



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

**DECOHERENCIA DE UN QUBIT CON
ENSEMBLES EMBEBIDOS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JORGE ANTONIO MORALES VALDÉS

TUTOR PRINCIPAL:
DR. THOMAS HENRY SELIGMAN SCHURCH
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. LUIS BENET FERNÁNDEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS
DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA
INSTITUTO DE FÍSICA

CUERNAVACA, MORELOS, MÉXICO. FEBRERO 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi hermano Claudio.

Resumen

En este trabajo se estudia de manera numérica la decoherencia de un qubit que interactúa con un ambiente de carácter aleatorio. Este ambiente se modeló con los ensembles gaussianos embebidos de k cuerpos. A diferencia de trabajos previos, donde se utilizan los ensembles clásicos, los ensembles embebidos permiten un modelo más realista de interacción entre partículas, ya que el rango de interacción k puede tomar cualquier valor entre 1 y el número total de partículas. En particular, nos enfocamos en la interacción de 2-cuerpos, pues es típicamente la clase de interacción que se encuentra en la naturaleza. Con el uso de los ensembles embebidos nos fue posible considerar ambientes formados por fermiones y bosones. Para el ambiente bosónico, se consideraron bosones en el límite denso, i.e., el número de partículas, que se usan en los ensembles embebidos, es mucho mayor que el número de niveles donde se pueden distribuir. Como medida de decoherencia del qubit se utilizó la pureza. Se encontró que el decaimiento de pureza del qubit, en presencia del ambiente fermiónico, es muy similar al comportamiento que tiene cuando se usan los ensembles clásicos. Por el contrario, cuando el qubit interactúa con el ambiente bosónico, se observó una rápida caída de la pureza del qubit, en tiempos menores al tiempo de Heisenberg. Como una primera explicación de lo que sucede, se debe a que las propiedades espectrales de los ensembles embebidos para fermiones son muy parecidas a las correspondientes de los ensembles clásicos. En cambio, para ensembles embebidos de bosones en el límite denso, las propiedades espectrales son totalmente diferentes a las correspondientes de los ensembles anteriores.

Agradecimientos

Al Dr. Thomas Seligman y la Dra. Manan Vyas, quienes se encargaron de dirigir mi tesis.

Al Dr. Luis Benet, por todo lo que he aprendido sobre matrices aleatorias y por su disposición, en todo momento, en atender mis dudas.

Al Dr. Thomas Gorin, por una observación simple (¡pero importante!) en mi tesis.

A mis compañeros en el ICF: Moisés, Adrián, Carlos y Héctor.

Last but not least, a mi amigo José Morales.

¡Gracias!

Índice general

1. Introducción	11
2. Teoría de matrices aleatorias	14
2.1. Teoría canónica	14
2.1.1. Preliminares	14
2.1.2. Ensembles gaussianos	17
2.1.3. Desdoblamiento del espectro y distribución de espaciamientos	18
2.2. Ensembles Embebidos	21
2.2.1. Origen	21
2.2.2. Definición	21
2.2.3. Densidad de niveles y distribución de espaciamientos	24
3. Decoherencia: conceptos fundamentales	27
3.1. Estados puros y evolución unitaria	27
3.2. Matriz de densidad	28
3.3. Sistemas abiertos y decoherencia	30
3.3.1. Sistemas compuestos	30
3.3.2. Enredamiento y descomposición de Schmidt	32
3.3.3. Sistemas abiertos y el proceso de decoherencia	33
4. Decoherencia de un qubit con ensembles embebidos	35
4.1. Los modelos	36
4.1.1. Hamiltoniano de un qubit	36
4.1.2. Un qubit interactúa con un EGOE	37
4.1.3. Un qubit interactúa con un BEGOE	38
4.2. Simulaciones numéricas	38
4.2.1. Ambiente fermiónico	39
4.2.2. Ambiente bosónico	43
5. Conclusiones	49
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

Como es sabido, cualquier sistema físico que se considere en el mundo real, interactúa continuamente con el ambiente que lo rodea. Consideremos un sistema cuántico arbitrario. Durante la interacción sistema-ambiente, se ha observado que el sistema pierde coherencia, i.e., hay decoherencia en el sistema [1, 2, 3]. Resulta importante comprender esta clase de procesos, pues con el surgimiento de la tecnología cuántica¹, es preciso tener control sobre la influencia que el ambiente puede ejercer sobre el sistema de interés. Aspectos fundamentales de la teoría cuántica, como lo es el problema de la medición y el surgimiento del mundo clásico, aparecen como resultado de la decoherencia.

Esta clase de problemas se aborda dentro de la teoría de los sistemas abiertos. De esta manera, se puede considerar un sistema compuesto formado por dos subsistemas: sistema central (sistema de interés) y ambiente. En general, la dinámica del sistema central evoluciona no unitariamente; no obstante, el sistema compuesto sí sigue una dinámica unitaria. Esto es así, pues una vez que el estado del sistema compuesto empieza a evolucionar, no es posible obtener operadores unitarios de evolución asociados a cada uno de los dos subsistemas. En consecuencia, para esta clase de sistemas es conveniente introducir el formalismo de la matriz de densidad, a partir de la cual, se puede conocer la dinámica de los dos subsistemas.

¹Por ej. cómputo cuántico, criptografía cuántica.

Un hecho clave en el proceso de decoherencia, es el de enredamiento cuántico.² Aunque en un principio, el estado inicial del sistema compuesto se podría elegir como el producto tensorial de los estados iniciales asociados a cada subsistema, se encuentra que, al evolucionar en el tiempo el sistema compuesto, ambos subsistemas empiezan a desarrollar correlaciones cuánticas o enredarse. Esto se traduce en el hecho de que no es posible asignar un estado puro a cada subsistema y , en particular, al sistema de interés.

En este marco, diversas clases de interacciones entre sistemas y ambientes han sido estudiadas para tener una mayor comprensión de lo que sucede durante esta interacción, y sus consecuencias. Ejemplos de esto, se pueden encontrar en las referencias [4, 5, 6, 7]. En los últimos años se han considerado ambientes de naturaleza aleatoria, en particular, ambientes modelados por la teoría canónica (por teoría canónica nos referimos a los ensembles clásicos introducidos por Cartan [8, 9] y en la física por Wigner [10]), de matrices aleatorias [5, 11, 12]. Esta elección se justifica, a menudo, como reflejo de nuestra ignorancia sobre sistemas no controlados o caóticos.

A pesar de que el uso de la teoría canónica ha traído nuevas líneas de investigación en el estudio de los sistemas abiertos, hay que mencionar que desde un punto de vista físico, su implementación no representa las situaciones más realistas. Esto se debe a que su aplicación equivale a suponer una interacción de muchos cuerpos, siendo que en la naturaleza las interacciones son típicamente de 1 y 2-cuerpos. Por esta razón, aunque en otro contexto [13, 14, 15, 16], fueron introducidos los ensembles embebidos $EE(k)$ de matrices aleatorias con interacción de hasta k cuerpos, siendo k el rango de interacción. Debido a esta propiedad, en este trabajo utilizamos los ensembles embebidos para modelar el ambiente de un sistema abierto, de una manera más realista.

Específicamente, en este trabajo consideramos un qubit³ como nuestro sistema central, el cual interactúa con un ambiente modelado por ensembles embebidos. El objetivo es estudiar la decoherencia de estados puros del qubit, sujeto a este ambiente. Para cuantificar la decoherencia, se utiliza la pureza del estado reducido asociado al qubit. Adicionalmente, nuestros resultados son comparados con los correspondientes de la teoría canónica.

²Del inglés, *entanglement*.

³Del inglés *quantum bit*.

Puesto que los ensembles embebidos pueden ser construidos para sistemas de fermiones o bosones, modelaremos el ambiente con estas dos clases de sistemas de partículas y, aunque en este trabajo no lo utilizamos, también se podría considerar una tercera clase de sistema que resulta de mezclar fermiones y bosones [17].

El orden de este trabajo es el siguiente. En el capítulo 2, presentamos los conceptos básicos de la teoría de matrices aleatorias e introducimos la teoría de ensembles embebidos, para fermiones y bosones. En el capítulo 3, introducimos los conceptos necesarios sobre sistemas abiertos para el desarrollo de esta tesis. En particular, se tocan diversos aspectos del formalismo de la matriz de densidad y su importancia en los sistemas compuestos. En el capítulo 4, presentamos los resultados obtenidos en el trabajo utilizando ambientes fermiónicos y bosónicos. Por último, se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Teoría de matrices aleatorias

2.1. Teoría canónica

La teoría de matrices aleatorias (RMT por sus siglas en inglés) fue introducida por Cartan [8] y en la física por Wigner [10, 18]. Éste último lo hizo para investigar propiedades espectrales de núcleos atómicos. La idea principal es reemplazar el Hamiltoniano del sistema bajo estudio por un ensemble de Hamiltonianos aleatorios que presenta propiedades genéricas. De este modo, la teoría se ha utilizado exitosamente para describir fluctuaciones en las propiedades espectrales de núcleos, átomos y moléculas complejas. Así mismo, los campos de aplicación de RMT incluyen caos cuántico, sistemas mesoscópicos desordenados y cromodinámica cuántica, por mencionar algunos[19]. Mas recientemente, y que es particularmente de nuestro interés, es la aplicación de RMT en el estudio de la decoherencia de sistemas cuánticos abiertos[5].

2.1.1. Preliminares

Consideremos, por ejemplo, el espectro de energía de un sistema cuántico. En ocasiones, se desea estudiar las fluctuaciones de los niveles de energía de dicho espectro. Sean x_n , con $n = 1, 2, \dots, N$, las posiciones de los niveles. Asumimos que N es suficientemente grande para tener una buena estadística. En una primera instancia se puede construir un histograma con estos niveles y obtener la *densidad de niveles promedio*. Siendo un hecho bien

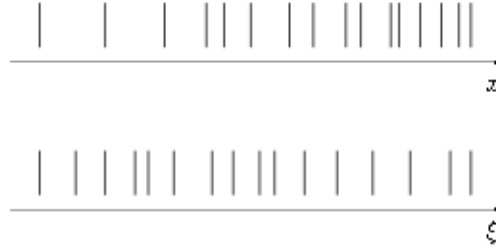


Figura 2.1: Espectro original (arriba) y desdoblado (abajo).

conocido que para los ensembles canónicos, los cuáles se introducen más adelante, esta densidad tiene forma semicircular.

En ocasiones, se necesita remover la densidad promedio del espectro con el fin de estudiar las fluctuaciones del sistema que se esté tratando. Este procedimiento se conoce como *desdoblamiento*¹ y asegura que la diferencia de energía entre niveles consecutivos sea en promedio igual a uno. En la Fig. 2.1 se ilustra un espectro antes y después del desdoblamiento. Como se verá más adelante, por construcción, el espectro desdoblado tiene una densidad de niveles promedio igual a uno.

Una vez que el espectro ha sido desdoblado, se pueden estudiar las fluctuaciones de corto alcance en el espectro. Para ello se utiliza la *distribución de primeros vecinos* (NNSD por sus siglas en inglés). La NNSD es la densidad de probabilidad de encontrar dos niveles adyacentes ξ_{i+1} y ξ_i a una distancia s . Si, por ejemplo, las posiciones de los niveles se encuentran no correlacionados, la NNSD sigue la ley de Poisson

$$p^P(s) = \exp(-s), \quad (2.1)$$

la cual algunas veces se encuentra principalmente para sistemas integrables. En cambio, muchos más sistemas (p. ej. núcleos atómicos, billares) siguen una distribución diferente llamada la *conjetura de Wigner* ó distribución de Wigner.

$$p^W(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right). \quad (2.2)$$

¹Mejor conocido como *unfolding* en inglés.

