UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Sobre Módulos Inyectivos Principales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TíTULO DE:

M A T E M Á T I C O

PRESENTA:

MANUEL ESTEBAN ENRIQUEZ VILLEDA

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. MAURICIO GABRIEL MEDINA BÁRCENAS

2016

Ciudad Universitaria, D. F.

1. Datos del alumno
Enriquez
Villeda
Manuel Esteban
63 86 75 76
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304055805

2. Datos del tutor
M. en C.
Mauricio Gabriel
Medina
Bárcenas

3. Datos del sinodal 1
Dr.
José
Ríos
Montes

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Alejandro
Alvarado
García

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Silvia Claudia
Gavito
Ticozzi

6. Datos del sinodal 4
Dra.
Edith Corina
Sáenz
Valadez

7. Datos del trabajo escrito
Sobre Módulos inyectivos Principales
89 p
2016

Índice general

Agradecimientos

Gracias Dios.

Gracias mamá por tu amor y tu energía, por tu generosidad y tu humildad, por mostrarme tu preocupación y por apoyarme para recorrer el camino y así llegar hasta aquí.

Gracias Chan, Fer y tío Julián por su comprensión.

Gracias familia.

Gracias a mi tutor, Mauricio Gabriel Medina Bárcenas por la oportunidad de trabajar bajo su dirección, por su paciencia y sus recomendaciones.

Agradezco profundamente a mis sinodales, por su disposición, por sus correciones y por sus opiniones.

Agradezco especialmente al personal que labora en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Química, en particular a los profesores Guadalupe Josefina Toledo Macías, Eugenio León Fautsch Tapia, María Vidal Guerrero, Tonatihu Valdez, Manuel Vázquez Islas, Salvador Granados, Domingo Alarcón, Ricardo Martínez, Olga Navarrete, Carlos Maciel, Rubén Coello, Efrén Pérez y Francisco Zamudio. Gracias a todos por su gran calidez y por compartir horas de trabajo.

Gracias a todos mis amigos por su compañía, por toda su ayuda y por nuestras andanzas.

Gracias Marj por estar presente en los días de mi vida, por compartir, por ser la mujer a la que pertenezco y por los montones de tu amor.

Introducción

Una herramienta ampliamente desarrollada para estudiar un anillo son los prerradicales. Dado un anillo R, se le asocia su gran retícula de prerradicales $R-pr$. Dentro de esta gran retícula existen varias subclases de gran interés como lo son: la clase de los prerradicales idempotentes, de los radicales, de los exactos izquierdos y combinaciones de estas propiedades. En este trabajo nos enfocaremos en los prerradicales exactos izquierdos $R-lep$.

A cada prerradical exacto izquierdo se le puede asociar de manera biyectiva una clase de módulos, la cual es una clase de pretorsión hereditaria, es decir, una clase cerrada bajo isomorfismos, submódulos, cocientes y sumas directas. Por otro lado, también se le puede asignar biyectivamente un subconjunto de ideales izquierdos del anillo el cual forma un filtro lineal. Aquí se presentarán estas biyecciones y algunas consecuencias.

El objetivo principal de esta tesis es el siguiente: dado un anillo R encontrar un $R-módulo\ _R\overline{E}$ que describa a todos los elementos de $R-lep$. Este $R-módulo\ _R\overline{E}$ será un módulo inyectivo y cada $\sigma \in R-lep$ quedará descrito como $\sigma = \omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}}$, donde para un submódulo totalmente invariante N de un módulo M, ω^M_N es el prerradical definido como:

$$\omega^M_N(K) = \bigcap\{f^{-1}(N)|f : K \to M\}$$

para cada $R-módulo\ K$. A tal módulo $_R\overline{E}$ se le llamará inyectivo principal.

Se desarrollarán varias propiedades de los módulos inyectivos principales para llegar al resultado principal, Teorema 2.0.31 el cual dice que si R es un anillo artiniano izquierdo entonces existe un anti-isomorfismo entre las retículas de ideales bilaterales de R y de submódulos totalmente invariantes de E ($S_{f_i}(R)$ y $S_{f_i}(\overline{E})$ respectivamente), con E un módulo inyectivo principal. Este anti-isomorfismo de retículas se construye a partir de dos resultados del Capítulo 2 y uno del Capítulo 1. Del Capítulo 1 tenemos el isomorfismo entre las retículas $R-fil$ y $R-lep$. Del Capítulo 2, el isomorfismo entre las retículas $S_{f_i}(\overline{E})$ y $R-lep$ y el isomorfismo que invierte el orden entre $R-fil$ y $S_{f_i}(R)$.

A modo de seguir con esta línea de investigación, se estudiarán los anillos inyectivos principales y veremos que como ejemplo aparecen los anillos QF (casi-Frobenius). Dentro de esta idea de módulos inyectivos principales, se pueden definir los módulos principales con la hipótesis de que la retícula de prerradicales sea un conjunto.

La tesis está dividida en tres capítulos y un apéndice que tiene tres secciones. Las tres secciones del apéndice contienen elementos de teoría general de anillos, módulos y prerradicales. En la sección A.2 se da una breve introducción de la dimensión de Gabriel ya que será fundamental para un ejemplo dentro de la teoría.

El capítulo 1 se centra en establecer las condiciones generales del trabajo, tanto de prerradicales como de teoría de módulos.

El capítulo 2 es el capítulo principal de la tesis pues es donde se desarrollará la teoría de los módulos inyectivos principales y se prueba el resultado más importante de la tesis.

En el capítulo 3 se definen los módulos principales en anillos para los cuales su retícula de prerradicales es un conjunto. También en este capítulo se describen algunos anillos que son módulos inyectivos principales.

En todo el trabajo R denotará un anillo asociativo con uno, los $R-$ *módulos* serán izquierdos y unitarios, y $R-Mod$ denotará a la categoría de $R-$ *módulos* izquierdos.

La tesis está basada principalmente en los artículos [5], [6] y [7].

Capítulo 1

Preliminares

Como se ha mencionado en la introducción, en este capítulo desarrollaremos la teoría necesaria de prerradicales. Trabajaremos con con algunas de las propiedades que cumple una familia de prerradicales y vamos a definir para la clase $R-pr$ un orden, supremo e ínfimo y las operaciones producto y coproducto. Establecemos los elementos para afirmar que $R-pr$ es una gran retícula completa y las condiciones que debe cumplir un prerradical para ser idempotente, exacto izquierdo o bien, radical. Enseguida, definimos lo que es una clase de pretorsión hereditaria y determinamos ciertas condiciones para concluir con detalle que existe una correspondencia biyectiva entre la clase de todas las clases de pretorsión hereditaria ($R-ptors$) y la clase de los prerradicales exactos izquierdos ($R-lep$). De manera similar, definimos el conjunto de filtros lineales de ideales izquierdos asociado a un anillo R ($R-fil$) para finalmente demostrar que existe un ismorfismo de retículas completas entre $R-lep$ y $R-fil$, resultado que nos permite construir para cada elemento de $R-lep$ un conjunto de módulos inyectivos.

Definición 1 *Un prerradical σ sobre un anillo R es un subfuntor del funtor identidad:*

$$R-Mod \xrightarrow{\sigma} R-Mod$$

es decir,

1) $\sigma M \leq M$ para cada $M \in R-Mod$.
2) Para cada $f \in Hom_R(M,N)$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \sigma(M) & \xrightarrow{i} & M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \sigma f} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \sigma(N) & \xrightarrow{i} & N \end{array}$$

es conmutativo, donde i es la inclusión canónica.

Ejemplos: 1) Definimos el Zoclo de un módulo M como:

$$R-Mod \xrightarrow{Zoc} R-Mod$$

dado por $Zoc(M)=\sum\{S|S$ es submódulo simple de $M\}$. Por un lado, tenemos que la suma de submódulos es submódulo. Así $Zoc(M)\leq M$. Por otro lado sea $f\in Hom_R(M,N)$ y veamos si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Zoc(M) & \xrightarrow{i} & M \\ \big\downarrow{\scriptstyle Zoc(f)} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Zoc(N) & \xrightarrow{i} & N \end{array}$$

es decir, si $f(Zoc(M))\subseteq Zoc(N)$. Por un lado,

$$f(\sum\{S|S\leq M \text{ simple }\})\leq\sum\{f(S)|S\leq M \text{ simple }\}),$$

el cual a su vez es submódulo de $Zoc(N)$. Por lo tanto, $Zoc(\_)$ es un prerradical.

2) El Radical de un módulo M se define como:

$$R-Mod \xrightarrow{Rad} R-Mod$$

dado por $Rad(M)=\bigcap\{K \mid K$ es submódulo máximo de $M\}$.

De lo anterior, $Rad(M)\leq M$. Sea $f\in Hom_R(M,M')$ y veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Rad(M) & \xrightarrow{i} & M \\ \big\downarrow{\scriptstyle Rad(f)} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Rad(M') & \xrightarrow{i} & M' \end{array}$$

es decir $f(Rad(M)) \subseteq Rad(M')$. *Para probar la contención, veamos que la siguiente igualdad se satisface:*

$$Rad(M) = \bigcap\{Ker\ g \mid g \in Hom_R(M,S),\ S \in R - Simp\}$$

Sea K *un submódulo máximo de* M, *entonces existen* $S \in R - Simp$ *y* $g : M \longrightarrow S$ *tales que* $g \neq 0$ *y* $Ker\ g = K$ *pues se obtienen de considerar* $S := M/K$ *pues* K *es máximo y* $g := \pi : M \twoheadrightarrow M/K$ *la proyección canónica. De lo anterior, tenemos las siguientes igualdades:*

$$Rad(M) = \bigcap\{Ker\ g \mid g \in Hom_R(M,S),\ S \in R - Simp\}$$

$$Rad(M') = \bigcap\{Ker\ h \mid h \in Hom_R(M',S),\ S \in R - Simp\}$$

y podemos considerar $h \in Hom_R(M',S)$, *con el cual* $(h \circ f) : M \longrightarrow S$. *De esta manera, si* $x \in Rad(M)$ *entonces* $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = 0$ *con lo cual* $f(x) \in Ker\ h$ *y así* $f(x) \in \bigcap\{Ker\ h | h \in Hom_R(M',S),\ S \in R - Simp\}$. *Por lo tanto,* $f(Rad(M)) \subseteq Rad(M')$. *Luego,* $Rad(\_)$ *es un prerradical.*

3) La torsión en grupos abelianos se define como:

$$\mathbb{Z} - Mod \xrightarrow{t} \mathbb{Z} - Mod$$

dado por $t(G) = \{g \mid ng = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}^+\}$

Sabemos que $t(G)$ *es un subgrupo de* $G \in \mathbb{Z} - Mod$. *Sea* $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(G,G')$ *y veamos que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} t(G) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "t(f)"] & G \arrow[d, "f"] \\ t(G') \arrow[r, "i"] & G' \end{tikzcd}$$

es decir $f(t(G)) \subseteq t(G')$.

Sea $x \in t(G)$ *entonces existe* $n \in \mathbb{Z}^+$ *tal que* $nx = 0$. *De aquí,* $f(nx) = f(0) = 0$ *pero* f *es morfismo con lo cual tenemos* $nf(x) = 0$, *es decir,* $f(x) \in t(G')$. *Por lo tanto,* $f(t(G)) \subseteq t(G')$ *y así* $t(\_)$ *es un prerradical.*

De ahora en adelante, denotaremos por $R-pr$ *a la clase de todos los prerra-*

dicales sobre R.

Proposición 1.0.1 *Sean $\sigma \in R-pr$, $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq R-Mod$ una familia no vacía de módulos, entonces*

$$1)\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} \sigma(M_i)$$

$$2)\sigma(\prod_{i\in I} M_i) \leq \prod_{i\in I} \sigma(M_i)$$

Demostración 1) Para cada $\beta \in I$, consideremos

$$M_\beta \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$$

y

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow M_\beta$$

la inclusión y proyección canónicas. A partir de las cuales se tienen las siguientes contenciones

$$i_\beta(\sigma(M_\beta)) \leq \sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)$$

y

$$\pi_\beta(\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)) \leq \sigma(M_\beta)$$

de esta manera, dado $x \in \sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ entonces $x = (x_i)_{i\in I}$ con $x_i \in M_i$. Además $x_i = \pi_i(x)$, con lo cual $x_i \in \sigma(M_i)$, es decir, $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \sigma(M_i)$. Por lo tanto, $\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i) \subseteq \bigoplus_{i\in I} \sigma(M_i)$.

Sea $x \in \bigoplus_{i\in I} \sigma(M_i)$, entonces $x = (x_i)_{i\in I}$ donde $x_i \in \sigma(M_i)$ para toda $i \in I$. De lo anterior, existen $\beta_j \in I$ con $j \in \{1, ..., n\}$ tales que $(x_i)_{i\in I} = x = \sum_{i=1}^{n} i_{\beta_j}(\pi_{\beta_j}(x))$ pero $\pi_{\beta_j}(x) \in \sigma(M_{\beta_j})$ y además $i_{\beta_j}(\pi_{\beta_j}(x)) \in i_{\beta_j}(\sigma(M_{\beta_j})) \subseteq \sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)$. Por lo tanto, $\bigoplus_{i\in I} \sigma(M_i) \subseteq \sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i)$.

2) Consideremos la proyección:

$$\prod_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow M_\beta$$

y sea $x \in \sigma(\prod_{i\in I} M_i)$, entonces $x = (x_i)_{i\in I}$ y $x_\beta = \pi_\beta(x) \in \sigma(M_\beta)$ para todo $\beta \in I$. Así, $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \sigma(M_i)$, es decir, $\sigma(\prod_{i\in I} M_i) \leq \prod_{i\in I} \sigma(M_i)$. ∎

Definición 2 *Sean $\sigma, \tau \in R-pr$, diremos que $\sigma \preceq \tau$, si y solo si $\sigma(M) \leq \tau(M)$ para todo $M \in R-Mod$.*

Con la definición anterior $R-pr$ es una clase parcialmente ordenada. Además se tienen cuatro operaciones en $R-pr$: $\wedge, \vee, \cdot$ y $:$, las cuales se describen como sigue:

Para $\sigma, \tau \in R-pr$ y $M \in R-Mod$,

1)$(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma M \cap \tau M$.
2)$(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma M + \tau M$.
3)$(\sigma \cdot \tau)(M) = \sigma(\tau M)$.
4)$(\sigma : \tau)(M) \leq M$ *tal que* $(\sigma : \tau)(M)/\sigma M = \tau(M/\sigma M)$.

Con lo anterior, $(R-pr, \preceq, \wedge, \vee)$ podría considerarse una retícula completa donde el supremo y el ínfimo de una familia de prerradicales $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ se describen como:

$$(\bigvee_{i \in I} \sigma_i)(M) = \sum_{i \in I} \sigma_i(M)$$

$$(\bigwedge_{i \in I} \sigma_i)(M) = \bigcap_{i \in I} \sigma_i(M)$$

sin embargo, en general $R-pr$ no es un conjunto, es una clase. Es por esta razón que a $R-pr$ le llamaremos gran retícula pues es una clase con orden parcial y supremo e ínfimo descritos como arriba.

Definición 3 *Para cualquier $\sigma \in R-pr$, tenemos las siguientes clases de módulos:*

$$T_\sigma = \{N \in R-Mod | \sigma N = N\}$$

$$\overline{T_\sigma} = \{\sigma K | K \in R-Mod\}$$

$$F_\sigma = \{N \in R-Mod | \sigma N = 0\}$$

$$\overline{F_\sigma} = \{K/\sigma K | K \in R-Mod\}$$

Proposición 1.0.2 *Son equivalentes para $\sigma \in R-pr$:*

$$I)\sigma\sigma = \sigma$$

$$II)T_\sigma = \overline{T_\sigma}$$

Demostración $I) \Rightarrow II)$

Supongamos que $\sigma\sigma = \sigma$, es decir, $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ para todo $M \in R - Mod$.

$\subseteq|$ Sea $M \in T_\sigma = \{N \in R - Mod | \sigma N = N\}$, entonces $M = \sigma(M)$ y así $M \in \overline{T_\sigma}$. Por lo tanto, $T_\sigma \subseteq \overline{T_\sigma}$.

$\supseteq|$ Sea $M \in \overline{T_\sigma} = \{\sigma K | K \in R - Mod\}$, entonces $M = \sigma(K)$ para algún $K \in R - Mod$. Luego, $\sigma(M) = \sigma(\sigma(K)) = \sigma(K) = M$

$\sigma M = \sigma(\sigma K) = \sigma K = M$ para algún $K \in R - Mod$ lo que implica que $\overline{T_\sigma} \subseteq T_\sigma$. Por lo tanto $T_\sigma = \overline{T_\sigma}$.

$II) \Rightarrow I)$ Supongamos $T_\sigma = \overline{T_\sigma}$.

Sea $N \in R - Mod$, entonces $\sigma N \in T_\sigma = \overline{T_\sigma}$, con lo cual $\sigma(\sigma N) = \sigma N$. Por lo tanto $\sigma\sigma(N) = \sigma(N)$ para todo $N \in R - Mod$. ∎

Definición 4 *$\sigma \in R - pr$ es idempotente si $\sigma\sigma = \sigma$.*

Proposición 1.0.3 *Son equivalentes para $\sigma \in R - pr$:*

$$I)(\sigma : \sigma) = \sigma$$

$$II) F_\sigma = \overline{F_\sigma}$$

Demostración $I) \Rightarrow II)$

Supongamos que $(\sigma : \sigma) = \sigma$, es decir, $(\sigma : \sigma)(M) = \sigma(M)$ para todo $M \in R - Mod$.

$\subseteq|$ Sea $M \in F_\sigma = \{N \in R - Mod | \sigma N = 0\}$, entonces $\sigma M = 0$. Como $M = M/0$ se sigue que $M = M/\sigma M$. Por lo tanto $M \in \overline{F_\sigma}$ es decir, $F_\sigma \subseteq \overline{F_\sigma}$.

$\supseteq|$ Sea $M \in \overline{F_\sigma} = \{K/\sigma K | K \in R - Mod\}$. Entonces $M = K/\sigma K$ para algún $K \in R - Mod$. Luego, $\sigma M = \sigma(K/\sigma K)$ con lo cual tenemos que $\sigma M = ((\sigma : \sigma)K)/\sigma K = 0$. Lo que implica que $M \in F_\sigma$ entonces $\overline{F_\sigma} \subseteq F_\sigma$. Por lo tanto $F_\sigma = \overline{F_\sigma}$.

$II) \Rightarrow I)$ Supongamos $F_\sigma = \overline{F_\sigma}$.

Para todo $M \in R - Mod$ se tiene que $(\sigma : \sigma)M/\sigma M = \sigma(M/\sigma M)$ y $M/\sigma M \in F_\sigma = \overline{F_\sigma}$, entonces $\sigma(M/\sigma M) = 0$. Así que $(\sigma : \sigma)M/\sigma M = 0$. Por lo tanto $(\sigma : \sigma) = \sigma$ para todo $M \in R - Mod$. ∎

Definición 5 *$\sigma \in R - pr$ es radical si $(\sigma : \sigma) = \sigma$.*

Definición 6 *$\sigma \in R - pr$ es exacto izquierdo si para cada sucesión exacta:*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow \sigma N \xrightarrow{\sigma f} \sigma M \xrightarrow{\sigma g} \sigma L$$

es exacta.

Proposición 1.0.4 *Son equivalentes para $\sigma \in R - pr$:*

1)σ exacto izquierdo.

2)$\sigma N = N \cap \sigma M$ para todo $N \leq M \in R - Mod$.

3)σ es idempotente y T_σ es cerrada bajo submódulos.

Demostración 1) $\Rightarrow$ 2)

Supongamos que σ es exacto izquierdo, entonces dada una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

la sucesión:

$$0 \longrightarrow \sigma N \xrightarrow{\sigma f} \sigma M \xrightarrow{\sigma g} \sigma L$$

es exacta.

Verifiquemos que $\sigma N = N \cap \sigma M$ para todo $N \leq M$. Sea $N \leq M$ entonces podemos construir la sucesión exacta (donde $M' = M/N$):

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M' \longrightarrow 0$$

con lo cual:

$$0 \longrightarrow \sigma N \xrightarrow{\sigma\iota} \sigma M \xrightarrow{\sigma\pi} \sigma M'$$

es exacta, es decir, $Im\ \sigma\iota = Ker\ \sigma\pi$ pero $Im\ \sigma\iota = \sigma N$ y $Ker\ \sigma\pi = N \cap \sigma M$ asi que $\sigma N = N \cap \sigma M$ (donde $Im\ \sigma\iota$ es la imagen del homomorfismo $\sigma\iota$ y $Ker\ \sigma\pi$ es el núcleo del homomorfismo $\sigma\iota$).

2) $\Rightarrow$ 1)

Supongamos que $\sigma N = N \cap \sigma M$ para todo $N \leq M \in R - Mod$. Veamos que la sucesión:

$$0 \longrightarrow \sigma N \xrightarrow{\sigma\iota} \sigma M \xrightarrow{\sigma\pi} \sigma(M/N)$$

es exacta, es decir, que $Im\ \sigma\iota = Ker\ \sigma\pi$. Ya que $Im\ \sigma\iota = \sigma N = N \cap \sigma M = Ker\ \sigma\pi$, se tiene que la sucesión anterior es exacta. Por lo tanto, σ es exacto izquierdo.

2) $\Rightarrow$ 3)

Sea $M \in R - Mod$. Como $\sigma M \leq M$ entonces $\sigma(\sigma M) = \sigma M \cap M = \sigma M$ con lo cual, $\sigma(\sigma M) = \sigma M$. Por lo tanto, σ es idempotente.

Sea $M \in T_\sigma$ y $K \leq M$. Entonces $\sigma K = K \cap \sigma M = K \cap M = K$. Por lo tanto T_σ es cerrada bajo submódulos.

3) $\Rightarrow$ 2)

Sea $M \in R - Mod$. Ya que $\sigma\sigma = \sigma$ entonces $\sigma(\sigma M) = \sigma M$ ie, $\sigma M \in T_\sigma$. Sea $N \leq M$, entonces $\sigma N \leq \sigma(\sigma M) \leq M$. Tenemos que $\sigma N \leq \sigma(\sigma M)$ y $\sigma N \leq N$ así que $\sigma N \leq \sigma(\sigma M) \cap N \leq N$, aplicando σ tenemos $\sigma(\sigma N) \leq \sigma((\sigma M) \cap N) \leq \sigma N$. Como $(\sigma M) \cap N \in T_\sigma$ entonces $\sigma(\sigma M \cap N) = (\sigma M) \cap N$. Así $\sigma N \leq (\sigma M) \cap N \leq \sigma N$. Por lo tanto $\sigma N = N \cap \sigma M$ para todo $N \leq M \in R - Mod$. ∎

Definición 7 *Denotaremos por $R - lep$ a la clase de prerradicales exactos izquierdos.*

Proposición 1.0.5 *Si P es un módulo proyectivo y $\sigma \in R - pr$ entonces $\sigma(P) = \sigma(R)P$.*

Demostración La contención $\sigma(R)P \subseteq \sigma(P)$ es válida. Para $\sigma(P) \subseteq \sigma(R)P$

tenemos lo siguiente:

Como P es proyectivo, por el teorema de la base dual (Apéndice A.1.2), existe una familia de generadores $\{y_i\}_{i\in I} \subseteq P$ y una familia de homomorfismos $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq Hom_R(P,R)$ tales que para $p \in P$, p se escribe como una suma finita, $p = \sum \varphi_i(p)y_i$. Como $\sigma \in R-pr$ podemos construir el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\sigma(P) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma\varphi_i"] & P \arrow[d, "\varphi_i"] \\
\sigma(R) \arrow[r, "i"] & R
\end{tikzcd}$$

Así, si $p \in \sigma(P)$ entonces $\varphi_i(p) \in \sigma(R)$ y $y_i \in P$ para todo i, lo cual implica que $p = \sum \varphi_i(p)y_i \in \sigma(R)P$. Por lo tanto, $\sigma(P) = \sigma(R)P$. ∎

Proposición 1.0.6 *Son equivalentes para $\sigma \in R-pr$:*

1)σ *preserva epimorfismos*

2)$\sigma(R)M = \sigma(M)$ *para todo $M \in R-Mod$.*

3)σ *es radical y F_σ es cerrada bajo cocientes.*

Demostración 1) $\Rightarrow$ 2)

Sea $M \in R-Mod$. Dado que M es cociente de un libre, existe $R^{(X)}$ tal que se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & R^{(X)} \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como σ preserva epimorfismos, obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
R^{(X)} \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \\
\sigma(R^{(X)}) \arrow[r, "\sigma g"] \arrow[u, "\iota"] & \sigma(M) \arrow[r] \arrow[u, "\iota"] & 0
\end{tikzcd}$$

y puesto que $\sigma(R)R^{(X)} = \sigma(R^{(X)})$ por la proposición 1.0.5, el diagrama anterior queda:

$$\begin{tikzcd} R^{(X)} \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \\ \sigma(R)R^{(X)} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\sigma g"] & \sigma(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego, $\sigma(M) = g(\sigma(R^{(X)})) = g(\sigma(R)R^{(X)}) = \sigma(R)g(R^{(X)}) = \sigma(R)M$.

