UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA HOLOMORFA LOCAL

TESINA QUE PARA OPTAR POR EL
GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JORGE RENÉ GONZÁLEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE LA TESINA: JAWAD SNOUSSI.
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNAM UNIDAD CUERNAVACA.

CIUDAD DE MÉXICO, D.F. OCTUBRE DE 2015.

Índice

1. **Introducción** 2

2. **Definiciones** 4

3. **Teoremas de División y Preparación de Weierstraß** 5

4. **Aplicaciones** 16

Referencias 20

1. Introducción

Basicamente la geometría algebráica es el estudio de ceros de conjuntos de polinomios (pudieramos pensarlos sobre un campo algebraicamente cerrado). Para poder desarrollar las bases de esta teoría se requiere cierto conocimiento de álgebra conmutativa, y de igual forma, el álgebra conmutativa, necesita una motivación geométrica para entender mejor por qué se desarrolla.

A la geometría analítica le concierne el estudio de ceros de funciones analíticas, de igual manera apoyados en el álgebra conmutativa, es decir, estudia funciones que se pueden escribir como series de potencias en un numero finito de variables, es de nuestro interés estudiar en qué aspectos la geometría analítica tienen un análogo a la geometría algebráica, aunque en algunos casos ésta resulte más complicada (para algunos casos el caso analítico es más sencillo, por ejemplo el lema de Nakayama, al trabajar sólo con anillos locales todo ideal está contenido en el radical de Jacobson).

Por ejemplo, un resultado fundamental del álgebra conmutativa, es el teorema de la Base de Hilbert, el cual nos dice que si un anillo conmutativo unitario R es Noetheriano (es decir, todos los ideales de R son finitamente generados), entonces el anillo $R[x]$ de polinomios en una variable sobre R lo es, y por lo tanto el anillo de polinomios en varias variables $R[x_1, ..., x_n]$ también lo es (por inducción en n). En este trabajo se expone un resultado análogo, el cual dice que el anillo de series de potencias convergentes en cero con coeficientes complejos (al que denotamos por $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$) y el anillo de series formales de potencias con coeficientes complejos (al que denotamos como $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$), son anillos Noetherianos. La demostración de este resultado no es posible simplemente calcando la prueba para el caso del anillo de polinomios, ya que en la prueba del teorema de la base de Hilbert, se argumenta por el grado de unos polinomios, y en el anillo de series convergentes de potencias en cero (resp. series formales de potencias) no tenemos el concepto de grado, pero tenemos un análogo a este concepto que es el concepto de orden, el cuál podemos decir es el menor grado de todos los monomios que componen a una serie, ésta definición de orden resultará muy útil al querer ver a una serie como un polinomio en la última variable.

Para demostrar este resultado, demostraremos y haremos uso de los teoremas de Weierstraß, los cuales son:

1. Teorema de la División de Weierstraß:

   El cuál nos dice que bajo ciertas hipótesis (las cuales siempre se pueden asumir bajo un adecuado cambio de coordenadas), en el anillo de series convergentes de potencias (resp. series formales de potencias), tenemos un tipo de division euclidiana, es decir, dada una serie de potencias $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ que sea regular de orden b en x_n (esto se define más adelante), y alguna otra serie $g \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, entonces existen únicamente definidos $q \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ y $r \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$, donde r es considerado polinomio en x_n con grado menor a b tales que

   $$g = q \cdot f + r.$$

2. Teorema de Preparación de Weierstraß:

Este nos dice que toda serie de potencias convergente en cero, se puede escribir como producto de una unidad (donde las unidades en estos anillos son las series con coeficiente constante no nulo) y un polinomio (de Weierstraß) en la ultima variable.

3. Teorema de la Division General de Weierstraß:

   Este teorema es la herramienta principal que nos permite demostrar los dos teoremas anteriores.

Con esta herramienta en mano, uno queda preparado para demostrar el lema de Normalización de Noether y el lema de Hensel para el caso analítico e iniciar el estudio de gérmenes de funciones en espacios analíticos, en el cual un resultado central es el *Nullstellensatz* (ó teorema de los ceros de Hilbert para espacios analíticos).

Este trabajo es un fragmento del material visto en el curso avanzado *Seminario de Geometría: singularidades locales de espacios analíticos complejos*, impartido por el Dr. Jawad Snoussi dentro de los cursos del semestre 2016-1, basado en [DJ] capítulos 1-3.

2. Definiciones

1. Un anillo R se dice que es *local*, si R tiene sólo un ideal maximal $\mathfrak{m}$. Frecuentemente uno dice que $(R, \mathfrak{m})$ es *anillo local* (ó $(R, \mathfrak{m}_R)$ para evitar confusión), para indicar que $\mathfrak{m}$ es su único ideal maximal.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y ν_i, para $i = 1, ..., n$ enteros no negativos, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$. Definimos la notación multi índice de la siguiente manera

$$\nu := (\nu_1, ..., \nu_n); \quad x^\nu := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\nu_i}; \quad |\nu| := \sum_{i=1}^{n} \nu_i.$$

   llamamos a $|\nu|$ el grado de x^ν.

3. Sean $a_\nu \in \mathbb{C}$ con $\nu \in \mathbb{N}^n$. La expresión

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - p_0)^\nu$$

   se dice que es una *serie formal de potencias* en las variables $x_1, ..., x_n$ en p_0. Con la suma y multiplicación obvias, el conjunto de series formales de potencias forman un anillo, aún más, forman una $\mathbb{C}$-álgebra. El anillo de series formales de potencias en $p_0 = 0$ se denota por $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$, si no hay confusión lo podemos denotar por $\mathbb{C}[[x]]$, y se le llama el *anillo de series formales de potencias.*

4. Sea $p \in \mathbb{C}^n$ y $c \in \mathbb{C}$, se dice que la serie formal de potencias $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - p_0)^\nu$ *converge* en p con límite c si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $I_\epsilon \subset \mathbb{N}^n$ tal que para todo conjunto finito I con $I_\epsilon \subset I \subset \mathbb{N}^n$ se tiene que

$$\left| \sum_{\nu \in I} a_\nu (p - p_0) - c \right| < \epsilon.$$

   A c se le llama *el valor de la serie formal de potencias* en p, y se denota

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (p - p_0)^\nu = c.$$

5. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$, y $f : U \to \mathbb{C}$ una función. Se dice que la serie fromal de potencias $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - p_0)^\nu$ converge en U con *limite* f, si para cada $p \in U$ la serie formal de potencias $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - p_0)^\nu$ converge en p con límite $f(p)$.

6. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio (i.e. U es abierto y conexo), $f : U \to \mathbb{C}$ una función. f se dice *analítica* si para todo $p_0 \in U$ existe una vecindad $V = V(p_0)$ de p_0 en U, y una serie de potencias $\sum_{\nu}^{\infty} a_\nu (x - p_0)^\nu$ tal que en V converge a f.

7. Sea $p \in \mathbb{C}^n$ fijo, se puede demostrar que las series formales de potencias que convergen en una vecindad de p (la vecindad depende de la serie) forman un anillo llamado el *anillo de series convergentes de potencias* $\mathcal{O}_{n,p}$ en p. Para detalles de la prueba ver ([DJ] observación 3.1.8 p. 80). El anillo de series convergentes de potencias en 0 se denota por $\mathbb{C}\{x\}$, $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ ó $\mathcal{O}_n$, en lugar de la manera “correcta” $\mathcal{O}_{n,0}$.

8. Sea $0 \neq f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ (o en $\mathbb{C}[[x]]$). Podemos escribir

$$f = f_m + f_{m+1} + ...$$

donde los f_k son polinomios homogéneos de grado k en las variables $x_1, ..., x_n$, y $f_m \neq 0$. Definimos el *orden* de f como $\mathrm{Ord}(f) := m$. Obviamente tenemos $\mathrm{Ord}(f \cdot g) = \mathrm{Ord}(f) + \mathrm{Ord}(g)$ (para el caso $f = 0$ se puede definir el orden como $\mathrm{Ord}(0) := \infty$).

9. Sea $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$

    a) Se dice que f es *regular de orden b en x_n*, si la serie de potencias en x_n definida por $f(0, ..., 0, x_n)$ tiene un cero de orden b.

    b) Un elemento

    $$x_n^b + a_1 x_n^{b-1} + ... + a_{b-1} x_n + a_b, \quad a_i \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$$

    se dice que es *polinomio de Weierstraß* si $a_i(0) = 0$ para todo $i = 1, ..., b$. Equivalentemente, es un polinomio mónico de grado b en x_n, que a su vez es, como serie convergente de potencias, regular de orden b en x_n.

10. *a*) Una *álgebra analítica* (también llamada $\mathbb{C}$-álgebra analítica) es una $\mathbb{C}$-álgebra del tipo $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/I$, donde I es un ideal en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$.

    b) Una *álgebra formal* es una $\mathbb{C}$-álgebra del tipo $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]/I$, donde I es un ideal en $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$.

Proposición 1. *Sea $R = \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/I$ una $\mathbb{C}$-álgebra analítica, entonces R es anillo local con ideal maximal $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$, donde $\bar{x}_i$ es la clase de x_i en R (afirmaciónes análogas se tienen para $\mathbb{C}$-álgebra formal).*

Demostración. Véase ([DJ] Observación 3.1.8 p.80 y Ejercicio 3.1.20 p.85). □

3. Teoremas de División y Preparación de Weierstraß

Lema 1. *Sea $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ de orden b. Después de un cambio general de coordenadas, f es regular de orden b en x_n.*

Demostración. Escribimos

$$f = f_b + f_{b+1} + ...$$

donde los f_i son homogéneos de grado i. $f_b \neq 0$, entonces tenemos que para algún $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$, $f_b(a) = c \neq 0$. Podemos asumir que (posiblemente después de renumerar las variables) $a_n \neq 0$. Tomamos nuevas coordenadas $y_1, ..., y_n$ de la siguiente manera

$$x_i = a_i y_n + y_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1; \quad x_n = a_n y_n.$$

Entonces para $g(y_1, ..., y_n) := f(x_1, ..., x_n)$ se tiene que

$$\begin{aligned} g(0, ..., 0, y_n) &= f(a_1 y_n, ..., a_n y_n) \\ &= f_b(a_1, ..., a_n) y_n^b + f_{b+1}(a_1, ..., a_n) y_n^{b+1} + f_{b+2}(a_1, ..., a_n) y_n^{b+2} + ... \\ &= c y_n^b + f_{b+1}(a_1, ..., a_n) y_n^{b+1} + f_{b+2}(a_1, ..., a_n) y_n^{b+2} + ... \end{aligned}$$

lo que demuestra el lema. □

Teorema 2 (Teorema de la división de Weierstraß (TDW))**.** *Sean $f, g \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, y supongamos que f es regular de orden b en x_n. Entonces existen $q \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, y $r \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$, únicamente determinados, con r de grado menor que b en x_n tales que*

$$g = qf + r.$$

Teorema 3 (Teorema de preparación de Weierstraß (TPW))**.** *Sea $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ regular de orden b en x_n. Entonces existen $u \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ y $p \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$ con u una unidad, y p es un polinomio de Weierstraß de grado b, tales que*

$$f = up.$$

u y p están únicamente determinados por f.

Prueba del teorema de preparación de Weierstraß. (Asumiendo la veracidad del teorema de la división de Weierstraß.) Aplicamos el Teorema de la División de Weierstraß a $g := x_n^b$ y así obtener $q \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ y un polinomio $r \in \mathbb{C}\{x_1, .., x_{n-1}\}[x_n]$ de grado menor a b tales que

$$g = x_n^b = qf + r.$$

Ahora, examinando a g en $(0, .., 0, x_n)$, tenemos

$$g(0, ..., 0, x_n) = x_n^b = q(0, ..., 0, x_n) f(0, ..., 0, x_n) + r(0, ..., 0, x_n)$$

Como f es general de orden b, tenemos que

$$x_n^b = q(0, ..., 0, x_n)(x_n^b u'(x_n)) + r(0, ..., 0, x_n)$$

Donde $u'(x_n)$ es una unidad en $\mathbb{C}\{x_n\}$, el término de menor grado en $q \cdot f(0, ..., 0, x_n)$ es de grado mayor o igual a b (pues x_n^b es un factor de este producto), como $r(0, ..., 0, x_n)$ no tiene términos de grado mayor o igual a b, se sigue que

$$r(0, ..., 0, x_n) = 0$$

y $p := x_n^b - r$ es un polinomio de Weierstraß, y así

$$p(0, ..., 0, x_n) = x_n^b - r(0, ..., 0, x_n) = x_n^b = q(0, ..., 0, x_n) x_n^b u'(x_n)$$

El término x_n^b debe aparecer del lado derecho, esto sólo es posible si $q(0, ..., 0) \neq 0$, esto es, q es unidad en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, haciendo $u := q^{-1}$ tenemos

$$f = up.$$

La unicidad se sigue de la unicidad del TDW. □

Observación 1.
Los teoremas de preparación y división de Weierstraß son válidos en el anillo de series formales de potencias $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$.

