



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales

Estabilidad Hidrodinámica de una capa líquida de fluido viscoelástico que fluye hacia abajo por una pared cilíndrica: casos isotérmico y con gradiente de temperatura

TESIS

Para optar por el Grado de:
Doctor en Ciencia e Ingeniería de Materiales

Presenta:
Miguel Fernando Moctezuma Sánchez

Director de Tesis:
Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco
Instituto de Investigaciones en Materiales

Miembros del Comité Tutor:
Dr. José Roberto Zenit Camacho
Instituto de Investigaciones en Materiales

Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos
Posgrado de Química



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria:

Dedico esta tesis a dos personas muy importantes en mi vida:

A mi hijo Jorge Moctezuma Szczepaniak el niño que le da valor a mi existencia y mis proyectos

A Ewa Szczepaniak, la mujer que quiero, después de todo este tiempo.
Kocham cie

Powodzenia y hasta pronto!! Jerzyc Michol

Índice

Capitulo 1	Introducción	5
1.1	Introducción	5
1.2	Revisión Bibliográfica	20
Capitulo 2	Ecuaciones de Conservación	39
2.1	Ecuaciones de conservación de masa	39
2.2	Ecuaciones de conservación de Momento	39
2.2.1	Escalamiento de los componentes del tensor de esfuerzos y método de perturbación en parámetros pequeños	44
2.3	Ecuaciones de conservación para el Problema no Isotérmico	48
2.3.1	Ecuación de conservación de energía	49
2.4	Condiciones de Frontera	53
2.5	Deducción de la ecuación de Benney para el flujo de una capa de fluido visco elástico descendiendo por un cilindro (caso no isotérmico)	61
2.5.1	Ecuación de Benney de un fluido Viscoelástico descendiendo sobre un cilindro con calentamiento	63
Capítulo 3.	Solución de la ecuación de evolución de onda del flujo descendente de un fluido visco elástico sobre un cilindro	72
3.1	Análisis lineal de la ecuación de evolución de onda del problema viscoelástico (caso isotérmico)	72
3.1.1	Análisis Lineal de la Ecuación de evolución de la onda	73
3.2	Razón de crecimiento de las perturbaciones, al variar De	75
3.3	Deducción del radio crítico para la aparición de modos azimutales, a partir de la función de razón de crecimiento	77
3.4	Curvas de estabilidad neutral, Reynolds vs k, para diferentes valores de De	81
Capítulo 4.	Análisis lineal de la ecuación de evolución de la onda de un fluido viscoelástico descendiendo sobre una pared cilíndrica caliente (caso no isotérmico)	85
4.1	Gráficas de estabilidad neutral o de Número de onda crítico K_{cr} vs Re	86
4.1.1	Curvas de estabilidad neutral, caso $\delta=10$	86
4.2	Gráficas de razón de crecimiento vs número de onda k	93
4.2.1	Razón de crecimiento para radio adimensional $\delta=10$	94
4.3	Gráficas de Estabilidad Neutral para radio $\delta=5$	98

4.4	Gráficas de Razón de crecimiento vs Número de Onda para radio $\delta=5$	102
Capítulo 5	Estabilidad Hidrodinámica de una capa líquida viscoelástica en una superficie cilíndrica en ausencia de gravedad	106
5.1	Estabilidad lineal de Capas líquidas cuando en ausencia de gravedad. Caso para $\delta = 5$	109
5.2	Estabilidad lineal de Capas líquidas en ausencia de gravedad. Caso para $\delta = 10$	114
5.3	Razón de Crecimiento vs Número de Onda k para una capa líquida en ausencia de gravedad cuando $\delta=5$	121
5.4	Razón de Crecimiento vs Número de onda para una capa líquida en ausencia de gravedad y $\delta=10$	124
Capítulo 6.	Conclusiones al trabajo sobre estabilidad de flujos de capas viscoelásticas en cilindros con y sin calentamiento	130
6.1	Conclusiones de la estabilidad del flujo de una capa líquida viscoelástica descendiendo sobre un cilindro, sin calentamiento (caso Isotérmico)	130
6.2	Conclusiones de la estabilidad del flujo de una capa líquida viscoelástica descendiendo sobre una superficie cilíndrica vertical, (caso No Isotérmico)	133
6.3	Conclusiones de la Estabilidad del Flujo de una capa líquida Viscoelástica que cubre una pared cilíndrica con gravedad reducida.	137
Referencias Bibliográficas		144
Apéndice 1.	Ecuaciones constitutivas del fluido de Oldroyd-B	150
Apéndice 2 .	Balance de Esfuerzos Normales y Tangenciales	155

Estabilidad hidrodinámica de una capa líquida de fluido viscoelástico que fluye hacia abajo por una pared cilíndrica: casos isotérmico y con gradiente de temperatura

Instituto de Investigaciones en Materiales
UNAM
M. Moctezuma-Sanchez

Resumen

En este trabajo de investigación se estudia la estabilidad hidrodinámica de flujos de capas viscoelásticas sobre superficies cilíndricas. Se investigan dos casos principales, la estabilidad de capas viscoelásticas sin calentamiento de la superficie o caso isotérmico y la estabilidad de capas con calentamiento de la superficie cilíndrica o caso no isotérmico. La estabilidad de flujos de capas viscoelásticas con calentamiento, considerando los modos azimutales no ha sido completamente estudiada. El análisis se realiza resolviendo las ecuaciones de momento y de energía para un fluido de Oldroyd B, por un método de perturbación lo que da como resultado una ecuación de evolución de onda no lineal. En el caso isotérmico el aumento de la elasticidad del fluido incrementa la inestabilidad del flujo y aparecen más modos azimutales. En el caso no isotérmico la solución depende del número de Marangoni, y de un número de crispación. En este caso la inestabilidad aumenta con la elasticidad del fluido, y aparecen más modos azimutales que dependen del radio del cilindro, del número de Deborah, y Marangoni en cada caso.

Capítulo 1. Introducción

1.1 Introducción

El estudio de la estabilidad hidrodinámica de capas delgadas que fluyen en superficies planas y cilíndricas ha sido un tema de investigación por décadas. . Recientemente el estudio de la estabilidad de flujos viscoelásticos sobre paredes planas y cilíndricas ha tomado mayor relevancia. Las aplicaciones industriales que involucran este tipo de flujos incluyen el recubrimiento de superficies con pinturas y el recubrimiento de cables con diferentes materiales plásticos. El problema de la estabilidad hidrodinámica en recubrimientos ha sido estudiado por Ruschak (1985). Investigación más reciente ha sido presentada por Weinstein y Ruschak (2004). Otra motivación importante para realizar esta investigación es el recubrimiento de fibras o cables con una capa de polímero o una solución polimérica. El diámetro de algunas de estas estructuras cilíndricas sugiere que en ocasiones se manejen espesores pequeños de recubrimiento.

Algunos de los pioneros en estudiar la estabilidad de flujos de capas líquidas en cilindros fueron Lin y Liu (1975b). Estos autores estudiaron la estabilidad lineal de la superficie libre de una capa de fluido que se aplica a un cable conforme este se jala desde un depósito con una solución polimérica. Sus resultados fueron usados para comparar el resultado de su análisis con experimentos realizados previamente. Homsy y Gayling (1977) también calcularon la estabilidad de una capa que se deposita sobre un cable conforme este se jala desde un depósito lleno con un recubrimiento. Su objetivo era calcular el espesor máximo de recubrimiento.

Otra aplicación también puede ser el flujo en el interior o exterior de tubos de intercambiadores de calor donde los tubos son enfriados por capas líquidas y la transferencia de calor depende del área superficial de las capas líquidas expuestas al aire o a un gas. Las condiciones de frontera en la superficie libre de enfriamiento pueden influir en la estabilidad del flujo de la capa líquida lo cual puede modificar el área superficial de la capa líquida expuesta al aire. (Radhia et al., 2011) realizaron un estudio numérico de evaporación de un flujo tipo anular que circula en el interior de una pared cilíndrica.

El acabado final de las superficies o alambres recubiertos por una capa de un material viscoelástico, dependerá de los parámetros de estabilidad del flujo durante el proceso de recubrimiento. Para este caso es más conveniente reducir la inestabilidad lo cual conduce a una superficie más tersa y libre de perturbaciones. También el enfriamiento de los tubos dentro de un intercambiador de calor dependerá de la estabilidad del flujo, ya que el enfriamiento depende de la superficie total de la capa líquida en cuestión. En este caso es más conveniente, incrementar la inestabilidad del flujo para que el área de superficie libre expuesta al aire exterior se incremente.

Uno de los objetivos de este trabajo es hacer el estudio tridimensional de la estabilidad hidrodinámica del flujo de capas líquidas de fluidos viscoelásticos descendiendo sobre la superficie de un cilindro isotérmico y no isotérmico. Hasta ahora los estudios realizados sobre capas líquidas viscoelásticas descendiendo sobre paredes cilíndricas no consideran un flujo tridimensional (Cheng, Chang y Lai, 2001).

El primer caso cuando se mantiene a temperatura constante la capa de fluido, se desarrolló en una primera etapa de esta investigación. Usando la ecuación constitutiva del modelo de Oldroyd B se investigó la inestabilidad linear con aproximación de longitud de

onda larga, de una capa líquida que fluye en un cilindro vertical por la acción de la gravedad. (Moctezuma-Sánchez, Dávalos-Orozco,2008)

En la primera parte de esta investigación se analiza el problema isotérmico, es decir cuando no se aplica calentamiento a la superficie del cilindro y la capa de fluido se mantiene a temperatura constante e igual a la del aire externo. En este caso aparecen fuerzas viscosas, elásticas y de tensión superficial, pero debido a que la superficie de la capa líquida es isotérmica, no se presentan esfuerzos tangenciales en la superficie del líquido, y por tanto no se presenta el fenómeno de termocapilaridad. Este tipo de flujo se puede caracterizar con los números adimensionales de Reynolds (número adimensional que relaciona las fuerzas inerciales en relación con las fuerzas viscosas en un flujo , $Re=\rho Ua/\mu$, donde ρ es la densidad del líquido, U la velocidad característica del flujo, L una dimensión característica y μ la viscosidad dinámica del fluido en cuestión), del número de Deborah (relación adimensional entre el comportamiento elástico de un fluido respecto a su comportamiento viscoso) y el número de Weber (razón entre las fuerzas inerciales en una partícula de fluido respecto a las fuerzas de tensión superficial que se presenta en una interface de un líquido y un gas)

En el trabajo del estudio de una capa de fluido viscoelastica descendiendo sobre un cilindro (Moctezuma-Sánchez, Dávalos-Orozco, 2008), se obtuvo una ecuación de evolución de onda no lineal que describe la estabilidad de la capa líquida. Dicha ecuación se reduce a la ecuación obtenida por Joo (1994), en su estudio de la estabilidad de una capa de fluido viscoelástico descendiendo sobre un plano, cuando se hace tender el radio del cilindro a infinito en nuestro modelo.

Una primera conclusión de esta primera etapa de este estudio es que la elasticidad del fluido incrementa la inestabilidad por lo que se obtienen mayores razones de crecimiento de la inestabilidad con un mismo número de Reynolds. Otra conclusión es que la elasticidad excita los modos azimutales causando que estos tengan una mayor razón de crecimiento que en el caso de una capa de fluido newtoniano. Sin embargo aunque se incrementa la amplitud de los modos azimutales, el modo axial siempre prevalece en este caso como el modo de mayor inestabilidad. En esta parte de la investigación surgió la pregunta si era posible excitar los modos azimutales calentando el cilindro y la capa de

fluido para que estos tuvieran mayor amplitud que el modo axial en ciertas condiciones de flujo.

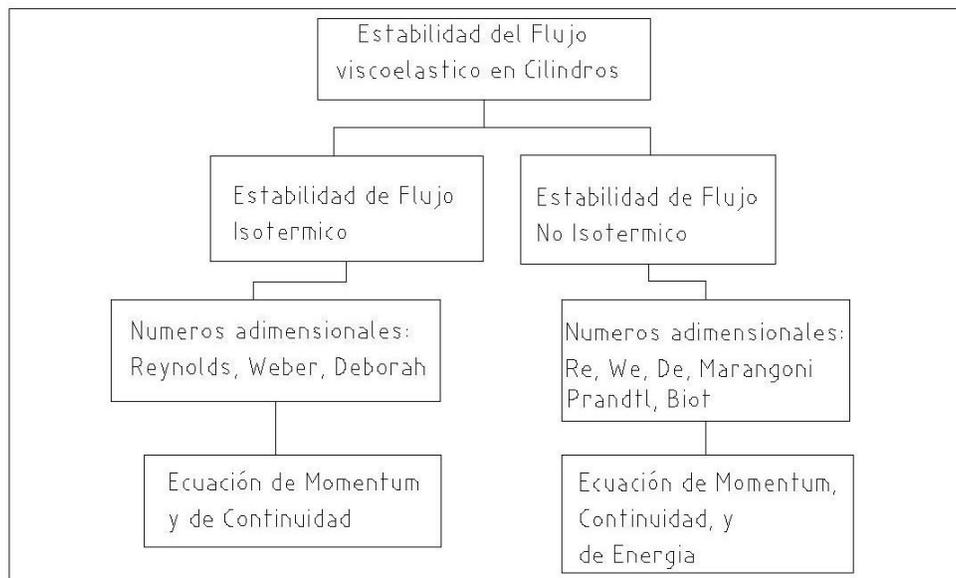


Figura 1.1 Estabilidad Hidrodinámica de flujos viscoelásticos en Cilindros, en flujos isotérmicos y no isotérmicos.

En la segunda parte de este trabajo, analizamos el problema cuando la superficie del cilindro es sujeta a una temperatura constante diferente a la temperatura exterior del aire en contacto con la superficie libre. En este caso el calentamiento del cilindro provoca un perfil de temperatura en la capa líquida y en la superficie libre del fluido. Para este problema se tiene que resolver la ecuación de momento y la ecuación de balance de energía para determinar el comportamiento del flujo. Como se explicara en el desarrollo de este estudio, el gradiente de temperatura en la superficie libre origina esfuerzos tangenciales que no se presentan en el problema isotérmico, lo que a su vez causa que los modos azimutales se exciten más debido al cambio de condiciones en el balance de momento en la dirección angular.

El problema estacionario de una capa líquida horizontal fluyendo sobre una pared calentada en ausencia de gravedad (conocido como el problema térmico de Marangoni) fue investigado primero por Pearson (1958), para una variedad de condiciones de frontera. El mismo problema pero con la posibilidad de que la superficie libre del fluido se deforme fue investigada para una variedad de condiciones por Scriven y Sterling (1964). Posteriormente se comenzó a estudiar el fenómeno cuando se agrega una velocidad

principal a la capa de fluido. El problema de una capa líquida en movimiento sobre una superficie con calentamiento ha sido investigada por Kelly et al. (1986) y también por Goussis y Kelly (1991).

Debido al calentamiento del cilindro y el perfil de temperatura se presentan esfuerzos de tensión superficial, los cuales influyen en la estabilidad del flujo de la capa líquida (fenómeno de termocapilaridad de Marangoni). Dichos esfuerzos interactúan con las fuerzas viscosas y elásticas y para caracterizarlos se necesita usar otros números adimensionales como el número de Marangoni (competencia de los esfuerzos viscosos y de tensión superficial) y el número de Prandtl (relación de tiempos de transporte de energía por difusión térmica de un material respecto a la difusión de energía de momento por la viscosidad de un fluido).

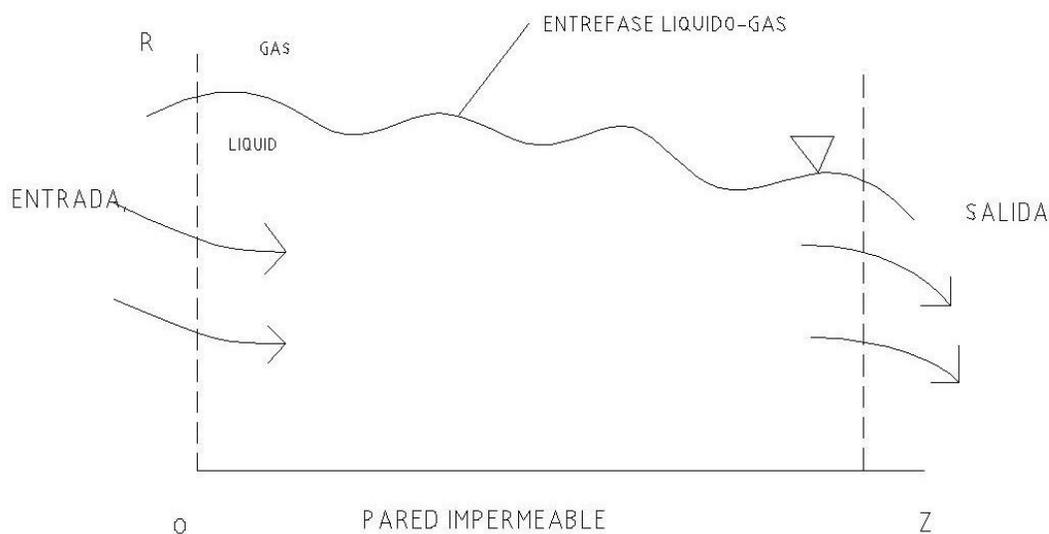


Figura 1.2. Diagrama que muestra el flujo de una capa líquida sobre un plano. Se muestra tanto la entrada y salida de fluido a cada lado, como la interface líquido gas donde se presentan tanto esfuerzos normales como esfuerzos tangenciales.

(Lin, 1975) fue uno de los primeros autores en estudiar la estabilidad lineal de una capa con un perfil de temperatura fluyendo sobre un pared. Este autor calculo el número de Reynolds crítico lineal Re_c , para la inestabilidad en la aproximación de número de onda pequeño. También encontró que este número critico depende del número de Marangoni y del número de Prandtl en el caso del flujo de una capa líquida en una pared plana. Este problema fue más tarde extendido al caso de ángulos muy pequeños de inclinación en la pared por Sreenisavan y Lin (1978).

La estabilidad del flujo de una capa líquida sobre un cilindro con calentamiento para un fluido newtoniano fue estudiada por Dávalos y You (2000). En su estudio resolvieron la estabilidad no lineal del flujo de una capa líquida sobre un plano que incluye calentamiento. Estos autores encontraron que aumentando el número de Marangoni se puede incrementar la inestabilidad del flujo y también se pueden excitar los modos azimutales. También encontraron que para ciertas condiciones del número de onda, los modos azimutales pueden ser más relevantes que el modo axial. El problema de la estabilidad no lineal del flujo tridimensional de una capa líquida sobre un cilindro que incluye calentamiento pero para un fluido viscoelástico no ha sido resuelto por completo según mi conocimiento del tema.

En el primer capítulo de esta tesis, se realiza una revisión bibliográfica del tema de la estabilidad hidrodinámica de capas que fluyen en paredes planas y cilíndricas. Primero se revisan los casos de flujos de fluidos newtonianos, y después se analizan los casos que incluyen fluidos viscoelásticos. En la segunda parte de este capítulo, hago un resumen de los trabajos hechos en flujos sobre paredes y cilindros no isotérmicos, es decir cuando la superficie se calienta y se mantiene a una temperatura constante. Se le dará mayor atención al flujo de fluidos viscoelásticos en paredes con calentamiento, ya que es el tema de esta tesis. Este tipo de problema cuando existe la competencia entre las fuerzas viscosas y las de tensión superficial debido a gradientes de temperatura se conoce como el problema termocapilar.

En el segundo capítulo se presentan las ecuaciones que modelan el flujo de una capa líquida descendiente sobre un cilindro. Primero se resuelven las ecuaciones de balance de masa y de cantidad de movimiento, que definen el problema isotérmico de nuestro trabajo. Se enuncian las ecuaciones de movimiento para un fluido en general que puede ser

newtoniano o no newtoniano y se aplican las condiciones de frontera en la superficie libre de la capa líquida, así como las condiciones en la superficie del cilindro.

Para el segundo problema se parte de las ecuaciones momento que se resuelven en el primer problema y se agrega la ecuación de energía y se resuelve dicha ecuación junto con las condiciones de frontera que aplican cuando se calienta el cilindro interno. Esta ecuación sirve para explicar el problema termocapilar.

Las ecuaciones de continuidad y de momentum se resuelven por un método de perturbación, donde las componentes de velocidad y la presión, se separan en una componente principal o lineal, y varias perturbaciones de orden 1,2, etc. en un coeficiente ε . ε es un parámetro pequeño proporcional al cociente de la amplitud de la perturbación entre la longitud de onda de la superficie libre $\varepsilon=h_0/(2\pi\lambda)$, donde h_0 es la amplitud de la deformación de la capa líquida y λ es la longitud de onda de la perturbación. La aproximación de longitud de onda larga ha sido usada por diferentes autores desde que se comenzó a estudiar el tema de la estabilidad en capas líquidas tanto en planos (Yih, 1955), como en superficies cilíndricas (Lin,1975b).

Como se ha comentado, (Dávalos, You, 2000) analizaron la estabilidad de una capa líquida en el flujo tridimensional sobre un cilindro con calentamiento. En su estudio obtuvieron la estabilidad de los modos azimutales y además demuestran que el gradiente de temperatura en la superficie libre, modifica las condiciones de esfuerzo tangencial en la superficie del fluido. Una de sus conclusiones es que incrementando el número de Marangoni en su modelo aumenta la inestabilidad de los modos azimutales. Además ciertos modos azimutales pueden tener mayor magnitud y razón de crecimiento que el modo axial para ciertos parámetros.

En nuestro caso también se resuelve el flujo tridimensional considerando las tres ecuaciones de cantidad de movimiento y la ecuación de energía para un fluido viscoelástico. El objetivo es encontrar como influye el calentamiento en el cilindro en los esfuerzos tangenciales debido al cambio de tensión superficial causado por el gradiente de temperatura y como se excitan estos modos azimutales para una capa de fluido viscoelástico. Se realiza un análisis lineal, porque al tener muchas variables y fenómenos en competencia (fuerzas viscosas, de tensión superficial, elásticas, inercia, esfuerzos por

termocapilaridad) el problema se vuelve difícil de resolver, pero con este tipo de análisis se busca simplificar el problema para poder ser manejado analíticamente.

Al considerar el flujo tridimensional se incluyen los modos azimutales en la solución, pues consideramos que estos son relevantes para estudiar la estabilidad global del flujo y además son excitados cuando se calienta la pared del cilindro por la elasticidad del fluido.

Las ecuaciones de cantidad de movimiento se escriben para un flujo en general (newtoniano o visco elástico). Se usa la ecuación del modelo de Oldroyd B, como ecuación constitutiva del fluido viscoelástico. El Modelo de Oldroyd B (1950), es una expresión empírica que generaliza la ecuación lineal viscolástica escribiendo las ecuaciones de esfuerzo/rapidez de deformación en forma tensorial. El modelo de Oldroyd B tiene las ventajas que describe adecuadamente algunas de las propiedades de los fluidos viscoelásticos como los esfuerzos normales, así como la relación no lineal del esfuerzo de corte con la rapidez de deformación de corte.

Los modelos diferenciales del tipo de Oldroyd tienen utilidad para describir el flujo de soluciones diluidas de moléculas de fluidos en un solvente (Owens, 2002). Otros modelos que toman en cuenta la viscosidad adelgazante al corte (tipo FENE, Phan Tien Tanner) o modelos integrales del tipo K-BKZ son más apropiadas para soluciones concentradas de polímeros y para flujo de polímeros fundidos (plásticos). El modelo de Oldroyd B también es derivable de un modelo molecular que consiste de una suspensión de partículas esféricas (dumbbells) unidos con un resorte de Hooke disueltos en un solvente. Este modelo es apropiado para describir la viscosidad al corte y la aparición del esfuerzo normal debido a la viscoelasticidad, sin embargo tienen algunos defectos al describir la viscosidad elongacional de una solución polimérica, (Owens, 2002) En este trabajo no se presentan grandes esfuerzos extensionales, como se verá durante el desarrollo, por lo que considero que para nuestro caso el modelo Oldroyd B es apropiado para resolver el problema de flujo y de estabilidad de una capa líquida viscoelástica descendiendo sobre una pared cilíndrica.

En estudios sobre estabilidad lineal de una capa de fluido viscoelástico con viscosidad adelgazante que desciende sobre un plano inclinado, Joo (1992), realizó un análisis de estabilidad lineal de una capa de fluido viscoelástico descendiendo sobre un plano inclinado. Una de las conclusiones de este autor es que la viscoelasticidad aumenta

la inestabilidad de las perturbaciones, esto se debe en parte a la energía elástica que regresa el fluido a la superficie y que hace más inestable el flujo. De acuerdo a esto la superficie libre se puede desestabilizar para las mismas condiciones de tensión superficial con un número de Reynolds menor que cuando se usa un fluido newtoniano.

Shaqfen et al. (1989), también estudio el flujo de un fluido viscoelástico sobre un plano inclinado. En su trabajo demostró que la viscoelasticidad tiene un efecto desestabilizador en las perturbaciones en la superficie libre para números de Reynolds pequeños. Sin embargo también encontró, que la propiedad viscoelástica tiene un efecto estabilizador en el flujo y la superficie libre, para números de Reynolds moderados.

En su trabajo Joo (1992) también uso el modelo de Oldroyd B, pero también incluyo en su modelo, el cambio de viscosidad por rapidez de deformación al corte. Nuestro modelo de la estabilidad en un cilindro es análogo al modelo de Joo para un plano y sigue un procedimiento similar para deducir las ecuaciones de momentum y describir los esfuerzos viscoelásticos en el flujo de una capa viscoelastica en un cilindro.

El modelo de Oldroyd B tiene una constante de relajamiento y una de retardo, que modelan la viscoelasticidad del fluido. El modelo también puede incluir una viscosidad adelgazante al corte, es decir donde la viscosidad se reduce conforme aumenta la rapidez de corte en el flujo. Un ejemplo, son las pinturas que reducen su viscosidad cuando aumenta la rapidez de corte. En estudios sobre estabilidad y el desarrollo no lineal del flujo de una capa viscoelastica con viscosidad adelgazante, Joo (1994) encontró que el cambio de viscosidad con el ritmo de corte no afecta la inestabilidad de la capa liquida y solo modifica la velocidad de fase de las perturbaciones.

En el trabajo realizado sobre la estabilidad del flujo de una capa viscoelástica sobre un cilindro (Moctezuma-Sánchez, Dávalos-Orozco, 2008), se encontró que la elasticidad del fluido aumenta la inestabilidad del flujo aumentando la razón de crecimiento del modo axial, pero también promueve la aparición de más modos azimutales con mayores razones de crecimiento. Por lo tanto surgió el interés de revisar si incluyendo el efecto del calentamiento y del fenómeno termocapilar se excitaría más los modos azimutales en la solución del flujo tridimensional.

La segunda pregunta que buscamos responder con esta tesis, es la influencia que tiene el calentamiento del cilindro, en la inestabilidad del flujo y en segundo grado en la aparición y magnitud de los modos azimutales en la solución. Por lo tanto para analizar el

flujo en nuestro problema, resolvemos las 3 ecuaciones de movimiento, y consideramos el movimiento del fluido con sus tres componentes, sin considerar a priori el flujo como axisimétrico. En nuestro modelo resolvemos las ecuaciones de momento tridimensionales en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) incluyendo las tres velocidades en este sistema de coordenadas $(V_r, V_\theta, \text{ y } V_z)$.

En el pasado muchos de los estudios en capas líquidas sobre cilindros se han realizado para fluidos newtonianos, (Lin y Liu, 1975b), (Krantz y Zollars, 1976). El estudio de la estabilidad de capas líquidas de fluidos viscoelásticos es más reciente. Por ejemplo Hung et al. (1996), estudiaron la estabilidad no lineal de una capa líquida de fluido micropolar. En su estudio encontraron que las propiedades micro-polares influyen en la estabilidad del flujo. En estudios más recientes, Cheng, Chang y Lai (2001) hicieron una investigación sobre la estabilidad de una capa líquida de un fluido viscoelástico de segundo orden. En su estudio usaron un método de perturbación de aproximación de onda larga para resolver las ecuaciones no lineales de movimiento. Para obtener el análisis lineal de estabilidad usan el método de parámetros normales, el cual también usamos en nuestro estudio para resolver la estabilidad lineal pero en el caso del flujo tridimensional de la capa líquida de fluido viscoelástico.

Para obtener la estabilidad no lineal Cheng et al. (2001) usaron el método de escalas múltiples para obtener la dinámica no lineal débil del problema. Su trabajo se enfoca más en las condiciones de supercriticalidad y de subcriticalidad del flujo. En sus resultados concluyeron dos factores aumentan la inestabilidad del flujo: al aumentar el efecto viscoelástico y reducir el radio del cilindro. Una de sus conclusiones fue que el aumento de la curvatura lateral en la capa líquida aumenta la inestabilidad de las perturbaciones en la capa líquida.

En su solución Cheng et al. (2001) usan en su análisis un flujo asimétrico de un fluido de segundo orden descendiendo sobre un cilindro usando un modelo de fluido Walters B para su investigación. El fluido de Walters B es una buena aproximación para fluidos con poca elasticidad o para flujos con razón de deformación pequeña. Como primera aproximación da buenos resultados, sin embargo tiene limitaciones para fluidos con mayor elasticidad o para flujos con mayor rapidez de corte (Shaqfeh, Larson y Fredrickson, 1988)

Además, estos autores analizan el flujo sobre el cilindro, resolviendo solo las ecuaciones en la dirección axial y radial, despreciando la ecuación en la dirección angular. Por tanto desprecian la influencia de los componentes y modos azimutales en la solución. Una de las posibles razones por las que no consideran las componentes azimutales es que en algunos estudios se ha demostrado que para ciertas condiciones el modo axial principal es el más inestable para fluidos newtonianos y sin calentamiento. (Schlang y Sivashinki, 1982) realizaron un análisis lineal de las ecuaciones tridimensionales del flujo newtoniano sobre un cilindro vertical. En su estudio usaron la aproximación de onda larga, pero también usaron una aproximación con tensión superficial grande. En sus conclusiones encontraron que además del modo axial principal aparecen modos azimutales en la solución. Además existe un radio crítico que depende del número de Reynolds y la tensión superficial. Con radios menores a este radio crítico no aparecen los modos azimutales y el flujo se compone de un solo modo axial. Al aumentar el radio del cilindro aparecen más modos azimutales, sin embargo el modo axial principal siempre tiene mayor razón de crecimiento.

En el estudio que realizamos (Moctezuma-Sánchez, Dávalos-Orozco, 2008) sobre el flujo de una capa de fluido viscoelástico isotérmica hemos encontrado que los modos azimutales aumentan su inestabilidad al aumentar el efecto viscoelástico y también aparecen más modos azimutales cuando se aumenta el radio del cilindro. En dicho trabajo encontramos que existe un radio crítico en el cual para radios mayores a este radio crítico aparecen los modos azimutales y debajo del cual se suprimen los modos azimutales considerando el efecto de la viscoelasticidad. El radio crítico para este caso se modifica e incluye el número de Deborah. (Ver ecuación 3.11). El radio crítico para este caso se reduce cuando aumenta el número de Deborah, (Moctezuma-Sánchez, Dávalos-Orozco, 2008). O también se puede interpretar que al agregar elasticidad al fluido se reduce el número de Reynolds crítico para el cual aparecen los modos azimutales para un radio fijo.

El análisis de Cheng, Chang y Lai (2001) este enfocado en otra dirección. En su caso se enfocan en revisar las condiciones de supercriticalidad y subcriticalidad del flujo. Al realizar un análisis de la dinámica no lineal débil del flujo, el análisis se simplifica usando solo las ecuaciones para el problema asimétrico. Es posible que estos autores decidieran usar un flujo asimétrico para obtener una solución menos complicada, ya que

realizan posteriormente un análisis no lineal débil que es complejo de analizar.

De hecho la solución de Cheng et al. (2001) es un método válido para explorar la estabilidad no lineal si entre otros factores se cumple que el radio del cilindro es menor al radio crítico que se obtuvo en nuestro trabajo del flujo viscoelástico en un cilindro (Moctezuma-Sánchez, Dávalos-Orozco, 2008) . Sin embargo estos autores no mencionan alguna condición necesaria para que el flujo se pueda resolver de forma axisimétrica sin despreciar algunos efectos como la aparición de modos azimutales en la solución.

En el problema que abordo es diferente, pues se pretende analizar la combinación del efecto viscoelástico junto con el efecto del cambio de temperatura en la superficie libre sobre la aparición de los modos azimutales. Para realizar este objetivo, es necesario considerar las tres ecuaciones de movimiento y las condiciones de esfuerzo tangencial usando el método de parámetros pequeños. En los capítulos 3 y 4 demostraremos que para nuestro problema los modos azimutales incrementan su razón de crecimiento debido al efecto viscoelástico (capítulo 3) y al incrementar el número de Marangoni (capítulo 4) .

En el capítulo 3 se mostrara que los modos azimutales aparecen cuando se incrementa la viscoelasticidad y el radio del cilindro para el caso isotérmico. Aunque en este caso a cierto número de onda el modo axial es más inestable para todas las condiciones de número de onda. En el capítulo 4 para el caso no isotérmico del flujo sobre un cilindro debido a la gravedad se muestra que algunos modos azimutales adquieren mayor razón de crecimiento que el modo axial para números de onda pequeño, cuando se incrementa el número de Marangoni y el efecto viscoelástico.

En el caso del problema isotérmico (capítulo 3), se seleccionan valores de Reynolds y del número de Weber y se incrementa progresivamente el número de Deborah. Al aumentar el número de Deborah tanto el modo axial como los modos azimutales aumentan su razón de crecimiento. Los modos azimutales aumentan su razón de crecimiento conforme se aumenta el número de Deborah y al reducir el radio del cilindro. Pero para una misma serie de parámetros (Re, We, De) aparecen más modos azimutales cuando se incrementa el radio del cilindro. Como se ha comentado se puede calcular el radio crítico mínimo a partir del cual se suprime la aparición de los modos azimutales.

Posteriormente fijando el número de Re y We , se encontraron combinaciones de De y del radio del cilindro para los cuales el modo azimutal $n=1$ tiene una magnitud de razón

de crecimiento muy cercana al modo axial principal en todo el rango de valores de número de onda validos en la aproximación del problema. Incluso en el número de onda de máximo crecimiento de la inestabilidad el modo azimutal se acerca mucho al modo axial. Pero el modo axial es el que alcanza la mayor razón de crecimiento en cada caso.

Para el problema no isotérmico, ciertos modos azimutales ($n=1,2,3,..$) pueden tener una razón de crecimiento más grande respecto al modo axial a números de onda pequeño. La aparición de estos modos también se incrementa con el efecto viscoelástico y aumentan su razón de crecimiento cuando se aumenta el número de Marangoni. Si se mantienen estas condiciones en un flujo, estos modos azimutales pueden tener mayor razón de crecimiento que el modo axial. Cuando se incrementa el número de Marangoni aparece un fenómeno interesante en el que aparece mayor inestabilidad para números de Reynolds pequeños y para estos casos los modos azimutales superan al modo axial para valores de número de onda pequeño. Sin embargo a cierto número de onda la magnitud del modo axial rebasa la magnitud del modo azimutal con $n=1$.

El modelo que hemos desarrollado considera las ondas o perturbaciones en la dirección axial y también obtiene las perturbaciones en la dirección angular. Por esta razón reviso a continuación los artículos que considero clave para analizar problemas en que aparecen los modos azimutales y determinar cuando tienen mayor relevancia.

Schlang y Sivashinski(1982) estudio la estabilidad de las perturbaciones tanto axiales como azimutales en el flujo de una capa liquida descendiendo sobre un cilindro. En su análisis han demostrado que el flujo en una capa líquida se compone no solo del flujo de ondas en la dirección axial o principal, sino que también aparecen ondas sobrepuestas azimutales en este flujo principal. El resultado es un flujo complejo compuesto de ondas axiales y azimutales que interactúan entre ellas.

Schlang y Sivashinsky (1982), obtuvieron una ecuación de evolución de onda para la altura de la capa $h(z, \theta, t)$, escalada respecto a h_0 , la magnitud del espesor de la capa en flujo estacionario, que es válida para orden $o(\epsilon^3)$. Siendo ϵ un parámetro pequeño relacionado con el cociente del espesor de la capa entre el número de onda de la perturbación. Estos autores usaron una aproximación de tensión superficial grande, para poder resolver la ecuación por un método de perturbación. En su ecuación se obtiene la influencia de los modos azimutales en el flujo total, para este tipo de aproximación. En sus

resultados concluyeron que para un radio menor a un radio crítico mínimo, los modos azimutales se suprimen de la solución. Pero si el radio es mayor a este radio crítico, aparecen mayor número de modos azimutales y también aumenta la amplificación de estos modos.

Cheng y Chang (1992), también analizan la estabilidad de flujos asimétricos, sujetos a perturbaciones tanto azimutales, como en la dirección del flujo axial. Estos autores usaron una solución similar a la de Schlang y Sivashinsky (1982), pero consideraron la interacción no lineal de las ondas conforme se desarrolla el flujo a lo largo del cilindro. En estudios de estabilidad lineal se puede obtener el número de onda de máximo crecimiento con el cual se moverán las perturbaciones en el flujo usando el método de parámetros normales. De acuerdo a este tipo de análisis el flujo de la superficie libre estaría compuesto de ondas monocromáticas de un solo valor de número de onda. Sin embargo experimentalmente el flujo rara vez es monocromático y está compuesto por una serie de ondas en la superficie multicromática con números de onda alrededor del número de onda de máximo crecimiento (Kapitza, 1949).

Cheng y Chang(1992) consideraron las ondas azimutales que se suman a las ondas en la dirección axial. También determinaron que las perturbaciones en la dirección axial son las de máximo crecimiento. En otras investigaciones (Lin y Liu, 1975) han determinado que las ondas en la dirección axial se pueden desestabilizar con las ondas azimutales y las ondas axiales de longitud de onda mayor. Las ondas que se vuelven inestables no aparecen finalmente en el flujo que desarrolla en el cilindro. Sin embargo las ondas que son estables a las perturbaciones azimutales y axiales de mayor o menor longitud de onda prevalecen en el flujo totalmente desarrollado.

Cheng y Chang (1992) mediante un análisis no lineal del flujo y de las perturbaciones de la superficie libre encontraron una ventana de perturbaciones alrededor del número de onda de máximo crecimiento, para el cual las ondas axiales son estables a las perturbaciones azimutales. Sin embargo también encontraron que las ondas axiales de numero de onda entre cero y un valor critico que depende de varios parámetros, se pueden desestabilizar con las ondas azimutales. (Cheng y Chang, 1992) concluyeron que para el caso de un flujo de una capa liquida de fluido newtoniano aparecen modos azimutales en la solución lineal de la ecuación de evolución de onda de la capa liquida, siendo el modo axial el de máximo crecimiento que domina el flujo en estado estable.

Como nuestro trabajo trata de la estabilidad de capas de fluidos viscoelásticos para el caso isotérmico y no isotérmico, se analizó la influencia de la elasticidad en los modos azimutales. Se ha investigado si se incrementa la inestabilidad de los modos azimutales y si alguno de estos modos solo o combinado con un modo axial con cierto número de onda aparece en el flujo principal combinado con los modos axiales. En el caso de fluidos newtonianos, los modos azimutales son capaces de desestabilizar los modos axiales de número de onda pequeño, de acuerdo al trabajo de Chang (1992). En nuestro trabajo solo llegamos hasta el análisis lineal del flujo por lo que no podemos determinar en qué caso los modos azimutales desestabilizan a los modos axiales. Pero hemos determinado para qué rango de valores del número de onda, los modos azimutales adquieren razones de crecimiento mayores a la del modo axial.

Desde el punto de vista de aplicaciones este flujo puede aplicarse al recubrimiento de cables o alambres, con plásticos o resinas, y también en el caso de flujos descendentes en tubos en intercambiadores de calor. En procesos de recubrimiento se pretende obtener superficies homogéneas en su acabado superficial por lo tanto es mejor tener un flujo más estable y con menos perturbaciones en la superficie libre. Hemos comentado que en flujos de fluidos viscoelásticos de capas líquidas descendentes, la inestabilidad de las ondas y perturbaciones aumenta con la curvatura del cilindro, y con la elasticidad del flujo. Como a radios pequeños aumenta la inestabilidad de la superficie libre sería aconsejable aumentar el radio del cilindro para disminuir la inestabilidad. Pero este radio puede ser limitado por el radio crítico en el cual comienzan a aparecer los modos azimutales.

De esta forma se podría elaborar una fórmula o una serie de parámetros en función del número de Reynolds y de Deborah, para determinar un radio mínimo para no incrementar demasiado la inestabilidad en la superficie o para radios mayores a partir de los cuales se presentan los modos azimutales. Como esto depende del número de Reynolds, Webber, del número de Deborah y en el caso del perfil no isotérmico de Marangoni y Prandtl no es necesariamente un trabajo sencillo, pero se podría elaborar una serie de parámetros de proceso para una cierta aplicación. Sin embargo nuestro objetivo no es realizar esta serie de parámetros, sino resolver el problema de estabilidad del flujo descrito en este capítulo.

Parte de los objetivos de esta investigación es obtener la razón de crecimiento de la capa líquida con respecto al número de onda. Con la curva de razón de crecimiento vs el

número de onda se puede obtener el número de onda crítico a partir del cual se presenta inestabilidad en el flujo. Este trabajo tiene como objetivo obtener el comportamiento general de los flujos descendentes, cuando se usan fluidos viscoelásticos cuando el flujo es isotérmico u cuando se aplica calentamiento al cilindro y la capa líquida y determinar el impacto de los modos azimutales en el flujo total.

1.2 Revisión Bibliográfica:

Las capas líquidas que fluyen sobre un plano inclinado o una superficie por el efecto de la gravedad, pueden volverse inestables debido a diferentes causas. Para flujos isotérmicos el modo más común es la inestabilidad por ondas en la superficie por tensión superficial, (Yih, 1954), Benjamin (1957). En lo sucesivo denominaremos a este tipo de fenómeno: inestabilidad superficial o inestabilidad por formación de ondas en la superficie libre en el flujo de una capa líquida. Cuando el espesor de la capa o el ángulo de inclinación superan ciertos valores de corte, la superficie libre de la capa líquida se vuelve ondulada y varios movimientos de ondas se superponen al flujo principal. Para flujos con capas de longitud de onda pequeña, en muchos casos la tensión superficial suprime dichas ondas por lo que las ondas que normalmente crecen y se desarrollan son las de longitud de onda mucho mayor al espesor de la capa líquida.

1.2.1 Estudios de estabilidad de capas delgadas de fluidos newtonianos en superficies planas

La inestabilidad superficial en flujos de capas líquidas de fluidos newtonianos ha sido un tema importante de investigación en el campo de la física de los fluidos por varias décadas. Kapitza (1948) fue uno de los primeros investigadores en estudiar el flujo de capas delgadas de fluidos en planos inclinados. Este autor uso el método integral de momento para predecir el perfil de velocidad de la capa límite y así estudiar la estabilidad de una capa líquida.

Yih (1955) estudió el flujo de una capa líquida newtoniana en un plano inclinado. Este investigador obtuvo una solución analítica de la ecuación de Orr-Sommerfeld, usando una expansión de las variables en el coeficiente αRe (en su notación, α =número de onda

por el número de Reynolds) y resolvió la ecuación por métodos numéricos. Sus resultados son correctos para número de Reynolds pequeño. En un artículo posterior Benjamín (1957), obtuvo una solución analítica y dio curvas de estabilidad del flujo, determinando que el flujo sobre paredes inclinadas es inestable, para cualquier número de Reynolds. Ambos investigadores determinaron con su estudio el espesor crítico de la capa líquida y el número de onda crítico del flujo.

Ya que el método era demasiado laborioso, Yih propuso un nuevo método que se puede resolver analíticamente. Yih (1963) hizo un análisis de estabilidad lineal del problema, considerando número de onda pequeño, es decir, que la longitud de onda de las perturbaciones es mucho mayor que la deformación de la capa líquida, y por otro lado también para número de Reynolds pequeño. Con su análisis de Re pequeño obtuvo el número de Reynolds crítico, el ángulo de fase y la frecuencia de corte para la estabilidad del flujo correspondiente. Con su análisis Yih (1963) obtuvo la razón de crecimiento:

$$\Gamma = \frac{6\alpha Re}{5} - \frac{\alpha(3 \cot \beta + \alpha^2 S Re)}{3} \quad \text{Ec. (1.1)}$$

Donde α es el número de onda de la perturbación, β =ángulo de inclinación de la capa, Re =número de Reynolds= U_0/ν y ν = viscosidad cinemática del fluido. S es un número adimensional proporcional a la tensión superficial de la interface líquido gas. $S = \gamma/(\rho h_0 W_0^2)$ es el número de Weber que es un cociente de la fuerza debida a la tensión superficial γ , dividido por las fuerzas de inercia actuando sobre el fluido en la interface fluido aire. h_0 es el espesor de la capa líquida, ρ la densidad del fluido.

En esta ecuación se pueden apreciar factores que controlan el crecimiento de la inestabilidad. La razón de crecimiento aumenta con el número de Reynolds, sin embargo a números de Reynolds pequeños puede disminuir la inestabilidad al aumentar Re .

Conforme β aumenta se incrementa la inestabilidad de la superficie libre y la tensión superficial tiene un efecto de estabilizar las perturbaciones en la superficie libre.

Algunos de las características de la estabilidad del flujo en un plano inclinado que observo Yih (1963) son las siguientes:

- a) El flujo de las ondas de mayor longitud de onda son menos estables que las ondas de menor longitud de onda en la superficie libre.
- b) El flujo es más inestable conforme se incrementa el ángulo del plano inclinado.

- c) El flujo sobre un plano vertical se vuelve más inestable conforme Re se aproxima a cero. (esto se puede apreciar en el primer término de la ecuación (1.1) ya que el segundo término se elimina.
- d) La superficie libre se vuelve relativamente más estable conforme la tensión superficial aumenta.

El estudio de Yih (1963) explico varios efectos en la estabilidad de capas líquidas sin embargo no explica problemas relacionados con el análisis no lineal del fenómeno.,

Posteriormente Benney (1966), realizó un análisis fundamental no lineal a partir de las ecuaciones de momento y de continuidad. Benney obtuvo una ecuación no lineal de evolución de la onda superficial usando el método de parámetros pequeños, que describe adecuadamente el flujo para una capa líquida a bajo número de Reynolds. La ecuación que obtiene describe la dinámica de la deformación de la capa líquida h en función de los parámetros del flujo. Una parte de este estudio se enfoca en obtener la ecuación de evolución no lineal de onda o de Benney, para un flujo de una capa líquida viscoelástica sobre un cilindro ya sea isotérmico, o no isotérmico. La ecuación de Benney puede ser usada para analizar la dinámica no lineal del comportamiento de la capa líquida, sin embargo no se puede usar para obtener condiciones de supercriticalidad. (Po Jeng Cheng et. al, 2000)

Gjevic (1970), usó la ecuación de Benney y un método de parámetros normales para obtener un número de onda suscritico k_s , por debajo del cual la solución no se satura. La saturación de onda no lineal de las ondas en la superficie libre alcanza una amplitud que permanece estacionaria. La ecuación de Benney también ha sido resuelta numéricamente en tiempo y espacio por Davalos Orozco et al. (1997) En su estudio estos autores usaron una excitación sobre la superficie libre con una frecuencia fija y calcularon la deformación de la capa por un método numérico.

Su estudio fue extendió al problema de una capa líquida sobre un plano inclinado con rotación. Este problema es de interés para el caso que pretendo resolver, pues en el fenómeno aparecen fuerzas centrífugas y la fuerza de Coriolis sobre el fluido. Las fuerzas centrífugas pueden desestabilizar el flujo, pero la fuerza de Coriolis influye en los esfuerzos tangenciales, y puede hacer que ciertos modos azimutales aparezcan en la solución y que tengan mayor magnitud que el modo principal.

La estabilidad lineal de capas líquidas fluyendo sobre un plano inclinado en rotación fue investigado por Dávalos-Orozco y Luis Chavarria (1992). Estos autores encontraron que para una aproximación de número de onda pequeño la fuerza de Coriolis puede estabilizar el flujo para algunos ángulos de propagación de la perturbación y que esta puede reducir la razón de crecimiento de la perturbación. Pero en una aproximación de número de onda pequeño y número de Taylor pequeño encontraron que el número de Taylor (que representa la fuerza de Coriolis) puede desestabilizar el flujo, (Dávalos-Orózcó, 2013). El efecto de la fuerza de Coriolis es similar al efecto de los esfuerzos termocapilares ya que produce una excitación en los esfuerzos tangenciales, lo que modifica las ecuaciones de balance de momento en la dirección angular. Por lo tanto los modos azimutales adquieren mayor magnitud tanto en flujos de planos en rotación como cuando se aplica calentamiento en la capa líquida.

1.2.2 Estudios de estabilidad de flujos de capas delgadas de fluidos newtonianos en superficies cilíndricas

En este trabajo analizamos la estabilidad hidrodinámica de una capa líquida de material visco elástico descendiendo sobre una superficie cilíndrica con calentamiento (ver figura 1.3). El problema de capas delgadas fluyendo sobre superficies cilíndricas ha sido un tema de investigación debido a las aplicaciones como: el condensado de líquidos en tubos, enfriamiento de tubos, refrigeración, recubrimiento de superficies, etc.

Unos de los primeros investigadores interesados en el problema del flujo de una capa líquida de fluido newtoniano sobre un cilindro fueron Eiji-Hasegawa y Choji-Nakaya (1970). En su estudio encontraron que el incremento de la curvatura del cilindro al reducir el radio del cilindro causa el incremento de la inestabilidad de las ondas en la superficie libre. También encontraron que el flujo de una capa en el interior de un cilindro es más inestable que el flujo en el exterior. Concluyeron que el flujo en un cilindro es más inestable que los flujos sobre un plano inclinado. La solución de Hasegawa comienza planteando las ecuaciones de flujo en un cilindro de una manera análoga a lo resuelto por Yih para el caso del plano. Con esto obtiene una ecuación de tipo Orr-Sommerfeld que obtuvo Yih (1963) para el plano. Hasegawa et al. (1970) obtuvieron una solución numérica a partir de dos soluciones, una que parte de la superficie del cilindro y otra que parte de la

superficie libre. Al final obtiene una ecuación cuyos valores característicos determinan la estabilidad del flujo del problema que resuelve.

