# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

**INTRODUCCIÓN A LOS HIPERESPACIOS DE VIETORIS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A :**

**LUIS JOEL ESPINOSA GONZÁLEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:**
**DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA**
**2015**

**México, D.F.**

1. Datos del alumno
   Espinosa
   González
   Luis Joel
   7773239247
   Universidad Nacional Autónoma de
   México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   307709662

2. Datos del tutor
   Dr.
   Ángel
   Tamariz
   Mascarúa

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Leobardo
   Fernández
   Román

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Roberto
   Pichardo
   Mendoza

5. Datos del sinodal 3
   Dra.
   Maira
   Madriz
   Mendoza

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Alejandro
   Dorantes
   Aldama

7. Datos del trabajo escrito.
   Introducción a los Hiperespacios de Vietoris
   88 p.
   2015

# Índice general

**Introducción** I

**0. Preliminares** 1
- A.1. Axiomas de separación . . . . . 1
- B.2. Continuidad . . . . . 5
- C.3. Topología débil . . . . . 8
- D.4. Convergencia . . . . . 10
- E.5. Compacidad . . . . . 13
- F.6. Espacios de ordinales . . . . . 23
- G.7. La compactación de Stone-Čech . . . . . 26

**1. Hiperespacio de Vietoris** 29
- 1.1. Hiperespacio de Vietoris . . . . . 29
- 1.2. Propiedades fundamentales en hiperespacios . . . . . 30
- 1.3. Axiomas de separación . . . . . 35

**2. Axiomas de numerabilidad** 41

**3. Compacidad y convergencia en hiperespacios** 45
- 3.1. Compacidad . . . . . 45
- 3.2. Convergencia en hiperespacios . . . . . 49

**4. Pseudocompacidad** 55

**5. Conexidad y disconexidad en hiperespacios** 59

**6. Métrica de Hausdorff** 63

**7. Normalidad implica compacidad** 69

**Índice alfabético** 79

# Introducción

La teoría de hiperespacios tiene su origen en los inicios del siglo XX, cuando Felix Hausdorff define una métrica para la colección de conjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico acotado $X$, a la cual se le conoce por métrica o distancia de Hausdorff. Más tarde Leopold Vietoris define para la colección de subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio $X$ arbitrario una topología, la cual se conoce por topología de Vietoris o topología finita. La topología de Vietoris, como veremos en esta tesis, no sólo resulta equivalente a la generada por la métrica Hausdorff en los espacios compactos y métricos, sino que además a partir de ésta se pueden definir distintas topologías sobre la colección de conjuntos cerrados no vacíos de un espacio $X$ variando un poco la definición de la misma. A este tipo de topologías se les conoce por hipertopologías o topologías admisibles, ya que lo que se busca son topologías que guarden una cierta relación con el espacio $X$ original, es decir, si denotamos a la colección de cerrados no vacíos de $X$ por $\mathcal{CL}(X)$, se requiere que la función inclusión $i : X \to \mathcal{CL}(X)$ definida por $i(x) = \overline{\{x\}}$ sea un homeomorfismo en su imagen, que en el caso de espacios $T_1$, se consigue una copia de $X$ en $\mathcal{CL}(X)$. Algunas de estas hipertopologías son, topología de Vietoris, topología de Fell, topología de Wijsman, topología de Hausdorff, topología Mosco, entre otras [16]. Una motivación para describir nuevas hipertopologías son sus múltiples aplicaciones a distintas ramas de la matemática, por ejemplo: espacios de funciones, fractales, análisis convexo, ecuaciones diferenciales, problemas de optimización, teoría de juegos, teoría computacional, probabilidad, entre otras. Debido a la falta de tiempo y a lo amplia que se vuelve la teoría de hiperespacios, en esta tesis sólo nos enfocamos en dos de estas hipertopologías que son la topología de Vietoris y la topología de Hausdorff.

Este trabajo tiene por propósito la exposición y el estudio de los temas fundamentales y más representativos de la teoría de hiperespacios con la topología de Vietoris, desde un punto de vista muy general. El desarrollo se dará separando cada tema particular de la teoría de hiperespacios por capítulos, en donde cada uno de ellos tendrá un objetivo claro. Además, al pretender ser una buena introducción a la teoría de hiperespacios, no se dejará de lado el ser un texto didáctico y en el cual todo resultado que se mencione será demostrado con el mayor rigor matemático posible, incluyendo aquellas pruebas que son omitidas en varios textos donde se hace mención de ellas, a excepción de aquello que requiera un desarrollo extenso para su entendimiento, o sobrepase a una teoría básica dentro de la topología general, y en cuyo caso se incluirán referencias a otros textos para su continuación y comprensión correcta.

En el Capítulo 1 se define lo que es un hiperespacio de Vietoris a partir de un espacio topológico $X$ y se definen ciertos subconjuntos de su conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$. Además introducimos la notación necesaria para la comprensión de los capítulos subsecuentes. Definimos a los conjuntos $\langle U\rangle^+$ y $\langle U\rangle^-$, los cuales bajo la suposición de ser $U$ un abierto no vacío en $X$, estos forman una subbase para el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$. Mostraremos algunos resultados elementales de la teoría de hiperespacios que nos ayudarán en las demostraciones de muchos teoremas que aparecen en los capítulos siguientes. Después tratamos la relación que guarda un espacio $X$ con su hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ respecto a los axiomas de separación: $T_0$ (Kolmogorov), $T_1$ (Fréchet), $T_2$ (Hausdorff), $T_3$, $T_{3\frac{1}{2}}$ (Tychonoff) y $T_4$. Además, introducimos el problema de saber qué condiciones se le pueden pedir a un espacio $X$ para que su hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ resulte $T_4$, y daremos algunas condiciones necesarias para garantizar este hecho. Al final de este capítulo, mostraremos que para algunos axiomas de separación, si $X$ los cumple, entonces el hiperespacio de compactos $\mathcal{K}(X)$ también los satisface y viceversa.

En el Capítulo 2 hablamos acerca de los axiomas de numerabilidad que cumple un hiperespacio. Probaremos que si un espacio $X$ es segundo numerable o separable, entonces su hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ también lo es y viceversa. Además, daremos un ejemplo de un espacio primero numerable cuyo hiperespacio no es primero numerable.

En el Capítulo 3 tratamos los temas de compacidad y convergencia en hiperespacios. Con respecto a la compacidad, presentamos una serie de teoremas que caracterizan a la compacidad de $\mathcal{CL}(X)$ a partir de la compacidad de $X$ y de otras propiedades como son de Lindelöf, paracompacidad, metacompacidad y meta-Lindelöf. Con respecto al tema de convergencia, introducimos la convergencia de redes de conjuntos, la cual recibe el nombre de convergencia Kuratowski-Painlevé y analizamos la relación que guarda ésta convergencia con la convergencia usual de redes en un hiperespacio y así caracterizar a los subespacios compactos de un hiperespacio.

En el Capítulo 4, tratamos exclusivamente el tema de pseudocompacidad en hiperespacios. En específico, demostramos que una condición necesaria para que la compactación de Stone-Čech del hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ coincida con el hiperespacio $\mathcal{CL}(\beta X)$ es que tanto $X$ como $\mathcal{CL}(X)$ sean pseudocompactos. Luego, mostramos algunos resultados que relacionan a la pseudocompacidad de los productos finitos de un espacio $X$ con la compactación de subespacios de $\mathcal{CL}(X)$.

En el Capítulo 5 se demuestran algunos resultados relacionados con la conexidad y disconexidad de subespacios de un hiperespacio.

En el Capítulo 6 introducimos la métrica de Hausdorff, la cual se define para la colección de conjuntos compactos y no vacíos de $X$. Mostramos que dado un espacio métrico y compacto $X$, entonces el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ coincide con el espacio generado por esta métrica. También se demostrará que la convergencia de sucesiones de conjuntos definida por la métrica de Hausdorff coincide con la convergencia Kuratowski-Painlevé.

En el Capítulo 7, se muestra el teorema más importante y extenso expuesto en esta tesis: bajo la suposición de la Hipótesis del Continuo, la compacidad de $\mathcal{CL}(X)$ equivale a la normalidad de $\mathcal{CL}(X)$.

# Capítulo 0

# Preliminares

## A.1. Axiomas de separación

**Definición A.1.** Decimos que un espacio $X$ es ***Kolmogorov o*** $T_0$, si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un abierto $U$ en $X$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.

**Teorema A.2.** Dado un espacio $X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

($i$) $X$ es $T_0$.

($ii$) Si $x, y \in X$ son tales que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, entonces $x = y$.

*Demostración.* ($i$) $\Longrightarrow$ ($ii$) Si $x \neq y$, existe un abierto $U$ en $X$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Si suponemos que $x \in U$ y $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, entonces $x \in \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Por tanto, $U \cap \{y\} \neq \varnothing$, lo que contradice el hecho de que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Luego $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

($ii$) $\Longrightarrow$ ($i$) Si tomamos a $x, y \in X$ distintos, entonces por hipótesis $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Si suponemos que $z \in \overline{\{x\}} \backslash \overline{\{y\}}$, entonces existe un abierto $U$ de $z$ tal que $U \cap \{y\} = \varnothing$ y $U \cap \{x\} \neq \varnothing$, por tanto $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Análogamente si $z \in \overline{\{y\}} \backslash \overline{\{x\}}$. $\square$

**Definición A.3.** Decimos que un espacio $X$ es ***Fréchet o*** $T_1$, si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos $U$ y $V$ en $X$ de $x$ y $y$, respectivamente, tales que $x \in U \cap (X \backslash V)$ y $y \in V \cap (X \backslash U)$.

**Teorema A.4.** Dado un espacio $X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

($i$) $X$ es $T_1$.

($ii$) $\{x\}$ es cerrado en $X$ para todo $x \in X$.

*Demostración.* ($i$) $\Longrightarrow$ ($ii$) Si $X$ es $T_1$ y $x \in X$, entonces para cada $z \neq x$, existe un abierto $U$ de $z$ tal que $x \notin U$, es decir $U \cap \{x\} = \varnothing$, de manera que $X \backslash \{x\}$ es un conjunto abierto y, por tanto, $\{x\}$ es cerrado.

($ii$) $\Longrightarrow$ ($i$) Dados $x, y \in X$ distintos. Los conjuntos $X \backslash \{x\}$ y $X \backslash \{y\}$ son abiertos ajenos de $y$ y $x$, respectivamente. $\square$

**Definición A.5.** Decimos que un espacio $X$ es ***Hausdorff o*** $T_2$, si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos ajenos $U$ y $V$ en $X$ tales que $x \in U$ y $y \in V$.

**Teorema A.6.** Dado un espacio $X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

$(i)$ $X$ es $T_2$.

$(ii)$ Dado $x \in X$, para cada $y \in X \backslash \{x\}$ existe un abierto $U$ de $x$ tal que $y \notin \overline{U}$.

$(iii)$ Para todo $x \in X$ $\bigcap \{\overline{U} : U$ es un abierto de $x\} = \{x\}$.

*Demostración.* $(i) \Longrightarrow (ii)$ Por hipótesis, si $X$ es $T_2$ y $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos ajenos $U$ y $V$ de $x$ y $y$, respectivamente. Si $y \in \overline{U}$ entonces $V \cap U \neq \varnothing$. Por tanto $y \notin \overline{U}$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Sean $x \in X$ y $D = \{\overline{U} : U$ es un abierto de $x\}$. Si $z \in X$ es tal que $z \neq x$, por hipótesis existe un abierto $V$ de $x$ tal que $z \notin \overline{V}$, por tanto $V \notin D$. Luego $z \notin \bigcap D$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis $\bigcap \{\overline{U} : U$ es un abierto de $x\} = \{x\}$. Luego, existe un abierto $V$ de $x$ tal que $y \notin \overline{V}$. Por tanto, $X \backslash \overline{V}$ es un abierto de $y$ ajeno a $V$. □

**Definición A.7.** Decimos que un espacio $X$ es ***regular de Hausdorff o*** $T_3$, si es $T_1$ y para cada $x \in X$ y cualquier cerrado $A$ en $X$ tal que $x \notin A$, existen abiertos ajenos $U$ y $V$ tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$.

**Teorema A.8.** Dado un espacio $X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

$(i)$ $X$ es $T_3$.

$(ii)$ Para cada $x \in X$, si $U$ es un abierto de $x$, entonces existe un abierto $V$ de $x$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

$(iii)$ Para cada $x \in X$, si $U$ es un abierto de $x$, entonces existe un abierto $V$ de $x$ tal que $x \in V$ y $A \cap \overline{V} = \varnothing$.

*Demostración.* $(i) \Longrightarrow (ii)$ Sean $x \in X$ y $U$ un abierto de $x$. Como $X \backslash U$ es un cerrado que no tiene a $x$, por hipótesis existen abiertos ajenos $V$ y $W$ tales que $x \in V$ y $X \backslash U \subseteq W$. Como $V \cap W = \varnothing$ entonces $V \subseteq X \backslash W$ y, en consecuencia, $\overline{V} \subseteq X \backslash W$. Finalmente, por la condición $X \backslash U \subseteq W$, se concluye que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash W \subseteq U$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Sean $x \in X$ y $A$ un cerrado con $x \notin A$. Como $X \backslash A$ es un abierto de $x$, por hipótesis, existe un abierto $V$ de $x$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash A$. Luego, $A \subseteq X \backslash \overline{V}$ y $x \in V$, es decir, $A \cap \overline{V} = \varnothing$ y $x \in V$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Sean $x \in X$ y $A$ un cerrado con $x \notin A$. Por hipótesis, existe un abierto $V$ de $x$ tal que $x \in V$ y $A \cap \overline{V} = \varnothing$. Luego, $X \backslash \overline{V}$ es un abierto en $X$ que satisface que $A \subseteq X \backslash \overline{V}$, $x \in V$ y $V \cap X \backslash \overline{V} = \varnothing$. Por lo tanto, $X$ es $T_3$. □

**Definición A.9.** Decimos que un espacio $X$ es ***semiregular*** si $X$ tiene una base de abiertos regulares, donde un abierto $U$ en $X$ es ***regular***, si $U = Int(\overline{U})$.

**Teorema A.10.** Si $X$ es un espacio $T_3$, entonces $X$ es *semiregular*.

*Demostración.* Sean $x \in X$ y $U$ un abierto de $x$. Por el Teorema A.8 $(ii)$, existe un abierto $V$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Afirmamos que $Int(\overline{V})$ es un abierto regular tal que $x \in Int(\overline{V}) \subseteq U$. Para probar que $Int(\overline{V})$ es un abierto regular, revisamos las dos contenciones:

$\subseteq)$

$$Int(\overline{V}) \subseteq \overline{Int(\overline{V})} \Longrightarrow Int(\overline{V}) = Int(Int(\overline{V})) \subseteq Int(\overline{Int(\overline{V})}).$$

$\supseteq)$

$$\begin{aligned} Int(\overline{V}) \subseteq \overline{V} &\Longrightarrow \overline{Int(\overline{V})} \subseteq \overline{V} \\ &\Longrightarrow Int(\overline{Int(\overline{V})}) \subseteq Int(\overline{V}). \end{aligned}$$

En conclusión, $Int(\overline{V}) = Int(\overline{Int(\overline{V})})$, es decir $Int(\overline{V})$ es regular. Más aún, $x \in V \subseteq Int(\overline{V}) \subseteq U$. Como $U$ y $x$ fueron arbitrarios, se concluye que $X$ es semiregular. $\square$

**Teorema A.11.** Dado un espacio $X$. Si $U$ es un abierto regular y $D$ es denso en $X$, entonces $U \cap D$ es abiero regular en $D$.

*Demostración.* Sea $V = U \cap D$. Por definición de cerradura, $\overline{V}^D = \overline{V} \cap D$, lo que implica que, $Int_D\left(\overline{V}^D\right) = Int_D\left(\overline{V} \cap D\right)$. Como $U$ es un abierto en $X$ y $D$ es denso, resulta que, $\overline{U \cap D} = \overline{U}$. En consecuencia,

$$Int_D\left(\overline{V}^D\right) = Int_D\left(\overline{V} \cap D\right) = Int_D\left(\overline{U \cap D} \cap D\right) = Int_D\left(\overline{U} \cap D\right).$$

Ahora vamos a probar que $Int_D\left(\overline{U} \cap D\right) = Int\left(\overline{U}\right) \cap D$. Sea $W = Int_D\left(\overline{U} \cap D\right)$, donde $W$ es el abierto en $D$ más grande contenido en $\overline{U} \cap D$. Como $W$ es abierto en $D$, existe $W'$ abierto en $X$ tal que $W = W' \cap D$. Supongamos por contradicción que $U \cap D \subsetneq W' \cap D \subseteq \overline{U} \cap D$. Al aplicar cerradura en $X$ en la cadena de contenciones, nos queda que,

$$(*) \qquad \overline{U \cap D} \subseteq \overline{W' \cap D} \subseteq \overline{U} \Longrightarrow \overline{U} \subseteq \overline{W'} \subseteq \overline{U}$$

De (*) y por ser $U$ un abierto regular se tiene que, $U = Int(\overline{U}) = Int\left(\overline{W'}\right)$. Por otro lado, como $W'$ es abierto en $X$, $W' \subseteq Int(\overline{W'}) = U$, lo que contradice el hecho de que $U \cap D \subsetneq W' \cap D$. Por tanto $W = U \cap D$, lo que implica que $Int_D(\overline{U} \cap D) = W = U \cap D = Int(\overline{U}) \cap D$. Finalmente, completando las igualdades ya demostradas, se obtiene que,

$$Int_D\left(\overline{V}^D\right) = Int_D\left(\overline{U}\cap D\right) = Int\left(\overline{U}\right)\cap D = U\cap D = V.$$

□

**Definición A.12.** Un espacio $X$ es ***Tychonoff o*** $T_{3\frac{1}{2}}$, si es $T_1$ y para cada $x \in X$ y cualquier cerrado $A$ con $x \notin A$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_A = 1$.

**Definición A.13.** Si $X$ es un espacio $T_2$, decimos que $X$ es ***normal o*** $T_4$, si para cada par de conjuntos cerrados ajenos $A$ y $B$ de $X$, existen vecindades ajenas $U$ y $V$ que contienen a $A$ y $B$, respectivamente.

**Teorema A.14.** Dado un espacio $X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

$(i)$ $X$ es $T_4$.

$(ii)$ Para cualquier cerrado $A$ y cada abierto $U$ de $X$ tal que $A \subseteq U$, existe un abierto $V$ de $X$ tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

*Demostración.* $(i) \implies (ii)$ Si $A$ es un cerrado en $X$ y $A \subseteq U$, entonces $X\backslash U$ es cerrado en $X$ y $A \cap X\backslash U = \varnothing$. Como $X$ es $T_4$, existen abiertos ajenos $V$ y $W$ tales que $A \subseteq V$ y $X\backslash U \subseteq W$. Bastaría demostrar que $\overline{V} \cap (X\backslash U) = \varnothing$. Suponiendo lo contrario, existe $x \in \overline{V} \cap (X\backslash U) \subseteq \overline{V} \cap W$, lo que contradice el hecho de que $V$ y $W$ son ajenos.

$(ii) \implies (i)$ Tomando a un cerrado $A$ en $X$ y un abierto $U$ en $X$, tales que $A \subseteq U$, entonces si $B = X\backslash U$, se tiene que los cerrados $A$ y $B$ son ajenos. Por hipótesis, un abierto $V$ en $X$ tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X\backslash B$. Se sigue que los abiertos $V$ y $X\backslash\overline{V}$ son ajenos y contienen a $A$ y $B$ respectivamente.

□

**Definición A.15.** Decimos que un espacio $X$ es ***conexo*** si para cualesquiera abiertos $U$ y $V$ de $X$ tales que $U \cap V = \varnothing$ y $X = U \cup V$ se tiene que $X = U$ ó $X = V$.

**Proposición A.16.** Si $X$ es un espacio $T_4$, todo subespacio disconexo y cerrado de $X$ está contenido en una union de abiertos ajenos en $X$.

*Demostración.* Si $D \subseteq X$ es un subespacio disconexo y cerrado de $X$, existen abiertos $U$ y $V$ en $X$ tales que $D \subseteq U \cup V$ y $U \cap V \cap D = \varnothing$. Si $U \cap V = \varnothing$, habríamos acabado. Analicemos el caso contrario. Puesto que $U \cap V \cap D = \varnothing$ y $U \cap V \neq \varnothing$, observamos que $D \subseteq (X\backslash U) \cup (X\backslash V)$ y $(X\backslash U) \cap (X\backslash V) \cap D = \varnothing$ ya que $D \subseteq U \cup V$. Luego, al ser $D$ cerrado en $X$, $D$ está contenido en la union de los cerrados ajenos $(X\backslash U) \cap D$ y $(X\backslash V) \cap D$. Como $X$ es $T_4$ y $D$ es cerrado, existen abiertos $U_0$ y $V_0$ en $X$ tales que, $(X\backslash U) \cap D \subseteq U_0$, $(X\backslash V) \cap D \subseteq V_0$ y $\overline{U_0} \cap \overline{V_0} = \varnothing$, donde, $D \subseteq U_0 \cup V_0$. □

## B.2. Continuidad

**Definición B.17.** Dados los espacios topológicos $X$ y $Y$, una función $f : X \to Y$, es ***continua***, si $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ es abierto en $X$ para todo abierto $U$ de $Y$.

**Teorema B.18.** Dada una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos $X$ y $Y$, los siguientes enunciados son equivalentes:

$(i)$ $f$ es continua.

$(ii)$ $f^{-1}(B)$ es abierto en $X$ para todo abierto subbásico $B$ de $Y$.

$(iii)$ Para todo $x \in X$, si $U$ es un abierto de $f(x)$ en $Y$, entonces existe un abierto $V$ de $x$ en $X$ tal que $f(V) \subseteq U$.

$(iv)$ $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.

$(v)$ $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subseteq Y$.

*Demostración.* $(i) \Longrightarrow (ii)$ Es evidente usando la definición de continuidad.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Sean $\mathcal{B}$ una subbase de $Y$ y $x \in X$. Dado un abierto $U$ en $Y$ tal que $f(x) \in U$, podemos encontrar subbásicos $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, para los cuales $f(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq U$. El conjunto $V = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(B_i)$ es abierto. Además, $x \in V$ y $f(V) \subseteq U$.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$ Sean $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$ y $U$ un abierto de $f(x)$. Por hipótesis, existe $V$ abierto de $x$, tal que $f(x) \in f(V) \subseteq U$. Como $x \in \overline{A}$, $\varnothing \neq V \cap A$ y, por tanto, se tienen las siguientes contenciones: $\varnothing \neq f(V \cap A) \subseteq f(V) \cap f(A) \subseteq U \cap f(A)$. Como $U$ fue abierto arbitrario de $f(x)$, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$. Como $x \in \overline{A}$ fue arbitrario, entonces $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

$(iv) \Longrightarrow (v)$ Sean $B \subseteq Y$ y $A = f^{-1}(B)$. Como por hipótesis, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$, entonces $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

$(v) \Longrightarrow (i)$ Si $U$ es un abierto de $Y$, entonces por hipótesis, $\overline{f^{-1}(Y \backslash U)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \backslash U}) = f^{-1}(Y \backslash U)$. Por tanto, $f^{-1}(Y \backslash U) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(U)$ es cerrado y $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$. □

**Teorema B.19.** Si $X$ es un espacio arbitrario, $Y$ es un espacio $T_2$ y $f, g : X \to Y$ son funciones continuas tales que $f|_D = g|_D$ para algún subconjunto denso $D$ en $X$, entonces $f = g$.

*Demostración.* Si $F : X \to Y \times Y$ es la función definida por la correspondencia $F(x) = (f(x), g(x))$, ésta es continua. Como $Y$ es un espacio $T_2$, el conjunto $\Delta = \{(y, y) \in Y \times Y : y \in Y\}$ es cerrado en $Y \times Y$. Luego, por la continuidad de $F$, el conjunto $F^{-1}(\Delta) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en $X$. Como $D$ es denso en $X$ y $D \subseteq \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ se concluye que $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = X$ y, por tanto, $f = g$. □

**Definición B.20.** Dados $A$ y $B$ cerrados ajenos no vacíos en un espacio $X$ y $f : X \to [0,1]$ una función continua. Decimos que $f$ es una ***función de Urysohn*** para $A$ y $B$, si $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$.

**Lema de Urysohn B.21.** Dado un espacio $X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

($i$) $X$ es $T_4$.

($ii$) Para cualesquiera par de cerrados ajenos no vacíos $A, B \subseteq X$, existe una función de Urysohn para $A$ y $B$.

*Demostración.* $(i) \Longrightarrow (ii)$ Sea $\mathcal{R} = \{\frac{k}{2^n} \in \mathbb{Q} : 0 \leq k \leq 2^n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. Mostraremos que para cada $r \in \mathcal{R}$ existe un abierto $U(r)$ en $Y$ que cumple las siguientes condiciones:

1) $A \subseteq U(r)$ y $U(r) \cap B = \varnothing$.

2) Si $r < r'$, entones $\overline{U(r)} \subseteq U(r')$.

Para esto, definimos al conjunto $\mathcal{D}_m = \{U(\frac{k}{2^m}) : k \in \{0, \ldots 2^n\}\}$ y procedemos por inducción. El paso base $n = 1$, si definimos a $U(1) = X \backslash B$ y a $U(0)$ tal que $A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$, el cual existe por ser $X$ un espacio $T_4$ y así $\mathcal{D}_1 = \{U(0), U(1)\}$ cumple las condiciones 1) y 2). Si suponemos que tenemos definido al conjunto $\mathcal{D}_{m-1}$, para construir al conjunto $\mathcal{D}_m$ solo ocupamos definir a los abiertos $U(\frac{k}{2^m})$ con $k$ impar. Para cada $k$ impar, por definición de $\mathcal{D}_{m-1}$, $\overline{U(\frac{k-1}{2^m})} \subseteq U(\frac{k+1}{2^m})$, de tal manera que por ser $X$ un espacio $T_4$, podemos tomar a $U$ abierto tal que,

$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^m}\right)} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^m}\right)$$

Y así definir a $U(\frac{k}{2^m}) = U$, lo cual completa la prueba por inducción. Si ahora redefinimos a $U(1) = X$ podemos definir a la función $f : X \to [0,1]$ por la correspondencia, $f(x) = \text{ínf}\{r : x \in U(r)\}$. Afirmamos que $f$ es una función de Uryshon para $A$ y $B$. Si $x \in B$, entonces $x \in U(r) = X \iff r = 1$, por lo que $f(x) = 1$, es decir, $f|_B = 1$. Además $f|_A = 0$ ya que para todo $x \in A$, $x \in U(r)$ para todo $r \in \mathcal{R}$. Para ver que $f$ es continua. Sean $x_0$, $f(x_0) = y_0$, si $y_0$ no es 1 ó 0, tomamos a $U = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ y $r, r' \in \mathcal{R}$ con $y_0 - \varepsilon < r < y_0 < r' < y_0 + \varepsilon$. Luego $V = U(r') \backslash \overline{U(r)}$ es una vecindad abierta de $x_0$ y $f(V) \subseteq U$. Si $y_0$ es 1 ó 0 entonces $V = U(r)$ o $V = X \backslash \overline{U(r')}$ respectivamente cumplen también que $f(V) \subseteq U$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Sean $A$ y $B$ cerrados ajenos no vacíos en $X$, por hipótesis existe una función de Urysohn $f$ para $A$ y $B$, si definimos a los abiertos $U = \{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\}$ y $V = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{2}\}$, estos resultan abiertos ajenos y además contienen a $A$ y $B$ respectivamente. □

**Corolario B.22.** Si $X$ es un espacio $T_4$, entonces existe una función de Urysohn $f$ con $A = f^{-1}(0)$ si y sólo si $A$ es un conjunto $G_\delta$. Más áun, todo conjunto $G_\delta$ resulta cerrado.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Si existe una función de Urysohn $f$ con $A = f^{-1}(0)$, es claro que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([0, \frac{1}{n}))$ donde $f^{-1}([0, \frac{1}{n}))$ es abierto en $X$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego $A$ es $G_\delta$.

$\Longleftarrow$) Sea $A$ un conjunto $G_\delta$ en $X$ y supongamos que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión decreciente de abiertos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que, $A \cap X \setminus U_n = \varnothing$, por tanto, existe una función $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f_n(A) = 0$ y $f_n(X \setminus U_n) = 1$. Ahora definimos a $f : X \to [0,1]$ como $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n(x)$. Luego, $f$ resulta continua, $f(X\setminus U_1) = 1$ y $A \subseteq f^{-1}(0)$. Por último, $x \notin A$ si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin U_k$ para $k \geq m$ si y sólo si$f_k(x) = 1$ para $k \geq m$ si y sólo si $f(x) \geq \frac{1}{2^m}$, es decir, $f^{-1}(0) \subseteq A$. Por tanto, $f$ es una función de Urysohn (entre $A$ y $X\setminus U_1$) con $A = f^{-1}(0)$. $\square$

**Teorema de Tietze B.23.** [7] Dado un espacio $X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

(*i*) $X$ es $T_4$.

(*ii*) Para todo cerrado $A \subseteq X$ y para toda función continua $f : A \to \mathbb{R}$, existe una función continua $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F|_A = f$.

**Lema de Jones B.24.** Si $X$ es un espacio que contiene un subespacio cerrado y discreto $Y$ de $X$ y un subespacio denso e infinito $D$ de $X$ tal que $|Y| \geq 2^{|D|}$, entonces $X$ no es $T_4$.

*Demostración.* Haremos la prueba por contrapositiva. Sea $Y$ un subespacio cerrado y discreto de $X$ y $D$ un subespacio denso de $X$. Si para todo $A \subseteq X$ definimos a la colección $C(A, [0,1]) = \{f : A \to [0,1] : f \text{ es continua}\}$, por el Teorema B.19, la función $F : C(X, [0,1]) \to C(D, [0,1])$ definida por la correspondencia $F(f) = f|_D$ resulta inyectiva y, en consecuencia,

$$|C(X, [0,1])| \leq |C(D, [0,1])| \leq |[0,1]^D| = |[0,1]|^{|D|} = (2^{\aleph_0})^{|D|} = 2^{\aleph_0 \cdot |D|} = 2^{|D|},$$

y así $|C(X, [0,1])| \leq 2^{|D|}$. Por otro lado, como $Y$ es discreto en $X$, se tiene que, $[0,1]^Y = C(Y, [0,1])$ y, de esta manera, se tiene que $|C(Y, [0,1])| = 2^{\aleph_0 \cdot |Y|}$. Como $Y$ es cerrado en $X$, el Teorema de Tietze B.23 nos garantiza que por cada función en $C(Y, [0,1])$ existe una función en $C(X, [0,1])$, por lo que $|C(Y, [0,1])| \leq |C(X, [0,1])|$ y de esta manera

$$|Y| < 2^{\aleph_0 \cdot |Y|} = |C(Y, [0,1])| \leq |C(X, [0,1])| \leq 2^{|D|}.$$

$\square$

**Definición B.25.** Dados un espacio $X$, un conjunto $Y$ y una función suprayectiva $f : X \to Y$, definimos a la ***topología de identificación*** para $Y$ como

$$T_f = \{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}.$$

**Definición B.26.** Decimos que una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ entre los espacios topológicos $(X, T_X)$ y $(Y, T_Y)$ es ***de identificación***, si $T_Y = T_f$.

**Definición B.27.** Decimos que una función $f : X \to Y$ es ***cerrada***, si para cada cerrado $A$ en $X$ se tiene que $f(A)$ es cerrado en $Y$.

**Teorema B.28.** Si $f : X \to Y$ es una función continua, cerrada y suprayectiva, entonces $f$ es de identificación.

*Demostración.* Por ser $f$ continua, $T_Y \subseteq T_f$. Si $U \in T_f$, entonces $p^{-1}(X\backslash U)$ es cerrado en $X$. Como $f$ es cerrada y suprayectiva, se sigue que, $X\backslash U = f(f^{-1}(X\backslash U))$ es cerrado en $Y$ con la topología $T_Y$, por tanto, $U \in T_Y$. □

**Teorema de Transgresión B.29.** Sea $f : X \to Y$ es una función de identificación. Si $h : X \to Z$ es continua y $h$ es constante en $f^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$, entonces $h \circ f^{-1}$ está bien definida, es continua y además el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, "h\circ f^{-1}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

*Demostración.* Si $x \in X$, por hipótesis, $h$ es constante en $f^{-1}(f(x))$, es decir,

$$h(x) = h \circ f^{-1}(f(x)) = (h \circ f^{-1})(f(x)).$$

Como $h = (h \circ f^{-1}) \circ f$, el diagrama conmuta. Afirmamos que $h \circ f^{-1}$ es continua. Si $U$ es un abierto en $Z$, entonces por la continuidad de $h$

$$h^{-1}(U) = (h \circ f^{-1} \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(h \circ f^{-1})^{-1}(U)$$

es abierto en $X$ y, como $f$ es una función de identificación, se concluye que $(h\circ f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en $Y$ y que $h \circ f^{-1}$ es continua. □

## C.3. Topología débil

Dado un conjunto $X$ no vacío y una colección de espacios topológicos $(Y_i, T_i)_{i\in I}$, si $\{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ es una colección de funciones, entonces podemos asignarle al conjunto $X$ una topología, la cual está generada por la colección $\mathcal{B}_w = \{f_i^{-1}(U) : i \in I \text{ y } U \in T_i\}$, es decir, $\mathcal{B}_w$ es subbase para alguna topología sobre el conjunto $X$. A esta topología se le conoce como *topología débil* o *topología inicial generada por la colección de funciones* $\{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ y se denota por $T_w$ cuando es claro que colección de funciones se estan usando.

**Teorema C.30.** Si $(X, T)$ es un espacio topológico, $(Y_i, T_i)_{i\in I}$ es una colección de espacios topológicos y $\{f_i : X \to Y_i\colon i \in I\}$ es una colección de funciones continuas, entonces $T_w \subseteq T$.

*Demostración.* Como la colección $\mathcal{B}_w$ forma una subbase para el espacio topológico $(X, T_w)$, basta probar que $\mathcal{B}_w \subseteq T$. Como $f_i : X \to Y_i$ es una función continua para cada $i \in I$, por el Teorema B.18, todos los elementos de $\mathcal{B}_w$ son abiertos en $(X, T)$ y, por tanto, $T_w \subseteq T$. □

**Definición C.31.** Si $(X, T)$ es un espacio topológico y $(Y_i, T_i)_{i\in I}$ es una colección de espacios topológicos, se dice que ***una colección de funciones*** $\{f_i : X \to Y_i \colon i \in I\}$ ***separa puntos de cerrados***, si para todo cerrado $K$ de $X$ y todo $x \notin K$ existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i(K)}$.

**Teorema C.32.** Si $(X, T)$ es un espacio topológico y $(Y_i, T_i)_{i\in I}$ es una colección de espacios topológicos, entonces la colección de funciones continuas $\{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ separa puntos de cerrados si y sólo si la colección $\{f_i^{-1}(U) : i \in I \text{ y } U \in T_i\}$ forma una base para el espacio topológico $(X, T)$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Sean $x \in X$ y $V \neq X$ un abierto de $x$ en $X$. Como $X\backslash V$ es cerrado y $x \notin X\backslash V$, por hipótesis, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i(X\backslash V)}$. Por tanto existe un abierto $U_i$ de $f_i(x)$ en $Y_i$ tal que $f_i(x) \in U_i$ y $U_i \cap f_i(X\backslash V) = \varnothing$. Así, $x \in f_i^{-1}(U_i) \subseteq V$, donde $f_i^{-1}(U_i)$ es abierto por la continuidad de $f_i$. El caso en que $V = X$ es inmediato, ya que $f_i^{-1}(Y_i) = X$ para toda $i \in I$. Como $x$ fue arbitrario, se concluye que $\{f_i^{-1}(U) : i \in I \text{ y } U \in T_i\}$ forma una base para $X$.

$\Longleftarrow$) Sea $K$ un cerrado y $x \notin K$. Como $x \in X\backslash K$ con $X\backslash K$ abierto, existen $i \in I$ y un abierto $U_i$ en $Y_i$ tal que $x \in f_i^{-1}(U_i) \subseteq X\backslash K$. Basta demsotrar que $U_i \cap f_i(K) = \varnothing$. Si suponemos lo contrario, existe $x_0 \in K$ tal que $f_i(x_0) \in U_i$, es decir, $x_0 \in f_i^{-1}(U_i) \subseteq X\backslash K$, lo cual es una contradicción. Por tanto $U_i \cap f_i(K) = \varnothing$ y concluimos así que $f_i(x) \notin \overline{f_i(K)}$. □

**Corolario C.33.** Si $(X, T)$ es un espacio topológico, $(Y_i, T_i)_{i\in I}$ es una colección de espacios topológicos y $\{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ es una colección de funciones continuas que separa puntos de cerrados, entonces la topología $T$ coincide con la topología $T_w$ generada por la colección de funciones $\{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$.

*Demostración.* La prueba es inmediata usando el teorema C.32. □

**Teorema C.34.** Si $X$ es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, entonces la colección $\mathcal{C}^*(X)$ de todas las funciones reales, continuas y acotadas definidas en $X$ separa puntos y cerrados.

*Demostración.* Sean $K$ cerrado en $X$ y $x \notin K$. Como $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_K = 1$. Luego, como $f(K) = \{1\} = \overline{f(K)}$, se sigue que $f(x) \notin \overline{f(K)}$, donde $f \in \mathcal{C}^*(X)$. □

**Teorema C.35.** Si $X$ es un conjunto no vacío, entonces la topología $T_w$, generada por la colección $\mathcal{C}^*(X)$ tiene como subbase a la colección $\{f^{-1}(a, \infty) : a \in \mathbb{R}^+ \text{ y } f \in \mathcal{C}^*(X)\}$.

