Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Grandes Retículas de Clases de Módulos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Manuel Antonio Valdespino Borja

TUTOR

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Introducción

El estudio de las grandes retículas ha sido una herramienta muy útil en la caracterización y clasificación de anillos. Una clase importante de éstas son las grandes retículas de clases de módulos, y entre ellas destacan las que están definidas por ciertas propiedades de cerradura.

El presente trabajo pretende dar una introducción al estudio de las grandes retículas estudiando las grandes retículas $R-sext$ y $R-qext$, lo cual se hará desarrollando en gran medida los artículos [1] y [2]. Para lograr ello se desarrollarán algunas de las herramientas necesarias de la teoría de módulos que se usarán a lo largo del artículo.

El primer capítulo se divide en dos secciones. En la primera se da las nociones de réticula, así como elementos importantes de éstas, como lo son los pseudocomplementos y pseudocomplementos fuertes. De igual manera se demuestran algunos resultados básicos para retículas fuertemente pseudocomplementadas. La segunda sección pretende dar nociones básicas de la teoría de módulos desde un enfoque categórico, demostrando propiedades universales de objetos familiares como lo son núcleos y conúcleos, así como equivalencias para monomorfismos y epimorfismos; las cuales son usadas a lo largo del trabajo.

El segundo capítulo inicia estudiando las grandes retículas de clases de módulos, poniendo como ejemplo las grandes retícula de clases de módulos definidas por propiedades de cerradura. Se estudia en particular la gran retícula de clases abiertas, de la cual se demuestra que tiene el mismo esqueleto que la gran retícula de clases de torsión hereditaria, el cual es consecuencia del teorema *(2.4)*.

Para el tercer capítulo se dan algunos resultados de la gran retícula $R-sext$, estudiando sus pseudocomplementos y su esqueleto, así como algunas propiedades reticulares. También se da el primer resultado importante de cómo se reflejan las propiedades de la retícula en propiedades del anillo como se muestra en *(3.16)*.

En el cuarto capítulo se dualizan algunos resultados del capítulo anterior, pero se hace un énfasis al observar que no todas las propiedades pueden ser dualizadas, como es el caso del teorema *(4.23)*, en la cual se muestra que el esqueleto de $R - qext$ no es del todo el dual del esqueleto de $R - sext$. De igual manera en este capítulo se da un resultado de cómo se reflejan las propiedades de la retícula en propiedades del anillo como se ve en *(4.10)*.

Para finalizar, en el último capítulo se muestra el poder del estudio de las grandes réticulas en la caracterización de anillos, el cual se da comparando las dos retículas estudiadas en los capítulos anteriores.

Este trabajo puede considerarse una primera aproximación a la teoría de *tipos y cotipos*, las cuales han sido desarrolladas recientemente en los trabajos [2], en la cual se demuestra que la gran retícula de clases conaturales es en realidad un álgebra de Boole, caso análogo a lo que se conocía de la gran retícula de clases naturales.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capitulo se desarrollarán gran parte de las herramientas necesarias de la teoría de retículas y teoría de módulos, además de servir para establecer la notación.

Todos los módulos serán considerados izquierdos a menos que se indique lo contrario.

1.1. Antecedentes reticulares

Definición 1.1. Sea X un conjunto y $\leq \subseteq X \times X$. Decimos que $(X, \leq)$ es un *orden parcial* si:

1) $\forall x \in X$, $(x, x) \in \leq$, es decir, $\leq$ es reflexiva.
2) Si $(x, y), (y, x) \in \leq$ entonces $x = y$, es decir, $\leq$ es antisimética.
3) Si $(x, y), (y, z) \in \leq$ entonces $(x, z) \in \leq$, es decir, $\leq$ es transitiva.

La clase de los órdenes parciales se denotará como $COPO$, si $(X, \leq) \in COPO$, será denotado como X y si $(x, y) \in \leq$ se escribirá $x \leq y$.

Definición 1.2. Sea $X \in COPO$ y $A \subseteq X$, decimos que $x \in X$ es:

1) Cota superior de A si: $\forall y \in A, y \leq x$.
2) Cota inferior de A si : $\forall y \in A, x \leq y$.
3) Máximo de A si: $x \in A$ y $\forall y \in A, x \leq y \Rightarrow x = y$.
4) Mayor de A si: $x \in A$ y $\forall y \in A, y \leq x$.

5) Mínimo de A si: $x \in A$ y $\forall y \in A, y \leq x \Rightarrow x = y$.
6) Menor de A si: $x \in A$ y $\forall y \in A, x \leq y$.
7) Supremo de A si es una menor cota superior.
8) Ínfimo de A si es una mayor cota inferior.

Observemos que cuando los elementos mayores, menores, supremos e ínfimos de A existen, estos son únicos por la antisimetría.

Definición 1.3. Sea $X \in COPO$, decimos que X es una *retícula* si $\forall x, y \in X$, el conjunto $\{x, y\}$ tiene supremo e ínfimo. Decimos que X es una *retícula completa* si: $\forall A \subset X$ tiene supremo e ínfimo.

Proposición 1.4. Sea $X \in COPO$, son equivalentes:
1) X es retícula completa.
2) Todo subconjunto de X tiene supremo.
3) Todo subconjunto de X tiene ínfimo.

Demostración. Sólo basta probar que 2) y 3) son equivalentes.

2) $\Rightarrow$ 3): Sea $A \subseteq X$ y sea $B = \{x \in X | x \text{ es cota inferior de } A\}$. Como $B \subset X$ entonces existe y supremo de B, veamos que $y \in B$ y es mayor en B.

Sea $x \in A$, entonces $\forall z \in B, z \leq x$, pues los elementos de B son cotas inferiores de A. Como y es supremo de B y cada elemento de A es cota superior de B, entonces $y \leq x \ \forall x \in A$, por lo que $y \in B$.

Sea $x \in B$, entonces $x \leq y$, pues y es el supremos de B, por lo que y es mayor en B y así la mayor cota inferior de A.

3) $\Rightarrow$ 2): Es análogo al anterior.

$\square$

La proposición anterior nos da condiciones necesarias y suficientes para que un orden parcial sea una retícula completa, sólo es necesario verificar la existencia de ínfimos o supremos arbitrarios, aunque algunas veces será necesario describir ambos elementos.

Notación. Sea $X \in COPO$ y $A \subseteq X$, denotaremos por $\bigvee A$ al supremo de A y por $\bigwedge A$ al ínfimo de A, siempre que éste exista. Si $A = \{x, y\}$, $\bigvee A = x \vee y$ y $\bigwedge A = x \wedge y$.

Observación. Sea X una retícula completa. Como $X \subset X$, denotamos por $0 = \bigwedge X$ y $1 = \bigvee X$. Claramente 0 es menor que todo elemento de X y 1 es mayor que todo elemento de X.

Definición 1.5. Sea X una retícula, decimos que X es *pseudo complementada*(P.C) si $\forall x \in X, \exists y \in X$ tal que $x \wedge y = 0$ y y es máximo con esta propiedad, decimos que X es *fuertemente pseudo complementada*(F-P.C) si X es P.C y el elemento que cumple la propiedad para $x \in X$ es mayor con esa propiedad, y decimos que X es complementada si $\forall x \in X, \exists y \in X$ tal que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$.

Definición 1.6. Sea X una retícula:

1) X es una *retícula distributiva* si $\forall x, y, z \in X$ se cumple:
$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ lo cual es equivalente a $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$

2) Decimos que X es una *retícula modular* si $\forall x, y, z \in X$ se cumple:
Si $x \leq y$, entonces $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$. A esta última propiedad se le conoce como la *ley modular*.

Observemos que $x \leq y$ si y sólo si $x \vee y = y$ y $x \wedge y = x$, y con esto tenemos que toda retícula distributiva es modular.

Proposición 1.7. Sea X una retícula:
1) Si X es F-P.C, entonces X es P.C
2) Si X es distributiva y complementada, entonces X es $F - P.C$, por lo que los complementos son únicos.

Demostración. 1) Es clara, pues todo elemento mayor es elemento máximo.
2) Sean $x \in X$ y $y \in X$ tales que $x \vee y = 1$ y $x \wedge y = 0$. Veamos que y es mayor respecto a la segunda propiedad.
Sea $z \in X$ tal que $x \wedge z = 0$, entonces $z = z \wedge 1 = z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = 0 \vee (z \wedge y)$, por lo que $z \leq y$, por lo que y es mayor con esa propiedad y así X es F-P.C.

$\square$

En general no es cierto que en una retícula complementada los complementos sean únicos y sea F-P.C. El siguiente ejemplo se le conoce como diamante (D_5), que claramente es complementada pero los complementos no son únicos y no es F-P.C.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ a \arrow[dr, dash] & b \arrow[d, dash] & c \arrow[dl, dash] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Diamante (D_5)

No es distributiva pues $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$, mientras que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$ pero $a \neq 0$.

Definición 1.8. Sea X una retícula F-P.C. Definimos el *esqueleto* de X como:

$Skel(X) = \{x | \exists y \in X$, con x pseudocomplemento de $y\}$

Notación. Si X es una retícula F-P.C, denotaremos al pseudo complemento fuerte de cualquier elemento $x \in X$ como $x^{\perp}$.

Lema 1.9. Para cualquier $(X, \leq)$ retícula F-P.C. y cualesquiera elementos $a, b \in X$, si $a \leq b$ entonces $b^{\perp} \leq a^{\perp}$ y $a \leq a^{\perp\perp}$.

Demostración. Sean $a, b \in X$, tales que $a \leq b$, observemos que $a \wedge b^{\perp} \leq b \wedge b^{\perp} = 0$, así que $a \wedge b^{\perp} = 0$ y como $a^{\perp}$ es el mayor elemento con esa propiedad, se sigue que $b^{\perp} \leq a^{\perp}$.

Para la segunda afirmación basta observar que $a \wedge a^{\perp} = 0$ y $a^{\perp\perp}$ es el mayor elemento con la propiedad anterior, por lo que $a \leq a^{\perp\perp}$.

$\square$

Proposición 1.10. Sea $(X, \leq)$ una retícula F-P.C. Para todo $a \in X$ se cumple que $a^{\perp} = a^{\perp\perp\perp}$.

Demostración. De la segunda afirmación del lema anterior se tiene que $a \leq a^{\perp\perp}$ y por la primera afirmación se tiene que $a^{\perp\perp\perp} \leq a^{\perp}$.

Para la otra desigualdad aplicamos la segunda afirmación del lema anterior a $a^{\perp}$, es decir $a^{\perp} \leq (a^{\perp})^{\perp\perp} = a^{\perp\perp\perp}$. De la antisimetría se tiene la igualdad.
□

1.2. Antecedentes Modulares

Definición 1.11. Sea R un anillo, un *R-módulo* (o simplemente módulo) es una quinteta ordenada $(M, +, 0, * : M \times R \to M, R)$, tal que :

1) $(M, +, 0)$ es un grupo abeliano.
2) $\forall m, n \in M$ y $\forall r \in R$, $r * (m + n) = (r * m) + (r * n)$.
3) $\forall m \in M$ y $\forall r, s \in R$, $(r+s)*m = (r*m)+(s*m)$ y $rs*(m) = r*(s*m)$
4) $\forall m \in M$, $1 * m = m$.

Denotaremos a $r * m = rm$ para todos $r \in R$, $m \in M$ y a la clase de los R-módulos (izquierdos) la denotaremos como $R - mod$.

Definición 1.12. Sean $M, N \in R - mod$ y $M \xrightarrow{f} N$ una función. Decimos que f es un morfismo de módulos si: $f(rm + n) = rf(m) + f(n)$, $\forall m, n \in M, \forall r \in R$.

Definición 1.13. Sea M un módulo y $N \subseteq M$ tal que N es un módulo. Decimos que N es submódulo de M, lo cual denotaremos como $N \leq M$ si la inclusión $N \hookrightarrow M$ es un morfismo de módulos.

Sabemos que $N \leq M$ si N es un módulo bajo las operaciones de M restringidas a N y si los neutros coinciden.

Como los submódulos son en particular subgrupos abelianos, entonces el cociente de un módulo por un submódulo es un grupo abeliano y es fácil ver que se puede dar estructura de R-módulo a un cociente M/N mediante $r(m + N) = rm + N$.

Definición 1.14. Sea $M \xrightarrow{f} N$ un morfismo de módulos, definimos:
$Ker(f) = \{x \in M | f(x) = 0\}$ el núcleo de f.
$Im(f) = \{y \in N | \exists x \in M$ y $f(x) = y\}$ la imagen de f.

Es fácil ver que los subconjuntos anteriores son submódulos de sus respectivos módulos, y se tiene también la siguiente propiedad:

Lema 1.15. Un morfismo f como antes, es inyectivo si y sólo si el núcleo es trivial.

Demostración. Sea f un morfismo inyectivo, claramente el cero va al cero (f es en particular morfismo de grupos) y como es inyectiva entonces el 0 es el único elemento que va al 0.

Por otro lado, sea $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$ y como el núcleo es trivial, entonces $x - y = 0 \Rightarrow x = y$, por lo que f es inyectivo.

□

Observemos que la proyección canónica de un módulo en cualquier cociente es un morfimo de módulos, el cual claramente es suprayectivo.

Definición 1.16. Sea f un morfismo de M a N, decimos que f es:

1) *Monomorfismo* (mono) si es cancelable por la izquierda bajo composición de morfismos.

