



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

POSGRADO EN ASTROFÍSICA

DINÁMICA ORBITAL CAÓTICA EN EL CINTURÓN DE KUIPER

**TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)**

**PRESENTA:
MARCO ANTONIO MUÑOZ GUTIÉRREZ**

**TUTORES
BÁRBARA PICHARDO SILVA
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA**

**MAURICIO REYES RUIZ
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA**

MÉXICO, D. F., ENERO 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DINÁMICA ORBITAL CAÓTICA EN EL CINTURÓN DE KUIPER

M. EN C. MARCO ANTONIO MUÑOZ GUTIÉRREZ



Recopilación de Artículos
Instituto de Astronomía
Universidad Nacional Autónoma de México

Enero 2016 – versión 4.0

Marco Antonio Muñoz Gutiérrez: *Dinámica orbital caótica en el cinturón de Kuiper*, Recopilación de Artículos, © Enero 2016

ASESORES DE TESIS:
Bárbara Pichardo Silva
Mauricio Reyes Ruiz

EN:
Ciudad Universitaria, México, D.F.

FECHA:
Enero 2016

Dedico este trabajo a mi amado hijo,
Noel Adolfo Muñoz Garay

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a las personas que han estado alrededor mío y que han colaborado, de una manera u otra, para alcanzar éste último grado académico.

Primeramente a mi futura esposa, Amparo Garay y a mi familia, que consta esencialmente de mi madre, Bertha Gutiérrez y mis hermanos, Allan Muñoz y Laura Muñoz. Ellos cuatro, junto a mi hijo, constituyen las personas más importantes en mi vida.

Agradezco a mis asesores durante mi estancia en el Instituto de Astronomía, de Doctorado a Bárbara Pichardo y Mauricio Reyes; de Licenciatura y Maestría a Vladimir Ávila, porque ellos han sido amigos además de instructores.

Agradezco también a mis amigos, físicos, astrónomos, karatecas y “demases” que han estado y, espero, estarán en el futuro igualmente a mi lado y cuya lista sería extensa. A todos ellos los tengo presentes.

Estoy agradecido con la UNAM y con el Instituto de Astronomía por casi 13 años de memorable estadía y por las fabulosas oportunidades que me han brindado para estudiar y trabajar; agradezco el uso de la supercomputadora *Atocatl*, en donde pude realizar buena parte de mi investigación y agradezco a los proyectos que la financiaron: de UNAM-PAPIIT los proyectos IN-114114 e IN-115413, a CONACyT por otorgarme una beca para realizar mis estudios de Maestría y Doctorado y al PAEP.

Finalmente y sólo para dejar constancia, aún si es solo para mí mismo, agradezco infinitamente a dos personas que no conocí, pero cuya existencia, ejemplo y enseñanza han tenido una enorme influencia en mi vida. Lamentablemente debido a esa enfermedad de la humanidad que nos aflige y que uno de ellos llamó *sugestibilidad*, debo abstenerme de nombrarlos.

¡Muchas gracias!

RESUMEN

Gracias al desarrollo exponencial de las computadoras modernas y a la implementación de integradores simplécticos, experimentos numéricos que simulan la evolución dinámica del sistema solar con gran detalle son ahora posibles en tiempos computacionalmente razonables. Esto ha permitido establecer con cierta contundencia, por ejemplo, cómo fue la evolución temprana del sistema solar, con la migración planetaria y la dispersión de los restos del disco de planetesimales que forman a su vez la nube de Oort y los cinturones de asteroides y de Kuiper, o establecer la naturaleza caótica del sistema solar, pero mostrando que a pesar de ello nuestro sistema es estable a largo plazo.

En este trabajo hemos estudiado el efecto dinámico de planetas enanos (tipo Plutón) en un cinturón de restos (“*debris disk*”) tipo Kuiper. Para este fin empleamos el conocido integrador simpléctico, MERCURY. Uno de los propósitos principales de este estudio era la aplicación al disco de restos de nuestro sistema solar, esto es, al cinturón de Kuiper, donde nos propusimos, entre otras cosas, estudiar la tasa de inyección de nuevos cometas, provenientes del cinturón de Kuiper clásico, a la zona de influencia de los planetas gigantes, en particular de Neptuno, debido a perturbaciones seculares de decenas de planetas enanos tipo Plutón. Esta inyección de cometas reviste enorme importancia ya que de ésta se deriva la población observada de cometas de periodo corto, en particular de los cometas de la familia de Júpiter, y cuyo origen dinámico, esto es, los procesos que desestabilizan a los cuerpos cometarios del cinturón de Kuiper, no han podido ser establecidos con claridad hasta el día de hoy.

Como agentes desestabilizadores de los núcleos cometarios en el cinturón de Kuiper, se han propuesto mecanismos como: perturbaciones caóticas por los planetas gigantes; o las producidas por el gigante más cercano, Neptuno, a través de sus resonancias de movimiento promedio, en donde las partículas pueden evolucionar caóticamente. También se ha propuesto, por ejemplo, que la dispersión producida por la interacción directa, esto es por encuentros cercanos, entre miles de objetos del

tamaño de planetas enanos y objetos cometarios, sea la responsable de la tasa de inyección de éstos últimos a la región de los planetas gigantes, o se ha sugerido que el reservorio principal de los cometas de periodo corto no es el cinturón de Kuiper clásico sino el disco disperso, entre otros.

En este trabajo, proponemos un nuevo mecanismo relacionado con efectos seculares inducidos por los planetas enanos. Aquí vale la pena mencionar que el propuesto es un mecanismo diferente al de dispersión directa que se presentó en los años 80 y que resultó implausible. De esta forma, y bajo la suposición de que el cinturón de Kuiper posee más de los 10 planetas enanos descubiertos al día de hoy, planteamos un mecanismo capaz de inducir caos en las órbitas de los cuerpos cometarios del cinturón de Kuiper, lo que los orilla a evolucionar hacia otras familias dinámicas, por ejemplo lanzándolas hacia el disco disperso o a las resonancias de movimiento promedio de Neptuno, después de lo cual los varios mecanismos mencionados antes entrarían en acción.

Para familiarizarnos con los integradores simplécticos y el análisis del caos, estudiamos la evolución del cometa Halley, cuya naturaleza caótica había sido establecida con anterioridad, aunque sin una medida del exponente de Lyapunov para su órbita en trabajos previos. En nuestro trabajo exploramos la evolución a largo plazo del cometa Halley y de miles de partículas clones que cubren el espacio fase de semieje mayor *vs* excentricidad alrededor de la posición actual del cometa, desde una perspectiva general, hasta cubrir sólo el error observacional en el mismo espacio fase y en el de semieje mayor *vs* inclinación. De esta forma establecimos que:

- El tiempo de supervivencia estimado del cometa Halley en el sistema solar, antes de ser expulsado o chocar con el Sol o algún planeta es de $\sim 3 \times 10^5$ años.
- Que dos órbitas dentro del error observacional actual, esto es, que cualquiera de ellas representa con la misma probabilidad al cometa en la actualidad, pueden tener destinos completamente diferentes debido a la naturaleza caótica del movimiento.
- El exponente de Lyapunov medido para la órbita del Halley implica un tiempo de Lyapunov de sólo ~ 70 años, lo

que significa que dos órbitas dentro del error observacional actual se separan más allá de este límite en un tiempo comparable al periodo del cometa, implicando que una predicción de los parámetros orbitales del cometa con mayor precisión que la actual para el siguiente paso del Halley por el perihelio no es posible.

- Que la evolución más probable del cometa, si logra sobrevivir en el sistema solar por más de $\sim 10^5$ años es que su periodo aumente, dejando de ser un cometa tipo Halley, que su excentricidad aumente y su inclinación disminuya, hacia una órbita de más o menos 120° .

Los resultados anteriores se presentaron en el artículo 1 de esta recopilación, publicado en la revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (MNRAS 2015, 447, 3775).

Dado que la parte “clásica” de un cinturón tipo Kuiper no sería prácticamente afectada por un planeta gigante tipo Neptuno, esta componente de los discos de restos es altamente estable en escalas de tiempo de Giga años en el caso particular de nuestro sistema solar. Esto hace necesario un estudio por un periodo de tiempo comparable a las escalas de estabilidad del sistema. De esta forma, el estudio de la evolución de cinturones tipo Kuiper requiere de tiempos de integración considerablemente mayores que los que fueron necesarios para el cometa Halley. Para lograr ésto con suficientes partículas prueba representativas de un cinturón clásico frío, se utilizó la supercomputadora del Instituto de Astronomía de la UNAM, *Atocatl*.

Estudios previos de simulaciones del cinturón de Kuiper bajo la influencia de los ~ 10 objetos de tamaños comparables a Plutón conocidos, mostraron que este enfoque no podía ser aplicado de manera directa sin la presencia de los planetas gigantes, ya que las condiciones actuales de las partículas observadas conservan una “memoria” impresa por su evolución en el potencial del sistema solar completo. Es por ello que elegimos generalizar nuestro estudio hacia discos de escombros, aunque en principio similares al cinturón de Kuiper clásico frío, bajo la influencia de planetas enanos dinámicamente fríos, esto es, de excentricidades e inclinaciones bajas y aleatoriamente distribuidos. Se consideró que los resultados obtenidos, al ser de carácter general, podrían ser después aplicados al caso particu-

lar del sistema solar.

De esta forma, en el segundo artículo de la recopilación se presentan los resultados de simulaciones de un cinturón de escombros que asemeja la componente fría del cinturón de Kuiper clásico del sistema solar, la cual debido a su estabilidad, representa un punto de partida intuitivo para un estudio general de discos de escombros evolucionados. En las simulaciones se incluyeron como N-cuerpos decenas de objetos de tamaño similar a planetas enanos, desde 10 y hasta 100, con y sin la presencia de un planeta gigante similar a Neptuno, con sus mismas características físicas y orbitales a excepción de su inclinación, que fue definida en cero grados por simplicidad.

Sin la presencia del planeta gigante se encontró lo siguiente:

- Sólomente 10 planetas enanos son capaces de inducir un calentamiento dinámico importante sobre las partículas del cinturón de escombros, aumentando sus excentricidades e inclinaciones.
- Entre mayor es el número de planetas enanos en la simulación, el efecto en el calentamiento es acumulativo, esto es, aumenta proporcionalmente con el número de planetas enanos.
- La inclinación promedio máxima de las partículas prueba depende directamente de la inclinación máxima inicial de la distribución de los planetas enanos, mientras que la excentricidad promedio es siempre creciente, es decir, no encontramos un límite de saturación en el tiempo de nuestras integraciones.

Con la presencia del planeta gigante sin embargo se observa lo siguiente:

- El efecto de calentamiento por los planetas enanos se reduce drásticamente por el gigante, lo que significa que la presencia de un planeta masivo interior al cinturón de escombros actúa como un estabilizador de sus órbitas.
- El efecto estabilizador parece ser debido simplemente a la fuerza vertical gravitacional ejercida por el gigante sobre las partículas del disco, es decir, que este efecto no tiene un origen resonante. En promedio el planeta gigante actúa como un anillo de radio ~ 30 unidades astronómicas

que jala las partículas hacia el plano del disco con mayor efectividad conforme más cercanas se encuentran éstas a la posición del gigante. Este efecto puede tener consecuencias importantes en la producción de polvo en discos de escombros, debido a la mayor densidad del disco y por tanto al mayor número de encuentros cercanos y colisiones entre sus partículas.

- A pesar de esta estabilización, 50 y sobre todo 100 planetas enanos perturban suficientemente las órbitas de los objetos del disco de escombros produciendo calentamiento tanto radial (incrementando las excentricidades) como vertical (incrementando las inclinaciones) y además migración radial, tal que partículas que no se encontraban inicialmente en la vecindad o dentro de resonancias, son capaces de alcanzar las resonancias de movimiento promedio del gigante y ser atrapadas por ellas.
- En el sistema solar, si existen más de los 10 objetos del tamaño de planetas enanos en el cinturón de Kuiper conocidos actualmente, el mecanismo de transporte de material nuevo a las resonancias podría contribuir a la tasa de inyección de cometas a la zona de influencia de Neptuno, de donde es conocido que pueden escalar hacia el interior del sistema planetario hasta llegar a formar parte de la familia de cometas de periodo corto. Este mecanismo dinámico podría constituir una fuente adicional para suministrar nuevos cometas al sistema solar interior, lo que ayudaría a resolver la discrepancia entre la tasa de inyección estimada actualmente y la población observada de cometas de la familia de Júpiter.

Todos estos resultados se presentaron en el artículo 2 de esta recopilación, publicado en la revista *Astrophysical Journal Letters* (ApJL 2015, 811, L21).

Por otro lado, los resultados señalados arriba requieren de estudios mucho más detallados para establecer con certeza:

1. ¿Cuál es el mecanismo que hace que un planeta gigante interior a un disco de escombros estabilice las órbitas de los objetos de ese disco?
2. Si el mecanismo de realimentación a las resonancias de movimiento promedio con material nuevo es eficiente a

largo plazo, esto es, si el efecto de los planetas enanos sobre un disco de escombros, cuando un planeta gigante interior al cinturón está presente, puede mantenerse de manera secular.

3. En el caso particular del sistema solar, si existen más de 10 planetas enanos en la región trans-neptuniana, ¿con qué eficiencia el mecanismo del punto anterior puede contribuir a la tasa de inyección de nuevos cometas al sistema planetario interno?

Las respuestas cuantitativas a los 3 puntos anteriores constituyen el material para tres artículos adicionales que ya hemos iniciado.

Como hemos visto, el código MERCURY es una poderosa herramienta para el estudio de problemas de N-cuerpos en un potencial central dominante. Con éste hemos sido capaces de explorar problemas relevantes en el sistema solar. Cabe hacer notar que, dado que el cinturón de Kuiper es un caso particular de un disco de escombros, que representa el resultado de la evolución dinámica por ~ 4 Giga años bajo la influencia, principalmente, de los planetas gigantes y de la migración temprana de éstos, un estudio general de discos de escombros es una continuación natural del trabajo desarrollado durante el doctorado, cuyos resultados pueden ser luego aplicados buscando reproducir detalles particulares tanto del sistema solar como de otros discos de escombros conocidos alrededor de estrellas diferentes del Sol.

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Los objetos trans-neptunianos	2
1.1.1	Cinturón de Kuiper clásico	3
1.1.2	Objetos resonantes	4
1.1.3	Disco disperso	4
1.2	Los Cometas de periodo corto	6
1.2.1	Origen de los cometas de la familia de Júpiter	9
2	METODOLOGÍA Y HERRAMIENTAS	15
2.1	Integraciones Numéricas	15
2.2	Análisis del Caos	17
2.2.1	Exponente de Lyapunov	17
2.2.2	Análisis de frecuencias	20
3	ARTÍCULO 1	23
3.1	Resumen	23
3.2	Artículo	25
4	ARTÍCULO 2	37
4.1	Resumen	37
4.2	Artículo	39
5	CONCLUSIONES	45
	BIBLIOGRAFÍA	49

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Cinturón de Kuiper observado: espacio fase <i>a vs e</i> . 5
Figura 2	Cinturón de Kuiper observado: espacio fase <i>a vs i</i> . 5
Figura 3	Cometa 1P/Halley en 1986. 6
Figura 4	Espacio fase de cometas observados. 8
Figura 5	Distribución acumulativa de magnitudes aparentes de objetos del cinturón de Kuiper clásico cercanos a la eclíptica. 13
Figura 6	Distribución acumulativa de magnitudes aparentes de objetos del disco disperso cercanos a la eclíptica. 14
Figura 7	Evolución del exponente de Lyapunov para una órbita caótica y una regular. 19

ACRÓNIMOS

- CKB** *Classical Kuiper Belt* - Cinturón de Kuiper clásico
- DP** *Dwarf Planet* - Planeta enano
- HTC** *Halley-type Comet* - Cometa tipo Halley
- IAU** *International Astronomical Union* - Unión Astronómica Internacional
- JFC** *Jupiter-family Comet* - Cometa de la familia de Júpiter
- KB** *Kuiper Belt* - Cinturón de Kuiper
- LPC** *Long-period Comet* - Cometa de periodo largo
- MAB** *Main-belt Asteroid* - Asteroide del cinturón principal
- MMR** *Mean Motion Resonance* - Resonancia de movimiento promedio
- MPC** *Minor Planet Center* - www.minorplanetcenter.net
- NEO** *Near Earth Object* - Objeto cercano a la Tierra
- SD** *Scattered Disk* - Disco disperso
- SPC** *Short-period Comet* - Cometa de periodo corto
- TNO** *Trans-Neptunian Object* - Objeto trans-Neptuniano

INTRODUCCIÓN

El estudio dinámico del sistema solar ha experimentado un enorme realce en las últimas décadas, gracias principalmente al desarrollo e implementación de integradores simplécticos, los cuáles permiten integrar las ecuaciones de movimiento de partículas en potenciales de N-cuerpos por periodos comparables a la edad del sistema, esto es del orden de Giga años (en inglés *Gigayears*, Gyr de aquí en adelante), en tiempos computacionalmente razonables.

El sistema solar además del Sol y los planetas, se compone de miles de millones de objetos de menor tamaño, todos bajo la influencia de la gravedad del Sol. Además de los ocho planetas y sus satélites naturales y de los cinco cuerpos de diámetros ~2000 Km clasificados por la Unión Astronómica Internacional (IAU por sus siglas en inglés de *International Astronomical Union*) como “planetas enanos” (a saber: *Ceres*, *Plutón*, *Eris*, *Haumea* y *Makemake*), todos los demás objetos del sistema solar se reconocen como “cuerpos menores”. Estos cuerpos menores son en general objetos compuestos de hierro, roca y/o hielos, de baja masa, con diámetros que van desde unos cuantos metros, como el caso de algunos asteroides y objetos cercanos a la Tierra, hasta cientos de kilómetros. Se encuentran distribuidos a diferentes distancias del Sol, siendo los más alejados cuerpos congelados. Por sus propiedades orbitales dentro de los cuerpos menores se definen diferentes familias de objetos, que van desde objetos cercanos a la tierra o NEOs (por sus siglas en inglés de *Near Earth Objects*), asteroides del cinturón principal o MBAs (por sus siglas en inglés de *Main Belt Asteroids*), cometas de periodo corto o SPCs y de periodo largo o LPCs (por sus siglas en inglés de *Short-period Comets* y *Long-period Comets*, respectivamente), asteroides troyanos, centauros, objetos trans-neptunianos o TNOs (por sus siglas en inglés de *Trans-Neptunian Objects*) y otros.

A continuación se describen detalladamente las características, principalmente orbitales, de dos familias de cuerpos me-

nores: los SPCs y los TNOs debido a que revisten importancia para el estudio presentado en este trabajo.

1.1 LOS OBJETOS TRANS-NEPTUNIANOS

Como TNOs se entienden todos los objetos que orbitan alrededor del Sol con semieje mayor, a , mayor a 30.09 unidades astronómicas (UA), dado que $a_N = 30.09$ UA es el semieje mayor de la órbita de Neptuno. El primer TNO observado directamente, 1992 QB₁, fue descubierto en 1992 por Jewitt and Luu [28]. Al día de hoy se conocen alrededor de 1000 objetos¹ con órbitas bien caracterizadas, esto es, definidas con al menos 3 observaciones en diferentes épocas. Por su lejanía del Sol, los TNOs son cuerpos congelados que contienen diversos compuestos como agua, metano, monóxido de carbono, etc., en estado de solidificación (Luu and Jewitt [41]), es decir que están formados principalmente por “hielos” y no por metales, lo que los diferencia claramente de otras poblaciones en el sistema solar, por ejemplo, de los asteroides.

Por definición todo objeto más allá de la órbita de Neptuno es un TNO, sin embargo, en esta región del sistema solar se reconocen varias poblaciones bien diferenciadas, principalmente divididas en dos, el cinturón de Kuiper y la nube de Oort. La nube de Oort, hasta ahora no observada directamente, estaría conformada por objetos de alta excentricidad y cuyas órbitas se extienden hasta los límites del sistema solar, y por objetos estables que se distribuyen de manera isotrópica formando una estructura aproximadamente esférica alrededor del Sol a distintas distancias, desde unas 1000 hasta decenas de miles de UA del Sol. Al día de hoy existe un consenso en considerar a la nube de Oort como el reservorio de todos los LPCs ($P > 200$ años, donde P es el periodo de la órbita), cuya distribución de inclinaciones es isotrópica. Dado que la nube de Oort es una componente muy alejada y que según estudios recientes no tiene una relación directa con los SPCs, no se estudiará en este trabajo.

¹ Según el sitio web <http://www.minorplanetcenter.net/iau/mpc.html>. Este sitio llamado *Minor Planet Center* (MPC), enlista todos los cuerpos menores del sistema solar conocidos, además de ser el que realiza los anuncios oficiales de nuevos descubrimientos. Este sitio es mantenido por la NASA pero depende actualmente de la IAU.

Por otro lado, el cinturón de Kuiper (en inglés *Kuiper Belt*, KB de aquí en adelante) está formado por objetos que se encuentran inmediatamente después de la órbita de Neptuno, cuya componente principal forma un cinturón similar al cinturón de asteroides pero externo a los planetas gigantes. En general se divide al KB de la siguiente manera:

- Cinturón de Kuiper clásico (en inglés *Classical Kuiper Belt*, CKB de aquí en adelante).
 - CKB frío.
 - CKB caliente.
- Objetos resonantes.
- Disco disperso (en inglés *Scattered Disk*, SD de aquí en adelante).

