Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

La categoría de los módulos buenos, de un álgebra estándarmente estratificada, es resolvente.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

EMILIO GARCÍA CORTÉS

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. EDITH CORINA SÁENZ VALADEZ

Cd. Universitaria, D. F. 2016

Índice general

Introducción

Las álgebras casi-hereditarias fueron introducidas por L. Scott en [8], donde la idea era darle un contexto algebraico a las categorías de peso máximo, las cuales fueron introducidas por E. Cline, B. Parshall y L. Scott en [5].
Debido a la utilidad que las álgebras casi-hereditarias mostraron al modelar las categorías de peso máximo, surgieron varias generalizaciones de dichas álgebras. Una de las más importantes generalizaciones fue el concepto de álgebra estándarmente estratificada (a la izquierda), el cual fue introducido por I. Ágoston, V. Dlab y E. Lukács en [2]. Una de las propiedades más importantes de las álgebras estándarmente estratificadas (a la izquierda) es su conexión con la teoría de inclinación. Dicha conexión fue dada por C.M. Ringel en [7].

En el contexto de las álgebras estándarmente estratificadas (a la izquierda), así como de las álgebras casi-hereditarias aparece de manera central el conjunto de los módulos estándar $\Delta = \{\Delta(1), \ldots, \Delta(n)\}$, donde n es el número de Λ-módulos simples del álgebra Λ (hasta isomorfismo). Aunado al conjunto de los Λ-módulos estándar tenemos a la subcategoría completa de Λ-mod, $\mathcal{F}(\Delta)$, que consiste de todos los Λ-módulos que tienen una Δ-filtración en $\Delta = \{\Delta(1), \ldots, \Delta(n)\}$.

El objetivo de esta tesis es probar que la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ de un álgebra estándarmente estratificada a la izquierda es una categoría resolvente. Dicho resultado está enunciado en [6] y también en [12]. En este trabajo desarrollamos la demostración dada en [12]. Cabe señalar que todas nuestras álgebras serán álgebras básicas de dimensión finita sobre un campo algebraico K y trabajaremos siempre con subcategorías plenas de la categoría Λ-mod de los Λ-módulos finitamente generados.

El trabajo consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo primeramente introducimos el concepto y principales propiedades de las K-álgebras básicas de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. Después introducimos el concepto de las álgebras de carcaj. En este capítulo omitimos la mayoría de las demostraciones, ya que dichos resultados se estudian en los cursos introductorios a la Teoría de Representaciones que se ofrecen en la Facultad de Ciencias.

En el segundo capítulo estudiamos al conjunto de los módulos estándar $\Delta = \{\Delta(1), \ldots, \Delta(n)\}$ y enunciamos sus propiedades fundamentales.

El tercer capítulo contiene el resultado principal de esta tesis. En éste estudiamos las propiedades fundamentales de la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ y probamos que dicha categoría es resolvente cuando el álgebra es estándarmente estratificada a la izquierda (ver [12]).

Por último, en el capítulo cuatro proporcionamos varios ejemplos que ilustran el resultado principal de la tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo abordaremos los elementos esenciales para la realización de este trabajo. En casi todo el capítulo hemos omitido la mayoría de las demostraciones, pues son resultados que se estudian en los cursos de introducción a la Teoría de Representaciones que se ofrecen en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Comenzamos enunciando el concepto y propiedades básicas de las K-álgebras de dimensión finita, para luego pasar a estudiar álgebras de carcaj. Más adelante enunciamos el Teorema de Gabriel, el cual nos mostrará la importancia de estudiar álgebras de carcaj cociente con un ideal admisible. Terminamos el capítulo demostrando el Teorema de Jordan-Hölder, el cual nos será de gran utilidad en capítulos posteriores.
A lo largo de toda esta tesis, por un Λ-módulo, o sencillamente un módulo, nos referimos a un Λ-módulo izquierdo finitamente generado. Denotaremos por Λ-mod a la categoría de los Λ-módulos izquierdos que son finitamente generados.

1.1. K-Álgebras

Comenzamos esta sección introduciendo el concepto de K-álgebra y pasamos a enunciar las principales propiedades de las K-álgebras de dimensión finita básicas sobre un campo algebraicamente cerrado para luego enunciar dos resultados importantes, a saber: El Teorema de Krull-Schmidt y la Proposición 1.1.14. Posteriormente caracterizamos a las K-álgebras conexas y finalizamos demostrando que toda K-álgebra de dimensión finita se descompone como una suma directa de K-álgebras conexas.

Definición 1.1.1. *Sea K un campo. Una K-álgebra es un anillo Λ (asociativo con uno) que posee estructura de K-espacio vectorial y que además, el producto por escalares es compatible con el producto del anillo, es decir, para cada $k \in K$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ se tiene que*

$$k(\lambda_1\lambda_2) = (k\lambda_1)\lambda_2 = \lambda_1(k\lambda_2).$$

Además, Λ es una K-álgebra de dimensión finita si como K-espacio vectorial tiene dimensión finita, en caso contrario se dice que es una K-álgebra de dimensión infinita.

La siguiente es una importante observación. El tercer punto es de gran importancia, ya que en toda esta tesis estaremos trabajando sobre la categoría Λ-mod, donde Λ es una K-álgebra de dimensión finita.

Observación 1.1.2. *Sea Λ una K-álgebra.*

- *K es visto como subanillo de Λ mediante el siguiente monomorfismo de anillos*

$$\begin{aligned} \mu : K &\longrightarrow \Lambda \\ k &\longmapsto k1_\Lambda \end{aligned}$$

- *K actúa centralmente en Λ. Es decir, para cada $\lambda \in \Lambda$ y $k \in K$*

$$(k1_\Lambda)\lambda = k(1_\Lambda\lambda) = k(\lambda 1_\Lambda) = \lambda(k1_\Lambda)$$

- *Si Λ es una K-álgebra de dimensión finita y M es un Λ-módulo finitamente generado, entonces M es un K-espacio vectorial de dimensión finita.*

Ejemplo 1.1.3. *Los anillos siguientes son ejemplos de K-álgebras.*

1. *Todo campo K es una K-álgebra de dimensión uno.*

2. *El anillo de polinomios $K[x]$, con coeficientes en K es una K-álgebra de dimensión infinita.*

3. *Sea Λ una K-álgebra. El anillo de matrices de $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$) con entradas en Λ, el cual se denota $\mathbb{M}_{n\times n}(\Lambda)$, es una K-álgebra. En particular si $\Lambda = K$, $\mathbb{M}_{n\times n}(\Lambda)$ resulta ser una K-álgebra de dimensión n^2.*

4. *Si $\Lambda = K[x]$, el anillo $\mathbb{M}_{n\times n}(\Lambda)$ es una K-álgebra de dimensión infinita.*

Definición 1.1.4. *Un campo K es algebraicamente cerrado si todo polinomio no constante de $K[x]$ tiene todas sus raíces en K.*

Ejemplo 1.1.5. *El campo de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, es algebraicamente cerrado.*

En todo este trabajo por un campo K nos referimos a un campo algebraicamente cerrado. Además toda K-álgebra que consideremos será de dimensión finita, por simplicidad nos referiremos a ella como K-álgebra.

Definición 1.1.6. *Sea Λ una K-álgebra y A, I subespacios vectoriales de Λ.*

1. *A es K-subálgebra de Λ si $1_\Lambda \in A$ y para cada $a, b \in A$, $ab \in A$.*

2. *I es un ideal izquierdo de Λ si para cada $\lambda \in \Lambda$ y $a \in I$, $\lambda a \in I$. De manera análoga se define un ideal derecho.*

3. *Un ideal bilateral es un ideal que es ideal derecho e izquierdo a la vez.*

Ejemplo 1.1.7. *Sea Λ una K-álgebra.*

- *Consideremos la K-álgebra $\mathbb{M}_{n\times n}(\Lambda)$. El conjunto de las matrices triangulares de inferiores de $n\times n$ con coeficientes en Λ, denotado por $\mathbb{T}_{n\times n}(\Lambda)$, es una K-subálgebra de $\mathbb{M}_{n\times n}(\Lambda)$.*
- *Sea $K[x]$ el álgebra de polinomios con coeficientes en K. El K-subespacio vectorial $I = \langle\{x, x^2, x^3, \dots\}\rangle_K$ es un ideal bilateral de $K[x]$.*

Notación 1.1.8. *Sea I un ideal izquierdo (derecho ó bilateral) de Λ y $n \in \mathbb{N}$. Por I^n nos referimos al ideal*

$$I^n := \{\sum_{finita} x_1x_2\dots x_n : x_i \in I\}$$

Definición 1.1.9. *Sean Λ_1 y Λ_2 K-álgebras. Un morfismo de K-álgebras $\phi : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ es un morfismo de anillos con uno y de K-espacios vectoriales. Es decir que para cada $k \in K$ y $a, b \in \Lambda$, ϕ cumple lo siguiente:*

1. $\phi(ka + b) = k\phi(a) + \phi(b)$;
2. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$;
3. $\phi(1_{\Lambda_1}) = 1_{\Lambda_2}$.

Ejemplo 1.1.10. *Sea Λ una K-álgebra. Si $\Lambda_1 = \mathbb{T}_{n\times n}(\Lambda)$ y $\Lambda_2 = \mathbb{M}_{n\times n}(\Lambda)$ entonces la inclusión natural i, de Λ_1 en Λ_2, es un morfismo de K-álgebras.*

Antes de enunciar el Teorema de Krull-Schmidt recordemos el concepto de Λ-módulo inescindible.

Definición 1.1.11. *Sea M un Λ-módulo distinto de cero. Decimos que M es inescindible si no tiene sumandos directos no triviales. Es decir, si $M = L \oplus K$ entonces $L = M$ ó $K = M$.*

Ejemplo 1.1.12. *Los siguientes son ejemplos de módulos inescindibles*

- *Todo Λ-módulo simple es inescindible.*
- *El campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-módulo inescindible.*
- *El $\mathbb{C}$-módulo*
$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix}$$
no es inescindible.

Teorema 1.1.13. ***(Krull-Schmidt)*** *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita y M un Λ-módulo finitamente generado. Entonces*

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_t$$

donde N_i *es un* Λ*-submódulo inescindible de* M *para cada* $i = 1, \ldots, t$.
Si $M = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_r$ *es otra descomposición de* M*, con* L_j *un* Λ*-módulo inescindible para cada* $j = 1, \ldots, r$*. Entonces*

1. *t=r.*
2. *Existe una permutación* $\sigma : \{1, \ldots, t\} \longrightarrow \{1, \ldots, t\}$ *tal que* $N_i \cong L_{\sigma(i)}$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots, t$.

Demostración. Ver [3]. □

Sea Λ una K-álgebra. Por el Teorema de Krull-Schmidt

$$ {}_{\Lambda}\Lambda = P(1) \oplus P(2) \oplus \ldots \oplus P(n) \qquad (*)$$

con $P(i)$ un Λ-módulo inescindible y proyectivo para cada $i = 1, \ldots, n$. Dicha descomposición $^{(*)}$ es única salvo isomorfismos y se le conoce como la descomposición de Λ en Λ-módulos proyectivos e inescindibles. Además, si $1_\Lambda = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, con $e_i \in P(i)$, entonces $\Lambda e_i = P(i)$ y el conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.
Por otra parte, si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ, entonces ${}_{\Lambda}\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n$ es una descomposición en Λ-módulos proyectivos inescindibles de Λ.

Sea M un Λ-módulo izquierdo. El top de M es el Λ-módulo izquierdo $topM := M/radM$. Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo en Λ-mod, entonces se define el morfismo $topf : topM \longrightarrow topN$ dado por $topf(x + radM) = f(x) + radN$.

Proposición 1.1.14. *Sea* Λ *una* K*-álgebra con descomposición en* Λ*-módulos proyectivos e inescindibles* ${}_{\Lambda}\Lambda = P(1) \oplus \ldots \oplus P(n)$*. Entonces:*

1. $\{P(1), \ldots, P(n)\}$ *es una lista completa de representantes de los* Λ*-módulos proyectivos e inescindibles, no necesariamente no isomorfos.*
2. *Para cada* $i = 1, \ldots, n$*, consideremos* $S(i) = topP(i)$*, entonces* $\{S(1), \ldots, S(n)\}$ *es una lista completa de representantes de los* Λ*-módulos simples, no necesariamente no isomorfos.*
3. *Para cada* $i = 1, \ldots, n$*, se tiene que* $P(i)$ *es la cubierta proyectiva del* Λ*-módulo simple* $S(i)$.

Demostración. Ver [4]. □

Las siguientes observaciones serán de gran utilidad más adelante.

Observación 1.1.15. *a) Como* $P(i)/radP(i)$ *es simple se tiene que* $radP(i)$ *es el único submódulo maximal de* $P(i)$*, para cada* $i = 1, \ldots, n$.

b) Un morfismo $f : M \longrightarrow N$ *en* Λ*-mod es epimorfismo si y sólo si,* $topf$ *es un epimorfismo (Ver [9, Corollary I.3.9]).*

La proposición anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.16. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita y ${}_\Lambda\Lambda = P(1) \oplus \ldots \oplus P(n)$ su descomposición en proyectivos e inescindibles. Decimos que Λ es básica si para cada $i \neq j$ se tiene que $P(i) \ncong P(j)$.*

Ejemplo 1.1.17. *Consideremos $K = \mathbb{C}$*

- $\mathbb{C}$ *es una K-álgebra básica.*
- $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *no es una K-álgebra básica.*

Observemos que si Λ es una K-álgebra de dimensión finita y $e \in \Lambda$ un idempotente central, entonces:

1. $(1-e)$ es un idempotente central de Λ.
2. Λe y $\Lambda(1-e)$ son ideales bilaterales de Λ que tienen estructura de K-álgebra.
3. $\Lambda = \Lambda e \oplus \Lambda(1-e)$.

Entonces tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.18. *Una K-álgebra Λ es conexa ó inescindible (como K-álgebra) si no es suma directa de dos K-álgebras no triviales.*

El siguiente resultado caracteriza a las K-álgebras conexas.

Proposición 1.1.19. *Sea Λ una K-álgebra y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Λ es conexa.*

b) *Los únicos idempotentes centrales de Λ son 0 y 1.*

c) *No existe una partición no trivial (I, J) de $\{1, \ldots, n\}$, tal que si $i \in I$ y $j \in J$, entonces $e_i \Lambda e_j = 0 = e_j \Lambda e_i$.*

Demostración. ($a \implies b$) Sea $e \in \Lambda$ un idempotente central. Entonces $\Lambda = \Lambda e \oplus \Lambda(1-e)$, donde Λe y $\Lambda(1-e)$ son K-álgebras. Por hipótesis se tiene $\Lambda e = 0$ ó $\Lambda(1-e) = 0$. Esto es $e = 0$ ó $e = 1$.

($b \implies a$) Supongamos que $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, con Λ_1 y Λ_2 K-álgebras. Observemos que $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \cong \Lambda_1 \times \Lambda_2$. Entonces tenemos que $(1_{\Lambda_1}, 0)$ y $(0, 1_{\Lambda_2})$ son dos idempotentes centrales distintos pertenecientes a $\Lambda_1 \times \Lambda_2$, pero por hipótesis $(1_{\Lambda_1}, 0) = 1_{\Lambda_1\times\Lambda_2}$ y $(0, 1_{\Lambda_2}) = (0,0)$ ó $(1_{\Lambda_1}, 0) = (0,0)$ y $(0, 1_{\Lambda_2}) = 1_{\Lambda_1\times\Lambda_2}$. En el primer caso se tiene que $\Lambda_1 = \Lambda$ y $\Lambda_2 = 0$, y en el segundo $\Lambda_1 = 0$ y $\Lambda_2 = \Lambda$. Por lo tanto Λ es conexa.