2) *Epimorfismo* (epi) si es cancelable por la derecha bajo la composición de morfimos.

Proposición 1.17. Sea f un morfismo de M a N, entonces:

1) f es mono si y sólo si f es inyectivo.

2) f es epi si y sólo si f es sobre.

Demostración. Claramente toda función suprayectiva es cancelable por la derecha y toda función inyectiva es cancelable por la izquierda.

1) Veamos que si f no es inyectiva entonces no es mono. Pero si f no es inyectiva entonces $Ker(f) \neq \{0\}$, por lo que $0 \neq K = Ker(f) \leq M$. Sean i la inclusión de K en M, que por definición es morfismo, y c el morfismo cero de K en M, entonces $f \circ i = 0 = f \circ c$, pero como $K \neq \{0\}$, existe $0 \neq x \in K$,

así que $i(x) = x \neq 0 = c(x)$, de donde se tiene que $c \neq i$, por lo que f no es mono.

2) Supongamos que f no es sobre, entonces $I = im(f) \lneq N$, por lo que $N/I \neq 0$ y así π la proyección canónica es un morfisno distinto de cero. Sea c el morfismo cero de N en N/I, por lo que $c \circ f = \pi \circ f$, pero como $\pi \neq c$ entonces f no es epi.

$\square$

Proposición 1.18. Sean $M \xrightarrow{f} N$ y $N \xrightarrow{g} L$ morfismo de módulos.

1) Si $g \circ f$ es epi, entonces g es epi.

2) Si $g \circ f$ es mono, entonces f es mono.

Demostración.

1) Supongamos que $g \circ f$ es epi y sean $L \xrightarrow{h_1} K$ y $L \xrightarrow{h_2} K$ tales que $h_1 \circ g = h_2 \circ g$, entonces $h_1 \circ g \circ f = h_2 \circ g \circ f$, pero $g \circ f$ es epi, así que $h_1 = h_2$, por lo que g es epi.

2) Se demuestra de manera semejante al anterior.

$\square$

Definición 1.19. Sea $M \xrightarrow{f} N$ un morfismo. Decimos que un par (K, j) es un *núcleo* de f si $K \xrightarrow{j} M$ es un morfismo tal que $f \circ j = 0$ y es universal respecto a esta propiedad. Es decir, para todo $K' \xrightarrow{j'} M$ morfismo tal que $f \circ j' = 0$ existe un único morfismo $K' \xrightarrow{\phi} K$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "j"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
K' \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "j'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dualmente, decimos que una pareja (C, p) es un *conúcleo* de f si $N \xrightarrow{p} C$ es un morfismo tal que $p \circ f = 0$ y es universal respecto a la propiedad. Es decir, para todo $N \xrightarrow{p'} C'$ morfismo tal que $p' \circ f = 0$, existe un único morfismo $C \xrightarrow{\psi} C'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"] & C \arrow[dl, "\psi"] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.20. Sea $M \xrightarrow{f} N$ un morfismo, entonces:
1) $(ker(f), i)$ es un núcleo de f
2) $(N/im(f), \pi)$ es un conúcleo de f.

Demostración.
1) Claramente $f \circ i = 0$. Supongamos que $K \xrightarrow{j} M$ es tal que $f \circ j = 0$, entonces $\forall x \in K \ f(j(x)) = 0$, por lo que $\forall x \in K \ j(x) \in ker(f)$, así que $j(K) \subseteq ker(f)$ por lo que j se puede correstringir a $ker(f)$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} ker(f) \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ K \arrow[u, "j|^{ker(f)}"] \arrow[ur, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

Veamos que $j|$ es único con tal propiedad. Supongamos que $K \xrightarrow{j'} ker(f)$ también hace conmutar el diagrama anterior, por lo que $i \circ j| = j = i \circ j'$. Pero i es mono, por lo que se cancela por la izquierda, así $j| = j'$ y así es único y $(ker(f), i)$ es núcleo de f.
2) Claramente $\pi \circ f = 0$. Supongamos que $N \xrightarrow{p} C$ tal que $p \circ f = 0$. Para cada $[x] \in N/im(f)$ definimos $N/im(f) \xrightarrow{\psi} C$ como $\psi([x]) = p(x)$. Veamos que ψ está bien definido, si $[x] = [y]$, entonces $x - y \in im(f)$ así que existe $z \in M$ tal que $f(z) = x - y$. Por hipótesis tenemos que $p \circ f = 0$, así que $0 = p(f(z)) = p(x - y) = p(x) - p(y)$, de donde se tiene que $p(x) = p(y)$, así que ψ está bien definida. Claramente ψ es un morfismo y hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"] & N/im(f) \arrow[dl, "\psi"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Veamos que ψ es único con ésta propiedad. Si ϕ es otro morfismo que hace conmutar el diagrama anterior, entonces $\psi \circ \pi = p = \phi \circ \pi$, pero π es epi, por lo que se cancela por la derecha, así que $\phi = \psi$ es único y $(N/im(f), \pi)$ es conúcleo de f.

□

Observación. Si tenemos una sucesión exacta corta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, entonces f es mono y como es exacta, entonces $ker(g) = im(f) \cong L$, por lo que (L, f) es un núcleo de g y como g es sobre, entonces $N \cong M/f(L)$, por lo que g es un conúcleo de f.

Definición 1.21. Sea $\{M_i\}_I$ una familia de módulos. Definimos:

1) El producto de la familia $\prod_I M_i$ como el produto cartesiano de la familia con las operaciones definitas puntalmente $(((rf)+g)(i) = rf(i)+g(i), \forall i \in I)$.

2) La suma directa de la familia $\bigoplus_I M_i = \{f \in \prod M_i || sop(f)| \in \mathbb{N}\}$, que claramente es submódulo del producto.
Donde $sop(f) = \{i \in I | f(i) \neq 0\}$.

Definición 1.22. Sea $\{M_i\}_I$ una familia de módulos. Decimos que un par $(P, \{p_i\}_I)$ es un producto de la familia si para todo $i \in I$, $P \xrightarrow{p_i} M_i$ es un morfismo, y para todo par $(P', \{p_i'\}_I)$ con las mismas propiedades, existe un único morfismo $P' \xrightarrow{\phi} P$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama para toda $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "p_i'"'] & P \arrow[d, "p_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

Dualmente, decimos que un par $(C, \{j_i\}_I)$ es un coproducto de la familia si para cada $i \in I$, $M_i \xrightarrow{j_i} C$ es un morfismo, y para todo par $(C', \{j_i'\}_I)$ con la misma propiedad, existe un único morfismo $C \xrightarrow{\psi} C'$ tal que hace conmutar para cada $i \in I$ el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "j'_i"'] & C \arrow[d, "\psi"] \\
& C'
\end{tikzcd}
$$

Proposición 1.23. Para cualquier familia de módulos $\{M_i\}_I$ se cumple:

1) $(\prod_I M_i, \{\pi_i\}_I)$ es un producto, donde $\prod_I M_i \xrightarrow{\pi_i} M_i$ es las proyección canónica.

2) $(\bigoplus_I M_i, \{j_i\}_I)$ es un coproducto, donde j_i es el morfimo inclusión dado por $j_i(x)(i) = x$ y $j_i(x)(k) = 0$ para todo $k \neq i$.

Demostración.

1) Claramente las proyecciones son morfismos. Sea $(P, \{f_i\}_I)$ con $P \xrightarrow{f_i} M_i$ morfismo, definimos $P \xrightarrow{\phi} \prod M_i$ por $\phi(x)$ es la función que cumple $\phi(x)(i) = f_i(x)$ $\forall i \in I$, que claramente es un elemento del producto. Es fácil ver que es el unico morfismo con la propiedad de hacer conmutar los triángulos para cada $i \in I$.

2) Claramente j_i es un morfismo. Observemos que cada elemento de $m \in \bigoplus M_i$ se puede representar de manera única como $m = \sum j_i(m_i)$ una suma finita, donde $m_i \in M_i$. Sea $(C, \{g_i\}_I)$ con $M_i \xrightarrow{g_i} C$ morfismo, por lo dicho antes definimos $\bigoplus M_i \xrightarrow{\psi} C$ como $\psi(m) = \sum f_i(m_i)$. Es fácil ver que es un morfismo y que es único con la propiedad de hacer conmutar los triángulos para cada $i \in I$.

$\square$

Definición 1.24. Sea M un módulo. Decimos que M es:

Inyectivo si $\forall g, N \xrightarrow{g} M$ y $\forall h, N \xrightarrow{h} L$ mono, se tiene que $\exists f, L \xrightarrow{f} M$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, "g"] & L \arrow[dl, dashed, "\exists f"] \\
M
\end{tikzcd}
$$

Proyectivo si $\forall g, M \xrightarrow{g} N$ y $\forall h, L \xrightarrow{h} N$ epi, se tiene que $\exists f, M \xrightarrow{f} L$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\exists f"'] \arrow[d, "g"] \\ L \arrow[r, two heads, "h"] & N \end{tikzcd}$$

Definición 1.25. Sean M módulo y $N \leq M$. Decimos que N es:

Esencial en M si $\forall x \in M$ $x \neq 0$, $\exists r \in R$ tal que $rx \neq 0$ y $rx \in N$, lo cual denotaremos por $N \leq_{es} M$

Superfluo en M si siempre que exista $L \leq M$ tal que $L+N = M$, entonces $L = M$, lo cual denotaremos por $N \ll M$.

Definición 1.26. Sean M y E módulos. Decimos que E es la *cápsula inyectiva* de M si existe $M \xrightarrow{f} E$ mono tal que $f(M) \leq_{es} E$ y E es inyectivo.

Definición 1.27. Sean M y P módulos. Decimos que P es la *cubierta proyectiva* de M si existe $P \xrightarrow{f} M$ epi tal que $ker(f) \ll P$

Para acabar este capítulo enunciaremos algunos teoremas, cuyas demostraciones se pueden encontrar en [5] y [4].

Teorema 1.28. Sea R un anillo. R es artiniano si y sólo si R es noetheriano y semiartiniano.

Teorema 1.29. Todo módulo tiene cápsula inyectiva.

Recordemos que en general no todo módulo tiene cubierta proyectiva, un ejemplo es $\mathbb{Z}_n$ visto como $\mathbb{Z}$-módulo. Esto es fácil de ver si recordamos que todo proyectivo que cubre a un módulo tiene como sumando directo a la cubierta proyectiva de éste (cuando exista) y $\mathbb{Z}_n$ está cubierto por $\mathbb{Z}$ (que es proyectivo); así que si $\mathbb{Z}_n$ tuviera cubierta proyectiva P, $\mathbb{Z} = P \oplus I$ para algún ideal $I \leq \mathbb{Z}$. Observemos que esto no puede pasar, pues si $I \neq 0$ se tiene que $I \leq_{es} \mathbb{Z}$, así que $I = \mathbb{Z}$ ya que es sumando directo de $\mathbb{Z}$, por lo que $P = 0$, lo cual no es posible. Y por otro lado si $I = 0$, se tiene que $P = \mathbb{Z}$, pero el núcleo del epimorfismo $\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n$ es $n\mathbb{Z}$ el cual no es superfluo en $\mathbb{Z}$. Lo anterior demuestra que $\mathbb{Z}_n$ no tiene cubierta proyectiva.

Si un anillo R es tal que todo módulo tiene cubierta proyectiva, el anillo se denomina *perfecto*. Un teorema importante que da condiciones necesarias y suficientes para verificar si un anillo es perfecto es el Teorema de Bass, del cual enunciaremos algunas de las equivalencias que da.

Teorema (de Bass) 1.30. Sea R anillo. Son equivalentes:

1) R es perfecto derecho

2) Toda cadena descendente de ideales principales izquierdos se estaciona.

3) R es semiartiniano izquierdo y no hay sucesiones infinitas de idempotentes ortogonales no triviales.

Capítulo 2

Grandes retículas

Definición 2.1. Una gran retícula es un par $(X, \leq)$ tal que X es una clase propia (o conglomerado) y $\leq$ cumple las propiedades de retícula, es decir, es una retícula salvo que X no es conjunto.

Ejemplos:

1) Sea R un anillo. Decimos que σ es un *prerradical* si $R-mod \xrightarrow{\sigma} R-mod$ es un funtor tal que $\forall M \in R-mod, \sigma(M) \leq M$; y para todo morfismo $M \xrightarrow{f} N$, $\sigma(f) = f|_{\sigma(M)}^{\sigma(N)}$.
Sea $R-pr$ el conglomerado de todos los prerradicales y definamos una relación de orden entre ellos como sigue:
$\sigma \leq \rho$ si y sólo si $\forall M \in R-mod, \sigma(M) \leq \rho(M)$. Claramente este es un orden parcial y dada una familia $\{\sigma_i\}_I$ de preradicales, definimos el supremo como $\bigvee_I \{\sigma_i\}(M) = \sum_I \sigma_i(M)$ y $\bigwedge_I \{\sigma_i\}(M) = \bigcap_I \{\sigma_i(M)\}$. Y en morfismos se porta como la restricción en los respectivos sumódulos.
Esta gran retícula es completa, además modular y superiormente continua.

2) Sea V la clase de todos los conjuntos. Claramente $(V, \subseteq)$ es un orden parcial y es una (gran) retícula, pues la unión de dos conjuntos, así como la intersección, es un conjunto. Pero esta gran retícula no es completa, pues no hay elemento mayor (paradoja de Russell). Además esta gran reticula es distributiva y por lo tanto modular.