1.1.1 Cinturón de Kuiper clásico

El CKB está integrado por objetos de baja excentricidad, e , e inclinación, i , y cuyas órbitas se distribuyen en un intervalo de semiejes mayores que abarca desde ~ 40 hasta ~ 50 UA. Los límites interno y externo del CKB parecen estar marcados por la presencia de dos resonancias de movimiento promedio (o MMRs por sus siglas en inglés de *Mean Motion Resonances*) con Neptuno, a saber la resonancia 3:2 en 39.4 UA y por la resonancia 2:1 en 47.8 UA. Por la inclinación de la órbita respecto al plano de la eclíptica los objetos del CKB se dividen en dos categorías: el CKB frío y el CKB caliente. La población fría consta de objetos de $i < 5^\circ$ (Brown [5]), los cuales se ha observado se encuentran bien restringidos en semieje mayor, tal que $42.5 < a_c < 44.5$ UA y siguen una distribución gaussiana centrada en $\mu_a = 44$ UA y con desviación estándar de $\sigma_a = 1.5$ UA. Por otro lado sus excentricidades son menores a 0.1 o incluso a 0.05 para la mayoría de la población (Kavelaars et al. [31], Gulbis et al. [23], Petit et al. [47], Dawson and Murray-Clay [10]).

El CKB caliente consta de los objetos con $i > 5^\circ$ que se encuentran entre los límites mencionados arriba de 39.4 y 47.8 UA en a . Las excentricidades de estos objetos son menores a ~ 0.3 .

La masa total del CKB se estima en $\sim 0.01M_\oplus$. Esta estimación se ha basado tanto en estudios teóricos de décadas atrás

(Hamid et al. [24]) como en sondeos observacionales recientes (Bernstein et al. [3], Fraser et al. [20]).

1.1.2 *Objetos resonantes*

En un potencial gravitacional central, dos objetos se encuentran en una MMR si el cociente de sus periodos se puede expresar como el cociente de dos números enteros pequeños, m/n . En el KB existen agrupaciones de objetos cuyo periodo se encuentra relacionado de esta manera con el periodo de Neptuno, constituyendo de esta forma familias resonantes. Estos grupos de objetos se encuentran en cierta forma “atrapados” en las diferentes MMRs con Neptuno, lo que significa que el semieje mayor de una población resonante está bien definido.

La más importante de estas poblaciones, por el número de objetos que forman parte de ella, es la MMR 3 : 2 con Neptuno, donde $a_{3:2} = 39.4$ UA. Los objetos de esta población son llamados también *Plutinos* debido a que el miembro más prominente de la misma es Plutón. Como ya se dijo, esta resonancia marca el límite interno del CKB mientras que la resonancia 2:1, que marca el límite externo en $a_{2:1} = 47.8$ UA, es al parecer igualmente importante en cuanto al número de objetos que posee. Se ha observado sin embargo que en prácticamente cualquier resonancia $m : n$ en el KB pueden encontrarse objetos atrapados, aunque ninguna otra es tan importante como las dos mencionadas anteriormente (Gladman et al. [21]).

1.1.3 *Disco disperso*

Como parte del SD se clasifican todos aquellos TNOs cuyo perihelio, $q = a(1 - e)$, se encuentra entre ~ 30 y ~ 35 UA, mientras que sus afelios, $Q = a(1 + e)$, pueden alcanzar cientos de UA. El perihelio de estos objetos sugiere que en algún momento de su evolución dinámica se han acercado suficientemente a Neptuno como para ser dispersados por éste (Luu and Jewitt [41], Kavelaars et al. [31], Volk and Malhotra [59], Gulbis et al. [23]). Esta dispersión resulta en excentricidades e inclinaciones que pueden ser mucho mayores ($e > 0.3$, $i \sim 40^\circ$) que las de los objetos clásicos y a diferencia de éstos y de los objetos resonantes, los objetos del SD se encuentran en órbitas poco estables.

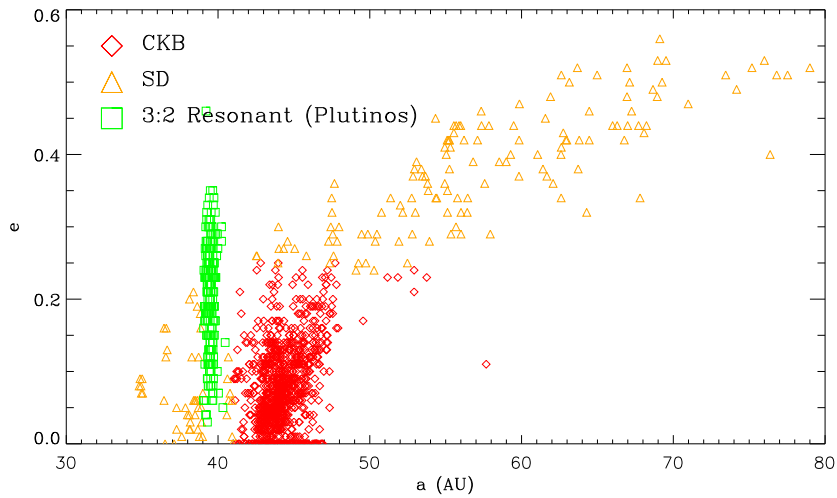


Figura 1: Espacio fase de todos los objetos del KB observados según el MPC. En verde se muestran los objetos de la MMR 3:2 con Neptuno o Plutinos, en rojo los objetos del CKB y en naranja los objetos del SD.

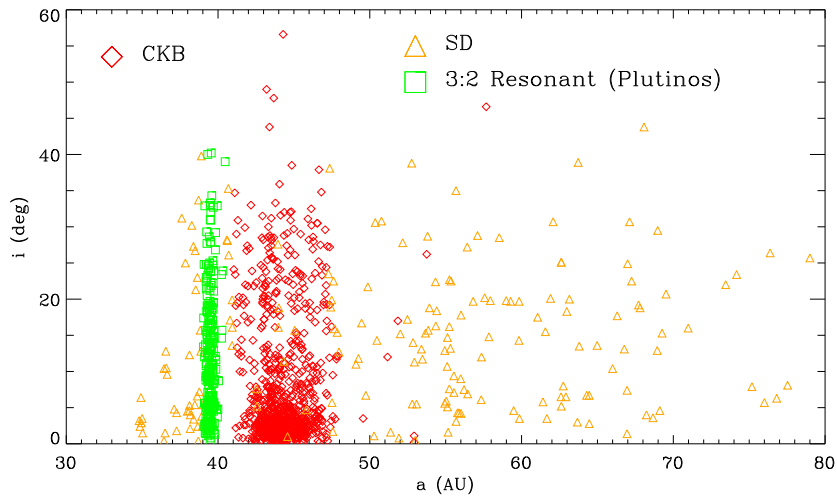


Figura 2: Lo mismo que en la [Figura 1](#) pero para el espacio fase de a vs i de los objetos observados del KB.



Figura 3: Imagen del cometa 1P/Halley obtenida en su último paso por el perihelio en 1986 (tomada de www.space.com).

El objeto más grande del SD y de la región trans-neptuniana es el planeta enano Eris, el cual es ligeramente más masivo que Plutón (Brown et al. [6]). Por otro lado, la masa total del SD se estima ser algunas veces mayor que la del CKB, con un máximo de $\sim 0.1M_{\oplus}$ (Bernstein et al. [3]).

1.2 LOS COMETAS DE PERIODO CORTO

Los cometas son objetos en órbita alrededor del Sol, constituidos por un núcleo sólido formado de rocas, polvo y gases volátiles solidificados, que al acercarse al Sol presentan una cola y una coma, visibles por la reflexión de la luz solar en los gases sublimados desde el núcleo, lo que se denomina actividad cometaria. Los tamaños típicos de los cometas van desde ~ 1 hasta ~ 10 Km de diámetro y sus masas desde $\sim 10^{16}$ hasta $\sim 10^{18}$ g (o $\sim 10^{-11}$ a $\sim 10^{-9}M_{\oplus}$).

Los SPCs son un subconjunto de todos los cometas conocidos que corresponde a aquellos cuyo periodo orbital es menor a 200 años. Dentro de los SPC se reconocen dos familias, los cometas de la familia de Júpiter (en inglés *Jupiter-Family Comets* o JFC de aquí en adelante) y los cometas tipo Halley (en inglés *Halley-type Comets* o HTC de aquí en adelante). El crite-

rio de clasificación más inmediato entre estas dos familias lo constituye el periodo orbital, tal que los JFC tienen periodos menores a 20 años y los HTC periodos entre 20 y 200 años. Sin embargo, los JFC se caracterizan por tener una distribución de inclinaciones muy baja, es decir que sus órbitas se concentran mayoritariamente cerca del plano de la eclíptica, mientras que las inclinaciones de los HTC son más isotrópicas. Estas diferencias, presumiblemente de origen dinámico, han motivado una clasificación más específica basada en el parámetro de Tisserand con respecto a Júpiter, T_J , del cometa en cuestión (Levison [37]).

En el problema circular de tres cuerpos restringido, el criterio de Tisserand resulta una aproximación a la constante de Jacobi, cuando se considera que la segunda masa del problema es mucho menor a la primera, como en el caso del Sol y Júpiter, y que la tercera (en nuestro caso el cometa) se encuentra lejos tanto del primero como del segundo objeto masivo. Con estas consideraciones el criterio de Tisserand se cumple para el tercer cuerpo como:

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos(i) = C, \quad (1)$$

donde C es una constante. De esta forma, el parámetro (adimensional) de Tisserand con respecto a Júpiter se define como:

$$T_J = \frac{a_J}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_J}(1-e^2)} \cos(i), \quad (2)$$

donde $a_J = 5.2$ UA es el semieje mayor de Júpiter. Este parámetro es de utilidad ya que se mantiene aproximadamente constante para un cometa aún después de sufrir un encuentro cercano con el planeta gigante. Según este criterio los JFC tienen $2 < T_J < 3$ mientras que los HTC cumplen que $T_J < 2$ (Levison and Duncan [39]).

La [Figura 4](#) muestra la distribución de todos los cometas conocidos, tanto SPCs como LPCs, en el espacio fase de a vs e y a vs i así como la distribución de estos cometas con respecto a su parámetro T_J . Como puede observarse en los paneles superior y central, el criterio de clasificación basado únicamente en el periodo orbital produce una mezcla notable en el espacio fase entre los JFC y los HTC, mientras que el criterio dinámico, mostrado en el panel inferior, diferencia claramente las dos

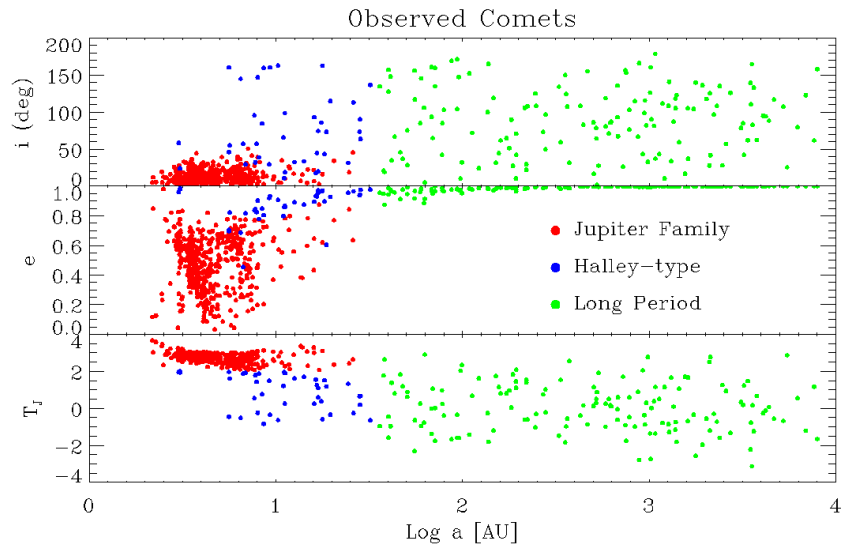


Figura 4: Espacio fase de todos los cometas observados. En verde se muestran los LPCs, en azul los HTCs y en rojo los JFCs. El panel superior muestra la distribución en el espacio fase de a vs i , el central el espacio fase de a vs e y el inferior la distribución de a vs T_J . La clasificación por el parámetro T_J separa claramente a los HTCs de los JFCs. Nótese como los HTCs parecen ser una extensión de los LPCs en cualquiera de los paneles, sugiriendo un origen común para ambas poblaciones.

poblaciones. Es notable también de la [Figura 4](#) que los HTC's parecen ser una extensión natural de los LPC's, sugiriendo que comparten un origen dinámico común, siendo el criterio de clasificación de 200 años entre SPC's y LPC's artificial y que se mantiene en la actualidad solamente por cuestiones históricas.

Tanto el origen de los LPC's como el de los HTC's no se discutirán en este trabajo, sin embargo, el origen de los JFC's es una de las cuestiones principales que han motivado el presente estudio.

1.2.1 *Origen de los cometas de la familia de Júpiter*

Hasta el día de hoy el origen de los JFC's en particular e inclusive de los SPC's en general no es completamente claro. Oort [46] discutió la idea de la existencia de una nube de cometas localizada entre 2,000 y 150,000 UA que contendría un número estimado de 10^{11} cuerpos cometarios, distribuidos isotrópicamente, como el reservorio del que provienen todos los cometas observados en el sistema solar interno. El mecanismo dinámico propuesto por Oort capaz de desestabilizar los objetos de la nube y hacerlos caer al interior del sistema sería la perturbación gravitacional causada por el paso de estrellas cerca del Sol. La nube de Oort de esta manera propuesta es sin embargo una distribución isotrópica de objetos, a diferencia de los JFC's que constituyen una población de baja inclinación, como se observa en la [Figura 4](#), panel superior, ¿Cómo es entonces que objetos provenientes de todas direcciones del espacio se concentran cerca del plano de la eclíptica al llegar al interior del sistema planetario? Para aclarar esta cuestión a principios de la década de los 70's y con la ayuda de simulaciones numéricas, se mostró que sí existe una subpoblación de cometas de la nube de Oort en órbitas casi parabólicas, esto es de $e \approx 1$, con perihelio entre 4 y 6 UA y con una distribución de inclinaciones similar a la de los JFC's, la influencia gravitacional de Júpiter y los demás planetas gigantes es suficiente para reproducir, al menos cualitativamente las características orbitales de esta población (Havnes [25], Everhart [14], Delsemme [11]). Sin embargo, cálculos más detallados mostraron casi de inmediato que este mecanismo es en extremo ineficiente, por al menos 2 órdenes de magnitud entre la tasa de captura de nuevos cometas predicha por el modelo de Everhart y la tasa estimada observacionalmente (Joss [29]), lo que significa que por cada

JFC capturado, alrededor de 100 cuerpos cometarios se perderían en órbitas hiperbólicas, $e > 1$, implicando una enorme y constante pérdida de material solo para mantener una población de JFCs en estado estacionario.

En vista de los problemas mencionados, Fernández [17], siguiendo la idea propuesta por Edgeworth y Kuiper en los años 50, estudió las consecuencias de la posible existencia de un cinturón de cometas de baja inclinación ubicado más allá de la órbita de Neptuno en conexión con el origen de los JFCs. Suponiendo que existen cientos de cuerpos de masa suficientemente grande en el, entonces, hipotético cinturón, del orden de la masa de Ceres ($\sim 10^{24}$ g o $\sim 10^{-3}M_{\oplus}$), entonces la difusión producida por encuentros cercanos entre miembros del cinturón con los objetos de mayor masa sería suficiente para mantener una tasa de inyección de nuevas cometas hacia la zona de influencia de los planetas gigantes. Una vez en la zona planetaria la posterior evolución de los cuerpos del cinturón procedería según la tasa calculada por Everhart [15].

Para mantener a la población de JFCs en estado estacionario la tasa de inyección de nuevas cometas a la zona de influencia de los planetas gigantes a partir de Neptuno debe ser de 0.05 cometas por año (Everhart [15]). La tasa calculada por Fernández [17] para su modelo suponiendo la existencia de cuerpos masivos en el cinturón va desde 0.01 hasta 10 cometas por año dependiendo de la masa máxima de los cuerpos grandes, de manera que se evita el problema del desperdicio de materia producido por la baja eficiencia de captura de cometas semi-parabólicos del modelo de Everhart [14] donde son necesarios del orden de 300 nuevas cometas por año para mantener a la población de JFCs en estado estacionario, como se mencionó más arriba.

Después del trabajo de Fernández, el KB fue considerado el principal reservorio de los JFCs. No obstante, la masa total de un KB conteniendo el número de objetos masivos supuesto por Fernández sería de $\sim 9M_{\oplus}$, lo cual en la actualidad ha sido descartado por las observaciones. Esto significa que no pueden existir cientos de objetos del tamaño de planetas enanos en el KB y por tanto no pueden ser responsables de la desestabilización de objetos cometarios a través de encuentros directos.

¿Cuál es entonces el mecanismo que hace evolucionar las órbitas estables de los objetos de baja e e i hacia órbitas inestables que alcanzan la zona de influencia directa de Neptuno? Algunos de los mecanismos propuestos incluyen el caos dinámico producido por las perturbaciones de los planetas gigantes sobre las órbitas circulares de objetos más allá de Neptuno (Torbett [56], Levison and Duncan [38]), la dispersión colisional producida por objetos masivos en MMRs (Ip and Fernández [27]), la evolución caótica de objetos en MMRs (Morbidelli [42], Tiscareno and Malhotra [55]). Recientemente se ha considerado que el principal reservorio de los JFCs no sería el CKB sino los objetos del SD (Duncan and Levison [12], Levison and Duncan [40], Volk and Malhotra [59]), mientras que otras poblaciones, como los asteroides troyanos de Júpiter y Neptuno pueden contribuir con alguna parte (Horner and Lykawka [26]).

En uno de los trabajos recientes más exhaustivos sobre la evolución dinámica de largo plazo del KB en conexión con el origen de los SPCs y de los Centauros, Volk realizó integraciones numéricas por 4 Gyr de partículas prueba que reproducen las diferentes poblaciones del KB una vez eliminados los sesgos observacionales, bajo la influencia del Sol y de los 4 planetas gigantes. De sus simulaciones Volk calcula la tasa de escape por año de objetos tanto del CKB como del SD, las dos principales poblaciones del KB que pueden evolucionar hasta convertirse en JFCs en sus simulaciones. Esta tasa proviene de los objetos que entran en la esfera de influencia de Neptuno, hasta un radio de Hill. Las tasas de escape del CKB y del SD, bajo las suposiciones de Volk resultan ser, respectivamente, de $(0.43 - 0.86) \times 10^{-10} \text{ yr}^{-1}$ y de $(0.8 - 1.8) \times 10^{-10} \text{ yr}^{-1}$. Si alguna de estas dos poblaciones fuera el único reservorio de los JFCs, el número total de objetos de tamaño cometario (de diámetro mayor a ~ 1 Km) requeridos en ellas para mantener a la población de los JFCs en estado estacionario sería de $(1.7 - 3.5) \times 10^9$ para el CKB y de $(0.8 - 1.9) \times 10^9$ para el SD. Estos números se traducen en densidades superficiales, por grado cuadrado de cielo cerca de la eclíptica de $(1.4 - 2.8) \times 10^4 \text{ deg}^{-2}$ para el CKB y de $(0.83 - 2) \times 10^4 \text{ deg}^{-2}$ para el SD.

Una comparación de estas densidades con la extrapolación de las funciones de distribución de tamaños obtenidas de los sondeos observacionales más profundos, muestra que el número de objetos estimado a partir de las observaciones es insufi-

ciente hasta por dos órdenes de magnitud para mantener a la población de JFCs en estado estacionario, como se muestra en la [Figura 5](#) y [Figura 6](#).

En este trabajo proponemos estudiar la dinámica orbital ordenada y caótica de los núcleos cometarios del CKB y los mecanismos que contribuyen al desorden, principalmente el efecto de decenas de planetas enanos tipo Plutón, no como una interacción gravitacional balística entre éstos y las partículas del CKB, sino el efecto secular caótico que puede producir la interacción de los planetas enanos a los núcleos cometarios del cinturón, de tal forma que la desestabilización así inducida pueda contribuir a la tasa de inyección de nuevos cometas al sistema solar interno, principalmente a través de un continuo suministro de material nuevo proveniente del cinturón a las MMRs de Neptuno.

En el artículo 1 de esta tesis aplicamos las herramientas de cuantificación del caos a un objeto caótico ya conocido, el cometa 1P/Halley. Mientras que en el artículo 2 de esta tesis mostramos que la influencia secular producida por decenas de planetas enanos en el CKB es capaz de transportar objetos de esta población hacia las MMRs con Neptuno, suministrando constantemente material nuevo que, debido a la evolución caótica en éstas, escapa y puede formar parte de otras poblaciones, incluyendo los JFCs (Ip and Fernández [27], Tiscareno and Malhotra [55]), además de otros resultados novedosos, como el efecto estabilizador de un planeta gigante tipo Neptuno en un disco de escombros frío tipo KB.