($b \implies c$) Para llegar a una contradicción, supongamos que existe una partición no trivial (I, J) de $\{1, \ldots n\}$ tal que $e_i \Lambda e_j = e_j \Lambda e_i = 0$ para cada $i \in I$ y $j \in J$. Consideremos $c := \sum_{i \in I} e_i$, el cual es un idempotente no trivial. Observemos que para cada $i \in I$ y $j \in J$, $e_i c = e_i = c e_i$, $e_j c = 0 = c e_j$, y por hipótesis $e_i \lambda e_j = e_j \lambda e_i = 0$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Sea $a \in \Lambda$, tenemos que

$$ca = \sum_{i \in I} (e_i a) = (\sum_{i \in I} (e_i a))(\sum_{j \in J} e_j + \sum_{k \in I} e_k) = \sum_{i,k \in I} (e_i a e_k)$$
$$ac = \sum_{i \in I} (a e_i) = (\sum_{j \in J} e_j + \sum_{k \in I} e_k)(\sum_{i \in I} (a e_i)) = \sum_{i,k \in I} (e_k a e_i)$$

por tanto $ca = ac$, es decir, c es un idempotente central no trivial de Λ. Lo cual es una contradicción.

($c \implies b$) Por contrapositiva, supongamos que c es un idempotente central no trivial de Λ. Entonces

$$c = (\sum_{i=1}^{n} e_i) c (\sum_{i=1}^{n} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (e_i c e_i)$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, consideremos $c_i := e_i c e_i$. Como c es un idempotente central y cada e_i es idempotente, se sigue que cada c_i es un idempotente de $e_i \Lambda e_i$. Y como e_i es primitivo, $e_i \Lambda e_i$ tiene como únicos idempotentes a 0 y e_i, entonces $c_i = 0$ ó $c_i = e_i$. Sean $I = \{i : c_i = 0\}$ y $J = \{j : c_j = e_j\}$. Como c es distinto de 0 y 1, (I, J) es una partición no trivial de $\{1, \ldots, n\}$. Observemos que para cada $i \in I$ y $j \in J$ se tiene que $e_i c = 0 = c e_i$ y $e_j c = e_j = c e_j$. Entonces $e_i \Lambda e_j = e_i \Lambda (c e_j) = (e_i c) \Lambda e_j = 0$ y $e_j \Lambda e_i = (e_j c) \Lambda e_i = e_j \Lambda (c e_i) = 0$, para cada $i \in I$ y $j \in J$. $\square$

Ejemplo 1.1.20. *Consideremos $K = \mathbb{C}$.*

- $\Lambda = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *no es conexa.*
- $\Lambda = \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ *es conexa, ya que sus únicos idempotentes centrales son 0_Λ y 1_Λ.*

Proposición 1.1.21. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Entonces existe una descomposición de Λ:*

$$\Lambda = \Lambda_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_n$$

con Λ_t una K-álgebra conexa para cada $t = 1, \ldots, n$.

Demostración. Si Λ es conexa. Hemos terminado.
Supongamos que Λ no es conexa, entonces $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, con Λ_1 y Λ_2 K-álgebras. Si Λ_1 no es conexa entonces $\Lambda_1 = \Lambda_1^1 \oplus \Lambda_1^2$ y recursivamente hacemos lo mismo con cada Λ_1^i. Como

$$\ldots < dim_K \Lambda_1^i < dim_K \Lambda_1 < dim_K \Lambda < \infty$$

el procedimiento termina.
Aplicando el mismo procedimiento a Λ_2 se tiene el resultado. $\square$

1.2. Álgebras de Carcaj

En esta sección introducimos los conceptos de álgebra de carcaj e ideal admisible. Con esto pasamos a estudiar álgebras de carcaj módulo un ideal admisible, las cuales resultan ser K-álgebras básicas, conexas y de dimensión finita.

Definición 1.2.1. *Un carcaj C es una gráfica dirigida, conexa y finita junto con dos asignaciones, s y t, que a cada flecha le asignan su vértice inicial y su vértice final, respectivamente.*

Notación 1.2.2. *Denotamos por C_0 al conjunto de vértices de C y por C_1 a su conjunto de flechas. A una flecha $\alpha \in C_1$ tal que $s(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$, se le denota como $\alpha : i \longrightarrow j$ ó $i \xrightarrow{\alpha} j$.*

Ejemplo 1.2.3. *Los siguientes son ejemplos de carcajes.*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & 2 \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ 3 & 4 \arrow[l, "\lambda"] \arrow[r, "\tau"'] & 5 \end{tikzcd}$$

A continuación damos el concepto de camino dirigido y con esto definimos el producto entre dos caminos dirigidos. Teniendo estos conceptos podremos definir el Álgebra de Carcaj.

Definición 1.2.4. *(1) Sea C un carcaj. Un camino dirigido de longitud $l \geq 0$ que va del vértice i al vértice j, es una sucesión de flechas $(j|\alpha_l, \ldots, \alpha_1|i)$, tal que $s(\alpha_1) = i$, $t(\alpha_l) = j$ y $s(\alpha_{k+1}) = t(\alpha_k)$ para cada $k = 1, \ldots, l-1$. Si $l = 0$, entonces $i = j$, es decir, a cada vértice se le asocia su camino trivial, el cual se denota $\epsilon_i = (i\|i)$.*

(2) El producto de dos caminos dirigidos $(a|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|b)$ y $(c|\beta_m, \ldots, \beta_1|d)$ en C se define como:

$$(a|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|b)(c|\beta_m, \ldots, \beta_1|d) := \delta_{bc}(a|\alpha_n, \ldots, \alpha_1, \beta_m, \ldots, \beta_1|d)$$

donde δ_{bc} es la delta de Kronecker.

Definición 1.2.5. *Sea C un carcaj. Denotamos por KC al K-espacio vectorial que tiene como K-base el conjunto de los caminos dirigidos en C. El producto de caminos dirigidos en C se extiende bilinealmente a KC, de forma que KC adquiere estructura de K-álgebra con $1 := \sum_{i \in C_0} \epsilon_i$. A dicha K-álgebra se le conoce como el Álgebra de Carcaj asociada a C.*

Notación 1.2.6. *Sea C un carcaj. Un camino dirigido $(j|\alpha_l, \ldots, \alpha_1|i)$ en C también se denotará $\alpha_l \ldots \alpha_1$.*

Ejemplo 1.2.7. *Consideremos el carcaj siguiente:*

$$\begin{tikzcd} C:\ 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\theta"'] & 2 \arrow[r, "\gamma"] & 4 \\ & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \end{tikzcd}$$

KC tiene como K-base al conjunto $\beta = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \alpha, \gamma, \theta, \delta, \gamma\alpha, \delta\theta\}$. Por lo tanto, $dim_K(KC) = 11$.

Veamos algunas propiedades de KC.

Proposición 1.2.8. *Sea C un carcaj y KC su álgebra de carcaj. Entonces:*

1. *El conjunto de los caminos triviales $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.*

2. *KC es una K-álgebra conexa.*

3. *Si KC tiene K-dimensión finita, entonces es básica.*

Demostración. Ver [9]. □

En general el conjunto de los caminos triviales no es el único sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de un álgebra de carcaj. Consideremos el carcaj

$$C: \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Entonces $\{\epsilon_1 - \alpha, \epsilon_2 + \alpha\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de KC distinto de $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$.

Para saber cuándo un álgebra de carcaj es de dimensión finita necesitamos el siguiente concepto.

Definición 1.2.9. *Sean C un carcaj y $\alpha_l \dots \alpha_1$ un camino dirigido en C. Decimos que $\alpha_l \dots \alpha_1$ es un ciclo dirigido si $l > 0$ y $s(\alpha_1) = t(\alpha_l)$.*

Proposición 1.2.10. *Consideremos un carcaj C. Entonces KC es una K-álgebra de dimensión finita si y sólo si, C no tiene ciclos dirigidos.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que KC tiene K-dimensión finita. Si C tuviera un ciclo drigido γ, entonces los caminos dirigidos $\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \dots$ pertenecerían a la K-base de KC. Lo cual es una contradicción.

($\Longleftarrow$) Ahora supongamos que C no tiene ciclos dirigidos y que KC es de dimensión infinita. Entonces el carcaj C tendría una infinidad de caminos dirigidos (que no son ciclos) y por tanto una infinidad de vértices y flechas. Como los conjuntos C_0 y C_1 son finitos se tiene una contradicción. □

Con el siguiente concepto podremos describir el radical de un Álgebra de Carcaj de dimensión finita. Además, es necesario para poder introducir el concepto de ideal admisible.

Definición 1.2.11. *Sea C un carcaj. Denotamos por F al ideal bilateral de KC generado por todas las flechas en C.*

Ejemplo 1.2.12. *Consideremos el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd} C: \; 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\gamma"'] \\ & 4 \arrow[ul, "\lambda"] \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces $F = \langle\{\alpha, \gamma, \theta, \delta, \lambda, \alpha\lambda, \gamma\delta\}\rangle$ es el ideal de KC generado por todas las flechas en C.

Proposición 1.2.13. *Sea C un carcaj. Si KC tiene K-dimensión finita, entonces $rad(KC) = F$.*

Demostración. Ver [9]. □

En la proposición anterior es crucial el que KC sea de dimensión finita. Consideremos el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} C: \; 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Observemos que $dim_K(KC) = \infty$ y que $KC \cong K[x]$. Como $rad(K[x]) = 0$, entonces $rad(KC) = 0 \neq F = \langle\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}\rangle$.

A continuación introducimos el concepto de ideal admisible. Dichos ideales son de gran importancia, pues al considerar el álgebra de carcaj módulo un ideal admisible se obtiene una K-álgebra básica, conexa y de dimensión finita.

Definición 1.2.14. *Sea C un carcaj y $R \subseteq KC$ un ideal bilateral de KC. Se dice que R es un ideal admisible si existe un natural $n \geq 2$ tal que $F^n \subseteq R \subseteq F^2$.*

Observación 1.2.15. *1) Toda álgebra de carcaj KC tiene un ideal admisible, a saber F^2. Además, 0 es un ideal admisible de KC si y sólo si, KC es de K-dimensión finita.*

2) Recordemos que la propiedad ser finitamente generado es cerrada bajo extensiones. Así, si R es un ideal admisible de KC con $F^n \subseteq R \subseteq F^2$, es fácil ver que F^n y R/F^n son finitamente generados, y al considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F^n \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/F^n \longrightarrow 0$$

se tiene que R es finitamente generado.

Ejemplo 1.2.16. *Consideremos el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd} C: & 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[dr, "\eta"'] & 5 \arrow[l, "\gamma"'] \\ & & 3 \arrow[ur, "\theta"'] & & 6 \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $R = \langle\{\beta\alpha - \theta\epsilon, \delta\eta\}\rangle$ *es un ideal admisible de* KC*, ya que* $F^5 \subseteq R \subseteq F^2$*.*

Veamos algunas propiedades que cumple un álgebra de carcaj módulo un ideal admisible.

Proposición 1.2.17. *Sea* R *un ideal admisible de* KC*, entonces:*

1. *El conjunto* $\{\epsilon_i + R\}_{i\in C_0}$ *es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de la* K*-álgebra* KC/R*.*
2. KC/R *es un álgebra de dimensión finita.*
3. KC/R *es un álgebra conexa y básica.*

Demostración. Ver [9]. □

Proposición 1.2.18. *Sea* R *un ideal admisible de* KC*. Entonces* $rad(KC/R) = F/R$*, y se sigue que* $rad^n(KC/R) = (F/R)^n$ *para cada* $n \geq 1$*.*

Demostración. Ver [9]. □

Ejemplo 1.2.19. *Consideremos el siguiente carcaj* C

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & & 4 \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & 3 \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

El ideal $R = F^2 = \langle\{\beta\alpha, \delta\gamma\}\rangle = K(\beta\alpha) \oplus K(\delta\gamma)$ *es admisible. Y por la proposición anterior tenemos* $rad(KC/R) = K\overline{\alpha} \oplus K\overline{\beta} \oplus K\overline{\lambda} \oplus K\overline{\gamma} \oplus K\overline{\delta}$*.*

El resultado siguiente nos da condiciones para poder construir morfismos de un álgebra de carcaj KC en una K-álgebra Λ.

Teorema 1.2.20. *Sean* C *un carcaj y* Λ *una* K*-álgebra. Para cada par de funciones* $\varphi_0 : C_0 \longrightarrow \Lambda$ *y* $\varphi_1 : C_1 \longrightarrow \Lambda$ *que satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $1 = \sum_{i\in C_0} \varphi_0(i)$, $\varphi_0(i) = \varphi_0^2(i)$ *para cada* $i \in C_0$ *y* $\varphi_0(i)\varphi_0(j) = 0$ *si* $i \neq j$

(b) Si $\alpha : i \longrightarrow j$*, entonces* $\varphi_1(\alpha) = \varphi_0(j)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(i)$

entonces existe un único morfismo de K*-álgebras* $\varphi : KC \longrightarrow \Lambda$ *tal que* $\varphi(\epsilon_i) = \varphi_0(i)$ *para cada* $i \in C_0$ *y* $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ *para cada* $\alpha \in C_1$*.*

Demostración. Ver [9] □

1.3. El Carcaj de un Álgebra

En esta sección enunciamos el Teorema de Gabriel, el cual afirma que toda K-álgebra básica, conexa y de dimensión finita es isomorfa a un Álgebra de Carcaj módulo un ideal admisible, donde K es un campo algebraicamente cerrado. Dicho carcaj resulta ser el carcaj ordinario asociado al álgebra, concepto con el cual se comienza esta sección.

Definición 1.3.1. *Sea Λ una K-álgebra básica, conexa y de dimensión finita. El carcaj ordinario de Λ, denotado C_Λ, se define como sigue:*

(a) Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ, entonces el conjunto de los vértices de C_Λ es $\{1, \ldots, n\}$.

(b) Dados dos vértices $i, j \in (C_\Lambda)_0$, el conjunto de flechas que van de i a j están en correspondencia biyectiva con alguna K-base del K-espacio vectorial $e_j(rad(\Lambda)/rad^2(\Lambda))e_i$.

Observación 1.3.2. *Como Λ es de K-dimensión finita, entonces para cada $i, j \in (C_\Lambda)_0$ el K-espacio vectorial $e_j(rad(\Lambda)/rad^2(\Lambda))e_i$ también es de K-dimensión finita. Además como Λ es un álgebra conexa, se tiene que C_Λ es una grafica conexa. Por lo tanto C_Λ es un carcaj.*

Ejemplo 1.3.3. *(a) Consideremos la K-álgebra $\Lambda = \mathbb{T}_{3\times 3}(K)$, que consiste de las matrices triangulares inferiores de 3×3 con entradas en K. Se tiene que $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos, donde E_{ii} es la matriz que tiene al 1 en la entrada (i, i) y 0 en las demás, por lo tanto $(C_\Lambda)_0 = \{1, 2, 3\}$. Además*

$$rad(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \end{pmatrix} \qquad rad^2(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se sigue que el carcaj ordinario de Λ es:

$$C_\Lambda : \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

(b) Consideremos la K-álgebra $\Lambda = K[x]/I$, donde $I = \langle x^m \rangle$ para alguna $m \geq 2$. Se tiene que el único idempotente (distinto de cero) de Λ es 1, entonces $(C_\Lambda)_0 = \{1\}$, además $rad(\Lambda) = \langle x + I \rangle = \overline{x}$ y $rad^2\Lambda = \overline{x}^2$. Como $dim_K(rad(\Lambda)/rad^2(\Lambda)) = 1$, se sigue que el carcaj ordinario de Λ es:

$$C_\Lambda : \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd} .$$

El siguiente lema afirma que la construcción de C_Λ no depende del sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos que consideremos, además nos presenta un K-espacio vectorial isomorfo a $e_j(rad(\Lambda)/rad^2(\Lambda))e_i$.