Observación. A diferencia de las retículas, decimos que una gran retícula X es completa, si para cualquier *familia* de elementos de X existe un supremo y un ínfimo, es decir, para todo $A = \{A_i\}_{i\in I} \subseteq X$, con I conjunto, tiene supremo e ínfimo.

Observemos que la clase de todos los conjuntos, no es completa ya que la familia vacía no tiene ínfimo (la intersección vacía no es un conjunto).

Notación. Sea M módulo. Denotaremos por $L(M)$ la retícula de submódulos de M.

A partir de ahora, consideraremos algunas de las siguientes propiedades de cerradura: cerradura bajo submódulos ($\leq$), cerradura bajo cocientes ($\twoheadrightarrow$), cerradura bajo extensiones(ext), cerradura bajo sumas directas($\bigoplus$), cerradura bajo productos ($\prod$), cerradura bajo cápsulas inyectiva ($E()$) y cerradura bajo cubiertas proyectivas ($P()$).

Notación. Sea P un conjunto de propiedades de cerradura. Denotaremos por L_P el conglomerado de todas las clases cerradas bajo las propiedades de P.

Observemos que si P es un conjunto de propiedades de cerradura, entonces $(L_P, \subseteq)$ es un orden parcial. Sea además $\{A_i\}_I$ una familia de elementos de L_P, entonces $\bigwedge_I\{A_i\} = \bigcap_I\{A_i\} \in L_P$, pues para cada módulo M de A, cualquier propiedad de cerradura ϕ en P y cualquier módulo N tal que cumpla la propiedad, N la cumple para cada A_i, por lo que $N \in A_i, \forall i \in I$, de donde $N \in A$ y así que L_P es una gran retícula, ya que tiene ínfimos arbitrarios.

El estudio de las grandes retículas es una herramienta que ayuda a caracterizar anillos, ya que las propiedades de las retículas van a variar dependiendo de las propiedades del anillo. Para lograr lo anterior necesitaremos describir mejor algunos de los objetos como los supremos o pseudocomplementos, entre otros.

Ejemplos. Algunos ejemplos familiares de este tipo de grandes retículas son:

1) La gran retícula de clases hereditarias ($L_{\{\leq\}}$)
2) La gran retícula de clases cohereditarias ($L_{\{\twoheadrightarrow\}}$)
3) La gran retícula de clases abiertas ($L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$)
4) La gran retícula de clases de Serre ($L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}}$)

5) La gran retícula de clases naturales ($L_{\{\leq, \bigoplus, E()\}}$)
6) La gran retícula de clases de torsión ($L_{\{\twoheadrightarrow, ext, \bigoplus\}}$)
7) La gran retícula de clases de torsión hereditarias ($L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, ext, \bigoplus\}}$)

Notación. Si P es un conjunto de propiedades de cerradura y $A \subseteq R-mod$ es una clase de módulos, denotaremos por $\xi_P(A)$ a la clase generada por A en L_P, es decir, al menor elemento de L_P que tiene a A como subclase.

Empecemos el estudio de estas grandes retículas recordando algunas definiciones.

Definición 2.2. Sea M un módulo. Decimos que un módulo N es un *subcociente* de M si es un submódulo de un cociente de M, es decir, existe un diagrama de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads, "g"] \\ N \arrow[r, tail, "f"] & K \end{tikzcd}$$

Observemos que es equivalente a pedir que N sea un cociente de un submódulo, pues al diagrama anterior lo podemos completar de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(f(N)) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, two heads, "h"] & M \arrow[d, two heads, "g"] \\ N \arrow[r, tail, "f"] & K \end{tikzcd}$$

Donde $l = f|^{f(N)}$ es iso (f es mono) y $h = l^{-1} \circ g|_{g^{-1}(f(N))}$, así que claramente h es epi (pues g lo es y l es iso) y claramente ι es mono.

Y para el otro caso, si tenemos un diagrama de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, two heads, "f"] & M \\ N & \end{tikzcd}$$

lo completamos al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, two heads, "f"] & M \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
N \arrow[r, tail, "h"] & M/g(ker(f))
\end{tikzcd}$$

donde h está dado por la propiedad del conúcleo, ya que si $ker(f) \xrightarrow{\iota} K$, entonces $(\pi \circ g) \circ \iota = 0$ y N es el conúcleo de ι, y π es epimorfismo canónico. Sólo resta ver que h es mono.
Sea $0 \neq x \in N$, como f es epi existe $y \neq 0$ tal que $f(y) = x$, por lo que $h(x) = \pi \circ g(y)$, como g es mono entonces $g(y) \neq 0$ y si $h(x) = \pi(g(y)) = 0$ entonces $y \in ker(f)$ y $x = f(y) = 0$, lo cual contradice que $x \neq 0$, por lo tanto h es mono.

En algunas de estas grandes retículas es fácil describir los pseudocomplementos, por ejemplo:

Proposición 2.3 Para un anillo R se cumple:

1) $C^{\perp_{\{\leq\}}} = \{M |\ N \leq M \text{ y } N \in C \Rightarrow N = 0\}$ para toda $C \in L_{\{\leq\}}$

2) $C^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} = \{M |\ N \text{ subcociente de } M \text{ y } N \in C \Rightarrow N = 0\}$ para $C \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$

Demostración.
1) Sea $A = \{M | N \leq M, N \in C \Rightarrow N = 0\}$. Si $M \in A \cap C$, entonces $M \leq M$ y $M \in C$, pero como $M \in A$, por definición $M = 0$, por lo que $A \cap C = \{0\}$. Veamos que $A \in L_{\{\leq\}}$ y que realmente es un pseudocomplemento fuerte.
Sea $M \in A$ y $N \leq M$. Supongamos que $L \leq N$ y $L \in C$. Como $L \leq N \leq M \Rightarrow L \leq M$ y $L \in C$, por lo que $L = 0$, así que $N \in A$ y $A \in L_{\{\leq\}}$.
Por último, sea $B \in L_{\{\leq\}}$ tal que $B \cap C = \{0\}$, veamos que $B \subseteq A$. Sea $M \in B$ y $N \leq M$ tal que $N \in C$. Como $B \in L_{\{\leq\}}$ se tiene que $N \in B$, pero $N \in C$, por lo que $N \in B \cap C = \{0\}$, así que $N = 0$ y $M \in C$, de donde se sigue que $B \subseteq A$.

2) Sea $C \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ y sea $A = \{M |$ si N es subcociente de M y $N \in C \Rightarrow N = 0\}$.
Sea $M \in C \cap A$, como M es subcociente de el mismo, entonces $M = 0$, por definición de A. Veamos que A es una clase abierta:

$\leq$) Sea $M \in A$ y $N \leq M$. Supongamos que existe un diagrama de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, tail] & K \end{tikzcd}$$

para algún K y con $L \in C$; veamos que $L = 0$. Por lo visto anteriormente, esto es equivalente a que exista un diagrama de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & N \\ L & \end{tikzcd}$$

Así que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & N \arrow[r, hook] & M \\ L & & \end{tikzcd}$$

de donde se ve que L es subcociente de M y como $M \in A$ y $L \in C$, entonces $L = 0$ y así $N \in A$.

$\twoheadrightarrow$) Sea ahora $M \in A$ y N un cociente de M. Supongamos que $L \in C$ es subcociente de N, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads] \\ & N \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, tail] & K \end{tikzcd}$$

de donde es claro que L es subcociente de M y nuevamente, como $L \in C$ y $M \in A$, entonces $L = 0$ y así $N \in A$. Por lo tanto se tiene que $A \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$.

Veamos por último que A es realmente un pseudocomplemento fuerte. Sea $B \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ tal que $B \cap C = \{0\}$. Sea $M \in B$ y sea L subcociente de M tal que $L \in C$. Como $B \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ entonces $L \in B$, pues es submódulo de un cociente de M, el cual está en B, así que $L \in B$. Pero $L \in C$, por lo que $L = 0$, de donde se sigue que $M \in A$, es decir $B \subseteq A$

$\square$

De lo anterior tenemos que la gran retícula de clases abiertas y la gran retícula de clases hereditarias, son grandes retículas fuertemente pseudocomplementadas.

Gracias al siguiente teorema tendremos que más grandes retículas son F-P.C. y nos ayudará a calcular los esqueletos y pseudocomplementos fuertes de una mejor manera.

Teorema 2.4. Sean P, Q conjuntos de propiedades de cerradura, tales que L_P es F-P.C y $Skel(L_P) \subseteq L_Q \subseteq L_P$, entonces L_Q es F-P.C y $Skel(L_P) = Skel(L_Q)$.

Demostración. Para la primera afirmación sea $A \in L_Q \subseteq L_P$. Entonces $A \cap A^{\perp_P} = 0$ y $A^{\perp_P} \in skel(L_P) \subseteq L_Q$, por lo que $A^{\perp_P} \in L_Q$. Veamos que $A^{\perp_P}$ es pseudocomplemento fuerte de A en L_Q. Si $B \in L_Q$ es tal que $B \cap A = 0$, entonces $B \in L_P$ y como $A^{\perp_P}$ es pseudocomplemento fuerte de A en L_P, entonces $B \subseteq A^{\perp_P}$, así que $A^{\perp_P}$ es pseudocomplemento fuerte de A en L_Q por lo que L_Q es F-P.C.
Veamos la segunda afirmación:
$\subseteq$) Sea $C^{\perp_Q} \in Skel(L_Q)$. Veamos que en este caso $C^{\perp_P} = C^{\perp_Q}$.

Por un lado, tenemos que $C^{\perp_Q} \in L_Q \subseteq L_P$ y $C \cap C^{\perp_Q} = \{0\}$, de donde se tiene que $C^{\perp_Q} \leq C^{\perp_P}$, ya que L_P es F-P.C. Ahora como $C^{\perp_P} \in Skel(L_P) \subseteq L_Q$ y $C^{\perp_Q} \cap C = \{0\}$ y L_Q es F-P.C, se sigue que $C^{\perp_P} \leq C^{\perp_Q}$ y así $C^{\perp_P} = C^{\perp_Q}$ y $C^{\perp_Q} \in Skel(L_P)$.
$\supseteq$) Sea $C^{\perp_P} \in Skel(L_P)$. Afirmamos que en este caso $C^{\perp_P} = C^{\perp_P \perp_P \perp_Q}$

Como $C^{\perp_P \perp_P} \in Skel(L_P) \subseteq L_Q$, de lo anterior tenemos que $C^{\perp_P \perp_P \perp_P} = C^{\perp_P \perp_P \perp_Q}$. Además por *(1.10)* $C^{\perp_P \perp_P \perp_P} = C^{\perp_P}$, de donde obtenemos lo afirmado.

$\square$

Observación. Con las hipótesis del teorema anterior demostramos que $C^{\perp_P} = C^{\perp_Q}$.

Teorema 2.5. Si $L_Q = Skel(L_P)$, donde P, Q son conjuntos de propiedades de cerradura, con L_P F-P.C., entonces $C^{\perp_P \perp_P} = \xi_Q(C)$ para todo $C \in L_P$.

Demostración. Primero notemos que se cumplen las hipótesis del teorema anterior. Sea $C \in L_P$. Por hipótesis $C^{\perp_P} \in L_Q$, así por la observación anterior se tiene que $C^{\perp_P \perp_P} = C^{\perp_P \perp_Q}$, y por *(1.9)* tenemos que $C \subseteq C^{\perp_P \perp_P} \in L_Q$, por lo que $\xi_Q(C) \subseteq C^{\perp_P \perp_P}$.

Para la otra contención sea $D \in L_Q$, tal que $C \subseteq D$. Veamos que en este caso siempre se tiene que $C^{\perp_P \perp_P} \subseteq D$. Como $L_Q = Skel(L_P)$, entonces $D = A^{\perp_P}$, donde $A \in L_P$, así que $C^{\perp_P \perp_P} \subseteq D^{\perp_P \perp_P} = A^{\perp_P \perp_P \perp_P} = A^{\perp_P} = D$. Se sigue que $C^{\perp_P \perp_P} \subseteq D$, y por lo tanto $\xi_Q(C) = C^{\perp_P \perp_P}$. Las contenciones e igualdades se deben a *(1.9)* y *(1.10)*.

$\square$

Corolario 2.6. Si P, Q y R son conjuntos de propiedades de cerradura, tales que L_P es F-P.C y $skel(L_P) \subseteq L_Q \subseteq L_R \subseteq L_P$, entonces L_Q, L_R son F-P.C y $skel(L_P) = skel(L_Q) = skel(L_R)$.

Demostración. Tenemos que $skel(L_P) \subseteq L_R$, así por *(3.4)*, L_R es F-P.C y $skel(L_P) = skel(L_Q)$. Nuevamente, como $skel(L_R) = skel(L_P) \subseteq L_Q$ y L_R es F-P.C, entonces L_Q es F-P.C y $skel(L_Q) = skel(L_R) = skel(L_P)$.

$\square$

Observemos que lo anterior también vale para cualquier cantidad finita de retículas que cumplan las condiciones del corolario anterior.

Usemos el hecho anterior para calcular el esqueleto de $R - tors, R - Serre$ y $R - op$

Lema 2.7. $skel(R - op) \subseteq R - tors = L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}}$

Demostración. Sea $A \in skel(R - op)$, entonces $A = B^{\perp_{op}}$, donde $B \in R - op$, así que $A = \{M |$ no existe subcociente distinto de cero en $B\}$.