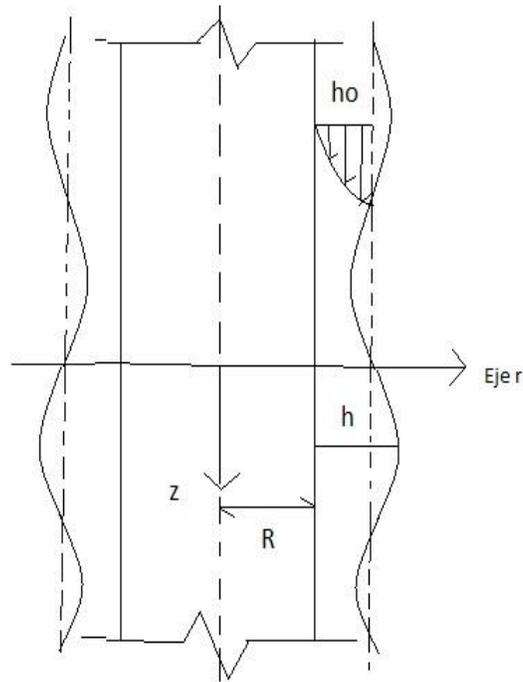


Figura 1.3 Capa de fluido visco elástico descendiendo sobre un cilindro vertical y con ondas en la superficie libre.

Lin y Liu (1975) estudiaron la estabilidad lineal de la superficie libre cuando se aplica un recubrimiento sobre un cable que se jala desde un recipiente con solución polimérica. Su propósito fue comparar su solución analítica con resultados experimentales. Krantz y Zollars (1976), presentaron una solución asintótica, similar a la solución de Lin y Liu, para la estabilidad del flujo de una capa y señalaron que el efecto de la curvatura en la estabilidad superficial es de una influencia mayor. Concluyeron que la curvatura en el cilindro es uno de los factores más importantes que incrementan la inestabilidad del flujo de la capa líquida. Estos autores realizaron cálculos lineales, y de sus resultados concluyeron que es un error hacer experimentos en cilindros verticales para medir la inestabilidad correspondiente a un plano inclinado.

El efecto de la curvatura del cilindro se refleja en la fuerza de tensión superficial. Este término depende de la inversa del radio, que representa la curvatura de la sección de un cilindro uniforme. Desde el punto de vista de la estabilidad el crecimiento de este término incrementa la inestabilidad debido al efecto de ahorcamiento a través de la tensión

superficial, haciendo que la superficie libre reduzca su radio hasta el rompimiento de la capa. (Hasegawa, 1970), (Krantz y Zollars, 1976). Conforme se desarrolla el flujo los valles en la deformación de la capa se vuelven más profundos y este efecto se incrementa por el efecto de la curvatura debido a la fuerza capilar.

El flujo de una capa en un plano es neutralmente estable para número de Reynolds igual a cero, esto se puede apreciar en la ecuación 1.1 desarrollada por Yih (1963). También encontró que la curvatura en la dirección del flujo es estabilizadora. Pero la curvatura lateral del cilindro es desestabilizadora (Lin y Liu, 1975). Este efecto es debido al ahorcamiento en los valles de las ondas (radio de curvatura pequeño).

El efecto del ahorcamiento se puede apreciar en el flujo de un chorro cilíndrico rodeado de aire. Este efecto es similar al que ocurre para una capa líquida que fluye sobre un cilindro vertical. Conforme fluye el chorro de un líquido tienden a formarse ondas en la superficie. Fue el físico Plateau (1873) el primero en mostrar el efecto desestabilizador de la tensión superficial.

Plateau (1873) arguyó que cualquier deformación asimétrica de un chorro cilíndrico conduciría a su rotura debido a que su área y por lo tanto su energía superficial es menor que en el caso del cilindro original. El efecto desestabilizador de la tensión superficial puede explicarse como consecuencia del salto de presiones a través de la superficie. Este salto es inversamente proporcional al radio del chorro $\Delta P = P_1 - P_0 = \sigma/R$, donde σ es la tensión superficial de la interface y R es el radio del cilindro. Al ser mayor la presión en las zonas más delgadas y menor en las zonas más gruesas, el líquido es forzado de las zonas más delgadas a las más gruesas, incrementando la deformación de la superficie hasta que se rompe y forma gotas a partir del chorro.

Rayleigh (1899) fue el primero en llevar a cabo una descripción matemática de la estabilidad de un chorro capilar despreciando los efectos del gas ambiente. Cuando una columna de fluido inviscido, una perturbación crece solo cuando el número de onda axial k por el radio del chorro cilíndrico R es menor que 1. A este hallazgo se le conoce como criterio de Rayleigh y es usado para flujos inviscidos, pero puede ser usado para otros flujos por su simplicidad.

Cuando una capa de líquido fluye sobre un plano inclinado la tensión superficial actúa como efecto estabilizador, (Yih, 1963). Este efecto es mayor si aumenta la curvatura en esta dirección, por lo que perturbaciones con número de onda pequeño son más estables

que las de longitud de onda larga. Un efecto similar ocurre en el flujo de una capa en un cilindro donde la curvatura axial tiene un efecto estabilizador. El flujo en la dirección axial también puede tener un efecto estabilizador lo que en ciertos casos puede contrarrestar el efecto de ahorcamiento de la curvatura lateral, (Dávalos-Orozco, 2013)

La estabilidad del flujo de una capa líquida de fluido newtoniano ha sido investigada (Cheng et al, 2001) y varios factores que impactan la estabilidad se han determinado sin embargo la estabilidad para un fluido viscoelástico para el caso tridimensional no ha sido investigada cuando se incluye calentamiento del cilindro, lo cual es objetivo de esta investigación.

Homsy y Geyling (1977), calculo la estabilidad lineal de una capa líquida que recubre un cable que se extrae de un recipiente con recubrimiento. Su principal interés era calcular el máximo espesor de recubrimiento. Estos autores encontraron que existe una velocidad óptima de recubrimiento de extracción del recipiente para mejor estabilidad. Encontraron que hay una velocidad óptima de extracción del cable al aplicar el recubrimiento para obtener mejor estabilidad superficial.

Sin embargo el interés principal de esta tesis, es sobre cómo resolver el problema y los balances de momento y energía tomando en cuenta las componentes de la velocidad en la dirección azimutal. Hemos mencionado que los esfuerzos tangenciales tienen un papel importante en la aparición de los modos azimutales cuando se aplica calentamiento a una capa de fluido newtoniano fluyendo sobre un cilindro (Dávalos y You, 2000).

Estos autores demostraron que bajo ciertas condiciones los modos azimutales pueden ser más inestables que el modo axial. En este trabajo se busca encontrar en que magnitud se incrementan los modos azimutales debido al calentamiento de la capa junto con el efecto de la viscoelasticidad.

Otro problema relacionado y donde también aparecen los modos azimutales en el flujo es cuando se agrega rotación en el cilindro (Dávalos-Orozco y Ruiz-Chavarría, 1993) hicieron cálculos de estabilidad lineal en la aproximación de número de onda pequeño y para número de Reynolds pequeño para cualquier número de onda. El interés principal de estos autores era investigar la posibilidad de aparición de modos azimutales como los más inestables debido a la rotación. En la aproximación de número de onda pequeño la fuerza de Coriolis no aparece en la estabilidad. En la aproximación de número de Reynolds pequeño la fuerza de Coriolis si aparece y esto hace aparecer los modos azimutales.

(Davalos et al., 1993) demostraron que el flujo en el exterior de un cilindro es inestable para el modo axial y para el primer modo azimutal, pero no para modos azimutales de mayor orden.

En el problema de la capa líquida newtoniana sobre un cilindro en rotación se modifican las condiciones en el balance de esfuerzos tangenciales debido a la fuerza de Coriolis que entra en juego en este caso, demostrando que es importante considerar estos esfuerzos y también que se requiere considerar las ecuaciones de momentum tridimensionales en este tipo de problemas. Una situación similar se presenta en nuestro problema del flujo en un cilindro cuando se aplica calentamiento.

Schlang y Sivashinsky (1982), investigaron por primera vez la inestabilidad tridimensional por medio de una ecuación de evolución de onda obtenida con la aproximación de longitud de onda larga. En su estudio también asumieron la aproximación de tensión superficial grande, y un radio grande para el cilindro. Se obtiene una condición para la aparición de perturbaciones azimutales. Sin embargo también muestran que el modo axial es siempre el más inestable.

Estos autores encontraron, que para ciertos radios (menor a un radio crítico), solo aparecen ondas en la dirección vertical. Pero para radios mayores, encontraron un flujo de anillos unidimensional, que se mueven en forma irregular en la dirección vertical. Estos anillos unidimensionales, son los modos azimutales que aparecen con radios mayores, y las ondas parecen ondas espirales que van fluyendo sobre el cilindro. Encontraron que la curvatura del cilindro tiene una fuerte influencia en las perturbaciones transversales o azimutales del flujo, suprimiendo armónicos de alta frecuencia angular.

Existe un radio crítico, para el cual el flujo con radios menores no presentara los modos azimutales (Schlang, Sivashinski, 1982). La influencia de la curvatura en los armónicos longitudinales de la perturbación es mucho menor. El efecto de perturbaciones externas como una corriente de gas externo en contraflujo, fue tomado en cuenta por Bensalah y Brun (1986). Ellos encontraron que a bajas velocidades el flujo de gas a contraflujo estabiliza la capa líquida. Rosenau y Oron (1989), calcularon una ecuación de evolución no lineal con aproximación a cambios rápidos espaciales. Su interés fue mostrar que las soluciones numéricas de las perturbaciones de superficie libre, crecen y también se rompen en tiempo finito.

Cheng y Chang (1992) investigaron más profundamente las inestabilidades encontradas por Shlang y Sivashinsky (1982) y obtuvieron una condición para la aparición de los modos azimutales cuando la tensión superficial es grande. También investigaron la estabilidad de las ondas axiales combinadas con ondas azimutales. Estos autores mostraron que aunque aparecen modos azimutales en la solución de la ecuación linealizada del flujo, y que pueden ser relevantes en ciertas condiciones de flujo, la onda axial principal es estable a las perturbaciones azimutales y que solo las perturbaciones axiales persisten.

En nuestro estudio, tomamos como punto de partida los resultados de Sivashinsky y Schlang, de que los modos azimutales aparecen en ciertas condiciones de número de onda, radio crítico y que interactúan con el flujo axial. Nuestra solución muestra la aparición de estos modos azimutales y también se restringe a tensión superficial grande pero no tan grande como en el caso de Shlang y Sivashinsky (1982). Además, el radio es grande comparado con el espesor de la capa líquida.

Frenkel (1992) encontró una solución aproximada de la ecuación no lineal de evolución de onda para el flujo en fibras o recubrimientos por medio de una solución en multiparametros de perturbación. Esta ecuación se reduce a la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky cuando la máxima amplitud es pequeña. En este caso la amplitud es grande y el radio pequeño. Frenkel encontró que el espesor crítico de la capa líquida para ruptura es proporcional al cubo del radio de la fibra que se recubre.

Frenkel (1993) propone el cálculo de una ecuación de evolución de onda usando la teoría de lubricación con una expansión de número de onda pequeño. Su resultado es una ecuación del tipo de Benney en tres dimensiones y en coordenadas cilíndricas. Cuando el radio tiende a infinito, la ecuación se reduce a la ecuación de Benney para un plano.

Kerchman and Frenkel (1994) usaron condiciones de frontera periódicas para investigar numéricamente la interacción de pulsos de onda solitarios usando la ecuación que obtuvo Frenkel (1992). Encontraron que las colisiones de los pulsos pueden ser elásticas o inelásticas con coalescencia dependiendo del espesor de la capa de fluido en estudio. En nuestro trabajo utilizamos un método similar al usado por Frenkel (1993) para obtener la ecuación de evolución de onda no lineal, de una capa líquida de fluido viscoelástico que fluye sobre una superficie cilíndrica. Esto nos permite obtener una ecuación de evolución de onda donde aparecen los parámetros principales del flujo como número de Reynolds y de Weber. Para el problema viscoelástico aparece el número de

Deborah o de Weissenberg. En el capítulo 2 y 3 se define cada uno de estos parámetros adimensionales.

Chen and Hwang (1996) investigaron numéricamente la ecuación de evolución de onda no lineal del flujo en un cilindro usando la aproximación de longitud de onda larga. Su objetivo fue determinar las condiciones de ruptura de la capa de fluido. Estos autores encontraron que la reducción del radio y el incremento de la tensión superficial aceleran la ruptura en la presencia de fuerzas de Van der Waals.

La influencia de la rotación del cilindro en la estabilidad del flujo también ha sido un área de interés. Dávalos Orozco y Ruiz Chavarria (1993) investigaron la estabilidad lineal de una capa de fluido descendente dentro y fuera de un cilindro vertical. Estos autores señalaron, que la velocidad de rotación puede estabilizar el flujo contrarrestando el efecto de la tensión superficial. Estos autores analizaron el flujo en tres dimensiones, por lo que consideran las perturbaciones en la dirección angular y su solución considera la estabilidad para diferentes modos azimutales. En sus resultados concluyen, que un cilindro con rotación puede tener el modo azimutal $m=1$ como el más inestable (más aún que el modo axial $m=0$). Además Dávalos-Orozco y Ruiz Chavarría (1992), estudiaron la estabilidad de una capa líquida que fluye en un plano inclinado rotatorio. Solorio y Sen (1987) realizaron un estudio numérico de las ecuaciones lineales del flujo asimétrico en un cilindro, sin ninguna limitación en la longitud de onda de la solución. Encontraron que los valores cuantitativos del número de onda crítico y de la razón de amplificación pueden variar notablemente respecto a resultados obtenidos por métodos aproximados.

Dávalos-Orozco y You (2000), han realizado trabajos en flujo de capas líquidas sobre cilindros sujetos a una temperatura, problema termocapilar. Estos autores mostraron que para el problema termocapilar en que la superficie libre del fluido se calienta y varía su temperatura, los esfuerzos debidos a tensión superficial producen modos de perturbación azimutal que pueden ser más inestables que los de la dirección axial. Los modos que aparecen y superan en inestabilidad al modo axial, dependen de los números adimensionales que describen este fenómeno, como el número de Marangoni, y el número de Biot. En este trabajo de doctorado, nos concentramos en demostrar que junto con la característica viscoelástica del flujo, los modos azimutales pueden mostrar mayor grado de inestabilidad para ciertos valores de número de onda debido al fenómeno de Marangoni o termocapilar.

1.2.3 Estudios de estabilidad de capas delgadas de fluidos newtonianos en superficies con calentamiento (Problema Termocapilar)

En esta sección se hace un resumen de algunos estudios relevantes sobre la estabilidad del flujo de capas líquidas fluyendo en superficies, cuando se aplica calentamiento. Al final se citan algunas revisiones sobre este tema, si es de interés del lector de esta tesis revisar más a fondo las investigaciones sobre el fenómeno termocapilar.

Pearson (1958) fue el primer investigador en mostrar la inestabilidad por cambios de tensión superficial debida a la temperatura, o fenómeno termocapilar. Pearson demostró para diferentes condiciones de frontera en el calentamiento de la superficie plana, que las ondas de la superficie presentan mayor inestabilidad cuando se presenta este gradiente de temperatura. Además también demostró que estas perturbaciones se pueden presentar sin un flujo principal en la capa líquida, con solo aplicar un gradiente de temperatura.

Scriven y Sternling (1964) investigaron por primera vez el efecto de deformación de la superficie libre. Aunque este efecto ya había sido visualizado por Pearson, estos autores lo trabajaron analíticamente a mayor profundidad. Takashima (1981a), resolvió el problema considerando la condición estacionaria de la deformación de la superficie libre y Takashima (1981b) incluye el problema dependiente del tiempo tomando en cuenta por primera vez los efectos de gravedad en ambos artículos.

Cuando se impone una fuente de calor a una superficie plana o cilíndrica sobre la que fluye una capa líquida, se forma un gradiente de temperatura en la superficie y esto causa esfuerzos de corte en la superficie en la dirección tangencial proporcionales al gradiente de temperatura (Leal, 2007). Este efecto se conoce como fenómeno termocápilar. Al aplicar calentamiento a la superficie, se crea por transferencia de calor un perfil de temperatura en la capa y en la superficie libre de la capa líquida. En nuestro problema del flujo de una capa de fluido viscoelástico tuvimos que resolver la ecuación de energía con un método de perturbación, para obtener el perfil de temperatura aproximado en la superficie libre.

Al haber un gradiente de temperatura en la superficie, aparecen esfuerzos tangenciales producidos por este gradiente de temperatura. Dichos esfuerzos tangenciales

aparecen en la ecuación de momentum como términos que dependen del número de Marangoni y Prandtl cuando se resuelven las ecuaciones de conservación. El número de Marangoni es un número adimensional que relaciona como cambia los esfuerzos tangenciales en la interface del fluido, con un gradiente de temperatura que aparece en la superficie de la capa líquida (Pearson, 1958). El número de Prandtl aparece en muchos estudios de transferencia de calor, y es un cociente que relaciona la escala de tiempo de transferencia de calor por conducción en un fluido cerca de una superficie comparado con la transferencia de energía de momento por el efecto de los esfuerzos viscosos. Matemáticamente se escribe como $Pr = \alpha/\nu$, donde α es el coeficiente de difusión térmica y ν es el coeficiente de difusión de momento debido a la viscosidad cinemática de un fluido.

Los esfuerzos tangenciales en la superficie producidos por el gradiente de temperatura producen una mayor inestabilidad en forma parecida a la que se produce cuando se aumenta la elasticidad del fluido, pero además también estimula la aparición de modos azimutales (Dávalos y You, 2000). Estos modos azimutales no tienen una razón de crecimiento mayor a la del modo axial en su valor máximo para flujos de fluidos newtonianos, pero en un rango de valores de número de onda pequeño los modos azimutales pueden tener mayor razón de crecimiento que el modo axial. Aunque a números de onda mayores el modo axial alcanza una mayor razón de crecimiento y prevalece sobre los modos azimutales en estado estable.

A continuación se citan algunos artículos que resumen trabajos hechos sobre el tema de estabilidad en interfaces y sobre el fenómeno de termocapilaridad.

Davis (1987) revisa problemas sobre termocapilaridad con gradiente de temperatura perpendicular a la capa líquida, así como flujos con gradiente de temperatura horizontal. Un resumen de estudios, fue hecho por Zeytounian (1998) que incluye capas líquidas muy delgadas que son susceptibles al efecto Marangoni o capas no tan delgadas que son sometidas al efecto Marangoni y al efecto de flotación. También presenta un resumen de trabajos de flujos descendiendo sobre paredes con calentamiento.

Velarde et al. (2001) and Velarde y Vignes-Adler (2002) dan una discusión sobre el efecto de la deformación de la superficie en una capa líquida y de la convección natural en ondas superficiales producidas por termocapilaridad. Kalliadasis (2007) analiza el problema de capas líquidas en donde se aplica calentamiento en las paredes. En su estudio compara modelos obtenidos hasta la fecha para mejorar la aproximación y derivar

ecuaciones que son congruentes al linealizar con los resultados obtenidos mediante la ecuación de Orr-Sommerfeld.

Un resumen de fenómenos de termocapilaridad con aplicaciones importantes en microelectrónica ha sido presentado por Kabov (2010). Su trabajo presenta resultados de un gran número de experimentos con capas líquidas fluyendo sobre paredes con calentamiento local y con movimiento causado por deformación de corte (debido a una corriente de gas en la superficie) En su trabajo revisa los problemas de ruptura de la capa líquida cuando la capa es sujeta a diferentes condiciones térmicas y de deformación de corte. La convección de Marangoni es investigada desde el punto de vista de la capa límite por Christopher y Wang (2001). Estos autores ponen énfasis en la influencia del número de Prandtl en la transferencia de calor.

La influencia del fenómeno de convección térmica de Marangoni (cita) en una capa líquida de fluido newtoniana que fluye en un plano inclinado fue investigado por Lin (1975). Lin calculó el número de $Re_{crítico} = Re_{cr}$, en el caso lineal para que se presente la inestabilidad en la aproximación de número de onda pequeño. En sus resultados encontró que el número de Re_{cr} depende de los números adimensionales de Marangoni, y del número de Prandtl.

Para llegar a resultados similares, Joo et al (1991) y Dávalos Orozco (2012), usaron la aproximación de número de onda pequeño y linealizando la ecuación de Benney para este problema obtuvieron los valores de la razón de crecimiento y del número de onda crítico para el flujo de una capa líquida en un plano inclinado que se le aplica calentamiento. Dávalos Orozco (2013) obtuvo una ecuación de Benney para el flujo de una capa líquida sobre un plano inclinado considerando el problema tridimensional y con calentamiento,

A continuación cito algunos trabajos sobre la estabilidad de flujos en capas líquidas considerando otros efectos como las condiciones de calentamiento en la pared, es decir la relación que hay conductividad térmica entre la pared y el fluido, o la deformación de la pared. Estos trabajos solo se citan como referencia, pero no se tomaran en cuentas estas condiciones extras en nuestro trabajo pues el problema del flujo de una capa líquida de fluido viscoelástico con calentamiento ya es bastante complicado de por sí.

Dávalos-Orozco (2012) también estudio el efecto del espesor de la pared y de la conductividad térmica de la pared en los parámetros estudiados. En su estudio este autor

hizo cálculos lineales y no lineales del problema y encontró que el efecto de la conductividad y el espesor de la pared se puede poner en términos de un solo parámetro d/Q_c . Donde d es la razón entre el espesor de la pared comparado con el espesor de la capa de fluido. Y Q_c es la razón de la conductividad térmica del sólido de la pared K_s respecto a la conductividad térmica del fluido de la capa líquida K_l . El efecto de aumentar este parámetro es estabilizar el flujo.

Dávalos Orozco (2007) realizó estudios de la estabilidad de una capa líquida isotérmica que fluye sobre una pared con deformación sinusoidal, por medio de análisis numérico de la ecuación de Benney en el espacio y tiempo. Por medio de estos análisis encontró que se pueden estabilizar las perturbaciones en la superficie libre por medio de deformaciones de la pared de forma sinusoidal. Este fenómeno conocido como resonancia espacial produce una reducción local del espesor de la capa que lleva las perturbaciones a una región donde el flujo es más estable.

Dávalos-Orozco (2015) realizó otro estudio para revisar los efectos resonantes de la topografía de la pared, junto con el efecto estabilizador del espesor y la conductividad térmica de la pared. El resultado importante que encuentra es que debido al espesor finito de la pared y la conductividad térmica de la pared, la respuesta de la capa decrece en amplitud cuando se incrementa el número de Marangoni para este caso particular. Por esta razón se modifican las condiciones y aumenta la estabilidad del flujo.

En un artículo reciente Dávalos-Orozco (2013), hace una revisión de los resultados importantes encontrados en los últimos años en flujos de capas líquidas sobre paredes isotérmicas y no isotérmicas. En su estudio presenta resultados en flujos con paredes isotérmicas como preparación para el estudio en flujos con paredes no isotérmicas. Se revisan diferentes condiciones como calentamiento uniforme y no uniforme de la pared, espesor de la pared y conductividad térmica, y una ondulación o deformación periódica de la pared. En este artículo también se presenta una revisión de artículos donde se estudia el efecto de la curvatura de la pared en el flujo y en la inestabilidad cuando se la capa se desliza sobre paredes cilíndricas.

En otro estudio reciente Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco (2014) estudiaron el efecto de la vorticidad en la convección natural de un fluido viscoelástico confinado entre dos placas planas con conductividad muy pobre. La aproximación que usan de múltiples escalas

los conduce a una ecuación no lineal del tipo de Ginzburg-Landau la cual presenta efectos visco elásticos solo cuando el modelo de Oldroyd presenta derivadas corrotacionales y no codeformacionales. Un hallazgo de su investigación es que el comportamiento de los patrones de convección se puede modificar con pequeños cambios en las propiedades del fluido.

Las derivadas corrotacionales y codeformacionales se usan en problemas de mecánica de medio continuo y se utilizan para obtener las derivadas convectivas de cantidades tensoriales. La derivada corrotacional o de Jaumman es una derivada en la que se usa un sistema de referencia en rotación con respecto al movimiento de la partícula donde se mide el esfuerzo o deformación. La derivada codeformacional se define en un sistema de referencia relativo que rota de forma que el sistema de coordenadas quede alineado con la deformación del flujo. Hay dos tipos de derivada codeformacional la derivada convectiva inferior y la derivada convectiva superior.

1.2.4 Estabilidad de fluidos viscoelásticos en flujos descendentes en paredes planas y cilíndricas.

Como se ha explicado en la introducción del tema de esta tesis, entre los objetivos se encuentra resolver las ecuaciones de momento y energía para obtener la estabilidad de una capa de fluido viscoelásticos descendiendo sobre paredes con calentamiento tomando en cuenta los esfuerzos tangenciales y los modos azimutales que aparecen en la solución tridimensional. En esta sección se explica el efecto de la viscoelasticidad en la estabilidad de flujos descendentes en planos y superficies cilíndricas.

Se resumen primero varios trabajos sobre estabilidad de capas de fluidos viscoelásticas descendiendo sobre planos, porque existen más trabajos sobre este tema que consideran fluidos no newtonianos en la solución. Además se pueden tomar como casos de comparación algunos de los sistemas o modelos estudiados por estos autores para comparar con el problema del flujo de capas que descienden sobre cilindros.

El primer autor interesado en resolver el problema de la estabilidad del flujo de capas de fluidos no newtonianos fluyendo sobre paredes fue Gupta (1967). Este autor realizó un análisis lineal de estabilidad del flujo, resolviendo las ecuaciones de momento y usando un fluido de segundo orden mostro el efecto desestabilizador de la elasticidad.

Después de derivar el análogo viscoelástico de la ecuación de Orr-Sommerfeld con las condiciones de frontera apropiadas, Gupta realizó un análisis de perturbación lineal de la misma forma que lo realizó Yih(1963) y Benjamín (1957) para el problema de una capa de fluido newtoniano deslizándose sobre un plano inclinado. El resultado de Gupta que fue generalizado por otros autores mas adelante fue que la razón de crecimiento de las ondas interfaciales es:

$$G = \frac{8}{15} \text{Re} - \frac{2}{3} \cot(\beta) + \frac{4}{3} \Lambda \quad \text{Ec. (1.2)}$$

El valor de Re crítico para el cual se presenta la inestabilidad se obtiene igualando la razón de crecimiento a cero. El valor de Re_{cr} que se obtiene haciendo $G=0$, para el cual se presenta la inestabilidad de las ondas es:

$$\text{Re}_{cr} = \frac{5}{4} \cot(\beta) - \frac{5}{2} \Lambda \quad \text{Ec. (1.3)}$$

Su trabajo fue más adelante generalizado para un fluido de Oldroyd B (Gupta y Rai, 1967) e independientemente por (Wai Lai, 1967)

En estas ecuaciones Re_{cr} es el número de Reynolds máximo para el cual las perturbaciones en la superficie decaen. Puesto que al aumentar el número de Reynolds aumenta el valor de la razón de crecimiento y por tanto se incrementa la inestabilidad. $\Lambda=U\lambda/d$ está relacionado con la elasticidad del material y se puede considerar un número de Deborah. El número de Deborah se puede considerar como un producto del tiempo de relajamiento del material por la razón de corte en el flujo de la capa líquida. EL número de Reynolds se define de la manera usual, $\text{Re}=VL/v$ es el número de Reynolds y β es el ángulo del plano inclinado.

A partir de la ecuación (1.3), se obtiene el valor de Re_{cr} . Para valores mayores a este Re_{cr} el flujo será inestable, si es mayor que el valor de este número de Reynolds crítico. Como se aprecia en la ecuación el valor de Reynolds crítico disminuye para valores mayores de la elasticidad. El efecto desestabilizador de la elasticidad no es tan sorprendente, pues la elasticidad en este caso es una fuente extra de energía que se transmite a las partículas.

EL argumento usado por Gupta (1967) para justificar la aproximación de longitud de onda larga es el mismo que el que se da para la inestabilidad interracial en flujos

newtonianos. Y es que las perturbaciones de longitud de onda larga son menos estabilizadas por la tensión superficial. Después del trabajo de Gupta otros autores han extendido su trabajo original. Ya que el comportamiento de un fluido de segundo orden está limitado a flujos 'lentos' y de valores pequeños de elasticidad $De \ll 1$.

Gupta y Rai (1967) e independientemente Wei Lai (1967) recalcularon las condiciones críticas para el flujo pero usando un fluido de Oldroyd B.

El modelo de Oldroyd B da similares conclusiones a las del fluido de segundo orden para valores pequeños del número de Deborah, pero por otro lado da buenas predicciones cualitativamente para números de Deborah mayores $De \gg 1$, para el cual el modelo del fluido de segundo orden no funciona adecuadamente, (Shafqeh, Larson y Fredrickson, 1988).

El fluido de Oldroyd B aunque es un modelo sencillo, contiene algunas características con las que se puede caracterizar soluciones poliméricas, y describe correctamente dos condiciones que presentan estas soluciones: la no linealidad del esfuerzo con la razón de corte y la aparición de una diferencia de esfuerzos normales cuando se aplica un esfuerzo de corte (Owens, Philips, 2002)

Wei Lai (1967) realizó un análisis similar, usando un fluido de Oldroyd-B (1950). Primero resolvió el problema de flujo de estado estacionario, y obtuvo la velocidad principal y los esfuerzos normales. Después uso las ecuaciones de momento linealizadas, y usando la definición de fluido de Oldroyd-B, obtuvo ecuaciones para los esfuerzos T_{xx} , T_{xy} y T_{yy} linealizando las ecuaciones constitutivas. Wei Lai sigue un procedimiento similar para obtener los parámetros de estabilidad como razón de crecimiento al usado por Yih (1963), para un flujo newtoniano.

Wei Lai obtuvo una ecuación de Orr-Sommerfeld para el caso del fluido de Oldroyd B y tres ecuaciones para los esfuerzos. El resultado obtenido por Wei Lai fue una ecuación de la misma forma que la ecuación 1.2 y 1.3, pero en este caso el número de Deborah está definido de una forma un poco diferente usando una diferencia de valores relacionados con las constantes de relajamiento y de retardo que aparecen en el modelo de Oldroyd B.

En la solución de Wei Lai (1967), el número de Deborah está definido como $De = \Lambda = M_1 - M_2$, donde $M_i = U_0(\lambda_i)/d$, son números adimensional relacionados con las constantes de relajamiento (λ_1), y de retardo (λ_2). EL número de Reynolds se define de la manera usual, $Re = VL/\nu$ es el número de Reynolds y β es el ángulo del plano inclinado. La

diferencia de los números adimensionales (M_1-M_2) se puede considerar como un número de Deborah o de Weissenberg que es proporcional a la elasticidad del fluido.

Shafqeh y Larson (1988), consideraron que la coincidencia de los dos modelos se debe a que la expansión usada de longitud de onda larga es de echo una expansión en valores $\alpha\Lambda$ donde α es el número de onda de la perturbación. Shaqfeh y Larson se refieren a una situación curiosa la cual es que para la aproximación de onda larga, todos los modelos se comportan como fluidos de segundo orden.

Shafqeh y Larson (1988), extendieron el análisis de estabilidad lineal para el fluido de Oldroyd B, para flujos con alto número de Reynolds. Resolvieron numéricamente el problema de eigenvalores de la ecuación de Orr-Sommerfeld, para el caso del flujo de una capa de fluido viscoelástico. Estos autores encontraron que la elasticidad del fluido si hace más inestable las ondas interfaciales, para números de Reynolds pequeños. Pero también encontraron que para números de Reynolds mayores, la elasticidad del fluido puede estabilizar el flujo en capas gruesas cuando el número de Deborah es suficientemente grande.

Joo (1994) estudio el problema no lineal de flujo de una capa líquida de un fluido de Oldroyd B, con viscosidad adelgazante, es decir con viscosidad que disminuye con mayor velocidad de corte en el flujo. Al realizar el análisis lineal de una capa líquida con el modelo de Oldroyd B, con 4 constantes (tiempo de relajamiento, tiempo de retardo, viscosidad y adelgazamiento), se puede mostrar que el adelgazamiento al corte no tiene impacto en el criterio de estabilidad. El adelgazamiento de la viscosidad solo modifica la velocidad de fase de las perturbaciones. El efecto de amortiguamiento solo puede ser explicado realizando un análisis no lineal de las ecuaciones, como el que hizo Joo (1994).

1.2.5 Estabilidad de fluidos visco-elásticos en flujos descendentes en paredes cilíndricas

Cheng y Chang (2003) realizan un análisis lineal y no lineal, del flujo de una capa líquida viscoelástica descendiendo por un cilindro. Sin embargo solo consideran el flujo bidimensional en la dirección axial y radial, y no consideran las perturbaciones azimutales. También usan el fluido de Walters B para modelar el flujo visco elástico y que sólo es adecuado solo para pequeñas deformaciones.

En este estudio pretendo analizar el flujo considerando las perturbaciones en dirección azimutal. Como se verá en la sección del análisis lineal, hemos derivado una ecuación de evolución de la capa líquida, que nos permite modelar la dinámica línea del flujo. Para obtener dicha ecuación, se usó la aproximación de longitud de onda grande, escalando la dimensión en el eje z y en la dirección azimutal θ . Hemos seguido un método similar al usado por Frenkel (1993) para obtener el análogo de la ecuación de Benney en un cilindro, que describe la dinámica de esta capa de fluido. Para obtener la ecuación de Benney, usamos el método de parámetros pequeños, considerando que la longitud de onda de las perturbaciones en la dirección axial y azimutal, es mucho mayor, que el espesor de la capa líquida. Para obtener esta condición en la dirección azimutal, es necesario considerar que el radio es mucho mayor que el espesor de la capa, $R \gg h_0$.

Con este escalamiento en la dirección z , y en la dirección azimutal θ , Frenkel (1993) derivó una solución a orden uno para las velocidades y la ecuación no lineal de evolución de la altura de la capa. El problema del flujo de una capa viscoelástica es bastante más complicado ya que tenemos que considerar las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos. Sin embargo gracias, al escalamiento usado y la aproximación de lubricación, se pueden obtener expresiones para los esfuerzos en función de las velocidades u_0 y v_0 .

Al final se obtuvo una ecuación de evolución de onda, que incluye un término con una constante elástica M_1 - M_2 , y que contiene derivadas de h respecto a z : (d^2h/dz^2) .

Capítulo 2. Ecuaciones de Conservación

En este capítulo, aplicaremos las ecuaciones de conservación de momento y de continuidad al problema de la estabilidad del flujo de una capa líquida descendiendo sobre un cilindro vertical. Las ecuaciones las enunciaremos completas y después aplicaremos un método de perturbación de parámetros pequeños para obtener la ecuación de evolución de onda de la capa líquida.

2.1 Ecuación de conservación de masa

La ecuación de conservación de masa en coordenadas cilíndricas para un fluido incompresible se enuncia de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Donde V es el vector de velocidad en coordenadas cilíndricas. Para un fluido incompresible la densidad del fluido no cambia debido a los cambios de presión conforme el fluido se transporta y por esta razón el miembro derecho de la ecuación 2.1 es igual a cero.

2.2 Ecuación de conservación de momento

Escribimos las ecuaciones de conservación de momento para un flujo en coordenadas cilíndricas para cualquier fluido:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (2.2a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (2.2b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad (2.2c)$$

En estos balances de momentos conocidos como ecuación de Cauchy de conservación de momento (Deen, 1998) se separó el esfuerzo en dos componentes, uno debido a la presión en la dirección normal y los esfuerzos viscosos o deviatoricos τ :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.3)$$

En la ecuación de conservación de momento y la de energía se usaran las siguientes relaciones adimensionales para la velocidad, el tiempo y la coordenada radial y axial, para hacer adimensional la ecuación de momento y las condiciones de frontera del problema que analizamos:

$$\begin{aligned} u &= (W_o) \bar{u}, & t &= \left(\frac{h_o}{w_o} \right) \bar{t}, \\ x &= h_o \bar{x}, & P &= \rho W_o^2 \bar{P}, \\ r &= h_o \bar{r}, & \tau &= \rho W_o^2 \bar{\tau} \end{aligned} \quad (\text{Ec 2.4})$$

Donde W_o es la velocidad media del flujo en estado estable: $W_o = \left(\frac{gh_o^2}{2\nu} \right)$, y ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Al usar las relaciones adimensionales mencionadas y considerando el valor de la velocidad W_o en (2.3) las ecuaciones de conservación de momento se pueden escribir de la siguiente forma (se elimina la testa en las variables adimensionales para simplificar la notación):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (2.5a)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right) = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \quad (2.5b)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \quad (2.5c)$$

En esta ecuación aparece como resultado de hacer adimensional las ecuaciones el número de Reynolds, el cual es una relación entre las fuerzas inerciales que sufre una partícula de fluido dividido por las fuerzas viscosas. El número de Reynolds debe su nombre a Osborne Reynolds (1842-1912), un ingeniero británico que fue quien lo introdujo en 1883. (Reynolds, 1883)

El número de Reynolds es siempre importante haya o no haya superficie libre, su efecto puede despreciarse solo fuera de las regiones donde hay gradientes altos de velocidad, por ejemplo, lejos de superficies fijas, chorros y estelas. (White, 1979)

En la figura (2.1) se muestra el perfil de superficie de la capa líquida que fluye en la dirección z de un sistema en coordenadas cilíndricas (la dirección positiva del eje z apunta hacia abajo en este sistema de coordenadas). En la figura se muestran el radio del cilindro R y la altura de la capa líquida h . El flujo es en la dirección de la gravedad, es decir en la dirección $(+z)$ en este sistema de coordenadas. Cabe mencionar que se considera el flujo sobre un cilindro de dimensión infinita, pero al considerar estado estable se muestra el flujo de la capa líquida para una sección del flujo:

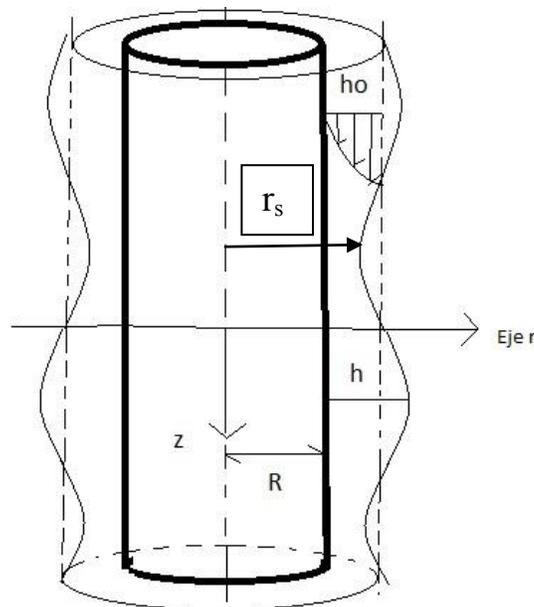


Figura 2.1 Flujo de una capa líquida en la dirección z . Se usa un sistema de coordenadas cilíndricas.

La ecuaciones de conservación de momento (ecs. 2.5) se escribieron para un fluido en general. En nuestro trabajo, usamos el modelo del fluido de Oldroyd B para modelar la viscoelasticidad del material. Para calcular los componentes del tensor de esfuerzos, usamos la ecuación constitutiva del modelo de Oldroyd-B, que se escribe de la siguiente forma:

$$T_{ij} + \lambda_1 \frac{D}{Dt} \tau_{ij} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_2 \frac{D}{Dt} \right) E_{ij} \quad (2.6)$$

Esta ecuación se puede escribir de forma adimensional usando las relaciones escritas en (ec. 2.4). De esta forma las ecuaciones constitutivas en forma adimensional son:

$$T_{ij} + \lambda_1 \left(\frac{W_0}{h_0} \right) \frac{D_c}{Dt} \tau_{ij} = 2 \frac{\eta_0}{\rho h_0 W_0} e_{ij} + 2 \frac{\eta_0}{\rho h_0 W_0} \left(\frac{\lambda_2 W_0}{h_0} \right) \frac{D_c}{Dt} e_{ij} \quad (2.7a)$$

$$T_{ij} + M_1 \frac{D_c}{Dt} \tau_{ij} = \frac{2}{\text{Re}} e_{ij} + \frac{2M_2}{\text{Re}} \frac{D_c}{Dt} e_{ij} \quad (2.7b)$$

Donde M_1 es un numero de Deborah relacionado con el tiempo de relajamiento λ_1 , y M_2 es un número de Deborah relacionado con el tiempo de retardo λ_2 . El número de Deborah o de Weissenberg se puede considerar como una relación entre el tiempo de relajamiento de un material λ dividido por el tiempo promedio de la deformación del fluido h_0/W_0

En esta ecuación, escrita en notación indicial, τ_{ij} son los componentes del tensor de esfuerzos, E_{ij} es el tensor de rapidez de deformación, y η_0 es la viscosidad de dinámica del material. λ_1 y λ_2 son las constantes de relajamiento y retardo del material que están asociadas con la viscoelasticidad del fluido. Donde D_c/dt es la derivada convectiva superior de un tensor, y está definida de la siguiente forma en notación vectorial:

$$\frac{D_c}{Dt} \bar{\tau} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{\tau} - \nabla \bar{V}^T \cdot \bar{\tau} - \bar{\tau} \cdot \nabla \bar{V} \quad (2.7a)$$

O escrito en notación indicial:

$$\frac{D_c}{Dt} \tau_{ij} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_m \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \tau_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \tau_{mj} \quad (2.7b)$$

Cabe mencionar lo siguiente sobre las ecuaciones de Oldroyd. Algunas ecuaciones de viscoelasticidad lineal no son invariantes al cambio de marco de referencia del sistema de coordenadas. Oldroyd (1950) propuso la invariancia de su ecuación constitutiva al cambio de marco de referencia escribiendo las ecuaciones en un marco de referencia que es deformado en la dirección de los elementos materiales. Cuando se usa la derivada

convectiva superior los vectores del sistema de coordenadas se hacen paralelos a las líneas materiales, son rotados y estirados con las líneas materiales (Larson 1988).

A continuación describo como se obtuvieron los términos de la derivada convectiva a partir de las definiciones del tensor de esfuerzos y del gradiente de velocidad los cuales son ambas cantidades tensoriales. (los detalles de la obtención de la derivada convectiva para el problema que resolví aparecen el apéndice 2). El último término en la derivada convectiva se obtiene multiplicando de la velocidad, $-\bar{\tau} \cdot \nabla \bar{V}$.

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

El penúltimo término se obtuvo multiplicando el gradiente velocidad transpuesto por el tensor de esfuerzos: $-\nabla \bar{V}^T \cdot \bar{\tau}$. El segundo término del lado derecho de la ecuación: $(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{\tau}$ es la derivada conectiva del tensor de esfuerzos.

El tensor de rapidez de deformación o corte E_{ij} se puede escribir de la siguiente forma:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla V + (\nabla V)^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Los términos de la derivada convectiva y la deducción de los seis términos de la derivada contravariante del tensor de esfuerzos se resumen en el (Apéndice 2).

Con estas definiciones, se escribieron las componentes del tensor de esfuerzo en coordenadas cilíndricas. Por brevedad, se escriben solo 3 de los 6 componentes: τ_{rr} , τ_{rz} , y τ_{zz} , usando las definiciones previas:

$$\begin{aligned} \left(1 + M_1 \frac{d_c}{dt}\right) \tau_{rr} &= \tau_{rr} + M_1 \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial z} - \frac{v}{r} (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) - 2\tau_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} - 2\tau_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) - 2\tau_{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{2}{\text{Re}} e_{rr} + \frac{2M_2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial e_{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{rr}}{\partial z} - \frac{v}{r} (e_{r\theta} + e_{\theta r}) - 2e_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} - 2e_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) - 2e_{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

La componente en la dirección rz es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} + M_1 \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{v}{r} (\tau_{\theta z}) - \tau_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} - \tau_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \tau_{rz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) \tau_{\theta z} - \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{zz} \right) = \\ \left(\frac{2}{\text{Re}} e_{rz} + \frac{2M_2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial e_{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial e_{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{rz}}{\partial z} - \frac{v}{r} (e_{\theta z}) - e_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} - e_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - e_{rz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) e_{\theta z} - \frac{\partial u}{\partial z} e_{zz} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

La componente en la dirección zz es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_{zz} + M_1 \left(u \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - 2\tau_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} - 2\tau_{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2\tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ \left(\frac{2}{\text{Re}} e_{zz} + \frac{2M_2}{\text{Re}} \left(u \frac{\partial e_{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{zz}}{\partial z} - 2e_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} - 2e_{\theta z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2e_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2.1 Escalamiento de los componentes del tensor de esfuerzos y método de perturbación en parámetros pequeños

A continuación se usará un método de perturbación y el escalamiento usado por Frenkel (1993). El escalamiento nos servirá inicialmente para simplificar las ecuaciones de esfuerzo (ecuación 2.6) y luego para usar dichas ecuaciones constitutivas, en las ecuación de Cauchy de momento (ecuaciones 2.5a, 2.5b y 2.5c).

En el siguiente análisis hemos considerado, la aproximación de longitud de onda larga, que considera que la deformación de la capa líquida en la dirección radial es mucho

menor que la longitud de onda de las perturbaciones. Para esto definimos el parámetro ε en función del espesor de la capa dividido por la longitud de una perturbación completa.

$$h_0 \leq 2\pi\lambda_z, \varepsilon = \frac{h_0}{2\pi\lambda} \quad (2.13)$$

También se considera que la deformación de la capa en la dirección azimutal es pequeña comparada con la longitud de onda en θ , esto se cumple cuando el radio del cilindro es grande.

$$h_0 \leq 2\pi R_z, \frac{h_0}{R} \ll 1 \quad (2.14)$$

. De hecho es parte del análisis del problema determinar la altura de la capa líquida $h = h(z, \theta, t)$. También a partir de esta sección se usa una variable intermedia con la misma dirección del radio del cilindro, que hemos denominado χ (en forma adimensional). Las variables dimensionales se escriben con asterisco.

$$\chi = \frac{(r^* - R^*)}{h_0} = r - \beta \quad (2.15)$$

Donde β es igual al radio adimensional del cilindro sólido. Usamos las siguientes relaciones para realizar el escalamiento de los esfuerzos, de las variables y las derivadas en la ecuación de momento.

$$\begin{aligned} z' &= \varepsilon \cdot z, \quad \varepsilon = h_0 / 2\pi\lambda_z \\ h' &= h, \\ r_s &= \beta + h, \\ y' &= \varepsilon \cdot \beta \cdot \theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde $\delta = \varepsilon\beta$ es el radio escalado y β (radio del cilindro = R/h_0) están relacionados por:

$$\delta = \beta\varepsilon, \quad (2.17)$$

El radio del eje del cilindro a la interface de la superficie libre se le asigna la variable r_s^* , y en nuestro caso es $r_s^* = R^* + h^*$, donde R^* es el radio del cilindro sólido y h^* el espesor de la capa en forma dimensional. Se usa en las siguientes ecuaciones la notación con * para denotar las variables dimensionales.

Dividiendo el radio de la superficie libre por el espesor de la capa h_0 , se puede escribir la siguiente relación de variables adimensionales, donde se usa el radio adimensional del cilindro $\beta=R^*/h_0$:

$$r_s = \frac{r_s^*}{h_0} = \frac{R^* + h^*}{h_0} = \beta + h, \quad (2.18)$$

Haciendo el siguiente manejo algebraico se obtiene la siguiente relación adimensional entre el radio de la superficie de la capa líquida r_s , el radio de la superficie solida adimensional β y la altura adimensional de la capa líquida h , considerando $h \ll \beta$:

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{\beta + h} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{1 + \frac{h}{\beta}} \right) \approx \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{h}{\beta} \right), \quad (2.19a)$$

$$\frac{1}{r_s} \approx \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{h}{\beta} \right), \quad (2.19b)$$

Usando estos escalamientos (ec. 2.16) se pueden transformar las derivadas respecto a z (d/dz), y respecto a θ ($1/r(d/d\theta)$) en la ecuación de momento (ecuaciones 2.5a , 2.5b, 2.5c) o en las ecuaciones constitutivas y condiciones de frontera. Las derivadas respecto a la variable z y a la variable θ , se transforman de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dz} \phi = \varepsilon \frac{d}{dz'} \phi, \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} = \frac{\varepsilon \beta}{r} \frac{d}{dy'} \approx \varepsilon \frac{d}{dy'} \quad (2.20)$$

Donde ϕ es alguna de las variables de la ecuación de momento, ya sea las velocidades u, v o w , o la presión y esfuerzos. Las velocidades en la dirección del radio, del ángulo θ , y el eje principal z , también se descomponen en un flujo principal y sus perturbaciones:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon^* (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots), \\ v &= \varepsilon^* (v_0 + \varepsilon v_1 + \dots), \\ w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \\ P &= P_0 + \varepsilon P_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

También los esfuerzos se descomponen en una componente principal, y varias perturbaciones de orden 1, 2, 3, etc. De esta manera, las ecuaciones del tensor de esfuerzo se reducen de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= (\tau_{rr0} + \varepsilon\tau_{rr1} + \dots), \\
\tau_{rz} &= (\tau_{rz0} + \varepsilon\tau_{rz1} + \dots), \\
\tau_{zz} &= (\tau_{zz0} + \varepsilon\tau_{zz1} + \dots) \\
\tau_{r\theta} &= \varepsilon(\tau_{r\theta0} + \varepsilon\tau_{r\theta1} + \dots) \\
\tau_{\theta z} &= \varepsilon(\tau_{\theta z0} + \varepsilon\tau_{\theta z1} + \dots)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Debido que para la solución de estado estable solo aparecen en la solución los componentes de esfuerzo τ_{rr} , τ_{rz} y τ_{zz} estos se consideran esfuerzos principales y comienzan con épsilon a la cero y los componentes de esfuerzo cruzado como $\tau_{r\theta}$, y $\tau_{\theta z}$ se escriben con componentes que empiezan en épsilon a la uno.