2) $\Rightarrow$ 3)

Ya que $\sigma(M/\sigma(M)) = \sigma(R) \cdot (M/\sigma(R)M) = 0$, entonces σ es radical. Probemos que F_σ es cerrada bajo cocientes. Sea $L \leq M \in F_\sigma$ y la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} (M/L) \longrightarrow 0 \cdot$$

Como σ es prerradical, el siguiente cuadro conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & (M/L) \\ \sigma(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\overline{\pi}"] & \sigma(M/L) \arrow[u, "\iota"] \end{tikzcd}$$

donde π es la proyección canónica.

Notemos que $\pi(\sigma(M)) = \pi(\sigma(R)M) = \sigma(R)\pi(M) = \sigma(R)(M/L) = \sigma(M/L)$. Luego, como $\sigma(M) = 0$ tenemos que $0 = \pi(\sigma(M)) = \sigma(M/L)$. Por lo tanto, $(M/L) \in F_\sigma$.

3) $\Rightarrow$ 1)

Para probar esta implicación, primero demostremos la siguiente igualdad:

$$\sigma(M/N) = (\sigma M + N)/N$$

Sea $N \leq M$ y consideremos la proyección canónica, $\pi : M \to M/N$. Como $\sigma M \leq M$ se tiene que $\pi(\sigma M) = (\sigma M + N)/N$ y ya que $\sigma \in R-pr$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & (M/N) \\ \sigma(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\overline{\pi}"] & \sigma(M/N) \arrow[u, "\iota"] \end{tikzcd}$$

de donde $(\sigma M + N)/N = \pi(\sigma M) \subseteq \sigma(M/N)$ ie, $(\sigma M + N)/N \subseteq \sigma(M/N)$. Para probar la otra contención, utilizamos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (N + \sigma M)/\sigma M \longrightarrow M/\sigma M \longrightarrow M/(\sigma M + N) \longrightarrow 0$$

Ya que F_σ es cerrada bajo cocientes se tiene que $M/(\sigma M + N) \in F_\sigma$ y como σ es radical, podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\sigma(M/N) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma g"] & M/N \arrow[d, "g"] \\
\sigma(M/(\sigma M + N)) = 0 \arrow[r, "i"] & M/(\sigma M + N)
\end{tikzcd}$$

del cual $g(\sigma(M/N)) \subseteq \sigma(M/(\sigma M + N)) = 0$, es decir, $\sigma(M/N) \subseteq (\sigma M + N)/N$. Por lo tanto $\sigma(M/N) = (\sigma M + N)/N$.

Finalmente, veamos que σ preserva epimorfismos. Sean $N \leq M \in R - Mod$ y la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

Como σ es radical, tenemos el diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi"] & (M/N) \\
\sigma(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\overline{\pi}"] & \sigma(M/N) \arrow[u, "\iota"]
\end{tikzcd}$$

del cual $\pi(\sigma M) = (\sigma M + N)/N = \sigma(M/N)$, lo cual implica que $\pi(\sigma M) = \sigma(M/N)$. Por lo tanto, σ preserva epimorfismos. ∎

Un prerradical que cumple con alguna de las condiciones de la proposición anterior se llama $t - radical$

Definición 8 *Sea $\mathcal{T} \subseteq R - Mod$ una clase no vacía de módulos. Decimos que $\mathcal{T}$ es una Clase de Pretorsión Hereditaria si es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas. A la clase de todas las Clases de Pretorsión Hereditarias en $R - Mod$ la denotaremos por $R - ptors$.*

Definición 9 *Sea $\mathcal{T} \subseteq R - Mod$ una clase no vacía de módulos. Definimos* *la clase $\sigma[\mathcal{T}]$ como la colección de módulos:*

$$\sigma[\mathcal{T}] = \left\{ K \in R - Mod \quad | \quad K \rightarrowtail (\bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i})/V \right\}$$

donde $V \leq \bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i}$, $C_i \in \mathcal{T}$ *para todo* $i \in I$ *y* X_i *algún conjunto.*

Observación: *Si* $\mathcal{T} = \{M\}$, *entonces*

$$\sigma[M] = \left\{ K \in R - Mod \quad | \quad K \rightarrowtail M^{(\Lambda)}/V \right\}.$$

A los módulos en $\sigma[M]$ se les llama $M-$ subgenerados.

Proposición 1.0.7 *$\sigma[\mathcal{T}]$ es una teoría de pretorsión hereditaria para toda $T \subseteq R - Mod$ no vacía.*

Demostración Sean $M \in \sigma[\mathcal{T}]$ y $N \leq M$. Entonces existe un monomorfismo:

$$M \rightarrowtail (\bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i})/V$$

donde $C_i \in \mathcal{T}$, $V \leq \bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i}$. Considerando la inclusión $N \hookrightarrow M$ se puede construir el monomorfismo:

$$N \hookrightarrow M \rightarrowtail (\bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i})/V$$

con lo cual, $N \in \sigma[\mathcal{T}]$.

Sean $M \in \sigma[\mathcal{T}]$ y $N \leq M$. Entonces existe un monomorfismo:

$$N \hookrightarrow M \rightarrowtail (\bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i})/V$$

y así $N \cong N'/V$, donde $V \leq N' \leq \bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i}$. Con lo anterior, podemos obtener el siguiente morfismo:

$$M/N \rightarrowtail (\bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i}/V)/N$$

pero $(\bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i}/V)/N \cong (\bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i}/V)/(N'/V) \cong \bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i}/N'$ y así hemos obtenido:

$$M/N \rightarrowtail \bigoplus_{i \in I} C_i^{X_i}/N'$$

con lo cual, $\sigma[\mathcal{T}]$ es cerrada bajo cocientes.

Finalmente, consideremos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de módulos en $\sigma[\mathcal{T}]$. Entonces, para cada $\alpha \in A$ se tiene el siguiente morfismo:

$$M_\alpha \rightarrowtail (\bigoplus_{i\in I} C_{i_\alpha}^{X_{i_\alpha}})/V_\alpha$$

de manera que:

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in A}(\bigoplus_{i\in I} C_{i_\alpha}^{X_{i_\alpha}}/V_\alpha)$$

pero como $\bigoplus_{\alpha\in A}(\bigoplus_{i\in I} C_{i_\alpha}^{X_{i_\alpha}}/V_\alpha) \cong \bigoplus_{\alpha\in A}\bigoplus_{i\in I} C_{i_\alpha}^{X_{i_\alpha}}/(\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha)$, entonces el morfismo anterior queda:

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \rightarrowtail \bigoplus_{\alpha\in A}\bigoplus_{i\in I} C_{i_\alpha}^{X_{i_\alpha}}/(\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha).$$

Por lo tanto, $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \in \sigma[\mathcal{T}]$ y así $\sigma[\mathcal{T}]$ es una clase de pretorsión hereditaria. ∎

Proposición 1.0.8 *Toda clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}$ es de la forma $\sigma[U]$ para algún $U \in R-Mod$.*

Demostración Sea $\mathcal{T} \in R-ptors$ y consideremos $\mathcal{C} = \{C_i | i \in I\}$ un conjunto de clases de isomorfismo de cíclicos en $\mathcal{T}$, (este es un conjunto pues a lo más hay tantos como ideales izquierdos de R). Con lo anterior definimos:

$$M_{\mathcal{T}} = \bigoplus_{i\in I} C_i.$$

Veamos que $\mathcal{T} = \sigma[M_{\mathcal{T}}]$. Sea $K \in \mathcal{T}$, entonces $K = \sum_{k\in K} Rk$ y podemos considerar el epimorfismo:

$$\bigoplus_{k\in K} Rk \twoheadrightarrow \sum_{k\in K} Rk$$

y puesto que $\bigoplus_{\in K} Rk \in \sigma[M_{\mathcal{T}}]$ tenemos que $K \in \sigma[M_{\mathcal{T}}]$.

Si $L \in \sigma[M_{\mathcal{T}}]$ entonces existe un monomorfismo:

$$L \rightarrowtail M_{\mathcal{T}}^{(L)}/V$$

donde $M_{\mathcal{T}}^{(L)} \in \mathcal{T}$ pues $M_{\mathcal{T}} = \bigoplus_{i\in I} C_i$ y además $M_{\mathcal{T}}^{(L)}/V \in \mathcal{T}$, es decir $L \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $\mathcal{T} = \sigma[M_{\mathcal{T}}]$. ∎

Ejemplo: Si $\mathcal{T} = \{G \in \mathbb{Z} - Mod \mid t(G) = G\}$ y seleccionamos como conjunto $\{\mathbb{Z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de representantes bajo isomorfismo de submódulos cíclicos de $\mathcal{T}$, tenemos que $\mathcal{T} = \sigma[M_{\mathcal{T}}] = \sigma[\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n]$.

Proposición 1.0.9 *$R - ptors$ es una retícula completa con orden la contención.*

Demostración Sea $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de $R - ptors$. El supremo de la familia está descrito por:

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{T}_i := \sigma\left[\cup_{i\in I}\mathcal{T}_i\right]$$

el cual es una clase de pretorsión hereditaria considerando la proposición 1.0.7.

Ahora veamos que $\sigma\left[\cup_{i\in I}\mathcal{T}_i\right]$ es la clase más pequeña que contiene a $\cup_{i\in I}\mathcal{T}_i$. Tomemos $\mathcal{C} \in R - ptors$ tal que $\cup_{i\in I}\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{C}$ y sea $M \in \sigma\left[\cup_{i\in I}\mathcal{T}_i\right]$. De lo anterior, existe

$$M \rightarrowtail (\bigoplus_{i\in I} C_i^{X_i})/V$$

donde $C_i \in \cup_{i\in I}\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{C}$ para todo $i \in I$ y además $(\bigoplus_{i\in I} C_i^{X_i})/V \in \mathcal{C}$ pues $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos cocientes y sumas directas. De esta manera $M \in \mathcal{C}$.

Por otro lado, el ínfimo está definido como:

$$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{i\in I}$$

veamos que $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i \in R - ptors$.

Sea $M \in \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$ y $N \leq M$. Entonces $M \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$, así que $N \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $N \in \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$, es decir, $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$ es cerrada bajo submódulos.

Sea $M \in \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$ y $N \leq M$. Entonces $M \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$, así que $M/N \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$. Luego $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$ es cerrada bajo cocientes.

Finalmente, consideremos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$ una familia de módulos, entonces $M_\alpha \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$ y para todo $\alpha \in A$, de esta manera $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$. Así, $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \in \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$. Por lo tanto, $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$ es una clase de pretorsión hereditaria, además de que cualquier $\overline{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}_i$ para toda $i \in I$ satisface que $\overline{\mathcal{T}_i} \subseteq \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i$ por definición. De lo anterior, $R-ptors$ es una retícula completa. ∎

Proposición 1.0.10 *Existe una correspondencia biyectiva entre R-lep y R-ptors.*

Demostración Consideremos las siguientes asignaciones:

I)
$$\Phi : R - lep \longrightarrow R - ptors$$
$$\Phi(\sigma) = T_\sigma$$

con $T_\sigma = \{N \in R - Mod | \sigma N = N\}$

II)
$$\Psi : R - ptors \longrightarrow R - lep$$
$$\Psi(T) = \sigma_T$$

con $\sigma_T : R - Mod \to R - Mod$ dado por $\sigma_T(M) = \sum\{N|N \leq M \text{ y } N \in T\}$.

Para I) veamos que $T_\sigma = \{N \in R-Mod|\sigma N = N\}$ es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas.

Sean $M \in T_\sigma$ y $N \leq M$. Entonces $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N = M \cap N = N$, así $N \in T_\sigma$.

Sean $M \in T_\sigma$ y $N \leq M$. Considerando la contención

$$(\sigma(M) + N)/N \subseteq \sigma(M/N)$$

(que se obtiene de considerar la proyección canónica y del hecho de que σ es prerradical) tenemos que

$$\sigma(M/N) \supseteq (\sigma(M) + N)/N = (M + N)/N = M/(M \cap N) = M/N.$$

Con lo anterior, $\sigma(M/N) \supseteq M/N$ y la contención $\sigma(M/N) \subseteq M/N$ se cumple pues σ es un prerradical. Luego, $M/N \in T_\sigma$.

Finalmente, consideremos $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de módulos de T_σ. Usando la proposición 1.0.1 tenemos que $\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} \sigma(M_i) = \bigoplus_{i\in I} M_i$ pues $M_i \in T_\sigma$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, T_σ es una clase de pretorsión hereditaria.

Para II) debemos verificar:

i)σ_T es prerradical.
ii)σ_T es exacto izquierdo.

i)Puesto que $\sigma_T(M) = \sum\{N|N \leq M \text{ y } N \in T\} \leq M$, falta mostrar que para todo $f \in Hom_R(M, K)$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\sigma_T(M) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma f"] & M \arrow[d, "f"] \\
\sigma_T(K) \arrow[r, "i"] & K
\end{tikzcd}$$

es decir, $f(\sigma_T(M)) \subseteq \sigma_T(K)$. Ya que

$$f(\sigma_T(M)) = f(\textstyle\sum\{N|N \leq M \text{ y } N \in T\})$$

$$= \textstyle\sum\{f(N)|f(N) \leq K \text{ y } f(N) \in T\}$$

$$\subseteq \textstyle\sum\{L|L \leq K \text{ y } L \in T\} = \sigma_T(K).$$

La contención se verifica pues si tenemos $N \xrightarrow{f} M$ podemos construir el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "f|_N"] \arrow[d] & & f(N) \\
N/Ker(f|_N) \arrow[urr, "\cong"] & &
\end{tikzcd}$$

de aquí, $f(N) \cong N/(Kerf \cap N)$ y como T_σ es cerrada bajo cocientes, tenemos $f(N) \in T_\sigma$. Por lo tanto, $f(\sigma_T(M)) \subseteq \sigma_T(K)$.

Para mostrar ii), debemos verificar que para todo $N \leq M \in R-Mod$ se cumple $\sigma_T(N) = \sigma_T(M) \cap N$. Sea $N \leq M$, entonces $\sigma_T(N) \leq \sigma_T(M)$ y $\sigma_T(N) \leq N$, con lo cual $\sigma_T(N) \leq \sigma_T(M) \cap N$. Por otra parte, $\sigma_T(M) \cap N \leq \sigma_T(M) \in T$, así que $\sigma_T(M) \cap N \subseteq \sum\{K|K \leq N \text{ y } K \in T\} = \sigma_T(N)$. De esta manera $\sigma_T(M) \cap N \leq \sigma_T(N)$. Por lo tanto σ_T es exacto izquierdo.

Por último, debemos probar que si:

$$\begin{array}{ccccc} R-ptors & \longrightarrow & R-lep & \longrightarrow & R-ptors \\ T & \longmapsto & \sigma_T & \longmapsto & T_{\sigma_T} \end{array}$$

entonces a) $T = T_{\sigma_T}$ y además que si:

$$\begin{array}{ccccc} R-lep & \longrightarrow & R-ptors & \longrightarrow & R-lep \\ \sigma & \longmapsto & T_\sigma & \longmapsto & \sigma_{T_\sigma} \end{array}$$

entonces b) $\sigma = \sigma_{T_\sigma}$.

a) Sea $M \in T$. Entonces $M \subseteq \sigma_T(M) = \sum\{K|K \leq M$ y $K \in T\}$, así $\sigma_T(M) = M$ lo cual implica $M \in T_{\sigma_T}$. De este modo $T \subseteq T_{\sigma_T}$. Por otra parte, si $M \in T_{\sigma_T}$ tenemos que $\sigma_T(M) = M$ pero $M = \sigma_T(M) \in T$ es decir, $T_{\sigma_T} \subseteq T$. Por lo tanto, $T_{\sigma_T} = T$.

b)Sea $M \in R-Mod$. Como $\sigma_{T_\sigma}(M) \in T_\sigma$ y además $\sigma_{T_\sigma}(M) \leq M$ entonces $\sigma_{T_\sigma}M = \sigma(\sigma_{T_\sigma}M) \leq \sigma M$. Así $\sigma_{T_\sigma} \leq \sigma$. Por otra parte, como T_σ es cerrada bajo submodulos $\sigma M \in T_\sigma$ es decir, $\sigma(M) \subseteq \sum\{K|K \leq M$ y $K \in T_\sigma\} = \sigma_{T_\sigma}(M)$ entonces $\sigma \leq \sigma_{T_\sigma}$. Por lo tanto $\sigma = \sigma_{T_\sigma}$. ∎

Ahora, consideremos las propiedades que relacionan las cuatro operaciones que tenemos en $R-pr$. La demostración de la siguiente proposición se encuentra en [1] y [9] de la bibliografía.

Proposición 1.0.11 *Sean* $\sigma, \tau, \eta \in R-pr, \{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R-pr$ *y* $M \in R-Mod$. *Entonces*

1.Ley modular $\sigma \preceq \tau \Rightarrow \sigma \vee (\tau \wedge \eta) = \tau \wedge (\sigma \vee \eta)$.

2. Si $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *es una familia directa, entonces* $\tau \wedge (\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in I}(\tau \wedge \sigma_\alpha)$.

3. (a)$(\bigwedge_{\alpha\in I} \sigma_\alpha)\tau = \bigwedge_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha\tau)$.

(b)$(\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha)\tau = \bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha\tau)$.

(c)$(\tau : \bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in I}(\tau : \sigma_\alpha)$.

(d)$(\tau : \bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in I}(\tau : \sigma_\alpha)$.

4. $(\tau : \eta)\sigma \preceq (\tau\sigma : \eta\sigma); \sigma$ *es radical si y solo si* $(\tau : \eta)\sigma = (\tau\sigma : \eta\sigma)$ *para todo* τ, η.

5. $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) \preceq (\sigma : \tau\eta); \sigma$ *es idempotente si y solo si* $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) \preceq (\sigma : \tau\eta); \sigma.$ *para todo* τ, η.

6. $\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau \preceq \sigma, \tau \preceq \sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$.

Proposición 1.0.12 *Sea* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R-pr$ *familia de preradicales idempotentes. Entonces* $\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ *es idempotente.*

Demostración Ya que $\bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)) = (\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha) = (\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)$ donde la última igualdad es la que queremos probar, es suficiente que mostremos para β fijo que $(\sigma_\beta(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)) = \sigma_\beta$. Como $\sigma_\beta\sigma_\alpha \preceq \sigma_\beta$ para todo $\alpha \in I$, entonces $\bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\beta\sigma_\alpha) \preceq \sigma_\beta$ pero $\beta \in I$ por lo que $\sigma_\beta = \sigma_\beta\sigma_\beta \preceq \bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\beta\sigma_\alpha) \preceq \sigma_\beta$ lo cual implica que $\bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\beta\sigma_\alpha) = \sigma_\beta$. Por otra parte, $\sigma_\beta\sigma_\alpha \preceq \sigma_\beta \vee \sigma_\alpha$ entonces $\bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\beta\sigma_\alpha) \preceq \sigma_\beta(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)$. Por lo anterior, $\sigma_\beta = \bigvee_{\alpha\in I}(\sigma_\beta\sigma_\alpha) \preceq \sigma_\beta(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha) \preceq \sigma_\beta$ es decir, $\sigma_\beta(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha) = \sigma_\beta$. Por lo tanto $\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es idempotente. ∎

Proposición 1.0.13 *Sea* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R-pr$ *familia de radicales. Entonces* $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ *es radical.*

Demostración Ya que $\bigwedge_{\alpha\in I}(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \sigma_\alpha) = (\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ donde la última igualdad es la que queremos probar, es suficiente mostrar para β fijo que $(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \sigma_\beta) = \sigma_\beta$. Como $\sigma_\beta \preceq (\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \sigma_\beta)$, faltaría probar que $(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \sigma_\beta) \preceq \sigma_\beta$. Para ello, sea $M \in R-Mod$ y como σ_β es radical podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\sigma_\beta(M)/\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M) \arrow[r, "i"] & M/\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M) \arrow[r, "f"] & M/\sigma_\beta(M) \\
 & \sigma_\beta(M/\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M)) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\overline{f}"] & \sigma_\beta(M/\sigma_\beta(M)) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Como σ_β es radical $\sigma_\beta(M/\sigma_\beta(M)) = 0$, así que $f(\sigma_\beta(M/\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M))) = 0$ pues σ_β es radical. Entonces

$(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \sigma_\beta)M/\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M) = \sigma_\beta(M/\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M)) \subseteq \sigma_\beta(M)/\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M)$ lo cual implica que $(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha : \sigma_\beta) \preceq \sigma_\beta$. Por lo tanto, $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es radical. $\blacksquare$

Proposición 1.0.14 *Sea $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R-pr$ familia de prerradicales exactos izquierdos. Entonces $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es un prerradical exacto izquierdo.*

Demostración Sea $N \leq M \in R-Mod$. Entonces $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(N) = \bigcap\sigma_\alpha(N)$. Ya que σ_α es exacto izquierdo para todo $\alpha \in I$, entonces

$$\bigcap\sigma_\alpha(N) = \bigcap(\sigma_\alpha(M)\cap(N)) = (\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M))\cap N.$$

Con lo anterior, $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(N) = (\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(M))\cap N$ y usando la proposición 1.0.4 tenemos que $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es un prerradical exacto izquierdo. $\blacksquare$

Definición 10 *Un submódulo $N \leq M \in R-Mod$ es totalmente invariante (o característico) si $f(N) \leq N$ para cada $f \in Hom_R(M,M)$. Cuando $N \leq M \in R-Mod$ sea totalmente invariante escribiremos $N \leq_{FI} M$.*

Definición 11 *Sea $N \leq_{FI} M$, los preradicales α_N^M, ω_N^M se definen para $K \in R-Mod$ como sigue:*

$$\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M,K)\}$$

$$\omega_N^M(K) = \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(K,M)\}.$$

Proposición 1.0.15 *Sea $\sigma \in R-pr, M \in R-Mod$ y $N \leq_{FI} M$. Entonces $\sigma M = N$ si y solo si $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$.*

Demostración Si $K \in R-Mod$, $\sigma M = N$, $f \in Hom(M,K)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma f"] & M \arrow[d, "f"] \\ \sigma(K) \arrow[r, "i"] & K \end{tikzcd}$$

con lo cual $f(N) \subseteq \sigma K$. Considerando cada $f \in Hom_R(M,K)$, $\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M,K)\} \leq \sigma K$ es decir, $\alpha_N^M(K) \leq \sigma K$.