Como $skel(R-op) \subseteq R-op = L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, basta ver que A es cerrada bajo extensiones y sumas directas.

ext) Supongamos que tenemos una sucesión $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, donde $L, N \in A$, veamos que $M \in A$. Si $M \notin A$, entonces existe un subcociente K de M distinto de cero en B, por lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "\alpha"] & N \arrow[r] & 0 \\
& K \arrow[r, tail, "\beta"] & T & &
\end{tikzcd}$$

con $0 \neq K \in B$. Observemos que $\alpha(f(L)) \cap \beta(K) \leq \alpha(f(L))$ y que $\alpha(f(L)) \in A$, pues es un cociente de $L \in A$, por lo cual $\alpha(f(L)) \cap \beta(K)$ es un subcociente de L y por lo tanto pertecene a A. Ahora, como $\beta(K) \in B$ (β es mono y $K \cong \beta(K)$) entonces $\alpha(f(L)) \cap \beta(K) \in B$, pues B es hereditaria. Por hipótesis $L \in A$, así que $\alpha(f(L)) \cap \beta(K) = 0$. También notemos que $\alpha(f(L)) \neq T$, pues en caso contrario K sería subcociente de L y $0 \neq K \in B$, lo cual es una contradicción pues $L \in A$. Así que $\alpha(f(L)) \neq T$, por lo que $T \xrightarrow{\pi} T/\alpha(f(L)) \neq 0$.
Es fácil ver que $\pi \circ \beta$ es mono, pues si $x \in K$ es tal que $\pi(\beta(x)) = 0$, entonces $\beta(x) \in \alpha(f(L))$, pero $\beta(x) \in \beta(K)$, así que $\beta(x) \in \alpha(f(L)) \cap \beta(K) = 0$, por lo que $\beta(x) = 0$ y como β es mono, se sigue que $x = 0$.
Notemos que $\pi \circ \alpha \circ f = 0$, así por la propiedad del conúcleo se tiene un único morfismo $N \xrightarrow{\gamma} T/\alpha(f(L))$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "\alpha"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
& K \arrow[r, tail, "\beta"] & T \arrow[r, two heads, "\pi"] & T/\alpha(f(L)) &
\end{tikzcd}$$

Como el diagrama anterior conmuta, se tiene que $\pi \circ \alpha = \gamma \circ g$, pero π y α son epimorfismos, asi que $\gamma \circ g$ es epi y por lo tanto γ es epi. Además ya vimos que $\pi \circ \beta$ es mono, así que K es un subcociente de N y $0 \neq K \in B$, lo cual contradice que $N \in A$. Por lo cual $M \in A$ y A es cerrada bajo extensiones.

$\oplus$) Sea $\{M_i\}_I$ una familia de módulos tales que $M_i \in A$ para todo $i \in I$. Veamos que $\bigoplus_I \{M_i\} \in A$. En caso contrario, existiría un subcociente de

$\bigoplus_I\{M_i\}$ distinto de cero que pertenece a B, de donde tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_I\{M_i\} \arrow[d, "\alpha"] \\ K \arrow[r, tail, "\beta"] & L \end{tikzcd}$$

con $0 \neq K \in B$. Luego existe $x \in K$, distinto de cero, por lo que $Rx \leq K$ distinto de cero y finitamente generado (cíclico), así que existe $N \lneq Rx$ máximo y por lo tanto Rx tiene un cociente simple $S = Rx/N$. De lo anterior podemos completar el diagrama anterior de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} & & \bigoplus_I\{M_i\} \arrow[d, "\alpha"] \\ Rx \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"] & K \arrow[r, tail, "\beta"] & L \arrow[d, "p"] \\ S \arrow[rr, tail, "h"] & & L/\beta(N) \end{tikzcd}$$

donde h está dada por la propiedad del conúcleo, p es epi y h es mono por el mismo argumento dado después de la definición de subcociente. Así que S es subcociente de $\bigoplus_I\{M_i\}$ y como $Rx \leq K \in B$ y B es hereditaria, $Rx \in B$, y como S es cociente de $Rx \in B$ y B es cohereditaria, entonces $0 \neq S \in B$, así que $\bigoplus_I\{M_i\}$ tiene un subcociente simple en B. Si $0 \neq y \in S$, entonces $h(y) = \sum_J p(\alpha(m_j))$ con $J \subseteq I$ finito y $m_j \in M_j$, además $Rh(y) = h(S)$ ($h(S)$ es simple y cualquier elemento distinto de cero lo genera), por lo que S es subcociente de $\bigoplus_J\{M_i\}$. Pero las sumas directas finitas son extensiones, y acabamos de demostrar que A es cerrada bajo extensiones, por lo que $\bigoplus_J\{M_i\} \in A$. Pero $S \in B$ y es distinto de cero, lo cual es una contradicción, por lo tanto A es cerrada bajo sumas directas.

$\square$

Corolario 2.8. *$R-tors$ y $R-Serre$ son F-P.C. y $skel(R-tors) = skel(R-Serre) = skel(R-op)$.*

Demostración. Ya vimos que $R{-}op$ es F-P.C y por *(3.7)* tenemos que $skel(R{-}op) \subseteq R-tors \subseteq R-Serre \subseteq R-op$, así por *(3.6)* $R-tors$ y $R-Serre$ son F-P.C y $skel(R-tors) = skel(R-serre) = skel(R-op)$. $\square$

Capítulo 3

R-sext y R-nat

Definición 3.1. Decimos que una clase C de R-módulos es una *clase con cero* si es cerrada bajo isomorfismos y tiene al módulo cero.

Notación. Sean A, B dos clases con cero. Denotaremos por:

$E(A,B) = \{M \in R{-}mod \mid \exists 0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0 \text{ exacta y } L \in A, N \in B\}$

Observemos que dada una sucesión como antes, tenemos que $L \cong f(L) \leq M$ y $N \cong M/f(L)$, y como A, B son clases con cero, entonces $f(L) \in A$ y $M/f(L) \in B$, por lo que siempre podemos considerar sucesiones de la forma $0 \to L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/L \to 0$, donde $L \leq M$, $L \in A$ y $M/L \in B$.

También observemos que $E(A,B)$ es una clase con cero, pues $0 \in E(A,B)$ ya que siempre se tiene la sucesión exacta $0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$, donde $0 \in A$ y $0 \in B$, pues A, B son clases con cero. Además si $M \in E(A,B)$ y $M' \cong_h M$, entonces tenemos una sucesión exacta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ con $L \in A$ y $N \in B$, de donde tenemos la sucesión exacta $0 \to L \xrightarrow{h \circ f} M' \xrightarrow{g \circ h^{-1}} N \to 0$, así que $M' \in E(A,B)$.

Definición 3.2. Denotaremos por $R - sext$ a la gran retícula $L_{\{\leq, ext\}}$ y denotaremos por $R - ext$ a la gran retícula $L_{\{ext\}}$

Proposición 3.3 Sean A, B, C clases con cero. Entonces se cumple $E(E(A,B),C) = E(A, E(B,C))$

Demostración. Sea $M \in E(E(A,B),C))$, entonces existe $0 \to L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/L \to 0$ con $L \in E(A,B)$ y $M/L \in C$. Como $L \in E(A,B)$, entonces existe $0 \to N \hookrightarrow L \twoheadrightarrow L/N \to 0$, con $N \in A, L/N \in B$, por lo cual tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & N \arrow[d, hook] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & M/L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L/N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M/N \arrow[r, two heads] \arrow[d] & M/L \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Con filas y columnas exactas. Esto se tiene ya que $N \leq L \leq M$, $L/N \leq M/N$ por el Teorema de la correspondencia y $(M/N)/(L/N) \cong M/L$ por el tercer teorema de isomorfismos. Además $L/N \in B$ y $M/L \in C$, entonces $M/N \in E(B,C)$ y como $N \in A$ se sigue que $M \in E(A, E(B,C))$.
Por otro lado sea $M \in E(A, A(B,C))$, entonces existe $0 \to L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/L \to 0$ con $L \in A$ y $M/L \in E(B,C)$, por lo que existe $0 \to N/L \hookrightarrow M/L \twoheadrightarrow M/N \to 0$ con $N \leq M$ y $L \leq N$ por el Teorema de la correspondencia, con $N/L \in B$ y $M/N \in C$. De donde tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & L \arrow[d, hook] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & M/N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N/L \arrow[r, hook] \arrow[d] & M/L \arrow[r, two heads] \arrow[d] & M/N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Como $L \in A$ y $N/L \in B$ entonces $N \in E(A, B)$, y como $M/N \in C$ tenemos que $M \in E(E(A, B), C)$, por lo que $E(E(A, B), C) = E(A, E(B, C))$

$\square$

Observación. Si A, B son clases con cero, entonces $A \cup B \subseteq E(A, B)$.

Demostración. Sea $M \in A \cup B$:
Caso 1) Si $M \in A$, entonces tenemos la sucesión exacta $0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0 \to 0$, y como B es clase con cero $0 \in B$, por lo que $M \in E(A, B)$.
Caso 2) Si $M \in B$, entonces tenemos la sucesión exacta $0 \to 0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0$, y como A es clase con cero $0 \in A$, por lo que $M \in E(A, B)$.

$\square$

Definición 3.4. Sea A una clase con cero. Definimos $E(A, A)^0 = \{0\}$ y $E(A, A)^{n+1} = E(A, E(A, A)^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.5. Sea $A \subseteq R - mod$, denotamos como $I(A) = \{M \in R - mod |\ \exists N \in A$ tal que $N \cong M\} \cup \{0\}$.

Observación. $I(A)$ es la menor clase con cero que contiene a A.

Demostración. Claramente $A \subseteq I(A)$. Primero veamos que $I(A)$ es clase con cero.

Por definición $0 \in I(A)$. Sea $M \in I(A)$ y $L \cong M$, como $M \in I(A)$ existe $N \in A$ tal que $N \cong M \cong L$, entonces $N \cong L$, por lo que $L \in I(A)$, así que $I(A)$ es clase con cero.
Sea B una clase con cero que contenga a A, entonces $\forall M \in A, M \in B$. Sea $L \in I(A)$, entonces existe $M \in A$ tal que $L \cong M \in A \subseteq B$, y como B es clase con cero $L \in B$, por lo que $I(A) \subseteq B$.

□

Lema 3.6. Sea $A \subseteq R - mod$, entonces $\xi_{\{ext\}}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(I(A), I(A))^n$.

Demostración. Denotemos $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(I(A), I(A))^n$. Como $A \subseteq I(A) \subseteq E(I(A), \{0\}) \subseteq B$, entonces $A \subseteq B$.
Veamos que B es cerrada bajo extensiones. Sean $L, N \in B$ y $M \in R - mod$ tales que existe $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, exacta. Como $L, N \in B$ existen $l, n \in \mathbb{N}$ tales que $L \in E(I(A), I(A))^l$ y $N \in E(I(A), I(A))^n$. Demostraremos por inducción sobre l que $M \in E(I(A), I(A))^{l+n}$.
Si $l = 0$, entonces $L \in \{0\}$ por lo que $L = 0$, así que $M \cong N$ y $M \in E(I(A), I(A))^n$.
Supongamos válido para $l - 1$. Como $L \in E(I(A), I(A))^l$, existe $K \leq L$, tal que $K \in I(A)$ y $L/K \in E(I(A), I(A)^{l-1}$, por lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r, "f|"] \arrow[d, hook] & f(K) \arrow[d, hook] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L/K \arrow[r, "f*"] \arrow[d] & M/f(K) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Como $gf = 0$ entonces $g(f(K)) = 0$ y así por la propiedad universal del conúcleo existe una único morfismo $M/f(K) \xrightarrow{h} N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r, "f|"] \arrow[d, hook] & f(K) \arrow[d, hook] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L/K \arrow[r, "f*"] \arrow[d] & M/f(K) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & N & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Y como g es epi, entonces h es epi. Veamos que la sucesión $0 \to L/K \to M/f(K) \to N \to 0$ es exacta.
Sea $x \in L/K$ y sea $y \in L$ tal que $\pi(y) = x$, como el diagrama anterior conmuta, entonces $h(f * (x)) = h(f * (\pi(y)) = g(f(y))$ y como $gf = 0$, entonces $0 = gf(y) = hf * (x)$ de donde se tiene que $im(f*) \subseteq ker(h)$. Sea ahora $x \in ker(h)$ y sea $y \in M$ tal que $\pi(y) = x$. Como el diagrama conmuta, entonces $g(y) = h\pi(y) = h(x) = 0$ y la sucesión de en medio es exacta, por lo que existe $z \in L$ tal que $f(z) = y$ y como el diagrama conmuta, entonces $f * \pi(z) = \pi(y) = x$, por lo que $ker(h) \subseteq im(f*)$ y así la sucesión es exacta y $M/f(K)$ es una extensión de L/K y N, pero $L/K \in E(I(A), I(A))^{l-1}$ y $N \in E(I(A), I(A))^n$ así que por hipótesis de inducción $M/f(K) \in E(I(A), I(A))^{l-1+n}$, y $K \in I(A)$, por lo que $M \in E(I(A), E(I(A), I(A))^{l-1+n}) = E(I(A), I(A))^{l+n}$, por lo tanto $M \in B$ y B es cerrado bajo extensiones.
Sea $C \in R$-ext tal que $A \subseteq C$. Observemos que en particular C es una clase con cero, por lo cual $I(A) \subseteq C$. Veamos por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $E(I(A), I(A))^n \subseteq C$.
Base $n = 0$ es clara pues $\{0\} \subseteq C$. Supongamos válido para $n-1$ y sea $M \in E(I(A), I(A))^n$, entonces existe una sucesión exacta $0 \to L \to M \to N \to 0$ con $L \in I(A) \subseteq C$ y $N \in E(I(A), I(A))^{n-1}$ que por hipótesis de inducción está contenido en C, por lo que M es extensión de elementos de $C \in R$-ext, de donde se tiene que $M \in C$ y $E(I(A), I(A))^n \subseteq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así $B \subseteq C$. Lo cual demuestra que $\xi_{ext}(A) = B$.