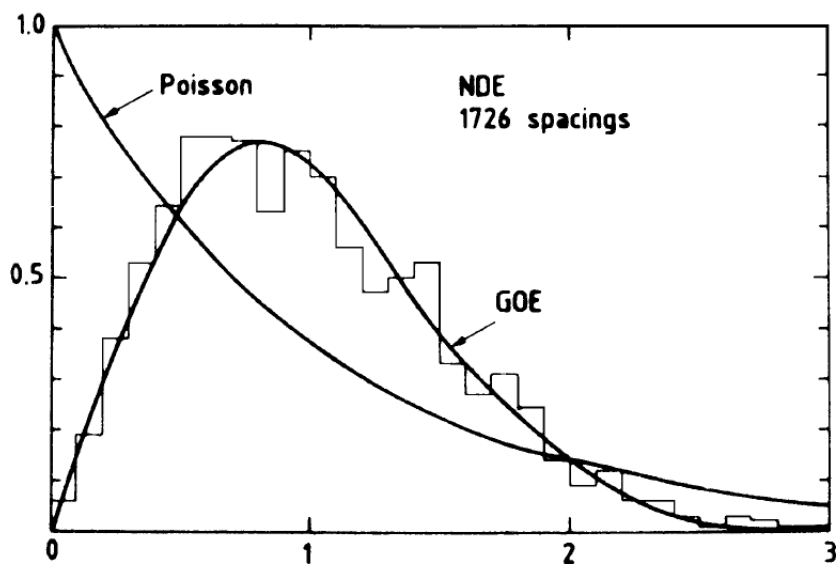


Figura 2.2: Distribución de primeros vecinos que contienen datos de distintos núcleos. La conjetura de Wigner se etiqueta con GOE y es comparada con la distribución de Poisson. Tomado de [19].

Para ver un poco más en detalle esta distribución, consideremos la distribución de primeros vecinos que aparece en la Fig. 2.2. Los datos contienen 1726 espaciamentos (diferencia de energía entre niveles adyacentes) de distintos núcleos [19], la línea sólida de tipo gaussiano muestra la predicción de RMT. Considerando que la teoría no contiene ningún parámetro, resulta impresionante ver lo bien que ajusta la predicción con los datos experimentales. Más aún, sistemas distintos como lo son moléculas, sistemas cuánticos caóticos y desordenados presentan un comportamiento similar al mostrado por los niveles nucleares. En este sentido, RMT resulta tener un carácter general sobre muy diversos sistemas.

También, como se muestra en la Fig. 2.2, la distribución de Wigner exhibe un comportamiento conocido como repulsión de niveles, el cual se debe a que $p^W(0) = 0$. Esto sólo es posible si los niveles se encuentran correlacionados. En cambio, en la distribución de Poisson no se observa repulsión de niveles pues $p^P(0) = 1$. De esta manera, la ley de Poisson y la distribución

de Wigner reflejan la ausencia ó presencia de correlaciones, respectivamente.

Para describir la ausencia de correlaciones, se toma un Hamiltoniano en su forma diagonal $H = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, donde los eigenvalores x_i son números aleatorios no correlacionados.

En la siguientes secciones se verá con más cuidado cuáles son las propiedades que cumplen los hamiltonianos en un modelo con correlaciones, así como resultados analíticos para las fluctuaciones espectrales.

2.1.2. Ensembles gaussianos

En el marco de RMT, para entender los patrones de correlación que resultan frecuentes en diferentes áreas de la física, hay que introducir, en primera instancia, ensembles de matrices cuyos elementos están formados únicamente por números aleatorios. Las matrices H de $N \times N$ de estos ensembles, se pueden clasificar de acuerdo a su simetría[16]. En la notación de Dyson se utiliza el índice β para denotar cada una de las simetrías. Si el sistema no es invariante bajo inversiones temporales, H tiene que ser hermitiano y los elementos H_{nm} complejos ($\beta = 2$). En cambio, si el sistema es invariante bajo inversiones temporales, se distinguen dos casos: el sistema tiene simetría rotacional ó tiene espín entero y la simetría rotacional esta rota, en ambos casos la matriz H es real y simétrica ($\beta = 1$). Por último, si el sistema tiene espín semientero y la simetría rotacional está rota, H es autodual² y los elementos H_{nm} son cuaterniones ($\beta = 4$).

Dado que estamos interesados en las correlaciones de los eigenvalores, necesitamos diagonalizar las matrices. Para ello, se identifican tres grupos algebraicos. Si $\beta = 1$ el grupo que diagonaliza es el ortogonal $O(N)$, para $\beta = 2$ es el grupo unitario $U(N)$ y para $\beta = 4$ es el grupo simpléctico unitario $USp(2N)$.

²Un cuaternión q se define por

$$q = a \cdot 1 + bi_1 + ci_2 + di_3, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

i_1, i_2 e i_3 son las unidades cuaterniónicas y cumplen el álgebra $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1$. El dual (conjugado transpuesto) $\mathcal{Q}^\dagger = (q_{jk}^\dagger)$ de una matriz cuaterniónica $\mathcal{Q} = (q_{jk}) = (a_{jk} + b_{jk}i_1 + c_{jk}i_2 + d_{jk}i_3)$ se define por $q_{jk}^\dagger = \bar{q}_{kj}$. Una matriz cuaterniónica \mathcal{Q} es autodual si $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^\dagger$.

Para definir los *ensembles gaussianos* correctamente, además de las tres simetrías mencionadas, hay que introducir una densidad de probabilidad $P_N(H)$ para los elementos H_{nm} . La forma funcional de $P_N(H)$ es consecuencia [9] de la invariancia rotacional y la independencia estadística de los elementos de H no conectados por la simetría

$$P_N^\beta(H) = C_N^\beta \exp\left(-\frac{\beta}{4v^2} \text{tr}H^2\right), \quad (2.4)$$

donde C_N^β es una constante de normalización y v fija la escala de energía. La densidad de probabilidad 2.4 junto con las tres simetrías definen los *ensembles gaussianos*: gaussiano ortogonal (GOE), gaussiano unitario (GUE) y simpléctico (GSE) para $\beta = 1, 2$ y 4 respectivamente. Al mencionar la teoría canónica nos referiremos a estas tres clases de ensembles.

Se ha mencionado por completez el ensemble GSE, sin embargo, en lo que sigue nos enfocaremos únicamente en los ensembles GOE y GUE.

Como se dijo hace un momento, los elementos de matriz deben tener independencia estadística. Esto quiere decir que los elementos H_{nm} no sujetos a simetrías de ortogonalidad o unitariedad son números aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, *i.i.d.* en abreviatura. En particular, para generar este tipo de matrices se usan números aleatorios con distribución gaussiana, esto es, promedio igual a cero y varianza dada por

$$\langle H_{ij}H_{kl} \rangle = \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{\beta 1}\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (2.5)$$

según se trate de un GOE o un GUE.

2.1.3. Desdoblamiento del espectro y distribución de espaciamientos

Wigner [10] fue quien por primera vez derivó analíticamente la distribución de vecinos cercanos para matrices de 2×2 , considerando ensembles canónicos. Estas distribuciones son similares a las correspondientes para matrices de $N \times N$ ($N \rightarrow \infty$) [9, 16, 19].

La distribución de Wigner para el caso GOE, es la dada en 2.2

$$p(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), \quad (2.6)$$

y en el caso GUE es

$$p(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right). \quad (2.7)$$

En ambas distribuciones se verifica la repulsión de niveles. En 2.6 la probabilidad tiende a cero linealmente conforme $s \rightarrow 0$; este comportamiento se conoce como *repulsión lineal de niveles*. En cambio, en 2.7 la probabilidad va a cero cuadráticamente conforme $s \rightarrow 0$ y se conoce como *repulsión cuadrática de niveles*.

Para construir la NNSD debemos desdoblar el espectro $\{E_1, \dots, E_N\}$. En el caso de los ensembles canónicos el espectro corresponde a los eigenvalores. Una vez que el espectro ha sido desdoblado $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, la densidad de niveles promedio es igual a uno, i.e., la separación promedio entre vecinos consecutivos (espaciamiento) es igual a uno. En RMT, siempre se entiende que las fluctuaciones espectrales son estudiadas en el espectro desdoblado. Para explicar en más detalle el proceso de desdoblamiento, considérese la función escalera

$$N(E) = \sum_{n=1}^N \Theta(E - E_n), \quad (2.8)$$

función que cuenta el número de niveles con energía menor o igual que E . Se puede mostrar [20] que la función escalera se descompone en una función suave N_{av} y en otra con muchas fluctuaciones N_{fl} , esto es

$$N(E) = N_{av}(E) + N_{fl}(E). \quad (2.9)$$

En la Fig.2.3 se esquematiza un ejemplo típico de la función escalera y su correspondiente función suave. Al separar de esta manera la función escalera, lo que se tiene, por un lado, es la parte promedio del espectro y por el otro las fluctuaciones inherentes a dicho espectro.

Desdoblar el espectro consiste en evaluar $\{E_1, \dots, E_N\}$ en la función suave de 2.9

$$N_{av}(E_n) = \xi_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

En estas nuevas variables la función escalera esta dada por

$$\hat{N}(\xi) = \xi + \hat{N}_{fl}(\xi), \quad (2.11)$$

en estos términos, la densidad de niveles promedio viene dada por la derivada de la parte suave de 2.11 con respecto a ξ , la cual evidentemente es igual, como se necesita.

Puesto que $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ es el espectro desdoblado 2.10, la NNSD se calcula al considerar las diferencias $s_i = \xi_{i+1} - \xi_i$. De esta manera, lo último

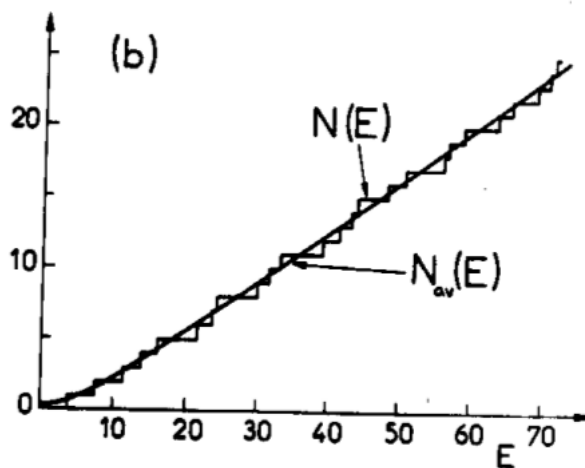


Figura 2.3: Función escalera $N(E)$ y su promedio $N_{av}(E)$. Nótese que la parte suave se obtiene después de un ajuste polinomial. Tomado de [20].

que falta saber es cómo calcular $N_{av}(E)$. Para ello, lo que se hace en la práctica es un ajuste polinomial de la función escalera $N(E)$. Sin embargo, hacer este tipo de ajustes tiene sus puntos finos: el polinomio ajustado no debe ser “demasiado bueno” entendiéndose que debido a las fluctuaciones propias del espectro, un polinomio de grado alto lo único que haría es eliminarlas, siendo éstas, como ya se ha dicho, el objeto fundamental de nuestro estudio. Por otro lado, un ajuste con un polinomio de grado muy bajo, no garantizará una densidad de niveles promedio igual a uno.

Al hacer simulaciones numéricas, hay dos maneras de hacer el desdoblamiento. La primera consiste en desdoblar espectro por espectro (desdoblamiento espectral), mientras que en la segunda, se traslapan los eigenvalores del ensemble para ajustar únicamente un polinomio (desdoblamiento en el ensemble).

Como un adelanto de lo que viene, los ensembles embebidos también se desdoblan de la manera introducida en esta sección, siendo conveniente el desdoblamiento espectral, debido a propiedades particulares de estos ensembles.