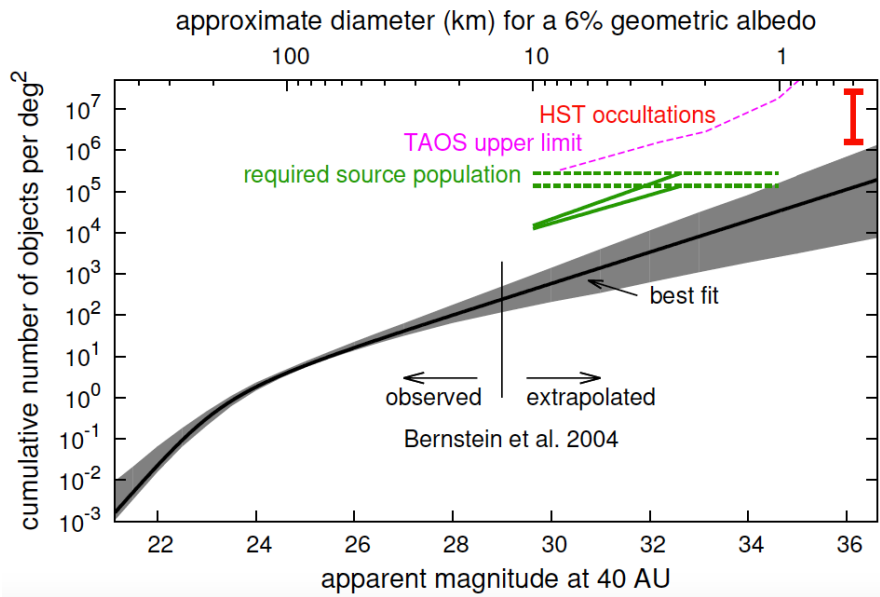


Figura 5: Distribución acumulativa de magnitudes aparentes del CKB de objetos cercanos a la eclíptica. La figura (tomada de Volk [60]) muestra el número de objetos del CKB por grado cuadrado de cielo cerca de la eclíptica. El eje superior muestra el tamaño aproximado de los objetos si se asume un albedo geométrico del 6% y una distancia heliocéntrica de 40 UA. La línea sólida es la distribución obtenida del sondeo más profundo de TNOs, con magnitud límite de detección $m = 29$, de Bernstein et al. [3]. Para magnitudes mayores a 29 se muestra la extrapolación de esta distribución junto con los límites de confianza del 95% (sombreadas en gris). La línea punteada morada representa el límite máximo de esta distribución basada en la falta de detecciones del sondeo por ocultaciones TAOS (Bianco et al. [4]). La barra roja representa la densidad de objetos mayores a 0.5 Km de diámetro obtenida de dos eventos de ocultación reportados por Schlichting et al. [51] y Schlichting et al. [52]. Finalmente, las líneas verdes punteadas representan los límites teóricos superior e inferior de objetos necesarios para reabastecer completamente a la población de JFCs a partir de objetos del CKB según Volk [60], mientras que las líneas verdes sólidas son estos mismos límites escalados a la distribución de tamaños de los JFCs observados de acuerdo a Snodgrass et al. [53].

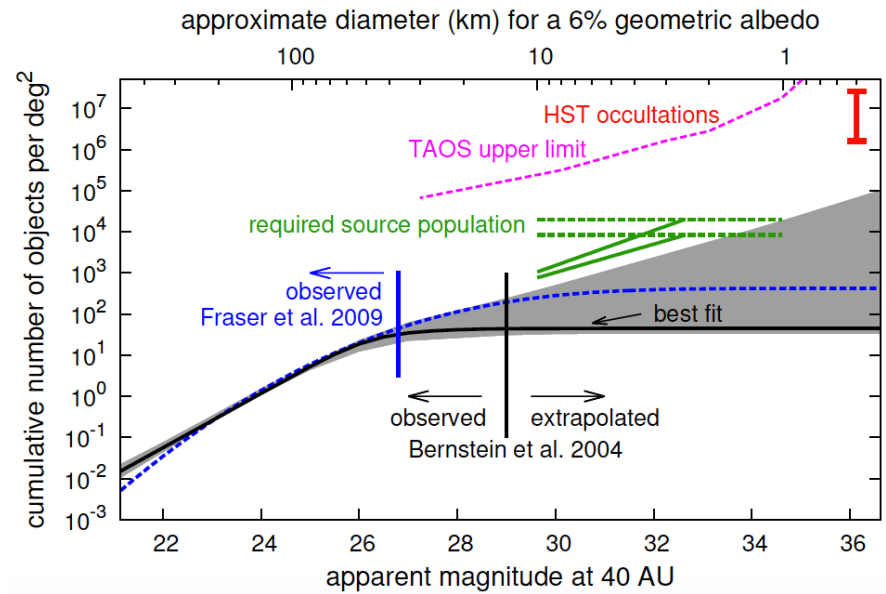


Figura 6: Distribución acumulativa de magnitudes aparentes del SD de objetos cercanos a la eclíptica. Lo mismo que la Figura 5 pero para el SD. En este caso otra estimación observacional se muestra con la línea punteada azul obtenida por Fraser and Kavelaars [19]. La línea vertical azul muestra la magnitud límite de detección de este sondeo. De nuevo, las líneas verdes punteadas y sólidas representan las densidades de objetos del SD necesarias para mantener a la población de JFCs en estado estacionario (figura tomada de Volk [60]).

El estudio dinámico a largo plazo del sistema solar requiere de herramientas computacionales poderosas y códigos de N-cuerpos especializados. Por otro lado, el análisis de la evolución caótica de los objetos de interés requiere del uso de herramientas matemáticas como los exponentes de Lyapunov y los mapas de análisis de frecuencias, entre otros. En las siguientes secciones se describen los métodos y herramientas utilizados en esta tesis.

2.1 INTEGRACIONES NUMÉRICAS

Durante la década de 1990, la implementación de los mapeos simplécticos desarrollados por Wisdom [61] y generalizados por Wisdom and Holman [62], en códigos computacionales como SWIFT de Levison and Duncan [39], permitieron la exploración de importantes y diversos problemas dinámicos en el sistema solar, como el origen de los llamados huecos de Kirkwood en el cinturón de asteroides (Wisdom [61]), la naturaleza caótica del movimiento de Plutón (Sussman and Wisdom [54], Wisdom and Holman [62]) y de los planetas interiores del sistema solar (Laskar [33, 34]), entre otros.

La teoría de los mapeos simplécticos puede resumirse como sigue (para una descripción detallada véase Yoshida [63] y Ferrés et al. [16]):

Sea $H(q, p)$ el Hamiltoniano de un sistema mecánico, entonces si H es separable en sus variables canónicas, esto es si:

$$H(q, p) = T(p) + U(q), \quad (3)$$

entonces las ecuaciones de movimiento del sistema se pueden escribir como:

$$\frac{dz}{dt} = \{H, z\} = L_H z, \quad (4)$$

donde $z = (p, q)$, $L_F G \equiv \{F, G\}$ y $\{F, G\}$ son los paréntesis de Poisson, definidos como:

$$\{F, G\} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad (5)$$

lo que implica que:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial z}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial p_i}, \quad (6)$$

cuya solución es:

$$z(\tau_0 + \tau) = \exp(\tau L_H) z(\tau_0) = \exp(\tau(L_T + L_U)) z(\tau_0), \quad (7)$$

donde en general L_T y L_U no conmutan. Ahora considérese que (a_i, b_i) con $i = 1, 2, 3, \dots, s$, es un conjunto de números reales que satisfacen la igualdad:

$$\exp(\tau(L_T + L_U)) = \prod_{i=1}^s \exp(a_i \tau L_T) \exp(b_i \tau L_U) + O(\tau^{r+1}). \quad (8)$$

para un número entero r , donde r corresponde al orden de la integración. Usando la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff se pueden encontrar condiciones para las a_i, b_i a diferentes órdenes r , de tal forma que se puede expresar la solución de las ecuaciones de movimiento como:

$$z(\tau) = S(\tau) z(\tau_0), \quad (9)$$

donde $S(\tau)$ es un mapeo simpléctico de orden r tal que:

$$S(\tau) = \prod_{i=1}^s \exp(a_i \tau L_T) \exp(b_i \tau L_U). \quad (10)$$

Se dice que el mapeo es de orden r porque aproxima la solución exacta hasta un orden τ^r , es decir, el mapeo, integrador o método de integración coincide con la expansión de Taylor de la solución real alrededor de τ hasta el orden τ^r .

Las ventajas principales de los mapeos simplécticos son:

1. Fáciles de implementar computacionalmente.
2. Conservan el carácter simpléctico del Hamiltoniano.

3. No muestran una desviación sistemática en la conservación de la energía durante una integración numérica.

En este trabajo hemos usado extensivamente el código público de N-cuerpos MERCURY, desarrollado por [Chambers](#) para nuestras integraciones numéricas.

MERCURY es un integrador híbrido que combina el uso de un integrador simpléctico de segundo orden basado a su vez en el código SWIFT de Levison and Duncan [39], más un integrador numérico tradicional Bulirsh-Stöer, que entra en acción únicamente para resolver los encuentros cercanos entre objetos en la integración. MERCURY ha sido usado exitosamente en la exploración de diversos problemas tanto del sistema solar (Gomes [22], Tsiganis et al. [57]) como de otros sistemas planetarios o problemas dinámicos en general (Rivera et al. [48], Chatterjee et al. [8], Ford and Rasio [18], Jurić and Tremaine [30]), y en la actualidad es uno de los códigos más usados en todo tipo de problemas dinámicos de fuerza central.

El integrador MERCURY es a su vez un integrador simpléctico, a pesar de que incorpora un componente no simpléctico, lo cual puede mostrarse aplicando una técnica simple de separación de potencial (Chambers [7]), por lo que el error en la energía se comporta como en todo integrador simpléctico, es decir, no crece con el tiempo, sino que se mantiene acotado. Para sacar el mayor provecho de la separación del Hamiltoniano usada en el código, se utilizan variables de centro mixto, o como son llamadas por Duncan et al. [13], variables heliocéntricas democráticas, donde las posiciones están dadas en coordenadas heliocéntricas y las velocidades en coordenadas baricéntricas.

2.2 ANÁLISIS DEL CAOS

2.2.1 *Exponente de Lyapunov*

Una de las características de un sistema caótico es que la trayectoria de dos partículas inicialmente muy cercanas se aleja una de la otra a una tasa de forma exponencial con el tiempo. Una medida cuantitativa de esta divergencia exponencial es el coeficiente λ llamado *exponente de Lyapunov*.

Si dos órbitas en el espacio fase están separadas por una distancia pequeña, s_0 , al tiempo $t = 0$, entonces a un tiempo posterior, t , la distancia será:

$$s(t) \sim s_0 e^{\lambda t}. \quad (11)$$

Si $\lambda > 0$ la separación crece exponencialmente con el tiempo, por lo que se considera que el movimiento es caótico. De esta forma el exponente de Lyapunov cuantifica el crecimiento de la separación inicial infinitesimalmente pequeña entre dos órbitas. Si $\lambda \leq 0$ la separación de las órbitas no crecerá o incluso decrecerá, por lo que puede inferirse que el movimiento es regular, no caótico.

Es claro de la [Ecuación 11](#) que:

$$\lambda \sim \frac{1}{t} \ln \left(\frac{s(t)}{s_0} \right). \quad (12)$$

Estrictamente λ está bien definido cuando la separación inicial tiende a cero y la medición de la separación es realizada después de un tiempo infinito, esto es:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{s(t)}{s_0} \right). \quad (13)$$

Pero λ puede ser mayor o menor dependiendo de la orientación del punto inicial de separación de una órbita con respecto a la otra en el espacio fase, por lo que existe todo un espectro de posibles exponentes de Lyapunov como grados de libertad tenga el problema. Es común por tanto considerar de entre todos los posibles exponentes el máximo exponente de Lyapunov, el cual determina el grado de predictabilidad de un sistema y define la dirección del máximo crecimiento de la separación entre las órbitas.

En el caso de un sistema cuya evolución temporal es discreta, por ejemplo en un experimento numérico, de acuerdo con Morbidelli [43], uno puede definir una separación inicial pequeña entre una órbita arbitraria y otra que se toma como referencia llamada *órbita fiduciaria*. Podemos caracterizar a la órbita perturbada con los vectores $\delta\mathbf{q}(0)$ y $\delta\mathbf{p}(0)$, donde \mathbf{q} y \mathbf{p} son coordenadas generalizadas de posiciones y momentos. Uno puede entonces medir la evolución de la órbita perturbada $\delta\mathbf{q}(t)$, $\delta\mathbf{p}(t)$ después de un cierto intervalo de tiempo constante T , instante

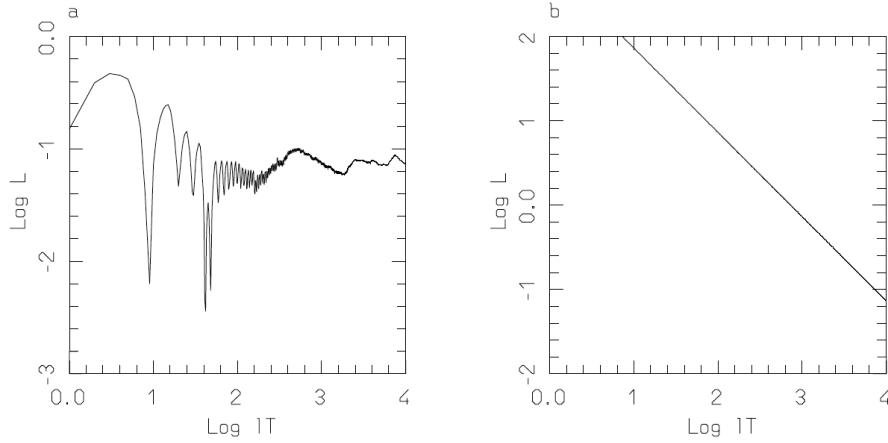


Figura 7: Evolución de la estimación del exponente de Lyapunov para una órbita caótica (panel a) y una regular (panel b). En el caso de una órbita regular, el valor de λ como función de lT decrece monótonicamente, mientras que el de una órbita caótica tiene oscilaciones grandes pero eventualmente se estabiliza alrededor de un valor positivo definido, siendo éste el valor del exponente de Lyapunov (figura tomada de Morbidelli [43]).

en el cual la separación entre la órbita perturbada y la fiduciaria se calcula de nuevo y se define la cantidad:

$$s_j = \|\delta\mathbf{q}(T), \delta\mathbf{p}(T)\| / \|\delta\mathbf{q}(0), \delta\mathbf{p}(0)\|, \quad (14)$$

donde $\|\dots\|$ denotan la magnitud o la distancia euclidiana en el espacio fase entre los vectores $\delta\mathbf{q}$ y $\delta\mathbf{p}$. El parámetro s_j se utiliza entonces para renormalizar la separación entre las órbitas fiduciaria y perturbada en el siguiente paso de la integración como $\delta_1\mathbf{q}(0) = \delta\mathbf{q}(T)/s_j$ y $\delta_1\mathbf{p}(0) = \delta\mathbf{p}(T)/s_j$, es decir que para continuar la integración, la posición de la partícula correspondiente a la órbita perturbada se acerca a la distancia $\delta_1\mathbf{q}$, $\delta_1\mathbf{p}$ de la órbita fiduciaria y este proceso se repite a cada paso de la integración. En esta forma, como fue demostrado por Benettin et al. [2], el exponente de Lyapunov, λ , puede ser calculado en un proceso iterativo como:

$$\lambda = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^l \ln s_j}{lT}, \quad (15)$$

donde λ resulta ser independiente de la elección de T .

Finalmente, para estimar el valor del límite de la Ecuación 15 uno puede graficar la cantidad $\lambda(lT) \equiv (\sum_{j=1}^l \ln s_j)/lT$ como

función de LT en una escala logarítmica y estimar de ella su comportamiento asintótico, como se muestra en la [Figura 7](#).

2.2.2 *Análisis de frecuencias*

El análisis de frecuencias es un método para determinar la estabilidad de órbitas en un sistema dinámico conservativo. Esta poderosa herramienta de detección del caos fue introducida por Laskar [34], Laskar et al. [36], Laskar [35], originalmente para el análisis de la evolución secular de los planetas del sistema solar, permitiendo una estimación del tamaño de las regiones caóticas en el mismo. Desde entonces este método ha sido utilizado exitosamente para analizar la evolución secular de cuerpos menores del sistema solar (Nesvorný and Ferraz-Mello [45], Robutel and Laskar [49], Muñoz-Gutiérrez et al. [44]), de planetas extrasolares e incluso en problemas de escalas galácticas (Valluri and Merritt [58], Correia et al. [9], Anglada-Escudé et al. [1]).

La idea detrás del método consiste esencialmente en analizar la evolución de las frecuencias principales del movimiento de las partículas en órbita, n , asociadas a las variables de acción-ángulo, en dos periodos contiguos de tiempo, T , en una simulación numérica, es decir, encontrar el valor de la frecuencia principal de movimiento en el intervalo $[0, T]$ y compararla con el valor de la misma frecuencia en el intervalo $[T, 2T]$. Una órbita regular, restringida a un toro KAM, tiene frecuencias constantes, mientras que las órbitas caóticas no tienen frecuencias bien definidas y sus acciones y ángulos cambian aleatoriamente dentro de la zona caótica. De esta forma, la diferencia entre los valores de las frecuencias en uno y otro intervalos de tiempo, D , es una medida de la estabilidad secular del sistema y un indicador confiable de su caoticidad. El parámetro D o “parámetro de difusión” se define como:

$$D = \frac{|n - n'|}{T}, \quad (16)$$

donde n es el valor de la frecuencia principal en el primer intervalo de la simulación y n' el valor de la misma frecuencia en el segundo intervalo. El valor de T debe tomarse de tal forma que sea mayor al inverso de la menor frecuencia del sistema. Si D es cercano a cero, esto es si $n \approx n'$, significa que la órbita es estable. Al contrario, si D varía considerablemente de un intervalo de la simulación al siguiente, la órbita es altamente inestable o

incluso caótica.

Como ejemplo podemos citar nuestro estudio del cometa Halley, donde se analizaron las frecuencias asociadas a la evolución de la longitud media, $\lambda(t)$, del cometa, en una simulación de 5×10^5 años de duración, lo que implica $T = 2.5 \times 10^5$ años. La longitud media se define como: $\lambda(t) = M(t) + \omega(t) + \Omega(t)$, donde $M(t)$ es la anomalía media, $\omega(t)$ es el argumento del perihelio y $\Omega(t)$ la longitud del nodo ascendente. Las frecuencias fueron obtenidas por medio del análisis de Lomb-Scargle (Scargle and Black [50]) que se implementó a partir de una subrutina existente en IDL. De esta forma, n en cada intervalo de tiempo corresponde a la amplitud de la frecuencia principal de $\lambda(t)$, en el intervalo correspondiente, sobre 2π .

ARTÍCULO 1. DINÁMICA CAÓTICA DEL COMETA 1P/HALLEY: EXPONENTE DE LYAPUNOV Y ESPECTATIVA DE TIEMPO DE SUPERVIVENCIA.

3.1 RESUMEN

Como ejemplo de aplicación y para familiarización de las herramientas, tanto de integración numérica como de análisis y cuantificación del caos dinámico, se estudió la evolución a largo plazo del cometa 1P/Halley a través de la integración con el código MERCURY por un millón de años de sus ecuaciones de movimiento, en un potencial de N-cuerpos generado por el Sol y 7 planetas, de Venus a Neptuno, excluyendo a Mercurio para evitar la necesidad de introducir términos relativistas en las ecuaciones, pero agregando su masa a la del Sol. Además de los planetas el potencial es afectado por 10 objetos de tamaño similar a Plutón a los que llamamos indistintamente planetas enanos y que son: Ceres, Plutón, Eris, Haumea, Makemake, Orcus, Quaoar, Varuna, Ixion y 2012 AW₁₉₇.

Se realizó toda una serie de simulaciones para estudiar la evolución del cometa junto con miles de partículas clones que cubren diferentes áreas del espacio fase alrededor de la posición actual del Halley. Así por ejemplo, en el caso más ambicioso, 10,000 clones del Halley cubren el espacio fase de a vs e y a vs i hasta el error observacional en cada uno de estos parámetros, que son: $\sigma_a \sim 10^{-6}$ UA, $\sigma_e \sim 10^{-6}$ y $\sigma_i \sim 10^{-5}$ grados para a , e e i , respectivamente, de acuerdo con Landgraf [32].

En este artículo utilizamos una herramienta simple que llamamos “mapas de tiempo de supervivencia” que nos ayudan a visualizar el posible destino de los HTC de acuerdo a su posición inicial en el espacio fase. Abarcamos desde 15 y hasta 20 UA en a y entre 0 y 1 en e (Figura 1 del artículo), y en acercamientos sucesivos (Figura 2) nos adentramos hasta la posición actual del Halley tanto en el plano de a vs e y a vs i cubriendo el error observacional ya mencionado (Figuras 3 y 4 respectivamente). A partir de estos mapas concluimos que el tiempo de

supervivencia del cometa en el sistema solar, esto es, el tiempo que puede permanecer en el sistema antes de ser expulsado del mismo más allá de 100 UA o de colisionar con el Sol o algún planeta es de $\sim 300,000$ años.

Sin embargo, la dinámica del cometa Halley es caótica, por tanto dos órbitas inicialmente más cercanas en el espacio fase que el error observacional actual pueden tener destinos completamente diferentes. A partir de los mapas de supervivencia de mayor acercamiento a la posición actual del Halley encontramos que algunas partículas sobreviven tan solo 10,000 años antes de colisionar o ser expulsadas del sistema, mientras que otras sobreviven durante toda la simulación; esto es importante ya que cualquiera de estos destinos representa una órbita igualmente probable para el cometa Halley por estar dentro del error observacional, como se ve en las Figuras 3 y 4.

El mapa de análisis de frecuencias mostrado en este artículo nos permite entender los factores que originan la naturaleza caótica en la dinámica del cometa Halley. En este mapa (Figura 5) observamos que el parámetro de difusión, D , aumenta conforme el perihelio de la órbita del cometa se acerca más a los planetas gigantes, en particular a Júpiter, debido a encuentros cercanos con este planeta que modifican su órbita caóticamente. En cada zona de este mapa estimamos el tiempo de difusión de la órbita, esto es, el tiempo en el que la órbita cambia sustancialmente, encontrando que para las partículas que encuentran a Júpiter este tiempo es de $\sim 800,000$ años, más o menos consistente con la mediana del tiempo de permanencia encontrado a partir de los mapas de supervivencia.

Calculamos también el máximo exponente de Lyapunov (Figura 7) para la órbita actual del cometa Halley, encontrando que el tiempo de Lyapunov (o el inverso del exponente de Lyapunov) es de sólo $T_\lambda \approx 70$ años. Este valor significa que órbitas inicialmente más cercanas que el error observacional se separan, en un tiempo similar al periodo de la órbita, más allá de la precisión inicial con que fueron medidas, en otras palabras, la órbita del cometa Halley no puede predecirse con mayor precisión que la actual para el siguiente paso del cometa por el perihelio.