$\square$

Lema 3.7. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ con $A_i \in R-her$, entonces $\bigcup_{i\in I}\{A_i\} \in R-her$.

Demostración. Denotemos por $A = \bigcup_{i\in I}\{A_i\}$ y sean $M \in A$ y $N \leq M$, veamos que $N \in A$. Como $M \in A$, entonces existe $i \in I$ tal que $M \in A_i$. Como $N \leq M$ y A_i es una clase hereditaria, entonces $N \in A_i \subseteq A$, por lo que $N \in A$ y $A \in R-$her.

□

Proposición 3.8. Sea A una clase hereditaria (y por lo tanto con cero), entonces $\xi_{\{ext\}}(A) \in R-sext$

Demostración. Basta ver que $\xi_{\{ext\}}(A)$ es hereditaria.
Veamos por inducción sobre n que $E(A,A)^n$ es hereditaria.
Base $n = 0$ es clara. Supongamos válido para $n-1$ y sea $M \in E(A,A)^n$ y $N \leq M$, entonces existe una sucesión $0 \to L \hookrightarrow M \to M/L \to 0$ con $L \in A$ y $M/L \in E(A,A)^{n-1}$, por lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L\cap N \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & N \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & (N+L)/L \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, hook] & M \arrow[r, two heads] & M/L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Que conmuta por el segundo teorema de isomorfismos. Además se tiene que las flechas que bajan son monomorfismos ya que $L+N \leq M$. Como A es una clase hereditaria y $L\cap N \leq L$, entonces $L\cap N \in A$ y por hipótesis de inducción $E(A,A)^{n-1}$ es hereditaria, así que $(L+N)/L \in E(A,A)^{n-1}$ y entonces $N \in E(A, E(A,A)^{n-1}) = E(A,A)^n$, por lo que $E(A,A)^n$ es hereditaria $\forall n \in \mathbb{N}$, y así, por el lema anterior $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(A,A)^n = \xi_{\{\leq,ext\}}(A) \in R-her$.

□

Observación. Sea A una clase hereditaria y $B \in R-sext$ con $A \subseteq B$, entonces $E(A,A)^n \subseteq B, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Hagamos inducción sobre n. El caso base es claro. Supongamos váilda para $n-1$.

Sea $M \in E(A,A)^n$, entonces existe una sucesión $0 \to L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/L \to 0$, con $L \in A \subseteq B$ y $M/L \in E(A,A)^{n-1}$. Por hipótesis de inducción

$E(A,A)^{n-1} \subseteq B$ por lo que $L, M/L \in B \in R$-sext y así $M \in B$. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(A,A)^n \subseteq B$.

$\square$

Notemos que en la observación anterior podemos debilitar las hipótesis y pedir únicamente que $B \in R$-ext.

Corolario 3.9. Si A es una clase hereditaria, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(A,A)^n = \xi_{\{\leq,ext\}}(A)$.

Demostración. Sea $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(A,A)^n$, entonces $B \in R$-sext y por la observación anterior es la menor de las clases en R-sext que contienen a A, por lo que $B = \xi_{\{\leq,ext\}}(A)$.

$\square$

Definición 3.10. Sea A una clase de módulos. Denotaremos por $sext(A) = \xi_{\{\leq,ext\}}(A)$

Notemos que para toda clase de módulos se tiene que $A \subseteq her(A)$ y $sext(A) \in R$-sext$\subseteq R$-her, por lo que $her(A) \subseteq sext(A)$.

Se ha visto antes que dada una familia $\{A_i\}_I$ de elementos en R-sext, se cumple que $\bigwedge\{A_i\}_I = \bigcap\{A_i\}_I$. Ahora podemos describir mejor al supremo de esta familia y es $\bigvee_I\{A_i\} = sext(\bigcup_I\{A_i\})$.

Veamos que esto se vale en general siempre que podamos describir la clase generada de una clase en una gran retícula como las que estamos trabajando.

Proposición 3.11. Sea L una gran retícula de clases de módulos. Si para toda clase de módulos A, $\xi(A)$ denota la clase generada por A en L, entonces para toda familia $\{A_i\}_I$ se cumple que $\bigvee_I\{A_i\} = \xi(\bigcup_I\{A_i\})$.

Demostración. Como $A_i \subseteq \bigcup_I\{A_i\} \subseteq \xi(\bigcup_I\{A_i\})$, $\xi(\bigcup_I\{A_i\})$ es una cota superior de la familia.
Si $B \in L$ es otra cota de la familia, entonces $A_i \subseteq B$ para todo $i \in I$, así que $\bigcup_I\{A_i\} \subseteq B$, y como $\xi(\bigcup_I\{A_i\})$ es la menor clase en L con esa propiedad, entonces $\xi(\bigcup_I\{A_i\}) \subseteq B$, por lo que $\bigvee_I\{A_i\} = \xi(\bigcup_I\{A_i\})$.

□

Teorema 3.12. La gran retícula R-sext es fuertemente pseudocomplementada.

Demostración. Sea $A \in R-sext$ y definamos $B = \{M \in R-mod|\ her(M) \cap A = \{0\}\}$. Veamos que B es pseudocomplemento fuerte de A.

i) Sea $M \in A \cap B$, entonces $M \in her(M)$ $(M \leq M)$ y $M \in A$, y así $M \in her(M) \cap A$, pero $M \in B$ por lo que $M = 0$. Así que $A \cap B = \{0\}$.

ii) Veamos que $B \in R - sext$.

$\leq$) Sea $M \in B$ y $N \leq M$. Observemos que $her(N) \subseteq her(M)$, por lo que $her(N) \cap A \subseteq her(M) \cap A = \{0\}$ y así $her(N) \cap A = \{0\}$ y por lo tanto $N \in B$.

ext) Sea $M \in R-mod$ tal que existe una sucesión $0 \to L \hookrightarrow M \xrightarrow{g} N \to 0$, con $L, N \in B$. Supongamos que $\exists 0 \neq K \leq M$ tal que $K \in A$. Como A es una clase hereditaria entonces $L \cap K \in A$ y $L \cap K \in her(L)$, por lo que $L \cap K = 0$, así que $g|_K$ es mono y $K \cong g(K) \in A$ (A es cerrada bajo isomorfismos) y $g(K) \leq N$, por lo que $g(K) \in her(N) \cap A = \{0\}$, así que $K \cong g(K) = 0$, lo cual contradice que $K \neq 0$. Por lo tanto $A \cap her(M) = \{0\}$ y $M \in B$.

iii) Sea $C \in R - sext$ tal que $A \cap C = \{0\}$. Veamos que $C \subseteq B$.
Supongamos que $C \nsubseteq B$, por lo que existe $M \in C$ tal que $her(M) \cap A \neq 0$. Sea $L \leq M$ tal que $L \neq 0$ y $L \in A$. Como C es en particular una clase hereditaria, entonces $L \in C$ y $L \in A$, por lo que $0 \neq L \in A \cap C = \{0\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $C \subseteq B$.

Por lo tanto B es un pseudocomplemento fuerte de A y así $R - sext$ es fuertemente pseudocomplementada.

□

Lema 3.13. La clase de los módulos semiartinianos es cerrada bajo extensiones.

Demostración. Sean L, N módulos semiartinianos y $M \in R - mod$ tal que existe $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ exacta, y $M \xrightarrow{\pi} K$ epimorfismo distinto de

cero. Veamos que $soc(K) \neq 0$, es decir, existe $0 \neq S \leq K$ simple.
Tenemos que $L \cong f(L) \leq M$ y $f(L) \xrightarrow{\pi|} \pi f(L)$ es epi.

Caso 1). Si $\pi f(L) \neq 0$, entonces $\pi f(L)$ es cociente distinto de 0 de $f(L)$ (y por lo tanto de L), que es semiartiniano, por lo que existe $0 \neq S \leq \pi f(L)$ simple, pero $\pi f(L) \leq K$, por lo que $S \leq K$, así que $zoc(K) \neq 0$.

Caso 2). Si $\pi f(L) = 0$, por la propiedad universal del conucleo existe un único morfismo $N \xrightarrow{h} K$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & N \arrow[r] \arrow[dl, "h"] & 0 \\
 & & K & &
\end{tikzcd}$$

Como π es epi y $\pi = h \circ g$, entonces h es epi, por lo que K es un cociente distinto de cero de N que es semiartiniano, así que $zoc(K) \neq 0$.

$\square$

Lema 3.14. La clase de los módulos finitamente generados es cerrada bajo extensiones.

Demostración.

Sean L, N módulos finitamente generados y $M \in R-mod$ tal que existe $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ exacta. Como L, N son finitamente generados, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & R^l \arrow[d, "\pi_1"] & & R^n \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dl, dashed, "\phi"'] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Donde ϕ existe ya que R^n es proyectivo y g es epi. Observemos que tenemos dos morfismos que entran a M (ϕ y $f\pi_1$) así que, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $R^l \times R^n \xrightarrow{h} M$ tal que hace conmutar los siguientes triángulos:

$$\begin{tikzcd}
R^l \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, "f\circ\pi_1"'] & R^l \times R^n \arrow[d, "h"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
R^l \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[dr, "\phi"'] & R^l \times R^n \arrow[d, "h"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Observemos que también tenemos un morfismo $R^l \times R^n \xrightarrow{\pi_3} R^n$ que es la proyección. De donde tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^l \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\pi_1"] & R^l \times R^n \arrow[r, shift left, "\pi_3"] \arrow[d, "h"] & R^n \arrow[l, shift left, "i_2"] \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dl, dashed, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Veamos que el segundo cuadrado conmuta, y así por el Lema del quinto h sería epi y por lo tanto M sería finitamente generado.
Recordemos que h está dado por $h((a,b)) = f\pi_1(a)+\phi(b)$, así que $g(h((a,b))) = g(f\pi_1(a)+\phi(b)) = gf\pi_1(a)+g\phi(b) = g\phi(b) = \pi_2(b)$, mientras que $\pi_2(\pi_3((a,b))) = \pi_2(b)$, por lo que el diagrama anterior conmuta con filas exactas, entonces h es epi y M es finitamente generado.

□

Lema 3.15. Si M es artiniano y semisimple, entonces M es finitamente generado.

Demostración. Sea $M = \bigoplus_I S_i$, con S_i simple (y por lo tanto finitamente generado). Veamos que I es finito, y así M sería extensión de finitamente generados (toda suma directa finita es una extensión). Si $I = \emptyset$ ya acabamos, supongamos que $I \neq \emptyset$, entonces existe $i_0 \in I$, de donde tenemos que $M_0 \lneq$

M donde $M_0 = \bigoplus_{I-\{i_0\}} S_i$, si $I_0 = I - \{i_0\}$ no es vacío hacemos lo mismo. El procedimiento anterior tiene que terminar pues M es artiniano y las cadenas descendentes se estacionan. Claramente tiene que terminar en 0, por lo que I es finito y por lo tanto M es finitamente generado.

$\square$

Teorema 3.16. $sext(R) = sext(R - simp)$ si y sólo si R es artiniano izquierdo y contiene una copia de cada módulo simple.

Demostración.

$\Rightarrow$) Observemos que $sext(R - simp) \subseteq \{M |\ M$ es semiartiniano y finitamente generado $\}$ pues si $A = I(R - simp)$ (la clase con 0 generada por $R - simp$) tenemos que A es la clase de todos los módulos simples y el módulo 0, la cual es una clase hereditaria (los submódulos de simples son triviales). Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $E(A, A)^n \subseteq \{M |\ M$ es semiartiniano y finitamente generado $\} = B$.
Hagamos inducción sobre n. Si $n = 0$ es trivial. Supongamos válido para $n - 1$.
Sea $M \in E(A, A)^n$, entonces existe una sucesión de la forma
$0 \to L \to M \to N \to 0$, con $L \in A$ y $N \in E(A, A)^{n-1}$. Por hipótesis de inducción $E(A, A)^{n-1} \subset B$ y sabemos que $A \subseteq B$, por lo que L, N son semiartinianos y finitamente generados, y por *(4.13) y (4.14)* también lo es M, de donde $E(A, A)^n \subseteq B$ y así $sext(R - simp) \subseteq B$.
Como $sext(R - simp) = sext(R)$, tenemos que todo ideal $I \leq R$ es finitamente generado, por lo que R es noetheriano, y como $R \leq R$ entonces es semiartiniano, así por *(2.18)* R es artiniano.