Por otro lado, sea $g \in Hom_R(K,M)$ y el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \sigma(K) & \xrightarrow{i} & K \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma g} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ N & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

entonces $g(\sigma K) \subseteq N$, es decir $\sigma K \subseteq g^{-1}(N)$. Considerando cada $g \in Hom_R(K, M)$ se tiene que $\sigma K \subseteq \bigcap\{g^{-1}(N)|g \in Hom_R(K, M)\} = \omega_N^M(K)$. Por lo tanto, $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$.

Ahora, supongamos que $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$. Así $\alpha_N^M(M) \leq \sigma M \leq \omega_N^M(M)$ pero

$$\begin{aligned} \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M, M)\} &= \alpha_N^M(M) \\ &\leq \sigma M \\ &\leq \omega_N^M(M) \\ &= \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(M, M)\} \end{aligned}$$

y como $N \leq M$ es totalmente invariante, tenemos que

$$\begin{aligned} N &\subseteq \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M, M)\} \\ &= \alpha_N^M(M) \\ &\leq \sigma M \\ &\leq \omega_N^M(M) \\ &= \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(M, M)\} \\ &\subseteq N \end{aligned}$$

es decir, $\sigma M = N$. ∎

De ahora en adelante, denotaremos por $\mathcal{E}$ a la clase de todos los módulos inyectivos en $R - Mod$.

Proposición 1.0.16 *Para cada $\sigma \in R - pr$ tenemos:*

1. α_M^M *es idempotente para cada* $M \in R-Mod$. *Además,* σ *es idempotente si y solo si* $\sigma = \bigvee\{\alpha_M^M | \sigma M = M\}$.

2. ω_0^M *es radical para cada* $M \in R-Mod$. *Además,* σ *es radical si y solo si* $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^M | \sigma M = 0\}$.

3. ω_K^E *es preradical exacto izquierdo para cada* $E \in \mathcal{E}$ *y para cada* K *submodulo totalmente invariante de* E. *Además,* σ *es exacto izquierdo si y solo si* $\sigma = \bigwedge\{\omega_{\sigma E}^E | E \in \mathcal{E}\}$.

4. ω_0^E *es radical exacto izquierdo para cada* $E \in \mathcal{E}$. *Además,* σ *es radical exacto izquierdo si y solo si* $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^E | \sigma E = 0$ *y* $E \in \mathcal{E}\}$.

Demostración 1. Veamos que $\alpha_M^M \alpha_M^M = \alpha_M^M$. Ya que $\alpha_M^M(K) \leq K$ entonces $\alpha_M^M(\alpha_M^M(K)) \leq \alpha_M^M(K)$ es decir, $\alpha_M^M \alpha_M^M \preceq \alpha_M^M$ para todo $K \in R-Mod$. Por otro lado, usando la definición tenemos que $\alpha_M^M(K) = \sum\{f(M) | f \in Hom_R(M, K)\}$ y además $\alpha_M^M(\alpha_M^M(K)) = \sum\{g(M) | g \in Hom_R(M, \alpha_M^M(K))\}$. Basta verificar que todo $g \in Hom_R(M, K), g \in Hom_R(M, \alpha_M^M(K))$. Puesto que $g : M \to K$ podemos considerarlo como $g : M \to g(M)$ es decir, $g : M \to \alpha_M^M(K)$, lo cual implica que $g \in Hom_R(M, \alpha_M^M(K))$ como queríamos mostrar. Por lo tanto, $\alpha_M^M \alpha_M^M = \alpha_M^M$.

Ahora, supongamos que σ es idempotente. Sea M tal que $\sigma(M) = M$, usando la proposición anterior tenemos que $\alpha_M^M \preceq \sigma$ lo que implica que

$$\bigvee_{\sigma M = M} \alpha_M^M \preceq \sigma.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sigma(\sigma K) = \sigma K &= \alpha_{\sigma K}^{\sigma K}(\sigma K) \\ &\subseteq \alpha_{\sigma K}^{\sigma K}(K) \\ &\subseteq \alpha_{\sigma K}^{\sigma K}(K) + \bigvee_{M \neq \sigma K} \alpha_M^M(K) \\ &= \bigvee_{\sigma M = M} \alpha_M^M(K). \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\sigma \preceq \bigvee_{\sigma M = M} \alpha_M^M$ y así $\bigvee_{\sigma M = M} \alpha_M^M = \sigma$.

Por otra parte, supongamos que $\bigvee_{\sigma M = M} \alpha_M^M = \sigma$. Como cada α_M^M es idempotente, usando la proposición 1.0.12 $\bigvee_{\sigma M = M} \alpha_M^M$ es idempotente. Así σ es idempotente.

2. Veamos que $\omega_0^M(K/\omega_0^M(K)) = 0$ para todo $K \in R-Mod$. Sea $\overline{x} \in$

$\omega_0^M(K/\omega_0^M(K)) = \bigcap\{Ker\ f|f \in Hom_R(K/\omega_0^M(K), M)\}$, entonces $\overline{x} = x+\omega_0^M(K)$ y queremos ver que $x \in \omega_0^M(K)$ pero eso pasa si $x \in \bigcap\{Ker\ g|g \in Hom_R(K, M)\}$ es decir si $g(x) = 0$ para toda $g \in Hom_R(K, M)$. Sea $g \in Hom_R(K, M)$ entonces g induce el morfismo:

$$K/\omega_0^M(K) \xrightarrow{\overline{g}} M/\omega_0^M(M)$$

pero $\omega_0^M(M) = 0$, es decir

$$K/\omega_0^M(K) \xrightarrow{\overline{g}} M$$

$$x + \omega_0^M(K) \longmapsto g(x)$$

De aquí, $\overline{g} \in Hom_R(K/\omega_0^M(K), M)$ es decir, $0 = \overline{g}(x + \omega_0^M(K)) = g(x)$. Lo anterior implica que $x \in \bigcap\{Ker\ g \mid g \in Hom_R(K, M)\} = \omega_0^M(K)$ entonces $x + \omega_0^M(K) = 0$. Por lo tanto $\bigcap\{Ker\ f|f \in Hom_R(K/\omega_0^M(K), M)\} = 0$ es decir, ω_0^M es radical.

Ahora, supongamos que σ es radical. Sea M tal que $\sigma(M) = 0$, usando la proposición anterior tenemos que $\sigma \preceq \omega_0^M$, con lo cual $\sigma \preceq \bigwedge\{\omega_0^M|\sigma M = 0\}$. Por otra parte, como para todo $K \in R - Mod$ tenemos que $\sigma(K/\sigma K) = 0$ entonces,

$$\omega_{\sigma(K/\sigma K)}^{K/\sigma K}(K) = \bigcap\{Ker\ f|f \in Hom_R(K, K/\sigma K)\}$$

pero $\pi : K \to K/\sigma K \in Hom_R(K, K/\sigma K)$ y $Ker\ \pi = \sigma K$. Lo cual implica que $\omega_{\sigma(K/\sigma K)}^{K/\sigma K}(K) \subseteq \sigma K$ para todo módulo $K \in R - Mod$. Entonces, tenemos la siguiente expresión:

$$(\bigwedge_{\sigma M=0} \omega_0^M)(K) \subseteq (\bigcap_{M\neq(K/\sigma K)} \omega_0^M)(K) \cap \omega_{\sigma(K/\sigma K)}^{K/\sigma K}(K) \subseteq \omega_{\sigma(K/\sigma K)}^{K/\sigma K}(K)$$

es decir, $\bigwedge_{\sigma M=0} \omega_0^M \preceq \sigma$. Por lo tanto, $(\bigwedge_{\sigma M=0} \omega_0^M) = \sigma$.

Por otra parte, supongamos que $(\bigwedge_{\sigma M=0} \omega_0^M) = \sigma$ como cada ω_0^M es radical podemos usar la proposición 1.0.13, con lo cual $(\bigwedge_{\sigma M=0} \omega_0^M)$ es radical. Por lo tanto, σ es radical.

3. Veamos que $\omega_K^E \in R - lep$ para cada $E \in \mathcal{E}$ y $K \leq E$ totalmente invariante. Usando la proposición 1.0.4, hay que probar $\omega_K^E(N) = N \cap \omega_K^E(M)$ para todo $N \leq M \in R - Mod$. Por una parte, $\omega_K^E(N) \leq \omega_K^E(M)$ y $\omega_K^E(N) \leq N$

entonces $\omega_K^E(N) \subseteq \omega_K^E(M) \cap N$. Por otra parte, sea $x \in N \cap \omega_K^E(M)$, entonces $x \in N$ y $x \in \omega_K^E(M)$ de donde $x \in N$ y $x \in \bigcap\{f^{-1}(K) | f \in Hom_R(M, E)\}$, con lo cual $x \in N$ y $x \in f^{-1}(K)$ para todo $f \in Hom_R(M, E)$. Sea $g \in Hom_R(N, E)$, puesto que E es inyectivo existe $f \in Hom_R(M, E)$ tal que, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, "f"] \\ E & \end{tikzcd}$$

es decir, g es la restricción de f en N. Como $x \in N$ y $x \in \omega_K^E(M)$ entonces $g(x) = f(x) \in K$ con lo cual $x \in g^{-1}(K)$ para todo $g \in Hom_R(N, E)$. Por lo tanto $x \in \bigcap\{g^{-1}(K) | g \in Hom_R(N, E)\} = \omega_K^E(N)$. Con lo anterior $\omega_K^E(M) \cap N \subseteq \omega_K^E(N)$ y así, ω_K^E es un prerradical exacto izquierdo.

Por otra parte, supongamos que σ es prerradical exacto izquierdo. Usando la proposición 1.0.15, $\sigma \preceq \omega_{\sigma E}^E$ para $E \in \mathcal{E}$. Con lo anterior $\sigma \preceq \bigwedge\{\omega_{\sigma E}^E | E \in \mathcal{E}\}$. Luego, si $K \in R-Mod$ y EK es la cápsula inyectiva de K, tenemos que $\sigma(K) = \sigma(EK) \cap K = i^{-1}(\sigma(EK))$ pues σ es prerradical exacto izquierdo y donde $i : K \to EK$ es la inclusión. Como $\omega_{\sigma EK}^{EK}(K) = \bigcap\{f^{-1}(\sigma EK) | f \in Hom_R(K, EK)\} \subseteq \sigma K$ pues $i^{-1}(\sigma(EK)) = \sigma K$ es uno de los elementos de la intersección, se sigue que $\bigwedge_{E \neq EK} \omega_{\sigma E}^E(K) \cap \omega_{\sigma EK}^{EK}(K) \subseteq \omega_{\sigma EK}^{EK}(K) \subseteq \sigma K$. Por lo tanto $\sigma = \bigwedge\{\omega_{\sigma E}^E | E \in \mathcal{E}\}$.

Ahora, supongamos que $\sigma = \bigwedge\{\omega_{\sigma E}^E | E \in \mathcal{E}\}$. Dado que $\omega_{\sigma E}^E$ es exacto izquierdo para cada $E \in \mathcal{E}$, usando la proposición 1.0.14, tenemos que $\bigwedge\{\omega_{\sigma E}^E | E \in \mathcal{E}\}$ es exacto izquierdo. Por lo tanto, σ es preradical exacto izquierdo.

4. Para probar este inciso, consideremos los resultados obtenidos en 2 y 3. Ya que $E \in \mathcal{E}$ y $0 \leq E$ totalmente invariante, ω_0^E es radical y es exacto izquierdo. Además, σ es radical exacto izquierdo si y solo si $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^E | E \in \mathcal{E}$ y $\sigma(E) = 0\}$. ∎

Definición 12 *Sea R un anillo. Decimos que una familia de ideales izquierdos del anillo R es un filtro lineal, el cual se denota por $F\ell$ si cumple con:*

1) Si $I \in F\ell, I \subset J$ entonces $J \in F\ell$.

2) Si $I, J \in F\ell$ entonces $I \cap J \in F\ell$.

3) Si $I \in F\ell$ entonces para todo $x \in R, (I : x) \in F\ell$, donde

$$(I : x) = \{r \in R | rx \in I\}.$$

Denotaremos por $R - fil$ al conjunto de todos los filtros lineales de ideales izquierdos de R. $R - fil$ es una retícula considerando el orden como la contención y si $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in A} \subseteq R - fil$ definimos el ínfimo y el supremo como:

$$\bigwedge \mathcal{F}_i = \bigcap \mathcal{F}_i \qquad y$$

$$\bigvee \mathcal{F}_i = \bigcap \{\mathcal{L} \in R - fil | \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{L} \text{ para todo } i \in A\}$$

respectivamente.

Proposición 1.0.17 *Existe un isomorfismo de retículas entre $R - fil$ y $R - lep$.*

Demostración Consideremos las siguientes asignaciones:

I)

$$R - fil \longrightarrow R - lep$$

$$F\ell \longmapsto \sigma_{F\ell}$$

donde

$$\sigma_{F\ell} : R - Mod \longrightarrow R - Mod$$

$$M \longmapsto \{x \in M | Ann(x) \in F\ell\}$$

con $Ann(x) = \{r \in R | rx = 0\} = \{r \in R | rx \in 0\} = (0 : x)$.

II)

$$R - lep \longrightarrow R - fil$$

$$\sigma \longmapsto F\ell_\sigma$$

donde $F\ell_\sigma = \{I \leq R | R/I \in T_\sigma\}$

Para I) verifiquemos:
a)$\sigma_{F\ell}$ es prerradical.
b)$\sigma_{F\ell}$ es exacto izquierdo.

a) Veamos que $\sigma_{F\ell}(M)$=$\{x \in M|Ann(x) \in F\ell\} \leq M$.

$0 \in \sigma_{F\ell}(M)$ ya que $Ann(0) = R \in F\ell$.

Sean $a, b \in \sigma_{F\ell}(M)$, entonces $Ann(a), Ann(b) \in F\ell$. Como $F\ell$ es filtro lineal $Ann(a) \cap Ann(b) \in F\ell$. Sea $p \in Ann(a) \cap Ann(b)$ entonces $pa = pb = 0$ lo cual implica $p(a-b) = 0$. Así $p \in Ann(a-b)$. De aquí, $Ann(a) \cap Ann(b) \subseteq Ann(a-b)$ pero $Ann(a) \cap Ann(b) \in F\ell$ entonces $Ann(a-b) \in F\ell$. Por tanto, $(a-b) \in \sigma_{F\ell}(M)$.

Veamos que $ra \in \sigma_{F\ell}(M)$.Sean $a \in \sigma_{F\ell}(M)$ y $r \in R$. Por hipótesis se tiene que $(Ann(a) : r) \in F\ell$ pero $(Ann(a) : r) = \{k \in R|kr \in Ann(a)\} = \{k \in R|(kr)a = 0\} = \{k \in R|k(ra) = 0\} = Ann(ra)$ entonces $Ann(ra) = (Ann(a) : r) \in F\ell$. Por lo tanto, $ra \in \sigma_{F\ell}(M)$ y así, $\sigma_{F\ell}(M) \leq M$.

Ahora, sea $f \in Hom_R(M, K)$ y veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{F\ell}(M) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma f"] & M \arrow[d, "f"] \\
\sigma_{F\ell}(K) \arrow[r, "i"] & K
\end{tikzcd}$$

es decir, $f(\sigma_{F\ell}(M)) \subseteq \sigma_{F\ell}(K)$

Sea $y \in f(\sigma_{F\ell}(M))$ entonces $y = f(x)$ para algún $x \in \sigma_{F\ell}(K)$. Esto implica que $Ann(x) \in F\ell$, además $Ann(y) = Ann(f(x))$. Sea $p \in Ann(x)$ entonces $px = 0$ y aplicando f tenemos $f(px) = f(0) = 0$ con lo cual $pf(x) = 0$. Así $p \in Ann(f(x)) = Ann(y)$ es decir, $Ann(x) \subseteq Ann(f(x)) = Ann(y)$. Como $Ann(x) \in F\ell$ tenemos $Ann(f(x)) = Ann(y) \in F\ell$, luego $y \in \sigma_{F\ell}(K)$. Por lo tanto, $f(\sigma_{F\ell}(M)) \subseteq \sigma_{F\ell}(K)$ y así $\sigma_{F\ell}$ es prerradical.

b) Sea $N \leq M \in R-Mod$. Entonces $\sigma_{F\ell}(N) \leq \sigma_{F\ell}(M)$. Aplicando $\sigma_{F\ell}$ e intersectando con N tenemos $\sigma_{F\ell}(N) \leq \sigma_{F\ell}(M) \cap N$. Por otra parte, sea $x \in \sigma_{F\ell}(M) \cap N$ entonces $x \in \sigma_{F\ell}(M)$ y $x \in N$ es decir, $Ann(x) \in F\ell$ y $x \in N$. Con esto, $x \in \sigma_{F\ell}(N)$ por lo cual $\sigma_{F\ell}(M) \cap N \leq \sigma_{F\ell}(N)$. Por lo tanto $\sigma_{F\ell}(M) \cap N = \sigma_{F\ell}(N)$, es decir, $\sigma_{F\ell}$ es exacto izquierdo.

II) Mostremos que $F\ell_\sigma = \{I \leq R|R/I \in T_\sigma\}$ cumple con:

i) Si $I \in F\ell_\sigma$ e $I \subseteq J$ entonces $J \in F\ell_\sigma$.

ii) Si $I, J \in F\ell_\sigma$, entonces $I \cap J \in F\ell_\sigma$
iii) Para $I \in F\ell_\sigma$ y $a \in R$ entonces $(I : a) \in F\ell_\sigma$.

i) Consideremos el morfismo:

$$R/I \xrightarrow{\varphi} R/J$$

dado por $\phi(r + I) = r + J$, el cual es suprayectivo. Entonces podemos construir el diagrama:

$$\begin{tikzcd} R/I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & R/J \\ (R/I)/ker\varphi \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

de donde $R/J \cong (R/I)/ker\varphi$ pero $R/I, ker\varphi \in T_\sigma$ es decir, $(R/I)/ker\varphi \in T_\sigma$ lo que implica $R/J \in T_\sigma$. Por lo tanto, $J \in F\ell_\sigma$.

ii) Consideremos el morfismo:

$$R/(I \cap J) \xrightarrow{\varphi} R/I \oplus R/J$$

dado por $\varphi(r + I \cap J) = (r + I, r + J)$, el cual es inyectivo pues si $0 = (r + I, r + J)$ entonces $r \in I$, $r \in J$ ie, $r \in I \cap J$. Con esto podemos considerar a $R/(I \cap J)$ como un submódulo de $R/I \oplus R/J$ pero $R/I \oplus R/J \in T_\sigma$ y así $R/(I \cap J) \in T_\sigma$. Por lo tanto, $(I \cap J) \in F\ell_\sigma$.

iii) Como $I \in F\ell_\sigma$, podemos considerar los morfismos:

$$0 \longrightarrow (I : a) \xrightarrow{i} R \xrightarrow{f_a} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$$

$$x \longmapsto x \longmapsto xa \longmapsto xa + I$$

Para usar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\pi f_a"] \arrow[d] & R/I \\ R/Ker(\pi f_a) \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $x \in Ker(\pi f_a)$, entonces $0 = (\pi f_a)(x) = \pi(f_a(x)) = \pi(xa) = xa + I$. Así $0 = xa + I$ es decir, $xa \in I$ con lo cual $x \in (I : a)$. Luego, si $x \in (I : a)$ entonces $xa \in I$ de donde $0 = xa + I = \pi(xa) = (\pi f_a)(x)$ es decir, $x \in Ker(\pi f_a)$. Por lo tanto, $Ker(\pi f_a) = (I : a)$ y así $R/(I : a) = R/Ker(\pi f_a) \cong R/I \in T_\sigma$ lo que implica que $(I : a) \in F\ell_\sigma$. Como se verifican las condiciones i),ii),iii), $F\ell_\sigma$ es un filtro lineal.

Para terminar veamos que si se tiene:

I)
$$\begin{array}{ccccc} R - fil & \longrightarrow & R - lep & \longrightarrow & R - fil \\ F\ell & \longmapsto & \sigma_{F\ell} & \longmapsto & F\ell_{\sigma_{F\ell}} \end{array}$$

entonces $F\ell_{\sigma_{F\ell}}$=$F\ell$. Y que si

II)
$$\begin{array}{ccccc} R - lep & \longrightarrow & R - fil & \longrightarrow & R - lep \\ \sigma & \longmapsto & F\ell_\sigma & \longmapsto & \sigma_{F\ell_\sigma} \end{array}$$

entonces $\sigma_{F\ell_\sigma}$=σ.

I) Sea $I \in F\ell_{\sigma_{F\ell}}$=$\{K \leq R | R/K \in T_{\sigma_{F\ell}}\}$ entonces $R/I \in T_{\sigma_{F\ell}}$. Así $R/I = \sigma_{F\ell}(R/I) = \{\overline{r} \in R/I | Ann(\overline{r}) \in F\ell\}$. Como $Ann(\overline{r}) = \{k \in R | k\overline{r} = k(r + I) = 0\} = \{k \in R | kr + I = 0\} = \{k \in R | kr \in I\} = (I : r)$ entonces $Ann(\overline{r}) = (I : r)$, con lo cual $R/I = \{\overline{r} \in R/I | (I : r) \in F\ell\}$, en particular $I = (I : 1) \in F\ell$. Por otra parte, si $r \in R$ y $K \in F\ell$ se tiene que $(K : r) \in F\ell$ es decir, $Ann(r + K) \in F\ell$. De aquí, para todo $(r + K) \in R/K$ tenemos, $Ann(r + K) \in F\ell$ lo que implica que $\{(r + K) \in R/K | Ann(r + K) \in F\ell\} = R/K$, es decir $\sigma_{F\ell}(R/K) = (R/K)$. Con lo anterior $(R/K) \in T_{\sigma_{F\ell}}$ es decir, $K \in F\ell_{\sigma_{F\ell}}$. Por lo tanto $F\ell_{\sigma_{F\ell}}$=$F\ell$.

II) Sea $M \in R - Mod$. Entonces

$$\sigma_{F\ell_\sigma}(M) = \{x \in M | Ann(x) \in F\ell_\sigma\}$$

$$= \{x \in M | R/Ann(x) \in T_\sigma\}$$

$$= \{x \in M | Rx \in T_\sigma\}$$

$$= \{x \in M | \sigma(Rx) = Rx\} = \sigma(M).$$

Por lo tanto $\sigma_{F\ell_\sigma}$=σ. ▮

Como una consecuencia podemos describir cualquier prerradical exacto izquierdo en términos del prerradical ω.

Proposición 1.0.18 *Para cada $\sigma \in R - lep$ existe un conjunto $\mathcal{E}_\sigma$ de módulos inyectivos tales que $\sigma = \bigwedge\{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}_\sigma\}$.*

Demostración Sea $\sigma \in R - lep$. Considerando la proposición 1.0.16 inciso (3) tenemos que $\sigma = \bigwedge\{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}\}$. Por otra parte, para todo $E \in \mathcal{E}$ el prerradical $\omega^E_{\sigma E} \in R - lep$ así que $\{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}\} \subseteq R - lep$, el cual es un conjunto considerando la correspondencia anterior. Luego, para cada $E \in \mathcal{E}$ vamos a considerar la clase $[E]= \{Q \in \mathcal{E} | \omega^Q_{\sigma Q} = \omega^E_{\sigma E}\}$ para después tomar de cada clase un representante y construir el conjunto $\mathcal{E}_\sigma$ de módulos inyectivos tales que $\{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}\} = \{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}_\sigma\}$. La igualdad anterior es válida pues por una parte $\{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}_\sigma\} \subseteq \{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}\}$ ya que si $E \in \mathcal{E}_\sigma$ entonces $E \in \mathcal{E}$. Verifiquemos la otra contención. Sea $\omega^I_{\sigma I} \in \{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}\}$, entonces $I \in \mathcal{E}$ y podemos considerar la clase $[E']= \{Q' \in \mathcal{E} | \omega^{Q'}_{\sigma Q'} = \omega^{E'}_{\sigma E'}\}$ a la que pertenece I. Con lo anterior, encontramos el prerradical omega tal que $\omega^I_{\sigma I} = \omega^{E'}_{\sigma E'}$ donde $E' \in \mathcal{E}_\sigma$ y así $\omega^I_{\sigma I} \in \{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}_\sigma\}$. Por lo tanto $\{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}\} = \{\omega^E_{\sigma E} | E \in \mathcal{E}_\sigma\}$. ▮

De ahora en adelante, para cada $\sigma \in R - lep$ denotaremos por $\mathcal{E}_\sigma$ un conjunto fijo de módulos inyectivos con la propiedad de la proposición anterior.