*Demostración.* Por definición de la topología débil $T_w$, la colección $\mathcal{B}_w = \{f_i^{-1}(U) : i \in I \text{ y } U \in T_i\}$ es una subbase para $X$. Luego, si $f \in \mathcal{C}^*(X)$, $U$ es abierto en $\mathbb{R}$ y $x \in f^{-1}(U)$, entonces como $U$ es abierto existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \in \bigcap_{i=1}^n V_i \subseteq U$, donde $V_i \in \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$, de donde $x \in \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(V_i) \subseteq f^{-1}(U)$. Si definimos $f_i = f$ para cada $i \leq n$, entonces $x \in \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(V_i) \subseteq f^{-1}(U)$. Ahora, si $V_i = (-\infty, a_i)$ para alguna $i \leq n$, entonces definimos a la función $g_i = -f_i$, la cual cumple que $g_i^{-1}(a_i, \infty) = f_i^{-1}(-\infty, a_i)$ y, en caso de que $V_i = (a_i, \infty)$, se define como $g_i = f_i$. De manera que las funciones $g_i \in \mathcal{C}^*(X)$ satisfacen que $x \in \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(a_i, \infty) \subseteq f^{-1}(U)$. Como $f$, $U$ y $x$ fueron arbitrarios, se concluye que $\{f^{-1}(a, \infty) : a \in \mathbb{R}^+ \text{ y } f \in \mathcal{C}^*(X)\}$ es una subbase para la topología débil en $X$. $\square$

**Teorema C.36.** Si $(X, T)$ es un espacio topológico $T_1$, entonces $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$ si y sólo si la topología $T$ coincide con la topología débil $T_w$ generada por la colección de funciones $\mathcal{C}^*(X)$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Si $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, por el Teorema C.34, la colección $\mathcal{C}^*(X)$ separa puntos y cerrados. Luego, por el Corolario C.33, la topología $T$ coincide con la topología débil $T_w$ generada por la colección de funciones $\mathcal{C}^*(X)$.

$\Longleftarrow$) Para probar que $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, sean $K$ un cerrado en $X$ y $x \notin K$. Por el Corolario C.35, existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^*(X)$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(a_i, \infty) \subseteq X \backslash K$. Si definimos a las funciones continuas $g_i : X \to \mathbb{R}$ por la correspondencia $g_i = \sup\{f_i - a_i, 0\}$ para cada $i \leq n$, se sigue que $x \in \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(0, \infty) \subseteq X \backslash K$. Ahora, si definimos a la función continua $g : X \to \mathbb{R}$ por la correspondencia $g = \prod_{i=1}^n g_i$, se tiene que $x \in g^{-1}(0, \infty) \subseteq X \backslash K$. Por último, si observamos que $g(x) \neq 0$ y $g|_K = 0$, definimos a la función continua $h : X \to [0, 1]$ por la correspondencia $h(z) = \frac{1}{g(x)} \min\{g(z), g(x)\}$, y ésta cumple que $h(x) = 1$ y $h|_K = 0$. Por tanto, $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$. $\square$

## D.4. Convergencia

Dado un conjunto no vacío $\Lambda$ y una relación binaria $\preceq$ definida en $\Lambda$, decimos que la pareja ordenada $(\Lambda, \preceq)$ forma un ***conjunto dirigido*** si la relación $\preceq$ es *reflexiva*, *transitiva* y para cada $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ existe $\mu \in \Lambda$ tal que $\lambda \preceq \mu$ y $\lambda' \preceq \mu$.

Una ***red de elementos*** en un espacio topológico $X$ es una función $\psi : \Lambda \to X$ donde $(\Lambda, \preceq)$ es un conjunto dirigido. Para simplificar notación, si $\psi(\lambda) = x_\lambda$ sólo escribiremos $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ para denotar a dicha red. Un subconjunto $R \subseteq \Lambda$ es ***residual*** en $(\Lambda, \preceq)$ si existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mu \in R$ para toda $\mu \succeq \lambda$. Un subconjunto $C \subseteq \Lambda$ es ***cofinal*** en $(\Lambda, \preceq)$ si para toda $\lambda \in \Lambda$ existe $\mu \in C$ tal que $\mu \succeq \lambda$.

**Definición D.37.** Sea $X$ un espacio, $x_0 \in$ y $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de elementos en $X$.

(a) Decimos que $x_0$ es un ***punto límite*** de $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, si para cada abierto $U$ de $x_0$ el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in U\}$ es residual en $(\Lambda, \preceq)$. Si $x_0$ es el único punto límite decimos que $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *converge* a $x_0$.

(b) Decimos que $x_0$ es un ***punto de acumulación*** de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, si para cada abierto $U$ de $x_0$ el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in U\}$ es cofinal en $(\Lambda, \preceq)$.

(c) Decimos que $x_0$ es un ***punto aislado*** de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, si no es de acumulación.

Dados los conjuntos dirigidos $(\Lambda, \preceq)$ y $(\Lambda', \preceq')$, una función $h : \Lambda' \to \Lambda$ se llama ***monótona***, si para cada par de elementos $\lambda'_1, \lambda'_2 \in \Lambda'$ tales que $\lambda'_1 \preceq' \lambda'_2$, se cumple que $h(\lambda'_1) \preceq h(\lambda'_2)$. Se dice que $h : \Lambda' \to \Lambda$ es una ***función cofinal*** si para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\lambda' \in \Lambda'$ tal que $\lambda \preceq h(\lambda')$. Dado un espacio $X$, una red $\{y_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ se denomina ***subrred*** de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, si existe una función monótona y cofinal $h : \Lambda' \to \Lambda$ tal que $y_{\lambda'} = x_{h(\lambda')}$.

**Teorema D.38.** Sean $x_0 \in X$ y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en $X$.

(a) Si $x_0$ es un punto de acumulación de cualquier subrred de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, entonces $x_0$ es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

(b) Si $x_0$ es un punto límite de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, entonces $x_0$ es un punto límite de toda subrred de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

(c) Si $x_0$ es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, entonces $x_0$ es un punto límite de alguna subrred de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

*Demostración.* Sea $\{y_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ una subrred $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $x_0 \in X$.

(a) Si $x_0$ es un punto de acumulación de $\{y_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ y $U$ es un abierto arbitrario de $x_0$, entonces $\{\lambda' \in \Lambda' : y_{\lambda'} \in U\}$ es cofinal en $(\Lambda', \preceq')$. Sea $\lambda \in \Lambda$. Como $\{y_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ es subrred de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, existe $\lambda' \in \Lambda'$ tal que $\lambda \preceq h(\lambda'_0)$. Por la cofinalidad del conjunto $\{\lambda' \in \Lambda' : y_{\lambda'} \in U\}$, existe $\mu' \in \Lambda'$ tal que $y_{\mu'} \in U$ y $\lambda'_0 \preceq \mu'$, luego $\lambda \preceq h(\lambda'_0) \preceq h(\mu')$ y así $x_{h(\mu')} = y_{\mu'} \in U$. En conclusión $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in U\}$ es cofinal en $(\Lambda, \preceq)$. Luego $x_0$ es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

(b) Sea $U$ un abierto de $x_0$. Como $x_0$ es un punto límite de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in U\}$ es residual en $(\Lambda, \preceq)$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que para toda $\mu \succeq \lambda$ se cumple que $x_\mu \in U$. Por ser $\{y_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$, existe $\lambda' \in \Lambda'$ tal que $\lambda \preceq h(\lambda')$. Si ahora tomamos a $\mu' \succeq \lambda'$, entonces $\lambda \preceq h(\lambda') \preceq h(\mu')$, por lo cual $y_{\mu'} = x_{h(\mu')} \in U$. Esto último equivale a decir que $\{\lambda' \in \Lambda' : y_{\lambda'} \in U\}$ es residual en $(\Lambda', \preceq')$. Luego $x_0$ es un punto límite de $\{y_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$.

(c) Definimos al conjunto $\Lambda'' = \{(\lambda, U) \in \Lambda \times X : x_\lambda \in U \text{ y } x_0 \in U\}$ y a la relación $\preceq''$ como sigue:

$$(\lambda_1, U_1) \preceq'' (\lambda_2, U_2) \text{ si y sólo si } \lambda_1 \preceq \lambda_2 \text{ y } U_2 \subseteq U_1.$$

Notamos que $(\Lambda'', \preceq'')$ es un conjunto dirigído. Si definimos a la red $\{z_{\lambda''}\}_{\lambda''\in\Lambda''}$, ésta resulta ser una subrred de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tomando en cuenta a la función monótona y cofinal $h : \Lambda'' \to \Lambda$, con la correspondencia, $h(\lambda, U) = \lambda$. Sea $U$ un abierto de $x_0$. Como $x_0$ es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda_0} \in U$. Si $(\lambda, V) \in \Lambda''$ tal que $(\lambda, V) \succeq'' (\lambda_0, U)$, se tiene que $z_{(\lambda,V)} = x_\lambda \in V \subseteq U$, es decir, $\{\lambda'' \in \Lambda'' : z_{\lambda''} \in U\}$ es residual. Al ser $U$ un abierto arbitrario de $x_0$, $x_0$ es un punto límite de la subrred $\{z_{\lambda''}\}_{\lambda''\in\Lambda''}$.

□

**Teorema D.39.** Si $A \subseteq X$ y $x \in X$, entonces $x \in \overline{A}$, si y sólo si existe una red de elementos de $A$ que converge a $x$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Definimos al conjunto $\Lambda = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto de } x\}$ y la relación $\preceq$ en $\Lambda$ como sigue: $U_1 \preceq U_2$ si y sólo si $U_1 \supseteq U_2$. De tal manera que $(\Lambda, \preceq)$ resulta ser un conjunto dirigído. Como $x \in \overline{A}$, se tiene que para cualquier abierto $U$ de $x$, $A \cap U \neq \varnothing$. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, podemos tomar a un elemento $x_\lambda \in A \cap U$, donde $\lambda = U$. Veamos que $x$ es un punto límite de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Si $V$ un abierto de $x$, luego si $\lambda_0 = V \in \Lambda$ y $\lambda \succeq \lambda_0$, entonces $\lambda$ es un abierto de $x$, digamos $\lambda = W$, tal que $x \in W \subseteq V$, por tanto $x_\lambda \in A \cap W \subseteq A \cap V \subseteq V$, es decir, $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in V\}$ es residual.

$\Longleftarrow$) Si $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red de elementos de $A$ que tiene como punto límite a $x$, entonces para un abierto $U$ de $x$, se tiene que $A \cap U \neq \varnothing$. Al ser $U$ un abierto arbitrario de $x$, se sigue que $x \in \overline{A}$. □

**Teorema D.40.** Un espacio $X$ es $T_2$ si y sólo si toda red en $X$ tiene a lo más un punto límite.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Sean $x_0$ y $y_0$ puntos límite de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sean $U$ y $V$ abiertos arbitrarios de $x_0$ y $y_0$ respectivamente. Por ser puntos límite existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda_0} \in U \cap V$. Como $X$ es $T_2$ y los puntos $x_0$ y $y_0$ no pueden ser separados por abiertos, se concluye que $x_0 = y_0$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $X$ no es $T_2$. Entonces existen dos elementos distintos en $X$, digamos $x_0$ y $y_0$, de tal forma que para cualesquiera abiertos $U$ de $x_0$ y $V$ de $y_0$ se tiene que $U \cap V \neq \varnothing$. Definimos al conjunto

$$\Lambda = \{U \cap V : U \text{ es abierto de } x_0 \text{ y } V \text{ es abierto de } y_0\}$$

y la relación $\preceq$ en $\Lambda$ como sigue: $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ si y sólo si $\lambda_1 \supseteq \lambda_2$. Luego, $(\Lambda, \preceq)$ es un conjunto dirigído y además $x_0$ y $y_0$ son dos puntos límite distintos de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, donde $x_\lambda$ es un punto fijo cualquiera tomado en $\lambda \in \Lambda$. □

**Proposición D.41.** Sean $X$ y $Y$ espacios y $f : X \to Y$ una función. Si $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red en $X$, entonces $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red en $Y$.

*Demostración.* Por definición de red, $\psi(\lambda) = x_\lambda$ donde $\psi$ es una función entre los conjuntos $\Lambda$ y $X$ ($\psi : \Lambda \to X$). Luego la composición $f \circ \psi : \Lambda \to Y$ defíne una red en $Y$. □

**Teorema D.42.** Dados los espacios $X$ y $Y$. Una función $f : X \to Y$, es continua en $x_0$ si y sólo si toda red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ que converge a $x_0$ cumple que la red $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a $f(x_0)$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Sea $V$ un abierto en $Y$ de $f(x_0)$. Por la continuidad de $f$ en $x_0$, existe un abierto $U$ de $x_0$ tal que $f(U) \subseteq V$. Como $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $x_0$, el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in U\}$ es residual. Por lo antes mencionado y la contención $f(U) \subseteq V$, se sigue que el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : f(x_\lambda) \in V\}$ es residual, es decir, $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a $f(x_0)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $f$ no es continua en $x_0$. Entonces existe un abierto $V$ de $f(x_0)$ en $Y$ tal que para todo abierto $U$ de $x_0$ en $X$, $f(U) \cap X\backslash V \neq \varnothing$. Por otro lado, definimos al conjunto,

$$\Lambda = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto de } x_0\},$$

y la relación $\preceq$ en $\Lambda$ como sigue: $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ si y sólo si $\lambda_1 \supseteq \lambda_2$, se tiene que $(\Lambda, \preceq)$ es un conjunto dirigido. Ahora, si construimos a la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de tal manera que,

$$x_\lambda \in U = \lambda \in \Lambda, \text{ si } f(x_\lambda) \in f(U) \cap X\backslash V,$$

se sigue $x_0$ es un punto límite de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Sin embargo, la red $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ no se acumula en $f(x_0) \in V$, ya que todos sus elementos son ajenos a $V$. □

## E.5. Compacidad

Dado un espacio $X$, una colección $\mathfrak{U}$ de subconjuntos de $X$ es una ***cubierta*** de $X$, si $\bigcup \mathfrak{U} = X$. Si $\mathfrak{U}$ consta de solamente conjuntos abiertos (cerrados), entonces $\mathfrak{U}$ es una ***cubierta abierta (cerrada)*** de $X$. Una colección $\mathfrak{V}$ de conjuntos de $X$ es una ***subcubierta*** de $\mathfrak{U}$, si $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}$ y $\bigcup \mathfrak{V} = \bigcup \mathfrak{U}$. Entendemos que $\mathfrak{W}$ es un ***refinamiento*** de $\mathfrak{U}$, si para cada $W \in \mathfrak{W}$ existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $W \subseteq U$ y $\bigcup \mathfrak{W} = \bigcup \mathfrak{U}$. Decimos que una familia $\mathfrak{U}$ de $X$ es ***localmente finita***, si para cada $x \in X$ existe un abierto $V$ de $x$ tal que $V$ intersecta a lo más a un número finito de elementos de $\mathfrak{U}$. Además, se dice que una cubierta $\mathfrak{U}$ es de ***punto finito (numerable)***, si todo elemento de $X$ pertenece solamente a una cantidad finita (numerable) de elementos de $\mathfrak{U}$.

**Definición E.43.** Un espacio $X$ es ***compacto*** si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta finita.

**Teorema E.44.** Dado un espacio $X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

$(i)$ $X$ es compacto.

$(ii)$ Si $\mathfrak{U}$ es una colección de cerrados de $X$ con $\bigcap \mathfrak{U} = \varnothing$, entonces existe una subcolección finita $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{U}$ tal que $\bigcap \mathfrak{F} = \varnothing$.

$(iii)$ Toda red en $X$ tiene una subrred con límite en $X$.

*Demostración.* $(i) \Longrightarrow (ii)$ Si $\mathfrak{U}$ es una colección de cerrados de $X$ tal que $\bigcap \mathfrak{U} = \varnothing$, entonces la colección $\mathfrak{V} = \{X\backslash U : U \in \mathfrak{U}\}$ es una cubierta abierta de $X$. Por la compacidad de $X$, existe una subcubierta $\mathfrak{F}$ finita de $\mathfrak{V}$ tal que $\bigcup \mathfrak{F} = X$. Luego, $\mathfrak{F}' = \{U : X\backslash U \in \mathfrak{F}\}$ es subcolección de $\mathfrak{U}$ y $\bigcap \mathfrak{F}' = \varnothing$.

$(ii) \implies (iii)$ Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en $X$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos al conjunto $A_\lambda = \{x_\mu : \mu \geq \lambda\}$. Evidentemente la colección $\mathfrak{U} = \{\overline{A_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ cumple que para toda subcolección finita $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{U}$, $\bigcap \mathfrak{F} \neq \varnothing$. Por tanto haciendo uso de la hipótesis, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda} = \bigcap \mathfrak{U} \neq \varnothing$. Notamos que todo punto en $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$ es un punto de acumulación de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Por el Teorema D.38 (c), existe una subrred de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ con límite en $X$.

$(iii) \implies (i)$ Supongamos que $X$ no es compacto, por tanto existe una cubierta abierta de $X$, $\mathfrak{U} = \{U_i : \alpha \in I\}$ sin subcubiertas finitas. Definiendo al conjunto $\Lambda = \{J \subseteq I : |J| < \infty\}$ y la relación $\preceq$ en $\Lambda$ como sigue: $J_1 \preceq J_2$ si y sólo si $J_1 \subseteq J_2$, entonces $(\Lambda, \preceq)$ resulta un conjunto dirgído. Ahora, para cada $J = \lambda \in \Lambda$, existe $x_\lambda \notin \bigcup_{i\in J} U_i$. Si consideramos a la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, ésta no se acumula en ningún punto de $X$, de lo contrario si existiera tal $x$, entonces para algún abierto de la cubierta $\mathfrak{U}$, digamos $U_j$ con $x \in U_j$, si $\{j\} \preceq J \in \Lambda$ ($\{j\} \subseteq J \in \Lambda$) se tendría que $x_J \notin \bigcup_{i\in J} U_i$, en particular $x_j \notin U_j$, lo que contradice el hecho de que $x$ es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Por tanto, $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ no tiene puntos de acumulación y, por el Teorema D.38 (c), existe una red en $X$ cuyas subrredes no tienen punto límite en $X$. □

**Teorema E.45.** Si $X$ es un espacio compacto y $T_2$, entonces es $T_4$.

*Demostración.* Para probar que $X$ es $T_4$ primero probaremos que $X$ es $T_3$. Sean $A$ un cerrado en $X$ y $x \notin A$. Como $X$ es $T_2$, para cada $y \in A$ existen abiertos ajenos $V_y$ y $U_y$ en $X$ tales que $x \in V_y$ y $y \in U_y$. Luego, como la familia $\mathfrak{A} = \{U_y \colon y \in A\}$ consta de abiertos de $X$ y $A \subseteq \bigcup \mathfrak{A}$. Al ser $X$ es compacto y $A$ es cerrado, entonces $A$ es compacto y, por tanto, existen abiertos $U_{y_i}$ con $i \leq n$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Hagamos a los abiertos $U = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$. Es sencillo verificar que $x \in V$ y $A \subseteq U$. Probemos que $U \cap V = \varnothing$. Si por el contrario, existe $z \in U \cap V$, entonces en particular $z \in U$ lo que implica que $z \in U_{y_j}$ para algún $j \leq n$. De aquí $z \in U_{y_j} \cap V_{y_j}$, lo que es una contradicción. Por tanto, $U \cap V = \varnothing$ y $X$ es $T_3$.

Ahora para probar que $X$ es $T_4$, sean $A$ y $B$ cerrados ajenos en $X$. Como $X$ es $T_3$, para cada $x \in B$ podemos encontrar abiertos ajenos $V_x$ y $U_x$ en $X$, tales que $x \in V_x$ y $A \subseteq U_x$. La familia $\mathfrak{B} = \{V_x \colon x \in B\}$ consta de abiertos de $X$ y $B \subseteq \bigcup \mathfrak{B}$. Al ser $X$ es compacto y $B$ es cerrado en $X$, entonces $B$ es compacto y por tanto existen abiertos $V_{x_i}$ con $i \leq n$ tales que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Hagamos a los abiertos $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Una prueba similiar a la dada en el párrafo anterior verifica que $U \cap V = \varnothing$. Además es sencillo verificar que $B \subseteq V$ y $A \subseteq U$. En conclusión $X$ es $T_4$. □

**Teorema E.46.** Si $X$ es un espacio compacto, $Y$ es un espacio $T_2$ y $f : X \to Y$ es continua, entonces $f$ es cerrada.

*Demostración.* Sea $A$ un cerrado en $X$. Como $X$ es compacto, $A$ es compacto en $X$ y $f$ es continua, entonces $f(A)$ es compacto en $Y$. Al ser $Y$ un espacio $T_2$ se concluye que $f(A)$ es cerrado. Por ser $A$ un cerrado arbitrario en $X$, se concluye que $f$ es cerrada. □

**Teorema de subbase de Alexander E.47.** Dado un espacio $X$, con subbase $\mathcal{B}$, toda cubierta de $X$ con elementos en $\mathcal{B}$ tiene una subcubierta finita si y sólo si $X$ es compacto.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Supongamos que $X$ no es compacto y sea $\mathcal{P}$ la colección de todas las cubiertas abiertas de $X$ sin subcubiertas finitas. Como $X$ no es compacto, $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Si ordenamos parcialmente a $\mathcal{P}$ con la relación inclusión, notamos que si $\mathcal{C}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es una cubierta abierta de $X$ y. más aún, $\bigcup \mathcal{C}$ no tiene subcubiertas finitas que cubran a $X$, ya que de lo contrario, si $\mathfrak{F}$ es una subcubierta finita de $X$ en $\bigcup \mathcal{C}$ , al ser $\mathcal{C}$ totalmente ordenado, existiría una cubierta $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, pero esto contradice el hecho de que $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}$, por tanto $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}$. El lema de Zorn nos garantiza la existencia de un elemento maximal $\mathfrak{V} \in \mathcal{P}$. Si tomamos a la colección $\mathfrak{V} \cap \mathcal{B}$, esta no puede ser cubierta de $X$, ya que de lo contrario, como todos sus elementos pertenecen a $\mathcal{B}$ por hiptésis $\mathfrak{V} \cap \mathcal{B}$ tendría una subcubierta finita $\mathfrak{F}$ de $X$ y además $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{V}$, es decir, $\mathfrak{V} \notin \mathcal{P}$, pero esto es una contradicción. Luego si tomamos a $x \notin \bigcup \mathfrak{V} \cap \mathcal{B}$, al ser $\mathfrak{V}$ cubierta abierta de $X$, existe $V \in \mathfrak{V}$ tal que $x \in V$ y al ser $\mathcal{B}$ subbase de $X$ existen subbásicos $B_i \in \mathcal{B}$ con $i \leq n$ tal que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq V$. Además notamos que por la elección de $x \in X$, $B_i \notin \mathfrak{V} \cap \mathcal{B}$ para cada $i \leq n$. Luego por la maximalidad de $\mathcal{V}$, para cada $i \leq n$ la cubierta $\mathfrak{V} \cup \{B_i\}$ tiene subcubierta finita $\mathfrak{F}_i$ que cubre a $X$, donde claramente $B_i \in \mathfrak{F}_i$. Por tanto, $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cup \{\bigcap_{i=1}^{n} B_i\}$ resulta en una cubierta abierta finita de $X$, pero como $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq V$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cup \{V\}$ es una cubierta abierta finita de $X$, pero esto es una contradicción ya que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cup \{V\} \subseteq \mathfrak{V}$. En conclusión, $X$ es compacto. □

**Definición E.48.** Decimos que un espacio es $X$ es ***numerablemente compacto*** si toda cubierta abierta numerable de $X$ tiene una subcubierta finita.

**Teorema E.49.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(*i*) $X$ es numerablemente compacto.

(*ii*) Toda sucesión infinita en $X$ tiene al menos un punto de acumulación.

(*iii*) Todo subespacio cerrado y discreto de $X$ es finito.

*Demostración.* (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) Por contrapositiva, si suponemos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sin puntos de acumulación, entonces por los Teoremas D.38 (c) y D.39, el conjunto $D = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es infinito y cerrado. En particular como ningún elemento de $D$ es de acumulación de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cada elemento de $D$ es aislado y, por tanto, $D$ es discreto en $X$. Luego, como $D$ es discreto en $X$, existe un conjunto abierto $V_n$ en $X$ tal que $U_n \cap D = \{x_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si definimos a $\mathfrak{U} = \{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathfrak{U}$ es una cubierta abierta numerable de $D$ que no tiene subcubiertas finitas. Como $D$ es cerrado en $X$, entonces $D$ no es numerablemente compacto y, por tanto, $X$ no es numerablemente compacto.

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*iii*) Por contrapositiva, si suponemos que existe un subespacio cerrado, discreto e infinito $D$ de $X$, podemos tomar a $D_0 \subseteq D$ tal que $D_0$ es numerable y $D_0$ es un subespacio cerrado, discreto e infinito numerable de $X$. Luego, si $D_0 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y suponemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación tal que $x_0 \notin D_0$, entonces para cualquier abierto $U$ de $x_0$ y cualquier $m \in \mathbb{N}$ existe $k \geq m$ tal que $x_k \in U$. Esto implica que todo abierto de $x_0$, intersecta a $D_0$ y, por tanto, $x_0 \in \overline{D_0} = D_0$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene puntos de acumulación.

$(iii) \implies (i)$ Por contrapositiva, si $X$ no es numerablemente compacto, existe una cubierta abierta $\mathfrak{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $X$ tal que no tiene subcubiertas finitas. Por lo tanto podemos tomar una sucesión infinita $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de tal forma que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_n$. Si definimos al conjunto $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, observamos que $U_n \cap D \subseteq \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Hacemos notar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k > n$ mínimo, tal que $x_n \in U_k$, con lo cual si tomamos la sucesión $\{\phi(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\phi(n) = k$, esta cumple que

$$\varnothing \neq U_{\phi(n)} \cap D \subseteq \{x_1, \ldots, x_{\phi(n)-1}\};$$

es decir, consideramos sólo a los abiertos de la cubierta original $\mathfrak{U}$ que tienen puntos de $D$. Como $X$ es $T_1$, el conjunto $V_n = X \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_{\phi(n)-1}\}$ resulta abierto, de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$U_{\phi(n)} \cap V_n \cap D = \{x_n\},$$

y de esta manera $D$ resulta ser un subespacio infinito y discreto de $X$. Para ver que $D$ es cerrado, tomamos a $x \notin D$. Al ser $\mathfrak{U}$ cubierta de $X$, existe $U_m$ tal que $x \in U_m$. Si $U_m \cap D = \varnothing$ habríamos acabado. En caso contrario tomamos al conjunto $V = (X \setminus (U_m \cap D)) \cap U_m$, que resulta abierto ya que $U_m \cap D$ es finito y entonces $x \in V$ y $x \notin D$ con $V \cap D = \varnothing$. Así $D$ es cerrado.

□

**Definición E.50.** Decimos que un espacio es $X$ es ***secuencialmente compacto*** si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

**Teorema E.51.** Si $X$ es un espacio $T_1$ y primero numerable, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

$(i)$ $X$ es numerablemente compacto.

$(ii)$ $X$ es secuencialmente compacto.

*Demostración.* $(i) \implies (ii)$ Sean $\{x_n\}_n$ una sucesión en $X$ y supongamos que no tiene subsucesiones convergentes. Por el Teorema D.38 (c) y la primero numerabilidad de $X$, entonces $\{x_n\}_n$ no tiene puntos de acumulación. Si $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces afirmamos que $A$ es cerrado. Para esto, sea $x_0 \notin A$. Como $\{x_n\}_n$ no se acumula en $x_0$, existe un abierto $U$ de $x_0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m_0$, entonces $x_n \notin U$. Luego, el abierto $U \cap (X \setminus \{x_1, \ldots, x_{m_0}\})$ tiene a $x_0$ y es ajeno a $A$, lo que implica que $A$ es cerrado y así $A$ es numerablemente compacto, ya que $X$ es numerablemente compacto. Como ningún punto de $A$ es punto de acumulación, se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$, existen un abierto $V$ de $x_k$ y $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m_0$, entonces $x_k \notin V$. De esta manera,

$V \cap (X \setminus (\{x_1, \ldots, x_{m_0}\} \setminus \{x_k\}))$ es un abierto de $x_k$ tal que $V \cap A = \{x_k\}$. Como $k \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, $A$ resulta discreto, infinito y numerable, pero esto es una contradicción ya que $A$ es numerablemente compacto. Por tanto, $\{x_n\}_n$ debe tener alguna subsucesión convergente.

$(ii) \implies (i)$ Por contradicción supongamos que $X$ no es numerablemente compacto. Sea $\mathfrak{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta de $X$ sin recubrimientos finitos. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar a $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y así definir a la sucesión $\{x_n\}_n$. Notamos que si $m \geq n$, entonces $x_m \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por ser $X$ un espacio secuencialmente compacto, existe $x_0 \in X$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\{x_{n_k}\}_k$ converge a $x_0$. Al ser $\mathfrak{U}$ una cubierta abierta de $X$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ con $x_0 \in U_{m_0}$. Ahora, como $\{x_{n_k}\}_k$ converge a $x_0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$, entonces $x_{n_k} \in U_{m_0}$. Si tomamos a $n_k \geq m_0$, entonces $x_{n_k} \in U_{m_0}$ y, en consecuencia, $x_{n_k} \notin \bigcup_{i=1}^{m_0} U_i$, lo que es una contradicción. Por tanto, $X$ es numerablemente compacto. $\square$

**Definición E.52.** Decimos que un espacio $X$ es ***pseudocompacto*** si toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

**Teorema E.53.** Si $X$ es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

$(i)$ $X$ es pseudocompacto.

$(ii)$ Si $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de abiertos no vacíos, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \neq \varnothing$.

$(iii)$ Si $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de abiertos no vacíos tal que $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \varnothing$.

$(iv)$ Todo conjunto $G_\delta$ no vacío en $\beta X$ intersecta a $X$.

$(v)$ Toda cubierta localmente finita de $X$ tiene una subcubierta finita.

*Demostración.* $(i) \implies (ii)$ Supongamos que existe una sucesión decreciente de abiertos no vacíos $\{V_n\}_{n\mathbb{N}}$, con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} = \varnothing$. Notamos que la colección $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos a una función continua $f_n : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(X \setminus V_n) = 0$ y $f_n(x_n) = n$ para algún $x_n \in V_n$. Como la colección $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita, la función $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es continua y está bien definida. Además $f$ no es acotada y, por tanto, $X$ no es pseudocompacto.

$(ii) \implies (iii)$ Es inmediato.

$(iii) \implies (i)$ Si $X$ no es pseudocompacto, existe una función continua y no acotada $f : X \to \mathbb{R}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f$ no es acotada por arriba. Si definimos a $V_n = f^{-1}((n, \infty))$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de abiertos no vacíos. Sean $m > 1$, $x \in \overline{V_m}$ y supongamos que $x \notin V_{m-1}$. Como $x \notin V_{m-1}$, se tiene que $f(x) \leq m - 1$ y $x \in f^{-1}((-\infty, m))$. Al ser $x$ elemento de

$\overline{V_m}$, se debería cumplir que, $f^{-1}((-\infty, m)) \cap V_m = f^{-1}((-\infty, m)) \cap f^{-1}((m, \infty)) \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. Con esto queda demostrado que para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple la condición $V_{n+1} \subseteq \overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$. Además, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((n, \infty)) = f^{-1}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (n, \infty)) = \varnothing$.

$(ii) \Longrightarrow (iv)$ Supongamos que existe un conjunto $G_\delta$ no vacío en $\beta X$, digamos $A$, tal que $A \subseteq \beta X \backslash X$. Por el corolario B.22, al ser $\beta X$ $T_4$, existe una función continua $f : \beta X \to [0, 1]$ con $A = f^{-1}(0)$. Como $A$ es $G_\delta$ y $A = f^{-1}(0)$, entonces $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([0, \frac{1}{n}))$. Al ser $X$ denso en $\beta X$, $V_n = X \cap f^{-1}([0, \frac{1}{n})) \neq \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De tal manera, que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de abiertos no vacíos en $X$. Poe el $(ii)$,

$$\begin{aligned}
\varnothing \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}^X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X \cap f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right)}^X &\subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X \cap f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right)}^X \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \cap f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= X \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right)\right) \\
&= X \cap A.
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción a la suposición inicial de que $A \subseteq \beta X \backslash X$.

$(iv) \Longrightarrow (i)$ Si $X$ no es pseudocompacto, existe una función $g : X \to \mathbb{R}$ continua que no es acotada. Definiendo a la función $f : X \to [0, 1]$ como $f(x) = \frac{1}{|g(x)|+1}$, esta resulta continua y acotada con $f(X) \subseteq (0, 1]$. Por la propiedad universal de $\beta X$, existe $F : \beta X \to [0, 1]$ extensión continua de $f$ y $0 \in \overline{f(X)}$ al ser $g$ no acotada. Como $\beta X$ es $T_4$ y $\overline{f(X)} \subseteq F(\beta X)$, entonces $F^{-1}(0) \cap X = \varnothing$ y $F^{-1}(0)$ es un conjunto $G_\delta$ no vacío.

$(i) \Longrightarrow (v)$ Sea $\mathfrak{U} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta de $X$ localmente finita. Supongamos que $\mathfrak{U}$ no tiene subcubiertas finitas. Como $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ si tomamos a $x_n \in V_n$ fijo, existe una función continua $f_n : X \to [0, n]$ tal que $f_n(x_n) = n$ y $f_n|_{X\backslash V_n} = 0$. Como $\mathfrak{U}$ es una colección localmente finita, la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por la correspondencia $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ está bien definida y es continua. Finalmente, $f(x_n) \geq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $f$ no es acotada y, por tanto, $X$ no es pseudocompacto.

$(v) \Longrightarrow (i)$ Si suponemos que $X$ no es pseudocompacto, entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua, no negativa y no acotada. Si tomamos a la colección de abiertos $\mathfrak{U} = \{f^{-1}((n-1, n+1)) \colon n \in \mathbb{N}\}$, esta resulta en una cubierta abierta de $X$. Más aún, es localmente finita ya que dado $x \in X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-1}((m-1, m+1))$ y si $n \neq m$, entonces $f^{-1}((m-1, m+1)) \cap f^{-1}((n-1, n+1)) = \varnothing$. Además, $\mathfrak{U}$ no tiene subcubierta finitas. $\square$

**Teorema E.54.** Si $X$ es pseudocompacto y $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces $Y$ es pseudocompacto.

*Demostración.* Sea $g : Y \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $h = g \circ f : X \to \mathbb{R}$, entonces $h$ resulta continua por ser composición de funciones continuas. Por hipótesis, $X$ es pseudocompacto con lo que $h$ es acotada. Suponiendo que $h(X) \in [-M, M]$ para algúna $M > 0$, como $f$ es suprayectiva, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y así $g(y) = g(f(x)) = h(x) \in [-M, M]$, es decir, $g(Y) \in [-M, M]$. Por tanto, $g$ es acotada y $Y$ resulta pseudocompacto. □

**Teorema E.55.** Si $X$ es un espacio $T_4$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

($i$) $X$ es numerablemente compacto.

($ii$) $X$ es pseudocompacto.

*Demostración.* ($i$) $\Longrightarrow$ ($ii$) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a los abiertos $U_n = f^{-1}((-n, n))$, entonces $\mathfrak{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta numerable de $X$. Por ser $X$ numerablemente compacto, $\mathfrak{U}$ tiene una subcubierta finita $\mathfrak{F}$. Si tomamos a $m = \max\{n \in \mathbb{N} : U_n \in \mathfrak{F}\}$, entonces es claro que $X = U_m = f^{-1}((-m, m))$, es decir, $f$ es acotada.

($ii$) $\Longrightarrow$ ($i$) Supongamos que $X$ no es numerablemente compacto. Por el Teorema E.49, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sin puntos de acumulación. Análogamente a la prueba del Teorema E.51, el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado y discreto con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. La función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por la correspondencia $f(x_n) = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ es continua. Ahora, empleamos el Teorema de Tietze B.23, para concluir que, existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g|_A = f$. De manera que $g$ no es acotada en $X$, lo que contradice la pseudocompacidad de $X$. □

**Corolario E.56.** Si $X$ es primero numerable y $T_4$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

($i$) $X$ es numerablemente compacto.

($ii$) $X$ es pseudocompacto.

($iii$) $X$ es secuencialmente compacto.

**Teorema E.57.** Si $X$ es pseudocompacto y $Y$ es compacto, entonces $X \times Y$ es pseudocompacto.

*Demostración.* Por el Teorema E.53, basta probar que toda cubierta abierta localmente finita de $X \times Y$ tiene una subcubierta finita. Sea $\mathfrak{U}$ una de estas cubiertas. Si $p_X : X \times Y \to X$ y $p_Y : X \times Y \to Y$ son las funciones proyección sobre $X$ y $Y$, respectivamente. Para cada $x \in X$, podemos definir a la colección $\mathfrak{U}_x = \{U \in \mathfrak{U} : x \in p_X(U)\}$, entonces la colección $\{p_Y(U) : U \in \mathfrak{U}_x\}$ es una cubierta abierta de $Y$. Como $Y$

es compacto, existe una subcubierta finita $\{p_Y(U_1), \ldots, p_Y(U_{n_x})\}$ y de esta manera, $V_x = \bigcap\{p_X(U_1), \ldots, p_X(U_{n_x})\}$ es un abierto de $x$. Si definimos a la colección $\mathfrak{V} = \{V_x : x \in X\}$, ésta es una cubierta abierta de $X$ y afirmamos que $\mathfrak{V}$ es localmente finita. Sean $x \in X$ y $y \in Y$. Como $\mathfrak{U}$ es una cubierta abierta localmente finita, existe un abierto $W(x, y)$ en $X \times Y$ de $(x, y)$ tal que $W(x, y)$ intersecta a lo más una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{U}$. Definimos a la colección $\mathfrak{W}_x = \{W(x, y) : y \in Y\}$. La colección $\{p_Y(W) : W \in \mathfrak{W}_x\}$ es una cubierta abierta de $Y$, por lo que existe una subcubierta finita $\{p_Y(W_1), \ldots, p_Y(W_{m_x})\}$ y, así, $W_x = \bigcap\{p_X(W_1), \ldots, p_X(W_{m_x})\}$ es un abierto de $x$. Además, notamos que, si $W_x \cap V_z \neq \varnothing$ para $z \neq x$, entonces $W_1 \cap U_i \neq \varnothing$ para alguna $i \leq n_z$ y como $\mathfrak{U}$ es una colección localmente finita, $W_x$ sólo puede intersectar a lo más una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{V}$ y como $x \in X$ fue arbitrario, se concluye que $\mathfrak{V}$ es una colección localmente finita. Por último usando la pseudocompacidad de $X$, se obtiene una subcubierta de finita $\mathfrak{V}' \subseteq \mathfrak{V}$ y si definimos a la cubierta $\mathfrak{U}' = \bigcup\{\{U_1, \ldots, U_{n_x}\} : V_x \in \mathfrak{V}'\}$, ésta es una subcolección de $\mathfrak{U}$ que cubre a $X \times Y$ y es finita. □

**Corolario E.58.** Si $X$ es pseudocompacto y $Y$ es secuencialmente compacto, entonces $X \times Y$ es pseudocompacto.

*Demostración.* Supongamos que $X \times Y$ no es pseudocompacto y sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua que no es acotada. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(x_n, y_n) \in X \times Y$ tal que $|f(x_n, y_n)| \geq n$. Como $Y$ es secuencialmente compacto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $y_o \in Y$. Por el Teorema D.39, el conjunto $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_0\}$ es cerrado y compacto por el Teorema E.44. Por el Teorema E.57 $X \times A$ es pseudocompacto y en consecuencia, $f|_{X \times A}$ es una función continua y acotada, lo que es una contradicción, ya que $|f|_{X \times A}(x_n, y_n)| \geq n$. Por tanto, $X \times Y$ es pseudocompacto. □

**Corolario E.59.** Si $X$ es un $T_4$ y primero numerable, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

($i$) $X$ es numerablemente compacto.