Corolario 1. *Supongamos que $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ regular de orden b. Entonces $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)$ es un $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$-módulo finitamente generado libre de rango b. Una base está dada por $\{1, \bar{x}_n, ..., \bar{x}_n^{b-1}\}$ (donde $\bar{x}_n$ es la clase de x_n en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)$)*

Demostración. Sea $g \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, entonces por TDW tenemos que $g = qf + r$ donde $q \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, $r \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$ y $\deg(r) < b$, de aquí que

$$\bar{g}(x_1, ..., x_n) = \bar{r}(x_1, ..., x_n) = r_0 + r_1\bar{x}_n + ... + r_t\bar{x}_n^t$$

con $r_i \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ para $i = 1, ..., t$ con $t < b$ □

Lema 4. *Sean $(R, \mathfrak{m}_R)$, $(S, \mathfrak{m}_S)$ $\mathbb{C}$-álgebras analíticas (o formales), y $\varphi : R \to S$ un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Entonces se tiene que $\varphi(\mathfrak{m}_R) \subseteq \mathfrak{m}_S$.*

Demostración. Supongamos lo opuesto. Entonces para algún $f \in \mathfrak{m}_R$ y $\varphi(f) \notin \mathfrak{m}_S$, entonces $\varphi(f)(0) = c \neq 0$. Por lo que $\varphi(f) - c \in \mathfrak{m}_S$ y por lo tanto $\varphi(f) - c \in \mathfrak{m}_S$ no es una unidad. Ahora, $f - c$ es unidad en R (pues $(f - c)(0) = -c \neq 0$), y $\varphi(f - c) = \varphi(f) - c$, una unidad en S, ya que φ al ser morfismo de anillos manda unidades en unidades. Una contradicción al hecho de que $f \in \mathfrak{m}_r$ y $\varphi(f) \notin \mathfrak{m}_S$, teniendo así el resultado deseado. □

Teorema 5 (Teorema general de la división de Weierstraß (TGDW))**.** *Sean R y S $\mathbb{C}$-álgebras analíticas, $\varphi : R \to S$ un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Bajo φ, uno puede ver a S como un R-módulo. Son equivalentes:*

1. *S es un R-módulo finitamente generado.*
2. $\dim_{\mathbb{C}} S/\mathfrak{m}_R S < \infty$.

Afirmaciones análogas se cumplen para $\mathbb{C}$ álgebras formales.

Observación 2.
Este teorema, junto con una demostración similar a la expuesta aquí, puede encontrarse en ([GM] Teorema (1.10) de Finitud de Weierstraß p.13).

Bosquejo de la demostración. Para demostrar ($2 \Rightarrow 1$) vamos a utilizar la estrategia desarrollada en ([DJ] pp. 89-92) la cual consiste en los siguientes pasos:

1. Consideramos primero el caso $R = \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ y $S = \mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}$.
2. Bajo las hipótesis del teorema encontramos un entero positivo r tal que $\mathfrak{m}_S^r \subset \mathfrak{m}_S(\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n))$.
3. Ver que todo monomio y^α de grado r se puede escribir como $\sum_{i=1}^n$(elementos de $\mathfrak{m}$)$\varphi(x_i)$.
4. Tomar $f \in \mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}$ y notar que se puede escribir como suma de monomios de grado menor a r más suma de monomios de grado mayor o igual a r.
5. Factorizar los y^α tales que $|\alpha| = r$ de los monomios de grado mayor o igual a r.

6. Mediante un argumento inductivo tenemos que

$$f = \sum_{\beta} (\text{polinomios en } y \text{ de grado menor a } r) g^{\beta},$$

donde $g = (\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n))$.

7. Definir series $A_\alpha(f)$ tales que

$$f = \sum_{\alpha : |\alpha| < r} \varphi(A_\alpha(f)) y^\alpha.$$

8. Comprobar que las $A_\alpha \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ (comprobar convergencia).

9. Mostrar que el caso general es consecuencia de este caso.

$\square$

Lema 6. *El teorema general de la división de Weierstraß implica el teorema de la división de Weierstraß.*

Demostración. (Prueba de la existencia) Sean $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ regular de orden b en x_n, $R = \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$, $S = \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)$ y $\varphi : R \to S$ con $\varphi(x_i) = \bar{x}_i$, $i = 1, ..., n-1$. El ideal maximo de R es $\mathfrak{m}_R = (x_1, ..., x_{n-1})$. Bajo φ vemos a S como R-módulo, entonces

$$\frac{S}{\mathfrak{m}_R S} = \frac{\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)}{\frac{(x_1, ..., x_{n-1}) + (f)}{(f)}} \cong \frac{\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}}{(x_1, ..., x_{n-1}, f)} \cong \frac{\mathbb{C}\{x_n\}}{f(0, ..., 0, x_n)} \cong \frac{C\{x_n\}}{x_n^b} \cong \mathbb{C}^b$$

como $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^b < \infty$, tenemos vía el isomorfismo dado que $\dim \mathbb{C}\{x_n\}/(x_n^b) < \infty$ y una base de $\mathbb{C}\{x_n\}/(x_n^b)$ está dada por $1, x_n, ..., x_n^{b-1}$, tenemos por (TGDW) que S es un R-módulo finitamente generado, entonces, podemos usar el lema de Nakayama que nos dice que si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local, M es un A-módulo finitamente generado y $\overline{m}_1, ..., \overline{m}_k$ generan a $M/\mathfrak{m}M$ como $A/\mathfrak{m}$-módulo ([AM] Proposición 2.8 p.22), entonces, $m_1, ..., m_k$ generan a M como A-módulo. Esto es, $1, x_n, ..., x_n^{b-1}$ generan a S como R-módulo, así, para $g \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, $\bar{g} = r_0 + r_1 x_n + ... + r_k x_n^k$ en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)$, con $r_i \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$; $k < b$, entonces en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$

$$g = qf + r$$

para algún $q \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, donde $r = r_0 + r_1 x_n + ... + r_k x_n^k$.