2.2. Ensembles Embebidos

2.2.1. Origen

Como hemos mencionado, RMT se ha aplicado con éxito en diversos sistemas físicos. Sin embargo, desde los orígenes mismos de la teoría han existido dudas sobre qué tan realistas son las suposiciones hechas en la misma. Consideremos el modelo nuclear de capas. Una de las predicciones más remarcables del modelo, es el hecho de que en los núcleos sólo hay interacciones de uno y dos cuerpos. Por otra parte, el uso de la teoría canónica equivale a suponer la interacción de muchos cuerpos entre los constituyentes del sistema [15]. Así las cosas, no resulta claro como es que la teoría canónica resulta útil para predecir fluctuaciones en espectros nucleares.

Con el fin de tener un modelo más realista sobre las interacciones nucleares, Mon y French [13] introdujeron los *ensembles embebidos de k -cuerpos*. Esta clase de ensembles se pueden ver como un modelo genérico para estudiar sistemas estocásticos de muchos cuerpos. De manera general, se consideran m fermiones ó bosones, en l estados degenerados de una partícula, los cuales interactúan con k -cuerpos aleatoriamente, siendo k el *rango de interacción*. El caso $k = 2$ se muestra como el más importante, sin embargo, también resulta interesante la transición de $k = 1$ a $k = m$, pues cuando el número de partículas es igual al rango de interacción se obtienen los ensembles de la teoría canónica. Como en RMT, aquí también se está interesado en estudiar objetos como la densidad de niveles o la NNSD; para ello se debe considerar el límite de matrices con dimensión infinita, i.e., haciendo l tender a infinito.

2.2.2. Definición

Consideremos [21] m fermiones o bosones sin espín, distribuidas en l estados degenerados de una partícula. Dichos estados pertenecen al espacio de Fock y se denotan por $|j\rangle$, donde $j = 1, \dots, l$ y son vectores ortonormales que generan el espacio de Hilbert. Los operadores de creación y aniquilación asociados a los estados $|j\rangle$ se denotan por a_j^\dagger y a_j en el caso de fermiones y por b_j^\dagger y b_j en el caso de bosones. Como un ejemplo de lo anterior, veamos que en el caso de fermiones cualquier estado se puede obtener de la siguiente manera

$$|\mu\rangle = a_{j_1}^\dagger \cdots a_{j_m}^\dagger |0\rangle, \quad (2.12)$$

donde $|0\rangle$ denota el estado vacío.

Con el fin de construir cada elemento de matriz, se define la interacción aleatoria de k -cuerpos. Para ello, introducimos operadores que crean y normlizan

estados con $k \leq l$ fermiones o k bosones del vacío. En el caso de fermiones, el operador de k cuerpos es

$$\psi_{k,\alpha}^\dagger \equiv \psi_{j_1, j_2, \dots, j_k}^\dagger = \prod_{s=1}^k a_{j_s}^\dagger, \quad (2.13)$$

donde $j_1 < j_2 < \dots < j_m$. La etiqueta k define el número de operadores de creación de una sola partícula. La cadena de desigualdades en j_i sólo es una convención para definir cada estado de manera única. Notemos que al permutar los índices $\{j_i\}_{i=1, \dots, m}$ en 2.12, obtenemos el mismo estado salvo una fase, para evitar esta clase de ambigüedades es que se utiliza la convención anterior. Por último, el índice α representa al conjunto $\{j_1, \dots, j_k\}$. El operador de aniquilación asociado es

$$\psi_{k,\alpha} = \left(\psi_{k,\alpha}^\dagger \right)^\dagger. \quad (2.14)$$

Para bosones, el operador de k -cuerpos tiene la forma

$$\chi_{k,\alpha}^\dagger = \chi_{j_1, j_2, \dots, j_k}^\dagger = N_\alpha \prod_{s=1}^k b_{j_s}^\dagger, \quad (2.15)$$

donde $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m$. N_α es un factor de normalización el cual garantiza que el estado $\chi_{k,\alpha}^\dagger |0\rangle$ tenga norma uno. A su vez N_α contiene un factor $1/\sqrt{n!}$ por cada conjunto de n índices idénticos j contenidos en α .

La interacción aleatoria de k -cuerpos V_k para fermiones se define como

$$V_k = \sum_{\alpha\gamma} v_{k;\alpha\gamma} \psi_{k,\alpha}^\dagger \psi_{k,\gamma}. \quad (2.16)$$

Análogamente, V_k se define para bosones utilizando el operador $\chi_{k,\alpha}$, en lugar del operador de fermiones $\psi_{k,\alpha}$.

Las simetrías usadas en el caso canónico, también se pueden introducir aquí, aunque de una manera diferente. Si $\beta = 1$ los coeficientes $v_{k;\alpha\gamma}$ son reales y cumplen

$$v_{k;\alpha\gamma} = v_{k;\alpha\gamma}^* = v_{k;\gamma\alpha}. \quad (2.17)$$

En cambio, si $\beta = 2$ los elementos de matriz son complejos y cumplen

$$v_{k;\alpha\gamma} = v_{k;\gamma\alpha}^*. \quad (2.18)$$

Para $\beta = 1$ ($\beta = 2$) se define el ensemble gaussiano ortogonal (unitario) de k cuerpos, los cuales se abrevian como EGOE(k) y EGUE(k) respectivamente. Del mismo modo, para bosones denotamos a estos ensembles por BEGOE(k) y BEGUE(k). Ambos grupos de ensembles se conocen como ensembles gaussianos embebidos o de manera abreviada EGE's.

Los elementos de matriz no relacionados por las simetrías 2.17 o 2.18 son variables aleatorias i.i.d., con distribución gaussiana, es decir, promedio cero y varianza v_0^2

$$\overline{v_{k;\alpha\gamma}v_{k;\alpha'\gamma'}} = v_0^2(\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\gamma\gamma'} + \delta_{\beta 1}\delta_{\alpha\gamma'}\delta_{\gamma\alpha'}). \quad (2.19)$$

Las deltas de Kronecker quieren decir $\delta_{j_1j'_1}\delta_{j_2j'_2}\dots$. La barra superior indica que el promedio es sobre el ensemble. La elección de v_0^2 fija la escala de energía del ensemble que se esté tratando. Sin pérdida de generalidad, tomamos la varianza igual a uno en lo que resta. Como se ve de las propiedades anteriores, los coeficientes $v_{k;\alpha\gamma}$ son elementos de matriz de ensembles canónicos según se tenga $\beta = 1, 2$. La dimensión de estas matrices es

$$n = \binom{l}{k}. \quad (2.20)$$

Como se dijo al principio de la sección, el espacio de Hilbert es generado por los estados $|j\rangle$. Estos estados de una partícula, resultan luego de distribuir en ellos $m \leq l$ fermiones o m bosones. Para construir cada uno de los estados del espacio de Hilbert, se calcula $\psi_{m,\alpha}^\dagger|0\rangle$ en el caso de fermiones y $\chi_{m,\alpha}^\dagger|0\rangle$ en el caso de bosones, esto quiere decir que se deben considerar todas las posibles permutaciones de los índices j_i contenidos en α . De esta manera, el número total de estados, i.e., la dimensión del espacio, es

$$N = \binom{l}{m}, \quad (2.21)$$

para fermiones. Para bosones se tiene

$$N_B = \binom{l+m-1}{m}. \quad (2.22)$$

Para construir las matrices embebidas sólo falta tomar los productos interiores $\langle\nu|V_k|\mu\rangle$, para calcular cada una de las entradas. En otras palabras, se necesita “embeber” la interacción de k -cuerpos $V_k(\beta)$ en el espacio de

m -partículas.

Hemos visto que la simetría ortogonal y unitaria se ha introducido a través de los coeficientes $v_{k;\alpha\gamma}$ incluidos en la definición de la interacción. Esto quiere decir que los EGE's son invariantes sólo en el espacio de k -partículas. Por esta razón, el tratamiento analítico del estudio de las fluctuaciones en los EGE's es más complicado que en el caso canónico, siendo las simulaciones numéricas una de las herramientas más importantes.

2.2.3. Densidad de niveles y distribución de espaciamientos

En esta sección presentaremos los resultados más importantes que se conocen para ensembles embebidos relacionados con la densidad de niveles promedio y la distribución de primeros vecinos. Nos basaremos principalmente en el artículo de revisión de Benet y Weidenmüller (2003)[15]; sin embargo, otras referencias útiles son [16, 22, 23]. Como se ha dicho, el estudio analítico de los ensembles embebidos es más complicado que el caso canónico. Es por esta razón que los trabajos numéricos han sido de gran ayuda para comprender sus propiedades espectrales.

Existen dos regímenes en los cuales se pueden estudiar las fluctuaciones de los EGE's: el límite diluido y el límite denso. Recordemos que las tres cantidades que definen un EGE son: el número de partículas m , el rango de interacción k y el número de niveles l . El límite diluido se define como aquél donde $k \ll m \ll l$, $m \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$ y $m/l \rightarrow 0$. El límite denso es aquél donde $m \rightarrow \infty$ con l y k fijos. Este segundo caso sólo es posible aplicarlo a bosones, puesto que sólo en bosones es posible ocupar los estados con más de una partícula por nivel.

En el límite diluido, la densidad de niveles promedio es gaussiana sin importar que se trate de fermiones o bosones

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.23)$$

con anchura $\sigma^2 = \binom{m}{k} \binom{l-m+k}{k}$. Existe una transición en la forma del espectro al pasar de gaussiana a circular conforme k pasa de $k = 1$ a $k = m$. Este último caso corresponde a las matrices de la teoría canónica [21].

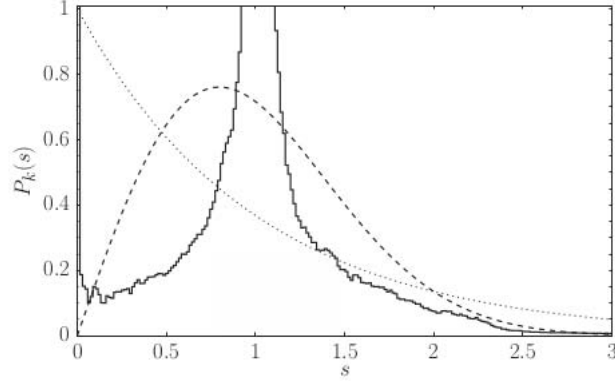


Figura 2.4: Distribución de espaciamiento a primeros vecinos obtenida para un sistemas de bosones BEGOE(2) de 2 niveles. En la simulación se consideran $m = 2000$ partículas. La línea discontinua corresponde a la conjetura de Wigner y la punteada a la distribución de Poisson. Tomado de [24].

Para fermiones, en general, la NNSD coincide con las distribuciones del caso canónico. Sin embargo, en el límite diluido aún se necesita mayor evidencia que sustente esta afirmación.

Veamos, también, que para hallar la distribución de vecinos cercanos es necesario desdoblarse el espectro. Como se mencionó al principio del capítulo, existen dos maneras de hacer esto: por ensemble o por espectro. Históricamente, cuando recién habían sido introducidos los EGE's el desdoblamiento se hacía sobre el ensemble. Al comparar las distribuciones de espaciamientos con la teoría canónica se encontró una franca discrepancia, lo cual llevó a considerar la idea (errónea) de que los núcleos estaban gobernadas por fuerzas de muchos cuerpos [15], pues los datos experimentales coincidían con las predicciones del GOE. Pronto se encontró que las discrepancias entre los dos tipos de ensembles se debía a que los EGE's no son ergódicos. Esto significa que en general los resultados que se obtienen por promedios en el ensemble serán diferentes a los resultados obtenidos por espectro. Debido a esto, es preferible hacer el desdoblamiento por espectro. Para realizar el desdoblamiento por ensemble de manera correcta, se ha mostrado [25] que ajustando el ancho de la distribución y recentrando cada miembro del ensemble, se obtienen los resultados canónicos. Esto quiere decir que si E es un

eigenvalor de la distribución, entonces la nueva variable es $\hat{E} = (E - E_c)/\sigma$, donde E_c es el centroide de la distribución y σ^2 su correspondiente varianza.