($ii$) $X$ es pseudocompacto.

($iii$) $X$ es secuencialmente compacto.

($iv$) $X^n$ es pseudocompacto para toda $n \in \mathbb{N}$.

**Definición E.60.** Decimos que un espacio $X$ es ***de Lindelöf*** si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta numerable.

**Teorema E.61.** Un espacio $X$ es compacto si y sólo si $X$ es numerablemente compacto y de Lindelöf.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) La demostración es inmediata.

$\Longleftarrow$) Sea $\mathfrak{U}$ es una cubierta abierta de $X$. Por ser $X$ un espacio de Lindelöf, existe una subcubierta numerable $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ y, por ser $X$ numerablemente compacto, existe una subcubierta finita $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{V}$, que a su vez es subcubierta de $\mathfrak{U}$. Como $\mathfrak{U}$ fue arbitraria, se concluye que $X$ es compacto. $\square$

**Definición E.62.** Un espacio $X$ es ***paracompacto*** si toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento localmente finito.

**Teorema E.63.** Todo espacio $T_3$ y de Lindelöf es paracompacto.

*Demostración.* Sean $X$ un espacio regular y de Lindelöf. Dada una cubierta $\mathfrak{U}$ una cubierta abierta de $X$, para cada $x \in X$ escojamos un abierto $U_x \in \mathfrak{U}$ tal que $x \in U_x$. Como $X$ es $T_3$, para cada $x \in X$ existe un abierto $V_x$ tal que

$$x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x.$$

Si $\mathfrak{V}$ es la cubierta de los abiertos $V_x$, entonces por la propiedad de Lindelöf existe una subcubierta $\mathfrak{V} = \{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}, \dots\} \subseteq \mathfrak{V}$ numerable de $X$. Ahora si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a

$$W_1 = U_{x_1} \qquad y \qquad W_n = U_{x_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{V_{x_i}} \qquad si \qquad n > 1$$

entonces $\mathfrak{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_n, \dots\}$ es una cubierta abierta de $X$. Para corroborar lo anterior, tomamos un $x \in X$. Como $\mathfrak{V}$ es una cubierta de $X$, existe un primer natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \overline{V_{x_m}}$ y, por ende, $x \in U_{x_m} \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} \overline{V_{x_i}} = W_m$. Puesto que $\mathfrak{W}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ sólo hace falta probar que ésta es localmente finita. Dado $x \in X$, existe $k_0$ tal que $x \in V_{x_{k_0}}$, por lo que si $k > k_0$, entonces $W_k \cap V_{x_{k_0}} = \varnothing$. $\square$

**Teorema E.64.** Todo espacio paracompacto y $T_3$ es $T_4$.

*Demostración.* Sea $X$ un espacio paracompacto y $T_3$. Si $K$ y $L$ son cerrados ajenos no vacíos en $X$, como $X$ es $T_3$, para cada $x_k \in K$ existen abiertos ajenos $U_k$ y $V_k$ tales que $x_k \in U_k$ y $L \subseteq V_k$. Luego, la colección $\mathfrak{U} = \{U_k : x_k \in K\} \cup \{X \setminus K\}$ es una cubierta abierta para $X$. Como $X$ es paracompacto, existe un refinamiento abierto $\widehat{\mathfrak{U}}$ localmente finito de $\mathfrak{U}$. Si $\mathfrak{V} = \{U \in \widehat{\mathfrak{U}} : U \cap K \neq \varnothing\}$, entonces $\mathfrak{V}$ es una colección localmente finita que cubre a $K$. De esta manera, el conjunto $W = \bigcup_{U \in \mathfrak{V}} U$ es abierto en $X$ con $K \subseteq W$. Notamos que por ser $\mathfrak{V}$ un refinamiento de $\mathfrak{U}$, se tiene que para cada $U \in \mathfrak{V}$ existe $x_k \in K$ tal que $U \subseteq U_k$, por lo que $\overline{U} \subseteq \overline{U_k}$ lo que implica que $L \cap \overline{U} = \varnothing$. Además, como $\mathfrak{V}$ es localmente finita, afirmamos que $\overline{\bigcup_{U \in \mathfrak{V}} U} = \bigcup_{U \in \mathfrak{V}} \overline{U}$. Para esto, sean $y \in \overline{\bigcup_{U \in \mathfrak{V}} U}$ y $W$ un abierto un abierto de $y$ que intersecta a lo más a un número finito de elemento en $\mathfrak{V}$ digamos $\{U_1, \dots, U_n\}$. Si $W'$ es un abierto arbitrario de $y$, entonces $y \in W \cap W'$ y por tanto $(W \cap W') \cap \bigcup \mathfrak{V} \neq \varnothing$. Luego, $(W \cap W') \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, y como $V$ fue arbitrario $y \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i} \subseteq \bigcup_{U \in \mathfrak{V}} \overline{U}$. Por tanto, $L \cap \overline{\bigcup_{U \in \mathfrak{V}} U} = L \cap \bigcup_{U \in \mathfrak{V}} \overline{U} = \varnothing$. $\square$

**Teorema E.65.** Sea $X$ es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Si $K$ y $L$ son subespacios cerrados ajenos y no vacíos de $X$ de tal manera que $K$ es compacto, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f|_K = 1$ y $f|_L = 0$.

*Demostración.* Como $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, para cada $x \in K$ existe función continua $f_x : X \to [0,1]$ tal que $f_x(x) = 1$ y $f|_L = 0$. Si tomamos a la colección $\mathfrak{U} = \left\{ {f_x}^{-1}\left( \left(\frac{1}{2}, 1\right] \right) : x \in K \right\}$, ésta es una cubierta abierta para $K$. Por la compacidad de $K$, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} {f_{x_i}}^{-1}\left( \left(\frac{1}{2}, 1\right] \right)$. Sea $g : X \to \mathbb{R}$ una función continua definida por la correspondencia $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}$. Entonces $g(K) \subseteq \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ y $g|_L = 0$. Ahora, si definimos a la función $h : X \to [0,1]$ por la correspondencia $h = 2\min\{g, \frac{1}{2}\}$, ésta es continua y satisface que $h|_K = 1$ y $h|_L = 0$. $\square$

**Definición E.66.** Un espacio $X$ es ***meta-compacto (meta-Lindelöf)***, si toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto de punto finito (numerable).

**Teorema E.67.** Todo espacio paracompacto es meta-compacto y todo espacio meta-compacto es meta-Lindelöf.

*Demostración.* Sea $X$ un espacio paracompacto y $\mathfrak{U}$ una cubierta abierta de $X$. Por la paracompacidad de $X$, existe un refinamiento localmente finito $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$. Esto quiere decir que, para cada $x \in X$ existe un abierto $V$ de $x$ que intersecta a un número finito de elementos de $\mathfrak{V}$ y, por tanto, $x$ intersecta a lo más a un número finito de elementos de $\mathfrak{V}$.

La demostración de que un espacio meta-compacto es meta-Lindelöf es inmediata. $\square$

**Teorema E.68.** Todo espacio separable y meta-Lindelöf es de Lindelöf.

*Demostración.* Sea $X$ un espacio un espacio separable y meta-Lindelöf y sea $\mathfrak{U}$ una cubierta abierta de $X$. Como $X$ es meta-Lindelöf, existe un refinamiento de punto numerable $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$. Por ser $X$ un espacio separable, existe un subespacio denso numerable $D$ de $X$. Si definimos a las colecciones $\mathfrak{V}_x = \{V \in \mathfrak{V} : x \in V\}$, entonces $\mathfrak{V}_x$ es un conjunto numerable para toda $x \in D$. Afirmamos que $\mathfrak{V} = \bigcup_{x \in D} \mathfrak{V}_x$. Si $V \in \mathfrak{V}$, por la densidad de $D$, se tiene que $V \cap D \neq \varnothing$, por lo que, si $z \in V \cap D$, entonces $V \in \mathfrak{V}_z$, es decir, $V \in \bigcup_{x \in D} \mathfrak{V}_x$. Puesto que se tiene contención $\bigcup_{x \in D} \mathfrak{V}_x \subseteq \mathfrak{V}$ se sigue que $\mathfrak{V} = \bigcup_{x \in D} \mathfrak{V}_x$. Luego, como $\mathfrak{V}$ es una unión numerable de conjuntos numerables, $\mathfrak{V}$ es numerable. Por último, como $\mathfrak{V}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$, digamos $\mathfrak{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, podemos tomar $U_n \in \mathfrak{U}$ tal que $V_n \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathfrak{W} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una subcubierta numerable de $\mathfrak{U}$ que cubre a $X$, es decir, $X$ es de Lindelöf. $\square$

**Definición E.69.** Dado un espacio $X$, un subconjunto $B$ de $X$ y una colección no vacía $\mathfrak{U}$ de subconjuntos de $X$, definimos al ***conjunto estrella*** de $B$ y $\mathfrak{U}$ como,

$$St(B, \mathfrak{U}) = \bigcup \{U \in \mathfrak{U} : U \cap B \neq \varnothing\}.$$

**Lema E.70.** Si $X$ es numerablemente compacto y $\mathfrak{U}$ es una cubierta abierta de $X$, entonces existe un conjunto finito $K \subseteq X$ tal que $St(K, \mathfrak{U}) = X$.

*Demostración.* Supongamos por contradicción que para todo subconjunto finito $K$ de $X$, se tiene que $St(K, \mathfrak{U}) \subsetneq X$. Fijamos un elemento $x_1 \in X$. Como $St(\{x_1\}, \mathfrak{U}) \subsetneq X$, podemos tomar a un elemento $x_2 \notin St(\{x_1\}, \mathfrak{U})$, luego como $St(\{x_1, x_2\}, \mathfrak{U}) \subsetneq X$ podemos tomar a un elemento $x_3 \notin St(\{x_1, x_2\}, \mathfrak{U})$. De esta manera, recursivamente podemos definir a $x_{n+1} \notin St(\{x_1, \ldots, x_n\}, \mathfrak{U})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, así, construir al conjunto $A = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora, notamos que si $x \in \overline{A}$, como $\mathfrak{U}$ es cubierta abierta de $X$, existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $x \in U$ y se sigue que $A \cap U \neq \varnothing$. Por lo anterior, tomando a $x_k \in A \cap U$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $x \in St(\{x_1, \ldots, x_k\}, \mathfrak{U})$. Como $x \in \overline{A}$ es arbitrario, se concluye que $\mathfrak{V} = \{St(\{x_1, \ldots, x_n\}, \mathfrak{U}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $\overline{A}$. Como $X$ es numerablemente compacto y $\overline{A}$ es cerrado, entonces $\overline{A}$ es numerablemente compacto. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq \overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} St(\{x_1, \ldots, x_n\}, \mathfrak{U})$, lo que es una contradicción, ya que $x_{m+1} \notin \bigcup_{i=1}^{m} St(\{x_1, \ldots, x_n\}, \mathfrak{U})$. En conclusión, existe un conjunto finito $K \subseteq X$ tal que $St(K, \mathfrak{U}) = X$. □

**Lema E.71.** Si $X$ es un espacio meta-Lindelöf y para toda cubierta abierta $\mathfrak{U}$ de $X$ existe un subconjunto numerable $K$ de $X$ tal que $St(K, \mathfrak{U}) = X$, entonces $X$ es de Lindelöf.

*Demostración.* Sea $\mathfrak{U}$ una cubierta abierta de $X$. Como $X$ es meta-Lindelöf existe un refinamiento de punto numerable $\mathfrak{V}$. Por hipótesis, existe un conjunto numerable $K$ de $X$ tal que $St(K, \mathfrak{V}) = X$. Si tomamos a la colección $\mathfrak{W} = \{V \in \mathfrak{V} \colon V \cap K \neq \varnothing\}$, notamos $\mathfrak{W}$ es cubierta abierta de $X$, más aún, $\mathfrak{W}$ es un refinamiento de punto numerable de $\mathfrak{U}$. Por lo que para todo $x \in K$ el conjunto $\mathfrak{W}_x = \{V \in \mathfrak{W} : x \in V\}$ es numerable y como $\mathfrak{W} = \bigcup_{x \in K} \mathfrak{W}_x$ y $K$ es numerable, se sigue que, $\mathfrak{W}$ es numerable. Por último, como $\mathfrak{W}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ y suponemos que $\mathfrak{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces podemos tomar a $U_n \in \mathfrak{U}$ tal que $W_n \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $\mathfrak{C} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una subcubierta numerable de $\mathfrak{U}$ y, por tanto, $X$ es de Lindelöf. □

**Teorema E.72.** Todo espacio numerablemente compacto y meta-Lindelöf es compacto.

*Demostración.* Sea $X$ un espacio numerablemente compacto y meta-Lindelöf, y sea $\mathfrak{U}$ una cubierta abierta de $X$. Como $X$ es numerablemente compacto, por el Lema E.70, existe un conjunto finito $K \subseteq X$ tal que $St(K, \mathfrak{U}) = X$. Luego, como $X$ es meta-Lindelöf y $\mathfrak{U}$ fue arbitraria, por el Lema E.71, $X$ es Lindelöf. Por último, como $X$ es numerablemente compacto y de Lindelöf. Usando el Teorema E.61, se concluye que $X$ es compacto. □

## F.6. Espacios de ordinales

Si denotamos a la clase de números ordinales por $OR$, para cada $\alpha \in OR$ podemos definir a los conjuntos $[0, \alpha) = \{\beta \in OR : \beta < \alpha\}$ y $[0, \alpha] = \{\beta \in OR : \beta \leq \alpha\}$, donde $\leq$ es el orden usual en $OR$. Debido a esto podemos asignar a $[0, \alpha)$ y $[0, \alpha]$ una estructura topológica a partir del *orden total* $\leq$, es decir, la colección de conjuntos de la forma $(\gamma, \infty) = \{\beta \in [0, \alpha] : \gamma < \beta\}$ y $(-\infty, \gamma) = \{\beta \in [0, \alpha] : \beta < \gamma\}$, generan una subbase para el espacio $[0, \alpha]$, donde $[0, \alpha)$ hereda la topología de $[0, \alpha]$.

**Teorema F.73.** Para todo $\alpha \in OR$. $[0, \alpha]$ es un espacio discreto si y sólo si $\alpha < \omega$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Si suponemos que $\alpha \geq \omega$, en particular $\omega \in [0, \alpha]$, entonces existe un abierto básico de la forma $(\gamma_1, \gamma_2)$ en $[0, \alpha]$ tal que $\{\omega\} = (\gamma_1, \gamma_2) \cap [0, \omega] = (\gamma_1, \omega]$. Como $\omega$ es un *ordinal límite* y $\gamma_1 < \omega$, se tiene que el conjunto $(\gamma_1, \omega]$ no puede tener solamente a $\omega$ como elemento, lo cual es una contradicción. Por tanto $a < \omega$.

$\Longleftarrow$) Si $0 < \gamma < \alpha < \omega$, entonces el abierto $(\gamma - 1, \gamma + 1)$ tiene como único elemento a $\gamma$. Análogamente, si $\gamma = 0$, consideramos al conjunto $[0, \gamma + 1)$. □

Si denotamos por $\omega_1$ al primer ordinal no numerable, se tienen los siguientes resultados.

**Teorema F.74.** $[0, \omega_1]$ es compacto, mientras que $[0, \omega_1)$ no lo es. Más aún, $[0, \omega_1)$ es numerablemente compacto.

*Demostración.* Para probar que $[0, \omega_1]$ es compacto, tomamos una cubierta abierta $\mathfrak{U}$ de este espacio, la cual por el Teorema E.47 podemos suponer que consta solamente de subbásicos. Ahora, al ser $\mathfrak{U}$ cubierta, debe existir $\gamma < \omega_1$ tal que $\omega_1 \in (\gamma, \omega_1] \in \mathfrak{U}$. Como el conjunto $\mathcal{B} = \{\beta \in [0, \omega_1] \colon \omega_1 \in (\beta, \omega_1) \in \mathfrak{U}\}$ es conjunto de ordinales no vacío, existe un elemento mínimo en $\mathcal{B}$, digamos $\gamma_0$. De igual manera, como $\gamma_0 \in [0, \omega_1]$, debe existir un elemento $U \in \mathfrak{U}$ tal que $\gamma_0 \in U$. Al ser $\gamma_0$ mínimo en $\mathcal{B}$, $U \neq (\beta, \omega_1)$ con $\beta < \gamma_0$, por tanto $U = [0, \beta_0)$, con $\beta_0 > \gamma_0$. De aquí es claro que $[0, \omega_1] = [0, \beta_0) \cup (\gamma_0, \omega_1] = [0, \beta_0) \cup (\gamma_0, \omega_1]$. Luego $[0, \omega_1]$ es compacto. Para ver que $[0, \omega_1)$ no es compacto, basta tomar a la cubierta $\mathfrak{U} = \{[0, \alpha) \subseteq [0, \omega_1) : \alpha < \omega_1\}$, ya que al ser $\omega_1$ un ordinal límite, $\mathfrak{U}$ resulta en una cubierta para $[0, \omega_1)$ y cualquier subcolección finita $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{U}$ tendría un máximo bajo la contención, digamos $[0, \alpha_0)$ tal que $\alpha_0 < \omega_1$, con lo cual el elemento $\alpha_0 + 1 < \omega_1$ no estaría cubierto por algún elemento de $\mathfrak{F}$. Luego, $\mathfrak{U}$ no tiene subcubiertas finitas y por ende $[0, \omega_1)$ no es compacto. Por último, para mostrar que $[0, \omega_1)$ es numerablemente compacto, notamos que si $\mathfrak{U}$ es una cubierta abierta numerable de $[0, \omega_1)$ que consta solamente de subbásicos, necesariamente debe haber un elemento en $\mathfrak{U}$ de la forma $(\gamma_0, \omega_1)$. Con una prueba similar a la da para la compacidad del espacio $[0, \omega_1]$, el espacio $[0, \gamma_0]$ es compacto y al ser $\gamma_0$ un ordinal numerable, $\mathfrak{U}$ es una cubierta de $[0, \gamma_0]$, por lo que existe una subcubierta finita de $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{U}$. Luego, la cubierta $\mathfrak{F} \cup \{(\gamma_0, \omega_1)\} \subseteq \mathfrak{U}$ es finita y cubre a $[0, \omega_1)$. Por tanto, $[0, \omega_1)$ es numerablemente compacto. □

**Corolario F.75.** $[0, \omega_1]$ es $T_4$.

*Demostración.* Para probar que $[0, \omega_1]$ es $T_4$, basta demostrar que es $T_2$ por los Teoremas E.45 y F.74. Sean $\alpha, \beta \in [0, \omega_1]$ distintos. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\alpha < \beta$. Si se tiene el caso en que $\alpha + 1 = \beta$, entonces los abiertos $[0, \beta)$ y $(\alpha, \omega_1]$ ajenos que contienen a $\alpha$ y $\beta$, respectivamente. En otro caso, si $\alpha + 1 < \beta$ tomamos a los abiertos $[0, \alpha + 1)$ y $(\alpha, \omega_1]$ ajenos que contienen a $\alpha$ y $\beta$, respectivamente. En cualquier caso se sigue que $[0, \omega_1]$ es $T_2$ y, por tanto, $[0, \omega_1]$ es $T_4$. □

**Definición F.76.** Dado un ordinal $\alpha$, decimos que un subconjunto $C$ de $[0, \alpha)$ es ***no acotado***, si para cada $\beta < \alpha$ existe $\gamma \in C$ tal que $\beta < \gamma$.

**Lema F.77.** Dado $\alpha < \omega_1$, si $\{K_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es una colección de cerrados no acotados en $[0, \omega_1)$, entonces $\bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta$ es cerrado y no acotado en $[0, \omega_1)$.

*Demostración.* Si definimos a $D = \bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta$, entonces $D$ es cerrado. Basta probar que $D$ no es acotado. Sea $\gamma < \omega_1$. Si definimos a $\varepsilon_0 = \gamma$, como $\{K_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es una colección de cerrados no acotados, entonces existe un ordinal $\sigma(0, \beta) \in K_\beta$ tal que $\varepsilon_0 < \sigma(0, \beta)$ para cada $\beta < \alpha$. Si definimos al ordinal $\varepsilon_1 = \sup\{\sigma(0, \beta) : \beta < \alpha\}$, notamos que $\gamma = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \omega_1$. Análogamente podemos definir $\varepsilon_2 = \sup\{\sigma(1, \beta) : \beta < \alpha\}$ donde $\varepsilon_1 < \sigma(1, \beta)$ para cada $\beta < \alpha$. De esta manera podemos definir recursivamente a una sucesión creciente de ordinales numerables $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si definimos al ordinal $\gamma_0 = \sup\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\gamma < \gamma_0 < \omega_1$ y por definición de $\gamma_0$, si $U = (\alpha_1, \alpha_2)$ es un abierto básico arbitrario de $\gamma_0$ en $[0, \omega_1)$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_m \in U$, donde $\varepsilon_m < \sigma(m, \beta) < \gamma_0$ para cada $\beta < \alpha$. Luego, $\alpha_1 < \varepsilon_m < \sigma(m, \beta) < \gamma_0 < \alpha_2$ y así $\sigma(m, \beta) \in U$ para cada $\beta < \alpha$, es decir, $U \cap K_\beta \neq \varnothing$ para cada $\beta < \alpha$. Como $U$ fue arbitrario se concluye que $\gamma_0 \in K_\beta$ para cada $\beta < \alpha$. Por tanto $\gamma_0 \in D$. $\square$

**Definición F.78.** Dado un ordinal límite $\alpha$, si $\{K_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es una colección de cerrados no acotados en $[0, \alpha)$, definimos a la ***intersección diagonal*** de $\{K_\beta\}_{\beta<\alpha}$ como,

$$\Delta_{\beta<\alpha} K_\beta = \left\{ \gamma < \alpha : \gamma \in \bigcap_{\beta<\gamma} K_\beta \right\}.$$

**Lema F.79.** Si $\{K_\beta\}_{\beta<\omega_1}$ es una colección de cerrados no acotados en $[0, \omega_1)$, entonces $\Delta_{\beta<\omega_1} K_\beta$ es cerrado y no acotado en $[0, \omega_1)$.

*Demostración.* Si definimos a $D = \Delta_{\beta<\omega_1} K_\beta$, primero probaremos que $D$ es cerrado. Basta probar que si $\gamma < \omega_1$ es un ordinal límite y $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos en $D$ que converge a $\gamma$, entonces $\gamma \in D$. Si tomamos a $\beta < \gamma$ y definimos al conjunto $L = \{\alpha \in D \cap [0, \gamma) : \beta < \alpha\}$ notamos que $L \subseteq K_\beta$. Luego, como $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\gamma$ y $\beta < \gamma$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $\beta < \gamma_n < \gamma$, es decir, $\gamma_n \in L \subseteq K_\beta$ si $n \geq m$. Sin pérdida de generalidad, si suponemos que $m = 1$, al ser $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sucesión de elementos en $K_\beta$ con $K_\beta$ cerrado, se tendría que $\gamma \in K_\beta$ por el Teorema D.39. El caso en que $\gamma$ es un ordinal sucesor es evidente. Por último, como $\beta$ fue arbitrario, se concluye que $\gamma \in D$ y que $D$ es cerrado. Para ver que $D$ no es acotado, sea $\beta_0 < \omega_1$. Por el Lema F.77, $\bigcap_{\beta<\beta_0} K_\beta$ no es acotado en $[0, \omega_1)$, lo que implica que existe $\beta_1 \in \bigcap_{\beta<\beta_0} K_\beta$ tal que $\beta_0 < \beta_1 < \omega_1$. Análogamente existe $\beta_2 \in \bigcap_{\beta<\beta_1} K_\beta$ tal que $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \omega_1$. Recursivamente podemos construir una sucesión creciente de ordinales $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Luego, si definimos a $\gamma_0 = \sup\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$, notamos que $\beta_0 < \gamma_0 < \omega_1$ y afirmamos que $\gamma_0 \in D$. Para esto, dado que $\beta_m \in \bigcap_{\beta<\beta_n} K_\beta$ si $m \geq n+1$ y $\bigcap_{\beta<\beta_n} K_\beta$ es cerrado para toda $n \in \mathbb{N}$, al ser $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $\gamma_0$, se tiene que $\gamma_0 \in \bigcap_{\beta<\beta_n} K_\beta$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\gamma_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{\beta<\beta_n} K_\beta = \bigcap_{\beta<\gamma_0} K_\beta,$$

es decir, $\gamma_0 \in D$ y en conclusión, $\beta_0 < \gamma_0 < \omega_1$ con $\gamma_0 \in D$. Como la elección inicial de $\beta_0$ fue arbitraria se concluye que $D$ no es acotado. Por tanto $D = \Delta_{\beta<\omega_1} K_\beta$ es cerrado y no acotado. $\square$

**Definición F.80.** Un subconjunto $S$ de $[0, \omega_1)$ es ***estacionario***, si $S$ intersecta a todo conjunto cerrado y no acotado en $[0, \omega_1)$.

**Lema de Fodor F.81.** Dado un subconjunto estacionario $S$ de $[0, \omega_1)$, si $f : S \to [0, \omega_1)$ es una función tal que para toda $\gamma \in S \setminus \{0\}$, $f(\gamma) < \gamma$, entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f^{-1}(\alpha)$ es un subconjunto estacionario de $[0, \omega_1)$.

*Demostración.* Supongamos lo contrario, es decir, que para cada $\alpha < \omega_1$ existe un conjunto cerrado y no acotado $K_\alpha$ en $[0, \omega_1)$ tal que $K_\alpha \cap f^{-1}(\alpha) = \varnothing$. Suponiendo sin pérdida de generalidad que $0 \notin S$, al ser $S$ un conjunto estacionario, por el Lema F.79, $S \cap \Delta_{\beta<\omega_1} K_\beta \neq \varnothing$. Luego, tomando a $\gamma \in S \cap \Delta_{\beta<\omega_1} K_\beta$ fijo, por definición de $\Delta_{\beta<\omega_1} K_\beta$, $\gamma \in \bigcap_{\beta<\gamma} K_\beta$. Además, como $\gamma \in S$, $f(\gamma) < \gamma$ esto implica que $\gamma \in K_{f(\gamma)}$ y $\gamma \in f^{-1}(f(\gamma))$, es decir, $\gamma \in K_{f(\gamma)} \cap f^{-1}(f(\gamma))$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f^{-1}(\alpha)$ es un subconjunto estacionario de $[0, \omega_1)$. $\square$

**Teorema F.82.** $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1)$ no es $T_4$.

*Demostración.* Para probar que $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1)$ no es $T_4$, mostraremos que existen dos conjuntos cerrados ajenos en $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1)$ que no pueden ser separados por abiertos ajenos. Si definimos a los conjuntos $K = \{(\alpha, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$ y $L = \{(\omega_1, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$, entonces son cerrados ajenos y afirmamos que éstos son los cerrados buscados. Ahora, sean $U$ y $V$ abiertos tales que $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$. Como $(\alpha, \alpha) \in U$ para cada $\alpha < \omega_1$ y $U$ es abierto, existe $\beta_\alpha < \alpha$ tal que $(\alpha, \alpha) \in (\beta_\alpha, \alpha] \times (\beta_\alpha, \alpha] \subseteq U$, y en consecuencia, podemos definir a la función $f : [0, \omega_1) \to [0, \omega_1)$ por la correspondencia $f(0) = 0$ y $f(\alpha) = \beta_\alpha$ si $\alpha > 0$. Luego, como $f(\alpha) < \alpha$ si $\alpha > 0$ y $[0, \omega_1)$ es un conjunto estacionario, entonces por el Lema de Fodor F.81, existe un ordinal $\gamma_0 < \omega_1$ tal que $f^{-1}(\gamma_0)$ es un subconjunto estacionario de $[0, \omega_1)$. Como $f^{-1}(\gamma_0)$ es estacionario, $f^{-1}(\gamma_0) \cap [\beta, \omega_1) \neq \varnothing$ para toda $\beta < \omega_1$ y, por consiguiente,

$$[\gamma_0 + 1, \omega_1) \times [\gamma_0 + 1, \omega_1) = \bigcup_{\alpha \in f^{-1}(\gamma_0)} (\gamma_0, \alpha] \times (\gamma_0, \alpha] \subseteq U.$$

Por otro lado, observamos que $(\omega_1, \gamma_0 + 1) \in L \subseteq V$ y como $V$ es abierto, podemos garantizar que existe $\beta_0 > \gamma_0 + 1$ tal que $(\omega_1, \gamma_0 + 1) \in (\beta_0, \omega_1] \times \{\gamma_0 + 1\} \subseteq V$. Por último, dado que

$$[\beta_0, \omega_1) \times [\beta_0, \omega_1) \subseteq U \qquad y \qquad (\beta_0, \omega_1] \times \{\gamma_0 + 1\} \subseteq V$$

se tiene que $(\beta_0 + 1, \gamma_0 + 1) \in U \cap V$, es decir, $U \cap V \neq \varnothing$. Como $U$ y $V$ fueron abiertos arbitrarios se concluye que $K$ y $L$ no pueden ser separados por abiertos ajenos y, por tanto, $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1)$ no es $T_4$. $\square$

## G.7. La compactación de Stone-Čech

**Definición G.83.** Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos. Se dice que $(Y, h)$ es una ***compactación*** de $X$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $Y$ es un espacio compacto y $T_2$.

2. $h : X \to Y$ es una función continua, tal que $h$ es un homeomorfismo en su imagen ($X \simeq h(X)$).

3. $h(X)$ es denso en $Y$.

**Definición G.84.** Dado un espacio $X$, definimos a la ***compactación de Stone-Čech*** $(\beta X, h_\beta)$, como la única compactación de $X$ que cumple la siguiente propiedad: Para toda función continua $f : X \to [0,1]$, existe una única función continua $F : \beta X \to [0,1]$ tal que $f = F \circ h_\beta$. Esta propiedad recibe el nombre de ***propiedad universal de la compactación de*** *Stone-Čech*.

**Teorema G.85.** [7] Dado un espacio $X$, entonces $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$ si y sólo si existe la compactación $(\beta X, h_\beta)$.

**Teorema G.86.** [12] Sean $X$ un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $X^n$ es pseudocompacto, entonces $\beta(X^n) = (\beta X)^n$.

**Lema G.87.** Si $X$ es un espacio $T_4$ y $\{K_i\}_{i=1}^n$ es una colección de cerrados en $X$, entonces $\overline{\bigcap_{i=1}^n K_i}^{\beta X} = \bigcap_{i=1}^n \overline{K_i}^{\beta X}$.

*Demostración.* Haremos esta prueba por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Tomamos $n = 2$. Debido a que la contención $\overline{\bigcap_{i=1}^2 K_i}^{\beta X} \subseteq \bigcap_{i=1}^2 \overline{K_i}^{\beta X}$ siempre es válida, sólo se necesita probar que $\bigcap_{i=1}^2 \overline{K_i}^{\beta X} \subseteq \overline{\bigcap_{i=1}^2 K_i}^{\beta X}$. Por contradicción, si suponemos existe $x \in \bigcap_{i=1}^2 \overline{K_i}^{\beta X}$ y $x \notin \overline{\bigcap_{i=1}^2 K_i}^{\beta X}$, al ser $\beta X$ un espacio $T_4$, podemos tomar a un abierto $U$ en $\beta X$ que contiene a $x$ de tal manera que $\overline{\bigcap_{i=1}^2 K_i}^{\beta X} \cap \overline{U}^{\beta X} = \varnothing$. Si tomamos al abierto $V = U \cap X$ en $X$, por la densidad de $X$ en $\beta X$ se tiene tiene que $\overline{V}^{\beta X} = \overline{U \cap X}^{\beta X} = \overline{U}^{\beta X}$ lo que implica que $\bigcap_{i=1}^2 K_i \cap \overline{V}^{\beta X} = \varnothing$. Si para cada $i \leq 2$, definimos a $L_i = K_i \cap \overline{V}^X$, afirmamos que $x \in \bigcap_{i=1}^2 \overline{L_i}^{\beta X}$. Para esto, sea $W$ un abierto en $\beta X$ que contiene a $x$. Por tanto, $U \cap W$ es un abierto en $\beta X$ que contiene a $x$. Por hipótesis, esto $x \in \bigcap_{i=1}^2 \overline{K_i}^{\beta X}$, lo que implica que $\varnothing \neq U \cap W \cap K_i$ para cada $i \leq 2$. Más aún, como $K_i$ es un cerrado en $X$, $\varnothing \neq U \cap W \cap K_i \cap X = W \cap K_i \cap V \subseteq W \cap K_i \cap \overline{V}^X = W \cap L_i$. Como $W$ fue arbitrario $x \in \overline{L_i}^{\beta X}$ para cada $i \leq 2$, y entonces $x \in \bigcap_{i=1}^2 \overline{L_i}^{\beta X}$. Luego, como $\bigcap_{i=1}^2 K_i \cap \overline{V}^X = \varnothing$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^2 L_i = \varnothing$. Por otro lado, como $X$ es $T_4$, por el Teorema B.21 existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f|_{L_1} = 0$ y $f|_{L_2} = 1$ para cada $i \leq 2$. Luego, por la propiedad universal de la compactación de *Stone-Čech*, existe una función continua $F : \beta X \to [0,1]$ tal que $F|_X = f$. Por continuidad se sigue que,

$$F\left(\bigcap_{i=1}^2 \overline{L_i}^{\beta X}\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^2 F\left(\overline{L_i}^{\beta X}\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^2 \overline{F(L_i)} = \bigcap_{i=1}^2 \overline{f(L_i)} = \overline{\{0\}} \cap \overline{\{1\}} = \{0\} \cap \{1\} = \varnothing.$$

Lo que quiere decir que $\bigcap_{i=1}^2 \overline{L_i}^{\beta X} = \varnothing$, y contradice que $x \in \bigcap_{i=1}^2 \overline{L_i}^{\beta X}$. Por lo tanto, $x \in \overline{\bigcap_{i=1}^2 K_i}^{\beta X}$ y así, $\overline{\bigcap_{i=1}^2 K_i}^{\beta X} = \bigcap_{i=1}^2 \overline{K_i}^{\beta X}$.

Ahora supongamos que para $n = k$ se cumple que $\overline{\bigcap_{i=1}^{k} K_i}^{\beta X} = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{K_i}^{\beta X}$. Entonces,

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{K_i}^{\beta X} = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{K_i}^{\beta X} \cap \overline{K_{k+1}}^{\beta X} = \overline{\bigcap_{i=1}^{k} K_i}^{\beta X} \cap \overline{K_{k+1}}^{\beta X}.$$

Como $L = \bigcap_{i=1}^{k} K_i$ y $K_{k+1}$ son cerrados en $X$, para el caso $n = 2$ se tiene que

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{k} K_i}^{\beta X} \cap \overline{K_{k+1}}^{\beta X} = \overline{L}^{\beta X} \cap \overline{K_{k+1}}^{\beta X} = \overline{L \cap K_{k+1}}^{\beta X} = \overline{\bigcap_{i=1}^{k+1} K_i}^{\beta X},$$

y así, $\overline{\bigcap_{i=1}^{k+1} K_i}^{\beta X} = \bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{K_i}^{\beta X}$. Como $k \in \mathbb{N}$ fue arbitraria se concluye la prueba por inducción. $\square$

**Teorema G.88.** Sea $X$ un espacio numerablemente compacto y $T_4$. Si $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de cerrados no vacíos de $X$, entonces $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{\beta X} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{K_n}^{\beta X}$.

*Demostración.* Debido a que la contención $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{\beta X} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{K_n}^{\beta X}$ siempre es válida, sólo se necesita probar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{K_n}^{\beta X} \subseteq \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{\beta X}$. Por contrapositiva, sea $x \notin \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{\beta X}$. Como $X$ es $T_4$, existe un abierto $U$ de $x$ en $\beta X$ tal que $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{\beta X} \cap \overline{U}^{\beta X} = \varnothing$. Si tomamos a $V = U \cap X$, se tiene por la densidad de $X$ en $\beta X$ que, $\overline{V}^{\beta X} = \overline{U \cap X}^{\beta X} = \overline{U}^{\beta X}$, por lo que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \cap \overline{V} = \varnothing$. Con una prueba análoga al Teorema E.44, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{m} K_n \cap \overline{V} = \varnothing$. Análogo al Lema G.87, por ser $X$ un espacio $T_4$, se tiene que $\overline{\bigcap_{i=1}^{m} K_n}^{\beta X} \cap \overline{U}^{\beta X} = \varnothing$, lo que implica que $\bigcap_{i=1}^{m} \overline{K_n}^{\beta X} \cap \overline{U}^{\beta X} = \varnothing$. Por tanto, como $x \in U$, entonces $x \notin \bigcap_{i=1}^{m} \overline{K_n}^{\beta X}$ lo que implica que $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{K_n}^{\beta X}$. $\square$

# Capítulo 1

# Hiperespacio de Vietoris

## 1.1. Hiperespacio de Vietoris

Dado un espacio topológico $(X, T)$, denotamos a la colección de conjuntos cerrados no vacíos de $X$ como $\mathcal{CL}(X)$. A esta colección se le proporciona una topología a la cual llamamos *topología finita* o *topología de Vietoris*[1]([26], [21] y [22]) que denotamos por $T_V$. Dada una colección finita de conjuntos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ en $(X, T)$, definimos al conjunto

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left\{ K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } K \cap U_i \neq \varnothing \text{ para } i \leq n \right\}.$$

Ya con esto, si los conjuntos $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos, el conjunto $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ resulta en un abierto básico para la topología $T_V$ y la colección $\mathcal{CL}(X)$ recibe el nombre de *hiperespacio* de cerrados de $X$. A partir de esta definición, se definen a las siguientes colecciones de conjuntos cuya estructura topológica esta generada por la topología $T_V$.

$\mathcal{F}_n(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon |K| \leq n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \text{ es finito}\}$.

$\mathcal{C}(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \text{ es conexo}\}$.

$\mathcal{K}(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \text{ es compacto}\}$.