Ahora, hay probar que q y r son únicos, primero hacemos ver que si $g = qf + r = q'f + r'$ donde ambos r y r' son polinomios de grado menor a b, entonces $(q - q')f + (r - r') = 0$, por lo que suponemos que $qf + r = 0$ y vamos a ver que esto implica que $q = 0$ (y por lo tanto $r = 0$).

Expresando a f, q y r como series de potencias en x_n tenemos

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x_n^i; \quad q = \sum_{i=0}^{\infty} q_i x_n^i; \quad r = \sum_{i=0}^{b-1} r_i x_n^i,$$

donde f_i, q_1 y r_i están en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$. Ahora, f es regular de orden b en x_n, se sigue que $\mathrm{Ord}(f_b) = 0$ y también que $\mathrm{Ord}(f_i) > 0$ para $i = 1, ..., b-1$

(recordando que $\mathrm{Ord}(0) = \infty > 0$), supongamos que $q \neq 0$, entonces existe $a = \min\{\mathrm{Ord}(q_i)\}$ con $i \in \mathbb{N}$, tomamos k el mínimo entero tal que $\mathrm{Ord}(q_j) = a$, esto es, si $j < k$, entonces $\mathrm{Ord}(q_j) < \mathrm{Ord}(q_k)$ y si $j > k$, entonces $\mathrm{Ord}(q_j) \geq \mathrm{Ord}(q_k)$, en particular notamos que $q_j \neq 0$.

Ahora veamos el coeficiente del término x_n^{b+k}, como r es polinomio en x_n de grado menor a b, el término x_n^{b+k} no aparece en r y como $qf + r = 0$, el coeficiente de este término es

$$f_{b+k}q_0 + ... + f_{b+1}q_{k-1} + f_b q_k + f_{b-1}qk + 1 + ... + f_0 q_{b+k} = 0. \tag{1}$$

Sabemos que

- $\mathrm{Ord}(f_b q_k) = \mathrm{Ord}(q_k)$.
- $\mathrm{Ord}(f_{b+j}q_{k-j}) \geq \mathrm{Ord}(q_{k-j}) > \mathrm{Ord}(q_k))$ para $j > 0$.
- $\mathrm{Ord}(f_{b-j}q_{k+j}) = \mathrm{Ord}(f_{b-j}) + \mathrm{Ord}(q_{k+j}) > \mathrm{Ord}(q_k)$ para $j > 0$.

El único término de grado $\mathrm{Ord}(q_k)$ en (1) está en $f_b q_k$ por lo que (1) no puede ser cero. Una contradicción a suponer que $q \neq 0$. Por lo que $q = 0$, probando así la unicidad. $\square$

Demostración del teorema general de la división de Weierstraß. Primero veamos que efectivamente podemos ver a S como R-módulo, sean $r \in R$ y $s \in S$. Definimos $r \cdot s = \varphi(r) \cdot s$. Comprobamos que se cumplen los axiomas de R-módulo, sean $r, r' \in R$; $s, s' \in S$

$$\begin{aligned}
r(s+s') &= \varphi(r)(s+s') = \varphi(r)s + \varphi(r)s' = rs + rs' \\
(r+r')s &= \varphi(r+r')s = (\varphi(r) + \varphi(r'))s = \varphi(r)s + \varphi(r')s = rs + r's \\
(rr')s &= \varphi(rr')s = \varphi(r)\varphi(r')s = \varphi(r)r's = r(r's) \\
1_R s &= \varphi(1_R)s = 1_S s = s.
\end{aligned}$$

$1 \Rightarrow 2)$ Consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi"] & S \arrow[d, "\pi'"] \\
R/\mathfrak{m} \arrow[r, "\bar{\varphi}"'] & S/\mathfrak{m}_R S
\end{tikzcd}$$

$S/\mathfrak{m}_R S$ es un R-módulo finitamente generado bajo ψ, pues las clases de los generadores de S generan a $S/\mathfrak{m}_R S$ como R-módulo. Como $\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_R S$ tenemos que $\psi(\mathfrak{m}_R) = 0$, por lo que ψ pasa al cociente $R/\mathfrak{m}_R \cong \mathbb{C}$, por lo que el diagrama conmuta.

Sea $\bar{s} \in S/\mathfrak{m}_R S$, al ser $S/\mathfrak{m}_R S$ un R-módulo finitamente generado, tenemos que $\bar{s} = \pi'(s)$, para algún $s \in S$, y como S es R-módulo finitamente generado tenemos que existen $s_1, ..., s_t$ generadores de S como R-módulo, por lo que

$$\bar{s} = \pi'(s) = \pi'(\sum_{i=1}^{t} \varphi(r_i)s_i) = \sum_{i=1}^{t} \pi'(\varphi(r_i))\pi'(s_i) \quad r_i \in R \tag{2}$$

de la conmutatividad del diagrama, tenemos que $\pi'(\varphi(r_i)) = \bar{\varphi}(\pi(r_i))$, sustituyendo esto con (2) y usando el hecho que $\pi'(s_i) = \bar{s}_i$, tenemos que

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^{t} \bar{\varphi}(\pi(r_i))\bar{s}_i \tag{3}$$

pero $\pi(r_i) \in \mathbb{C}$, con esto, tenemos que $S/\mathfrak{m}_R S$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita

$2 \Rightarrow 1)$ **Caso 1:** $R = \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ **y** $S = \mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}$ Haciendo $g_i = \varphi(x_i)$, $i = 1, ..., n$ tenemos que

$$\mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}/(g_1, ..., g_n) \tag{4}$$

es una $\mathbb{C}$-álgebra analítica y a su vez, por suposición, un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita, por lo tanto es una $\mathbb{C}$-álgebra Artiniana. Escribiendo $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_S$, tenemos que

$$\overline{\mathfrak{m}} \supset \overline{\mathfrak{m}}^2 \supset ... \supset \overline{\mathfrak{m}}^k \supset ... \tag{5}$$

por ser $\mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}/(g_1, ..., g_n)$ $\mathbb{C}$-álgebra Artiniana, tenemos que $\overline{\mathfrak{m}}^k = \overline{\mathfrak{m}}^{k+1}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, esto es $\overline{\mathfrak{m}}\overline{\mathfrak{m}}^k = \overline{\mathfrak{m}}^k$, como $\mathfrak{m} = (y_1, ..., y_m)$ es finitamente generado, entonces $\mathfrak{m}^k$ es finitamente generado y las clases de los generadores de $\mathfrak{m}^k$ generan a $\overline{\mathfrak{m}}^k$, entonces podemos aplicar el lema de Nakayama que nos dice que bajo estas condiciones $\overline{\mathfrak{m}}^k = 0$, poniéndolo de otra manera $\mathfrak{m}^k \subset (g_1, ..., g_n)$, multiplicando ambos lados por $\mathfrak{m}$ y fijando $r := k + 1$ se sigue que

$$\mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m}(g_1, ..., g_n). \tag{6}$$

En particular, para todo monomio y^α, con $|\alpha| = r$, existen elementos $p_{\alpha,i} \in \mathfrak{m}$ tales que

$$y^\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_{\alpha,i} g_i. \tag{7}$$

Vamos a mostrar que S es R-módulo finitamente generado, viendo que $\{y^\alpha : |\alpha| < r\}$ lo generan, para esto, primero lo probamos "formalmente" y después comprobaremos la convergencia.
Sea $f \in \mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}$, podemos escribir a f como

$$f = a(f) + H(f)$$

donde $a(f)$ es la suma de todos los monomios de f de grado menor estricto que r, y $H(f)$ es la suma de todos los monomios de grado mayor o igual a r.
Ahora, sea $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| = r\}$, hay un número finito de n-tuplas con esta propiedad, digamos, $|\Lambda| = d$, o $\Lambda = \{\alpha_1, ..., \alpha_d\}$, entonces definimos inductivamente:

- $\widetilde{h}_{\alpha_1}(f)$ como todos los términos de $H(f)$ que tienen como factor común a y^{α_1}.
- $\widetilde{h}_{\alpha_2}(f)$ como todos los términos de $H(f) - \widetilde{h}_{\alpha_1}(f)$ que tienen como factor común a y^{α_2}.

- $\widetilde{h}_{\alpha_3}(f)$ como todos los términos de $H(f) - \widetilde{h}_{\alpha_1}(f) - \widetilde{h}_{\alpha_2}(f)$ que tienen como factor común a y^{α_3}.
- .
- .
- .
- $\widetilde{h}_{\alpha_d}(f)$ como todos los términos de $H(f) - \widetilde{h}_{\alpha_1}(f) - ... - \widetilde{h}_{\alpha_{d-1}}(f)$ que tienen como factor común a y^{α_d}.

Así, $h_\alpha(f)y^\alpha$ y $h_\beta(f)y^\beta$ no tienen monomios en común si $\alpha \neq \beta$ y

$$H(f) = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} \widetilde{h}_\alpha(f) y^\alpha$$

por lo que

$$f = a(f) + \sum_{\alpha:|\alpha|=r} \widetilde{h}_\alpha(f) y^\alpha \tag{8}$$

juntando (7) con (8) tenemos que

$$f = a(f) + \sum_{\alpha:|\alpha|=r} \widetilde{h}_\alpha(f) \left(\sum_{i=1}^{n} p_{\alpha,i} g_i \right)$$

y haciendo

$$h_i(f) = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} p_{\alpha,i} \widetilde{h}_\alpha(f)$$

tenemos que

$$f = a(f) + \sum_{i=1}^{n} h_i(f) g_i. \tag{9}$$

Para un multi índice $\beta = \beta_1, ..., \beta_n$ definimos inductivamente:

1. $a_\beta(f) = a(f)$ si $\beta = (0, ..., 0)$.
2. $h_\beta(f) = f$ si $\beta = (0, ..., 0)$.
3. $h_\beta(f) = 0$ si alguna entrada en β es negativa.
4. $a_\beta(f) = a(h_\beta(f))$.
5. $h_\beta(f) = \sum_{i=1}^{n} h_i(h_{\beta - e_i}(f))$, donde $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, etc.

Haciendo notar que $a_\beta(f)$ son polinomios en las variables $y_1, ..., y_m$ de grado menor a r.

Afirmamos que para toda $k \in \mathbb{N}$

$$f = \sum_{\beta:|\beta|<k} a_\beta(f) g^\beta + \sum_{\beta:|\beta|=k} h_\beta(f) g^\beta. \tag{10}$$

Por inducción sobre k:

- Para $k = 1$
  :
  - Si $|\beta| < 1$, entonces $\beta = (0, ..., 0)$ y $a_{(0,...,0)} = a(f)$
  - Si $|\beta| = 1$, entonces $\beta = e_i$ con $i = 1, ..., n$, entonces $h_{\beta - e_j}(f) = f$ si $i = j$ y $h_{\beta - e_j}(f) = 0$ si $i \neq j$.

Por lo que para $k = 1$ tenemos la ecuación (9).

- Supongamos que (10) se cumple para $k-1$, esto es

$$f = \sum_{\beta:|\beta|<k-1} a_\beta(f)g^\beta + \sum_{\beta:|\beta|=k-1} h_\beta(f)g^\beta. \tag{11}$$

Aplicando (9) $h_\beta(f)$ tenemos que

$$h_\beta(f) = a(h_\beta(f)) + \sum_{i=1}^{n} h_i(h_\beta(f))g_i. \tag{12}$$

Sustituyendo en (11) tenemos

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\beta:|\beta|<k-1} a_\beta(f)g^\beta + \sum_{\beta:|\beta|=k-1} \left((a(h_\beta(f)) + \sum_{i=1}^{n} h_i(h_\beta(f))g_i)g^\beta \right) \\
&= \sum_{\beta:|\beta|<k-1} a_\beta(f)g^\beta + \sum_{\beta:|\beta|=k-1} a(h_\beta(f)) + \sum_{\beta:|\beta|=k-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(h_\beta(f))g_i g^\beta \\
&= \sum_{\beta:|\beta|<k-1} a_\beta(f)g^\beta + \sum_{\beta:|\beta|=k-1} a_\beta(f)) + \sum_{\beta:|\beta|=k-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(h_\beta(f))g_i g^\beta \\
&= \sum_{\beta:|\beta|<k} a_\beta(f)g^\beta + \sum_{\beta:|\beta|=k-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(h_\beta(f))g_i g^\beta,
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta:|\beta|=k-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(h_\beta(f))g_i g^\beta &= \sum_{\beta:|\beta|=k-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(h_{(\beta+e_i)-e_i}(f))g^{\beta+e_i} \\
&= \sum_{\beta:|\beta|=k} \sum_{i=1}^{n} h_i(h_{\beta-e_i}(f))g^\beta \\
&= \sum_{\beta:|\beta|=k} h_\beta(f)g^\beta.
\end{aligned}$$

Mostrando así el resultado.