Finalmente, si el cometa Halley puede sobrevivir en el sistema solar por al menos 10^5 años, su evolución más probable, como se ve de la Figura 10, implica que se convierta en un cometa de mayor periodo, de más de 200 años, lo que significa que dejaría de ser un HTC; que su excentricidad aumente ligeramente mientras que su inclinación disminuya, constituyéndose casi en una órbita de $\sim 120^\circ$.

3.2 ARTÍCULO

A continuación se anexa el artículo publicado en la revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (MNRAS) del año 2015, Vol. 447, pag. 3775.

Chaotic dynamics of Comet 1P/Halley: Lyapunov exponent and survival time expectancy

M. A. Muñoz-Gutiérrez,¹★ M. Reyes-Ruiz² and B. Pichardo¹

¹*Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. postal 70-264, Ciudad Universitaria, 04510 México*

²*Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. postal 877, Ensenada 22860, B. C., México*

Accepted 2014 December 11. Received 2014 December 8; in original form 2014 September 26

ABSTRACT

The orbital elements of Comet Halley are known to a very high precision, suggesting that the calculation of its future dynamical evolution is straightforward. In this paper we seek to characterize the chaotic nature of the present day orbit of Comet Halley and to quantify the time-scale over which its motion can be predicted confidently. In addition, we attempt to determine the time-scale over which its present day orbit will remain stable. Numerical simulations of the dynamics of test particles in orbits similar to that of Comet Halley are carried out with the MERCURY 6.2 code. On the basis of these we construct survival time maps to assess the absolute stability of Halley's orbit, frequency analysis maps to study the variability of the orbit, and we calculate the Lyapunov exponent for the orbit for variations in initial conditions at the level of the present day uncertainties in our knowledge of its orbital parameters. On the basis of our calculations of the Lyapunov exponent for Comet Halley, the chaotic nature of its motion is demonstrated. The e-folding time-scale for the divergence of initially very similar orbits is approximately 70 yr. The sensitivity of the dynamics on initial conditions is also evident in the self-similarity character of the survival time and frequency analysis maps in the vicinity of Halley's orbit, which indicates that, on average, it is unstable on a time-scale of hundreds of thousands of years. The chaotic nature of Halley's present day orbit implies that a precise determination of its motion, at the level of the present-day observational uncertainty, is difficult to predict on a time-scale of approximately 100 yr. Furthermore, we also find that the ejection of Halley from the Solar system or its collision with another body could occur on a time-scale as short as 10 000 yr.

Key words: Chaos – methods: numerical – comets: general – comets: individual: 1P/Halley.

1 INTRODUCTION

Halley's Comet is probably one of the most studied and therefore best-known minor bodies in the Solar system to date. Historical records of Comet Halley start in the year 240 BC (Kiang 1972), but it is until its last perihelion passage, in 1986 February, when it became visible to modern telescopes and even physically accessible to spacecrafts, that the amount of available data has hugely grown. In particular, the parameters of its retrograde orbit, semi-major axis, a , and eccentricity, e , are since then determined with a precision of the order of 10^{-6} ($\sigma_q = 771 \times 10^{-9}$ and $\sigma_e = 91 \times 10^{-8}$, respectively, where σ is standard deviation and q the perihelion distance, according to Landgraf 1986).

The origin of Halley's Comet has been a matter of discussion for decades. One of the likely sources of Halley-type comets (i.e. short-period comets with Tisserand parameters $T < 2$ with respect to

Jupiter, periods $20 < P < 200$ yr and semi-major axis less than 40 au, as defined by Levison 1996) seems to be the Oort cloud (Fernandez 1980). Indeed, since giant planet perturbations of trans-Neptunian objects in the vicinity of the Kuiper Belt, will not generally drive comets to the observed inclinations on Halley-type comets, so the origin of their orbits must be different. In their computations, Fernandez (1980), Duncan, Quinn & Tremaine (1988) and Quinn, Tremaine & Duncan (1990) show that the dynamical evolution of comets from the Oort cloud towards the inner Solar system is a probable origin of the random inclination of Halley-type comets, since they tend to preserve their random orbital inclinations. On the other hand, Levison, Dones & Duncan (2001) noticed that the inclination distribution of Halley-type comets is not isotropic, meaning that they could not be readily explained as originating from a rather isotropic source as the Oort cloud, but from a flattened component or inner disc-like portion of the Oort cloud. Earlier, Duncan & Levison (1997) had investigated a viable origin of Jupiter family comets coming from the already known flattened scattered disc (Luu et al. 1997). They found that approximately 1 per cent of their scattered

* E-mail: mmunoz@astro.unam.mx

disc objects survived the full 4 Gyr simulation, where some of these reach semi-major axis of thousands of au. In a more recent paper, Levison et al. (2006) show that these objects, once they reach a semi-major axis of the order of 10^4 au, are rapidly reduced in their perihelia due to Galactic tides. If just 0.01 per cent of these comets then evolve, due to giant planet interactions, on to Halley-type orbits, the resultant statistical orbital distribution is consistent with observations.

The physical properties of Comet Halley are also known as never before (for a review see Mumma & Charnley 2011). A'Hearn et al. (1995) have shown that Halley-type comets differ from Jupiter Family comets on their average coma carbon abundances, suggesting a different origin for both families. Comet Halley seems to lose mass at an approximate rate of 0.5 per cent every perihelion passage (Whipple 1951; Kresak & Kresakova 1987). At this rate, the comet might be severely diminished or even vanished in about 15 000 yr. Halley's Comet has been spreading particles that settle down on the known Orionid stream for thousands of years (Sekhar & Asher 2014).

From the dynamical point of view the evolution of this comet has also been profusely studied through numerical integrations (Yeomans & Kiang 1981; Dvorak & Kribbel 1990; Levison & Duncan 1994; Bailey & Emel'Yanenko 1996; van der Helm & Jeffers 2012; Sekhar & Asher 2014). Detailed calculations show for example that Halley's Comet has been trapped in the past by resonances with Jupiter and secular perturbations, such as the Kozai resonance and other secular resonances (Quinn et al. 1990; Bailey & Emel'Yanenko 1996; Thomas & Morbidelli 1996) affecting considerably its long-term dynamical evolution (Sekhar & Asher 2014). From numerical simulations under various approximations, Halley's Comet and other Halley-type comets seem to be intrinsically chaotic (Petrovsky 1986; Froeschle & Gonczi 1988; Chirikov & Vechevslavov 1989).

In the pioneering work of Chirikov & Vechevslavov (1989), they used a simple analytical model based on the results of integrations by Yeomans & Kiang (1981) which resembles the perihelion passage over the past ~ 3000 yr, in order to obtain a measure of the chaotic behaviour of the Halley's Comet. They found that Jupiter plays the major role in driving the local instabilities of the motion while Saturn contributes an order of magnitude less in the random changes suffered by the comet. Apart from these early work, not many attempts have been made to obtain a reliable quantification of the chaotic behaviour of Halley's Comet with modern numerical integration tools. This means that a standard Lyapunov exponent or Lyapunov time has not been established with confidence for Halley by means of direct numerical integrations.

In this work, we explore numerically the evolution of test particles in the surrounding phase space of Halley's Comet in order to determine the chaoticity of this region quantified through frequency analysis maps and a simple auxiliary visual tool that we have called 'survival time maps'. Additionally we compute, for the first time directly from numerical integration, the Lyapunov exponent for Halley's Comet in its current orbit considering its observational uncertainty. By finding a positive exponent, we have determined that current known orbit is actually chaotic. We also estimated the e-folding time-scale for the separation of neighbouring orbits. Finally we provide an estimation of sojourn time in the Solar system for the comet in a qualitative similar manner to that used by Chirikov & Vechevslavov (1989) finding a median value almost an order of magnitude smaller than theirs.

The outline of this paper is as follows: in Section 2, we describe the three different analysis techniques to determine the

chaotic nature of the dynamics of Halley's Comet and the corresponding numerical simulations done for this purpose. In Section 3, we show results of the numerical simulations while discussing these results in Section 4. Finally we give our conclusions in Section 5.

2 METHODS AND SIMULATIONS

We have used three different analysis methods to determine the chaotic nature of Halley's Comet dynamics. We describe these in the next subsections.

2.1 Survival time maps

Survival time maps (STMs hereafter) are an auxiliary tool to visualize the absolute stability, against ejection from the system or collision with other bodies in orbits of a given phase space region, corresponding in our case to the plane of semi-major axis, a , versus eccentricity, e , surrounding Halley's current position in this plane. In the STM a colour code indicates the total survival time in the simulation according to the particle's initial condition given by its position in the phase space plane. In order to explore this we have used the MERCURY integrator package developed by Chambers (1999) to integrate the orbits of clones of Comet Halley as test particles in a Solar system N -body simulation. The clones were generated in such a way that their initial conditions cover a region on the a - e plane with different zoom levels.

We performed three different simulations to construct STMs corresponding to different ranges of a and e . In the first simulation (a) semi-major axis, a , ranges from 15 to 20 au and e ranges from 0 to 1 with both intervals divided uniformly in 100 values each, giving a total of 10^4 particles. In the second simulation (b) a ranges from 17.385 to 18.385 au divided uniformly in 100 values and e ranges from 0 to 1 for a total of 3300 particles (33 values in e). Although the small e space comprises a very different dynamical region than that for Comet Halley, we explore it to put into perspective the importance of giant planets influence zones and to get a glimpse into the possible behaviour of other Halley-type comets that may be explored in a future work. In the third simulation (c) the domain of a - e space covers the observational error according to Landgraf (1986) both in a ($\sigma_a \sim 10^{-6}$ au) and e ($\sigma_e \sim 10^{-6}$) sampled with 10^4 total particles. In all cases the angular elements, argument of pericentre, ω , longitude of the ascending node, Ω , mean anomaly, M , and inclination, i , were set the same as that of Halley's Comet as given by the Horizons website¹ at the beginning date of the simulations 2012 October 1 in heliocentric coordinates. A final simulation (d) was performed varying semi-major axis and inclination and letting the four remaining orbital parameters, including eccentricity, be the same as for Comet Halley on the same date, and covering the observational error in a - i phase space (with $\sigma_i \sim 10^{-5}$ deg, according to Landgraf 1986). We divide both ranges in 100 uniformly spaced values for a total of 10^4 particles.

For (a) and (b) simulations, the RADAU integrator from Everhart (1985) as implemented in the MERCURY package was selected for the integrations with a tolerated accuracy parameter of 10^{-10} and an initial time step of 20 d. Simulations (c) and (d) were carried on using the optimized Bulirsch-Stöer integrator implemented in the MERCURY package (BS2) with a tolerated accuracy parameter of 10^{-12} and an initial time step of 1 d, in order to be confident in the integration of small perihelion, high-eccentricity orbits. All

¹ <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

simulations spanned over 10^6 yr and include as N -bodies the planets except Mercury in order to avoid incorporating relativistic effects. We also include five Dwarf Planets (all but Sedna which orbits far beyond the 100 au sojourn limit imposed in the simulation) and five of the greatest minor bodies (Orcus, Quaoar, Varuna, Ixion and 2002 AW₁₉₇) not yet classified as dwarf planets but likely to be in the near future.

According to the sojourn criterion for STM, the particle is still part of the simulation at the end of the 1×10^6 yr of it, regardless the changes in orbital parameters of each particle. So a particle is lost when its a becomes greater than 100 au, collides with the Sun or with another planet.

2.2 Frequency analysis map

We have used the frequency analysis introduced by Laskar (1993, 1990) to quantify the chaotic behaviour of particles around current position of Halley's Comet. According to Laskar (1993), Morbidelli (2002) and Correia et al. (2005), the difference (D) in the value of the fundamental frequency of the motion (n) of a particle under consideration, obtained over two consecutive and equal time intervals (T), is a measure of the secular stability of its trajectory and a reliable indicator of chaos. In this context, we have explored the D parameter, or diffusion parameter, for clone particles covering a grid of a versus e phase space. For each particle in the map we calculate using a Lomb–Scargle analysis (Scargle & Black 1980) the mean frequencies of the mean longitude of the particle, $\lambda(t) = M(t) + \omega(t) + \Omega(t)$, in the adjacent time intervals from 0 to 2.5×10^5 yr and from here to 5×10^5 yr. The mean motion n in each interval is defined as the amplitude of the mean frequency of the series over 2π in that interval and then, according to the definition the D parameter is calculated as

$$D = \frac{|n - n'|}{T}. \quad (1)$$

If D is close to zero, this is if $n \approx n'$, then it means that the orbit is stable. Otherwise high values of D reflect important changes in the motion of the particle related to unstable or even chaotic dynamics.

We then performed one 5×10^5 yr simulation using the RADAU integrator from the MERCURY package with a toleration accuracy parameter of 10^{-10} and an initial time step of 20 d. We cover a semi-major axis span of just 1 au from 17.385 to 18.385 au, this is ± 0.5 au from the current semi-major axis of Comet Halley, and from 0 to 1 in e . We have used 100 uniformly spaced particles in a and 33 particles to uniformly cover e , in order to save computational time as we are bounded to record an extensive output cadence of parameters evolution.

2.3 Lyapunov exponent

We have calculated the Lyapunov exponent for six neighbouring orbits around the current orbit for Comet Halley separated by the present-day observational uncertainty. The six orbits are the result of varying initial position by $\pm 10^{-6}$ au in each Cartesian axis X , Y , Z in a heliocentric reference frame, while maintaining the velocity at the same value of the fiducial orbit. This means that each one of the six orbits differs initially from the fiducial one by a distance of 10^{-6} au distance, $\delta(0)$.

According to Morbidelli (2002) in a numerical experiment one can define a small initial separation distance between an arbitrary orbit and the fiducial one; the modified orbit is characterized by the vectors $\delta\mathbf{q}(0)$ and $\delta\mathbf{p}(0)$, where \mathbf{q} and \mathbf{p} are generalized coordinates in the problem. One can compute their evolution, $\delta\mathbf{q}(t)$, $\delta\mathbf{p}(t)$ over

some constant time interval T after which one can measure the separation distance of the modified orbit from the fiducial one and define the quantity:

$$s_j = \|\delta\mathbf{q}(T), \delta\mathbf{p}(T)\| / \|\delta\mathbf{q}(0), \delta\mathbf{p}(0)\|, \quad (2)$$

which we use to determine a new initial separation for the modified orbit in the next step of the integration as $\delta_1\mathbf{q}(0) = \delta\mathbf{q}(T)/s_j$ and $\delta_1\mathbf{p}(0) = \delta\mathbf{p}(T)/s_j$. In this manner, as was demonstrated by Benettin et al. (1980), the Lyapunov exponent, \mathcal{L} , can be calculated in an iterative process according to

$$\mathcal{L} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^l \ln s_j}{lT}, \quad (3)$$

where \mathcal{L} is independent of the choice of T . In our case, as we are using only an initial separation in distance, i.e. in \mathbf{q} , it follows that $\delta_i\mathbf{q}(0) = \delta(0) = 10^{-6}$ au for all our i steps.

In this context, we have used the Bulirsch–Stöer integrator from the MERCURY package in order to perform a set of 30 simulations, extending over 100 yr each in succession, of Halley's fiducial orbit plus six orbits around it. The total simulated time is 3000 yr, starting from 2012 October 1 in order to avoid the first close encounter of the fiducial Halley with Jupiter expected to occur at about ~ 3400 yr into the future. These close encounters produce random variations in the orbit that are capable of modifying the separation of the orbits by several au on a very short time-scale (see Fig. 6 for details). The initial time step was chosen to be 3 d with an accuracy parameter of 10^{-12} in order to obtain high enough precision to calculate a real separation of the orbits, resulting from dynamical effects, and not a computational artefact. In this manner, we have calculated the Lyapunov exponent for each one of the six orbits previously defined using the iterative process just as described, and a maximum Lyapunov exponent for the full set of orbits.

3 RESULTS

In order to assess the stability of the orbit of Comet Halley (and possibly other Halley-type comets), and to characterize its dynamics, we have carried out numerical simulations as previously described. The results of these studies are presented in this section.

3.1 Survival time maps

Fig. 1 shows the STM for orbits with initial semi-major axis extending from 15 to 20 au and eccentricity less than 1. The test particles sampling these orbits all have the same inclination, corresponding to the present day inclination of Comet Halley, 162.180 42 deg according to the Horizons website for the beginning date of our simulations. For comparison, we also show in the figure the nominal orbit of Comet Halley (black dot).

Evident in Fig. 1 is the fact that a wide range of orbits crossing that of Jupiter are strongly unstable, with a median lifetime, for such orbits, of 5.6×10^5 yr. Note that this lifetime is a lower limit for the expected lifetime of small bodies in this region of a - e phase space, as the survival time of stable orbits may be much greater than the 1 Myr time-scale considered in our simulations. This result is also seen in Fig. 2 which shows the STM zooming-in on the semi-major axis to a range extending within 0.5 au of Halley's orbit. In this case, the median survival time is 5.1×10^5 yr which is consistent with the result from the previous map, considering the use of less particles on a broader range in eccentricity.

An important feature stemming from the comparison of the sequence of increasing zoom Figs 1, 2 and 3, the last one

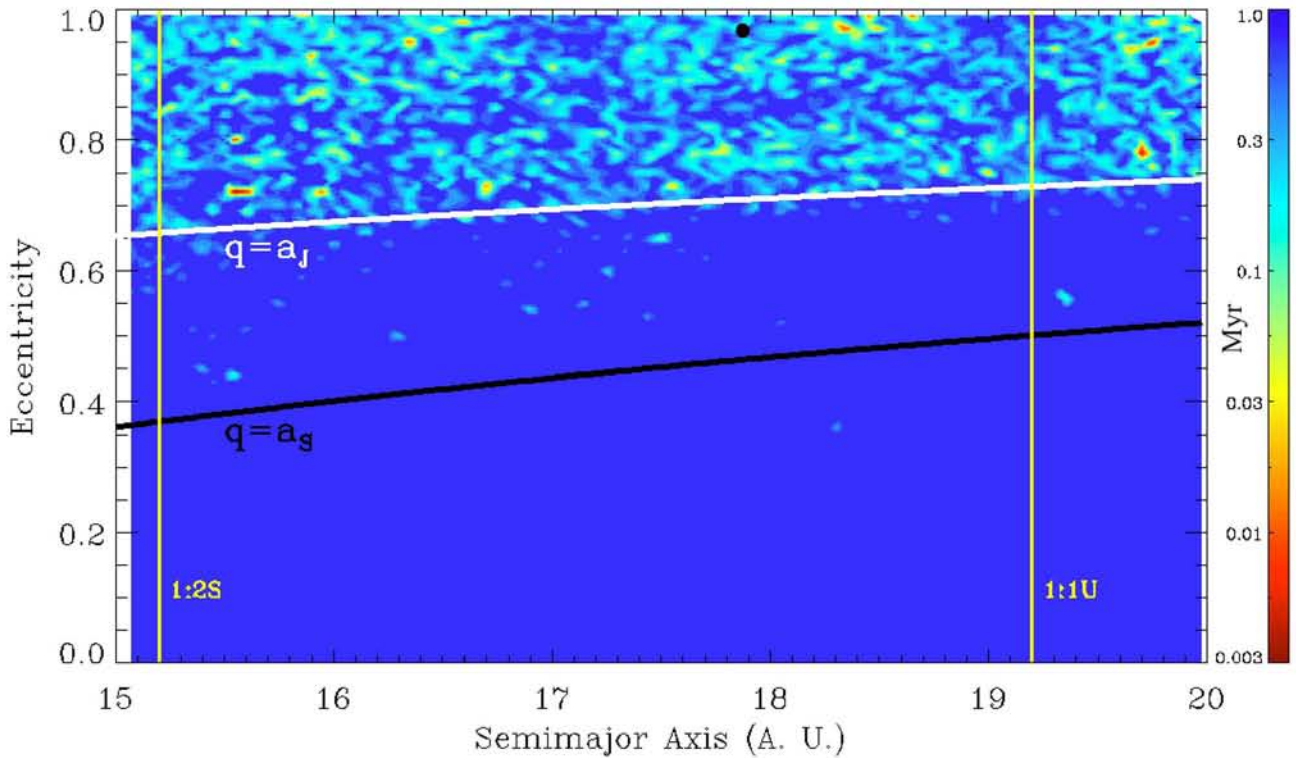


Figure 1. Survival time map for orbits with semi-major axis up to a few au from Comet Halley's orbit, all with the same inclination. The colour scale indicates the survival time as a function of initial semi-major axis and eccentricity of the orbit. Halley's present day orbit is indicated by the black circle. The thick black and white lines correspond to particles crossing the orbit of Saturn and Jupiter, respectively. Also shown with vertical yellow lines are the strongest mean-motion resonances (MMR) in the region, 1:2 with Saturn and 1:1 with Uranus (Gallardo 2006).

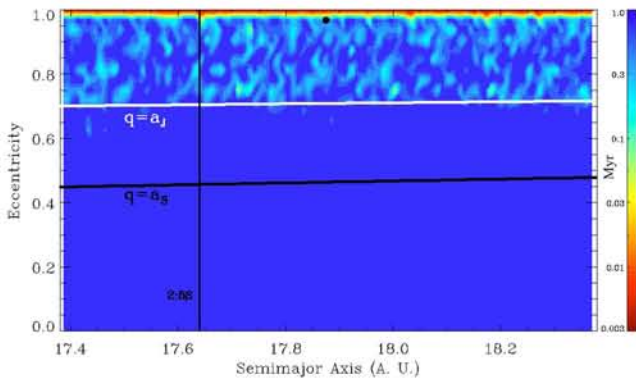


Figure 2. Same as Fig. 1 but zooming-in on the orbits with semi-major axis within 0.5 au of Halley's Comet orbit. The stronger MMR in this region, the 2:5 resonance with Saturn, is indicated by the vertical black line.

corresponding to a semi-major axis and eccentricity range covered by the observational uncertainty for Comet Halley (Landgraf 1986) is the fact that the 'structure' of the stable/unstable zones is apparently self-similar likely fractal in nature. The determination of the fractal dimension for these structures is beyond the scope of the present study. This result is already suggestive of strongly chaotic dynamics for small bodies in the region, as orbits within a very small neighbourhood in a - e space can have extremely different behaviour regarding their stability properties.