Lema 1.3.4. *Sea Λ una K-álgebra básica y conexa. Entonces:*

(a) El carcaj ordinario C_Λ no depende de la elección del sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

(b) Para cada par de idempotentes ortogonales y primitivos, e_i y e_j en Λ, la función $\psi : e_j(rad(\Lambda))e_i/e_j(rad^2(\Lambda))e_i \longrightarrow e_j(rad(\Lambda)/rad^2(\Lambda))e_i$ definido por $e_jxe_i + e_j(rad^2(\Lambda))e_i \longmapsto e_j(x + rad^2(\Lambda))e_i$ es un isomorfismo de K-espacios vectoriales.

Demostración. Ver [9]. $\square$

Lema 1.3.5. *Sea Λ una K-álgebra básica. Para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ en $(C_\Lambda)_1$, sea $x_\alpha \in e_j(rad(\Lambda))e_i$ tal que el conjunto $\{x_\alpha + rad^2(\Lambda)|\alpha : i \longrightarrow j\}$ es una K-base de $e_j(rad(\Lambda)/rad^2(\Lambda))e_i$. Entonces:*

(a) Si $i, j \in (C_\Lambda)_0$, se tiene que cada elemento $x \in e_j(rad(\Lambda))e_i$ se puede escribir como

$$\sum_{finita} \lambda_{\alpha_l \ldots \alpha_1} x_{\alpha_l} \ldots x_{\alpha_1}$$

con $\lambda_{\alpha_l \ldots \alpha_1} \in K$ y la suma se toma sobre todos los caminos dirigidos, $\alpha_l \ldots \alpha_1$, en C_Λ que van de i a j.

(b) Para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, el elemento x_α determina de manera única un morfismo $\hat{x}_\alpha \in Hom_\Lambda(\Lambda e_j, \Lambda e_i)$ tal que $\hat{x}_\alpha(e_j) = x_\alpha$, $Im(\hat{x}_\alpha) \subseteq (rad(\Lambda))e_i$ y $Im(\hat{x}_\alpha) \nsubseteq (rad^2(\Lambda))e_i$.

Demostración. Ver [9]. $\square$

Observación 1.3.6. *Sean C un carcaj, R un ideal admisible de KC y consideremos $\Lambda = KC/R$. Entonces $C = C_\Lambda$.*

Teorema 1.3.7. ***(Gabriel)*** *Sea Λ una K-álgebra básica y conexa de dimensión finita con K un campo algebraicamente cerrado. Entonces existe un ideal admisible R de KC_Λ tal que $\Lambda \cong KC_\Lambda/R$.*

Demostración. Ver [9]. $\square$

Ejemplo 1.3.8. *Tomemos el ejemplo 1.3.3(b). Consideremos el epimorfismo $\varphi : KC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$, dado por $\varphi(\epsilon_1) = \overline{1}$ y $\varphi(\alpha) = \overline{x}$. Entonces $ker(\varphi) = \langle \alpha^m \rangle$ es un ideal admisible de KC_Λ. Por el 1^{er} Teorema de Isomorfismo, $\Lambda \cong KC_\Lambda/\langle \alpha^m \rangle$.*

1.4. El Teorema de Jordan-Hölder

El objetivo de esta sección es enunciar y demostrar el Teorema de Jordan-Hölder. Antes de eso, damos las definiciones y resultados necesarios. Comenzamos recordando los conceptos de módulo artiniano y módulo noetheriano, con dichos conceptos podremos caracterizar a los Λ-módulos que tienen series de composición. En esta sección Λ denotará un anillo asociativo con uno.

Definición 1.4.1. *Sea M un Λ-módulo.*

1) Decimos que M es un módulo noetheriano si para cada cadena ascendente de submódulos de M

$$L_1 \leq L_2 \leq L_3 \leq \ldots$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $L_n = L_{n+i}$.

2) Decimos que M es un módulo artiniano si para cada cadena descendente de submódulos de M

$$\ldots \leq K_3 \leq K_2 \leq K_1$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $K_n = K_{n+i}$.

Ejemplo 1.4.2. *a) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, entonces V es un K-módulo artiniano y noetheriano. Consideremos una cadena ascendente de submódulos de V*

$$V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq \ldots$$

se tiene que los V_i son subespacios vectoriales de dimensión finita de V. Veamos que V es noetheriano. Por contradicción, supongamos que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $V_n = V_{n+i}$. De donde $\forall i \in \mathbb{N}$ sin pérdida de generalidad tenemos

$$V_n < V_{n+1} < V_{n+2} < V_{n+3} < \ldots$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos $d_i := dim_K(V_{n+i})$, entonces

$$d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_i < \ldots < dim_K(V)$$

y como $dim_K(V)$ es finita, se tiene una contradicción. De manera similar se prueba que V es artiniano.

b) Todo Λ-módulo simple M es artiniano y noetheriano. Ya que sus únicos submódulos son 0 y M, sus cadenas ascendentes son de la forma:

$$\begin{gathered} 0 \leq 0 \leq 0 \leq \ldots \\ M \leq M \leq M \leq \ldots \\ 0 \leq \ldots \leq 0 \leq M \leq M \leq M \leq \ldots \end{gathered}$$

y las cadenas descendentes son de la forma:

$$\begin{gathered} \ldots \leq 0 \leq 0 \leq 0 \\ \ldots \leq M \leq M \leq M \\ \ldots \leq 0 \leq 0 \leq M \leq \ldots \leq M \end{gathered}$$

Recordemos algunas propiedades básicas de los módulos artinianos y noetherianos que nos serán de utilidad para probar el Teorema de Jordan-Hölder.

Proposición 1.4.3. *Sean K, L y M Λ-módulos. Supongamos que se tiene la siguiente sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Entonces M es noetheriano (artiniano) si y sólo si, K y L son noetherianos (artinianos).

Demostración. Ver [3]. □

Sea M un Λ-módulo. Recordemos que un submódulo propio $N < M$ es maximal si dado cualquier otro submódulo $L \leq M$ tal que $N \leq L$ entonces $L = N$ ó $L = M$.

Proposición 1.4.4. *Sea M un Λ-módulo noetheriano. Entonces M tiene un submódulo maximal.*

Demostración. Ver [3] □

Para poder enunciar del Teorema de Jordan-Hölder necesitamos dos conceptos. El primero es el concepto de serie de composición de un Λ-módulo.

Definición 1.4.5. *Sea M un Λ-módulo. Una cadena finita de $n+1$ submódulos de M*

$$F: \ M = M_0 > M_1 > M_2 > \ldots > M_n = 0$$

es una serie de composición de longitud n para M si M_{i-1}/M_i es un Λ-módulo simple para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. A los simples que aparecen en F se les conoce como factores de composición de M.

Observación 1.4.6. *Consideremos un Λ-módulo M y F una serie de composición de M con longitud mínima n*

$$F : M = M_0 > M_1 > \ldots > M_n = 0.$$

Entonces $F' : M_1 > M_2 > \ldots > M_n = 0$ es una serie de composición de longitud mínima para M_1.

El siguiente resultado caracteriza a los módulos que tienen series de composición. Antes de eso recordemos que la clase de los módulos noetherianos es cerrada bajo submódulos. Es decir, si M es noetheriano y $N \leq M$, entonces N es noetheriano.

Proposición 1.4.7. *Sea M un Λ-módulo distinto de cero. Entonces M tiene series de composición si y sólo si, M es artiniano y noetheriano.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Haremos inducción sobre alguna serie de composición de longitud mínima de M. Supongamos que M es un Λ-módulo con serie de composición de longitud mínima 1, es decir

$$M = M_0 > M_1 = 0$$

es una serie de composición de M. De donde $M_0/M_1 \cong M$ es simple. Del ejemplo 1.4.2 b) se sigue que M es artiniano y noetheriano.
Supongamos que todo Λ-módulo con series de composición de longitud mínima $n-1$ es artiniano y noetheriano. Sea M un Λ-módulo y F una serie de composición de M con longitud mínima igual a n

$$F: \ M = M_0 > M_1 > \ldots > M_n = 0$$

De la observación 1.4.6 se sigue que $F': \ M_1 > M_2 > \ldots > M_n = 0$ es una serie de composición de M_1, y además es de longitud mínima $n-1$. Por hipótesis de inducción se tiene que M_1 es artiniano y noetheriano. Consideremos la sucesión exacta siguiente

$$0 \longrightarrow M_1 \xhookrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/M_1 \longrightarrow 0$$

con i y π la inclusión y proyección canónica, respectivamente. Como M/M_1 es simple, de 1.4.2 b) se sigue que es artiniano y noetheriano. Por lo tanto, de la proposición 1.4.3 se sigue que M es artiniano y noetheriano.

($\Longleftarrow$) Sea M un Λ-módulo artiniano y noetheriano. Por la proposición 1.4.4 tenemos que existe $M_1 < M$ maximal en M. Como M_1 es noetheriano existe un submódulo M_2 de M que es maximal en M_1. Continuando con el proceso anterior obtenemos una cadena descendente de submódulos de M de la forma

$$\ldots < M_l < \ldots < M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = M$$

ó bien,

$$\ldots \leq 0 = M_n < M_{n-1} < \ldots < M_1 < M_0 = M$$

Pero por hipótesis M es artiniano, entonces la cadena debe ser como la segunda. Como cada M_i es maximal en M_{i-1} para cada $i = 1, \ldots, n$, se sigue que cada M_j/M_{j+1} es simple para toda $j = 0, \ldots, n-1$. Por lo tanto

$$F: \ 0 = M_n < \ldots < M_1 < M_0 = M$$

es una serie de composición de M. □

Definición 1.4.8. *Si un Λ-módulo M tiene series de composición diremos que es un módulo de longitud finita.*

El siguiente resultado es inmediato de la proposición anterior y de 1.4.3.

Corolario 1.4.9. *Sean K, M y N Λ-módulos distintos de cero y supongamos que se tiene la sucesión exacta siguiente*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Entonces M tiene series de composición si y sólo si, K y N tienen series de composición.

□

El segundo concepto necesario para poder enunciar el Teorema de Jordan-Hölder es el siguiente.

Definición 1.4.10. *Sea M un Λ-módulo con series de composición*

$$F_1 : M = M_0 > M_1 > \ldots > M_t = 0$$
$$F_2 : M = N_0 > N_1 > \ldots > N_l = 0$$

Decimos que F_1 y F_2 son equivalentes si $l = t$ y existe una permutación σ de $\{0, \ldots, l-1\}$ tal que $M_i/M_{i+1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)+1}$, para cada $i = 0, \ldots, l-1$.

En otras palabras, F_1 y F_2 son equivalentes si tienen la misma longitud y los simples que aparecen en F_1 son los mismos que aparecen en F_2.

Ejemplo 1.4.11. *Sea S un Λ-módulo simple. Observemos que $F : S = S_0 > S_1 = 0$ es una serie de composición de S, pues $S_0/S_1 \cong S$. Como el único submódulo propio de S es el trivial, se tiene que F es la única serie de composición de S.*

Recordemos que un submódulo $L < M$ es maximal si y sólo si, para cada $x \in M$ tal que $x \notin L$ se tiene que $L + \langle x \rangle = M$. Con este último recordatorio estamos listos para enunciar y demostrar el Teorema de Jordan-Hölder.

Teorema 1.4.12. ***(Jordan-Hölder)*** *Si un Λ-módulo M tiene series de composición, entonces cada par de series de composición de M son equivalentes.*

Demostración. Sea M un Λ-módulo con series de composición, denotaremos por $c(M)$ a la mínima longitud de dichas series de M. Procedemos por inducción sobre $c(M)$. Supongamos que $c(M) = 1$, entonces

$$M = M_0 > M_1 = 0$$

es una serie de composición de M, de donde $M_0/M_1 \cong M$ es simple. Del ejemplo 1.4.11 se tiene el caso base.
Supongamos que $c(M) = n > 1$ y que para cualquier módulo con alguna serie de composición de longitud menor que n, cada par de sus series de composición son equivalentes. Sea

$$F_1 : M = M_0 > M_1 > \ldots > M_n = 0$$

una serie de composición de longitud mínima de M y consideremos

$$F_2 : M = N_0 > N_1 > \ldots > N_p = 0$$

otra serie de composición de M. Tenemos dos casos:

Caso 1) Si $M_1 = N_1$, entonces por la observación 1.4.6 tenemos que $c(M_1) = n - 1$, y por hipótesis de inducción las series de composición de M_1

$$M_1 > \ldots > M_n = 0$$
$$N_1 > \ldots > N_p = 0$$

son equivalentes. Por lo tanto F_1 y F_2 son equivalentes.

Caso 2) Supongamos que $M_1 \neq N_1$. Como M_1 es maximal en M, tenemos que $M_1 + N_1 = M$. Por el tercer Teorema de Isomorfismo se tiene que:

$$M/M_1 = (M_1 + N_1)/M_1 \cong N_1/(M_1 \cap N_1) \ldots (1)$$
$$\text{y } M/N_1 = (M_1 + N_1)/N_1 \cong M_1/(M_1 \cap N_1) \ldots (2)$$

como M/M_1 y M/N_1 son simples, entonces $N_1/(M_1 \cap N_1)$ y $M_1/(M_1 \cap N_1)$ también son simples.
Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \cap N_1 \xrightarrow{i} M_1 \xrightarrow{\pi} M_1/(M_1 \cap N_1) \longrightarrow 0$$

donde i y π son la inclusión y proyección canónicas, respectivamente. Como M_1 tiene series de composición, del corolario 1.4.9 se tiene que $M_1 \cap N_1$ tiene series de composición. Consideremos

$$M_1 \cap N_1 = L_0 > L_1 > \ldots > L_k = 0$$

serie de composición de $M_1 \cap N_1$. Entonces como $M_1/(M_1 \cap N_1)$ y $N_1/(M_1 \cap N_1)$ son simples, se tiene que

$$M_1 > L_0 > L_1 > \ldots > L_k = 0$$
$$\text{y } N_1 > L_0 > L_1 > \ldots > L_k = 0 \ldots (3)$$

son series de composición de M_1 y N_1, respectivamente. Como $c(M_1) = n - 1$, se tiene que cualesquiera dos series de composición de M_1 son equivalentes, y se sigue que

$$F_1 : M = M_0 > M_1 > M_2 > \ldots > M_n = 0 \text{ y}$$
$$M = M_0 > M_1 > L_0 > L_1 > \ldots > L_k = 0 \ldots (4)$$

son dos series de composición equivalentes de M, además $k = n - 2$. Por otra parte, observemos que (3) es una serie de composición de longitud $k + 1$ de N_1, entonces $c(N_1) < n$, y por hipótesis de inducción se tiene que las series de composición

$$N_1 > N_2 > \ldots > N_p = 0 \text{ y}$$
$$N_1 > L_0 > L_1 > \ldots > L_k = 0$$

de N_1 son equivalentes. Entonces las siguientes series de composición de M son equivalentes

$$F_2 : M = N_0 > N_1 > N_2 > \ldots > N_p = 0 \text{ y}$$
$$M = N_0 > N_1 > L_0 > L_1 > \ldots > L_k = 0 \ldots (5).$$

De donde, por (1) y (2) se tiene que las series de composición (4) y (5) son equivalentes. Por lo tanto las series de composición F_1 y F_2 son equivalentes. $\square$

Gracias al Teorema de Jordan-Hölder la siguiente definición tiene sentido.