En el caso de bosones, los primeros resultados mostraban que en el límite denso presentaban propiedades similares a fermiones; sin embargo se ha encontrado que no es el caso. Más aún, el espectro no es ergódico y tampoco existe alguna base teórica para hacer una normalización como en el caso fermionico. Esto implica que únicamente es válido desdoblar el ensemble por espectro. Consideremos la figura 2.4; en ella se muestra la distribución de espaciamiento a primeros vecinos para un sistema bosónico BEGOE(2) en el límite denso. Claramente se observa que la distribución del BEGOE no se parece en absoluto a la conjetura de Wigner. Así, tenemos un sistema con propiedades distintas a lo visto con anterioridad. Este caso es importante, pues más adelante cuando se estudie la decoherencia de un qubit, encontraremos que esta clase de sistemas traerán consigo resultado distintos en lo que concierne a un qubit interactuando con ambientes aleatorios.

Capítulo 3

Decoherencia: conceptos fundamentales

En este capítulo repasaremos algunas ideas básicas que se encuentran en el estudio de los sistemas cuánticos abiertos. En particular, nos enfocaremos en el estudio de la *matriz de densidad*, que es la herramienta más importante para describir la evolución temporal de un subsistema de un sistema compuesto o un sistema.

En general, una vez que el sistema cuántico ha evolucionado, se está interesado en algún subsistema particular del sistema compuesto. Para entender la información contenida en este subsistema, será muy importante introducir los conceptos de *enredamiento* y *decoherencia*. En particular, la decoherencia tiene un papel clave en el estudio de sistemas abiertos y, por ende, en este trabajo.

Por ahora, comenzaremos con algunos conceptos elementales de Mecánica Cuántica.

3.1. Estados puros y evolución unitaria

Como es bien sabido, la evolución de un sistema puro se puede describir en términos del vector de estado normalizado $|\psi\rangle$ ¹ que pertenece al espacio de Hilbert \mathcal{H} . Dicho estado contiene toda la información que se puede conocer del sistema [3].

¹En otras palabras, cualquier estado puro está descrito de manera única por un rayo en el espacio de Hilbert \mathcal{H} .

El vector de estado $|\psi(t)\rangle$ evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle, \quad (3.1)$$

donde $H(t)$ es el Hamiltoniano del sistema y la constante de Planck \hbar se toma igual a 1. La solución de la ecuación de Schrödinger se puede escribir en términos del operador de evolución unitario $U(t, t_0)$, el cual lleva el estado $|\psi(t_0)\rangle$, en algún tiempo inicial t_0 , al estado $|\psi(t)\rangle$ al tiempo t ,

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (3.2)$$

Sustituyendo la expresión anterior 3.2 en la ecuación de Schrödinger 3.1 se obtiene la ecuación de evolución para el operador $U(t, t_0)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0), \quad (3.3)$$

sujeta a la condición inicial

$$U(t_0, t_0) = I. \quad (3.4)$$

La ecuación 3.3 se puede integrar directamente cuando el sistema físico es *cerrado* y *aislado*, i.e., el Hamiltoniano H no depende del tiempo. Entonces,

$$U(t, t_0) = \exp[-iH(t - t_0)]. \quad (3.5)$$

No obstante, si el Hamiltoniano depende del tiempo, la solución de 3.3 se puede escribir de la siguiente manera:

$$U(t, t_0) = T_{\leftarrow} \exp \left[-i \int_{t_0}^t ds H(s) \right], \quad (3.6)$$

donde T_{\leftarrow} es el operador cronológico². En este caso se dice que el sistema sigue siendo cerrado, pero no aislado. Es decir, se usará el término *aislado* para indicar que el Hamiltoniano del sistema es independiente del tiempo.

3.2. Matriz de densidad

A menudo, el estado de un sistema cuántico no está totalmente determinado, por lo que únicamente se puede afirmar que el sistema tiene ciertas

²En inglés, *time-ordering operator*.

probabilidades $\{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots\}$ de encontrarse en alguno de los estados tomados del ensemble $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_i\rangle, \dots\}$. En este caso se tiene un *estado mezcla* o *mezcla propia*. Para describir el ensemble estadístico de estados puros se introduce el formalismo del *operador de densidad*. Éste se define como una suma convexa de proyectores de estados puros, pesados con sus correspondientes probabilidades,

$$\rho = \sum_{i=1}^m p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (3.7)$$

con $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$. Si el estado es puro, entonces sólo hay un estado posible con probabilidad uno y el operador densidad es

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (3.8)$$

Brevemente, repasamos algunas propiedades importantes de la matriz de densidad 3.8,

$$\text{Tr } \rho = 1, \quad (3.9)$$

$$\rho = \rho^\dagger, \quad (3.10)$$

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0, \quad \text{para toda } \psi. \quad (3.11)$$

Tomando el punto de vista de von Neumann, asumimos que las observables son matrices hermitianas. De esta manera, cualquier observable \mathcal{O} asociado a un sistema físico se calcula del siguiente modo,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathcal{O}). \quad (3.12)$$

Por otra parte, el grado de pureza o mezcla de un estado cuántico se puede cuantificar en términos del operador ρ^2 ,

$$\text{Tr } \rho^2 \leq 1, \quad (3.13)$$

la igualdad se da en el caso de tener un estado puro y la desigualdad si se tiene un estado mezclado.

En analogía con la ecuación de Schrödinger, se puede derivar una ecuación de movimiento para ρ . Consideremos algún tiempo inicial t_0 en el cual el sistema de interés se encuentra caracterizado por

$$\rho(t_0) = \sum_i p_i |\psi(t_0)\rangle \langle \psi(t_0)|, \quad (3.14)$$

donde $|\psi(t_0)\rangle$ evoluciona de acuerdo con 3.1. Por lo tanto, el estado del sistema al tiempo t será

$$\rho(t) = \sum_i p_i U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \langle \psi(t_0)| U^\dagger(t, t_0), \quad (3.15)$$

o de manera abreviada

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t, t_0) U^\dagger(t, t_0). \quad (3.16)$$

Diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo se obtiene la ecuación de movimiento para la matriz de densidad,

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H(t), \rho(t)], \quad (3.17)$$

la cual también es conocida como ecuación de von Neumann.

La utilidad de la matriz de densidad no se reduce a sistemas mezclados. En la siguiente sección veremos aplicaciones importantes de la matriz de densidad a sistemas abiertos. Esto último es de interés, pues son los sistemas abiertos la clase de sistemas que se abordan en este trabajo.

3.3. Sistemas abiertos y decoherencia

En la sección 3.1 se introdujo el operador unitario de evolución $U(t, t_0)$, el cual describe la evolución temporal de cualquier sistema físico representado por el vector de estado $|\psi\rangle$. Después, en la sección anterior 3.2, se vio que la matriz de densidad $\rho(t)$ da la descripción más general de cualquier sistema físico. Aquí también $U(t, t_0)$ evoluciona en el tiempo la matriz de densidad, según la ecuación 3.16. En cualquier caso, se dice que la evolución del sistema es unitaria.

En esta sección veremos que existe otra clase de sistemas, donde no es posible hacer una descripción en términos de evolución unitaria. Para ello, debemos introducir previamente el concepto de sistemas compuestos.

3.3.1. Sistemas compuestos

Consideremos dos sistemas cuánticos $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ asociados respectivamente a los espacios de Hilbert $H^{(1)}$ y $H^{(2)}$. Los dos sistemas pueden representar dos objetos compuestos diferentes (ej. dos átomos o moléculas), o dos diferentes grados de libertad del mismo objetos (ej. los grados de libertad de

rotación y traslación de una molécula). En general $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ interactúan entre sí. El espacio de Hilbert del sistema compuesto $S = S^{(1)} + S^{(2)}$ está dado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert pertenecientes a los subsistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$,

$$H = H^{(1)} \otimes H^{(2)}. \quad (3.18)$$

Consideremos las bases ortonormales $|\varphi_i^{(1)}\rangle$ y $|\varphi_j^{(2)}\rangle$ para $H^{(1)}$ y $H^{(2)}$ respectivamente. Un estado general en el espacio dado por H se puede escribir como

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} \alpha_{ij} |\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle. \quad (3.19)$$

Esto quiere decir que los elementos $|\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle$ forman una base en el espacio H y que la dimensión de este espacio es igual al producto de las dimensiones de $H^{(1)}$ y $H^{(2)}$.

Si $A^{(1)}$ es un operador que actúa en $H^{(1)}$ y $A^{(2)}$ es un operador que actúa en $H^{(2)}$, entonces cualquier operador que actúa en H se puede representar como una combinación lineal de productos tensoriales

$$A = \sum_i A_i^{(1)} \otimes A_i^{(2)}, \quad (3.20)$$

donde el producto tensorial $A^{(1)} \otimes A^{(2)}$ aplicado a un elemento de la base de H se define por

$$(A^{(1)} \otimes A^{(2)})(|\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle) \equiv (A^{(1)}|\varphi_i^{(1)}\rangle) \otimes (A^{(2)}|\varphi_j^{(2)}\rangle). \quad (3.21)$$

El conjunto de todas las matrices de densidad se denotará por $S(H)$. Si los subsistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ se encuentran *no correlacionados*, la matriz de densidad total toma la forma,

$$\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}. \quad (3.22)$$

En el caso en que se esté interesado en observables asociadas al sistema $S^{(1)}$, i.e., operadores de la forma

$$A = A^{(1)} \otimes I^{(2)}, \quad (3.23)$$

es conveniente introducir la *matriz de densidad reducida* correspondiente al subsistema en cuestión, por medio de

$$\rho^{(1)} \equiv \text{tr}^{(2)} \rho, \quad (3.24)$$

donde $\text{tr}^{(2)}$ indica la traza parcial tomada sobre el espacio de Hilbert $H^{(2)}$. La matriz reducida describe las propiedades estadísticas que pertenecen al subsistema bajo estudio, pues el valor de expectación de cualquier observable de la forma 3.23 se puede calcular de la siguiente manera:

$$\langle A \rangle = \text{tr}^{(1)}\{A^{(1)}\rho^{(1)}\}. \quad (3.25)$$

$\rho^{(1)}$ es también llamada *mezcla impropia* pues en algunos casos llega a tener la forma de una mezcla propia 3.7.

3.3.2. Enredamiento y descomposición de Schmidt

Un fenómeno muy interesante e importante en mecánica cuántica, es el de *enredamiento*. Consideremos una vez más un sistema cuántico denotado por S , descrito por el vector de estado $|\Psi\rangle$, que está compuesto por los subsistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ (en tal caso se dice que S es un sistema bipartito). El vector de estado $|\Psi\rangle$ se encuentra enredado respecto a $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ si no puede ser escrito como el producto tensorial de vectores de estado de estos dos subsistemas, i.e., si no existen vectores de estado $|\psi^{(1)}\rangle$ de $S^{(1)}$ y $|\psi^{(2)}\rangle$ de $S^{(2)}$ tal que $|\Psi\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle$. Este tipo de estados pueden aparecer, por ejemplo, cuando se tiene un sistema compuesto, que al tiempo inicial t_0 se encuentra no correlacionado $|\psi^{(1)}(t_0)\rangle \otimes |\psi^{(2)}(t_0)\rangle$ y conforme evoluciona, $|\psi^{(1)}\rangle$ y $|\psi^{(2)}\rangle$ empiezan a desarrollar correlaciones entre sí, de manera que al tiempo t no es posible escribirlo como el producto tensorial de dos estados de los subsistemas.