A similar result is found in the structure of the stable/unstable zones, where we plot them as a function of orbit inclination of the test particles. Fig. 4 shows the STM for orbits with the present day eccentricity of Comet Halley, 0.967 623, again according

to the Horizons website, but different inclinations spanning over the 10^{-5} deg observational uncertainty in this parameter (Landgraf 1986).

In both a - e and a - i phase space stability maps extending over the observational uncertainty (Figs 3 and 4), the median survival time for particles in the region is found to be 3.2×10^5 yr. This value is then a reliable estimate of the stability time for the current known orbit of Comet Halley in the Solar system.

3.2 Frequency analysis maps

A more detailed analysis of the stability of orbits within 0.5 au of Halley's orbit (with its nominal inclination) is shown in Fig. 5, where contours of the rate of change in the mean motion of particles initially on a given orbit, over the extent of a 5×10^5 yr simulation, are plotted. Red and orange coloured areas in this figure denote regions of phase space where orbital parameters, particularly the mean motion, change by more than 5 per cent over this time-scale. While these orbits are not unstable in the sense of the results presented in the STMs of Section 3.1, they do change significantly and may lead to a different dynamical evolution of particles on these zones.

As in the STM corresponding to the same zoom level (Fig. 2), a region of strong orbital variation is shown in Fig. 5 for orbits with perihelia that cross the orbit of Jupiter, indicated by the (nearly) horizontal, dashed white line. A large proportion of orbits above this line exhibit significant variation over the length of the simulation. In addition, a pair of families of unstable orbits are also found, corresponding to those particles that cross the orbit of Saturn and do not cross that of Jupiter, and to those particles with aphelia large

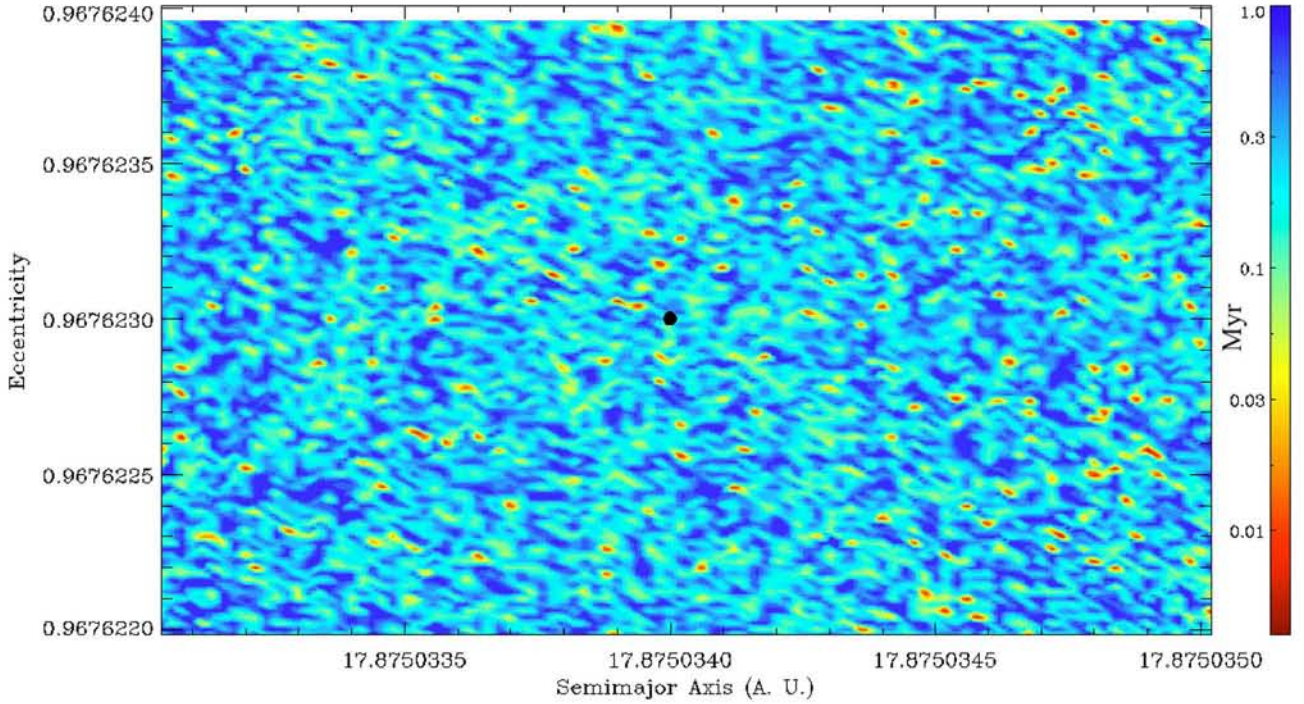


Figure 3. Same as Fig. 1 but zooming-in on the range of orbital parameters (a - e) defined by the present-day observational uncertainty in Halley's Comet orbit according to Landgraf (1986).

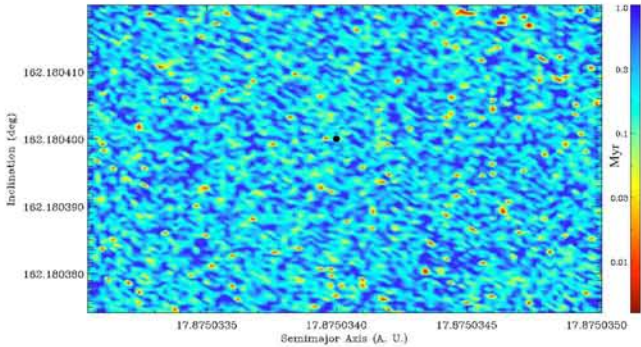


Figure 4. STM for orbits with semi-major axis and inclination within the observational uncertainty of Comet Halley (Landgraf 1986). The eccentricity in all cases is taken at the nominal value.

enough to cross the orbit of Uranus but not to cross Saturn's orbit. These features are not found on the basis of the STMs previously presented, as they do not correspond to strictly unstable orbits. A mean value for the D parameter in each region is found to be as follows: $D \sim 10^{-7.8}$ for particles crossing Jupiter's orbit, $D \sim 10^{-9.2}$ for particles crossing Saturn's orbit but not Jupiter's, and $D \sim 10^{-10.1}$ for particles that reach the orbit of Uranus but not Saturn's.

A simple numerical estimation of the time-scale for orbits to evolve significantly according to the D parameter, τ_D , can be found from the definition of diffusion parameter given in equation (1), from which it is clear that $\tau_D \sim n/D \sim 1/PD$ years, where P is the orbital period. As $P \sim 75$ yr across this whole region of phase space, the corresponding time-scale in the three regions mentioned above is $\sim 8 \times 10^5$, $\sim 2 \times 10^7$ and $\sim 2 \times 10^8$ yr, respectively. The time-scale τ_D can be understood as the time required for the particle to suffer major changes in its orbit. The instability time obtained from STM and Laskar frequency analysis is roughly consistent for

particles crossing Jupiter's orbit. In addition, these estimations are also consistent with the fact that particles not crossing Jupiter's orbit can survive the whole 1 Myr simulation, as found from the STMs.

Islands of stability/instability (blue/red zones) exist throughout the region mapped in Fig. 5, where no relation with major resonances or other bodies in the Solar system are easily identified. Although we have not carried out simulations to accomplish the Laskar frequency analysis at different zoom levels, the rapidly changing structure of the stable/unstable regions of phase space suggests a strong dependence on the initial conditions for the dynamical evolution of small bodies in the region.

3.3 Lyapunov exponent

The strong sensitivity on initial conditions depicted by our results in connection to the STMs and the Laskar stability analysis, is further illustrated in Fig. 6 which shows the separation distance between two orbits and the nominal solution for Comet Halley. One of the orbits considered (red line in Fig. 6) is for a particle starting from initial coordinates with the X component of its position greater than the nominal solution by an amount $\delta_0 = 10^{-6}$ au, the reported observational error for the ephemerides of Comet Halley. The other orbit differs initially from Halley's nominal solution in the same amount but in the Y coordinate (blue line in Fig. 6). Both orbits rapidly diverge from the nominal solution.

As illustrated in Fig. 6, there are two processes leading to an increase in the separation of neighbouring orbits. A gradual increase, as that occurring up to 3400 yr during which the separation increases by approximately five orders of magnitude due to the effect of distant encounters with other bodies in the system. And a phase of abrupt change in orbital parameters due to a close encounter of the particle with Jupiter. During this phase, the dynamical evolution is particularly sensitive to the initial conditions, as can be seen from the widely different separation for the orbits considered following

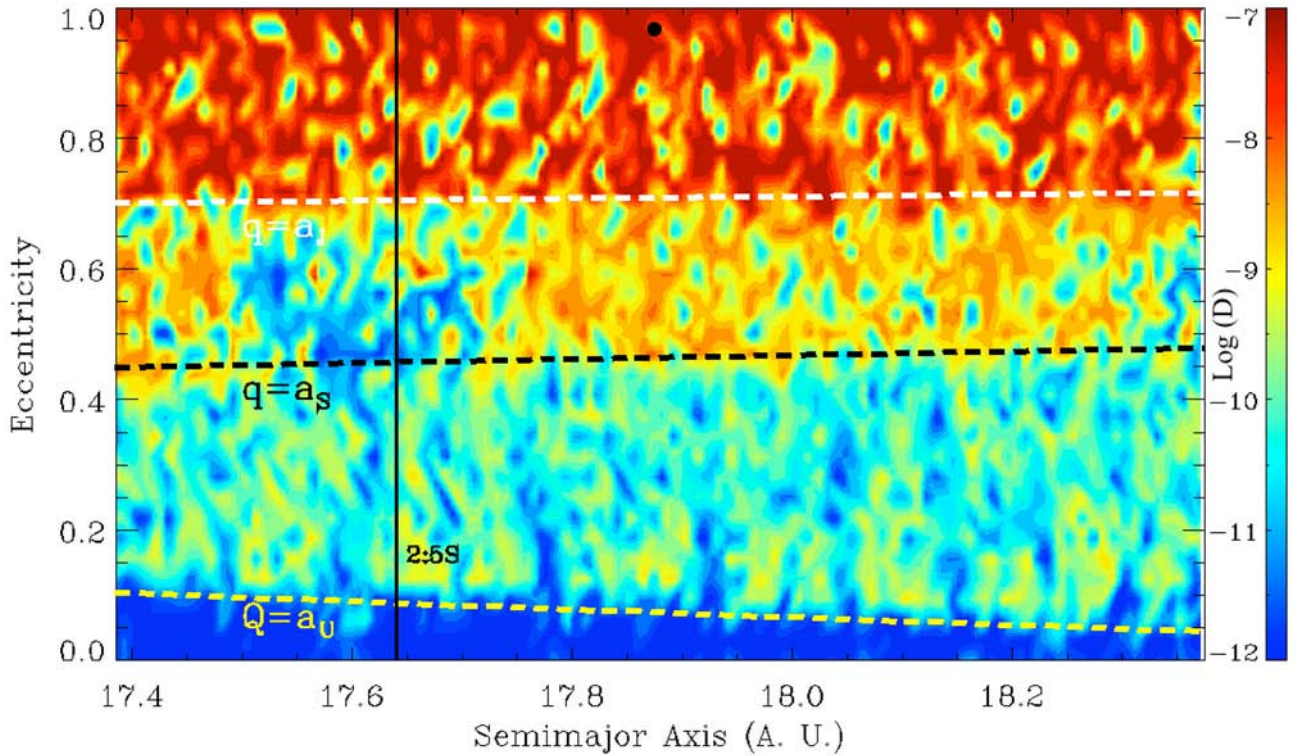


Figure 5. Frequency analysis map for orbits with Comet Halley’s inclination but differing in semi-major axis (by up to 0.5 au) and eccentricity. Red coloured regions correspond to the most unstable orbits. Horizontal lines indicate orbits with perihelia crossing Jupiter’s orbit (white dashed), Saturn’s orbit (black dashed) and with aphelia crossing the orbit of Uranus (yellow dashed). The black vertical line indicates the position of the 2:5 MMR with Saturn, the stronger one in the region (Gallardo 2006).

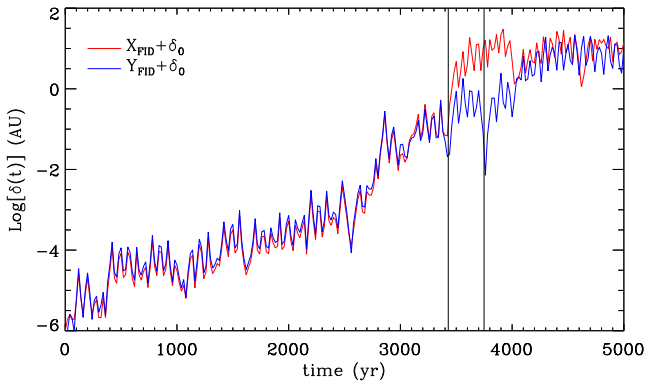


Figure 6. Evolution of the separation distance between modified orbits and Halley’s fiducial orbit. Curves correspond to initial conditions in which the X coordinate (red line) and the Y coordinate (blue line) are varied by δ_0 from the fiducial coordinate for Halley’s Comet. Vertical black lines indicate times of close encounters between the comet on the fiducial orbit and Jupiter.

the close encounters. These events, during which the particle approaches the planet to within three Hill radii ($R_H = (M_p/3 M_\odot)^{1/3}$), are marked by black vertical lines in Fig. 6, a bit after 3400 yr and at slightly less than 3800 yr.

The formal definition of the term chaos is matter of debate. In this paper we follow Strogatz et al. (1994) who proposes a working definition of chaotic behaviour as ‘aperiodic long-term behaviour in a deterministic system that exhibits sensitive dependence on initial conditions’. Our system is clearly deterministic and the sensitive dependence on initial conditions is usually measured in terms of the Lyapunov exponents which quantify the exponential rates at which

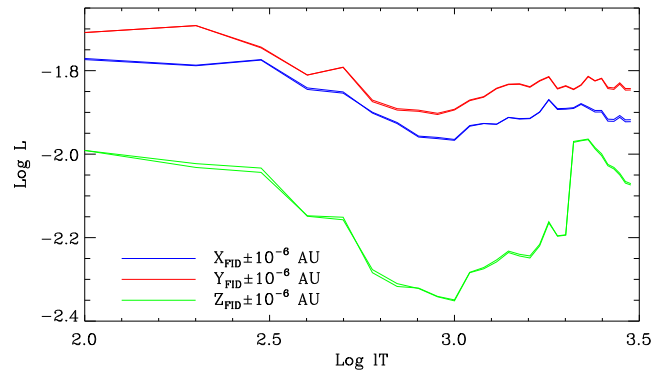


Figure 7. Lyapunov exponents for the six orbits after 3000 yr integrations. The maximum Lyapunov exponent which results from variations in the Y Cartesian axis (red curves) implies a Lyapunov time of ~ 70 yr.

neighbouring orbits diverge (or converge) as the system evolves in time. If such system exhibits at least one positive Lyapunov exponent, then it is said that the dynamics of the system is chaotic.

To formally assess the chaotic behaviour of Comet Halley we have computed the maximum Lyapunov exponent for particles on Halley’s nominal orbit, with respect to variations in the orbital parameters at the level of their current observational uncertainty. The resulting Lyapunov exponent is shown in Fig. 7. The corresponding Lyapunov time-scale is approximately 70 yr. It is important to point out that this time-scale corresponds to the time-scale for orbits to diverge by 1 part in 10^6 , which is approximately the observational uncertainty.

4 DISCUSSION

In this section, we discuss in more detail some of the implications of our results and analyse the effect of some of the assumptions and methodology used in our study.

4.1 Predictability of Halley's orbit

One of the important consequences of the chaotic nature of Halley's orbit is the possibility of making long-term predictions of its motion. On one hand, we can interpret our results of Section 3.3 in terms of the so-called Lyapunov time-scale, τ_L , defined as the inverse of \mathcal{L} , corresponding to the e-folding time-scale of the separation of initially neighbouring orbits. The fact that $\tau_L \approx 70$ yr, is an indication that over such time-scale two orbits initially separated in semi-major axis, eccentricity or inclination by 1 part in 10^6 , diverge from one another by a factor of e in separation. This precludes the possibility of making high-precision predictions, at a level similar to that of the present-day observational uncertainty in its orbital parameters, the 'short' term, ~ 70 yr, evolution of the orbit of Comet Halley, i.e. from one perihelion passage to the next.

On the other hand, the fact that the contours in the STMs, which reflect the structure of regions of dynamical stability in a - e phase space, have an apparently self-similar or fractal nature (commonly found in chaotic dynamical systems) as can be seen from comparing Figs 1, 2 and 3 corresponding to STMs at different 'zoom' levels around Halley's orbit, also suggests that the survival time of the comet cannot be accurately determined. As evident in Fig. 3, closely neighbouring orbits (within the observational uncertainty) can have widely different stability properties. The time over which Halley remains stable can range from 10^4 to 10^6 yr (or more), with the median value in a domain ranging over the observational uncertainty of a and e being approximately 3.2×10^5 yr, at the zoom level shown in Fig. 3. Furthermore, this result implies that an orbit, such as Halley's nominal solution, apparently located in a stability island on a given 'zoom' level, may turn out to be much more unstable as we zoom-in around it. A similar conclusion is reached from the distribution of values for the Laskar D index which measures the change in the orbit and has also an apparent 'fractal' structure as shown in Fig. 5.

Another illustration of the strong dependence of Halley's motion on its initial position and velocity and of the difficulty in predicting its future motion is given in Fig. 8, which shows the evolution of the orbital parameters a , e , i and the Tisserand parameter with respect to Jupiter, T_J , for seven particles located at extreme values of these parameters, within the box defined by the observational uncertainty for Halley's orbit. Over a time-scale of 10^5 yr or more, even orbits starting out with a difference in orbital parameters of less than the observational uncertainty can have widely different outcomes.

4.2 On the fate of Halley's orbit

Halley-type comets as a class (HTCs hereafter) are characterized by orbital periods less than 200 yr and Tisserand parameter with respect to Jupiter smaller than 2. In the present study, we have assumed that Comet Halley is already on its present day orbit and followed its subsequent evolution, not much can be said about the origin of its orbit.

Nevertheless, the results presented in Section 3.1 indicate that the survival time for objects in Halley-type orbits ranges from 10^4 to 10^6 yr, implying that a body in a Halley-like orbit can remain on it, or on one very similar to it, for no more than approximately 1 Myr.

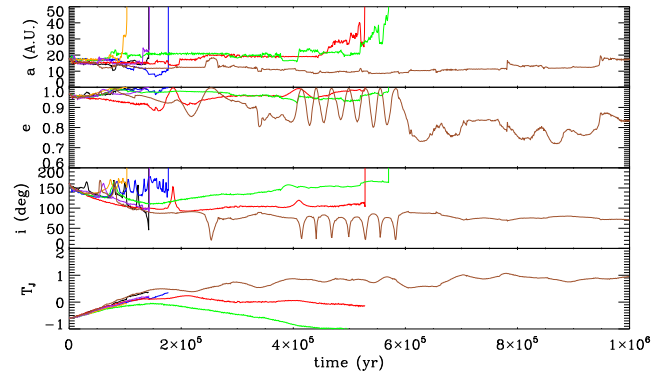


Figure 8. Temporal evolution of the main orbital parameters of seven particles with initial conditions within the present-day observational uncertainties in Comet Halley's orbit. Particles 1 and 2 correspond to initial conditions deviating in $\pm 10^{-6}$ au in the X coordinate from the centre of the a - e box defined in Fig. 3, similarly, particles 3, 4, 5 and 6 correspond to initial conditions within $\pm 10^{-6}$ au in the Y and Z coordinate, respectively. Particle 7 starts out from initial conditions corresponding to the centre of the box.

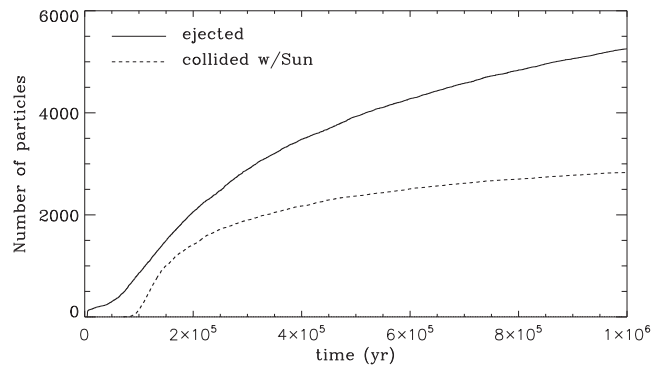


Figure 9. Temporal evolution of the number of particles ejected from the Solar system and that collide with the Sun out of the 10^4 particles originally present in the simulation. All particles are started from a set of orbits consistent with the present day orbit of Comet Halley, i.e. with a and e values within the observational uncertainties. Additionally, from the whole set of particles, six collided with one of the planets.

This, together with the fact that Halley is still an active comet, which suggests that it has probably been in its present, short period and small perihelion orbit, less than 10^4 yr, implies that Halley will probably remain on it for at least a similar time-scale.

