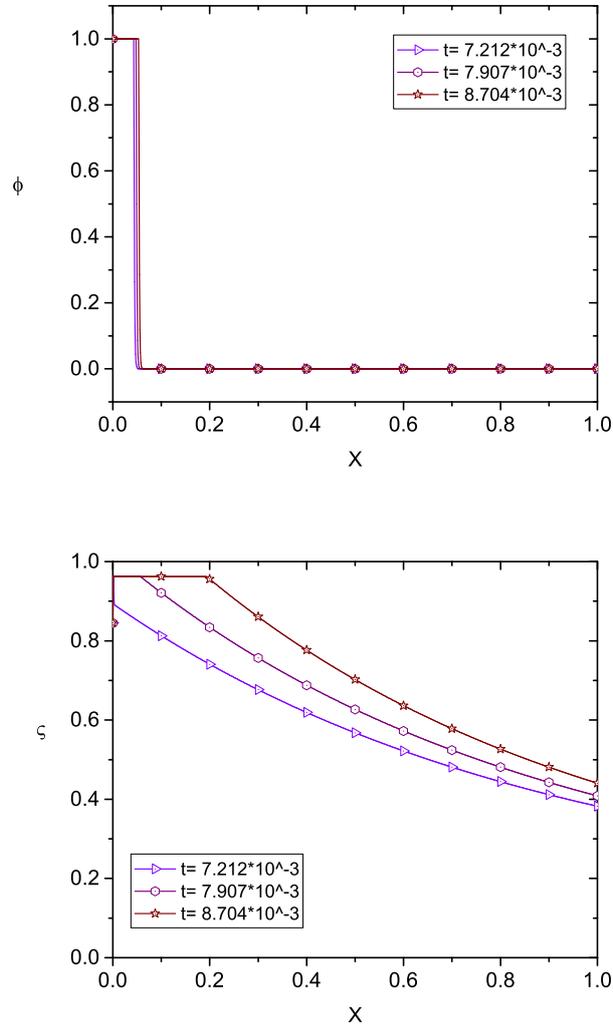
### 5.4.3. La temperatura en la viscosidad de las fases con la temperatura y concentración en los puntos de saturación de agua residual

A continuación se presentan los tres fenómenos estudiados al mismo tiempo, cuando la viscosidad del agua y del petróleo dependen de la temperatura y a su vez los puntos de saturación de agua residual depende tanto de la temperatura como de la concentración de surfactante para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $q = 0.001$  figura 5.13 y para  $q = 0.002$  en 5.14. Además para el caso de  $Om = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^4$  y  $g = 0.01$  en la figura 5.15.

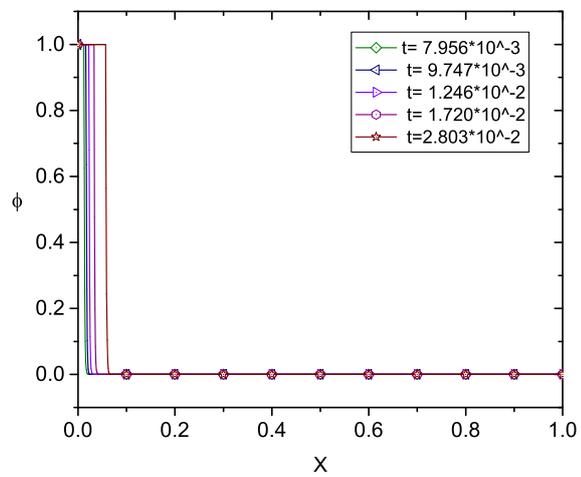
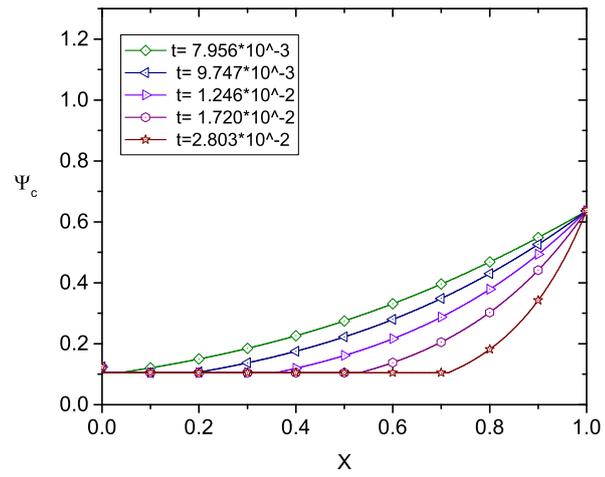
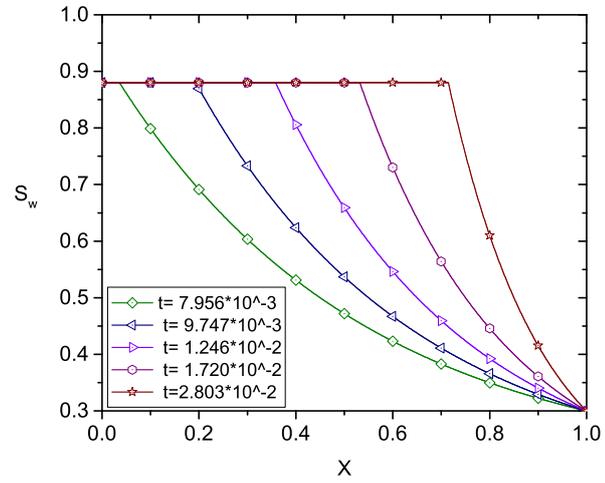
En este caso se observa que los perfiles de saturación y de concentración se van desplazando a la par mientras que el perfil de temperatura lleva una velocidad menor.

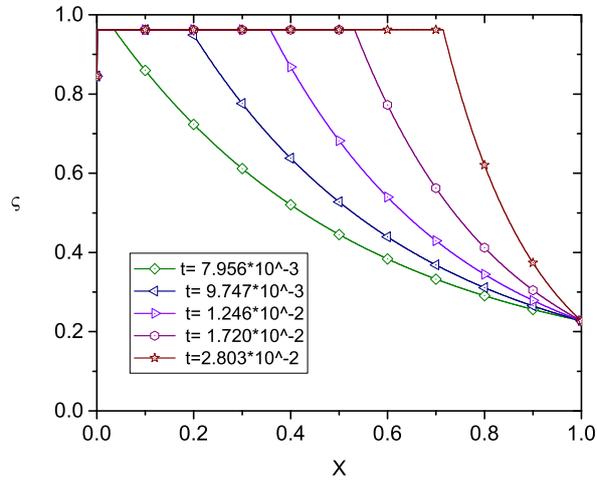
Nuevamente la presencia del flujo caliente hace que el proceso de recuperación se lleve a cabo en menor tiempo. A su vez la presencia del surfactante ayuda a reducir la presión capilar para el caso en que  $\eta = 1$ . También vale la pena notar que el perfil de saturación sube hasta poco menos de 0.9, en presencia del surfactante mientras que cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la temperatura sube hasta 0.9, esto se debe al efecto de degradación o absorción del surfactante, es decir, existe una cierta pérdida de surfactante conforme avanza en el yacimiento.



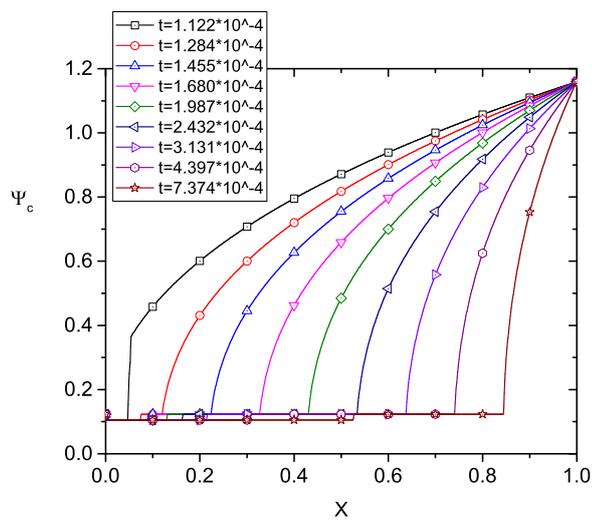
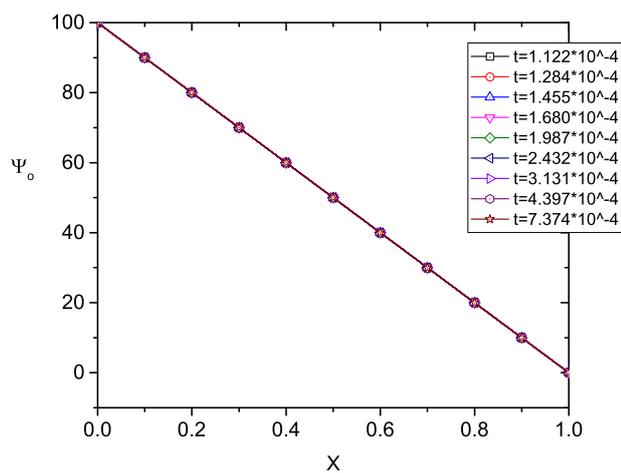
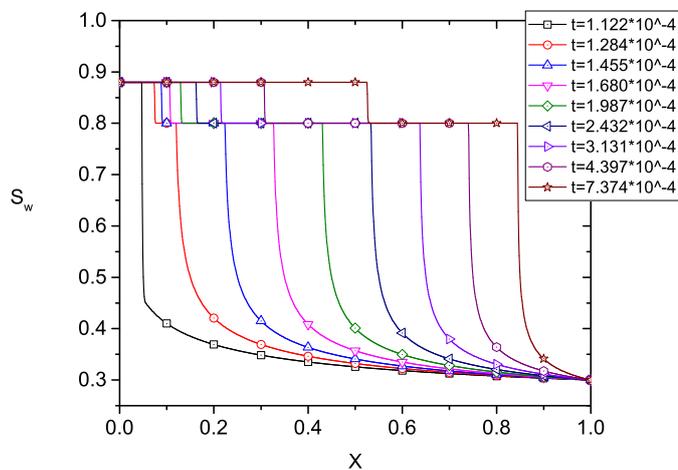


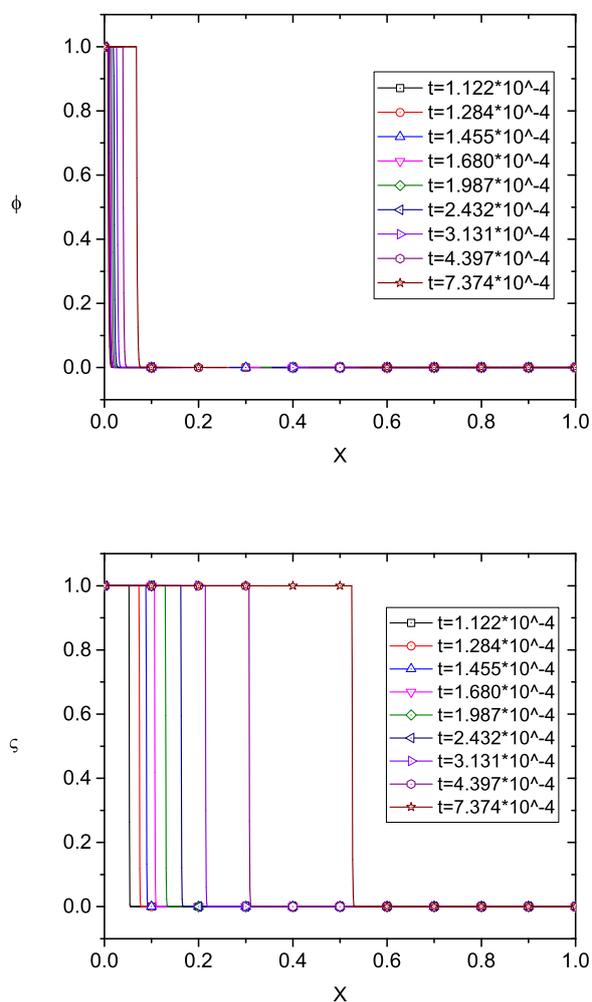
**Figura 5.13:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar, temperatura y concentración cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura y de los puntos de saturación de agua residual con la concentración para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.001$





**Figura 5.14:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar, temperatura y concentración cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura y de los puntos de saturación de agua residual con la concentración para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$





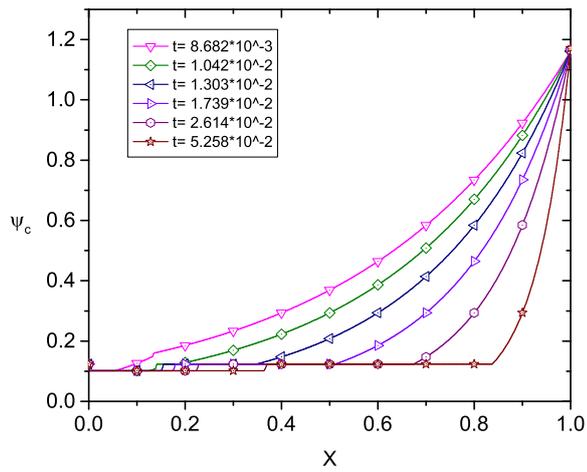
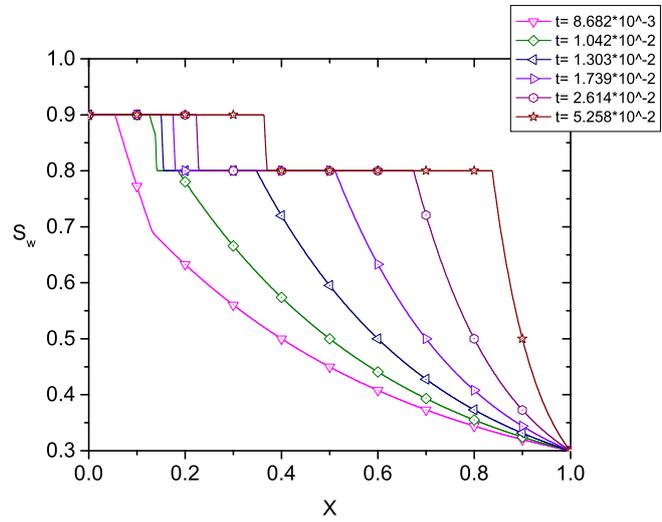
**Figura 5.15:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar, temperatura y concentración cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para  $Om = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 4$  y  $g = 0.01$

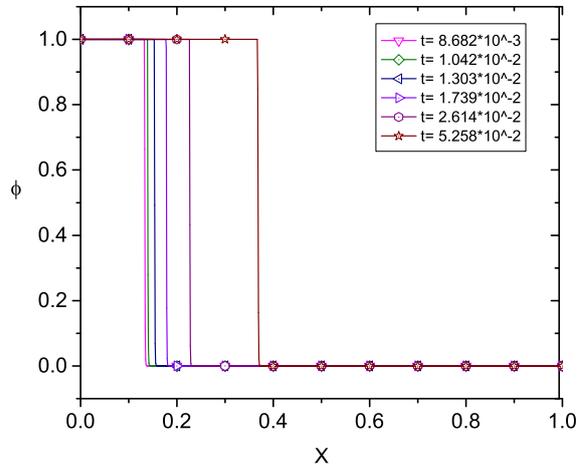
#### 5.4.4. Variación en el número de Péclet

Por otro lado en las figuras 5.16 y 5.17 se presentan los efectos de la viscosidad dependiente de la temperatura para el agua y del aceite y de los puntos de saturación de agua residual dependientes de la temperatura y la concentración cuando se varía a  $Pe = 10^7$ .