Para la segunda afirmación, sea S un módulo simple (y sin perdida de generalidad supongamos $S \in R - simp$), entonces $S \in sext(R) = sext(her(R))$, de donde se sigue que $S \in E(her(R), her(R))^n$ para algún n natural. Sea m mínimo tal que $S \in E(her(R), her(R))^m$, por lo que existe una sucesión $0 \to I \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} N \to 0$, con $I \leq R$ y $N \in E(her(R), her(R))^{m-1}$. Como f es mono, entonces $I \cong f(I) \leq S$, pero S es simple por lo que $f(I)$ es 0 o S:
Si $f(I) = 0$ entonces $I = 0$ y así $S \cong N \in E(her(R), her(R))^{m-1}$, lo cual contradice que m es el mínimo con esa propiedad. Entonces $S = f(I) \cong I$, y así R tiene una copia de cada simple.

$\Leftarrow$)
$\subseteq$) Como todo simple tiene una copia en R, entonces $R - simp \subseteq her(R)$ por lo que $sext(R - simp) \subseteq sext(her(R)) = sext(R)$
$\supseteq$) Para esto basta ver que $R \in sext(R - simp)$ y así claramente $sext(R) \subseteq sext(R - simp)$.
Recordemos que $zoc(R) = \sum_{S \leq R} S$, con S simple, en particular $zoc(R)$ es semisimple. Observemos que $\sum_{S \leq R} S = \bigoplus S$ donde la segunda suma corre sobre los simples no repetidos.
Definimos el zoclo n-ésimo como $zoc_1(R) = zoc(R)$, y para cada $1 \lneq n$ consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & zoc_{n-1}(R) \arrow[r, hook, "i"] & R \arrow[r, two heads] & R/zoc_{n-1}(R) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & zoc_{n-1}(R) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[u, "1"] & \pi^{-1}(zoc(R/zoc_n(R))) \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook, "i"] & zoc(R/zoc_n(R)) \arrow[r] \arrow[u, hook, "i"] & 0
\end{tikzcd}$$

En donde definimos como $zoc_n(R) = \pi^{-1}(zoc(R/zoc_n(R)))$ (que regularmente se define como $zoc(R/zoc_{n-1}(R)) = zoc_n(R)/zoc_{n-1}(R)$.
Veamos que en general $zoc_n \in sext(R)$, haciendo inducción sobre n. Claramente $zoc(R) \in sext(R - simp)$, pues $zoc(R) \leq R$ y como R es artiniano, entonces $zoc(R)$ lo es, por lo que es suma directa finita de simples por *(4.15)*, es decir, es extensión de elementos de $sext(R - simp)$. Supongamos válido para n, del diagrama anterior tenemos que $zoc_{n+1}(R)$ es extensión te $zoc(R)$ y $zoc_n(R)$, que por hipotesis de inducción estan en $sext(R - simp)$, por lo que $zoc_{n+1}(R) \in sext(R - simp)$.
Observemos que de la definición anterior, tenemos la cadena ascendente $zoc(R) \subseteq zoc_2(R) \subseteq ... \subseteq zoc_n(R) \subseteq zoc_{n+1}(R)$.... Como R es artiniano, entonces R es noetheriano, por lo que existe n tal que $zoc_n(R) = zoc_{n+1}(R)$, por lo que $0 = zoc_{n+1}(R)/zoc_n(R) = zoc(R/zoc_n(R))$, pero R es semiartiniano, por lo que todo módulo que tenga zoclo trivial es cero, y así $R/zoc_n(R) = 0$, por lo que $R = zoc_n(R)$ que acabamos de demostrar que esta en $sext(R - simp)$.

$\square$

Ejemplos:
1) Sea R un anillo con división, entonces $sext(R) = sext(R - simp)$.

Demostración. Como R tiene división entonces es artiniano y si $M \neq 0$ es un módulo simple, como R tiene división, entonces todo módulo es libre y $M \cong R^{(X)}$, tal que $X \neq \emptyset$, porque $M \neq 0$, así que $1 \leq |X|$, veamos que en realidad X tiene un ‘único elemento. Si existieran $x_1 \neq x_2 \in X$, entonces $0 \leq \langle X - \{x_1\} \rangle \lneq \langle X \rangle = M$, por lo que M no sería simple, así que $|X| = 1$ y $M \cong R$ que claramente es submódulo de R.

□

2) Sea $R = \mathbb{Z}_n$, entonces $sext(R) = sext(R - simp)$.

Demostración. Como R es finito, entonces es artiniano (existen una cantidad finita de ideales de R). Veamos como son los módulos simples. Sabemos que todo módulo simple S cumple que $S \cong R/I$, donde $I \leq R$ es un ideal máximo de R. Por el teorema de la correspondecia existe una biyección entre los ideales máximos de R y los ideales máximos de $\mathbb{Z}$ ($p\mathbb{Z}$, con p primo) que contienen a $n\mathbb{Z}$, es decir, $p\mathbb{Z}$ tal que p divide a n, por lo que los ideales máximos de R son de la forma $p\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con p primo que divide a n. Por el tercer teorema de isomorfimos tenemos que $R/I = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/(p\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ y como $p|n$, por el teorema de Cauchy existe $I \leq R$ tal que $I \cong \mathbb{Z}_p$, por lo que todo simple tiene una copia en R.

□

Proposición 3.17. Sea A una clase hereditaria. Para todo módulo M son equivalentes:
1) $her(M) \cap A = \{0\}$.
2) $her(E(M)) \cap A = \{0\}$.

Demostración.
2) $\Rightarrow$ 1). Como $M \leq E(M)$, entonces $her(M) \subseteq her(E(M))$, por lo que $\{0\} \subseteq her(M) \cap A \subseteq her(E(M)) \cap A = \{0\}$ y así $her(M) \cap A = \{0\}$.
1) $\Rightarrow$ 2). Supongamos que $her(E(M)) \cap A \neq \{0\}$, entonces existe $0 \neq N \leq E(M)$ tal que $N \in A$. Recordemos que $M \leq_{es} E(M)$, por lo que $N \cap M \neq 0$ y $M \cap N \leq M, N$, pero $N \in A$, por lo que $M \cap N \in A$ y $M \cap N \in her(M)$, así que $her(M) \cap A \neq \{0\}$. □

Proposición 3.18. Sean $A \in R - nat$ y $N \in A$. Si $N \leq_{es} M$ entonces $M \in A$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \overset{i}{\hookrightarrow} & M \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle j} & & \\ & & E(N) & & \end{array}$$

Como i es mono y $E(N)$ es inyectivo, existe $M \overset{\phi}{\to} E(N)$, tal que $\phi \circ i = j$. Veamos que ϕ es mono. Supongamos lo contrario, por lo que $\exists 0 \neq x \in M$ tal que $\phi(x) = 0$. Como $N \leq_{es} M$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in N$. Observemos que $0 \neq rx = j(rx) = \phi(i(rx)) = r\phi(x) = r(0) = 0$, lo cual es una contradicción, por lo que ϕ es mono.
Como $N \in A$ y A es clase natural, entonces $E(N) \in A$ y como M se sumerge en $E(N)$, entonces $M \in A$.

□

Definición 3.19. Se dice que una familia $\{N_i\}_I$ de submódulos de un módulo M es *independiente* si para todo $i \in I$ se cumple que $N_i \cap \sum_{I-\{i\}} N_j = 0$.

Observación. Si $\{N_i\}_I$ es una familia independiente, entonces $\sum_I N_i = \bigoplus_I N_i$

Lema 3.20. Para todo $M \in R - mod$, distinto de cero, y para toda familia independiente $\{Rx_i\}_I$ de módulos cíclicos, existe $\{Rx_j\}_J$ independiente máxima, tal que $\{Rx_i\}_I \subseteq \{Rx_j\}_J$. Además $\sum_J Rx_j \leq_{es} M$.

Demostración. Sea $F = \{\{Rx_k\}_K | \ \{Rx_k\}_K$ extiende a $\{Rx_i\}_I\}$. Veamos que cumple las hipótesis que pide el Lema de Zorn.
$F \neq \emptyset$, pues $\{Rx_i\}_I \in F$. Claramente F es un *COPO* respecto a la contención. Por último, sea $C = \{\{Rx_k\}_{K_l}\}_L$ una cadena, no vacía, en F y sea $\{Rx_k\}_K$, donde $K = \bigcup_L K_l$. Claramente es una cota superior, pues es la unión de la cadena, así que veamos que $\{Rx_k\}_K \in F$. Como cada uno de los elementos de C contienen a $\{Rx_i\}_I$, también $\{Rx_k\}_K$ contiene a $\{Rx_k\}_K$. Por lo que basta ver que $\{Rx_k\}_K$ es independiente. Supongamos que no es así, es decir que existe $k \in K$, tal que $\exists 0 \neq x \in Rx_k \cap \sum_{K-\{k\}} Rx_{k'}$. Entonces existen $x_{k_1}, ..., x_{k_n}, x_{k_{n+1}}$, tales que $x = \sum_1^n x_{k_i}$ y $x \in Rx_{k_{n+1}}$, pero como C

es cadena, los x_{k_i} están en algún elemento de la cadena, lo que contradice que fueran elementos independientes. Así que $\{Rx_k\}_K$ es una familia independiente. Por el Lema de Zorn existe un elemento máximo en F, $\{Rx_j\}_J$, que es el buscado. Por último veamos que $\sum_J Rx_j \leq_{es} M$. En caso contrario existiría $x \in M$ distinto de cero, tal que $Rx \cap (\sum\{Rx_k\}_K) = 0$, por lo que $\{Rx_k\}_K \cup \{Rx\}$ sería independiente y contendría propiamente a $\{Rx_j\}_J$ y extendería a $\{Rx_i\}_I$, lo que contradice que $\{Rx_j\}_J$ es máxima. Así que $\sum\{Rx_j\}_J \leq_{es} M$.

□

Observación. Si M es un módulo distinto de cero, entonces existe $x \in M$ disntinto de cero, y claramente $\{Rx\}$ es una familia independiente, por lo que existe una independiente máxima de cíclicos que contiene a $\{Rx\}$, en particular siempre existen familias independientes (de cíclicos) máximas.

Lema 3.21. Sean $A \in R-nat$ y $M \in R-mod$. $M \in A$ si y sólo si $\forall x \in M$ $Rx \in A$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $x \in M$, $Rx \leq M \in A \in R-her$ de donde se sigue que $Rx \in A$
$\Leftarrow$) Sea $\{Rx_i\}_I$ familia independiente máxima de submódulos cíclicos de M, entonces $\bigoplus Rx_i \leq_{es} M$ y $\bigoplus Rx_i \in A$. De *(4.18)* se sigue que $M \in A$.

□

Lema 3.22. Sea $B \in R-nat$ y $M \in R-mod$, entonces existe $N \leq M$ tal que es máximo respecto a la propiedad de estar en B, y más aún, N es esencialmente cerrado en M.

Demostración.
Sea $F = \{N \leq M | \ N \in B\}$. Claramente $0 \in F$, por lo que $F \neq \emptyset$. Sea C una cadena no vacía en F y sea $L = \bigcup C$. Como C es cadena $L \leq M$ y claramente es cota superior de C. Veamos que $L \in A$, para ello basta ver que sus submódulos cíclicos están en A por lema anterior. Sea $x \in L$, entonces existe $M_i \in C$ tal que $x \in M_i$, $Rx \leq M_i \in A$, por lo que $Rx \in A$ y así $L \in A$.

Por Lema de Zorn, existe N máximo respecto a la propiedad buscada. Sólo falta ver que tal N es esencialmente cerrado en M. Supongamos que $N \leq_{es} L \leq M$. De *(4.18)* tenemos que $L \in A$, pero N es máximo con esa propiedad, por lo que $N = L$, así que N es esencialmente cerrado en M.

$\square$

Teorema 3.23. *$Skel(R - her) = R - nat$.*

Demostración.
$\subseteq$) Sea $A \in R - her$ y definamos $B = \{M |\ her(M) \cap A = \{0\}\}$. Ya se vio que $B \cap A = \{0\}$ y $B \in R - her$. Veamos que en realidad $B \in R - nat = L_{\{\leq, \bigoplus, E()\}}$. De *(2.18)* tenemos que B es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas (en realidad se vale para cualquier extensión esencial), así que sólo falta ver que es cerrado bajo sumas directas.
Sea $\{M_i\}_I$ una familia de elementos de B y supongamos que $\bigoplus M_i = M \notin B$, entonces $\exists 0 \neq N \leq M$ tal que $N \in A$. Sea $x \in N$ distinto de cero y tal que se vea como suma mínima de elementos de M_i, por lo que $x = \sum_F m_i$ y la suma no es vacía ($x \neq 0$). Observemos que si $r \in R$ está en el anulador de x, entonces $rm_i = 0$, por lo que $ann(x) \subseteq ann(m_i)$. Sea m_i que aparezca en la suma de x, y sea $r \in ann(m_i)$, entonces $rx = \sum_{F-\{i\}} rm_j$ y $rx \in N$. Observemos que $rm_j = 0$ para todo j, pues en caso contrario rx se escribiría como suma de menos elementos de los M_i, lo cual contradice la elección de x, por lo que $rm_j = 0$ y así $x = 0$, de donde tenemos que $ann(m_i) \subseteq ann(x)$.