Proposición 1.0.19 *Sean $\{M_\gamma\}_{\gamma\in I}$ y $\{N_\gamma\}_{\gamma\in I}$ familias de módulos tales que para cada $\gamma \in I$ se tiene que $N_\gamma \leq M_\gamma$. Sean $N = \bigoplus_{\gamma\in I} N_\gamma$, $M = \bigoplus_{\gamma\in I} M_\gamma$, $N' = \prod_{\gamma\in I} N_\gamma$ y $M' = \prod_{\gamma\in I} M_\gamma$.*

1. *Si $N \leq_{FI} M$ entonces para cada $\gamma \in I$, $N_\gamma \leq_{FI} M_\gamma$ y $\alpha^M_N = \bigvee_{\gamma\in I} \alpha^{M_\gamma}_{N_\gamma}$.*

2. *Si $N' \leq_{FI} M'$ entonces para cada $\gamma \in I$, $N_\gamma \leq_{FI} M_\gamma$ y $\omega^{M'}_{N'} = \bigwedge_{\gamma\in I} \omega^{M_\gamma}_{N_\gamma}$.*

Demostración 1. Supongamos que $N \leq_{FI} M$. Sean $\beta \in I$ y $f_\beta : M_\beta \to M_\beta$ un morfismo. Definamos $f : M \to M$ como $f := \bigoplus_{\gamma\in I} h_\gamma$, donde $h_\beta = f_\beta$

y $h_\gamma = 0$ para $\gamma \neq \beta$. Sea $x \in N_\beta$. Ya que $N \leq_{FI} M$ y $fi_\beta(x) \in N$ donde $i_\beta : M_\beta \to M$ es la inclusión. De lo anterior, $f_\beta(x) = h_\beta(x) = \pi_\beta f i_\beta(x) \in N_\beta$, donde $\pi_\beta : M \to M_\beta$ es la proyección canónica. Esto prueba que $N_\beta \leq_{FI} M_\beta$.

Ahora, sean $K \in R{-}Mod$ y $g : M \to K$. Entonces $g(N) = \sum_{\gamma\in I} gi_\gamma(N_\gamma) \leq \sum_{\gamma\in I} \alpha_{N_\gamma}^{M_\gamma}(K)$, así que $\alpha_N^M(K) \leq (\bigvee_{\gamma\in I} \alpha_{N_\gamma}^{M_\gamma})(K)$. Por lo tanto $\alpha_N^M \preceq \bigvee_{\gamma\in I} \alpha_{N_\gamma}^{M_\gamma}$. Por otra parte, sean $K \in R - Mod$, $\gamma \in I$ y $g_\gamma : M_\gamma \to K$. Entonces $g_\gamma(N_\gamma) = g_\gamma \pi_\gamma(N) \leq \alpha_N^M(K)$. Por lo tanto $\alpha_{N_\gamma}^{M_\gamma}(K) \leq \alpha_N^M(K)$ es decir, $\alpha_{N_\gamma}^{M_\gamma} \preceq \alpha_N^M$ para cada $\gamma \in I$ así que $\bigvee_{\gamma\in I} \alpha_{N_\gamma}^{M_\gamma} \preceq \alpha_N^M$. Por lo tanto $\alpha_N^M = \bigvee_{\gamma\in I} \alpha_{N_\gamma}^{M_\gamma}$.

2. Supongamos que $N' \leq_{FI} M'$ y sean $\beta \in I$ y $f_\beta : M_\beta \to M_\beta$ un morfismo. Como en el inciso anterior, consideremos $f' : M' \to M'$ como $f' := \prod_{\gamma\in I} h_\gamma$, donde $h_\beta = f_\beta$ y $h_\beta = 0$ para $\gamma \neq \beta$. Sea $x \in N_\beta$. Ya que $N' \leq_{FI} M'$ y $f' i'_\beta(x) \in N'$ donde $i'_\beta : M_\beta \to M'$ es la inclusión. De lo anterior, $f_\beta(x) = h_\beta(x) = \pi'_\beta f' i'_\beta(x) \in N_\beta$, donde $\pi'_\beta : M' \to M_\beta$ es la proyección canónica. Esto prueba que $N_\beta \leq_{FI} M_\beta$.

Ahora, sean $K \in R - Mod$, $\gamma \in I$ y $g_\gamma : K \to M_\gamma$. Entonces $\omega_{N'}^{M'}(K) \leq (i_\gamma g_\gamma)^{-1}(N') = (g_\gamma)^{-1}(N_\gamma)$, con lo cual $\omega_{N'}^{M'}(K) \leq \omega_{N_\gamma}^{M_\gamma}(K)$ y de aquí $\omega_{N'}^{M'} \preceq \omega_{N_\gamma}^{M_\gamma}$ para cada $\gamma \in I$. Por lo tanto $\omega_{N'}^{M'} \preceq \bigwedge_{\gamma\in I} \omega_{N_\gamma}^{M_\gamma}$. Por otra parte, sean $K \in R - Mod$ y $g : K \to M'$. Entonces

$$\bigcap\nolimits_{\gamma\in I} \omega_{N_\gamma}^{M_\gamma}(K) \leq \bigcap (\pi_\alpha g)^{-1}(N_\alpha) = g^{-1}(N'),$$

así que

$$(\bigwedge\nolimits_{\gamma\in I} \omega_{N_\gamma}^{M_\gamma})(K) \leq \omega_{N'}^{M'}(K)$$

es decir, $\bigwedge_{\gamma\in I} \omega_{N_\gamma}^{M_\gamma} \preceq \omega_{N'}^{M'}$ y por lo tanto $\omega_{N'}^{M'} = \bigwedge_{\gamma\in I} \omega_{N_\gamma}^{M_\gamma}$. ∎

Proposición 1.0.20 *Para cada $\sigma \in R - lep$ existe un módulo inyectivo E_σ tal que $\sigma = \omega_{\sigma E_\sigma}^{E_\sigma}$. En efecto, la igualdad anterior se verifica para cualquier módulo inyectivo E_σ que contenga una copia isomorfa de cada $E \in \mathcal{E}_\sigma$.*

Demostración Sea E_σ un módulo inyectivo que contenga una copia isomorfa de cada $E \in \mathcal{E}_\sigma$, por ejemplo:

$$E_\sigma = E\left(\bigoplus_{E\in\varepsilon_\sigma} E\right) \; ; \; E_\sigma = \prod_{E\in\varepsilon_\sigma} E$$

Utilizando la proposición 1.0.15 se tiene que $\sigma \preceq \omega_{\sigma E_\sigma}^{E_\sigma}$. Por otra parte, si $E' \in \mathcal{E}_\sigma$ entonces $E_\sigma \cong E' \bigoplus Q$ con $Q \in \mathcal{E}$. Considerando las proposiciones 1.0.18 y 1.0.19 tenemos que $\omega_{\sigma E_\sigma}^{E_\sigma} = \omega_{\sigma E'}^{E'} \wedge \omega_{\sigma Q}^{Q} \preceq \omega_{\sigma E'}^{E'}$, así que $\omega_{\sigma E_\sigma}^{E_\sigma} \preceq \omega_{\sigma E'}^{E'}$ para todo $E' \in \mathcal{E}_\sigma$. Por lo tanto, $\omega_{\sigma E_\sigma}^{E_\sigma} \preceq \bigwedge_{E\in\varepsilon_\sigma} \omega_{\sigma E}^{E} = \sigma$, con lo cual $\sigma = \omega_{\sigma E_\sigma}^{E_\sigma}$ para todo $\sigma \in R - lep$. ∎

De ahora en adelante, para cada $\sigma \in R - lep$ denotaremos por $E_\sigma := \prod_{E\in\varepsilon_\sigma} E$ como el módulo inyectivo canónico que cumple con la propiedad de la proposición anterior.

Capítulo 2

Módulos Inyectivos Principales

Para este capítulo vamos a considerar cada conjunto de módulos inyectivos de cada elemento de $R-lep$ que hemos obtenido en la proposición 1.0.20 y construiremos un módulo que, con el prerradical omega, determinan un módulo con el cual obtenemos otra descripción de los prerradicales exactos izquierdos. A este módulo lo llamaremos módulo inyectivo principal (M.I.P.) y demostraremos algunas de sus propiedades. A continuación, demostraremos la existencia del isomorfismo entre las retículas de submódulos totalmente invariantes de un módulo inyectivo principal y la de prerradicales exactos izquierdos. Luego,y considerendo que R es un anillo artiniano, veremos que existe un isomorfismo que invierte el orden entre $S_{f_i}(R)$ y $R-fil$ para finalmente llegar al teorema principal del capítulo, es decir, trabajaremos con el anti-isomorfismo entre las retículas $S_{f_i}(R)$ y $S_{f_i}(\overline{E})$.

Definición 13 *Un módulo inyectivo E es un módulo inyectivo principal si para cada $\sigma \in R-lep$ se tiene que $\sigma = \omega^{E}_{\sigma E}$*

Proposición 2.0.21 *Para todo anillo R existen módulos inyectivos principales. En efecto, si $\overline{E}$ es un módulo inyectivo que contiene una copia isomorfa de cada E_σ para cada $\sigma \in R-lep$, entonces $\overline{E}$ es un modulo inyectivo principal.*

Demostración Sea $\overline{E}$ un módulo inyectivo que contenga una copia isomorfa de cada E_σ para cada $\sigma \in R-lep$. Puesto que $R-lep$ es un conjunto, podemos considerar $\overline{E} = \prod_{R-lep} E_\sigma$ o también $\overline{E} = E\left(\bigoplus_{R-lep} E_\sigma\right)$, y cualquiera de los dos cumple con lo anterior. Si $\sigma \in R-lep$ entonces $\sigma \preceq \omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}}$ por la proposición 1.0.15. Por otra parte, $\overline{E} \cong E_\sigma \bigoplus Q$ con $Q \in \mathcal{E}$, con lo cual $\omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}} = \omega^{E_\sigma}_{\sigma E_\sigma} \wedge \omega^{Q}_{\sigma Q} \preceq \omega^{E_\sigma}_{\sigma E_\sigma} = \sigma$, es decir $\omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}} \preceq \sigma$. Por lo tanto, $\omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}} = \sigma$ ∎

Proposición 2.0.22 *Sea $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal. Si $\overline{\overline{E}}$ es un módulo inyectivo que contiene una copia isomorfa de $\overline{E}$ entonces $\overline{\overline{E}}$ es un módulo inyectivo principal.*

Demostración Sea $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal y

$$\overline{E} \xrightarrow{\phi} \overline{\overline{E}}$$

un monomorfismo. Como $\overline{\overline{E}}$ contiene una copia isomorfa de $\overline{E}$, tenemos que $\overline{\overline{E}} \cong \overline{E} \bigoplus Q$ para algún $Q \in \mathcal{E}$. Sea $\sigma \in R-lep$ y consideremos las proposiciones 1.0.15 y 1.0.19 para obtener $\sigma \preceq \omega^{\overline{\overline{E}}}_{\sigma\overline{\overline{E}}} = \omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}} \wedge \omega^{Q}_{\sigma Q} \preceq \omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}} = \sigma$. Por lo tanto $\sigma = \omega^{\overline{\overline{E}}}_{\sigma\overline{\overline{E}}}$, es decir $\overline{\overline{E}}$ es un módulo inyectivo principal. ∎

Definamos $E_0 = E(\bigoplus_{R-simp} S)$, el cual es un cogenerador inyectivo (considerando la proposición A.1.5 del apéndice) y nos permite continuar construyendo módulos inyectivos principales como sigue.

Proposición 2.0.23 *Sea $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal y sea $\kappa = \#\overline{E}$. Entonces $(E_0)^\kappa$ es un módulo inyectivo principal.*

Demostración Para cada $x \in \overline{E}$ podemos considerar el submódulo cíclico Rx. Como es finitamente generado existe K_x un submódulo máximo de Rx con el cual podemos construir el morfismo:

$$f_x : Rx \xrightarrow{\pi} Rx/K_x \xrightarrow{\iota} E_0$$

y como E_0 es inyectivo, el morfismo anterior se extiende:

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[r] \arrow[d, "f_x"'] & \overline{E} \arrow[dl, "\overline{f}_x"] \\ E_0 & \end{tikzcd}$$

De esta manera, la familia de morfismos $\{\overline{f_x}\}_{x\in\overline{E}}$ y la propiedad universal del producto, nos permite obtener el diagrama:

$$\begin{tikzcd} (E_0)^\kappa \arrow[r, "\pi_x"] & E_0 \\ \overline{E} \arrow[u, "\exists!\phi"] \arrow[ur, "\overline{f}_x"'] & \end{tikzcd}$$

donde el morfismo ϕ se calcula como:

$$\overline{E} \xrightarrow{\phi} (E_0)^{\kappa}$$

$$e \longrightarrow (\overline{f_x}(e))_{x\in\overline{E}}$$

Faltaría mostrar que ϕ es monomorfismo. Sea $e' \in Ker\phi$ tal que $e' \neq 0$. Entonces $0 = \phi(e') = (\overline{f_x}(e'))_{x\in\overline{E}}$, es decir, $\overline{f_x}(e') = 0$ para todo $\overline{f_x}$. Notemos que $e' \in \overline{E}$, entonces $\overline{f_{e'}}(e') = 0$, lo cual es absurdo por la construcción de $\overline{f_{e'}}$. Así, ϕ es monomorfismo, por lo tanto $(E_0)^{\kappa}$ contiene una copia isomorfa de $\overline{E}$ y usando la proposición 2.0.22 concluimos que $(E_0)^{\kappa}$ es un módulo inyectivo principal. ∎

Considerando la proposición 1.0.20, tenemos los siguientes ejemplos de módulos inyectivos principales:

1) Si R es cualquier anillo artiniano izquierdo y $R - Simp = \{S_1, ..., S_n\}$ entonces $E_0 = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$ es un módulo inyectivo principal.

2) Si R es cualquier anillo Neteriano izquierdo entonces $\bigoplus\{Q|Q$ es inyectivo directamente inescindible $\}$ es un módulo inyectivo principal.

Para 1), veamos que para todo $\sigma \in R-lep$ se tiene $\sigma = \omega^{E_0}_{\sigma E_0}$. Puesto que R es artiniano izquierdo todo módulo inyectivo $I \in R-Mod$ se escribe como $I = \bigoplus_{j=1}^{m}(E(S_j))^{(X_j)}$, $m \in \{1, ..., n\}$ y X_j algún conjunto, pero podemos solo considerar $I = \bigoplus_{j=1}^{m}(E(S_j))$ ya que si Q es un módulo inyectivo y usando la proposición 1.0.1 se tiene para $Q^{(X)}$ que:

$$\omega^{Q^{(X)}}_{\sigma(Q^{(X)})} = \omega^{Q^{(X)}}_{(\sigma Q)^{(X)}} = \bigwedge \omega^{Q}_{\sigma Q}.$$

Entonces si $I = \bigoplus Q_i^{(X_i)}$ podemos considerar el modulo inyectivo $\bigoplus Q_i$ pues

$$\omega^{I}_{\sigma I} = \omega^{\bigoplus Q_i}_{\sigma(\bigoplus Q_i)}.$$

Considerando lo anterior, tenemos para $E_0 = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$ la siguiente igualdad:

$$\omega^{E_0}_{\sigma E_0} = \omega^{E(S_1)\oplus ...\oplus E(S_n)}_{\sigma(E(S_1)\oplus ...\oplus E(S_n))}$$

reacomodando términos y usando la proposición 1.0.19 tenemos que:

$$\omega_{\sigma E_0}^{E_0} = \omega_{\sigma(E(S_1)\oplus...\oplus E(S_n))}^{E(S_1)\oplus...\oplus E(S_n)} = \omega_{\sigma \bigoplus_{j=1}^{m}(E(S_j))}^{\bigoplus_{j=1}^{m}(E(S_j))} \wedge \omega_{\sigma(\bigoplus_{i\neq j}(E(S_i)))}^{\bigoplus_{i\neq j}(E(S_i))}$$

de donde se obtiene:

$$\omega_{\sigma E_0}^{E_0} = \omega_{\sigma(I)}^{I} \wedge \omega_{\sigma(\bigoplus_{i\neq j}(E(S_i))}^{\bigoplus_{i\neq j}(E(S_i)} \preceq \omega_{\sigma(I)}^{I}$$

de manera que $\omega_{\sigma E_0}^{E_0} \preceq \omega_{\sigma(I)}^{I}$ para todo $I \in R{-}Mod$. Con lo cual tenemos que

$$\omega_{\sigma E_0}^{E_0} \preceq \bigwedge_{E\in\varepsilon_\sigma} \omega_{\sigma(E)}^{E} = \sigma$$

pues $\omega_{\sigma E_0}^{E_0} \in \{\omega_{\sigma E}^{E} | E \in \mathcal{E}_\sigma\}$. Con lo anterior $\omega_{\sigma E_0}^{E_0} \preceq \sigma$. Por otra parte, usando la proposición 1.0.15 se verifica que $\sigma \preceq \omega_{\sigma E_0}^{E_0}$. Por lo tanto, $E_0 = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$ es un módulo inyectivo principal.

Para 2), sea $\sigma \in R - lep$ y veamos que $\sigma = \omega_{\sigma \bigoplus Q}^{\bigoplus Q}$. Por hipótesis R es neteriano izquierdo, con lo que para todo módulo inyectivo $I \in R - Mod$ se tiene $I = \bigoplus Q'$ con Q' inyectivo directamente inescindible. Así,

$$\omega_{\sigma \bigoplus Q}^{\bigoplus Q} = \omega_{\sigma \bigoplus Q'}^{\bigoplus Q'} \wedge \omega_{\sigma \bigoplus_{Q\neq Q'} Q}^{\bigoplus_{Q\neq Q'} Q} \preceq \omega_{\sigma \bigoplus Q'}^{\bigoplus Q'}$$

de manera que $\omega_{\sigma \bigoplus Q}^{\bigoplus Q} \preceq \omega_{\sigma \bigoplus Q'}^{\bigoplus Q'}$ para todo $I \in R - Mod$. con lo cual tenemos que

$$\omega_{\sigma \bigoplus Q}^{\bigoplus Q} \preceq \bigwedge_{E\in\varepsilon_\sigma} \omega_{\sigma(E)}^{E} = \sigma$$

pues $\omega_{\sigma \bigoplus Q}^{\bigoplus Q} \in \{\omega_{\sigma E}^{E} | E \in \mathcal{E}_\sigma\}$. Por lo tanto $\omega_{\sigma \bigoplus Q}^{\bigoplus Q} \preceq \sigma$. Por otra parte, usando la proposición 1.0.15 se verifica que $\sigma \preceq \omega_{\sigma \bigoplus Q}^{\bigoplus Q}$. Por lo tanto, $\bigoplus\{Q|Q$ es inyectivo directamente inescindible $\}$ es un módulo inyectivo principal.

Proposición 2.0.24 *Sea $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal y sea $S \in R-Simp$. Entonces existe un monomorfismo:*

$$E(S) \xrightarrow{\beta} \overline{E}$$

Demostración Sean $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal. Como $\omega_0^{E(S)} \in R{-}lep$ tenemos

$$\omega_0^{E(S)} = \omega^{\overline{E}}_{\omega_0^{E(S)}(\overline{E})} = \omega^{\overline{E}}_K$$

con $K = \omega_0^{E(S)}(\overline{E})$. De lo anterior, $\omega_0^{\overline{E}}(E(S)) \subseteq \omega_0^{E(S)}(E(S)) = 0$, lo cual implica que

$$\bigcap_{g \in Hom_R(E(S),\overline{E})} g^{-1}(0) = 0.$$

por lo tanto tenemos un monomorfismo:

$$E(S) \xrightarrow{\alpha} \overline{E}^I$$

con $I = Hom_R(E(S)), \overline{E})$. Considerando el monomorfismo anterior, tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E(S) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi_f \alpha"'] & \overline{E}^I \arrow[d, "\pi_f"] \\
& \overline{E}
\end{tikzcd}$$

donde π_f es la proyección en f. Veamos que existe $f \in Hom_R(E(S), \overline{E})$ tal que $Ker(\pi_f \alpha) = 0$. Supongamos que para todo $f \in Hom_R(E(S), \overline{E})$ se tiene que $Ker(\pi_f \alpha) \neq 0$ y sea f' con las condiciones anteriores. Puesto que $0 \neq Ker(\pi_{f'}\alpha) \leq E(S)$ y $E(S)$ es uniforme entonces $Ker(\pi_{f'}\alpha)$ es submódulo esencial de $E(S)$ es decir, para todo $K \leq E(S)$ distinto de cero, se tiene que $Ker(\pi_{f'}\alpha) \cap K \neq 0$. En particular, si $K = S$ tenemos que $0 \neq Ker(\pi_{f'}\alpha) \cap S \subseteq S$ y como $S \in R-Simp$ se tiene que $Ker(\pi_{f'}\alpha) \cap S = S$ es decir, $S \subseteq Ker(\pi_{f'}\alpha)$ y como f' es arbitraria tenemos

$$S \subseteq \bigcap_{f \in I} Ker(\pi_f \alpha)$$

donde $I = Hom_R(E(S), \overline{E})$. Ya que $Ker(\pi_f \alpha) = \alpha^{-1}(Ker \pi_f)$ se tiene que

$$S \subseteq \bigcap_{f \in I} Ker(\pi_f \alpha) = \bigcap_{f \in I} \alpha^{-1}(Ker \pi_f) = \alpha^{-1}(\bigcap_{f \in I} Ker \pi_f)$$

donde $\bigcap_{f \in I} Ker \pi_f = 0$. Entonces $S \subseteq \alpha^{-1}(\bigcap_{f \in I} Ker \pi_f) = \alpha^{-1}(0) = Ker \alpha = 0$ pues α es monomorfismo. Así $S \subseteq 0$, lo cual es un absurdo pues $S \in R - Simp$. Por lo tanto, existe $f \in Hom_R(E(S), \overline{E})$ tal que $Ker(\pi_f \alpha) = 0$ es decir, $\pi_f \alpha$ es un monomorfismo. ∎

Proposición 2.0.25 *Cada módulo inyectivo principal es cogenerador para $R - Mod$.*

Demostración Sea $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal y $S \in R - simp$. Considerando la proposición anterior tenemos un monomorfismo:

$$E(S) \xrightarrow{\alpha} \overline{E}$$

es decir, $\overline{E}$ contiene una copia isomorfa de cada módulo simple usando la proposición A.1.5 del apéndice podemos concluir que $\overline{E}$ es un cogenerador inyectivo. ∎

Proposición 2.0.26 *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) Todo módulo no cero contiene un submódulo uniforme.
b) Todo módulo inyectivo es la cápsula inyectiva de una suma directa de submódulos uniformes.
c) Todo módulo inyectivo principal es la cápsula inyectiva de una suma directa de submódulos uniformes.