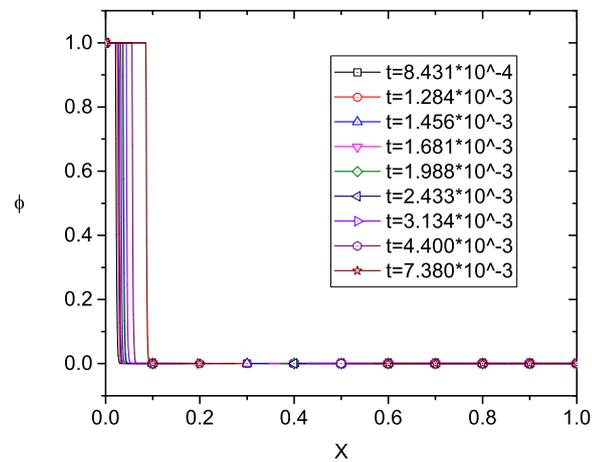
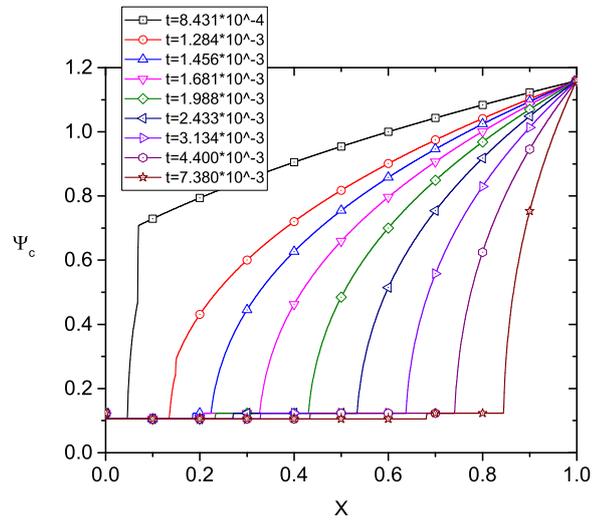
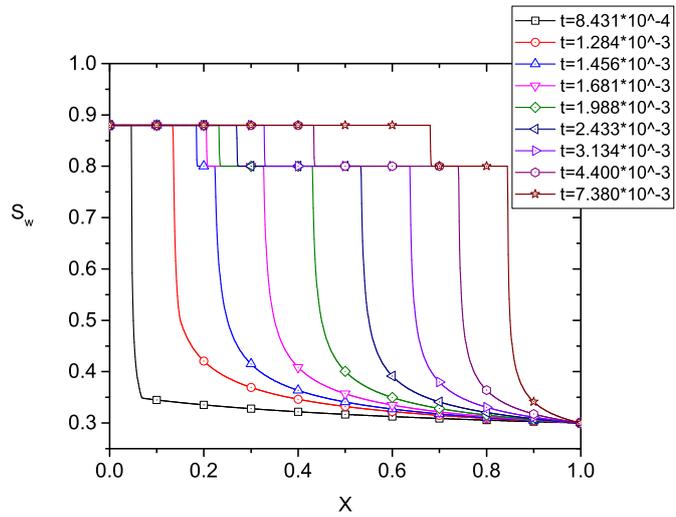
Si comparamos las figuras 5.16 y 5.10, por ejemplo, vemos que el perfil de saturación cambia cuando se modifica el número de Péclet de manera que recorre más distancia en un mismo tiempo con  $Pe = 10^4$  que cuando  $Pe = 10^7$ , es decir, se recupera más petróleo si el número de Péclet es más grande. El efecto es mucho más notorio en la zona recuperada por efectos de los puntos de

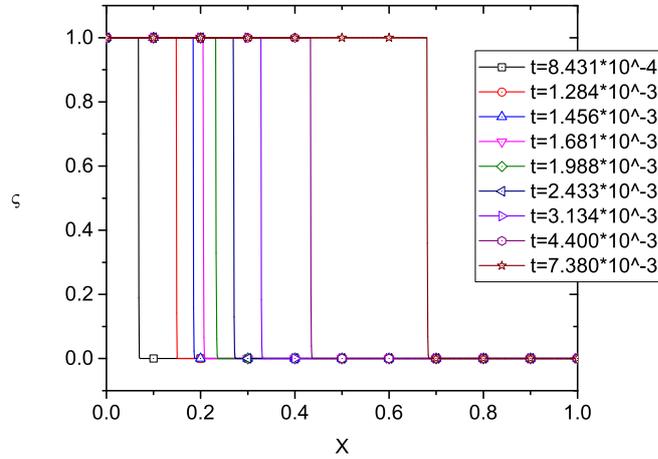
saturación de agua residual.





**Figura 5.16:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar y temperatura cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^7$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$





**Figura 5.17:** Perfiles de saturación de agua, presión capilar, temperatura y concentración cuando hay dependencia de viscosidad y de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura y con la concentración para  $Om = 10^{-2}$ ,  $Pe = 10^7$ ,  $\eta = 4$  y  $g = 0.01$

## 5.5. Curvas de comparación y recuperación

Adicionalmente se presentan las curvas que comparan a los efectos presentados anteriormente, para valores de  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $q = 0.001$  y  $q = 0.002$ , en las figuras 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22 y 5.23.

Para los casos estudiados con la siguiente nomenclatura:

NOMRE	DESCRIPCIÓN
SinT-C	Empuje de agua meramente mecánico
EP	Saturación de agua residual depende de la temperatura
Visc	Las viscosidades varían con la temperatura
Visc-EP	Las viscosidades y saturación de agua residual varían con la temperatura
Conc	Saturación de agua residual varía con la concentración de surfactante
Ep+Visc+Conc	Cuando ocurren todos los fenómenos al mismo tiempo

**Cuadro 5.2:** Nomenclatura para las curvas de comparación y recuperación.

En la figura 5.18 se presentan los perfiles de presión del yacimiento con las pendientes que se generan al modificar el flujo de salida, de  $q = 0.001$  y  $q = 0.002$  con  $Om = 10^{-4}$  y  $Pe = 10^4$ .

Las figuras 5.19 y 5.20 son las áreas acumuladas bajo las curvas de los perfiles de saturación del agua para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$ ,  $q = 0.001$  y  $q = 0.002$  respectivamente. Note que cuando todos los procesos ocurren al mismo tiempo la curva es más corta que el resto de los casos, esto se debe a que el código calculó en un menor intervalo de tiempo, los resultados para esos parámetros,

en comparación con las otras curvas del mismo caso.

Por lo que se puede deducir de los perfiles de saturación de agua obtenidos que entre mayor sea el área, mayor es la recuperación de petróleo. En ambos perfiles de saturación se observa que cuando se presentan todos los efectos al mismo tiempo se recupera más petróleo sobre todo cuando se compara con el caso en que solo se inyecta agua. También se recupera bastante cuando se tiene solo surfactante, por debajo de estas curvas se encuentran las curvas cuando la viscosidad depende de la temperatura y los puntos de saturación de agua residual de la concentración, luego el caso donde los puntos de saturación de agua residual dependen solo de la temperatura y finalmente se recupera muy poco cuando solamente las viscosidades varían con la temperatura, como se mencionó anteriormente este caso ayuda mas a acelerar el tiempo del proceso de recuperación que a recuperar más cantidad de petróleo.

Como sabemos, para que los procesos de recuperación puedan llevarse a cabo se desea, entre otras cosas, reducir la presión capilar. Las figuras 5.21 y 5.22 presentan las áreas acumuladas para los perfiles de presión capilar para los casos  $Om = 10^{-4}$ ,  $\eta = 1$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $q = 0.001$  y  $q = 0.002$  respectivamente. Complementario a los casos anteriores, la presión capilar ha disminuido más en los casos donde se aplican todos los fenómenos estudiados, comparándolos con la curva de solo empuje con agua. Y el que menos reduce la presión capilar es cuando las viscosidades varían con la temperatura.

La figura 5.23 es muy representativa pues contiene variaciones en el número de Péclet y en el factor  $\Omega$ . Hay que notar que cuando el número de Péclet es mayor, como cuando  $Pe = 10^7$ , el perfil de saturación de agua avanza más lento en comparación que cuando es menor, por ejemplo  $Pe = 10^4$ . Esto se nota más en la zona de recuperación, intervalo de 0.8 a 0.9 del perfil; es decir, se recupera más petróleo cuando el número de Péclet es menor.

Por otra parte, se observa como el factor  $\Omega$  acelera o retarda el proceso de recuperación, pues éste está ligado a la permeabilidad del yacimiento, cuando  $\Omega$  es menor, en este caso es de  $10^{-5}$ , es menos permeable y entonces el proceso de movilidad de los fluidos tarda más tiempo que cuando se tiene un valor de  $\Omega = 10^{-3}$ .

Las figuras 5.24 y 5.25 muestran los porcentajes de recuperación de petróleo derivado de algunos procesos estudiados, para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$ ,  $q = 0.001$  y  $q = 0.002$ . En éstas curvas se observa que la mayor cantidad de petróleo se recupera cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la concentración y de la temperatura, comparados con el proceso donde solo hay inyección de agua, esto tanto par  $q = 0.001$  como para  $q = 0.002$ . Se observa que se logra recuperar de un 10 a un 14% más que cuando se compara con el caso donde solo hay inyección mecánica de agua.

El porcentaje de recuperación se obtuvo con la siguiente ecuación:

$$\%R = \frac{Sat_{ef} - Sat_N}{Sat_N} \times 100 \quad (5.1)$$

donde:

$Sat_N$  : Son los valores de las áreas de abajo de las curvas de saturación de agua durante el proceso meramente mecánico.

$Sat_{ef}$  : Son los valores de las áreas de abajo de las curvas de saturación de los distintos efectos estudiados en esta tesis, descritos en el cuadro 5.2.

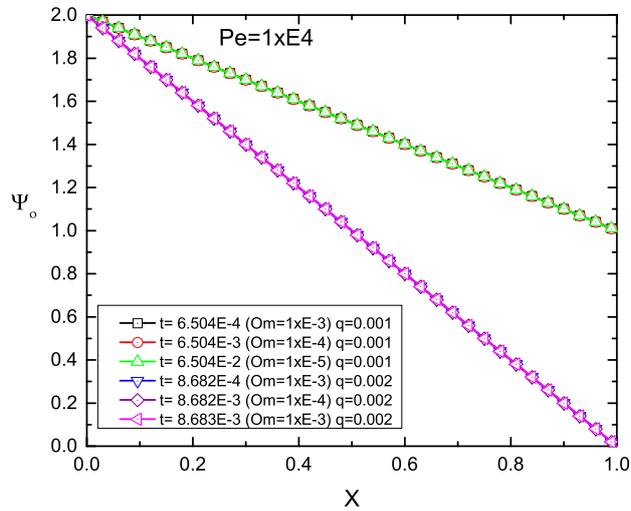


Figura 5.18: Perfiles para la Presión del aceite con  $\eta = 1$ ,  $q = 0.001$  y  $q = 0.002$

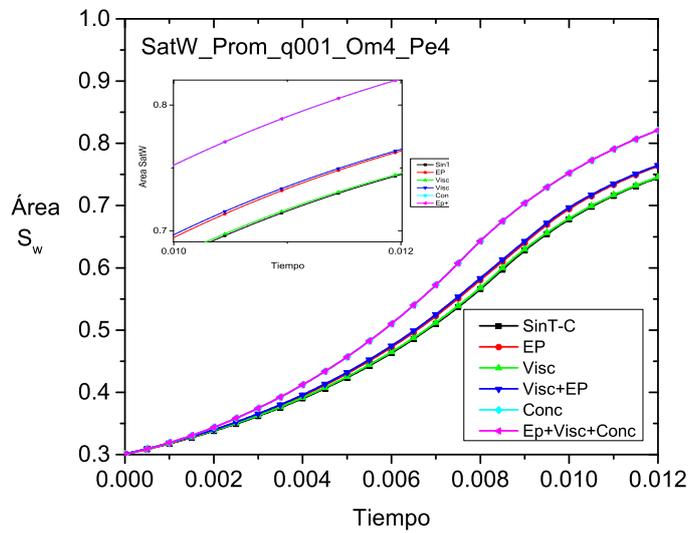
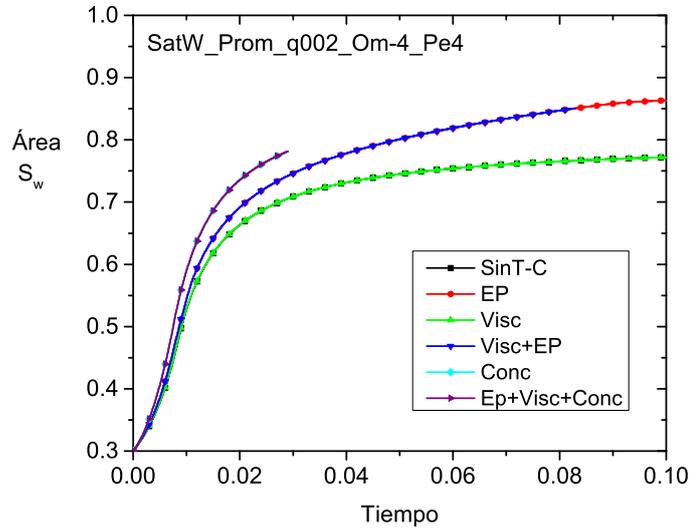
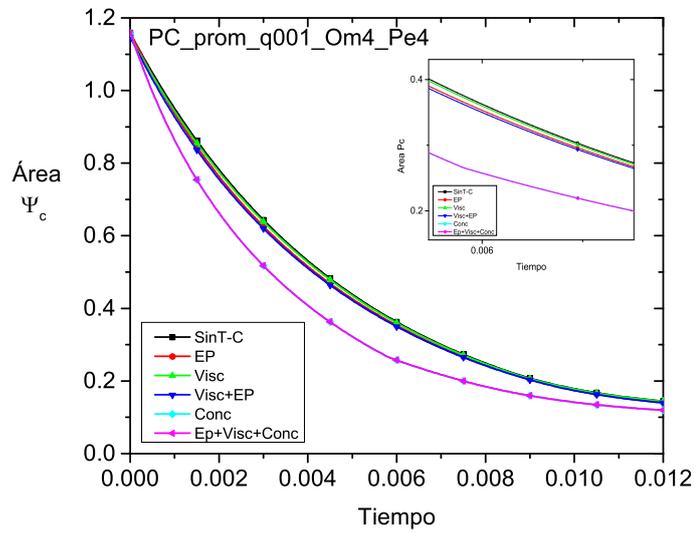