Como $(g_1, ..., g_n) \subseteq \mathfrak{m}$ se sigue que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$f \equiv \sum_{\beta:|\beta|<k} a_\beta(f)g^\beta \mod \mathfrak{m}^k.$$

Del hecho de que $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i = (0)$ ([DJ] corolario 1.3.5 p.17), tenemos que en el anillo de series formales de potencias

$$f = \sum_{\beta} a_\beta(f)g^\beta.$$

Recordemos que los $a_\beta(f)$ son polinomios en las y's de grado menor a r. Así escribimos

$$a_\beta(f) = \sum_{\alpha:|\alpha|<r} a_{\beta,\alpha}(f)y^\alpha, \quad a_{\beta,\alpha}(f) \in \mathbb{C}.$$

Veamos para $\alpha : |\alpha| < r$ la serie de potencias

$$A_\alpha(f) := \sum_\beta a_{\alpha,\beta} x^\beta.$$

Como $\varphi : R \to S$ manda a x_i en g_i se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha:|\alpha|<r} \varphi(A_\alpha(f)) y^\alpha &= \sum_{\alpha:|\alpha|<r} \varphi\left(\sum_\beta a_{\alpha,\beta} x^\beta\right) y^\alpha \\
&= \sum_{\alpha:|\alpha|<r} \left(\sum_\beta a_{\alpha,\beta} g^\beta\right) y^\alpha \\
&= \sum_\beta \left(\sum_{\alpha:|\alpha|<r} a_{\alpha,\beta}(f) y^\alpha\right) g^\beta \\
&= \sum_\beta a_\beta(f) g^\beta = f,
\end{aligned}$$

esto es, las y^α con $|\alpha| < r$ generan a S como R-módulo, mostrando así el caso formal.
Ahora veamos $A_\alpha(f) \in R$, esto es, que $A_\alpha(f)$ converge. Para esto, usamos el hecho de que

$$f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\} \Leftrightarrow \exists \delta : \|f\|_\delta := \sum_\alpha |f_\alpha| \delta^{|\alpha|} < \infty$$

([DJ] Observación 3.1.5 p.77).
Escogemos $\delta > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que

1. $\|f\|_\delta < \infty$.
2. Sea, C el número de monomios de f de grado r. Entonces para los $p_{\alpha,i}$ de (7)
$$\|p_{\alpha,i}\|_\delta \leq \frac{1}{C}.$$
(Esto lo podemos hacer, ya que los $p_{\alpha,i} \in \mathfrak{m}$, es decir, convergen en una vecindad del cero).

Vamos a mostrar que $\forall \alpha : |\alpha| < r$

$$\|A_\alpha(f)\|_\epsilon < \infty \quad \text{para } \epsilon = \frac{\delta^r}{2n^2}. \tag{13}$$

Esto demostrará la convergencia de $A_\alpha(f)$. De (8) y (9) tenemos que

1. $\|a(f)\|_\delta \leq \|f\|_\delta$.
2. $\|\widetilde{h}_\alpha(f) y^\alpha\|_\delta = \|\widetilde{h}_\alpha(f)\|_\delta \delta^r \leq \|f\|_\delta$. i.e. $\|\widetilde{h}_\alpha(f)\|_\delta \leq \delta^{-r}\|f\|_\delta$.
3. $\|h_i(f)\|_\delta = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} \|p_{\alpha,i}\|_\delta \|\widetilde{h}_\alpha(f)\|_\delta \leq \sum_{\alpha:|\alpha|=r} \frac{\delta^{-r}\|f\|_\delta}{C} \leq \delta^{-r}\|f\|_\delta$.

Inductivamente veamos que

$$\|h_\beta(f)\| \leq n^{|\beta|-1} \delta^{-|\beta| r} \|f\|_\delta, \tag{14}$$

$$\|a_\beta(f)\| \leq n^{|\beta|-1} \delta^{-|\beta| r} \|f\|_\delta. \tag{15}$$

Para $|\beta| = 1$

$$\|h_\beta(f)\|_\delta = \|h_i(f)\|_\delta \leq \delta^{-r}\|f\|_\delta.$$

Supongamos que para todo β con $|\beta| = k$ tenemos

$$\|h_\beta(f)\| \leq n^{k-1}\delta^{-kr}\|f\|_\delta$$

y sea β_o con $|\beta_o| = k+1$

$$\begin{aligned}\|h_{\beta_o}(f)\| &= \sum_{i=1}^{n} \|h_i(h_{\beta_o - e_i}(f))\| \\ &\leq n\delta^{-r}\|h_{\beta_o - e_i}(f)\| \\ &\leq n\delta^{-r}\left(n^{k-1}\delta^{-kr}\|f\|_\delta\right) \\ &= n^{(k+1)-1}\delta^{-(k+1)r}\|f\|_\delta.\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se sigue de $\|a_\beta(f)\| \leq \|h_\beta(f)\|$.
Recordamos que $a_\beta(f) = \sum_{\alpha:|\alpha|<r} a_{\beta,\alpha}(f)y^\alpha$, para algunos $a_{\beta,\alpha}(f) \in \mathbb{C}$. Es obvio que $|a_{\beta,\alpha}(f)| \leq \|a_\beta(f)\|_\delta \delta^{-\alpha}$. Haciendo $C_\alpha = \frac{\delta^{-\alpha}}{n}\|f\|_\delta$ y por (15) tenemos que

$$|a_{\beta,\alpha}(f)| \leq C_\alpha(n\delta^{-r})^{|\beta|}$$

para $\epsilon = \frac{\delta^r}{2n^2}$ tenemos

$$\begin{aligned}\|A_\alpha(f)\| &= \|\sum_\beta a_{\beta,\alpha}(f)x^\beta\| \\ &= \sum |a_{\beta,\alpha}(f)|\epsilon^{|\beta|} \\ &\leq C_\alpha \sum_\beta (n\delta^{-r})^{|\beta|}\left(\frac{\delta^r}{2n^2}\right)^\beta \\ &= C_\alpha \sum_\beta \frac{1}{(2n)^{|\beta|}} \\ &\leq C_\alpha \sum_\beta \frac{1}{2^k} < \infty\end{aligned}$$

pues el número de elementos β con $|\beta| = k$ es a lo más n^k. Teniendo así la convergencia deseada.