Demostración $a) \Rightarrow b)$ Sea E un módulo inyectivo. Definimos el conjunto de familias de submódulos independientes de E como sigue:

$$\Omega = \{\{N_i\}_{i\in I} | \textstyle\sum_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I} N_i \text{ , } N_i \text{ uniforme } \}$$

Ω es no vacía pues E contiene un submódulo uniforme. Dados $\{N_i\}_{i\in I}$, $\{N_j\}_{j\in J}$ en Ω, definimos un orden como sigue:

$$\{N_i\}_{i\in I} \leqslant \{N_j\}_{j\in J} \text{ si y solo si } N_i \in \{N_j\}_{j\in J}.$$

Con lo anterior, dada $C = \{N_i\}_{I_\alpha}$ una cadena de elementos en Ω, para la cual se tiene que $\cup C$ es un elemento de Ω pues si consideramos $N_{i_1}, N_{i_2}, ..., N_{i_k}$, estos elementos se encuentran en alguna familia, digamos $\{N_i\}_I$ pues estamos considerando una cadena. De lo anterior y considerando la proposición A.1.10 del apéndice $N_{i_1} + N_{i_2} + ... + N_{i_k} = N_{i_1} \oplus N_{i_2} \oplus ... \oplus N_{i_k}$ y como $N_{i_1}, N_{i_2}, ..., N_{i_k}$ fueron arbitrarios se tiene que $\sum_{N\in\cup C} N = \bigoplus_{N\in\cup C} N$. Aplicando Lema de Zorn existe una familia máxima de submódulos uniformes de E, a la cual denotaremos por $\overline{U}$.

Veamos que $\bigoplus_{U\in\overline{U}} U$ es esencial en E. Si $0 \neq N \leq E$ es tal que $\bigoplus_{U\in\overline{U}} U \cap N = 0$ existe un submódulo uniforme I de N tal que $\overline{U} \cup \{I\} \in \Omega$, lo cual es una contradicción pues $\overline{U}$ es máxima. Por lo tanto, $\bigoplus_{U\in\overline{U}} U \leq E$ esencial, así que $E = E(\bigoplus_{U\in\overline{U}} U)$.

b) $\Rightarrow$ *c*) Por hipótesis, para $I \in R - Mod$ inyectivo, $I = E(\bigoplus_{\alpha \in J} U_\alpha)$ donde U_α es submódulo uniforme para todo $\alpha \in J$. Luego, para $\overline{E}$ módulo inyectivo principal tenemos que $\overline{E} = E(\bigoplus_{\alpha \in J} U_\alpha)$ pues $\overline{E}$ es inyectivo.

c) $\Rightarrow$ *a*) Sea M un módulo no cero y $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal, entonces $\omega_0^{EM} = \omega_K^{\overline{E}}$, donde $K \leq_{FI} \overline{E}$. De lo anterior,

$$\omega_0^{\overline{E}}(EM) \leq \omega_K^{\overline{E}}(EM) = \omega_0^{EM}(EM) = 0$$

es decir, $\omega_0^{\overline{E}}(EM) = 0$ con lo cual existe un monomorfismo:

$$EM \xrightarrow{\alpha} \overline{E}^I$$

como $\overline{E}$ es un módulo inyectivo principal y usando la proposición 2.0.22, tenemos que $\overline{E}^I$ es un módulo inyectivo principal. Considerando la hipotesis, podemos afirmar que $\overline{E}^I = E(\bigoplus_{U \in \overline{U}} U)$ donde $\overline{U}$ es una familia independiente de submódulos uniformes.

Sea M' la imagen de M bajo el monomorfismo $\alpha : M \to E(\bigoplus_{U \in \overline{U}} U)$ y sea $N = M' \cap \bigoplus_{U \in \overline{U}} U \neq 0$. Consideremos $x \in N$, de donde $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ con $x_i \in U_i$ y $U_i \in \overline{U}$. Entonces $Ann(x) = Ann(x_i)$ para cada i, así que

$$Rx \cong R/Ann(x) = R/Ann(x_i) \cong Rx_i$$

es decir $Rx \cong Rx_1 \leq U_1$ y como U_1 es uniforme entonces Rx es un submódulo uniforme de M' con lo cual M tiene un submódulo uniforme como queríamos mostrar. $\blacksquare$

Algunos ejemplos de anillos que satisfacen las condiciones de la proposición anterior son:

1. Anillos con dimensión de Gabriel.
2. Anillos de cadena izquierdos.

Para el desarrollo de los ejemplos anteriores considere la sección A.2 del apéndice.

De ahora en adelante, para $M \in R - Mod$ denotaremos por $S_{f_i}(M)$ al conjunto de submódulos totalmente invariantes de M.

Proposición 2.0.27 *Sea $\overline{E}$ un modulo inyectivo principal. Entonces las retículas $\langle R-lep, \preceq, \wedge, \vee\rangle$ y $\langle S_{f_i}(\overline{E}), \leq, \bigcap, +\rangle$ son isomorfas.*

Demostración Veamos que $\langle R-lep, \preceq, \wedge, \vee\rangle$ y $\langle S_{f_i}(\overline{E}), \leq, \bigcap, +\rangle$ son retículas completas. Sean $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de prerradicales exactos izquierdos y $\{N_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de submódulos totalmente invariantes de $\overline{E}$. Veamos que

1. $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha, \bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha \in R-lep$

2. $\bigwedge_{\alpha\in I}N_\alpha, \bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha \in S_{f_i}(\overline{E})$

Para 1, sea $K \leq M \in R-Mod$ con lo cual:

$(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(K) = \bigcap_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(K) = \bigcap_{\alpha\in I}(\sigma_\alpha(M)\cap K) = (\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(M)\cap K$

y así

$\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(K) = (\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(M)\cap K$, es decir $\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha \in R-lep$. Por otra parte, definimos:

$$\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha = \bigwedge\{\sigma\in R-lep | \sigma_\alpha \preceq \sigma\}$$

de donde:

$$\begin{aligned}(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(K) &= (\bigwedge_{\sigma\in R-lep}\sigma)(K)\\ &= \bigcap_{\sigma\in R-lep}(\sigma_\alpha(M)\cap K)\\ &= (\bigwedge_{\sigma\in R-lep}\sigma_\alpha)(M)\cap K)\\ &= (\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(M)\cap K\end{aligned}$$

de manera que $\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha \in R-lep$. Por lo tanto $< R-lep, \preceq, \wedge, \vee >$ es una retícula completa.

Para 2, sea $f\in Hom_R(\overline{E},\overline{E})$ y veamos que:

a)$f(\bigwedge_{\alpha\in I}N_\alpha) \subseteq \bigwedge_{\alpha\in I}N_\alpha$

b)$f(\bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha) \subseteq \bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha$.

Como $f(\bigwedge_{\alpha\in I}N_\alpha) = f(\bigcap_{\alpha\in I}N_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}f(N_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I}N_\alpha = \bigwedge_{\alpha\in I}N_\alpha$

tenemos que: $f(\bigwedge_{\alpha\in I} N_\alpha) \subseteq \bigwedge_{\alpha\in I} N_\alpha$.

Por otro lado, $f(\bigvee_{\alpha\in I} N_\alpha) = f(\sum_{\alpha\in I} N_\alpha) \subseteq \sum_{\alpha\in I} f(N_\alpha) \subseteq \sum_{\alpha\in I} N_\alpha = \bigvee_{\alpha\in I} N_\alpha$, con lo cual $f(\bigvee_{\alpha\in I} N_\alpha) \subseteq \bigvee_{\alpha\in I} N_\alpha$. Por lo tanto, se tiene que la retícula $< S_{f_i}(E), \leq, \bigcap, + >$ es completa.

Ahora definamos los morfismos:

$$1)\ R-lep \xrightarrow{\phi} S_{f_i}(\overline{E})$$

$$\sigma \longmapsto \sigma(\overline{E})$$

$$2)\ S_{f_i}(\overline{E}) \xrightarrow{\overline{\phi}} R-lep$$

$$N \longmapsto \omega_N^{\overline{E}}$$

y veamos que los morfismos anteriores preservan el orden. Para 1), consideremos σ, $\tau \in R-lep$ tales que $\sigma \preceq \tau$. Entonces para todo $M \in R-Mod$ se tiene que $\sigma(M) \leq \tau(M)$, en particular para $\overline{E}$. Con lo anterior $\phi(\sigma) = \sigma(\overline{E}) \leq \tau(\overline{E}) = \phi(\tau)$, luego ϕ preserva el orden.

Para 2), consideremos $K \in R-Mod$, $f \in Hom_R(K,\overline{E})$ y $N, N' \in S_{f_i}(\overline{E})$ tales que $N \leq N'$. Entonces $f^{-1}(N) \leq f^{-1}(N')$. Como el homomorfismo es arbitrario, tenemos:

$$\bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(K,\overline{E})\} \leq \bigcap\{f^{-1}(N')|f \in Hom_R(K,\overline{E})\}$$

es decir, $\omega_N^{\overline{E}}(K) = \overline{\phi}(N) \leq \overline{\phi}(N') = \omega_{N'}^{\overline{E}}(K)$. Por lo tanto, ϕ y $\overline{\phi}$ son morfismos de orden.

Ahora, mostremos que para las familias $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R-lep$ y $\{N_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq S_{f_i}(\overline{E})$ se satisfacen las siguientes igualdades:

$$1.1)\ \phi(\bigwedge_{\alpha\in I} \sigma_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in I} \phi(\sigma_\alpha)$$

$$1.2)\ \phi(\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in I} \phi(\sigma_\alpha).$$

$$2.1)\ \overline{\phi}(\bigwedge_{\alpha\in I} N_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in I} \overline{\phi}(N_\alpha)$$

$$2.2)\ \overline{\phi}(\bigvee_{\alpha\in I} N_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in I} \overline{\phi}(N_\alpha).$$

Para 1.1) se tiene que:

$\phi(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)=(\bigwedge_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(\overline{E})=\bigcap_{\alpha\in I}\sigma_\alpha(\overline{E})=\bigcap_{\alpha\in I}\phi(\sigma_\alpha)=\bigwedge_{\alpha\in I}\phi(\sigma_\alpha)$.

Para 1.2) recordemos que $\sigma_\alpha\preceq\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ con lo cual, $\sigma_\alpha(\overline{E})\leq(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(\overline{E})$ y así $\bigvee_{\alpha\in I}\phi(\sigma_\alpha)\leq\phi(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)$. Por otra parte, si $K\leq_{FI}\overline{E}$ tal que $\phi(\sigma_\alpha)\leq K$ entonces $\omega^{\overline{E}}_{\phi(\sigma_\alpha)}\preceq\omega^{\overline{E}}_K$, es decir, $\omega^{\overline{E}}_{\sigma_\alpha(\overline{E})}\preceq\omega^{\overline{E}}_K$ y como $\overline{E}$ es inyectivo principal $\sigma_\alpha=\omega^{\overline{E}}_{\sigma_\alpha(\overline{E})}\preceq\omega^{\overline{E}}_K$. De lo anterior, $(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(\overline{E})\leq\omega^{\overline{E}}_K(\overline{E})=K$, de manera que $(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)(\overline{E})\leq K$ y así $\phi(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)\leq\bigvee_{\alpha\in I}\phi(\sigma_\alpha)$. Por lo tanto, $\phi(\bigvee_{\alpha\in I}\sigma_\alpha)=\bigvee_{\alpha\in I}\phi(\sigma_\alpha)$.

Para 2.1), tenemos que:

$$\begin{aligned}\bigwedge_{\alpha\in I}\overline{\phi}(N_\alpha)&=\bigwedge_{\alpha\in I}\omega^{\overline{E}}_{N_\alpha}\\&=\omega^{\overline{E}}_{(\bigwedge_{\alpha\in I}\omega^{\overline{E}}_{N_\alpha})(\overline{E})}\\&=\omega^{\overline{E}}_{\bigcap_{\alpha\in I}N_\alpha}\\&=\omega^{\overline{E}}_{\bigwedge_{\alpha\in I}N_\alpha}\\&=\overline{\phi}(\bigwedge_{\alpha\in I}N_\alpha)\end{aligned}$$

Para 2.2), sabemos que $N_\alpha\leq\bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha$, entonces $\overline{\phi}(N_\alpha)=\omega^{\overline{E}}_{N_\alpha}\preceq\omega^{\overline{E}}_{\bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha}=\overline{\phi}(\bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha)$ y de aquí, $\bigvee_{\alpha\in I}\overline{\phi}(N_\alpha)\preceq\overline{\phi}(\bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha)$. Por otro lado, para todo $\sigma\in R-lep$ tal que $\omega^{\overline{E}}_{N_\alpha}\preceq\sigma$, se tiene que $\omega^{\overline{E}}_{N_\alpha}(\overline{E})\leq\sigma(\overline{E})$. Así, $N_\alpha\leq\sigma(\overline{E})$ para todo α, es decir, $\sum_{\alpha\in I}N_\alpha\leq\sigma(\overline{E})$, de donde $\omega^{\overline{E}}_{\sum_{\alpha\in I}N_\alpha}(\overline{E})\leq\sigma(\overline{E})$ y como $\overline{E}$ es un inyectivo principal, $\omega^{\overline{E}}_{\bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha}=\omega^{\overline{E}}_{\sum_{\alpha\in I}N_\alpha}\preceq\omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}}=\sigma$. De esta manera, para todo $\sigma\in R-lep$ tal que $\omega^{\overline{E}}_{N_\alpha}\preceq\sigma$ se tiene que para cada $\alpha\in I$, $\omega^{\overline{E}}_{\bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha}\preceq\sigma$. De lo anterior,

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(\bigvee_{\alpha\in I}N_\alpha)&=\omega^{\overline{E}}_{\sum_{\alpha\in I}N_\alpha}\\&\preceq\bigwedge\{\sigma\in R-lep|\omega^{\overline{E}}_{N_\alpha}\preceq\sigma\}\\&=\bigvee_{\alpha\in I}\omega^{\overline{E}}_{N_\alpha}\\&=\bigvee_{\alpha\in I}\overline{\phi}(N_\alpha)\end{aligned}$$

de esta manera $\overline{\phi}(\bigvee_{\alpha\in I} N_\alpha) \preceq \bigvee_{\alpha\in I} \overline{\phi}(N_\alpha)$ y así $\overline{\phi}(\bigvee_{\alpha\in I} N_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in I} \overline{\phi}(N_\alpha)$.

Finalmente, veamos que $\overline{\phi}\circ\phi = Id_{R-lep}$ y que $\phi\circ\overline{\phi} = Id_{S_{f_i}(\overline{E})}$. Sea $\sigma \in R-lep$, entonces $(\overline{\phi}\circ\phi)(\sigma) = \overline{\phi}(\phi(\sigma)) = \overline{\phi}(\sigma\overline{E}) = \omega^{\overline{E}}_{\sigma\overline{E}} = \sigma$ pues $\overline{E}$ es un inyectivo principal. Por otra parte, sea $N \in S_{f_i}(\overline{E})$, entonces $(\phi\circ\overline{\phi})(N) = \phi(\overline{\phi}(N)) = \phi(\omega^{\overline{E}}_N) = \omega^{\overline{E}}_N(\overline{E}) = N$. Por lo tanto $\phi\circ\overline{\phi} = Id_{S_{f_i}(\overline{E})}$. De esta manera, las retículas $\langle R-lep, \preceq, \wedge, \vee\rangle$ y $\langle S_{f_i}(\overline{E}), \leq, \bigcap, +\rangle$ son isomorfas. ∎

Proposición 2.0.28 *Sea $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal. Para cada módulo inyectivo E se tiene que $\sharp S_{f_i}(E) \leq \sharp S_{f_i}(\overline{E})$ donde $\sharp$ denota a la cardinalidad.*

Demostración Consideremos E un módulo inyectivo y veamos que la función:

$$S_{f_i}(E) \xrightarrow{\psi_E} R-lep$$

$$N \longmapsto \omega^E_N$$

es inyectiva. Sean $N, L \in S_{f_i}(E)$ y supongamos que $\psi_E(N) = \psi_E(L)$, es decir $\omega^E_N = \omega^E_L$. Entonces para E se tiene que $N = \omega^E_N(E) = \omega^E_L(E) = L$. Por lo tanto $N = L$ y así la función ψ_E es inyectiva, con lo cual tenemos que

$$S_{f_i}(E) \cong \psi_E(S_{f_i}(E)) \subseteq R-lep \cong S_{f_i}(\overline{E})$$

de manera que $\sharp S_{f_i}(E) \leq \sharp S_{f_i}(\overline{E})$. ∎

Corolario 2.0.29 *Si E_1 y E_2 son módulos inyectivos principales, entonces $\sharp S_{f_i}(E_1) = \sharp S_{f_i}(E_2)$.* ∎

Proposición 2.0.30 *Sea R artiniano. Entonces existe un isomorfismo de retículas completas que invierte el orden entre $S_{f_i}(R)$ y $R-fil$.*

Demostración Cosideremos las siguientes funciones:

1) $$S_{f_i}(R) \xrightarrow{\eta} R-fil$$

$$I \longmapsto \eta(I)$$

donde I es un ideal bilateral y $\eta(I) = \{J \leq R | I \subseteq J\}$. Como R es artiano, por la proposición A.1.10 todo elemento en $R - fil$ es de la forma $\eta(I)$.

$$2)\ R - fil \xrightarrow{\overline{\eta}} S_{f_i}(R)$$

$$F\ell = \eta(I) \longmapsto I$$

Para 1), veamos que $\eta(I)$ es un filtro.

i) Si $K \in \eta(I) = \{J \leq R | I \subseteq J\}$ y $J \leq R$ tal que $K \subseteq J$ entonces $I \subseteq K \subseteq J$ y de aquí $I \subseteq J$, es decir, $J \in \eta(I)$.

ii) Sean $K, L \in \eta(I)$, entonces $I \subseteq K$ y $I \subseteq L$ con lo cual $I \subseteq K \cap L$ y por lo tanto $K \cap L \in \eta(I)$.

iii) Sean $K \in \eta(I)$ y $r \in R$. Veamos que $(K : r) \in \eta(I)$, es decir, que $I \subseteq (K : r)$. Sea $b \in I$, entonces $rb \in I$ y como I es bilateral, $br \in I \subseteq K$. Con lo anterior, $b \in \{g \in R | gr \in K\} = (K : r)$. Por lo anterior, $\eta(I)$ es un filtro lineal.

Para 2), usando la proposición A.1.10 del apéndice tenemos que I es un ideal bilateral.

Veamos que η es un morfismo de retículas completas.

Sean $J, K \in S_{f_i}(R)$ tales que $J \leq K$ y veamos que $\eta(K) \subseteq \eta(J)$. Supongamos que $\eta(K) \nsubseteq \eta(J)$, entonces existe $K' \in \eta(K)$ tal que $K' \notin \eta(J)$ es decir, $K \subseteq K'$ y $J \subsetneq K'$ lo cual es una contradicción pues por hipótesis tenemos que $J \subseteq K \subseteq K'$. Por lo tanto $\eta(K) \subseteq \eta(J)$.

Sea $\{J_i\}_{i \in A}$ una familia de ideales bilaterales de R. Consideremos $\bigcap_i J_i$ y $\eta(\bigcap_i J_i) = \{K \leq R | \bigcap_i J_i \subseteq K\}$. Notemos que para cada i tenemos $\eta(J_i) \subseteq \eta(\bigcap_i J_i)$. Sea $F\ell \in R - fil$ tal que $\eta(J_i) \subseteq F\ell$ para cada $i \in A$. Como R es artiniano, existe un ideal bilateral I tal que $F\ell = \eta(I)$. Puesto que $\eta(J_i) \subseteq \eta(I)$ entonces $I \subseteq J_i$ para todo i y así $I \subseteq \bigcap_i J_i$. Con lo anterior, $I \in \eta(\bigcap_i J_i)$ y así $\eta(\bigcap_i J_i) \subseteq \eta(I)$. Por lo tanto, $\eta(\bigcap_i J_i) = \bigvee_i \eta(J_i)$.

Ahora consideremos la suma $\sum J_i$ y $\eta(\sum J_i)$. Puesto que $J_i \subseteq \sum J_i$, se tiene $\eta(\sum J_i) \subseteq \eta(J_i)$ para todo i. Por lo tanto $\eta(\sum J_i) \subseteq \bigcap \eta(J_i)$. Por otra parte, si I es tal que $J_i \subseteq I$ para todo i, tenemos que $\sum J_i \subseteq I$. Por lo tanto

$\bigcap \eta(J_i) \subseteq \eta(\sum J_i)$. Finalmente η es un morfismo de retículas completas.

Notemos que las funciones η y $\overline{\eta}$ son inversas una de la otra pues:

$$i) S_{f_i}(R) \xrightarrow{\eta} R - fil \xrightarrow{\overline{\eta}} S_{f_i}(R)$$

$$K \longmapsto F\ell = \eta(K) \longmapsto K$$

$$ii) R - fil \xrightarrow{\overline{\eta}} S_{f_i}(R) \xrightarrow{\eta} R - fil$$

$$F\ell = \eta(K) \longmapsto K \longmapsto F\ell = \eta(K)$$

de esta manera η es un isomorfismo de retículas completas que invierte el orden. ∎

Definición 14 *Sea X una retícula. Decimos que X es una retícula neteriana si toda cadena ascendente de elementos de X se estaciona.*

Teorema 2.0.31 *Sea R un anillo artiniano y $\overline{E}$ un módulo inyectivo principal. Las funciones:*

$$S_{f_i}(R) \xrightarrow{\phi} S_{f_i}(\overline{E})$$

$$I \longmapsto Ann_{\overline{E}}(I)$$

$$S_{f_i}(\overline{E}) \xrightarrow{\overline{\phi}} S_{f_i}(R)$$

$$N \longmapsto Ann_R(N)$$

son isomorfismos de retículas que invierten el orden. En particular, $S_{f_i}(\overline{E})$ es una retícula neteriana.

Demostración Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & R-fil \arrow[r, "\alpha"] & R-lep \arrow[dr, "\beta"] & \\
S_{f_i}(R) \arrow[ur, "\eta"] & & & S_{f_i}(\overline{E}) \arrow[dl, "\overline{\beta}"] \\
 & R-fil \arrow[ul, "\overline{\eta}"] & R-lep \arrow[l, "\overline{\alpha}"] &
\end{tikzcd}$$

donde η, α y β representan las correspondencias de las proposiciones 2.0.30, 1.0.17 y 2.0.27 respectivamente. Del diagrama anterior obtenemos las siguientes asignaciones:

$$\begin{tikzcd}
 & F\ell = \eta(I) \arrow[r] & \sigma_{\eta(I)} \arrow[dr] & \\
I \arrow[ur] & & & \sigma_{\eta(I)}(\overline{E}) \\
J = Ann_R(N) & & & N \arrow[dl] \\
 & F\ell_{\omega_N^{\overline{E}}} = \eta(J) \arrow[ul] & \omega_N^{\overline{E}} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

observemos que tanto ϕ como $\overline{\phi}$ son composición de morfismos de retículas completas, con lo cual ambos son morfismos de retículas completas. Veamos que:

i) $\phi(I) = Ann_{\overline{E}}(I)$

ii) $\overline{\phi}(N) = Ann_R(N)$

Para i), usando el último diagrama tenemos que:

$$\begin{aligned}
\phi(I) &= \sigma_{\eta(I)}(\overline{E}) \\
&= \sum\{N' \leq \overline{E} | Ann_R(n) \in \eta(I), \text{ para todo } n \in N'\} \\
&= \sum\{N' \leq \overline{E} | I \subseteq Ann_R(n), \text{ para todo } n \in N'\} \\
&= \sum\{N' \leq \overline{E} | I \subseteq \textstyle\bigcap_{n \in N'} Ann_R(n)\}
\end{aligned}$$

$$= \sum\{N' \leq \overline{E} | IN' = 0\} = Ann_{\overline{E}}(I).$$

Por lo tanto, $\phi(I) = Ann_{\overline{E}}(I)$

Para ii), consideremos las siguientes asignaciones:

$$N \longmapsto \omega_N^{\overline{E}} \longmapsto F\ell_{\omega_N^{\overline{E}}} = \eta(J)$$

donde $\{L \leq R | R/L = \omega_N^{\overline{E}}(R/L)\} = F\ell_{\omega_N^{\overline{E}}} = \eta(J) = \{K \leq R | J \subseteq K\}$, para algún J ideal bilateral. Como $N = \omega_N^{\overline{E}}(\overline{E})$, entonces $N \in T_{\omega_N^{\overline{E}}}$ y así, para cada $n \in N$ tenemos que $Rn \cong R/Ann_R(n) \in T_{\omega_N^{\overline{E}}}$, con lo cual $Ann_R(n) \in F\ell_{\omega_N^{\overline{E}}}$. De esta manera $J \subseteq Ann_R(n)$ para todo $n \in N$, es decir, $J \subseteq Ann_R(N)$.