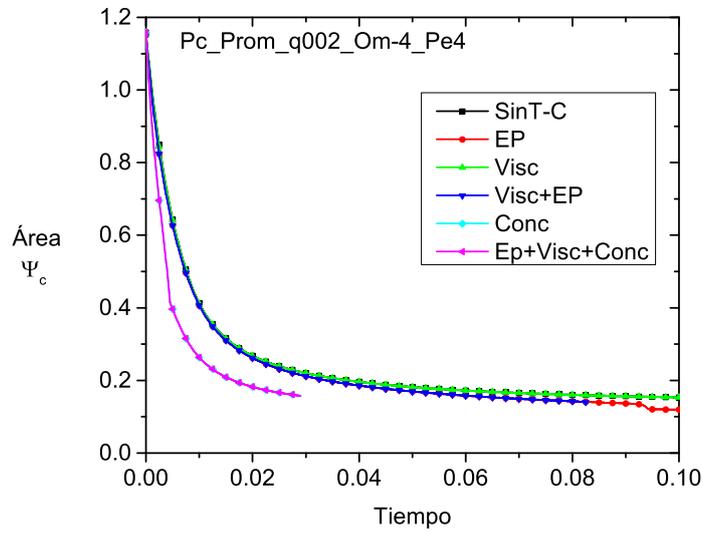
Figura 5.19: Perfiles para la Saturación del agua con  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.001$



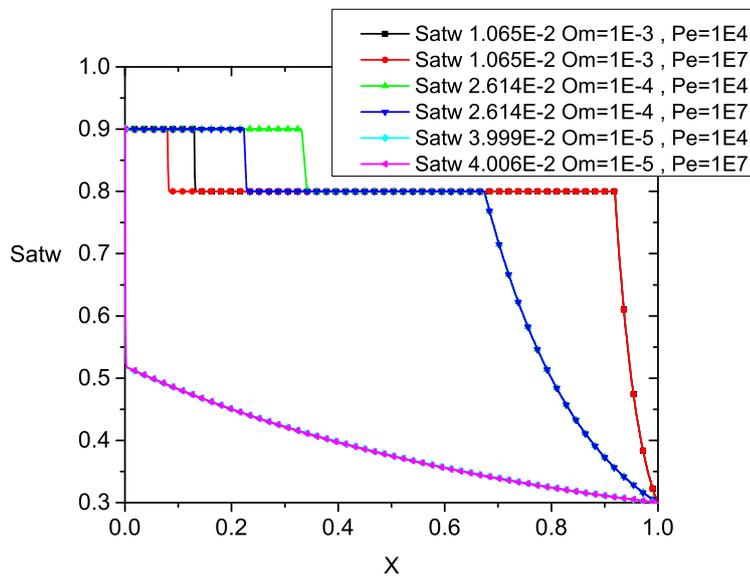
**Figura 5.20:** Perfiles para la Saturación del agua con  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$



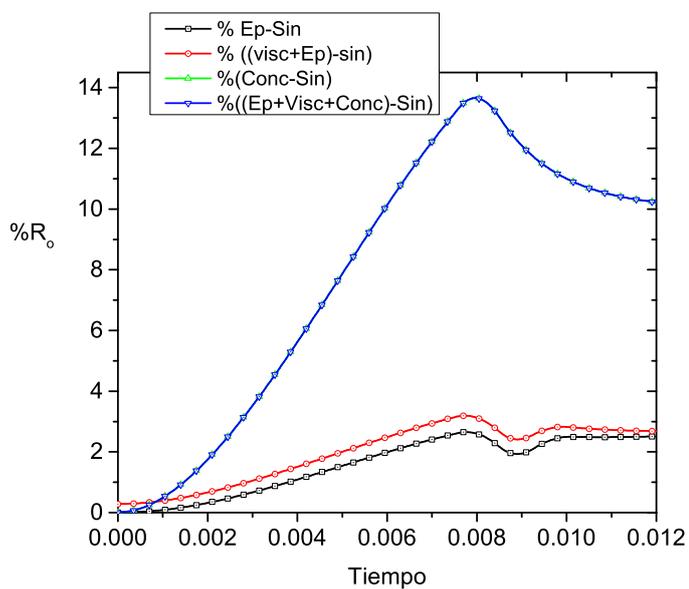
**Figura 5.21:** Perfiles para la Presión capilar con  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.001$



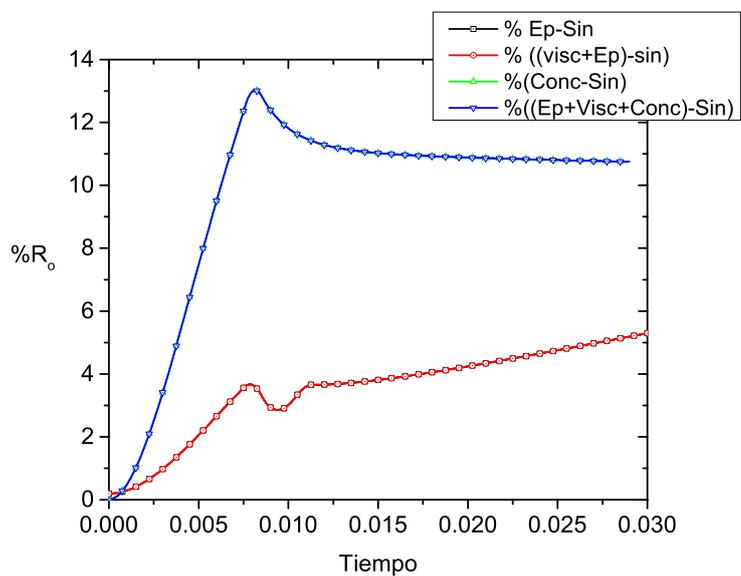
**Figura 5.22:** Perfiles para la Presión capilar con  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$



**Figura 5.23:** Perfiles para la Saturación del agua con  $Om = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ ,  $Pe = 10^4, 10^7$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$



**Figura 5.24:** Curvas de porcentajes de petróleo recuperado para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.001$



**Figura 5.25:** Curvas de porcentajes de petróleo recuperado para  $Om = 10^{-4}$ ,  $Pe = 10^4$ ,  $\eta = 1$  y  $q = 0.002$

## Capítulo 6

# Conclusiones

La modelación de procesos en yacimientos petroleros es una herramienta muy útil para complementar la recuperación de los hidrocarburos en un medio poroso. Por ello, en este trabajo se obtuvo un modelo numérico adimensional que permite prever el desplazamiento del petróleo debido a la inyección de agua caliente y de un surfactante.

Derivado del análisis de órdenes de magnitud, se observó que el desplazamiento del aceite está regido principalmente por la velocidad del flujo, un proceso que puede durar meses o años, dependiendo de las características propias del yacimiento. Para el caso del yacimiento que se modela (ver apéndice A, para conocer valores de entrada) es un proceso que dura aproximadamente tres años. En cambio el proceso difusivo es muy lento, capaz de durar miles de años.

Del modelo obtenido, se concluye que cuando las viscosidades se ven afectadas por efectos de la temperatura, el proceso de recuperación se vuelve más rápido, en nuestro caso, fue de hasta dos y tres órdenes de magnitud comparado con el caso donde no existe flujo de calor.

Se concluye que cuando los puntos de saturación de agua residual son modificados por la temperatura, existe mayor recuperación de la cantidad de petróleo. Pues en los casos donde no había dependencia de los puntos de saturación de agua residual con la temperatura, el perfil de saturación de agua, debido a las condiciones propuestas, sube hasta 0.8 mientras que al hacer la dependencia con la temperatura alcanza un valor máximo de 0.9.

El efecto del surfactante en los puntos de saturación de agua residual ayuda a recuperar más petróleo, que cuando solo dependen de efectos térmicos. Sin embargo, existe una cierta pérdida durante la inyección, debido a los procesos de degradación del surfactante.

En los perfiles obtenidos del proceso de presión constante, se observa que el surfactante reduce la presión capilar y ayuda a romper la presión umbral más fácilmente. Por su parte, la presión del petróleo cambia muy lentamente debido al cambio en la movilidad.

Cuando se presentan efectos térmicos tanto en la viscosidad como en los puntos de saturación de agua residual los efectos mencionados anteriormente se suman, pues se recupera mayor cantidad de petróleo en menor tiempo comparando con solo empuje de agua.

Los efectos al variar los parámetros físicos del problema también muestran diferencias en la estructura de las curvas, para cada caso tratado. Cuando se

modifica la presión de salida, se tiene para un valor de  $q = 0.001$  el perfil de saturación de agua presenta una caída más lenta que para  $q = 0.002$  donde el paso de presión es mayor.

El exponente de la movilidad  $\eta$  juega un papel muy importante en la forma de las curvas de saturación y presión capilar.

Cuando se varía el parámetro  $\Omega$ , que entre otros parámetros contiene el valor de la permeabilidad y longitud del pozo, se observa que la temperatura entra con una velocidad menor cuando el valor de  $\Omega$  es menor, es decir, es menos permeable; sin embargo, el calentamiento es más homogéneo. Lo cual es denotado en la presión capilar que disminuye casi a la mitad cuando el calentamiento es más lento.

La variación en el número de Péclet implica un cambio en el coeficiente de difusividad térmica, esto ocurre cuando los puntos de saturación de agua residual dependen de la temperatura y se introducen los efectos de la concentración. La difusión, es un proceso muy lento, como se observó en el análisis de órdenes de magnitud y sus efectos son más perceptibles en el perfil de saturación de agua. Entre mayor sea el número de Péclet, el proceso de saturación de agua es más lento.

Se tiene un sistema de evaluación de yacimientos rápido, que introduce varios de los parámetros físicos esenciales para la toma de decisiones para procesos de recuperación mejorada a distintas escalas.

# Apéndice A

## Variables empleadas

### A.1. Valores numéricos empleados

Se presentan los valores numéricos empleados para el código:

NOMBRE	VALOR
Número de nodos(mi)	1000
Diferencial de tiempo (dt)	$1 * 10^{-8}$
Tamaño de celda (dx)	$10^{-3}$
Número de Péclet (Pe)	$10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$
Factor de la saturación ( $\Omega$ )	$10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$
Número de Lewis (Le)	0.14
Longitud del pozo (L)	300
Saturación de agua conata	0.3
Saturación inicial de agua	0.3
Saturación inicial de petróleo	0.09
Porosidad ( $\phi$ )	0.3
Permeabilidad Absoluta(k)	$10^{-11}$
Movilidad de referencia ( $\lambda_{watr}$ )	$10^3$
Presión de umbral ( $P_u$ )	0.1
Gradiente de Presión( $\Delta P$ )	$10^5$
Viscosidad del agua ( $\mu_w$ )	0.001
Viscosidad del petróleo ( $\mu_w$ )	0.0015

NOMBRE	VALOR
Exponente de la presión capilar ( $nb$ )	0.8 cite chap2
Exponente de la movilidad ( $\eta$ )	1 y 4 [27] y [28]
Movilidad de referencia $lambda_r$	1000
Factor de decaimiento de la concentración ( $\Upsilon$ )	$10^{-4}$
Conductividad térmica del agua ( $\kappa_w$ )	0.6
Conductividad térmica del aceite ( $\kappa_w$ )	0.15
Conductividad térmica del agua ( $\kappa_w$ )	1.69
Densidad del agua ( $\rho_w$ )	990.74
Densidad del aceite ( $\rho_w$ )	949.25
Densidad de la roca ( $\rho_w$ )	2874.62
Capacidad calorífica del agua ( $Cp_w$ )	4182.0
Capacidad calorífica del aceite ( $Cp_0$ )	2000.0
Capacidad calorífica de la roca ( $Cp_r$ )	4000.00
Coefficiente de difusividad térmica del agua ( $\alpha_w$ )	$10^{-7}$
Coefficiente de difusividad térmica del aceite ( $\alpha_w$ )	$10^{-8}$
Coefficiente de difusividad térmica de la roca ( $\alpha_w$ )	$10^{-7}$
Difusividad másica ( $D_{mas}$ )	$10^{-6}$

Cuadro A.1: Tabla de valores de entrada.

## Apéndice B

# Deducción de las ecuaciones empleadas

### B.1. Presión-Saturación

Se ha utilizado una formulación de presión de fase y saturación:

De la ecuación de balance de masa para sistemas multifásicos, y siendo la masa la propiedad extensiva, sabemos que la propiedad intensiva esta dada como  $\psi = \phi S_\alpha \rho_\alpha$ .

Si además sustituímos la ley de Darcy:

$$u_\alpha = -\bar{\lambda}_\alpha K (\nabla P_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z) \quad (\text{B.1})$$

con  $K$  la permeabilidad intrínseca.

Obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \phi S_\alpha \rho_\alpha}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_\alpha \bar{\lambda}_\alpha K (\nabla P_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z)) = g_\alpha$$

Además de las ecuaciones constitutivas:

$$S_w + S_o = 1 \quad (\text{B.2})$$

$$P_c = P_o - P_w \quad (\text{B.3})$$

$$P_w = P_o - P_c \quad (\text{B.4})$$

Obtenemos las respectivas ecuaciones para la fase agua ( $w$ ) y petróleo ( $o$ ):

$$\frac{\partial \phi S_w \rho_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_w \bar{\lambda}_w K (\nabla P_w - \rho_w g \nabla z)) = g_w \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial \phi S_o \rho_o}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_o \bar{\lambda}_o K (\nabla P_o - \rho_o g \nabla z)) = g_o \quad (\text{B.6})$$

de las ecuaciones constitutivas tenemos:

$$P_w = P_o - P_c \quad (\text{B.7})$$

Entonces con la ecuación:

$$\frac{\partial \phi S_w \rho_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_w \bar{\lambda}_w K (\nabla P_o - \nabla P_c - \rho_w g \nabla z)) = g_w$$

Sea:

$$\phi = cte$$

$$\rho_o, \rho_w = cte$$

$$g = 0$$

y reescribimos las ecuaciones de ambas fases como:

$$\phi \frac{\partial S_w \rho_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_w \bar{\lambda}_w K (\nabla P_o - \nabla P_c)) = g_w$$

$$\phi \frac{\partial S_o \rho_o}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_o \bar{\lambda}_o K (\nabla P_o)) = g_o$$