El concepto de enredamiento puede ser definido en términos de la descomposición de Schmidt [4]. Este teorema afirma que para cualquier estado $|\Psi\rangle \in H^{(1)} \otimes H^{(2)}$ existen bases ortonormales, las bases de Schmidt $|\chi_i^{(1)}\rangle$ y $|\chi_j^{(2)}\rangle$ en $H^{(1)}$ y $H^{(2)}$ respectivamente, tal que

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\chi_i^{(1)}\rangle \otimes |\chi_i^{(2)}\rangle. \quad (3.26)$$

Los números complejos α_i se conocen como coeficientes de Schmidt. El número de coeficientes de Schmidt distintos de cero se llama número de Schmidt. Se sigue de la descomposición de Schmidt, que $|\Psi\rangle$ se encuentra no enredado si y sólo si el número de Schmidt es igual a 1.

Otro concepto útil es el siguiente: si el valor absoluto de todos los coeficientes de Schmidt distintos de cero, para un estado dado Ψ , son iguales entre sí, se dice que el estado se encuentra *máximamente enredado*.

3.3.3. Sistemas abiertos y el proceso de decoherencia

De manera genérica, un *sistema abierto* [4] es un sistema cuántico S , conocido como *sistema central*, acoplado a otro sistema cuántico B , conocido como *ambiente*. Así, se tiene un sistema total $S + B$ compuesto (ver subsección 3.3.1). Se asume que el sistema compuesto es cerrado.

Denotemos por H_S el espacio de Hilbert del sistema central y por H_B el espacio de Hilbert del ambiente. El espacio de Hilbert del sistema total $S + B$ está dado por el producto tensorial $H = H_S \otimes H_B$. El Hamiltoniano total $H(t)$ se puede escribir como

$$H(t) = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + \lambda H_I(t), \quad (3.27)$$

donde H_S es el Hamiltoniano del sistema central S , H_B es el Hamiltoniano del ambiente B , $H_I(t)$ es el Hamiltoniano que describe la interacción sistema central-ambiente y λ es la magnitud del acoplamiento.

La decoherencia [1] es un fenómeno cuántico que resulta de la interacción entre el sistema central S y el ambiente B . Típicamente, estas interacciones llevarán a cualquier estado inicialmente no correlacionado, al tiempo t_0 , $\rho^{(S)}(t_0) \otimes \rho^{(B)}(t_0)$ al estado enredado $\rho(t)$.

Usualmente, el observador llevará a cabo mediciones en el subsistema de interés, en este caso en el sistema central, mientras que el ambiente resulta inaccesible, no puede ser medido ó simplemente no es de interés. Sin embargo, debido a las correlaciones que surgen de la interacción sistema central-ambiente, no es posible describir el sistema central S en términos de evolución unitaria, pues se encuentra enredado con el ambiente B . No obstante, el sistema compuesto $S + B$ sí evoluciona unitariamente.

Para obtener información del sistema central, es conveniente tomar la traza parcial sobre los grados de libertad del ambiente, según la ecuación 3.24:

$$\rho_S = \text{tr}_B \rho. \quad (3.28)$$

ρ_S se conoce como la matriz de densidad reducida. Toda la influencia que puede tener el ambiente en las mediciones hechas en el sistema central, serán automáticamente encapsuladas en esta matriz de densidad reducida [3]. Ponemos énfasis en el siguiente punto, debido a que el sistema central S se encuentra enredado con el ambiente B , ningún estado cuántico individual se puede atribuir al sistema S . En consecuencia, la matriz de densidad reducida es necesariamente no pura.

La matriz de densidad reducida $\rho_S(t)$ al tiempo t , se obtiene de la matriz de densidad $\rho(t)$ del sistema total, del siguiente modo,

$$\rho_S(t) = \text{tr}_B\{U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t_0)\}. \quad (3.29)$$

Esto es posible, pues como ya se dijo, la matriz de densidad total sí evoluciona unitariamente. $U(t, t_0)$ es el operador de evolución en el tiempo del sistema total.

La ecuación de evolución de la matriz de densidad reducida, se puede obtener tomando la traza parcial sobre el ambiente, en ambos lados de la ecuación de von Neumann del sistema total,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i\text{tr}_B[H(t), \rho(t)]. \quad (3.30)$$

Para finalizar el capítulo, definimos la *pureza* en analogía a la ecuación 3.13. Recordemos que en dicha ecuación se mide qué tan puro o mezclado se encuentra un sistema cuántico arbitrario. De igual manera, se puede extender esta medida al caso de sistemas abiertos. Puesto que se está interesado en estudiar el sistema central, se necesita previamente tomar la traza sobre los grados de libertad del ambiente,

$$P \equiv \text{tr}\rho_S^2 \leq 1. \quad (3.31)$$

Si $P=1$, el sistema S es puro (no se encuentra enredado con el ambiente). En cambio, si $P < 1$, tiene cierto grado de enredamiento con su ambiente. El valor mínimo que la pureza puede tomar es $1/N$, donde N es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema central.

Así, la pureza es una medida de decoherencia, i.e., la pureza cuantifica qué tan enredado se encuentra algún subsistema de interés con su ambiente.

Capítulo 4

Decoherencia de un qubit con ensembles embebidos

En este capítulo presentamos un estudio de la decoherencia de un qubit que interactúa con un ambiente modelado con ensembles embebidos. Como preámbulo, en los capítulos anteriores se introdujeron los conceptos necesarios para dicho estudio. En particular, se vio que un sistema abierto se encuentra formado por dos subsistemas: el sistema central S y el ambiente B . En nuestro modelo identificamos al sistema central con el qubit y al ambiente con el ensemble de matrices embebidas. A diferencias de trabajos previos [5, 11, 26] donde se consideran los ensembles canónicos GOE y GUE, introducimos los ensembles embebidos como un modelo más realista de interacción del qubit con el ambiente aleatorio. Recordemos que en la teoría canónica se asume una interacción de muchos cuerpos, mientras que con los EGE's se tiene control sobre el rango de interacción. Iniciamos la sección 4.1 con algunas observaciones sobre el qubit y a continuación se describe el modelo utilizando ensembles embebidos de sistemas fermiónicos y bosónicos. La sección 4.2 presenta los resultados obtenidos en este trabajo, la primera parte trata los resultados de fermiones, mientras que la segunda los de bosones.

4.1. Los modelos

4.1.1. Hamiltoniano de un qubit

Un qubit se refiere a un sistema cuántico de dos niveles. Los dos estados ortonormales asociados con el qubit son: $|1\rangle$ y $|0\rangle$. Cualquier estado se puede escribir como combinación lineal de estos vectores,

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|0\rangle, \quad (4.1)$$

donde c_1 y c_2 son números complejos tales que $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. El Hamiltoniano asociado al qubit se puede escribir en términos de la base anterior como

$$H_q = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(E_0 + E_1)\mathbb{I}_q + \frac{1}{2}(E_1 - E_0)\sigma_z, \quad (4.2)$$

donde E_0 y E_1 son las energías del estado base y del estado excitado, respectivamente, \mathbb{I}_q es la matriz identidad en el espacio 2-dimensional del qubit y σ_z es la matriz de Pauli dada por

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Las restantes matrices de Pauli son

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

El término proporcional a $E_1 + E_0$ en 4.2 es constante y puede omitirse si tomamos como origen de la energía el valor promedio de E_0 y E_1 [6]. El Hamiltoniano del qubit se simplifica a

$$H_q = \frac{\Delta}{2}\sigma_z, \quad \Delta = E_1 - E_0. \quad (4.5)$$

Para terminar esta sección, se definen los siguientes eigenestados asociados a los operadores 4.3 y 4.4,

$$|\psi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad |\psi_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Las etiquetas x, y y z indican a qué operador se encuentra asociado cada estado en 4.6.

4.1.2. Un qubit interactúa con un EGOE

Consideremos un qubit que interactúa con un ensemble embebido EGOE de un sistema de fermiones. El espacio de Hilbert total $\mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_e$, se divide en el espacio de Hilbert del qubit \mathcal{H}_q y el espacio de Hilbert \mathcal{H}_e del EGOE. Se supone que la evolución del sistema total es unitaria y su Hamiltoniano es

$$H = H_0 + \lambda V, \quad (4.7)$$

donde

$$H_0 = H_q \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_e \quad \text{y} \quad V' = v'_q \otimes V'_e. \quad (4.8)$$

H_q es el Hamiltoniano del qubit, Ec. 4.5. H_e y V'_e son matrices aleatorias tomadas del EGOE(2) y el EGOE(1) respectivamente. v'_q es alguna de las matrices de Pauli. Por último, λ' es un número real no negativo, que denota la magnitud de acoplamiento entre el qubit y el ambiente H_e .

Se asume que H_0 y V' tienen unidades de energía, por lo que λ es adimensional. Para fines prácticos, utilizaremos una escala de tiempo que resulta útil en modelos de decoherencia [5]. Ésta se conoce como escala de Heisenberg. El tiempo de Heisenberg τ_H del ambiente se define como,

$$\tau_H = 2\pi \frac{\hbar}{d_0}, \quad (4.9)$$

donde d_0 es el espaciamiento promedio del espectro de H_e . Si el tiempo físico t' se mide en unidades de \hbar/d_0 y se desdobra el espectro de H_e , entonces el tiempo de Heisenberg es constante e igual a 2π en unidades del tiempo adimensional $t = t'd_0/\hbar$.

Con el fin de tener un Hamiltoniano adimensional, se toma $\lambda' = d_0\lambda$, $H_q = d_0h_q$, $H_e = d_0h_e$ y $V' = d_0V$ tal que

$$H = d_0h, \quad h = h_0 + \lambda V. \quad (4.10)$$

Explícitamente,

$$H = h_q \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes h_e + \lambda v_q \otimes V_e. \quad (4.11)$$

En la ecuación anterior, se ha utilizado el hecho de que d_0 es igual a 1, lo cual es cierto una vez que el espectro de H_e ha sido desdoblado.

Notemos que el término de interacción V , Ecs. 4.10 y 4.11, se ha supuesto separable, como es el caso en la referencia [26]. Trabajos previos [5, 11] no lo consideraban así. En lo que sigue, estudiaremos el caso donde v_q y h_q no conmutan. El caso donde conmutan se conoce como *desfase*¹ [27], y

¹En inglés, dephasing.

asegura que la energía del sistema central se conserva.

Como último punto, observemos que el operador de evolución unitario $U(t)$ del sistema total, en unidades adimensionales, se escribe como

$$U(t) = e^{-iht}. \quad (4.12)$$

4.1.3. Un qubit interactúa con un BEGOE

En este caso, el ambiente aleatorio con el que interactúa el qubit, se reemplaza por un ensemble embebido de un sistema bosónico BEGOE. La descripción del sistema total es análoga al caso fermiónico.

El espacio de Hilbert del sistema $H_q \otimes H_B$ es el producto tensorial de los espacios de Hilbert del qubit H_q y el espacio de Hilbert H_B del BEGOE. El Hamiltoniano total H_B , escrito en unidades adimensionales, es

$$H_B = d_0 h_B, \quad h_B = h_{0B} + \lambda V_B, \quad (4.13)$$

es decir,

$$H_B = h_q \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes h_B + \lambda v_q \otimes V_{eB}. \quad (4.14)$$

Aquí h_B y V_{eB} son matrices aleatorias tomadas del BEGOE(2) y BEGOE(1) respectivamente. Como en el caso fermiónico, se asumirá que el espectro de h_B se encuentra desdoblado, tal que el tiempo de Heisenberg es igual a 2π . El operador de evolución del sistema total es de la forma 4.12, sustituyendo h por h_B .