Definición 1.4.13. *Sea M un Λ-módulo de longitud finita. Definimos la multiplicidad del Λ-módulo simple S en M como el número de veces que aparece S en alguna serie de composición de M. A dicho número lo denotamos por $[M : S]$.*

Capítulo 2

Propiedades fundamentales de los módulos estándar

El propósito de esta tesis es demostrar que la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ de un álgebra estándarmente estratificada es una categoría resolvente. Para ello, necesitamos introducir varios conceptos y resultados. Así pues, la primera sección de este capítulo la dedicaremos a introducir el concepto de los módulos estándar, y en la segunda veremos algunos ejemplos de K-álgebras y calculamos los respectivos módulos estándar.
Recordemos que si Λ es una K-álgebra básica de dimensión finita (con K un campo algebraicamente cerrado) entonces Λ tiene una descomposición en Λ-módulos proyectivos e inescindibles

$$_{\Lambda}\Lambda = P(1) \oplus P(2) \oplus \ldots \oplus P(n).$$

Además, de la proposición 1.1.14 se tiene que el conjunto $\{P(1), \ldots, P(n)\}$ es una lista completa de representantes de los Λ-módulos proyectivos e inescindibles. Si $S(i) = topP(i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces el conjunto $\{S(1), \ldots, S(n)\}$ es una lista completa de los Λ-módulos simples (hasta isomorfismo). Dejemos fija la notación anterior y también el orden natural $\leq$ en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que indexa a los Λ-módulos proyectivos inescindibles en todo este trabajo. Dicho orden natural fijo $\leq$ en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ será esencial en la definición de álgebra estándarmente estratificada (a la izquierda).

2.1. Módulos Estándar

Como ya lo mencionamos, en esta sección, definiremos y estudiaremos a los módulos estándar. Las propiedades más importantes de éstos son las propiedades homológicas dadas en 2.1.11 y 2.1.12. El siguiente concepto es necesario para poder definir a los módulos estándar.

Definición 2.1.1. *Para cada $i = 1, \dots, n$, denotamos por $U(i)$ a la suma de las imágenes de los Λ-morfismos $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$. Es decir,*

$$U(i) := \sum_{f:P(j)\to P(i) \quad j>i} Imf.$$

A lo largo de esta sección estaremos utilizando el siguiente resultado básico de la teoría de módulos: Si $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo de módulos tal que $kerf \leq radM$, entonces $f(radM) = radN$ (Ver [3, Proposition 9.15]).
El siguiente resultado será de gran utilidad en lo que sigue.

Lema 2.1.2. *Para toda $i = 1, \dots, n$ se tiene que $U(i)$ es un submódulo propio de $P(i)$.*

Demostración. Para $i = n$ el resultado es inmediato. Sea $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y supongamos que existe un Λ-morfismo $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ distinto de cero con $j > i$. Si f no es un epimorfismo entonces $Imf \leq radP(i)$, ya que $radP(i)$ es el único submódulo maximal de $P(i)$ y en este caso hemos terminado. Por otro lado si f es un epimorfismo, de la observación 1.1.15 b) se tiene que $topf : S(j) \longrightarrow S(i)$ es un epimorfismo y así $S(i) \cong S(j)/ker(topf)$. Como $f \neq 0$ se tiene que $kerf < P(j)$, y dado que $radP(j)$ es el único submódulo maximal de $P(j)$ se tiene que $kerf \leq radP(j)$ y por lo tanto $f(radP(j)) = radP(i)$, de donde $ker(topf) = 0$ y así $S(i) \cong S(j)$, lo cual es una contradicción, pues Λ es básica. Por lo tanto, para cada morfismo $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$, $Imf \leq radP(i) < P(i)$, de donde $U(i) \leq radP(i) < P(i)$. □

Una vez que hemos establecido que el Λ-módulo $U(i)$ es un submódulo propio de $P(i)$, para cada $i = 1, \dots, n$, podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1.3. *Para cada $i = 1, \dots, n$, se define el i-ésimo Λ-módulo estándar como $\Delta(i) := P(i)/U(i)$. Al conjunto $\Delta = \{\Delta(1), \dots, \Delta(n)\}$ se le conoce como el conjunto de los Λ-módulos estándar.*

Es inmediato del lema anterior que cada $\Delta(i) \neq 0$, además $\Delta(n) = P(n)$.
A continuación definimos ciertos conjuntos que nos servirán para caracterizar a los módulos estándar.

Definición 2.1.4. *Para cada $i = 1, \dots, n$, se define el conjunto*

$$\mathcal{A}_i = \{P(i)/N : P(i)/N \text{ es un cociente de } P(i) \text{ con factores de composición } S(j),\ j \leq i\}$$

Se define la relación $\subseteq$ en $\mathcal{A}_i$ como $P(i)/N \subseteq P(i)/M$ si y sólo si $M \leq N$.

Como $topP(i) = S(i)$ es un cociente de $P(i)$ se tiene que cada $\mathcal{A}_i \neq \emptyset$.
Al conjunto $\{1, \dots, n\}$, de los primeros n números naturales, denotémoslo por $[1, n]$.

Lema 2.1.5. *Sea $i \in [1, n]$. La pareja $(\mathcal{A}_i, \subseteq)$ es un poset.*

Demostración. Es claro que la relación $\subseteq$ es reflexiva. Veamos que la relación $\subseteq$ es antisimética; sean $P(i)/N, P(i)/M \in \mathcal{A}_i$ tales que $P(i)/N \subseteq P(i)/M$ y $P(i)/M \subseteq P(i)/N$, de donde $M \leq N$ y $N \leq M$, y por tanto $M = N$. Es decir, $P(i)/N = P(i)/M$ y por tanto $\subseteq$ es antisimétrica.
Por último, si $P(i)/N, P(i)/M, P(i)/L \in \mathcal{A}_i$ son tales que $P(i)/N \subseteq P(i)/M$ y $P(i)/M \subseteq P(i)/L$, entonces $L \leq M \leq N$. Así $P(i)/N \subseteq P(i)/L$, es decir, $\subseteq$ es transitiva. □

El siguiente resultado caracteriza a los módulos estándar, pues nos dice que cada módulo estándar $\Delta(i)$ es el cociente más grande de $P(i)$ cuyos factores de composición son los simples $S(j)$ con $j \leq i$. Esta caracterización será de gran utilidad en este trabajo.

Lema 2.1.6. *Para toda $i = 1, \ldots, n$, $\Delta(i)$ es el único elemento maximal del poset $(\mathcal{A}_i, \subseteq)$. Es decir, $\Delta(i)$ es el único cociente maximal de $P(i)$ cuyos factores de composición son los simples $S(j)$ con $j \leq i$.*

Demostración. Sea $i \in [1, n]$ fijo.
1) Primero verifiquemos que $\Delta(i) \in \mathcal{A}_i$. Por el Teorema de Jordan-Hölder podemos considerar cualquier serie de composición F de $\Delta(i)$

$$F : \Delta(i) = P(i)/U(i) = M_0/U(i) > \ldots > M_m/U(i) = 0$$

Supongamos, para obtener una contradicción, que existe $t \in \{0, \ldots, m-1\}$ tal que

$$\frac{M_t/U(i)}{M_{t+1}/U(i)} \cong M_t/M_{t+1} \cong S(j) \text{ con } j > i$$

y consideremos las proyecciones canónicas π_1, π_2 y π_3.

$$M_t \xrightarrow{\pi_1} M_t/U(i)\ ,\ \ M_t/U(i) \xrightarrow{\pi_2} S(j) \ \text{ y } \ P(j) \xrightarrow{\pi_3} S(j)$$

Como $P(j)$ es proyectivo y $\pi_2\pi_1$ es un epimorfismo se tiene que existe un morfismo $h : P(j) \longrightarrow M_t$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & P(j) \arrow[dll, dashed, "h"'] \arrow[d, "\pi_3"] & \\
M_t \arrow[r, "\pi_1"'] & M_t/U(i) \arrow[r, "\pi_2"'] & S(j) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dado que $M_t \leq P(i)$, entonces podemos considerar $h : P(j) \longrightarrow P(i)$ y como $j > i$ se tiene que $Imh \leq U(i)$, de donde $\pi_1 h = 0$ y así $\pi_3 = \pi_2\pi_1 h = 0$. Con esto se tiene una contradicción, ya que $\pi_3 \neq 0$ es un epimorfismo y $S(j) \neq 0$. Por lo tanto $\Delta(i) \in \mathcal{A}_i$.

2) Ahora veamos que $\Delta(i)$ es un elemento maximal de $\mathcal{A}_i$. Sea $P(i)/N \in \mathcal{A}_i$ tal que $\Delta(i) \subseteq P(i)/N$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\Delta(i) \neq P(i)/N$, es decir, supongamos que $\Delta(i) \subset P(i)/N$, de donde $N < U(i)$

y por tanto existe un morfismo distinto de cero $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$ tal que $Imf \nleq N$. Veamos primero que $Imf/rad(Imf) \cong S(j)$ con $j > i$. Como $P(j)/kerf \cong Imf$, al considerar la proyección canónica $\pi : P(j) \longrightarrow P(j)/kerf$, se tiene que $kerf = ker\pi < P(j)$, ya que si $kerf = P(j)$ entonces $Imf = 0 \leq N$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $kerf \leq radP(j)$ y se sigue que

$$rad(P(j))/kerf = \pi(radP(j)) = rad(P(j)/kerf)$$

Usando que $Imf \cong P(j)/kerf$ tenemos que

$$Imf/rad(Imf) \cong \frac{P(j)/kerf}{(radP(j))/kerf} \cong P(j)/radP(j) = S(j) \text{ con } j > i.$$

Por lo tanto $rad(Imf)$ es el único submódulo maximal de Imf.

Veamos ahora que $P(i)/N$ tiene un factor de composición $S(j)$ con $j > i$. Lo cual es una contradicción. Como $N + Imf \leq P(i)$, se tiene que $(N + Imf)/N \leq P(i)/N$ y por el Segundo Teorema de Isomorfismo

$$(N + Imf)/N \cong Imf/(N \cap Imf).$$

Observemos que $N \cap Imf < Imf$, pues si $N \cap Imf = Imf$ entonces $Imf \leq N$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N \cap Imf \leq rad(Imf)$. Considerando la proyección canónica $\pi' : Imf \longrightarrow Imf/(N \cap Imf)$ y se sigue que $rad(Imf)/(N \cap Imf) = \pi'(radImf) = rad(Imf/(N \cap Imf))$, de donde

$$P(i)/N \geq (N + Imf)/N \cong Imf/(N \cap Imf) \geq rad(Imf)/(N \cap Imf)$$

y como

$$\frac{Imf/(N \cap Imf)}{rad(Imf)/(N \cap Imf)} \cong Imf/rad(Imf) \cong S(j) \text{ con } j > i$$

$P(i)/N$ tiene un factor de composición $S(j)$ con $j > i$, lo cual es una contradicción, ya que $P(i)/N \in \mathcal{A}_i$. Por lo tanto $\Delta(i)$ es un elemento maximal de $\mathcal{A}_i$.

3) Por último verifiquemos que $\Delta(i)$ es el único maximal en $\mathcal{A}_i$. Sea $P(i)/N$ un elemento maximal en $\mathcal{A}_i$. Se tienen dos posibles casos:

Caso 1) Si $\Delta(i) \subseteq P(i)/N$ ó $P(i)/N \subseteq \Delta(i)$, se tiene que $\Delta(i) = P(i)/N$ ya que ambos son elementos maximales en $\mathcal{A}_i$.

Caso 2) Si $\Delta(i)$ y $P(i)/N$ no son comparables, Entonces se tiene que $N \nleq U(i)$ y $U(i) \nleq N$. Por tanto existe un morfismo $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$ tal que $Imf \nleq N$ y procediendo como en la parte 2) de la demostración, se tiene que $P(i)/N \notin \mathcal{A}_i$. Lo cual es una contradicción.

Por tanto $\Delta(i)$ es el único maximal en $\mathcal{A}_i$. $\square$

Veamos algunas propiedades básicas de los módulos estándar.

Lema 2.1.7. *Para toda $i \in [1, n]$, se tiene que $rad\Delta(i) = (radP(i))/U(i)$.*

Demostración. Por el lema 2.1.2 se tiene que $U(i) < P(i)$, de donde $U(i) \leq radP(i)$ y al considerar la proyección canónica $\pi : P(i) \longrightarrow P(i)/U(i)$, se sigue que

$$rad\Delta(i) = rad(P(i)/U(i)) = \pi(radP(i)) = (radP(i))/U(i)$$

□

Corolario 2.1.8. *Para toda $i = 1, \ldots, n$ se tiene que el $rad\Delta(i)$ es el único submódulo maximal de $\Delta(i)$.*

Demostración. Del lema anterior tenemos $rad\Delta(i) = (radP(i))/U(i)$, de donde,

$$\Delta(i)/rad\Delta(i) = \frac{P(i)/U(i)}{rad(P(i))/U(i)} \cong P(i)/radP(i) = S(i)$$

Por lo tanto, $rad\Delta(i)$ es el único submódulo maximal de $\Delta(i)$. □

Lema 2.1.9. *Para cada $i = 1, \ldots, n$, $\Delta(i)$ es un Λ-módulo inescindible.*

Demostración. Supongamos que $\Delta(i)$ no es inescindible. Es decir, $\Delta(i) = M \oplus N$ con $M \neq 0 \neq N$. Tenemos que $rad\Delta(i) = radM \oplus radN$ de donde

$$\Delta(i)/rad\Delta(i) = (M \oplus N)/(radM \oplus radN) \cong (M/radM) \oplus (N/radN)$$

Lo cual es una contradicción, ya que $\Delta(i)/rad\Delta(i) \cong S(i)$ es simple y por tanto inescindible. Por lo tanto $\Delta(i)$ es inescindible. □

Lema 2.1.10. *Sea $\Delta = \{\Delta(1), \ldots, \Delta(n)\}$ el conjunto de los módulos estándar. Entonces para cada $j > i$ se tiene que $Hom_\Lambda(P(j), \Delta(i)) = 0$.*

Demostración. Sea $f \in Hom_\Lambda(P(j), \Delta(i))$ con $j > i$ y consideremos la proyección canónica $\pi : P(i) \longrightarrow \Delta(i)$. Como $P(j)$ es un Λ-módulo proyectivo y π es un epimorfismo se tiene que existe un Λ-morfismo $g : P(j) \longrightarrow P(i)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & P(j) \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
P(i) \arrow[r, "\pi"] & \Delta(i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $j > i$ se tiene que $Img \subseteq U(i)$ y por tanto $f = \pi g = 0$. □

A continuación damos un par de propiedades homológicas muy importantes que satisfacen de los módulos estándar.