Se obtiene la ecuación para la saturación del agua y del aceite en una dimensión, y suponiendo que no existen fuentes ni sumideros entonces simplificamos las ecuaciones anteriores como:

$$\phi \frac{\partial S_w \rho_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_w \bar{\lambda}_w K \left( \frac{\partial}{\partial x} P_o - \frac{\partial}{\partial x} P_c \right) \right) = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\phi \frac{\partial S_o \rho_o}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_o \bar{\lambda}_o K \left( \frac{\partial}{\partial x} P_o \right) \right) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Como la densidad es considerada constante podemos simplificar aun más:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_w K \left( \frac{\partial}{\partial x} P_o - \frac{\partial}{\partial x} P_c \right) \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\phi \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_o K \left( \frac{\partial}{\partial x} P_o \right) \right) = 0$$

las sumamos

$$v \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \phi \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_w K \left( \frac{\partial}{\partial x} P_o - \frac{\partial}{\partial x} P_c \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_o K \left( \frac{\partial}{\partial x} P_o \right) \right) = 0$$

$$-K \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_w \frac{\partial}{\partial x} P_o \right) + K \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_w \frac{\partial}{\partial x} P_c \right) - K \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_o \frac{\partial}{\partial x} P_o \right) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_w \frac{\partial}{\partial x} P_o + \bar{\lambda}_o \frac{\partial}{\partial x} P_o \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_w \frac{\partial}{\partial x} P_c \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_w \frac{\partial}{\partial x} P_o + \bar{\lambda}_o \frac{\partial}{\partial x} P_o \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\lambda}_w \frac{\partial}{\partial x} P_c \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (\bar{\lambda}_w + \bar{\lambda}_o) \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) = \left( \bar{\lambda}_w \frac{\partial^2 P_c}{\partial x^2} \right)$$

y sea

$$\bar{\lambda}_T = \bar{\lambda}_w + \bar{\lambda}_o \quad (\text{B.11})$$

De donde se obtiene la ecuación para la presión del aceite:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (\bar{\lambda}_T) \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) = \bar{\lambda}_w \frac{\partial^2 P_c}{\partial x^2} \quad (\text{B.12})$$

Así obtenemos las ecuaciones B.10 y B.12, que en forma vectorial se escriben como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\bar{\lambda}_w K (\nabla (P_o - P_c))) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\nabla \cdot [(\bar{\lambda}_T) (\nabla P_o) + \bar{\lambda}_w (\nabla P_c)] = 0 \quad (\text{B.14})$$

## B.2. Temperatura

En un medio poroso tenemos la temperatura de la roca ( $s$ ) y de la fase fluida que incluye agua ( $w$ ) y petróleo ( $o$ ). Entonces de acuerdo a la ecuación de balance de energía:

$$\begin{aligned} \rho_o C p_o \left( \frac{\partial (\phi T_o)}{\partial t} + \phi \vec{u}_{r,o} \cdot \nabla T_o \right) &= \nabla \cdot (\phi \kappa_o \nabla T_o) \\ \vec{x} &\in \text{Volumen ocupado por el aceite} \\ \rho_w C p_w \left( \frac{\partial (\phi T_w)}{\partial t} + \phi \vec{u}_{r,w} \cdot \nabla T_w \right) &= \nabla \cdot (\phi \kappa_w \nabla T_w) \\ \vec{x} &\in \text{Volumen ocupado por el agua} \end{aligned}$$

Y para el sólido o roca:

$$\begin{aligned} \rho_s C p_r \frac{\partial ((1 - \phi) T_s)}{\partial t} &= \nabla \cdot ((1 - \phi) \kappa_s \nabla T_s) \\ \vec{x} &\in \text{Volumen del sólido} \end{aligned}$$

Suponiendo que los fluidos y el sólido están en equilibrio térmico local para cada volumen de control:

$$T = T_s = T_o = T_w$$

Sumando las ecuaciones de energía en cada fase:

$$\begin{aligned} & \rho_o C p_o \left( \frac{\partial(\phi S_o T)}{\partial \bar{t}} + \phi \vec{u}_o \cdot \nabla T \right) + \\ & \rho_w C p_w \left( \frac{\partial(\phi S_w T)}{\partial \bar{t}} + \phi \vec{u}_w \cdot \nabla T \right) + \\ \rho_s C p_r \frac{\partial((1-\phi) T)}{\partial \bar{t}} &= \nabla \cdot (\phi \kappa_o S_o \nabla T) + \nabla \cdot (\phi S_w \kappa_w \nabla T) + \nabla \cdot ((1-\phi) \kappa_s \nabla T) \end{aligned}$$

Suponiendo que  $k_o$ ,  $k_w$  y  $k_s$  son constantes:

$$\begin{aligned} & \rho_o C p_o \left( \frac{\partial(\phi S_o T)}{\partial \bar{t}} + \phi \vec{u}_o \cdot \nabla T \right) + \\ & \rho_w C p_w \left( \frac{\partial(\phi S_w T)}{\partial \bar{t}} + \phi \vec{u}_w \cdot \nabla T \right) + \\ \rho_s C p_r \frac{\partial((1-\phi) T)}{\partial \bar{t}} &= \nabla \cdot (\phi \kappa_o S_o \nabla T) \\ & \quad + \nabla \cdot (\phi S_w \kappa_w \nabla T) + \nabla \cdot ((1-\phi) \kappa_s \nabla T) \\ \\ & \rho_o C p_o \frac{\partial(\phi S_o T)}{\partial \bar{t}} + \rho_w C p_w \frac{\partial(\phi S_w T)}{\partial \bar{t}} + \\ & \rho_s C p_r \frac{\partial((1-\phi) T)}{\partial \bar{t}} + \\ (\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \cdot \nabla T &= (\phi S_o \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1-\phi) \kappa_s) \nabla^2 T \end{aligned}$$

Se considera  $\rho_o$ ,  $C p_o$ ,  $\rho_w$ ,  $C p_w$ ,  $\rho_s$ ,  $C p_r$  como constantes:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_o C p_o \phi S_o T)}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\rho_w C p_w \phi S_w T)}{\partial \bar{t}} + \\ & \frac{\partial(\rho_s C p_r (1-\phi) T)}{\partial \bar{t}} + \\ (\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \cdot \nabla T &= (\phi S_o \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1-\phi) \kappa_s) \nabla^2 T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_s C p_r (1-\phi) T + \rho_w C p_w \phi S_w T + \rho_o C p_o \phi S_o T)}{\partial \bar{t}} + \\ (\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \cdot \nabla T &= (\phi S_o \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1-\phi) \kappa_s) \nabla^2 T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[(\rho_s C p_r (1-\phi) + \rho_w C p_w \phi S_w + \rho_o C p_o \phi S_o) T]}{\partial \bar{t}} + \\ (\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \cdot \nabla T &= (\phi S_o \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1-\phi) \kappa_s) \nabla^2 T \end{aligned}$$

Donde:

$$S_o = 1 - S_w \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} & (\rho_s C p_r (1 - \phi) + \rho_w C p_w \phi S_w + \rho_o C p_o \phi (1 - S_w)) \frac{\partial T}{\partial t} + \quad (\text{B.16}) \\ & (\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \cdot \nabla T \\ = & (\phi (1 - S_w) \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1 - \phi) \kappa_s) \nabla^2 T \end{aligned}$$

que se reescribe como:

$$\hat{A} \frac{\partial T}{\partial t} + \hat{B} \cdot \nabla T = \hat{C} \nabla^2 T \quad (\text{B.17})$$

donde

$$\hat{A} = (\rho_s C p_r (1 - \phi) + \rho_w C p_w \phi S_w + \rho_o C p_o \phi (1 - S_w)) \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{B} = (\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \quad (\text{B.19})$$

$$\hat{C} = (\phi (1 - S_w) \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1 - \phi) \kappa_s) \quad (\text{B.20})$$



## Apéndice C

# Adimensionalización de las ecuaciones

Se presenta el procedimiento realizado para la adimensionalización de las ecuaciones:

### C.1. Adimensionalización para la ecuación de la presión del aceite

De la ecuación para la presión:

$$\nabla \cdot (k\bar{\lambda}(S_w)\nabla P_o - k\bar{\lambda}_w(S_w)\nabla P_c) = 0$$

En una dimensión se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} P_o - k\bar{\lambda}_w \frac{\partial}{\partial \bar{x}} P_c \right) = 0$$

Proponga el siguiente cambio de variable:

$$\Psi_o = \frac{P_o - P_0}{P_\infty - P_0}, \Psi_c = \frac{P_c - P_0}{P_\infty - P_0}, \lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_r}, \lambda_w = \frac{\bar{\lambda}_w}{\lambda_r}, x = \frac{\bar{x}}{L}, t = \frac{\bar{t}}{\tau}$$

de manera que

$$\begin{aligned} P_o &= \Psi_o (P_\infty - P_0) + P_0 \\ P_c &= \Psi_c (P_\infty - P_0) + P_0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( k\lambda\lambda_r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Psi_o (P_\infty - P_0) + P_0) - k\lambda_w\lambda_r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Psi_c (P_\infty - P_0) + P_0) \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k \lambda \lambda_r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Psi_o P_\infty) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k \lambda \lambda_r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Psi_o P_0) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k \lambda \lambda_r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (P_0) \\
& - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k \lambda_w \lambda_r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Psi_c P_\infty) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k \lambda_w \lambda_r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\Psi_c P_0) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k \lambda_w \lambda_r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (P_0) \\
= & 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k \lambda_r P_\infty}{L} \right) \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_o) - \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k \lambda_r P_0}{L} \right) \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_o) \\
& - \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k \lambda_r P_\infty}{L} \right) \lambda_w \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_c) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k \lambda_r P_0}{L} \right) \lambda_w \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_c) \\
= & 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{\tau k \lambda_r P_\infty}{L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial}{\partial x} \Psi_o - \left( -\frac{\tau k \lambda_r P_0}{L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial}{\partial x} \Psi_o \\
& \left( -\frac{\tau k \lambda_r P_\infty}{L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \lambda_w \frac{\partial}{\partial x} \Psi_c - \left( -\frac{\tau k \lambda_r P_0}{L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \lambda_w \frac{\partial}{\partial x} \Psi_c \\
= & 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\tau k \lambda_r}{L^2} (P_0 - P_\infty) \\
[M] &= \left[ \frac{s \cdot m^2 \cdot \frac{m \cdot s}{Kg} \cdot \frac{Kg}{m \cdot s^2}}{m^2} \right] = \left[ \frac{s}{s} \right] = [1]
\end{aligned}$$

$$M \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial}{\partial x} \Psi_o - M \frac{\partial}{\partial x} \lambda_w \frac{\partial}{\partial x} \Psi_c = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial x} \Psi_o \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w \frac{\partial}{\partial x} \Psi_c \right) \quad (C.1)$$

## C.2. Adimensionalización para la ecuación de la saturación del agua

De las ecuaciones obtenidas en la deducción del apéndice anterior:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \nabla \cdot K \bar{\lambda}_w(S_w) (\nabla P_o + \nabla P_c)$$

se tiene a la ecuación para la saturación en una dimensión:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( K \bar{\lambda}_w(S_w) \left( \frac{\partial P_o}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial P_c}{\partial \bar{x}} \right) \right) \quad (C.2)$$

### C.3. ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA TEMPERATURA 91

con los siguientes cambios de variable:

$$\Psi_o = \frac{P_o - P_0}{P_\infty - P_0}, \Psi_c = \frac{P_c - P_0}{P_\infty - P_0}, \lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_r}, \lambda_w = \frac{\bar{\lambda}_w}{\lambda_r}, x = \frac{\bar{x}}{L}, t = \frac{\bar{t}}{\tau}, \lambda_r = \frac{1}{\mu_r}$$

$$\frac{\phi}{\tau} \frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{K\lambda_w}{L^2} (P_\infty - P_0) \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w(S_w) \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} + \lambda_w(S_w) \frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \right)$$

sea

$$(P_\infty - P_0) = \Delta P$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{\tau K \lambda_r \Delta P}{\phi L^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w(S_w) \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} + \lambda_w(S_w) \frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \right)$$

$$\Omega = \frac{\tau K \lambda_r \Delta P}{\phi L^2} = \frac{\tau K \Delta P}{\phi \mu_r L^2} \quad (C.3)$$

Se obtiene la ecuación adimensional:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} + \lambda_w \frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \right) \quad (C.4)$$

### C.3. Adimensionalización de la ecuación de la temperatura

De las ecuaciones B.17 a B.20 obtenidas anteriormente para la temperatura se tiene:

$$(\rho_s C p_r (1 - \phi) + \rho_w C p_w \phi S_w + \rho_o C p_o \phi (1 - S_w)) \frac{\partial T}{\partial t} +$$

$$(\phi \vec{u}_o \rho_o C p_o + \phi \vec{u}_w \rho_w C p_w) \cdot \nabla T =$$

$$(\phi (1 - S_w) \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1 - \phi) \kappa_s) \nabla^2 T$$

que en una dimensión se escribe como

$$(\rho_s C p_r (1 - \phi) + \rho_w C p_w \phi S_w + \rho_o C p_o \phi (1 - S_w)) \frac{\partial T}{\partial t} +$$

$$(\phi \bar{u}_o \rho_o C p_o + \phi \bar{u}_w \rho_w C p_w) \frac{\partial T}{\partial x} =$$

$$(\phi (1 - S_w) \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1 - \phi) \kappa_s) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Entonces, al realizar los siguientes cambios de variable y sustituyéndolo en la ecuación anterior se tiene que:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}, t = \frac{\bar{t}}{\tau}, u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta T \rho_w C p_w}{\tau} \left( \frac{\rho_s C p_r}{\rho_w C p_w} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} \phi (1 - S_w) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\ & \frac{\phi \rho_w C p_w U_\infty \Delta T}{L} \left( u_o \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} + u_w \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ = & \frac{\Delta T \kappa_w}{L^2} \left( \phi (1 - S_w) \frac{\kappa_o}{\kappa_w} + \phi S_w + (1 - \phi) \frac{\kappa_s}{\kappa_w} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta T \rho_w C p_w L}{\tau \phi \rho_w C p_w U_\infty \Delta T} \left( \frac{\rho_s C p_r}{\rho_w C p_w} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} \phi (1 - S_w) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\ & \left( u_o \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} + u_w \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ = & \frac{\Delta T \kappa_w L}{L^2 \phi \rho_w C p_w U_\infty \Delta T} \left( \phi (1 - S_w) \frac{\kappa_o}{\kappa_w} + \phi S_w + (1 - \phi) \frac{\kappa_s}{\kappa_w} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

definiendo  $\tau = \frac{U_{infly}}{L}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\phi} \left( \frac{\rho_s C p_r}{\rho_w C p_w} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} \phi (1 - S_w) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( u_o \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} + u_w \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ = & \frac{\kappa_w}{L \phi \rho_w C p_w U_\infty} \left( \phi (1 - S_w) \frac{\kappa_o}{\kappa_w} + \phi S_w + (1 - \phi) \frac{\kappa_s}{\kappa_w} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Donde se define el número de Péclet como el producto del número de Reynolds por Prandtl:

$$Pe = Re \cdot Pr \quad (C.5)$$

$$Re = \frac{ul}{v} = \frac{ul\rho}{\mu} \quad (C.6)$$

$$Pr = \frac{v}{\alpha} \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mu}{\rho} \\ \alpha_i &= \frac{\kappa_i}{\rho_i c_i} \end{aligned}$$

$$Pe = \frac{L \rho_w C p_w U_\infty}{\kappa_w}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\phi} \left( \frac{\rho_s C p_r}{\rho_w C p_w} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} \phi (1 - S_w) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( u_o \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} + u_w \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ = & \frac{1}{\phi P e} \left( \phi (1 - S_w) \frac{\kappa_o}{\kappa_w} + \phi S_w + (1 - \phi) \frac{\kappa_s}{\kappa_w} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho_s C p_r}{\rho_w C p_w} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} \phi (1 - S_w) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \phi \left( u_o \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} + u_w \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ = & \frac{1}{P e_w} \left( \phi (1 - S_w) \frac{\kappa_o}{\kappa_w} + \phi S_w + (1 - \phi) \frac{\kappa_s}{\kappa_w} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Entonces se define la velocidad del flujo como:

$$u_m = \frac{\phi \left( u_o \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} + u_w \right)}{\left( \frac{\rho_s C p_r}{\rho_w C p_w} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} \phi (1 - S_w) \right)} \quad (C.8)$$

donde definimos la velocidad del aceite como:

$$\begin{aligned} u_o &= -\lambda_o \bar{k} \nabla P_o \\ \lambda_o &= \frac{k_{ro}}{\mu} \end{aligned}$$

y adimensional queda como:

$$u_o = - \left( \frac{k P_{o\infty}}{L} \right) \lambda_o \nabla \Psi_o \quad (C.9)$$

análogamente para la velocidad del agua:

$$u_w = - \left( \frac{k P_{o\infty}}{L} \right) \lambda_w \nabla \Psi_w \quad (C.10)$$

Y para simplificar la ecuación definamos el siguiente coeficiente:

$$D_m = \frac{\left( \phi (1 - S_w) \frac{\kappa_o}{\kappa_w} + \phi S_w + (1 - \phi) \frac{\kappa_s}{\kappa_w} \right)}{\left( \frac{\rho_s C p_r}{\rho_w C p_w} (1 - \phi) + \phi S_w + \frac{\rho_o C p_o}{\rho_w C p_w} \phi (1 - S_w) \right)} \quad (C.11)$$

Entonces podemos reescribir la ecuación de la conservación de energía como sigue:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_m \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{D_m}{P e_w} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (C.12)$$

### C.4. Adimensionalización de la ecuación de la concentración

De la ecuación de transporte de solutos en un medio poroso propuesta en [3], con porosidad constante:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{u} \cdot \nabla C + \phi \nabla \cdot (D_{mas} \nabla C) - \Upsilon C$$

y sean:

$$D_{mas} = cte$$

$$\varsigma = \frac{C - C_0}{C_\infty - C_0}, t = \frac{\bar{t}}{\tau}, u = \frac{\bar{u}}{u_0}, x = \frac{\bar{x}}{L}$$

donde  $\Upsilon C$  es una primera aproximación a un proceso de pérdida del surfactante, por ejemplo, por adsorción.