4.2. Simulaciones numéricas

En esta sección presentamos los resultados numéricos que hemos obtenido. En la primera parte se considera el ambiente fermiónico. Se obtienen gráficas de la evolución de la pureza en el tiempo, una vez que el qubit y el EGOE empiezan a interactuar. Del mismo modo, se obtienen gráficas de las coherencias (elementos fuera de la diagonal de la matriz de densidad del sistema reducido), como función del tiempo. En la segunda parte se realiza un estudio similar, sólo que considerando el ambiente bosónico.

En ambos casos, durante las simulaciones, utilizamos un estado inicial puro y no enredado. Al tiempo inicial $t_0 = 0$, se tiene el estado inicial

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_q(0)\rangle \otimes |\psi_e(0)\rangle, \quad (4.15)$$

donde $|\psi_q\rangle$ es el estado asociado al qubit y $|\psi_e\rangle$ es el asociado al ambiente fermiónico ó bosónico. Para la parte del ambiente, se tomará un estado aleatorio normalizado. Desde un punto de vista físico, esta elección equivale a la condición inicial $\rho_e = \mathbb{I}/N_e$, con N_e la dimensión del ambiente [26].

Una vez construido el estado inicial, la simulación se lleva a cabo del siguiente modo. Puesto que el estado $|\Psi\rangle$ es puro y el sistema qubit-ambiente sigue una dinámica unitaria, se diagonalizan los Hamiltonianos dados por las ecuaciones 4.11 y 4.14, para después obtener el operador de evolución unitario $U(t)$ en su forma diagonal. A continuación se evoluciona $|\Psi\rangle$ en pasos fijos de tiempo, hasta cierto tiempo final t_f . En cada paso se calcula la matriz de densidad ρ_{qe} del sistema total, para luego calcular la matriz de densidad reducida del qubit ρ_q ,

$$\rho_q = \text{tr}_e(\rho_{qe}). \quad (4.16)$$

Por último, la decoherencia del qubit se mide en términos de pureza (ver Ec. 3.31),

$$P(t) = \text{tr}[\langle \rho_q(t) \rangle^2], \quad (4.17)$$

la cual se calcula después de promediar $\rho_q(t)$ sobre el número de realizaciones de Hamiltonianos aleatorios.

4.2.1. Ambiente fermiónico

Para la simulación numérica, V_e es una matriz EGOE(1), con el rango de interacción $k = 1$. h_e es una matriz diagonal con los eigenvalores desdoblados de un EGOE(2), tal que el espaciamiento de niveles promedio es igual a uno. La dimensión del ambiente N_e es igual a 210. Para ello, el EGOE(1) se define con los parámetros $k = 1$, $m = 6$ y $l = 10$. Mientras que para el EGOE(2) se toma $k = 2$, $m = 6$ y $l = 10$. En cada simulación se promedia sobre $n = 300$ realizaciones de Hamiltonianos aleatorios.

En las figuras 4.1 a 4.5 consideramos el caso donde $v_c = \sigma_x$ y usamos diferentes estados iniciales puros para el qubit. En todas ellas comparamos los resultados obtenidos con los correspondientes de la teoría canónica. En consecuencia, usamos ensembles GOE de la misma dimensión de los EGOE's.

En la figura 4.1 se muestra la pureza como función del tiempo, cuando el estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_x . En las curvas asociadas a los ambientes EGOE y GOE se usó la constante de

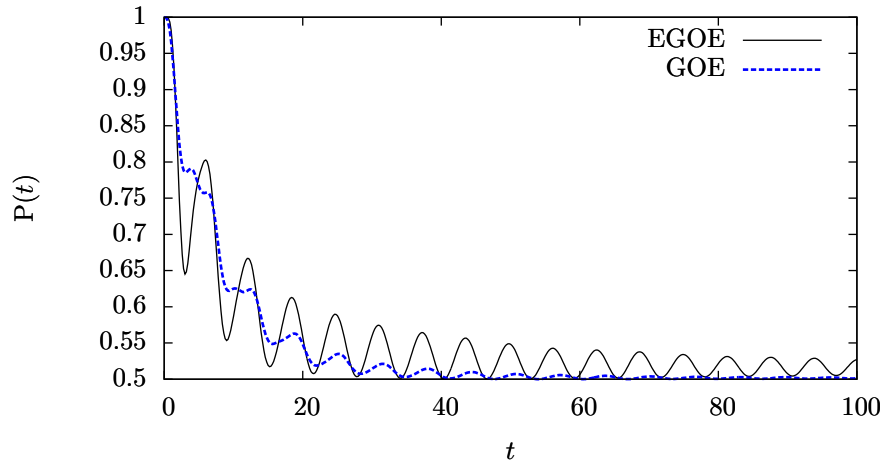


Figura 4.1: Pureza de la dinámica reducida del qubit como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_x , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$.

acoplamiento $\lambda = 0.1$. Vemos que las dos curvas tienen un comportamiento muy similar, con la diferencia de que las oscilaciones tienen mayor amplitud en el caso EGOE.

En la figura 4.2 se muestra la pureza como función del tiempo, cuando el estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_y . En las curvas asociadas a los ambientes EGOE y GOE se usó la constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$. En ambos casos, el estado de equilibrio del qubit se alcanza en 0.5. Aquí también se observa que las dos curvas se comportan casi igual.

En la figura 4.3 se muestra la pureza como función del tiempo, pero ahora el estado inicial del qubit es el eigenestado positivo de σ_z . En las curvas asociadas a los ambientes EGOE y GOE se usó la constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$. En el caso EGOE, el estado de equilibrio del qubit se encuentra alrededor de 0.72 mientras que en el GOE se encuentra alrededor de 0.67.

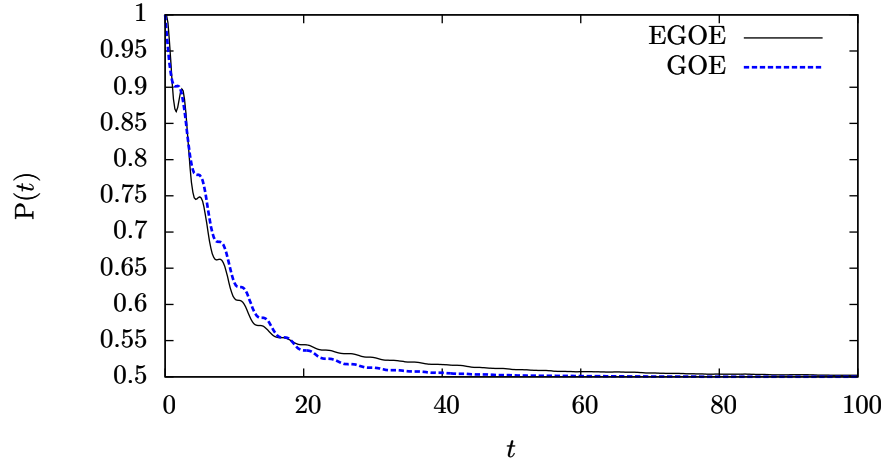


Figura 4.2: Pureza de la dinámica reducida del qubit como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_y , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$.

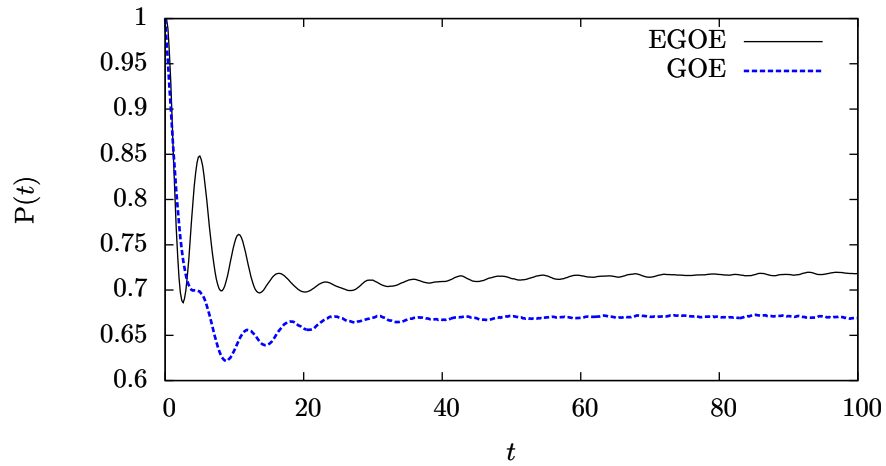


Figura 4.3: Pureza de la dinámica reducida del qubit como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado positivo de σ_z , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$.

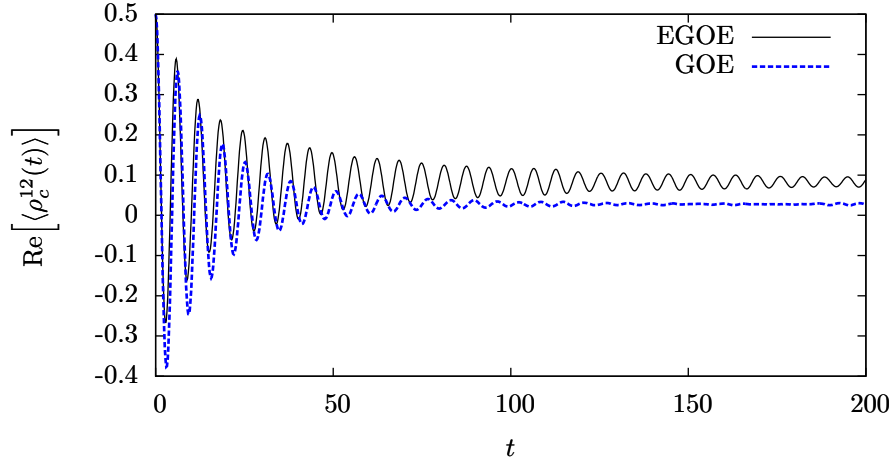


Figura 4.4: Parte real de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_x , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$.

En la figura 4.4 se muestra la parte real de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ como función del tiempo adimensional t . Como estado inicial del qubit se utiliza el eigenestado simétrico de σ_x . En las curvas asociadas a los ambientes EGOE y GOE se usó la constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$. En comparación con la figura 4.1 las diferencias entre ambos tipos de ambientes son más notorias, resaltando el hecho de que el estado de equilibrio no tiende al mismo valor.

En la figura 4.5 se muestra el módulo al cuadrado de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ como función del tiempo adimensional t . Como estado inicial del qubit se utiliza el eigenestado simétrico positivo de σ_x . En las curvas asociadas a los ambientes EGOE y GOE se usó la constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$. El comportamiento de cada curva es análogo respecto a la figura 4.1.