Con lo anterior y usando que η invierte el orden, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\eta(Ann_R(N)) & \subseteq & \eta(J) = F\ell_{\omega_N^{\overline{E}}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sigma_{\eta(Ann_R(N))} & \preceq & \sigma_{\eta(J)} = \omega_N^{\overline{E}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sigma_{\eta(Ann_R(N))}(\overline{E}) & \subseteq & \omega_N^{\overline{E}}(\overline{E}) = N
\end{array}$$

de donde $N \subseteq \sigma_{\eta(Ann_R(N))}(\overline{E}) = Ann_{\overline{E}}(Ann_R(N)) \subseteq \omega_N^{\overline{E}}(\overline{E}) = N$, es decir, $Ann_{\overline{E}}(Ann_R(N)) = N$. De esta manera, $Ann_R(N) = J$ (siguiendo el diagrama de abajo hacia arriba) y por lo tanto $\overline{\phi}(N) = Ann_R(N)$.

Ahora, veamos que $\overline{\phi} \circ \phi = Id_{S_{f_i}(R)}$ y que $\phi \circ \overline{\phi} = Id_{S_{f_i}(\overline{E})}$. Sea $I \in S_{f_i}(R)$, entonces $(\overline{\phi} \circ \phi)(I) = \overline{\phi}(\phi(I)) = \overline{\phi}(Ann_{\overline{E}}(I)) = Ann_R(Ann_{\overline{E}}(I) = I = Id_{S_{f_i}(R)}(I)$. De lo anterior, $\overline{\phi} \circ \phi = Id_{S_{f_i}(R)}$. Por otra parte, sea $N \in S_{f_i}(\overline{E})$. Entonces $\phi \circ \overline{\phi}(N) = \phi(\overline{\phi}(N)) = \phi(Ann_R(N)) = Ann_{\overline{E}}(Ann_R(N)) = N = Id_{S_{f_i}(\overline{E})}(N)$, así $\phi \circ \overline{\phi} = Id_{S_{f_i}(\overline{E})}$. Por lo tanto ϕ y $\overline{\phi}$ son isomorfismos de retículas.

Finalmente, probemos que $S_{f_i}(\overline{E})$ es una retícula neteriana. Consideremos una cadena ascendente de submódulos totalmente invariantes de $\overline{E}$:

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq ... \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq ...$$

considerando la cadena anterior y el morfismo $\overline{\phi}$ tenemos la siguiente cadena:

$$... \subseteq \overline{\phi}(E_{n+1}) \subseteq \overline{\phi}(E_n) \subseteq ... \subseteq \overline{\phi}(E_2) \subseteq \overline{\phi}(E_1)$$

la cual es una cadena de ideales bilaterales que se estaciona pues R es artiniano

$$\overline{\phi}(E_n) \subseteq ... \subseteq \overline{\phi}(E_2) \subseteq \overline{\phi}(E_1)$$

y aplicando el morfismo ϕ se tiene que la cadena:

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq ... \subseteq E_n$$

es decir, cualquier cadena ascendente de submódulos de $\overline{E}$ se estaciona.

Por lo tanto $S_{f_i}(\overline{E})$ es una retícula neteriana. ∎

Ejemplo: Cosideremos el anillo $R = \mathbb{Z}_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2)$ conocido como la extensión trivial de $\mathbb{Z}_2$ por $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$, el cual se puede describir como:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{Z}_2 \ \ (x,y) \in \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2 \right\}$$

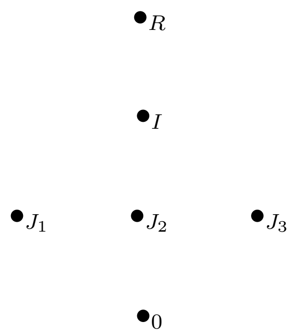
que tiene solamente un ideal máximo, a saber,

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (x,y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | (x,y) \in \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2 \right\}$$

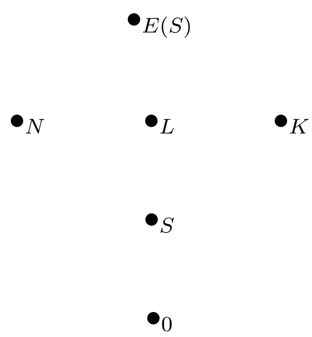
y este tiene a su vez tres ideales simples

$$J_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$J_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (0,1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$J_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (1,1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Con lo anterior, la retícula de R tiene la forma:



Además R es artiniano y hay sólo un módulo simple S salvo isomorfismo, con lo cual se tiene que $\overline{E} = E(S)$ es un módulo inyectivo principal (considerando el ejemplo 1) de la página 35). De lo anterior y usando el teorema 2.0.30 obtenemos que la retícula de submódulos totalmente invariantes de $\overline{E}$ es de la forma:



Capítulo 3

Módulos Principales y Anillos Inyectivos Principales

En este capítulo se describirán los módulos principales y los anillos inyectivos principales siguiendo la idea del capítulo anterior. En el caso de los módulos principales se considerará que para un anillo R, la retícula de prerradicales es un conjunto aunque esto en general no pasa.

Proposición 3.0.32 *Para cada $\sigma \in R - lep$ existe $X_\sigma \subseteq R - Mod$ tal que*

$$\sigma = \bigvee\{\alpha^M_{\sigma(M)} | M \in X_\sigma\}.$$

Demostración Sea $\sigma \in R - pr$. Entonces $\sigma = \bigvee\{\alpha^M_{\sigma(M)} | M \in R - Mod\}$. Sea $\backsim_\sigma$ una relación de equivalencia en $R - Mod$ definida por $M \backsim_\sigma N$ si y solamente si $\alpha^M_{\sigma(M)} = \alpha^N_{\sigma(N)}$. Para cada $M \in R - Mod$ denotemos su clase de equivalencia como:

$$[M]_\sigma = \{N \in R - Mod | N \backsim_\sigma M\}$$

Usando el axioma de elección para clases, podemos elegir exactamente un representante de cada clase de equivalencia para construir la clase X_σ tal que

$$\{\alpha^M_{\sigma(M)} | M \in R - Mod\} = \{\alpha^M_{\sigma(M)} | M \in X_\sigma\}. \quad \blacksquare$$

Notemos que si $R - pr$ es un conjunto, entonces X_σ también es un conjunto pues la correspondencia:

$$X_\sigma \xrightarrow{\phi} R - pr$$

$$\Big[M\Big]_\sigma \longmapsto \alpha^M_{\sigma(M)}$$

es inyectiva. En este caso, el supremo de la proposición anterior se puede escribir como sigue.

Proposición 3.0.33 *Supongamos $R-pr$ es un conjunto. Para cada $\sigma \in R-pr$ existe $M_\sigma \in R-Mod$ tal que $\sigma = \alpha^{M_\sigma}_{\sigma(M_\sigma)}$*

Demostración Sea $\sigma \in R-pr$, usando las proposiciones 1.0.1 y 1.0.19, se tiene que $\sigma = \bigvee\{\alpha^M_{\sigma(M)} | M \in R-Mod\} = \bigvee\{\alpha^X_{\sigma(X)} | X \in X_\sigma\} = \alpha^{M_\sigma}_{\sigma_{M_\sigma}}$ donde $M_\sigma := \bigoplus\{X | X \in X_\sigma\}$ $\blacksquare$.

Ahora, introduciremos uno de los conceptos principales de esta sección.

Definición 15 *Sea $M \in R-Mod$. M es un módulo principal si $\sigma = \alpha^M_{\sigma M}$ para todo $\sigma \in R-pr$.*

El siguiente teorema garantiza la existencia de módulos principales para anillos R para los cuales la retícula de prerradicales es un conjunto.

Proposición 3.0.34 *Si $R-pr$ es un conjunto, entonces existe un módulo principal $M \in R-Mod$.*

Demostración Considerando la proposición 3.0.33, para cada $\sigma \in R-pr$ existe M_σ tal que $\sigma = \alpha^{M_\sigma}_{\sigma_{M_\sigma}}$. Definimos $M := \bigoplus\{M_\sigma | \sigma \in R-pr\}$ y consideremos $\tau \in R-pr$. Entonces por un lado, $\alpha^M_{\tau(M)} \preceq \tau$. Por otra parte, de la definición de M se sigue que $M := M_\tau \oplus M'$ con $M' := \bigoplus\{M_\sigma | \sigma \in R-pr, \sigma \neq \tau\}$. De lo anterior y usando las proposiciones 1.0.1 y 1.0.15, $\tau = \alpha^{M_\tau}_{\tau(M_\tau)} \preceq \alpha^{M_\tau}_{\tau(M_\tau)} \vee \alpha^{M'}_{\tau(M')} = \alpha^{M_\tau \oplus M'}_{\tau(M_\tau \oplus M')} = \alpha^M_{\tau(M)}$. Por lo tanto $\tau = \alpha^M_{\tau(M)}$. $\blacksquare$

Dado un módulo principal, la siguiente proposición nos permite obtener nuevos módulos principales a partir de él.

Proposición 3.0.35 *Sean $M \in R-Mod$ un módulo principal y $M_0 \in R-Mod$ tal que M es sumando directo de M_0. Entonces M_0 es un módulo principal.*

Demostración Sea $\sigma \in R-pr$. Por hipótesis, $M_0 = M \oplus L$ para algún $L \in R-Mod$. Entonces, $\sigma = \alpha^M_{\sigma(M)} \preceq \alpha^M_{\sigma(M)} \vee \alpha^L_{\sigma(L)} = \alpha^{M\oplus L}_{\sigma(M\oplus L)} = \alpha^{M_0}_{\sigma(M_0)} \preceq \sigma$, considerando las proposiciones 1.0.1 y 1.0.15. Con lo anterior tenemos que $\sigma = \alpha^{M_0}_{\sigma(M_0)}$ y así M_0 es un módulo principal. $\blacksquare$

Veamos un ejemplo de módulo principal.

Sea R un anillo artiniano semisimple, entonces $\bigoplus\{S|S \in R-simp\}$ es un módulo principal. Si R es semisimple, usamos el teorema A.3.1 para concluir que $R-pr$ es una retícula finita o bien un conjunto. Puesto que $R-pr$ es un conjunto, usamos la proposición 3.0.34 para concluir que existe $M \in R-Mod$ módulo principal . Como R es artiniano semisimple $M = \bigoplus\{S^{(X_S)}|S \in R-simp\}$, donde $|X_S| \geqslant 0$ para cada $S \in R-Simp$. Consideremos $\sigma \in R-pr$ y usemos las proposiciones 1.0.1 y 1.0.19 para obtener:

$$\sigma = \alpha^M_{\sigma(M)} = \alpha^{\bigoplus_{R-simp} S^{(X_S)}}_{\sigma(\bigoplus_{R-simp} S^{(X_S)})} = \bigvee\{\alpha^{S^{(X_S)}}_{\sigma S^{(X_S)}}|S \in R-simp\}$$

esto es $\sigma = \bigvee_{S\in A} \alpha^S_{\sigma(S)} = \alpha^{\bigoplus_A S}_{\sigma(\bigoplus_A S)}$, con $A = \{S \in R-simp||X_S| > 0\}$. De lo anterior $\bigoplus_{S\in A} S$ es un módulo principal. Finalmente, usando la proposición 3.0.35 tenemos que $M_0 := \bigoplus\{S|S \in R-simp\}$ es también un módulo principal.

Así como hemos considerado los submódulos totalmente invariantes de un módulo inyectivo principal y la correspondencia entre éstos y los prerradicales exactos izquierdos; también para los submódulos totalmente invariantes de un módulo principal podemos establecer una correspondencia similar.

Proposición 3.0.36 *Sea $M \in R-Mod$ un módulo principal. Entonces las retículas $R-pr$ y $S_{f_i}(M)$ son isomorfas.*

Demostración Consideremos las siguientes asignaciones:

$$R-pr \xrightarrow{\gamma_M} S_{f_i}(M)$$

$$\sigma \longmapsto \sigma(M)$$

para cada $\sigma \in R-pr$ y además:

$$S_{f_i}(M) \xrightarrow{\delta_M} R-pr$$

$$N \longmapsto \alpha^M_N$$

Con lo anterior se tiene que $(\gamma_M \circ \delta_M)(N) = \alpha^M_N(M) = N$ y que si, dado $\sigma \in R-pr$ entonces $(\delta_M \circ \gamma_M)(\sigma) = \alpha^M_{\sigma M} = \sigma$, pues M es un módulo principal. Por lo anterior, encontramos que $(\gamma_M \circ \delta_M) = 1_{S_{f_i}(M)}$ y además $(\delta_M \circ \gamma_M) =$

1_{R-pr}. Veamos que son morfismos de orden. Sean $\tau, \sigma \in R - pr$ tales que $\tau \preceq \sigma$. Como M es un módulo principal tenemos que $\tau = \alpha^M_{\tau M}, \sigma = \alpha^M_{\sigma M}$ con lo cual $\gamma_M(\tau)(M) = \alpha^M_{\tau M}(M) = \tau M \leq \sigma M = \alpha^M_{\sigma M}(M) = \gamma_M(\sigma(M)$. Por lo tanto $\gamma_M(\tau) \leq \gamma_M(\sigma)$.

Por otra parte, consideremos $L, K \in S_{f_i}(M)$ tales que $L \leq K$. Puesto que $\delta_M(L)(M) = \alpha^M_L(M) = L \leq K = \alpha^M_K(M) = \delta_M(K)(M)$ entonces $\delta_M(L) \preceq \delta_M(K)$. Por lo tanto δ_M y γ_M son morfismos de orden, de aquí ismorfismos de retículas. ∎

Consideremos ahora el caso en que el anillo R es un módulo inyectivo principal izquierdo y derecho.

Definición 16 *Un anillo R es inyectivo principal izquierdo (derecho), si al considerado como módulo izquierdo (derecho) es inyectivo principal. Diremos que el anillo R es inyectivo principal (A.I.P.) si es inyectivo principal izquierdo y derecho.*

Definición 17 *Sea R un anillo. Decimos que R es $quasi-frobenius$ (anillo QF) si es artiniano izquierdo y derecho y además satisface:*

a) $Ann_r(Ann_l(I)) = I$ para todo ideal derecho I de R
b) $Ann_l(Ann_r(I)) = I$ para todo ideal izquierdo I de R

donde $Ann_r(\cdot)$ es al anulador derecho y $Ann_l(\cdot)$ es el anulador izquierdo.

Proposición 3.0.37 *Un anillo R artiniano izquierdo y derecho es un anillo QF si y solamente si es autoinyectivo izquierdo y derecho.*

Demostración Para la demostración véase [9, Pág. 276 Prop. 3.1]. ∎

Ejemplo: Sea R un dominio de ideales principales (DIP) y consideremos un ideal $I \neq 0$ de R. Entonces R/I es un anillo QF.

Veamos que R es artiniano. Sea $Rn \leq R$ diferente de cero y consideremos $Rm/Rn \leq R/Rn$, entonces $Rn \leq Rm$, es decir $n = km$ con $k \in R$. Como R es un DIP, sabemos que R es un DFU, con lo cual n solo tiene un número finito de divisores. Luego, R/Rn tiene un número finito de ideales y así R/Rn es artiniano. Ahora mostremos que R/Rn es QF usando la definición anterior. Para ello, es suficiente probar que $Ann(Ann(Rm/Rn)) = Rm/Rn$ con $Rm/Rn \leq R/Rn$ pues R es conmutativo. Antes, observemos que:

$$Ann(Rm/Rn) = Rk/Rn = (Rn : k)/Rn$$

donde estamos considerando $n = km$ con $k \in R$.

Así, $Ann(Rm/Rn) = \{a + Rn \in R/Rn \mid (a + Rn)(Rm/Rn) = 0\}$

$$= \{a + Rn \in R/Rn \mid (a + Rn)(m + Rn) = 0\}$$

$$= \{a + Rn \in R/Rn \mid (am + Rn) = 0\}$$

$$= \{a + Rn \in R/Rn \mid am \in Rn\}$$

$$= \{a + Rn \in R/Rn \mid am = ln \; l \in R\}$$

$$= \{a + Rn \in R/Rn \mid am = lkm\}$$

$$= \{a + Rn \in R/Rn \mid a = lk \; l, k \in R\}$$

$$= \{a + Rn \in R/Rn \mid a \in Rk\} = Rk/Rn.$$

Por lo tanto, $Ann(Rm/Rn) = Rk/Rn$. Usando la última igualdad tenemos:

$Ann(Ann(Rm/Rn)) = Ann(Rk/Rn)$

$$= \{b + Rn \in R/Rn \mid (b + Rn)(Rk/Rn) = 0\}$$

$$= \{b + Rn \in R/Rn \mid (b + Rn)(k + Rn) = 0\}$$

$$= \{b + Rn \in R/Rn \mid bk \in Rn\}$$

$$= \{b + Rn \in R/Rn \mid bk = ln \; l \in R\}$$

$$= \{b + Rn \in R/Rn \mid bk = lkm\}$$

$$= \{b + Rn \in R/Rn \mid b = lm \; l \in R\}$$

$$= \{b + Rn \in R/Rn \mid b \in Rm\} = Rm/Rn.$$

Luego, $Ann(Ann(Rm/Rn)) = Rm/Rn$ y con esto podemos concluir que R/Rn es un anillo QF.

Definición 18 *Un anillo R es de Kasch izquierdo si R contiene una copia isomorfa de cada $S \in R - Simp$.*

Proposición 3.0.38 *Cuando R es un anillo autoinyectivo izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) R es un anillo de Kasch izquierdo.

b) R es un cogenerador inyectivo para $R - Mod$.

c) $Ann_l(Ann_r(I)) = I$ para todo ideal izquierdo I de R.

Demostración a)$\Longrightarrow$ b)

Esta implicación se demuestra utilizando la proposición A.1.5 del apéndice.

b)$\Longrightarrow$ c)

Sea $I \leq R$ un ideal izquierdo. Como R es cogenerador de $R - Mod$, existe un monomorfismo:

$$\alpha : R/I \rightarrowtail R^X$$

del cual tenemos que $\alpha(k + I) = k\alpha(1 + I)$ y de aquí, $Im\ \alpha = R\alpha(1 + I)$ es decir $\alpha(1 + I) = (a_j)_{j \in X}$. Notemos que si $k \in I$ entonces $0 = \alpha(k + I) = k(a_j) = (ka_j)$. De esta manera $(ka_j) = 0$, es decir $ka_j = 0$ para todo $j \in X$. Luego, $k \in \bigcap Ann_l(a_j)$ para todo $j \in X$ y así $I \subseteq \bigcap Ann_l(a_j)$.

Por otra parte, si $ta_j = 0$ para todo $j \in X$ entonces $\alpha(t + I) = 0$ y así $t \in I$. Por lo anterior tenemos que $I = \bigcap Ann_l(a_j) = Ann_l(\{a_j\})$.

Ahora consideremos que $0 = \alpha(r + I) = (ra_j)_{j \in X}$, es decir $ra_j = 0$. Entonces $a_j \in Ann_r(I)$ y así $\{a_j\} \subseteq Ann_r(I)$. Con lo anterior $Ann_l(Ann_r(I)) \subseteq Ann_l(\{a_j\}) = I$. Para la otra contención, tenemos que $I(Ann_r(I)) = 0$ y con esto encontramos que $I \subseteq Ann_l(Ann_r(I)) \subseteq I$ como queríamos demostrar.

c)$\Longrightarrow$ a)

Supongamos que $Ann_l(Ann_r(I)) = I$ y construyamos un morfismo:

$$\beta : R \longrightarrow R^{Ann_r(I)}$$

de manera que $Ker\ \beta = I$. Puesto que $\beta(r) \in R^{Ann_r(I)}$, tomo $(x_t)_{t \in Ann_r(I)} \in R^{Ann_r(I)}$ donde $x_t \in R$ y además considero que $rt = 0$ con $t \in Ann_r(I)$. De lo anterior, $\beta(r) = (rt)_{t \in Ann_r(I)}$ y así $Ker\ \beta = I = Ann_l(Ann_r(I))$. Notemos que ahora tiene sentido la composición:

$$R/I \hookrightarrow R \rightarrowtail R^{Ann_r(I)} \twoheadrightarrow R$$

Puesto que sabemos que todo $S \in R - Simp$ es un cociente de R con un máximo, entonces consideramos a I como un máximo y además existe una proyección tal que la composición:

$$S \hookrightarrow R \rightarrowtail R^{Ann_r(I)} \twoheadrightarrow R$$

no es cero y como $S \cong R/I$ entonces la composición es un monomorfismo. Con lo anterior R contiene una copia isomorfa de cada simple y por lo tanto R es un anillo de Kasch izquierdo. ∎

La clase de los anillos inyectivos principales contiene a la clase de los anillos QF.

Proposición 3.0.39 *Todo anillo QF es un anillo inyectivo principal.*

Demostración Supongamos que R es un anillo QF. En particular R es de Kasch izquierdo y podemos considerar los morfismos:

$$S \hookrightarrow R \qquad\qquad S \hookrightarrow E(S)$$

donde $S \in R - Simp$. Con lo anterior podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & E(S) \arrow[dl] \\ R & \end{tikzcd}$$

pues R es inyectivo y con el cual hemos construido un monomorfismo:

$$E(S) \rightarrowtail R$$

para cada $S \in R - Simp$. De esta manera podemos considerar:

$$E_0 = \bigoplus_{S\in R-Simp} E(S) \rightarrowtail R$$

y utilizando la proposición 2.0.21, concluimos que R es inyectivo principal izquierdo. De manera similar se puede probar que R es inyectivo principal derecho. ∎

Proposición 3.0.40 *Sea R un (A.I.P.). Entonces:*

1. Existen E, $E' \leq R$ tales que $E = E(Zoc(R))$, $R = E \bigoplus E'$ y $Zoc(E') = 0$.
2. Existe un ideal $I \leq R$ tal que:

a)$\omega_0^{E'} = \omega_0^{R/I}$
b)$\omega_0^{E'}(E) = I$, con lo cual $I \leq_{FI} E$
c)$R/I \cong (E/I) \bigoplus E'$
d)$Zoc(R/I) = 0$
e)$Zoc(R) \leq I$

Demostración 1. Ya que R es inyectivo principal, existe un ideal izquierdo E que es la cápsula inyectiva de $E = E(Zoc(R))$ y siendo inyectivo, E es un sumando directo de R. Sea $E' \leq R$ tal que $R = E \bigoplus E'$. Puesto que $Zoc(R) \leq E$, tenemos que $Zoc(E') = 0$.