Para obtener las componentes del tensor en cada dirección se escribió un programa en Maple, que calcula cada ecuación considerando el escalamiento y las perturbaciones. El componente del tensor de esfuerzo en la dirección rr, a orden cero y uno, son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\tau_{rr0} &= 0, \\
\tau_{rr1} &= \left(\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_0}{\partial \chi} \right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Para el componente en la dirección rθ:

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta0} &= 0, \\
\tau_{r\theta1} &= \left(\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v_0}{\partial \chi} \right).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

El componente en la dirección rz a orden (0) y (1), se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\tau_{rz0} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial w_0}{\partial \chi}. \\
\tau_{rz1} + M_1 \left(\frac{\partial \tau_{rz0}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tau_{rz0}}{\partial \chi} + w_0 \frac{\partial \tau_{rz0}}{\partial z} - \tau_{rr0} \frac{\partial w_0}{\partial \chi} - \tau_{rz0} \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\partial u_0}{\partial \chi} \right) \right) = \\
& \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{M_2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \chi \partial t} + u_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \chi^2} + w_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial z} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial \chi} \frac{\partial w_0}{\partial \chi} - \frac{\partial w_0}{\partial \chi} \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\partial u_0}{\partial \chi} \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Se observa de las ecuaciones anteriores, que el único componente con parte visco-elástica de orden uno, es el esfuerzo τ_{rz} . El esfuerzo τ_{rz} contiene términos que se deben a la elasticidad del fluido y está de acuerdo con la no linealidad del esfuerzo en la dirección de corte (rz) con la deformación en esta dirección (rz). Haciendo un análisis de perturbación similar para los componentes $\tau_{\theta z}$, se obtienen los siguientes valores.

$$\tau_{\theta z 0} = 0.$$

$$\tau_{\theta z 1} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{2}{\text{Re}} (M_1 - M_2) \left(\frac{\partial w_0}{\partial \chi} \frac{\partial v_0}{\partial \chi} \right) \quad (2.26)$$

En esta ecuación (2.26) se puede observar que aparecen esfuerzos en la dirección azimutal que están relacionados con los modos azimutales. Por lo tanto incluso cuando no existe calentamiento del cilindro las condiciones de esfuerzo en la dirección angular se modifican y esto excita la aparición de modos azimutales.

Finalmente los componentes del tensor de esfuerzos τ_{zz} , de orden cero, y uno, se pueden escribir de la siguiente forma simplificada:

$$\tau_{zz 0} = \frac{2}{\text{Re}} (M_1 - M_2) \left(\frac{\partial w_0}{\partial \chi} \right)^2 \quad (2.27)$$

$$\tau_{zz 1} + M_1 \left(\frac{\partial \tau_{zz 0}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tau_{zz 0}}{\partial \chi} + w_0 \frac{\partial \tau_{zz 0}}{\partial z} - 2\tau_{rz 1} \frac{\partial w}{\partial \chi} - 2 \frac{\partial w_0}{\partial \chi} \frac{\partial w_1}{\partial \chi} - 2\tau_{zz 0} \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) =$$

$$\left(\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{4M_2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \chi} \right) \frac{\partial w_1}{\partial \chi} \right) \quad (2.28)$$

En esta caso para los esfuerzos τ_{zz} , aparecen efectos elásticos tanto a orden cero como a orden uno. El esfuerzo τ_{zz} está relacionado con los esfuerzos normales que se presentan en fluidos viscoelásticos en soluciones poliméricas.

Como se puede observar solo las componentes τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$, y τ_{zz} tienen comportamiento elásticos en sus ecuaciones. Esto simplifica mucho el análisis, ya que como se verá posteriormente, solo la ecuación de momento en la dirección z contiene elementos no newtonianos o visco-elásticos y resolviendo esta ecuación se puede obtener la componente extra en la ecuación de momento debido a los términos viscoelásticos.

2.3 Ecuaciones de conservación para el Problema no Isotérmico

Para describir el problema no isotérmico, es necesario obtener el perfil de temperatura en la superficie de la capa líquida. Para obtener este perfil de temperatura es necesario resolver la ecuación de la energía, y aplicar un método de perturbaciones en parámetros pequeños. Para hacer más clara esta deducción se muestra esta deducción en una sección independiente.

2.3.1 Ecuación de conservación de Energía

A continuación aplicamos la ecuación de energía al flujo de una capa líquida, en coordenadas cilíndricas. La ecuación de la energía la necesitamos solo para el caso del problema no isotérmico, sin embargo obtenemos una solución general a partir de la cual se pueden obtener los dos casos: isotérmico y no isotérmico. La ecuación de energía en su forma dimensional es la siguiente, donde $T^*(r,y,z,t)$ es la temperatura en el fluido:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_j \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \right)$$

(2.29)

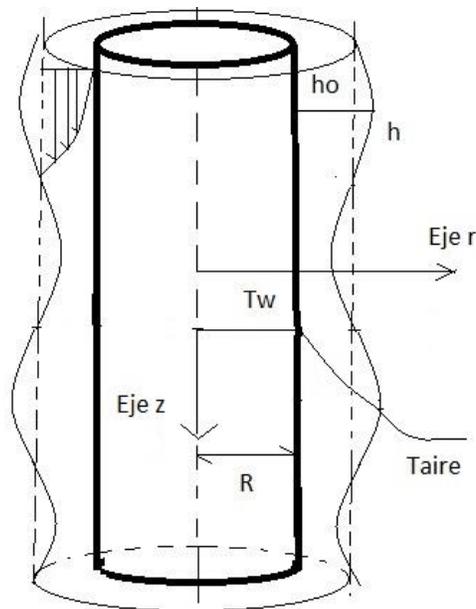


Figura 2.2 Flujo de una capa líquida de fluido viscoelástico descendiendo sobre una pared vertical cilíndrica

En la figura 2.2 se muestra la superficie libre de la capa líquida que fluye alrededor del cilindro con un radio externo $r=R$. El espesor de la capa medido a partir del radio del cilindro es h .

Usando la siguiente adimensionalización para la velocidad, las dimensiones espaciales, y la temperatura en la ecuación de energía:

$$\begin{aligned} u^* &= (W_o)u, \\ x^* &= h_o x, \\ T^* &= (T_w - T_\infty)T \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se obtiene la siguiente forma adimensional de la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.31)$$

Donde aparecen los números adimensionales de Reynolds, y de Prandtl:

$$\text{Re} = \frac{W_o L}{\nu}, \text{Pr} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\nu}{\frac{k}{\rho C_p}} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.32)$$

El número de Prandtl es un número que relaciona la transferencia de energía por difusión de momento que es proporcional al coeficiente de difusión viscosa ν dividido por la transferencia de energía que se difunde por conducción en un fluido que es proporcional a la conductividad de un sólido o fluido α .

Esta ecuación se simplifica al aplicar el escalamiento definido en (2.14) resumido en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial y'}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aplicando el escalamiento de (2.14) en coordenadas cilíndricas y cambiando la variable r por la variable χ :

$$\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial \chi} + \varepsilon v \frac{\partial T}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \chi^2} + \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial T}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.34)$$

A partir de esta ecuación se usa un método de perturbación, separando las variables en una parte principal y sus perturbaciones de orden 1,2, etc.:

$$\begin{aligned}
 u &= \varepsilon^*(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots), \\
 v &= \varepsilon^*(v_0 + \varepsilon v_1 + \dots), \\
 w &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots \\
 T &= T_0 + \varepsilon T_1 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Esta ecuación se simplifica al aplicar el escalamiento y el método de perturbación en parámetros pequeños

$$\begin{aligned}
 &\left(\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) + \left(\varepsilon \cdot u_0 \frac{\partial T_0}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \cdot u_0 \frac{\partial T_1}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \cdot u_1 \frac{\partial T_0}{\partial \chi} \right) + \\
 &\left(\varepsilon^2 \cdot v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} + \varepsilon^3 \cdot v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + \varepsilon^3 \cdot v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) + \left(\varepsilon \cdot w_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} + \varepsilon^2 \cdot w_0 \frac{\partial T_1}{\partial z} + \varepsilon^2 \cdot w_1 \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial \chi^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 T_1}{\partial \chi^2} + \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial T_0}{\partial \chi} + \frac{\varepsilon^2}{\delta} \frac{\partial T_1}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Tomando solo los términos de orden cero:

$$\frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial \chi^2} \right) = 0
 \tag{2.37}$$

En esta expresión del balance de energía a orden cero se puede notar que se desprecia el término que depende de $1/r \, dT/dr$, debido a la aproximación de radio grande. Por esta razón el perfil de temperatura es lineal con el radio.

Perfil de temperatura de la Superficie Libre

A continuación se resolverá la ecuación de balance de energía (2.37) para obtener el perfil de temperatura en la capa de fluido. Para resolver esta ecuación se usará la Imagen 2.2 como referencia.

Las condiciones de frontera se expresan en forma dimensional, pero después se cambian a una forma adimensional. La primera condición de frontera es la temperatura del cilindro en $\chi=0$, donde χ la coordenada intermedia $\chi=(r-R)/h_0$.

$$\chi = 0, T = T_w, \quad (2.38)$$

La segunda condición de frontera, se obtiene empleando la condición de enfriamiento de Newton (Incropera F. y De Witt D., 1999) en la superficie libre de la capa de fluido. En este caso se cumple que el calor por conducción del lado del fluido de la capa líquida se iguala con el calor por convección entre la superficie de la capa líquida y el aire exterior, es decir en $\chi=h$

Esta condición de frontera se hace adimensional usando las relaciones definidas en 2.30 y se usa la variable adimensional χ :

$$-k \frac{1}{h_0} \frac{\partial T_o}{\partial \chi} \Big|_{x=h} = h_T (T_o(h) - T_\infty) \quad (2.39)$$

Donde $T_0=T_0(h^*)$, es la temperatura en la superficie de la capa líquida h , T_∞ es la superficie del aire que está alrededor de la capa líquida y h_T es un coeficiente de convección que depende de las condiciones de flujo del fluido externo. De la ecuación (2.37) se puede suponer que el gradiente de temperatura en la superficie de la capa líquida, respecto a la coordenada intermedia χ es constante.

Al integrar la ecuación de difusión de calor para obtener la distribución de la componente T_0 de temperatura, se obtiene un perfil lineal de temperatura:

$$\begin{aligned} \frac{dT_o}{d\chi} &= A = cte, \\ T_o &= A\chi + B, \end{aligned} \quad (2.40)$$

La constante B se obtiene igualando la temperatura en $\chi=0$ con la temperatura en la superficie externa del cilindro sólido $T_0(\chi=0)=T_w$. Para obtener la constante A, se iguala la derivada del perfil de temperatura obtenido por la ecuación de difusión (ec. 2.40) con la derivada de la temperatura en $x=h$ determinada por la condición de enfriamiento de Newton (2.39):

$$\frac{dT_o}{\partial \chi} \Big|_{x=h} = A = -\frac{h_T h_0}{k} (T_o(h) - T_\infty) \quad (2.41)$$

Escribiendo $T_0(h)$ como la suma de la temperatura en la pared T_w más la constante A multiplicada por $\chi=h$, se obtiene:

$$A = -\frac{h_T h_0}{k} (T_o(h) - T_\infty) = -\frac{h_T h_0}{k} (Ah + T_w - T_\infty) \quad (2.42)$$

Simplificando términos se llega a la siguiente ecuación:

$$A = \left(\frac{-Bi}{1 + Bi \cdot h} \right) (T_w - T_\infty) \quad (2.43)$$

Donde h es el espesor adimensional de la capa $h=h^*/h_0$, y Bi es el número de Biot del flujo que se define $Bi=(h_T h_0/k)$. El número de Biot se puede describir como el cociente de la resistencia térmica por conducción que se transmite dentro del fluido en la capa líquida h_0/k dividido por la resistencia térmica por convección $1/h_T$, que ocurre afuera de la capa líquida. Cuando $Bi \ll 1$ la conducción es el fenómeno dominante en la transferencia de calor, cuando $Bi \gg 1$ el fenómeno que domina es la convección en la transferencia de calor en la superficie de la capa. (Deen, 1998)

Usando estos parámetros llegamos a la siguiente ecuación para la temperatura de la superficie libre del fluido. Esta ecuación se expresa en forma adimensional, en función de la variable adimensional χ y el número de Biot Bi :

$$\left(\frac{T_o(h) - T_w}{T_w - T_\infty} \right) = \left(\frac{-Bi}{1 + Bi \cdot h} \right) (\chi) \quad (2.44)$$

Con este perfil de temperatura es posible obtener el gradiente de temperatura en la superficie respecto a las variables espaciales χ , y o respecto a z . Estas derivadas se usaran para obtener los esfuerzos de tensión superficial en la dirección tangencial que son muy relevantes en el problema no isotérmico.

En el cálculo de las ecuaciones de esfuerzo tangencial, se necesita calcular las siguientes derivadas que ponemos para su uso posterior:

$$\left(\frac{d\Theta_o}{d\chi} \right) = \left(\frac{-Bi}{1 + Bi \cdot h} \right) \quad (2.45)$$

$$\left(\frac{d\Theta_o}{dz} \right)_{\chi=h} = \left(\frac{Bi^2}{(1 + Bi \cdot h)^2} \chi h_z \right) = \left(\frac{Bi^2}{(1 + Bi \cdot h)^2} h h_z \right) \quad (2.46)$$

$$\left(\frac{d\Theta_o}{dy} \right) = \left(\frac{Bi^2}{(1 + Bi \cdot h)^2} \chi h_y \right) = \left(\frac{Bi^2}{(1 + Bi \cdot h)^2} h h_y \right) \quad (2.47)$$

2.4 Condiciones de frontera

A continuación se escriben las condiciones de frontera que aplican para nuestro problema. La primera condición es la de no deslizamiento del fluido en la superficie del cilindro, es decir la velocidad del fluido es cero, en $r=\beta$ (adimensional) o en $\chi=0$, debe ser cero, si el cilindro esta estático:

$$\begin{aligned}u &= 0, \\v &= 0, \\w &= 0,\end{aligned}\tag{2.48}$$

2.4.1 Ecuación de esfuerzos normales

Primero escribimos el balance de esfuerzos normales y tangenciales que se aplican sobre la superficie libre de la capa líquida en la interface fluido – aire o gas. (Deen, 1998)

$$(\bar{\tau}^f - \bar{\tau}^a) \cdot \bar{n} - grad(\gamma) + \gamma(\nabla \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n} = 0\tag{2.49}$$

Donde $\tau^{(f)}$ es el tensor de esfuerzos en el fluido del lado interior de la interface, y $\tau^{(a)}$ es el tensor de esfuerzos actuando en el lado exterior de la interface, en este caso el aire y γ es el coeficiente de tensión superficial entre el líquido y gas de la interface. $k = (\nabla \cdot \bar{n}) = 1/R_1 + 1/R_2$ es la curvatura de la superficie, donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura principales de la superficie o interface.

El término $grad(\gamma) = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) (\bar{t} \cdot \nabla T)$ es el gradiente de tensión superficial que

existe en la superficie. En nuestro problema el gradiente de tensión superficial se debe a la variación de temperatura en la superficie de la interface.

El segundo término describe el cambio de esfuerzo debido al cambio de tensión superficial debido a un gradiente de temperatura. Este término es el que origina el fenómeno termo capilar cuando existe un gradiente de temperatura. (Deen, 1998)

El esfuerzo sobre una superficie de fluido se pueden separar en un componente debido a la presión y a los esfuerzos viscosos o deviatoricos en un fluido compresible (Deen, 1996)

$$\sigma = -p + \tau_{ij} \quad (2.50)$$

Al multiplicar todos los términos por el vector normal en un punto de la superficie libre, se elimina el segundo término ya que el producto del vector tangente por el normal es cero.

$$-(P^{(f)} - P^{(a)}) + (\tau_{ij}^{(f)} - \tau_{ij}^{(a)}) \cdot n_i n_j = -We(\nabla \cdot n) \quad (2.51)$$

Esta ecuación que expresa el balance de esfuerzos normales en una superficie se le conoce como ecuación de Laplace-Young (White, 1982). Lo que nos dice es que los esfuerzos normales debidos a la presión y a los esfuerzos viscosos dentro de una interface de fluido serán mayores en el lado interior de la interface por un valor igual a la tensión superficial multiplicado por la curvatura k que la presión en el lado opuesto. (El lado del aire o gas en nuestro problema)

Además hemos escrito la ecuación en forma adimensional usando el número de Weber. En términos de variables adimensionales $We = \gamma / \rho U^2$. El número de Weber es un número adimensional que representa la competencia entre las fuerzas de tensión superficial con las fuerzas de inercia en un fluido. Debe su nombre a Moritz Weber (1871-1951) del Instituto Politécnico de Berlin.

Es un número relevante cuando el número de Weber es menor a 1, por ejemplo en flujos de gotas, flujos capilares, y ondas donde la deformación de la superficie es comparable al espesor de la capa líquida.

El vector normal para una superficie (como la de la capa líquida) en coordenadas cilíndricas se puede escribir de la siguiente forma:

$$\hat{n} = \frac{1}{N} \left(1, -\frac{1}{r} h_{\theta}, -h_z \right), \quad (2.52 \text{ a})$$

Donde

$$N = \left(1 + \frac{1}{r^2} h_{\theta}^2 + h_z^2 \right)^{1/2} \quad (2.52 \text{ b})$$

La curvatura k se calcula como la divergencia del vector normal a la superficie:

$k = \nabla \bullet \hat{n}$ en coordenadas cilíndricas se obtuvo la siguiente expresión:

$$k = \nabla \bullet \hat{n} = \frac{1}{N^3} \left[\left(\frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} h_{\theta}^2 + h_z^2 \right) - \frac{1}{h_{\theta\theta}} \left(1 + h_z^2 \right) - h_{zz} \left(1 + \frac{1}{r^2} h_{\theta}^2 \right) + \frac{1}{r^3} h_{\theta}^2 + \frac{2}{r^2} h_{\theta} h_z h_{\theta z} \right] \quad (2.53)$$

Con estas definiciones e introduciendo las componentes de esfuerzo τ_{nn} se puede calcular la ecuación de balance de esfuerzos normales:

$$\begin{aligned} & -(p_f - p_{aire}) + \frac{1}{N^2} (\tau_{rr} n_r^2 + \tau_{\theta\theta} n_{\theta}^2 + \tau_{zz} n_z^2 + 2\tau_{r\theta} n_r n_{\theta} + 2\tau_{rz} n_r n_z + \\ & + 2\tau_{\theta z} n_{\theta} n_z) = -We(\nabla \bullet n) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Introduciendo las componentes del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas, y haciendo algunas simplificaciones, se obtiene la ecuación de balance de esfuerzos normales:

$$\begin{aligned}
& -(p - p_\infty) + \frac{1}{N^2} \left(\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \frac{h_\theta^2}{r^2} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} h_z^2 - \frac{2}{\text{Re}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{r} \right. \\
& \left. - \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) h_z + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{r} h_z \right) \\
& = -\frac{We}{N^3} \left[\left(\frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} h_\theta^2 + h_z^2 \right) - \frac{1}{r^2} h_{\theta\theta} (1 + h_z^2) - h_{zz} \left(1 + \frac{1}{r^2} h_\theta^2 \right) + \frac{1}{r^3} h_\theta^2 + \frac{2}{r^2} h_\theta h_z h_{\theta z} \right]
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Al introducir los escalamientos que se definieron en (2.16) y separando las variables de velocidad y presión en sus componentes principales y perturbaciones (2.21), la ecuación 2.54 se simplifica de la siguiente forma tomando solo los componentes de orden 0 y 1.

$$p_0 = \frac{We}{N^3} \left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r} \right) (\varepsilon^2 h_\theta^2 + \varepsilon^2 h_z^2) - \varepsilon^2 h_{yy}(1) - \varepsilon^2 h_{zz}(1) \right] \tag{2.56}$$

EL término $1/r$ evaluado en la superficie del fluido de la capa líquida r_s , se puede sustituir por el siguiente término (ec. 2.19b):

$$\frac{1}{r_s} = \left(\frac{1}{\beta} \right) \left(1 - \frac{h}{\beta} \right) = \frac{\varepsilon}{\delta} - \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} h \tag{2.57}$$

Además considerando que la tensión superficial es de magnitud grande, se hace un escalamiento y se sustituye $We = We^*/(\varepsilon^2)$. Al sustituir este término en la ecuación de balance de esfuerzos normales, dicha ecuación se resume de la siguiente manera:

$$p_0 = \frac{We^*}{N^3} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon \delta} - \frac{1}{\delta^2} h \right) - h_{yy} - h_{zz} \right] \tag{2.58}$$

Esta ecuación de balance de esfuerzos normales, se usara junto con las ecuaciones de balance de momento, masa, y energía para obtener la ecuación de evolución de onda de nuestro problema, tanto isotérmico como no isotérmico.

A continuación se deducirán las condiciones de esfuerzo tangenciales que aplican al flujo de una capa líquida sobre un cilindro.

2.4.2 Ecuaciones de balance de esfuerzos tangenciales

Además de los esfuerzos normales de tensión superficial, existen esfuerzos de gradientes tensión superficial tangenciales a la superficie. Dichos esfuerzos aparecen cuando existen gradientes de temperatura en la superficie libre del fluido, o debido a gradientes de composición como surfactantes que se agregaron al fluido en cuestión.

La ecuación de balance de esfuerzos tangenciales se obtiene multiplicando la ecuación por el vector en la dirección tangencial a la superficie:

$$\tau_{ik} \cdot n_k \cdot t_i^{(j)} = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) t_i^{(j)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.59)$$

Primero se obtienen los productos del tensor de esfuerzos por el vector normal n_k multiplicado por el vector tangente T_i . Existen dos vectores tangentes a la superficie en el punto P, donde calculamos los esfuerzos de tensión superficial. El vector normal se definió en (2.45) y el primer vector tangente se escribe a continuación:

$$t_i^1 = \frac{(h_z, 0, 1)}{(1 + h_z^2)^{1/2}} \quad (2.60)$$

Haciendo los productos del vector tangente por los componentes del producto del tensor de esfuerzos por el vector normal, y simplificando algunos términos:

$$\frac{h_z}{(1 + h_z^2)^{1/2}} \left(\tau_{rr} - \frac{1}{r} h_\theta \tau_{r\theta} - h_z \tau_{rz} \right) + \frac{h_z}{(1 + h_z^2)^{1/2}} \left(\tau_{zr} - \frac{1}{r} h_\theta \tau_{z\theta} - h_z \tau_{zz} \right) = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) t_i^{(j)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.61)$$

En la obtención de la ecuación de balance de esfuerzos tangenciales, se aplicaron varios pasos que a continuación se resumen. Se sustituyeron las definiciones de los componentes del tensor de esfuerzos y se usó la adimensionalización definida en (2.3). Se obtuvo el gradiente de la temperatura, y luego se multiplicó por el vector tangente número 1, para obtener el miembro derecho de la ecuación de 2.53

$$t_i^1 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{(1 + \varepsilon^2 h_z^2)^{1/2}} \left(\varepsilon \frac{\partial T}{\partial \chi} h_z + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial z} \right) \left(\frac{T_w - T_o}{ho} \right) \quad (2.62)$$

Se realizan los escalamientos de las variables, dz , y $rd\theta$, y se separan las variables de la ecuación principal en sus perturbaciones. También se introdujeron las derivadas de la temperatura respecto a la variable x y la variable z , que definen el comportamiento de los esfuerzos tangenciales. La deducción de esta ecuación del balance de esfuerzos tangenciales en su forma completa se puede consultar en el apéndice 2.

Además, también se usa la definición del número de Marangoni $Ma = -\frac{\partial\gamma}{\partial T} \frac{\Delta Th_o}{\nu\alpha}$.

Así llegamos a la siguiente forma de la ecuación de esfuerzos tangencial:

$$\begin{aligned} & \left(\left(2\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \chi} - 2\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \varepsilon h_z + \left(\frac{\partial w_0}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_0}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) (1 - \varepsilon^2 h_z^2) - \right. \\ & \left. \left(\varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial \chi} - \left(\frac{\varepsilon^2 v_0}{\delta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \varepsilon^2 h_y h_z - \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v_0}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \varepsilon h_y \right) \\ & = \left(\frac{Ma}{\text{Pr Re}} \right) \left(\frac{Bi \varepsilon h_z}{(1 + Bi h^*)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Tomando solo los términos a orden cero, y a orden uno, se obtienen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

$$\varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bi \varepsilon h_z}{(1 + Bi h^*)^2} \right] \quad (2.65)$$

Estas ecuaciones se pueden introducir en las ecuaciones de momento que se resolverán por un método de perturbación, para obtener una ecuación de evolución de la onda.

2.4.3 Segunda condición de esfuerzos tangenciales

Para obtener la segunda condición de esfuerzos tangenciales se sigue un procedimiento similar. Comenzamos con la ecuación de balance de esfuerzos tangenciales:

$$\tau_{ik} \cdot n_k \cdot t_i^{(j)} = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) t_i^{(j)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.66)$$

En la condición de esfuerzos tangenciales se usa el segundo vector tangencial y el vector normal y se siguen los mismos pasos que en el procedimiento anterior:

$$t_i^2 = \frac{\left(-\frac{1}{r}h_\theta, -(1+h_z^2), \frac{1}{r}h_\theta h_z\right)}{(1+h_z^2)^{1/2} \cdot N} \quad (2.67)$$

Realizando los productos del tensor de esfuerzos por los vectores tangentes y normales se obtiene:

$$\tau_{ik} \cdot n_k \cdot t_i^{(2)} = t_i^2 \begin{bmatrix} (\tau_{rr} - \frac{1}{r}h_\theta \tau_{r\theta} - h_z \tau_{rz}) \hat{e}_r + \\ (\tau_{\theta r} - \frac{1}{r}h_\theta \tau_{\theta\theta} - h_z \tau_{\theta z}) \hat{e}_\theta \\ + \left(\tau_{zr} + \frac{1}{r}h_\theta \tau_{z\theta} - h_z \tau_{zz} \right) \hat{e}_z \end{bmatrix} = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \Theta} \right) t_i^{(j)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.68)$$

Para obtener la ecuación de balance de esfuerzos tangenciales 2, se siguieron los siguientes pasos: Se substituyeron los componentes del tensor de esfuerzos y los componentes del segundo vector tangencial, y del vector normal. Se realizó el producto del segundo vector tangencial con el gradiente de temperaturas y haciendo el cambio de variables de θ a y , se obtuvo el miembro derecho de la ecuación (2.68):

$$t_i^2 \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{(1+h_z^2)^{1/2} \cdot N} \left(-h_y \frac{\partial T}{\partial \chi} - (1+h_z^2) \frac{\partial T}{\partial y} + h_y h_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \left(\frac{T_w - T_o}{h_0} \right) \quad (2.69)$$

Usando la ecuación (2.68), junto con el escalamiento debido a la aproximación de longitud de onda larga, y separando los componentes de velocidad en sus perturbaciones, se obtuvo la siguiente ecuación (2.70). La deducción completa de esta ecuación se puede consultar en el apéndice 2.

$$\begin{aligned}
& \left(\left(-2 \frac{\partial u_o}{\partial \chi} \right) \varepsilon^2 h_y + \left(2\varepsilon^3 \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2\varepsilon^3 \frac{u_o}{\delta} \right) - 2\varepsilon^4 \left(\frac{\partial w_o}{\partial z} \right) h_y h_z^2 \right. \\
& \left. - \left(\varepsilon \frac{\partial v_o}{\partial \chi} - \varepsilon^2 \left(\frac{v_o}{\delta} \right) + \varepsilon \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) (1) + 2 \left(\frac{\partial w_o}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_o}{\partial z} \right) \varepsilon^2 h_y h_z + \left(\varepsilon \frac{\partial v_o}{\partial z} h_z + \varepsilon \frac{\partial w_o}{\partial y} h_z \right) \right) \\
& = - \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi \varepsilon h_y}{(1 + Bi h)^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Tomando solo los componentes de orden 1, se llega a la siguiente ecuación de balance de esfuerzos tangenciales:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) = \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi \varepsilon h_y}{(1 + Bi h)^2} \right) \tag{2.71}$$

2.5 Deducción de la ecuación de Benney para el flujo de una capa de fluido visco elástico descendiendo por un cilindro (caso no isotérmico)

Para obtener la ecuación de evolución de onda no lineal o ecuación del tipo de Benney se substituyen las componentes del tensor de esfuerzo, en cada dirección en las ecuaciones de momento en cada dirección.

En la deducción de la ecuación de evolución de onda, se partió de la solución para un flujo newtoniano. Esta ecuación de evolución de onda, la obtuvo Frenkel (1993), con la aproximación de radio grande y de longitud de onda larga. En este procedimiento usamos el método de Frenkel, y partimos de la solución para un flujo newtoniano para aplicarlo a la solución de un flujo viscoelástico en un cilindro.

Como el tensor de esfuerzo se puede separar en una parte viscosa $T_{ij} = \mu^* E_{ij}$, y una parte elástica $T = T_{VE}$ de acuerdo a la ecuación (2.5).

$$T_{ij} + \lambda_1 \frac{D_c}{Dt} T_{ij} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_2 \frac{D_c}{Dt} \right) E_{ij} \tag{2.72}$$

Entonces podemos escribir la ecuación de momento en r, separando la parte debido a los esfuerzos viscosos (Navier Stokes) y la parte debida a la divergencia de la parte elástica del esfuerzo. La ecuación de momento en r queda:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} + (\nabla \cdot T_{VE})_r \quad (2.73)$$

Como se ve a continuación, la divergencia de Tve es bastante simple, ya que las componentes T'rr, T'rθ, T'θθ y T'rz, son Newtonianos a orden cero³, y esto simplifica el último término de la ecuación anterior.

$$\nabla \cdot T'_{VE} = \varepsilon \frac{\partial (T'_{rr1})}{\partial x} + \varepsilon \frac{T'_{rr0}}{\delta} + \varepsilon \frac{\partial T'_{r\theta 0}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial T'_{rz0}}{\partial z} - \varepsilon \frac{T'_{\theta\theta 0}}{\delta} \quad (2.74)$$

Como aquí no hay ningún término elástico, entonces la ecuación de momento se reduce a la ecuación de Navier Stokes., ya que el término visco elástico es igual a cero, y la ecuación de momento se reduce a la de Navier Stokes:

$$(\nabla \cdot T_{VE})_r = 0 \quad (2.75)$$

ECUACIÓN DE MOMENTO EN DIRECCION Z: OBTENCION DE Wo

Las ecuaciones de momento en r y theta, no se modifican usando las ecuaciones constitutivas de Oldroyd a orden cero. Sin embargo en la dirección z a orden (1), si existen algunos cambios en la ecuación de momento:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + (\nabla \cdot T')_z \quad (2.76)$$

En este caso si existen términos viscoelásticos en la divergencia del tensor de esfuerzos en z:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot T'_{VE})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r T'_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T'_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T'_{zz}}{\partial z} = \\ &\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (T'_{rz1}) + \frac{\varepsilon}{\delta} (T'_{rz0}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} T'_{\theta z 0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} (T'_{zz0}) \end{aligned} \quad (2.77)$$

El termino $T_{\theta z}$ es igual a cero, y el segundo término es parte de la solución viscosa en Navier Stokes, por lo que solo se necesita evaluar el primer y tercer términos. Introduciendo los componentes de T_{rz} , y de T_{zz} viscoelásticos que se obtuvieron en (2.25) y (2.27), y después de algunas simplificaciones se obtuvo:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \overline{T_{VE}})_z = & \frac{1}{\text{Re}} \frac{(De_2 - De_1)}{h_0} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial t \partial r^2} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + u_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} \right) + \\ & \frac{1}{\text{Re}} \frac{(De_2 - De_1)}{h_0} \left(w_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^2 \partial z} - 3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} - \frac{\partial w_0}{\partial z} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{4}{\text{Re}} \frac{(De_1 - De_2)}{h_0} \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Donde se introduce el número adimensional de Deborah = $\lambda * U/h$, usando la adimensionalización de (2.4), en la ecuación de esfuerzos (2.78)

$$\begin{aligned} \rho U^2 = \eta \left(\frac{\lambda}{h} \right) \frac{U^2}{h^2}, \\ 1 = \frac{\lambda U}{h} \left(\frac{\nu}{Uh} \right) = De \cdot \frac{1}{\text{Re}} \end{aligned} \quad (2.79)$$

2.5.1 Ecuación de Benney de un fluido Viscoelástico descendiendo sobre un cilindro con calentamiento

La solución de la ecuación de Benney de un fluido viscoelástico descendiendo sobre una pared cilíndrica, se realizará para el problema no isotérmico. Es decir se aplica un calentamiento o una temperatura constante a la pared externa del cilindro, mayor a la temperatura de la atmósfera en la superficie libre. De esta manera obtenemos una solución que sirve para el problema no isotérmico, que se puede usar también para el problema isotérmico, cuando se aplica una temperatura ambiente al cilindro interno.

Para obtener la ecuación de evolución de la onda de la capa líquida o ecuación de Benney, se usó el método que uso Frenkel (1993), para obtener la ecuación de evolución de onda de un fluido Newtoniano. En su investigación Frenkel, uso una aproximación válida para longitud de onda larga, y para un radio grande R mayor que la deformación de la capa líquida $h/R \leq 0.1$. En este procedimiento seguimos un proceso similar, pero usando las ecuaciones de esfuerzo de un fluido viscoelástico Oldroyd B.

La ecuación de momento en (r) se puede escribir como la ecuación de Navier Stokes, con sus componentes debido a los esfuerzos viscosos y como una contribución debido a los esfuerzos elásticos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{\delta} \right) = \left(- \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nabla \cdot T'_{VE} \quad (2.80)$$

En el siguiente paso, se separa las velocidades y esfuerzos en sus componentes principales y perturbaciones: Haciendo este paso, la ecuación de momento en r queda:

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) \quad (2.81)$$

La ecuación de momento en z también se separa en la ecuación de Navier Stokes, y una parte debido a los esfuerzos elásticos:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\nabla \cdot T'_{VE})_z \quad (2.82)$$

De la misma forma que en la ecuación en r, se hace el cambio de variable de r a χ y de θ a y , y se introducen los escalamientos en y y z:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial \chi} + \varepsilon v \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \varepsilon \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \chi^2} + \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial w}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\nabla \cdot T'_{VE})_z \quad (2.83)$$

Se usa un método de perturbación en parámetros pequeños de ε y se separan las variables en sus componentes principales y perturbaciones.

La ecuación de momento en las perturbaciones de orden cero y uno, queda:

$$\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) = 2$$

(2.84)

$$\left(\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial t} + \varepsilon u_0 \frac{\partial w}{\partial \chi} + \varepsilon w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\varepsilon \frac{\partial^2 w_1}{\partial \chi^2} + \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial w_0}{\partial \chi} \right) - \varepsilon \frac{\partial P_0}{\partial z} + \varepsilon (\nabla \cdot T_{VE})_z \quad (2.85)$$

Integrando dos veces la ecuación de momento de orden cero (2.84), y usando las condiciones de frontera de la capa líquida en la superficie del cilindro y en la superficie de la capa líquida con el aire, en $x=0$, $w=0$, y en $x=h$, $dW_0/dx=0$:

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 2\chi + c, \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 2\chi - 2h, \quad (2.86)$$

$$\left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=h} = 2h + c = 0, c = -2h \quad w_0 = \chi^2 - 2h\chi$$

Después se introduce este valor de la velocidad w_0 , a orden cero, en la ecuación de continuidad del mismo orden.

$$\frac{\partial u_0}{\partial \chi} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \chi} = 2xh_z, u_0 = x^2 h_z$$

Estos valores se pueden introducir en la ecuación de momento a orden 1, en la ecuación (2.85), para obtener:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \chi^2} = \text{Re} \left(\frac{\partial}{\partial t} (x^2 - 2\chi h) + x^2 h_z \frac{\partial}{\partial \chi} (x^2 - 2\chi h) + (x^2 - 2\chi h) \frac{\partial}{\partial z} (x^2 - 2\chi h) \right) - (\nabla \cdot T_{VE})_z - \left(-\frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2\chi h) + \varepsilon \frac{\partial P_0}{\partial z} \right) \quad (2.88)$$

La parte visco elástica en esta ecuación, la divergencia de T_{VE} , también se puede evaluar sustituyendo las velocidades u_0 y w_0 , en la ecuación 2.78. Haciendo algunos pasos de algebra se llega a la siguiente ecuación para $\nabla \cdot T_{VE}$;

$$\left(\nabla \cdot T_{VE}\right)_z = 4\eta_0(\lambda_1 - \lambda_2)hh_z \quad (2.89)$$

Introduciendo el valor de la divergencia del tensor de esfuerzo en la ecuación de momento en z, e introduciendo el número de Deborah, $De = \lambda U/h$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \chi^2} = \text{Re} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\chi^2 - 2\chi h) + x^2 h_z \frac{\partial}{\partial x}(\chi^2 - 2\chi h) + (\chi^2 - 2\chi h) \frac{\partial}{\partial z}(\chi^2 - 2\chi h) \\ & - \frac{1}{\delta \text{Re}} \frac{\partial}{\partial x}(\chi^2 - 2\chi h) + \frac{\partial P_0}{\partial z} \end{aligned} \right) - 4 \frac{(De_1 - De_2)}{\text{Re} h_0} hh_z \quad (2.90)$$

Como primer paso se integra esta ecuación respecto a x , además también se substituye el valor de dh/dt a partir de la condición cinemática: $\partial h / \partial t = 2h^2 \partial h / \partial z$:

$$\frac{\partial w_1}{\partial \chi} = \text{Re} \left(-2h^2 \chi^2 h_z + \frac{2}{3} \chi^3 hh_z - \frac{1}{\delta \text{Re}} (\chi^2 - 2h\chi) + \frac{\partial P_0}{\partial z} \chi \right) - 4 \frac{(De_1 - De_2)}{\text{Re} h_0} hh_z \chi + C_1 \quad (2.91)$$

En esta sección del procedimiento usamos la condición de frontera del balance de esfuerzos tangenciales (2.65), la cual nos da una igualdad del gradiente de velocidad dW_1/dx .

$$\left(\varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial \chi} \right)_{x=h} = \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bi \varepsilon h_z}{(1 + Bi h)^2} \right] \quad (2.92)$$

Usando dicha condición de frontera, podemos calcular el valor de la Constante C_1 y la ecuación 2.91 queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial w_1}{\partial \chi} = \text{Re} \left(\frac{2}{3} \chi^3 h h_z - 2h^2 \chi^2 h_z \right) - \left(\frac{x^2 - 2h\chi}{\delta} \right) + \frac{\partial P_0}{\partial z} (\chi - h) \text{Re} + \frac{4}{3} h^4 h_z \text{Re} - \frac{h^2}{\delta} + 4 \frac{(De_1 - De_2)}{\text{Re} h_0} h h_z (h - \chi) + \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bih_z}{(1 + Bih)^2} \right] \quad (2.93)$$

En el segundo paso se vuelve a integrar respecto a x. En este caso la constante de integración es cero, ya que $w_1=0$, en $x=0$,

$$w_1 = \text{Re} \left(\frac{2}{12} h h_z \right) \chi^4 - \left(\frac{2}{3} h^2 h_z \text{Re} + \frac{1}{3\delta} \right) \chi^3 + \left(\frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{\text{Re}}{2} + \frac{h}{\delta} \right) \chi^2 + \left(\frac{4}{3} h^4 h_z \text{Re} - \frac{h^2}{\delta} - \frac{\partial P_0}{\partial z} h \text{Re} \right) \chi + 4 \frac{(De_1 - De_2)}{\text{Re} h_0} h h_z \left(h\chi - \frac{\chi^2}{2} \right) + \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bih_z \chi}{(1 + Bih)^2} \right] \quad (2.94)$$

Finalmente se evalúa la velocidad en $x=h$, para obtener la velocidad superficial del fluido $w_1(h)$:

$$w_1 = \frac{10}{12} h_z h^{(4+1)} \text{Re} - \left(\frac{1}{3\delta} h^3 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial P_0}{\partial z} \text{Re} h^2 + 2 \frac{(De_1 - De_2)}{\text{Re} h_0} h_z h^3 + \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bih_z h}{(1 + Bih)^2} \right] \quad (2.95)$$

En el siguiente paso se usa la ecuación de momento en (θ o y transformada), para obtener la velocidad V_0 :

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \chi^2} = \frac{\partial P_0}{\partial y} \text{Re} \quad (2.96)$$

Integrando respecto a x, una vez:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \chi} = \frac{\partial P_0}{\partial y} \text{Re} x + K_1 \quad (2.97)$$

Para obtener la constante de integración, se usa la segunda condición de balance de esfuerzos tangenciales (2). Se usa la ecuación (2. 71)

$$-\left(\varepsilon \frac{\partial v_o}{\partial \chi}\right) = -\frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi h_y}{(1 + Bi h)^2} \right) \quad (2.98)$$

Usando esta condición se obtuvo la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial v_o}{\partial \chi} = P_{oy} \text{Re}(\chi - h) + \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi h_y}{(1 + Bi h)^2} \right) \quad (2.99)$$

Integrando de nuevo para obtener v_o , se obtiene:

$$\boxed{v_o = P_{oy} \text{Re} \left(\frac{\chi^2}{2} - h\chi \right) + \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi h_y \chi}{(1 + Bi h)^2} \right)} \quad (2.100)$$

Para obtener u_1 , se usa la ecuación de continuidad de orden (1), que se escribe a continuación:

$$\boxed{\frac{\partial u_1}{\partial \chi} = \left(-\frac{u_o}{\delta} - \frac{\partial v_o}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)} \quad (2.101)$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de u_o , v_o y w_1 , se obtiene el valor de la derivada du_1/dx :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \chi} = & -h_z \frac{x^2}{\delta} - \frac{\partial}{\partial y} \left(P_{oy} \text{Re} \left(\frac{\chi^2}{2} - h\chi \right) + \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi h_y \chi}{(1 + Bi h)^2} \right) \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left(\text{Re} \left(\frac{2}{12} h h_z \right) \chi^4 - \left(\frac{2}{3} h^2 h_z \text{Re} + \frac{1}{3\delta} \right) \chi^3 + \left(\frac{\partial P_o}{\partial z} \frac{\text{Re}}{2} + \frac{h}{\delta} \right) \chi^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{4}{3} h^4 h_z \text{Re} - \frac{h^2}{\delta} - \frac{\partial P_o}{\partial z} h \text{Re} \right) \chi + 4 \frac{(De_1 - De_2)}{\text{Re} h_0} h_z \left(h^2 \chi - h \frac{\chi^2}{2} \right) \right. \\ & \left. \left[\frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bi h_z \chi}{(1 + Bi h)^2} \right] \right] \right) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Evaluando las derivadas en la ecuación anterior respecto a y y z , y simplificando se obtiene la siguiente ecuación, y además integrando respecto a x se obtiene la velocidad radial del fluido u_1 :

$$\begin{aligned}
u_1 = & -\frac{2}{3}h_z \frac{\chi^3}{\delta} - P_{oyy} \operatorname{Re} \left(\frac{\chi^3}{2*3} - \frac{1}{2}h\chi^2 \right) + \frac{1}{2}P_{oy} \operatorname{Re} x^2 h_y P_{oy} \operatorname{Re} \chi h_y \\
& + \left(-\operatorname{Re} \left(\frac{1}{30}hh_{zz} \right) \chi^5 - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{30}h_z^2 \right) \chi^{/5} \right) + \left(\frac{1}{3}hh_z^2 \chi^4 \operatorname{Re} + \frac{2}{12}h^2 h_{zz} \chi^4 \operatorname{Re} \right) - \frac{2}{12} \chi^3 P_{0zz} \operatorname{Re} \\
& + \left(\frac{1}{2}P_{0zz} \operatorname{Re} h \chi^2 + \left(-\frac{8}{3} \operatorname{Re} h^3 h_z^2 \chi^2 - \operatorname{Re} \frac{2}{3}h^4 h_{zz} \chi^2 + \frac{1}{2}P_{0z} \operatorname{Re} h_z \chi^2 \right) \right) \\
& + 2 \frac{(De_1 - De_2)}{\operatorname{Re} h_0} h_{zz} (h^2 \chi^2 - h \frac{\chi^3}{3}) + 2 \frac{(De_1 - De_2)}{\operatorname{Re} h_0} (2hh_z^2 \chi^2 - h_z^2 \frac{\chi^3}{3}) \\
& - \frac{1}{2} \frac{Ma}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \left(\frac{Bih_{yy} \chi^2}{(1+Bih)^2} \right) + \frac{Ma}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \left(\frac{Bi^2 h_y^2 \chi^2}{(1+Bih)^3} \right) - \frac{1}{2} \frac{Ma}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \left[\frac{Bih_{zz} \chi^2}{(1+Bih)^2} \right] + \frac{Ma}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \left[\frac{Bi^2 h_z^2 \chi^2}{(1+Bih)^3} \right]
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Este valor de la velocidad u_1 , se puede evaluar en $x=h$, para evaluar la velocidad superficial:

$$\begin{aligned}
u_1 = & -\frac{2}{3}h_z \frac{h^3}{\delta} - P_{oyy} \operatorname{Re} \left(\frac{h^3}{6} - \frac{1}{2}h^3 \right) - \frac{1}{2}P_{oy} \operatorname{Re} h^2 h_y \\
& + \left(-\operatorname{Re} \left(\frac{16}{30}h_{zz} \right) h^{(4+2)} - \operatorname{Re} \left(\frac{71}{30}h_z^2 \right) h^{(4+1)} + \frac{1}{3}h^3 P_{0zz} \operatorname{Re} + \frac{1}{2}P_{0z} \operatorname{Re} h_z h^2 + \frac{h_z}{\delta} h^3 \right) \\
& + \frac{(De_1 - De_2)}{\operatorname{Re} h_0} h_{zz} \left(\frac{4}{3}h^4 \right) + \frac{(De_1 - De_2)}{\operatorname{Re} h_0} \left(\frac{10}{3}h_z^2 h^3 \right) \\
& - \frac{1}{2} \frac{Ma}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \left(\frac{Bih_{yy} h^2}{(1+Bih)^2} \right) + \frac{Ma}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \left(\frac{Bi^2 h_y^2 h^2}{(1+Bih)^3} \right) - \frac{1}{2} \frac{Ma}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \left[\frac{Bih_{zz} h^2}{(1+Bih)^2} \right] + \frac{Ma}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \left[\frac{Bi^2 h_z^2 h^2}{(1+Bih)^3} \right]
\end{aligned} \tag{2.104}$$

El último paso para obtener la ecuación de evolución de onda es sustituir los valores de $u_1(h)$, $v_0(h)$ y $w_1(h)$, en la condición cinemática, la cual se escribe de la siguiente forma, considerando los escalamientos en y, z y t :

$$u = \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon w \frac{\partial h}{\partial z} + \varepsilon v \frac{\partial h}{\partial y} \tag{2.105}$$

Y separando las velocidades en su componente principal y sus perturbaciones, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\varepsilon \frac{\partial h_0}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial t} = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 - \varepsilon w_0 \frac{\partial h}{\partial z} - \varepsilon^2 v_0 \frac{\partial h}{\partial y} - \varepsilon^2 w_1 \frac{\partial h}{\partial z} - \varepsilon^3 v_1 \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.106)$$

Al substituir los valores que hemos obtenido de las velocidades y sus perturbaciones, en la ecuación de condición cinemática, obtenemos la ecuación de evolución de onda no lineal del flujo descendente de un fluido visco elástico sobre un cilindro vertical isotérmico. Después de varios pasos de algebra y concentrando algunos términos se obtuvo la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} h_t - 2h^2 h_z + \varepsilon \left[-\frac{1}{6\delta} (h^4)_z + \frac{8}{15} \text{Re}(h^6 h_z)_z - \frac{1}{3} \text{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial P_0}{\partial y} \right) - \frac{1}{3} \text{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P_0}{\partial z} \right) \right] + \\ \varepsilon * 4/3 (De_1 - De_2) (h^4 h_z)_z \\ + \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bih_{yy} h^2}{(1 + Bih)^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bih_{zz} h^2}{(1 + Bih)^2} \right] \\ + \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bih_y^2 x}{(1 + Bih)^3} \right) + \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bih_z^2 h}{(1 + Bih)^3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.107)$$

Si además se desarrollan las derivadas en esta ecuación, y simplificando se obtiene la siguiente ecuación con la que realizaremos el análisis lineal en los próximos capítulos. También se define un número de $De = De_1 - De_2$ que es proporcional a la diferencia de tiempos de relajamiento, y a la elasticidad del fluido.

$$\begin{aligned} h_t - 2h^2 h_z + \varepsilon \left[-\frac{2}{3\delta} h^3 h_z + \frac{8}{15} \text{Re} h^6 h_{zz} - \frac{1}{3} \text{Re} h^3 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2} - h^2 \frac{dh}{dy} \frac{\partial P_0}{\partial y} \right] + \varepsilon * (De) (h^4 h_z)_z \\ - \frac{1}{3} \text{Re} h^3 \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} - h^2 \frac{dh}{dz} \frac{\partial P_0}{\partial z} \\ + \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bih_{yy} h^2}{(1 + Bih)^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bih_{zz} h^2}{(1 + Bih)^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.108)$$

Los productos en esta ecuación de derivadas dh/dy por dP_0/dy , o dh/dz por dP_0/dz , son no lineales, y se pueden eliminar para realizar el análisis lineal de la ecuación de evolución de onda.

Por lo tanto la versión final de la ecuación de evolución de onda que usaremos para realizar el análisis lineal queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 h_t - 2h^2 h_z + \varepsilon \left[-\frac{2}{3\delta} h^3 h_z + \frac{8}{15} \text{Re} h^6 h_{zz} - \frac{1}{3} \text{Re} h^3 \frac{\partial^2 P_o}{\partial y^2} \right] + \varepsilon * (De)(h^4 h_z)_z \\
 + \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bih_{yy} h^2}{(1+Bih)^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bih_{zz} h^2}{(1+Bih)^2} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

En los siguientes dos capítulos se usara esta ecuación para realizar el análisis lineal del flujo descendente de las capas líquidas de fluidos viscoelásticos sobre una pared cilíndrica vertical. El análisis lineal nos proporciona información fundamental sobre el comportamiento del flujo que nos permitirá comprender la influencia de la viscoelasticidad del flujo y del calentamiento de la capa líquida, en el crecimiento y estabilidad de las ondas. En el siguiente capítulo, se usara esta ecuación de evolución de onda no lineal, para obtener la razón de crecimiento temporal lineal de la onda tomando en cuenta perturbaciones axiales y azimutales. Esta ecuación se puede linealizar y para ello se escribe el espesor deformado de la capa líquida como $h=H_o*\exp(\sigma*t+i(kz+ny))$.