Comparando los resultados obtenidos con EGOE y GOE, vemos que al usar la misma constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$, la pureza tiende a decaer a un ritmo muy parecido con las dos clases de ambientes. Esto no resulta sorprendente, ya que, como se dijo antes, los ensembles EGOE/GOE presentan propiedades espectrales muy similares, siempre y cuando el espectro

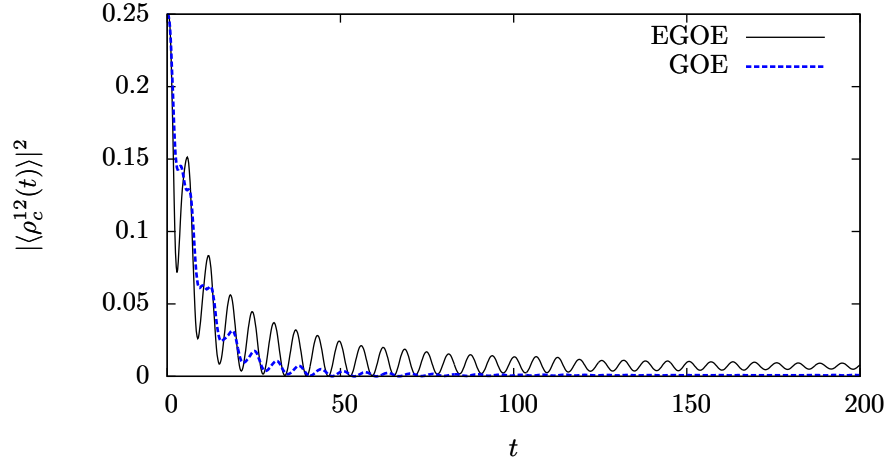


Figura 4.5: Módulo al cuadrado de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_x , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$.

del caso embebido, sea desdoblado correctamente [19, 20, 15, 21].

Como último comentario, aunque no menos importante, es el referido a las oscilaciones que se observan en las gráficas 4.1 a 4.5. Estas oscilaciones no se deben a la estadística empleada, sino que son el resultado de la dinámica de los modelos de matrices aleatorias empleados [26].

4.2.2. Ambiente bosónico

Para la simulación numérica usamos BEGOE's en el límite denso. V_{eB} es una matriz BEGOE(1), con $k = 1$ el rango de interacción. h_B es una matriz diagonal con los eigenvalores desdoblados de un BEGOE(2), tal que el espaciamiento de niveles promedio es igual a uno. La dimensión del ambiente N_e es igual a 231. Para ello, el BEGOE(1) se define con los parámetros $k = 1$, $m = 20$ y $l = 3$. Mientras que para el BEGOE(2) se toma $k = 2$, $m = 20$ y $l = 3$. En cada simulación se promedia sobre $n = 300$ realizaciones de Hamiltonianos aleatorios.

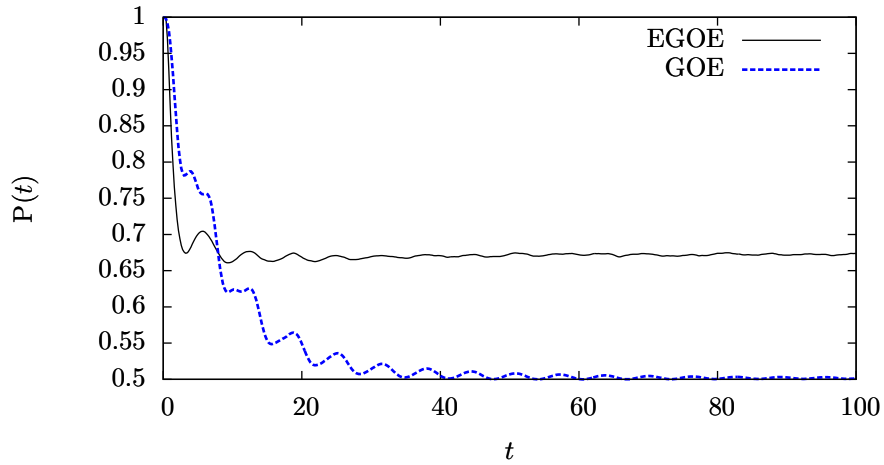
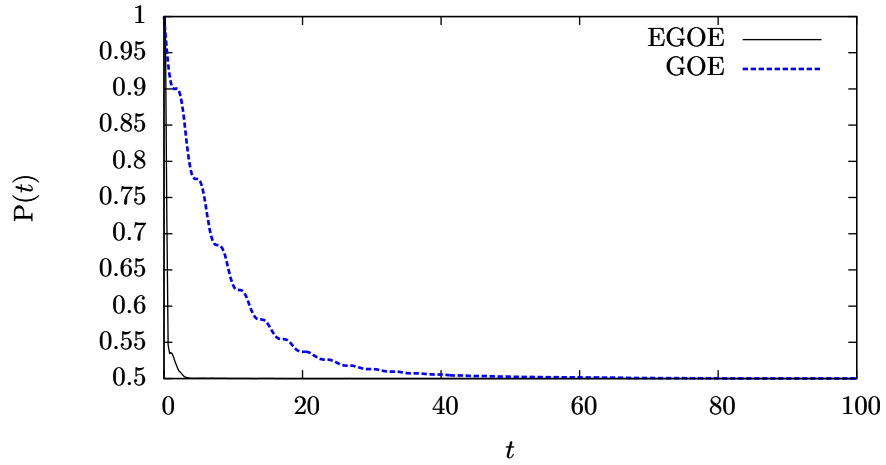


Figura 4.6: Pureza de la dinámica reducida del qubit como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_x , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$.

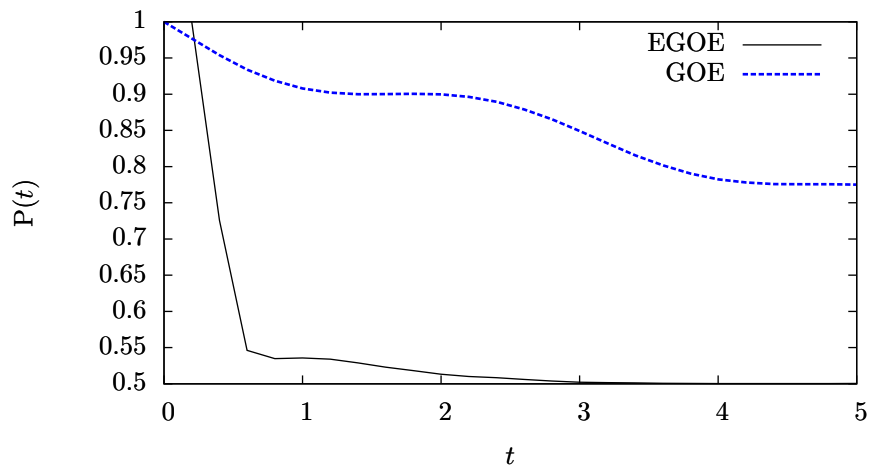
En las figuras 4.6 a 4.10 consideramos el acoplamiento $v_c = \sigma_x$ y se usan diferentes estados iniciales puros para el qubit. En todas ellas comparamos los resultados obtenidos, con los correspondientes de la teoría canónica. En consecuencia, usamos ensembles GOE de la misma dimensión de los BEGOE's.

En la figura 4.6 se muestra la pureza como función del tiempo. Como estado inicial del qubit se utiliza el eigenestado simétrico positivo de σ_x . En las dos curvas se usó la constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$. En la curva del GOE, la figura sugiere que el estado de equilibrio del qubit se alcanza en 0.5, en cambio, para el qubit con ambiente BEGOE, el estado de equilibrio parece encontrarse en 0.67. Además, las oscilaciones en el BEGOE son menos pronunciadas, en comparación al caso GOE.

En la figura 4.7 se muestra la pureza como función del tiempo. Como estado inicial del qubit se utiliza el eigenestado simétrico positivo de σ_y . En las curvas asociadas a los ambientes BEGOE y GOE se usó la constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$. La pureza del qubit asociada al BEGOE decae rápidamente, en un tiempo menor que el tiempo de Heisenberg. Esto contrasta



(a)



(b)

Figura 4.7: (a) Pureza de la dinámica reducida del qubit como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_y , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$. (b) Acercamiento en la curva asociada al BEGOE.

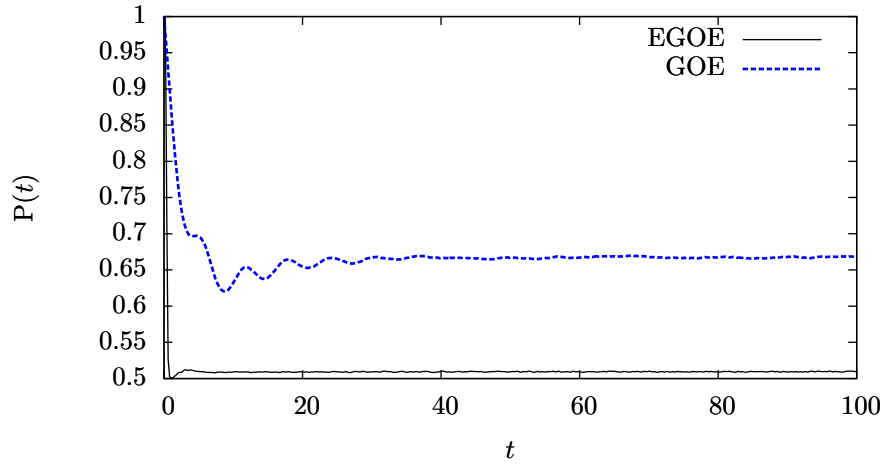
con las curvas asociadas al GOE, donde la pureza decae más lentamente.

En la figura 4.8 se muestra la pureza como función del tiempo. Como estado inicial del qubit se utiliza el eigenestado positivo de σ_z . En las curvas asociadas a los ambientes BEGOE y GOE se usó la constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$. La pureza del qubit asociada al BEGOE decae igual de rápido que el caso de la figura 4.7. En $t = 1$ existe un ligero resurgimiento de la pureza y se mantiene constante en 0.51. Para el caso GOE la pureza se estabiliza en 0.67.

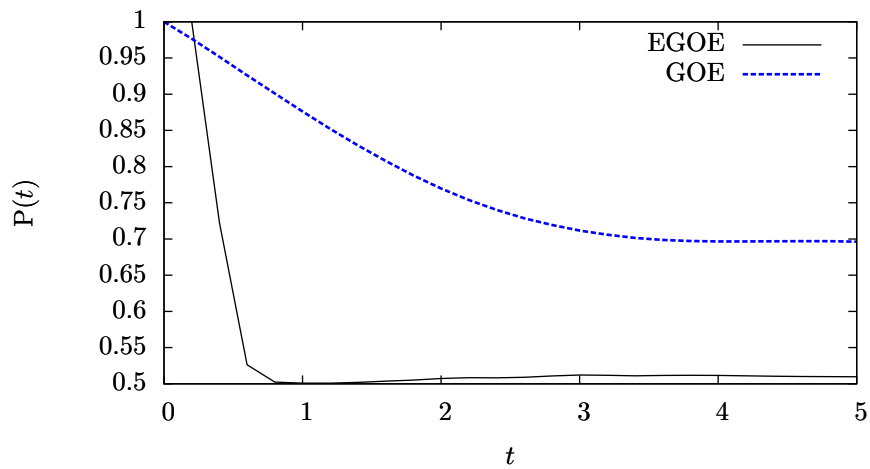
En la figura 4.9 se muestra el modulo al cuadrado de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ como función del tiempo adimensional t . Como estado inicial del qubit se utiliza el eigenestado simétrico positivo de σ_x . En las curvas asociadas a los ambientes BEGOE y GOE se usó la constante de acoplamiento $\lambda = 0.1$. El comportamiento de cada curva es análogo a las correspondientes en la figura 4.6.

En la figura 4.10 se muestra la pureza como función del tiempo adimensional t . Como estado inicial del qubit se utiliza el eigenestado simétrico positivo de σ_x . En esta gráfica se observa como cambia el comportamiento de la pureza, al considerar el ambiente bosónico BEGOE en función de la magnitud de acoplamiento λ . En este caso, encontramos que al disminuir el valor de λ entre el qubit y el ambiente, la pureza tiende a decaer más lentamente.