Lema 2.1.11. *Sea $i \in [1, n]$, entonces para cada $j \in [1, n]$ con $j > i$ se tiene que $Hom_\Lambda(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe un morfismo $f \neq 0$ en $Hom_\Lambda(\Delta(j), \Delta(i))$ con $j > i$. Entonces $kerf < \Delta(j)$ y como $rad\Delta(j)$ es el único maximal de $\Delta(j)$, $kerf \leq rad\Delta(j)$. Al considerar la proyección canónica $\pi : \Delta(j) \longrightarrow \Delta(j)/kerf$ se tiene que

$$(rad\Delta(j))/kerf = \pi(rad\Delta(j)) = rad(\Delta(j)/kerf)$$

Como $Imf \cong \Delta(j)/kerf$ se sigue que

$$Imf/rad(Imf) \cong \frac{\Delta(j)/kerf}{(rad\Delta(j))/kerf} \cong \Delta(j)/rad\Delta(j) \cong S(j) \text{ con } j > i$$

Lo cual es una contradicción, pues $Imf \leq \Delta(i) \in \mathcal{A}_i$. □

El siguiente resultado es una de las propiedades más importantes que satisfacen los módulos estándar. Dicha propiedad nos permitirá obtener las herramientas necesarias para la demostración de uno de los resultados principales de este trabajo (Teorema 3.2.8).

Lema 2.1.12. *Sea $i \in [1, n]$, entonces para cada $j \in [1, n]$ con $j \geq i$ se tiene que $Ext^1_\Lambda(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$.*

Demostración. Sean $i, j \in [1, n]$ con $j \geq i$. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U(j) \longrightarrow P(j) \longrightarrow \Delta(j) \longrightarrow 0$$

Al aplicar el funtor $Hom_\Lambda(-, \Delta(i))$ a la sucesión anterior obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\Delta(j), \Delta(i)) \longrightarrow Hom_\Lambda(P(j), \Delta(i)) \longrightarrow Hom_\Lambda(U(j), \Delta(i)) \longrightarrow \\ Ext^1_\Lambda(\Delta(j), \Delta(i)) \longrightarrow Ext^1_\Lambda(P(j), \Delta(i)) = 0 \end{gathered}$$

Veamos que $Hom_\Lambda(U(j), \Delta(i)) = 0$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe un morfismo $f \neq 0$ en $Hom_\Lambda(U(j), \Delta(i))$. Como $f \neq 0$ tenemos que $kerf < U(j)$ y por tanto existe M un submódulo maximal de $U(j)$ tal que $kerf \leq M$. De donde, $U(j)/M \cong S(t)$ para algún $t \in [1, n]$. Por otro lado, tenemos que $U(j)/kerf \cong Imf$. Por tanto

$$S(t) \cong U(j)/M \cong \frac{U(j)/kerf}{M/kerf} \cong Imf/(M/kerf)$$

con $t \leq i \leq j$, ya que $Imf \leq \Delta(i)$ y $\Delta(i)$ tiene factores de composición $S(l)$ con $l \leq i$.

Veamos ahora que $P(j)/M$ tiene sólo factores de composición $S(l)$ con $l \leq i$. Como $M < U(j) < P(j)$ tenemos que $U(j)/M < P(j)/M$, por tanto,

$$\frac{P(j)/M}{U(j)/M} \cong P(j)/U(j) = \Delta(j)$$

y dado que $\Delta(j)$ tiene sólo factores de composición $S(l)$ con $l \leq j$ tenemos que $(P(j)/M)/(U(j)/M)$ tiene sólo factores de composición $S(l)$ con $l \leq j$. De lo anterior se sigue que $P(j)/M$ tiene sólo factores de composición $S(l)$ con $l \leq j$. Es decir, $P(j)/M \in \mathcal{A}_j$, ya que si suponemos para llegar a una contradicción que $P(j)/M$ tiene un factor de composición $(L/M)/(N/M) \cong S(r)$ con $r > j$ entonces

$$\frac{(L/M)/(U(j)/M)}{(N/M)/(U(j)/M)} \cong \frac{L/M}{N/M} \cong L/N \cong S(r)$$

es un factor de composición de $(P(j)/M)/(U(j)/M)$ con $r > j$. Lo cual es una contradicción. Por tanto, $P(j)/M \in \mathcal{A}_j$ y dado que $M < U(j)$ tenemos que $\Delta(j) = P(j)/U(j) \subset P(j)/M$. Lo cual es una contradicción ya que $\Delta(j)$ es el único elemento maximal en $\mathcal{A}_j$. Por lo tanto $Hom_\Lambda(U(j), \Delta(i)) = 0$, y se sigue que $Ext^1_\Lambda(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ para cada $j \geq i$. □

2.2. Ejemplos

En esta sección veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.1. *a) Consideremos el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd} C:\ 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

y el ideal admisible $R = \langle \alpha_2\alpha_1, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2, \alpha_2\beta_2 \rangle$ de KC. Si $\Lambda = KC/R$, tenemos que los Λ-módulos proyectivos inescindibles son:

$$P(1):\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(2):\ \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ 3 \arrow[dr, "\beta_2"'] & & 1 \arrow[dl, "\alpha_1"] \\ & 2 & \end{tikzcd} \qquad P(3):\ \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 2 \end{tikzcd}$$

De donde tenemos que los Λ-módulos estándar son:

$$\Delta(1) = S(1) \qquad \Delta(2):\ \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad \Delta(3) = P(3):\ \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 2 \end{tikzcd} .$$

b) Consideremos el carcaj

$$\begin{tikzcd} C:\ 1 & 2 \arrow[l, shift right, "\beta"'] \arrow[l, shift left, "\gamma"] & 3 \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

y $R = \langle \beta\alpha \rangle$ *un ideal admisible de* KC. *Si* $\Lambda = KC/R$, *entonces los* Λ*-módulos proyectivos inescindibles son:*

$$P(1):\ 1 \qquad P(2):\ \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 & & 1 \end{tikzcd} \qquad P(3):\ \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\alpha"'] \\ 2 \arrow[d, "\gamma"'] \\ 1 \end{tikzcd}.$$

Se tiene que los módulos estándar son: $\Delta(i) = P(i)$ *para cada* $i = 1, 2, 3$.

c) Consideremos el siguiente carcaj

$$C:\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y el ideal admisible $R = \langle \alpha\beta \rangle$ *de* KC. *Los* Λ*-módulos proyectivos inescindibles de* $\Lambda = KC/R$ *son:*

$$P(1):\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha"] \\ 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(2):\ \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \end{tikzcd}$$

y los módulos estándar son: $\Delta(1) = S(1)$ *y* $\Delta(2) = P(2)$.

d) Consideremos el carcaj siguiente

$$C:\ 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xleftarrow{\beta} 4 \xleftarrow{\gamma} 1$$

y el ideal admisible $R = \langle \beta\gamma \rangle$ *de* KC. *Entonces* $\Lambda = KC/R$ *tiene los siguientes* Λ*-módulos proyectivos inescindibles:*

$$P(1):\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\gamma"] \\ 4 \end{tikzcd} \qquad P(2):\ \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\alpha"] \\ 3 \end{tikzcd} \qquad P(3): S(3) \qquad P(4):\ \begin{tikzcd} 4 \arrow[d, "\beta"] \\ 3 \end{tikzcd}$$

Los módulos estándar son: $\Delta(1) = S(1)$, $\Delta(2) = S(2)$, $\Delta(3) = P(3) = S(3)$ *y* $\Delta(4) = P(4)$.

Capítulo 3

Resultado principal

En este capítulo recordamos que $\Delta = \{\Delta(1), \ldots, \Delta(n)\}$ es el conjunto de los módulos estándar sobre una K-álgebra Λ básica y de dimensión finita sobre un campo K algebraicamente cerrado. Empezaremos este capítulo definiendo y estudiando a la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ de los Λ-módulos Δ-filtrados. Culminaremos probando que si $(\Lambda, \leq)$ es un álgebra estándarmente estratificada (a la izquierda), entonces la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ es resolvente. Dicho resultado es el principal de esta tesis.

3.1. Propiedades de la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$

En esta sección estudiaremos varias propiedades fundamentales de la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$. Dichas propiedades serán muy relevantes en la segunda sección.

Definición 3.1.1. *Denotamos por $\mathcal{F}(\Delta)$ a la subcategoría plena de $\Lambda - mod$ cuyos objetos son el módulo cero y los Λ-módulos que son Δ-filtrados. Es decir, $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ si $M = 0$ ó existe una cadena finita:*

$$F: \ 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$$

de submódulos de M tal que M_i/M_{i-1} es isomorfo a un módulo en Δ para todo $i = 1, \ldots, m$. A la cadena finita F se le conoce como una Δ-filtración de M, y cada cociente M_i/M_{i-1} se dice que es un factor de composición (o simplemente, un Δ-factor) de la Δ-filtración F de M. A los objetos de la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ se les conoce como los Δ-módulos buenos.

Con la definición anterior podemos dar el concepto de álgebra estándarmente estratificada a la izquierda.

Definición 3.1.2. *Sea Λ una K-álgebra (básica y de dimensión finita) y $\leq$ el orden natural (fijo) en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que indexa los Λ-módulos proyectivos inescindibles de ${}_{\Lambda}\Lambda$, $P(1), \ldots, P(n)$. El par $(\Lambda, \leq)$ se dice que es un* *álgebra estándarmente estratificada a la izquierda si cada módulo* $P(i) \in \mathcal{F}(\Delta)$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *donde* ${}_{\Lambda}\Lambda = P(1) \oplus \ldots \oplus P(n)$ *es su descomposición en proyectivos inescindibles.*

El orden dado al conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ es un factor determinante al momento de establecer si una K-álgebra Λ es estándarmente estratificada a izquierda o no, y de hecho también lo es a la hora de calcular los módulos estándar. El ejemplo 3.2.4 d) es muestra de ello.

Como es de esperarse, tendremos un resultado similar al Teorema de Jordan-Hölder para los módulos en $\mathcal{F}(\Delta)$. Necesitaremos las siguientes definiciones para llegar a dicho objetivo.

Definición 3.1.3. *Sea* $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ *y consideremos una* Δ*-filtración de* M

$$F : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$$

1) Sea $\Delta(i) \in \Delta$. *Definimos la multiplicidad de* $\Delta(i)$ *en* M *respecto a* F, *denotada* $[M : \Delta(i)]_F$, *como el número de veces que aparece* $\Delta(i)$ *como factor de composición en la* Δ*-filtración* F *de* M.

2) Denotamos por $S^F_\Delta(M)$ *al conjunto de todos los números* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tales que* $[M : \Delta(i)]_F \neq 0$. *A dicho conjunto se le conoce como el* Δ*-soporte de* M *respecto a* F.

Definición 3.1.4. *Sea* $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ *con una* Δ*-filtración* $F : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$. *Definimos la* Δ*-longitud de* M *respecto a* F, *como el número de* Δ*-factores de* M *que aparecen en la* Δ*-filtración* F, *la cual se denota* $l^F_\Delta(M) = m$. *Es decir,* $l^F_\Delta(M) = \sum_{i \in S^F_\Delta(M)} [M : \Delta(i)]_F$

Definición 3.1.5. *Sea* $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ *y consideremos dos* Δ*-filtraciones,* F_1 *y* F_2 *de* M. *Decimos que* F_1 *y* F_2 *son equivalentes si* $[M : \Delta(i)]_{F_1} = [M : \Delta(i)]_{F_2}$ *para toda* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observación 3.1.6. *Notemos que si* F_1 *y* F_2 *son equivalentes entonces* $l^{F_1}_\Delta(M) = l^{F_2}_\Delta(M)$ *y* $S^{F_1}_\Delta(M) = S^{F_2}_\Delta(M)$.

Ejemplo 3.1.7. *Sea* $i \in [1, n]$, *entonces* $\Delta(i)$ *tiene una única* Δ*-filtración. A saber,* $F : 0 < \Delta(i)$. *Supongamos que existe un submódulo propio de* $\Delta(i)$ *distinto de cero,* M, *tal que* $\Delta(i)/M \cong \Delta(j)$. *Por el lema 2.1.11 se tiene que* $j > i$. *En particular,* $\Delta(j)$ *tiene como factor de composición a* $S(j)$, *lo cual es una contradicción, pues por el lema 2.1.6 tenemos que* $\Delta(i)/M$ *tiene factores de composición* $S(k)$ *con* $k \leq i < j$.

A continuación enunciaremos los resultados necesarios para probar que cualesquiera dos Δ-filtraciones de un módulo $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ son equivalentes.

Lema 3.1.8. *Sea* $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ *tal que* $S^F_\Delta(M) = \{j\}$, *para alguna* $j \in [1, n]$ *y para alguna* Δ*-filtración* F *de* M

$$F : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$$

entonces para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ se tiene que $M_i \cong \Delta(j)^i$. En particular, cualesquiera dos Δ-filtraciones de M son equivalentes.

Demostración. Como $S^F_\Delta(M) = \{j\}$ tenemos que $M_i/M_{i-1} \cong \Delta(j)$ para toda $i = 1, 2, \ldots, m$. En particular $M_1 \cong \Delta(j)$. Dado que $Ext^1_\Lambda(\Delta(j), \Delta(j)) = 0$ tenemos que la sucesión exacta

$$s_2 : \ 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$$

se escinde y por tanto $M_2 = M_1 \oplus M_2/M_1 \cong \Delta(j) \oplus \Delta(j)$. Consideremos ahora la sucesión exacta

$$s_{i+1} : \ 0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+1}/M_i \longrightarrow 0\ .$$

Usando que $Ext^1_\Lambda(L, \bigoplus_{l=1}^{p} L_l) \cong \bigoplus_{l=1}^{p} Ext^1_\Lambda(L, L_l)$ e inducción, tenemos por el lema 2.1.12 que s_{i+1} se escinde y por lo tanto $M_{i+1} \cong \Delta(j)^i \oplus \Delta(j) = \Delta(j)^{i+1}$, lo cual prueba el lema $\square$

Proposición 3.1.9. *Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ tal que M tiene una Δ-filtración F con $|S^F_\Delta(M)| > 1$ y sea $t \in S^F_\Delta(M)$ máximo. Entonces existe una Δ-filtración F' de M equivalente a F*

$$F' : 0 = M'_0 < M'_1 < \ldots < M'_l = M$$

y algún $r \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$ tal que para toda $i = 1, 2, \ldots, r$, $M'_i/M'_{i-1} \cong \Delta(t)$ y para toda j con $r+1 \leq j \leq l$, $M'_j/M'_{j-1} \cong \Delta(s_j)$ con los $s_{j's}$ menores que t.

Demostración. Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$. Procedemos por inducción sobre la Δ-longitud de M respecto a la filtración F. Supongamos que $l^F_\Delta(M) = 2$, entonces tenemos la filtración

$$F : \ 0 = M_0 < M_1 < M_2 = M$$

y como $|S^F_\Delta(M)| > 1$ se tiene que $M_1 \cong \Delta(r_1)$ y $M_2/M_1 \cong \Delta(r_2)$, con $r_1 \neq r_2$. Tenemos dos casos:

Caso 1) Si $r_1 > r_2$, se tiene el resultado.

Caso 2) Supongamos que $r_2 > r_1$. Por el lema 2.1.12, $Ext^1_\Lambda(M_2/M_1, M_1) = 0$ y así la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$$

se escinde. De donde, $M \cong \Delta(r_1) \oplus \Delta(r_2)$ tiene la siguiente Δ-filtración

$$F' : 0 < \Delta(r_2) < \Delta(r_1) \oplus \Delta(r_2) \cong M$$

Lo cual demuestra el caso base.

Supongamos que el resultado es cierto para cualquier Λ-módulo L que tiene una Δ-filtración F con $l_\Delta^F(L) < l$ y $l > 2$. Consideremos un Λ-módulo M con una Δ-filtración F con $l_\Delta^F(M) = l$, es decir M tiene la Δ-filtración:

$$F : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_{l-1} < M_l = M.$$

Dado que $G : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_{l-1}$ es una Δ-filtración de M_{l-1} tal que $l_\Delta^G(M_{l-1}) = l - 1$, tenemos dos posibles casos, a saber: $|S_\Delta^G(M_{l-1})| = 1$ y $|S_\Delta^G(M_{l-1})| > 1$.