$\mathcal{CL}_{\varnothing}(X) = \mathcal{CL}(X) \cup \{\varnothing\}$.[2]

Más aún, podemos extender esta definicón a la colección de todos los subconjuntos de $X$ y asi definir al hiperespacio de conjuntos no vacíos de $X$ como $\mathcal{A}(X) = \{K \in \mathcal{P}(X) \colon K \neq \varnothing\}$, donde los conjuntos básicos en $\mathcal{A}(X)$ son de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ con $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de $X$.

[1] Leopold Vietoris (4 Junio de 1891 - 9 de Abril 2002). Matemático austriaco.

[2] Hacemos notar que para la colección $\mathcal{CL}_{\varnothing}(X)$ debemos considerar a la topología $T_V \cup \{\{\varnothing\}\}$. De esta manera el único abierto en $(\mathcal{CL}_{\varnothing}(X), T_V \cup \{\{\varnothing\}\})$ que contiene al conjunto $\varnothing$ es el conjunto $\{\varnothing\}$.

Nos referimos a la cerradura y al interior de un conjunto $A$ en un espacio topológico $(Y,T)$ como $\overline{A}^Y$ e $Int_Y(A)$, respectivamente. Al trabajar en un espacio topológico $(X,T)$ fijo y su hiperespacio asociado $\mathcal{CL}(X)$, denotamos a la cerradura y al interior de un subconjunto $A$ de $\mathcal{CL}(X)$ solamente como $\overline{A}$ e $Int(A)$ respectivamente, y escribiremos $X$ en vez de $(X,T)$ cuando se tenga claro sobre que topología estemos trabajando.

## 1.2. Propiedades fundamentales en hiperespacios

En esta sección definimos a ciertos subconjuntos de un hiperespacio, los cuales cumplen propiedades que serán de gran utilidad en el transcurso de este escrito. Mostramos algunas proposiciones y teoremas fundamentales básicos en la teoría de hiperespacios. Además, introducimos notación para simplificar la escritura.

**Definición 1.1.** Dado $A \subseteq X$ con $A \neq \varnothing$, definimos a los conjuntos

$$\langle A\rangle^+ = \{B \in \mathcal{CL}(X) \colon B \subseteq A\} \qquad y \qquad \langle A\rangle^- = \{B \in \mathcal{CL}(X) \colon B \cap A \neq \varnothing\}.$$

**Proposición 1.2.** Para todo $A \subseteq X$ con $A \neq \varnothing$,

(a) $\left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$.

(b) $\left\langle \overline{A}^X \right\rangle^-$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$.

(c) $\langle Int_X(A)\rangle^+$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$.

(d) $\langle Int_X(A)\rangle^-$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$.

*Demostración.* (a) Sea $D \in \mathcal{CL}(X) \backslash \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$. Si definimos al abierto $\left\langle X, X \backslash \overline{A}^X \right\rangle$, se sigue que, $D \in \left\langle X, X \backslash \overline{A}^X \right\rangle \subseteq \mathcal{CL}(X) \backslash \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$ y, por tanto, $\mathcal{CL}(X) \backslash \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$ es abierto.

(b) Sea $B \in \mathcal{CL}(X) \backslash \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^-$. Como $B \cap \overline{A}^X = \varnothing$, se cumple que $B \in \left\langle X \backslash \overline{A}^X \right\rangle^+$ y qué $\left\langle X \backslash \overline{A}^X \right\rangle^+ \cap \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^- = \varnothing$. Por tanto, $\left\langle \overline{A}^X \right\rangle^-$ es cerrado.

Los incisos (c) y (d) son inmediatos usando la definición del espacio topológico $(\mathcal{CL}(X), T_V)$, ya que $\langle Int_X(A)\rangle^+ = \langle Int_X(A)\rangle$ y $\langle Int_X(A)\rangle^- = \langle X, Int_X(A)\rangle$. $\square$

**Teorema 1.3.** La colección de los conjuntos de la forma $\langle U\rangle^+$ y $\langle U\rangle^-$ tal que $U$ es un conjunto abierto no vacío en la topología $(X,T)$, forma una subbase para $(\mathcal{CL}(X), T_V)$. A esta subbase la denotamos como $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-$, donde $\mathcal{P}^+ = \{\langle U\rangle^+ \colon U \in T\}$ y $\mathcal{P}^- = \{\langle U\rangle^- \colon U \in T\}$.

*Demostración.* Sea $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ un básico arbitrario de $\mathcal{CL}(X)$. Definiendo a $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$, $A = \langle U\rangle^+$ y $B_i = \langle U_i\rangle^-$, obtenemos que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = A \cap (\bigcap_{i=1}^n B_i)$. $\square$

**Teorema 1.4.** Si $X$ es un espacio $T_1$ y $A, B \subseteq X$ con $A$ y $B$ no vacíos, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) Si $A \subseteq B$, entonces $\langle A \rangle^+ \subseteq \langle B \rangle^+$.

(b) Si $A \subseteq B$, entonces $\langle A \rangle^- \subseteq \langle B \rangle^-$.

(c) $\overline{\langle A \rangle^+} = \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$.

(d) $Int(\langle A \rangle^+) = \langle Int_X(A) \rangle^+$.

(e) $\overline{\langle A_1, \dots, A_n \rangle} = \left\langle \overline{A_1}^X, \dots, \overline{A_n}^X \right\rangle$.

*Demostración.* Los incisos (a) y (b) son inmediatos.

(c) Por el inciso (a), con la contención $A \subseteq \overline{A}^X$, entonces $\langle A \rangle^+ \subseteq \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$ y, usando la Proposición 1.2 (a), obtenemos $\overline{\langle A \rangle^+} \subseteq \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$. Para demostrar la otra contención, sea $B \in \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$ y $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ un básico que contiene a $B$. Como $B \cap U_i \neq \varnothing$ para cada $i \leq n$ y $B \subseteq \overline{A}^X$ podemos tomar $x_i \in U_i \cap A$ y definir al conjunto $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ el cual es un elemento en $\mathcal{CL}(X)$ y que además cumple que $D \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \langle A \rangle^+$, por lo tanto $B \in \overline{\langle A \rangle^+}$.

(d) Por el inciso (a), se tiene la contención, $\langle Int_X(A) \rangle^+ \subseteq \langle A \rangle^+$ y usando la Proposición 1.2 (c) obtenemos $\langle Int_X(A) \rangle^+ \subseteq Int(\langle A \rangle^+)$. Para demostrar la otra contención, sea $B \in \mathcal{CL}(X) \backslash \langle Int_X(A) \rangle^+$. Esto quiere decir que $B \cap \overline{X \backslash A} \neq \varnothing$. Sea $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ un abierto básico que contiene a $B$. Lo que queremos probar es que $B \in \overline{\mathcal{CL}(X) \backslash \langle A \rangle^+}$. Para esto, como $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $B \cap \overline{X \backslash A} \neq \varnothing$, podemos tomar a $x_0 \in \bigcup_{i=1}^n U_i \backslash A$ y definir a $D = B \cup \{x_0\}$ el cual es cerrado. Además, $D \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ y $D \nsubseteq A$ lo que implica que $D \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap (\mathcal{CL}(X) \backslash \langle A \rangle^+)$. Por lo tanto, $B \in \overline{\mathcal{CL}(X) \backslash \langle A \rangle^+}$.

(e) Para simplificar notación, la demostración la haremos para el caso $m = 2$. Notamos que $\left\langle \overline{A_1}^X, \overline{A_2}^X \right\rangle = \left\langle \overline{A_1}^X \cup \overline{A_2}^X \right\rangle^+ \cap \left\langle \overline{A_1}^X \right\rangle^- \cap \left\langle \overline{A_2}^X \right\rangle^-$. Por la Proposición 1.2 (a) y 1.2 (b), $\left\langle \overline{A_1}^X, \overline{A_2}^X \right\rangle$ es cerrado y contiene a $\langle A_1, A_2 \rangle$. Luego $\overline{\langle A_1, A_2 \rangle} \subseteq \left\langle \overline{A_1}^X, \overline{A_2}^X \right\rangle$. Para la otra contención, sea $B \in \left\langle \overline{A_1}^X, \overline{A_2}^X \right\rangle$ y $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ un abierto básico que contiene a $B$. Lo que tenemos que demostrar es que $\langle A_1, A_2 \rangle \cap \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \neq \varnothing$. Como $B \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$ y $B \cap \overline{A_i}^X \neq \varnothing$ para $i \leq 2$, entonces $\bigcup_{j=1}^n U_j \cap \overline{A_i}^X \neq \varnothing$ para $i \leq 2$ y además, como $B \subseteq \overline{A_1 \cup A_2}^X = \overline{A_1}^X \cup \overline{A_2}^X$ y $U_j \cap B \neq \varnothing$ para $j \leq n$, entonces $\overline{A_1 \cup A_2}^X \cap U_j \neq \varnothing$ para $j \leq n$. En resumen, $\bigcup_{j=1}^n U_j \cap \overline{A_i}^X \neq \varnothing$ para $i \leq 2$ y $\overline{A_1 \cup A_2}^X \cap U_j \neq \varnothing$ para $j \leq n$ y de esto se sigue que, $\bigcup_{j=1}^n U_j \cap A_i \neq \varnothing$ para $i \leq 2$ y $(A_1 \cup A_2) \cap U_j \neq \varnothing$ para $j \leq n$. Ya con esto, si tomamos a $x_i \in \bigcup_{j=1}^n U_j \cap A_i$ para $i \leq 2$ y $y_j \in (A_1 \cup A_2) \cap U_j$ para $j \leq n$, entonces $D = \{x_1, x_2, y_1 \dots, y_n\} \in \langle A_1, A_2 \rangle \cap \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ con lo cual mostramos que $\langle A_1, A_2\rangle \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \neq \varnothing$ y así $B \in \overline{\langle A_1, A_2\rangle}$. Los casos $m > 2$ son análogos.

$\square$

**Teorema 1.5.** Si $X$ es un espacio $T_1$ y $A \subseteq X$ con $A \neq \varnothing$, los conjuntos $\langle A\rangle^+$ y $\langle A\rangle^-$ son abiertos (cerrados) en $\mathcal{CL}(X)$ si y sólo si $A$ es abierto (cerrado) en $X$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Si $\langle A\rangle^+$ es abierto, por el Teorema 1.4 (d), $\langle A\rangle^+ = \langle Int(A)\rangle^+$. En consecuencia $x \in A$ si y sólo si $\{x\} \in \langle A\rangle^+$ si y sólo si $\{x\} \in \langle Int(A)\rangle^+$ si y sólo si $x \in Int(A)$. Si $\langle A\rangle^+$ es cerrado, por el Teorema 1.4 (c), $\langle A\rangle^+ = \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$ y, por tanto, $x \in \overline{A}^X$ si y sólo si $\{x\} \in \left\langle \overline{A}^X \right\rangle^+$ si y sólo si $\{x\} \in \langle A\rangle^+$ si y sólo si $x \in A$. La prueba es análoga para $\langle A\rangle^-$.

$\Longleftarrow$) Si $A$ es abierto, la demostración es inmediata utilizando que $\langle A\rangle^+ = \langle A\rangle$ y $\langle A\rangle^- = \langle X, A\rangle$. Si $A$ es cerrado, usando la Proposición 1.2 con los incisos (a) y (b) con $A = \overline{A}$ concluimos que $\langle A\rangle^+$ y $\langle A\rangle^-$ son cerrados. $\square$

**Proposición 1.6.** Sea $X$ un espacio $T_1$ y sean $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_k\rangle$ abiertos básicos en $\mathcal{CL}(X)$. Entonces $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ si y sólo si para cada $i \leq m$ existe $j \leq k$ tal que $V_j \subseteq U_i$ y $\bigcup_{j=1}^k V_j \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Supongamos que existe $x_0 \in \bigcup_{j=1}^k V_j$ tal que $x_0 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$ y sea $x_i \in V_i$ para cada $i \leq k$. Entonces el conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$, lo cual contradice la hipótesis, por tanto $\bigcup_{j=1}^k V_j \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$. Para la segunda condición, si suponemos que existe $U_i$ tal que $V_j \setminus U_i \neq \varnothing$, para cada $j \leq k$ y tomamos a $x'_j \in V_j \setminus U_i$, entonces el conjunto $\{x'_1, \ldots, x'_k\} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$, lo que es a una contradicción, por tanto, para cada $U_i$ existe $V_j$ tal que $V_j \subseteq U_i$.

$\Longleftarrow$) Sea $K \in \mathcal{V}$. Como $K \subseteq \bigcup_{j=1}^k V_j \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$, entonces $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$. Ahora, dado $i \leq m$, por hipótesis existe $j \leq k$ tal que $V_j \subseteq U_i$, como $K \cap V_j \neq \varnothing$ se sigue que $K \cap U_i \neq \varnothing$. Por tanto, $K \in \mathcal{U}$, luego $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. $\square$

**Definición 1.7.** Dado $A \subseteq X$ con $A \neq \varnothing$, definimos al espacio topológico $(\mathcal{CL}(A), T_{V_A})$ como el hiperespacio generado por $(A, T_A)$, donde $T_A$ es la topología de subespacio con respecto a $(X, T)$.

De esta definición, al tener $(A, T_A)$ estructura de subespacio, los subconjuntos cerrados en $A$ resultan ser intersecciones de elementos de $\mathcal{CL}(X)$ con $A$, con lo cual $\mathcal{CL}(A) = \{K \cap A \neq \varnothing \colon K \in \mathcal{CL}(X)\}$. Análogamente están definidos los espacios $\mathcal{F}_n(A)$, $\mathcal{F}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{K}(A)$.

**Proposición 1.8.** Sea $X$ un espacio $T_2$. Si $Y$ es un subespacio cerrado propio y no vacío de $X$, entonces $\mathcal{CL}(Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{CL}(X)$.

*Demostración.* Para ver que $\mathcal{CL}(Y)$ es subespacio de $\mathcal{CL}(X)$ solo basta observar que dados $U_1, \ldots U_n$ abiertos no vacíos en $X$ entonces $\langle U_1 \cap Y, \ldots, U_n \cap Y \rangle_Y = \langle U_1, \ldots U_n \rangle \cap \mathcal{CL}(Y)$ donde $\langle \cdot \rangle_Y$ denota a los abiertos básicos respecto al hiperespacio $\mathcal{CL}(Y)$. Para ver que $\mathcal{CL}(Y)$ es cerrado, sea $K \in \mathcal{CL}(X) \backslash \mathcal{CL}(Y)$. Como $K$ no es cerrado en $Y$, se tiene que $K$ no está contenido en $Y$, es decir, $K \cap (X \backslash Y) \neq \varnothing$. Además, como $Y$ es un subespacio cerrado propio de $X$, el conjunto $X \backslash Y$ es un abierto no vacío en $X$. Por tanto $\langle X \backslash Y \rangle^-$ es un abierto que contiene a $K$ ajeno a $\mathcal{CL}(Y)$. □

**Proposición 1.9.** Sean $X$ es un espacio y $f \colon X \to [0,1](\overline{\mathbb{R}})$[3] una función continua. Si definimos a las funciones $f_+ \colon \mathcal{CL}(X) \to [0,1](\overline{\mathbb{R}})$ y $f_- \colon \mathcal{CL}(X) \to [0,1](\overline{\mathbb{R}})$ como $f_+(K) = \sup\{f(x) \colon x \in K\}$ y $f_-(K) = \text{ínf}\{f(x) \colon x \in K\}$, entonces $f_+$ y $f_-$ son continuas.

*Demostración.* Haremos la prueba para $f \colon X \to [0,1]$, ya que el caso para $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ es análogo. Para ver que $f_+$ es continua, sea $K \in \mathcal{CL}(X)$ y supongamos que $f_+(K) \in (a,b)$ con $0 < a < b < 1$. Si $\delta = f_+(K)$, definimos al abierto $\mathcal{V} = \left\langle f^{-1}\left([0, \frac{\delta+b}{2})\right), f^{-1}\left((a, \frac{\delta+b}{2})\right)\right\rangle$. Ahora, si $L \in \mathcal{V}$, entonces como $L \subseteq f^{-1}\left([0, \frac{\delta+b}{2})\right) \cup f^{-1}\left((a, \frac{\delta+b}{2})\right) = f^{-1}\left([0, \frac{\delta+b}{2})\right)$ y así $f_+(L) \leq \frac{\delta+b}{2} < b$. Por otro lado, $L \cap f^{-1}\left((a, \frac{\delta+b}{2})\right) \neq \varnothing$, es decir, $a < f_+(L)$ y, por tanto, $f_+(L) \in (a,b)$. En conclusión, $f_+(\mathcal{V}) \subseteq (a,b)$ con $\mathcal{V}$ vecindad abierta de $K$. De manera similar se prueban los casos $f_+(K) \in (a,1]$ y $f_+(K) \in [0,b)$. Luego $f_+$ es continua. Análogamente, se prueba que $f_-$ es continua. □

Para finalizar esta sección, presentamos los siguientes resultados que relacionan a un espacio $X$ con los subespacios $\mathcal{F}_n(X)$, los cuales son de gran utilidad en las secciones posteriores.

**Proposición 1.10.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, la función $p_n \colon X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ definida por la correspondencia $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ resulta continua, cerrada y suprayectiva.[4]

*Demostración.* La suprayectividad es inmediata. La prueba de la continuidad la haremos para $n = 2$. Sea $(x,y) \in X^2$ y $\langle U_1, U_2, \ldots U_m \rangle$ un abierto básico que contiene a $p_2((x,y))$. Definiendo al conjunto

$$\bigcup \left\{ (U_{\sigma(1)} \cap \ldots \cap U_{\sigma(k)}) \times (U_{\sigma(k+1)} \cap \ldots \cap U_{\sigma(m)}) \colon 1 \leq k < m, \sigma \in S_m \right\}^5,$$

este resulta abierto y además, si $(z,w)$ es un punto en este conjunto (al cual denotamos por $\mathcal{V}(x,y)$ por ser una vecindad de $(x,y)$), sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U_{\sigma(i)} = U_i$ para cada $i \leq n$, $k$ es un entero fijo y $(z,w) \in (U_1 \cap \ldots \cap U_k) \times (U_{(k+1)} \cap \ldots \cap U_m)$. Dicho esto, $p_2((z,w)) \cap U_i = \{z,w\} \cap U_i \neq \varnothing$, para cada $i \leq m$ y $p_2((z,w)) = \{z,w\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Por esta razón, al ser $(z,w) \in \mathcal{V}(x,y)$ una elección arbitraria, se concluye que $p_2(\mathcal{V}(x,y)) \subseteq \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$. Como $(x,y)$ fue arbitrario,

[3] $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, donde su topología es idéntica a la usual en $\mathbb{R}$ agregando los intervalos abiertos $(a, \infty]$, $[-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$ y $[-\infty, \infty]$.

[4] A las funciones con entradas reales $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que no dependen del orden de sus variables, se les llama *esencialmente simétricas*.

[5] Donde $S_m$ es el conjunto de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, m\}$.

$p_2$ resulta continua. Por último, para ver que $p_2$ es cerrada, sea $A \neq X^2$ un cerrado no vacío en $X^2$ y sea $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{F}_1(X) \backslash p_2(A)$. Como $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{F}_1(X) \backslash p_2(A)$, se tiene que $(x_1, x_2) \notin A$ y, como $A$ es cerrado en $X$, existen abiertos $U_1$ y $U_2$ en $X$ tales que $(x_1.x_2) \in U_1 \times U_2$ y $(U_1 \times U_2) \cap A = \varnothing$. Afirmamos que $\{x_1, x_2\} \in \langle U_1, U_2 \rangle$ y $\langle U_1, U_2 \rangle \cap p_2(A) = \varnothing$. Por contradicción, si suponemos que $\{z_1, z_2\} \in \langle U_1, U_2 \rangle \cap p_2(A)$, entonces es claro que $(z_1, z_2) \in A$ o $(z_2, z_1) \in A$ y $(z_1, z_2) \in U_1 \times U_2$ o $(z_2, z_1) \in U_1 \times U_2$. En cualquier caso se concluye $(U_1 \times U_2) \cap A \neq \varnothing$, lo que es una contradicción y así $\langle U_1, U_2 \rangle \cap p_2(A) = \varnothing$ donde $\{x_1, x_2\} \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Como $\{x_1, x_2\}$ fue arbitrario se concluye que $p_2(A)$ es cerrado en $\mathcal{F}_2(X)$ y por tanto $p_2$ es cerrada. Los casos para $n \neq 2$ son análogos. $\square$

**Corolario 1.11.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces $X$ es homeomorfo a $\mathcal{F}_1(X)$.

*Demostración.* Por la Proposición 1.10, la función $p_1 : X \to \mathcal{F}_1(X)$ es continua, cerrada y suprayectiva, además de inyectiva y por tanto biyectiva e invertible. Solo basta mostrar que $p_1^{-1} : \mathcal{F}_1(X) \to X$ es continua. Por el Teorema B.28, $p_1$ es una identificación, y además la función identidad $I : X \to X$ es continua y constante en $p_1^{-1}(y)$ para cada $y \in \mathcal{F}_1(X)$. Ya con esto, por el Teorema B.29, la función $p_1^{-1} = I \circ p_1^{-1}$ es continua. $\square$

**Corolario 1.12.** Si $X$ es un espacio $T_1$ y $f \colon X \to [0,1](\overline{\mathbb{R}})$ es una función continua, entonces existe una función continua $F \colon \mathcal{CL}(X) \to [0,1](\overline{\mathbb{R}})$ tal que $F|_X = f$.

*Demostración.* La demostración se sigue de la Proposición 1.9 y el Corolario 1.11. $\square$

**Proposición 1.13.** Si $X$ es un espacio $T_2$, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Sean $m \in \mathbb{N}$ y $K \in \mathcal{CL}(X) \backslash \mathcal{F}_m(X)$. Como $|K| > m$, podemos tomar $m+1$ elementos distintos de $K$, a saber, $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$. Luego, como $X$ un espacio $T_2$, esto garantiza la existencia de abiertos ajenos dos a dos $U_1, U_2, \ldots, U_{m+1}$ tales que, $x_i \in U_i$ para toda $i \leq m+1$. Si consideramos al abierto básico $\mathcal{V} = \langle X, U_1, U_2, \ldots, U_{m+1} \rangle$, se sigue que $K \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} \cap \mathcal{F}_m(X) = \varnothing$. Luego, $\mathcal{F}_m(X)$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$. $\square$

**Proposición 1.14.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces

(a) Si $D$ es denso en $X$, entonces $\mathcal{F}_n(D)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$.

(c) Si $D$ es denso en $X$, entonces $\mathcal{F}(D)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$.

*Demostración.* (a) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$ un abierto básico en $\mathcal{CL}(X)$. Si $\mathcal{U} \cap \mathcal{F}_n(X) \neq \varnothing$, existe $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{U}$ con $k \leq n$. Para cada $i \leq k$, definimos a $\mathcal{U}_i = \{U_j \colon x_i \in U_j \text{ y } j \leq m\}$. Como $D$ es denso en $X$, $(\bigcap \mathcal{U}_i) \cap D \neq \varnothing$ para cada $i \leq m$. Luego, tomando $z_i \in (\bigcap \mathcal{U}_i) \cap D$ se tiene que $\{z_1, \ldots, z_k\}$ es un conjunto cerrado tal que $\{z_1, \ldots, z_k\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{F}_n(D)$. Por tanto, $\mathcal{F}_n(D)$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$.

(b) Al tomar un básico arbitrario $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$ en $\mathcal{CL}(X)$, seleccionamos un elemento $x_i$ de cada $U_i$ respectivamente y formamos al cerrado $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, el cual pertenece a $\mathcal{F}(X)$, esto es, $\mathcal{U} \cap \mathcal{F}_n(X) \neq \varnothing$.

(c) La prueba es análoga al inciso anterior tomando los puntos $x_i$ en los conjuntos $U_i \cap D$, los cuales son no vacíos ya que $D$ es denso en $X$.

□

## 1.3. Axiomas de separación

En esta sección estudiamos la relación que guardan los axiomas de separación[6] entre un espacio $X$ y su hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$. También analizamos las condiciones que se deben pedir a $X$ para que el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ resulte un espacio $T_4$. Una condición necesaria para garantizar la normalidad de $\mathcal{CL}(X)$ es que el espacio $X$ sea numerablemente compacto. Finalizamos esta sección probando algunos resultados que muestran la estrecha relación que guardan los axiomas de separación entre $X$ y el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$.

**Teorema 1.15.** Si $X$ es un espacio topológico, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es $T_0$.

*Demostración.* Sean $A$ y $B$ cerrados en $X$ tales que $\overline{\{A\}} = \overline{\{B\}}$ y supongamos que $A \neq B$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$. Ahora, si definimos al conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{CL}(X) \backslash \langle A \rangle^+$, éste es abierto por la Proposición 1.2 (a) y cumple que $B \in \mathcal{V}$ y por consiguiente $\mathcal{V} \cap \{B\} \neq \varnothing$. Como por hipótesis $\overline{\{A\}} = \overline{\{B\}}$, resulta que $\mathcal{V} \cap \{A\} \neq \varnothing$, de donde $A \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$, lo que es una contradicción. Por tanto, $A = B$. □

**Lema 1.16.** Supongamos que $X$ es un espacio $T_1$ y sea $A$ un subconjunto propio de $X$, entonces el conjunto

$$\langle A \rangle^* = \{B \in \mathcal{CL}(X) \colon A \subseteq B\}$$

es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$.

*Demostración.* Sean $D \in \mathcal{CL}(X) \backslash \langle A \rangle^*$ y $x_0 \in A \cap (X \backslash D)$. Como $X$ es $T_1$, el conjunto $U = X \backslash \{x_0\}$ es abierto. Más aún, $\langle U \rangle^+$ es un abierto en $\mathcal{CL}(X)$ tal que $D \in \langle U \rangle^+$ y $\langle U \rangle^+ \cap \langle A \rangle^* = \varnothing$. Por tanto, $\langle A \rangle^*$ es cerrado. □

**Teorema 1.17.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es $T_1$.

*Demostración.* Sea $A$ un subconjunto cerrado en $X$. Como $X$ es $T_1$, por el Lema 1.16, $\langle A \rangle^*$ es cerrado. Por otro lado, el conjunto $\langle A \rangle^+$ cerrado por la Proposición 1.2 (a). Luego, $\{A\} = \langle A \rangle^+ \cap \langle A \rangle^*$ es cerrado y, por el Teorema A.4, concluimos que $\mathcal{CL}(X)$ es $T_1$. □

En general la implicación contraria del Teorema 1.17 no es válida, por ejemplo, supóngase que $X$ es un conjunto de cardinalidad mayor o igual a 2, dotado de la topología indiscreta, es decir, donde el único cerrado no vacío es $X$ mismo. Entonces $X$ no es $T_1$, sin embargo, $\mathcal{CL}(X) = \{X\}$ es $T_1$.

**Proposición 1.18.** Si $X$ es un espacio $T_1$ y $\mathcal{F}_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$, entonces $X$ es $T_2$.

[6] Las definiciones de estos axiomas se pueden consultar en los Preliminares sección A.1.

*Demostración.* Sean $x, y \in X$ elementos distintos. Como $X$ es $T_1$, $\{x, y\}$ es cerrado en $X$. Por ser $\mathcal{F}_1(X)$ cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ y $\{x, y\} \notin \mathcal{F}_1(X)$, existe un abierto básico $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ tal que, $\{x, y\} \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{F}_1(X) = \varnothing$. Definimos a los abiertos $V = \bigcap\{U_i \colon x \in U_i\}$ y $U = \bigcap\{U_i \colon y \in U_i\}$ de $x$ y $y$, respectivamente. Finalmente, $U$ y $V$ son abiertos ajenos, ya que de lo contrario, si $z \in U \cap V$, entonces $z \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ lo que implica que $\{z\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{F}_1(X)$, pero esto es una contradicción. Por tanto, $X$ es $T_2$. □

**Teorema 1.19.** [18] Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces se cumplen los siguientes enunciados:

(*i*) $\mathcal{CL}(X)$ es $T_2$ si y sólo si $X$ es $T_3$.

(*ii*) Si $\mathcal{CL}(X)$ es $T_3$, entonces $X$ es $T_4$.

(*iii*) Si $X$ es $T_4$, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es $T_3$.

(*i*) *Demostración.* $\Longrightarrow$) Sean $K$ un cerrado en $X$ y $x \notin K$. Como $\mathcal{CL}(X)$ es $T_2$, existen abiertos $\mathcal{V} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ y $\mathcal{W} = \langle U'_1, U'_2, \ldots, U'_m\rangle$ tales que $K \in \mathcal{V}$, $K \cup \{x\} \in \mathcal{W}$ ($\{x\}$ es cerrado) y $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \varnothing$. Como $K \notin \mathcal{W}$ y $K \cup \{x\} \in \mathcal{W}$, existe $j_0 \leq m$ tal que $(K \cup \{x\}) \cap U'_{j_0} \neq \varnothing$ y $K \cap U'_{j_0} = \varnothing$. Si definimos al conjunto $J = \{1, 2, \ldots, m\}$, entonces el conjunto $I = \{j \in J \colon K \cap U'_j = \varnothing\} \neq \varnothing$ pues $j_0 \in I$. Observamos que $x \in U'_j$ para cada $j \in I$. Por otro lado, si definimos a $V = (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap (\bigcup_{j=1}^m U'_j)$ y $U = \bigcap_{j\in I} U'_j$, afirmamos que $V$ y $U$ son los abiertos buscados para separar a $K$ y $x$, ya que $K \subseteq V$ y $x \in U$. Ahora, supongamos que $V \cap U \neq \varnothing$ y sea $z \in V \cap U$. Entonces $K \cup \{z\} \in \mathcal{V}$ y $K \cup \{z\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m U'_j$. Además, $K \cap U'_j \neq \varnothing$ para cada $j \notin I$ y $\{z\} \subseteq \bigcap_{j\in I} U'_j$. De esto se sigue que, $(K \cup \{z\}) \cap U'_j \neq \varnothing$ para cada $j \in I \cup (J \backslash I) = J$, esto es, $K \cup \{z\} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V \cap U = \varnothing$ y $X$ es $T_3$.

$\Longleftarrow$) Sean $K$ y $K'$ cerrados distintos en $X$ y supongamos que existe $x \in K \backslash K'$. Como $X$ es un espacio $T_3$, existe un abierto $U$ tal que $x \in U$ y $\overline{U} \cap K' = \varnothing$. Observamos que como $K \cap U \neq \varnothing$, si definimos a $\mathcal{V} = \langle U\rangle^-$ y $\mathcal{W} = \left\langle X \backslash \overline{U}^X \right\rangle^+$, éstos resultan abiertos tales que $K \in \mathcal{V}$ y $K' \in \mathcal{W}$. Además, $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \varnothing$, ya que para todo $A \subseteq X$ si $A \cap U \neq \varnothing$, entonces $A \cap \overline{U}^X \neq \varnothing$.

(*ii*) Sean $K$ y $L$ cerrados ajenos no vacíos en $X$. Como $K \subseteq X \backslash L$, entonces $\langle X \backslash L\rangle^+$ es abierto de $K$. Por ser $\mathcal{CL}(X)$ un espacio $T_3$, existe un abierto básico $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ tal que

$$K \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subseteq \left\langle \overline{U_1}^X, \ldots, \overline{U_n}^X \right\rangle \subseteq \langle X \backslash L\rangle^+.$$

Si definimos a $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$, notamos que para cada $x \in \overline{U}^X = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}^X$, si tomamos $x_i \in \overline{U_i}^X$ para cada $i \leq n$, entonces el conjunto $D = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$ es cerrado en $X$ y $D \in \langle \overline{U_1}^X, \ldots, \overline{U_n}^X\rangle$, por lo que $x \in D \subseteq X \backslash L$. Como $x$ fue arbitrario, entonces $\overline{U}^X \subseteq X \backslash L$. Por tanto, los abiertos $U$ y $X \backslash \overline{U}^X$ son ajenos y contienen a $K$ y $L$ respectivamente.

(*iii*) Sean $\mathcal{K}$ un cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ y $K \in \mathcal{CL}(X)\backslash\mathcal{K}$. Definimos a $\mathcal{U}_0 = \mathcal{CL}(X)\backslash\mathcal{K}$. Como $\mathcal{U}_0$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$, existe un abierto básico $\mathcal{V} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ tal que

$$K \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_0.$$

Notamos que

$$(*) \qquad \text{para todo } K' \in \mathcal{K}, K' \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_n \text{ ó } K' \cap U_i = \varnothing \text{ para algún } i \leq n.$$

Como $X$ es $T_4$ y $K$ y $X\backslash\bigcup_{i=1}^{n} U_n$ son cerrados ajenos, existen abiertos ajenos $U'$ y $V'$ tales que

$$K \subseteq U', \qquad \text{y} \qquad X\backslash\bigcup_{i=1}^{n} U_n \subseteq V'.$$

Ahora, escogemos $x_i \in K \cap U_i$ para cada $i \leq n$. Como $X$ es $T_3$, existen abiertos ajenos $U_i'$ y $V_i'$ en $X$ tales que,

$$x_i \in U_i' \qquad \text{y} \qquad X\backslash U_i \subseteq V_i'.$$

Por último, si definimos a los abiertos

$$\mathcal{U} = \langle U'\rangle^+ \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \langle U_i'\rangle^-\right)$$
$$\mathcal{V} = \langle V'\rangle^- \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \langle V_i'\rangle^+\right).$$

Afirmamos que $K \in \mathcal{U}$, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$. La prueba de que $K \in \mathcal{U}$ es inmediata. Probemos que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$. Si $L \in \mathcal{K}$, entonces por (*), $L \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_n$ o $L \cap U_i = \varnothing$ para algún $i \leq n$. Si $L \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_n$, entonces $L \cap V' \neq \varnothing$. En el caso de que $L \cap U_i = \varnothing$ para algún $i \leq n$, se tiene que $L \subseteq V_i'$. En cualquier caso, $L \in \mathcal{V}$ y, en consecuencia, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$. Por último, si $L \in \mathcal{U}$, entonces $L \subseteq U'$ y $L \cap U_i' \neq \varnothing$ para toda $i \leq n$. Como $U'$ es ajeno a $V'$ entonces $L \cap V' = \varnothing$ y además como $U_i'$ es ajeno a $V_i'$ para cada $i \leq n$, sucede que $L \not\subseteq V_i'$ para cada $i \leq n$. Luego, $L \notin \mathcal{V}$, es decir, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$ y así $\mathcal{CL}(X)$ es $T_3$. □

Ya con los resultados expuestos hasta ahora, es natural preguntarse acerca de la normalidad del hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$. Evidentemente lo deseable es dar una caracterización de la normalidad en $\mathcal{CL}(X)$ en términos de algunas propiedades topológicas del espacio $X$, como veremos en el Capítulo 7. La solución a este problema no es tan evidente. ya que necesitamos de más herramienta para ello, sin embargo, la demostraremos. Lo que sí podemos hacer en un principio, es dar condiciones necesarias para garantizar la normalidad de $\mathcal{CL}(X)$, las cuales veremos a continuación.

**Teorema 1.20.** Si $X$ es infinito y discreto, entonces $\mathcal{CL}(X)$ no es $T_4$.

*Demostración.* Sean $X_1$ y $X_2$ subconjuntos ajenos de $X$ tales que $|X_1| = |X_2| = |X|$ (éstos existen por ser $X$ infinito) tales que $X = X_1 \cup X_2$ y sean $f_1 \colon X \to X_1$, $f_2 \colon X \to X_2$ biyecciones. Definimos al subespacio de $\mathcal{CL}(X)$:

$$\mathcal{A} = \{f_1(A) \cup f_2(X \backslash A) \colon A \subseteq X\}.$$

Para ver que $\mathcal{A}$ es discreto, tomamos $A \subseteq X$ y definimos $\mathcal{F}(A) = f_1(A) \cup f_2(X \backslash A)$. Como $X$ es discreto, el conjunto $\langle \mathcal{F}(A) \rangle$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$. Ahora, si $B \in \langle \mathcal{F}(A) \rangle \cap \mathcal{A}$, existe $C \subseteq X$ tal que $B = f_1(C) \cup f_2(X \backslash C)$. Además, como $B \subseteq \mathcal{F}(A)$, se debe cumplir que,

$$f_1(C) \subseteq f_1(A) \qquad \text{y} \qquad f_2(X \backslash C) \subseteq f_2(X \backslash A)$$

ya que $X_1$ y $X_2$ son ajenos. Más aún, por ser $f_1$ y $f_2$ biyecciones,

$$C \subseteq A \qquad \text{y} \qquad X \backslash C \subseteq X \backslash A$$

lo cual implica que $C = A$. Por tanto, $B = \mathcal{F}(A)$ y $\langle \mathcal{F}(A) \rangle \cap \mathcal{A} = \{\mathcal{F}(A)\}$ y así $\mathcal{A}$ es discreto. Para ver que $\mathcal{A}$ es cerrado, si tomamos un cerrado $B \in \mathcal{CL}(X) \backslash \mathcal{A}$, entonces

$$f_1^{-1}(B \cap X_1) \cup f_2^{-1}(B \cap X_2) \neq X.$$

Por otro lado, si tomamos al abierto $\langle B \rangle$, entonces $B \in \langle B \rangle$ y afirmamos que $\langle B \rangle$ es ajeno a $\mathcal{A}$. Para demostrar ésto, supongamos por el contrario que $C \in \langle B \rangle \cap \mathcal{A}$. Como $C \in \mathcal{A}$, existe $A \subseteq X$ tal que $C = f_1(A) \cup f_2(X \backslash A)$ y como $C \in \langle B \rangle$, $C \subseteq B$. Por lo anterior,

$$f_1(A) \subseteq B \cap X_1 \qquad \text{y} \qquad f_2(X \backslash A) \subseteq B \cap X_2,$$

con lo cual

$$A \subseteq f_1^{-1}(B \cap X_1) \qquad \text{y} \qquad X \backslash A \subseteq f_2^{-1}(B \cap X_2).$$

Pero esto implicaría que $X = A \cup (X \backslash A) \subseteq f_1^{-1}(B \cap X_1) \cup f_2^{-1}(B \cap X_2) \neq X$, lo que es una contradicción. Por tanto, $\langle B \rangle$ es ajeno a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrado.

Por último, como $|\mathcal{A}| = |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ y el conjunto $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{CL}(X) \colon |B| \in \mathbb{N}\} = \mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$ con $|\mathcal{D}| = |X|$, se cumple la desigualdad $|\mathcal{A}| \geq 2^{|\mathcal{D}|}$ y, usando el *Lema de Jones* B.24, se concluye que $\mathcal{CL}(X)$ no es $T_4$. □

Recordamos que un espacio $X$ es *numerablemente compacto* si toda cubierta abierta numerable de $X$ tiene subcubierta finita, por lo que el teorema anterior tiene un corolario casi directo acerca de esta propiedad y da una condición necesaria para que $\mathcal{CL}(X)$ sea $T_4$.