In order to estimate the probability that Comet Halley remains in a stable orbit similar to the one it has in the present day, we have computed the fraction of particles remaining in the simulations as a function of time. Fig. 9 shows the number of particles colliding with the Sun or ejected from the Solar system, for a collection of 10 000 particles started from initial conditions within a domain in a - e phase space defined by the observational uncertainties in these parameters, as we did in the construction of the STM of Fig. 3. The initial sharp increase in the number of ejected particles is related with the first close encounter of all particles with Jupiter after ~ 3400 yr of the beginning of the simulation. It is worth to mention that although all particles suffer this close encounter, as a result of it just a few of them are ejected from the system. This is due likely to the chaotic nature of its motion. We find that 10^5 yr after the start of the simulation, 2 per cent of all particles have collided with the Sun and approximately 10 per cent have been ejected from the system.

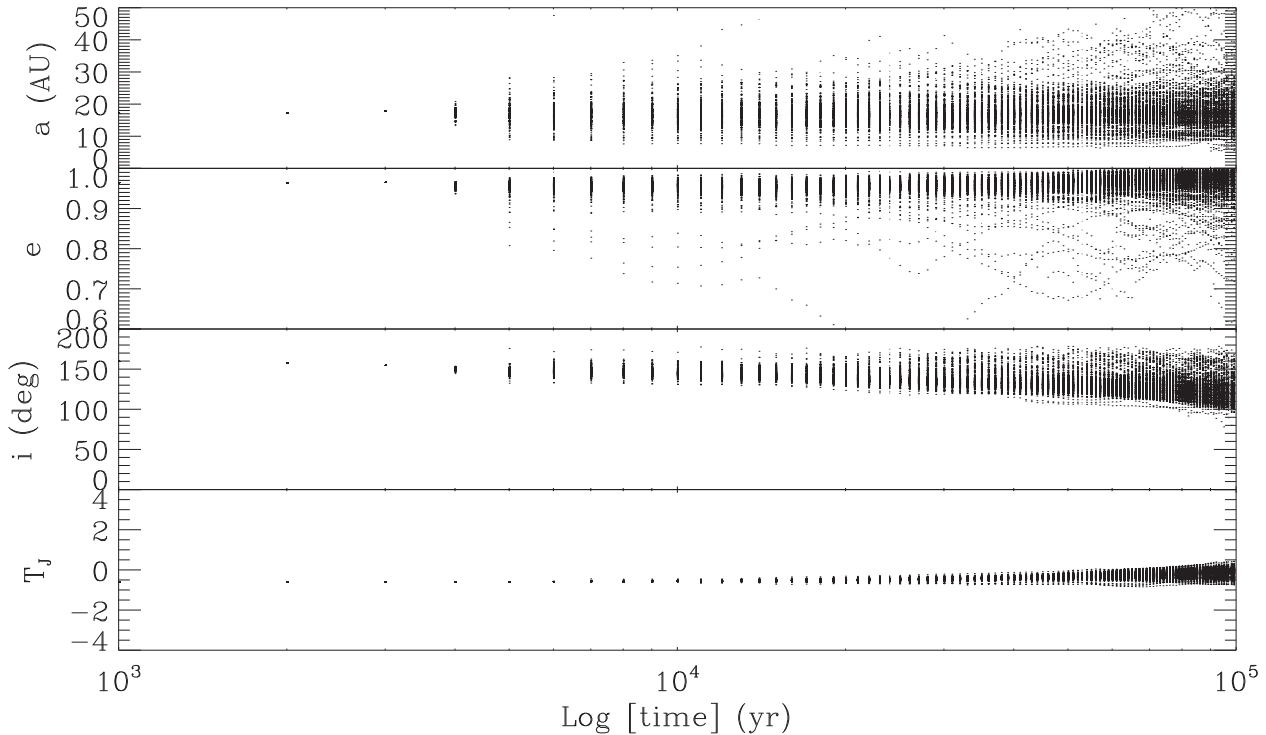


Figure 10. Temporal evolution of the main orbital parameters of 200 randomly chosen particles with initial conditions within the present-day observational uncertainties in Comet Halley’s orbit. All particles have initial conditions corresponding to orbits consistent with the present day orbit of Comet Halley. Each point represent the instantaneous value of the parameters for a particular solution at a given time.

Hence, we could estimate that Comet Halley has approximately a 90 per cent chance of surviving at least 10^5 yr in the Solar system. However, in a similar manner we can estimate that by 10^6 yr, there is a 28 per cent chance that it will collide with the Sun and a 50 per cent chance that it will be ejected from the system.

One final piece of interesting information to be gathered from our results is that the orbits consistent with Comet Halley (within the observational uncertainty) that are not lost from the system due to ejection or collision with the Sun, have a tendency to evolve conserving a Tisserand parameter with respect to Jupiter, as seen in Fig. 10, which shows the evolution of a , e , i and T_j for 200 randomly chosen particles in our simulations. Again, the initial orbit of all these particles is consistent with Halley’s present day orbit, and most of the particles in the ensemble are seen to evolve as follows.

(i) A rapid increase, on a time-scale of a few thousand years, in the spread of a , e and i representing the diversity of possible orbits to be followed by Halley if it survives.

(ii) A large fraction of orbits evolve into periods greater than 200 yr, i.e. they are no longer short period comets.

(iii) The average eccentricity of the ensemble increases slightly on a time-scale of 10^5 yr.

(iv) The inclination of most possible orbits consistent with Halley’s current orbit tends to evolve into lower inclination, almost polar orbits.

Although there is a wide spread in possible outcomes for Comet Halley as we have discussed in previous sections, it seems likely that, if it survives for more than 10^5 yr, its orbit will evolve into a more eccentric and less inclined orbit.

4.3 Origin of chaos

It is generally believed that chaotic dynamics of small bodies in the Solar system, such as asteroids in the Main Belt or comets in the Kuiper Belt, results from the overlapping of mean-motion and secular resonances with the major bodies in the Solar system (for a review of the topic see Malhotra 1998, and references therein).

Comet Halley, however, is not trapped in any of the known strong resonances with the outer planets, and this is not expected due to the comet’s high eccentricity and inclination. So the origin of the chaotic character of its orbit is not straightforward to identify. Furthermore, it appears that the chaotic motion we have identified is not directly related to the close encounters of the comet with the giant planets, particularly with Jupiter. This is a well-known source of strong chaos in the system which however develops on a greater time-scale of many orbital periods. This is illustrated in Fig. 6, where the first close encounters of the comets with Jupiter are shown to occur after approximately 50 orbital periods.

The weak chaotic behaviour we have characterized by the Lyapunov exponent analysis of Section 3.3 is not directly related to these close encounters, as it develops long before the first close encounter occurs. One possible explanation for the origin of the chaotic motion of Halley’s Comet is the overlap of p : 1 mean-motion resonances, where p is an integer, with the binary conformed by the Sun and Jupiter (Shevchenko 2014). In a previous work Shevchenko (2007) performs an analytical estimation of the Lyapunov time for the Halley’s Comet obtaining a lower limit for this of ~ 34 yr, which is consistent with our numerical estimation. We intend to analyse this issues in more detail in a future work.

4.4 Neglected dynamical effects

In the present study, we have neglected the effect of non-gravitational forces known to affect the dynamics of active comets near perihelion (Marsden 1968). The effect on Comet Halley is particularly well known, but along with this is the fact that the estimated time in which the gaseous jet forces are actively present in comets is just a few hundred perihelion passages, which corresponds to a few thousand years of the dynamical lifetime of Halley-type comets. As we are interested in the long-term dynamical evolution of Halley's Comet, we decided to neglect this effect in the simulations presented in this work.

To test the previous assumption, we carried out a simulation of the long-term evolution of Halley's Comet including non-gravitational forces as prescribed in the Horizons website,² to construct an STM for the conditions studied in Fig. 1. In doing that we are highly overestimating the importance of this effect because we implicitly assume that the comet is active for the whole 1 Myr simulation. Nevertheless, even in this extreme scenario, the results as far as survival expectancies are statistically equivalent to the one without non-gravitational forces presented in the previous sections.

Finally, it is worth mentioning that the results we have obtained are strictly related with the gravitational interaction of test particles with the major Solar system bodies, except for Mercury. The mass of Mercury could be added to that of the sun, but this adds just $\sim 1.6 \times 10^{-7} M_{\odot}$ to the total mass of the Sun, therefore, in the long term, there is not a measurable difference for Halley's Comet fate. To correctly account for the influence of Mercury in a simulation of the Solar system, it would require a relativistic treatment of the equations of motion, but given the chaotic nature of the problem and the short time-scale of the simulations, compared to the Solar system lifetime, we considered this a second-order effect in our analysis to be considered in future studies.

5 CONCLUSIONS

We have carried out a series of numerical simulations aimed to assessing the dynamical stability of Halley's Comet. Three types of analysis are carried out to demonstrate and characterize the chaotic behaviour of the Halley's orbit on the basis of STMs, frequency analysis maps and a direct calculation of the Lyapunov exponent.

From our analysis of STMs we conclude that it is common for Halley-like orbits to be unstable up to the point of being ejected from the system, or colliding with another Solar system body. We also find that the long-term evolution of Comet Halley, even with the high precision of its observed orbital parameters, is difficult to predict on account of the strong dependence on the initial conditions. The time-scale for particles in orbits differing in less than today's observational uncertainties in a or e can range by at least two orders of magnitude, from 10^4 to 10^6 yr approximately. The median time-scale for the survival of particles in a range of a and e within the observational constraints is 3.2×10^5 yr.

Based on the Laskar stability analysis in a neighbourhood of Halley's Comet, we conclude that even stable orbits, in which the particles are not ejected or collide with a Solar system body, can change significantly on a time-scale of millions of years. Again, the precise determination of what will be the fate of Comet Halley is hindered by the strong dependence on the initial conditions, even within today's observational uncertainties at the level of 1 part in

10^6 . On time-scales of more than 10^5 yr, it seems likely that the Halley, if it does not collide with the Sun or is ejected from the Solar system, will evolve into a higher eccentricity, lower inclination orbit.

Finally, we have computed the Lyapunov exponent for the present-day Halley's orbit and a series of other orbits differing in a and e by an amount equivalent to the observational uncertainty. We have found that \mathcal{L} is greater than zero with a value of approximately 10^{-2} , indicating that the orbit is indeed chaotic. The corresponding time-scale for the prediction of Halley's orbit to within present-day observational constraints is less than 100 yr, suggesting that the orbit of Halley's Comet cannot be accurately predicted for time-scales much greater than this. An important finding in our work is that the chaotic behaviour is not related to close encounters of Halley with any of the planets in the Solar system, nor to the overlap of any known system of resonances. The origin of the chaos in such eccentric orbits is a subject to be explored in more detail in future studies.

ACKNOWLEDGEMENTS

We acknowledge Carlos Chávez for his help in the implementation of the routines for the frequency analysis maps. We are also very grateful to the anonymous referee for comments that improved the quality of this paper. We also acknowledge support from DGAPA-UNAM PAPIIT grants nos. IN115109 and IN114114. MAM is thankful to CONACYT-Mexico for a scholarship to conduct graduate studies.

REFERENCES

- A'Hearn M. F., Millis R. C., Schleicher D. O., Osip D. J., Birch P. V., 1995, *Icarus*, 118, 223
- Bailey M. E., Emel'Yanenko V. V., 1996, *MNRAS*, 278, 1087
- Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M., 1980, *Meccanica*, 15, 9
- Chambers J. E., 1999, *MNRAS*, 304, 793
- Chirikov R. V., Vecheslavov V. V., 1989, *A&A*, 221, 146
- Correia A. C. M., Udry S., Mayor M., Laskar J., Naef D., Pepe F., Queloz D., Santos N. C., 2005, *A&A*, 440, 751
- Duncan M. J., Levison H. F., 1997, *Science*, 276, 1670
- Duncan M., Quinn T., Tremaine S., 1988, *ApJ*, 328, L69
- Dvorak R., Kribbel J., 1990, *A&A*, 227, 264
- Everhart E., 1985, in Carusi A., Valsecchi G. B., eds, *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 115, IAU Colloq. 83: Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution. Reidel, Dordrecht, p. 185
- Fernandez J. A., 1980, *MNRAS*, 192, 481
- Froeschle C., Gonczi R., 1988, *Celest. Mech.*, 43, 325
- Gallardo T., 2006, *Icarus*, 184, 29
- Kiang T., 1972, *Mem. R. Astron. Soc.*, 76, 27
- Kresak L., Kresakova M., 1987, in Rolfe E. J., Battrick B., eds, *ESA SP-278, Diversity and Similarity of Comets*. ESA, Noordwijk, p. 739
- Landgraf W., 1986, *A&A*, 157, 245
- Laskar J., 1990, *Icarus*, 88, 266
- Laskar J., 1993, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 56, 191
- Levison H., 1996, in Rettig T. W., Hahn J. M., eds, *ASP Conf. Ser. Vol. 107, Completing the Inventory of the Solar System*. Astron. Soc. Pac., San Francisco, p. 173
- Levison H. F., Duncan M. J., 1994, *Icarus*, 108, 18
- Levison H. F., Dones L., Duncan M. J., 2001, *AJ*, 121, 2253
- Levison H. F., Duncan M. J., Dones L., Gladman B. J., 2006, *Icarus*, 184, 619
- Luu J., Marsden B. G., Jewitt D., Trujillo C. A., Hergenrother C. W., Chen J., Offutt W. B. 1997, *Nature*, 387, 573

² <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

- Malhotra R., 1998, in Lazzaro D., Vieira Martins R., Ferraz-Mello S., Fernandez J., eds, ASP Conf. Ser. Vol. 149, Solar System Formation and Evolution. Astron. Soc. Pac., San Francisco, p. 37
- Marsden B. G., 1968, AJ, 73, 367
- Morbidelli A., 2002, Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics. Taylor and Francis, London (ISBN 0415279399)
- Mumma M. J., Charnley S. B., 2011, ARA&A, 49, 471
- Petrosky T. Y., 1986, Phys. Lett. A, 117, 328
- Quinn T., Tremaine S., Duncan M., 1990, ApJ, 355, 667
- Scargle J. D., Black D. C., 1980, BAAS, 12, 814
- Sekhar A., Asher D. J., 2014, Meteorit. Planet. Sci., 49, 52
- Shevchenko I. I., 2007, in Valsecchi G. B., Vokrouhlický D., Milani A., eds, Proc. IAU Symp. 236, Near Earth Objects, our Celestial Neighbors: Opportunity and Risk. Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 15
- Shevchenko I. I., 2014, preprint ([arXiv:1405.3788](https://arxiv.org/abs/1405.3788))
- Strogatz S., Friedman M., Mallinckrodt A. J., McKay S., 1994, Comput. Phys., 8, 532
- Thomas F., Morbidelli A., 1996, Celest. Mech. Dyn. Astron., 64, 209
- van der Helm E., Jeffers S. V., 2012, Icarus, 218, 448
- Whipple F. L., 1951, ApJ, 113, 464
- Yeomans D. K., Kiang T., 1981, MNRAS, 197, 633

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

ARTÍCULO 2. CALENTAMIENTO DINÁMICO INDUCIDO POR PLANETAS ENANOS EN DISCOS DE ESCOMBROS TIPO CINTURÓN DE KUIPER FRÍOS.

4.1 RESUMEN

En este artículo presentamos un estudio general sobre la influencia de decenas de DPs sobre un cinturón frío aleatorio que asemeja la distribución de la población fría del CKB. Elegimos esta distribución debido a que ésta es la población del KB menos afectada por Neptuno y por tanto la más estable. En este sentido constituye el punto de partida más intuitivo para un estudio general de discos de escombros, de los cuales el KB es un ejemplo evolucionado.

La exploración del efecto de los DPs sobre el cinturón aleatorio frío se llevó a cabo con y sin la presencia de un planeta gigante similar a Neptuno, esto es, que comparte todas sus características físicas y orbitales excepto por la inclinación, que definimos en cero grados por propósitos de claridad y simplicidad. Si escogiéramos una inclinación diferente, las partículas prueba sufrirían un reacomodo inicial para ajustarse al plano invariable que es definido por el momento angular total del sistema, en este caso, dominado por mucho por el planeta gigante.

Los resultados de los experimentos sin el planeta gigante muestran que la influencia de sólo 10 DPs es importante en el disco al calentar dinámicamente las partículas, esto es, aumentando sus e e i , como puede observarse en las Figuras 1 y 4 del artículo. Al aumentar el número de DPs, esto es, al aumentar el número de dispersores, hasta 100, el efecto es acumulativo en la dispersión de e (calentamiento radial) y crece monótonicamente con el tiempo. En i (calentamiento vertical) existe, sin embargo, una saturación en el efecto que producen incluso 100 DPs. Este límite, que encontramos que es de 5° , está relacionado con la máxima i de la distribución inicial de DPs.

Cuando el planeta gigante está presente en la simulación ocurre un efecto interesante y no mostrado antes en la literatura: el calentamiento producido por los DPs se reduce drásticamente (Figuras 2 y 4), lo que significa que un planeta gigante es un agente estabilizador de las órbitas de objetos en cinturones de escombros externos a éste. Este efecto estabilizador parece ser originado por la fuerza gravitacional vertical que ejerce el gigante y que jala a las partículas hacia el plano del disco, dado que entre más alejadas se encuentran las partículas del gigante, mayor es la altura que alcanzan sobre el plano al final de la simulación (Figura 3). Sin embargo es necesaria una investigación detallada que muestre el origen de este efecto. Este es un trabajo que se presentará en otro artículo, por lo pronto en el trabajo que se describe ahora, se dan algunas sugerencias de su posible origen.

Aunque el efecto de los DPs se reduce ante la presencia del gigante, no desaparece del todo (Figura 4), y con incluso 30, pero sobre todo con 50 y 100 DPs existe un calentamiento radial (e) notable que permite a las partículas prueba migrar en a y encontrar las MMRs del gigante, quedando atrapadas en ellas. Una vez en las MMRs su evolución es más rápida, esto es, se difunden caóticamente, o sus e e i crecen rápidamente, por lo que pueden escapar de la resonancia y convertirse en parte de otras familias dinámicas, por ejemplo de los centauros o en nuevos miembros del SD. La evolución una vez dentro de las resonancias y la estadística relacionada se estudiará igualmente en otro artículo.

Para el sistema solar, el efecto anteriormente mencionado puede ser importante si existen más de los 10 objetos de tamaños comparables a DPs que se conocen en la actualidad. Con sólo 10 DPs su influencia ante la presencia de un planeta gigante es despreciable (Figura 4). Sin embargo, es probable que existan hasta 50 objetos comparables a DPs en la región trans-Neptuniana, según Michael Brown¹. De ser el caso, más de 10 DPs contribuirían al calentamiento dinámico de partículas del CKB produciendo su migración y su posterior evolución que puede llevarlas a la zona de influencia directa de Neptuno, lo que contribuiría a aumentar la tasa de inyección de nuevos SPCs.

¹ <http://web.gps.caltech.edu/~mbrown/dps.html>

4.2 ARTÍCULO

A continuación se anexa el artículo publicado en la revista *Astrophysical Journal Letters* (ApJL) del año 2015, Vol. 811, L21.

DYNAMICAL HEATING INDUCED BY DWARF PLANETS ON COLD KUIPER BELT-LIKE DEBRIS DISKS

M. A. MUÑOZ-GUTIÉRREZ¹, B. PICHARDO¹, M. REYES-RUIZ², AND A. PEIMBERT¹

¹Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-264 Ciudad Universitaria, México; mmunoz@astro.unam.mx

²Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 877, 22800 Ensenada, México

Received 2015 June 13; accepted 2015 August 31; published 2015 September 24

ABSTRACT

With the use of long-term numerical simulations, we study the evolution and orbital behavior of cometary nuclei in cold Kuiper belt-like debris disks under the gravitational influence of dwarf planets (DPs); we carry out these simulations with and without the presence of a Neptune-like giant planet. This exploratory study shows that in the absence of a giant planet, 10 DPs are enough to induce strong radial and vertical heating on the orbits of belt particles. On the other hand, the presence of a giant planet close to the debris disk, acts as a stability agent reducing the radial and vertical heating. With enough DPs, even in the presence of a Neptune-like giant planet some radial heating remains; this heating grows steadily, re-filling resonances otherwise empty of cometary nuclei. Specifically for the solar system, this secular process seems to be able to provide material that, through resonant chaotic diffusion, increase the rate of new comets spiraling into the inner planetary system, but only if more than the ~ 10 known DP sized objects exist in the trans-Neptunian region.

Key words: Kuiper belt: general – methods: numerical – planets and satellites: dynamical evolution and stability

1. INTRODUCTION

One of the characteristics of evolved planetary systems is the prolonged presence of the remnants of stellar and planetary formation, ranging in size from dust grains to cometary nuclei to dwarf planets (DPs). This material, located beyond the region where planets rapidly “clean-up” their vicinity, is known as a debris disk (for a review see Kenyon et al. 2008; Wyatt 2008 and references therein). In our solar system the present day remnants in this region constitute the “Kuiper belt” (KB). Although the lifetime of debris disks depends on diverse factors, such as the stellar mass and neighboring environment, the majority of 100 Myr old stars have observational features consistent with the presence of debris disks and even a few 10 Gyr old stars show evidence of having debris disks (Decin et al. 2003; Greaves et al. 2005).

The first discovered extrasolar debris disk was the one of Vega, detected by its infrared (IR) excess with the IRAS satellite (Aumann et al. 1984). The IR excess is believed to be produced by belts of dust particles originating from a steady collisional cascade (Müller et al. 2010); for the case of Vega, this belt is located at ~ 100 AU from the star. The study of extrasolar debris disks is relevant in several aspects to the understanding of the planetary system formation process; moreover, debris disks have been employed to determine the presence of planets in extrasolar planetary systems (Zuckerman & Song 2004).