Caso 1) Si $|S_\Delta^G(M_{l-1})| = 1$, entonces por el lema 3.1.8 se tiene que $M_{l-a} \cong \Delta(j)^{l-a}$ para $a = 1, \ldots, l-1$, y como $|S_\Delta^F(M)| > 1$, $M/M_{l-1} \cong \Delta(i)$ con $i \neq j$. De donde se tienen dos subcasos:

- Si $j > i$, el resultado es inmediato.
- Si $j < i$, entonces por el lema 2.1.12 la sucesión exacta

  $$0 \longrightarrow M_{l-1} \longrightarrow M \longrightarrow M/M_{l-1} \longrightarrow 0$$

  se escinde. De donde, $M \cong \Delta(j)^{l-1} \oplus \Delta(i)$ tiene la siguiente Δ-filtración

  $$F' : 0 < \Delta(i) < \Delta(i) \oplus \Delta(j) < \Delta(i) \oplus \Delta(j)^2 < \ldots < \Delta(i) \oplus \Delta(j)^{l-1}$$

  la cual es claramente equivalente a F.

Caso 2) Supongamos que $|S_\Delta^G(M_{l-1})| > 1$. Sea $t_{l-1} \in S_\Delta^G(M_{l-1})$ máximo. Por hipótesis de inducción existe una Δ-filtración G' de M_{l-1} equivalente a G

$$G' : 0 = M'_0 < M'_1 < \ldots < M'_{l-1} = M_{l-1}$$

y $r < l - 1$ tal que $M'_a \cong \Delta(t_{l-1})^a$ para $a = 1, 2, \ldots, r$ y $M'_{r+i}/M'_{r+i-1} \cong \Delta(s_i)$ con los $s_{i's}$ menores a t_{l-1} para $i = 1, \ldots, l - r - 1$.

Consideremos pues el cociente $M_l/M'_{l-1} \cong \Delta(s_l)$.

- Si $t_{l-1} > s_l$, entonces t_{l-1} es el máximo en $S_\Delta^{F'}(M)$, donde

  $$F' : 0 = M'_0 < M'_1 < \ldots < M'_{l-1} < M$$

  es la Δ-filtración de M equivalente a F buscada, ya que G y G' lo son.
- Supongamos que $t_{l-1} \leq s_l$. Tenemos que exite alguna $r \in S_\Delta^{G'}(M_{l-1})$ tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, $M'_i/M'_{i-1} \cong \Delta(t_{l-1})$ y para cada $j = r+1, r+2, \ldots, l-1$ se cumple que $M'_j/M'_{j-1} \cong \Delta(s_j)$ con $s_j < t_{l-1}$ (esto es por la forma de la Δ-filtración G' de M_{l-1}). Además, tenemos la siguiente Δ-filtración de M/M'_r

$$H : 0 = M'_r/M'_r < M'_{r+1}/M'_r < \ldots < M'_l/M'_r = M/M'_r$$

Es inmediato que $s_l \in S^H_\Delta(M/M'_r)$ es máximo. Como $1 < |S^G_\Delta(M_{l-1})| = |S^{G'}_\Delta(M_{l-1})|$ y $t_{l-1} \leq s_l$ se tiene que $|S^H_\Delta(M/M'_r)| > 1$. Entonces, por hipótesis de inducción existe una Δ-filtración H' de M/M'_r equivalente a H

$$H' : 0 = M'_r/M'_r = L_r/M'_r < L_{r+1}/M'_r < \ldots < L_l/M'_r = M/M'_r$$

tal que $(L_{r+1}/M'_r)/(L_r/M'_r) \cong L_{r+1}/L_r \cong \Delta(s_l)$ y para toda $j = r+2, r+3, \ldots, l$, $(L_j/M'_r)/(L_{j-1}/M'_r) \cong L_j/L_{j-1} \cong \Delta(s_j)$, con $s_j < s_l$. Entonces tenemos la siguiente Δ-filtración de L_{r+1}

$$J : 0 = M'_0 < M'_1 < \ldots < M'_r = L_r < L_{r+1}$$

con los primeros r Δ-factores isomorfos a $\Delta(t_{l-1})$ y el último isomorfo a $\Delta(s_l)$. Si $t_{l-1} = s_l$, entonces la siguiente Δ-filtración

$$F' : 0 = M'_0 < M'_1 < \ldots < M'_r = L_r < L_{r+1} < \ldots < L_l = M$$

es equivalente a F con los primeros $r+1$ Δ-factores isomorfos a $\Delta(t_{l-1})$ y los restantes son isomorfos a algún $\Delta(s_j)$ con $s_j < t_{l-1}$. Supongamos que $t_{l-1} < s_l$. Como $l^J_\Delta(L_{r+1}) < l$, por hipótesis de inducción existe una Δ-filtración J' de L_{r+1} equivalente a J

$$J' : 0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_r < N_{r+1} = L_{r+1}$$

con $N_1/N_0 \cong \Delta(s_l)$ y los restantes Δ-factores isomorfos a $\Delta(t_{l-1})$. Entonces la siguiente es la Δ-filtración de M equivalente a F que buscábamos

$$F' : 0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_r < L_{r+1} < \ldots < L_l = M.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos el siguiente importante resultado.

Corolario 3.1.10. *Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ y sea F una Δ-filtración de M. Entonces existe una Δ-filtración F' de M equivalente a F*

$$F' : 0 = M'_0 < M'_1 < \ldots < M'_m = M$$

tal que si $M'_i/M'_{i-1} \cong \Delta(r_i)$ y $M'_{i+1}/M'_i \cong \Delta(r_{i+1})$, entonces $r_i \geq r_{i+1}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Demostración. Si $|S^F_\Delta(M)| = 1$, por el lema 3.1.8 se tiene el resultado. Supongamos que $|S^F_\Delta(M)| > 1$. Sea $t_1 \in S^F_\Delta(M)$ máximo. Entonces por el lema 3.1.9, existe una Δ-filtración F_1 de M

$$F_1 : 0 = M_0^1 < M_1^1 < \ldots < M_r^1 < M_{r+1}^1 < \ldots < M_{m-1}^1 < M_m^1 = M$$

equivalente a F y $r \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, $M_i^1/M_{i-1}^1 \cong \Delta(t_1)$ y para cada $j = r+1, r+2, \ldots, m$, $M_j^1/M_{j-1}^1 \cong \Delta(s_j)$ con $s_j < t_1$. Consideremos la siguiente Δ-filtración de M/M_r^1

$$G : 0 = M_r^1/M_r^1 < M_{r+1}^1/M_r^1 < \ldots < M_m^1/M_r^1 = M/M_r^1$$

Si $|S_\Delta^G(M/M_r^1)| = 1$, entonces F_1 es la filtración buscada. Supongamos que $|S_\Delta^G(M/M_r^1)| > 1$. Sea $t_2 \in S_\Delta^G(M/M_r^1)$ máximo. Por la proposición 3.1.9 existe una Δ-filtración G_1 de M/M_r^1 equivalente a G

$$G_1 : 0 = M_r^1/M_r^1 = N_r/M_r^1 < N_{r+1}/M_r^1 < \ldots < N_m/M_r^1 = M/M_r^1$$

tal que para toda $i = r+1, r+2, \ldots, r_1$, $(N_i/M_r^1)/(N_{i-1}/M_r^1) \cong N_i/N_{i-1} \cong \Delta(t_2)$ y para cada $j = r_1+1, r_1+2, \ldots, m$, $(N_j/M_r^1)/(N_{j-1}/M_r^1) \cong N_j/N_{j-1} \cong \Delta(s_j)$, con $s_j < t_2$. Consideremos la siguiente Δ-filtración de M/N_{r_1}

$$H : 0 = N_{r_1}/N_{r_1} < N_{r_1+1}/N_{r_1} < \ldots < N_m/N_{r_1} = M/N_{r_1}$$

Si $|S_\Delta^H(M/N_{r_1})| = 1$, entonces la siguiente Δ-filtración de M es la buscada

$$F_2 : 0 = M_0^1 < M_1^1 < \ldots < M_r^1 = N_r < N_{r+1} < \ldots < N_{r_1} < N_{r_1+1} < \ldots < N_m = M$$

Si $|S_\Delta^H(M/N_{r_1})| > 1$, continuamos el procedimiento como en el caso anterior y de manera inductiva obtenemos el resultado. $\square$

Teorema 3.1.11. *Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ y consideremos dos Δ-filtraciones de M, F_1 y G_1. Entonces $[M : \Delta(i)]_{F_1} = [M : \Delta(i)]_{G_1}$, para toda $i = 1, \ldots, n$. Es decir, cualesquiera dos Δ-filtraciones de M son equivalentes.*

Demostración. Sin perder generalidad supongamos que la Δ-filtración F_1

$$F_1 : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$$

está ordenada como en el corolario 3.1.10. Sea $t_1 \in S_\Delta^{F_1}(M)$ máximo. Consideremos $i_1 \in \{1, \ldots, m\}$ máximo tal que $M_{i_1}/M_{i_1-1} \cong \Delta(t_1)$, entonces por el lema 3.1.8 se tiene que $M_j \cong \Delta(t_1)^j$ para cada $j = 1, \ldots, i_1$. Consideremos una serie de composición de Jordan-Hölder de M_{i_1}

$$S_1 : 0 = S_0^1 < S_1^1 < \ldots < S_{s_1}^1 = M_{i_1} \cong \Delta(t_1)^{i_1}$$

la cual, por el lema 2.1.6 tiene factores de composición $S(j)$ con $j \leq t_1$. Consideremos la siguiente Δ-filtración de M/M_{i_1}

$$F_2 : 0 = M_{i_1}/M_{i_1} < M_{i_1+1}/M_{i_1} < \ldots < M_m/M_{i_1} = M/M_{i_1}$$

la cual está ordenada como en el corolario 3.1.10. Sea $t_2 \in S_\Delta^{F_2}(M/M_{i_1})$ máximo e $i_2 \in \{i_1+1, i_1+2, \ldots, m\}$ máximo tal que $(M_{i_2}/M_{i_1})/(M_{i_2-1}/M_{i_1}) \cong M_{i_2}/M_{i_2-1} \cong \Delta(t_2)$. Por el lema 3.1.8 se tiene que $(M_j/M_{i_1})/(M_{j-1}/M_{i_1}) \cong M_j/M_{j-1} \cong \Delta(t_2)$ para cada $j = i_1+1, i_1+2, \ldots, i_2$. Consideremos una serie de composición de Jordan-Hölder de M_{i_2}/M_{i_1}

$$S_2 : 0 = S_0^2/M_{i_1} < S_1^2/M_{i_1} < \ldots < S_{s_2}^2/M_{i_1} = M_{i_2}/M_{i_1}$$

la cual, por el lema 2.1.6, tiene factores de composición $S(j)$ con $j \leq t_2 < t_1$. Continuando con el proceso se obtiene una serie de composición de M donde los factores de composición $S(t_1), S(t_2), \ldots, S(t_q)$ están ordenados como se ve en la construcción (además, se observa que $t_i > t_{i+1}$ y $S_\Delta^{F_1}(M) = \{t_1, \ldots, t_q\}$). De donde se tiene que $[M : S(t_1)] = [M : \Delta(t_1)]_{F_1}[\Delta(t_1) : S(t_1)]$. Por el Teorema de Jordan-Hölder $[M : S(t_1)]$ y $[\Delta(t_1) : S(t_1)]$ son números fijos, por lo tanto $[M : \Delta(t_1)]_{F_1}$ es un número fijo. Luego se tiene que $[M_{i_2}/M_{i_1} : S(t_2)] = [\Delta(t_2) : S(t_2)][M_{i_2}/M_{i_1} : \Delta(t_2)]_{F_2}$ y se sigue que $[M_{i_2}/M_{i_1} : \Delta(t_2)]_{F_2}$ es un número fijo. Como los $S(t_i)$ están ordenados y M_{i_1} tiene factores de composición $S(j)$ con $j \leq t_1$ y $t_2 < t_1$, se sigue que $[M_{i_2}/M_{i_1} : S(t_2)] = [M : S(t_2)]$ y así $[M_{i_2}/M_{i_1} : \Delta(t_2)]_{F_2} = [M : \Delta(t_2)]_{F_1}$ es un número fijo. Inductivamente se tiene que $[M : \Delta(i)]_{F_1}$ es un número fijo para cada $i = 1, \ldots, n$. □

Gracias al resultado anterior se tiene que cualesquiera dos Δ-filtraciones de un Λ-módulo $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ son equivalentes, lo cual nos permite reformular las definiciones 3.1.4 y 3.1.3.

Definición 3.1.12. *Sea $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ un Λ-módulo disinto de cero.*

1) *Sea $\Delta(i) \in \Delta$. Definimos la multiplicidad de $\Delta(i)$ en M, a la que denotamos $[M : \Delta(i)]$, como el número de veces que aparece $\Delta(i)$ como factor de composición en alguna Δ-filtración de M.*

2) *Denotamos por $S_\Delta(M)$ al conjunto de todos los números $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $[M : \Delta(i)] \neq 0$. A dicho conjunto se le conoce como el Δ-soporte de M.*

3) *Definimos la Δ-longitud de M como $l_\Delta(M) := \sum_{i \in S_\Delta(M)} [M : \Delta(i)]$.*

También podemos reformular el lema 3.1.8, la proposición 3.1.9 y el corolario 3.1.10. Es decir, tenemos los siguientes resultados.

Lema 3.1.13. *Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta(j))$. Para cada Δ-filtración de M*

$$\xi_M : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$$

se tiene que $M_i \cong \Delta(j)^i$, para toda $i = 1, 2, \ldots, m$. □

Lema 3.1.14. *Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ tal que $|S_\Delta(M)| > 1$ y $t \in S_\Delta(M)$ máximo. Entonces existe un submódulo $L < M$ tal que $M/L \in \mathcal{F}(\Delta(1), \Delta(2), \ldots, \Delta(t-1))$ y $L \in add(\Delta(t))$.*

Demostración. Es inmediato de la proposición 3.1.9 □

Corolario 3.1.15. *Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$. Entonces existe una Δ-filtración de M*

$$F : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$$

tal que si $M_i/M_{i-1} \cong \Delta(r_i)$ *y* $M_{i+1}/M_i \cong \Delta(r_{i+1})$*, entonces* $r_i \geq r_{i+1}$*, para cada* $i = 1, \ldots, m-1$. □

En lo que resta de este trabajo toda Δ-filtración que consideremos para un Λ-módulo en $\mathcal{F}(\Delta)$ será de la forma mencionada en el corolario 3.1.15.
El siguiente es un resultado importante que nos será de utilidad más adelante.

Corolario 3.1.16. *Sea* $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ *y* $p \in [1, n]$*. Entonces existe un único submódulo más grande* $L \leq M$ *tal que* $L \in \mathcal{F}(\Delta(p), \Delta(p+1), \ldots, \Delta(n))$ *y* $M/L \in \mathcal{F}(\Delta(1), \Delta(2), \ldots, \Delta(p-1))$.