**Corolario 1.21.** Si $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$, entonces $X$ es numerablemente compacto.

*Demostración.* Por contradicción, si suponemos que $X$ no es numerablemente compacto, por el Teorema E.49, existe un subespacio $\mathcal{A}$ cerrado, discreto e infinito de $X$, donde además $\mathcal{CL}(\mathcal{A})$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ por la Proposición 1.8 y por ende $T_4$. Pero esta es una contradicción al Teorema 1.20. Por tanto, $X$ es numerablemente compacto. □

Un subespacio interesante de $\mathcal{CL}(X)$, es el espacio $\mathcal{K}(X)$. Además de ser el más grande que tiene como elementos a los compactos no vacíos de $X$, éste comparte muchas propiedades topológicas con el espacio $X$. A continuación veremos que respecto a algunos axiomas de separación, $\mathcal{K}(X)$ y $X$ resultan equivalentes.

**Teorema 1.22.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces se cumplen los siguientes enunciados:

(*i*) $\mathcal{K}(X)$ es $T_2$ si y sólo si $X$ es $T_2$.

(*ii*) $\mathcal{K}(X)$ es $T_3$ si y sólo si $X$ es $T_3$.

(*iii*) $\mathcal{K}(X)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$ si y sólo si $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.

(*i*) *Demostración.* $\Longrightarrow$) Como $\{x\}$ es compacto para todo $x \in X$, $X \simeq \mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$ por el Corolario 1.11 y por ser $\mathcal{K}(X)$ un espacio $T_2$, se concluye que $X$ es $T_2$.

$\Longleftarrow$) Sean $A, B \in \mathcal{K}(X)$ distintos. Supongamos que existe $x \in B \backslash A$. Como $X$ es $T_2$ y, $A$ y $\{x\}$ son compactos ajenos, existen abiertos ajenos $U$ y $V$ en $X$ tales que, $A \subseteq U$ y $x \in V$. Si definimos a $\mathcal{U} = \langle U \rangle \cap \mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{V} = \langle X, V \rangle \cap \mathcal{K}(X)$, estos resultan abiertos ajenos en $\mathcal{K}(X)$ que tienen como elementos a $A$ y $B$, respectivamente.

(*ii*) $\Longrightarrow$) Como $\{x\}$ es compacto para todo $x \in X$, $X \simeq \mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$ por el Corolario 1.11 y por ser $\mathcal{K}(X)$ un espacio $T_3$, se concluye que $X$ es $T_3$.

$\Longleftarrow$) Sean $A \in \mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ vecindad abierta de $A$. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, como $X$ es $T_3$ y $A$ es compacto con $A \subseteq U$, existe un abierto $V$ en $X$ tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Luego, si definimos a $V_i = U_i \cap V$ para cada $i \leq n$, entonces $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. Usando la Proposición 1.6 y el Teorema 1.4 (e), se concluye que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \mathcal{K}(X) \subseteq \overline{\langle V_1, \ldots, V_n \rangle} \cap \mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{U}$.

(*iii*) $\Longrightarrow$) Como $\{x\}$ es compacto para todo $x \in X$, $X \simeq \{\{x\} \colon x \in X\} \subseteq \mathcal{K}(X)$ y por ser $\mathcal{K}(X)$ un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, se concluye que $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.

$\Longleftarrow$) Por el Teorema 1.3 y el Teorema C.36 sólo basta probar que los elementos de la subbase en $(\mathcal{K}(X), T_V)$[7] son abiertos en la topología débil $T_w$ en $\mathcal{K}(X)$, generada por la colección de funciones $\mathcal{C}^*(\mathcal{K}(X))$, ya que por el teorema C.30 se tiene que $T_w \subseteq T_V$.

Para probar que $\mathcal{Q}^- \subseteq T_w$, sean $K \in \mathcal{K}(X)$ y $V$ un abierto en $X$, de tal manera que $K \in \langle V \rangle^-$. Tomemos $x \in K \cap V$ fijo. Como $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, por el Teorema C.36 existen funciones reales, continuas y acotadas $f_1, \ldots, f_n$, las cuales podemos suponer, sin pérdida de generalidad, son de la forma $f_1, \ldots, f_n \colon X \to [0,1]$ de

[7]Los subbasicos para el espacio $\mathcal{K}(X)$ son los conjuntos de la forma $\langle U \rangle^+ \cap \mathcal{K}(X)$ y $\langle U \rangle^- \cap \mathcal{K}(X)$, con $U$ abierto no vacío en $(X, T)$. Ya con esto, podemos referirnos a esta subbase como $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-$, donde $\mathcal{Q}^+ = \{\langle U \rangle^+ \cap \mathcal{K}(X) \colon U \in T\}$ y $\mathcal{Q}^- = \{\langle U \rangle^- \cap \mathcal{K}(X) \colon U \in T\}$.

tal manera que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((0,1]) \subseteq V$. Por la Proposición 1.9, si para cada $i \leq n$ definimos a la funciones $g_i = f_{i+}|_{\mathcal{K}(X)} \colon \mathcal{K}(X) \to [0,1]$ éstas resultan continuas. Afirmamos que $K \in \bigcap_{i=1}^{n} g_i{}^{-1}((0,1]) \subseteq \langle V\rangle^{-}$. Notamos que, como $x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((0,1])$, entonces $f_i(x) \in (0,1]$ para cada $i \leq n$ lo que implica que $g_i(K) = \sup\{f_i(z) \colon z \in K\} \in (0,1]$, es decir, $K \in \bigcap_{i=1}^{n} g_i{}^{-1}((0,1])$. Ahora, si $L \in \bigcap_{i=1}^{n} g_i{}^{-1}((0,1])$, entonces para cada $i \leq n$, $g_i(L) = \sup\{f_i(z) \colon z \in L\} \in (0,1]$. Luego, por definición de $g_i$, existe $x_i \in L$ tal que $f_i(x_i) \in (0,1]$ para cada $i \leq n$ y, por tanto, $x_i \in \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}((0,1]) \subseteq V$, es decir, $x_i \in L \cap V$ para cada $i \leq n$ y así $L \in \langle V\rangle^{-}$, de manera que $K \in \bigcap_{j=1}^{n} g_j{}^{-1}((0,1]) \subseteq \langle V\rangle^{-}$. Como $K$ y $V$ fueron arbitrarios, se concluye que $\mathcal{Q}^{-} \subseteq T_w$.

Para probar que $\mathcal{Q}^{+} \subseteq T_w$, sean $K \in \mathcal{K}(X)$ y $V$ un abierto en $X$ de tal manera que $K \in \langle V\rangle^{+}$. Si suponemos que $V \subsetneq X$, entonces como $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, por el Teorema E.65, existe una función continua $f \colon X \to [0,1]$ tal que $f|_K = 1$ y $f|_{X\setminus V} = 0$. Por la Proposición 1.9, si definimos a la función $g = f_{-}|_{\mathcal{K}(X)} \colon \mathcal{K}(X) \to [0,1]$, entonces $g$ es continua y $g(K) = 1$ y así $K \in g^{-1}((0,1])$. Por otro parte, si $L \in g^{-1}((0,1]) \cap \mathcal{K}(X)$, entonces $g(L) = \text{ínf}\{f(x) \colon x \in L\} \in (0,1]$, es decir, $f(L) \subseteq (0,1]$, de donde $L \cap (X\setminus V) = \varnothing$ y por tanto $L \in \langle V\rangle^{+}$, es decir, $K \in g^{-1}((0,1]) \subseteq \langle V\rangle^{+}$, por lo que $\langle V\rangle^{+} \cap \mathcal{K}(X) \in T_w$. El caso en que $V = X$, es inmediato, si observamos que $\langle X\rangle^{+} \cap \mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X) \in T_w$. Con lo cual queda demostrado que $\mathcal{Q}^{+} \subseteq T_w$.

Por tanto $\mathcal{Q}^{-} \cup \mathcal{Q}^{+} = \mathcal{Q} \subseteq T_w$, es decir, $T_V \subseteq T_w$, y así las topologías $T_V$ y $T_w$ coinciden en $\mathcal{K}(X)$ y por el Teorema C.36, $\mathcal{K}(X)$ resulta $T_{3\frac{1}{2}}$. $\square$

# Capítulo 2

# Axiomas de numerabilidad

En esta corto capítulo damos algunas equivalencias acerca de las ya conocidas propiedades de numerabilidad; *primero numerabilidad*, *segundo numerabilidad* y *separabilidad* en hiperespacios.

**Lema 2.1.** Si $\mathcal{B}$ es una base de $X$ tal que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo uniones finitas, entonces $\langle\mathcal{B}\rangle = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \mathcal{K}(X) \colon n \in \mathbb{N}, \forall k \leq n(U_k \in \mathcal{B})\}$ es base de $\mathcal{K}(X)$.

*Demostración.* Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \mathcal{K}(X)$ un abierto en $\mathcal{K}(X)$ y $K$ compacto tal que $K \in \mathcal{U}$. Para cada $x \in K$, podemos tomar a $B_{xi} \in \mathcal{B}$ de tal forma que $x \in B_{xi} \subseteq U_i$, para cada $i \leq n$ que cumpla la condición $x \in U_i$. Como $K$ es compacto y $\mathcal{B}^* = \{B_{xi} \colon x \in K, i \leq n\}$ es una cubierta abierta de $K$, existe una subcolección finita $\{V_1, \ldots, V_m\} \subseteq \mathcal{B}^*$ tal que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_i$. Por la elección de $\mathcal{B}^*$, la cubierta $\{V_1, \ldots, V_m\}$ cumple que para cada $j \leq m$ existe $i \leq n$ con $V_j \subseteq U_i$ si y sólo si $V_j = B_{xi}$ para alguna $x \in K$. Además podemos suponer que para cada $i \leq n$ existe $j \leq m$ tal que $V_j \subseteq U_i$. En caso de no ocurrir esto último agregamos a la cubierta $\{V_1, \ldots, V_m\}$ a lo más $n$ elementos de $\mathcal{B}^*$ que cumplan dicha propiedad. Si definimos para cada $i \leq n$ al conjunto $W_i = \bigcup\{V_j \colon V_j \subseteq U_i\}$, entonces $W_i$ resulta en un abierto tal que; (1) $W_i \subseteq U_i$, (2) $\bigcup_{j=1}^{n} W_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ y (3) $W_i \in \mathcal{B}$ (la base $\mathcal{B}$ es cerrada bajo uniones finitas). Por las condiciones (1) y (2) y la Proposición 1.6, $\langle W_1, \ldots, W_n\rangle \cap \mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{U}$. Más aún, $\{V_1, \ldots, V_m\} \subseteq \mathcal{B}$, $K \in \langle W_1, \ldots, W_n\rangle \cap \mathcal{K}(X)$ y por (3), $\langle W_1, \ldots, W_n\rangle \cap \mathcal{K}(X) \in \langle\mathcal{B}\rangle$. □

**Teorema 2.2.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces se cumplen los siguientes enunciados,

(a) $X$ es separable si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es separable.

(b) $X$ es segundo numerable si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es segundo numerable.

(c) Si $\mathcal{K}(X)$ es primero numerable, entonces $X$ es primero numerable.

*Demostración.* (a) $\Longrightarrow$) Por la Proposición 1.14 (c), si $D$ es un denso numerable en $X$, $\mathcal{F}(D)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$ con $|\mathcal{F}(D)| = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n(D)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathcal{F}_n(D)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \omega = \omega$.

$\Longleftarrow$) Sea $\mathcal{D} = \{K_n \in \mathcal{CL}(X) \colon n \in \mathbb{N}\}$ un denso numerable en $\mathcal{CL}(X)$. Si escogemos para cada $n \in \mathbb{N}$ un elemento $x_n \in K_n$, entonces afirmamos que el conjunto

$D = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $X$. Sea $U$ un abierto no vacío en $X$. Como $\langle U \rangle^+$ es un abierto no vacío en $\mathcal{CL}(X)$, existe $K_m \in \langle U \rangle^+$ para alguna $m \in \mathbb{N}$, es decir, $x_m \in K_m \subseteq U$ y por tanto $U \cap D \neq \varnothing$. Como $U$ fue arbitrario se concluye que $D$ es denso en $X$.

(b) $\Longrightarrow$) Si $X$ tiene una base numerable $\mathcal{B}$ y definimos a $\mathcal{B}' = \{\bigcup A \colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ entonces $\mathcal{B}'$ base de $X$ y es cerrada bajo uniones finitas, por lo que usando el Lema 2.1, $\langle \mathcal{B}' \rangle$ es base de $\mathcal{K}(X)$ además de ser numerable.

$\Longleftarrow$) Como $X$ es $T_1$, $X \simeq \mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$ y la segunda numerabilidad se hereda a subespacios, $X$ resulta segundo numerable.

(c) La prueba es análoga al regreso del inciso (b).

□

El regreso del Teorema 2.2 (c) no es cierto en general. Para esto se da el siguiente ejemplo. Tomemos en $\mathbb{R}^2$ a los conjuntos $S_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = i^2\}$ para $i \leq 2$ y definamos a $X = S_1 \cup S_2$. Una base para $X$ es la siguiente: si $(x, y) \in S_2$, el conjunto singular $\{(x, y)\}$ va a resultar ser un abierto en $X$. Si $(x, y) \in S_1$, $B(\delta, (x, y))$ es una bola abierta de radio $\delta > 0$ con centro en $(x, y)$ con la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y $Pr \colon S_1 \to S_2$ es la función proyección del conjunto $S_1$ sobre $S_2$. Entonces definimos al abierto $U_\delta(x, y) = (B(\delta, (x, y)) \cap S_1) \cup (Pr(B(\delta, (x, y)) \cap S_1)) \backslash \{Pr(x, y)\}$. Luego la colección $\mathcal{P} = \{\{(x, y)\} \colon (x, y) \in S_2\} \cup \{U_\delta(x, y) \colon (x, y) \in S_1 \text{ y } \delta > 0\}$ forma una base para $X$. Ya con esta topología, no es difícil ver que $X$ resulta ser un espacio primero numerable, compacto y $T_4$. Ahora si

$$K = \left(\overline{B(\delta, (0, 1))} \cap S_1\right) \cup Pr\left(\overline{B(\delta, (0, 1))} \cap S_1\right),$$

con $\delta$ tal que $K \neq X$ (por ejemplo $\delta = 1$), es sencillo comprobar que $K$ es un conjunto cerrado en $X$. Como $K$ es compacto, podemos tomar a una cantidad finita de abiertos $U_{\delta_i}(x_i, y_i)$ con $i \leq n$ tales que los conjuntos $U_{\delta_i}(x_i, y_i)$ cubren a $K \cap S_1$. Con esto observamos que si $a$ y $b$ son los puntos extremos del conjunto $K \cap S_2$, entonces el conjunto

$$\mathcal{U} = \langle U_{\delta_1}(x_1, y_1), \ldots, U_{\delta_n}(x_n, y_n), \{Pr(x_1, y_1)\}, \ldots, \{Pr(x_n, y_n)\}, \{a\}, \{b\} \rangle$$

resulta ser un abierto que tiene a $K$. Ahora Si $K \in \mathcal{V} = \langle V_1, \ldots V_m \rangle \subseteq \mathcal{U}$, por la Proposición 1.6, para cada conjunto abierto $\{Pr(x_i, y_i)\}$, $i \leq n$ debe existir $j \leq m$ tal que $V_j = \{Pr(x_i, y_i)\}$. Luego, como hay una cantidad no numerable de posibilidades de cubrir al conjunto $K$, existe una cantidad no numerable de formas posibles de tomar a los puntos $\{Pr(x_i, y_i)\}$, es decir, si $\mathcal{B}_K$ es una base local de abiertos de $K$ en $\mathcal{CL}(X)$, necesariamente debe haber una cantidad no numerable de abiertos $\mathcal{V}$ en $\mathcal{B}_K$. Por lo tanto, $\mathcal{CL}(X)$ no puede ser primero numerable, mientras que $X$ sí lo es.

El siguiente teorema da una condición suficiente para garantizar la compacidad de un espacio a partir de la segunda numerabilidad de su hiperespacio.

**Teorema 2.3.** Dado un espacio $X$, si $\mathcal{CL}(X)$ es $T_2$ y segundo numerable, entonces $X$ es compacto.

*Demostración.* Por contradicción supongamos que $X$ no es compacto. Por el Teorema E.61, $X$ no es numerablemente compacto o $X$ no es Lindelöf. Si suponemos que $X$ es numerablemente compacto, entonces al ser $\mathcal{CL}(X)$ segundo numerable, se tiene por el Teorema 2.2, que $X$ es numerablemente compacto y segundo numerable. Claramente, los espacios segundo numerables son meta-Lindelöf[1] y, por tanto, usando el Teorema E.72, $X$ resulta compacto, lo que es una contradicción, con lo cual, la suposición de que $X$ es numerablemente compacto no es válida. Ya con esto, por el Teorema E.49, existe un conjunto cerrado, discreto e infinito numerable $A$ en $X$ y, así, por el Teorema 2.2, $\mathcal{CL}(A)$ es separable. Por la Proposición 1.8, $\mathcal{CL}(A)$ es segundo numerable al ser un subespacio de $\mathcal{CL}(X)$. Si $\mathcal{B}$ es una base numerable para $\mathcal{CL}(A)$, como $A$ es discreto, si $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{CL}(A)$ y $\langle B \rangle^+$ es un abierto de $B$ y, por tanto, existe $U_B \in \mathcal{B}$ tal que $B \in U_B \subseteq \langle B \rangle^+$. Con esto notamos que si definimos a la función $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{B}$ por la correspondencia $f(B) = U_B$, entonces $f$ es inyectiva ya que si $B_1 \backslash B_2 \neq \varnothing$, se tiene que $B_1 \in U_{B_1}$ y $B_1 \notin U_{B_2}$ por lo que $f(B_1) = U_{B_1} \neq U_{B_2} = f(B_2)$, pero esto implicaría que $\aleph_0 < |\mathcal{CL}(A)| \leq |\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{B}| \leq \aleph_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $X$ es compacto. $\square$

[1] La definición de espacio *meta-Lindelof* se encuentra en los Preliminares sección E.5.

# Capítulo 3

# Compacidad y convergencia en hiperespacios

## 3.1. Compacidad

En esta sección mostramos que ciertas propiedades relacionadas con la compacidad de $\mathcal{CL}(X)$ pueden ser obtenidas a partir de la compacidad de $X$ y viceversa. A partir de aquí será conveniente pedir al espacio $X$ ser $T_3$ y como ya vimos en el Teorema 1.19, esto resulta equivalente a pedirle al hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ ser $T_2$.

El primer resultado que demostramos tiene que ver con la compacidad de $\mathcal{CL}(X)$, la cual resulta ser equivalente a la compacidad de $X$.

**Teorema 3.1.** Un espacio $X$ es compacto si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es compacto.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Sea $\mathfrak{U} = \{\langle U_\alpha\rangle^+ \colon \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{\langle U_\beta\rangle^- \colon \beta \in \mathcal{B}\}$ una cubierta abierta de subbásicos de $\mathcal{CL}(X)$ y definimos al cerrado $Y = X \setminus \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} U_\beta$. En el primer caso, si $Y = \varnothing$, entonces $X = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} U_\beta$ y como $X$ es compacto, existen $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{m} U_{\beta_j}$. Luego, $\mathcal{CL}(X) \subseteq \bigcup\{\langle U_{\beta_1}\rangle^-, \ldots, \langle U_{\beta_m}\rangle^-\}$. En caso de que $Y \neq \varnothing$, se tendría que $Y \notin \langle U_\beta\rangle^-$ para todo $\beta \in \mathcal{B}$. Como $\mathfrak{U}$ es una cubierta de $\mathcal{CL}(X)$, entonces $Y \subseteq U_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, con lo cual $X\setminus U_{\alpha_0} \subseteq X \setminus Y = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} U_\beta$. Como $X\setminus U_{\alpha_0}$ es un cerrado no vacío de $X$, este resulta compacto, luego existen $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $X\setminus U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{\beta_j}$. De aquí se sigue que, $\mathcal{CL}(X) \subseteq \langle U_{\alpha_0}\rangle^+ \cup \bigcup\{\langle U_{\beta_i}\rangle^-, \ldots, \langle U_{\beta_m}\rangle^-\}$.

$\Longleftarrow$) Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha \subseteq X \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta de $X$. Si definimos a la colección $\mathfrak{V} = \{\langle X, U_\alpha\rangle \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$, ésta es una cubierta abierta de $\mathcal{CL}(X)$. Por la compacidad de $\mathcal{CL}(X)$ existe una subcubierta finita $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{V}$ de $\mathcal{CL}(X)$, digamos $\mathfrak{F} = \{\langle X, U_{\alpha_1}\rangle, \ldots, \langle X, U_{\alpha_n}\rangle\}$. Si tomamos a la colección $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\} \subseteq \mathfrak{U}$, ésta resulta una cubierta finita de $X$, ya que para todo $x \in X$ existe $m \leq n$ tal que $\{x\} \in \langle X, U_{\alpha_m}\rangle$ si y sólo si $x \in U_{\alpha_m}$. $\square$

**Corolario 3.2.** Si $X$ es un espacio compacto, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$.

*Demostración.* Usando los Teoremas 3.1 y E.45 la prueba es inmediata. $\square$

Ahora veremos que el inciso (*iii*) del Teorema 1.19 tiene una versión más fuerte con respecto al axioma $T_{3\frac{1}{2}}$ y para ello necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 3.3.** Si $X$ es $T_4$ y definimos a la función $\mathcal{F}\colon \mathcal{CL}(X) \to \mathcal{CL}(\beta X)$[1] por la correspondencia $\mathcal{F}(K) = \overline{K}^{\beta X}$, entonces $\mathcal{F}$ es un encaje[2].

*Demostración.* Si $K, K' \in \mathcal{CL}(X)$ son tales que $\mathcal{F}(K) = \overline{K}^{\beta X} = \overline{K'}^{\beta X} = \mathcal{F}(K')$, entonces $K = \mathcal{F}(K) \cap X = \mathcal{F}(K') \cap X = K'$, por tanto $\mathcal{F}$ es inyectiva.

Lo que tenemos que demostrar ahora es que tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F}^{-1}$ son continuas. Empezando con $\mathcal{F}$, sean $K \in \mathcal{CL}(X)$ y $\mathcal{V} = \langle U_1, U_2, \dots U_n\rangle$ un abierto básico en $\mathcal{CL}(\beta X)$ tales que $\mathcal{F}(K) \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{F}(K) \cap U_i \neq \varnothing$, entonces $K \cap U_i \neq \varnothing$, para toda $i \leq n$. Por el Teorema 3.1, $\beta X$ es un espacio compacto y por tanto $T_4$ por el Teorema E.45. Luego, por el Teorema A.14, existen abiertos $V_i$ en $\beta X$ tales que,

$$K \cap \overline{U_i}^{\beta X} \subseteq \mathcal{F}(K) \cap \overline{U_i}^{\beta X} \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i}^{\beta X} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j.$$

y por tanto,

$$\varnothing \neq K \cap U_i = \left(K \cap \overline{U_i}^{\beta X}\right) \cap U_i \subseteq V_i \cap U_i \subseteq U_i.$$

Ahora, si definimos a $\mathcal{U} = \langle (V_1 \cap U_1) \cap X, (V_2 \cap U_2) \cap X, \dots, (V_n \cap U_n) \cap X\rangle$, entonces se cumplen las siguientes condiciones,

1. $\mathcal{U}$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$;
2. $K = \overline{K}^{\beta X} \cap X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} [(V_i \cap U_i) \cap X]$;
3. $K \cap [(V_i \cap U_i) \cap X] \neq \varnothing$ para toda $i \leq n$;
4. $K \in \mathcal{U}$.

Sea $K' \in \mathcal{U}$. Como $K' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} [(V_i \cap U_i) \cap X]$, entonces

$$\mathcal{F}(K') = \overline{K'}^{\beta X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{[(V_i \cap U_i) \cap X]}^{\beta X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{(V_i \cap X)}^{\beta X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}^{\beta X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Más aún, para toda $i \leq n$,

$$\varnothing \neq K' \cap [(V_i \cap U_i) \cap X] \subseteq K' \cap U_i \subseteq \mathcal{F}(K') \cap U_i.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}(K') \in \mathcal{V}$, lo que prueba que $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$, es decir, $\mathcal{F}$ es continua.

[1] La definición del espacio $\beta X$ se puede consultar en los Preliminares sección G.7.

[2] Decimos que una función $f\colon X \to Y$ es un encaje, si $f$ es un homeomorfismo en su imagen.

Ahora mostremos que $\mathcal{F}^{-1}$ es continua. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ un abierto de $K$ en $\mathcal{CL}(X)$. Como $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, entonces $K \cap B = \varnothing$ donde $B = \bigcap_{i=1}^n (X \backslash U_i)$. Como $X$ un espacio $T_4$, el *Lema de Urysohn* B.21 nos garantiza que existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f|_K = 0$ y $f|_B = 1$. Por la propiedad universal de $\beta X$, existe una única extensión continua $F\colon \beta X \to [0,1]$ de $f$. Por continuidad de $F$,

$$F\left(\overline{K}^{\beta X} \cap \overline{B}^{\beta X}\right) \subseteq F\left(\overline{K}^{\beta X}\right) \cap F\left(\overline{B}^{\beta X}\right) \subseteq \overline{F(K)} \cap \overline{F(B)}$$

donde el lado derecho de la última contención, equivale a la expresión

$$\overline{f(K)} \cap \overline{f(B)} = \overline{\{0\}} \cap \overline{\{1\}} = \{0\} \cap \{1\} = \varnothing,$$

ya que $F(K) = f(K)$ y $F(B) = f(B)$ por ser $F$ extensión de $f$. Esto implica que $\overline{K}^{\beta X} \cap \overline{B}^{\beta X} = \varnothing$. Por el Lema G.87, $\overline{B}^{\beta X} = \bigcap_{i=1}^n \overline{(X \backslash U_i)}^{\beta X}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(K) = \overline{K}^{\beta X} &\subseteq \beta X \backslash \overline{B}^{\beta X} \\ &= \beta X \backslash \left( \bigcap_{i=1}^n \overline{(X \backslash U_i)}^{\beta X} \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \beta X \backslash \left[ \overline{(X \backslash U_i)}^{\beta X} \right] = \bigcup_{i=1}^n V_i \end{aligned}$$

donde $V_i = \beta X \backslash \left[ \overline{(X \backslash U_i)}^{\beta X} \right]$ es abierto en $\beta X$, para toda $i \leq n$. Tomamos al abierto $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle$ en $\mathcal{CL}(\beta X)$. Para ver que $\mathcal{F}(K) \in \mathcal{V}$, basta demostrar que $\mathcal{F}(K) \cap V_i \neq \varnothing$ para cada $i \leq n$. Si suponemos lo contrario, entonces $\overline{K}^{\beta X} \subseteq \overline{(X \backslash U_i)}^{\beta X}$ para alguna $j \leq n$, lo que implica que

$$K = \overline{K}^{\beta X} \cap X \subseteq \overline{(X \backslash U_j)}^{\beta X} \cap X = \overline{X \backslash U_j}^{X} = X \backslash U_j.$$

Esto contradice el hecho de que $K \in \mathcal{U}$. De manera que $\mathcal{V}$ es un abierto de $\mathcal{F}(K)$. Basta probar que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$. Si $L \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V})$, entonces $\overline{L}^{\beta X} \in \mathcal{V}$. Como $\overline{L}^{\beta X} \cap V_i \neq \varnothing$ para cada $i \leq n$, se tiene que $L \cap V_i \neq \varnothing$ para cada $i \leq n$. Si ahora suponemos que $L \cap U_i = \varnothing$ para alguna $i \leq n$, entonces $L \subseteq \overline{X \backslash U_i}^{\beta X}$ y así $L \cap V_i = L \cap \left(\beta X \backslash [\overline{(X \backslash U_i)}^{\beta X}]\right) = \varnothing$, lo cual es una contradicción. Por tanto $L \cap U_i \neq \varnothing$ para toda $i \leq n$. Por otro lado, como $\overline{L}^{\beta X} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i = \bigcup_{i=1}^n \beta X \backslash \left[ \overline{(X \backslash U_i)}^{\beta X} \right]$, se tiene que

$$L \subseteq \overline{L}^{\beta X} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i = \bigcup_{i=1}^n \beta X \backslash \left[ \overline{(X \backslash U_i)}^{\beta X} \right] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \beta X \backslash [(X \backslash U_i)],$$

y como $L \subset X$, entonces $L \subseteq \bigcup_{i=1}^n X \backslash [(X \backslash U_i)]$. Como $L$ fue arbitrario, se concluye que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$, y así $\mathcal{F}^{-1}$ es continua sobre $\mathcal{F}(\mathcal{CL}(X))$, es decir, $\mathcal{F}$ es un encaje. $\square$

**Corolario 3.4.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(*i*) $X$ es $T_4$.

(*ii*) $\mathcal{CL}(X)$ es $T_3$.

(*iii*) $\mathcal{CL}(X)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.

*Demostración.* Por el Teorema 1.19, basta demostrar que (*i*) implica (*iii*). Como $X$ es $T_4$, por el Lema 3.3, obtenemos que $\mathcal{CL}(X)$ se encaja en $\mathcal{CL}(\beta X)$. Más aún, si $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es un abierto en $\mathcal{CL}(\beta X)$, entonces $U_i \cap X \neq \varnothing$ para cada $i \leq n$ ya que $X$ es denso en $\beta X$. Luego, tomando a $x_i \in U_i \cap X$ para cada $i \leq n$, el conjunto $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es cerrado tanto en $X$ como en $\beta X$ y por tanto $D \in \mathcal{U} \cap \mathcal{CL}(X)$. Como $\mathcal{U}$ fue un abierto arbitrario se concluye que $\mathcal{CL}(X)$ es denso $\mathcal{CL}(\beta X)$. Por lo tanto, haciendo uso del Teorema 3.1, garantizamos la compacidad de $\mathcal{CL}(\beta X)$, por lo que éste espacio es una compactación de $\mathcal{CL}(X)$, pero esto sólo puede ocurrir si $\mathcal{CL}(X)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$. □

A partir de los resultados anteriores se desprenden una serie de equivalencias que ligan a la compacidad de un hiperespacio con la *paracompacidad* y la propiedad *de Lindelöf* del espacio base. Los Teoremas E.63 y E.64, nos indican que al tener un espacio *de Lindelöf* y $T_3$, éste resulta $T_4$. Más aún, usando el Corolario 3.4, podemos expresar ésto en términos de hiperespacios como sigue.

**Teorema 3.5.** Si $X$ es un espacio *de Lindelöf* y $T_3$ entonces $\mathcal{CL}(X)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.

De hecho podemos decir más acerca de la normalidad de $\mathcal{CL}(X)$. Si $\mathcal{CL}(X)$ es $T_2$, entonces por el Teorema 3.5, $\mathcal{CL}(X)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$. Si además suponemos que $\mathcal{CL}(X)$ es *de Lindelöf*, entonces éste resulta $T_4$ aplicando los Teoremas E.63 y E.64. De esta observación se obtienen los siguientes resultados.

**Corolario 3.6.** Dado un espacio $X$, si $\mathcal{CL}(X)$ es *de Lindelöf* y $T_2$, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$.

**Corolario 3.7.** Dado un espacio $X$, si $\mathcal{CL}(X)$ es *de Lindelöf* y $T_2$, entonces $X$ es compacto.

*Demostración.* Pensamos a $X$ como subespacio cerrado de $\mathcal{CL}(X)$ por la Proposición 1.13. Como $\mathcal{CL}(X)$ es *de Lindelöf*, entonces $X$ es *de Lindelöf*. Haciendo uso de los Corolarios 3.6 y 1.21, $X$ resulta numerablemente compacto. Por el Teorema E.61, $X$ es compacto. □

Con los resultados anteriores ahora mostramos el siguiente teorema que caracteriza la compacidad en los hiperespacios.

**Teorema 3.8.** Si $X$ es un espacio $T_3$, los siguientes enunciados son equivalentes;

(a) $X$ es *compacto*.

(b) $\mathcal{CL}(X)$ es *compacto*.

(c) $\mathcal{CL}(X)$ es *de Lindelöf*.

(d) $\mathcal{CL}(X)$ es *paracompacto*.

(e) $\mathcal{CL}(X)$ es *metacompacto.*

(f) $\mathcal{CL}(X)$ es *meta-Lindelöf.*

*Demostración.* (a) $\Longrightarrow$ (b) Es inmediato utilizando el Teorema 3.1.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Es inmediato utilizando el Teorema E.61.

(c) $\Longrightarrow$ (d) Por el Corolario 3.6, $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$. Luego, por el Teorema E.63, $\mathcal{CL}(X)$ es paracompacto.

(d) $\Longrightarrow$ (e) Se sigue del Teorema E.67.

(e) $\Longrightarrow$ (f) Se sigue del Teorema E.67.

(f) $\Longrightarrow$ (a) Primero vamos a demostrar que $X$ es numerablemente compacto. Si suponemos lo contrario, por el Teorema E.49, existe un subespacio $D$ cerrado, discreto e infinito de $X$. Si tomamos a un subespacio numerable $D_0$ de $D$, se sigue que $D_0$ es cerrado, discreto e infinito numerable. Por el teorema 2.2 (a) y la Proposición 1.8, $\mathcal{CL}(D_0)$ es separable y cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ y, en consecuencia, separable y meta-Lindelöf. Por el Teorema E.68, $\mathcal{CL}(D_0)$ es Lindelöf. Luego, usando el Corolario 3.6, $\mathcal{CL}(D_0)$ es $T_4$, lo que es una contradicción debido al Teorema 1.20. Luego, $X$ es numerablemente compacto. Además, como $X$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathcal{CL}(X)$, por la Proposición 1.13, se tiene que $X$ es meta-Lindelöf. Por tanto, como $X$ es numerablemente compacto y meta-Lindelöf, por el Teorema E.72, $X$ es compacto. □

## 3.2. Convergencia en hiperespacios

Hasta el momento hemos trabajado en la caracterización de la compacidad para el espacio $\mathcal{CL}(X)$ pero no para sus subespacios y para tratar este tema, daremos una breve introducción acerca de la convergencia en espacios de conjuntos[3].

Dado un conjunto $\Lambda$, decimos que la pareja ordenada $(\Lambda, \preceq)$ forma un ***conjunto dirigido*** si la relación $\preceq$ es reflexiva, transitiva y para cada $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ existe $\mu \in \Lambda$ tal que $\lambda \preceq \mu$ y $\lambda' \preceq \mu$.

Una ***red de subonjuntos*** en un espacio topológico $X$ es una función $\psi\colon \Lambda \to \mathcal{P}(X)$ donde $(\Lambda, \preceq)$ es un conjunto dirigido. Para simplificar notación, si $\psi(\lambda) = A_\lambda$ sólo escribiremos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ para denotar a dicha red. Un subconjunto $R \subseteq \Lambda$ es ***residual*** en $(\Lambda, \preceq)$ si existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mu \in R$ para toda $\mu \succeq \lambda$. Un subconjunto $C \subseteq \Lambda$ es ***cofinal*** en $(\Lambda, \preceq)$ si para toda $\lambda \in \Lambda$ existe $\mu \in C$ tal que $\mu \succeq \lambda$.

**Definición 3.9.** Dado un espacio topológico $X$ y una red $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de $X$.

[3]Para una definición de *red* de elementos en un espacio topológico $X$ revisar los Preliminares sección D.4.

a) Un punto $x$ es un ***punto límite*** de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si para cada abierto $U$ de $x$ el conjunto $\{\lambda \in \Lambda \colon A_\lambda \cap U \neq \varnothing\}$ es residual en $(\Lambda, \preceq)$. Denotamos a $\mathbf{Li}A_\lambda$ como el conjunto de puntos límite de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

b) Un punto $x$ es un ***punto de acumulación*** de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si para cada abierto $U$ de $x$ el conjunto $\{\lambda \in \Lambda \colon A_\lambda \cap U \neq \varnothing\}$ es cofinal en $(\Lambda, \preceq)$. Denotamos a $\mathbf{Ls}A_\lambda$ como el conjunto de puntos de acumulación de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Como estamos trabajando en hiperespacios de cerrados, es deseable que al tratar con redes de subconjuntos, la convergencia de éstas pertenezca al mismo hiperespacio, es decir, su "límite" o punto al que convergen sea un conjunto cerrado.

**Proposición 3.10.** Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red de subconjuntos de un espacio $X$, entonces

$$\mathbf{Li}A_\lambda = \bigcap \left\{ \overline{\bigcup_{\lambda\in\Sigma} A_\lambda} \colon \Sigma \text{ es cofinal en } \Lambda \right\}$$

$$\mathbf{Ls}A_\lambda = \bigcap \left\{ \overline{\bigcup_{\lambda\in\Sigma} A_\lambda} \colon \Sigma \text{ es residual en } \Lambda \right\}$$

y así definimos a $\mathbf{Li}A_\lambda$ y $\mathbf{Ls}A_\lambda$ como el límite inferior y superior de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, respectivamente. Como consecuencia inmediata, $\mathbf{Li}A_\lambda$ y $\mathbf{Ls}A_\lambda$ son cerrados en $X$ y, por tanto, son elementos de $\mathcal{CL}_\varnothing(X)$.

*Demostración.* Sean $x \in \mathbf{Li}A_\lambda$ y $\Sigma$ un subconjunto cofinal de $\Lambda$. Como $x$ es un punto límite, dado un abierto $U$ de $x$, el conjunto $\{\lambda \in \Lambda \colon A_\lambda \cap U \neq \varnothing\}$ es residual, por tanto, existe $\lambda'$ tal que $A_\lambda \cap U \neq \varnothing$, si $\lambda \succeq \lambda'$. Al ser $\Sigma$ cofinal, existe $\mu \succeq \lambda'$ con $\mu \in \Sigma$, de tal forma que $A_\mu \cap U \neq \varnothing$, lo cual implica que $U \cap (\bigcup_{\lambda\in\Sigma} A_\lambda) \neq \varnothing$ y como $U$ fue arbitrario, $x \in \overline{\bigcup_{\lambda\in\Sigma} A_\lambda}$. Para la otra contención, si $x \notin \mathbf{Li}A_\lambda$, entonces existe un abierto $U$ que contiene a $x$ tal que el conjunto $\{\lambda \in \Lambda \colon A_\lambda \cap U \neq \varnothing\}$ no es residual, o de forma equivalente, el conjunto $\Sigma = \{\lambda \in \Lambda \colon A_\lambda \cap U = \varnothing\}$ es cofinal. En conclusión, para toda $\lambda \in \Sigma$, $A_\lambda \cap U = \varnothing$, es decir, $x \notin \overline{\bigcup_{\lambda\in\Sigma} A_\lambda}$. La igualdad para el conjunto $\mathbf{Ls}A_\lambda$ se resuelve de forma análoga. □

**Definición 3.11.** Dada una red $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de un espacio $X$, decimos que ésta converge en el sentido de ***Kuratowski-Painlevé*** a un subconjunto $A \subseteq X$, si $A = \mathbf{Li}A_\lambda = \mathbf{Ls}A_\lambda$ y, en este caso, escribimos $\mathbf{K\text{-}Lim}A_\lambda = A$.