2. a) Como R es un módulo inyectivo principal izquierdo y $\omega_0^{E'} \in R-lep$, tenemos que $\omega_0^{E'} = \omega^R_{\omega_0^{E'}(R)}$. Donde $\omega_0^{E'}(R) = \bigcap_{f\in Hom_R(R,E')} kerf$, el cual es un ideal de R. Definimos $I = \bigcap_{f\in Hom_R(R,E'} kerf$ tal que $\omega_0^{E'} = \omega_I^R$.. Considerando la proposición 1.0.15 tenemos que $\omega_0^{E'}$ es radical. Por otra parte, con la proposición A.3.2 tenemos que:

$$c(\omega_0^{E'}) = \omega_0^{E'}, \text{ es decir, } \omega_I^R = c(\omega_I^R)$$

y puesto que $I \leq_{FI} R$ usando la proposición A.3.3 tenemos:

$$c(\omega_I^R) = \omega_0^{R/I}$$

por lo tanto, $\omega_0^{E'} = c(\omega_I^R) = \omega_0^{R/I}$.

b) Considerando el inciso anterior, tenemos que

$$I = \omega_I^R(R) = \omega_0^{E'}(E \bigoplus E') = \omega_0^{E'}(E) \bigoplus \omega_0^{E'}(E') = \omega_0^{E'}(E).$$

Por lo tanto $I = \omega_0^{E'}(E)$.

c) Puesto que $I = \omega_0^{E'}(E) \leq E$ y $E \cap E' = 0$ podemos considerar el monomorfismo:

$$E' \rightarrowtail R/I$$

y como E' es inyectivo, tenemos que $R/I \cong E'' \bigoplus E$, con $E'' \cong E/I$.

d) Como $\omega_0^{E'}$ es radical, tenemos que:

$$0 = \omega_0^{E'}(R/\omega_0^{E'}(R)) = \omega_0^{E'}(R/I) = \bigcap\{Kerf \mid f \in Hom_R(R/I, E')\}$$

lo que nos permite construir un monomorfismo:

$$R/I \rightarrowtail (E')^X$$

del cual consideramos $E/I \rightarrowtail (E')^X$.

Ya que $Zoc(E') = 0$ por hipótesis, tenemos que $Zoc(E/I) = 0$. De lo anterior y considerando el inciso c) podemos concluir que $Zoc(R/I) = 0$.

e) Si S es un ideal izquierdo mínimo de R tal que $S \nleq I$, entonces $S \cap I = 0$. De esta manera y considerando el segundo teorema de isomorfismo, tenemos que $(S+I)/I \cong S$ lo que contradice que $Zoc(R/I) = 0$. Por lo tanto, $Zoc(R) \leq I$. ∎

Puesto que R es un módulo inyectivo principal, podemos considerar la retícula de submódulos totalmente invariantes $S_{f_i}(R)$ y la proposición 2.0.26, para establecer lo siguiente:

$$R - lep \xrightarrow{\phi} S_{f_i}(R)$$

$$\sigma \longmapsto I$$

donde $I = \phi(\sigma)$ es un ideal de R tal que $\sigma = \omega_I^R$. Además, dado que $R - lep$ está en correspondencia biunívoca con $R - fil$ podemos preguntarnos por la forma que tienen los filtros lineales. Para ello, sea $\sigma \in R - lep$ y consideremos su filtro asociado $F\ell_\sigma$, además definimos para cada ideal izquierdo K de R el anulador derecho de K como $Ann_r(K) = \{r \in R | Kr = 0\}$ y para cada ideal derecho L de R el anulador izquierdo de L como $Ann_r(K) = \{r \in R | rL = 0\}$.

Con lo anterior podemos establecer la siguiente proposición:

Proposición 3.0.41 *Sea R un anillo inyectivo principal, $\sigma \in R-lep$ y sea $\phi(\sigma) = I$. Entonces $F\ell_\sigma = \{K \leq R | Ann_r(K) \leq I\}$*

Demostración Veamos que

$$\{K \leq R | R/K \in T_{\omega_I^R}\} = \{K \leq R | Ann_r(K) \leq I\}.$$

Supongamos que $\sigma = \omega_I^R$ y consideremos $K \in F\ell_\sigma$. Entonces $\omega_I^R(R/K) = R/K$, lo cual significa por definición de ω_I^R que para cada $f : R/K \to R$ se tiene que $f(R/K) \leq I$ y consideremos $a \in Ann_r(K)$. Entonces $f_a(K) = 0$, donde $f_a(r) = ra$ para cada $r \in R$. De lo anterior podemos considerar el homomorfismo:

$$\overline{f_a} : R/K \to R$$

tal que $\overline{f_a}\pi = f_a$, donde $\pi : R \to R/K$ es la proyección canónica y así $a \in f_a(R) \leq \overline{f_a}(R/K) \leq I$. De lo anterior, $Ann_r(K) \leq I$.

Por otra parte, si $Ann_r(K) \leq I$, consideremos $f : R/K \to R$. Entonces $f\pi : R \to R$ y si $a = f\pi(1)$, tenemos que $Ka = 0$, es decir, $a \in Ann_r(K) \leq I$. Así, $f(R/K) \leq I$ y concluimos que $\omega_I^R(R/K) = R/K$. Por lo tanto $F\ell_\sigma = \{K \leq R | Ann_r(K) \leq I\}$. ∎

Así como hemos considerado la asignación:

$$R - lep \xrightarrow{\phi} S_{f_i}(R)$$

también podemos hablar de:

$$S_{f_i}(R) \xrightarrow{\overline{\phi}} R - lep$$

$$I \longmapsto \sigma_I$$

donde σ_I es el prerradical exacto izquierdo asociado al filtro lineal principal $F\ell_I = \{K \leq R | I \subseteq K\}$.

Proposición 3.0.42 *$\overline{\phi}$ es inyectiva y $Im\ \overline{\phi} = R-jans$, donde $R-jans$ es el conjunto de todos los prerradicales exactos izquierdos cuya clase de pretorsión hereditaria es cerrada bajo productos directos.*

Demostración Veamos que $\overline{\phi}$ es inyectiva. Sean $I, J \in S_{f_i}(R)$ tales que $I \neq J$ y supongamos que $\overline{\phi}(I) = \overline{\phi}(J)$. De lo anterior tenemos que $\sigma_I^{F\ell_I} = \overline{\phi}(I) = \overline{\phi}(J) = \sigma_J^{F\ell_J}$ para todo $M \in R - Mod$, es decir

$$\sigma_I^{F\ell_I}(M) = \sigma_J^{F\ell_J}(M)$$

donde

$$\sigma_I^{F\ell_I}(M) = \{x \in M | Ann_R(x) \in F\ell_I\}$$

$$\sigma_J^{F\ell_J}(M) = \{x \in M | Ann_R(x) \in F\ell_J\}.$$

Sea $y \in \sigma_I^{F\ell_I}(M) = \sigma_J^{F\ell_J}(M)$, entonces $Ann_R(x) \in F\ell_I$ y además $Ann_R(x) \in F\ell_J$ con lo cual $J \subseteq Ann_R(x)$ y $I \subseteq Ann_R(x)$. Así, tenemos que $J \in F\ell_I$ y $I \in F\ell_J$ pero esto indica que $I \subseteq J$ y que $J \subseteq I$, es decir, $I = J$ lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $\overline{\phi}$ es inyectiva.

Ahora consideremos el siguiente conjunto:

$R - jans = \{\sigma \in R - lep \mid \text{dada } \{M_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq T_\sigma \text{ se tiene que } \prod_{i\in\Gamma} M_i \in T_\sigma\}$

Como sabemos que:

$$\begin{array}{ccccc} S_{f_i} & \xrightarrow{\overline{\phi}} & R - lep & \xrightarrow{\overline{\Phi}} & R - ptors \\ I & \longmapsto & \sigma_I & \longmapsto & T_{\sigma_I} \end{array}$$

tomemos $\{M_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq T_{\sigma_I}$ y veamos que $\prod_{i\in\Gamma} M_i \in T_{\sigma_I}$, es decir,

$$\sigma_I^{F\ell_I}(\textstyle\prod_{i\in\Gamma} M_i) = \prod_{i\in\Gamma} M_i.$$

Ya que $M_i \in T_{\sigma_I}$ para todo $i \in \Gamma$ y además

$$\sigma_I^{F\ell_I}(\textstyle\prod_{i\in\Gamma} M_i) = \{(m_i)_{i\in\Gamma} \in \prod_{i\in\Gamma} M_i \, | I \subseteq Ann_R((m_i)_{i\in\Gamma})\}$$

tenemos que $I \subseteq Ann_R(m_i)$ para todo $i \in \Gamma$. Con lo anterior, $I \subseteq \bigcap_{i\in\Gamma} Ann_R(m_i)$ y como $\bigcap_{i\in\Gamma} Ann_R(m_i) = Ann_R((m_i)_{i\in\Gamma})$ encontramos que $I \in Ann_R((m_i)_{i\in\Gamma})$ con $(m_i)_{i\in\Gamma} \in \prod_{i\in\Gamma} M_i$. De esta manera, $\prod_{i\in\Gamma} M_i \in T_{\sigma_I}$. ∎

Apéndice A

Apéndice

A.1. Algunos resultados generales de Módulos

Proposición A.1.1 *Sea* $\{N_i\}_{i\in I}$ *una familia arbitraria. Si para todo* $F \subseteq I$ *finito se tiene que* $\sum_{i\in F} N_i = \bigoplus_{i\in F} N_i$ *entonces* $\sum_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I} N_i$

Demostración Supongamos que $\sum_{i\in I} N_i \neq \bigoplus_{i\in I} N_i$ entonces existe $j \in I$ tal que $\sum_{i\neq j} N_i \cap N_j \neq 0$. Sea $x \in \sum_{i\neq j} N_i \cap N_j$, entonces $x = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \in \sum_{k=1}^{n} N_{i_k}$ y $x \in N_j$ es decir, $\sum_{l\in F} N_l \neq \bigoplus_{l\in F} N_l$ con $F = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$. Esto contradice una de las hipótesis y de aquí podemos concluir que $\sum_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I} N_i$ ∎

Definición 19 *Sea* $M \in R-Mod$ *y consideremos* $M^* = Hom_R(M, R)$ *como el dual de* M*. Al siguiente par de conjuntos*

$$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq M \qquad y \qquad \{f_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq M^*$$

se le conoce como la base dual de M *si cada elemento* $x \in M$ *se puede expresar como:*

$$x = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha(x)x_\alpha$$

donde $f_\alpha(x) = 0$ *para casi todo* $\alpha \in I$*.*

Teorema A.1.2 $M \in R-Mod$ *es proyectivo si y solo si* M *tiene base dual.*

Definición 20 *Un módulo inyectivo* E *es cogenerador inyectivo si para todo* $M \in R-Mod$ *se tiene que* $Hom_R(M, E) \neq 0$.

Proposición A.1.3 *E es cogenerador inyectivo si $Hom_R(C,E) \neq 0$ para todo $C \leq M \in R-Mod$ cíclico distinto de cero.*

Demostración Sea $M \in R-Mod$ distinto de cero. Entonces para $m \in M$ con $m \neq 0$ existe un morfismo:

$$Rm \xrightarrow{\alpha} E$$

no cero y como E es inyectivo, podemos construir el digrama:

$$\begin{tikzcd} Rm \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[dl, "\overline{\alpha}"] \\ E & \end{tikzcd}$$

donde $\overline{\alpha}(m) \neq 0$ con $\overline{\alpha} \in Hom_R(M,E)$. Por lo tanto E es cogenerador inyectivo.

Proposición A.1.4 *Si E es un cogenerador inyectivo, entonces para todo $M \in R-Mod$ existe un monomorfismo*

$$M \xrightarrow{\varphi} E^I$$

para algún conjunto I.

Demostración Consideremos $I = Hom_R(M,E)$ y definamos:

$$M \xrightarrow{\varphi} E^{Hom_R(M,E)}$$

$$m \longrightarrow (\phi(m))_{\phi \in Hom_R(M,E)}$$

donde φ es morfismo pues si $m, m' \in M$ y $r \in R$, entonces $\varphi(rm+m') = (\phi(rm+m'))_{\phi \in Hom_R(M,E)} = (\phi(rm))_{\phi \in Hom_R(M,E)} + (\phi(m'))_{\phi \in Hom_R(M,E)} = r(\phi(m))_{\phi \in Hom_R(M,E)} + (\phi(m'))_{\phi \in Hom_R(M,E)} = r\varphi(m) + \varphi(m')$, es decir $\varphi(rm+m') = r\varphi(m) + \varphi(m')$. Si $m \in M, m \neq 0$ podemos construir un morfismo no cero:

$$Rm \xrightarrow{\alpha} E$$

y puesto que E es inyectivo, el morfismo anterior se extiende:

$$\begin{tikzcd} Rm \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[dl, "\overline{\alpha}"] \\ E & \end{tikzcd}$$

con $\overline{\alpha}(m) \neq 0$ y de aquí se obtiene que $\varphi(m) \neq 0$, es decir φ es monomorfismo. ∎

Proposición A.1.5 *Un módulo inyectivo E es cogenerador si, y sólo si contiene una copia isomorfa de cada módulo simple.*

Demostración Supongamos que E es cogenerador inyectivo y sea $S \in R - Mod$ un módulo simple. Como E es cogenerador, $Hom_R(S, E) \neq 0$ es decir, existe :

$$S \xrightarrow{\alpha} E$$

no cero. Entonces $Ker\ \alpha = 0$ ya que S es simple. Por lo tanto α es monomorfismo.

Por otra parte, supongamos que E contiene una copia isomorfa de cada módulo simple y veamos que para todo $M \in R - Mod$ tenemos que $Hom_R(M, E) \neq 0$. Sea $M \in R - Mod$ y consideremos $C \leq M$ cíclico tal que $C \neq 0$. Ya que C es finitamente generado, tenemos $K \leq C$ submódulo máximo con el cual podemos construir la siguiente sucesión:

$$C \xrightarrow{\pi} C/K \cong S \xrightarrow{\alpha} E$$

con π la proyección canónica y α un monomorfismo, donde $\pi\alpha \neq 0 \in Hom_R(C, E)$ y como E es inyectivo, el morfismo anterior se extiende:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "\pi\alpha"'] & M \arrow[dl, "\phi"] \\ E & \end{tikzcd}$$

con lo cual $Hom_R(M, E) \neq 0$ para todo $M \in R - Mod$. Por lo tanto, E es un cogenerador inyectivo. ∎

Ejemplo: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cogenerador inyectivo en $\mathbb{Z} - Mod$.

Veamos que:

1) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible.
2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ contiene una copia isomorfa de cada $\mathbb{Z}_p$ con p un primo.

Para 1), si $(\frac{p}{q}+\mathbb{Z}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tenemos que $m((\frac{p}{mq}+\mathbb{Z})) = (\frac{p}{q}+\mathbb{Z}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ para todo $m \neq 0 \in \mathbb{Z}$ es decir, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible.

Para 2) consideremos:

$$\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$n + p\mathbb{Z} \longrightarrow (\frac{n}{p} + \mathbb{Z})$$

y veamos que α está bien definida. Sean $n + p\mathbb{Z}, n' + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_p$ tales que $n + p\mathbb{Z} = n' + p\mathbb{Z}$. Entonces $(n - n') + p\mathbb{Z} = 0$ con lo cual $(n - n') = pk$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir $(\frac{n-n'}{p}) \in \mathbb{Z}$. De lo anterior, $\frac{n}{p} + \mathbb{Z} = \frac{n'}{p} + \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\alpha(n + p\mathbb{Z}) = \alpha(n' + p\mathbb{Z})$, es decir α está bien definida.

Además α es morfismo pues si $n + p\mathbb{Z}, n' + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_p$ y $r \in \mathbb{Z}$, entonces $\alpha(r(n + p\mathbb{Z}) + (n' + p\mathbb{Z})) = \alpha((rn + n') + p\mathbb{Z}) = \frac{rn+n'}{p} + \mathbb{Z} = (r\frac{n}{p} + \frac{n'}{p}) + \mathbb{Z} = r(\frac{n}{p} + Z) + (\frac{n'}{p} + \mathbb{Z}) = r\alpha(n + p\mathbb{Z}) + \alpha(n' + p\mathbb{Z})$, es decir $\alpha(r(n+p\mathbb{Z})+(n'+p\mathbb{Z})) = r\alpha(n+p\mathbb{Z})+\alpha(n'+p\mathbb{Z})$. Por lo tanto α es morfismo.

Finalmente, veamos que α es monomorfismo, es decir, veamos que $Ker\ \alpha = 0$. Sea $n + p\mathbb{Z} \in Ker\ \alpha$. Entonces $\alpha(n + p\mathbb{Z}) = 0$ y de aquí tenemos que $\frac{n}{p} + \mathbb{Z} = 0$ es decir, $\frac{n}{p} \in \mathbb{Z}$ con lo cual $n = pk$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así, $n + p\mathbb{Z} = 0$. Por lo tanto α es monomorfismo. De esta manera, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo y contiene una copia isomorfa de cada módulo simple en $\mathbb{Z}-Mod$. Usando la proposición A.1.5 tenemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo de $\mathbb{Z} - Mod$. ∎

Definición 21 *Decimos que un módulo M es artiniano (resp. neteriano) si cualquier $\{N_i\}_{i\in I}$ familia no vacía de submódulos de M tiene elemento mínimo (resp máximo) con respecto a la inclusión. Decimos que un anillo R es artiniano (resp. neteriano) si es artiniano (resp. neteriano) izquierdo y derecho.*

Definición 22 *Decimos que una cadena de submódulos de M*

$$... \subseteq N_{i-1} \subseteq N_i \subseteq N_{i+1} \subseteq ...$$

se estaciona si tiene sólo un número finito de $N_{i's}$ distintos.

Definición 23 *Un módulo M es finitamente cogenerado (f.c.) si para toda familia $\{N_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M tales que $\bigcap_I N_i = 0$ entonces existe $F \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_F N_i = 0$. Notemos que si $N \leq M$ tenemos que M/N es finitamente cogenerado si para toda familia $\{L_i\}_{i\in I}$ tal que $\bigcap_I L_i = N$ existe $F \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_F L_i = N$.*

Definición 24 *Sea $M \in R-Mod$ y $X \subseteq M$.*

1) Decimos que $X \subseteq M$ genera a M si $RX = M$.

2) Si X genera a M y X es finito, decimos que M es finitamente generado.

3) Si $X = \{x\}$ y genera a M, entonces decimos que M es cíclico.

Proposición A.1.6 *Un módulo M es finitamente generado (f.g.) si y solo si para cada familia $\{N_i\}_{i\in I}$ no vacía de submódulos de M tales que $\sum_{i\in I} N_i = M$ existe $F \subseteq I$ finito tal que $\sum_{i\in I} N_i = M$.*

Demostración Supongamos que M es f. g., entonces $M = RX$ para algún $X \subseteq M$ finito. Notemos que

$$RX = Rx_1 + Rx_2 + Rx_3 + ... + Rx_n$$

Si $\sum_{i\in I} N_i = M$ entonces para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, se tiene que x_i está en una suma finita de submódulos en la familia $\{N_i\}_{i\in I}$. Entonces $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ está incluido en una suma finita de submódulos $\{N_j\}_{j\in F}$ con lo cual $M \subseteq \sum_{j\in F} N_j \subseteq \sum_{i\in I} N_i \subseteq M$.

Por otra parte, tenemos que $M = \sum_{m\in M} Rm$. De aquí, existe

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq M$$

tal que $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i = RX$. Por lo tanto M es finitamente generado. ∎

Teorema A.1.7 *Son equivalentes para $M \in R-Mod$ y $N \leq M$:*

1) M es artiniano.

2) N y M/N son artinianos.

3) Toda cadena descendente de submódulos de M se estaciona.

4) Todo cociente es finitamente cogenerado.

5) Para cada $\{N_i\}_{i\in I}$ familia no vacía de submódulos de M existe $F \subseteq I$ finito tal que

$$\bigcap_I N_i = \bigcap_F N_i$$

Demostración 1) $\Rightarrow$ 2)

Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ familia no vacía de submódulos de N, en particular son submódulos de M y de esta manera $\{N_i\}_{i\in I}$ tiene elemento mínimo pues M es artiniano. Por otra parte, consideremos $\pi : M \to M/N$ y sea $\{K_j\}_{j\in I}$ una familia no vacía de submódulos de M/N.

Afirmamos que si $\pi^{-1}(K_{j_0})$ es un mínimo en $\{\pi^{-1}(K_j)\}_{j\in I}$ entonces K_{j_0} es mínimo en $\{K_j\}_{j\in I}$. Supongamos que no es así, es decir, que tenemos $K_{j'} \leq K_{j_0}$. Entonces $\pi^{-1}(K_{j'}) \leq \pi^{-1}(K_{j_0})$ pero $\pi^{-1}(K_{j_0})$ es mínimo, entonces $\pi^{-1}(K_{j'}) = \pi^{-1}(K_{j_0})$. De lo anterior, $K_{j'} = \pi(\pi^{-1}(K_{j'})) = \pi(\pi^{-1}(K_{j_0})) = K_{j_0}$. Por lo tanto M/N es artiniano.

2) $\Rightarrow$ 3)

Sea $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq ...$ una cadena descendente de submódulos de M y consideremos $\pi : M \to M/N$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\Gamma = \{N_i | i = 1, 2, 3, ...\}$$

$$\Gamma_N = \{N_i \cap N | i = 1, 2, 3, ...\}$$

$$\pi(\Gamma) = \{\pi(N_i) | i = 1, 2, 3, ...\}$$

Ya que Γ es no vacío, Γ_N y $\pi(\Gamma)$ son no vacíos y utilizando nuestras hipótesis ambos tienen elemento mínimo a los que denotaremos por $N_m \cap N$ y $\pi(N_l)$ respectivamente. Con lo anterior definimos $n := máx(l, m)$ y tenemos:

$$\pi(N_n) = \pi(N_{n+i}) \text{ y } N_n \cap N = N_{n+i} \cap N \text{ con } i = 0, 1, 2, ...$$

Veamos que $N_n = N_{n+i}$ para $i = 0, 1, 2, ...$ Puesto que $\pi(N_n) = \pi(N_{n+i})$, tenemos que:

$$N_n + N = \pi^{-1}\pi(N_n) = \pi^{-1}\pi(N_{n+i}) = N_{n+i} + N$$

es decir, $N_n + N = N_{n+i} + N$. Con lo anterior y considerando $N_n \cap N = N_{n+i} \cap N$ y la ley modular tenemos:

$$N_n = (N_n + N) \cap N_n = (N_{n+i} + N) \cap N_n =$$

$$= N_{n+i} + (N \cap N_n) = N_{n+i} + (N \cap N_{n+i}) = N_{n+i}$$

3) $\Rightarrow$ 1)

Supongamos que $\{N_i\}_{i \in I}$ es una familia de submódulos de M que no tiene elemento mínimo, es decir, para cada $i \in I$ existe $j \in I$ tal que $N_i \supset N_j$. Luego, consideremos $\alpha_0 \in I$ tal que:

$$N_{\alpha_0} \supset N_{\alpha_1} \supset ...$$

es una cadena estrictamente descendente. Esto es una contradicción pues toda cadena descendente se estaciona por hipótesis.

4) $\Rightarrow$ 5)

Sea $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de submódulos de M y $L = \bigcap_I N_i$. Por hipótesis M/L es finitamente cogenerado entonces existe $F \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_F N_i = L = \bigcap_I N_i$.

5) $\Rightarrow$ 4)

Sea $L \leq M$ y consideremos $\{N_i \leq M | L \subseteq N_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de submódulos de M. Entonces $L = \bigcap_I N_i$ así que existe $F \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_F N_i = L$. Por lo tanto M/L es finitamente cogenerado.

1) $\Rightarrow$ 5)

Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de submódulos de M y consideremos $\{\bigcap_F N_i | F$ es finito $\}$. Por hipótesis tenemos que esta familia tiene mínimo, digamos $\bigcap_{F_0} N_i$, entonces para cada $j \in I$ tenemos $\bigcap_{F_0} N_i \cap N_j \subseteq \bigcap_{F_0} N_i$, lo que implica que $\bigcap_{F_0} N_i \cap N_j = \bigcap_{F_0} N_i$. Por lo tanto $\bigcap_{F_0} N_i \subseteq \bigcap_I N_j$ y así $\bigcap_{F_0} N_i = \bigcap_I N_j$.