Demostración. Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Delta)$ y $p \in [1, n]$. Consideremos una Δ-filtración de M de la forma enunciada en el corolario 3.1.15. Esto es

$$F : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$$

Entonces se tienen los siguientes casos:

Caso 1) Si $p \in S_\Delta(M)$, consideremos $i \in \{1, \ldots, m\}$ el máximo número tal que $M_i/M_{i-1} \cong \Delta(p)$. Entonces por los lemas 3.1.13 y 3.1.14, $M_i \in \mathcal{F}(\Delta(p), \Delta(p+1), \ldots, \Delta(n))$ y $M/M_i \in \mathcal{F}(\Delta(1), \Delta(2), \ldots, \Delta(p-1))$.

Caso 2) Supongamos que $p \notin S_\Delta(M)$, entonces tenemos los siguientes subcasos:

- Si $p > t$, donde t es el máximo elemento en $S_\Delta(M)$, entonces claramente 0 es el submódulo buscado.
- Si $p < r$, donde r es el mínimo elemento en $S_\Delta(M)$, entonces claramente M es el submódulo buscado.
- Si $r < p < t$. Dado que $p \notin S_\Delta(M)$ y $r, t \in S_\Delta(M)$ se tiene que $r \neq t$ y por tanto $|S_\Delta(M)| > 1$. Como además tenemos que $M_i/M_{i-1} \cong \Delta(s_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, con $t = s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_m = r$, consideremos el máximo elemento $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que s_j es el mínimo elemento tal que $s_j > p$, de donde se sigue que $s_j > p > s_{j+1}$, y claramente M_j es el módulo que buscamos.

En cualquiera de los casos la unicidad se debe a [11, Lemma 2.1].

□

3.2. $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos

En esta sección demostraremos que la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ de una K-álgebra estándarmente estratificada a la izquierda es una categoría resolvente. Iniciamos probando el siguiente resultado, el cual muestra una propiedad importante de la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$, de una K-álgebra. Recordemos que siempre consideramos álgebras de dimensión finita, básicas sobre un campo algebraicamente cerrado.

Lema 3.2.1. *Sea Λ una K-álgebra. Entonces la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

con $L, N \in \mathcal{F}(\Delta)$ y una Δ-filtración de N

$$F_N : 0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_t = N$$

Para cada $i = 0, 1, \ldots, t$, definimos $M_i := f^{-1}(N_i)$. Como f es epimorfismo se tiene que $M_i < M_{i+1}$ para cada $i = 0, 1, \ldots, t-1$ y entonces obtenemos una cadena finita de submódulos de M

$$M_0 < M_1 < \ldots < M_t = M$$

Para cada $i = 1, \ldots, t$, definimos los epimorfismos $f_i : M_i \longrightarrow N_i/N_{i-1}$ dados por $f_i(x) = f(x) + N_{i-1}$ con $ker f_i = M_{i-1}$. Por el primer Teorema de Isomorfismo se tiene que

$$M_i/M_{i-1} \cong N_i/N_{i-1} \cong \Delta(j_i)$$

Como $M_0 = ker f = Im g \cong L$, se sigue que M_0 tiene una Δ-filtración

$$F_{M_0} : 0 = L_0 < L_1 < \ldots < L_p = M_0.$$

Por lo tanto

$$F_M : 0 = L_0 < L_1 < \ldots < L_p < M_1 < \ldots < M_t = M.$$

es una Δ-filtración para M. □

Corolario 3.2.2. *$\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo sumas directas finitas.*

Demostración. Es inmediata del lema anterior. □

Como corolario del resultado anterior tenemos la siguiente caracterización de un álgebra estándarmente estratificada a la izquierda.

Corolario 3.2.3. *Sea Λ una K-álgebra básica de dimensión finita con K un campo algebraicamente cerrado. Consideremos su descomposición en Λ-módulos proyectivos e inescindibles ${}_\Lambda\Lambda = P(1) \oplus \ldots \oplus P(n)$. Entonces, $(\Lambda, \leq)$ es estándarmente estratificada si y sólo si, ${}_\Lambda\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$.*

Demostración. Es inmediata del corolario 3.2.2 y [7, Theorem 2]. □

Consideremos los ejemplos de 2.2.1 y el orden natural en $[1, n]$.

Ejemplo 3.2.4. *a) Consideremos el siguiente carcaj*

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

y el ideal admisible $R = \langle \alpha_2\alpha_1, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2, \alpha_2\beta_2\rangle$. *Si* $\Lambda = KC/R$, *entonces los módulos estándar son:*

$$\Delta(1) = S(1) \qquad \Delta(2): \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad \Delta(3) = P(3): \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 2 \end{tikzcd}$$

Notemos que cada $P(i)$ *tiene una* Δ*-filtración, las cuales están dadas por:*

$$0 < \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd} < P(1) \qquad 0 < \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 1 \end{tikzcd} < P(2) \qquad 0 < P(3)$$

Por lo tanto $(\Lambda, \leq)$ *es estándarmente estratificada a la izquierda.*

b) Consideremos el carcaj

$$C: \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, shift right, "\beta"'] \arrow[l, shift left, "\gamma"] & 3 \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

y $R = \langle \beta\alpha\rangle$ *un ideal admisible de* KC. *Si* $\Lambda = KC/R$, *entonces los módulos estándar son:* $\Delta(i) = P(i)$ *para cada* $i = 1, 2, 3$, *y por lo tanto* $(\Lambda, \leq)$ *es estándarmente estratificada a la izquierda.*

c) Consideremos el siguiente carcaj

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y su ideal admisible $R = \langle \alpha\beta\rangle$. *Si* $\Lambda = KC/R$, *entonces los módulos estándar son:* $\Delta(1) = S(1)$ *y* $\Delta(2) = P(2)$. *Se tiene que* $0 < P(2) < P(1)$ *es una* Δ*-filtración de* $P(1)$. *Por lo tanto* $(\Lambda, \leq)$ *es estándarmente estratificada a la izquierda.*

d) Consideremos el siguiente carcaj

$$C: \begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\alpha"] & 3 & 4 \arrow[l, "\beta"'] & 1 \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

y el ideal admisible $R = \langle \beta\gamma\rangle$ *de* KC. *Los módulos estándar de* $\Lambda = KC/R$ *son:* $\Delta(1) = S(1)$, $\Delta(2) = S(2)$, $\Delta(3) = P(3)$ *y* $\Delta(4) = P(4)$. *Observemos que* $P(1)$ *no es isomorfo a algún* $\Delta(i)$ *y que su único submódulo no trivial es* $S(4)$, *el cual no es isomorfo a algún* $\Delta(i)$. *Entonces* $P(1) \notin \mathcal{F}(\Delta)$ *y por tanto* $(\Lambda, \leq)$ *no es estándarmente estratificada a la izquierda.*
Consideremos el orden siguiente: $3 \leq' 4 \leq' 2 \leq' 1$. *Con este orden los módulos estándar de la* K*-álgebra* $\Lambda = KC/R$ *son los siguientes:*

$$\Delta(1) = P(1) \qquad \Delta(2) = P(2) \qquad \Delta(3) = P(3) \qquad \Delta(4) = P(4).$$

Por tanto, con el orden $\leq'$ *se tiene que* $(\Lambda, \leq')$ *es una álgebra estándarmente estratificada a la izquierda.*

Vamos a demostrar que la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Para eso, vamos a necesitar algunos resultados técnicos que enunciamos a continuación.

Lema 3.2.5. *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *un epimorfismo con* $M, N \in \mathcal{F}(\Delta)$ *y* $F : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_m = M$ *la* Δ*-filtración de* M *dada en el corolario 3.1.15. Entonces a partir de* F *se puede construir la* Δ*-filtración* G *de* N *dada en el corolario 3.1.15.*

Demostración. Consideremos la Δ-filtración de M

$$F : 0 = M_0 < M_1 < M_2 < \ldots < M_m = M$$

dada en el corolario 3.1.15. Para cada $i = 0, 1, \ldots, m$ definimos $N_i := f(M_i)$, entonces obtenemos una cadena finita de submódulos de N

$$0 = N_0 \leq N_1 \leq \ldots \leq N_m = N$$

Consideremos t_1 el mínimo elemento en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $0 < N_{t_1}$, luego sea t_2 el mínimo elemento en $\{t_1 + 1, t_1 + 2 \ldots, m\}$ tal que $N_{t_1} < N_{t_2}$. Continuando con este proceso, obtenemos la siguiente cadena finita de N

$$G : \; 0 = N_{t_0} < N_{t_1} < \ldots < N_{t_{(r-2)}} < N_{t_{(r-1)}} < N_{t_r} = N$$

Para cada $s = 1, 2, \ldots, r$ definimos los epimorfismos $f_s : M_{t_s} \longrightarrow N_{t_s}/N_{t_{s-1}}$ dados por $f_s(x) = f(x) + N_{t_{s-1}}$, y como f es un epimorfismo se tiene que $ker f_s = M_{t_s - 1}$. Del primer Teorema de Isomorfismo se sigue que

$$\Delta(i_s) \cong M_{t_s}/M_{t_s-1} \cong N_{t_s}/N_{t_{s-1}}$$

y por lo tanto G es una Δ-filtración de N. Es claro que G satisface las propiedades dadas en el corolario 3.1.15. $\square$

Del lema anterior es inmediato el siguiente corolario.

Corolario 3.2.6. *Si* $f : M \longrightarrow N$ *es un epimorfismo con* $M, N \in \mathcal{F}(\Delta)$*, entonces* $S_\Delta(N) \subseteq S_\Delta(M)$ *y* $l_\Delta(N) \leq l_\Delta(M)$. $\square$

Sea $f : M \longrightarrow N$ un epimorfismo con $M, N \in \mathcal{F}(\Delta)$ y t el máximo elemento de $S_\Delta(M)$. Es inmediato del resultado anterior que si t es un elemento del Δ-soporte de N, entonces t también es el máximo elemento de $S_\Delta(N)$. Teniendo presente este hecho, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.7. *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *un epimorfismo con* $M, N \in \mathcal{F}(\Delta)$ *y sea* t *el máximo elemento en* $S_\Delta(M)$ *. Consideremos a los submódulos* M_r *y* $N_{r'}$ *de* M *y* N*, respectivamente, mencionados en el lema 3.1.14. Entonces, si* t *pertenece a* $S_\Delta(N)$ *se tiene que* $f(M_r) = N_{r'}$.

Demostración. Consideremos un epimorfismo $f : M \longrightarrow N$ con $M, N \in \mathcal{F}(\Delta)$ y t el elemento máximo del conjunto $S_\Delta(M)$. Supongamos que $t \in S_\Delta(N)$. Sean M_r y $N_{r'}$ los submódulos M y N, respectivamente, mencionados en el lema 3.1.14, de donde se tiene que $M_r \cong \Delta(t)^r$ y $N_{r'} \cong \Delta(t)^{r'}$. Consideremos la Δ-filtración de M

$$F : 0 = M_0 < M_1 < \ldots < M_r < M_{r+1} < \ldots < M_m = M$$

mencionada en el corolario 3.1.15. Se tiene que $f(M_r) \neq 0$, ya que en otro caso, siguiendo la demostración del lema 3.2.5 se tendría que $t \notin S_\Delta(N)$, lo cual es una contradicción. Al aplicar el lema 3.2.5, tenemos la Δ-filtración de N

$$G : \; 0 = N_0 < N_1 < N_2 < \ldots < N_p = N$$

inducida por el epimorfismo f. De acuerdo a la demostración del lema 3.2.5, se tiene que $f(M_r) = N_d \in add(\Delta(t))$, con alguna $d \in \{1, 2, \ldots, p\}$ y $N/N_d \in \mathcal{F}(\Delta(1), \Delta(2), \ldots, \Delta(t-1))$. Entonces $f(M_r)$ tiene las mismas propiedades que el submódulo $N_{r'}$. De acuerdo al corolario 3.1.16, como $N_{r'}$ es único, se tiene que $f(M_r) = N_{r'}$. □

El siguiente es uno de los resultados principales de este trabajo.

Teorema 3.2.8. $\mathcal{F}(\Delta)$ *es cerrada bajo núcleos de epimorfismos.*

Demostración. Consideremos un epimorfismo $f : M \longrightarrow N$, con $M, N \in \mathcal{F}(\Delta)$ distintos de cero. Procedemos por inducción sobre la cardinalidad de $S_\Delta(M)$. Supongamos que $|S_\Delta(M)| = 1$, entonces por el lema 3.1.13 se tiene que $M \cong \Delta(i)^m$, para algún $i \in [1, n]$, donde m es la Δ-longitud de M. Usando el corolario 3.2.6 y el lema 3.1.13 se tiene que $|S_\Delta(N)| = 1$ y $N \cong \Delta(i)^s$ con $s \leq m$. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U(i) \longrightarrow P(i) \longrightarrow \Delta(i) \longrightarrow 0$$

entonces al aplicar el funtor $Hom_\Lambda(-, kerf)$ obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\Delta(i), kerf) \longrightarrow Hom_\Lambda(P(i), kerf) \longrightarrow Hom_\Lambda(U(i), kerf) \longrightarrow \\ Ext^1_\Lambda(\Delta(i), kerf) \longrightarrow Ext^1_\Lambda(P(i), kerf) = 0\end{gathered}$$

Veamos que $Ext^1_\Lambda(\Delta(i), kerf) = 0$. Para ello, basta verificar que $Hom_\Lambda(U(i), kerf) = 0$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe un Λ-morfismo $h : U(i) \longrightarrow kerf$ distinto de cero. Como $U(i)$ está generado por las imágenes de los morfismos $g : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$, podemos considerar $x \in Img$ tal que $h(x) \neq 0$. Así, la siguiente composición de morfismos

$$P(j) \longrightarrow Img \subseteq U(i) \longrightarrow kerf$$

es distinta de cero, lo cual es una contradicción, pues $kerf \subseteq M \cong \Delta(i)^m$ y según el lema 2.1.10, $Hom_\Lambda(P(j), \Delta(i)) = 0$. Por lo tanto $Hom_\Lambda(U(i), kerf) = 0$, y se sigue que $Ext^1_\Lambda(\Delta(i), kerf) = 0$. Como $N \cong \Delta(i)^s$ la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow kerf \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

se escinde. De donde $M \cong \Delta(i)^m \cong kerf \oplus \Delta(i)^s$ y por tanto $kerf \cong \Delta(i)^{m-s}$. Por lo tanto hemos completado el caso base de inducción.

Supongamos que el resultado es cierto para cada $L \in \mathcal{F}(\Delta)$ tal que la cardinalidad de $S_\Delta(L)$ es menor a $p > 1$. Consideremos el caso en que $|S_\Delta(M)| = p$. Sea $t \in S_\Delta(M)$ máximo. Del lema 3.1.14 se tiene que existe un submódulo $M_1 < M$ tal que $M_1 \cong \Delta(t)^r$ y $M/M_1 \in \mathcal{F}(\Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(t-1))$. Del corolario 3.1.16 se tiene que existe un único submódulo $N_1 < N$ tal que $N_1 \in \mathcal{F}(\Delta(t), \Delta(t+1), \dots, \Delta(n))$ y $N/N_1 \in \mathcal{F}(\Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(t-1))$. Usando el corolario 3.2.6 se sigue que $S_\Delta(N) \subseteq S_\Delta(M)$, entonces si t_1 es el máximo en $S_\Delta(N)$ se sigue que $t_1 \leq t$. Si se da la igualdad entonces por el lema 3.1.14 $N_1 \cong \Delta(t)^s$, para algún número natural s. Si $t_1 < t$, entonces de acuerdo al primer punto del caso 2) en la demostración de 3.1.16 se tiene que $N_1 = 0$.