Observación 3.
Vamos a probar el teorema para el caso $R = \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/I$ donde I es ideal en R y $S = \mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}/J$ donde J es ideal en S finitamente generado. Para ver que (TDGW) implica (TDW), usamos que J es finitamente generado, a saber generado por f regular de orden b en x_n, más delante, veremos que $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ es Noetheriano, por lo que siempre será el caso de que J ideal en S finitamente generado.

Caso 2: $R = \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/I$ donde I es ideal en R y $S = \mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}/J$ con $J = (f_1, ..., f_p)$. Definimos

$$R' := \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p}\}; \quad S' := \mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}.$$

Tomamos elementos $g_i \in S'$ con $\varphi(x_i) = \bar{g}_i$, esto es, tomamos representantes de las imagenes de los x_i. Definimos $\varphi' : R' \to S'$ sobre los generadores de la siguiente manera:

- $\varphi'(x_i) = g_i$ si $i = 1, ..., n$,
- $\varphi'(x_{n+j}) = f_j$ si $j = 1, ..., p$.

Vemos que

$$S/\mathfrak{m}_R S = \frac{\frac{\mathbb{C}\{y_1,...,y_m\}}{J}}{\frac{(g_1,...,g_n)+J}{J}} \cong \frac{\mathbb{C}\{y_1, ..., y_m\}}{(g_1, ..., g_n, f_1, ..., f_p)} = \frac{S'}{\mathfrak{m}_{R'} S'}$$

Que por suposición en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita, por lo que S' es un R'-módulo finitamente generado, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
R' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\psi"] & S' \arrow[d, "\pi_2"] \\
\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\} \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "\pi_3"'] & S \\
R \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned}
\pi_1 : R' &\to \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\} \\
x_i &\mapsto x_i \quad \text{ si } i = 1, ..., n \\
x_{n+j} &\mapsto 0 \quad \text{ si } j = 1, ..., p \\
\pi_2 : S' &\to S \\
y_i &\mapsto \bar{y}_i \\
\psi : R' &\to S \\
r &\mapsto \pi_2 \circ \varphi'(r) \\
\pi_3 : \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\} &\to R \\
x_i &\mapsto \bar{x}_i
\end{aligned}$$

Sea $\bar{s} \in S$, entonces existe $s \in S'$ tal que $\bar{s} = \pi_2(s)$, pero S' es R'-módulo finitamente generado, por lo que existen $s_1, ..., s_t$ tales que $s = \sum_{i=1}^{t} \varphi'(r_i) s_i$, y

$$\begin{aligned}
\bar{s} &= \pi_2 \left(\sum_{i=1}^{t} \varphi'(r_i) s_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \pi_2(\varphi'(r_i)) \bar{s}_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \psi(r_i) \bar{s}_i
\end{aligned}$$

con lo que tenemos que S es R'-módulo finitamente generado bajo ψ, ahora $\psi(x_{n+j}) = 0$ para $j = 1, ..., p$, por lo que ψ pasa al cociente y $\overline{\psi} \circ \pi_1 = \psi = \pi_2 \circ \varphi'$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \sum_{i=1}^{t} \overline{\psi}(\pi_1(r_i))\bar{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} \overline{\psi}(r_i)\bar{s}_i \end{aligned}$$

con $r_i \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, esto es S es $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$-módulo finitamente generado bajo $\overline{\psi}$. Por último $\overline{\psi}(x_i) = \bar{g}_i$, para $i = 1, ..., n$ y $\varphi(\pi_3(x_i)) = \varphi(\bar{x}_i) = \bar{g}_i$. Por lo que todo el diagrama conmuta. Así

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \sum_{i=1}^{t} \overline{\psi}(r_i)\bar{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} \varphi(\pi_3(r_i))\bar{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} \varphi(\bar{r}_i)\bar{s}_i \end{aligned}$$

con $\bar{r}_i \in R$, teniendo así a S como R-módulo finitamente generado.

□

4. Aplicaciones

Teorema 7 (Teorema de la función implícita.)**.** *Sea $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n, y\}$ con $f(0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Entonces existe una única $\varphi \in (x_1, ..., x_n)\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ tal que*

$$f(x_1, ..., x_n, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x_1, ..., x_n).$$

Demostración. Notamos que las dos condiciones $f(0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ nos dicen que f es regular de orden 1 en y. Por (TPW) tenemos

$$f(x_1, ..., x_n, y) = u \cdot p$$

donde p es polinomio de Weierstraß de grado 1 en y, i.e. $p(x_1, ..., x_n, y) = y + r_0(x_1, ..., x_n)$, haciendo $\varphi = -r_0$ tenemos el resultado. □

Corolario 2. *Sea $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ regular de orden b en x_n, supongamos que $f = u \cdot p$, donde $u, p \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$, u una unidad y p polinomio de Weierstraß. Entonces $u, p \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, esto es, u y p convergen.*
De igual manera, sean $f, g \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ con f regular de orden b en x_n, supongamos que $g = qf + r$, donde $q, r \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$, donde p polinomio en x_n de grado menor que b. Entonces $p, r \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$.

Demostración. Ambas se siguen de la unicidad los teoremas de preparación y división para series formales, toda serie convergente de potencias es una serie de potencias formales. □

Corolario 3. *Sea* $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n, y\}$ *regular de orden* 1 *en* y. *Supongamos que* $\varphi(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$ *es tal que* $f(x_1, ..., x_n, \varphi(x)) = 0$*, entonces* $\varphi(x) \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$.
Dicho de otra manera, una solución en y *para* $f(x_1, ...x_n, y) = 0$ *es analítica.*

Teorema 8 (Teorema del mapeo implícito)**.** *Sean* $f_1, ..., f_m \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m\}$ *tales que* $f_i(0) = 0$ *y* $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0)\right) \neq 0$. *Entonces, existen* $\varphi_1, ..., \varphi_m \in (x_1, ..., x_n)\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ *tales que* $f(x_1, ..., x_n, \varphi_1, ..., \varphi_m) = 0$.