La definición anterior nos da una herramienta para tratar la convergencia en redes de espacios de conjuntos, en particular, para el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$. Hacemos notar que la convergencia en el sentido de Kuratowski-Painlevé no es equivalente a la convergencia en Vietoris[4]. Por ejemplo, si consideramos a $\mathbb{R}$ con la topología usual, entonces la colección anidada de cerrados $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $F_n = [n, \infty)$ cumple que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \varnothing$ y, en consecuencia, $\mathbf{K\text{-}Lim}F_i = \varnothing \notin \mathcal{CL}(\mathbb{R})$, es decir, $\mathbf{V\text{-}Lim}F_i$ no existe ya que $\mathbf{V\text{-}Lim}$ no puede tomar como valor límite al conjunto vacío. Pese a esto, la convergencia en

[4] La convergencia en Vietoris es simplemente la convergencia de una red en un hiperespacio generado por la topología $T_V$, la cual denotamos por $\mathbf{V\text{-}Lim}$.

Kuratowski-Painlevé es muy útil para encontrar límites de subconjuntos cerrados, con la cual damos una forma equivalente de tratar la convergencia en un hiperespacio.

Recordando el Teorema 1.3, las colección $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+$ y $\mathcal{P}^-$ forma una subbase para $\mathcal{CL}(X)$. De igual manera podemos definir para $\mathcal{CL}(X)$ dos topologías más pequeñas: la generada por la base de abiertos $\mathcal{P}^+$ y la generada por la subbase de abiertos $\mathcal{P}^-$, las cuales denotamos por *topología superior de Vietoris* $T_{V^+}$ y *topología inferior de Vietoris* $T_{V^-}$, respectivamente. Definimos estas dos topologías para dar un criterio sobre la convergencia **V-Lim** y **K-Lim**. Para ello mostramos algunos resultados previos.

**Definición 3.12.** Dados los espacios topológicos $(X, T_1)$ y $(X, T_2)$ definimos el nuevo espacio $(X, T_1 \vee T_2)$ donde $T_1 \vee T_2$ es la topología generada por los conjuntos $U \cap V$, donde $U \in T_1$ y $V \in T_2$. A $T_1 \vee T_2$ se le suele llamar la **topología supremo**[5] respecto a $T_1$ y $T_2$.

**Proposición 3.13.** Dada una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de un espacio $X$ y $x_0 \in X$. Entonces $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $x_0$ en $(X, T_1 \vee T_2)$ si y sólo si $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $x_0$ en $(X, T_1)$ y $(X, T_2)$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Esta implicación es directa usando que $T_1 \subseteq T_1 \vee T_2$ y $T_2 \subseteq T_1 \vee T_2$.

$\Longleftarrow$) Sea $U \cap V$ un abierto básico de $x_0$ en $(X, T_1 \vee T_2)$. Como $x_0$ es un punto límite en $(X, T_1)$ y $(X, T_2)$, los conjuntos $\{\lambda \in \Lambda \colon \{x_\lambda\} \cap U \neq \varnothing\}$ y $\{\lambda \in \Lambda \colon \{x_\lambda\} \cap V \neq \varnothing\}$ resultan residuales. Usando el hecho de que $\Lambda$ es un conjunto dirigido, es sencillo verificar que el conjunto $\{\lambda \in \Lambda \colon \{x_\lambda\} \cap U \cap V \neq \varnothing\}$ es residual. $\square$

Por el Teorema 1.3, $T_V = T_{V^+} \vee T_{V^-}$, por lo tanto podemos aplicar la Proposición 3.13 a un hiperespacio como sigue.

**Proposición 3.14.** Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red de subconjuntos de $X$ y $A \subseteq X$. Entonces **V-Lim**$A_\lambda = A$ si y sólo si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $A$ en $(\mathcal{CL}(X), T_{V^+})$ y $(\mathcal{CL}(X), T_{V^-})$.

Ya con lo visto hasta ahora, podemos mostrar la siguiente proposición que relaciona a la convergencia Kuratowski-Painlevé con la convergencia en el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$.

**Proposición 3.15.** Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red de subconjuntos no vacíos de $X$, entonces $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a **K-Lim**$A_\lambda$ en $(\mathcal{CL}(X), T_{V^-})$ si **K-Lim**$A_\lambda$ existe y es no vacío.

*Demostración.* Supongamos que **K-Lim**$A_\lambda = A \neq \varnothing$ y sea $\langle U_1\rangle^- \cap \cdots \cap \langle U_n\rangle^-$ un abierto básico de $A$ en $T_{V^-}$. Si $x_i \in A \cap U_i$=**Li**$A_\lambda \cap U_i$ para cada $i \leq n$, entonces existe $\lambda_i \in \Lambda$ tal que $A_\lambda \cap U_i \neq \varnothing$ para toda $\lambda \succeq \lambda_i$. Como $\Lambda$ es un conjunto dirigido, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda_0 \succeq \lambda_i$ para cada $i \leq n$. Con esto, si $\lambda \succeq \lambda_0$, entonces $A_\lambda \in \langle U_1\rangle^- \cap \ldots \cap \langle U_n\rangle^-$. Por tanto $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $A$ en $(\mathcal{CL}(X), T_{V^-})$. $\square$

El lema siguiente es consecuencia inmediata de la proposición 3.15.

**Lema 3.16.** Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red de cerrados no vacíos de un espacio $X$ y $A \subseteq X$. Entonces **V-Lim**$A_\lambda = A$ si **K-Lim**$A_\lambda = A$ y $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $A$ en $(\mathcal{CL}(X), T_{V^+})$.

[5] Se le llama topología supremo debido a que la colección de espacios topológicos de un conjunto $X$ forma una retícula con respecto a la inclusión.

Las redes en un espacio topológico resultan importantes por su utilidad en la caracterización de la compacidad del mismo: un espacio $X$ es compacto si y sólo si toda red tiene una subrred convergente en $X$. El siguiente teorema debido a *S. Mrówka* muestra que se puede prescindir de la propiedad de compacidad a un espacio para que una red tenga una subrred convergente en el sentido de Kuratowski-Painlevé.

**Teorema de Mrówka 3.17.** [2] Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red de subconjuntos de $X$, entonces $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene una subrred convergente en el sentido de Kuratowski-Painlevé.

*Demostración.* Sea $\mathcal{B}$ una base para el espacio $X$ y $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red de elementos en $\mathcal{CL}(X)$. Si dotamos al conjunto $\{0,1\}$ con la topología discreta, los elementos del espacio producto $\{0,1\}^{\mathcal{B}}$ pueden ser vistos como funciones; $g\colon \mathcal{B}\to\{0,1\}$. Para cada $\lambda\in\Lambda$ y para cualquier $U\in\mathcal{B}$ definimos;

$$f_\lambda(U)=\begin{cases}1 & \text{si } A_\lambda\cap U\neq\varnothing\\ 0 & \text{si } A_\lambda\cap U=\varnothing\end{cases}$$

Por el *Teorema de Tychonoff*, $\{0,1\}^{\mathcal{B}}$ resulta compacto y por tanto la red $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene una subrred convergente $\{f_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$.

Supongamos que $\{f_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ converge a $f$, que $\mathcal{B}$ es enumerado por un ordinal $\alpha$, es decir, $\mathcal{B}=\{U_\gamma\colon\gamma<\alpha\}$ y que $\{0,1\}^{\mathcal{B}}=\prod_{\gamma<\alpha}\{0,1\}$. Si $f(U_\beta)=1$ para algún $\beta<\alpha$, entonces el básico $\{1\}\times\prod_{\gamma\neq\beta}\{0,1\}$ es un abierto de $f$ y por tanto existe $\lambda_0'\in\Lambda'$ tal que $f_{\lambda'}\in\{1\}\times\prod_{\gamma\neq\beta}\{0,1\}$ si y sólo si $f_{\lambda'}(U_\beta)=1$ si y sólo si $A_{\lambda'}\cap U_\beta\neq\varnothing$ para toda $\lambda'\succeq\lambda_0'$. Afirmamos que $\mathbf{Ls}A_{\lambda'}\subseteq\mathbf{Li}A_{\lambda'}$. Dado $x\in\mathbf{Ls}A_{\lambda'}$ y $U_\beta\in\mathcal{B}$ abierto de $x$ en $X$ solo bastaría probar que $f(U_\beta)=1$. Si suponemos por contradicción que $f(U_\beta)=0$, entonces existiría $\lambda_1'\in\Lambda'$ tal que si $\mu\succeq\lambda_1'$ entonces $f_\mu\in\{0\}\times\prod_{\gamma\neq\beta}\{0,1\}$, y por tanto, $A_\mu\cap U_\beta$ sería vacío eventualmente, contradiciendo el hecho de que $x\in\mathbf{Ls}A_{\lambda'}$, por lo tanto $f(U_\beta)=1$, y así $x\in\mathbf{Li}A_{\lambda'}$. Como además se tiene la contención evidente $\mathbf{Li}A_{\lambda'}\subseteq\mathbf{Ls}A_{\lambda'}$, se obtiene que $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ es una subrred convergente en Kuratowski-Painlevé, haciendo notar que $\mathbf{K}\text{-}\mathbf{Lim}A_{\lambda'}\in\mathcal{CL}_\varnothing(X)$. $\square$

Para finalizar esta sección damos el teorema que caracteriza a los conjuntos compactos de un hiperespacio en términos de sus elementos, cuya demostración requiere del apoyo de la convergencia Kuratowski-Painlevé.

**Teorema 3.18.** Si $X$ es un espacio $T_3$ y $\mathcal{K}$ es un subespacio de $\mathcal{CL}(X)$. Entonces $\mathcal{K}$ es compacto si y sólo si $\mathcal{K}$ es cerrado y se cumple la siguiente condición;

$$(*)\qquad \begin{aligned}&\text{para todo } K\in\mathcal{CL}(X),\text{para toda } \mathfrak{U} \text{ cubierta abierta de } K \text{ en } X,\\ &\text{existe una subcubierta finita } \mathfrak{F} \text{ de } \mathfrak{U} \text{ tal que } \langle K\rangle^-\cap\mathcal{K}\subseteq\bigcup_{F\in\mathfrak{F}}\langle F\rangle^-.\end{aligned}$$

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Dado un subespacio compacto $\mathcal{K}$ de $\mathcal{CL}(X)$, la condición de ser cerrado resulta inmediata al ser $\mathcal{CL}(X)$ un espacio $T_2$. Ahora, sea $K$ cerrado no vacío en $X$ y $\mathfrak{U}$ cubierta abierta de $K$. Notamos que $\langle K\rangle^-\cap\mathcal{K}$ resulta cerrado en $\mathcal{K}$ y por tanto compacto. Consideremos a la colección $\mathfrak{V}=\{\langle U\rangle^-\colon U\in\mathfrak{U}\}$ y mostremos que ésta es una cubierta abierta de $\langle K\rangle^-\cap\mathcal{K}$. Dado $A\in\langle K\rangle^-\cap\mathcal{K}$, como $A\cap K\neq\varnothing$ y $\mathfrak{U}$ es cubierta de $K$, existe $U\in\mathfrak{U}$ tal que $(A\cap K)\cap U\neq\varnothing$ lo que implica que $A\cap U\neq\varnothing$

y así $\mathfrak{V}$ es cubierta abierta de $\langle K\rangle^{-} \cap \mathcal{K}$. Como $\langle K\rangle^{-} \cap \mathcal{K}$ es compacto, existe una subcubierta $\{\langle U_1\rangle^{-}, \ldots, \langle U_n\rangle^{-}\}$ de $\mathfrak{V}$ tal que $\langle K\rangle^{-} \cap \mathcal{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \langle U_i\rangle^{-}$. Luego definiendo a $\mathfrak{F} = \{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathfrak{U}$ se obtiene el resultado.

$\Longleftarrow$) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red de elementos en $\mathcal{K}$. Por el Teorema de Mrowka 3.17, existe una subrred $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ con $\mathbf{K\text{-}Lim}A_{\lambda'} = A$ para algún $A \in \mathcal{CL}_{\varnothing}(X)$. Supongamos que $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ no converge a $A$ en $(\mathcal{CL}_{\varnothing}(X), T_{V^+})$, es decir, existe un abierto básico $\langle U\rangle^{+}$ de $A$ en el cual $\{\lambda' \in \Lambda' \colon A_{\lambda'} \subseteq U\}$ no es residual. Como $X\backslash U \subseteq X\backslash A = X\backslash \mathbf{Ls}A_{\lambda'}$ y $U \neq X$ (si $U = X$, $\{\lambda' \in \Lambda' \colon A_{\lambda'} \subseteq U\}$ sería residual), cada $x \in X\backslash U$ no es punto de acumulación de $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ y por consiguiente existe una vecindad abierta $U_x$ de $x$ de tal forma que $\{\lambda' \in \Lambda' \colon A_{\lambda'} \cap U_x \neq \varnothing\}$ no es cofinal o equivalentemente existe $\lambda'_x \in \Lambda'$ de tal modo que $U_x \cap A_{\lambda'} = \varnothing$, para $\lambda' \succeq \lambda'_x$. Ahora si definimos a $\mathfrak{U} = \{U_x \colon x \in X\backslash U\}$, ésta es una cubierta abierta (no vacía) del conjunto cerrado $X\backslash U$. Usando la hipótesis (*), existe una subcubierta finita $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{U}$, digamos $\mathfrak{F} = \{U_{x1}, \ldots U_{xn}\}$ que cumple: $\langle X\backslash U\rangle^{-} \cap \mathcal{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \langle U_{xi}\rangle^{-}$. Si elegimos a $\mu \in \Lambda'$ tal que $\mu \succeq \lambda'_{xi}$ para cada $i \leq n$, entonces $U_{xi} \cap A_{\lambda'} = \varnothing$ para $\lambda' \succeq \mu$. Por lo anterior, como $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'} \subseteq \mathcal{K}$ si $\lambda' \succeq \mu$, $(X\backslash U) \cap A_{\lambda'} = \varnothing$ si y sólo si $A_{\lambda'} \subseteq U$, lo cual contradice el hecho de que $\{\lambda' \in \Lambda' \colon A_{\lambda'} \subseteq U\}$ no sea residual. Por tanto, $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ converge a $A$ en $(\mathcal{CL}_{\varnothing}(X), T_{V^+})$. Además, como el conjunto vacío en un punto aislado en $\mathcal{CL}_{\varnothing}(X)$ se tiene que $A \neq \varnothing$. Ya con esto, $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ converge a $A$ en $(\mathcal{CL}_{\varnothing}(X), T_{V^+})$ y $\mathbf{K\text{-}Lim}A_{\lambda'} = A$, y por el Lema 3.16, $\mathbf{V\text{-}Lim}A_{\lambda'} = A$. Finalmente por ser $\mathcal{K}$ cerrado, $A \in \mathcal{K}$. $\square$

# Capítulo 4

# Pseudocompacidad

Decimos que un espacio $X$ es ***pseudocompacto*** si toda función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ es acotada. Esta propiedad en general es mucho más débil que cualquiera de las demás propiedades derivadas de la propia compacidad, ya sea compacidad, compacidad numerable, compacidad secuencial, paracompacidad o metacompacidad. Respecto al tema de hiperespacios, si recordamos el Lema 3.3, el hiperespacio $\mathcal{CL}(\beta X)$ resulta ser una compactación del hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$. Una pregunta interesante sería el saber si se cumple el homeomorfismo $\mathcal{CL}(\beta X) \simeq \beta(\mathcal{CL}(X))$. Es decir, la compactación $\mathcal{CL}(\beta X)$ resulta equivalente a la compactación de *Stone-Čech* de $\mathcal{CL}(X)$. Respecto a este problema, existe una respuesta parcial. En [14] James Keesling da una condición necesaria para la cual se cumple la igualdad $\mathcal{CL}(\beta X) \simeq \beta(\mathcal{CL}(X))$ y esta condición es que $\mathcal{CL}(X)$ sea pseudocompacto. Más tarde John Ginsburg da un prueba de este hecho [11], la cual veremos en este capítulo y será nuestro resultado principal.

Al hablar de compactación de un espacio $Y$ en general, estamos pidiendo como mínimo que $Y$ sea $T_{3\frac{1}{2}}$, y en el caso de hiperespacios requerimos como mínimo que $\mathcal{CL}(X)$ sea $T_3$ o equivalentemente que $X$ sea $T_4$, como fue visto en el Corolario 3.4. Por lo cual en este capítulo supondremos en todo momento que $X$ es $T_4$.

Dado un espacio $X$, denotamos por $\mathcal{C}^*(X)$, al conjunto de todas las funciones reales, continuas y acotadas definidas en $X$. Decimos que un subconjunto $Y$ de un espacio $X$ está $\mathcal{C}^*$ - ***encajado*** en $X$, si toda función $f \in \mathcal{C}^*(Y)$ tiene una extensión continua sobre $X$.

**Proposición 4.1.** Si $f \in \mathcal{C}^*(Y)$ y $Y$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $X$ entonces existe una extensión $h$ de $f$ a $X$, tal que $h$ es acotada.

*Demostración.* La prueba es directa teniendo en mente que si $f(Y) \subseteq [-M, M]$ para algún real positivo $M$, y $g$ es una extensión continua de $f$ sobre $X$, entonces la función $h\colon X \to \mathbb{R}$ definida por la correspondencia, $h(x) = \text{mín}\{M, \text{máx}\{g(x), -M\}\}$ es continua, acotada y extiende a $f$. □

**Lema 4.2.** Sean $X, Y$ y $Z$ espacios, tales que $X$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $Y$ y $Y$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $Z$ . Entonces $X$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $Z$.

*Demostración.* La prueba es inmediata extendiendo cualquier función continua y acotada $f\colon X \to \mathbb{R}$ a una función continua y acotada $g\colon Y \to \mathbb{R}$ , para después extenderla a una función continua $h\colon Z \to \mathbb{R}$. □

**Lema 4.3.** Dado un espacio $X$, si $\mathcal{D} \subseteq X$ y $\mathfrak{F}$ es una colección abierta localmente finita de $X$ cuyos elementos son ajenos dos a dos, de tal forma que $\mathfrak{F}$ cubre a $\mathcal{D}$ y para cada $V \in \mathfrak{F}$, $|V \cap \mathcal{D}| = 1$, entonces $\mathcal{D}$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $X$.

*Demostración.* Sea $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Por hipótesis para cada elemento $z \in \mathcal{D}$, podemos tomar $V_z \in \mathfrak{F}$ con $z \in V_z$. Como $X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, existe una función continua $g_z\colon X \to [0,1]$ con $g_z(z) = 1$ y $g_z(X\backslash V_z) = 0$. Si ahora definimos a $F\colon X \to \mathbb{R}$ por la correspondencia $F(x) = \Sigma_{z\in\mathcal{D}} f(z)g_z(x)$, afirmamos que $F$ está bien definida, es continua y extiende a $f$. Para ver que $F$ extiende a $f$, si tomamos $x \in \mathcal{D}$,

$$F(x) = \Sigma_{z\in\mathcal{D}} f(z)g_z(x) = \Sigma_{z\in\mathcal{D}\backslash\{x\}} f(z)g_z(x) + f(x)g_x(x).$$

Como $|V_z \cap \mathcal{D}| = 1$ para $z \in \mathcal{D}\backslash\{x\}$, entonces $x \notin V_z$, con lo cual $g_z(x) = 0$. Y así $F(x) = f(x)g_x(x) = f(x)$. Para ver que $F$ está bien definida sólo basta probar que $F(x) \in \mathbb{R}$ para toda $x \notin \mathcal{D}$. Sea $y \notin \mathcal{D}$, si $y \in V_{x_0}$ para algún $x_0 \in \mathcal{D}$, al ser $\mathfrak{F}$ una colección de abiertos ajenos dos a dos, se tiene que si $z \notin \mathcal{D}\backslash\{x_0\}$, entonces $g_z(y) = 0$. Por tanto $|F(y)| = |f(x_0)||g_{x_0}(y)| \leq |f(x_0)| < \infty$. Si por el contrario $y \notin V$ para todo $V \in \mathfrak{F}$, entonces $g_z(y) = 0$ para toda $z \in \mathcal{D}$, es decir, $F(y) = 0$. Por último tenemos la continuidad. Sea $x \in X$, y $U$ una vecindad abierta de $F(x)$ en $\mathbb{R}$. Al ser $\mathfrak{F}$ localmente finita, existe un abierto $W$ en $X$ que sólo intersecta a una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{F}$, digamos $\{V_{z_1}, \ldots V_{z_n}\}$. Por esta razón $F|_W\colon W \to \mathbb{R}$ está definida como $F|_W(x) = \Sigma_{i=1}^n f(z_i)g_{z_i}(x)$. Claramente $F|_W$ es continua, por lo que $F^{-1}|_W(U)$ es un abierto en $W$, y más aún como $W$ es abierto en $X$, $F^{-1}|_W(U)$ es abierto en $X$. En conclusión, $x \in F^{-1}|_W(U)$ y $F(F^{-1}|_W(U)) \subseteq U$, es decir $F$ es continua. □

**Teorema 4.4.** Si $\mathcal{CL}(\beta X) \simeq \beta(\mathcal{CL}(X))$, entonces $X$ y $\mathcal{CL}(X)$ son pseudocompactos.

*Demostración.* Para esta prueba primero probaremos que $X$ es pseudocompacto. Por contradicción, si suponemos que $X$ no es pseudocompacto, por el Teorema E.53, existe una $\{V_n\}_{n\mathbb{N}}$ sucesión decreciente de abiertos no vacíos tal que $\overline{V_{n+1}}^X \subsetneq V_n$, con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \varnothing$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a $K_n = \overline{V_{n+1}}^X$ y $\mathcal{U}_n = \langle V_n\rangle \cap \langle X\backslash K_{n+1}\rangle^-$. Es claro que $K_n \in \mathcal{U}_n$. Ahora afirmamos que la colección $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita en $\mathcal{CL}(X)$. Para esto, sea $K \in \mathcal{CL}(X)$, y $x \in K$. Como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \varnothing$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin K_m$. De tal forma que $K \in \langle X, X\backslash K_m\rangle$, con $\langle X, X\backslash K_m\rangle \cap \mathcal{U}_k = \varnothing$ si $k \geq m+1$. Luego $\mathfrak{U}$ es localmente finita. Ahora si definimos a $\mathcal{D} = \{K_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{U}'_n = \mathcal{U}_n\backslash\{K_1, \ldots, K_{n-1}\}$ observamos que $\mathcal{U}'_n \cap \mathcal{D} = \{K_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de lo cual se sigue que $\mathcal{D}$ es un subespacio discreto de $\mathcal{CL}(X)$. Como $\mathcal{CL}(X)$ es $T_2$, existe una colección de abiertos ajenos dos a dos $\{\mathcal{V}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ de tal manera que $K_n \in \mathcal{V}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si ahora tomamos a la colección $\mathfrak{W} = \{\mathcal{U}'_n \cap \mathcal{V}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, esta cumple ser localmente finita, con elementos ajenos dos a dos con $\mathcal{U}'_n \cap \mathcal{V}_n \cap \mathcal{D} = \{K_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 4.3, $\mathcal{D}$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $\mathcal{CL}(X)$ y usando al encaje $\mathcal{F}$ del Lema 3.3, $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $\mathcal{F}(\mathcal{CL}(X))$. Por hipótesis, $\mathcal{CL}(\beta X) \simeq \beta(\mathcal{CL}(X))$, es decir, por la propiedad universal de la compactación de *Stone-Čech*, $\mathcal{F}(\mathcal{CL}(X))$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $\mathcal{CL}(\beta X)$.

Haciendo uso del Lema 4.2 con los espacios $\mathcal{F}(\mathcal{D}), \mathcal{F}(\mathcal{CL}(X))$ y $\mathcal{CL}(\beta X)$, concluimos que $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ está $\mathcal{C}^*$ - *encajado* en $\mathcal{CL}(\beta X)$. Como $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{F}(K_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio discreto de $\mathcal{CL}(\beta X)$, la función $f : \mathcal{F}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}$ definida por la correspondencia

$$f(\mathcal{F}(K_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

es continua y acotada. Por otro lado la sucesión $\{\mathcal{F}(K_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cerrados no vacíos en $\mathcal{CL}(\beta X)$ es decreciente y por lo tanto

$$\mathbf{Li}\mathcal{F}(K_n)_n = \mathbf{Ls}\mathcal{F}(K_n)_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{F}(K_n)}^{\mathcal{CL}(\beta X)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(K_n).$$

Afirmamos que $\mathbf{K\text{-}Lim}\mathcal{F}(K_n)_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(K_n) \neq \varnothing$. Si por el contrario, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(K_n) = \varnothing$, al ser $\mathcal{CL}(\beta X)$ compacto, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}(K_i) = \mathcal{F}(K_m) = \varnothing$, lo cual contradice el hecho de que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ era en principio una sucesión de abiertos no vacíos. Luego $\mathbf{K\text{-}Lim}\mathcal{F}(K_n)_n \neq \varnothing$. Finalmente, al poder extender continuamente a $f$ con una función $F : \mathcal{CL}(\beta X) \to \mathbb{R}$, se tiene que

$$F(\mathbf{K\text{-}Lim}\mathcal{F}(K_n)_n) = F(\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(K_n)_n) = \lim_{n\to\infty} F(\mathcal{F}(K_n)) = \lim_{n\to\infty} f(\mathcal{F}(K_n)),$$

pero esto es una contradicción ya que la sucesión $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ no es convergente en $\mathbb{R}$. En conclusión $X$ es pseudocompacto.

Para finalmente mostrar que $\mathcal{CL}(X)$ es pseudocompacto, usaremos la equivalencia dada por el Teorema E.53 inciso $(iv)$. En efecto, sea $\mathcal{A}$ un conjunto $G_\delta$ no vacío en $\mathcal{CL}(\beta X)$ y supongamos que $\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n$ con $\mathcal{W}_n$ abierto en $\mathcal{CL}(\beta X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $K \in \mathcal{A}$. Como $K \in \mathcal{W}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un abierto básico $\mathcal{W}'_n = \langle U_1^n, \ldots, U_{m_n}^n \rangle$ en $\mathcal{CL}(\beta X)$ con $K \in \mathcal{W}'_n \subseteq \mathcal{W}_n$. Como $\beta X$ es $T_4$ y $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_n} U_i^n$, existe un abierto $G_n$ en $\beta X$ de tal forma que $K \subseteq G_n \subseteq \overline{G_n}^{\beta X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_n} U_i^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, si fijamos a $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $k \leq m_n$, los abiertos $G_k^n = U_k^n \cap G_n$ resultan no vacíos e intersectan a $K$. Más aún, observamos que $K \in \langle G_1^n, \ldots, G_{m_n}^n \rangle \subseteq \mathcal{W}'_n \subseteq \mathcal{A}$. Por otra parte si $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{m_n} G_i^n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $k \leq m_n$, $G_k^n \cap G$ es un conjunto $G_\delta$ no vacío en $\beta X$. Como ya hemos mostrado que $X$ es pseudocompacto, por el Teorema E.53, podemos tomar a un elemento $x_k^n \in G_k^n \cap G \cap X$. Si $B = \{x_k^n \in X : n \in \mathbb{N} \text{ y } k \leq m_n\}$, se tiene que

$$\overline{B}^X \subseteq \overline{B}^{\beta X} \subseteq \overline{G}^{\beta X} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n}^{\beta X} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G_n}^{\beta X} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{m_n} U_i^n,$$

y afirmamos que $\overline{B}^X \in \mathcal{CL}(X) \cap \mathcal{A}$. Para esto, por como fue definido $B$, $\overline{B}^X \cap U_k^n \neq \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cada $k \leq m_n$, y además $\overline{B}^X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_n} U_i^n$, es decir,

$$\overline{B}^X \in \mathcal{CL}(X) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}'_n \subseteq \mathcal{CL}(X) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{CL}(X) \cap \mathcal{A}.$$

En conclusión $\mathcal{CL}(X)$ es pseudocompacto. $\square$

**Teorema 4.5.** Dado un espacio $X$, si $X^n$ es pseudocompacto, entonces $\beta\mathcal{F}_n(X) \simeq \mathcal{F}_n(\beta X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Sea $f\colon \mathcal{F}_n(X) \to [0,1]$ una función continua. Para probar que $\beta\mathcal{F}_n(X) \simeq \mathcal{F}_n(\beta X)$, por la propiedad universal de la compactación de *Stone-Čech* solo basta ver que $f$ tiene una única extensión continua al espacio $\mathcal{F}_n(\beta X)$. Si recordamos a la función $p_n\colon X^n \longrightarrow \mathcal{F}_n(X)$ de la Proposición 1.10, la función $F\colon X^n \to [0,1]$ definida por $F = f \circ p_n$ resulta continua. Luego, por el Teorema G.86, existe una función continua $G\colon (\beta X)^n \to [0,1]$ tal que $G|_{X^n} = F$. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $h_n\colon (\beta X)^n \to \mathcal{F}_n(\beta X)$ definida por la correspondencia $h_n(z_1, \ldots, z_n) = \{z_1, \ldots, z_n\}$, resulta continua y cerrada por la Proposición 1.10. Más aún, para cada $z = \{z_1, \ldots, z_m\} \in \mathcal{F}_n(\beta X)$, si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$ son tales que $a, b \in h_n^{-1}(z)$, al ser $X$ denso en $\beta X$, por el Teorema D.39 para cada $z_i \in z$, existe una red $\{z_i^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos en $X$, de tal forma que $\{z_i^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $z_i$. Ya con esto no es difícil probar que la red definida por $\{z_1^\lambda, \ldots, z_m^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $\beta X$ converge a $z$. Si ahora para cada $i \leq n$ y alguna $j \leq m$ $a_i = z_j$ (análogamente si $b_i = z_j$), definimos a $a_i^\lambda = z_j^\lambda$ ($b_i^\lambda = z_j^\lambda$). Ya con esto, las redes $\{(a_1^\lambda, \ldots, a_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{(b_1^\lambda, \ldots, b_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $(\beta X)^n$ convergen ambas a $a$ y $b$ respectivamente ya que cada una de las entradas o proyecciones de red lo hace. Además $\{(a_1^\lambda, \ldots, a_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{(b_1^\lambda, \ldots, b_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ son redes que sólo constan de elementos de $X^n$, es decir, $\{G(a_1^\lambda, \ldots, a_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} = \{F(a_1^\lambda, \ldots, a_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{G(b_1^\lambda, \ldots, b_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} = \{F(b_1^\lambda, \ldots, b_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Luego, por como fue definida $F$, ($F = f \circ p_n$), y el Teorema D.42, $F(a_1^\lambda, \ldots, a_n^\lambda) = F(b_1^\lambda, \ldots, b_n^\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, y $\{F(b_1^\lambda, \ldots, b_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{F(a_1^\lambda, \ldots, a_n^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ convergen a $G(a) = G(b)$. En conclusión para cada $z \in \mathcal{F}_n(\beta X)$ el mapeo $G \circ h_n^{-1}(z)$ está bien definido. Finalmente, como $h_n$ es continua, cerrada y suprayectiva, por los Teoremas B.28 y B.29, la función $H = G \circ h_n^{-1}(z)$ resulta continua, y para todo $z \in \mathcal{F}_n(X)$, $H(z) = G \circ h_n^{-1}(z) = G \circ p_n^{-1}(z) = F \circ p_n^{-1}(z) = f(z)$, es decir, $H$ es una extensión continua de $f$ al espacio $\mathcal{F}_n(\beta X)$.

$$\begin{tikzcd}
(\beta X)^n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "G"] & \mathcal{F}_n(\beta X) \arrow[dl, "G \circ h_n^{-1}"] \\
{[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

Para ver que $H$ es única, sólo basta ver que al ser $X$ denso en $\beta X$, haciendo uso de la Proposición 1.14 (a), el espacio $\mathcal{F}_n(X)$ es denso en $\mathcal{F}_n(\beta X)$ y por el Teorema B.19, $H$ queda completamente determinada por $\mathcal{F}_n(X)$, es decir, $H$ es única. En conclusión, $\beta\mathcal{F}_n(X) \simeq \mathcal{F}_n(\beta X)$. □

**Teorema 4.6.** Dado un espacio $X$, si $X^n$ es pseudocompacto entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudocompacto para toda $n \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, si tomamos a la función continua y suprayectiva $p_n\colon X^n \longrightarrow \mathcal{F}_n(X)$ definida en la Proposición 1.10, por el Teorema E.54, $\mathcal{F}_n(X)$ resulta pseudocompacto. □

# Capítulo 5

# Conexidad y disconexidad en hiperespacios

Con respecto a la conexidad y disconexidad en hiperespacios, en este capítulo mostramos algunos enunciados que tratan estas propiedades y como están relacionadas con sus subespacios.

**Proposición 5.1.** Si $\mathcal{B}$ es una subcolección de elementos de $\mathcal{CL}(X)$, $\mathcal{B}$ es conexo[1] y alguno de sus elementos es conexo, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es conexo.

*Demostración.* Sean $U$ y $V$ abiertos en $X$ tales que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq U \cup V$ y $(\bigcup \mathcal{B}) \cap U \cap V = \varnothing$. Lo que tenemos que demostrar es que $\bigcup B \subseteq U$ ó $\bigcup \mathcal{B} \subseteq V$. Por hipótesis, existe un $E \in \mathcal{B}$ conexo, por tanto al cumplirse que $E \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq U \cup V$ y $E \cap U \cap V = \varnothing$, esto implica que $E \subseteq U$ o $E \subseteq V$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $E \subseteq U$ y con esto afirmar que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq U$. Para mostrar lo último, si suponemos por el contrario que $\bigcup \mathcal{B} \cap V \neq \varnothing$, entonces existe $E' \in \mathcal{B}$ tal que $E' \cap V \neq \varnothing$. Con esto los abiertos $\langle U \rangle$ y $\langle V \rangle^-$ resultan no vacíos y además tienen algún elemento de $\mathcal{B}$ ($E$ y $E'$ respectivamente). Ahora, dado un elemento en $\mathcal{B}$, éste puede estar contenido en $U$ o intersectar a $V$ y sólo hay esos dos posibles casos ya que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq U \cup V$, por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq (\langle U \rangle \cap \mathcal{B}) \cup (\langle V \rangle^- \cap \mathcal{B})$ donde $\langle U \rangle \cap \mathcal{B}$ y $\langle V \rangle^- \cap \mathcal{B}$ son abiertos no vacíos de $\mathcal{B}$. Por último, como $\mathcal{B}$ es conexo, existe $W \in (\langle U \rangle \cap \mathcal{B}) \cap (\langle V \rangle^- \cap \mathcal{B}) \neq \varnothing$, el cual cumple que, $W \subseteq U$, $W \cap V \neq \varnothing$ y $W \in \mathcal{B}$, lo cual implica que $\varnothing \neq W \cap V \cap U \subseteq (\bigcup \mathcal{B}) \cap V \cap U$ pero esto es una contradicción con la suposición inicial, por tanto $\bigcup \mathcal{B} \cap V = \varnothing$, $\bigcup \mathcal{B} \subseteq U$ y así $\bigcup \mathcal{B}$ es conexo.

□

**Teorema 5.2.** Para toda $n \in \mathbb{N}$, si $X$ es un espacio $T_1$, entonces $X$ es conexo si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Dada $n \in \mathbb{N}$, como la conexidad se preserva bajo productos finitos, $X^n$ es conexo. Por la función definida en la Proposición 1.10, $p_n(X^n) = \mathcal{F}_n(X)$ resulta conexo.

[1] La defnición de espacio conexo se puede consultar en los Preliminares sección A.15.

$\Longleftarrow$) La prueba es directa usando la Proposición 5.1 si tomamos la subcolección $\mathcal{B} = \mathcal{F}_n(X)$ ya que $\bigcup \mathcal{F}_n(X) = X$. $\square$

**Teorema 5.3.** Si $X$ es un espacio $T_1$, entonces $X$ es conexo si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es conexo.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Como $X$ es conexo, $X^n$ resulta conexo para toda $n \in \mathbb{N}$ y por la Proposición 1.10, $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo. Como $\{\mathcal{F}_n(X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de espacios conexos cuya intersección es no vacía, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X) = \mathcal{F}(X)$ es conexo. Por último, haciendo uso de la Proposición 1.14, $\mathcal{F}(X)$ es denso, y por tanto, la cerradura de éste es conexa, es decir, $\overline{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{CL}(X)$ es conexo.

$\Longleftarrow$) Usando la Proposición 5.1 con $\mathcal{B} = \mathcal{CL}(X)$, es claro que $\{x\}$ es conexo y pertenece a $\mathcal{B}$ para toda $x \in X$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{B} = X$ es conexo. $\square$

De la prueba del Teorema 5.3 se demuestra que el subespacio $\mathcal{F}(X)$ resulta conexo. De hecho una prueba similar usando los resultados anteriores muestra que $\mathcal{F}(X)$ es conexo si y sólo si $X$ es conexo en espacios $T_1$. Usando este último resultado podemos dar condiciones en términos de $\mathcal{F}(X)$ para que un subconjunto de $\mathcal{A}(X)$ (una colección de subconjuntos no vacíos de $X$) sea conexo.

**Lema 5.4.** Para toda $n \in \mathbb{N}$, la función $H : \mathcal{A}(X)^n \to \mathcal{A}(X)$ definida por la correspondencia $(E_1, \ldots, E_n) \longmapsto \bigcup_{i=1}^n E_i$ resulta continua. Lo mismo si cambiamos $\mathcal{A}(X)$ por $\mathcal{CL}(X)$ o $\mathcal{CL}_\varnothing(X)$.