Recordemos que se tienen los isomorfismos $R/ann(x) \cong Rx$ y $R/ann(m_i) \cong Rm_i$, los cuales son inducidos por los epimorfismos $R \xrightarrow{r()} Rx$ y $R \xrightarrow{r()} Rm_i$, por lo que $Rx \cong Rm_i$ pero $Rm_i \leq M_i \in B$ la cual sabemos que es una clase hereditaria, por lo que $Rx \in B$ y $Rx \in A$ (pues $Rx \leq N \in A$) pero $Rx \neq 0$, lo cual es una contradicción por lo que B es cerrada bajo sumas directas y así $skel(R - her) \subseteq R - nat$

$\supseteq$) Sea $A \in R - nat$. Veamos que $A = A^{\perp\perp}$, donde este pseudocomplemento es como clase hereditaria.
Recordemos que $R - her$ es fuertemente pseudocomplementada, por lo que siempre se tiene $A \subseteq A^{\perp\perp}$
Sea $M \in A^{\perp\perp}$ y sea $N \leq M$ submódulo máximo con la propiedad de estar en A(A es clase natural). Veremos que $M = N$, porque si no fuera el caso, como N es esencialmente cerrado propio, $\exists x \in M$ tal que $Rx \cap N = 0$, con $Rx \neq 0$.

Observemos que como $M \in A^{\perp\perp}$, entonces $her(M) \cap B^{\perp} = \{0\}$, por lo que $\forall 0 \neq N \leq M$, $N \notin B^{\perp}$, es decir $\forall 0 \neq N \leq M$ $\exists 0 \neq L \leq N$ tal que $L \in B$.

Aplicando lo anterior a Rx, tenemos que existe $0 \neq L \leq Rx$, tal que $L \in A$. Recordemos que $Rx \cap N = 0$ por lo que $L \cap N = 0$, así que $N + L = N \oplus L$ y $L, N \in A$, por lo que $N \lneq N \oplus L \in A$, lo cual contradice la elección de N, por lo que $M = N$ y así $M \in A$. De donde se sigue que $A \in skel(R - her)$ (pues $A^{\perp} \in R - her$).

$\square$

Corolario 3.24. *$skel(R - sext) = R - nat$.*

Demostración.
Se sigue de *(2.4)* ya que $R - sext$ y $R - her$ son fuertemente pseudocomplementadas y que $R - nat = skel(R - her) \subseteq R - sext \subseteq R - her$

$\square$

Corolario 3.25. Si $A \in R - sext$, entonces $A^{\perp_{sext}\perp_{sext}} = \xi_{nat}(A)$

Demostración. Se sigue de *(2.5)* y del corolario anterior.

$\square$

Observación. Si $A \in R - nat$, entonces $A^{\perp_{sext}\perp_{sext}} = A$

Lema 3.26. Sea $M \in R-mod$, si $N \leq M$ y $L \leq M$ es pseudocomplemento de N en M, entonces $N \cong (L \oplus N)/L$ y $(N \oplus L)/L \leq_{es} M/L$.

Demostración.
La primera afirmación se sigue del segundo teorema de isomorfismo, pues $(N + L)/L \cong N/(L \cap N) = N/0 \cong N$, donde la igualdad se da ya que L es pseudocomplemento de N, así que $N \cap L = 0$ y L es máximo con esta propiedad.
Sea $K' \leq M/L$ tal que $K' \cap (N + L)/L = L/L$. Por el Teorema de la correspondencia $K' = K/L$, con $L \leq K \leq M$. Recordemos que el Teorema de la correspondencia nos da un isomorfismo de retículas, por lo que $(K/L) \cap ((N + L)/L) = (K \cap (L + N))/L$ y como $L \leq K$, de la ley módular se sigue que $L/L = (K \cap (L+N))/L = (L+(K \cap N))/L$, por lo que $L = L+(K \cap N)$,

de donde $K \cap N \leq L$, pero $K \cap N = K \cap N \cap N \leq L \cap N = 0$, es decir que $K \cap N = 0$, pero $L \leq K$ y L es máximo con la propiedad anterior, por lo que $L = K$ y $L/L = K/L$, así que $(L+N)/L \leq_{es} M/L$.

$\square$

Observación. Sea $N \leq_{es} M$. Si N es sumando directo de M, entonces $M = N$.

Demostración.
Sea $L \leq M$ tal que $N \oplus L = M$. Veamos que $L = 0$, pues en caso contrario $N \cap L \neq 0$ (Pues $N \leq_{es} M$), pero $L + N = N \oplus L$, por lo cual $L \cap N = 0$, lo cual es una contradicción, así que $L = 0$ y $M = L \oplus N = 0 + N = N$.

$\square$

Lema 3.27. Son equivalentes para $M \leq E$, E inyectivo:
1) $M \oplus N = E$ para algun $N \leq E$.
2) M es esencialmente cerrado en E.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Si $M = E$ es claro, así que supongamos que $M \lneq E$. Sea $M \leq_{es} L$, veamos que $M = L$, pues en caso contrario, como N es complemento de M, en particular es pseudocomplemento, por lo que $L \cap N \neq 0$. Sea $0 \neq x \in N \cap L$, como $M \leq_{es} L$, existe $r \in R$ tal que $rx \in M$ y $rx \neq 0$, pero $x \in N$ por lo que $rx \in N$ y entonces $M \cap N \neq 0$, lo cual es una contradicción, por lo que M es esencialmente cerrado en E.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea N un pseudocomplemento de M en E, entonces $M \oplus N \leq_{es} E$. Observemos que M es pseudocomplemento de N en E, pues si M' es pseudocomplemento de N tal que contiene a M, veremos que $M \leq_{es} M'$, pues en caso contrario $\exists 0 \neq x \in M'$ tal que $Rx \cap M = 0$. Como $Rx \cap N \leq M' \cap N = 0$, entonces $Rx \cap N = 0$, además $N \lneq Rx + N = Rx \oplus N$, pues $x \neq 0$. Observemos que $M \cap (Rx + N) = M \cap (M' \cap (Rx + N))$, y por la ley modular se tiene $M \cap (M' \cap (Rx + N)) = M \cap (Rx + (M' \cap N)) = M \cap (Rx + 0) = M \cap Rx = 0$, lo cual es una contradicción, ya que N es máximo con esta propiedad, por lo que $M \leq_{es} M'$, pero M es esencialmente

cerrado en E, así que $M = M'$ y entonces M es pseudocomplemento de N en E.

Observemos que al ser N un pseudocomplemento, entonces N es esencialmente cerrado, además $(M \oplus N)/N \leq_{es} E/N$ por lema anterior, de donde tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, two heads] \arrow[d, hook] & (M \oplus N)/N \arrow[r, hook, "es"] & E/N \\ E & & \end{tikzcd}$$

Y como E es inyectivo, existe $E/N \xrightarrow{\phi} E$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, two heads] \arrow[d, hook] & (M \oplus N)/N \arrow[r, hook, "es"] & E/N \arrow[dll, "\phi"] \\ E & & \end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior se puede ver que $M \leq_{es} \phi(E/N) \leq E$, pero M es esencialmente cerrado, así que $\phi(E/N) = M$ y ϕ se puede correstringir a M, por lo que la sucesión $0 \to M \to E/N$ se escinde y así M es un sumando directo de E/N, pero $M \cong (M \oplus N)/N$, así que $(M \oplus N)/N$ es un sumando directo de E/N, pero $(M \oplus N)/N \leq_{es} E/N$, así por la observación anterior $(M \oplus N)/N = E/N$, de donde se sigue que $(M \oplus N) = E$

$\square$

Teorema 3.28. Sean $A, B \in R-sext$, entonces se cumple:
1) $(A \vee B)^{\perp_{sext}} = A^{\perp_{sext}} \wedge B^{\perp_{sext}}$
2) $(A \wedge B)^{\perp_{sext}} = A^{\perp_{sext}} \vee B^{\perp_{sext}}$

Demostración.

1)
$\subseteq$) $A, B \leq A \vee B$, por lo que $(A \vee B)^{\perp_{sext}} \leq A^{\perp_{sext}}, B^{\perp_{sext}}$ por *(1.9)* ya que $R-sext$ es fuertemente pseudocomplementada, como el ínfimo es la mayor cota inferior se sigue que $(A \vee B)^{\perp_{sext}} \leq A^{\perp_{sext}} \wedge B^{\perp_{sext}}$.

$\supseteq$) Supongamos que no se vale, por lo que $\exists M \in A^{\perp sext} \wedge B^{\perp sext} = A^{\perp sext} \cap B^{\perp sext}$ y que no está en $(A \vee B)^{\perp sext}$, $(M \neq 0)$, por lo que $M \in A$, $M \in B$ pero $M \notin (A \vee B)^{\perp sext}$, es decir que $her(M) \cap A = \{0\} = her(M) \cap B$ y $her(M) \cap (A \vee B) \neq \{0\}$, por lo tanto $\exists 0 \neq N \leq M$ tal que $N \in A \vee B = E^n(A \cup B, A \cup B)$, es decir que existe una sucesión $0 \to C \to N \to L \to 0$ exacta, con $C \leq N$ y $C \in A \cup B$. Observemos que podemos pedir $C \neq 0$ siempre que pidamos que $N \in E^n(A \cup B, A \cup B)$ y tal n sea mínimo con esta propiedad. Como $C \leq N \leq M$, entonces $C \leq M$, es decir $C \in her(M)$. Por otro lado tenemos que $C \in A \cup B$:
Caso 1). Supongamos que $C \in A$, entonces $0 \neq C \in her(M) \cap A = \{0\}$, lo cual es una contradiccion.
Caso 2) Si $C \in B$ es análogo al anterior y tenemos una contradicción.
En cualquiera de los casos tenemos una contradicción, por lo que $M \in (A \vee B)^{\perp sext}$, y así $A^{\perp sext} \wedge B^{\perp sext} \leq (A \vee B)^{\perp sext}$.

2)
$\subseteq$) $A \wedge B \leq A, B$, por lo que $A^{\perp sext}, B^{\perp sext} \leq (A \wedge B)^{\perp sext}$, pero el supremo es la menor cota inferior, así que $A^{\perp sext} \vee B^{\perp sext} \leq (A \wedge B)^{\perp sext}$.

$\supseteq$) Sea $M \in (A \wedge B)^{\perp sext}$, como $(A \wedge B)^{\perp sext} \in R-nat$, entonces $E \in (A \wedge B)^{\perp sext}$, así que $her(E) \cap (A \wedge B) = 0$, donde $E = E(M)$.
Observemos que $A^{\perp sext}$ es una clase natural, por lo que existe $N \leq E$ máximo con la propiedad de estar en $A^{\perp sext}$, y además N es esencialmente cerrado en E, que es inyectivo, por lo que $E = N \oplus L$, para algún $L \leq E$. Si $N = E$ ya acabamos, pues $E \in A^{\perp sext} \leq A^{\perp sext} \vee B^{\perp sext}$ que es cerrada bajo submódulos, así que $M \in A^{\perp sext} \vee B^{\perp sext}$.
Entonces supongamos que $N \neq E$, por lo que $L \neq 0$. Veamos que $L \in B^{\perp sext}$, pues en caso contrario existiría $L' \leq L$ distinto de cero tal que $L' \in B$. Además L' no puede estar en $A^{\perp sext}$ (pues N es máximo con esa propiedad y $N \lneq L \oplus N$), así que existe $L'' \leq L' \leq L$ distinto de cero, tal que $L'' \in A$. Pero B es clase hereditaria, así que $L'' \in B$ por lo que $L'' \in A \cap B$ y $L'' \in her(E)$, por lo cual $L'' \in her(E) \cap A \cap B = \{0\}$, lo cual es una contradicción, así que $L \in B^{\perp sext}$, por lo que $E = N \oplus L$ con $N \in A^{\perp sext}$ y $L \in B^{\perp sext}$. Entonces $E \in A^{\perp sext} \vee B^{\perp sext}$ y así $M \in A^{\perp sext} \vee B^{\perp sext}$. Por lo tanto $(A \wedge B)^{\perp sext} \leq A^{\perp sext} \vee B^{\perp sext}$.

$\square$

Capítulo 4

R-qext y R-conat

Definición 4.1. $R - qext = L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}}$

Lema 4.2. Sea $\{A_i\}_I$ una familia de clases cohereditarias, entonces $\bigcup_I A_i$ es una clase cohereditaria.

Demostración. Sea $M \in \bigcup_I A_i$ y $M \twoheadrightarrow N$. Como $M \in \bigcup_I A_i$, existe $j \in I$, tal que $M \in A_j \in R - quot$ y N es cociente de un elemento de A_j, por lo que $N \in A_j \subseteq \bigcup_I A_i$, así que $\bigcup_I A_i \in R - quot$.