Demostración. Primero supongamos que la $m \times m$ matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0)\right) = Id_{m\times m}$.
Probamos por inducción en m:

- $m = 1$ es el teorema de la función implícita.
- Supongamos que es válido para $m - 1$ y probamos para m.
  Aplicamos el teorema de la función implicita a f_m y_m y obtenemos φ_m.
  Sean

  $$g_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) := f_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, \varphi_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}))$$

  para $i = 1, ..., m - 1$. Se puede probar que

  $$\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0)\right) = Id_{m-1\times m-1} \quad i, j = 1, ..., m - 1$$

  y por lo tanto se satisface la hipótesis de inducción.

Para el caso general hacemos $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0)\right)^{-1}$. Entonces

$$A \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0)\right)$$

es la identidad y

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = 0$$

□

Lema 9. *Supongamos que* $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ *es regular de orden* b *en* x_n. *Entonces el* $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$*-módulo* $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)$ *es finitamente generado de rango* b. *Además, una base está dada por* $1, x_n, ..., x_n^{b-1}$.

Demostración. Sea $g \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, aplicando el (TDW) tenemos que

$$g = qf + r$$

donde

$$r = r_0 + r_1 x_n + ... + r_{b-1} x_n^{b_1}$$

con $r_i \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ para $i = 1, ..., b - 1$. Así en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)$

$$\bar{g} = r_0 + r_1 x_n + ... + r_{b-1} x_n^{b_1}$$

lo que demuestra el lema. □

Teorema 10. *$\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ y $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$ son anillos Noetherianos.*

Demostración. Como las dos pruebas son similares, sólo hacemos el caso analítico. Por inducción sobre n.

- Para el caso $n = 0$ tenemos $\mathbb{C}$ que es Noetheriano.
- Asumimos que $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ es Noetheriano. Sea $I \subset \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ un ideal, vamos a mostrar que es finitamente generado. Si $I = (0)$ obviamente es finitamente generado, si $I \neq 0$, entonces existe $0 \neq f \in I$. Después de un cambio general de coordenadas, podemos asumir que f es regular de orden b en x_n. Entonces por el lema anterior, $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)$ es finitamente generado como $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$-módulo, como asumimos que $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ es Noetheriano, entonces $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/(f)$ es un $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$-módulo Noetheriano ([GM] Proposición 1.2.15), esto es, I módulo (f) es finitamente generado, digamos por $f_1, ..., f_t$, por lo que $f, f_1, ..., f_t$ generan a I.

$\square$

Lema 11. *Sea $h \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$ un polinomio de Weierstraß. Entonces h es reducible en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n] \Leftrightarrow h$ es reducible en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$.*
En particular, cada factor irreducible de h en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ es x_n-regular y cada descomposición de h en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ da lugar a una descomposición de h en polinomios de Weierstraß al multiplicar por las unidades adecuadas.
Afirmaciones similares se cumplen para el anillo de series formales de potencias.

Demostración. Al igual que la prueba anterior, por ser similares las pruebas sólo hacemos el caso analítico.

$\Leftarrow$) Sea $h = g_1 \cdot g_2$ una factorización en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ de h, donde g_1, g_2 no son unidades. Como h es regular, se tiene que

$$h(0, ..., 0, x_n) = x_n^b = g_1(0, ..., 0, x_n) \cdot g_2(0, ..., 0, x_n),$$

por lo que g_1 y g_2 también son regulares y como ninguno de los dos es una unidad, se tiene que son regulares de orden mayor o igual a uno en x_n. Podemos aplicar el teorema de preparación a g_1 y g_2. Así

$$g_1 = u_1 h_1$$
$$g_2 = u_2 h_2$$

donde u_i es una unidad y h_i es polinomio de Weierstraß, entonces

$$h = u_1 u_2 h_1 h_2$$

aplicando el teorema de preparación de Weierstraß a h, tenemos que $h = 1 \cdot h$, y por la unicidad tenemos que $u_1 u_2 = 1$ y $h = h_1 h_2$ y por lo tanto h es reducible en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$

$\Rightarrow$) $h = g_1 \cdot g_2$, donde g_1 y g_2 no son unidades en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$. Vamos a mostrar que g_1 y g_2 no son unidades en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$. Supongamos sin perder generalidad que g_1 es unidad en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, como g_1 no es unidad en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$ entonces $\deg_{x_n}(g_1) \geq 1$ por lo que $\deg_{x_n}(g_2) < \deg_{x_n}(h)$. $h = g_1 \cdot g_2$, se sigue que g_2 es regular en x_n. Entonces h es regular de orden a lo más $\deg_{x_n}(g_2)$. Una contradicción, ya que por ser h polinomio de Weierstraß, es regular de orden $\deg_{x_n}(h)$. $\square$

Teorema 12. $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$ *y* $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$ *son dominios de factorización única.*

Demostración. Nuevamente hacemos sólo el caso analítico. La prueba es por inducción sobre n.

- El caso $n = 0$ es $\mathbb{C}$, en donde todo elemento no nulo es unidad.

- Supongamos que $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ es DFU.
  Por el lema de Gauß, $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$ es DFU. Sea $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, después de un cambio lineal de coordenadas, podemos asumir que f es regular en x_n. Aplicando el teorema de preparación de Weierstraß, tenemos que $f = u \cdot h$ con u una unidad y h polinomio de Weierstraß, por el lema anterior h se factoriza de igual forma en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$ y en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$, como h tiene factorización única en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_{n-1}\}[x_n]$, se sigue que f tiene factorización única en $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}$.

□

Referencias

[DJ] Theo de Jong, Gerhard Pfister, *Local Analytic Geometry (Basic theory and applications)*, Springer Science & Business Media, 2000.

[AM] Michael Atiyah, Ian Macdonald, *Introduction To Commutative Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1969.

[GM] Gert-Martin Greuel, Christoph Lossen, *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer monographs in Mathematics 2007