On the other hand, DPs have an important role on the dynamics of primigenious planetary disks as the initiators of collisional cascades once they reach ~ 1000 – 3000 km size; they stir the orbits of residual icy planetesimals, increasing collisions; these collisions are responsible for both grounding some icy-planetesimals to dust, as well as creating some super-Earth sized cores (Kenyon & Bromley 2004, 2015). Also, massive planets in evolved debris disks are able to produce gaps and dust outflows (Moro-Martín & Malhotra 2005).

In the specific case of the KB, recent studies show that a number of its dynamical components can be explained with a migrating Neptune (e.g., Malhotra 1993; Levison & Morbidelli 2003; Chiang et al. 2007; Morbidelli et al. 2008;

Nesvorný 2015). Indeed, all populations in the KB conserve evidences of their close interaction with the giant, except probably for the classical KB (CKB). The CKB has been defined as a bimodal orbital distribution: the hot (inclinations $i > 5^\circ$) and cold ($i < 5^\circ$) components (Brown 2001). However, some mixing between both populations seem to have taken place (Morbidelli et al. 2008; Petit et al. 2011; Volk & Malhotra 2011).

The most accepted scenario to explain the coexistence of both hot and cold populations (Batygin et al. 2011; Wolff et al. 2012; Nesvorný 2015) involves the action of a migrating Neptune, going outwards launching lots of planetesimals to form the hot population; the cold disk bodies, starting beyond 40 AU, simply kept their primordial orbits mostly unaffected by Neptune that stopped migrating at some point in the evolution of the early solar system when the disk material grew scarce (Gomes et al. 2004).

Regarding the largest bodies of the power spectra on debris disks, the only examples we know are the KB objects (KBOs) with radii between 400 and 1200 km, a few of which have only recently been discovered (Brown et al. 2005). Extrapolation of the size distribution of smaller KBOs has sometimes been used to attempt to estimate the numbers of such larger objects (i.e., Bernstein et al. 2004), but estimations are still inconclusive.

Regardless of their number, it is usually believed DPs to have only a small influence on the evolution of debris disks in general. Fernández (1980) presents a first approximation where he attaches importance to massive objects, of up to $1.7 \times 10^{-4} M_\oplus$, in a very massive KB disk (about $9 M_\oplus$), finding that, in the presence of thousands of Ceres-like objects, direct encounters of cometary nuclei with larger bodies could lead to scatter of comets, sending them to the inner planetary region, in this way possibly maintaining a steady influx of short-period comets. Current estimates of the mass and composition of the KB rule out this possibility as the main driver to produce the observed population of short-period comets. The infall inrate of comets on planetary systems might be of great importance in terms of habitability for example: it is believed that a large fraction of the water in the primeval Earth

came from comets and asteroids (Altwegg et al. 2015); also, at some later point it becomes necessary, for long-term evolution of life, to have a reduced cometary infall rate. However at present, other than the KB, we are not able to observe such details on other debris disks.

In this work we produce an exploratory study, that helps to better understand the dynamical effects of DPs on cold Kuiper belt-like debris disks (KBLDD) with and without the influence of a Neptune-like giant planet. The physical effects presented here are of a general nature, as such, we expect them to be relevant in a wide variety of debris disks. In particular, we believe these results can be qualitatively applied to the KB (although we do not pretend to present a detailed study of the KB dynamics). A more quantitative study of the KB or of any other specific debris disk is beyond the scope of this letter.

2. SIMULATIONS

In this work we explore by means of long-term numerical simulations, the influence of random DPs on the dynamics of cold KBLDDs. The random DPs share physical characteristics with the ones observed in the solar system's trans-Neptunian region, while the cold KBLDDs resemble the observed cold population of the solar system's CKB. We constructed our initial conditions to resemble the cold CKB because it is the component least affected by Neptune, therefore the most stable. This is also the most intuitive starting point for a generic statistical study of debris disks. Among the differences with the solar system precise conditions are: the exact quantity of DPs, a zero inclination for our Neptune-like giant planet, and the random generated initial conditions of the belt particles.

For our studies we employ the hybrid symplectic integrator included in the MERCURY package (Chambers 1999). This integrator lets us follow the evolution of test particles in a potential generated by several major N -bodies plus a central star. It also permits to follow close encounters between bodies with high accuracy by switching from a symplectic to a Bulirsh-Stöer integrator; the switch between integrators takes place when particles get closer than a limit imposed in terms of the given major body's Hill radius ($R_H = (M_p/3 M_\odot)^{1/3}$).

All simulations are 1 Gyr long with an accuracy tolerance for the Bulirsh-Stöer integrator of 10^{-10} , a changeover distance between integrators of $3 R_H$ for any major body, and a time-step of 180 days for the symplectic integrator. The simulations were performed on *Atocatl*.³

2.1. Major Bodies

The main central body in all simulations is a $1 M_\odot$ star.

We consider 4 different initial DP configurations: we use 10, 30, 50, and 100 randomly generated cold DPs. The orbital parameters of all DPs lie within the following limits: semimajor axes, $35 \text{ AU} < a < 60 \text{ AU}$; eccentricities, $0.0 < e < 0.1$; inclinations, $0.0^\circ < i < 5.0^\circ$; arguments of pericenter, $0^\circ < \omega < 360^\circ$; longitudes of the ascending node, $0^\circ < \Omega < 360^\circ$; and mean anomalies, $0^\circ < M < 360^\circ$. DP masses take random values in the range $3.3 \times 10^{-6} M_\oplus < m < 2.8 \times 10^{-3} M_\oplus$, where upper limit corresponds to Eris's mass, while the lightest corresponds to the mass of 2002 AW₁₉₇, this is, the biggest and one small but significative object in our trans-Neptunian region.

All four DP configurations were run with and without the presence of a giant planet. The parameters for this body were exactly the ones the real Neptune has but with zero inclination for the sake of simplicity, because the giant planet defines the angular momentum of the system (i.e., this represents the natural reference system of the problem); had we chosen different planes for the giant planet and the KBLDD an initial rearrangement of test particles would have occurred to come into balance with the giant planet's plane.

To better see the cumulative effect, we constructed the sets of DPs in such a way that the larger DP sets include all the DPs of the previous set, i.e., the set of 10 DPs is a subset of the one of 30 DPs, etc. The total mass in DPs for 10, 30, 50, and 100 objects is respectively: 0.011, 0.032, 0.063, and $0.131 M_\oplus$; for comparison, the CKB estimated mass is $\sim 0.01 M_\oplus$ (Bernstein et al. 2004; Fraser et al. 2014).

2.2. Test Particles' Initial Conditions: Random Cold KBLDD

We generate a belt of 1000 test particles that resemble the observed cold CKB population. According to Kavelaars et al. (2008), Petit et al. (2011), and Dawson & Murray-Clay (2012), the current cold CKB have orbits with semimajor axes, $42.5 \text{ AU} < a < 44.5 \text{ AU}$, but mainly around 44 AU, with inclinations, $i < 4^\circ$, and eccentricities, $e < 0.05$, for most objects of the population.

We assign the values of the orbital parameters of the particles as follows: for a we use a random Gaussian distribution with mean and standard deviation: $\langle a \rangle = 44.0 \text{ AU}$, $\sigma_a = 1.5 \text{ AU}$. For e and ω we generate a point distribution in an XY plane where each coordinate gets random Gaussian values with mean zero and standard deviations given by $\sigma_{(e_x, e_y)} = 0.03$; each point represents a vector, $\mathbf{e} = (e_x, e_y)$, whose magnitude, $|\mathbf{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$, is the e of the particle; also, we define the angle between \mathbf{e} and the X axis, ϕ_e , as ω , therefore $\omega = \phi_e = \text{Tan}^{-1}(e_y/e_x)$; in this manner the initial e distribution has mean and standard deviation: $\langle e \rangle = 0.037$, $\sigma_e = 0.019$, while ω is randomly distributed between 0° and 360° . We follow an analogous procedure to obtain the i and Ω distributions; in this case we generate coordinates with random Gaussian points with mean zero and standard deviations given by $\sigma_{(i_x, i_y)} = 1.2^\circ$; the resulting i follows a distribution with $\langle i \rangle = 1.52^\circ$, $\sigma_i = 0.80^\circ$; while Ω is randomly distributed between 0° and 360° . Finally, for M we use random values between 0° and 360° .

3. RESULTS AND DISCUSSION

Figure 1 shows the initial and final distributions of test particle eccentricities (left panel) and inclinations (right panel) in the simulations without a Neptune-like giant planet; the black line represents the initial conditions, while the different shades of blue represent the final distributions for 10, 30, 50, and 100 DPs. Analogously, Figure 2 shows the same distributions when, along with the DPs, a Neptune-like planet is included at 30.09 AU.

From Figure 1 we see that both e and i shift toward larger values as the number of DPs increases; this is to be expected as more DPs will produce a larger number of close encounters with test particles, resulting in larger dispersions of e and i . A striking difference between e and i distributions can be noted: while for e there are more disturbed particles as the number of DPs increases; for i there seems to exist a saturation limit,

³ *Atocatl* is a supercomputer of the Instituto de Astronomía at UNAM.

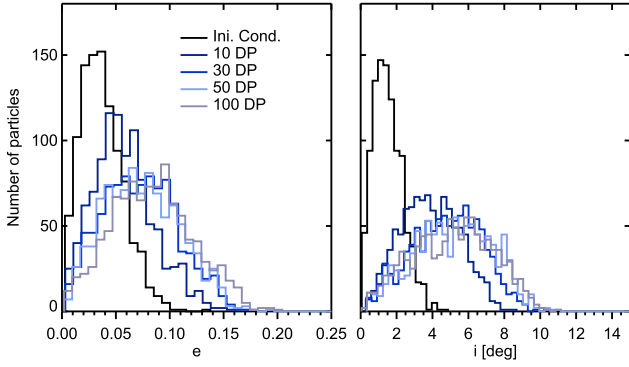


Figure 1. Initial and final distributions of test particles. Left panel shows the initial e distribution of KBLDD particles (black line) and the final distributions, after 1 Gyr evolution, when 10 (darker blue line), 30 (middle blue line), 50 (lighter blue line), and 100 (gray line) random DPs are present in the simulation. Right panel is the same, but for i .

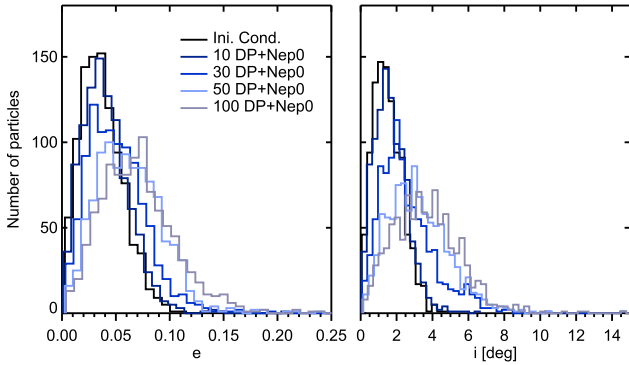


Figure 2. Same as Figure 1, but including a Neptune-like giant planet at 30.09 AU.

where no particles can be heated beyond $\sim 11^\circ$, not even with 100 DPs, while the mean of the distribution remains near $\sim 5^\circ$ with 30, 50, and 100 DPs. The latter is result of the initial distribution of DPs; as they are cold, with maximum initial inclinations of 5° , they do not seem to be able to push test particle's i far beyond this limit. With 10 DPs there is less dynamical heating and this limit is not reached, remaining around 4° .

An interesting effect occurs when a Neptune-like planet is included in the simulations: as seen in Figure 2, scattering induced by 10 and 30 DPs is severely damped for both e and i distributions. Again, with increasing DPs number, scattering of particles becomes stronger, leading to a shift of the distributions to higher values of e and i . For 50 and 100 DPs, damping is slightly less important and, although fewer in number, some particles can rise to values of 0.20 and 11° for e and i , respectively (values similar to the ones reached without a giant planet). Again, the mean values of the final i distributions grow with DPs number, but always remain below 5° ; even with 100 DPs, the mean is $\sim 4^\circ$. This implies, contrary to intuition, that a giant planet can act as a stabilizing agent, by helping to vertically bound particles in its gravitational potential (see Figure 3). Mechanisms that could be responsible for this effect are: (a) a suppression on the number of close encounters of the cometary nuclei with DPs induced by the giant planet; from our studies we find an opposite behavior, i.e., the presence of a giant planet increases the number of collisions due to the higher disk density produced by its presence. (b) Resonances with the

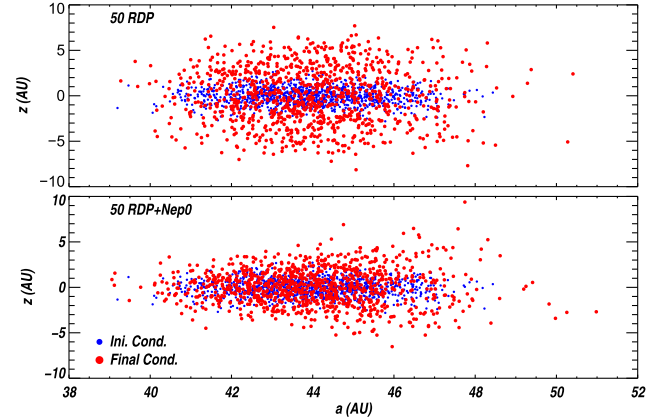


Figure 3. Height over the plane (z) vs. semimajor axis (a). The upper panel shows the cometary nuclei initial conditions (blue) and final (red) for our run with 50 DPs and no giant planet. Lower panel shows the same but for the run with 50 DPs plus the giant.

giant; in this case, mean motion resonances (MMRs) in the plane of the disk produced by the giant have a strong influence very high above the disk plane, flattening considerably the disk; this phenomenon has been recently demonstrated to occur in galactic disks (Moreno et al. 2015), however the lack of filamentary structure on Figure 3, may suggest this effect is not important. (c) Resonances induced by the DPs on the cometary nuclei; in this case the giant planet breaks the phases of the particle-DP interaction preventing the more efficient resonant heating. (d) A gravitational non-resonant origin based only on the vertical force exerted by the giant; on average the giant acts like a 30 AU ring that pulls the cometary nuclei toward the plane of the disk producing the distinctive triangle-like shape seen in Figure 3.

With enough DPs, the effect of very close encounters with DPs will be able to overcome the stabilizing influence of the giant planet; clearly, there must be a limit on how far this stabilizing influence can be exerted, but in the radii we explore, we do not reach it. In the presence of the giant, there are more close encounters due to the higher density; this may lead to more dust production in the disk than without the presence of the giant.

The left panels of Figure 4 show the evolution throughout the simulations of $\langle e \rangle$ and $\langle i \rangle$, while the right panels show σ_e and σ_i , respectively. Broad lines show the evolution produced by DPs without a giant planet, while thin lines correspond to simulations that include a Neptune-like body. The top-left panel of Figure 4 shows how, in all 8 cases, $\langle e \rangle$ increases almost monotonically; naturally, as the number of DPs increases, their effect on the final $\langle e \rangle$ increases. The top-right panel shows a similar behavior for σ_e (note the different scale between panels). These results strengthen what we have seen in the previous figures: the increasing presence of minor bodies increasingly perturbs the test particles, both with and without a giant planet.

The growing radial heating allows test particles to encounter resonances, replenishing them with cometary nuclei. This effect is clear in spite of the small number of test particles we employ in our simulations. This becomes relevant not only because of the inherently fascinating behavior of particles trapped into resonances, but also because it is generally assumed that, in

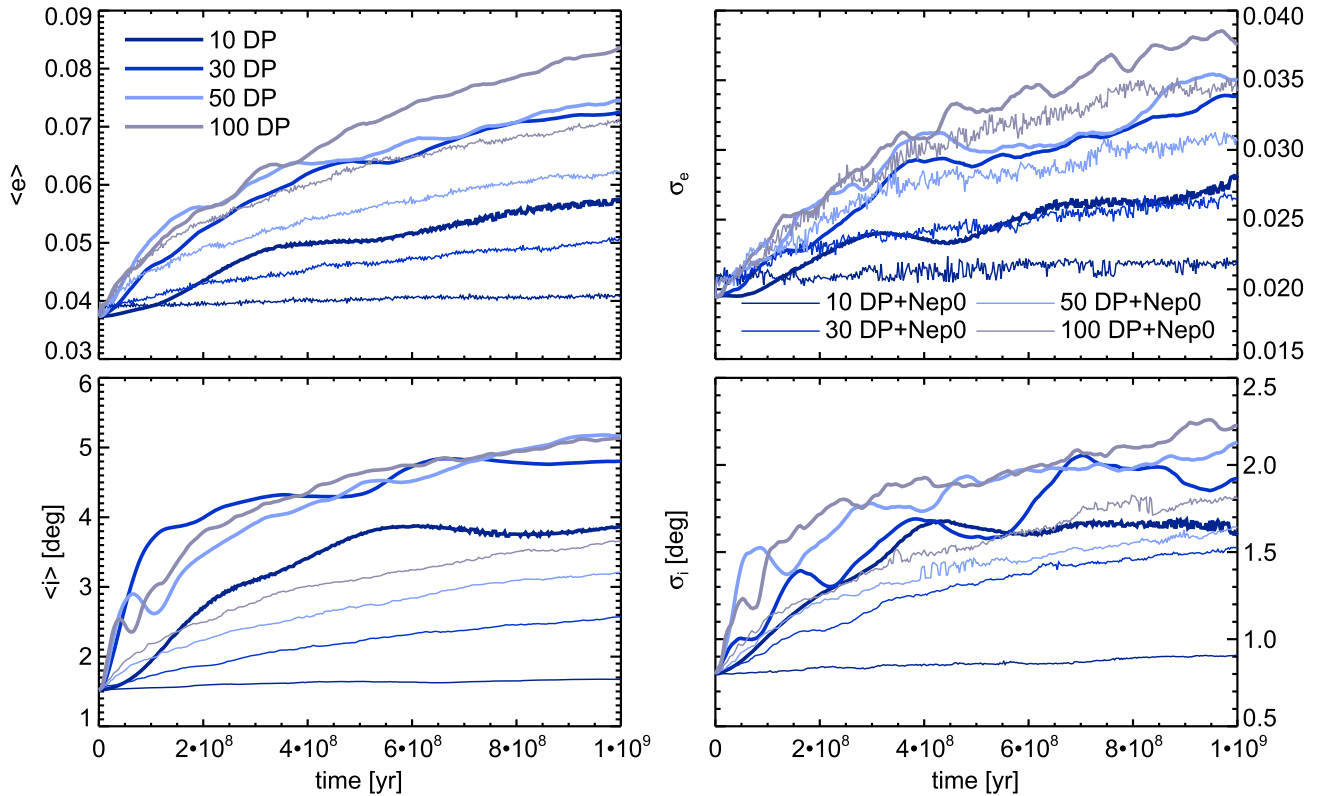


Figure 4. Evolution of test particle averages and standard deviations for eccentricity and inclination: top left panel shows $\langle e \rangle$, top right panel shows σ_e , bottom left shows $\langle i \rangle$, and bottom right shows σ_i . Broad lines stand for simulations without a giant planet, while thin lines for simulations that include a Neptune-like planet. Color code is the same as in Figure 1.

advanced stages of debris disks, there are no more known mechanisms able to restock the material on resonant regions.

We also find that several of those particles are effectively trapped by resonances with the giant planet increasing dramatically their eccentricities. This mechanism might work as a plausible secular process able to sustain a rate of new comets spiraling into the inner planetary system (this rate has not been fully explained for the KB).

By comparing the thin to the broad lines in the two bottom panels of Figure 4, we can see the stabilizing effect of a Neptune-like planet: without the giant planet $\langle i \rangle$ quickly grows to reach the 5° limit found before, when a Neptune-like body is present evolution is smooth and rising but slower; with a giant planet, 100 DPs are required to produce a similar effect to what 10 DPs were able to achieve without the giant. Also, without a giant planet, 30 DPs are enough to get close to some sort of saturation point, and there is very little difference between the final values for $\langle i \rangle$ for 50 and 100 DPs; the saturation value seems to be similar to the DPs inclination initial distribution.

A similar trend is observed in the σ_i evolution: the maximum dispersion reached is about 2.1° for 30, 50, and 100 DPs without a giant planet, while with the giant this limit is about 1.6° . The effect produced by 10 bodies without the giant planet, clearly seen in both $\langle i \rangle$ and σ_i , almost disappears in the presence of the giant planet. In our solar system around 10 objects comparable in size to Pluto have been discovered, if this is the total number of this kind of bodies, their effect on our KB would be hardly noticeable; however, there is the possibility that the total number of DPs is several times larger.

4. CONCLUSIONS

With the use of long-term, N -body numerical simulations we have studied the dynamical effect of DPs on a cold debris disk with and without the presence of a giant planet.

In the absence of the giant, DPs require only 1 Gyr to induce substantial vertical heating on initially cold test particles; this process increases the inclinations up to a saturation value of the order of the highest initial DP inclinations, in our simulations, 5° . Likewise, radial heating (eccentricity dispersion) increases rapidly, although in this case, saturation is not reached.

On the other hand, in the presence of a Neptune-like giant planet, the contribution of the DPs to the general heating diminishes severely. The 5° inclination limit obtained without the giant planet is no longer reached, not even with 100 DPs; in this case, the giant planet acts as a stability agent, concerning particle inclinations specifically, reducing the vertical heating. Regarding the radial heating, albeit a reduction is also observed, significant heating remains and grows steadily in time. The gravitational influence of the giant planet prevents the particles from dispersing, keeping a higher density on the disk; this may have important consequences on the rate of collisions and on dust production.

Another consequence of the heating produced by DPs is a slow but constant secular radial migration of particles in the belt; several of those particles are eventually trapped in the giant planet's MMRs where, through chaotic diffusion, they could become part of other dynamical families (e.g., Centaurs; Tiscareno & Malhotra 2009).