Capítulo 3. Solución de la ecuación de evolución de onda del flujo descendente de un fluido visco elástico sobre un cilindro

En este capítulo, se usara la ecuación (2.109), para obtener el comportamiento de la capa líquida de un fluido viscoelástico descendiendo sobre un cilindro vertical con calentamiento. La deducción se realiza en forma general es decir incluyendo el perfil de temperatura debido al calentamiento del cilindro. La ecuación resultante de este análisis lineal nos dará la razón de crecimiento de las ondas en la superficie libre, en forma general, es decir será Válida para el flujo isotérmico y para el caso no isotérmico.

3.1 Análisis lineal de la ecuación de evolución de onda del problema viscoelástico (caso isotérmico).

Para obtener el comportamiento lineal de la ecuación de evolución de la onda partimos de la ecuación (2.109). Esta ecuación se expresa en función de $h(x,y,z,t)$, y también aparece la presión P_o , y sus derivadas P_{ozz} , y P_{oyy} .

$$h_t - 2h^2 h_z + \varepsilon \left[-\frac{2}{3\delta} h^3 h_z + \frac{8}{15} \text{Re} h^6 h_{zz} - \frac{1}{3} \text{Re} h^3 \frac{\partial^2 P_o}{\partial y^2} \right] + \varepsilon * (De)(h^4 h_z)_z - \frac{1}{3} \text{Re} \frac{\partial^2 P_o}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi h_{yy} h^2}{(1 + Bi h)^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bi h_{zz} h^2}{(1 + Bi h)^2} \right] = 0 \quad (3.1)$$

Obteniendo las derivadas dentro de los paréntesis donde contiene las variables P_{ozz} y P_{oyy} , y despreciando los productos no lineales de derivadas respecto al tiempo y espacio. Además se substituye el espesor de la capa líquida h , por su equivalente $h=(1+H)$, para linearizar la ecuación, se obtiene la siguiente ecuación:

$$H_t - 2(1 + 2H)H_z + \varepsilon \left[-\frac{2}{3\delta} (1 + 3H)H_z + \frac{8}{15} \text{Re}(1 + 6H)H_{zz} - \frac{1}{3} \text{Re}(1 + 3H)P_{oyy} \right] + \varepsilon \left[-\frac{1}{3} \text{Re}(1 + 3H)P_{oyy} + (De)(1 + 4H)H_{zz} \right] + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi H_{yy} (1 + 2H)}{(1 + Bi)^2} \right) + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bi H_{zz} (1 + 2H)}{(1 + Bi)^2} \right] = 0 \quad (3.2)$$

Las derivadas de P_o respecto a y y z , es decir $P_{o_{yy}}$, y $P_{o_{zz}}$, se obtienen a partir de la ecuación de balance de esfuerzos normales, ecuación (2.44 c). Realizando un poco de algebra se obtiene

$$p_{o_{yy}} = \frac{We}{N^3} \left[\frac{1}{\delta^2} h_{yy} - h_{yyy} - h_{yyz} + \frac{2}{\varepsilon \delta} (h_{yy}^2 + h_y h_{yyy}) \right] \quad (3.3)$$

$$p_{o_{zz}} = \frac{We}{N^3} \left[\frac{1}{\delta^2} h_{zz} - h_{zzz} - h_{zzz} + \frac{2}{\varepsilon \delta} (h_{zz}^2 + h_z h_{zzz}) \right] \quad (3.4)$$

Introduciendo los valores de las derivadas de la presión P_{o_y} , P_{o_z} y de $P_{o_{yy}}$ y $P_{o_{zz}}$, en la ecuación de evolución de onda, ecuación (3.2), se obtiene la siguiente ecuación de Benney para el flujo descendente de un cilindro en términos de la variable h y sus derivadas:

$$\begin{aligned} H_t - 2H_z + \varepsilon \left[-\frac{2}{3\delta} H_z + \frac{8}{15} \text{Re} H_{zz} \right] \\ - \frac{1}{3} \text{Re} We^* \varepsilon \left(\frac{H_{yy} + H_{zz}}{\delta^2} - H_{zzz} - 2H_{yyz} - H_{zzz} \right) \\ + \varepsilon (De) H_{zz} + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi H_{yy}}{(1+Bi)^2} \right) + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bi H_{zz}}{(1+Bi)^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.1 Análisis Lineal de la Ecuación de evolución de la onda

Para realizar el análisis lineal, antes separamos la altura de la capa h en $h=(1+H)$, donde h es la altura adimensional de la capa líquida, y H es la variación respecto al estado estacionario de la capa también adimensional. Visualizando H como una onda senoidal moviéndose en el espacio, y que varía con el tiempo:

$$H = H_0 \exp(\sigma t + j(kz + ny)) \quad (3.6)$$

Usando el término de H en términos de la función exponencial, se obtiene la siguiente ecuación algebraica, con una componente real y una imaginaria. El termino $H=\exp(\sigma t+j(kz+ny))$ se elimina de la ecuación ya que aparece multiplicando todos los términos. En esta última ecuación también se hizo uso de la variable S , que viene del número de Weber= $We= S/Re^2$.

$$\begin{aligned}
& \sigma - 2H_o k j + \varepsilon \left[\left(-\frac{2}{3\delta} j k - \frac{8}{15} \text{Re} k^2 \right) \right] \\
& - \frac{1}{3} \frac{S}{\text{Re}} \varepsilon \left(\frac{1}{\delta^2} \left(-k^2 - \frac{n^2}{\delta^2} \right) + k^4 + 2 \frac{k^2 n^2}{\delta^2} + \frac{n^4}{\delta^4} \right) \\
& - (De) k^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \left(-k^2 - \frac{n^2}{\delta^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Esta ecuación tiene una parte real y una imaginaria. Usando solo la parte real de la ecuación se obtiene σ , que es la razón de crecimiento que es una medida del crecimiento de las ondas en el tiempo:

$$\begin{aligned}
\sigma = \varepsilon \left[\frac{8}{15} \text{Re} k^2 + \frac{1}{3} \frac{S}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\delta^2} \left(k^2 + \frac{n^2}{\delta^2} \right) - \left(k^4 + 2 \frac{k^2 n^2}{\delta^2} + \frac{n^4}{\delta^4} \right) \right) \right] \\
+ \varepsilon (De) k^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \left(k^2 + \frac{n^2}{\delta^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

La ecuación que obtuvimos (3.8) es válida para el flujo de una capa de fluido viscoelástico que desciende por un cilindro para el caso isotérmico y no isotérmico. Para el caso isotérmico simplemente se elimina el último término de la ecuación. Para el caso no isotérmico se usa la ecuación completa.

A partir de esta ecuación podemos obtener gráficas del comportamiento de la razón de crecimiento con el número de onda en la dirección axial, y con dependencia del número de onda azimutal n . También se pueden explorar las diferentes condiciones dependiendo del número de Reynolds (Re), de la variable S de tensión superficial, del valor del número de Deborah (De), que es proporcional a la elasticidad del fluido, y del número de Marangoni (Ma), entre el producto de Reynolds por Prandtl (Pr), o también denominado número de Peckel, y para diferentes valores del radio del cilindro escalado $\delta = \varepsilon \beta$.

3.2 Razón de crecimiento de las perturbaciones, al variar De

En esta sección haremos el análisis lineal de la ecuación 3.5. Partimos de la ecuación 3.8 que describe la razón de crecimiento de la capa en función del número de onda k , y los parámetros adimensionales. Al tratarse del caso isotérmico, se elimina el último término de la ecuación 3.8 que depende del número de Ma y del número de Bi .

El primer caso que abordamos es fijando un número de Reynolds $=1$, y el número capilar $S=15$, por tanto $We=15/(1)^2=15$. Además calculamos la estabilidad solo para el caso axial. La variable que cambiamos en cada una de las curvas de la gráfica 3.1 es el número de Deborah, que es proporcional a la elasticidad del fluido. La gráfica del comportamiento de la razón de crecimiento, cuando se mantiene constante el número de Reynolds, y el número de Weber $=S/Re^2$, y se varía el número de Deborah para el modo axial principal, se muestra en la figura 3.1. En esta gráfica solo se presenta el modo axial, para cada número de Deborah. La razón de crecimiento se gráfica hasta un valor de $k=0.55$, ya que es el valor límite para que la aproximación de longitud de onda larga sea válido.

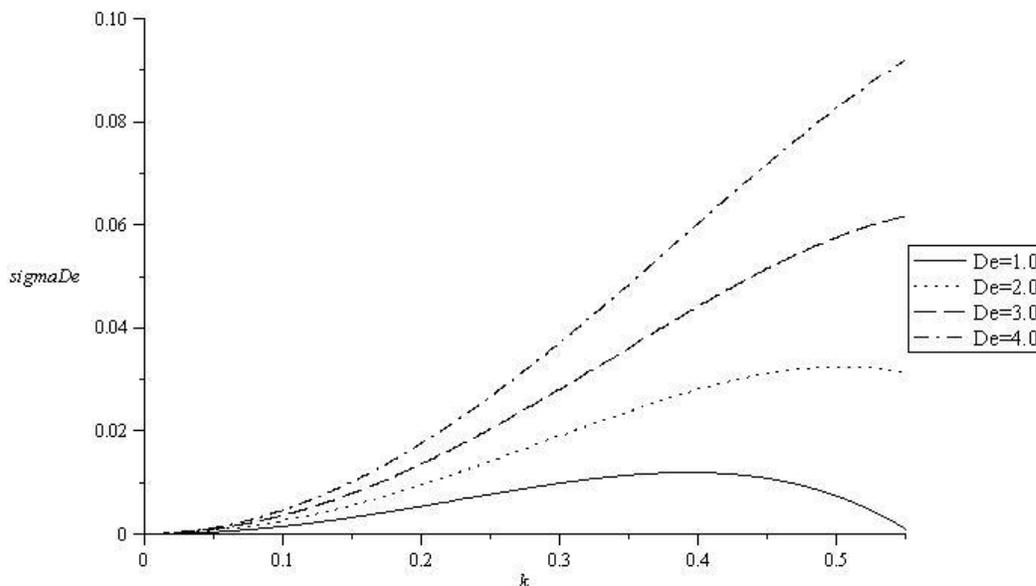


Figura 3.1 Razón de crecimiento vs Número de onda, para el modo axial, conforme se incrementa el número de Deborah ($S=15$, $Re=1$)

Como se puede observar en la gráfica 3.1, fijando Re y el número de tensión superficial S , al aumentar la elasticidad del fluido cuando varía el número de De , aumenta la razón de crecimiento, y por tanto el flujo se hace más inestable.

También se puede observar que al aumentar la elasticidad, aumenta el rango de valores donde la razón de crecimiento es mayor que cero, es decir se expande el rango de valores de k , para los cuales el flujo es inestable. También el valor del número de onda crítico k_{cr} es mayor cuando aumenta el número de De . Es importante notar que el análisis es adecuado para longitud de onda larga, en nuestro caso, las gráficas son válidas para $k < 0.5$. En las gráfica 3.1, las curvas con Deborah mayor a 1, los resultados son válidos solo hasta $k < 0.5$.

. Cuando se reduce la tensión superficial y por tanto el número de Weber, la tensión en la superficie de la capa es menor, y tiene menos control sobre el fluido dentro de la capa líquida y por tanto aumenta la inestabilidad. En la siguiente gráfica (3.2) se muestra la razón de crecimiento para diferentes valores de De cuando $Re=1$, $S=10$ y por tanto $We=10$.

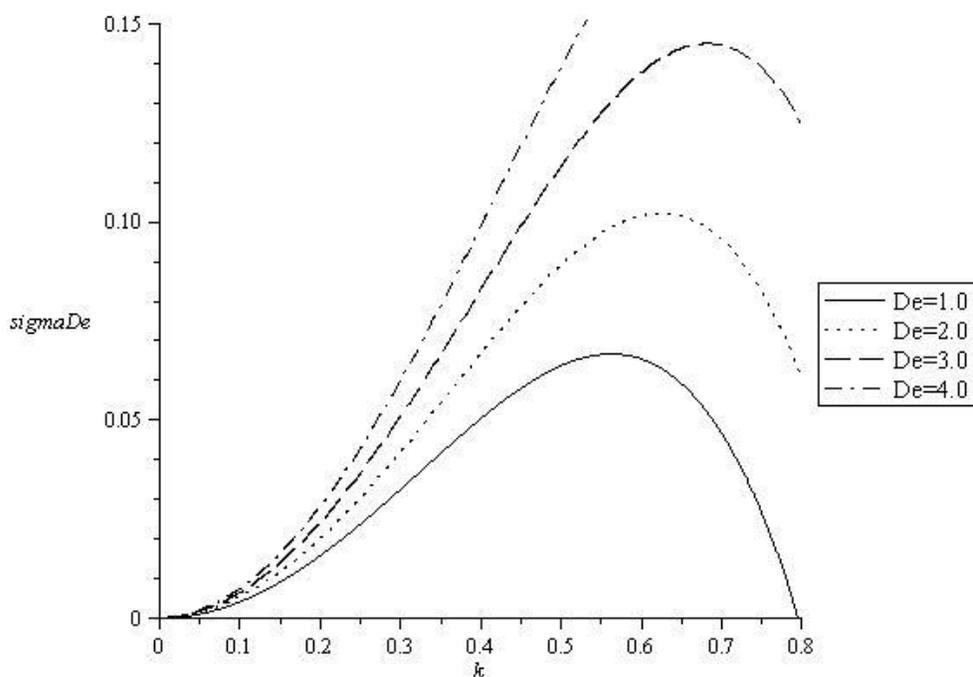


Figura 3.2 Razón de crecimiento vs número de onda, cuando se varia el número de Deborah (elasticidad), ($S=10$, $Re=1$)

Como se puede ver en la gráfica, la razón de crecimiento aumenta cuando se incrementa la elasticidad del fluido al incrementar el número de Deborah. Pero la magnitud de la inestabilidad es aún mayor cuando se reduce la tensión superficial.

Esto se puede apreciar en la ecuación 3.8, ya que los términos negativos que dependen de Weber o de S , se reducen y por tanto disminuye el efecto estabilizador de la tensión superficial.

En la siguiente sección, se analizará el efecto que tiene la elasticidad del fluido, al promover la aparición de modos azimutales, cuando se aumenta la elasticidad del fluido, y por tanto el flujo se vuelve más complejo, pues al modo axial se agregan modos azimutales. Pero también haremos una discusión de la ecuación, en la que determinaremos un radio crítico, para la aparición de los modos azimutales, ya que si el radio es menor a cierto valor, solo aparece el modo axial, y por tanto los modos azimutales se suprimen.

3.3 Deducción del radio crítico para la aparición de modos azimutales, a partir de la función de razón de crecimiento

A continuación mostraremos el efecto de la elasticidad del fluido, en la aparición y magnitud de los modos azimutales. Como hemos visto la elasticidad incrementa la inestabilidad del modo axial o principal, pero también influye en los modos azimutales. Schlang y Sivashinsky (1982) encontraron en su estudio, que existe un radio crítico δ_{cr} , el cual determina la aparición de los modos azimutales. Cuando el radio del cilindro del flujo de la capa líquida es menor a δ_{cr} , solo aparece el modo axial en el flujo, y se suprimen los modos azimutales. Para radios mayores al radio crítico, el flujo se modifica y aparecen modos azimutales junto con el modo axial, sin embargo es necesario un número de Reynolds mayor para desestabilizar el flujo.

En este trabajo usaremos un razonamiento similar al de Shlang y Sivashinsky, para determinar este radio crítico a partir del cual aparecen los modos azimutales. Para obtener este radio crítico, primero se iguala la razón de crecimiento a cero para llegar a la condición de criticalidad que es clave para determinar si las perturbaciones son estables o inestables.

$$\left(k^4\right) - \left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{8 \operatorname{Re}^2}{5 S} + \frac{3 \operatorname{Re} De}{S} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} \right] k^2 - \left(\frac{n^2}{\delta^4} - \frac{n^4}{\delta^4} \right) = 0 \quad (3.9)$$

A partir de esta ecuación podemos obtener el valor de $q=k^2$, al resolver la ecuación cuadrática para $q^2=k^4$. De la solución se obtiene valor crítico k_{cr} que determina cuándo la razón de crecimiento es igual a cero. Esto sucede cuando $k=0$ o en los puntos de intersección de la razón de crecimiento con el eje k , como se ve en la gráfica 3.1. Esta ecuación se pudo resolver con la fórmula de una ecuación de segundo grado y k_{cr} satisface:

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{8 \text{Re}^2}{5 S} + \frac{3 \text{Re} De}{S} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{8 \text{Re}^2}{5 S} + \frac{3 \text{Re} De}{S} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{n^2}{\delta^4} - \frac{n^4}{\delta^4} \right) \right]^{1/2} \quad (3.10)$$

Si graficamos k_{cr} contra el número de Reynolds, de Deborah y de S, se obtienen curvas de criticalidad, que definen cuando el flujo puede pasar de estable a inestable.

Antes de abordar el tema de las curvas de criticalidad, con esta ecuación se puede obtener el radio crítico para la aparición de modos azimutales, y con este radio crítico podemos analizar cómo se comportan los modos azimutales en un flujo de material viscoelástico descendiendo sobre un cilindro. Cuando la cantidad dentro del radical es igual o mayor que cero, se garantiza que el valor de k^2 será un número real y no será un número complejo o imaginario. Por tanto igualando el radicando a cero, se obtiene el radio crítico en distintas condiciones (Re, De, S):

$$\delta_{crit} = \frac{5S}{8 \text{Re} + 15De} \left(2n^2 - 1 + 2n\sqrt{n^2 - 1} \right) \quad (3.11)$$

A partir de la ecuación 3.11 se puede demostrar que el flujo solo estará compuesto por el modo axial y no tendrá modos azimutales, si el radio del cilindro cumple con la siguiente condición:

$$\delta \leq \frac{5S}{8 \text{Re} + 15De} \quad (3.12)$$

El flujo tendrá modos azimutales solo si el radio es mayor que este radio crítico y sólo será axial si es menor a este radio crítico.

Si aumenta el número de Reynolds, será necesario un radio crítico menor para que aparezcan los acimutales. Si disminuye, el radio crítico necesario será mayor.

En nuestro caso también depende de la elasticidad del fluido. El radio crítico disminuye aún más si aumenta la elasticidad del fluido, es decir si aumenta el número de

Deborah. Por lo tanto, para un radio dado del cilindro, es necesario un número de Reynolds menor, para que se desestabilice el flujo y aparezcan los modos azimutales.

Para mostrar este efecto, se muestran las siguientes gráficas, en las que se fijó el número capilar $S=15$, el radio $\delta=20$, $Re=1.0$. En el primer flujo de la gráfica 3.3, se muestra la razón de crecimiento, incluyendo los modos azimutales para el caso newtoniano, es decir con Deborah $=0$. En este caso, se muestra el modo axial, con $n=0$, y se presentan tres modos azimutales, $n=1,2,3$. Además la amplitud de la razón de crecimiento es menor que en el caso viscoelástico, ya que la elasticidad incrementa la inestabilidad del flujo.

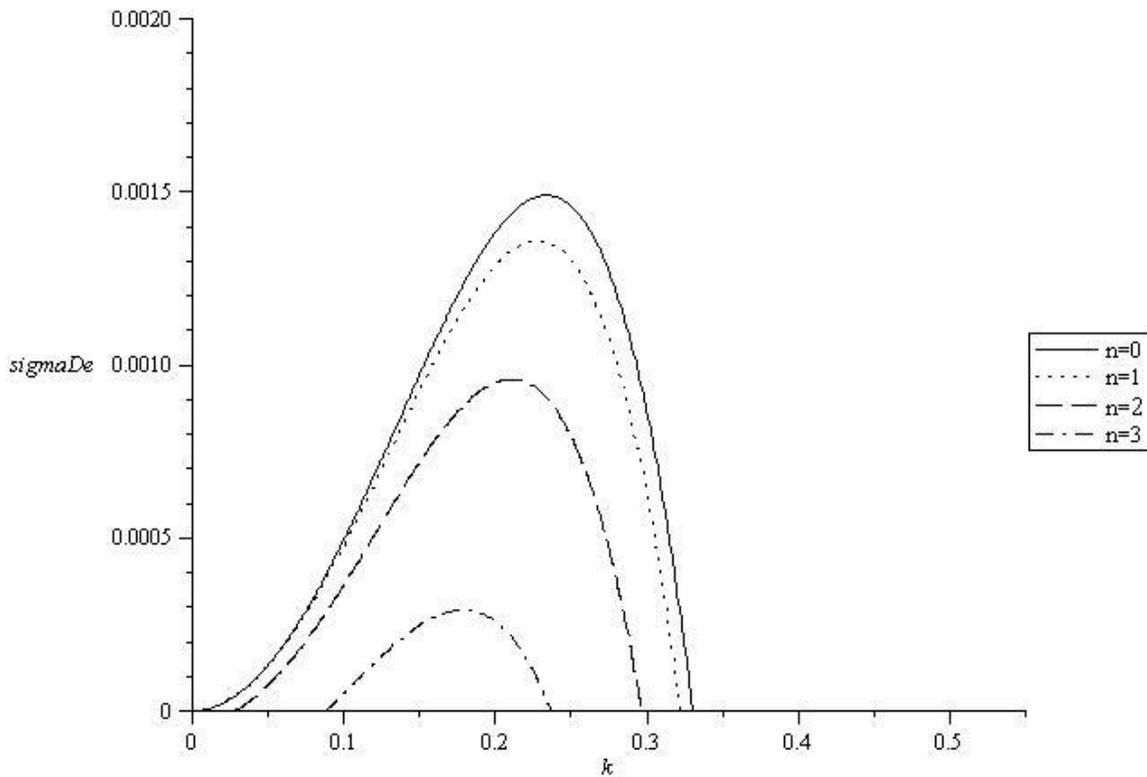


Figura 3.3 Razón de crecimiento vs número de onda (k), del modo axial y modos azimutales ($S=10$, $Re=1$, $De=0$).

En la gráfica 3.4 se muestra el flujo con las mismas variables ($Re=1.0$, $S=15$, y $\delta=20$), pero en este caso con elasticidad, con número de Deborah $=1.0$

Como se ve en esta figura, la magnitud de la razón de crecimiento se incrementa, es decir aumenta el grado de inestabilidad. Además para el mismo radio y condiciones, se presentan más modos azimutales, los cuales se mezclan con el flujo principal.

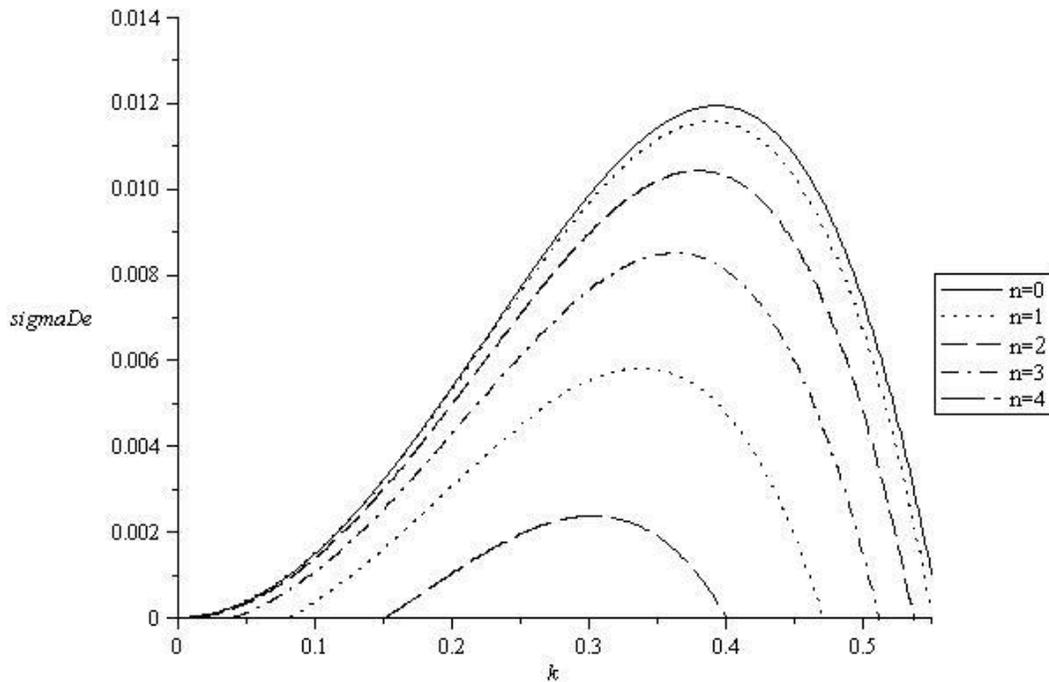


Figura 3.4 Razón de crecimiento vs número de onda (k), del modo axial y modos azimutales ($S=10$, $Re=1$, $De=1$).

En esta gráfica se observa que la razón de crecimiento de los azimutales crece, al aumentar la elasticidad del fluido. Además el modo $n = 1$ tiene una magnitud cercana a la del axial, aunque nunca es mayor. Entonces es de esperar que los dos modos interactúen en el caso no lineal.

El efecto de aumentar la elasticidad del fluido al incrementar el número de Deborah, se puede notar en la figura 3.5. En ella se muestra la razón de crecimiento de los modos azimutales para un flujo con $De = 2.0$, y con las mismas condiciones de los demás parámetros que en los dos casos anteriores. En este caso también se incrementa el número de modos azimutales, y también se incrementa la magnitud de la razón de crecimiento para el modo axial, y los modos azimutales.

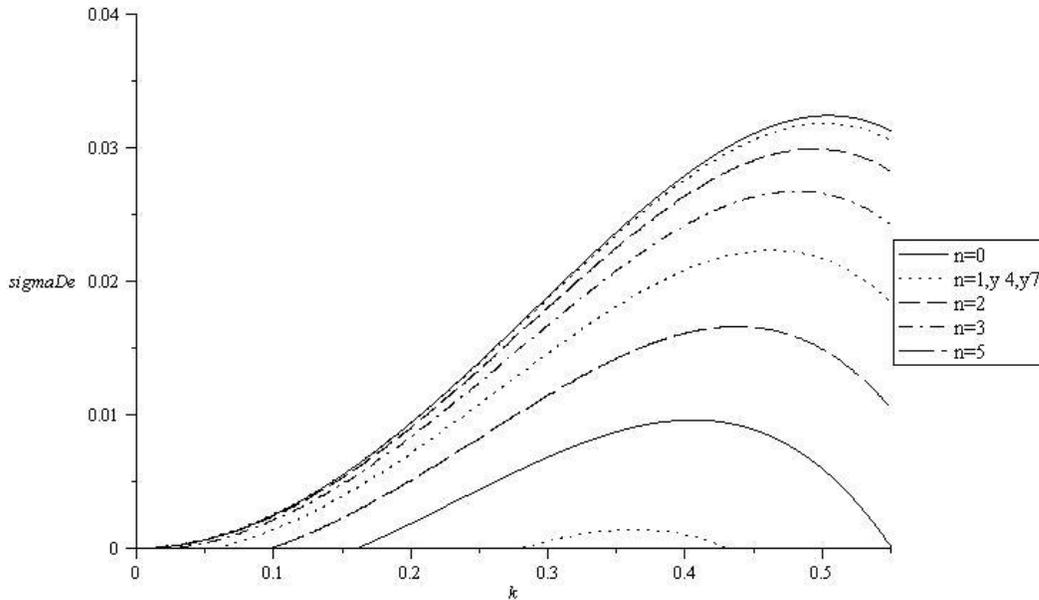


Figura 3.5 Razón de crecimiento vs número de onda (k), del modo axial y modos azimutales ($S=10$, $Re=1$, $De=2$).

En este caso aparecen 7 modos azimutales, en la gráfica de razón de crecimiento, aunque el último solo abarca el rango de k (0.3 a 0.4). También se observa que el modo $n = 1$ y el modo axial, crecen de forma muy parecida aunque el modo axial siempre es mayor en magnitud que el modo con $n=1$.

3.4 Curvas de estabilidad neutral, Reynolds vs k , para diferentes valores de De

Después de haber obtenido el radio crítico, a partir del cual aparecen los modos azimutales, estimulados por la elasticidad del fluido, se puede obtener el número de onda crítico, en función del número de Reynolds, fijando valores del número de Deborah y de S . Estas curvas se denominan curvas de criticalidad. Con ellas se pueden observar las regiones que delimitan la zona de inestabilidad de la de estabilidad. Para obtener estas regiones usamos la ecuación 3.10, que es la solución de la variable k que da como resultado una razón de crecimiento igual a cero:

$$k^2 = 1/2 \left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{8 \text{Re}^2}{5 S} + \frac{3 \text{Re} De}{S} + 2 \frac{n^2}{\delta^2} \right] + 1/2 \left[\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{8 \text{Re}^2}{5 S} + \frac{3 \text{Re} De}{S} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{n^2}{\delta^4} - \frac{n^4}{\delta^4} \right) \right]^{1/2} \quad (3.10)$$

En la gráfica 3.6 se muestra la curva de k_{crit} vs número de Reynolds, cuando $S=15$, $\delta=20$, y para $De=0$, es decir para el flujo newtoniano. En esta figura se graficó $k_{\text{crí}}$ para el modo principal y 3 modos azimutales, Para $Re=0$, solo aparece el modo axial. Los modos azimutales van apareciendo conforme aumenta el número de Re , por ejemplo el primero modo $n=1$ aparece hasta que $Re > 0.09$. Conforme se incrementa el número de Reynolds aparecen más modos azimutales, para $R \sim 0.29$ aparece el modo $m=2$, y para $R \sim 0.46$ aparece el modo $m=3$. Esto está de acuerdo con la conclusión que para cierto radio aparecen los modos azimutales hasta que Re toma cierto valor crítico.

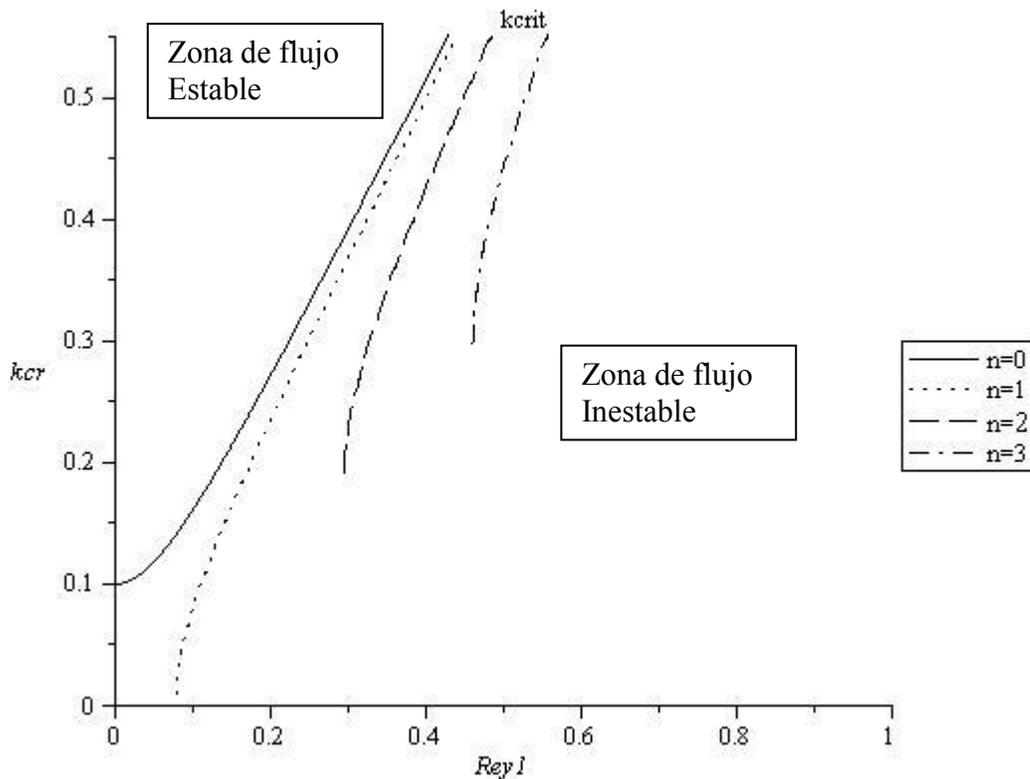


Figura 3.6 Curva de criticalidad, k_{cr} vs Número de Re . ($S=15$, $De=0$, $\delta=20$)

Ahora veremos las curvas de k_{cr} cuando la elasticidad del fluido aumenta y $De=1.0$, En la gráfica 3.7 se muestra el comportamiento de k_{cr} vs Reynolds para los mismos valores

de $S=15$, $\delta=20$, pero para $Deborah=1.0$, es decir con un fluido con visco elasticidad. En la figura también se graficó para el modo axial y para tres modos azimutales:

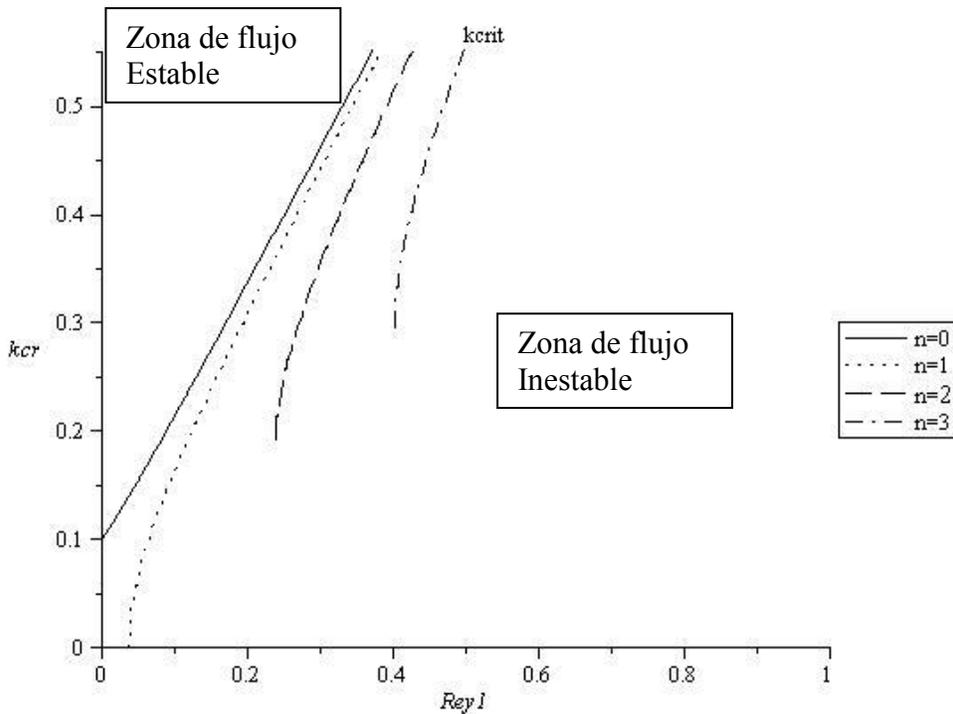


Figura 3.7 Curva de criticalidad, k_{cr} vs Número de Re. ($S=15$, $De=1.0$, $\delta=20$)

Al aumentar la elasticidad del fluido, aumenta la inestabilidad del flujo y por tanto es necesario un número de Re menor para que aparezca cada modo acimutal. Cuando se incrementa la elasticidad del fluido, las curvas de k_{cr} vs Re se desplazan hacia la izquierda, es decir es necesario un Re menor, para que aparezcan los modos azimutales ($n=1,2,3\dots$) y además estos modos tienen una mayor razón de crecimiento en el flujo completo, como se vio en la sección 3.3.

Para apreciar con mayor claridad cómo se desplazan a la izquierda estas curvas de k_{cr} , en la figura 3.8 se muestran las gráficas de k_{cr} vs Re , para $S=15$, $\delta=20$, y para los siguientes valores $De=(0,0.5, 1.0, 2.0,)$ donde solo se muestran los modos axiales de cada caso. Pero un comportamiento parecido se presenta para cada uno los modos azimutales. Como se puede observar el valor de $k_{cr}=0.1$, cuando $Re=0$, es el mismo para todas las curvas.

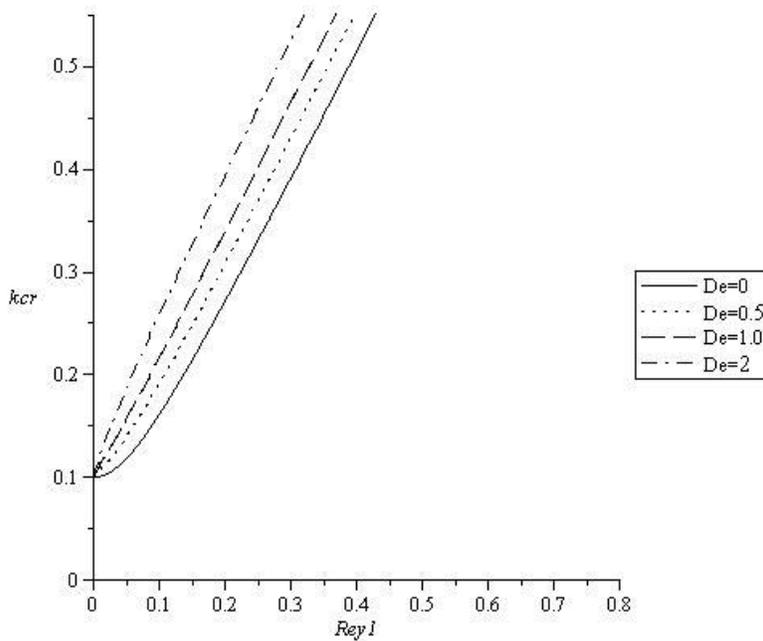


Figura 3.8 Curva de criticalidad, k_{cr} vs Numero de Re para el modo axial principal, para 4 valores de De (0,0.5, 1.0, 2.0)

Con estas gráficas de curvas de criticalidad, concluye el análisis lineal de la estabilidad del flujo de una capa líquida sobre una pared cilíndrica, para el caso isotérmico. En el siguiente capítulo realizaré el análisis lineal de los resultados cuando se asigna una temperatura mayor al ambiente a la pared cilíndrica, y por este efecto se calienta el fluido de la capa líquida y por consecuencia la temperatura en la superficie libre es variable. Debido a la variación de temperatura en la superficie se presentan esfuerzos de tensión superficial en las direcciones tangenciales. Con la ecuación 2.8 que deducimos, de la solución de la ecuación de evolución de onda cuando varía la temperatura, realizaremos el análisis lineal para revisar el efecto en la razón de crecimiento, y en la aparición de los modos azimutales, de forma parecida a lo que hemos analizado en este capítulo.

Capítulo 4. Análisis lineal de la ecuación de evolución de la onda de un fluido viscoelástico descendiendo sobre una pared cilíndrica caliente (caso no isotérmico)

En este capítulo, se analizará la estabilidad lineal del flujo de una capa líquida de fluido viscoelástico sobre una pared cilíndrica con calentamiento. Para realizar el análisis lineal, partimos de la ecuación de razón de crecimiento 3.8 que obtuvimos en el capítulo 3, que incluya los términos debido a la temperatura y que dependen del número de Ma, Bi y Pr. Estos términos se deben al cambio de temperatura en la superficie de la capa líquida que produce un cambio en el balance de esfuerzos tangenciales.

Al introducir calentamiento en el cilindro y producir un perfil de temperatura, se producen cambios en los esfuerzos tangenciales en la superficie del cilindro que conduce a efectos termocapilares que causan una mayor inestabilidad. Dichos esfuerzos de tensión superficial se reflejan en la ecuación de momento y producen una mayor inestabilidad, que además modifica el comportamiento de los modos azimutales como se verá en el análisis.

$$\begin{aligned} \sigma = \varepsilon \left[\frac{8}{15} \text{Re} k^2 + \frac{1}{3} \frac{S}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\delta^2} \left(k^2 + \frac{n^2}{\delta^2} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{S}{\text{Re}} \left(k^4 + 2 \frac{k^2 n^2}{\delta^2} + \frac{n^4}{\delta^4} \right) \right] \\ + \varepsilon (De) k^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \left(k^2 + \frac{n^2}{\delta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Revisando la ecuación 4.1, los términos que están multiplicados por Re y De (1er y 4to término) causan mayor inestabilidad. El segundo término que está multiplicado por S/3Re, también causa inestabilidad y depende de los valores del número de onda k, n y delta, su efecto en el flujo total. EL tercer término que esta multiplicado S/3Re, por los términos de k^4 , $k^2 n^2$ y n^4 , tienen signo negativo, y por tanto son términos que producen un control en la capa líquida y disminuyen la inestabilidad. Este término es proporcional al número de tensión superficial S, y por tanto con mayor tensión superficial se tendrá mayor control de la superficie libre y mejor estabilidad de la capa y una menor razón de crecimiento. También depende de los valores que tomen k, n y delta.

El ultimo termino en la ecuación 4.3, depende del cociente Ma entre Pr*Re. En nuestro análisis decidimos agrupar el número de Marangoni con Prandtl como $Ma^* = Ma/Pr$. Este término que depende de los valores de k^2 y de n^2/δ^2 causa una mayor inestabilidad en el flujo. A diferencia de los términos que dependen de la tensión superficial tienen signo positivo y se reflejan en una mayor inestabilidad. Como se verá en las gráficas de la razón de crecimiento, al tener un término que depende de n^2/δ^2 , este término aumenta el valor de la razón de crecimiento para los modos azimutales para valores pequeños del número de onda k. Por tanto en zonas de número de onda pequeño, o longitud de onda larga, los modos azimutales pueden tener una razón de crecimiento mayor que el modo axial. Más adelante se hará un análisis más detallado.

4.1 Gráficas de estabilidad neutral o de Número de onda crítico K_{cr} vs Re

Antes de comenzar a graficar las razones de crecimiento en función del número de onda, para diferentes valores de los números adimensionales S, Re y De, y para diferentes números de Ma, primero se obtendrá el número de onda crítico que separa las zonas de crecimiento y decrecimiento de la inestabilidad, es decir las curvas de k_{cr} vs Re.

De la misma forma que en el capítulo 3 se obtuvo un número de onda crítico k, primero se iguala a cero la razón de crecimiento (ec. 4.1) y se obtiene la solución:

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{8 Re^2}{5 S} + \frac{3 Re De}{S} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} + \frac{3 Ma^*}{2 Pr S} \frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{8 Re^2}{5 S} + \frac{3 Re De}{S} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} + \frac{3 Ma^*}{2 Pr S} \frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right)^2 + 4 \left[\left(\frac{n^2}{\delta^4} - \frac{n^4}{\delta^4} \right) + \frac{3 Ma^*}{2 S} \frac{Bi}{(1+Bi)^2} \frac{m^2}{\delta^2} \right] \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

4.1.1 Curvas de estabilidad neutral, caso $\delta=10$

Un objetivo es comprender cómo influye el cambio en el número de Ma en la estabilidad del flujo.

Con la ecuación 4.4 se puede graficar el valor de k_{cr} , en función de Re . Asignando valores constantes de S , De y δ , y graficando en función de Re , para diferentes números de Marangoni es decir para diferentes grados de calentamiento del cilindro.

Gráficas para $Ma=0$ (caso isotérmico)

En la gráfica 4.1 se muestra las curvas de estabilidad neutral con k_{cr} vs Re , para los valores $S=1$, $\delta=10$, y $De=0.1$ y para un $Ma=0$, es decir cuando el problema es isotérmico.

En dicha figura se muestran las curvas de estabilidad neutral, para el modo axial, y 3 modos azimutales ($n=1,2,3$). Como se puede observar las curvas son similares a las obtenidas en el capítulo 3, para el caso isotérmico.

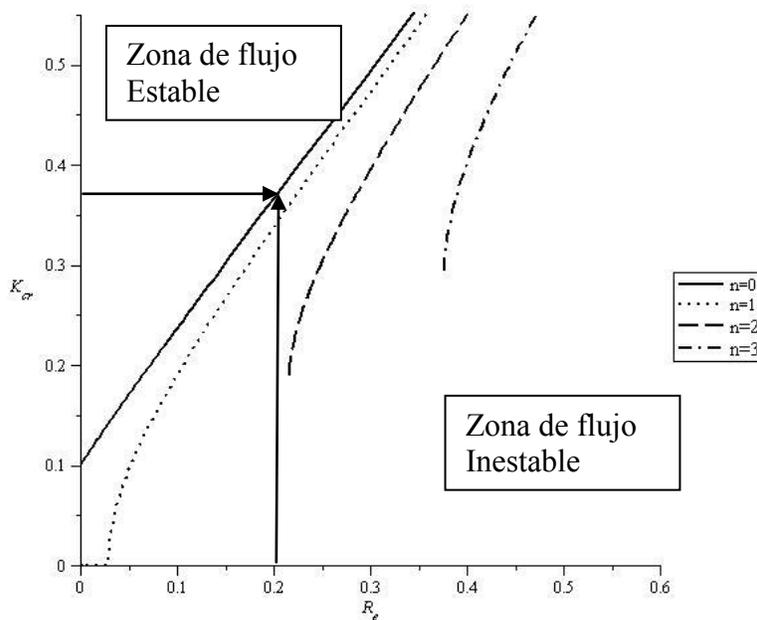


Figura 4.1 Curvas de estabilidad neutral para $Ma=0$, Gráfica de número de onda crítico k_{cr} vs Re , para los siguientes parámetros ($S=1$, $\delta=10$, $De=0.1$)

Un caso similar con los mismos parámetros ($S=1$, $\delta=10$), pero con Deborah =0.01 (muy poca elasticidad en el fluido) se muestra en la figura 4.2.

Como se puede observar al comparar las dos gráficas 4.1 y 4.2, las curvas de estabilidad neutral se desplazan hacia la derecha, cuando disminuye el número de Deborah, y el valor de k_{cr} para un cierto número de Reynolds aumenta cuando se incrementa el número de Deborah. Cuando la elasticidad es mayor y el número de De aumenta, los azimutales aparecen antes con un número de Reynolds menor, pues la elasticidad aumenta la inestabilidad.

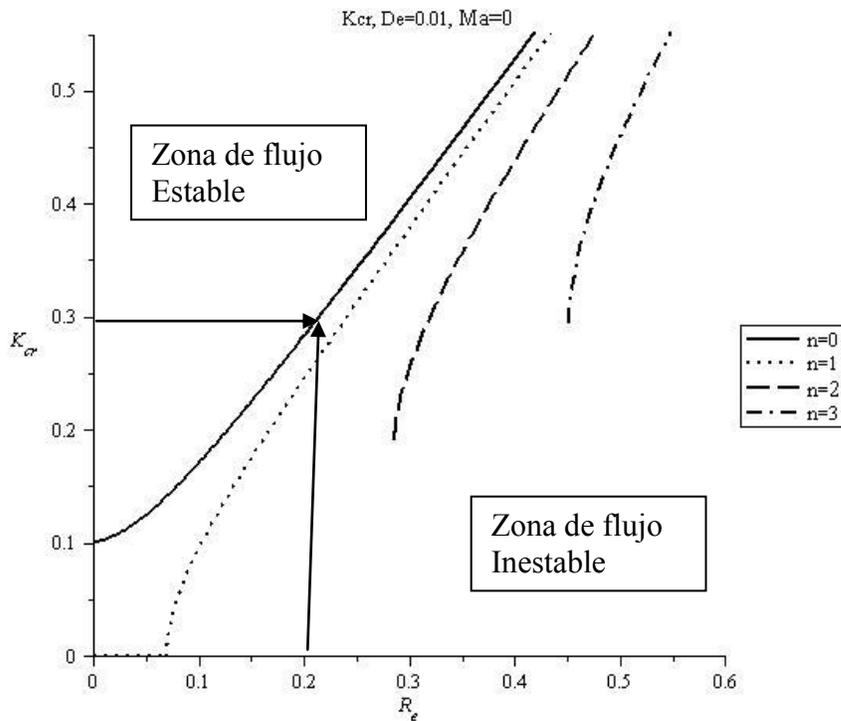


Figura 4.2 Curvas de estabilidad neutral para $Ma=0$, Gráfica de número de onda crítico k_{cr} vs Reynolds, para los siguientes parámetros ($S=1$, $\delta=10$, $De=0.01$)

Gráficas para Marangoni=1 (Caso no Isotérmico)

Cuando se aumenta el número de Marangoni, el cambio de temperatura en el perfil de la superficie de la capa líquida, provoca un cambio en el balance de los esfuerzos tangenciales. Este cambio en los esfuerzos tangenciales conocido como fenómeno capilar, provoca un aumento en la inestabilidad del flujo como se puede apreciar en la ecuación 4.1 tanto en los modos axiales, como en los azimutales.