*Demostración.* Para el caso $n = 2$, si $(E_1, E_2)$ es un elemento arbitrario en $\mathcal{A}(X)^2$ y $E_1 \cup E_2 \in \langle U_1, \ldots U_m \rangle$, en analogía con la prueba de la Proposición 1.10, el conjunto

$$\bigcup \{(U_{\sigma(1)} \cap \ldots \cap U_{\sigma(k)}) \times (U_{\sigma(k+1)} \cap \ldots \cap U_{\sigma(m)}) \colon 1 \leq k < m, \sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}\},$$

resulta en un abierto de $(E_1, E_2)$ cuya imagen bajo $H$ se queda contenida en $\langle U_1, \ldots U_n \rangle$. Los casos $n \neq 2$ son análogos. $\square$

**Proposición 5.5.** Sean $X$ un espacio $T_1$ y $A_1, \ldots A_n$ subconjuntos conexos $X$. Si $\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \ldots A_n \rangle \subseteq \mathcal{G} \subseteq \left\langle \overline{A_1}^X, \ldots \overline{A_n}^X \right\rangle$, entonces $\mathcal{G}$ es conexo. Donde $\langle A_1, \ldots A_n \rangle$ es abierto en $\mathcal{A}(X)$.

*Demostración.* Sea $B = \langle A_1, \ldots A_n \rangle$. Por el Teorema 5.2, $\mathcal{F}(A_i)$ es conexo, para cada $i \leq n$, . Como el producto arbitrario de conexos es conexo, resulta que $\prod_{i=1}^n \mathcal{F}(A_i)$ es conexo en $\mathcal{A}(X)^n$. Por otro lado usando la función $H$ del Lema 5.4, $H(\prod_{i=1}^n \mathcal{F}(A_i)) = \mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \ldots A_n \rangle$. Por tanto, $\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \ldots A_n \rangle$ es conexo. Como $\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \ldots A_n \rangle$ es denso en $\langle A_1, \ldots A_n \rangle$ tenemos la igualdad $\langle A_1, \ldots A_n \rangle = \overline{\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \ldots A_n \rangle}^B$, y por ser $\langle A_1, \dots A_n\rangle$ abierto en $\mathcal{A}(X)$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\overline{\langle A_1, \dots A_n\rangle}^{\mathcal{A}(X)} &= \overline{\overline{\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle}^{B}}^{\mathcal{A}(X)} \\ &= \overline{\overline{\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle}^{\mathcal{A}(X)} \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle}^{\mathcal{A}(X)} \\ &= \overline{\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle}^{\mathcal{A}(X)} \\ &= \overline{\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle}^{\mathcal{A}(X)}.\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.4 (e) y lo anterior se sigue que si, $\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle \subseteq \mathcal{G} \subseteq \left\langle \overline{A_1}^X, \dots \overline{A_n}^X \right\rangle = \overline{\langle A_1, \dots A_n\rangle}^{\mathcal{A}(X)} = \overline{\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \dots A_n\rangle}^{\mathcal{A}(X)}$, $\mathcal{G}$ se queda contenido entre un conjunto conexo y su cerradura, y por ende, es conexo. La misma prueba es válida si cambiamos $\mathcal{A}(X)$ por $\mathcal{CL}(X)$ ó $\mathcal{CL}_\varnothing(X)$ y con $A_1, \dots A_n$ abiertos conexos. □

Recordamos que un espacio es ***cero - dimensional*** si es $T_1$ y tiene una base de abiertos-cerrados[2]. Un espacio es ***totalmente disconexo*** si cualesquiera dos puntos distintos pueden ser separados por un abierto-cerrado. La siguiente proposición relaciona estas propiedades entre un espacio $X$ y los espacios $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{CL}(X)$.

**Proposición 5.6.** Si $X$ es un espacio $T_1$, se tienen los siguientes resultados.

(a) $X$ es *cero-dimensional* si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es *cero-dimensional*.

(b) $X$ es *totalmente disconexo* si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es *totalmente disconexo*.

(c) $X$ es *discreto* si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es *discreto*.

(d) $X$ no tiene puntos aislados si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ no tiene puntos aislados.

(e) Si $X$ es $T_4$, entonces $\mathcal{C}(X)$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$.

*Demostración.* (a) $\Longrightarrow$) Dado $K$ compacto, al ser $X$ *cero-dimensional*, todo $x \in K$ tiene una vecindad abierta-cerrada $V_x$. Como la colección $\{V_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta de $K$, y $K$ es compacto, existe una subcubierta finita de $K$ digamos $\{V_{x1}, V_{x2}, \dots, V_{xm}\}$. Si definimos al subbásico $\langle \bigcup_{i=1}^m V_{xi}\rangle$, éste resulta ser un abierto-cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ que contiene a $K$.

$\Longleftarrow$) La prueba es directa viendo a $X \simeq \mathcal{F}_1(X)$ como subespacio de $\mathcal{K}(X)$ por el Corolario 1.11.

(b) $\Longrightarrow$) Dados $K$ y $K'$ compactos distintos no vacíos tales que $K' \backslash K \neq \varnothing$, fijamos $x_0 \in K' \backslash K$. Como $X$ es *totalmente disconexo*, para cada $x_k \in K$ existe un abierto-cerrado $U_k$ tal que $x_k \in U_k$ y $x_0 \notin U_k$. Como la colección $\{U_k : k \in K\}$ resulta ser una cubierta abierta de $K$ con $K$ compacto, extraemos una subcubierta finita $\{U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_{km}\}$. Con esto, el conjunto $\bigcup_{i=1}^m U_{ki}$ resulta ser un abierto-cerrado que contiene a $K$ y además separa a $K$ y $x_0$. Si definimos al subbásico $\langle \bigcup_{i=1}^m U_{ki}\rangle$, éste resulta ser un abierto-cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ que contiene $K$ pero no a $K'$.

$\Longleftarrow$) La prueba es directa viendo a $X \simeq \mathcal{F}_1(X)$ como subespacio de $\mathcal{K}(X)$ por el Corolario 1.11.

[2]Un conjunto es abierto-cerrado si es abierto y cerrado a la vez.

(c) $\Longrightarrow$) Como $X$ es discreto, sus subconjuntos compactos son finitos y por esto los abiertos básicos $\mathcal{V}\langle\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_m\}\rangle$ con $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}\in\mathcal{K}(X)=\mathcal{F}(X)$ constituyen una base de abiertos singulares.

$\Longleftarrow$) La prueba es directa viendo a $X\simeq\mathcal{F}_1(X)$ como subespacio de $\mathcal{K}(X)$ por el Corolario 1.11.

(d) $\Longrightarrow$) Si $\mathcal{CL}(X)$ tuviera algún punto aislado, digamos $K$, existiría un básico $\mathcal{V}=\langle U_1,U_2,\ldots,U_m\rangle$ tal que $\mathcal{V}=\{K\}$. Por esta razón para cada $i\leq m$ $|K\cap U_i|=1$. Por el contrario si para una $j$ en particular $|K\cap U_j|>1$, para cada $i\leq m$ podríamos tomar a $x_i\in K\cap U_i$ y $x_{j'}\in(K\cap U_j)\backslash\{x_j\}$, donde $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}\subsetneq\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}\cup\{x_{j'}\}\subseteq K$ con $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}\in\mathcal{V}$, lo cual es una contradicción.

$\Longleftarrow$) Si $X$ tiene algún punto aislado, digamos $x$, entonces $\{\{x\}\}$ es un punto aislado de $\mathcal{CL}(X)$.

(e) Sea $K$ un cerrado no vacío en $X$ con $K\notin\mathcal{C}(X)$. Por la Proposición A.16, existen abiertos ajenos $U$ y $V$ en $X$ tales que $K\subseteq U\cup V$, $U\cap V=\varnothing$ y $K\cap U\neq\varnothing\neq K\cap V$. Si tomamos al abierto $\langle U,V\rangle$, claramente $K\in\langle U,V\rangle$. Además, si $L\in\langle U,V\rangle$, $L\subseteq U\cup V$, $L\cap U\neq\varnothing\neq L\cap V$ y como $U\cap V=\varnothing$ es claro que $L\cap U\cap V=\varnothing$, es decir, $L$ no es conexo. Por tanto, $\mathcal{C}(X)\cap\langle U,V\rangle=\varnothing$, con $K\in\langle U,V\rangle$. En conclusión, $\mathcal{C}(X)$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$.

$\square$

# Capítulo 6

# Métrica de Hausdorff

Una de las propiedades elementales que podemos pedirle a un espacio topológico es el ser *metrizable*. Esta propiedad es importante por el hecho de tratar conceptos como la convergencia en términos de una distancia. Cuando llevamos la metrizabilidad a espacios de conjuntos no sólo tendremos los beneficios de estar en un espacio métrico, sino que además, los elementos pueden darnos información adicional como lo expuesto en la sección 3.2. Por esto, es natural preguntarse que relación guarda un espacio $X$ con el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ respecto a esta propiedad. Por ejemplo, sabemos que al poder ver a $X$ como subespacio cerrado de $\mathcal{CL}(X)$, si el hiperespacio es metrizable, de igual manera $X$ lo es. Por otro lado, si $X$ es compacto y metrizable, el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ también resulta ser metrizable, es decir, es posible dar una métrica con la cual generemos a $(\mathcal{CL}(X), T_V)$. Esta métrica es llamada *métrica de Hausdorff*, [1] la cual definimos a continuación.

**Definición 6.1.** Dado un espacio métrico $(X, d)$. Para un subconjunto $A \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la ***nube de radio $\varepsilon$ centrada en*** $A$ con respecto a la métrica $d$ como el conjunto

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para alguna } a \in A\}.$$

Observamos que $N_d(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$, donde $B(\varepsilon, a) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$.

**Definición 6.2.** Dado un espacio métrico y compacto $(X, d)$ tal que $d$ es una métrica acotada, definimos la función $H_d : \mathcal{CL}(X) \times \mathcal{CL}(X) \to \mathbb{R}$ como

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \colon A \subseteq N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N_d(\varepsilon, A)\}.$$

La función $H_d$ la llamaremos *métrica de Hausdorff*.

Debido a la Definición 6.2 a partir de ahora supondremos que $X$ es un espacio compacto y que $d$ es una métrica acotada, y por tanto podemos reemplazar a $\mathcal{CL}(X)$ por $\mathcal{K}(X)$.

**Lema 6.3.** Si $K, L \in \mathcal{K}(X)$ y $x \in K$, entonces existe $y \in L$ tal que $d(x, y) \leq H_d(K, L)$.

[1] Felix Hausdorff (8 de noviembre de 1868, 26 de enero de 1942). Matemático alemán.

*Demostración.* Sea $x \in K$, y supongamos que $0 \leq \delta = H_d(K, L)$. Sea $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \delta$ y $K \subseteq N_d(\varepsilon_n, L)$. Esta sucesión existe al ser el conjunto $\{\varepsilon > 0 : K \subseteq N_d(\varepsilon, L) \text{ y } L \subseteq N_d(\varepsilon, K)\}$ no vacío. Como $K \subseteq \bigcup_{z\in L} B(\varepsilon_n, z)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos a $y_n \in L$ tal que $d(x, y_n) < \varepsilon_n$. Como $L$ es compacto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $y \in L$. Por otro lado, como la función $d(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ es continua se tiene que,

$$d(x, y) = d(x, \mathbf{V\text{-}Lim}\{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} d(x, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \delta = H_d(K, L).$$

□

**Teorema 6.4.** La métrica de Hausdorff $H_d$ es, en efecto, una métrica.

*Demostración.* Las propiedades que debe cumplir $H_d$ para ser una métrica son,

(*i*) $H_d(A, B) \geq 0$, para todo $A, B \in \mathcal{K}(X)$.

(*ii*) $H_d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

(*iii*) $H_d(A, B) = H_d(B, A)$, para todo $A, B \in \mathcal{K}(X)$.

(*iv*) $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$, para todo $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$.

Ya que las pruebas de los incisos (*i*) y (*iii*) resultan sencillas sólo mostraremos (*ii*) y (*iv*).

(*ii*) $\Longrightarrow$) Si $H_d(A, B) = 0$ supongamos que $x_0 \in B \backslash A \neq \varnothing$. Como $B \subseteq N_d(\varepsilon, A)$ para toda $\varepsilon > 0$, existe una red en $\{a_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq A$ tal que $d(x_0, a_\varepsilon) < \varepsilon$, pero al ser $A$ cerrado con $X$ espacio métrico, $x_0 \in A$, lo cual es una contradicción. Análogamente, si $A \backslash B \neq \varnothing$, por tanto $A = B$.

$\Longleftarrow$) Si $A = B$, $A \subseteq N_d(\varepsilon, A)$ para toda $\varepsilon > 0$ si y sólo si $H_d(A, A) \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$ si y sólo si $H_d(A, B) = 0$.

(*iv*) Sea $\varepsilon > 0$. Sea $a \in A$. Por el Lema 6.3, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq H_d(A, B)$. Usando de nuevo el Lema 6.3 para el punto $b$, existe un elemento $c \in C$ tal que $d(b, c) \leq H_d(B, C)$. Por la desigualdad del triángulo en $(X, d)$,

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon.$$

Como $a \in A$ fue arbitrario, $A \subseteq N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon, C)$. Repitiendo la prueba para cualquier punto en $C$; $C \subseteq N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon, A)$. Por definición de $H_d(A, C)$, $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon$. Como $\varepsilon$ es arbitraria, $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$.

□

Una observación útil de esta métrica que usaremos más adelante es la siguiente: Dado $\varepsilon > 0$ tal que $H_d(A,B) < \varepsilon$ donde $A$ y $B$ son compactos fijos no vacíos, al ser $H_d$ el ínfimo de un conjunto, debe existir $\delta > 0$ con $H_d(A,B) \leq \delta < \varepsilon$, de tal forma que $A \subseteq N_d(\delta, B)$ y $B \subseteq N_d(\delta, A)$ y por definición de las nubes $N_d$, $A \subseteq N_d(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N_d(\varepsilon, A)$.

Dado que hemos probado que la función $H_d$ resulta ser una métrica para $\mathcal{K}(X)$, podemos hablar del espacio topológico generado por esta métrica: $(\mathcal{K}(X), T_{H_d})$. Como habíamos anticipado en la introducción, mostraremos que el espacio topológico $(\mathcal{K}(X), T_V)$ es metrizable o de manera equivalente los espacios topológicos $(\mathcal{K}(X), T_{H_d})$ y $(\mathcal{K}(X), T_V)$ son iguales.

**Definición 6.5.** Dado un espacio métrico $(X,d)$, si $K, L \in \mathcal{K}(X)$, definimos a

$$d_H(K,L) = \text{ínf}\{d(x,y) : x \in K \text{ y } y \in L\}.$$

**Lema 6.6.** Sea $(X,d)$ espacio métrico. Si $K, L \in \mathcal{K}(X)$ con $K \cap L = \varnothing$, entonces $d_H(K,L) > 0$.

*Demostración.* Por contrapositiva, si suponemos que $d_H(K,L) = 0$, entonces se cumple que para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ y $y_n \in L$ tales que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Como $K$ y $L$ son compactos, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las sucesiónes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a $x \in K$ y $y \in L$, respectivamente. Por lo tanto, para $\varepsilon > 0$ arbitraria, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de tal forma que se cumpla la siguiente desigualdad;

$$d(x,y) \leq d(x,x_m) + d(x_m,y_m) + d(y_m,y) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Lo cual implica que $x = y$, es decir, $K \cap L \neq \varnothing$. □

A modo de observación, en el lema anterior si no pedimos a $K$ y $L$ ser conjuntos compactos, entonces $d_H(K,L)$ puede ser igual cero, por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, los conjuntos $K = \{(x, -\frac{1}{x}) : x < 0\}$ y $L = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$, cumplen lo anteriormente dicho. Denotamos a $B_{H_d}(\varepsilon, K) = \{L \in \mathcal{K}(X) : H_d(K,L) < \varepsilon\}$ como la *bola abierta de radio* $\varepsilon$ centrada en $K$ con respecto a la métrica $H_d$.

**Teorema 6.7.** Dado un espacio métrico $(X,d)$, entonces $T_{H_d} = T_V$.

*Demostración.* Primero mostremos la contención $T_V \subset T_{H_d}$.
Para esta contención lo que vamos a probar es que la subbase $\mathcal{P}$ de $T_V$ dada en el Teorema 1.3 se queda contenida en $T_{H_d}$. Sea $K \in \mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{U} = \langle U \rangle^+$ vecindad de $K$, con $U \neq X$. Como $K \cap (X \backslash U) = \varnothing$ con $X \backslash U$ compacto no vacío, usando el Lema 6.6, $\delta = d_H(K, X\backslash U) > 0$. Afirmamos que $B_{H_d}(\delta, K) \subseteq \mathcal{U}$. Si $D \in B_{H_d}(\delta, K)$, como $H_d(K,D) < \delta$, en particular se cumple que $D \subseteq N_d(\delta, K)$. Por contradicción, si suponemos que $D \cap (X\backslash U) \neq \varnothing$, tomando a algún $x \in D \cap (X \backslash U)$, debe existir $z \in K$ de tal forma que $d(x,y) < \delta$, pero esto querría decir que $\delta = d_H(K, X\backslash U) \leq d(z,x) < \delta$, lo cual es una contradicción. Por tanto $D \in \mathcal{U}$.

Por otro lado, sea $L \in \mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{V} = \langle V \rangle^-$ un abierto de $L$, con $V \neq X$. Tomando un elemento $x \in L \cap V$, por el Lema 6.6, $\delta = d_H(\{x\}, X\backslash V) > 0$. Afirmamos que $B_{H_d}(\delta, L) \subseteq \mathcal{V}$. En analogía al caso anterior, si $D \in B_{H_d}(\delta, L)$, y suponemos por contradicción que $D \subseteq X\backslash V$, entonces como $L \subseteq N_d(\delta, D)$, en particular para $x$, existe $z \in X\backslash V$ de tal forma que $d(x,z) < \delta$, lo cual contradice el hecho de que $\delta = d_H(\{x\}, X\backslash V) \leq d(x,z) < \delta$, lo cual es una contradicción. Por tanto $D \in \mathcal{V}$. Los casos $U = V = X$ son evidentes. De esta manera la subbase $\mathcal{P}$ se queda contenida en la topología $T_{H_d}$.

Ahora mostremos la contención $T_{H_d} \subset T_V$.
Sea $K \in \mathcal{K}(X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $K$ es compacto, existen abiertos $B(\frac{\varepsilon}{4}, x_1), \ldots, B(\frac{\varepsilon}{4}, x_n)$ de $X$ que cubren a $K$ para algunos $x_i \in X$, con $K \cap B(\frac{\varepsilon}{4}, x_i) \neq \varnothing$ para toda $i \leq n$. Definimos a $\mathcal{U} = \left\langle B(\frac{\varepsilon}{4}, x_1), \ldots, B(\frac{\varepsilon}{4}, x_n) \right\rangle$ y tomamos $D \in \mathcal{U}$. Sea $z \in D$. Si $z \in D \cap B(\frac{\varepsilon}{4}, x_j)$, entonces $d(z, x_j) < \frac{\varepsilon}{4}$. Por otro lado, como $K \cap B(\frac{\varepsilon}{4}, x_j) \neq \varnothing$, existe $y \in K$ tal que $d(y, x_j) < \frac{\varepsilon}{4}$ y, de esta forma, $d(z,y) \leq d(z,x_j) + d(x_j, y) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$. Al ser $z \in D$ arbitrario, $D \subseteq N_d(\frac{\varepsilon}{2}, K)$. Haciendo la misma prueba intercambiando los papeles de $K$ y $D$ concluimos que $K \subseteq N_d(\frac{\varepsilon}{2}, D)$, con lo cual $D \subseteq N_d(\frac{\varepsilon}{2}, K)$ y $K \subseteq N_d(\frac{\varepsilon}{2}, D)$, es decir, $H_d(K, D) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por lo tanto $K \in \mathcal{U} \subseteq B_{H_d}(\varepsilon, K)$. □

Al ser el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ metrizable, la convergencia de redes no sólo se simplifica a convergencia de sucesiones sino que, además, al añadir la suposición de ser $X$ compacto, conecta a las convergencia dada por la métrica de Hausdorff y la convergencia de Kuratowski-Painlevé vista en la sección 3.2. A partir de ahora nos referiremos a la métrica de Hausdorff por $H$ en vez de $H_d$, bajo la aclaración de que $(X, d)$ es el espacio métrico con el que estamos trabajando.

**Teorema 6.8.** Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{K}(X)$. Entonces, $\textbf{K-Lim}A_n = A$ si y sólo si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A$ en $\mathcal{K}(X)$ respecto a la métrica de Hausdorff $H$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Si $\textbf{K-Lim}A_n = A$, por la Proposición 3.10, $A$ es cerrado. Usando la misma Proposición 3.10, al ser $X$ es compacto, solo bastaría probar que la familia $\left\{\overline{\bigcup_{n\in\Sigma} A_n} \colon \Sigma \text{ es residual en } \mathbb{N}\right\}$ cumple la propiedad de intersección finita. Pero esto es sencillo si observamos que los conjuntos residuales de $\mathbb{N}$ con el orden usual $\leq$, son los conjuntos de la forma $[m, \infty) \cap \mathbb{N}$ y $(m, \infty) \cap \mathbb{N}$ para toda $m \in \mathbb{N}$, los cuales denotamos solamente por $[m, \infty)$ y $(m, \infty)$, respectivamente, para simplificar notación. De ésta manera se puede demostrar por inducción sobre $m$ que los conjuntos $\bigcap_{i=1}^m \overline{\bigcup_{n\in[m,\infty)} A_n}$ son no vacíos para toda $m \in \mathbb{N}$ y así garantizar que $\textbf{Ls}A_n = A \neq \varnothing$. Claramente la base inductiva $m = 1$ se cumple, al ser los conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no vacíos. Para $m = 2$, como $\overline{\bigcup_{n\in[2,\infty)} A_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in[1,\infty)} A_n}$, probar que $\overline{\bigcup_{n\in[2,\infty)} A_n} \cap \overline{\bigcup_{n\in[1,\infty)} A_n} \neq \varnothing$ resulta equivalente a que $\overline{\bigcup_{n\in[2,\infty)} A_n} \neq \varnothing$, y claramente esto último ocurre por la misma razón de que los conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son no vacíos. De forma análoga se prueba por inducción para $m > 2$. Ahora, por las Proposiciones 3.15 y 3.14, bastaría probar que $\mathbf{V^+}\textbf{-Lim}A_\lambda = A$. Sea $U$ abierto en $X$ tal que $A \in \langle U \rangle^+$. Como $\textbf{Ls}A_n = A \subseteq U$, esto equivale a que

$$X\backslash U \subseteq X\backslash \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n\geq m} A_n} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big( X\backslash \overline{\bigcup_{n\geq m} A_n} \Big).$$

Como $X\backslash U$ es compacto, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X\backslash U \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_0} \left( X\backslash \overline{\bigcup_{n\geq k} A_n} \right) \text{ si y sólo si } \overline{\bigcup_{n\geq m_0} A_n} = \bigcap_{k=1}^{m_0} \overline{\bigcup_{n\geq m} A_n} \subseteq U.$$

De tal forma que para $n \geq m_0$, $A_n \in \langle U \rangle^+$ y, así, concluimos que $\mathbf{V^+}$**-Lim**$A_\lambda = A$.

$\Longleftarrow$) De igual manera por las Proposiciones 3.14 y 3.15, al tener por hipótesis $A \neq \varnothing$, sólo basta mostrar que **K-Lim**$A_n$ existe, o equivalentemente **K-Lim**$A_n = A$. Para esto demostremos que **Ls**$A_n \subseteq A \subseteq$ **Li**$A_n$. Al ser la prueba evidente para el caso $A = X$, suponemos que $A \neq X$.

Sea $x \in X\backslash A$. Como $X$ es un espacio $T_2$ y $A$ es compacto, existe un abierto $V$ de $X$ tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X\backslash\{x\}$. Como $A \in \langle V \rangle$, $\langle V \rangle$ es abierto en $\mathcal{K}(X)$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subseteq V \subseteq \overline{V}$ si y sólo si $A_n \cap (X\backslash\overline{V}) = \varnothing$, para toda $n \geq m$. Por tanto, como $x \in X\backslash\overline{V}$, $x$ no es un punto de acumulación de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, $x \notin$ **Ls**$A_n$. En conclusión **Ls**$A_n \subseteq A$. Para mostrar que $A \subseteq$ **Li**$A_n$. Supongamos que $|A| > 1$ y sea $x \in A$ y sea $U$ un abierto de $x$. Como $A \in \langle U, X\backslash\{x\}\rangle$, entonces $\langle U, X\backslash\{x\}\rangle$ es abierto en $\mathcal{K}(X)$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A$. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in \langle U, X\backslash\{x\}\rangle$ si $n \geq m$, en particular $A_n \cap U \neq \varnothing$ si $n \geq m$, por tanto $x \in$ **Li**$A_n$. La prueba para $|A| = 1$, es evidente. Por tanto **Ls**$A_n \subseteq A \subseteq$ **Li**$A_n$ y así **K-Lim**$A_n = A$. □

Debido al Teorema 6.8, podemos escribir $\lim_{n\to\infty} H(A_n, A) = 0$ en vez de **K-Lim**$A_n = A$.

Al estar trabajando en un espacio métrico y compacto $X$, la convergencia con la métrica de Hausdorff $H$ nos garantiza que cualquier sucesión de $\mathcal{CL}(X)$ tiene una subsucesión convergente cuyo límite es un espacio métrico y compacto. Más aún, nos podemos hacer la pregunta: ¿cuándo el límite de estas sucesiones resulta conexo?. Para responder esta pregunta introducimos el concepto de *continuo*. Decimos que un espacio $X$ es un ***continuo***, si $X$ es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Decimos que $Y \subseteq X$ es un *subcontinuo* de $X$ si $Y$ es un continuo con la topología heredada de $X$. Debido a esta definición el conjunto $\mathcal{C}(X)$ se convierte en la colección de todos los subcontinuos del espacio $X$ cuya estructura topológica es la heredada por el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$. Debido a esto, podemos contestar preguntas acerca de la compacidad y conexidad de subconjuntos de $X$ usando solamente la convergencia de la métrica $H$ en el espacio $(\mathcal{C}(X), H)$ por lo que tenemos el siguiente resultado importante.

**Teorema 6.9.** Si $X$ es un continuo, entonces $\mathcal{C}(X)$ es compacto.

*Demostración.* Como $X$ es compacto, por el Teorema 3.1, $\mathcal{CL}(X)$ es compacto. Al ser $X$ métrico, $X$ resulta ser $T_4$, por tanto usando la Proposición 5.6 (e), $\mathcal{C}(X)$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$. Por tanto $\mathcal{C}(X)$ es compacto. □

**Corolario 6.10.** Si $X$ es un continuo, entonces toda sucesión de subcontinuos de $X$ tiene una subsucesión convergente a un subcontinuo de $X$.

*Demostración.* La prueba es inmediata ya que al existir una subsucesión convergente de $\mathcal{C}(X)$ su límite debe pertenecer a $\mathcal{C}(X)$, esto por la compacidad de $\mathcal{C}(X)$ debida al Teorema 6.9. $\square$

# Capítulo 7

# Normalidad implica compacidad

En el Capítulo 1.3, el Corolario 1.21 establece que si un hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ resulta $T_4$, entonces ésta es una condición suficiente para garantizar la compacidad numerable de $X$. Una pregunta fuerte sería saber bajo qué condiciones adicionales, si es que las hay, podemos garantizar que $X$ es compacto. Evidentemente, como se vió en la sección 3.1, es suficiente con pedir a $X$ ser *Lindelöf*. Sin embargo, como veremos en este capítulo, no es necesaria una condición adicional, es decir, la compacidad y normalidad resultan equivalentes en $\mathcal{CL}(X)$. Para esto existen varias pruebas al respecto por autores como Velichko [25] y Di Maio [6]. Debido a que las pruebas dadas por los autores ya mencionados son extensas o hacen uso de una teoría más avanzada de la vista en cursos básicos de topología general, presentamos una prueba mas sencilla dada por Keesling [15], quien con el apoyo de la *Hipótesis del Continuo*, realiza una prueba de este famoso resultado.

Recordamos que la *Hipótesis del Continuo* establece que no existe un conjunto $A$, de tal forma que $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$.

Para mostrar la equivalencia entre la normalidad y la compacidad entre hiperespacios, se necesita una serie de resultados previos los cuales por si solos dan información adicional acerca de la naturaleza de los hiperespacios. Por ejemplo, si suponemos que $X$ no es compacto se obtiene el siguiente teorema.

**Teorema 7.1.** Si para un espacio $X$, $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$ y $X$ no es compacto, entonces $X^n$ no es pseudocompacto para alguna $n \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Supongamos que $X$ no es compacto y que a su vez $X^n$ es pseudocompacto para toda $n \in \mathbb{N}$. Por ser $X$ un subespacio cerrado de $\mathcal{CL}(X)$, $X$ es $T_4$, por tanto si $\beta X$ es la compactación de Stone-Čech de $X$, podemos tomar a un elemento $z \in \beta X \backslash X$. Si ahora definimos al conjunto $\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{CL}(X) : z \in \overline{K}^{\beta X}\}$, afirmamos que $\mathcal{K}$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ y, además, $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_1(X) = \varnothing$. Para ver que $\mathcal{K}$ es cerrado, si tomamos $L \in \mathcal{CL}(X) \backslash \mathcal{K}$, entonces $z \in \beta X \backslash \overline{L}^{\beta X}$. Luego el conjunto $\langle \beta X \backslash \{z\} \rangle$ es abierto en $\mathcal{CL}(\beta X)$ y, además, $\overline{L}^{\beta X} \in \langle \beta X \backslash \{z\} \rangle$. Usando a la función $\mathcal{F}$ del Lema 3.3, $\mathcal{F}^{-1}(\langle \beta X \backslash \{z\} \rangle)$ resulta ser abierto de $L$ en $\mathcal{CL}(X)$, de manera que si $K \in \mathcal{F}^{-1}(\langle \beta X \backslash \{z\} \rangle)$, entonces $\overline{K}^{\beta X} = \mathcal{F}(K) \in \langle \beta X \backslash \{z\} \rangle$, es decir, $z \in \beta X \backslash \overline{K}^{\beta X}$ y, por tanto, $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}^{-1}(\langle \beta X \backslash \{z\} \rangle) = \varnothing$. Como $L$ fue arbitrario, se concluye que $\mathcal{K}$ es cerrado. Luego para ver que $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_1(X) = \varnothing$, sólo basta observar que al ser $\beta X$ un espacio $T_1$, para todo $x \in X$, $\overline{\{x\}}^{\beta X} = \{x\}$ y, por tanto, como $z \in \beta X \backslash X$, $z \notin \overline{\{x\}}^{\beta X}$. Ya con esto, al ser $\mathcal{CL}(X)$ un espacio $T_4$, por el Teorema B.21, existe una función continua $f : \mathcal{CL}(X) \to [0,1]$ tal que $f|_{\mathcal{F}_1(X)} = 0$ y $f|_{\mathcal{K}} = 1$. Si ahora definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ a $g_n = f|_{\mathcal{F}_n(X)} : \mathcal{F}_n(X) \to [0,1]$, entonces por el Teorema 4.5, $\beta\mathcal{F}_n(X) \simeq \mathcal{F}_n(\beta X)$ y, por tanto, por la propiedad universal de la compactación de *Stone-Čech*, existe una única función continua $G_n : \mathcal{F}_n(\beta X) \to [0,1]$ que extiende a $g_n$. Notamos que por ser $X$ denso en $\beta X$ por la Proposición 1.14 (a), $\mathcal{F}_1(X)$ es denso en $\mathcal{F}_1(\beta X)$. Más aún, como $\{z\} \in \mathcal{F}_1(\beta X) \subseteq \mathcal{F}_n(\beta X)$ y haciendo uso del Teorema D.39, existe una red $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de $\mathcal{F}_1(X)$ que converge a $\{z\}$. Luego, por la continuidad de $G_n$ y por el Teorema D.42, se tiene que $\{G_n(A)\}_{\lambda\in\Lambda} = \{g_n(A)\}_{\lambda\in\Lambda} = \{f(A)\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $G_n(\{z\})$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, por la suposición de que $f|_{\mathcal{F}_1(X)} = 0$, entonces $\{f(A)\}_{\lambda\in\Lambda} = \{0\}_{\lambda\in\Lambda}$ y, por ende, $G_n(\{z\}) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por la continuidad de $G_n$, el conjunto $G_n^{-1}([0, \frac{1}{2^n}))$ resulta un abierto de $\{z\}$ en $\mathcal{F}_n(\beta X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un abierto $U_n$ de $z$ en $\beta X$, tal que $G_n^{-1}([0, \frac{1}{2^n})) = \langle U_n \rangle \cap \mathcal{F}_n(\beta X)$. Si ahora definimos a los cerrados $K_n = \overline{U_n \cap X}$ en $X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que $z \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{\beta X}$, ya que,

$$z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}^{\beta X} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n \cap X}^{\beta X} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\overline{U_n \cap X}}^{\beta X} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{K_n}^{\beta X}.$$

Luego, por el Teorema G.88, $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{\beta X} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{K_n}^{\beta X}$ y, por tanto, $z \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{\beta X}$. Por esto último, si $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, entonces por definición del conjunto $\mathcal{K}$ se tiene que $K \in \mathcal{K}$. Luego por ser $\mathcal{F}(X)$ denso en $\mathcal{CL}(X)$, por el Teorema D.39, existe una red $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos en $\mathcal{F}(X)$ que converge a $K$ y, además, podemos suponer que $F_\lambda \subseteq K$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Afirmamos que para cada $\lambda \in \Lambda$, $f(F_\lambda) = 0$. Para esto notamos que dado $\lambda \in \Lambda$, $F_\lambda \subseteq K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si suponemos que $|F_\lambda| = m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, por la continuidad de $G_n$, se tiene que $\left\langle \overline{U_n}^{\beta X} \right\rangle \cap \mathcal{F}_n(\beta X) \subseteq G_n^{-1}([0, \frac{1}{2^n}])$ por lo que debido a las contenciones $F_\lambda \subseteq K_n \subseteq \overline{U_n}^{\beta X}$ se concluye que $F_\lambda \in G_k^{-1}([0, \frac{1}{2^k}])$, es decir, $f(F_\lambda) = g_k(F_\lambda) = G_k(F_\lambda) \leq \frac{1}{2^k}$ para $k \geq m$ y esto implica que $f(F_\lambda) = 0$. Por esta razón y la continuidad de $f$ se concluye que $f(K) = 0$, pero esto contradice el hecho de que $f|_{\mathcal{K}} = 1$, por lo tanto $X^n$ no es pseudocompacto para alguna $n \in \mathbb{N}$. □

La conclusión del Teorema 7.1 indica que se puede garantizar la compacidad de $X$ por medio de la pseudocompacidad no solamente del mismo $X$ sino por lo menos de todos sus productos finitos. Por esta razón, podemos dar condiciones suficientes para que los espacios $X^n$ sean pseudocompactos y, por ende, condiciones para que $X$ sea compacto.

**Teorema 7.2.** Si para un espacio $X$, $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$, entonces $X$ es compacto, si se cumple alguna de las siguientes propiedades,

(a) $X$ es secuencialmente compacto.

(b) $X$ es primero numerable.

(c) La cerradura de todo subconjunto numerable de $X$ es compacto.

*Demostración.* (a) Por el Corolario 1.21, $X$ es numerablemente compacto. Como $X$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{CL}(X)$, se tiene que $X$ es $T_4$. Luego por el Teorema E.55 $X$ es pseudocompacto. Además, por hipótesis, $X$ también es secuencialmente compacto. Ya con esto, por el Corolario E.58, $X^n$ resulta pseudocompacto para toda $n \in \mathbb{N}$ y, usando el Teorema 7.1, se concluye que $X$ es compacto.

(b) Por el Corolario 1.21, $X$ es numerablemente compacto. Como $X$ es primero numerable y $T_4$, por el Corolario E.59, $X^n$ resulta pseudocompacto para toda $n \in \mathbb{N}$ y, usando el Teorema 7.1, se concluye que $X$ es compacto.

(c) Primero probaremos que $X$ es pseudocompacto. Supongamos por contradicción que existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ que no es acotada. Por tanto podemos tomar a $x_n \in g^{-1}((-\infty, -n] \cup [n, \infty))$ fijo para cada $n \in \mathbb{N}$. Si definimos al conjunto numerable $V = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, por hipótesis $\overline{V}$ es compacto y, por tanto, como $g(\overline{V})$ es compacto en $\mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $g(\overline{V}) \subseteq [-m, m]$, pero esto implica que $x_{m+1} \in V \subseteq \overline{V} \subseteq g^{-1}([-m, m])$, lo cual es una contradicción, por tanto $X$ es pseudocompacto. Ahora solamente probaremos que $X \times X$ es pseudocompacto, ya que de forma análoga prueba que $X^n$ también lo es para $n > 2$. Supongamos nuevamente por contradicción que $X \times X$ no es pseudocompacto y sea $f : X \times X \to \mathbb{R}$ una función continua que no es acotada. Como $f$ no es acotada, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(x_n, w_n) \in X \times X$ tal que $|f(x_n, w_n)| \geq n$. Si definimos al conjunto $W = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$, por hipótesis $\overline{W}$ es compacto y, así, por el Teorema E.57, $X \times W$ es pseudocompacto y, por tanto, $f|_{X \times W}$ es una función continua y acotada, pero esto es una contradicción ya que $|f|_{X\times W}(x_n, w_n)| \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $X \times X$ es pseudocompacto. Por tanto, $X$ es compacto.

□

**Lema 7.3.** Dado un espacio separable $X$, se cumplen los siguientes enunciados:

(a) Si $A$ es un subespacio discreto de $X$, entonces $|A| \leq 2^{\aleph_0}$.

(b) Si $\mathcal{B}$ es una base para $X$, entonces $|\mathcal{B}| \leq 2^{\aleph_0}$.

*Demostración.* (a) Al ser $A$ un subespacio discreto, para cada $x \in A$, existe un abierto $V_x$ en $X$ tal que $V_x \cap A = \{x\}$. Más aún, al ser $X$ un espacio $T_3$, por el Teorema A.8, podemos suponer que $\overline{V_x} \cap A = \{x\}$. Si $\mathcal{D}$ es un denso numerable en $X$, se tiene que $V_x \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$ para toda $x \in X$. Ya con esto, si definimos a la función $f : A \to \mathcal{P}(\mathcal{D})$ por la correspondencia $f(x) = V_x \cap \mathcal{D}$, afirmamos que esta función es inyectiva. Para esto, sean $x, y \in A$ con $x \neq y$. Como $x \in V_x$ y $\overline{V_y} \cap A = \{y\}$, se tiene que $x \notin \overline{V_y}$. Luego, $x \in V_x \backslash \overline{V_y}$ y, por la densidad de $\mathcal{D}$, $(V_x \backslash \overline{V_y}) \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$. Por último, como $f(y) \subseteq V_y$, se sigue que,

$$\varnothing \neq (V_x \backslash \overline{V_y}) \cap \mathcal{D} = (V_x \cap \mathcal{D}) \cap (X \backslash \overline{V_y}) \subseteq f(x) \cap (X \backslash V_y) \subseteq f(x) \backslash f(y).$$

Esto implica que $f(x) \neq f(y)$, es decir, $f$ es inyectiva. Ahora, $f(A)$ es una colección de abiertos en $\mathcal{D}$ y, al ser $\mathcal{D}$ un subespacio de $X$, $\mathcal{D}$ tiene una base de abiertos de cardinalidad a lo más $|\mathcal{P}(\mathcal{D})| = 2^{\aleph_0}$, por tanto $|f(A)| \leq 2^{\aleph_0}$ y, por la inyectividad de $f$, se concluye que $|A| \leq |f(A)| \leq 2^{\aleph_0}$.