Entonces adimensionalizando se tiene:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial C}{\partial \bar{t}} &= -\bar{u} \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( D_{mas} \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} \right) - \Upsilon C \\ \left( \frac{\phi}{\tau} \right) \frac{\partial \varsigma}{\partial t} &= - \left( \frac{u_0}{L} \right) u \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + \left( \phi \frac{D_{mas}}{L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varsigma}{\partial x} - \Upsilon \varsigma \\ \frac{\partial \varsigma}{\partial t} &= - \left( \tau \frac{u_0}{\phi L} \right) u \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + \left( \tau \frac{D_{mas}}{\phi L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varsigma}{\partial x} - \frac{\tau \Upsilon \varsigma}{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\tau u_0}{\phi L} \\ P &= \left[ \frac{s \cdot \frac{m}{s}}{m} \right] = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} = -u \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + \left( \frac{\tau D_{mas}}{\phi L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varsigma}{\partial x} - \frac{\tau \Upsilon \varsigma}{\phi}$$

y sea

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\tau}{L^2} D_{mas} \\ Q &= \left[ \frac{s \cdot \frac{m^2}{s}}{m^2} \right] = 1 \end{aligned}$$

Donde se considera como un término fuente a la siguiente expresión:

$$\Upsilon' = \frac{\tau \Upsilon \varsigma}{\phi}$$

Entonces reescribimos como

C.4. ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA CONCENTRACIÓN 95

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + Q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \Upsilon' \quad (\text{C.13})$$

donde  $Q$  puede ser expresado como:

$$Q = \frac{1}{PeLe}$$

pues recordemos que:

$$Pe = \frac{u}{l\alpha}$$

$$D_{mas} = \frac{\alpha}{Le}$$

$$\alpha = \frac{k_{term}}{\rho C_p}$$

$$t = \frac{u}{l}$$



## Apéndice D

# Discretización de las ecuaciones

### D.1. Discretización para la ecuación de la Presión con el método de diferencias finitas

De la ecuación para la presión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (\lambda T) \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w \frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \right) \quad (\text{D.1})$$

definimos la aproximación con cinco puntos, tomada del trabajo realizado por Ledesma, A. C., & Bernal, O. M. en [22], para la segunda derivada con mayor precisión, como:

$$\lambda_T \frac{\partial^2 \Psi_o}{\partial x^2} = -a_0 \lambda_{T_{i+2}} \frac{\Psi_{oi+2}}{\Delta x^2} + a_1 \lambda_{T_{i+1}} \frac{\Psi_{oi+1}}{\Delta x^2} - 2a_2 \lambda_{T_i} \frac{\Psi_{oi}}{\Delta x^2} + a_3 \lambda_{T_{i-1}} \frac{\Psi_{oi-1}}{\Delta x^2} - a_4 \lambda_{T_{i-2}} \frac{\Psi_{oi-2}}{\Delta x^2}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{12}; a_1 = \frac{4}{3}; a_2 = \frac{15}{6}; a_3 = \frac{4}{3}; a_4 = \frac{1}{12}$$

y considere la presión capilar como un término fuente de la ecuación, de manera que:

$$Q(x) = \lambda_w \frac{\partial^2 \Psi_c}{\partial x^2}$$

entonces la ecuación queda discretizada como:

$$-a_0 \lambda_{T_{i+2}} \frac{\Psi_{ci+2}}{\Delta x^2} + a_1 \lambda_{T_{i+1}} \frac{\Psi_{ci+1}}{\Delta x^2} - 2a_2 \lambda_{T_i} \frac{\Psi_{ci}}{\Delta x^2} + a_3 \lambda_{T_{i-1}} \frac{\Psi_{ci-1}}{\Delta x^2} - a_4 \lambda_{T_{i-2}} \frac{\Psi_{ci-2}}{\Delta x^2} = Q(x) \quad (\text{D.2})$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

a) Nodo 1, Dirichlet =2:

$$\theta_i[1] = 2 \quad (\text{D.3})$$

b) Nudo  $m_i$  Neumann= $P_s$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{b_0 \theta_{i+1} - b_1 \theta_i + b_2 \theta_{i-1}}{\Delta x} = P_s \quad (\text{D.4})$$

donde  $P_s = 0.001$  ó  $0.002$

$$b_0 = \frac{3}{2}; b_1 = 2; b_2 = \frac{1}{2}$$

## D.2. Discretización para la ecuación de la Saturación con el método de Volúmen finito QUICK

De la ecuación para la saturación:

$$\frac{\partial S_{wat}}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{wat} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} \right) + \Omega \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{wat} \frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \right) \quad (\text{D.5})$$

$$\Omega = \frac{\tau K \lambda_{T0} \Delta P}{\phi L^2}$$

Utilizando la aproximación de Corey como se presenta en el capítulo dos del libro [26], uno de los modelos analíticos más conocidos, la presión capilar ( $\Psi_c$ ) se expresa como el producto de la presión umbral ( $P_u$ )<sup>1</sup> por la saturación efectiva ( $S_e$ ), de la siguiente manera:

$$\Psi_c = P_u S_e^{-\frac{1}{n_b}} \quad (\text{D.6})$$

donde para una primera aproximación se tomó  $n_b = 0.8^2$ , entonces se puede reescribir la ecuación D.5:

$$\frac{\partial S_{wat}}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{wat} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} + \Omega \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{wat} Q \quad (\text{D.7})$$

Donde  $Q$  está dada por la ecuación D.2.

Integramos respecto al control de volumen y al tiempo la ecuación adimensional:

$$\frac{\partial S_{wat}}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{wat} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} + \Omega \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{wat} \frac{\partial \Psi_c}{\partial x}$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \frac{\partial S_{wat}}{\partial t} dV dt = \Omega \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{wat} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{wat} \frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \right] dV dt$$

$$\int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial S_{wat}}{\partial t} dt \right] dV = \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left[ \begin{aligned} & (A_x \lambda_{Wat} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x})_e - (A_x \lambda_{Wat} \frac{\partial \Psi_o}{\partial x})_w \\ & + (A_x \lambda_{Wat} \frac{\partial \Psi_c}{\partial x})_e - (A_x \lambda_{Wat} \frac{\partial \Psi_c}{\partial x})_w \end{aligned} \right] dt$$

<sup>1</sup>Presión mínima necesaria para iniciar la movilidad del aceite

<sup>2</sup> $n_b$  es un parámetro relacionado con la distribución y tamaño del poro, generalmente va de 0.2 a 5. Un valor pequeño caracteriza un medio con una distribución no uniforme de poros.

## D.2. DISCRETIZACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LA SATURACIÓN CON EL MÉTODO DE VOLÚMEN FIN

Para el método de Quick cuando el flujo va de oeste a este se realiza la siguiente aproximación, utilizando los valores propuestos en [24]:

$$\begin{aligned}\Psi_w &= \frac{6}{8}\Psi_P + \frac{3}{8}\Psi_W - \frac{1}{8}\Psi_E \\ \Psi_e &= \frac{6}{8}\Psi_E + \frac{3}{8}\Psi_P - \frac{1}{8}\Psi_{EE}\end{aligned}$$

De manera que

$$\int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial S_{Wat}}{\partial t} dt \right] dV = \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left[ \begin{array}{c} A_{x_e} \lambda_{Wat_e} \left( \frac{6}{8}\Psi_E + \frac{3}{8}\Psi_P - \frac{1}{8}\Psi_{EE} \right) \\ -A_{x_w} \lambda_{Wat_w} \left( \frac{6}{8}\Psi_P + \frac{3}{8}\Psi_W - \frac{1}{8}\Psi_E \right) + Q \end{array} \right] dt$$

aquí

$$(S_{Wat} - S_{Wat}^0) \Delta V = \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left[ \begin{array}{c} A_{x_e} \lambda_{Wat_e} \left( \frac{6}{8}\Psi_E + \frac{3}{8}\Psi_P - \frac{1}{8}\Psi_{EE} \right) \\ -A_{x_w} \lambda_{Wat_w} \left( \frac{6}{8}\Psi_P + \frac{3}{8}\Psi_W - \frac{1}{8}\Psi_E \right) + Q \end{array} \right] dt$$

$$(S_{Wat} - S_{Wat}^0) \Delta V = \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \begin{array}{c} \frac{6}{8}A_{x_e} \lambda_{Wat_e} \Psi_E + \frac{3}{8}A_{x_e} \lambda_{Wat_e} \Psi_P \\ -\frac{1}{8}A_{x_e} \lambda_{Wat_e} \Psi_{EE} - \frac{6}{8}A_{x_w} \lambda_{Wat_w} \Psi_P \\ -\frac{3}{8}A_{x_w} \lambda_{Wat_w} \Psi_W + \frac{1}{8}A_{x_w} \lambda_{Wat_w} \Psi_E \end{array} \right) + Q \right] dt$$

$$(S_{Wat} - S_{Wat}^0) \Delta V = \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \begin{array}{c} \left( \frac{6}{8}A_{x_e} \lambda_{Wat_e} + \frac{1}{8}A_{x_w} \lambda_{Wat_w} \right) \Psi_E \\ + \left( \frac{3}{8}A_{x_e} - \frac{6}{8}A_{x_w} \left( \frac{\lambda_{Wat_e} + \lambda_{Wat_w}}{2} \right) \right) \Psi_P \\ - \left( \frac{1}{8}A_{x_e} \lambda_{Wat_e} \right) \Psi_{EE} - \left( \frac{3}{8}A_{x_w} \lambda_{Wat_w} \right) \Psi_W \end{array} \right) + Q \right] dt$$

$$(S_{Wat} - S_{Wat}^0) \Delta V = \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \begin{array}{c} \left( \frac{7}{8}A_x \lambda_{Wat_e} \right) \Psi_E - \left( \frac{3}{16}A_x (\lambda_{Wat_e} + \lambda_{Wat_w}) \right) \Psi_P \\ - \left( \frac{1}{8}A_x \lambda_{Wat_e} \right) \Psi_{EE} - \left( \frac{3}{8}A_x \lambda_{Wat_w} \right) \Psi_W \end{array} \right) + Q \right] dt$$

Para evaluar el lado derecho, de acuerdo a [24], utilizamos la siguiente ecuación:

$$I_\varphi = \int_t^{t+\Delta t} \varphi_P dt = [\Theta \varphi_P + (1 - \Theta) \varphi_P^0] \Delta t$$

Si la malla es equiespaciada:

$$\delta x_{PE} = \delta x_{WP} = \delta x = \Delta x$$

$$\begin{aligned}(S_{Wat} - S_{Wat}^0) \Delta V &= \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{7}{8}A_x \lambda_{Wat_e} \right) \Psi_E dt - \\ &\quad \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{3}{16}A_x (\lambda_{Wat_e} + \lambda_{Wat_w}) \right) \Psi_P dt - \\ &\quad \quad \quad \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{8}A_x \lambda_{Wat_e} \right) \Psi_{EE} dt + \\ &\quad \quad \quad \Omega \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{3}{8}A_{x_w} \lambda_{Wat_w} \right) \Psi_W dt + \Omega \int_t^{t+\Delta t} Q dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S_{Wat} - S_{Wat}^0) \Delta V &= \Omega \frac{7}{8} \lambda_{i+1}^{Wat} \frac{A_x}{\delta x} [\Theta \Psi_{oE} + (1 - \Theta) \Psi_{oE}^0] \Delta t \\
&\quad - \frac{3}{16} \Omega \frac{A_x}{\delta x} (\lambda_{i+1}^{Wat} + \lambda_{i-1}^{Wat}) [\Theta \Psi_{oP} + (1 - \Theta) \Psi_{oP}^0] \Delta t \\
&\quad - \Omega \frac{1}{8} \lambda_{i-1}^{Wat} \frac{A_x}{\delta x} [\Theta \Psi_{oEE} + (1 - \Theta) \Psi_{oEE}^0] \Delta t \\
&\quad + \Omega \frac{3}{8} \frac{A_x \lambda_{i+1}^{Wat}}{\Delta x} [\Theta \Psi_{oW} + (1 - \Theta) \Psi_{oW}^0] \Delta t + \Omega Q \Delta t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S_{Wat} - S_{Wat}^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \Omega \frac{7}{8} \lambda_{i+1}^{Wat} \frac{A_x}{\delta x} [\Theta \Psi_{oE} + (1 - \Theta) \Psi_{oE}^0] \\
&\quad - \frac{3}{16} \Omega \frac{A_x}{\delta x} (\lambda_{i+1}^{Wat} + \lambda_{i-1}^{Wat}) [\Theta \Psi_{oP} + (1 - \Theta) \Psi_{oP}^0] \\
&\quad - \Omega \frac{1}{8} \lambda_{i-1}^{Wat} \frac{A_x}{\delta x} [\Theta \Psi_{oEE} + (1 - \Theta) \Psi_{oEE}^0] \\
&\quad + \Omega \frac{3}{8} \frac{A_x \lambda_{i+1}^{Wat}}{\Delta x} [\Theta \Psi_{oW} + (1 - \Theta) \Psi_{oW}^0] + \Omega Q \Delta t
\end{aligned}$$