Debido a que se introdujo una fuente de calor en el cilindro interior, el resultado es que aumenta la inestabilidad en el flujo de la capa líquida. Por esta razón el valor de k_{cr} aumenta para un mismo número de Reynolds y es necesario un Reynolds menor para desestabilizar el flujo. En la figura .4.2 se muestra la gráfica de k_{cr} para un número de $Ma=1.0$, con los mismos valores de $S=1$, $\delta=10$, y $De=0.1$

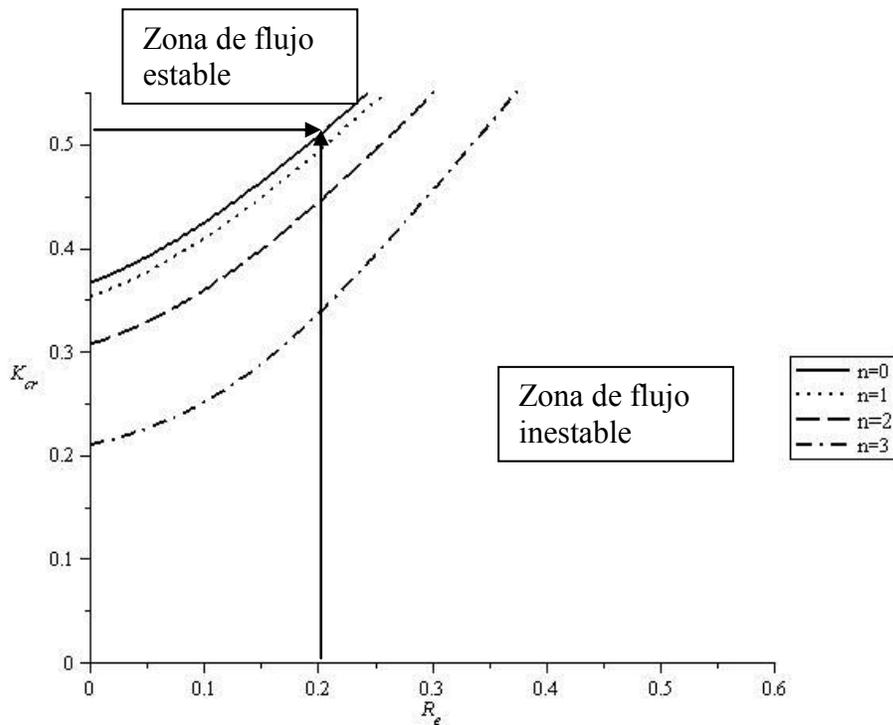


Figura 4.3 Curvas de estabilidad neutral para $Ma=1$, para los siguientes parámetros ($S=1$, $\delta=10$, $De=0.1$)

Comparando las figura 4.1 con la figura 4.3, se observa que para el caso con $Ma=0$, figura 4.1, cuando $Re=0$ solo aparece el modo axial principal, y los modos azimutales se van presentando conforme aumenta el número de Reynolds. Además hay ciertos valores de Re para los cuales solo aparece el modo axial, o el primer modo azimutal $n=1$. En cambio cuando el número de $Ma=1.0$ (figura 4.3), los modos azimutales ($n=1,2$ y 3) aparecen para cualquier valor de Reynolds incluso cuando $Re=0$, aparecen los modos azimutales, y el valor de k_{cr} es mayor para el modo axial y los otros modos azimutales, ya que se incrementa la inestabilidad del flujo debido a la elasticidad que se introduce en el fluido.

A continuación también presentamos las gráficas de estabilidad neutral cuando $Ma=1$, pero cuando el fluido tiene muy poca elasticidad, es decir cuando $De=0.01$. En la figura 4.4 se muestra la gráfica de k_{cr} vs Reynolds, con las regiones estables y inestables, cuando $Ma=1$, $De=0.01$ y los demás parámetros se fijan igual ($S=1$, $\delta=10$).

Se puede observar comparando las figuras 4.3 y 4.4, que las gráficas con mayor elasticidad (4.3) presentan un número de onda crítico mayor para cada número de Re , excepto para $Re=0$, donde los k_{cr} son iguales. Al fijar el número de $Re=0.2$, el valor de

k_{cr} es mayor ($k_{cr}=0.51$) cuando el número de $De=0.1$ que el valor de ($k_{cr}=0.45$), cuando $De=0.01$. Esto se debe a que con mayor elasticidad en el fluido, el flujo de la capa líquida es más inestable y este efecto se suma al efecto de la temperatura por el fenómeno termocapilar, como se puede apreciar en la ecuación 4.3.

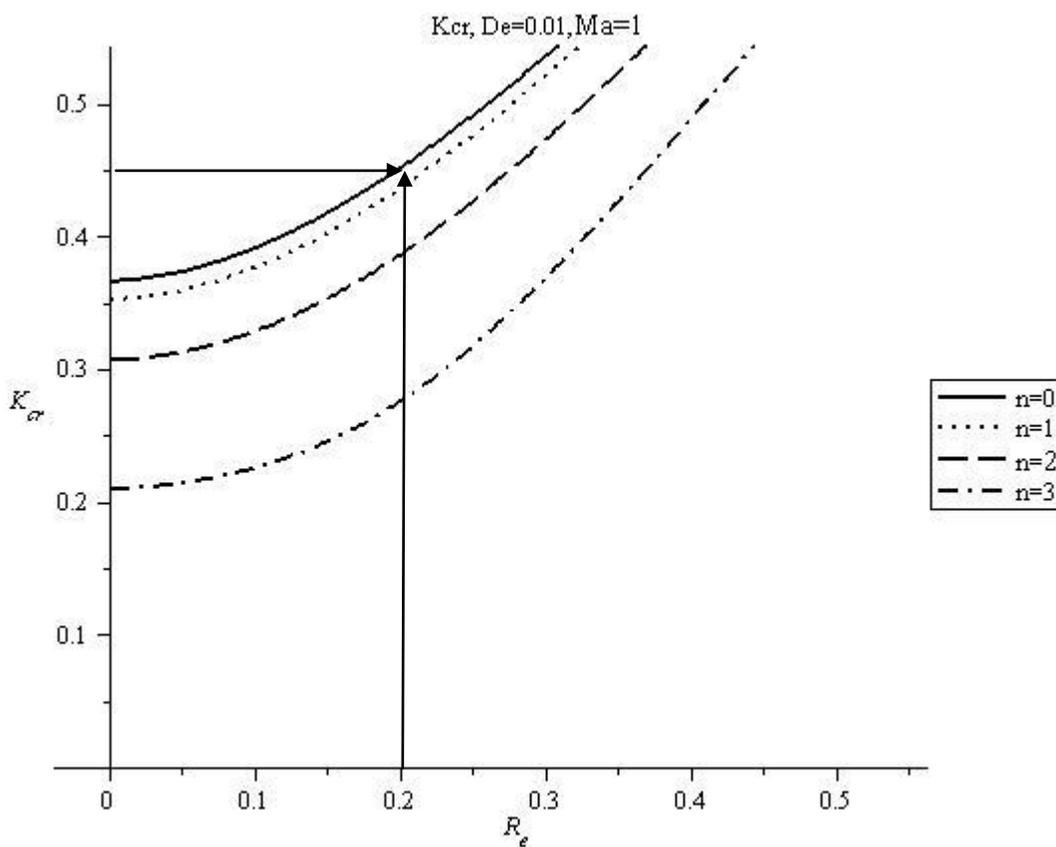


Figura 4.4 Curvas de estabilidad neutral para $Ma=1$, para los siguientes parámetros ($S=1, \delta=10, De=0.01$)

Gráficas con $Ma=2$, (Caso No Isotérmico)

En la figura 4.5 se muestra las gráficas de estabilidad neutral para el caso en que $Ma=2$, usando los mismos valores para las demás variables $S=1$, $\delta=10$, y $De=0.1$. En este caso se aplica un mayor calentamiento, y por esta razón el efecto observado cuando $Ma=1.0$ se acentúa y se hace más relevante. En la selección de los parámetros adimensionales, se tuvo cuidado en seleccionar valores para que el valor de k_{cr} no fuera mayor a 0.6 como caso extremo. Ya que con valores mayor de $k=0.6$, ya no se conserva la aproximación de longitud de onda larga, o de número de onda pequeño.

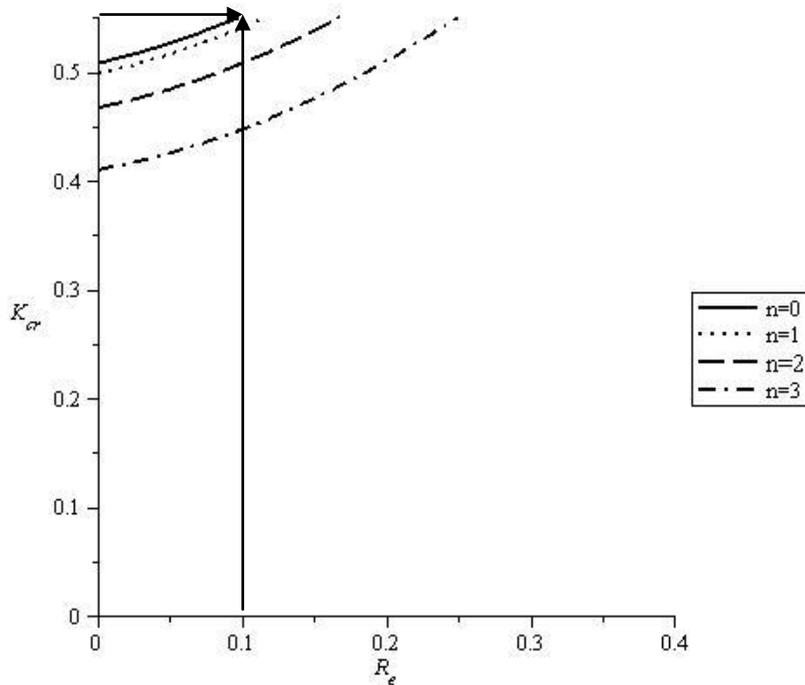


Figura 4.5 Curvas de estabilidad neutral para $Ma=2$, para los siguientes parámetros ($S=1$, $\delta=10$, $De=0.1$)

Como se puede observar el valor de kcr para diferentes valores de Reynolds se incrementa comparado con las gráficas de 4.3. Por ejemplo cuando $Re=0$, y $Ma=2.0$, el valor de kcr para el modo axial es de $kcr=0.51$, mientras que para $Ma=1.0$, el valor de $kcr=0.37$. El resultado es que la gráfica de estabilidad neutral se desplaza hacia arriba en el eje de k , comparado con la gráfica con $Ma=1$. Esto es debido a que el número de Ma hace que se incremente el quinto término en la ecuación 4.1. Esto aumenta su inestabilidad y el valor de kcr es mayor en una gráfica de razón de crecimiento vs número de onda.

De la misma forma que en los casos anteriores, mostramos los resultados de la curva de estabilidad neutral con una elasticidad menor, con $De=0.01$. En la figura 4.6 se muestra la gráfica de kcr vs Reynolds, para $De=0.01$, y los mismos parámetros que en las gráficas de esta sección ($S=1$, $\delta=10$). De la misma forma que los casos anteriores, al reducir la elasticidad del fluido, con $De=0.01$, los valores de kcr vs Re , disminuyen pues la reducción de la elasticidad del fluido hace menos inestable el flujo de la capa líquida.

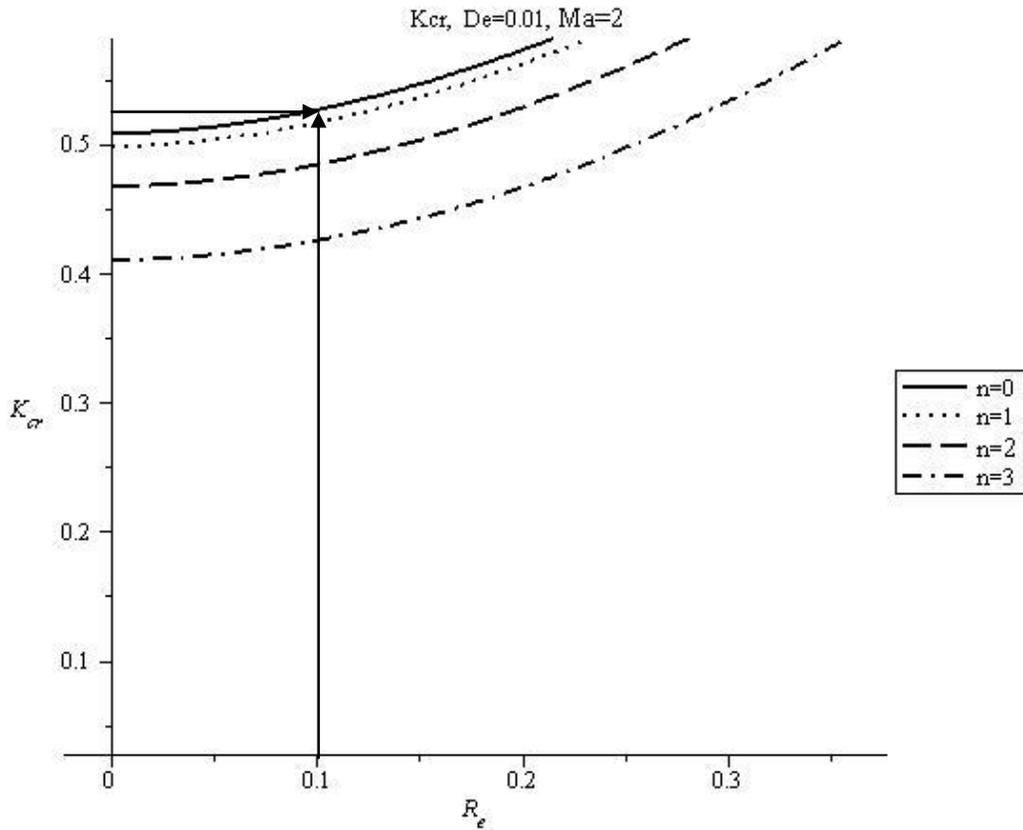


Figura 4.6 Curvas de estabilidad neutral para $Ma=2$, para los siguientes parámetros ($S=1, \delta=10, De=0.01$)

A manera de resumen, y para poder visualizar los cambios en la curva de k_{cr} vs número de Reynolds, en la figura 4.7 se muestran las gráficas anteriores de estabilidad neutral, para los tres valores de Ma usados ($Ma=0, 1.0, 2.0$) y para $De=0.1$.

En las gráficas no se agregó leyenda para cada valor del modo n para cada curva, para no hacer la gráfica más complicada de leer. Solo se gráfica con un tipo de línea diferente para cada número de Ma . La curva de cada modo axial se presenta más arriba en el eje de k , y las curvas siguientes para cada modo azimutal aparecen una debajo de otra sucesivamente ($n=1, 2, 3$)

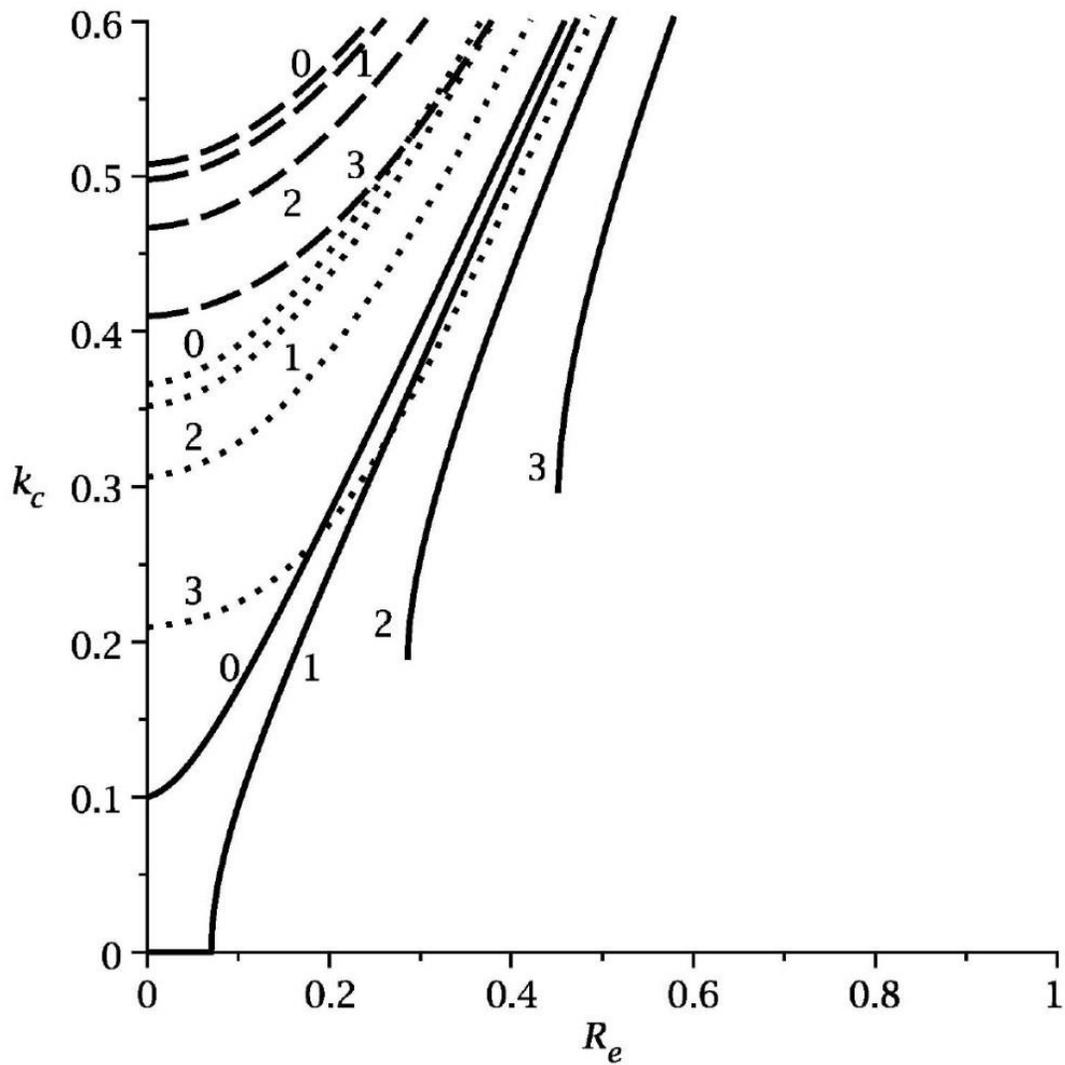


Figura 4.7 Gráficas de número de onda crítico k_c vs número de Reynolds para ($S=1$, $\delta=10$ y $De=0.1$) y para diferentes números de Ma (0,1,2)

4.2 Gráficas de razón de crecimiento vs número de onda k

Después de estudiar las curvas de criticalidad, a continuación analizaremos el comportamiento de las curvas de razón de crecimiento vs el número de onda, para diferentes valores de los parámetros adimensionales (S , δ , Deborah, y Reynolds)

4.2.1 Razón de crecimiento para radio adimensional $\delta=10$

Gráficas de Razón de crecimiento para $Ma=0$. (Caso Isotérmico)

El primer caso que analizamos es para $S=1$, $\delta=10$, y $De=0.2$ y para un valor de $Ma=0$, es decir caso isotérmico sin calentamiento. En la figura 4.8 se muestran las curvas de la razón de crecimiento para 3 números de Reynolds.

En línea continua se muestran para $Re=0.1$. Como se observa el modo axial es el de mayor crecimiento. Aunque el modo azimutal $n=1$ inicia con un valor similar al del modo axial para números de onda pequeño ($0 < k < 0.25$), y crece en forma paralela y cercana al modo axial aunque con menor magnitud (para los tres casos de Re). Debido a las interacciones no lineales, es posible que el modo azimutal $n=1$ ejerza cierta influencia sobre el modo axial y haya una modulación sobre el modo axial, conforme la onda avanza en la dirección del flujo. El modo acimutal con $n=2$ solo aparece para los casos en que $Re=0.2$ y 0.3 .

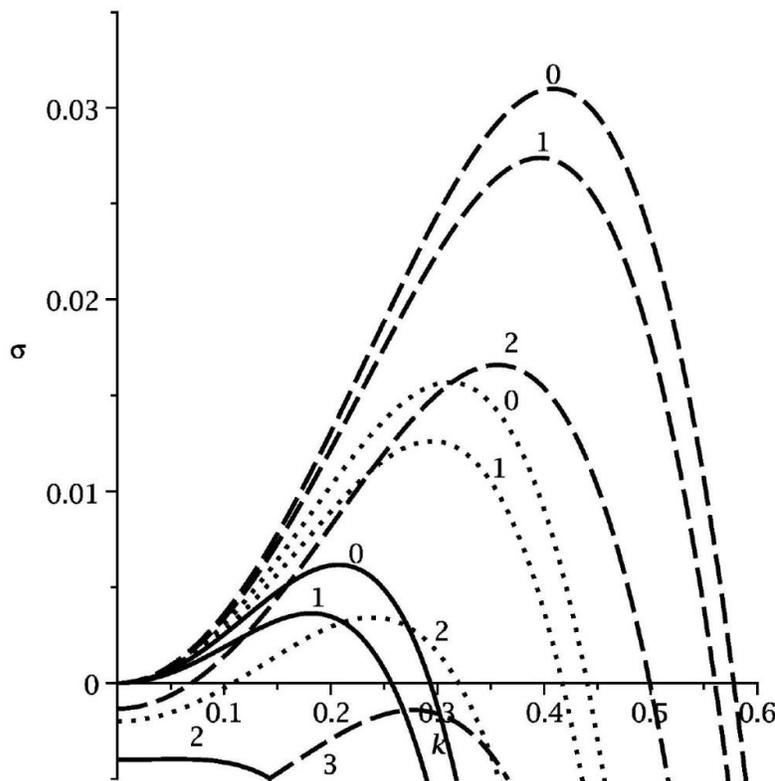


Figura 4.8 Razón de crecimiento vs número de onda k , para valores de Re y para $S=1$, $\delta=10$, y $Ma=0$ (caso isotérmico) y $De=0.1$ ($Re=0.1$ (continua), $Re=0.2$ (punteada) $Re=0.3$ (rayas))

La curva para $Re=0.2$ se muestra en línea punteada. EL modo axial es el de mayor crecimiento, y de nuevo el modo azimutal con $n=1$, también aparece y tiende a aproximarse a la curva del modo axial para valores de $(0 < k < 0.3)$ pero de magnitud un poco menor. Igual que para el caso de $Re=0.1$, es posible que haya una interacción no lineal entre la onda con azimutal $n=1$, y el modo principal axial. Cuando el flujo se estabiliza, predomina el modo axial, pero existe esta interacción que modula el modo principal. También aparece un modo azimutal con $n=2$.

Finalmente se muestra el caso para $Re=0.3$ en línea de rayas largas, en este caso también el modo axial predomina y el modo azimutal se acerca al modo axial, sin nunca ser mayor. Pero también aparece el modo azimutal $n=2$. Es posible que en la interacción no lineal los modos azimutales influyan en el modo axial, esto dependerá de la estabilidad del modo axial a perturbaciones o interacciones con modos azimutales que fluyan dentro del mismo flujo tridimensional.

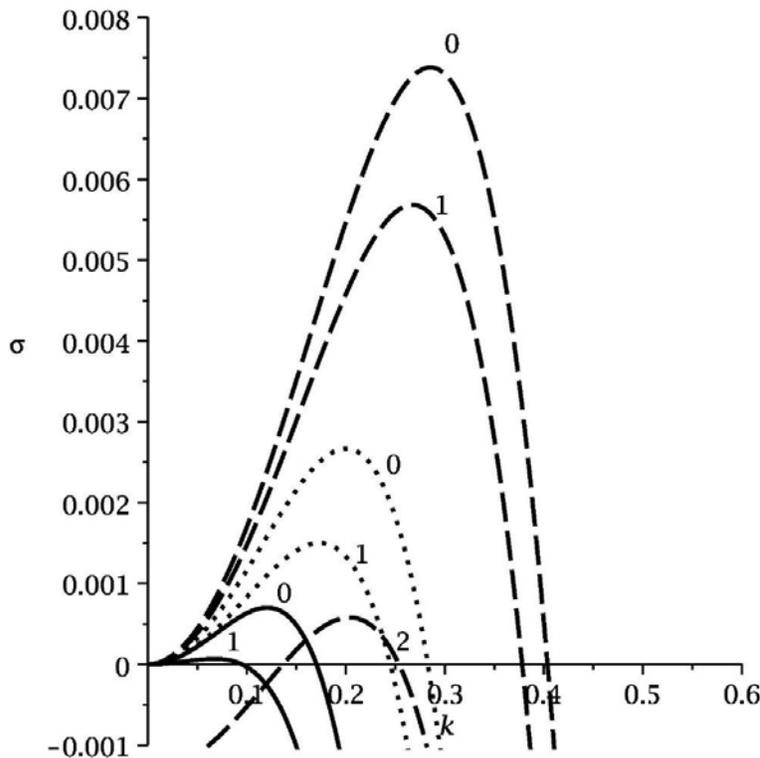


Figura 4.9 Razón de crecimiento vs número de onda k , para $S=1$, $\delta=10$, $Ma=0$ (caso isotérmico), $De=0.01$ y para ($Re=0.1$ (continua), $Re=0.2$ (punteada) $Re=0.3$ (rayas)

En la figura 4.9 se muestran las gráficas de razón de crecimiento para los mismos valores de Re que en la figura 4.8, con los mismos valores de $S=1$, y $\delta=10$, pero con un valor de $De=0.01$, es decir con muy poca elasticidad (casi newtoniano). Como se puede observar con menor número de De , la razón de crecimiento máxima disminuye para cada caso ($Re=0.1, 0.2, 0.3$), y además el rango de valores en k sobre los que se expande la razón de crecimiento se reduce, y el número de k_{cr} es menor. Además con menor elasticidad, no aparece el modo azimutal $n=2$, cuando $Re=0.2$ y $Re=0.3$.

Gráficas de Razón de crecimiento para $Ma=2$ (Caso No Isotérmico)

A continuación analizaremos gráficas de razón de crecimiento, cuando se fija $Ma=2$, es decir cuando se tiene mayor calentamiento en el cilindro. En la figura 4.11 se muestra la razón de crecimiento para $Ma=2$, y para los mismos parámetros $S=1$, $\delta=10$, $De=0.1$, y para los siguientes valores de $Re= (0.01, 0.05, 0.1)$. El modo azimutal $n=1$ es de mayor razón de crecimiento en un buen rango de valores ($0 < k < 0.36$). Como este modo es más inestable en un cierto rango, es posible que haya una interacción no lineal y que el modo axial si prevalece tenga una modulación debido a este modo azimutal o a varios modos azimutales.

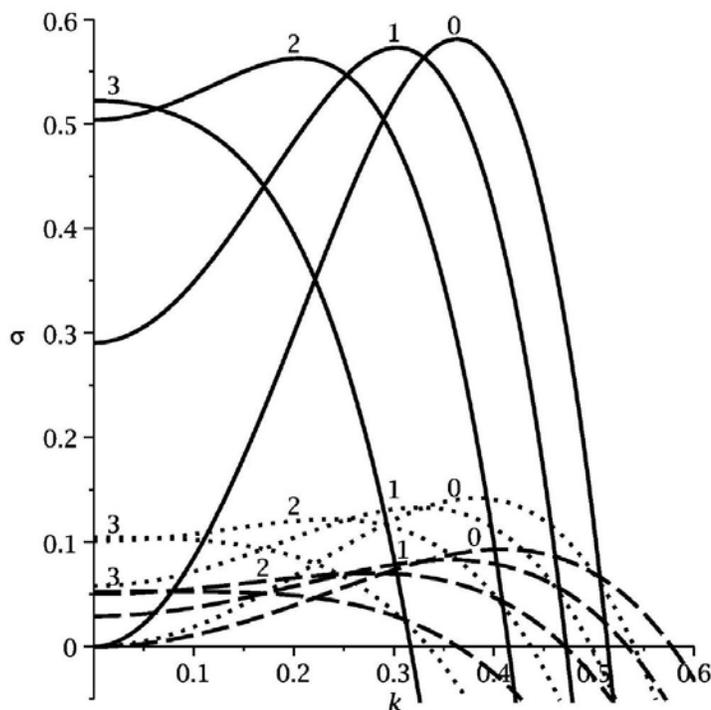


Figure 4.11 Razón de crecimiento σ vs número de Onda k , para $Ma=2$, $S=1$, $De=0.1$ y $\delta=10$, para tres números de Re (0.01 (continua), 0.05 (punteada), 0.1 (rayas))

Incluso para números de onda pequeños $k < 0.03$ los modos que tienen mayor razón de crecimiento son los azimutales ($n=1,2,3$). Cuando $k=0$, el modo de mayor magnitud de crecimiento es $n=3$, y le siguen los modos $n=2,1$. Conforme aumenta el número de onda k , el modo $n=2$ pasa a tener mayor razón de crecimiento y posteriormente es rebasado por modo $n=1$. Se puede apreciar que el modo axial y el modo azimutal crecen en forma casi paralela, hasta que el modo axial rebasa al modo azimutal en la gráfica.

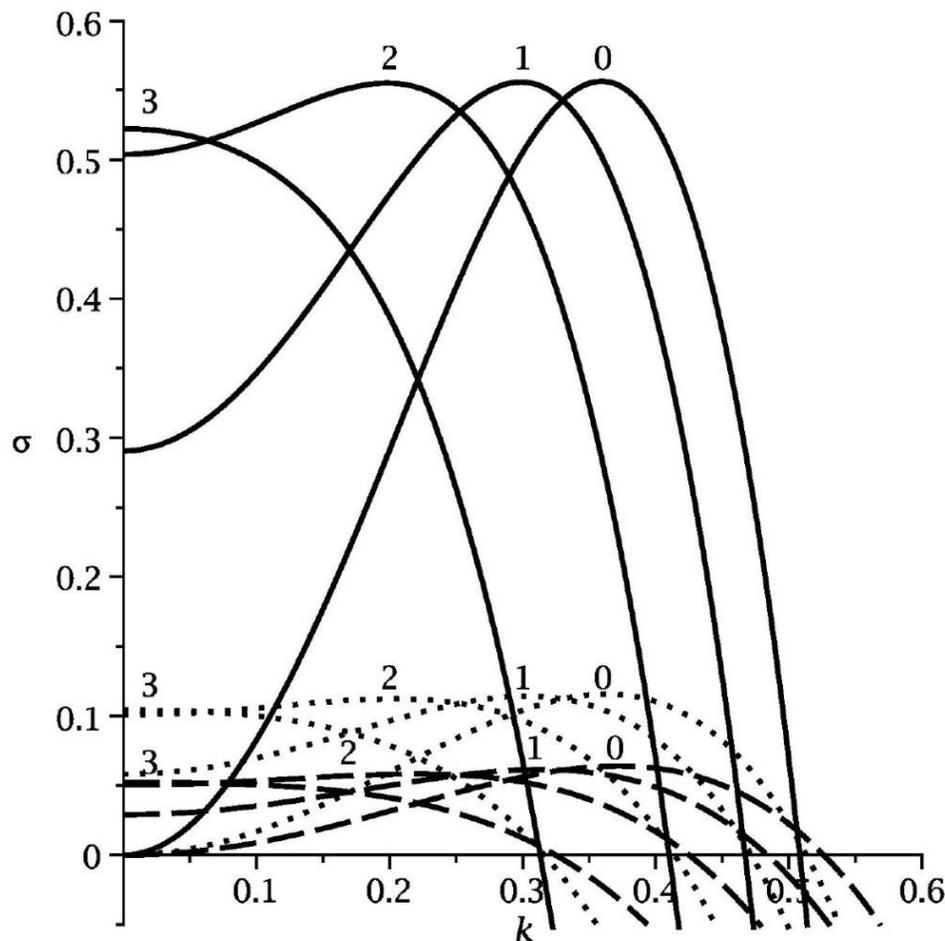


Figure 4.12 Razón de crecimiento σ vs número de Onda k para $Ma=2$, $S=1$, $De=0.01$ y $\delta=10$ para tres números de Re (0.01 (continua), 0.05 (punteada), 0.1 (rayas))

Como referencia en la figura 4.12 se muestra las curvas de razón de crecimiento para los mismos valores de Re (0.01, 0.05, 0.1) que en la figura 4.12, pero para $De=0.01$, es decir muy poca elasticidad. Se usan los mismos parámetros ($S=1$, $\delta=10$).

De la misma manera que para $Ma=1$, la diferencia en las gráficas para los dos números de Deborah es muy pequeña. Esto se puede deber a que el efecto del número de Ma es de mayor peso y el cambio de viscoelasticidad se nota poco en estos dos casos.

De hecho se pueden calcular analíticamente los puntos de cruce entre modos azimutales adyacentes, y entre el modo azimutal $n=1$ y el modo axial. Pero es importante recalcar que el fenómeno que aparece en este caso, con calentamiento es relevante, pues los modos azimutales adquieren mayor crecimiento y son más inestables que el modo axial en alguno rangos de k . Fenómeno que no aparece en flujos viscoelásticos puros (caso isotérmico). En el caso newtoniano, también aparecen los modos azimutales, pero al desarrollarse el flujo el modo axial es estable a las perturbaciones azimutales, y al final se observan ondas monocromáticas con un solo número de onda k que es igual al número de onda de máximo crecimiento del modo axial.

De la ecuación 4.3, se puede observar que el termino 5 depende del número de Ma . Como en este término aparece el factor $k^2 + n^2/\delta^2$, el 5to termino toma una mayor magnitud para los modos azimutales a bajo número de onda cuando k^2 es pequeño en comparación con n^2/δ^2 . Por tanto cuando k es pequeño, es cuando los modos azimutales predominan sobre el modo axial. Pero también este término depende del valor de Ma/Re , por tanto si Ma es mayor el efecto se acentúa y la razón de crecimiento es mayor en magnitud para los modos azimutales. Pero si el número Reynolds es menor al estar en el cociente, la razón de crecimiento aumentara cuando Re disminuye. Esto es opuesto al efecto de los términos 1 y 4 de la ecuación 4.3.

Este efecto se nota en que la magnitud de la razón de crecimiento para los modos azimutales es menor cuando $Re=0.05$ y $Re=0.1$ que para $Re=0.01$. En estos casos ($Re=0.05$ y 0.01) también los modos azimutales tienen mayor magnitud que el modo axial a pequeño número de onda, pero son de menor magnitud que para $Re=0.01$

4.3 Gráficas de Estabilidad Neutral para radio $\delta=5$

El mismo análisis de las gráficas de estabilidad neutral que se realizó en la sección 4.1 se hará en esta sección para un radio adimensional $\delta=5$. En el caso viscoelástico sin calentamiento, vimos que un radio más pequeño, incrementa la inestabilidad de las perturbaciones en la dirección axial por el fenómeno de ahorcamiento. Sin embargo con

menor radio, los modos azimutales aparecen más tarde, y es necesario un mayor número de Reynolds para que aparezcan. A continuación presentamos el análisis para diferentes números de Ma.

Gráficas de Estabilidad Neutral para Ma=0. (Caso Isotérmico)

Para el caso de Marangoni=0, sin calentamiento, se muestran las gráficas de k_{cr} vs Re cuando el radio del cilindro $\delta=5$.

La figura 4.13 muestra los resultados de graficas de estabilidad neutral para Ma=0, y De=0.1, y los demás valores igual que los anteriores. El modo axial es inestable desde Re=0. El modo azimutal empieza a partir de Re=0.09, mientras que para el modo n=2, el modo azimutal se presenta hasta Re=0.45.

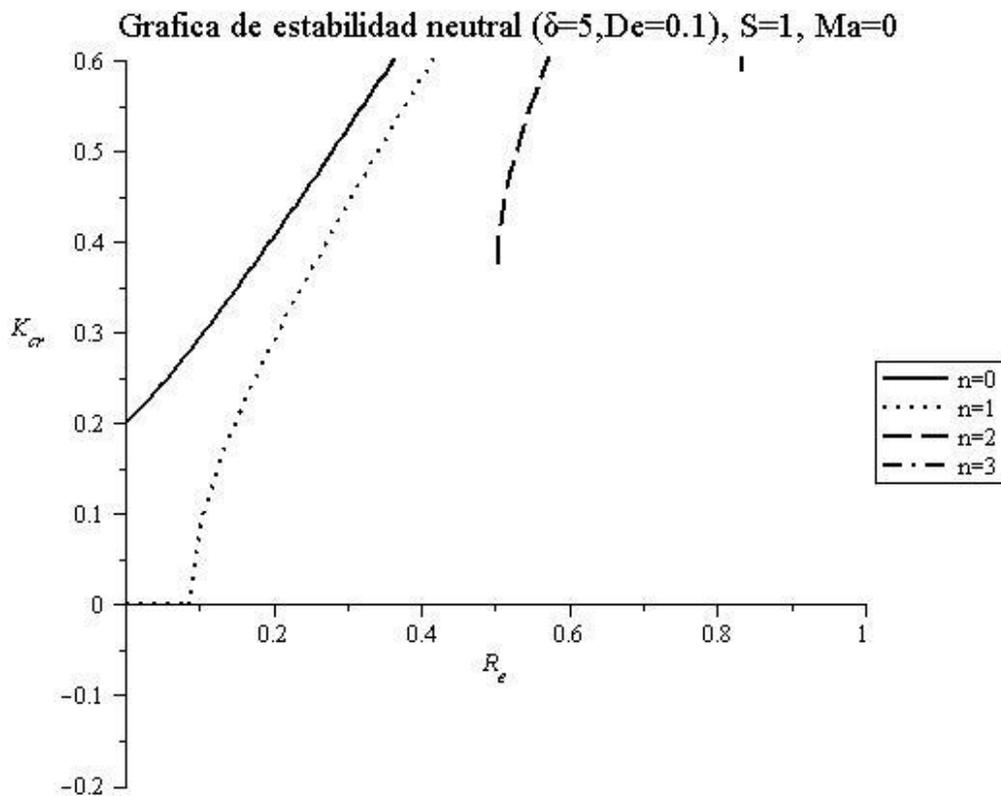


Figura 4.13 Curvas de estabilidad neutral para Ma=0, Gráfica de k_{cr} vs Reynolds, para los siguientes parámetros ($S=1$, $\delta=5$, $De=0.1$)

Gráficas de Estabilidad Neutral para Ma=1.

Al aumentar el número de Ma, es decir aplicar calentamiento al cilindro es de esperar que aumente la inestabilidad del flujo, y que aumente el número de onda crítico con el número de Reynolds, además de que los azimutales aparezcan con un Reynolds menor. En la figura 4.14 se muestran las gráficas del comportamiento de k_{cr} vs número de Reynolds, para $Ma=1$, es decir con calentamiento moderado y $De=0.1$. Se puede apreciar que en este caso el modo axial y los azimutales $n=1,2$, se presentan desde Reynolds igual a cero. Solo el modo azimutal $n=3$ se presenta hasta $Re=0.76$ aproximadamente. La gráficas del modo axial y el azimutal $n=1$, tienen cierto parecido, y aumenta el valor del k_{cr} , conforme aumenta Reynolds. El modo azimutal $n=2$, tiene un comportamiento curioso ya que para $0 < Re < 0.2$ el valor de k_{cr} es pequeño, lo que quiere decir que el azimutal apenas alcanza a aparecer en el fenómeno, pero para $Re > 0.2$ la amplitud de este azimutal se incrementa.

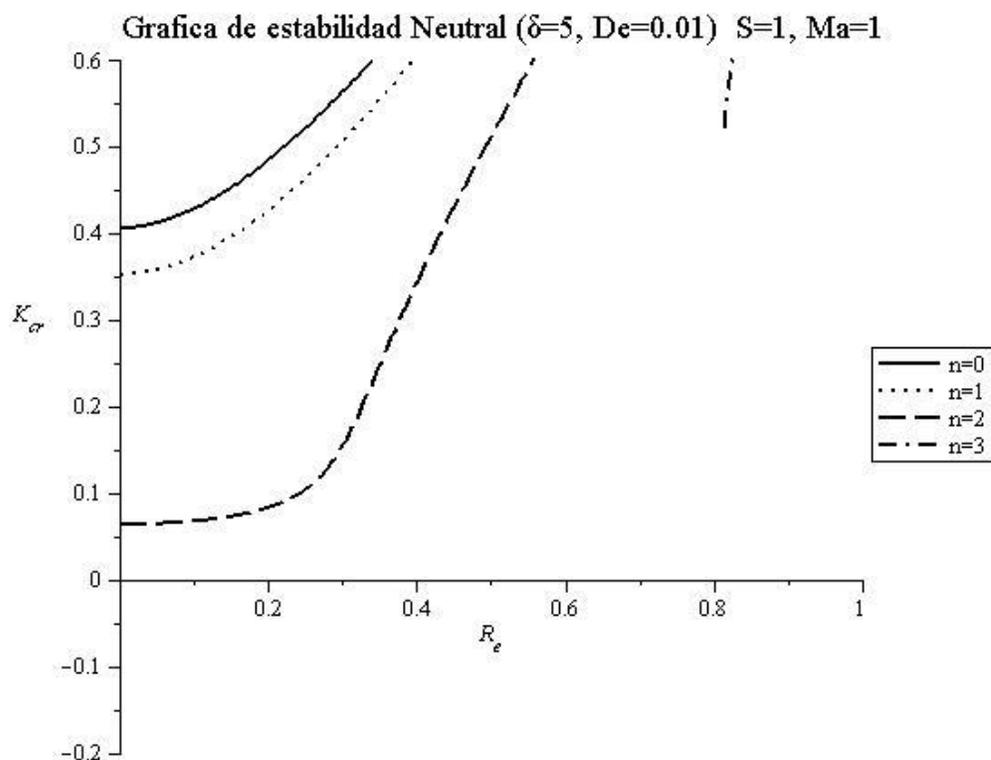


Figura 4.14 Curvas de estabilidad neutral para $Ma=1$, Gráfica k_{cr} vs Reynolds, para los siguientes parámetros ($S=1, \delta=5, De=0.1$)

Gráficas de Estabilidad Neutral para $Ma=2$

A continuación veremos el comportamiento de las gráficas de estabilidad neutral para $Ma=2$, es decir con mayor calentamiento del cilindro. Es de suponer, que en este caso también aumenta la inestabilidad, y los azimutales aparecen con mayor facilidad es decir con menor número de Reynolds.

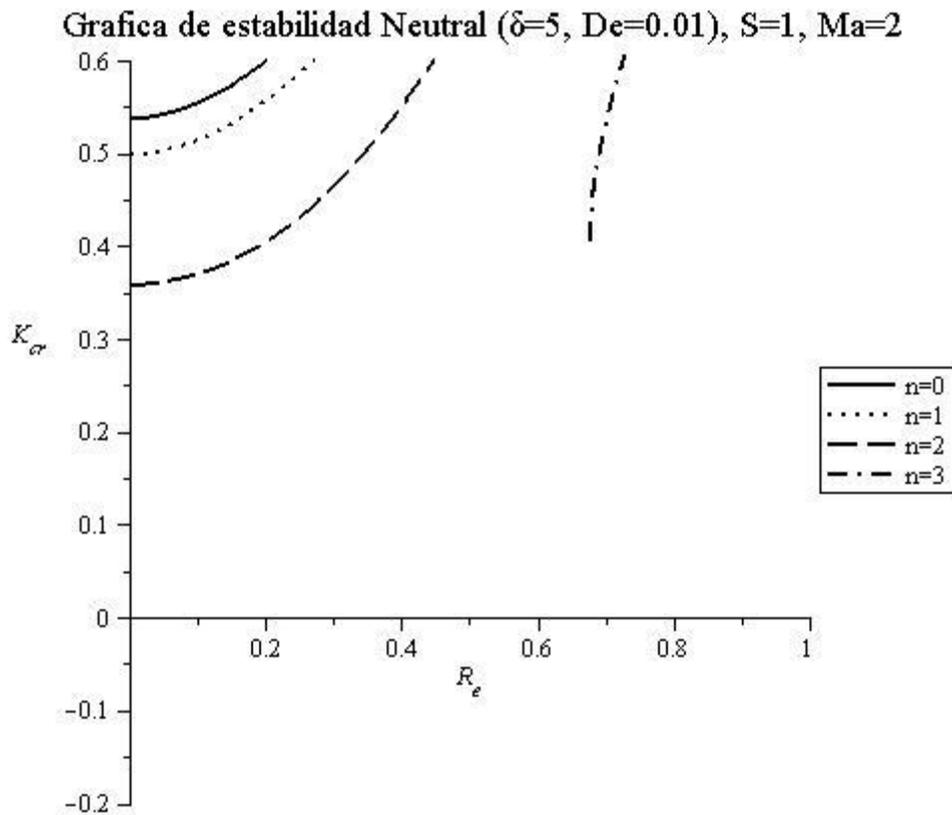


Figura 4.15 Curvas de estabilidad neutral para $Ma=2$, Gráfica k_{cr} vs Reynolds, para los siguientes parámetros ($S=1$, $\delta=5$, $De=0.1$)

En la figura 4.15 se muestra el comportamiento de k_{cr} vs Rey para $Ma=2$, es decir con más calentamiento. Como se puede observar en este caso, el modo axial y los azimutales $n=1,2$ son inestables desde Reynolds=0, y crecen conforme aumenta el número de Re. El modo azimutal $n=3$, aparece hasta que $Re=0.59$, pero también tiene valores de k_{cr} validos dentro del rango de aproximación de longitud de onda larga. En este caso el número azimutal $n=2$, comienza con un valor mayor de $k_{cr}=0.36$ cuando $Re=0$, y va creciendo gradualmente a diferencia del comportamiento cuando $Ma=1$, es decir los modos azimutales se amplifican cuando hay mayor número de Marangoni.

4.4 Gráficas de Razón de crecimiento vs Número de Onda, para radio $\delta=5$

A continuación veremos cómo es el comportamiento de la razón de crecimiento σ vs el número de Reynolds, cuando el radio es menor $\delta=5$, para $S=1$, $De=0.1$, y para varios números de Marangoni

Gráficas de Razón de crecimiento para $Ma=0$. (Caso Isotérmico)

El primer caso que analizamos es el caso con $Ma=0$, es decir el caso isotérmico sin calentamiento. En la figura 4.17 se muestra la razón de crecimiento para $\delta=5$, $De=0.1$, y para $Ma=0$.

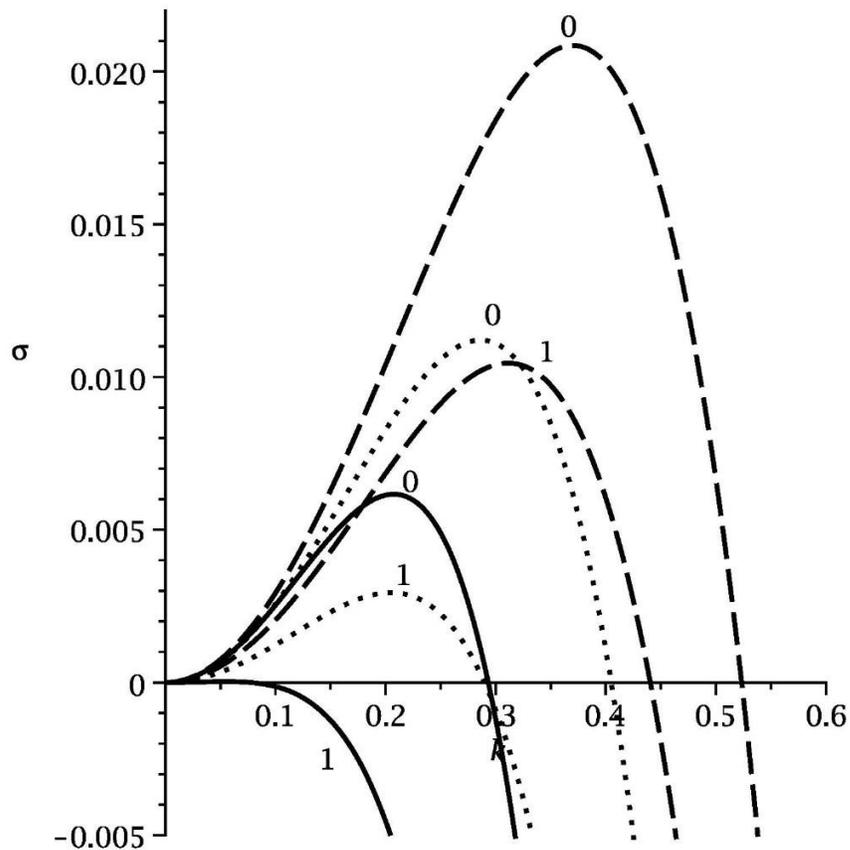


Figura 4.17 Gráfica de razón de crecimiento vs número de onda k para $\delta=5$ (arriba), y para $\delta=10$ (abajo).

El efecto en la razón de crecimiento para el modo axial de un radio menor $\delta=5$, es que se incrementa la razón de crecimiento y inestabilidad del modo axial, en esta caso la

razón de crecimiento para el caso $Re=0.1$ es mayor cuando el radio $\delta=5$ que cuando $\delta=10$ (ver figura 4.8). En cambio el efecto en los modos azimutales es que estos se reducen cuando el radio δ disminuye. Como se puede ver en la gráfica 4.17 el modo acimutal con $n=1$ apenas aparece y su razón de crecimiento no pasa de $\sigma=0.001$. En cambio cuando el radio $\delta=10$, como se ve en la gráfica de abajo de la fig. 4.8, el modo azimutal $n=1$, se incrementa gradualmente y es cercano al modo axial, para números de onda pequeño.

Para los casos en que $Re=0.2$ y $Re=0.3$, cuando se reduce el radio a $\delta=5$, aumenta la inestabilidad y la razón de crecimiento para los modos axiales y los azimutales, que en el caso cuando $\delta=10$. Para estos dos casos particulares si aparecen los modos azimutales con $n=1$, y tienen una razón de crecimiento máxima cercana a la mitad del valor para el modo axial principal, pero no aparece el modo azimutal con $n=2$ en ninguno de los casos. Sin embargo cuando el radio es mayor de $\delta=10$, los modos azimutales adquieren una razón de crecimiento mayor comparada con el valor máximo de la razón de crecimiento del modo axial como se ve en la figura 4.8.

Este comportamiento ya se había observado en el caso visco elástico isotérmico, y se había visto que hay una radio mínimo para la aparición de los azimutales, y cuando el radio es menor se necesita un Reynolds mayor para que aparezcan los azimutales. Mientras con un radio mayor, se necesita un Re menor para que aparezcan los azimutales. A continuación veremos qué pasa, cuando se incrementa el número de Marangoni, es decir se incrementa el calentamiento del cilindro, y aparece el fenómeno capilar.

Gráficas de Razón de crecimiento vs Reynolds para $Ma=2$, $\delta=5$

En este caso en forma parecida al caso de $Ma=1$, tanto el modo axial como los modos azimutales alcanzan valores mayores de razón de crecimiento con $\delta=5$ que con $\delta=10$.

En la gráfica cuando $Re=0.01$ aparecen dos modos azimutales y el modo axial principal. A número de onda pequeño el modo con mayor razón de crecimiento es el modo $n=2$, pero este modo reduce su razón de crecimiento en cuanto aumenta el número de onda k . A medida que aumenta el número de onda, el modo azimutal con $n=1$ rebasa al modo azimutal con $n=2$ en $k=0.20$ aprox. y tiene mayor razón de crecimiento que el modo axial principal. Sin embargo en $k=0.35$ aproximadamente el modo axial rebasa al modo azimutal con $n=1$, y pasa a ser el modo con mayor razón de crecimiento. En este caso las curvas del

modo axial y el modo azimutal $n=1$, alcanzan valores máximos de razón de crecimiento muy similares, pero las curvas no se acercan tanto conforme van creciendo en el plano k - σ . Como habíamos comentado en el inicio del capítulo al aumentar el número de Ma , aumenta la inestabilidad debido al balance de esfuerzos tangenciales que se modifica por los cambios de temperatura (fenómeno capilar), y el resultado es que aparecen más azimutales y su magnitud es mayor.