Consideremos el morfismo $\overline{f} : M/M_1 \longrightarrow N/N_1$ dado por $\overline{f}(x+M_1) = f(x)+N_1$. Como f es epimorfismo entonces $\overline{f}$ lo es. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
 & kerf' \arrow[d] & kerf \arrow[d] & ker\overline{f} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "f'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & M/M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & N/N_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & cokerf' & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Donde i y μ son las inclusiones naturales y, p y π las proyecciones canónicas. Como $pi = 0$ y $\overline{f}p = \pi f$, entonces $\overline{f}pi = \pi f i = 0$ y por la propiedad universal del núcleo, aplicada a π, se sigue que existe un único morfismo f' tal que $\mu f' = fi$. De hecho se tiene que $f' = f|_{M_1}$. Veamos que $cokerf' = 0$. Si $N_1 = 0$, entonces es claro que el conúcleo es cero. Supongamos que $N_1 \neq 0$, entonces $t \in S_\Delta(N)$ es máximo y por el corolario 3.2.7 se tiene que $f(M_1) \cong N_1$, es decir, f' es un epimorfismo y por tanto $cokerf' = 0$. Usando el lema de la serpiente en el diagrama anterior obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow kerf' \longrightarrow kerf \longrightarrow ker\overline{f} \longrightarrow 0$$

Como $|S_\Delta(M_1)| = 1$ y $|S_\Delta(M/M_1)| < p$ (pues $M_1 \neq 0$), por hipótesis de inducción se tiene que $kerf', ker\overline{f} \in \mathcal{F}(\Delta)$. Del lema 3.2.1 se tiene que $kerf \in \mathcal{F}(\Delta)$. Lo cual prueba el resultado. $\square$

Para concluir este trabajo necesitamos el siguiente concepto.

Definición 3.2.9. *Sea $\mathcal{X}$ una subcategoría de Λ-mod. Se dice que $\mathcal{X}$ es una categoría resolvente si es cerrada bajo núcleos de epimorfismos y contiene a todos los proyectivos.*

Corolario 3.2.10. *Si $(\Lambda, \leq)$ es estándarmente estratificada entonces la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ es una categoría resolvente.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.8 sabemos que $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Veamos que contiene a todos los Λ-módulos proyectivos. Sea $P \in \Lambda$-mod proyectivo. Por el Teorema 1.1.13 podemos considerar su descomposición en Λ-módulos inescindibles

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_r.$$

Se tiene que cada P_i es un Λ-módulo proyectivo inescindible. Como $(\Lambda, \leq)$ es estándarmente estratificada a la izquierda, cada $P_i \in \mathcal{F}(\Delta)$. Como $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo sumas directas finitas se tiene que $P \in \mathcal{F}(\Delta)$. $\square$

Capítulo 4

Ejemplos

El objetivo de esta tesis fue probar que la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ de un álgebra estándarmente estratificada es resolvente. Como pudimos notar en el capítulo anterior, lo más complicado de esto fue probar que la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos (Teorema 3.2.8). En este último capítulo veremos algunos ejemplos de Λ-epimorfismos para ilustrar que, en efecto, el núcleo de cada epimorfismo en $\mathcal{F}(\Delta)$ pertenece a dicha categoría.
Retomemos los ejemplos vistos en 3.2.4. No olvidemos que en dichos ejemplos estamos considerando el orden natural del conjunto $[1, n]$ y que para el ejemplo 3.2.4 d) se dio un orden adicional. Consideremos la siguiente notación: si $f : M \longrightarrow N$ es un Λ-morfismo, denotamos por f' al epimorfismo $f' : M \longrightarrow Imf$ cuya regla de correspondencia coincide con la de f.

a) Consideremos el siguiente carcaj

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

y el ideal admisible $R = \langle \alpha_2\alpha_1, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2, \alpha_2\beta_2 \rangle$ de KC. Sea $\Lambda = KC/R$ una K-álgebra, sabemos que los Λ-módulos proyectivos inescindibles son:

$$P(1): \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(2): \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ 3 \arrow[dr, "\beta_2"'] & & 1 \arrow[dl, "\alpha_1"] \\ & 2 & \end{tikzcd} \qquad P(3): \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 2 \end{tikzcd}$$

Los módulos estándar son

$$\Delta(1) = S(1) \qquad \Delta(2): \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_1} \\ 1 \end{array} \qquad \Delta(3) = P(3): \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_2} \\ 2 \end{array}$$

Como es de suponerse, se tienen los epimorfismos canónicos.

- $\pi_1 : P(1) \longrightarrow \Delta(1)$ cuyo $ker\pi_1 = U(1) \cong \Delta(2) : \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_1} \\ 1 \end{array}$
- $\pi_2 : P(2) \longrightarrow \Delta(2)$ cuyo $ker\pi_2 = U(2) \cong \Delta(3) : \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_2} \\ 2 \end{array}$
- $\pi_3 : P(3) \longrightarrow \Delta(3)$ cuyo $ker\pi_3 = 0$.

Veamos otros Λ-morfismos.

- Consideremos $f_1 : P(1) \longrightarrow P(2)$ dado por $f_1(\epsilon_1) = \beta_1$, $f_1(\alpha_1) = \alpha_1\beta_1$ y $f_1(\beta_1\alpha_1) = \beta_1\alpha_1\beta_1 = 0$. De donde, $Imf_1 = K\beta_1 \oplus K\alpha_1\beta_1 \cong \Delta(2)$. Al considerar el epimorfismo $f_1' : P(1) \longrightarrow Imf_1$ se tiene que $kerf_1' \in \mathcal{F}(\Delta)$. En efecto, pues $kerf_1' = K\beta_1\alpha_1 \cong \Delta(1)$.
- Sea $f_2 : P(2) \longrightarrow P(3)$ dado por $f_2(\epsilon_2) = \beta_2$, $f_2(\alpha_2) = \alpha_2\beta_2 = 0$, $f_2(\beta_1) = \beta_1\beta_2 = 0$ y $f_2(\beta_2\alpha_2) = \beta_2\alpha_2\beta_2 = 0$. En este caso $Imf_2 = K\beta_2 \notin \mathcal{F}(\Delta)$, pero $kerf \in \mathcal{F}(\Delta)$.
- Consideremos $f_3 : P(2) \longrightarrow P(1)$ dado por $f_3(\epsilon_2) = \alpha_1$, $f_3(\beta_1) = \beta_1\alpha_1$, $f_3(\alpha_2) = \alpha_2\alpha_1 = 0$ y $f_3(\beta_2\alpha_2) = \beta_2\alpha_2\alpha_1 = 0$. Se tiene que $Imf_3 = K\alpha_1 \oplus K\beta_1\alpha_1 \cong \Delta(2)$ y por tanto $kerf_3' \in \mathcal{F}(\Delta)$, pues $kerf_3' = K\alpha_2 \oplus K\beta_2\alpha_2 \cong \Delta(3)$.
- Consideremos $f_4 : P(3) \longrightarrow P(2)$, donde $f_4(\epsilon_2) = \alpha_2$ y $f_4(\beta_2) = \beta_2\alpha_2$. $Imf_4 \in \mathcal{F}(\Delta)$ ya que $Imf_4 = K\alpha_2 \oplus K\beta_2\alpha_2 \cong \Delta(3)$. Trivialmente se sigue que $kerf_4' \in \mathcal{F}(\Delta)$, pues f_4 es un monomorfismo.
- Sea $f_5 : P(1) \longrightarrow \Delta(2)$ dado por $f_5(\epsilon_1) = \beta_1$, $f_5(\alpha_1) = \alpha_1\beta_1 = 0$ y $f_5(\beta_1\alpha_1) = \beta_1\alpha_1\beta_1 = 0$. En este caso, $Imf_5 = K\beta_1 \cong \Delta(1)$ y por tanto $kerf_5' \in \mathcal{F}(\Delta)$, pues $kerf_5' = K\alpha_1 \oplus K\beta_1\alpha_1 \cong \Delta(2)$.

b) Consideremos el carcaj

$$C: \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, shift right, "\beta"'] \arrow[l, shift left, "\gamma"'] & 3 \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

y $R = \langle \beta\alpha \rangle$ ideal admisible de KC. Sabemos que $\Lambda = KC/R$ tiene como Λ-módulos proyectivos e inescindibles a

$$P(1): \ S(1) \qquad P(2): \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 & & 1 \end{tikzcd} \qquad P(3): \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\alpha"'] \\ 2 \arrow[d, "\gamma"'] \\ 1 \end{tikzcd}$$

Los módulos estándar son $\Delta(i) = P(i)$ para cada $i = 1, 2, 3$. Omitimos las proyecciones canónicas $\pi_i : P(i) \longrightarrow \Delta(i)$, pues su núcleo es cero. Consideremos los siguientes morfismos.

- Sea $f : P(1) \longrightarrow P(3)$ dado por $f(\epsilon_1) = \gamma\alpha$. De donde $Imf = K\gamma\alpha \cong \Delta(1)$, y por tanto $kerf' \in \mathcal{F}(\Delta)$.
- Sea $h : P(2) \longrightarrow P(3)$ dado por $h(\epsilon_2) = \alpha$, $h(\beta) = \beta\alpha = 0$ y $h(\gamma) = \gamma\alpha$. En este caso observamos que $kerh = K\beta \cong \Delta(1)$, pero $Imh \notin \mathcal{F}(\Delta)$.

c) Consideremos el siguiente carcaj

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y el ideal admisible $R = \langle \alpha\beta \rangle$ de KC. Los proyectivos inescindibles de $\Lambda = KC/R$ son

$$P(1): \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha"] \\ 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(2): \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \end{tikzcd}$$

y los módulos estándar son $\Delta(1) = S(1)$ y $\Delta(2) = P(2)$. Primero examinemos las proyecciones canónicas.

- $\pi_1 : P(1) \longrightarrow \Delta(1)$ tiene $ker\pi_1 \cong \Delta(2)$.
- $\pi_2 : P(2) \longrightarrow \Delta(2)$ tiene $ker\pi_2 = 0$.

Veamos otro par de morfismos.

- Sea $f : P(1) \longrightarrow P(2)$ definido como $f(\epsilon_1) = \beta$, $f(\alpha) = \alpha\beta = 0$ y $f(\beta\alpha) = \beta\alpha\beta = 0$. Se tiene que $Imf \in \mathcal{F}(\Delta)$, pues $Imf = K\beta \cong \Delta(1)$. Por tanto $kerf' = K\alpha \oplus K\beta\alpha \in \mathcal{F}(\Delta)$, pues $kerf' \cong \Delta(2)$.
- Sea $h : P(2) \longrightarrow P(1)$ definido como $h(\epsilon_2) = \alpha$ y $h(\beta) = \beta\alpha$. En este caso $Imf = K\alpha \oplus K\beta\alpha \cong \Delta(2)$ y por tanto $kerh' \in \mathcal{F}(\Delta)$

d) Consideremos el carcaj

$$C: \quad 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xleftarrow{\beta} 4 \xleftarrow{\gamma} 1$$

y el ideal admisible $R = \langle \beta\gamma \rangle$ de KC. Los proyectivos inescindibles de $\Lambda = KC/R$ son

$$P(1): \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \gamma \\ 4 \end{array} \qquad P(2): \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \alpha \\ 3 \end{array} \qquad P(3): S(3) \qquad P(4): \begin{array}{c} 4 \\ \downarrow \beta \\ 3 \end{array}$$

Con el orden usual en $[1,3]$, los módulos estándar son $\Delta(1) = S(1)$, $\Delta(2) = S(2)$, $\Delta(3) = P(3) = S(3)$ y $\Delta(4) = P(4)$. Recordemos que en 3.2.4 d) vimos que $P(1) \notin \mathcal{F}(\Delta)$. Verifiquemos las proyecciones canónicas y un par de morfismos más.

- $\pi_2 : P(2) \longrightarrow \Delta(2)$ tiene $ker\pi_2 \cong \Delta(3)$.
- $\pi_3 : P(3) \longrightarrow \Delta(3)$ tiene $ker\pi_3 = 0$.
- $\pi_4 : P(4) \longrightarrow \Delta(4)$ tiene $ker\pi_4 = 0$.
- Sea $f : P(3) \longrightarrow P(2)$ definido por $f(\epsilon_3) = \alpha$. Se tiene que $Imf = K\alpha \cong \Delta(3)$ y se sigue que $kerf' \in \mathcal{F}(\Delta)$.
- Sea $h : P(3) \longrightarrow P(4)$ definido por $h(\epsilon_3) = \beta$. Tenemos que $Imh = K\beta \cong \Delta(3)$ y por tanto $kerh' \in \mathcal{F}(\Delta)$.

Ahora consideremos el orden $3 \leq' 4 \leq' 2 \leq' 1$. Ya sabemos que con este orden, cada módulo estándar coincide con el respectivo proyectivo, es decir, $\Delta(i) = P(i)$ para cada $i = 1, \ldots, 4$. De donde $(\Lambda, \leq')$ es estándarmente estratificada a la izquierda. Con este orden tenemos que las proyecciones canónicas $\pi_i : P(i) \longrightarrow \Delta(i)$ tienen núcleo cero. Veamos otros morfismos.

- Sea $f : P(3) \longrightarrow P(4)$ definido por $f(\epsilon_3) = \beta$. Se tiene que $Imf = K\beta \cong \Delta(3)$ y claramente $kerf \in \mathcal{F}(\Delta)$.
- Sea $g : P(3) \longrightarrow P(2)$ definido por $g(\epsilon_3) = \alpha$. De donde, $Img = K\alpha \cong \Delta(3)$ y así $kerg \in \mathcal{F}(\Delta)$.
- Consideremos $h : P(4) \longrightarrow P(1)$ dado por $h(\epsilon_4) = \gamma$ y $h(\beta) = \beta\gamma = 0$. Notemos que $Imh = K\gamma \cong S(4) \notin \mathcal{F}(\Delta)$, sin embargo se tiene que $kerh = K\beta \cong \Delta(3)$.

Bibliografía

[1] I. Agoston, D. Happel, E. Lukács & L. Hunger. Standardly stratified algebras and tilting. *Journal of Algebra*, 226:140–160, 2000.

[2] I. Agoston, V. Dlab & E. Lukács. Stratified algebras. *C.R. Mathematical Reports of the Academy of Science, Canada*, 20(1):22–28, 1998.

[3] F.W. Anderson and K.R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag, New York USA, 1992.

[4] C. Cibils, F. Larrion & L. Salmerón. *Métodos Diagramáticos en Teoría de Representaciones*. Monografías del Instituto de Matemáticas. UNAM, 1981.

[5] E. Cline, B. Parshall & L. Scott. Finite dimensional algebras and highest weight categories. *Journal reine angew. Math.*, 391:85–99, 1988.

[6] V. Dlab and C.M. Ringel. The module theorical approach to quasi-hereditary algebras. *Representation Theory and Related Topics, London Mathematical Society LNS*, 168:200–224, 1992.

[7] C.M. Ringel. The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. *Mathematische Zeitschrift*, 208:209–223, 1991.

[8] L. Scott. Simulating algebraic geometry with algebra, I: The algebraic theory of derived categories. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 47:271–281, 1987.

[9] A. Skowronski, I. Assem & D. Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 1. Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press, 2006.

[10] J.E. Vega Acevedo. *El conjunto de los módulos estándar es un sistema estratificante*. Tesis para obtener el título de Matemático. Facultad de Ciencias UNAM, 2014.

[11] C.C. Xi. Endomorphism Algebras of $\mathcal{F}(\Delta)$ over Quasi-hereditary Algebras. *Journal of Algebra*, 175:966–978, 1995.

[12] C.C. Xi. Standardly stratified algebras and cellular algebras. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 133:37–53, 2002.