(b) Por el Teorema A.10, podemos suponer que $\mathcal{B}$ es una base que consta de abiertos regulares. Si consideramos a la función $g : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ por la correspondencia $g(A) = Int(\overline{A})$, notamos que el conjunto imágen de $g$ es la colección de todos los abiertos regulares de $X$. Ahora si $\mathcal{D}$ es un denso numerable en $X$, usando el Teorema A.11, la colección $\mathcal{B}' = \{V \cap \mathcal{D} : V \in \mathcal{B}\}$ es una base para $\mathcal{D}$ que consta de abiertos regulares. Al ser $\mathcal{D}$ numerable, se tiene que $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{D})| = 2^{\aleph_0}$. Luego, para cada $V \in \mathcal{B}$, $g(V \cap \mathcal{D}) = Int(\overline{V \cap \mathcal{D}}) = Int(\overline{V}) = g(V) = V$, es decir, $g$ es biyectiva en su imágen, donde claramente $g(\mathcal{B}') = \mathcal{B}$ y, por tanto, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{D})| = 2^{\aleph_0}$.

□

Mediante el uso de *recursión transfinita*[1], el siguiente resultado nos da una construcción de una familia de cerrados la cual nos será útil en los dos teoremas siguientes.

**Teorema 7.4.** Si un espacio $X$ es numerablemente compacto, no es primero numerable y para un punto fijo $z \in X$, si $\mathcal{B}_z = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una base local de $z$ tal que ningún refinamiento[2] numerable de $\mathcal{B}_z$ es base local de $z$, entonces existe una colección anidada de cerrados $\{K_\alpha\}_{\alpha \leq \omega_1}$ de tal forma que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $K_{\alpha+1} \subseteq \overline{U_\alpha}$.
2. $K_\alpha \subsetneq K_\gamma$ si $\alpha > \gamma$.
3. $K_\ell = \bigcap\{K_\beta : \beta < \ell\}$, si $\ell$ es un ordinal límite.
4. $K_{\omega_1} = \{z\}$.

*Demostración.* Definimos a $\overline{\mathcal{B}_z} = \{\overline{U_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$. Si $\alpha < \omega_1$ vamos a demostrar que $\{z\} \subsetneq \bigcap_{\beta<\alpha} \overline{U_\beta}$. Supongamos lo contrario, es decir, $\{z\} = \bigcap_{\beta<\alpha} \overline{U_\beta}$. Ahora, dado $V \in \mathcal{B}_z$, se tiene que $\bigcap_{\beta<\alpha} \overline{U_\beta} \subseteq V$. Luego, por ser $X$ numerablemente compacto, existen $\beta_1 < \cdots < \beta_m < \alpha$ tales que $\{z\} \subseteq \bigcap_{i=1}^m U_{\beta_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^m \overline{U_{\beta_i}} \subseteq V$. Notamos que este argumento lo hicimos para $V \in \mathcal{B}_z$ arbitrario, por tanto $\mathcal{V} = \{\bigcap_{\gamma \in F \subseteq [0,\alpha]} U_\gamma : U_\gamma \in \mathcal{B}_z \text{ y } |F| < \omega\}$ forma una base local para $z$, pero al ser $\alpha < \omega_1$, se concluye $|\mathcal{V}| \leq |\alpha| = |\omega| = \aleph_0$, lo cual contradice el hecho de que ningún refinamiento numerable de $\mathcal{B}_z$ es base local de $z$. Por tanto, $\{z\} \subsetneq \bigcap_{\beta<\alpha} \overline{U_\beta}$ para cada $\alpha < \omega_1$. Al ser $X$ un espacio $T_2$, haciendo uso del Teorema A.6 (*iii*), $\{z\} = \bigcap_{\beta<\omega_1} \overline{U_\beta}$. Por tanto, para cada $\alpha < \omega_1$, existe $\alpha < \gamma < \omega_1$ tal que $\bigcap_{\beta<\gamma} \overline{U_\beta} \subsetneq \bigcap_{\beta<\alpha} \overline{U_\beta}$ y, por esta razón, si tomamos a $\gamma$ como el mínimo con esta propiedad, podemos definir a la función $\phi : OR \to OR$ por la correspondencia $\phi(\alpha) = \gamma$. Ahora, definiendo a la función $H : \mathcal{P}([0, \omega_1]) \to [0, \omega_1]$ por $H(A) = \sup A$ y haciendo uso del *teorema de recursión*, existe una única función $\psi : [0, \omega_1) \to [0, \omega_1)$ tal que:

1. $\psi(0) = 0$.
2. $\psi(\alpha + 1) = \phi(\psi(\alpha))$.

[1] Para una introducción completa al tema de recursión transfinita se puede consultar [1].

[2] Se puede consultar la definición de refinamiento de una cubierta en los Preliminares sección E.5.

3. $\psi(\ell) = H(\psi|_\ell) = \sup\{\psi(\beta) : \beta < \ell\}$, si $\ell$ es un ordinal límite.

Es sencillo verificar que tanto $\phi$ como $\psi$ son funciones no decrecientes y, más aún, $\alpha \leq \psi(\alpha)$ para cada $\alpha < \omega_1$. Ahora, si para cada $\alpha < \omega_1$ se define al cerrado $K_\alpha = \bigcap\{\overline{U_\beta} : \beta < \psi(\alpha)\}$, afirmamos que la colección de cerrados $\{K_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ cumplen con las condiciones del teorema. Para 1, como $\alpha \leq \psi(\alpha) < \psi(\alpha+1)$, entonces $\overline{U_\alpha} \in \{\overline{U_\beta} : \beta < \psi(\alpha+1)\}$ y, por tanto, $K_{\alpha+1} \subseteq \overline{U_\alpha}$. Para 2, si $\alpha > \gamma$ y observamos que $\alpha \geq \gamma+1 > \gamma$, al ser $\psi$ no decreciente, se tendría que $\psi(\alpha) \geq \psi(\gamma+1) = \phi(\psi(\gamma)) > \psi(\gamma)$ y por tanto

$$K_\alpha = \bigcap_{\beta<\psi(\alpha)} \overline{U_\beta} \subseteq \bigcap_{\beta<\psi(\gamma+1)} \overline{U_\beta} = \bigcap_{\beta<\phi(\psi(\gamma))} \overline{U_\beta} \subsetneq \bigcap_{\beta<\psi(\gamma)} \overline{U_\beta} = K_\gamma.$$

Para 3, sea $\ell$ un ordinal límite con $\beta < \ell$ y $x \in K_\ell$. Ahora, si $\beta' < \psi(\beta)$, entonces $\beta' < \psi(\beta) \leq \psi(\ell)$, por definición de $K_\ell$. De esta manera $x \in \overline{U_{\beta'}}$ y, al ser $\beta'$ arbitrario, se concluye que $x \in K_\beta$. Análogamente al ser $\beta < \ell$ arbitrario, $x \in \bigcap\{K_\beta : \beta < \ell\}$. Para la otra contención, sea $x \in X \backslash K_\ell$. Esto significa que existe $\beta_0 < \psi(\ell)$ tal que $x \in X \backslash \overline{U_{\beta_0}}$. Luego, por ser $\psi(\ell) = \sup\{\psi(\beta) : \beta < \ell\}$, debe existir $\gamma < \ell$ tal que $\beta_0 < \psi(\gamma) \leq \psi(\ell)$, con lo cual $x \in X \backslash \bigcap_{\beta<\psi(\gamma)} \overline{U_\beta} = K_\gamma$, es decir, $x \in X \backslash \bigcap\{K_\beta : \beta < \ell\}$. En conclusión $K_\ell = \bigcap\{K_\beta : \beta < \ell\}$. Finalmente para 4, al ser $X$ un espacio $T_2$, por el Teorema A.6 $(ii)$, se concluye que $K_{\omega_1} = \bigcap\{\overline{U_\beta} : \beta < \omega_1\} = \{z\}$. □

**Teorema 7.5.** Si $X$ es un espacio separable, numerablemente compacto y no es primero numerable, entonces el espacio ordinal $[0, \omega_1]$ se puede encajar en $\mathcal{CL}(X)$.

*Demostración.* Si $\mathcal{B}$ es una base fija para $X$ y $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{B}$ es una base local para cada $x \in$X, al no ser $X$ primero numerable, existe $z \in X$ de tal forma $|\mathcal{B}_z| > \aleph_0$. Al ser $X$ separable, por el Lema 7.3 (b), $|\mathcal{B}_z| \leq 2^{\aleph_0}$, con lo que asumiendo la *Hipótesis del Continuo*, necesariamente $|\mathcal{B}_z| = 2^{\aleph_0}$. Ahora, si $\mathcal{B}_z = \{U_\beta : \beta < \omega_1\}$, por lo dicho anteriormente, podemos suponer que en la elección de $\mathcal{B}_z$ ningún refinamiento numerable es base local de $z$. Por el Teorema 7.4, existe una colección anidada de cerrados $\{K_\alpha\}_{\alpha\leq\omega_1}$ de tal forma que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $K_{\alpha+1} \subseteq \overline{U_\alpha}$.
2. $K_\alpha \subsetneq K_\gamma$ si $\alpha > \gamma$.
3. $K_\ell = \bigcap\{K_\beta : \beta < \ell\}$, si $\ell$ es un ordinal límite.
4. $K_{\omega_1} = \{z\}$.

Si ahora definimos a la función $F : [0, \omega_1] \to \{K_\alpha : \alpha \leq \omega_1\} \subseteq \mathcal{CL}(X)$ por la correspondencia $F(\alpha) = K_\alpha$, afirmamos que $F$ es un encaje. Claramente por definición de $F$, ésta es biyectiva, por tanto, sólo nos basta probar que $F$ es continua y cerrada. Para ver que $F$ es continua, sea $\gamma \in [0, \omega_1]$ con $\gamma$ ordinal límite. Si $\gamma < \omega_1$, y $\langle U_1, \dots U_n\rangle$ es un abierto de $F(\gamma) = K_\gamma$, podemos suponer que para alguna $j \leq n$, $z \in X \backslash U_j$. Ahora, si tomamos a $y \in U_j \cap K_\gamma$ fijo, por la construcción de la colección $\{K_\alpha\}_{\alpha\leq\omega_1}$, debe existir un ordinal numerable $\beta_0 > \gamma$ tal que $y \in X \backslash K_{\beta_0}$ y, de esta manera, $(X \backslash K_{\beta_0}) \cap U_j \neq \varnothing$. Por tanto, haciendo uso del Teorema 1.6 y, que $K_{\beta_0} \subsetneq K_\gamma$, entonces $F(\gamma) = K_\gamma \in \mathcal{U} = \langle U_1, \dots U_n, (X \backslash K_{\beta_0}) \cap U_j\rangle \subseteq \langle U_1, \dots U_n\rangle$.

Si recordamos la condición 3, $K_\gamma = \bigcap\{K_\beta : \beta < \gamma\}$, con lo cual si $\{\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de ordinales que converge a $\gamma$ y, suponemos que $V_{\gamma_m} = K_{\gamma_m}\setminus\bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\setminus K_{\beta_0})\cap U_j] \neq \varnothing$ para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces al ser $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, una sucesión decreciente de cerrados no vacíos, se tendría que por ser $X$ numerablemente compacto:

$$\varnothing \neq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} V_m = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_{\gamma_m}\setminus\bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup [(X\setminus K_{\beta_0})\cap U_j] = K_\gamma\setminus\bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup [(X\setminus K_{\beta_0})\cap U_j],$$

pero esto contradice el hecho de que $K_\gamma \in \mathcal{U}$. Por tanto, existe $\gamma_0 < \gamma$ tal que si $\gamma_0 < \beta < \gamma$, entonces $K_\beta \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\setminus K_{\beta_0})\cap U_j]$ o, de forma equivalente, $K_\beta \in F^{-1}(\mathcal{U})$. Con lo cual se concluye que el conjunto $V = (\gamma_0, \gamma+1)$ es un abierto de $\gamma$ en $[0, \omega_1]$ el cual cumple que $F(\gamma) \in F(V) \subseteq \mathcal{U} \subseteq \langle U_1, \ldots U_n\rangle$, es decir, $F$ es continua en $\gamma$.
En el caso en que $\gamma$ no sea un ordinal límite y $F(\gamma) \in \langle U_1, \ldots U_n\rangle$, definimos a $V = (\gamma-1, \gamma+1)$ si $\gamma > 0$ ó $V = [0, 1)$ si $\gamma = 0$. En cualquier caso se concluye que $F(\gamma) \in F(V) \subseteq \langle U_1, \ldots U_n\rangle$ y, así, $F$ resulta continua en $\gamma$. Finalmente, si $\gamma = \omega_1$ y $\{z\} = F(\omega_1) \in \langle U_1, \ldots U_n\rangle$, entonces $z \in U_i$ para toda $i \leq n$ y, por tanto, al ser $X$ un espacio $T_3$ existe $\gamma_0 < \omega_1$ tal que $z \in K_{\gamma_0} = \overline{U_{\gamma_0}} \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$. Luego por las condiciones 1 y 2, si $\beta > \gamma_0$, $z \in K_\beta \subsetneq K_{\gamma_0} \subseteq \overline{U_{\gamma_0}} \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$, por tanto definiendo al abierto $V = (\gamma_0, \omega_1]$, $F(\omega_1) \in F(V) \subseteq \langle U_1, \ldots U_n\rangle$, y por tanto $F$ es continua en $\omega_1$. Dicho todo lo anterior, $F$ resulta continua en $[0, \omega_1]$.

Por último para probar que $F$ es cerrada sólo basta notar que, por el Teorema F.74, $[0, \omega_1]$ es compacto y $\{K_\alpha : \alpha \leq \omega_1\}$ es $T_2$, con lo cual $F$ resulta cerrada por el Teorema E.46. En conclusión $F$ es un homeomorfismo. □

En el Teorema 7.5, la condición de no ser primero numerable nos garantiza que el espacio ordinal $[0, \omega_1]$ se puede encajar en $\mathcal{CL}(X)$. En el siguiente teorema mostramos que si le pedimos al espacio $X$ no ser compacto, entonces podemos garantizar que el espacio ordinal $[0, \omega_1)$ puede ser encajado en $\mathcal{CL}(X)$ como subespacio cerrado.

**Teorema 7.6.** Si $X$ es un espacio separable, numerablemente compacto y no es compacto, entonces el espacio ordinal $[0, \omega_1)$ se puede encajar en $\mathcal{CL}(X)$ como subespacio cerrado.

*Demostración.* Como $X$ no es compacto, el Teorema E.44 nos dice que existe una colección decreciente de cerrados no vacíos $\{F_\beta\}_{\beta<\alpha}$ en $X$ de tal forma que $\bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta = \varnothing$, en donde $\alpha$ debe ser un ordinal límite. Si tomamos al ordinal $\alpha$ como el mínimo ordinal con esta propiedad, entonces afirmamos que el espacio ordinal $[0, \alpha)$ está encajado en $\mathcal{CL}(X)$. Para esto, haciendo una prueba análoga a la dada en el Teorema 7.4, a partir de la colección de cerrados $\{F_\beta\}_{\beta<\alpha}$ se puede construir una familia de cerrados no vacíos $\{K_\beta\}_{\beta<\alpha}$ en $X$ tal que:

1. $K_{\beta+1} \subseteq F_\beta$.
2. $K_\beta \subsetneq K_\gamma$ si $\beta > \gamma$.
3. $K_\ell = \bigcap\{K_\beta : \beta < \ell\}$, si $\ell$ es un ordinal límite.

Ya con esto basta probar que $[0,\alpha)$ es homeomorfo a $\{K_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathcal{CL}(X)$ y que $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$ es cerrado. Para lo primero, definamos la función $F : [0,\alpha) \to \{K_\beta : \beta < \alpha\}$ por la correspondencia $F(\gamma) = K_\gamma$. Afirmamos que $F$ es un encaje. Claramente $F$ es biyectiva. Para ver que $F$ es continua, sea $\gamma \in [0,\alpha)$ un ordinal límite y $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ un abierto de $F(\gamma)$. Ahora como $K_\gamma \cap U_1 \neq \varnothing$, si tomamos un elemento $y \in K_\gamma \cap U_1$ fijo, por la condición 1, $\bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta = \varnothing$ y, por tanto, debe existir $\beta_0 > \gamma$ tal que $y \in X\backslash K_{\beta_0}$ y, de esta manera, $(X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_1 \neq \varnothing$. Por tanto, haciendo uso del Teorema 1.6 y del hecho de que $K_{\beta_0} \subsetneq K_\gamma$, entonces $F(\gamma) = K_\gamma \in \mathcal{U} = \langle U_1, \ldots U_n, (X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_1\rangle \subseteq \langle U_1, \ldots U_n\rangle$. Si recordamos la condición 3, $K_\gamma = \bigcap\{K_\beta : \beta < \gamma\}$ y, por tanto, si $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red estrictamente creciente de ordinales que converge a $\gamma$ y suponemos que $K_{\gamma_\lambda}\backslash \bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_1 \neq \varnothing$ para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces la colección de cerrados $\{K_{\gamma_\lambda}\backslash \bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_1]\}_{\lambda\in\Lambda}$ es estrictamente decreciente la cual cumple que:

$$\begin{aligned}\varnothing = K_\gamma\backslash \bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_1] &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_{\gamma_\lambda}\backslash \bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_1] \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_{\gamma_\lambda+1}\backslash \bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_1].\end{aligned}$$

Si ahora identificamos a $\Lambda$ como un ordinal, entonces $\{K_{\gamma_\lambda}\backslash \bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_1]\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una colección de cerrados no vacíos con intersección vacía, donde $\Lambda \leq \gamma < \alpha$, pero esto contradice la minimalidad del ordinal $\alpha$ y, por tanto, debe existir un ordinal $\gamma_0 < \gamma$ tal que si $\gamma_0 < \beta < \gamma$. Entonces $K_\beta \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i \cup [(X\backslash K_{\beta_0}) \cap U_j]$, o de forma equivalente $K_\beta \in F^{-1}(\mathcal{U})$. Con lo cual se concluye que el conjunto $V = (\gamma_0, \gamma+1)$ es un abierto de $\gamma$ en $[0,\alpha)$ el cual cumple que $F(\gamma) \in F(V) \subseteq \mathcal{U} \subseteq \langle U_1, \ldots U_n\rangle$, es decir, $F$ es continua en $\gamma$.
En el caso en que $\gamma$ no sea un ordinal límite y $F(\gamma) \in \langle U_1, \ldots U_n\rangle$, definimos $V = (\gamma-1, \gamma+1)$ si $\gamma > 0$ ó $V = [0,1)$ si $\gamma = 0$. En cualquier caso se concluye que $F(\gamma) \in F(V) \subseteq \langle U_1, \ldots U_n\rangle$ y, así, $F$ resulta continua en $\gamma$. Dicho todo lo anterior, $F$ resulta continua en $[0,\alpha)$. Por último, para probar que $F^{-1}$ es continua, sea $K_\gamma \in \{K_\beta : \beta < \alpha\}$. Si $\gamma > 0$, y $(\beta_0, \gamma+1)$ es algún abierto de $\gamma$, entonces por la condición 1, podemos tomar un elemento $x_0 \in K_{\beta_0}\backslash K_\gamma$ fijo. Si definimos al conjunto $\mathcal{U} = \langle X\backslash\{x_0\}\rangle\backslash\langle K_{\gamma+1}\rangle$, éste cumple ser abierto de $K_\gamma$ y, además, $\gamma \in F^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq (\beta_0, \gamma+1)$. Si $\gamma = 0$, es claro que $0 \in F^{-1}(\langle X\backslash K_1\rangle^-) \subseteq [0,1)$. En cualquier caso $F^{-1}$ resulta continua.

Por otra parte, para ver que $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$, sea $K \in \mathcal{CL}(X)\backslash\{K_\beta : \beta < \alpha\}$. Si $K$ no está contenido en algún elemento de $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$, entonces el conjunto $\mathcal{CL}(X)\backslash\langle K_0\rangle$ es un abierto de $K$ ajeno a $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$. En el caso de que $K \subseteq K_{\beta_0}$ para algún $\beta_0 < \alpha$, tomamos al conjunto cerrado $L = \bigcap\{K_\beta : K \subseteq K_\beta\}$. Luego $L$ es un cerrado no vacío y, más aún, como $\{K_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es una colección decreciente de cerrados, existe $\gamma_0 < \alpha$ tal que $L = K_{\gamma_0}$. Como por hipótesis $K$ no es elemento de $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$, entonces $K \subsetneq L$. Ahora, tomando un elemento $x_0 \in L\backslash K$ fijo, se tiene que el conjunto $\langle X\backslash\{x_0\}\rangle\backslash\langle K_{\gamma_0+1}\rangle$ es un abierto de $K$ y es ajeno a $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$. Como $K$ fue arbitrario, se concluye que $\{K_\beta : \beta < \alpha\}$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$.

Por último vamos a probar que $\alpha = \omega_1$. Si $\mathcal{L} = \{\ell \in [0,\alpha) : \ell$ es un ordinal límite$\}$, entonces el conjunto $\mathcal{S} = [0,\alpha)\backslash\mathcal{L}$ resulta en un subespacio discreto de $[0,\alpha)$. Además, dado que se tiene una función inyectiva $f : \mathcal{L} \to \mathcal{S}$ definida por la correspondencia $f(\ell) = \ell + 1$, entonces $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{S}|$. Luego, como $X$ es separable, por el Teorema 2.2 (a), $\mathcal{CL}(X)$ es separable y, por el Lema 7.3 (a), $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{S}| \leq 2^{\aleph_0}$, es decir,

$$|[0,\alpha)| = |\mathcal{L} \cup \mathcal{S}| = |\mathcal{L}| + |\mathcal{S}| \leq |2^{\aleph_0}| + |2^{\aleph_0}| = 2^{\aleph_0}.$$

Como $X$ es numerablemente compacto, se debe cumplir que $|[0,\alpha)| > \aleph_0$, ya que de lo contrario $\bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta = \bigcap_{\beta<\omega} F_\beta \neq \varnothing$. Además, como estamos suponiendo la *Hipótesis del Continuo* y $\aleph_0 < |[0,\alpha)| \leq 2^{\aleph_0}$, entonces $|[0,\alpha)| = 2^{\aleph_0}$. Por tanto, $\alpha = \omega_1$ y se concluye que el espacio ordinal $[0,\omega_1)$ se puede encajar en $\mathcal{CL}(X)$ como un subconjunto cerrado. □

La idea de haber demostrado los Teoremas 7.5 y 7.6, es que bajo las hipótesis sobre $X$ de no ser un espacio primero numerable ni compacto, podemos demostrar que el espacio $[0,\omega_1] \times [0,\omega_1)$ se encaja en un hiperespacio como un conjunto cerrado y $T_4$, lo cual no es posible por el Teorema F.82. Para llegar a esto necesitamos los siguientes dos lemas, donde el primero trata al producto de hiperespacios y el segundo nos garantiza que si $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$ y separable, entonces $X$ es compacto.

**Lema 7.7.** Si $Y$ y $Z$ son subespacios cerrados ajenos de un espacio $X$, tales que $X = Y \cup Z$, entonces $\mathcal{CL}_\varnothing(X) \simeq \mathcal{CL}_\varnothing(Y) \times \mathcal{CL}_\varnothing(Z)$.

*Demostración.* Definamos a la función $H : \mathcal{CL}_\varnothing(Y) \times \mathcal{CL}_\varnothing(Z) \to \mathcal{CL}_\varnothing(X)$ por la correspondencia $H(K,L) = K \cup L$. Claramente esta función resulta suprayectiva y, al ser $Y$ y $Z$ ajenos, $H$ también es inyectiva. Haciendo una prueba análoga a la dada por el Lema 5.4, $H$ resulta continua. Por tanto, sólo basta mostrar que $H^{-1}$ es continua. Para probar que $H^{-1} : \mathcal{CL}_\varnothing(X) \to \mathcal{CL}_\varnothing(Y) \times \mathcal{CL}_\varnothing(Z)$ es continua, hay que verificar que las funciones proyección $p_Y \circ H^{-1} : \mathcal{CL}_\varnothing(X) \to \mathcal{CL}_\varnothing(Y)$ y $p_Z \circ H^{-1} : \mathcal{CL}_\varnothing(X) \to \mathcal{CL}_\varnothing(Z)$, definidas por:

$$p_Y \circ H^{-1}(B) = B \cap Y$$
$$p_Z \circ H^{-1}(B) = B \cap Z$$

son continuas. Para ver que $p_Y \circ H^{-1}$ es continua, por el Teorema B.18, basta probar que la imágen inversa de los subbásicos resulta en un conjunto abierto. En el primer caso, si $\mathcal{U}$ es un abierto subbásico en $\mathcal{CL}_\varnothing(Y)$ de la forma $\langle U \cap Y\rangle^+$ y si $\mathcal{V} = (p_Y \circ H^{-1})^{-1}(\mathcal{U})$, es claro que $\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{CL}_\varnothing(X) : B \cap Y \subseteq U \cap Y\} = \{B \in \mathcal{CL}_\varnothing(X) : B \subseteq U \cup (X\backslash Y)\}$ y al ser $Y$ cerrado en $X$, entonces $\mathcal{V} = \langle U \cup (X\backslash Y)\rangle^+$ es abierto en $\mathcal{CL}_\varnothing(X)$. Ahora para el caso en que $\mathcal{U}$ es un abierto subbásico en $\mathcal{CL}_\varnothing(Y)$ de la forma $\langle U \cap Y\rangle^-$, entonces $\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{CL}_\varnothing(X) : (B \cap Y) \cap (U \cap Y) \neq \varnothing\} = \{B \in \mathcal{CL}_\varnothing(X) : B \cap (U \cap Y) \neq \varnothing\}$ y al ser $Y = X\backslash Z$ con $Z$ cerrado, se tiene que $Y$ es abierto en $X$ y, por tanto, $\mathcal{V} = \langle U \cap Y\rangle^-$ es abierto en $\mathcal{CL}_\varnothing(X)$. El caso en que $\mathcal{U} = \{\varnothing\}$, el resultado es evidente. En cualquier caso, $\mathcal{V} = (p_Y \circ H^{-1})^{-1}(\mathcal{U})$ resulta abierto, es decir, $p_Y \circ H^{-1}$ es una función continua. Análogamente se prueba que $p_Z \circ H^{-1}$ es una función continua y, así, queda demostrado que $H^{-1}$ es continua. En conclusión $H$ es un homeomorfismo y, por ende, $\mathcal{CL}_\varnothing(X) \simeq \mathcal{CL}_\varnothing(Y) \times \mathcal{CL}_\varnothing(Z)$. $\square$

**Lema 7.8.** Si $X$ es un espacio separable y $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$, entonces $X$ es compacto.

*Demostración.* Por contradicción, si suponemos que $X$ no es compacto, por el Teorema 7.2, $X$ no es primero numerable en algún elemento $z \in X$. Como $X$ no es compacto, existe una cubierta abierta $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de $X$ sin subcubiertas finitas. Por tanto, como $z \in U_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ es evidente que $X\backslash U_{\alpha_0}$ no es compacto. Como $X$ es $T_4$, existe un abierto $V$ en $X$ tal que $z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U_{\alpha_0}$. Además, como $X\backslash U_{\alpha_0} \subseteq \overline{X\backslash\overline{V}} \subseteq X\backslash V$, claramente $\overline{X\backslash\overline{V}}$ no es compacto, y afirmamos que es separable. Como $X$ es separable existe un denso numerable $D$ en $X$, luego si $W$ es un abierto arbitrario no vacío en $\overline{X\backslash\overline{V}}$ y $U$ es un abierto en $X$ tal que $W = U \cap (\overline{X\backslash\overline{V}})$, entonces $U \cap (X\backslash\overline{V})$ es un abierto no vacío de $X$ y, por tanto, $\varnothing \neq U \cap (X\backslash\overline{V}) \cap D \subseteq W \cap D$. Como $W$ fue arbitrario, se concluye que $D \cap \overline{X\backslash\overline{V}}$ es denso en $\overline{X\backslash\overline{V}}$, es decir, $\overline{X\backslash\overline{V}}$ es separable. Ahora, si definimos a $V^* = X\backslash\left(\overline{X\backslash\overline{V}}\right)$ y tomamos un abierto $V_0$ en $X$ tal que $z \in V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V^*$, definimos a $K = \overline{V_0}$ y $L = X\backslash V^*$. Observamos que $K$ no es primero numerable en $z$, ya que de lo contrario si $\mathcal{B}$ fuera una base local numerable de $z$ en $K$, claramente $\mathcal{B}' = \{V_0 \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ sería una base local numerable de $z$ en $V_0$, y como $B = U_B \cap \overline{V_0}$ para algún abierto $U_B$ de $X$ para todo $B \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}' = \{V_0 \cap U_B : B \in \mathcal{B}\}$ sería también una base local numerable de $z$ en $X$, lo cual contradice el hecho de que $X$ no es primero numerable en $z$. La prueba de $K$ es separable es análoga a la prueba de $L$. Luego, por el Corolario 1.21, $X$ es numerablemente compacto, y por tanto $K$ y $L$ son espacios numerablemente compactos por ser subespacios cerrados de $X$. Ya con esto, hasta el momento tenemos lo siguiente:

1. $K$ es separable, numerablemente compacto y no es primero numerable.

2. $L$ es separable, numerablemente compacto y no es compacto.

Usando los Teoremas 7.5 y 7.6, obtenemos que los espacios ordinales $[0, \omega_1]$ y $[0, \omega_1)$ se pueden encajar como subespacios cerrados en $\mathcal{CL}(K)$ y $\mathcal{CL}(L)$ respectivamente. Por otro lado, el espacio $Z = K \cup L$ visto como subespacio de $X$, cumple que $\mathcal{CL}_\varnothing(Z) \simeq \mathcal{CL}_\varnothing(K) \times \mathcal{CL}_\varnothing(L)$ por el Lema 7.7 y, como $\varnothing \notin [0, \omega_1] \cup [0, \omega_1)$, entonces $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1)$ se puede encajar en $\mathcal{CL}(K) \times \mathcal{CL}(L) \subseteq \mathcal{CL}(Z)$ como subconjunto cerrado. Evidentemente, como $K$, $L$ y $Z$ son subespacios cerrados y no vacíos de $X$, por la Proposición 1.8, $\mathcal{CL}(K)$, $\mathcal{CL}(L)$ y $\mathcal{CL}(Z)$ son subespacios cerrados de $\mathcal{CL}(X)$ y, por tanto, $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1)$ se puede encajar en $\mathcal{CL}(Z)$ como subespacio cerrado. Por hipótesis, $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$ y, por tanto, $\mathcal{CL}(Z)$ es $T_4$. Finalmente, al ser $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1)$ cerrado en $\mathcal{CL}(Z)$, se concluye que $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1)$ es $T_4$, pero esto es una contradicción según el Teorema F.82. Por tanto $X$ es compacto. $\square$

**Teorema 7.9.** Si $X$ es un espacio $T_3$, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$ si y sólo si $X$ es compacto.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Para ver que $X$ es compacto sólo basta probar que la cerradura de todo subconjunto numerable es compacto, según el Teorema 7.2. Entonces sea $K$ un conjunto numerable de $X$. Si $L = \overline{K}$, por el Teorema 2.2 y la Proposición 1.8, $\mathcal{CL}(L)$

separable y cerrado en $\mathcal{CL}(X)$, por tanto $T_4$. Luego por el Lema 7.8, $\mathcal{CL}(L)$ es compacto, lo que implica que $L$ es compacto por el Teorema 3.1. Como $K$ fue un conjunto numerable arbitrario, se concluye que $X$ es compacto.

$\Longleftarrow$) Si $X$ es compacto, por el Teorema 3.1, $\mathcal{CL}(X)$ es compacto. Luego, como $\mathcal{CL}(X)$ es compacto y $T_2$, usando el Teorema E.45, $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$. $\square$

Debido al Teorema 7.9 podemos ampliar el Teorema 3.8 como sigue.

**Teorema 7.10.** Suponiendo la *Hipótesis del Continuo*. Si $X$ es un espacio $T_3$, los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $X$ es *compacto*.

(b) $\mathcal{CL}(X)$ es *compacto*.

(c) $\mathcal{CL}(X)$ es *Lindelöf*.

(d) $\mathcal{CL}(X)$ es *paracompacto*.

(e) $\mathcal{CL}(X)$ es *metacompacto*.

(f) $\mathcal{CL}(X)$ es *meta-Lindelöf*.

(g) $\mathcal{CL}(X)$ es $T_4$.

# Índice alfabético


*Hipótesis del Continuo*, 69

abierto regular, 3

conjunto
- de funciones reales, continuas y acotadas definidas en $X$, $\mathcal{C}^*(X)$, 55
- dirigido, 10
- estrella, 22

convergencia de Kuratowski-Painlevé, 50
cubierta, 13
- abierta, 13
- abierta numerable, 15
- cerrada, 13
- localmente finita, 13
- punto finito, 13
- punto numerable, 13

espacio
- $T_0$, 1
- $T_1$, 1
- $T_2$, 2
- $T_3$, 2
- $T_{3\frac{1}{2}}$, 4
- $\mathcal{C}^*$ - *encajado*, 55
- $T_4$, 4
- cero - dimensional, 61
- conexo, 4
- totalmente disconexo, 61
- compacto, 13
- continuo, 67
- de Lindelöf, 20
- meta-compacto, 22
- meta-Lindelöf, 22
- numerablemente compacto, 15
- ordinal, 23
- paracompacto, 21
- pseudocompacto, 17, 55
- secuencialmente compacto, 16
- semiregular, 3

función
- cerrada, 8
- cofinal, 11
- continua, 5
- de indentificación, 7
- de Urysohn, 6

hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$, 29

intersección diagonal, 25

métrica de *Hausdorff*, $H_d$, 63

nube de radio $\varepsilon$ centrada en $A$, $N_d(\varepsilon, A)$, 63

punto, 10
- acumulación, 11
- aislado, 11
- límite, 10

red, 10
- de elementos de un espacio $X$, 10
- de subconjuntos de un espacio $X$, 49

refinamiento, 13
- de punto finito, 22
- de punto numerable, 22

subconjunto
- cofinal, 10
- estacionario, 26
- residual, 10

subcubierta, 13
subrred, 11

topología

de vietoris, 29
de indentificación, 7
finita, 29
indiscreta, 35

# Bibliografía


[1] Amor J. A., Campero G. *Teoría de conjuntos, curso intermedio.* Las Prensas de Ciencias, UNAM, 2011.

[2] Beer C. *Topologies on Closed and Closed Convex Sets.* Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[3] Broverman S. *Pseudocompactness properties.*, Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), 175-178.

[4] Broverman S. *The topological extension of a product.* Canad. Math. Bull. Vol. 19 (1976) 13-19.

[5] Borsuk K., Ulam S. *On symmetric products of topological spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931) 875-882.

[6] Di Maio G., Meccariello E., Naimpally S. *Normal Vietoris implies compactness: a short proof.* Czechoslovak Mathematical Journal, 54 (129) (2004), 181-182.

[7] Dugundji J. *Topology.* Allyn and Bacon series in Advanced Mathematics. Boston, Massachusetts, 1966. ISBN 0-205-00271-4.

[8] Engelking R. *General topology.* Sigma series in pure mathematics, 6. Heldermann, Berlin, 1989. ISBN 3-88538-006-4.

[9] Fleischman W. M. *A new extension of countable compactness* Fund. Math. 67 (1970), 1-7.

[10] Gauld D., Vamanamurthy M. *Cardinality of discrete subsets of a topological space.* Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 25 (1982), 99-101.

[11] Ginsburg J. *On the Stone-Čech compactification of the space of closed sets.*, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 301-311.

[12] Glicksberg I. *Stone-Čech compactification of products.* Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 369-382.

[13] Hewitt E. *Rings of real-valued continuous functions. I.* Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 45-99.

[14] KEESLING J. *Compactness related properties in hyperespaces.* Lecture Notes in Math., Vol. 171, Springer-Verlag, Berling and New York, 1970.

[15] KEESLING J. *On the equivalence of normality and compactness in hyperspaces.* Pacific journal of mathematics, Vol. 33, No. 3, 1970.

[16] LUCCHETTI R. *A new approach to a Hyperspace Theory.* Journal of Convex Analysis, Volume 1 (1994), No. 2, 173-193.

[17] LUCCHETTI R. *Hypertopologies and applications.* Recent Developments in Well-Posed Variational Problems, Mathematics and Its Applications Volume 331, 1995, pp 193-209.

[18] MICHAEL E. *Topologies on spaces of subsets.*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 71, No.1, (Jul. 1951), pp. 152-182.

[19] MROWKA S. *On the convergence of nets of sets.* Fund. Math 45 (1958), 237-246.

[20] NADLER S-B. JR. *Continuum theory, an introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York.

[21] REITBERGER H. *The contributions of L. Vietoris and H. Tietze to the foundations of general topology.* Institut für Mathematik, A-6020 Innsbruck, Austria.

[22] REITBERGER H. *Leopold Vietoris (1891 - 2002).* November 2002.

[23] Shakhmatov D., Nogura T. *When does the Fell topology on a hyperspace of closed sets coincide with the meet of the upper Kuratowski and the lower Vietoris topologies.* Department of Mathematics, Faculty of Science, Ehime University, Matsuyama 790, Japan, Nomvember 1995.

[24] SMITHSON R. E. *First countable hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 56 (1976), 325-328.

[25] VELICHKO N. V. *On spaces of closed subsets.* Sibirskii Matem. Z. 16 (1975), 627629; English traslation: Siberian Math. J. 16 (1975), 484486.

[26] VIETORIS L. *Bereiche zweiter Ordnung.* Monatsh. f. Math. u. Phys. 32 (1922), 258-280.

[27] WILLARD S. *General topology.* Addison-Wesley series in mathematics.