En el caso de $\delta=10$ a diferencia del radio menor $\delta=5$, los modos azimutales $n=1$ y el modo axial se acercan más en la gráfica 4.11. Y también para el caso cuando $\delta=10$ aparecen un modo azimutal extra con $n=3$ 1 para los tres valores de Re analizados. Ya que habíamos visto que con un radio mayor aparecen más modos azimutales en el flujo.

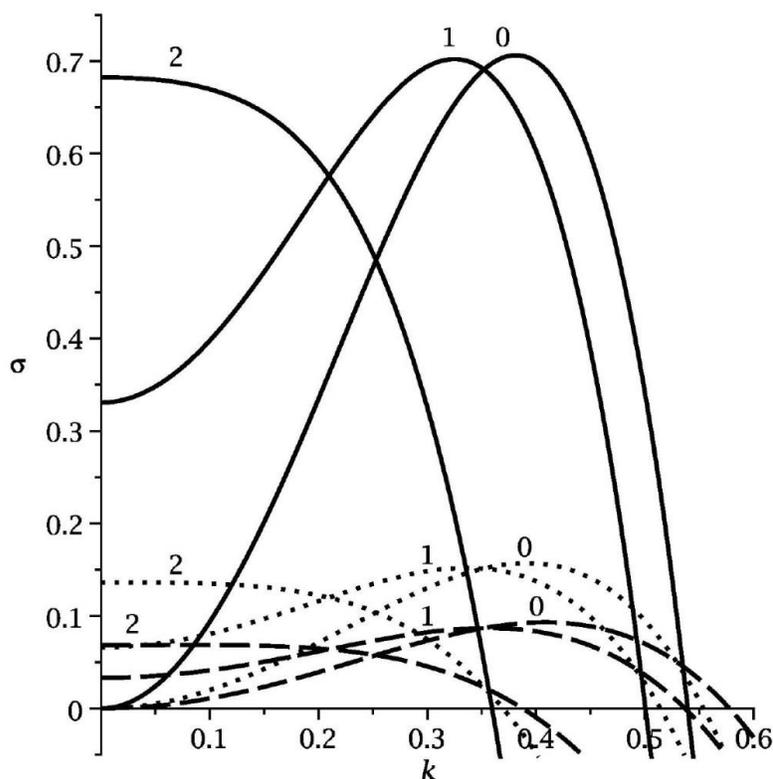


Figura 4.19 Gráfica de razón de crecimiento vs número de onda k , para $\delta=5$

En ese caso con $\delta=1$ los modos azimutales con $n=1,2$ y 3 tienen mayor razón de crecimiento a números de onda pequeños. Y también conforme aumenta el número de onda, estos modos azimutales reducen su razón de crecimiento y primero el modo azimutal $n=1$ rebasa a los otros dos modos y finalmente el modo axial rebasa al modo azimutal $n=1$ y

el modo axial aparece con la razón de crecimiento máxima en la gráfica. Es posible que las ondas cuando el flujo se estabiliza tengan un número de onda igual al número de onda de máximo crecimiento del modo axial. Pero también este modo axial principal puede combinarse con ondas del mismo número de onda, sumados con modos azimutales con $n=1$ superpuestos al modo axial principal.

Ya comentamos que Cheng y Chang (1992) hicieron una investigación del flujo de una capa líquida newtoniana sobre una superficie cilíndrica, usando la aproximación de Schlang y Sivashinky(1982) para sus cálculos. En su trabajo, muestran que en ciertos casos el número de onda que permanece en el flujo real de una capa líquida, es igual al número de onda del máximo crecimiento que aparece en el análisis lineal. En otras ocasiones el número de onda de máximo crecimiento en ciertos experimentos es diferente y cercano al doble del número de onda de máximo crecimiento que proviene del análisis lineal. En el estudio Cheng y Chang consideran que la estabilidad de la onda axial depende de que tan estables o inestables son las ondas con el mismo número de onda axial, pero con una perturbación $n=1$ o $n=-1$ en la dirección azimutal. La aparición de ondas azimutales dependerá de si estas perturbaciones son estables o desaparecen cuando interactúan con la onda del modo axial.

En nuestro estudio hemos visto que las perturbaciones azimutales toman mayor relevancia y su magnitud en su razón de crecimiento se incrementa, cuando se aumenta la elasticidad del fluido como en el caso viscoelástico puro, pero también pueden tener valores relativos mayores de razón de crecimiento a números de onda pequeño cuando se aplica calentamiento al cilindro y aumenta el número de Marangoni. Por tanto la interacción no lineal de estas perturbaciones azimutales adquiere mayor relevancia en el caso no isotérmico, pues algunos de estos modos azimutales tienen mayor magnitud y pueden permanecer e interactuar con el flujo principal.

Capítulo 5 Estabilidad Hidrodinámica de una capa líquida viscoelástica en una superficie cilíndrica en ausencia de gravedad

En esta sección analizaremos la estabilidad termocapilar de una capa líquida de material viscoelástico en ausencia de gravedad. Cuando no existe gravedad, no existe un flujo principal debido a la fuerza de gravedad sobre las partículas del fluido, y por tanto una forma de analizar este problema es hacer una aproximación con el número de $Re \rightarrow 0$. Pearson (1958) fue el primero en estudiar la inestabilidad que se produce, cuando se introducen gradientes térmicos de tensión superficial. En este tipo de problema se calienta la pared sobre la cual se encuentra la capa líquida. Por transferencia de calor, la capa líquida y la superficie de esta se calienta produciendo un gradiente de tensión superficial, como se vio en las condiciones de frontera y el análisis de la ecuación de la energía en el capítulo 2. Este problema se le llama fenómeno termo capilar. Al variar la temperatura hay cambios en los esfuerzos tangenciales en la superficie libre. Si son suficientemente grandes se produce inestabilidad.

El objetivo de este capítulo es analizar la estabilidad hidrodinámica de la capa en condiciones de hidrostática. Para hacer el análisis de la estabilidad lineal, usamos la ecuación de la razón de crecimiento de las perturbaciones que hemos utilizado para estudiar el problema viscoelástico, y el problema con calentamiento no isotérmico. La ecuación 3.8 la usaremos para realizar nuestro análisis, con ciertos cambios de parámetros.

$$\sigma = \varepsilon \left[\frac{8}{15} Re k^2 + \frac{1}{3} \frac{S}{Re} \left(\frac{1}{\delta^2} \left(k^2 + \frac{n^2}{\delta^2} \right) - \left(k^4 + 2 \frac{k^2 n^2}{\delta^2} + \frac{n^4}{\delta^4} \right) \right) \right] + \varepsilon (De) k^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{Ma}{Pr Re} \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \left(k^2 + \frac{n^2}{\delta^2} \right) \quad (5.1)$$

El primer cambio que realizamos es tomar $Wo = \alpha/ho$, en la definición de número de Reynolds.

$$Re = \frac{Woho}{\nu} = \frac{\alpha ho}{ho \nu} = \frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr} \quad (5.2)$$

De esta forma se cumplirá que $Re*Pr=1$ en todos los casos. Por otro lado, el número que aparece en los términos de tensión superficial se modifica de la siguiente forma

$$\frac{S}{Re} = Pr^* S = \frac{\nu}{\alpha} \left(\frac{\gamma h_0}{\rho \nu^2} \right) = \left(\frac{\gamma h_0}{\rho \alpha \nu} \right) = \frac{1}{Cr}$$

$$Cr = \frac{\rho \nu \alpha}{\gamma h_0} \quad (5.3)$$

Por lo que podemos ver al estudiar este fenómeno aparece este número de crispación que mide la competencia que hay entre los esfuerzos de tensión superficial con las fuerzas viscosas y la inercia. Finalmente otro número adimensional que se modifica es el que mide la elasticidad del fluido de trabajo, es decir el número de Deborah:

$$De = \frac{4}{3} (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{U}{h_0} = \frac{4}{3} (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\alpha}{h_0} \left(\frac{1}{h_0} \right) = \frac{4}{3} (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\alpha}{h_0^2}$$

$$De = \frac{4}{3} (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\nu}{h_0^2} \left(\frac{\alpha}{\nu} \right) = \frac{\overline{De}}{Pr} \quad (5.4)$$

En esta ecuación final se define de una forma diferente pero equivalente el número de Deborah, similar a la que aparece en el trabajo de Joo (1994). Realizando estos cambios de variable y sustituyendo en la ecuación 5.1, podemos obtener la siguiente ecuación para la razón de crecimiento valida, cuando el número de Reynolds es cero.

$$\sigma = \varepsilon \left[\frac{\overline{De}}{Pr} k^2 + \frac{1}{3Cr} \left(\frac{1}{\delta^2} \left(k^2 + \frac{n^2}{\delta^2} \right) - \left(k^4 + 2 \frac{k^2 n^2}{\delta^2} + \frac{n^4}{\delta^4} \right) \right) \right]$$

$$+ \varepsilon \frac{Ma}{2} \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \left(k^2 + \frac{n^2}{\delta^2} \right) \quad (5.5)$$

Esta ecuación representa la razón de crecimiento en el flujo cuando $Re = 0$. Las inestabilidades y perturbaciones en la superficie aparecen incluso sin un flujo estable principal. Solo aplicando calor en el cilindro y la presencia de un perfil de temperatura en la superficie de la capa líquida se generan perturbaciones debido al fenómeno termocapilar.

De la misma forma que en el capítulo 3 para el flujo de una capa viscoelástica, primero podemos igualar la razón de crecimiento a cero, y obtener una ecuación en función

del número de onda k , para obtener el valor de número de onda crítico y las gráficas de estabilidad neutral:

$$\begin{aligned} (k^4) - \left[\frac{8 Cr}{5 Pr} + \frac{3\overline{De}}{Pr} Cr + \frac{1}{\delta^2} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} + \frac{3}{2} MaCr \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \right] k^2 \\ - \left(\frac{n^2}{\delta^4} - \frac{n^4}{\delta^4} + \frac{3}{2} MaCr \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \frac{n^2}{\delta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por último el valor de k_{cr} , se puede obtener resolviendo esta ecuación de cuarto grado que se puede resolver como cuadrática haciendo $q=k^2$. La solución de dicha ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{8 Cr}{5 Pr} + \frac{3\overline{De}}{Pr} Cr + \frac{1}{\delta^2} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} + \frac{3}{2} MaCr \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \right] + \\ \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{8 Cr}{5 Pr} + \frac{3\overline{De}}{Pr} Cr + \frac{1}{\delta^2} - 2 \frac{n^2}{\delta^2} + \frac{3}{2} MaCr \left(\frac{Bi}{(1+Bi)^2} \right) \right)^2 \right]^{1/2} \\ + 4 \left[\left(\frac{n^2}{\delta^4} - \frac{n^4}{\delta^4} \right) + \frac{3}{2} MaCr \frac{Bi}{(1+Bi)^2} \frac{n^2}{\delta^2} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Con estas ecuaciones, podemos continuar el análisis lineal del problema y obtener las gráficas de estabilidad neutral así como las de razón de crecimiento.

5.1 Estabilidad lineal de Capas líquidas cuando en ausencia de gravedad. Caso para $\delta = 5$

A continuación mostraremos las gráficas de estabilidad neutral, es decir del número de onda k_{cr} versus el número de Marangoni en este caso, cuando $\delta=5$ y usando de parámetros $S=1$, y con dos números de Deborah, $De=0.01$ y con $De=0.2$.

En estas gráficas usamos el número de Crispación que es un cociente de fuerzas de tensión superficial entre fuerzas viscosas, para separar los diferentes casos, ya que con mayor número de crispación aumenta la inestabilidad y la variación de k_{cr} con el número de Marangoni es mayor.

Gráficas de estabilidad Neutral, para $\delta=5$, con número de Crispación =0.01

A continuación mostramos el comportamiento del número de onda crítico k_{cr} , cuando el número de crispación $Cr=0.01$ y cuando $\delta=5$ y el número $De=0.01$. En este caso mostrado en la figura 5.3, solo aparece el modo axial y un modo acimutal con $n=1$.

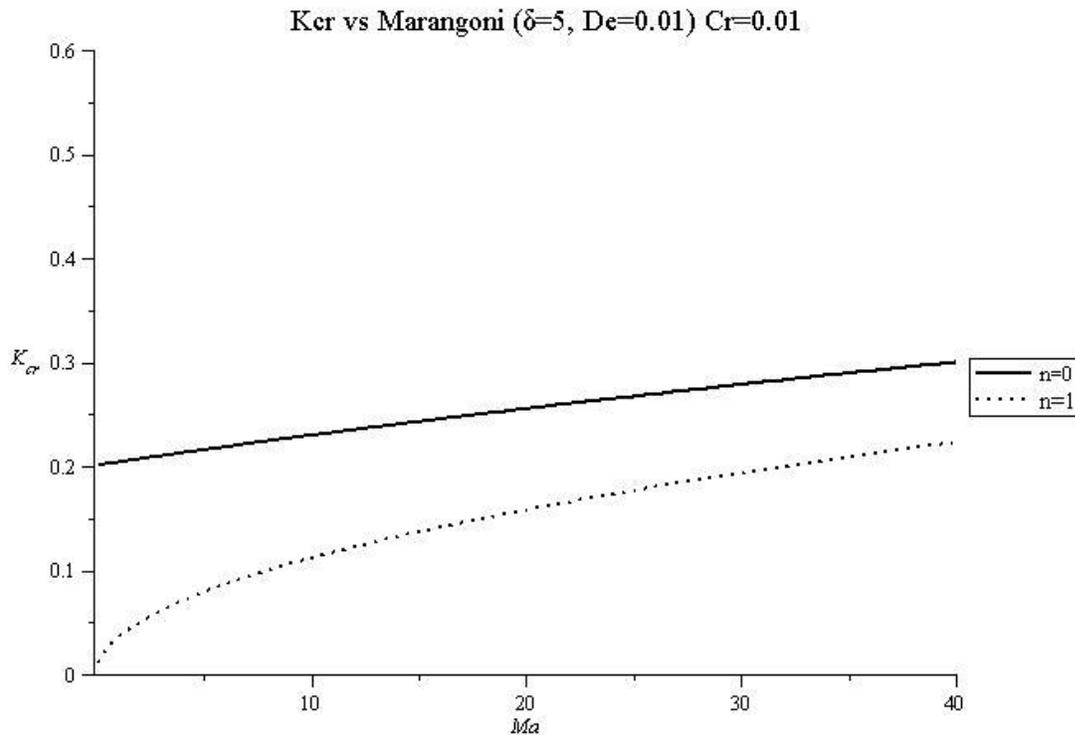


Figura 5.1 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.01$ K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1$, $De=0.01$ y $\delta=5$)

En este caso, el modo axial también comienza con un valor de $K_{cr}=0.2$ cuando $Ma=0$, y va creciendo hasta un valor de 0.28 cuando $Ma=40$. EN este caso hay mayor variación en el rango de valores del número de onda crítico k_{cr} , y se observa una mayor variación conforme aumenta el número de Marangoni. Es decir que al aumentar el número de Crispación esto causa que el flujo sea más inestable y aumente el número de onda crítico.

Mostramos en la figura 5.2 la gráfica de estabilidad neutral para el mismo caso $\delta=5$, pero cuando $De=0.2$ es decir con una elasticidad relativamente mayor en el fluido.

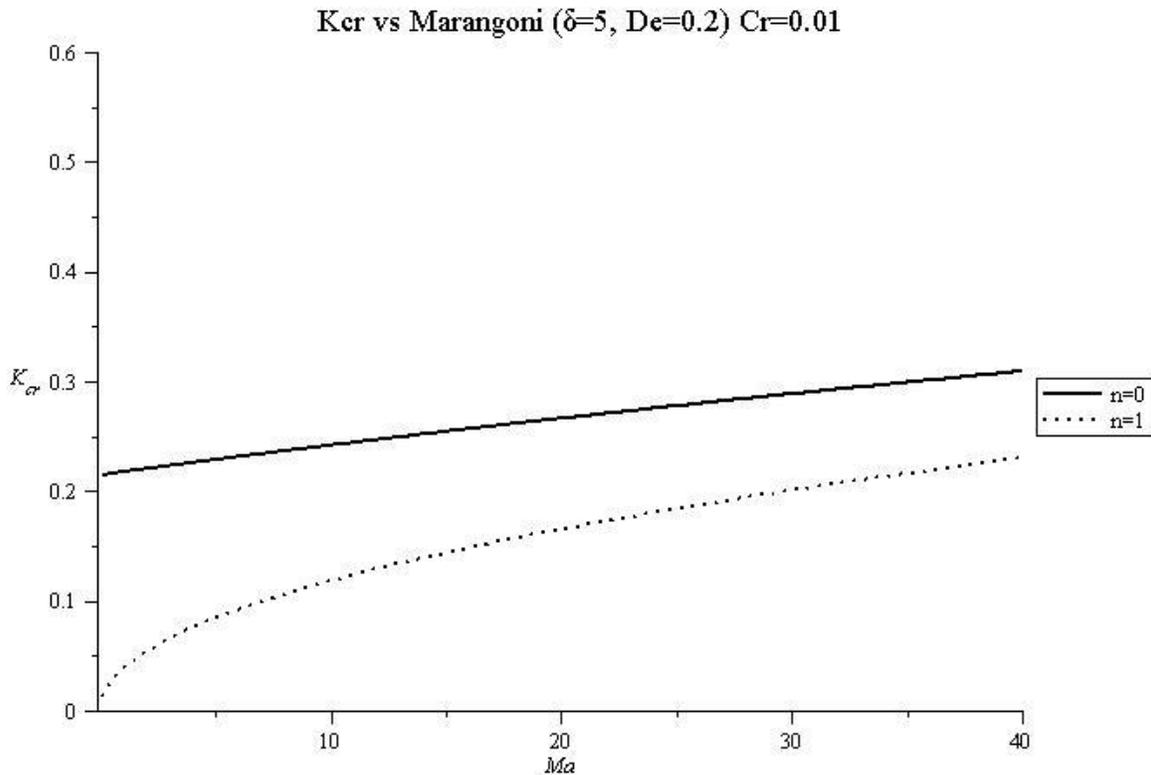


Figura 5.2 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.01$ K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1$, $De=0.2$ y $\delta=5$)

En este caso, también las curvas de estabilidad neutral se parecen mucho al caso cuando $De=0.01$ y solo para números de Ma cercanos a cero, el valor de k_{cr} cuando $De=0.2$ es un poco mayor en magnitud, pero a valores mayores de Marangoni las gráficas son muy parecidas.

Gráficas de estabilidad Neutral, para $\delta=5$, con número de Crispación =0.1

El caso cuando $Cr=0.1$ y con número de $De=0.01$, se muestra en la figura 5.3. En este caso las perturbaciones se vuelven más inestables conforme crece el número de Marangoni, ya que ahora el número de Crispación es mayor y estimula más la inestabilidad al ser mayor el efecto de las fuerzas viscosas y de inercia que el de las fuerzas de tensión superficial.

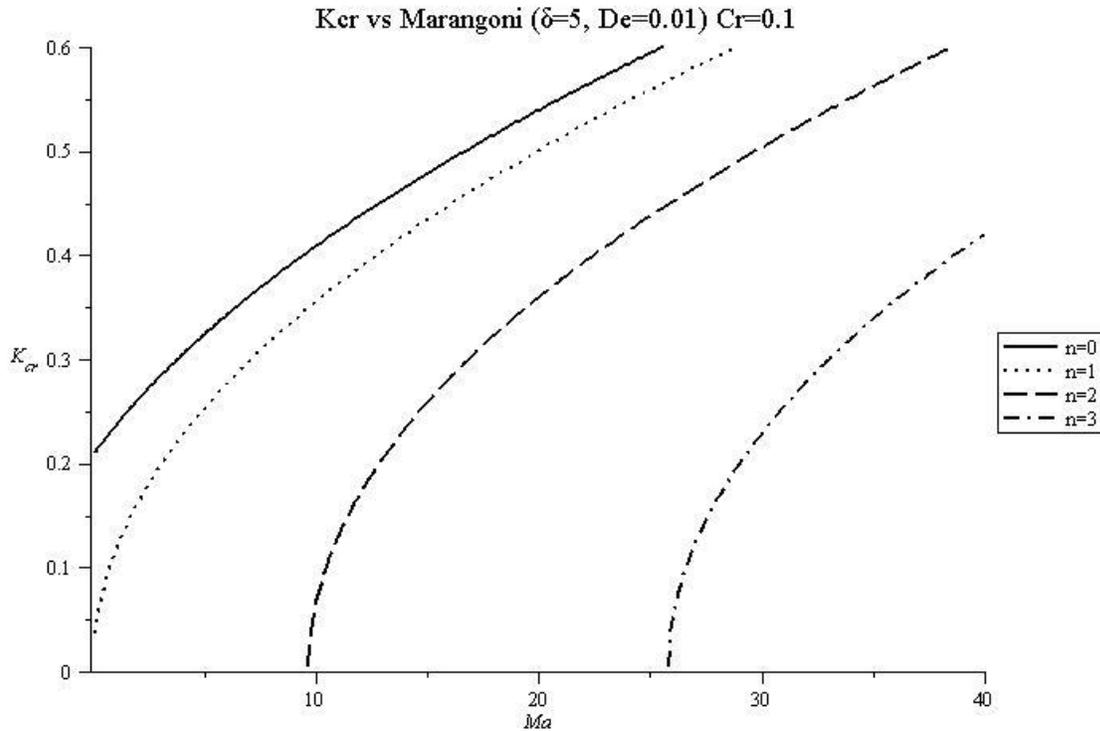


Figura 5.3 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.1$ K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1$, $De=0.01$ y $\delta=5$)

El modo axial comienza en $K_{cr}=0.22$ cuando $Ma=0$, y crece rápidamente hasta un valor de $K_{cr}=0.52$ cuando $Ma=20$. Es decir se necesita menor calentamiento para que se vuelvan inestables las perturbaciones del modo axial. El modo acimutal con $n=1$ se presenta desde $Ma=0$, y la gráfica de número de onda crítico para este modo va creciendo con un valor ligeramente menor al de modo axial. Otro resultado es que aparecen dos modos azimutales extras, el modo $n=2$ que aparece desde $Ma=10$, el modo $n=3$ que aparece desde $Ma=26$. Como se puede notar al aumentar el número de crispación aparecen más modos azimutales y la inestabilidad aumenta para el modo axial y también para los azimutales. Decidimos graficar solo valores de k_{cr} menores que 0.6 para cumplir con los requisitos de nuestra aproximación de longitud de onda larga.

En la figura 5.4 mostramos el mismo fenómeno con $\delta=5$ y $Cr=0.1$, pero con mayor elasticidad es decir con $De=0.2$. En este caso si hay un cambio en las curvas de estabilidad neutral, pues los valores del número de onda crítico son mayores cuando la elasticidad es mayor ($De=0.2$) que con una elasticidad más pequeña ($De=0.1$)

De la misma forma los modos azimutales crecen más rápidamente con el número de Marangoni, y los modos azimutales presentan mayor razón de crecimiento con número de

Deborah mayor ($De=0.2$). Esto se nota en que las partes superiores de las gráficas de los modos axiales y azimutales se desplazan hacia la izquierda y arriba, conforme aumenta Ma , cuando el fluido tiene una elasticidad mayor, o mayor número de De .

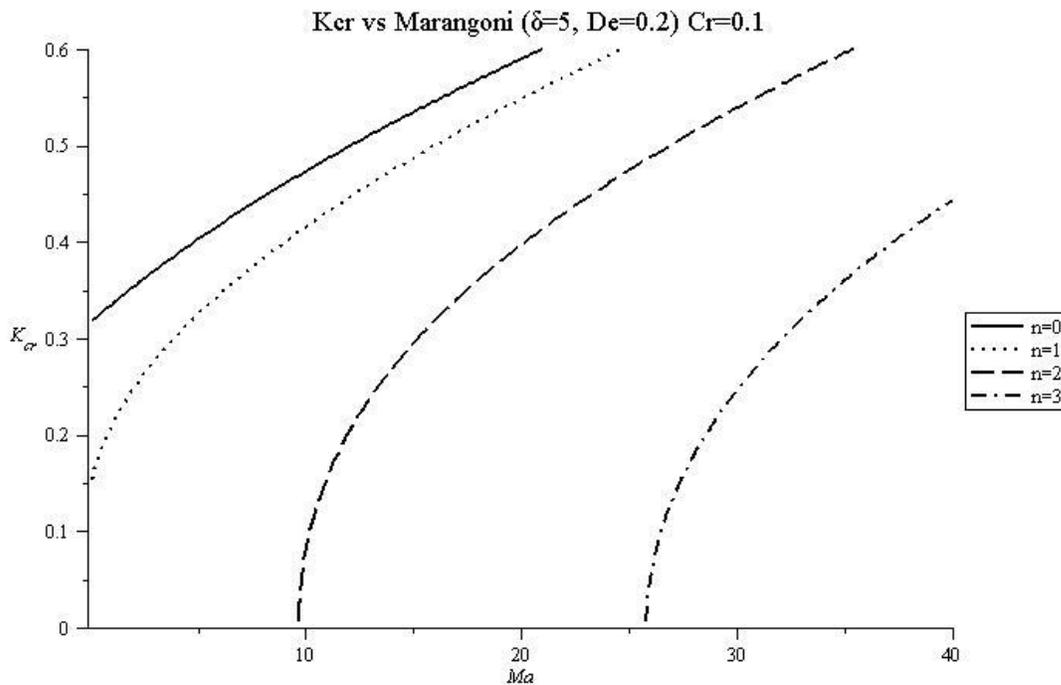


Figura 5.4 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.1$ K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1, De=0.2$ y $\delta=5$)

Gráficas de estabilidad Neutral, para delta=5, para los tres caso de Número de Crispación =0.1, 0.01, y 0.001

A continuación se muestran las gráficas de estabilidad neutral, para los tres casos de números de Crispación $Cr=0.001, 0.01, 0.1$. En la figura 5.5 se muestra el caso cuando el número de Deborah es pequeño $De=0.01$. Para explicar la gráfica se explicara cada uno de los modos por separado. Para el modo axial principal ($n=0$), las tres curvas parten del mismo valor de $k_{cr}=0.20$. Después cada curva muestra un incremento en el valor de k_{cr} . La pendiente o incremento del número de onda crítico está determinado por el número de Crispación, la curva que crece más lentamente es la de número de crispación $Cr=0.001$, y la curva que muestra que k_{cr} crece más rápidamente con Marangoni es la de $Cr=0.1$. Esto muestra que el incremento en los valores de k_{cr} es más sensible al número de Marangoni

Para el modo azimutal $n=1$ sucede algo parecido. Las tres graficas con números de

Crispación diferentes parten de un mismo valor $k_{cr}=0$, cuando $Ma=0$, pero la gráfica con numero de $Cr=0.001$ modifica más lentamente su número de onda crítico k_{cr} , conforme aumenta el número de Marangoni. Con crecimiento intermedio aumenta k_{cr} cuando $Cr=0.01$, y el crecimiento mayor del número de onda crítico con la variación de Marangoni se da, cuando $Cr=0.1$. Como se puede apreciar en la misma gráfica, cuando el número de $Cr=0.1$ aparecen también dos modos azimutales extras ($n=2$ y 3) que no aparecen con los otros números de crispación.

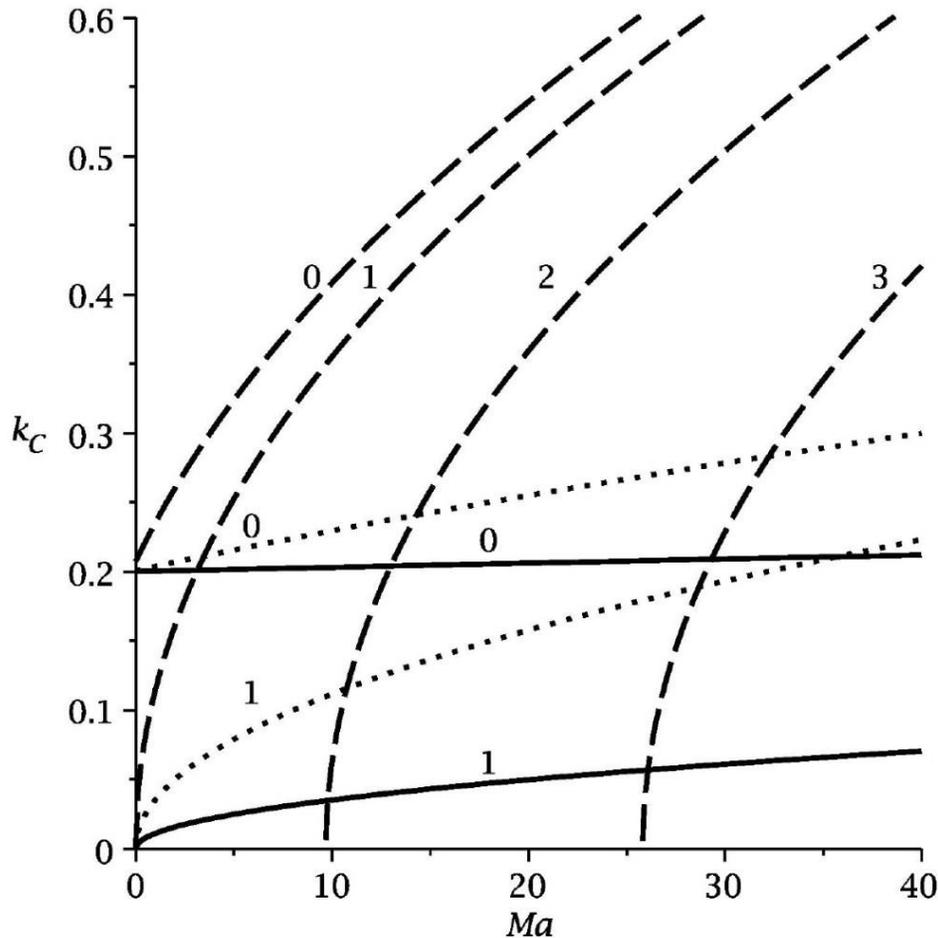


Figura 5.5 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.1$, 0.01 y 0.001 k_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1$, $De=0.01$ y $\delta=5$)

Las gráficas de estabilidad neutral, cuando se aumenta la elasticidad y el número de Deborah, se muestran en la figura 5.6 En el caso del modo axial, las curvas se comportan de forma parecida, pero en este caso el valor de k_{cr} con $Ma=0$ es mayor cuando $Cr=0.01$.y

todavía mayor cuando $Cr=0.1$. También para mayor número de crispación el cambio de k_{cr} es más sensible al cambio de Ma , por lo que la curva de $Cr=0.1$ es la que tiene mayor crecimiento de k_{cr} . La forma de las curvas de los modos azimutales es parecida, pero en este caso, el valor de k_{cr} cuando $Ma=0$ es mayor cuando aumenta el número de Crispación, y también el valor de k_{cr} cambia más conforme aumenta el número de Ma , cuando se tiene un número de crispación mayor.

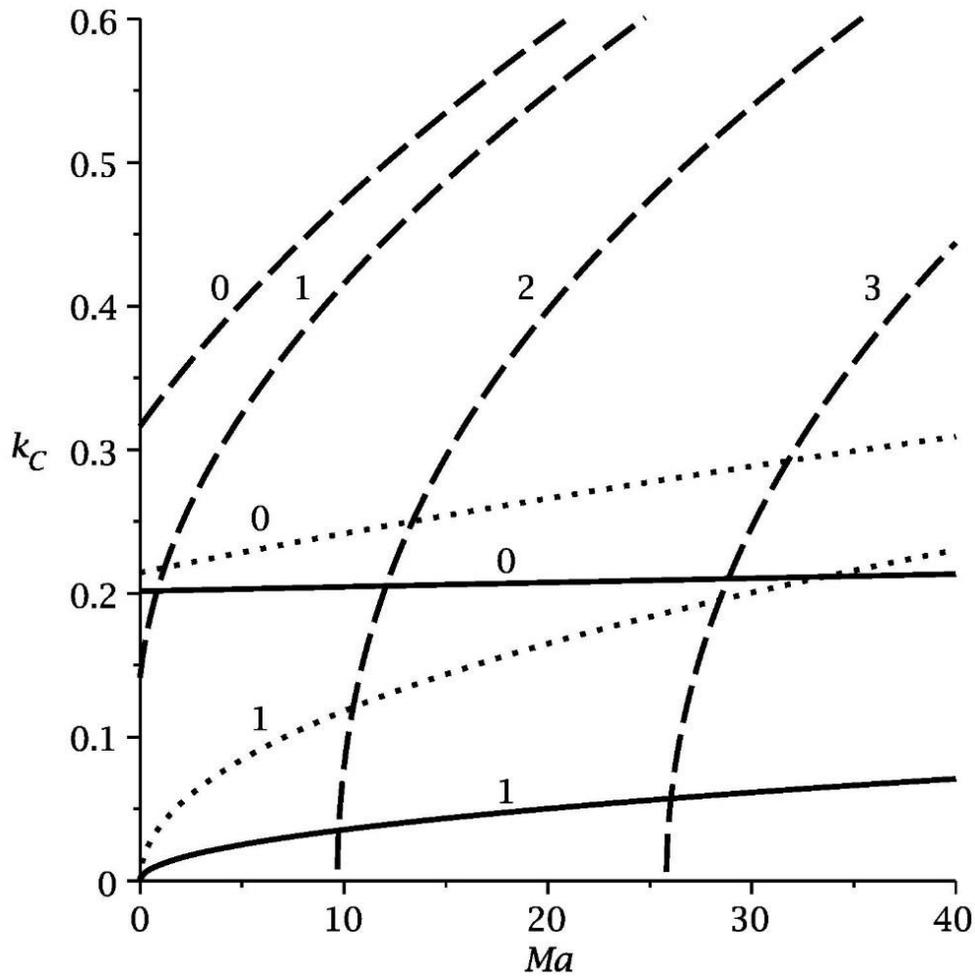


Figura 5.6 Curvas de estabilidad neutra para $Cr=0.1$, 0.01 y 0.001 K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1$, $De=0.2$ y $\delta=5$)

5.2 Estabilidad lineal de Capas líquidas en ausencia de gravedad.

Caso para $\delta = 10$

A continuación mostraremos las gráficas de estabilidad lineal, mostrando el número de onda crítico k_{cr} graficado contra el número de Marangoni, cuando el radio es mayor $\delta=10$. Las gráficas las mostramos para 3 casos con tres números de Crispación $Cr=0.1, 0.01, 0.001$. Todos los casos se grafican fijando los demás parámetros, en $S=1$ y para dos números de Deborah ($De=0.01$, y $De=0.2$) en ausencia de gravedad.

Gráficas de estabilidad Neutral, para $\delta=10$, con número de Crispación =0.01

El siguiente caso que muestro es cuando el número de Crispación es $Cr=0.01$, También muestro primero el caso cuando el número de Deborah es pequeño $De=0.01$ y se muestra el número de onda crítico K_{cr} vs Marangoni, para el modo axial y algunos azimutales. Cuando revisamos el caso viscoelástico puro, y problema capilar, con número de $Re>0$, encontramos que aumentando el radio, aparecen más modos azimutales, aunque es más difícil desestabilizar el modo axial y los modos azimutales requiriendo mayor número de Reynolds en ese caso. En este caso que depende de Marangoni y el número de crispación, se puede ver en la ecuación 5.7 que conforme aumenta el número de crispación,

aumenta la relevancia del término $\frac{3}{2}MaCr \frac{Bi}{(1+Bi)^2} \frac{n^2}{\delta^2}$.

Igual que en el caso viscoelástico puro aparecen más modos azimutales cuando aumenta el radio del cilindro. Como este término tiene una mayor magnitud cuando el número de crispación aumenta, los modos azimutales tienen mayor relevancia conforme aumenta el número de crispación. En la figura 5.7 se muestra el número de onda k_{cr} vs número de Marangoni, cuando $Cr=0.01$, y cuando $De=0.01$ y los demás parámetros están fijos ($S=1, \delta=10$).

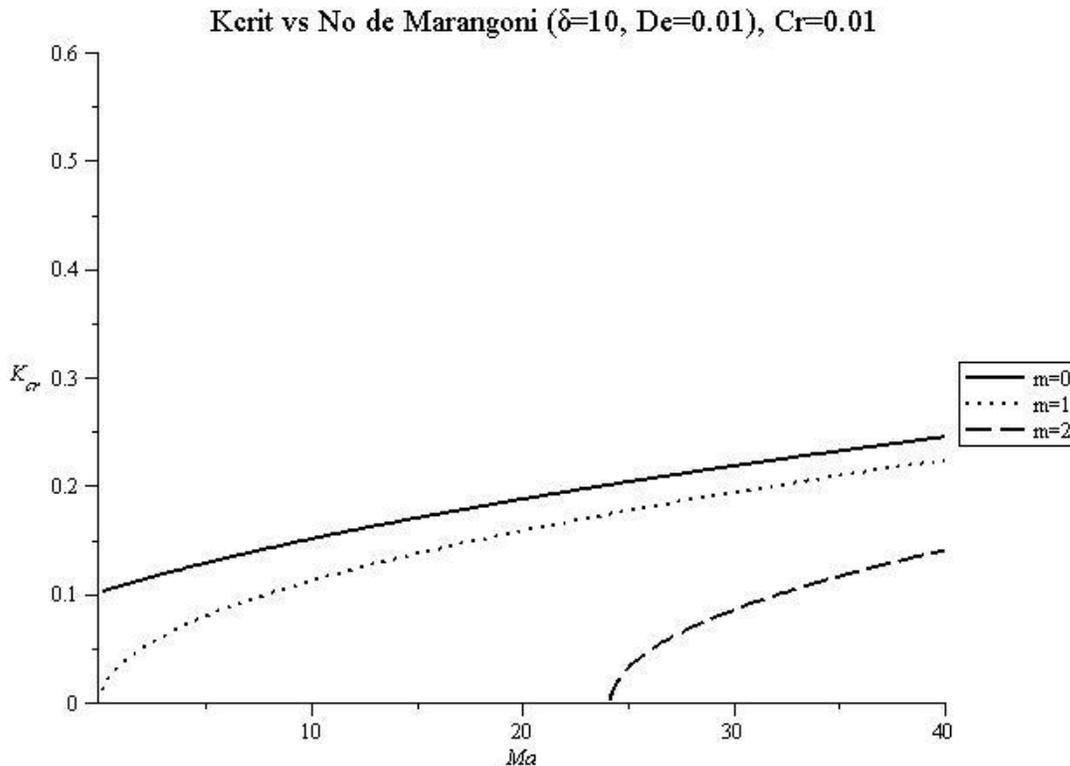


Figura 5.7 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.01$ K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1$, $De=0.01$ y $\delta=10$)

En este caso el modo axial empieza en $k_{cr}=0.1$ cuando $Ma=0$, pero crece más rápidamente y llega a $k_{cr}=0.24$ cuando $Ma=40$. También aparecen dos modos azimutales para este caso de $Cr=0.01$, el modo acimutal con $n=1$, comienza con $k_{cr}=0$ cuando $Ma=0$, y crece con valores cercanos al número de onda crítico del modo axial. También aparece un segundo modo acimutal con $n=2$, que aparece cuando $Ma=24$, y aumenta su valor de k_{cr} conforme aumenta el número de Marangoni. Como habíamos concluido, el aumento del radio de $\delta=5$ a $\delta=10$, hace que aparezcan más azimutales en el análisis lineal de la ecuación de evolución de onda.

En la siguiente figura 5.8 se muestran la gráfica de estabilidad neutral para el mismo radio $\delta=10$, y número de crispación $Cr=0.01$, pero para un número de Deborah con mayor elasticidad $De=0.2$. En este caso debido a que $Cr=0.01$ es relativamente pequeño, no se nota un cambio notable cuando se introduce el número de Deborah mayor $De=0.2$. Esto también está de acuerdo con los resultados obtenidos cuando $\delta=5$.

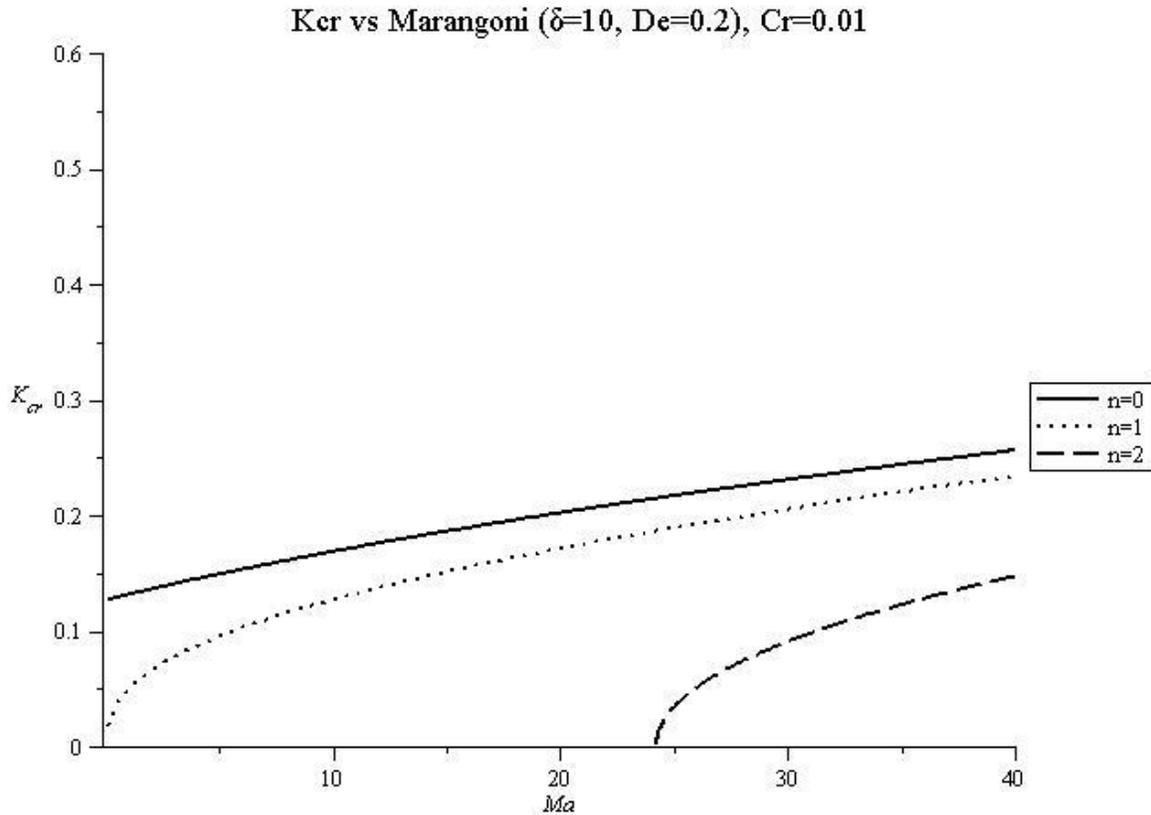


Figura 5.8 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.01$ K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1$, $De=0.2$ y $\delta=10$)

Gráficas de estabilidad Neutral, para $\delta=10$, con número de Crispación =0.1

El siguiente caso que muestro es cuando el número de crispación $Cr=0.1$, y los demás parámetros se dejan fijos $\delta=10$, y $S=1$. También se muestra primero el caso cuando $De=0.01$ y después cuando $De=0.2$

Igual que en el caso anterior, los términos que contribuyen a los azimutales con términos de n se incrementan al aumentar el número de Crispación.

$$4 \left[\left(\frac{n^2}{\delta^4} - \frac{n^4}{\delta^4} \right) + \frac{3}{2} MaCr \frac{Bi}{(1+Bi)^2} \frac{n^2}{\delta^2} \right]$$

Por esta razón, aparecen más modos azimutales cuando aumenta el número de Crispación y también aumenta el radio $\delta=10$.

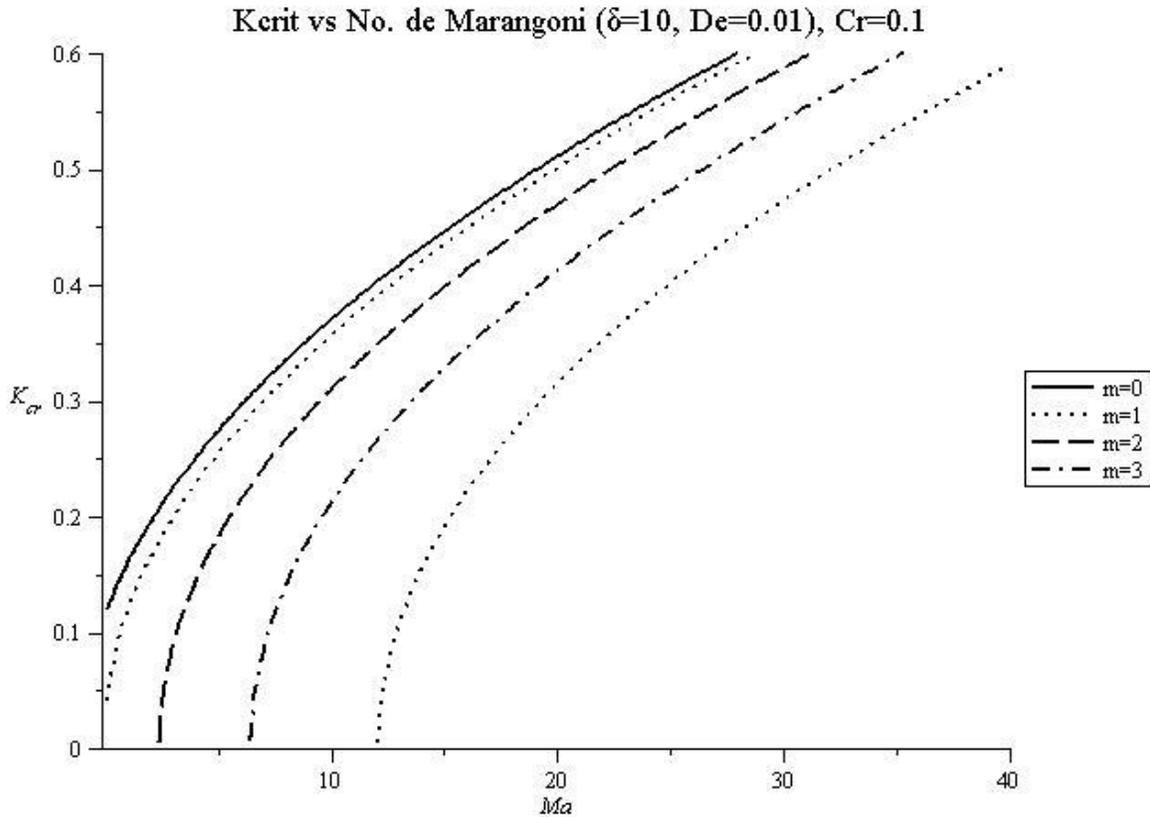


Figura 5.9 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.1$ K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1, De=0.01$ y $\delta=10$)

En la figura 5.9 se muestra el número de onda crítico k_{cr} vs número de Marangoni, para el caso $Cr=0.1$. En la figura se puede ver que el modo axial es inestable desde $Ma=0$, con un valor de $k_{cr}=0.12$ y crece rápidamente su valor de k_{cr} conforme aumenta el número de Ma . El modo azimutal $n=1$, también es inestable desde $Ma=0$, con $k_{cr}=0.04$ y su número de onda crítico k_{cr} crece muy cerca del modo axial conforme aumenta el número de Ma . Como se puede ver en la figura, en este caso aparecen más azimutales. El modo azimutal con $n=2$ aparece con $Ma=3$. El modo acimutal con $n=3$ aparece cuando $Ma=7$ e incluso aparece un modo acimutal con $n=4$ cuando $Ma=12$.

Por lo tanto en forma similar a como ocurrió con el caso con flujo, los modos azimutales alcanzan una mayor magnitud y relevancia cuando aumenta el número de crispación y cuando aumenta el radio del cilindro. Como tienen una mayor magnitud es posible que interactúen con el modo axial y aparezcan en la solución final del flujo a lo largo del eje z , conforme el flujo se desarrolla.

Por lo pronto en la figura 5.10 se muestra el comportamiento de la estabilidad neutral, cuando el radio $\delta=10$, y $Cr=0.1$, pero cuando se tiene mayor elasticidad $De=0.1$. Igual que en el caso del radio menor $\delta=5$, se alcanzan números de onda críticos similares, pero con un número de Ma menor. Es decir el flujo se vuelve más inestable conforme aumenta Ma , y las gráficas se desplazan hacia la izquierda en la parte superior.