The continuous replenishing of resonant regions with new cometary nuclei leads several particles through a dynamical

evolution process that produces close encounters with the giant planet. Those bodies contribute to the influx rate of new short-period comets that may become important from the point of view of habitability, however observations of this mechanism are not yet available for planetary systems other than our KB. In the case of the solar system this mechanism may contribute to the short-period comet influx rate, in better accordance with observations (Emel'yanenko et al. 2005; Volk & Malhotra 2008, 2013); this is assuming the possibility of the existence of more than ten DPs in the trans-Neptunian region. Moreover, if the formation of several tens of DPs in the outer regions of our solar system took place prior to the migration of Neptune, a vertically pre-heated debris disk could have been already present when Neptune reached its current location; such process would produce a soft mixing between: the cold CKB population, the hot CKB population, and the resonant objects (those swept during Neptune's migration).

Authors are grateful to A. Morbidelli, R. Malhotra, and our anonymous referee for valuable comments. We acknowledge support from UNAM-PAPIIT grants IN-114114, IN-115413, and CONACyT grant 241732. M.A.M. thanks support from CONACyT scholarship for conducting PhD studies.

REFERENCES

- Altwegg, K., Balsiger, H., Bar-Nun, A., et al. 2015, *Sci*, **347**, 1261952
 Aumann, H. H., Beichman, C. A., Gillett, F. C., et al. 1984, *ApJL*, **278**, L23
 Batygin, K., Brown, M. E., & Fraser, W. C. 2011, *ApJ*, **738**, 13
 Bernstein, G. M., Trilling, D. E., Allen, R. L., et al. 2004, *AJ*, **128**, 1364
 Brown, M. E. 2001, *AJ*, **121**, 2804
 Brown, M. E., Trujillo, C. A., & Rabinowitz, D. L. 2005, *ApJL*, **635**, L97
 Chambers, J. E. 1999, *MNRAS*, **304**, 793
 Chiang, E., Lithwick, Y., Murray-Clay, R., et al. 2007, *Protostars and Planets V* (Tucson, AZ: Univ. Arizona Press)
 Dawson, R. I., & Murray-Clay, R. 2012, *ApJ*, **750**, 43
 Decin, G., Dominik, C., Waters, L. B. F. M., & Waelkens, C. 2003, *ApJ*, **598**, 636
 Emel'yanenko, V. V., Asher, D. J., & Bailey, M. E. 2005, *MNRAS*, **361**, 1345
 Fernández, J. A. 1980, *MNRAS*, **192**, 481
 Fraser, W. C., Brown, M. E., Morbidelli, A., Parker, A., & Batygin, K. 2014, *ApJ*, **782**, 100
 Gomes, R. S., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2004, *Icar*, **170**, 492
 Greaves, J. S., Holland, W. S., Wyatt, M. C., et al. 2005, *ApJL*, **619**, L187
 Kavelaars, J., Jones, L., Gladman, B., Parker, J. W., & Petit, J.-M. 2008, *The Solar System Beyond Neptune* (Tucson, AZ: Univ. Arizona Press)
 Kenyon, S. J., & Bromley, B. C. 2004, *AJ*, **127**, 513
 Kenyon, S. J., & Bromley, B. C. 2015, *ApJ*, **806**, 42
 Kenyon, S. J., Bromley, B. C., O'Brien, D. P., & Davis, D. R. 2008, *The Solar System Beyond Neptune* (Tucson, AZ: Univ. Arizona Press)
 Levison, H. F., & Morbidelli, A. 2003, *Natur*, **426**, 419
 Malhotra, R. 1993, *Natur*, **365**, 819
 Morbidelli, A., Levison, H. F., & Gomes, R. 2008, *The Solar System Beyond Neptune* (Tucson, AZ: Univ. Arizona Press)
 Moreno, E., Pichardo, B., & Schuster, W. J. 2015, *MNRAS*, **451**, 705
 Moro-Martín, A., & Malhotra, R. 2005, *ApJ*, **633**, 1150
 Müller, S., Löhne, T., & Krivov, A. V. 2010, *ApJ*, **708**, 1728
 Nesvorný, D. 2015, *AJ*, **150**, 73
 Petit, J.-M., Kavelaars, J. J., Gladman, B. J., et al. 2011, *AJ*, **142**, 131
 Tiscareno, M. S., & Malhotra, R. 2009, *AJ*, **138**, 827
 Volk, K., & Malhotra, R. 2008, *ApJ*, **687**, 714
 Volk, K., & Malhotra, R. 2011, *ApJ*, **736**, 11
 Volk, K., & Malhotra, R. 2013, *Icar*, **224**, 66
 Wolff, S., Dawson, R. I., & Murray-Clay, R. A. 2012, *ApJ*, **746**, 171
 Wyatt, M. C. 2008, *ARA&A*, **46**, 339
 Zuckerman, B., & Song, I. 2004, *ApJ*, **603**, 738

CONCLUSIONES

Haciendo uso del integrador numérico de N-cuerpos, público y de código abierto MERCURY, hemos sido capaces de estudiar detalladamente problemas dinámicos de frontera del sistema solar y de discos de escombros que por su generalidad, son aplicables al caso particular del cinturón de Kuiper del sistema solar.

A pesar de ser quizá el cometa más conocido y mejor caracterizado, un exponente de Lyapunov para la órbita del cometa Halley no se había medido anteriormente mediante un cálculo numérico directo de su evolución, en el potencial generado por los planetas del sistema solar y algunos de los cuerpos más grandes de entre los cuerpos menores, incluyendo los planetas enanos. Nosotros proporcionamos éste número y estimamos que la determinación de sus parámetros orbitales más allá de un solo periodo orbital, con mayor precisión que el error observacional actualmente conocido, no es posible debido a su naturaleza caótica, que implica la separación de dos órbitas inicialmente más cercanas que la incertidumbre observacional en cualquiera de los parámetros orbitales, en un tiempo comparable al periodo de la órbita.

Hemos mostrado que el destino del cometa Halley puede ir desde su colisión con el Sol en un tiempo tan corto como 10,000 años, hasta sobrevivir por más de un millón de años en el sistema solar; sin embargo, su tiempo de vida más probable es de $\sim 3 \times 10^5$ años, y si sobrevive al menos 10^5 años se convertirá en un cometa de periodo largo con una órbita de mayor excentricidad y menor inclinación, siendo $i \sim 120^\circ$ su inclinación futura más probable.

Usamos exitosamente las herramientas de detección de caos en un problema dinámico de muchos cuerpos, y pudimos caracterizar con mayor precisión la naturaleza caótica del cometa Halley, ya de antemano conocido como caótico. Estas herramientas (exponentes de Lyapunov y análisis de frecuencias) así implementadas son aplicables a otros sistemas dinámicos, en

particular al KB.

El KB es un sistema dinámico altamente evolucionado y como tal constituye un caso muy particular de disco de escombros, que guarda memoria de su interacción durante ~ 4 Gyr con, principalmente, los planetas gigantes. Debido a esto, orientamos nuestro estudio a discos de escombros genéricos y dinámicamente fríos, que asemejan a la población fría del CKB, cuyos resultados generales son aplicables a una gran variedad de discos de escombros extrasolares fríos y a la parte clásica del KB.

Encontramos que sólo una decena de DPs tipo Plutón, en ausencia de un planeta gigante, son suficientes para inducir un calentamiento dinámico importante, esto es, incrementar las excentricidades e inclinaciones de un cinturón de escombros frío. Además, entre mayor es la cantidad de DPs, el calentamiento radial (dispersión de excentricidades) es siempre creciente, mientras que el calentamiento vertical (dispersión de inclinaciones) tiene un límite que depende de la máxima inclinación inicial en la distribución de DPs.

Cuando un planeta gigante similar a Neptuno está presente, interior al cinturón de escombros, como se espera en muchos sistemas, el calentamiento vertical que podrían inducir incluso 100 DPs se ve drásticamente reducido. Con solo 10 DPs el efecto de éstos últimos es borrado por completo. El disco de escombros por tanto se mantiene confinado con una mayor densidad, que puede incrementar el número de colisiones entre las partículas, con importantes consecuencias para la generación de polvo en el disco.

Un planeta gigante actúa como un estabilizador de las órbitas de los objetos del disco de escombros. Aún así, la presencia de más de 10 DPs en el disco produce migración radial de partículas, de forma que los núcleos cometarios pueden encontrar a las MMRs del gigante y ser atrapadas, evolucionando rápidamente una vez en la resonancia hacia otras poblaciones. Este mecanismo además de realimentar con material nuevo a las resonancias, funciona como un posible camino de escape de las partículas hacia el interior (o exterior) del sistema planetario en cuestión. De ser muy eficiente, el bombardeo hacia los planetas interiores sería intenso, poniendo en peligro la posible habita-

bilidad de estos planetas.

En el caso particular del sistema solar, el mecanismo observado puede constituir un camino para aumentar la tasa de inyección de cometas del KB hacia el sistema solar interno y aliviar la discrepancia existente entre la tasa de ingreso de cometas requerida para mantener a la población de los JFCs en estado estacionario, con aquella predicha por modelos de evolución que toman en cuenta únicamente la influencia de los planetas gigantes sobre el KB. Sin embargo, es importante mencionar que este mecanismo podría funcionar en el sistema solar únicamente si existen, y aún no se han observado o no han sido bien caracterizados, más de los 10, y estimamos que al menos 50 objetos de tamaños comparables a DPs en la región transneptuniana.

Hemos presentado en esta recopilación dos artículos. En el segundo de ellos, publicado en la revista *ApJL*, presentamos tres resultados novedosos que requieren un amplio estudio para determinar con precisión:

1. ¿Cuál es el mecanismo por el que un planeta gigante estabiliza a las partículas del disco de escombros ante la influencia de DPs?
2. ¿Qué tan eficiente es el mecanismo de realimentación de las MMRs del gigante debido a la migración inducida por los DPs en el disco?
3. ¿Es este mecanismo suficiente para resolver la discrepancia existente en el sistema solar entre la tasa de inyección de nuevos cometas, requerida para mantener a la población de JFCs en estado estacionario, y la tasa predicha por modelos dinámicos que consideran solamente la influencia de los planetas gigantes?

El estudio requerido para responder estas preguntas, consideramos, constituye material suficiente para un artículo cada uno, y ya se ha iniciado a trabajar en ellos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. Anglada-Escudé, M. Tuomi, E. Gerlach, R. Barnes, R. Heller, J. S. Jenkins, S. Wende, S. S. Vogt, R. P. Butler, A. Reiners, and H. R. A. Jones. A dynamically-packed planetary system around GJ 667C with three super-Earths in its habitable zone. *Astronomy and Astrophysics*, 556:A126, August 2013.
- [2] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems - A method for computing all of them. I - Theory. II - Numerical application. *Meccanica*, 15:9–30, March 1980.
- [3] G. M. Bernstein, D. E. Trilling, R. L. Allen, M. E. Brown, M. Holman, and R. Malhotra. The Size Distribution of Trans-Neptunian Bodies. *Astronomical Journal*, 128:1364–1390, September 2004.
- [4] F. B. Bianco, P. Protopapas, B. A. McLeod, C. R. Alcock, M. J. Holman, and M. J. Lehner. A Search for Occultations of Bright Stars by Small Kuiper Belt Objects Using Megacam on the MMT. *Astronomical Journal*, 138:568–578, August 2009.
- [5] M. E. Brown. The Inclination Distribution of the Kuiper Belt. *Astronomical Journal*, 121:2804–2814, May 2001.
- [6] M. E. Brown, C. A. Trujillo, and D. L. Rabinowitz. Discovery of a Planetary-sized Object in the Scattered Kuiper Belt. *ApJL*, 635:L97–L100, December 2005.
- [7] J. E. Chambers. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304:793–799, April 1999.
- [8] S. Chatterjee, E. B. Ford, S. Matsumura, and F. A. Rasio. Dynamical Outcomes of Planet-Planet Scattering. *ApJ*, 686: 580–602, October 2008.
- [9] A. C. M. Correia, S. Udry, M. Mayor, J. Laskar, D. Naef, F. Pepe, D. Queloz, and N. C. Santos. The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XIII. A pair of planets

- around HD202206 or a circumbinary planet? *Astronomy and Astrophysics*, 440:751–758, September 2005.
- [10] R. I. Dawson and R. Murray-Clay. Neptune’s Wild Days: Constraints from the Eccentricity Distribution of the Classical Kuiper Belt. *ApJ*, 750:43, May 2012.
- [11] A. H. Delsemme. Origin of the Short-period Comets. *Astronomy and Astrophysics*, 29:377, December 1973.
- [12] M. J. Duncan and H. F. Levison. A scattered comet disk and the origin of Jupiter family comets. *Science*, 276:1670–1672, 1997.
- [13] M. J. Duncan, H. F. Levison, and M. H. Lee. A Multiple Time Step Symplectic Algorithm for Integrating Close Encounters. *Astronomical Journal*, 116:2067–2077, October 1998.
- [14] E. Everhart. The Origin of Short-Period Comets. *Astrophysics Letters*, 10:131, January 1972.
- [15] E. Everhart. The evolution of comet orbits as perturbed by Uranus and Neptune. In A. H. Delsemme, editor, *IAU Colloq. 39: Comets, Asteroids, Meteorites: Interrelations, Evolution and Origins*, pages 99–104, 1977.
- [16] A. Farrés, J. Laskar, S. Blanes, F. Casas, J. Makazaga, and A. Murua. High precision symplectic integrators for the Solar System. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 116:141–174, June 2013.
- [17] J. A. Fernández. On the existence of a comet belt beyond Neptune. *MNRAS*, 192:481–491, August 1980.
- [18] E. B. Ford and F. A. Rasio. Origins of Eccentric Extrasolar Planets: Testing the Planet-Planet Scattering Model. *ApJ*, 686:621–636, October 2008.
- [19] W. C. Fraser and J. J. Kavelaars. The Size Distribution of Kuiper Belt Objects for $D \gtrsim 10$ km. *Astronomical Journal*, 137:72–82, January 2009.
- [20] W. C. Fraser, M. E. Brown, A. Morbidelli, A. Parker, and K. Batygin. The Absolute Magnitude Distribution of Kuiper Belt Objects. *ApJ*, 782:100, February 2014.

- [21] B. Gladman, S. M. Lawler, J.-M. Petit, J. Kavelaars, R. L. Jones, J. W. Parker, C. Van Laerhoven, P. Nicholson, P. Roussetot, A. Bieryla, and M. L. N. Ashby. The Resonant Trans-Neptunian Populations. *Astronomical Journal*, 144:23, July 2012.
- [22] R. S. Gomes. The origin of the Kuiper Belt high-inclination population. *Icarus*, 161:404–418, February 2003.
- [23] A. A. S. Gulbis, J. L. Elliot, E. R. Adams, S. D. Benecchi, M. W. Buie, D. E. Trilling, and L. H. Wasserman. Unbiased Inclination Distributions for Objects in the Kuiper Belt. *Astronomical Journal*, 140:350–369, August 2010.
- [24] S. E. Hamid, B. G. Marsden, and F. L. Whipple. Influence of a Comet Belt beyond Neptune on the Motions of Periodic Comets. *Astronomical Journal*, 73:727–729, October 1968.
- [25] O. Havnes. The Effect of Repeated Close Approaches to Jupiter on Short-Period Comets. *Icarus*, 12:331, May 1970.
- [26] J. Horner and P. S. Lykawka. The Neptune Trojans - a new source for the Centaurs? *MNRAS*, 402:13–20, February 2010.
- [27] W.-H. Ip and J. A. Fernández. On dynamical scattering of Kuiper Belt Objects in 2:3 resonance with Neptune into short-period comets. *Astronomy and Astrophysics*, 324:778–784, August 1997.
- [28] D. Jewitt and J. Luu. Discovery of the candidate Kuiper belt object 1992 QB₁. *Nature*, 362:730–732, April 1993.
- [29] P. C. Joss. On the Origin of Short-period Comets. *Astronomy and Astrophysics*, 25:271, June 1973.
- [30] M. Jurić and S. Tremaine. Dynamical Origin of Extrasolar Planet Eccentricity Distribution. *ApJ*, 686:603–620, October 2008.
- [31] J. Kavelaars, L. Jones, B. Gladman, J. W. Parker, and J.-M. Petit. *The Orbital and Spatial Distribution of the Kuiper Belt*, pages 59–69. The University of Arizona Press, 2008.
- [32] W. Landgraf. The uncertainty of position predictions for comet Halley in March 1986. *Astronomy and Astrophysics*, 157:245–251, March 1986.

- [33] J. Laskar. A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system. *Nature*, 338:237, March 1989.
- [34] J. Laskar. The chaotic motion of the solar system - A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, 88: 266–291, December 1990.
- [35] J. Laskar. Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 67:257–281, August 1993.
- [36] J. Laskar, C. Froeschlé, and A. Celletti. The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 56:253–269, May 1992.
- [37] H. F. Levison. Comet Taxonomy. In T. Rettig and J. M. Hahn, editors, *Completing the Inventory of the Solar System*, volume 107 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 173–191, 1996.
- [38] H. F. Levison and M. J. Duncan. The gravitational sculpting of the Kuiper belt. *ApJL*, 406:L35–L38, March 1993.
- [39] H. F. Levison and M. J. Duncan. The long-term dynamical behavior of short-period comets. *Icarus*, 108:18–36, March 1994.
- [40] H. F. Levison and M. J. Duncan. From the Kuiper Belt to Jupiter-Family Comets: The Spatial Distribution of Ecliptic Comets. *Icarus*, 127:13–32, May 1997.
- [41] J. X. Luu and D. C. Jewitt. Kuiper Belt Objects: Relics from the Accretion Disk of the Sun. *Ann. Rev. Ast. & Ast.*, 40: 63–101, 2002.
- [42] A. Morbidelli. Chaotic Diffusion and the Origin of Comets from the 2/3 Resonance in the Kuiper Belt. *Icarus*, 127:1–12, May 1997.
- [43] A. Morbidelli. *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*. Taylor and Francis, 2002.
- [44] M. A. Muñoz-Gutiérrez, M. Reyes-Ruiz, and B. Pichardo. Chaotic dynamics of Comet 1P/Halley: Lyapunov exponent and survival time expectancy. *MNRAS*, 447:3775–3784, March 2015.

- [45] D. Nesvorný and S. Ferraz-Mello. On the Asteroidal Population of the First-Order Jovian Resonances. *Icarus*, 130:247–258, December 1997.
- [46] J. H. Oort. The structure of the cloud of comets surrounding the Solar System and a hypothesis concerning its origin. *Bulletin Astronomical Institute of the Netherlands*, 11:91–110, January 1950.
- [47] J.-M. Petit, J. J. Kavelaars, B. J. Gladman, R. L. Jones, J. W. Parker, C. Van Laerhoven, P. Nicholson, G. Mars, P. Rousset, O. Mousis, B. Marsden, A. Bieryla, M. Taylor, M. L. N. Ashby, P. Benavidez, A. Campo Bagatin, and G. Bernabeu. The Canada-France Ecliptic Plane Survey Full Data Release: The Orbital Structure of the Kuiper Belt. *Astronomical Journal*, 142:131, October 2011.
- [48] E. J. Rivera, J. J. Lissauer, R. P. Butler, G. W. Marcy, S. S. Vogt, D. A. Fischer, T. M. Brown, G. Laughlin, and G. W. Henry. A $\sim 7.5 M_{\oplus}$ Planet Orbiting the Nearby Star, GJ 876. *ApJ*, 634:625–640, November 2005.
- [49] P. Robutel and J. Laskar. Frequency Map and Global Dynamics in the Solar System I. Short Period Dynamics of Massless Particles. *Icarus*, 152:4–28, July 2001.
- [50] J. D. Scargle and D. C. Black. Efficiency Analysis of Astrometric Planetary Detection. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 12 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 814, September 1980.
- [51] H. E. Schlichting, E. O. Ofek, M. Wenz, R. Sari, A. Gal-Yam, M. Livio, E. Nelan, and S. Zucker. A single sub-kilometre Kuiper belt object from a stellar occultation in archival data. *Nature*, 462:895–897, December 2009.
- [52] H. E. Schlichting, E. O. Ofek, R. Sari, E. P. Nelan, A. Gal-Yam, M. Wenz, P. Muirhead, N. Javanfar, and M. Livio. Measuring the Abundance of Sub-kilometer-sized Kuiper Belt Objects Using Stellar Occultations. *ApJ*, 761:150, December 2012.
- [53] C. Snodgrass, A. Fitzsimmons, S. C. Lowry, and P. Weissman. The size distribution of Jupiter Family comet nuclei. *MNRAS*, 414:458–469, June 2011.

- [54] G. J. Sussman and J. Wisdom. Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic. *Science*, 241:433–437, July 1988.
- [55] M. S. Tiscareno and R. Malhotra. Chaotic Diffusion of Resonant Kuiper Belt Objects. *Astronomical Journal*, 138:827–837, September 2009.
- [56] M. V. Torbett. Chaotic motion in a comet disk beyond Neptune - The delivery of short-period comets. *Astronomical Journal*, 98:1477–1481, October 1989.
- [57] K. Tsiganis, R. Gomes, A. Morbidelli, and H. F. Levison. Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435:459–461, May 2005.
- [58] M. Valluri and D. Merritt. Regular and Chaotic Dynamics of Triaxial Stellar Systems. *ApJ*, 506:686–711, October 1998.
- [59] K. Volk and R. Malhotra. The Scattered Disk as the Source of the Jupiter Family Comets. *ApJ*, 687:714–725, November 2008.
- [60] K. M. Volk. *Dynamical studies of the Kuiper belt and the Centaurs*. PhD thesis, The University of Arizona, 2013.
- [61] J. Wisdom. The origin of the Kirkwood gaps - A mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability. *Astronomical Journal*, 87:577–593, March 1982.
- [62] J. Wisdom and M. Holman. Symplectic maps for the n-body problem. *Astronomical Journal*, 102:1528–1538, October 1991.
- [63] H. Yoshida. Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56:27–43, March 1993.