Para una dimensión se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \Delta x \\
A_x &= 1
\end{aligned}$$

Para el desarrollo explícito de la ecuación se emplea:

$$\Theta = 0 \tag{D.8}$$

de manera que:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{\Delta t} (S_{Wat} - S_{Wat}^0) &= \Omega \frac{7}{8} \lambda_{i+1}^{Wat} \frac{A_x}{\delta x} [\Psi_{oE}^0] - \frac{3}{16} \Omega \frac{A_x}{\delta x} (\lambda_{i+1}^{Wat} + \lambda_{i-1}^{Wat}) [\Psi_{oP}^0] \\
&\quad - \Omega \frac{1}{8} \lambda_{i-1}^{Wat} \frac{A_x}{\delta x} [\Psi_{oEE}^0] + \Omega \frac{3}{8} \frac{A_x \lambda_{i+1}^{Wat}}{\Delta x} [[\Psi_{oW}^0]] \\
&\quad + \Omega Q \Delta t
\end{aligned}$$

$$(S_{Wat} - S_{Wat}^0) = \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta x} \Omega \left[ \begin{array}{l} \frac{7}{8} \lambda_{i+1}^{Wat} [\Psi_{oE}^0] - \frac{3}{16} (\lambda_{i+1}^{Wat} + \lambda_{i-1}^{Wat}) [\Psi_{oP}^0] \\ -\frac{1}{8} \lambda_{i-1}^{Wat} [\Psi_{oEE}^0] + \frac{3}{8} \lambda_{i+1}^{Wat} [\Psi_{oW}^0] \end{array} \right] + \Omega Q \Delta t$$

$$S_{Wat} = \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta x} \Omega \left[ \begin{array}{l} \frac{7}{8} \lambda_{i+1}^{Wat} [\Psi_{oE}^0] - \frac{3}{16} (\lambda_{i+1}^{Wat} + \lambda_{i-1}^{Wat}) [\Psi_{oP}^0] \\ -\frac{1}{8} \lambda_{i-1}^{Wat} [\Psi_{oEE}^0] + \frac{3}{8} \lambda_{i+1}^{Wat} [\Psi_{oW}^0] \end{array} \right] + \Omega Q \Delta t + S_{Wat}^0 \tag{D.9}$$

### D.3. DISCRETIZACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LA TEMPERATURA CON EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Con las siguientes condiciones de frontera:

a) Nodo 1, Dirichlet =0.8:

$$S_{wat}[1] = 0.8 \quad (D.10)$$

b) Nodo  $m_i$ ,  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \approx \frac{a_0 \theta_i - a_1 \theta_{i-1} + a_2 \theta_{i-2} + a_3 \theta_{i-2}}{\Delta x^2} = 0 \quad (D.11)$$

$$a_0 = 2; a_1 = 5; a_2 = 4; a_3 = 1$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

a) Nodo 1, Dirichlet =0.8:

$$S_{wat}[1] = 0.8 \quad (D.12)$$

b) Nodo  $m_i$ ,  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \approx \frac{a_0 \theta_i - a_1 \theta_{i-1} + a_2 \theta_{i-2} + a_3 \theta_{i-2}}{\Delta x^2} = 0 \quad (D.13)$$

$$a_0 = 2; a_1 = 5; a_2 = 4; a_3 = 1$$

### D.3. Discretización para la ecuación de la temperatura con el método de diferencias finitas

Sea:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (D.14)$$

donde:

$$D = \frac{D_m}{Pe_w} \quad (D.15)$$

Entonces aproximamos como:

$$\theta - \theta^{n-1} + u \Delta t \frac{\partial \theta}{\partial x} - D \Delta t \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$$\theta + u \Delta t \frac{\partial \theta}{\partial x} - D \Delta t \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \theta^{n-1}$$

De acuerdo a [23] pag. 704 utilizando cinco puntos para la aproximación de la primera y la segunda derivada cargadas a la izquierda se obtiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-C p_o \theta_{i-2} + c_1 \theta_{i-1} - c_2 \theta_i + c_3 \theta_{i+1} - c_4 \theta_{i+2}}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{d_o \theta_{i-2} - d_1 \theta_{i-1} + d_2 \theta_i - d_3 \theta_{i+1} + d_4 \theta_{i+2}}{\Delta x^2} \\
\theta_i + u \Delta t &\left[ \frac{-C p_o \theta_{i-2} + c_1 \theta_{i-1} - c_2 \theta_i + c_3 \theta_{i+1} - c_4 \theta_{i+2}}{\Delta x} \right] - \\
D \Delta t &\left[ \frac{d_o \theta_{i-2} - d_1 \theta_{i-1} + d_2 \theta_i - d_3 \theta_{i+1} + d_4 \theta_{i+2}}{\Delta x^2} \right] \\
&= \theta^{n-1} \\
\theta_i + &\left[ -C p_o \frac{u \Delta t}{\Delta x} \theta_{i-2} + c_1 \frac{u \Delta t}{\Delta x} \theta_{i-1} - c_2 \frac{u \Delta t}{\Delta x} \theta_i + c_3 \frac{u \Delta t}{\Delta x} \theta_{i+1} - c_4 \frac{u \Delta t}{\Delta x} \theta_{i+2} \right] + \\
&\left[ -d_o \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \theta_{i-2} + d_1 \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \theta_{i-1} - d_2 \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \theta_i + d_3 \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \theta_{i+1} - d_4 \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \theta_{i+2} \right] \\
&= \theta^{n-1} \\
&\theta_i \left[ 1 - c_2 \frac{u \Delta t}{\Delta x} - d_2 \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right] \\
&+ \theta_{i-2} \left[ -C p_o \frac{u \Delta t}{\Delta x} - d_o \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right] \\
&+ \theta_{i-1} \left[ c_1 \frac{u \Delta t}{\Delta x} + d_1 \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right] \\
&+ \theta_{i+1} \left[ c_3 \frac{u \Delta t}{\Delta x} + d_3 \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right] \\
&+ \theta_{i+2} \left[ -c_4 \frac{u \Delta t}{\Delta x} - d_4 \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right] \\
&+ = \theta^{n-1}
\end{aligned} \tag{D.16}$$

con los siguientes valores de coeficientes:

$$C p_o = \frac{25}{12}; c_1 = 4; c_2 = 3; c_3 = \frac{4}{3}; c_4 = \frac{1}{4} \tag{D.17}$$

$$d_o = \frac{35}{12}; d_1 = \frac{26}{3}; d_2 = \frac{19}{2}; d_3 = \frac{14}{3}; d_4 = \frac{11}{12} \tag{D.18}$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

a) Nodo 1, Dirichlet =1:

$$\theta_1[1] = 1 \tag{D.19}$$

b) Nodo  $m_i$  Neumann=0:

$$\theta_{m_i}[1] + \theta_{m_i-1}[-1] = 0 \tag{D.20}$$

Dicha discretización genera una matriz pentadiagonal por lo que los nodos 2 y  $m_i-1$  tienen un tratamiento especial para enlazar la condición de frontera con el resto de los nodos, se tiene

#### D.4. DISCRETIZACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LA CONCENTRACIÓN CON EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

entonces la siguiente aproximación:

c) Nodo 2 :

$$\begin{aligned}\theta + u\Delta\tau \frac{\partial\theta}{\partial x} - D\Delta\tau \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= \theta^{n-1} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta x^2}\end{aligned}$$

$$\theta_i + \frac{u\Delta\tau}{\Delta x}\theta_i - \frac{u\Delta\tau}{\Delta x}\theta_{i-1} - \frac{u\Delta\tau}{\Delta x^2}\theta_{i-1} - \frac{D\Delta\tau}{\Delta x^2}\theta_{i-1} + \frac{2D\Delta\tau}{\Delta x^2}\theta_i - \frac{D\Delta\tau}{\Delta x^2}\theta_{i+1} = \theta_i^{n-1}$$

$$\theta_i \left[ 1 + \frac{u\Delta\tau}{\Delta x} + \frac{2D\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] + \theta_{i-1} \left[ -\frac{u\Delta\tau}{\Delta x} - \frac{D\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] + \theta_{i+1} \left[ -\frac{D\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] = \theta_i^{n-1} \quad (\text{D.21})$$

c) Nodo mi-1 :

$$\theta_{mi-1} \left[ 1 + \frac{u\Delta\tau}{\Delta x} + \frac{2D\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] + \theta_{mi-2} \left[ -\frac{u\Delta\tau}{\Delta x} - \frac{D\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] + \theta_{mi} \left[ -\frac{D\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] = \theta_{mi}^{n-1} \quad (\text{D.22})$$

#### D.4. Discretización para la ecuación de la concentración con el método de diferencias finitas

De la ecuación de concentración se tiene:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + u \frac{\partial\zeta}{\partial x} = Q \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \Upsilon' \quad (\text{D.23})$$

Donde podemos expresar:

$$Q = \frac{\tau}{\phi L^2} D_{mas}$$

$$\begin{aligned}v &= \frac{L}{\tau} \\ D_{mas} &= \frac{\alpha}{Le} \\ \alpha &= \frac{k}{\rho C_p}\end{aligned}$$

$$Q = \frac{\alpha}{\phi Le Lv} = \frac{k}{\phi Le Lv \rho C_p} = \frac{1}{\phi Le Pe}$$

$$Q = \frac{1}{\phi Le Pe} \quad (D.24)$$

Entonces:

$$\varsigma - \varsigma^{n-1} + u\Delta t \frac{\partial \varsigma}{\partial x} - Q\Delta t \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} = \Upsilon'$$

$$\varsigma + u\Delta t \frac{\partial \varsigma}{\partial x} - Q\Delta t \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} = \varsigma^{n-1} + \Upsilon'$$

De acuerdo a Fornberg, B. en [23] pag. 704 utilizando cinco puntos para la aproximación de la primera y la segunda derivada cargadas a la izquierda se obtiene:

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial x} = \frac{-Cp_o \varsigma_{i-2} + c_1 \varsigma_{i-1} - c_2 \varsigma_i + c_3 \varsigma_{i+1} - c_4 \varsigma_{i+2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} = \frac{d_o \varsigma_{i-2} - d_1 \varsigma_{i-1} + d_2 \varsigma_i - d_3 \varsigma_{i+1} + d_4 \varsigma_{i+2}}{\Delta x^2}$$

$$\begin{aligned} & \varsigma_i + u\Delta t \left[ \frac{-Cp_o \varsigma_{i-2} + c_1 \varsigma_{i-1} - c_2 \varsigma_i + c_3 \varsigma_{i+1} - c_4 \varsigma_{i+2}}{\Delta x} \right] - \\ & Q\Delta t \left[ \frac{d_o \varsigma_{i-2} - d_1 \varsigma_{i-1} + d_2 \varsigma_i - d_3 \varsigma_{i+1} + d_4 \varsigma_{i+2}}{\Delta x^2} \right] \\ = & \varsigma^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varsigma_i + \left[ -Cp_o \frac{u\Delta t}{\Delta x} \varsigma_{i-2} + c_1 \frac{u\Delta t}{\Delta x} \varsigma_{i-1} - c_2 \frac{u\Delta t}{\Delta x} \varsigma_i + c_3 \frac{u\Delta t}{\Delta x} \varsigma_{i+1} - c_4 \frac{u\Delta t}{\Delta x} \varsigma_{i+2} \right] + \\ & \left[ -d_o \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \varsigma_{i-2} + d_1 \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \varsigma_{i-1} - d_2 \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \varsigma_i + d_3 \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \varsigma_{i+1} - d_4 \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \varsigma_{i+2} \right] \\ = & \varsigma^{n-1} + \Upsilon' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varsigma_i \left[ 1 - c_2 \frac{u\Delta t}{\Delta x} - d_2 \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \right] \\ & + \varsigma_{i-2} \left[ -Cp_o \frac{u\Delta t}{\Delta x} - d_o \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \right] \\ & + \varsigma_{i-1} \left[ c_1 \frac{u\Delta t}{\Delta x} + d_1 \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \right] \\ & + \varsigma_{i+1} \left[ c_3 \frac{u\Delta t}{\Delta x} + d_3 \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \right] \\ & + \varsigma_{i+2} \left[ -c_4 \frac{u\Delta t}{\Delta x} - d_4 \frac{Q\Delta t}{\Delta x^2} \right] \\ = & \varsigma^{n-1} + \Upsilon' \end{aligned} \quad (D.25)$$

#### D.4. DISCRETIZACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LA CONCENTRACIÓN CON EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

con los siguientes valores de coeficientes:

$$Cp_o = \frac{25}{12}; c_1 = 4; c_2 = 3; c_3 = \frac{4}{3}; c_4 = \frac{1}{4} \quad (D.26)$$

$$d_o = \frac{35}{12}; d_1 = \frac{26}{3}; d_2 = \frac{19}{2}; d_3 = \frac{14}{3}; d_4 = \frac{11}{12} \quad (D.27)$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

a) Nodo 1, Dirichlet =1:

$$\varsigma_1[1] = 1 \quad (D.28)$$

b) Nodo  $m_i$  Neumann=0:

$$\varsigma_{m_i}[1] + \varsigma_{m_i-1} - [1] = 0 \quad (D.29)$$

Dicha discretización genera una matriz pentadiagonal por lo que los nodos 2 y  $m_i-1$  tienen un tratamiento especial para enlazar la condición de frontera con el resto de los nodos, se tiene

entonces la siguiente aproximación:

c) Nodo 2 :

$$\begin{aligned} \varsigma + u\Delta\tau \frac{\partial\varsigma}{\partial x} - Q\Delta\tau \frac{\partial^2\varsigma}{\partial x^2} &= \varsigma^{n-1} + \Upsilon' \\ \frac{\partial\varsigma}{\partial x} &= \frac{\varsigma_{i+1} - \varsigma_i}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2\varsigma}{\partial x^2} &= \frac{\varsigma_{i-1} - 2\varsigma_i + \varsigma_{i+1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

$$\varsigma_i + \frac{u\Delta\tau}{\Delta x}\varsigma_i - \frac{u\Delta\tau}{\Delta x}\varsigma_{i-1} - \frac{u\Delta\tau}{\Delta x^2}\varsigma_{i-1} - \frac{Q\Delta\tau}{\Delta x^2}\varsigma_{i-1} + \frac{2Q\Delta\tau}{\Delta x^2}\varsigma_i - \frac{Q\Delta\tau}{\Delta x^2}\varsigma_{i+1} = \varsigma_i^{n-1} + \Upsilon'$$

$$\varsigma_i \left[ 1 + \frac{u\Delta\tau}{\Delta x} + \frac{2Q\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] + \varsigma_{i-1} \left[ -\frac{u\Delta\tau}{\Delta x} - \frac{Q\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] + \varsigma_{i+1} \left[ -\frac{Q\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] = \varsigma_i^{n-1} + \Upsilon' \quad (D.30)$$

c) Nodo  $m_i-1$  :

$$\varsigma_{m_i-1} \left[ 1 + \frac{u\Delta\tau}{\Delta x} + \frac{2Q\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] + \varsigma_{m_i-2} \left[ -\frac{u\Delta\tau}{\Delta x} - \frac{Q\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] + \varsigma_{m_i} \left[ -\frac{Q\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] = \varsigma_{m_i-1}^{n-1} + \Upsilon' \quad (D.31)$$