En las figuras 4.6 a 4.10 se encontró un comportamiento claramente diferente en la dinámica reducida del qubit acoplado a un ambiente bosónico, del que tiene cuando está acoplado a un ambiente fermiónico o un ambiente GOE. A primera vista, esto no resulta difícil de comprender, pues es un hecho bien sabido que sistemas fermiónicos y bosónicos siempre han presentado propiedades diferentes y hasta contrastantes. Por otra parte, las propiedades espectrales de ensembles embebidos de bosones y fermiones no presentan mayores diferencias, si se consideran valores similares de k , m y l . Como se dijo al principio de esta subsección, el ensemble embebido para bosones, se definió con parámetros que lo sitúan en el límite denso. Se ha visto que las propiedades espectrales de los BEGOE's en este límite [15, 24] distan de presentar un comportamiento similar a los ensembles de la teoría canónica (GOE, GUE) y, por ende, de los ensembles embebidos para fermiones. Pensamos que esta es una de las razones, por las cuales, las curvas asociadas a los BEGOE's son muy diferentes a las asociadas a los GOE's.



(a)



(b)

Figura 4.8: (a) Pureza de la dinámica reducida del qubit como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado positivo de σ_z , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$. (b) Acercamiento en la curva asociada al BEGOE.

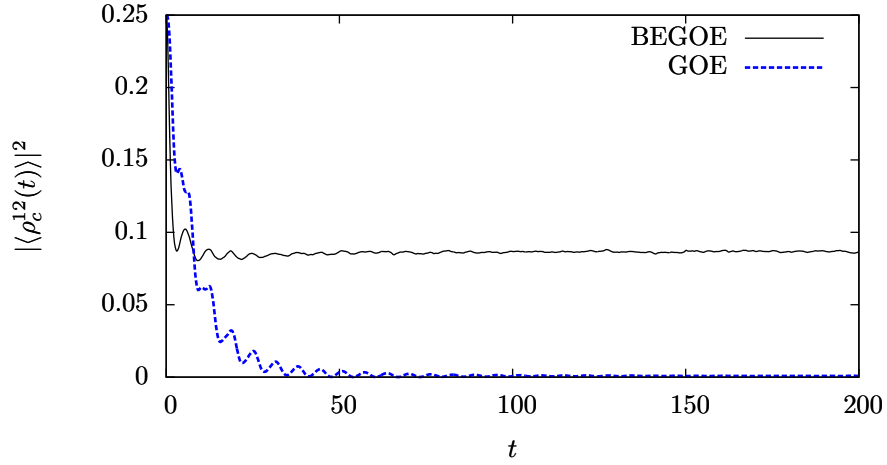


Figura 4.9: Módulo al cuadrado de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_x , $\Delta = 1$ y $\lambda = 0,1$.

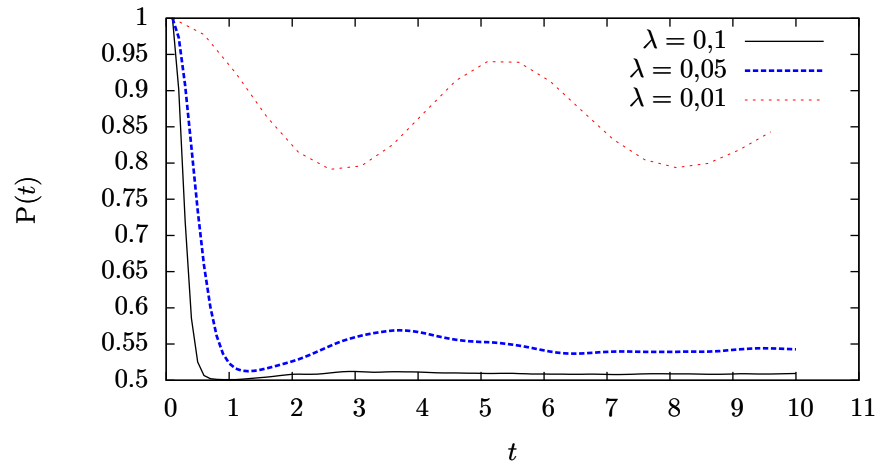


Figura 4.10: Módulo al cuadrado de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ como función del tiempo adimensional t , donde el tiempo de Heisenberg es $t = 2\pi$. El estado inicial del qubit es el eigenestado simétrico positivo de σ_x y se toma $\Delta = 1$.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado numéricamente la decoherencia de estados puros de un qubit, sujeto a un ambiente de carácter aleatorio. Para ello se utilizó un Hamiltoniano de interacción separable. Para modelar el ambiente, se trabajó con los ensembles embebidos. Esto permitió considerar al sistema total con interacciones de 2-cuerpos, con lo cual, se estudió un modelo más realista en comparación a modelos previos donde se asumía interacciones de muchos cuerpos.

Además, esta elección de ensembles nos permitió considerar dos situaciones: ambientes fermiónicos EGOE y ambientes bosónicos BEGOE. Así, en un primer caso se estudió el decaimiento de la pureza y de los elementos fuera de la diagonal de la matriz reducida del qubit, cuando éste interactuaba con un ambiente fermiónico y, en un segundo caso, cuando interactuaba con un ambiente bosónico. En particular, el ambiente bosónico se definió en el límite denso, i.e., en el límite donde el número de bosones es mucho mayor que el número de estados degenerados de una partícula.

Nuestro modelo fue comparado con ambientes de matrices aleatorias GOE.

1. En el caso del qubit que interactúa con el EGOE se encontró que:
 - La dinámica del sistema reducido asociado al qubit tiene esencialmente el mismo comportamiento que en el caso donde el ambiente se modela con matrices GOE.
 - La explicación más simple del punto anterior, es el hecho de que las fluctuaciones espectrales de ensembles EGOE y GOE son muy

parecidas una vez que los espectros han sido desdoblados correctamente. [18, 25].

2. En el caso del qubit que interactúa con el BEGOE se encontró que:
 - La dinámica del sistema reducido asociado al qubit tiene un comportamiento que difiere notablemente del caso donde el ambiente es modelado con el GOE y, por lo tanto, también difiere del ambiente EGOE.
 - Esta diferencia con el EGOE y GOE se puede entender si se tiene presente que las fluctuaciones espectrales del BEGOE, en el límite denso, resultan muy diferentes a las fluctuaciones en los ensembles EGOE y GOE [15, 24].

Índice de figuras

2.1. Espectro original y desdoblado de un sistema.	15
2.2. NNSD de datos experimentales, GOE y de Poisson	16
2.3. Separación de un espectro: promedio y fluctuaciones	20
2.4. NNSD para un sistema bosónico en el límite denso.	25
4.1. Pureza para un ambiente fermiónico. Estado inicial del qubit: eigenestado de σ_x	40
4.2. Pureza para un ambiente fermiónico. Estado inicial del qubit: eigenestado de σ_y	41
4.3. Pureza para un ambiente fermiónico. Estado inicial del qubit: eigenestado de σ_z	41
4.4. Parte real de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ para un ambiente fermiónico. Estado ini- cial del qubit: eigenestado simétrico de σ_x	42
4.5. Modulo al cuadrado de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ para un ambiente fermiónico. Estado inicial del qubit: eigenestado simétrico de σ_x	43
4.6. Pureza para un ambiente bosónico. Estado inicial del qubit: eigenestado de σ_x	44
4.7. Pureza para un ambiente bosónico. Estado inicial del qubit: eigenestado de σ_y	45
4.8. Pureza para un ambiente bosónico. Estado inicial del qubit: eigenestado de σ_z	47
4.9. Modulo al cuadrado de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ para un ambiente bosónico. Es- tado inicial del qubit: eigenestado simétrico de σ_x	48
4.10. Modulo al cuadrado de $\langle \rho_c^{12} \rangle$ para un ambiente bosónico. Es- tado inicial del qubit: eigenestado simétrico de σ_x	48

Bibliografía

- [1] W. H. Zurek, “Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 75, pp. 715–775, May 2003.
- [2] W. H. Zurek, “Decoherence and the transition from quantum to classical,” *Physics Today*, vol. 44, no. 10, pp. 36–44, 1991.
- [3] M. Schlosshauer, *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition*. The Frontiers Collection, Springer-Verlag, 2008.
- [4] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2010.
- [5] T. Gorin, C. Pineda, H. Kohler, and T. H. Seligman, “A random matrix theory of decoherence,” *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 11, p. 115016, 2008.
- [6] H. Carmichel, *An Open System Approach to Quantum Optics*. Lecture Notes in Physics, 1993.
- [7] H. J. Moreno, T. Gorin, and T. H. Seligman, “Improving coherence with nested environments,” *Phys. Rev. A*, vol. 92, p. 030104, Sep 2015.
- [8] E. Cartan in *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 11, 1935.
- [9] M.L.Mehta, *Random Matrices*. Academic, 2nd. ed., 1991.
- [10] E.P.Wigner in *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations* (C.E.Porter, ed.), Academic, New York, 1965.
- [11] C. Pineda, T. Gorin, and T. H. Seligman, “Decoherence of two-qubit systems: a random matrix description,” *New Journal of Physics*, vol. 9, no. 4, p. 106, 2007.

- [12] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman, and M. Žnidarič, “Dynamics of loschmidt echoes and fidelity decay,” *Physics Reports*, vol. 435, no. 2–5, pp. 33 – 156, 2006.
- [13] K. K. Mon and J. B. French, “Statistical properties of many-particle spectra,” *Annals of Physics*, vol. 95, p. 90, 1975.
- [14] O. Bohigas and J. Flores, “Two-body random hamiltonian and level density,” *Physics Letters B*, vol. 34, p. 261, 1971.
- [15] L. Benet and H. A. Weidenmüller, “Review of the k -body embedded ensembles of gaussian random matrices,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 36, no. 12, p. 3569, 2003.
- [16] V. Kota, *Embedded Random Matrix Ensembles in Quantum Physics*, vol. 884. Springer International Publishing, 2014.
- [17] T. Prosen, L. Martignon, and T. H. Seligman, “Observables and density matrices embedded in dual hilbert spaces,” *Physica Scripta*, vol. 90, no. 7, p. 074036, 2015.
- [18] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong, “Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 53, pp. 385–479, Jul 1981.
- [19] T. Guhr, A. Müller–Groeling, and H. A. Weidenmüller, “Random-matrix theories in quantum physics: common concepts,” *Physics Reports*, vol. 299, no. 4–6, pp. 189 – 425, 1998.
- [20] O. Bohigas and M. J. Giannoni, *Chaotic Motion and Random Matrix Theories*. 1984. Lecture Notes.
- [21] L. Benet, T. Rupp, and H. Weidenmüller, “Spectral properties of the k-body embedded gaussian ensembles of random matrices,” *Annals of Physics*, vol. 292, no. 1, pp. 67 – 94, 2001.
- [22] V. K. B. Kota, “Embedded random matrix ensembles for complexity and chaos in finite interacting particle systems,” *Physics Reports*, 2001.
- [23] M. Vyas, V. K. B. Kota, and N. D. Chavda, “Transitions in eigenvalue and wavefunction structure in $(1 + 2)$ -body random matrix ensembles with spin,” *Phys. Rev. E*, vol. 81, p. 036212, Mar 2010.

- [24] S. Hernández-Quiroz and L. Benet, “Nearest-neighbor distributions and tunneling splittings in interacting many-body two-level boson systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 81, p. 036218, Mar 2010.
- [25] J. Flores, M. Horoi, M. Müller, and T. H. Seligman, “Spectral statistics of the two-body random ensemble revisited,” *Phys. Rev. E*, vol. 63, p. 026204, Jan 2001.
- [26] M. Carrera, T. Gorin, and T. H. Seligman, “Single-qubit decoherence under a separable coupling to a random matrix environment,” *Phys. Rev. A*, vol. 90, p. 022107, Aug 2014.
- [27] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman, and W. T. Strunz, “Connection between decoherence and fidelity decay in echo dynamics,” *Phys. Rev. A*, vol. 70, p. 042105, Oct 2004.