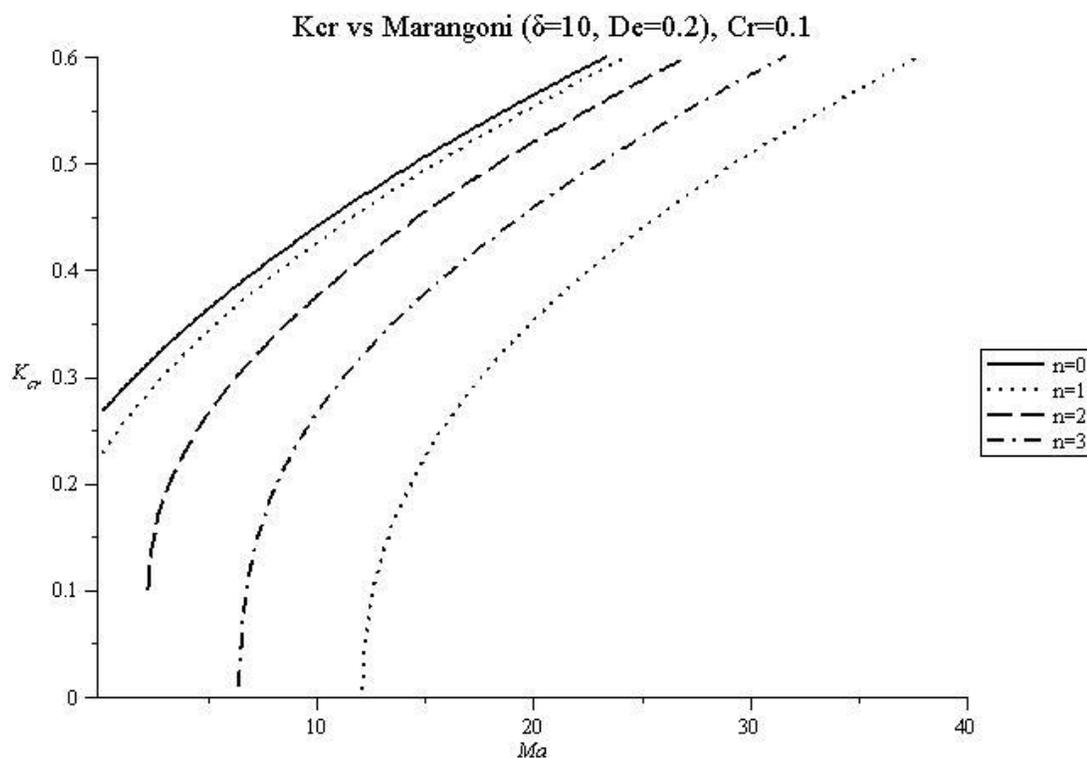


Figura 5.10 Curvas de estabilidad neutral para $Cr=0.1$ K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1$, $De=0.2$ y $\delta=10$)

Gráficas de estabilidad Neutral, para $\delta=10$, $De=0.01$, y para tres números de Crispación (0.001,0.01, 0.1)

A manera de resumen a continuación se muestra en la figura 5.11 las gráficas de estabilidad neutral para tres valores de número de Crispación. En esta figura se pueden observar cada modo axial y acimutal para los diferentes valores de número de Crispación.

EL modo axial aparece con $kcr=.20$ para los tres valores de número de Crispación pero luego el número de onda crítico crece más conforme aumenta el número de Marangoni cuando $Cr=0.1$ que para los otros dos casos ($Cr=0.001$, y 0.01).

También el modo azimutal parte de un mismo valor $k_{cr}=0$, cuando $Ma=0$, en los tres casos de número de Crispación. El caso con $Cr=0.001$ crece más lentamente comparado con los números de crispación mayor analizados. EL caso con $Cr=0.01$ parte de un mismo valor $k_{cr}=0$ y su número de onda critico crece de forma mas rápida conforme aumenta el número de Ma . Finalmente el caso con $Cr=0.1$ también tiene un valor de $k_{cr}=0$ cuando $Ma=0$, pero aumenta más su valor conforme aumenta el número de Marangoni. En este caso con $Cr=0.1$ también aparecen dos azimutales mas, el modo $n=2$, a partir de $Ma=2.5$ y el modo $n=3$ a partir de $Ma=7$.

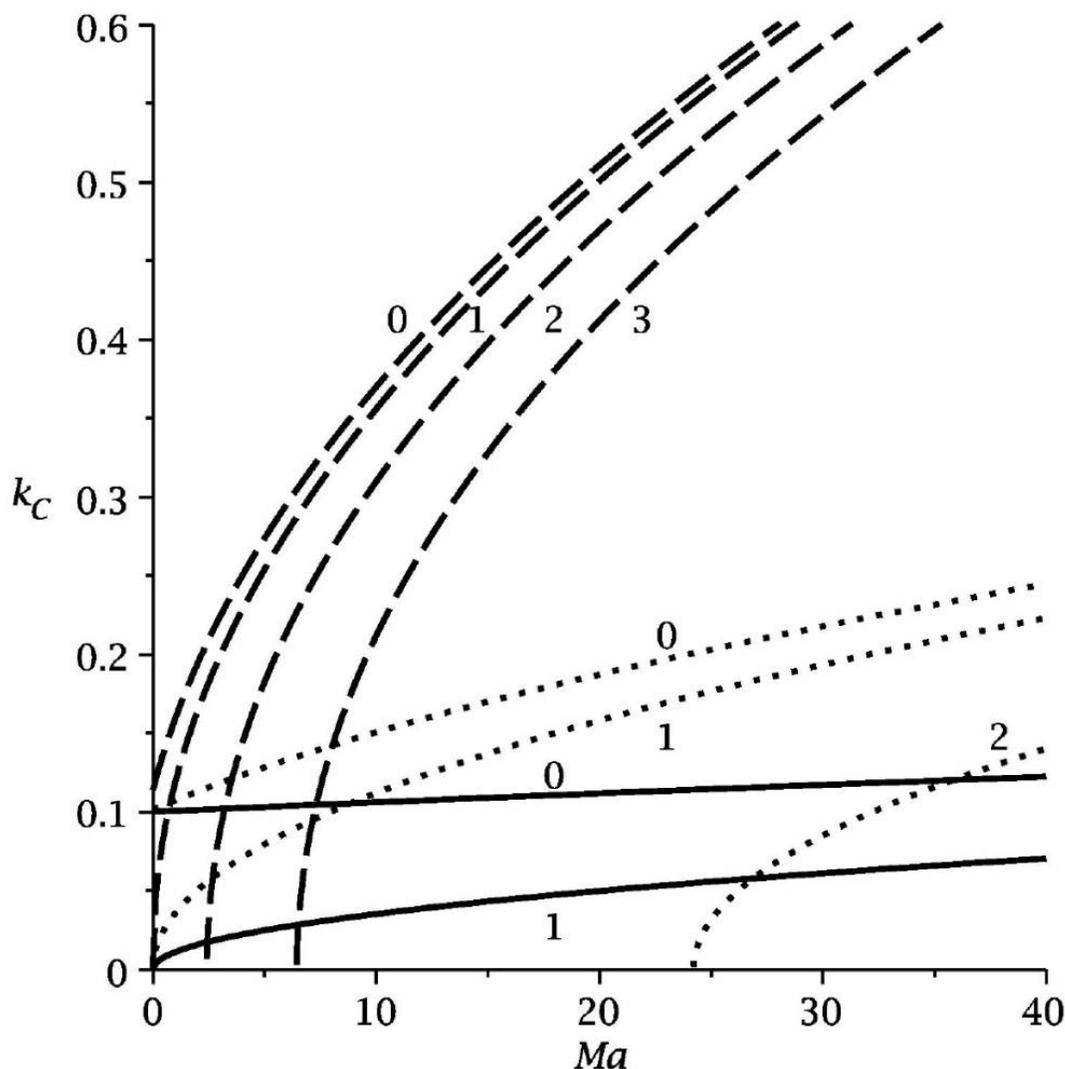


Figura 5.11 Curvas de estabilidad neutral para ($Cr=0.001, 0.01, 0.1$) K_{cr} vs Número de Marangoni para los siguientes parámetros ($S=1, De=0.01$ y $\delta=10$)

5.3 Razón de Crecimiento vs Número de Onda k para una capa líquida en ausencia de gravedad cuando $\delta=5$

En la última parte de este capítulo, se muestran las gráficas de la razón de crecimiento de las perturbaciones σ vs el número de onda k . Estas gráficas nos indican cómo se amplifican las perturbaciones dependiendo del número de onda, y del número azimutal seleccionado. Mostraremos gráficas para tres casos de número de Ma , que es el número adimensional que determina el tipo y grado de inestabilidad en el flujo de acuerdo al calentamiento aplicado al cilindro.

Gráficas de Razón de Crecimiento, para $\delta=5$, con número de Marangoni = 0

En la figura 5.12 podemos ver la razón de crecimiento vs número de onda k , para el caso isotérmico en ausencia de gravedad, cuando el número de $Ma = 0$. Se fijan los demás parámetros ($S=1$, $De=0.01$, $\delta=5$)

Como se puede observar solo la curva del modo axial tiene razón de crecimiento mayor que cero cuando $Cr=0.001$. Como se puede ver el caso axial alcanza una razón de crecimiento máxima $\sigma=0.13$ y después comienza a decrecer hasta que es igual a cero en el valor de $k_{cr}=0.20$. Los modos axiales para los casos con $Cr=0.01$ y $Cr=0.1$ alcanzan una razón de crecimiento menor, pero su número de onda crítico también vale $k_{cr}=0.20$. El modo azimutal $n=1$, para el caso de $Cr=0.001$ comienzan a decrecer conforme aumenta el número de onda y desaparece del flujo tridimensional.

También se muestran los casos cuando $Cr=0.01$ con líneas de puntos. Como se observa el modo axial tiene una razón de crecimiento máxima menor $\sigma_{max}=0.014$, y el valor de número de onda crítico $k_{cr}=0.2$, esto coincide con las gráficas de estabilidad neutral de la figura 5.3. Para el caso de $Cr=0.1$ la razón de crecimiento se reduce tanto para el modo axial como para el modo azimutal. Para el modo azimutal, la razón de crecimiento comienza a decrecer a partir de un número de onda crítico pequeño $k_{cr}=0.05$. Por lo tanto tienen muy poca influencia el modo azimutal para los tres casos en el flujo principal.

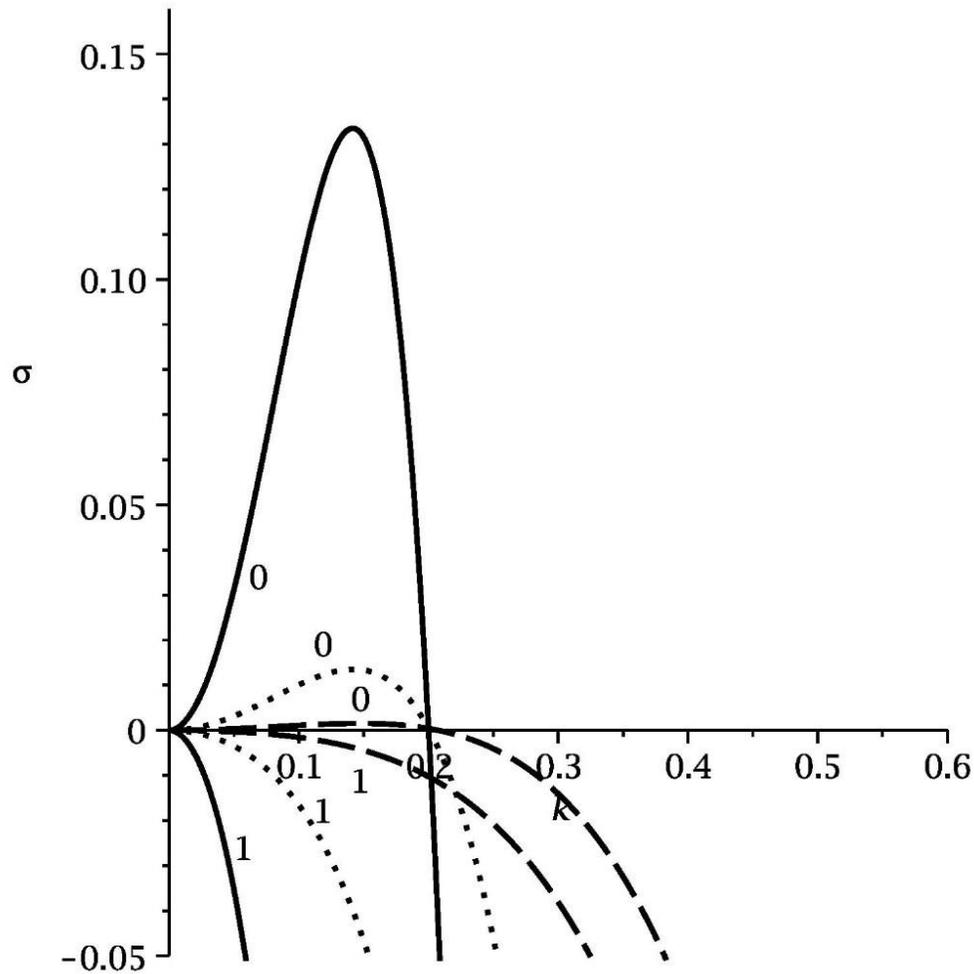


Figura 5.12 Razón de crecimiento versus número de Onda k para $Ma=0$, ($S=1$, $De=0.01$ y $\delta=5$), y para ($Cr=0.001$ línea continua, $Cr=0.01$ línea punteada, $Cr=0.1$ línea a rayas)

El caso cuando se incrementa la elasticidad se muestra en la siguiente figura 5.13 donde se muestra la gráfica de razón de crecimiento para un número de Deborah mayor $De=0.2$ y con los mismos valores de $Ma=0$, $S=1$, $\delta=5$.

Como se puede observar hay un comportamiento similar en este caso con $De=0.2$, cuando el número de Crispación=0.001 Solo hay un pequeño cambio para los números de Crispación igual a 0.01 y 0.1, donde la razón de crecimiento máxima de los modos axiales es un poco mayor. Para el caso con $Cr=0.01$, aumenta ligeramente la razón de crecimiento cuando aumenta la elasticidad ($De=0.2$) alcanzando un valor máximo de $\sigma=0.018$ para el modo axial. El modo azimutal tiene un valor muy pequeño y luego desciende a valores menores que cero.

Pero sobre todo en el tercer caso con $Cr=0.1$, la razón de crecimiento del modo axial se amplifica y es mayor cuando $De=0.2$ llegando a un valor máximo de $\sigma=0.01$ que es algo mayor que la máxima razón de crecimiento para el caso $De=0.01$ que es igual a $\sigma_{max}=0.002$ para el modo axial. Este comportamiento era predecible pues también sucede en el caso cuando $Re<0$ o en el caso viscoelastico sin perfil de temperatura.

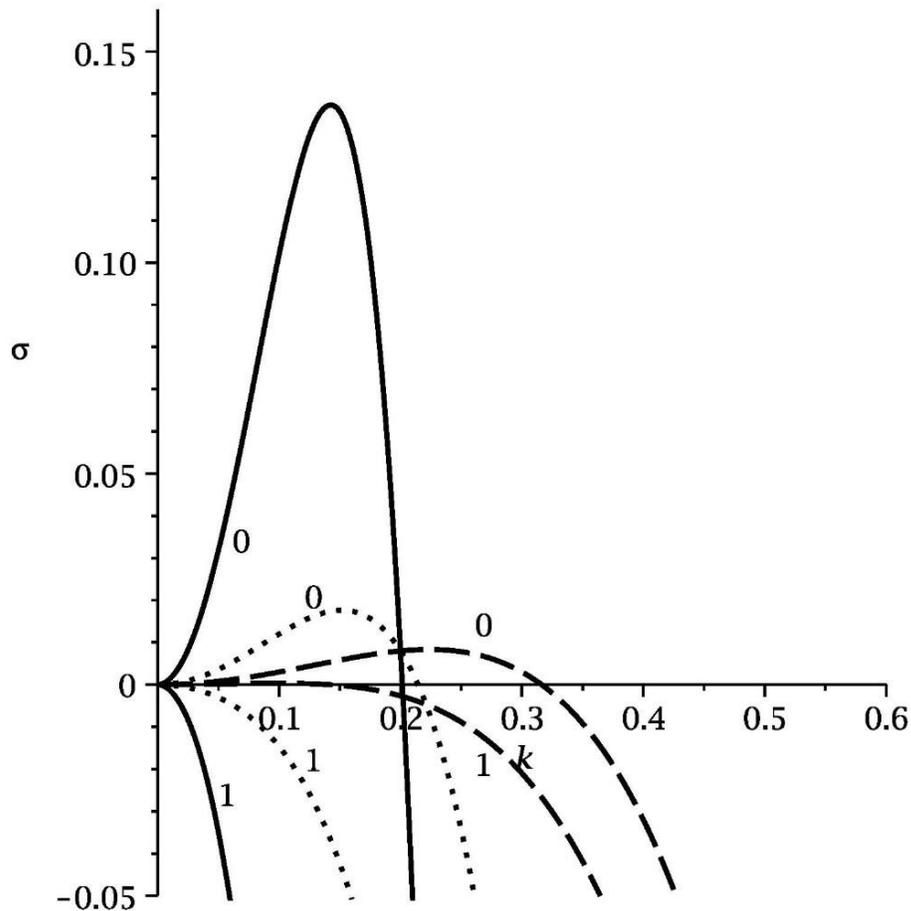


Figura 5.13 Razón de crecimiento versus número de Onda k para $Ma=0$, y ($S=1$, $De=0.2$ y $\delta=5$) para ($Cr=0.001$ línea Continua, $Cr=0.01$ línea punteada, $Cr=0.1$ línea a rayas)

Gráficas de Razón de Crecimiento, para $\delta=5$, con número de Marangoni=20

El último caso que mostramos en la figura 5.14 es cuando $\delta=5$, y el número de $Ma=20$, es decir con un calentamiento mayor del fluido de la capa líquida. Mostramos primero el caso cuando $De=0.2$.

Para el primer caso con $Cr=0.001$, el modo que predomina es el modo axial, y alcanza una razón de crecimiento máxima $\sigma_{\max}=0.155$ que es mayor que en los casos con menor número de Marangoni. Aparece un modo azimutal pero con una razón de crecimiento $\sigma_{\max}=0.028$ cuando $k=0$, que muestra un número de onda crítico $k_{cr}=0.05$.

La diferencia mayor se aprecia cuando $Cr=0.1$, El modo axial alcanza un máximo valor de razón de crecimiento $\sigma_{\max}=0.1$, cuando $k_{\max}=0.41$. Pero también aparecen dos modos azimutales con $n=1$ y $n=2$, el primer modo comienza con un valor mayor que cero cuando $k=0$ y se incrementa hasta un valor de razón de crecimiento máxima $\sigma_{\max}=0.09$. Este modo azimutal crece en forma cercana al modo axial pero no supera el valor máximo del modo axial. También en la gráfica se muestra que aparece un modo acimutal con $n=2$ que tiene mayor razón de crecimiento que los otros dos modos para números de onda pequeños ($k < 0.24$)

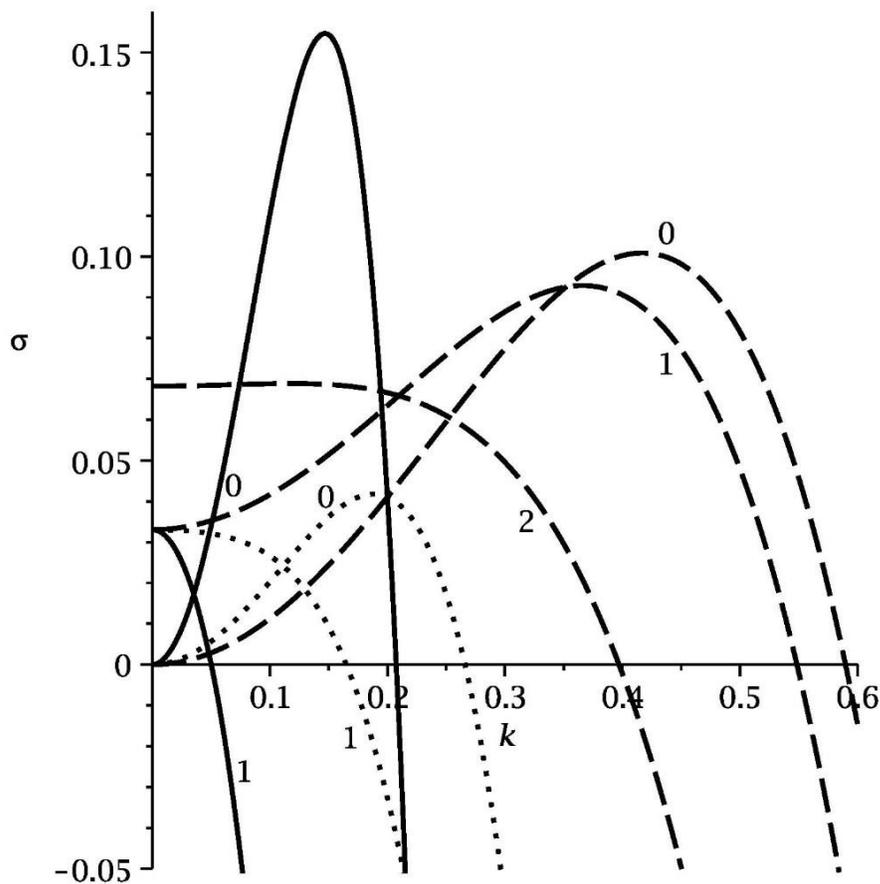


Figura 5.14 Razón de crecimiento versus número de Onda k para $Ma=20$, para ($S=1$, $De=0.2$ y $\delta=5$ y para ($Cr=0.001$ línea continua, $Cr=0.01$ línea punteada, $Cr=0.001$ rayas)

5.4 Razón de Crecimiento vs Número de onda para una capa líquida en ausencia de gravedad y $\delta=10$

Para concluir este capítulo, se muestra el comportamiento de la razón de crecimiento de las perturbaciones en ausencia de gravedad cuando el radio es $\delta=10$.

Ya hemos visto que los casos viscoelásticos puros (capítulo 3) y en el caso con calentamiento del fenómeno capilar (capítulo 4), mientras se cubran las condiciones de longitud de onda larga, aparecen más modos azimutales al incrementar el radio del cilindro. Con la ecuación 3.11 en el capítulo 3 se determinó que existe un radio mínimo para que aparezcan los modos azimutales. A continuación analizamos las gráficas de razón de crecimiento, para el radio $\delta=10$, y 2 casos de números de $Ma= (0 \text{ y } 20)$. El primer caso que mostramos es cuando número de $Mi=0$.

Gráficas de Razón de Crecimiento, para $\delta=10$, con número de Marangoni = 0

EL caso cuando $Mi = 0$, y el radio $\delta=10$, y $De=0.01$, se muestra en la figura 5.15. Como se observa para $Cr=0.001$ solo el modo axial aparece y su razón de crecimiento alcanza un valor máximo de 0.085. En este caso no aparece modo azimutal. En el caso con $Cr=0.01$ el valor de la razón de crecimiento máximo $\sigma_{max}=0.001$ y los modos azimutales no aparecen. El comportamiento es muy parecido al caso cuando el radio $\delta=5$ que se mostró en la figura 5.12, solo que el valor del número de onda crítico es $k_{cr}=0.1$, comparado con el valor de $k_{cr}=0.2$ cuando $\delta=5$.

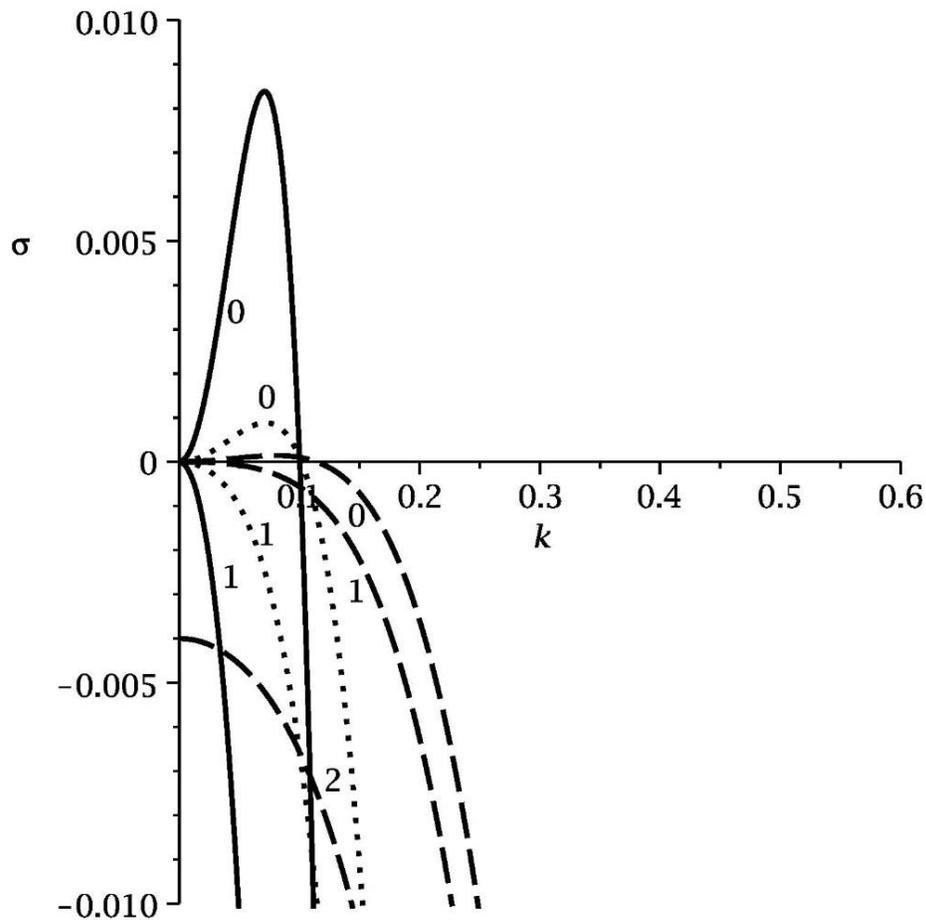


Figura 5.15 Razón de crecimiento versus número de Onda k para $Ma = 0$, para $S = 1$, $De=0.2$ y $\delta=10$. ($Cr=0.001$ línea continua, $Cr=0.01$ línea punteada, $Cr=0.1$ línea a rayas)

El caso cuando se incrementa la elasticidad y $De=0.2$ se muestra en la figura 5.16. Cuando el número de $Cr=0.001$, solo el valor de la razón de crecimiento máximo aumenta y vale $\sigma_{\max}=0.095$ y el modo azimutal no aparece. Para el número de $Cr=0.01$ aumenta la razón de crecimiento del modo axial comparado con el caso de $De=0.01$, pero el modo azimutal sigue siendo despreciable.

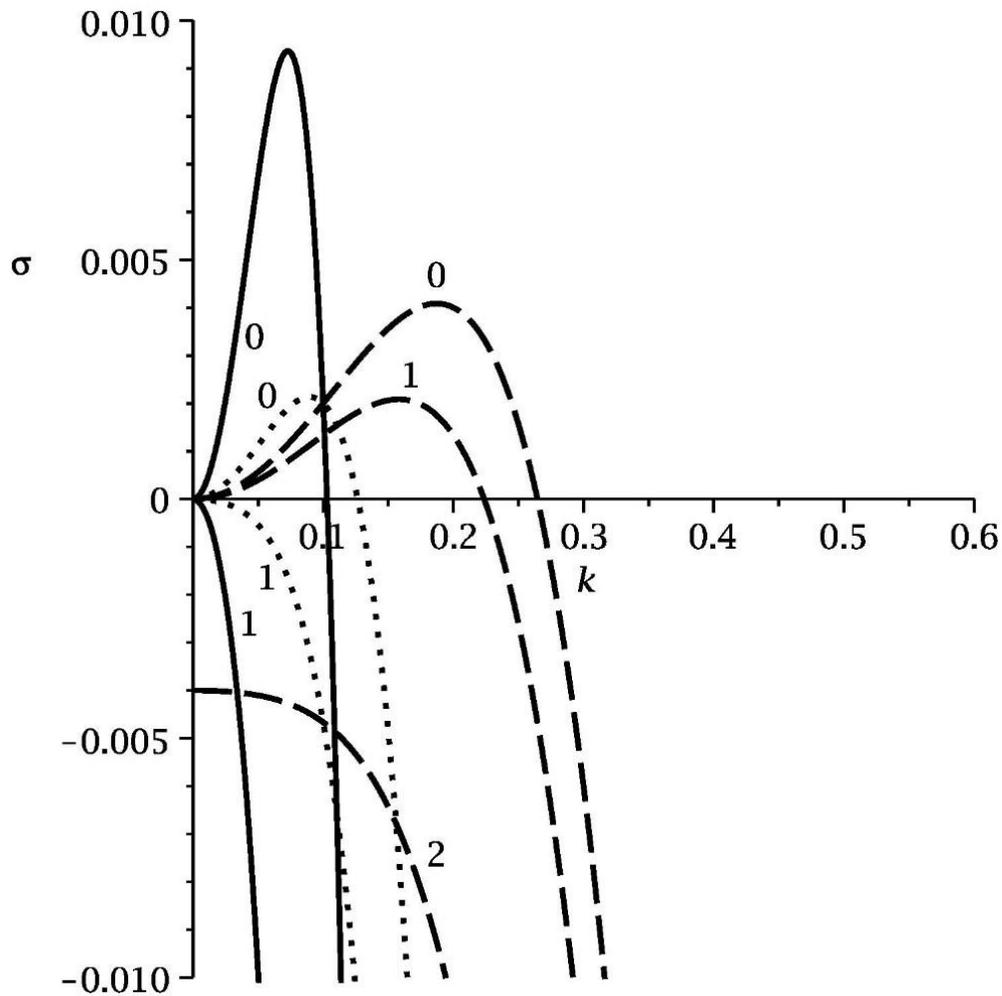


Figura 5.16 Razón de crecimiento versus número de Onda k para $Ma=0$, se fijan los parámetros $S=1$, $De=0.2$ y $\delta=10$.

Donde se notan más los cambios es cuando se fija $Cr=0.1$. En este caso tanto el modo axial como el azimutal con $n=1$ muestran una mayor razón de crecimiento que en el caso cuando $De=0.01$. El modo axial alcanza una máxima razón de crecimiento $\sigma_{\max} = 0.004$. Pero más notable es que el modo azimutal, alcanza una razón de crecimiento mayor $\sigma_{\max}=0.002$. La curva de razón de crecimiento para $n=1$ no alcanza una razón de crecimiento tan alta, pero crece cerca a la curva del modo axial para este valor de $Cr=0.1$. A continuación veremos cómo se comportan estas gráficas cuando se incrementa el número de Marangoni, debido a un mayor calentamiento.

La relevancia de que a números de Marangoni mayores, los modos azimutales, aparezcan con mayores valores de razón de crecimiento y en un rango de números de onda

amplio y cercano al rango del modo axial es importante en la combinación no lineal de los modos.

Gráficas de Razón de Crecimiento, para $\delta=10$, con número de Marangoni=20

EL último caso que mostramos es para el valor de radio $\delta=10$, y un número de $Ma=20$, manteniendo los demás parámetros constantes ($S=1$, $De=0.01$) para el caso de baja gravedad. La figura 5.17 muestra las gráficas de razón de crecimiento vs número de onda para este caso con $Ma=20$.

El primer caso con $Cr=0.001$ muestra un modo axial predominante con $\sigma_{max}=0.015$. Para este caso el modo azimutal $n=1$ aparece con valor de $\sigma_{max}=0.008$, pero decrece inmediatamente y se vuelve cero en $k_{crit}=0.03$. Los demás azimutales no aparecen para este número de crispación.

Cuando el número de $Cr=0.01$, tanto el modo axial como el acimutal con $n=1$ alcanzan valores parecidos en su razón de crecimiento. EL modo axial tiene una razón de crecimiento máximo $\sigma_{max}=0.01$. El modo acimutal inicia con una razón de crecimiento mayor a números de onda pequeños, pero es rebasado por el modo axial cuando $k=0.11$. De cualquier forma es posible que los dos modos interactúen de forma no lineal.

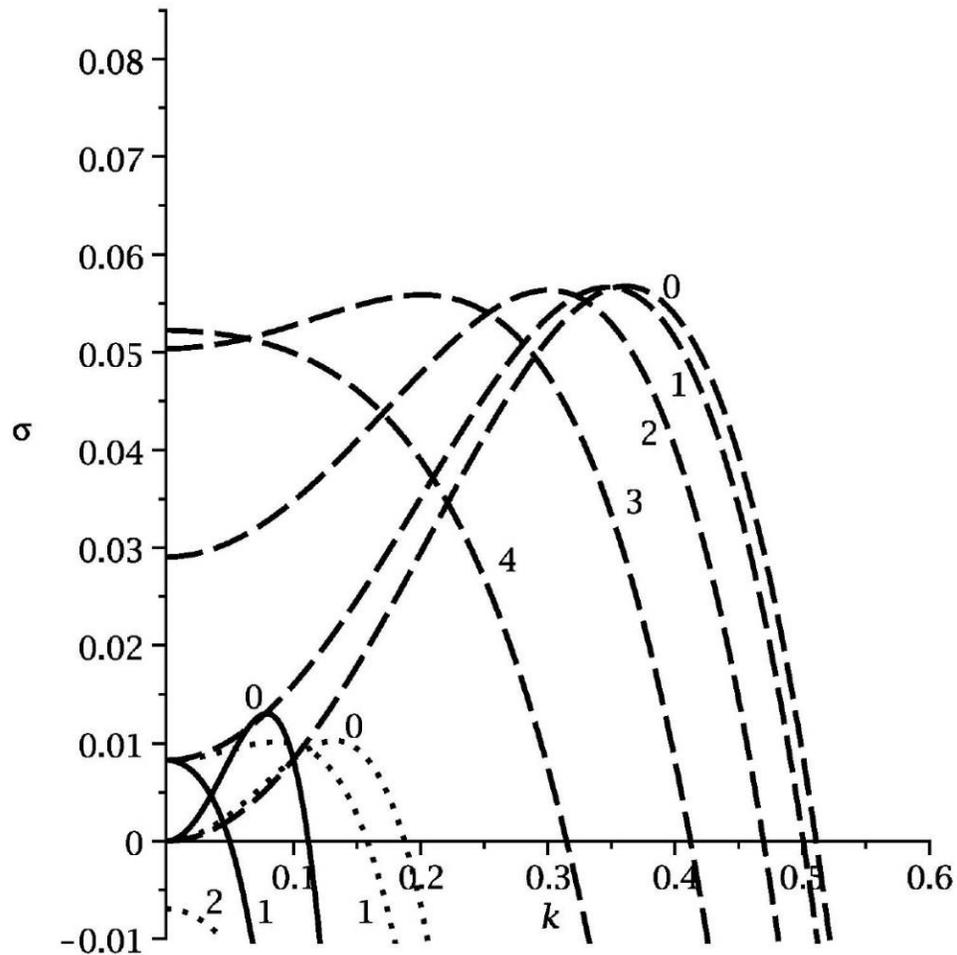


Figura 5.17 Razón de crecimiento versus número de Onda k para $Ma=20$, se fijan los parámetros ($S=1$, $De=0.01$ y $\delta=10$)

El caso cuando $Cr=0.1$ es más interesante. En este caso, el modo con mayor razón de crecimiento es el modo axial, con $\sigma_{\max}=0.015$. EL modo acimutal con $n=1$, comienza con una razón de crecimiento mayor $\sigma=0.004$ y crece de forma casi paralela al modo axial. Este modo acimutal sigue teniendo mayor razón de crecimiento hasta el cruce del modo axial que sucede en $k=0.35$. Lo notable es que también aparecen los modos azimutales $n=2$ y $n=3$ que tienen valores máximos de razón de crecimiento igual a 0.014 y 0.013 respectivamente. A diferencia del radio $\delta=5$, con $\delta=10$, aparecen más modos azimutales y estos pueden tener una magnitud mayor a la del modo axial, para números de onda pequeños.

Capítulo 6. Conclusiones al trabajo sobre estabilidad de flujos de capas visco elásticas en cilindros, con y sin calentamiento

Después de haber presentado los resultados del análisis de la ecuación de evolución de la onda superficial no lineal para los tres casos de interés de nuestro trabajo, es decir:

1. Flujo descendente de un fluido viscoelástico sobre una superficie cilíndrica sin calentar (caso isotérmico puro)
2. Inestabilidad de una capa líquida de un fluido viscoelástico que desciende sobre una superficie con calentamiento, por lo que la condición no isotérmica modifica las condiciones de balance de esfuerzos tangenciales y la estabilidad del flujo, cuando $Re > 0$.
3. Inestabilidad de una capa líquida en un cilindro vertical, en ausencia de gravedad. Este caso se analiza haciendo tender a cero el número de Reynolds, y el crecimiento de las perturbaciones tienen origen en el gradiente de temperatura en la superficie de la capa líquida y los esfuerzos tangenciales que provoca.

A continuación presento las conclusiones que obtengo de cada uno de estos casos, tanto a nivel físico de cómo cambia la estabilidad del fluido con los diferentes parámetros del flujo, y las implicaciones que esto tiene en la física del fenómeno y en las posibles aplicaciones.

6.1 Conclusiones de la estabilidad del flujo de una capa líquida viscoelástica descendiendo sobre un cilindro, sin calentamiento (caso Isotérmico)

A continuación se presentan las conclusiones que se alcanzaron con el análisis del flujo de una capa delgada de fluido visco elástico que desciende sobre un cilindro vertical (isotérmico). Cada caso que se muestra se presenta analizando la ecuación de evolución de onda del flujo de la capa líquida (para caso isotérmico y no isotérmico).

De la ecuación de evolución de onda (3.5) se obtuvo una ecuación que describe la razón de crecimiento (3.8) que nos sirve para analizar tanto el flujo de una capa líquida en el caso isotérmico, como el caso no isotérmico. Para el caso viscoelástico puro o isotérmico, se eliminaron los términos que dependen de Ma y Pr , ya que al no haber perfil de temperatura estos términos no aparecen.

Para el caso viscoelástico puro se obtuvieron las siguientes condiciones.

- Las curvas de razón de crecimiento muestran curvas en que se incrementa el valor de la razón de crecimiento hasta un valor máximo σ_{max} . Después de este valor máximo comienzan a decrecer hasta tomar un valor cero en el número de onda k_{cr} . El modo que presenta el mayor valor de razón de crecimiento es el modo axial. Para el caso analizado también ($S=1$, $Re=1$) y sin elasticidad $De=0$, aparecen tres modos azimutales. El primer modo azimutal crece cercano en magnitud al modo axial, pero nunca alcanza a rebasar el máximo valor de crecimiento del modo axial principal.

En el caso con elasticidad cero, $De=0.0$, el modo axial tiene el máximo crecimiento y los modos azimutales solo aparecen con $n=1, 2$ y 3 . Y su magnitud de razón de crecimiento de los modos azimutales es baja relativamente comparada con la del modo axial.

- Cuando se incrementa la elasticidad del fluido, con $De=1.0$, aparecen más modos azimutales en las gráficas de razón de crecimiento, debido al aumento de la elasticidad y del número de Deborah. Cuando aumenta la elasticidad se incrementa la razón de crecimiento de los modos azimutales. El modo azimutal $n=1$ alcanza una menor amplitud que el modo axial, pero crece de forma paralela a este modo, y su valor de razón de crecimiento es muy cercano en algunas zonas de número de onda pequeño.
- También aparecen modos azimutales que no aparecían cuando el flujo es newtoniano, y la amplitud de los modos que si aparecían con $De=0$, es mayor a números de onda similares al de máximo crecimiento del modo axial.

Como se puede observar conforme aumenta la elasticidad del fluido la razón de crecimiento de los modos azimutales se incrementa. Por lo tanto se puede esperar que haya una interacción no lineal de los modos axiales con estos modos azimutales.

Esta interacción no lineal ha sido estudiada pero sola para flujos de capas líquidas newtonianas descendiendo en cilindros pero no para capas de fluidos viscoelásticos. En su trabajo Schlang y Sivashinsky (1982) encontraron que el flujo que se desarrolla al final, no está formado solamente por el modo axial, sino también por los modos azimutales. Estos autores trabajaron y obtuvieron un radio crítico mínimo para que aparecieran azimutales. En este trabajo también obtuvimos una ecuación para el radio crítico (Eq. 3.11) en función del número de Reynolds y el número de Deborah, para el caso de flujos viscoelásticos.

Como se puede observar en esta ecuación, existe un radio crítico a partir del cual aparecen los azimutales. Además este radio crítico se incrementa si se aumenta el número de Reynolds o el número de Deborah. Por lo tanto al aumentar la elasticidad del fluido es necesario un número de Reynolds menor para que aparezcan los azimutales.

El hecho de que aumente la razón de crecimiento de los modos azimutales a números de onda pequeños y se acerquen al valor de la razón de crecimiento del modo axial, indica que hay una mayor probabilidad de que estos modos aparezcan en el flujo desarrollado de la capa líquida en el cilindro aguas abajo. Cheng Y Chang (1992), realizaron un estudio de capas líquidas newtonianas, donde estudian la estabilidad del flujo axial y de los modos subsecuentes azimutales. En su estudio plantean un análisis en que supone una solución del flujo compuesta por 6 modos, el modo axial con $k=k_{\max}$, y un modo con número de onda con $k=2k_{\max}$, donde k_{\max} es el número de onda de máximo crecimiento. Los otros cuatro modos se obtienen combinando las componentes del modo axial más un modo azimutal $n=1$ a cada modo con número de onda k_{\max} , y $2k_{\max}$.

El objetivo de su análisis es encontrar si los modos con k_{\max} y $2k_{\max}$, son estables a los modos azimutales que pueden interactuar con estos modos axiales. Si los modos propuestos en su análisis son estables el modo azimutal se suprime, pero si son inestables los modos azimutales se suman y forman parte de la solución final en el flujo. Esta hipótesis se ha observado también en experimentos.

En este trabajo por razones de tiempo y extensión del trabajo, solo se obtuvo la inestabilidad de cada modo azimutal y su relación con el modo axial, para el flujo de una

capa líquida de fluido viscoelástico. Sin embargo el estudio de la inestabilidad del flujo de una capa líquida de fluido viscoelástico descendiendo sobre un cilindro considerando los modos azimutales no había sido completamente resuelto en la literatura.

Además en esta tesis también se resolvió el problema Termocapilar, que incluye el calentamiento del cilindro y un perfil de temperatura en la capa líquida que modifica las condiciones de esfuerzos tangenciales en la superficie libre, y por tanto cambia las condiciones de estabilidad.

6.2 Conclusiones de la estabilidad del flujo de una capa líquida viscoelástica descendiendo sobre una superficie cilíndrica vertical, (caso No Isotérmico).

Después de estudiar el caso del flujo de una capa líquida visco elástica sobre un cilindro vertical con temperatura constante y sin calentamiento, en el capítulo 4 estudiamos el caso cuando se aplica calentamiento en el cilindro, y por lo tanto se forma un perfil de temperatura en la capa líquida y también en la superficie libre de la capa líquida.

En el caso no isotérmico cuando se aplica calentamiento en la pared cilíndrica interior de nuestro problema se obtuvo el perfil de temperatura, resolviendo la ecuación de la energía con un método de perturbación a primer orden.

Este perfil de temperatura provoca gradientes de temperatura los cuales generan esfuerzos tangenciales, que influyen en las ecuaciones de momento y por tanto, cambia la estabilidad de este tipo de fenómeno conocido como problema termocapilar. Para obtener el comportamiento lineal de la estabilidad hicimos un análisis lineal de la ecuación de evolución de onda. Para este caso utilizamos la ecuación (4.1) pero tomando en cuenta los términos debido al fenómeno termocapilar que dependen del número de Marangoni, el número de Prandtl y el número de Biot.

Como se puede ver en la ecuación (4.1) este término que depende del número de Marangoni, incluye una parte que varía con el índice n que depende del modo azimutal. Este término es desestabilizador, por lo que cuando existe calentamiento y aumenta el número de Marangoni, hace crecer la magnitud del modo azimutal y por tanto se vuelve más inestable sobre todo a números de onda pequeños ($0 < k < 0.3$). Esto se notó sobre todo en el análisis de las gráficas de razón de crecimiento.

Primero se generaron gráficas de estabilidad neutral que mostraban el número de onda crítico en función del número de Reynolds. Las gráficas de estabilidad neutral se generaron para dos valores de radio: $\delta=5$ y $\delta=10$.

Aquí resumimos las conclusiones cuando $\delta=10$. Se encontró que los resultados dependen en primer término del número de Marangoni, y en segundo grado del número de Deborah. El fenómeno cuando $Ma=0$, muestra que a bajos números de Re, solo aparece el modo axial y se suprimen los modos azimutales. Conforme aumenta el número de Re a valores de $Re=0.03$ para el caso estudiado de $De=0.01$, aparece un primer modo azimutal. Las curvas para los modos azimutales con $n=2$ y $n=3$, solo aparecen en las gráficas para valores mayores a $Re>0.2$ en los casos estudiados.

Una conclusión es que cuando no existe calentamiento y $Ma \sim 0$, los modos azimutales generalmente se suprimen a números de Reynolds pequeños. Por lo tanto cuando $Ma=0$, y a bajos números de Reynolds es común que se supriman los modos azimutales, y estos aparecen conforme aumenta el número de Reynolds. Otra conclusión que se obtuvo para $Ma=0$, es que cuando se incrementa la elasticidad del fluido, aumenta la inestabilidad. El efecto de aumentar el número de Deborah y por tanto la elasticidad del fluido, fue que los modos azimutales aparecen a menor número de Re, y además aumenta la inestabilidad, al tener valores de número de onda Crítico mayores para las mismas condiciones de número de Re.

Conforme aumenta el número de Marangoni, por ejemplo para $Ma=1$, se incrementa la inestabilidad y el valor de k_{cr} para el modo axial aumenta. Por tanto el flujo de una capa líquida viscoelástica se desestabiliza en mayor grado cuando se aumenta el número de Marangoni. Las gráficas con número de $Ma=1$, mostraron que en este caso, el modo axial sigue siendo más predominante, para cualquier número de Re. Pero en este caso, aparecen los modos azimutales ($n=1, 2, 3$), incluso para valores de Re pequeños. El valor de número de onda k_{cr} es mayor y aumenta conforme Re se va incrementando.

En este caso también aumenta la inestabilidad cuando aumenta el número de De (mayor elasticidad del fluido), y esto se refleja en que las gráficas muestran valores de número de onda crítico mayores. Conforme aumenta más el número de Marangoni a valores de $Ma=2$, se notó mayor inestabilidad y los valores de k_{cr} para cada modo

aumentaron. En esta gráfica 4.7 se pueden apreciar las conclusiones que acabamos de mencionar.

A continuación resumiré las conclusiones obtenidas de este flujo de las gráficas de razón de crecimiento vs número de onda. Se observaron dos comportamientos característicos. En el caso sin calentamiento, por ejemplo cuando $Ma=0$, se nota mayor razón de crecimiento conforme aumenta el número de Re . Esto se puede apreciar en la ecuación 4.1 en el último término que depende de Ma . Como $Ma \rightarrow 0$ este último término tiene poca influencia en la inestabilidad, y por tanto este término que influye en los modos azimutales se suprime y por tanto solo aparece el modo axial, y un modo azimutal con $n=1$. En cambio cuando aumenta el número de Marangoni, el término que depende de Ma , se incrementa, y al tener Re en el denominador este término es más relevante para números de Re pequeños. Por lo tanto como se notó en las gráficas de razón de crecimiento, las curvas para Re pequeños ($Re=0.01$) presentan mayores razones de crecimiento que para Re mayores ($0.05 < Re < 0.1$). La otra conclusión que también se observó fue que a números de Marangoni mayores, aparecen más modos azimutales y estos desarrollan una mayor razón de crecimiento.

En este flujo la conclusión más importante cuando se incrementa el número de $Ma=1$ o $Ma=2$ en este tipo de flujo, es que la razón de crecimiento de varios modos azimutales ($n=3, 2, 1$) es mayor que la del modo axial principal en un rango considerable de números de onda ($0 < k < 0.3$). Es decir que hay un rango o zona de valores del número de onda donde los modos azimutales si pueden tener mayor influencia que el modo axial en el flujo tridimensional total. Es posible fijar el número de onda del flujo con un chorro de aire de número de onda fijo, en una región de valores del número de onda k , donde los modos azimutales tienen mayor relevancia, y de esta manera hacerlos aparecer en el flujo y combinarse con el modo axial. El resultado del flujo sería una onda compuesta por perturbaciones con modo axial y modos azimutales.

Cuando el $Ma=0$, solo entran en juego las fuerzas viscosas, de inercia, y las fuerzas elásticas. En este caso, como ya se vio en el capítulo 3 aumenta la inestabilidad al aumentar el número de Deborah. En este caso, para los tres números de Reynolds analizados, solo aparecieron dos modos inestables, con razón de crecimiento mayor que cero, el modo axial y el modo azimutal $n=1$. . A medida que se incrementó el número de Reynolds aumenta la inestabilidad, alcanzo razones de crecimiento mayores y los números

de onda críticos también aumentaron. Lo que es notable es que el modo azimutal $n=1$ crece con valores de razón de crecimiento cercanos a los del modo axial.

Cuando aumenta el número de Marangoni a un valor de $Ma=1$ y 2 aumenta la inestabilidad del modo axial y del modo azimutal $n=1$. Esto quiere decir que la aparición de esfuerzos tangenciales debido a la temperatura hace más inestable el flujo, sobre todo en el caso de los modos azimutales. Las graficas con $Ma=1$, muestran también más modos azimutales ($n=1,2,3$) para los tres casos de números de Re analizados.

Además las gráficas que muestran mayor razón de crecimiento son las de números de Re pequeño ($Re=0.01$). Las gráficas con números de Re mayor (0.05 y 0.1) en cambio muestran menor razón de crecimiento. El efecto del aumento de la elasticidad en las gráficas para $Ma=1$, y 2 , es también que provocan mayor inestabilidad, y mayor razón de crecimiento de los modos axiales y azimutales que aparecen el flujo.

Otra conclusión de esta tesis es que al aumentar el número de Marangoni, los números azimutales se vuelven más inestables, y aparecen a números de onda pequeños, o longitud de onda larga. No solo se incrementa su magnitud como el caso viscoelástico puro o isotérmico, sino que también su razón de crecimiento es mayor que la del modo axial a números de onda pequeños, y hasta un valor cercano al número de onda de máximo crecimiento k_{max} , del modo axial.

Como comente en las conclusiones del caso viscoelástico isotérmico, el hecho de que los modos azimutales tengan una razón de crecimiento mayor y se acerquen a la magnitud de la razón de crecimiento del modo axial, hace más probable que el modo axial y los modos azimutales interactúen en forma no lineal. Como se concluyó en el trabajo de Schlang y Sivashinsky (1982), los modos azimutales forman parte de la solución y no se pueden eliminar a priori de una solución de un flujo de una capa visco elástica descendiendo sobre un cilindro. En algunos trabajos como el de Chang, Chen y Lai (2001), se supone que el flujo es asimétrico, y la solución que se obtiene de la estabilidad no lineal, supone que los modos azimutales no aparecen o no interactúan con el modo axial. En mi tesis concluyo que los modos azimutales si tienen influencia en el flujo global de la capa líquida y si deben de ser tomados en cuenta en el flujo desde el planteamiento de la solución.