## Apéndice E

# Código generado para el modelo

Las subrutinas generadas para el modelo son las siguientes:

```

program main !Programa principal
use var !Se llama a las variables empleadas
use param !Se llama a los parámetros usados
implicit none
!-----Genera malla (espacio de solución)
long=(l)/(lref)
do i=1,mi
x(i)=dfloat(i-1)/dfloat(mi-1)
end do
x2(1)=x(1)
dx=x(2)-x(1)
dt=dx*dx*0.01d0

call initcond !Se invocan condiciones iniciales
open (unit=37,file='Promedios.txt') !Nombre archivo de salida
write(37,*) 'Tiempo TaSat TaSatO TaPrW TaPress TaPc TaTemp TaConc velW FactorR'

DO k=1,kmax !Se actualiza el ciclo
time= time +dt !Contador de iteraciones en el tiempo

call presat !Se llama la subrutina para resolver presión-saturación
call temperature !Se llama subrutina para resolver la temperatura
call concentration !Se llama la subrutina para resolver concentración

!-----Valores promedio (Areas)
do i=1,mi-1
areaSat(i)=((sat(i+1)+sat(i))/2.d0)*dx ! Trapecios para saturación de agua
areaSatO(i)=((satO(i+1)+satO(i))/2.d0)*dx ! Trapecios para saturación aceite
areaPrW(i)=((Prw(i+1)+Prw(i))/2.d0)*dx ! Trapecios para presión de agua
areaPress(i)=((Press(i+1)+Press(i))/2.d0)*dx ! Trapecios para presión de aceite
areaPc(i)=((Pc(i+1)+Pc(i))/2.d0)*dx ! Trapecios para presión capilar
areaT(i)=((temp(i+1)+temp(i))/2.d0)*dx ! Trapecios para la temperatura
areaCon(i)=((conc(i+1)+conc(i))/2.d0)*dx ! Trapecios para la concentración
avelw(i)=((velw(i+1)+velw(i))/2.d0)*dx ! Trapecios velocidad de agua
end do

TaSat=abs(sum(areaSat))
TaSatO=abs(sum(areaSatO))
TaPrW=abs(sum(areaPrW))
TaPress=abs(sum(areaPress))
TaPc=abs(sum(areaPc))
TaTemp=abs(sum(areaT))
TaConc=abs(sum(areaCon))
Tavelw=abs(sum(avelw))

FactorR=1.d0-(Tavelw)/(0.7d0*phi) !Factor de recuperación
!-----Calcular la viscosidad y puntos finales de la saturación en función de la temperatura
do i=1,mi
SrwT(i)=srwTini*(1.d0-Esw*temp(i))
miuWT(i)=miuWT(i)*(1.d0-Epw*temp(i))
miuOT(i)=miuOT(i)*(1.d0-Epo*temp(i))
SrwT(i)=srwTini*(1.d0-Eswc*Conc(i))
viscoef(i)=miuWT(i)/miuOT(i)
end do

call sout !Se llama la subrutina para obtener archivos de salida

END DO

close(unit=37)
end program

```

Figura E.1: Programa principal: main.f90

```

module var
!-----Variables generales
integer(4), parameter :: mi=1001
real(8) long, lref, dx,dt
real(8) x(mi), x2(mi), mov(mi), movw(mi), movo(mi), Se(mi), SrwT(mi), SroT(mi)
real(8) miuwT(mi), miuoT(mi), Q(mi), a(mi), b(mi),c(mi),r(mi), d2pcdx2(mi), Pc(mi)
real(8) press(mi), Prw(mi), sat(mi), satold(mi), sata, dfsat(mi),viscoef(mi)
real(8) fsawcon , Pb, satO(mi), arriba(mi), abajo(mi), Dm(mi),alfaW , pressold(mi)
real(8) j1(mi),j2(mi),time, areaCon(mi), TaConc, Pem as, tavelw, aveiw (mi), factorR
real(8) areaSat(mi), Tasat, areaSatO(mi), TasatO , areaPress(mi), TaPress, areaPc(mi), TaPc, areaPrw (mi)
TaPrw , areaT(mi), TaTemp
integer(4) i,k, kc, kc2, kit, iter, ji
integer(4) kmax,imed
!-----Variables para la temperatura
real(8) vel(mi)!velocidad total
real(8) velW (mi) !velocidad del agua
real(8) velO(mi)!velocidad del petróleo
real(8) temp(mi) !temperatura calculada adimensional
real(8) tempold(mi) !saturación calculada
!-----Variables para llenar la matriz:
real(8) aP(mi)
real(8) bPP(mi)
real(8) cPP(mi)
real(8) dPm (mi)
real(8) eP(mi)
real(8) rP(mi)
real(8) atO(mi)
real(8) aT(mi)
real(8) bT(mi)
real(8) ct(mi)
real(8) dtm (mi)
real(8) et(mi)
real(8) rT(mi)
real(8) Al(mi) !Coeficiente para difusión de temperatura
real(8) Pe !Numero de Peclet
real(8) TnA !C.F en A adimensional
real(8) TnO !C.I. adimensional
real(8) Uinf !velocidad referencia
real(8) tct !Tiempo característico para la temperatura
real(8) GradP(mi) !Gradiente de la presión
real(8) Pdif(mi) !Coeficient difusivo para la temperatura
real(8) Pconv(mi) !Coeficiente convectivo para la temperatura
real(8) abajov(mi) !coeficiente para la velocidad de la temperatura
real(8) Qf !Flujo de calor entrante
real(8) cc0,cc1,cc2,cc3,cc4,dd0,dd1,dd2,dd3,dd4 !Coeficientes empleados en la matriz
!-----Variables para la concentración
real(8) velC(mi)!velocidad total para la concentración
real(8) velWC(mi) !velocidad del agua para la concentración
real(8) velOC(mi)!velocidad del petroleo para la concentración
real(8) conc(mi) !concentración calculada adimensional
real(8) concold(mi) !concentración al tiempo anterior
!-----Variables para llenar la matriz
real(8) aCo(mi)
real(8) bCo(mi)
real(8) cCo(mi)
real(8) dCo(mi)
real(8) eCo(mi)
real(8) rCo(mi)
real(8) CnA
real(8) CnB
real(8) Le !Numero de Lewis
real(8) upsilon(mi) !Coeficiente para la concentración
real(8) Al2(mi) !Coeficiente para difusión de la concentración
real(8) PdifCon(mi) !Coeficient difusivo para la concentración
real(8) PconvCon(mi) !Coeficiente convectivo para la concentración

end module var

```

Figura E.2: Subrutina de variables empleadas: var.f90

```

module param !Subrutina con parámetros empleados

real(8), parameter :: l=300.d0 !Longitud del yacimiento [m]
real(8), parameter :: satr= 0.9d0! saturación de referencia
real(8), parameter :: ktW=0.6d0! Conductividad térmica del agua [watio/metro-K]
real(8), parameter :: kto=0.15d0!Conductividad térmica del petróleo [watio/metro-K]
real(8), parameter :: ktroc=1.68630d0 !Conductividad térmica del suelo [watio/metro-K]
real(8), parameter :: rho=2874.62d0 !Densidad del suelo [Kg/m³]
real(8), parameter :: pw= 990.741d0 !Densidad del agua [Kg/m³]
real(8), parameter :: poil=949.254d0 !Densidad del petróleo [Kg/m³]
real(8), parameter :: Cp=4000.d0! Capacidad calorífica del suelo [julio/K]
real(8), parameter :: cpw=4182.d0! Capacidad calorífica del agua [julio/K]
real(8), parameter :: cpoil=2000.d0!Capacidad calorífica del petróleo [julio/K]
real(8), parameter :: EsW =0.5d0 !Factor de disminución de la saturación residual de agua respecto a T
real(8), parameter :: EsW C=0.4d0 !Factor de disminución de la saturación residual de agua respecto a T
real(8), parameter :: EsO=0.4d0 !Factor de disminución de la saturación r de petróleo respecto a T
real(8), parameter :: epW =0.0000001d0 !Factor de disminución de viscosidad de agua respecto a T
real(8), parameter :: epO=0.0000003d0!Factor de disminución de viscosidad de petróleo respecto a T
real(8), parameter :: pcu=0.1d0! Presión de Umbral
real(8), parameter :: SrwTini=0.2d0 !saturación inicial de agua
real(8), parameter :: SroTini=0.09d0 !saturación inicial de aceite
real(8), parameter :: Dim a=1.d-6 !Difusividad másica del agua [m²/s]
real(8), parameter :: kmax=600000000 !Número de iteraciones
real(8), parameter :: lref=301.d0 !Longitud de referencia [m]
real(8), parameter :: expw=1.d0 !Exponente de la movilidad
real(8), parameter :: phi=0.3d0 !Porosidad
real(8), parameter :: Nb=0.8d0 !Exponente de la presión capilar
real(8), parameter :: movr=1000.d0 !Movilidad de referencia
real(8), parameter :: kperm=1.d-11 !Permeabilidad absoluta
real(8), parameter :: dPress=1.d5!Delta P
real(8), parameter :: sata=0.8d0 !Saturación en el punto a
real(8), parameter :: tct=1.d8 !Tiempo característico [s]

end module

```

Figura E.3: Subrutina de parámetros empleados: param.f90

```

subroutine initcon !Subrutina que genera valores iniciales
use var !Llamo a mis variables
use param !Llamo a mis parámetros
implicit none
!Inicializo parámetros empleados
do i=1,mi
tempold(i)=0.d0
miuoT(i)=1.5d-3
miuwT(i)=1.d-3
concold(i)=0.d0
end do
!-----Inicializo valores de saturación
SrwT=SrwTini
SroT=SroTini
sawcon=0.3d0
Sat(1)=sata
Sat(mi)=sawcon
do i=2,mi-1
  Sat(i)=sawcon
end do
!-----Defino e inicializo ecuaciones constitutivas y valores usados
do i=1,mi
  viscoef(i)=miuwT(i)/miuoT(i)
  mov(i)=(1.d0/(1.d0-SrwT(i)-SroT(i))*expw)*(((Sat(i)-SrwT(i))*expw)+((1.d0-SroT(i)-
  Sat(i))*expw)*viscoef(i))
  Se(i)=(sat(i)-SrwT(i))/(1.d0-SrwT(i)-SroT(i))
  movw(i)=(Se(i))*expw
  movo(i)=mov(i)-movw(i)
  Pc(i)=pcu*(Se(i))*(-1.d0/Nb)
  press(i)=Pc(i)
  j1(i)=-mov(i)/(12.d0*dx*dx)
  j2(i)=-movw(i)/(12.d0*dx*dx)
end do

d2pcdx2(1)=-j2(5)*pc(5)+16.d0*j2(4)*pc(4)-30.d0*j2(3)*pc(3)+16.d0*j2(2)*pc(2)-j2(1)*pc(1)
d2pcdx2(2)=-j2(6)*pc(6)+16.d0*j2(5)*pc(5)-30.d0*j2(4)*pc(4)+16.d0*j2(3)*pc(3)-j2(2)*pc(2)
d2pcdx2(mi-1)=-j2(mi-1)*pc(mi-1)+16.d0*j2(mi-2)*pc(mi-2)-30.d0*j2(mi-3)*pc(mi-3)+16.d0*j2(mi-
4)*pc(mi-4)-j2(mi-5)*pc(mi-5)
d2pcdx2(mi)=-j2(mi)*pc(mi)+16.d0*j2(mi-1)*pc(mi-1)-30.d0*j2(mi-2)*pc(mi-2)+16.d0*j2(mi-3)*pc(mi-3)
-j2(mi-4)*pc(mi-4)

do i=3,mi-2
d2pcdx2(i)=-j2(i+2)*pc(i+2)+16.d0*j2(i+1)*pc(i+1)-30.d0*j2(i)*pc(i)+16.d0*j2(i-1)*pc(i-1)-j2(i-2)*pc(i-2)
end do

do i=1,mi
Q(i)=movw(i)*d2pcdx2(i)*dx
end do

end subroutine

```

Figura E.4: Subrutina para los valores iniciales: initcon.f90

```

subroutine presat !Subrutina para resolver la presión y la saturación
use var !Llamo a mis variables
use param !Llamo a mis parámetros
implicit none
!-----PRESIÓN: Diferencias finitas a 5 puntos
sat(1)=1.d0-Srw T(1)
!Introduzco condiciones de frontera
cPP(1)= 1.d0
dPm(1)=-1.d0
eP(1)= 0.d0
rP(1)=0.01d0
aP(m i)=0.d0
bPP(m i)=0.d0
cPP(m i)=1.d0
rP(m i)=0.0d0
bPP(2)=1.d0*j1(2)
cPP(2)=-2.d0*j1(2)
dPm(2)=1.d0*j1(2)
eP(2)=0.d0*j1(2)
rP(2)=Q(2)
aP(m i-1)=0.d0*j1(m i-1)
bPP(m i-1)=1.d0*j1(m i-1)
cPP(m i-1)=-2.d0*j1(m i-1)
dPm(m i-1)= 1.d0*j1(m i-1)
rP(m i-1)=Q(m i-1)
!Introduzco el resto de la matriz
do i=3,m i-2
  aP(i)=-1.d0*j1(i) !i-2
  bPP(i)=16.d0*j1(i) !i-1
  cPP(i)=-30.d0*j1(i) !i
  dPm(i)=16.d0*j1(i) !i+1
  eP(i)=-1.d0*j1(i) !i+2
  rP(i)=Q(i) !Residual
end do
call penta(aP,bPP,cPP,dPm,eP,rP,press,m i) !Resuelvo sistema Ax=b
do i=1,m i
Prw(i)=press(i)-Pc(i) !Calculo presión del agua
end do
!-----SATURACIÓN: Método QUICK explícito
do i=2,m i !Redefino ecuaciones constitutivas
  viscoef(i)=m iuw T(i)/m iuOT(i)