5) $\Rightarrow$ 3)

Consideremos $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq ...$ una cadena descendente de submódulos de M. Por hipótesis, existe $F \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_F N_i = \bigcap_{\mathbb{N}} N_i$, es decir existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^n N_i = \bigcap_{\mathbb{N}} N_j$. Por lo tanto, $N_n = N_{n+j}$ para toda $j \in \mathbb{N}$. ∎

Teorema A.1.8 *Son equivalentes para $M \in R - Mod$ y $N \leq M$:*

1) M es neteriano.

2) N y M/N son neterianos.

3) Toda cadena ascendente de submódulos de M se estaciona.

4) Todo cociente es finitamente generado.

5) Para cada $\{N_i\}_{i\in I}$ familia no vacía de submódulos de M existe $F \subseteq I$ finito tal que

$$\sum_I N_i = \sum_F N_i$$

Demostración La demostración de este teorema es análoga a la del teorema A.1.7 y considerando la proposición A.1.6 ∎

Proposición A.1.9 *Sea $M \in R - Mod$. M es artiniano si y solo si para cualquier familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de submódulos de M no vacía, existe $F \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_F M_\alpha = \bigcap_I M_\alpha$*

Demostración Supongamos que M es artiniano y consideremos una familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ no vacía de submódulos de M. Sea

$$\Gamma = \{\bigcap_F M_\alpha | F \subseteq I \text{ finito } \}$$

Como M es artiniano, Γ tiene elemento mínimo, digamos que es $\bigcap_{F_0} M_\alpha$. Además, para $j \in I$ tenemos que:

$$(\bigcap_{F_0} M_\alpha) \cap M_j \subseteq \bigcap_{F_0} M_\alpha$$

y como $\bigcap_{F_0} M_\alpha$ es mínimo en Γ se tiene que:

$$(\bigcap_{F_0} M_\alpha) \cap M_j = \bigcap_{F_0} M_\alpha$$

es decir, $\bigcap_{F_0} M_\alpha \subseteq M_j$ para todo $j \in I$.

De lo anterior, $\bigcap_{F_0} M_\alpha \subseteq \bigcap_I M_\alpha$ y puesto que $\bigcap_{F_0} M_\alpha$ es mínimo en Γ, tenemos que $\bigcap_{F_0} M_\alpha = \bigcap_I M_\alpha$.

Por otra parte, sea $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq ...$ una cadena descendente de submódulos de M. Por hipótesis, existe $F \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_F M_\alpha = \bigcap_I M_\alpha$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = \bigcap_F M_\alpha = \bigcap_I M_\alpha$ con lo cual $M_n = M_{n+i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De esta manera, la cadena se estaciona y podemos concluir que M es artiniano. ∎

Proposición A.1.10 *Si R es artiniano, entonces para cada $F\ell \in R - fil$ se tiene que $F\ell = \eta(I) = \{J \leq R | I \subseteq J\}$ para algún $I \leq R$ ideal bilateral.*

Demostración Sea $F\ell \in R - fil$. Puesto que R es artiniano, existe $F \subseteq F\ell$ finito, tal que

$$\bigcap_{J \in F\ell} J = \bigcap_{J \in F} J = I,$$

notemos que $I \in F\ell$ pues se escribe como una intersección finita de elementos de $F\ell$.

Sea $K \in F\ell$, entonces $I = \bigcap_{J \in F} J \subseteq K$, es decir, $I \subseteq K$ y así $F\ell \subseteq \eta(I)$.

Sea $L \in \eta(I)$ entonces $I \subseteq L$ y puesto que $I \in F\ell$ y $F\ell$ es filtro tenemos que $L \in F\ell$. Luego, $\eta(I) \subseteq F\ell$. Por lo tanto, $\eta(I) = F\ell$.

Finalmente, veamos que I es un ideal bilateral. Sean $b \in I$ y $r \in R$. puesto que $I = \bigcap_{J \in F\ell} J = \bigcap_{J \in F} J$ se cumple que $rb \in I$. Por otra parte, como $I \in F\ell$ entonces $(I : r) \in F\ell$ y además $F\ell = \eta(I)$. Con lo anterior $I \subseteq (I : r)$, es decir, $b \in (I : r)$ y de aquí $br \in I$. Por lo tanto, $I \leq R$ es un ideal bilateral. ∎

Definición 25 *Sea $M \in R - Mod$.*

1)M es directamente escindible si $M = 0$ o $M = U \oplus V$ con $V, U \neq 0$.

2)M es directamente inescindible si $M \neq 0$ y si $M = U \oplus V$ entonces $U = 0$ o $V = 0$.

3)Sea $U \subset M$. Decimos que M es uniforme sobre U si para todo $A, B \leq M$ tales que $U \subset A$ y $U \subset B$ se tiene que $U \subset A \cap B$.

4)Se dice que M es uniforme si es uniforme sobre $\{0\}$.

Definición 26 *Sea $M \in R - Mod$ y $N \leq M$. Un pseudocomplemento de N en M es un submódulo $L \leq M$ que es máximo con la propiedad de que $N \cap L = 0$.*

Proposición A.1.11 *Si R es neteriano, entonces todo módulo $M \neq 0$ contiene un submódulo uniforme diferente de cero.*

Demostración Veamos que todo $0 \neq N \leq M$ finitamente generado contiene un submódulo uniforme diferente de cero. Sea

$$\Gamma = \{X \mid X \text{ es pseudocomplemento en } N\}$$

El conjunto anterior es no vacío pues 0 es pseudocomplemento en N. Puesto que N es neteriano, el conjunto anterior tiene un elemento máximo digamos X_0. Supongamos que X_0 es pseudocomplemento de U_0 en N.

Veamos que todo $0 \neq C \leq U_0$ es esencial para concluir que U_0 es uniforme. Supongamos para $L \leq U_0$ que tenemos $C \cap L = 0$ entonces se sigue que $C \cap (X_0 + L) = 0$. Si consideramos C' un pseudocomplemento de C en N tal que $X_0 + L \subseteq C'$ tenemos que $X_0 \subseteq C' \in \Gamma$ pero X_0 es máximo así que $C' = X_0$, con lo cual $L = 0$. Por lo tanto, C es esencial en U_0, es decir, U_0 es uniforme. ∎

Proposición A.1.12 *Si R es artiniano entonces todo módulo inyectivo Q que sea directamente inescindible es la cápsula inyectiva de un simple.*

Demostración Sea Q directamente inescindible, $q \in Q$ y consideremos Rq para construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f_q"] \arrow[d] & Rq \arrow[dl] \\ R/Kerf_q & \end{tikzcd}$$

del cual, $Rq \cong R/Ker\ f_q$ y así Rq es artiniano. De lo anterior, si consideramos la cadena:

$$Rq \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 ...$$

donde $N_i \neq 0$ para todo i. Ya que Rq es artiniano, la cadena anterior se estaciona y donde se estaciona podemos encontrar el simple S. De esta manera, al considerar $E(S)$ se tiene que $E(S) \leq Q$ pero Q es directamente inescindible entonces $Q = E(S)$ ∎

Proposición A.1.13 *Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ familia no vacía de submódulos de M. De entre todos los subconjuntos $J \subseteq I$ tales que $\bigoplus_{i\in J} N_i = \sum_{i\in J} N_i$ existe un elemento máximo.*

Demostración Consideremos:

$$\Gamma = \{J | J \subseteq I \text{ y } \textstyle\bigoplus_{i\in I} N_i = \sum_{i\in I} N_i\}$$

$\Gamma \neq \emptyset$ es no vacío pues $\emptyset \in \Gamma$, además, Γ es un conjunto parcialmente ordenado considerando la inclusión. Ahora, consideremos una cadena C en Γ, entonces $\cup C \in \Gamma$ ya que en caso de no ser así tenemos que $\sum_{\cup C} N_i \neq \bigoplus_{\cup C} N_i$ y de aquí existe una familia finita tal que su suma no es directa, pero C es una cadena así que dicha suma es directa. Por lo tanto, usando el lema de Zorn Γ tiene máximos. ∎

Proposición A.1.14 *Si R es neteriano entonces para $Q \in R-Mod$ inyectivo, $Q = \bigoplus_{i\in I} L_i$, donde L_i es directamente inescindible. Además, si R es artiniano entonces cada uno de los sumandos es la cápsula inyectiva de un simple, es decir, $Q = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$.*

Demostración Sea R neteriano y $Q \in R-Mod$ inyectivo. Consideremos $\{Q_i\}_{i\in I}$ una familia máxima de submódulos inyectivos y directamente inescindibles de Q cuya suma sea directa (es decir, $\bigoplus_{i\in I} Q_i = \sum_{i\in I} Q_i$) y sea $Q_0 = \bigoplus_{i\in I} Q_i$. Puesto que R es neteriano y Q_i es inyectivo para todo

$i \in I$ tenemos que Q_0 es inyectivo, con lo cual $Q = Q_0 \oplus Q_1$. Si pasa que $Q_1 \neq 0$, existe $0 \neq N \leq Q_1$ irreducible (usando la proposición A.1.10) tal que $Q_1 = E(N) \oplus Q_2$ donde $E(N)$ es inyectivo directamente inescindible. Así $Q = (Q_0 \oplus E(N)) \oplus Q_2$ pero $Q_0 \oplus E(N)$ contradice el hecho de que Q_0 sea máximo, por lo tanto, $Q_1 = 0$ y $Q = Q_0$. Si además R es artiniano podemos considerar la proposición anterior para concluir. ∎

A.2. Dimensión de Gabriel

Definición 27 *Una teoría de torsión τ en $R - Mod$ es una pareja (T, F) de clases de módulos tales que:*

1. $Hom_R(M, N) = 0$ *para todo* $M \in T$, $N \in F$.
2. *Si* $Hom_R(M, N) = 0$ *para todo* $N \in F$ *entonces* $M \in T$.
3. *Si* $Hom_R(M, N) = 0$ *para todo* $M \in T$ *entonces* $N \in F$.

A T le llamaremos la clase de módulos de torsión de τ y a F le llamaremos la clase de módulos libres de torsión de τ. Diremos que una teoría de torsión τ es hereditaria si la clase de módulos de τ-torsión es cerrada bajo submódulos.

Denotaremos por $R - tors$ a la clase de teorías de torsión hereditarias. Además, para τ', τ en $R - tors$ definimos el siguiente orden:

$$\tau' = (T', F') \preceq \tau = (T, F) \text{ si y solo si } T' \subseteq T$$

o equivalentemente $F \subseteq F'$.

Sean $M \in R - Mod$ y $\tau = (T_\tau, F_\tau) \in R - tors$, diremos que M es $\tau - cocrítico$ si $M \in F_\tau$ y es tal que para todo submódulo no cero $N \leq M$, $M/N \in T_\tau$. Diremos que M es cocrítico si es $\tau - cocrítico$ para alguna teoría de torsión τ.

Proposición A.2.1 *Todo módulo cocrítico es uniforme.*

Demostración Sea $M \in R - Mod$ un módulo cocrítico, entonces M es $\tau - cocrítico$ para alguna teoría de torsión τ. Con lo anterior, veamos que para $H, K \leq M$ con $H \cap K = 0$ entonces $K = 0$. Puesto que $H + K \leq M$ entonces $(H + K)/H \leq M/H$ pero

$$K \cong K/(H \cap K) \cong (H + K)/H \leq M/H \in T_\tau.$$

es decir, $K \leq M/H \in T_\tau$. Pero M es libre y como $K \leq M$, tenemos que $K = 0$. ∎

Definición 28 *Dada una familia $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq R{-}tors$, el supremo y el ínfimo los definimos como sigue:*

$$\mathcal{T}_{\bigwedge_{\alpha \in \mathcal{A}} \tau_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_{\tau_\alpha}$$

$$\mathcal{F}_{\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} \tau_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{F}_{\tau_\alpha}$$

Además, si $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq R{-}Mod$, denotaremos por $\xi(\{M_\alpha\}_{\alpha \in A})$ al menor elemento de $R - tors$ para el cual todos los elementos de $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ son de torsión, es decir,

$$\xi(\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \bigwedge \{\tau \in R - tors | \{M_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{T}_\tau\}$$

y le llamaremos teoría de torsión generada por $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

De manera similar, definimos $\chi(\{M_\alpha\}_{\alpha \in A})$ como el mayor elemento de $R - tors$ para el cual todos los elementos de $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ son libres de torsión, es decir,

$$\chi(\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \bigvee \{\tau \in R - tors | \{M_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{F}_\tau\}$$

y le llamaremos la teoría de torsión cogenerada por $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

En particular, $\chi = \chi(\{0\})$ y $\xi = \xi(\{0\})$ denotan al elemento mayor y el elemento menor de $R - tors$ respectivamente. En caso de que $\{M_\alpha\} = \{M\}$ denotaremos por $\chi(M)$ y $\xi(M)$ a las teorías de torsion generada y cogenerada por un solo módulo.

Definición 29 *Sea $\tau \in R - tors$, definimos la siguiente filtración de teorías de torsión hereditarias, indicadas en los ordinales.*

1. $\tau_0 = \tau$

2. Si i es un ordinal sucesor, entonces $\tau_i = \tau_{i-1} \vee \{M | M$ es $\tau_{i-1} -$ cocrítico$\}$.

3. Si i es un ordinal límite, entonces $\tau_i = \bigvee \{\tau_j | j < i\}$.

Esta filtración es llamada filtración de Gabriel para τ.

Definición 30 *Sea $M \in R - Mod$, $M \neq 0$. Decimos que M tiene τ-Dimensión de Gabriel i, con i un ordinal, si M es de τ_i-torsión pero no es de τ_j-torsión para $j < i$.*

Si M no es de τ_i-torsión para ninguna i, entonces decimos que M no tiene τ_i-Dimensión de Gabriel.

Denotaremos la τ-Dimensión de Gabriel para un módulo M como τ-$Gdim(M)$. En particular, la ξ-Dimensión de Gabriel para M es la dimensión de Gabriel de M.

Proposición A.2.2 *Si R tiene Dimensión de Gabriel, entonces para cualquiera $\sigma, \sigma' \in R{-}tors$, tales que $\xi \leq \sigma < \sigma' \leq \chi$, existe un módulo σ-cocrítico que es de σ'-torsión.*

Demostración Sea $\gamma = Gdim(R)$ y h un ordinal mínimo con la propiedad de $\tau_h \not\leq \sigma$. Notemos que h no es límite ni cero, si es límite ya que es mínimo con dicha propiedad tenemos que $\tau_j \leq \sigma$ para todo $j < h$ y así $\tau_h = \bigvee_{j<h} \tau_j \leq \sigma$, lo cual es una contradicción. Por otro lado no es cero pues $\tau_0 = \tau \leq \sigma$. Entonces h es sucesor y $\tau_h = \tau_{h-1} \vee \xi(\{M|M$ es $\tau_{h-1}-$cocrítico $\})$.

Supongamos que no existe un módulo σ-cocrítico de σ'-torsión y veamos que para todo ordinal i se tiene que $\tau_i \wedge \sigma' \leq \sigma$. Notemos que para todo ordinal $j < h$ se tiene que $\tau_j \wedge \sigma' \leq \sigma$, pues para $j < h$, $\tau_j \leq \sigma$.

Así, sea i un ordinal tal que $\tau_j \wedge \sigma' \leq \sigma$ para todo $j < i$, y probemos que $\tau_i \wedge \sigma' \leq \sigma$.

Si i es un ordinal límite, tenemos que $\tau_i = \bigvee_{j<i} \tau_j$ y además

$$\sigma' \wedge \tau_i = \sigma' \wedge (\bigvee_{j<i} \tau_j) = \bigvee_{j<i} (\sigma' \wedge \tau_j) \leq \sigma.$$

Si i es sucesor, entonces $\tau_i = \tau_{i-1} \vee \xi(\{M|M$ es $\tau_{i-1}-$cocrítico $\})$ con lo cual,

$$\sigma' \wedge \tau_i = \sigma' \wedge (\tau_{i-1} \vee \xi(\{M|M \text{ es } \tau_{i-1}-\text{cocrítico }\})) \leq \sigma.$$

Supongamos que existe $M \in R - Mod$ tal que M es de $(\tau_i \wedge \sigma')$-torsión y sin pérdida de generalidad supongamos que $M \in F_\sigma$, por hipótesis de inducción $\tau_{i-1} \wedge \sigma' \leq \sigma$, entonces $M \in F_{\tau_{i-1} \wedge \sigma'}$. Sea $N = \sigma_{\tau_{i-1}}(M) = \sum\{N|N \leq M$ y $N \in \tau_{i-1}\}$ es decir,

$$N \in T_{\tau_{i-1} \wedge \sigma'} \subseteq T_\sigma$$

por lo tanto $N \in T_\sigma$ y como $M \in F_\sigma$ entonces $N = 0$ con lo que se tiene que $M \in F_{\tau_{i-1}}$. De lo anterior existe un módulo C que es τ_{i-1}-cocrítico y $f : C \to EM$ $f \neq 0$ monomorfismo. Por lo tanto M contiene un submódulo τ_{i-1}-cocrítico, a saber $f(C) \cap M = C'$, luego

$$C' \subseteq M \in F_\sigma$$

y si $H \subset C'$, $H \neq 0$, entonces C'/H es de τ_{i-1}-torsión y por ser C'/H un subcociente de M entonces es de $(\tau_{i-1} \wedge \sigma')$-torsión, así

$$C'/H \in T_{\tau_{i-1} \wedge \sigma'} \subseteq T_\sigma$$

entonces C' es un módulo σ-cocrítico que es de σ'-torsión, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $\tau_i \wedge \sigma' \leq \sigma$ para todo ordinal i.

Ya que $Gdim(R) = \gamma$, entonces $\tau_\gamma = \chi$ y además $\sigma' = \sigma' \wedge \chi = \tau_\gamma \wedge \sigma' = \sigma$, lo cual es una contradicción y con esto terminamos la prueba. ∎

Proposición A.2.3 *Sea $M \in R - Mod$ y consideremos $\tau = \chi(M) \in R - tors$. Si existe un módulo $\chi(M)$-cocrítico entonces M contiene un submódulo $\chi(M)$-cocrítico.*

Demostración Sea C un $\chi(M)$-cocrítico, entonces $Hom(C, EM) \neq 0$. Sea $f : C \to EM$, $f \neq 0$ el cual es monomorfismo. Por lo tanto $f(C) \cong C$ y luego $f(C) \cap M \neq 0$ es un submódulo $\chi(M)$-cocrítico. ∎

Para mayor información sobre teorias de torsión, véase [8].

Considerando las proposiciones anteriores podemos concluir que si R tiene dimensión de Gabriel, entonces es posible encontrar un submódulo cocrítico, lo cual implica que el submódulo es uniforme. Así, se satisface la condición

a) de la proposición 2.0.24.

Por otra parte, para los Anillos de cadena izquierdos tenemos la cadena:

$$0 \leq ... \leq I_i \leq ... \leq \mathcal{M} < R$$

Veamos que R/I_j es uniforme. Sean $J, K \leq R$ entonces $(J/I_j) \cap (K/I_j) \leq R/I_j$. Puesto que J, K son ideales de R, estan encadenados y podemos considerar que $J \leq K$ con lo cual $(J/I_j) \subseteq (K/I_j)$. De lo anterior, $(J/I_j) \cap (K/I_j) = J/I_j \neq 0$ es decir, R/I_j es uniforme.

Por otra parte, si consideramos $M \in R - Mod$, $M \neq 0$ y $0 \neq m \in M$ tenemos que:

$$Rm \cong R/(0 : m)$$

es uniforme. De esta manera, los Anillos de cadena izquierdos cumplen con la condición a) de la proposición 2.0.26. ∎

A.3. Algunos resultados sobre Prerradicales

Teorema A.3.1 *Sea R un anillo. Son equivalentes:*

1. R es un anillo artiniano semisimple.
2. $R - pr$ es una retícula Booleana finita.
3. $R - pr$ es una reticula Booleana.
4. $R - pr$ es una gran retícula Booleana.
5. Para cada $\sigma \in R - pr$, tenemos que $\sigma = \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | \alpha_S^{E(S)} \preceq \sigma\}$.
6. $1 = \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - Simp\}$.
7. Para cada $\sigma \in R - pr$, existe $\Lambda \subseteq R - Simp$ tal que $\sigma = Zoc_\Lambda(\cdot)$ donde $Zoc_\Lambda(M) = \sum\{S \leq M | S \cong T \in \Lambda\}$

Demostración Teorema 11 [2]. ∎

Definición 31 *Definimos para cada $\sigma \in R - pr$ los siguientes prerradicales:*

El igualador de σ:

$$e(\sigma) = \bigwedge\{\tau \in R - pr | \tau\sigma = \sigma\}$$

El co-igualador de σ:

$$c(\sigma) = \bigvee\{\tau \in R-pr|(\sigma : \tau) = \sigma\}$$

Proposición A.3.2 *Sea $\sigma \in R-pr$, entonces*

1.- a) $\sigma \preceq e(\sigma)$

b) $e(\sigma)$ *es un prerradical idempotente.*

c) $e(\sigma) = \sigma$ *si y solo si* σ *es idempotente.*

d) $e(\sigma) = \bigvee\{\alpha_{\sigma(M)}^{\sigma(M)}|M \in R-Mod\}$

2.- a) $c(\sigma) \preceq \sigma$

b) $c(\sigma)$ *es un radical.*

c) $c(\sigma) = \sigma$ *si y solo si* σ *es radical.*

d) $c(\sigma) = \bigwedge\{\omega_{0)}^{M/\sigma(M)}|M \in R-Mod\}$

Demostración Teorema 3.1 [3] $\blacksquare$.

Proposición A.3.3 *Sea $M \in R-Mod$ y $N \leq_{FI} M$. Entonces*

1.- $e(\alpha_N^M) = \alpha_N^N$

2.- $c(\omega_N^M) = \omega_{M/N}^0$

Demostración Proposición 1.5 [5] $\blacksquare$.

Bibliografía

[1] Anderson, F.; Fuller, K.,Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Mathematics (vol 13), Springer-Verlag, New York 1992.

[2] Fernández-Alonso, R.; Raggi, F.; Ríos, J.; Rincón, H.; Signoret, C., The lattice structure of preradicals. Communications in Algebra, 30(3)(2002), 1533-1544.

[3] Fernández-Alonso, R.; Raggi, F.; Ríos, J.; Rincón, H. ; Signoret, C., The lattice structure of preradicals II: Partitions. Journal of Algebra and Its Applications, 1(2)(2002), 201-214.

[4] Fernández-Alonso, R.; Raggi, F.; Ríos, J.; Rincón, H.; Signoret, C., The lattice structure of preradicals III: Operators. J. Pure Appl. Algebra, 190(2004), 251-265.

[5] Fernández-Alonso, R.; Raggi, F.; Ríos, J.; Rincón, H., Basic preradicals and main injective modules. Journal of Algebra and Its Applications 8:1-16.

[6] Fernández-Alonso, R.; Raggi, F.; Ríos, J.; Rincón, H., Main injective rings. Communications in Algebra, 39(2011), 1226-1233.

[7] Fernández-Alonso, R.; Gavito, S. ; Raggi, F.; Ríos, J.; Rincón, H., Main modules and some characterizations of rings with global conditions on preradicals. Journal of Algebra and Its Applications 13:1-19.

[8] Golan, Jonathan S., Torsion theories. Longman Scientific Technical with John Wiley Sons Inc., New York 1986.

[9] Stenström, B., Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory. Springer-Verlag. Berlín, 1975.