Cheng Y Chang (1992), realizaron un estudio de capas líquidas newtonianas, donde estudian la estabilidad del flujo axial y de los modos subsecuentes azimutales. En su estudio plantean un análisis en que supone una solución del flujo compuesta por 6 modos, el modo axial, y un modo con número de onda con $k = 2 * k_{max}$, donde k_{max} es el número de onda de máximo crecimiento. Los otros cuatro modos se obtienen agregando un número de onda azimutal positiva y negativa a cada modo con k_{max} , y $2 k_{max}$. Su análisis fue hecho para el flujo de una capa líquida de fluido newtoniano.

En mi opinión creo que nuestro estudio es relevante y novedoso porque no se había hecho un estudio de la estabilidad de capas líquidas de fluidos visco elásticos con el modelo de Oldroyd B, tomando en cuenta los modos azimutales en la solución. Además se agregó la complejidad de agregar el calentamiento y el gradiente de temperatura en la capa líquida, lo que hizo aparecer el número de Ma en el fenómeno. Por razones de tiempo, no se pudo realizar un análisis como el realizado por Cheng y Chang(1992), el cual podría determinar con que relevancia los modos azimutales aparecen finalmente cuando el flujo se establece en el cilindro, y que tanto modifican el comportamiento del modo axial.

Es probable que si haya esta interacción no lineal, ya que en experimentos se ha observado que la longitud de onda del flujo estable tiene un valor de número de onda mayor al número de onda de máximo crecimiento para flujos newtonianos. Un análisis de este tipo suponiendo una solución en series de Fourier compuesta por la onda axial, más un cierto número de modos azimutales, que al final se pueden separar resolviendo la ecuación de evolución de onda (análisis leve no linear), se podría realizar y obtener resultados prometedores. Sugiero este trabajo, como una investigación futura o un trabajo posdoctoral.

6.3 Conclusiones de la Estabilidad del Flujo de una capa líquida Visco elástica que cubre una pared cilíndrica con gravedad reducida.

A continuación daré las conclusiones de la estabilidad de las perturbaciones que aparecen en la superficie de una capa líquida esparcida sobre una superficie vertical en condiciones de baja o nula gravedad. En condiciones de baja gravedad, al reducir la fuente que origina el flujo principal en la dirección del eje axial z, se puede simular o replicar estas condiciones, haciendo el número de Reynolds tender a cero: $Re \rightarrow 0$.

Para establecer estas condiciones en la ecuación de evolución de onda (5.1) se estableció que la velocidad del flujo principal fuera $Wo=\alpha/ho$. Al definir la velocidad principal de esta manera, se estableció una condición que se debe cumplir de $PrRe=1$.

Al usar estas condiciones, los números adimensionales que aparecen en los otros términos de la ecuación de evolución de onda, se transformaron de la siguiente forma. Por ejemplo S/Re se transformó en el número de crispación definido en el capítulo 5. Dicho número de Crispación es la razón de las fuerzas viscosas y de inercia, entre las fuerzas de tensión superficial. En general como se explicara a continuación la inestabilidad aumenta cuando se incrementa el número de Marangoni, pero este crecimiento es mayor cuando se fija un mayor número de Crispación. El número de crispación es el detonante o catalizador para que aumente la inestabilidad del sistema. También el número de Deborah, se transforma al definir la velocidad de otra forma, y usamos en la ecuación el número de Deborah dividido por Prandtl (De/Pr).

A continuación damos las conclusiones acerca de las gráficas de estabilidad neutral, para un radio $\delta=5$, y para dos condiciones de número de $De=(0.01)$. Las gráficas de estabilidad neutral nos mostraron el número de onda crítico en función del número de Marangoni. Cuando se analizaron las gráficas con número de $Cr=0.01$, el número de onda crítico mostro un crecimiento pequeño con el número de Marangoni y solo aparecieron el modo axial principal y un modo acimutal con $n=1$, en el rango analizado de $0 < Ma < 40$. No se usan números de Marangoni mayores porque estamos limitados por propiedades de los líquidos reales. Un comportamiento similar se apreció con $Cr=0.001$.

En cambio cuando se graficó las curvas de estabilidad neutral con $Cr=0.1$, el número de onda crítico mostro un crecimiento mayor con el número de Marangoni. Es decir al aumentar el número de Crispación aumenta la inestabilidad, y aumenta el rango de valores de K donde las perturbaciones son inestables y por tanto aumenta el número de onda crítico k_{cr} . Otro efecto que se nota, es que aparecen dos modos azimutales extras en las gráficas de estabilidad neutral. Aparece un modo acimutal con $n=2$ a partir de $Ma=10$ y otro modo acimutal con $n=2$, para $Ma > 21$. Además estos modos azimutales muestran una curva creciente del número de onda crítico conforme aumenta el número de Marangoni.

El efecto de aumentar la elasticidad del flujo, se refleja en mayor inestabilidad, ya que las curvas de estabilidad neutral muestran un número de onda crítico mayor para mismas condiciones de número de Marangoni, y para los mismos azimutales.

También se analizaron las gráficas de estabilidad neutral cuando el radio adimensional $\delta=10$. Las gráficas se comportaron de una forma similar, es decir para número de crispación bajo, se mostró poco crecimiento del número de onda crítico k_{cr} con el número de Marangoni, es decir se notó poca inestabilidad. Cuando se incrementó el número de crispación se notó una mayor inestabilidad y mayor crecimiento de k_{cr} con Ma .

Sin embargo a mayor radio, también aparecieron más modos azimutales tanto para número de Crispación pequeño ($Cr=0.01$), como para números de crispación mayor ($Cr=0.1$). Para número de $Cr=0.01$ apareció un modo acimutal extra con $n=1$. Y para número de Crispación $Cr=0.1$ apareció 4 modos azimutales $n=1,2,3$ y 4. Por lo tanto las perturbaciones tomaron más modos azimutales y el flujo se volvió más complejo. De la misma forma que para radio menor, con mayor radio cuando se aumenta la elasticidad del fluido $De=0.2$, aumenta la inestabilidad del modo axial y de los modos azimutales.

Finalmente se dan las conclusiones acerca de la razón de crecimiento de las perturbaciones de una capa líquida en condiciones de baja gravedad. En este fenómeno, no existe una fuerza de gravedad que cause que la capa se deslice hacia abajo con una velocidad Wo , y la inestabilidad es solo causada por las fuerzas tangenciales de tensión superficial causados por el gradiente de temperatura en la capa líquida.

La inestabilidad de estas perturbaciones en condiciones de baja gravedad dependió de dos factores principales, del número de Marangoni y del número de Crispación. También se notó que el fenómeno es influido por la elasticidad del fluido, es decir por el número de Deborah. Se dan las conclusiones para dos casos de radio analizados, para $\delta=5$ y para un radio mayor adimensional $\delta=10$.

Para el primer caso $\delta=5$, se observó que con número de Marangoni pequeño $Ma=0$ o $Ma=1$ (sin calentamiento o con calentamiento leve), solo aparecieron el modo axial principal y el modo azimutal con $n=1$. También se observó que se presenta mayor inestabilidad y mayor razón de crecimiento, con números de crispación pequeños. El modo axial presenta mayor razón de crecimiento mientras el modo azimutal con $n=1$, apenas rebasa un valor arriba de cero y decrece su valor a cero en $k_{cr}=0.20$. Al aumentar el

número de Deborah aumenta la inestabilidad en un valor pequeño para el modo axial, pero sobre todo el modo azimutal toma un valor relativamente mayor,

Conforme aumenta el número de Cr a valores de ($Cr=0.01$ o $Cr=0.1$), se reduce la inestabilidad y el valor de razón de crecimiento disminuye para ambos casos, en mayor porcentaje para el número de $Cr=0.1$. En estos dos casos tiene mayor relevancia el modo axial principal, mientras que el modo azimutal apenas aparece con un valor de razón de crecimiento mayor que cero, e inmediatamente se reducen a cero. Al aumentar la elasticidad del fluido se logra que los modos axiales principales tengan mayor inestabilidad aumentando su razón de crecimiento y que los modos azimutales se noten un poco más en las gráficas, sin ser muy notable su aumento.

El caso cuando se aumenta el número de Marangoni a valores más grandes $Ma=10$ o $Ma=20$ muestra conclusiones más interesantes. Cuando se tiene número de $Ma=10$ y además números de Cr pequeños se presentan la mayor inestabilidad y mayores razones de crecimiento. Con $Cr=0.001$, aparecieron un modo axial y un modo azimutal. El modo axial presenta razón de crecimiento máxima mayor. El modo azimutal con $n=1$ aparece con mayor razón de crecimiento en un rango pequeño. El modo axial rebasa al modo azimutal para estas condiciones, y el punto de cruce se puede calcular analíticamente.

A medida que el número de crispación aumenta a valores de $Cr=0.01$ o $Cr=0.1$, se reduce la inestabilidad del modo axial y azimutal. Pero en este caso con mayor calentamiento ($Ma=10$), las magnitudes de la razón de crecimiento del modo azimutal $n=1$ es cercana a la del modo axial, aunque el axial tienen mayor magnitud. Además el modo azimutal con $n=1$ aparece con mayor razón de crecimiento en un rango de valores de k ($0 < k < 0.2$). Esto quiere decir que para ciertas condiciones de Marangoni y de número de Crispación hay una rango de número de onda en que los azimutales son más inestables y pueden superar al modo axial.

Al aumentar la elasticidad del fluido ($De=0.2$), para estas condiciones causa que aumente la inestabilidad y razón de crecimiento tanto del modo axial como del modo azimutal, y además el modo axial supera al azimutal por un margen mayor, pero ambos modos se incrementan en comparación con el caso con poca elasticidad $De=0.01$.

Al aumentar más el número de $Ma=20$, se incrementó la inestabilidad para los tres casos de número de Crispacion. Se observaron dos cambios principales. Primero los modos axial y azimutales se volvieron más inestables para las condiciones con número de

$Cr=0.1$ que para $Cr=0.01$. El otro cambio notable que se presenta es que para este número de $Cr=0.1$ aparece otro modo azimutal con $n=2$. En este caso a bajos números de onda, primero predomina el modo $n=2$ hasta un cierto valor de número de onda, y luego el modo $n=1$ supera al modo axial hasta el punto de cruce donde el modo axial supera a ambos modos azimutales. De esta forma hay un rango de valores de $0 < k < 0.25$ en que los modos azimutales adquieren mayor magnitud que el modo axial.

El último caso que analizamos es cuando se tiene un radio mayor δ . Como vimos en el casos viscoelástico puro o isotérmico, y en el caso viscoelástico con calor agregado, al aumentar el radio aparecen más modos azimutales. Pero también se reduce la magnitud de la inestabilidad aunque se presentan más modos azimutales para las mismas condiciones de número de Reynolds, o de Marangoni en el caso termocapilar.

Al introducir mayor radio $\delta=10$. Para el caso cuando $Ma=0$ o $Ma=1$, el modo axial principal tuvo mayor predominio sobre los azimutales. El caso con mayor inestabilidad fue cuando $Cr=0.001$. En este caso apareció con una razón de crecimiento pequeño el modo azimutal. A números de Cr mayores ($Cr=0.01, 0.1$) se redujo la inestabilidad, y solo apareció el modo axial. Los modos azimutales aparecen en $k=0$, pero descienden casi de inmediato a valores de cero y menores a medida que aumenta el número de onda. El efecto de aumentar la elasticidad, fue que incremento la razón de crecimiento del modo axial, pero también hizo que apareciera el modo azimutal con magnitud relativa mayor para $Cr=0.1$.

El comportamiento cambia cuando se incrementa el número de Marangoni. En este caso se presentó la mayor inestabilidad al presentar número de Marangoni mayores ($Ma=20$), y números de crispación más grandes ($Cr=0.1$). En estos casos el segundo término de la ecuación de evolución de onda disminuye con número de Crispación mayor. Como este término es controlador ocasiona que aumenta la inestabilidad el reducir el efecto de este término. Por tanto se presentó mayor inestabilidad con $Cr=0.1$ que con $Cr=0.01$ o 0.1 .

En el caso que $Cr=0.001$, el modo axial principal tuvo mayor relevancia, y el modo azimutal apareció con un valor mayor al modo axial en un pequeño rango de valores de k ($0 < k < 0.05$). Conforme Cr se incrementó a $Cr=0.01$, las razones de crecimiento máxima del modo axial y el modo azimutal se volvieron similares, aunque el modo axial presenta el

valor de razón de crecimiento mayor. También el modo azimutal con $n=1$ fue mayor en un rango pequeño de número de onda ($0 < k < 0.1$).

Finalmente el caso cuando $Cr=0.1$ y con mayor elasticidad $De=0.2$, presento mayor razón de crecimiento e inestabilidad, Además se presenta un comportamiento muy interesante, y es que aparecen 4 modos azimutales en el rango de valores de número de onda valido para nuestra aproximación. Se presentan los modos azimutales $n=1,2,3$ y 4. En este caso a número de onda $k=0$, el modo azimutal $n=4$ muestra el valor mayor de razón de crecimiento., Conforme aumenta el número de onda, el modo azimutal $n=3$ rebasa al modo $n=4$, luego el modo $n=2$ rebasa al modo $n=3$, y así sucesivamente, hasta que el modo axial rebasa al modo azimutal con $n=1$. Algo notable es que el modo $n=1$ inicia con mayor razón de crecimiento y crece en forma paralela a la curva del modo axial.

Una conclusión final es que para este caso con Marangoni mayor, y Crispación pequeño, los modos azimutales tienen más relevancia en un rango de valores de número de Onda ($0 < k < 0.4$). Como estos modos tienen mayor razón de crecimiento en este rango es posible que interactúen en la solución no lineal con el modo axial. La aparición de estos modos azimutales en la solución de flujo permanente dependerá de que el modo axial sea estable a estas perturbaciones azimutales. Como estas perturbación tienen una mayor magnitud en estos números de onda, es de esperarse que si aparezcan en el flujo tridimensional total y se combinen con el flujo axial en la solución final.

AGRADECIMIENTOS.

Creo que en esta tesis trate de resolver las principales preguntas que existen sobre este tema fascinante de investigación, y que considero de relevancia en el futuro. También trate de entrar a fondo en el modelado matemático necesario para obtener las ecuaciones de evolución de onda, que sirvieron para generar las gráficas y resultados analíticos. Tal vez pude hacer mayor uso de análisis numérico para generar más resultados, pero las restricciones del tiempo al realizar la tesis durante un buen tiempo, en paralelo con un trabajo en la Industria me limitaron un poco en este aspecto.

Agradezco a la UNAM la oportunidad de haberme formado en sus aulas como Ingeniero, pero sobre todo como ser humano. Agradezco a mis profesores de la Facultad de Ingeniería, del Instituto de Investigaciones en Materiales y profesores de la Facultad de Ciencias de los que obtuve conocimientos para poder abordar esta investigación doctoral, pero sobre todo por su experiencia que me transmitieron. Ellos me ayudaron a forjar el carácter para ser un Ingeniero eficiente en la Industria, pero también motivaron la curiosidad y determinación de aprender conceptos nuevos más interesantes y profundos en la maestría y en este Doctorado.

Agradezco sobre todo al Doctor Dávalos que tuvo la paciencia de seguir dirigiendo mi trabajo, y darme guías con las que pudiera tener mejor comprensión del tema de investigación. Me ayudo a plantear los problemas de manera más formal y con el rigor científico en temas de investigación. Agradezco al Dr. Roberto Zenit por sus recomendaciones para concluir esta tesis y en mi formación durante la maestría y el doctorado, al igual que al Doctor Chavez que me dio algunas de las clases más interesantes en reología y procesamiento de polímeros. Agradezco a los tres miembros de mi comité tutorial, ya que me transmitieron muchos de los conocimientos que manejo de mecánica de fluidos y fenómenos de transporte.

Finalmente agradezco a mi familia haberme apoyado tanto al escribir esta tesis, como durante mi carrera. Tanto mis padres Miguel Moctezuma Cástillo como Trinidad Sánchez López me ayudaron en momentos algo complicados de estos años y mis hermanos, no menciono a todos, pero Martha y Alberto han sido una motivación para que siga adelante y concluya esta tesis y siga con mi carrera. De hecho esta tesis fue escrita en la computadora de mi hermana pues la mía fallo a mitad del camino.

Y claro un abrazo a Jorge Moctezuma Szczepaniak, gracias por tener la paciencia con tu Tata y espero que pronto salgamos a correr o dar vueltas en bicicleta. Además parece que tiene futuro en las matemáticas, ya que su abuelo Jerzik fue Doctor en Matemáticas así que lo trae en los genes. Por ultimo te agradezco Ewa, tanto en en Polonia como en Bélgica cuando escribí la tesis de maestría me tuviste paciencia y me apoyaste. Eres una mujer muy inteligente y te admiro en muchos sentidos, aunque no estemos juntos. Nos vemos pronto, y abrazos a Jorge Kocham sie.

También agradezco a los sinodales y a mi comité tutorial por haber tenido el tiempo de asesorarme y de de leer esta tesis.

Por mi raza Hablara el Espiritu

Miguel Moctezuma Sánchez

Referencias Bibliográficas:

- [1] Benjamin T. B., “Wave formation in laminar flow down an inclined plane”, *Journal Fluid Mechanics* **2**, 554 (1957).
- [2] Benney, D.J., “Long waves in liquids films”, *Journal of Math. Physics*, **45**, no. 2 , pp 150-155, (1966)
- [3] Ben Radhia R., Corriou J.P., Harmand S. , Ben Jabrallah S., Numerical study of evaporation in a vertical annulus heated at the inner wall, *Int. J. Therm. Sci.*, **50** pp. 1996–2005, (2011)
- [4] Bensalah M. E., Brun, R., “Gravity driven flow of a film in annular space in the presence of a gaseous counter current”, *Journal Theoretical and Applied Mechanics* **5**, no. 2, pp. 217-235, (1986)
- [5] Bird, R. B., Stewart W.E. y Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, 2da. Edición.
- [6] Chen, J. L. and Hwang, C. C., “Nonlinear rupture theory of a thin liquid film on a cylinder”, *J. Colloid Interface Sci.*, vol. **182**, no. 2, pp. 564–569, (1996)
- [7] Cheng M. y Chang H., “Stability of axisymmetric waves on liquid films flowing down a vertical column to azimuthal and streamwise disturbances”, *Chemical Engineering comm.* **118**, pp. 327-340 (1992)
- [8] Cheng, P.J., C.K.Chen y H.Y. Lai, “Nonlinear stability analysis of thin viscoelastic film flow traveling down along a vertical cylinder”, *Non linear dynamics* **24**, pp. 305-332, (2001)
- [9] Christopher D. M., Wang B. X., “Prandtl number effects for Marangoni convection over a flat Surface”, *Int. J. Therm. Sci.* **40**, 564e570, (2001)
- [10] Dávalos-Orozco, L.A. y Busse, F.H., “Instability of a thin film flowing on a rotating horizontal of inclined plane”, *Physical Review E.* **65**, (2002)
- [11] Dávalos-Orozco L.A. y Ruiz Chavarria G., “Hydrodynamic stability of a fluid layer flowing down an inclined plane”, *Physics of Fluids A4* **8**, pp. 1651-1665., (1992)
- [12] Dávalos-Orozco, L.A. y Ruiz-Chavarría G., “Hydrodynamic stability of a fluid layer down a rotating cylinder”, *Physics of Fluids A* **5** **10**, pp. 2390-2404, (1993)
- [13] Dávalos-Orozco, L.A. y You,X., “Three dimensional instability of a liquid layer down a heated vertical cylinder”, *Physics of Fluids* **12**, No 9, (2000)

- [14] Dávalos-Orozco, L.A., “Nonlinear Instability of a thin film flowing down a smoothly deformed surface”, *Physics of Fluids* **19**, no. 7, pp. 074-103, (2007).
- [15] Dávalos-Orozco, L.A., “The effect of the thermal conductivity and thickness of the wall on the nonlinear instability of a thin film flowing down an incline”, *International Journal Non-linear Mechanics* **47**, no. 4, pp. 1-7, 2012
- [16] Dávalos-Orozco, L.A., “Stability of thin liquid films falling down isothermal and non isothermal walls”., *Interfacial phenomena and Heat transfer*, **1**(2), pp. 93-138, (2013)
- [17] Dávalos-Orozco, L.A. , “Nonlinear instability of a thin film flowing down a smoothly deformed thickwall of finite thermal conductivity”, *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, **2**(1): pp. 55-74 (2014)
- [18] Dávalos-Orozco, L. A., “Non linear instability of a thin film flowing down a cooled wavy thick wall of finite thermal conductivity”, *Physics Letters A* **379**, pp. 962-967, (2015)
- [19] Dávalos-Orozco, L.A.,” Competition between stationary and oscillatory viscoelastic thermocapillary convection of a film coating a thick wall”, *International Journal of thermal sciences*, **89**, pp.164-173, (2015)
- [20] Davis, S. H., Thermocapillary instabilities, *Annual Review Fluid Mechanics*, vol. **19**, pp. 403–433, (1987)
- [21] Frenkel, A.L., “Non linear theory of strongly undulating thin films flowing down vertical cylinders. *Europhysics Letter* **18**, no. 7, pp. 583-588, (1992)
- [22] Frenkel, A.L., “On evolution equations for thin films flowing down solid surfaces”, *Physics of Fluids*, A5 **10**, pp. 2342-2346. October (1993)
- [23] Gjevik, B., “Ocurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films”, *Physics Of Fluids*, vol. **13**, no. 8, pp. 1918–1925, (1970)
- [24] Goren, S.L. “The instability of an annular thread of fluid”. *Journal Fluid Mechanics* **12**, 309, (1962)
- [25] Goussis D. A., Kelly R. E., “Surface wave and thermocapillary instabilities in liquid film flow”, *Journal of Fluid Mechanics* **223** , pp. 25, (1991).
- [26] Gupta A.S., “Stability of a viscoelastic líquid film flowing down an inclined plane”. *Journal of Fluid Mechanics*, **28**, part 1, pp. 17-28, (1967)
- [27] Gupta A.S. , Rai L., *Proc. Cambridge Philosophy Society*, **63**, pp. 527 (1967)

- [28] Hasegawa, E., Nakaya, C.: “Stability of a liquid layer flowing down the surface of a vertical cylinder”. *Journal Physics Society of Japan*. **29**, 1634 (1970)
- [29] Homsy, G. L., Geyling, F.T., “A note on instabilities in rapid coating of cylinders”, *AIChE Journal* **23**, no. **4**, pp. 587-590, (1977)
- [30] Hung, C. I., Tsai, J. S., and Chen, C. K., ‘Nonlinear Stability of the thin micropolar liquid film flowing down on a vertical plate’, *ASME Journal of Fluids Engineering* **118**, 498–505, 1996.
- [31] Incropera F. y De Witt D., “Fundamentos de Transferencia de Calor”, 4ª edición, Editorial Prentice Hall, (1999)
- [32] Joo, S.W., Davis, S.H., y Bankoff, S.G., “Long wave instabilities of heated falling films: Two dimensional theory of uniform layers”, *Journal Fluid Mechanics.*, **230**, pp. 117-146, (1991)
- [33] Joo, W.S., “The stability and nonlinear flow developments of a viscoelastic draining film with shear thinning”, *Journal of Non Newtonian Fluid Mechanics*, **51**, p. 125-140. (1994)
- [34] Kabov, O. A., Interfacial thermal fluid phenomena in thin liquid films, *Int. J. Emerging Multidisciplinary. Fluid Science*, vol. **2**, nos. 2–3, pp. 87–121, (2010)
- [35] Kalliadasis, S., “Falling films under complicated conditions”, in Kalliadasis, S. and Thiele, U., Eds., *Thin films of soft matter*, CISM Courses and Lectures no. **490**, pp. 137–190, Springer, Wien, (2007)
- [36] Kapitza P. L., “Wave flow of thin layers of a viscous fluid”, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **18**, 3, 20 (1948).
- [37] Kerchman, V. I. and Frenkel, A. L., “Interaction of coherent structures in a film flow: Simulations of highly nonlinear evolution equation”, *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, vol. **6**, no. 4, pp. 235–254, (1994)
- [38] Krantz W. B. y Zollars R. L., “The linear hydrodynamic stability of film flow down a vertical cylinder”, *AIChE Journal* **22**, no.5, pp. 930-934, (1976)
- [39] Kelly R.E., Davis S. H., Goussis D. A., “On the instability of heated film flow with variable surface tension”, *Heat Transfer 1986, Proceedings of the Eighth International Heat Transfer Conference*, vol. 4, Hemisphere, New York, p. 1937, Agosto (1986)
- [40] Leal G., *Advanced Transport Phenomena*, Cambridge University Press, pp. 78-79, (2007)

- [41] Lin, S. P. y Liu, M.C., “Instability of film coating of wires and tubes”, *AICHE Journal* **21**, no. 4, pp. 755-782, (1975)
- [42] Lin, S.P., “Stability of a liquid flow down a heated inclined plane”, *Letter Heat and Mass Transfer*, **2**, no. 2, pp. 361-369, 1975
- [43] Lai, W., “Stability of an elasto-viscous liquid film flowing down an inclined plane, *Physics of fluids*”, **10**, number 4, 1967
- [44] Oldroyd J.G., “On the formulation of rheological equations of state”, *Proceedings Royal Society London A*, 200, pp 523-541, (1950)
- [45] Oldroyd J.G., “Non Newtonian effects in steady motion in some idealized elasto-viscous liquid”, *Proc. Royal Society London A*, 245, pp 278-297, (1958)
- [46] Owens, R.G., Phillips, T.N., *Computational Rheology*, Imperial College Press, (2002)
- [47] Pérez-Reyes, I., Dávalos Orozco, L. A., “Vorticity effects in the non-linear long wavelength convective instability”, *Journal of Non Newtonian Fluid Mechanics* **208-209**, pp 18-26 (2014)
- [48] Pearson, J.R.A., “On convection cells induced by surface tension”, *Journal of Fluid Mechanics* **4**, pp. 489 (1958)
- [49] Plateau, J., *Experimental and Theoretical Statics of Liquids Subject to Molecular Forces Only*, (1873)
- [50] Rayleigh, Lord, “On the Instability of Jets”, *Proc. R. Soc. Lond.* **10** 4, (1879)
- [51] Reynolds O., “An experimental investigation of the circumstances which determine Whether the motion of water shall be direct or sinous and of the Law of resistance in Parallel channels, *Phil Trans R. Soc*, vol 184, pp. 935-982, (1883)
- [52] Rosenau, P. y Oron A., “Evolution and breaking of a liquid film flowing on a vertical cylinder”, *Physics of fluids A*, **1**, no **11**, pp 1763-1766, (1989)
- [53] Ruschak, K. J., *Coating flows*, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. **17**, pp. 65–89, 1985.
- [54] Schlang T. y Sivashinsky G. I., “Irregular flow of a liquid film down a vertical column” *Journal of Physics* **43**, p. 459-466 (1982)
- [55] Scriven L.E., Sterling C. V., “On cellular convection by surface tension gradients: Effects of mean surface tension and surface viscosity”, *Journal Fluid Mechanics*, **19**, 321, (1964)

- [56] Shafqen, E.S.G., Larson, R.G. y Fredrickson, G.H., “The stability of a viscoelastic liquid film flowing down an inclined plane”, *Journal of Non Newtonian fluid Mechanics*, **31**, pp. 87-113. (1989)
- [57] Solorio F. J. y Sen M., “Linear Stability of a cylindrical falling film”. *Journal of Fluid Mechanics* **183**, pp. 365-377, (1987)
- [58] Sreenivasan, S. y Lin, S. P., “Surface tension driven instability of a liquid film flow down a heated incline”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **21**, no. 12, pp. 1517–1526, (1975)
- [59] Takashima M. , Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. I. Stationary convection, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **50**, 2745 - 2750. (1981a)
- [60] Takashima M., Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. II. Overstability, *J. Phys. Soc. Jpn.* , **50**, 2751-2756, (1981b)
- [61] Yih, C.S., “Stability of parallel laminar flow with a free surface”, *Proceedings of the Second United States National congress of applied mechanics.* (ASME, New York, p. 623 – 628 (1955)
- [62] Yih C. S., “Stability of liquid flow down an inclined plane”, *Physics of Fluids* **6**, p. 321-334 (1963)
- [63] Velarde, M. G., Nepomnyashchy, A. A., and Hennenberg, M., “Onset of oscillatory interfacial instability and wave motions in Benard layers, en van der Giessen, E. y Wu, T. Y., Eds., *Advances in Applied Mechanics*, vol. **37**, pp. 167–238, Academic Press, San Diego, (2001)
- [64] Velarde, M. G. and Vignes-Adler, M., “Wave motion in thin liquid layers”, in Hubbard, A. T., Ed., *Encyclopedia of Surface and Colloid Science*, pp. 5616–5629, Marcel Dekker, New York, (2002).
- [65] Weinstein, S. J. y Ruschak, K. J., Coating flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. **36**, pp. 29–53, 2004
- [66] White, Frank M., *Fluid Mechanics*, Ed. Mgraw Hill, (1979)
- [67] Zeytounian, R. Kh.,” The Benard-Marangoni thermocapillary-instability problem”, *Physics-USpekhi*, vol. **41**, no. 3, pp. 241–267, (1998)

Apéndice 1. Ecuaciones constitutivas del fluido de Oldroyd-B

Las ecuaciones constitutivas para un fluido de Oldroyd-B, con constantes de relajamiento y de retardo, se pueden escribir usando la definición de la derivada convectiva:

$$T_{ij} + \lambda_1 \frac{D}{dt} T_{ij} = 2\eta_o \left(1 + \lambda_2 \frac{D}{Dt}\right) e_{ij}$$

La derivada convectiva contravariante de un tensor, está definida de la siguiente forma:

$$\frac{D}{dt} \bar{T} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{T} + (V \cdot \nabla) \bar{T} - \nabla V^T \bar{T} - \bar{T} \nabla V$$

Primero calcularemos los últimos dos términos de la derivada convectiva. El gradiente de velocidad en coordenadas cilíndricas, es una diada de nueve componentes y se escribe:

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Y el tensor de esfuerzos se puede escribir también como un tensor de nueve componentes en las direcciones, normales de un sistema cilíndrico:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{r\theta} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{rz} & T_{\theta z} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el término $T \cdot \text{grad} V$ se puede escribir haciendo la multiplicación de los tensores:

$$T \cdot \nabla V = \begin{bmatrix} T_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + T_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) + T_{rz} \frac{\partial u}{\partial z} & T_{rr} \frac{\partial v}{\partial r} + T_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + T_{rz} \frac{\partial v}{\partial z} & T_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} + T_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + T_{rz} \frac{\partial w}{\partial z} \\ T_{r\theta} \frac{\partial u}{\partial r} + T_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) + T_{\theta z} \frac{\partial u}{\partial z} & T_{r\theta} \frac{\partial v}{\partial r} + T_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + T_{\theta z} \frac{\partial v}{\partial z} & T_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} + T_{\theta\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + T_{\theta z} \frac{\partial w}{\partial z} \\ T_{rz} \frac{\partial u}{\partial r} + T_{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) + T_{zz} \frac{\partial u}{\partial z} & T_{rz} \frac{\partial v}{\partial r} + T_{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + T_{zz} \frac{\partial v}{\partial z} & T_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} + T_{\theta z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + T_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Para el término $(\text{grad}V)^T \cdot T$, se usa la transpuesta del gradiente de velocidad y el tensor T de esfuerzos.

$$\nabla V^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Con estos dos términos podemos calcular $(\text{grad}V)^T \cdot T$: en términos de las derivadas de la velocidad y el tensor de esfuerzos:

$$\nabla V^T \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} T_{rr} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) T_{r\theta} + \frac{\partial u}{\partial z} T_{rz} & \frac{\partial u}{\partial r} T_{r\theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) T_{\theta\theta} + \frac{\partial u}{\partial z} T_{\theta z} & \frac{\partial u}{\partial r} T_{rz} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) T_{\theta z} + \frac{\partial u}{\partial z} T_{zz} \\ \frac{\partial v}{\partial r} T_{rr} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) T_{r\theta} + \frac{\partial v}{\partial z} T_{rz} & \frac{\partial v}{\partial r} T_{r\theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) T_{\theta\theta} + \frac{\partial v}{\partial z} T_{\theta z} & \frac{\partial v}{\partial r} T_{rz} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) T_{\theta z} + \frac{\partial v}{\partial z} T_{zz} \\ \frac{\partial w}{\partial r} T_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} T_{r\theta} + \frac{\partial w}{\partial z} T_{rz} & \frac{\partial w}{\partial r} T_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} T_{\theta\theta} + \frac{\partial w}{\partial z} T_{\theta z} & \frac{\partial w}{\partial r} T_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} T_{\theta z} + \frac{\partial w}{\partial z} T_{zz} \end{bmatrix}$$

Finalmente daremos la definición de la derivada convectiva que aparece en la derivada contravariante, el termino: $(V \cdot \nabla)$ Los componentes de dicho término en coordenadas cilíndricas, son los siguientes:

$$(V \cdot \nabla T)_{rr} = u \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{rr}}{\partial z} - \frac{v}{r} (T_{r\theta} + T_{\theta r})$$

$$(V \cdot \nabla T)_{r\theta} = u \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta})$$

$$(V \cdot \nabla T)_{rz} = u \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{v}{r} (T_{\theta z})$$

$$(V \cdot \nabla T)_{\theta r} = u \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial z} + \frac{v}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta})$$

$$(V \cdot \nabla T)_{\theta\theta} = u \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} (T_{r\theta} + T_{\theta r})$$

$$(V \cdot \nabla T)_{\theta z} = u \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{v}{r} (T_{rz})$$

$$(V \cdot \nabla T)_{zr} = u \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{zr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{v}{r} (T_{z\theta})$$

$$(V \cdot \nabla T)_{z\theta} = u \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} (T_{zr})$$

$$(V \cdot \nabla T)_{zz} = u \frac{\partial T_{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}$$

Con todos estos términos, de la derivada convectiva, y los términos, $(\text{gradV})^T \cdot T$, y de $T \cdot (\text{gradV})$, podemos escribir

El miembro izquierdo de la ecuación de estado para un fluido de Oldroyd-B, en coordenadas cilíndricas. Escribimos solo seis de las ecuaciones, ya que el tensor de esfuerzos es simétrico, y por tanto, tres componentes son iguales entre sí:

La ecuación de esfuerzo en la dirección rr , se puede escribir con las definiciones dadas en los párrafos anteriores, para la derivada convectiva y los términos: $T \cdot \text{gradV}$ y $\text{gradV}^T \cdot T$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_1 \frac{d_c}{dt}\right) T_{rr} &= T_{rr} + \lambda_1 \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{rr}}{\partial z} - \frac{v}{r} (T_{r\theta} + T_{\theta r}) - 2T_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} - 2T_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) - 2T_{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= 2\eta_0 \left(e_{rr} + \lambda_1 \left(\frac{\partial e_{rr}}{\partial t} + u \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{rr}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{rr}}{\partial z} - \frac{v}{r} (e_{r\theta} + e_{\theta r}) - 2e_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} - 2e_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) - 2e_{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \end{aligned}$$

La ecuación de estado para el componente $Tr\theta$, del tensor de esfuerzo se puede escribir de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} T_{r\theta} + \lambda_1 \left(\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) - T_{rr} \frac{\partial v}{\partial r} - T_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - T_{rz} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) T_{\theta\theta} - \frac{\partial u}{\partial z} T_{\theta z} \right) &= \\ = 2\eta_0 \left(e_{r\theta} + \lambda_1 \left(\frac{\partial e_{r\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} (e_{rr} - e_{\theta\theta}) - e_{rr} \frac{\partial v}{\partial r} - e_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - e_{rz} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) e_{\theta\theta} - \frac{\partial u}{\partial z} e_{\theta z} \right) \right) & \end{aligned}$$

En una forma similar se puede escribir los componentes del esfuerzo Trz :

$$\begin{aligned} T_{rz} + \lambda_1 \left(\frac{\partial T_{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{v}{r} (T_{\theta z}) - T_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} - T_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T_{rz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) T_{\theta z} - \frac{\partial u}{\partial z} T_{zz} \right) &= \\ 2\eta_0 \left(e_{rz} + \lambda_2 \left(\frac{\partial e_{rz}}{\partial t} + u \frac{\partial e_{rz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{rz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{rz}}{\partial z} - \frac{v}{r} (e_{\theta z}) - e_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} - e_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - e_{rz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) e_{\theta z} - \frac{\partial u}{\partial z} e_{zz} \right) \right) & \end{aligned}$$

La ecuación de esfuerzos normales en la dirección ($\theta\theta$) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$T_{\theta\theta} + \lambda_1 \left(u \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} (T_{r\theta} + T_{\theta r}) - 2 \cdot T_{r\theta} \frac{\partial v}{\partial r} - 2 \cdot T_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) - 2 \cdot T_{\theta z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) =$$

$$2\eta_0 \left(e_{\theta\theta} + \lambda_2 \left(u \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{v}{r} (e_{r\theta} + e_{\theta r}) - 2 \cdot e_{r\theta} \frac{\partial v}{\partial r} - 2 \cdot e_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) - 2 \cdot e_{\theta z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) =$$

La ecuación para el esfuerzo normal en la dirección (θz) puede ser escrita en la siguiente forma:

$$T_{\theta z} + \lambda_1 \left(u \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{v}{r} (T_{rz}) - T_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} - T_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - T_{\theta z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \right) =$$

$$\left(-T_{rz} \frac{\partial v}{\partial r} - T_{zz} \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$2\eta_0 \left(e_{\theta z} + \lambda_2 \left(u \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial z} + \frac{v}{r} e_{rz} - e_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} - e_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - e_{\theta z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \right) \right)$$

Finalmente la ecuación de estado para la componente normal en la dirección (zz), se puede escribir en la siguiente forma

$$T_{zz} + \lambda_1 \left(u \frac{\partial T_{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T_{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} - 2T_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} - 2T_{\theta z} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2T_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) =$$

$$2\eta_0 \left(e_{zz} + \lambda_1 \left(u \frac{\partial e_{zz}}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial e_{zz}}{\partial \theta} + w \frac{\partial e_{zz}}{\partial z} - 2e_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} - 2e_{\theta z} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2e_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) =$$

APENDICE 2 . Balance de Esfuerzos Normales y Tangenciales

A continuación se escriben las condiciones de frontera que aplican para nuestro problema. La primera condición es la de no deslizamiento del fluido en la superficie del cilindro, es decir la velocidad del fluido es cero, en el radio $r=\beta$, debe ser cero, si el cilindro esta estático:

$$\begin{aligned} U &= 0, \\ V &= 0, \\ W &= 0, \\ @r &= \beta \end{aligned}$$

En la superficie libre se debe cumplir el balance de esfuerzos normales y tangenciales:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(a)}) \bullet n_j = -We(k)n_i.$$

Donde el esfuerzo en la superficie es igual a la presión mas el esfuerzo deviatorico:

$\sigma = -p + \tau_{ij}$. La curvatura k se calcula como la divergencia del vector normal a la

superficie: $k = \nabla \bullet \hat{n}$, en coordenadas cilíndricas se obtuvo la siguiente expresión:

$$k = \nabla \bullet \hat{n} = \frac{1}{N^3} \left[\left(\frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} h_\theta^2 + h_z^2 \right) - \frac{1}{h_{\theta\theta}} (1 + h_z^2) - h_{zz} \left(1 + \frac{1}{r^2} h_\theta^2 \right) + \frac{1}{r^3} h_\theta^2 + \frac{2}{r^2} h_\theta h_z h_{\theta z} \right]$$

El vector normal a la superficie en coordenadas cilíndricas se escribe de la siguiente forma:

$$\hat{n} = \frac{1}{N} (1, -\frac{1}{r} h_\theta, -h_z), \text{ donde } N = (1 + \frac{1}{r^2} h_\theta^2 + h_z^2)^{1/2}$$

Con estas definiciones se puede calcular la ecuación de balance de esfuerzos normales:

$$-(p - p_\infty) + \frac{1}{N^2} (\tau_{rr} n_r^2 + \tau_{\theta\theta} n_\theta^2 + \tau_{zz} n_z^2 + 2\tau_{r\theta} n_r n_\theta + 2\tau_{rz} n_r n_z + 2\tau_{\theta z} n_\theta n_z) = -We(\nabla \cdot \mathbf{n})n_i$$

Introduciendo las componentes del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas, y haciendo algunas simplificaciones, se obtiene la ecuación de balance de esfuerzos normales:

$$-(p - p_\infty) + \frac{1}{N^2} \left(\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \frac{h_\theta^2}{r^2} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} h_z^2 - \frac{2}{\text{Re}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{r} \right. \\ \left. - \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) h_z + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{r} h_z \right) \\ = -We(\nabla \cdot \mathbf{n})n_i$$

Además al escribir la ecuación para la curvatura de la superficie en el punto base del vector normal:

$$-(p - p_\infty) + \frac{1}{N^2} \left(\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \frac{h_\theta^2}{r^2} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} h_z^2 - \frac{2}{\text{Re}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{r} \right. \\ \left. - \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) h_z + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{r} h_z \right) \\ = -\frac{We}{N^3} \left[\left(\frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} h_\theta^2 + h_z^2 \right) - \frac{1}{h_{\theta\theta}} \left(1 + h_z^2 \right) - h_{zz} \left(1 + \frac{1}{r^2} h_\theta^2 \right) + \frac{1}{r^3} h_\theta^2 + \frac{2}{r^2} h_\theta h_z h_{\theta z} \right]$$

Esta ecuación de balance de esfuerzos normales, se usara junto con las ecuaciones de balance de momento, masa, y energía para obtener la ecuación de evolución de onda de nuestro problema, tanto isotérmico como no isotérmico. A continuación deduciré las condiciones de esfuerzo tangenciales que aplican al flujo de una capa líquida sobre un cilindro.

2.5.3 Ecuaciones de balance de esfuerzos tangenciales

Además de los esfuerzos normales de tensión superficial, existen esfuerzos de gradientes tensión superficial tangenciales a la superficie. Dichos esfuerzos aparecen cuando existen gradientes de temperatura en la superficie libre del fluido, o debido a gradientes de composición como surfactantes que se agregaron al fluido en cuestión.

La ecuación de balance de esfuerzos tangenciales se escribe de la siguiente forma:

$$\tau_{ik} \cdot n_k \cdot t_i^{(j)} = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) t_i^{(j)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.47)$$

Primero se obtienen los productos del tensor de esfuerzos por el vector normal n_k multiplicado por el vector tangente T_i . Existen dos vectores tangentes a la superficie en el punto P, donde calculamos los esfuerzos de tensión superficial. El vector normal se definió en (2.42) y el primer vector tangente se escribe a continuación:

$$t_i^1 = \frac{(h_z, 0, 1)}{(1 + h_z^2)^{1/2}} \quad (2.48)$$

Haciendo los productos del vector tangente por los componentes del producto del tensor de esfuerzos por el vector normal, y simplificando algunos términos:

$$\begin{aligned} & \frac{h_z}{(1 + h_z^2)^{1/2}} \left(\tau_{rr} - \frac{1}{r} h_\theta \tau_{r\theta} - h_z \tau_{rz} \right) + \frac{h_z}{(1 + h_z^2)^{1/2}} \left(\tau_{zr} - \frac{1}{r} h_\theta \tau_{z\theta} - h_z \tau_{zz} \right) = \\ & - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) t_i^{(j)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sustituyendo las definiciones de los componentes del tensor de esfuerzos y usando la adimensionalización definida en (2.4):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{W_o \mu}{h_o} \right) \left[\begin{aligned} & h_z \left(2 \frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) (1 - h_z^2) - \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) h_y h_z \\ & - \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) h_y \end{aligned} \right] + \\ & = - \left(- \frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) \left(\frac{h_z, 0, 1}{(1 + h_z^2)} \right) \nabla T \left(\frac{T_w - T_o}{h_o} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Donde el gradiente de temperatura dT/dx_i en coordenadas cilíndricas, es el siguiente:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \bullet e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \bullet e_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \right) e_z \quad (2.51)$$

Por lo que el producto del vector tangente por el gradiente de temperatura se escribe como sigue a continuación:

$$t_i^1 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{(1 + \varepsilon^2 h_z^2)^{1/2}} \left(\varepsilon \frac{\partial T}{\partial x} h_z + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial z} \right) \left(\frac{T_w - T_o}{h_o} \right) \quad (2.52)$$

Se realizan los escalamientos de las variables, dz, y rdθ, y se separan las variables de la ecuación principal en sus perturbaciones. También se introducen las derivadas de la temperatura respecto a la variable x(radial) y la variable z, que definen el comportamiento de los esfuerzos tangenciales. Además, también se usa la definición del número de

Marangoni $Ma = -\frac{\partial \gamma}{\partial T} \frac{\Delta T h_o}{\nu \alpha}$. Así llegamos a la siguiente forma de la ecuación de

esfuerzos tangencial:

$$\begin{aligned} & \left(\left(2\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x} - 2\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \varepsilon h_z + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_0}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) (1 - \varepsilon^2 h_z^2) - \right. \\ & \left. \left(\varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial x} - \left(\frac{\varepsilon^2 v_0}{\delta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \varepsilon^2 h_y h_z - \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v_0}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \varepsilon h_y \right) \\ & = \left(\frac{Ma}{\text{Pr Re}} \right) \left(\frac{Bi \varepsilon h_z}{(1 + Bi h^*)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Tomando solo los términos a orden cero, y a orden uno, se obtienen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

$$\varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left[\frac{Bi \varepsilon h_z}{(1 + Bi h^*)^2} \right] \quad (2.55)$$

Estas ecuaciones se pueden introducir en las ecuaciones de momento que se resolverán por un método de perturbación, para obtener una ecuación de evolución de la onda.

2.5.4 Segunda condición de esfuerzos tangenciales.

Para obtener la segunda condición de esfuerzos tangenciales se sigue un procedimiento similar. Comenzamos con la ecuación de balance de esfuerzos tangenciales:

$$\tau_{ik} \cdot n_k \cdot t_i^{(j)} = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) t_i^{(j)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.56)$$

En la condición de esfuerzos tangenciales se usa el segundo vector tangencial y el vector normal y se siguen los mismos pasos que en el procedimiento anterior:

$$t_i^2 = \frac{\left(-\frac{1}{r} h_\theta, -(1+h_z^2), \frac{1}{r} h_\theta h_z \right)}{(1+h_z^2)^{1/2} \cdot N} \quad (2.57)$$

Realizando los productos en (2,29) del tensor de esfuerzos por los vectores tangentes y normales se obtiene:

$$\tau_{ik} \cdot n_k \cdot t_i^{(2)} = t_i^2 \left[\begin{array}{l} \left(\tau_{rr} - \frac{1}{r} h_\theta \tau_{r\theta} - h_z \tau_{rz} \right) \hat{e}_r + \\ \left(\tau_{\theta r} - \frac{1}{r} h_\theta \tau_{\theta\theta} - h_z \tau_{\theta z} \right) \hat{e}_\theta \\ + \left(\tau_{zr} + \frac{1}{r} h_\theta \tau_{z\theta} - h_z \tau_{zz} \right) \hat{e}_z \end{array} \right] = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) t_i^{(j)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.58)$$

Substituyendo los componentes del tensor de esfuerzos y los componentes del segundo vector tangencial, y del vector normal se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{W_o \mu}{h_o} \right) \frac{1}{(1+h_z^2)^{1/2} \cdot N} \left[\begin{array}{l} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{h_\theta}{r} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \frac{1}{r} h (1+h_z^2) - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{1}{r} \right) h_\theta h_z^2 \\ - \left(r \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(1+h_z^2 - \frac{1}{r^2} h_\theta^2 \right) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{1}{r} h_\theta h_z \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) h_z \left(1+h_z^2 - \frac{1}{r^2} h_\theta^2 \right) \end{array} \right] + \quad (2.59)$$

$$= - \left(- \frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) t_i^2 (\nabla T) \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Haciendo el producto del segundo vector tangencial con el gradiente de temperaturas (2.51) y haciendo el cambio de variables de θ a y , se obtiene, se obtiene el miembro derecho de la ecuación (2.59):

$$t_i^2 \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{(1+h_z^2)^{1/2} \cdot N} \left(-h_y \frac{\partial T}{\partial x} - (1+h_z^2) \frac{\partial T}{\partial y} + h_y h_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) (T_w - T_o) \quad (2.60)$$

Haciendo el cambio de variable en la ecuación (2.59), junto con el escalamiento debido a la aproximación de longitud de onda larga, se obtiene la siguiente ecuación en la que también se introducen los gradientes de temperatura que se obtuvieron en la ecuación 2.39:

$$\left(\begin{aligned} & \left(-2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varepsilon h_y + 2 \left(\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{u}{\delta} \right) \varepsilon h_y (1 + \varepsilon^2 h_z^2) - 2 \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \varepsilon^3 h_y h_z^2 \\ & - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon \left(\frac{v}{\delta} \right) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) (1 + \varepsilon^2 h_z^2 - \varepsilon^2 h_y^2) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) \varepsilon^2 h_y h_z \\ & + \left(\varepsilon \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} \right) \varepsilon h_z (1 + \varepsilon^2 h_z^2 - \varepsilon^2 h_y^2) \end{aligned} \right) \quad (2.61)$$

$$= - \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi \varepsilon h_y}{(1 + Bi h)^2} \right)$$

Finalmente separando los componentes de velocidad en sus perturbaciones, se obtuvo la siguiente ecuación:

$$\left(\begin{aligned} & \left(-2 \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) \varepsilon^2 h_y + \left(2 \varepsilon^3 \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2 \varepsilon^3 \frac{u_o}{\delta} \right) - 2 \varepsilon^4 \left(\frac{\partial w_o}{\partial z} \right) h_y h_z^2 \\ & - \left(\varepsilon \frac{\partial v_o}{\partial x} - \varepsilon^2 \left(\frac{v_o}{\delta} \right) + \varepsilon \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) (1) + 2 \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_o}{\partial z} \right) \varepsilon^2 h_y h_z + \left(\varepsilon \frac{\partial v_o}{\partial z} h_z + \varepsilon \frac{\partial w_o}{\partial y} h_z \right) \end{aligned} \right)$$

$$= - \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi \varepsilon h_y}{(1 + Bi h)^2} \right) \quad (2.62)$$

Tomando solo los componentes de orden 1, se llega a la siguiente ecuación de balance de esfuerzos tangenciales:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) = \frac{Ma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{Bi \varepsilon h_y}{(1 + Bi h)^2} \right) \quad (2.63)$$