```

```

      mov(i)=(1.d0/(1.d0-SrwT(i)-SroT(i))*expw)*((Sat(i)-SrwT(i))*expw)+((1.d0-SroT(i)-
Sat(i))*expw)*viscoef(i)
      Se(i)=(sat(i)-SrwT(i))/(1.d0-SrwT(i)-SroT(i))
      movw(i)=(Se(i))*expw
      movo(i)=mov(i)-movw(i)
      dfsat(i)= dabs(satold(i)-sat(i))
      satold(i)=sat(i)
      Pc(i)=pcu*(Se(i))*(-1.d0/Nb)
      j1(i)=mov(i)/(12.d0*dx*dx)
      j2(i)=movw(i)/(12.d0*dx*dx)
end do

do i=2,mi-2 !Resuelvo explícitamente
  sat(i)=(dt*Om/(dx*dx)) &
  *((3.d0/8.d0)*press(i-1)*movw(i-1) &
  -(3.d0/16.d0)*press(i)*(movw(i+1)+movw(i-1))) &
  +(5.d0/8.d0)*press(i+1)*movw(i+1) &
  +(1.d0/8.d0)*press(i+2)*movw(i+2) &
  +satold(i)+Om*Q(i)*dt
end do
sat(mi-1)=(5.d0*sat(mi-2)-4.d0*sat(mi-3)+sat(mi-4))/2.d0
sat(mi)=(5.d0*sat(mi-1)-4.d0*sat(mi-2)+sat(mi-3))/2.d0

!Se define la segunda derivada de la presión capilar
d2pcdx2(1)=-j2(5)*pc(5) + 16.d0*j2(4)*pc(4) -30.d0*j2(3)*pc(3) +16.d0*j2(2)*pc(2) - j2(1)*pc(1)
d2pcdx2(2)=-j2(6)*pc(6) + 16.d0*j2(5)*pc(5) -30.d0*j2(4)*pc(4) +16.d0*j2(3)*pc(3) - j2(2)*pc(2)
d2pcdx2(mi-1)=-j2(mi-1)*pc(mi-1) + 16.d0*j2(mi-2)*pc(mi-2) -30.d0*j2(mi-3)*pc(mi-3) +16.d0*j2(mi-4)*pc(mi-4)
-j2(mi-5)*pc(mi-5)
d2pcdx2(mi)=-j2(mi)*pc(mi) + 16.d0*j2(mi-1)*pc(mi-1) -30.d0*j2(mi-2)*pc(mi-2) +16.d0*j2(mi-3)*pc(mi-3) -
j2(mi-4)*pc(mi-4)
do i=3,mi-2
d2pcdx2(i)=-j2(i+2)*pc(i+2) + 16.d0*j2(i+1)*pc(i+1) -30.d0*j2(i)*pc(i) +16.d0*j2(i-1)*pc(i-1) - j2(i-2)*pc(i-2)
end do

do i=1,mi !Se imponen condiciones límite y se define Q
  Q(i)=movw(i)*d2pcdx2(i)*dx
  satO(i)=1.d0-sat(i)
  if (sat(i) >= 1.d0-SrwT(i)) then
    sat(i)= 1.d0-SrwT(i)
  else
    continue
  end if

  if (press(i) <= 0.d0) then
    press(i)=1.d-4
  else
    continue
  end if
end do
if (sat(mi-1) > .6 ) then !Se detiene el código por saturación
  write(*,*) 'El código terminó por sat'
  goto 96
end if
96 continue
end subroutine presat

```

Figura E.5: Subrutina para las ecuaciones presión-saturación: presat.f90

```

subroutine temperature !---subrutina para resolver la temperatura
use var !Llamo a mis variables
use param !Llamo a mis parámetros
implicit none
!---Se calculan las velocidades correspondientes para la temperatura
do i=1,m i-1
velw(i)=movw(i)*abs((prw(i+1)-prw(i))/dx)
velo(i)=movO(i)*abs((press(i+1)-press(i))/dx)
vel(i)=phi*(velw(i)+velO(i))*((poil*Cpoil)/(pw*Cpw))/&
&((rho*Cp/(pw*Cpw))*(1-phi)+phi*sat(i)+(phi*poil*Cpoil)/(Cpw*pw))*(1.d0-sat(i))
end do
velw(m)=velw(m i-1)
velO(m)=velO(m i-1)
vel(m)=vel(m i-1)
!---Recalcula coeficientes de términos convectivo y difusivos
do i=1,m i
arriba(i)=(kto*phi/ktw)*(1.d0-sat(i))+phi*sat(i)+(1.d0-phi)*(ktroc/ktw)
abajo(i)=((rho*Cp)/(pw*Cpw))*(1.d0-phi)+phi*sat(i)+((poil*Cpoil*phi)/(pw*Cpw))*(1.d0-sat(i))
Dm(i)=arriba(i)/abajo(i)
Al(i)=Dm(i)/Pe
Pdif(i)=(Al(i)*2 d-3*dt)/(dx*dx)
Pconv(i)=(vel(i)*phi*dt)/(dx)
end do
!-----!TEMPERATURA: Diferencias finitas a 5 puntos (implícito)
!-----Defino coeficientes ya calculados
cc0=(25.d0)/(12.d0)
cc1=4.d0
cc2=3.d0
cc3=(4.d0)/(3.d0)
cc4=(1.d0)/(4.d0)
dd0=(35.d0)/(12.d0)
dd1=(26.d0)/(3.d0)
dd2=(19.d0)/(2.d0)
dd3=(14.d0)/(3.d0)
dd4=(11.d0)/(12.d0)
!----Introduzco condiciones de frontera
cT(1)=1.d0
dTm(1)=0.d0
eT(1)=0.d0
rT(1)=1.d0
aT(m i)=0.d0
bT(m i)=-1.d0

```

```

cT(mi)= 1.d0
rT(mi)=0.d0
bT(2)=- (cc1*Pconv(3)+ dd1*Pdif(3))
cT(2)=1.d0-cc2*Pconv(3)-dd2*Pdif(3)
dTm(2)=- (cc3*Pconv(3)+ dd3*Pdif(3))
eT(2)=-cc4*Pconv(3)-dd4*Pdif(3)
rT(2)=tempold(3)
aT(mi-1)=-cc0*Pconv(mi-2)-dd0*Pdif(mi-2)
bT(mi-1)=- (cc1*Pconv(mi-2)+ dd1*Pdif(mi-2))
cT(mi-1)=1.d0-cc2*Pconv(mi-2)-dd2*Pdif(mi-2)
dTm(mi-1)=- (cc3*Pconv(mi-2)+ dd3*Pdif(mi-2))
rT(mi-1)=tempold(mi-2)
!----Introduzco el resto de la matriz
do i=3,mi-2
  aT(i)=-cc0*Pconv(i)-dd0*Pdif(i) !i-2
  bT(i)=- (cc1*Pconv(i)+ dd1*Pdif(i)) !i-1
  cT(i)=1.d0-cc2*Pconv(i)-dd2*Pdif(i) !i
  dTm(i)=- (cc3*Pconv(i)+ dd3*Pdif(i)) !i+1
  eT(i)=-cc4*Pconv(i)-dd4*Pdif(i) !i+2
  rT(i)=tempold(i) !residual
end do
call penta(aT,bT,cT,dTm,eT,rT,temp,mi) !Resuelvo sistema Ax=b

do i=1,mi
tempold(i)= temp(i) !Actualizo valor de temperatura

if (conc(i)<=9.d-12) then !Condición límite
  conc(i)=0.d0
  else
  continue
end if

if (isnan(temp(i))) stop "'temperatura' es un NaN" !Condición límite
end do

end subroutine temperature

```

Figura E.6: Subrutina para la ecuación de temperatura: temperature.f90

```

subroutine concentration !Subrutina para resolver la concentración
use var !Llamo a mis variables
use param !Llamo a mis parámetros
implicit none
!-----Calcular la velocidad para la Concentración (sin pérdida en roca)
do i=1,m i-1
velc(i)=velw(i)
end do
!Recalcula coeficientes de términos convectivo y difusivos
alfaW=(ktW)/(pw*cpw)
Le=alfaW/Dima
do i=1,m i
Al2(i)=1.d0/(Pe*Le)
PdifCon(i)=(Al2(i)*2d-4*dt)/(dx*dx)
PconvCon(i)=(velc(i)*phi*dt)/(dx)
upsilon(i)=dt*Conc(i)*1.d-4
end do
!-----CONCENTRACION: Diferencias finitas a 5 puntos (implícito)
!-----Introduzco condiciones de frontera
cT(1)=1.d0
cCo(1)=1.d0
dCo(1)=0.d0
eCo(1)=0.d0
rCo(1)=1.d0
aCo(mi)=0.d0
bCo(mi)=-1.d0
cCo(mi)=1.d0
rCo(mi)=0.d0
bCo(2)=-cc1*PconvCon(3)+dd1*PdifCon(3)
cCo(2)=1.d0-cc2*PconvCon(3)-dd2*PdifCon(3)
dCo(2)=-cc3*PconvCon(3)+dd3*PdifCon(3)
eCo(2)=-cc4*PconvCon(3)-dd4*PdifCon(3)
rCo(2)=concold(3)+upsilon(3)
aCo(mi-1)=-cc0*PconvCon(mi-2)-dd0*PdifCon(mi-2)
bCo(mi-1)=-cc1*PconvCon(mi-2)+dd1*PdifCon(mi-2)
cCo(mi-1)=1.d0-cc2*PconvCon(mi-2)-dd2*PdifCon(mi-2)
dCo(mi-1)=-cc3*PconvCon(mi-2)+dd3*PdifCon(mi-2)
rCo(mi-1)=concold(mi-2)+upsilon(mi-2)
!Introduzco el resto de la matriz
do i=3,m i-2
aCo(i)=-cc0*PconvCon(i)-dd0*PdifCon(i) !i-2
bCo(i)=-cc1*PconvCon(i)+dd1*PdifCon(i) !i-1
cCo(i)=1.d0-cc2*PconvCon(i)-dd2*PdifCon(i) !i
dCo(i)=-cc3*PconvCon(i)+dd3*PdifCon(i) !i+1
eCo(i)=-cc4*PconvCon(i)-dd4*PdifCon(i) !i+2
rCo(i)=concold(i)+upsilon(i) !residual
end do

call penta(aCo,bCo,cCo,dCo,eCo,rCo,conc,mi) !Resuelvo sistema Ax=b
do i=1,m i
concold(i)=conc(i) !Actualizo valor de la concentración
if (conc(i)<=9.d-12) then !Condición límite
con c(i)=0.d0
else
continue
end if
if (isnan(conc(i))) stop "concentracion" es un NaN" !Condición límite
end do
end subroutine

```

Figura E.7: Subrutina para la ecuación de concentración: concentration.f90

```

subroutine sout !subrutina para generar valores de salida
use var !Llamado a mis variables
use param !Llamado a mis parámetros
implicit none

kc=kc+1 !Inicio contador para generar archivos
if (kc >= 5000) then
  write(37,120) time,TaSat,TaSatO,TaPrW,TaPress,TaPc,TaTemp,TaConc,tavelw, FactorR; 120
format(10e20.10) !Variables a imprimir
  open (unit=38,file='instante.txt') !Nombre archivo de salida
  write(38,*) "X Sat SatO PrO movw Pc Temp Conc, se VelW Vel VelC" !Nombre variables de salida
  do i=1,mi !Llamado variables de salida
    write (38,121) x(i),sat(i),sato(i),PrW(i),movw(i),pc(i),temp(i),conc(i), se(i), velW(i), vel(i), velc(i);
121 format(13e20.10) ) !Variables a imprimir
  end do
  close(unit=38)
  kc=0
else
  continue
end if
end subroutine

```

Figura E.8: Subrutina para generar los archivos de salida: sout.f90



# Bibliografía

- [1] Ataie-Ashtiani, B., & Raeesi-Ardekani, D. (2010). Comparison of numerical formulations for two-phase flow in porous media. *Geotechnical and Geological Engineering*, 28(4), 373-389.
- [2] Nield, D. A., & Bejan, A. (2013). *Mechanics of Fluid Flow Through a Porous Medium* (pp. 1-29). Springer New York.
- [3] Herrera, I., & Pinder, G. F. (2012). *Mathematical modeling in science and engineering: An axiomatic approach*. John Wiley & Sons.
- [4] <http://www.heavyoilrecovery.ca/bitumen.html>
- [5] Somasundaran, P., & Zhang, L. (2006). Adsorption of surfactants on minerals for wettability control in improved oil recovery processes. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 52(1), 198-212.
- [6] Conferencia: Mohanty, K. K. Lecture 2: Phase behavior 2010
- [7] Salager, J. L. (2005). Recuperación mejorada del petróleo. ULA.[S357-C].
- [8] Moran, M. J., Shapiro, H. N., Munson, B. R., & DeWitt, D. P. (2003). *Introduction to thermal systems engineering. Thermodynamics, Fluid Mechanics, and Heat Transfer*, John Wiley & Sons.
- [9] Cruz, N. M. S., & Portillo, M. L. T. Análisis de Sensibilidad de parámetros de escalamiento.
- [10] Moreau, P., Morvan, M., Rivoal, P., Bazin, B., Douarche, F., Argillier, J. F., & Tabary, R. (2010, April). An integrated workflow for chemical EOR pilot design. In *SPE Improved Oil Recovery Symposium*.
- [11] Boyadjiev, C. (2010). *Theoretical Chemical Engineering: Modeling and Simulation*. Springer Science & Business Media.
- [12] de Ferrer, M. P. (2001). *Inyección de agua y gas en yacimientos petrolíferos*. Ediciones Astro Data SA, Maracaibo, Venezuela.
- [13] Montoro, M. A. *Caracterización y Análisis del Desplazamiento de Fluidos No Miscibles en Medios Porosos*.
- [14] de la Cruz, L. M., & Monsivais, D. (2014). Parallel numerical simulation of two-phase flow model in porous media using distributed and shared memory architectures. *Geofísica internacional*, 53(1), 59-75.

- [15] Chen, Z., Huan, G., & Ma, Y. (2006). Computational methods for multiphase flows in porous media (Vol. 2). Siam.
- [16] Chen, Z., Huan, G., & Ma, Y. (2006). Computational methods for multiphase flows in porous media (Vol. 2). Siam.
- [17] Nield, D. A., & Bejan, A. (2006). Convection with Change of Phase. *Convection in Porous Media*, 403-452.
- [18] Bennion, D. B., Thomas, F. B., Schulmeister, B., & Ma, T. (2006, January). A Correlation of the Low and High Temperature Water-Oil Relative Permeability Characteristics of Typical Western Canadian Unconsolidated Bitumen Producing Formations. In *Canadian International Petroleum Conference*. Petroleum Society of Canada.
- [19] Alveskog, P. L., Holt, T., & Torsaeter, O. (1998). The effect of surfactant concentration on the Amott wettability index and residual oil saturation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 20(3), 247-252.
- [20] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (1987). *Métodos numéricos para ingenieros: con aplicaciones en computadoras personales*.
- [21] Hirsch, C. (2007). *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics (Vol. 1)*. Butterworth-Heinemann.
- [22] Ledesma, A. C., & Bernal, O. M. *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*.
- [23] Fornberg, B. (1988). Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Mathematics of computation*, 51(184), 699-706.
- [24] Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education.
- [25] Hoteit, H., & Firoozabadi, A. (2008). Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures. *Advances in Water Resources*, 31(1), 56-73.
- [26] Szymkiewicz, A. (2012). *Modelling water flow in unsaturated porous media: accounting for nonlinear permeability and material heterogeneity*. Springer Science & Business Media.
- [27] Zavala S.E., (2012). *El método de Newton Raphson en la recuperación mejorada de petróleo*. UNAM.
- [28] Brooks, R. H., & Corey, T. (1964). HYDRAU UC PROPERTIES OF POROUS MEDIA.
- [29] L.A. Rapoport, W. J. L. *Properties of linear waterfloods The Carter oil Co., 1952, 198*