$\square$

Teorema 4.3. Sea $A \in R - quot$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(A, A)^n \in R - quot$

Demostración. Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $E(A, A)^n \in R - quot$. Hagamos inducción sobre n. Si $n = 0$ es claro, supongamos válido para n. Sea $M \in E(A, A)^{n+1}$, por lo que existe una sucesión de la forma $0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi_1} M/L \to 0$, con $L \in A$ y $M/L \in E(A, A)^n$. Sea $f : M \twoheadrightarrow N$, por lo que podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f|"] & M \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"] & M/L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & f(L) \arrow[r, "j"] & N \arrow[r, "\pi_2"] & N/f(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Observemos que el diagrama conmuta, por lo que $\pi_2 \circ f \circ i = 0$, así que por la propiedad universal del conucleo existe un único morfismo $h : M/L \to N/f(L)$, tal que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f|"] & M \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"] & M/L \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & f(L) \arrow[r, "j"] & N \arrow[r, "\pi_2"] & N/f(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

por lo que $\pi_2 \circ f = h \circ \pi_1$, pero $\pi_2 \circ f$ es epi, así que h es epi.
De lo anterior tenemos que $f(L) \in A$ (pues es cociente de $L \in A$ y $A \in R-quot$), y $N/f(L) \in E(A, A)^n$, pues es un cociente de $M/L \in E(A, A)^n$ que por hipótesis de inducción es una clase cohereditaria, así que $N \in E(A, E(A, A)^n) = E(A, A)^{n+1}$. Por lo tanto $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(A, A)^n \in R-quot$ y por el lema anterior tenemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(A, A)^n \in R-quot$.

□

Recordemos que $A \in R-quot$ es una clase con cero, por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(A, A)^n = \xi_{ext}(A)$.

Corolario 4.4. Sea $A \subseteq R-mod$, entonces $\xi_{ext}(quot(A)) = \xi_{qext}(A)$.

Demostración. Observemos que $\xi_{ext}(quot(A)) \in R-qext$, por el teorema anterior, y $A \in \xi_{ext}(quot(A))$, por lo que $\xi_{qext}(A) \subseteq \xi_{ext}(quot(A))$.
También observemos que $quot(A) \subseteq \xi_{qext}(A)$, pues $\xi_{qext}(A)$ es en particular una clase cohereditaria que contiene a A, por lo que $quot(A) \subseteq \xi_{qext}(A)$.
Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $E(quot(A), quot(A))^n \subseteq \xi_{qext}(A)$. Hagamos inducción sobre n. Si $n = 0$ es claro. Supongamos válido para n y sea $M \in E(quot(A), quot(A))^{n+1}$, entonces existe una sucesión exacta de la forma $0 \to L \to M \to M/L \to 0$, tal que $L \in quot(A) \subseteq \xi_{qext}(A)$ y $M/L \in E(quot(A), quot(A))^n$ que por hipótesis de inducción tambien está contenida en $\xi_{qext}(A)$, así que M es extensión de elementos de $\xi_{qext}(A)$, por lo que $M \in \xi_{qext}(A)$ y $E(quot(A), quot(A))^{n+1} \subseteq \xi_{qext}(A)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así que $\xi_{ext}(quot(A)) \subseteq \xi_{qext}(A)$.

□

Corolario 4.5. $R - qext$ es una gran retícula completa.

Demostración. Sea $\{A_i\}_I$ una familia de elementos en $R - qext$. Entonces:

$\bigvee_I A_i = qext(\bigcup_I A_i)$ y $\bigwedge_I A_i = \bigcap_I A_i$.
Las igualdades se siguen de *(3.11)*.

□

Teorema 4.6. $R - qext$ es F-P.C.

Demostración. Sea $A \in R - qext$ y definamos $B = \{M \mid quot(M) \cap A = \{0\}\}$. Veamos que B es un pseudocomplemento fuerte de A en $R - qext$.
1) Sea $M \in A \cap B$. En particular $M \in A$ y $M \in quot(M)$, pero $M \in B$, por lo que $quot(M) \cap A = \{0\}$ y $M = 0$. Luego $A \cap B = \{0\}$.
2) Veamos que $B \in R - qext$.

$\twoheadrightarrow$) Sea $M \in B$ y $M \twoheadrightarrow N$. Como composición de epimorfismos es un epimorfismo, entonces $quot(N) \subseteq quot(M)$, por lo que $A \cap quot(N) \subseteq A \cap quot(M) = \{0\}$, la última igualdad se da porque $M \in B$, así que $A \cap quot(N) = \{0\}$, de donde se tiene que $B \in R - quot$.

ext) Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ tal que $L, N \in B$. Supongamos que $M \notin B$, por lo que $\exists f : M \twoheadrightarrow K \neq 0$, con $K \in A$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & f(L) \arrow[r] & K \arrow[r] & K/f(L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nuevamente por la propiedad del conúcleo, existe $h : N \to K/f/(L)$ que hace conmutar el diagrama, y que nuevamente resulta ser epi. Como $K \in A$ y $(K/f/L) \in quot(K)$, entonces $K/f(L) \in A$. Pero tambien $K/f(L) \in quot(N)$, por lo que $K/f(L) \in quot(N) \cap A = \{0\}$, pues $N \in B$, lo cual implica que $K/f(L) = 0$ y $f(L) = K$. Así que $K \in quot(L) \cap A = \{0\}$, lo cual es una contradicción, luego $M \in B$ y $B \in R - qext$.
3) Si $C \in R - qext$ es tal que $A \cap C = \{0\}$, veamos que $C \subseteq B$. Si lo anterior no ocurre, entonces existe $M \in C$ tal que $M \notin B$, es decir, que $M \in C$ y $quot(M) \cap A \neq \{0\}$, por lo que existe $M \twoheadrightarrow N \neq 0$ tal que $N \in A$. Pero $M \in C \in R - qext$, por lo que $N \in C$ y $N \in A$, lo cual es una contradicción, así que $C \subseteq B$. Por lo tanto $R - qext$ es F-P.C.

□

Lema 4.7. $qext(R) = \{M \mid M$ es finitamente generado$\}$.

Demostración. Recordemos que las sumas directas finitas son extensiones, por lo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $R^n \in qext(R)$. Además si M es finitamente generado, entonces es cociente de un libre de la forma $R^n \in qext(R)$, por lo que $M \in qext(R)$.

Por otro lado, recordemos que la clase de los módulos finitamente generados es cerrada bajo extensiones y además, si M es finitamente generado y tenemos $M \twoheadrightarrow N$, entonces $R^n \twoheadrightarrow M \twoheadrightarrow N$, por lo que N es finitamente generado. Así que $\{M|\ M \text{ finitamente generado}\} \in R - qext$ y R es finitamente generado, por lo que $qext(R) \subseteq \{M|\ M \text{ finitamente generado}\}$.

□

Lema 4.8. Si $qext(R) = qext(R - simp)$ entonces R es semiartiniano.

Demostración. Recordemos que la clase de los módulos semiartinianos es cerrada bajo extensiones. Sea M semiartiniano y $M \twoheadrightarrow N \neq 0$, Si $N \twoheadrightarrow K \neq 0$, entonces $M \twoheadrightarrow K \neq 0$, por lo que $zoc(K) \neq 0$, así que N es semiartiniano, y por lo tanto la clase de los semiartinianos es cerrada bajo cocientes. Tambien vimos que la clase de los módulos finitamente generados es cerrada bajo cocientes y extensiones, por lo que $\{M|\ M \text{ finitamente generado y semiartiniano}\} \in R - qext$. Además, si S es un módulo simple, es finitamente generado y artiniano, pues es generado por cualquier elemento distinto de cero y no existen submódulos no triviales. Así que $R - simp \subseteq \{M|\ M \text{ finitamente generado y semiartiniano}\} \in R - qext$, por lo que $qext(R - simp)$ consiste de módulos finitamente generados y semiartinianos. Como $R \in qext(R) = qext(R - simp)$, R es semiartiniano y finitamente generado, en particular semiartiniano.

□

Lema 4.9. Si R es artiniano, entonces $zoc_n(R) \in qext(R - simp)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Hagamos inducción sobre n. Si $n = 0$ es claro, supongamos válido para n. Recordemos que siempre tenemos la sucesión exacta $0 \to zoc_n(R) \hookrightarrow zoc_{n+1}(R) \to zoc(R/zoc_n(R)) \to 0$. Por hipótesis de inducción tenemos que $zoc_n(R) \in qext(R - simp)$, así que basta con ver que $zoc(R/zoc_n(R)) \in qext(R - simp)$. Como R es artiniano y la clase de los artinianos es de Serre, tenemos que $R/zoc_n(R)$ es artiniano y como $zoc(R/zoc_n(R)) \leq R/zoc_n(R)$, tenemos que $zoc(R/zoc_n(R))$ es artiniano y semisimple (es suma directa de los simples de $R/zoc_n(R)$). Ya vimos antes que todo artiniano y semisimple es finitamente generado, por lo que es una suma directa finita de simples, es decir, es una extensión de elementos de $qext(R - simp)$, por lo que $zoc(R/zoc_n(R)) \in qext(R - simp)$ y así $zoc_{n+1}(R) \in qext(R - simp)$.

$\square$

Teorema 4.10. *R es artiniano si y sólo si R es noetheriano y $qext(R) = qext(R - simp)$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si R es artiniano, entonces R es noetheriano y semiartiniano. Consideremos la cadena ascendente de zoclos $zoc(R) \leq zoc_2(R) \leq ...$, como R es noehteriano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $zoc_n(R) = zoc_{n+1}(R)$. Recordemos que la definición del zoclo $n+1-$ésimo dice que $zoc_{n+1}(R)/zoc_n(R) = zoc(R/zoc_n(R))$, por lo que $zoc(R/zoc_n(R)) = 0$. Pero R es semiartiniano, por lo que $R/zoc_n(R) = 0$, así que $R = zoc_n(R)$.
Del lema anterior tenemos que $R = zoc_n(R) \in qext(R - simp)$, así que $qext(R) \subseteq qext(R - simp)$.
Recordemos que todo simple es cociente de R (en general todo cíclico lo es), por lo que todo simple está en $qext(R)$, así que $R - simp \subseteq qext(R)$ y por lo tanto $qext(R - simp) \subseteq qext(R)$.

$\Leftarrow$) Por *(4.8)* tenemos que $qext(R) = qext(R - simp)$ implica que R es semiartiniano y como R es noetheriano, tenemos que R es artiniano.

$\square$

Observemos que al definir el pseudocomplemento de $A \in R - qext$, nunca se usó el hecho de que A fuera cerrada bajo extensiones, por lo que si A es una clase cohereditaria, su pseudocomplemento fuerte es cerrado bajo extensiones.

Definición 4.11. $skel(R - quot) = R - conat$.

Notación. Si A es una clase de módulos, la clase conatural generada por A se denotará como $conat(A)$.

Teorema 4.12. $R - conat = skel(R - qext)$.

Demostración. Se sigue del hecho que $R-qext$ y $R-quot$ sean F-P.C, y que $skel(R - quot) \subseteq R - qext \subseteq R - quot$ y por *(2.4)*.

□

Corolario 4.13. Si $A \in R - qext$, entonces $A^{\perp_{\{\twoheadrightarrow,\leq\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow,\leq\}}} = conat(A)$.

Demostración. Se sigue de *(2.5)* y del teorema anterior.

□

Observación. El corolario anterior vale igualmente para clases cohereditarias, por lo que si A es un clase de módulos, entonces $conat(A) = quot(A)^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \{M|\, quot(M) \cap quot(A)^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \{0\}\} = \{M| \text{ si } M \twoheadrightarrow N \neq 0, N \notin quot(A)^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}\}$ y $N \notin quot(A)^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$ si $quot(N) \cap quot(A) \neq 0$, es decir, si existe L cociente de N que es cociente de algún elemento de A.
De lo anterior se sigue que:
$conat(A) = \{M|\ \forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists N \twoheadrightarrow L \neq 0$ tal que L es cociente de algún elemento de $A\}$.

Observación. Si A es una clase conatural, $A = conat(A) = A^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$, es decir, A coincide con su doble pseudocomplemento, lo cual se sigue de las observaciones anteriores.

Definición 4.14. Decimos que $A \subseteq R - mod$ cumple la condición CN si $\forall M \in R - mod$ tal que $\forall M \twoheadrightarrow N \neq 0, \exists N \twoheadrightarrow L \neq 0$, donde L es cociente de algún elemento de A, implica que $M \in A$.

Observación. De lo anterior se sigue que una clase de módulos A cumple la condición CN si y sólo si A es una clase conatural.

Lema 4.15. Sea $N \ll M$ y $f : M \twoheadrightarrow L$, veamos que $f(N) \ll L$.

Demostración. Supongamos que $f(N)+K = L$. Entonces $M = f^{-1}(f(N))+f^{-1}(K) = N+f^{-1}(K)+ker(f)$, pero $N \ll M$, por lo que $f^{-1}(K)+ker(f) = M$, así que $f(f^{-1}(K)) + f(ker(f)) = f(f^{-1}(K)) = f(M) = L$. Pero como f es sobre, entonces $f(f^{-1}(K)) = K$, así que $K = L$ y $f(N) \ll L$.

□

Teorema 4.16. Sea $A \in R-conat$, entonces $A \in L_{\{\twoheadrightarrow, ext, P()\}}$, donde $P()$ significa cerradura bajo epimorfismos superfluos, en particular cubiertas proyectivas (cuando éstas existan).

Demostración.
$\twoheadrightarrow$) y ext) es claro, ya que $R-conat \subseteq R-qext$.
$P()$). Sea $M \in A$ y consideremos una sucesión $0 \to K \to P \to M \to 0$ tal que $K \ll P$. Veamos que $P \in A$. Para ello, veamos que dado cualquier cociente de $P \xrightarrow{f} N \neq 0$, existe un cociente $N \twoheadrightarrow L \neq 0$, con $L \in A$, es decir, $P \in conat(A) = A$.
Sea así $f : P \twoheadrightarrow N$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f|"] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & f(K) \arrow[r, hook, "j"] & N \arrow[r, "q"] & N/f(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde h está dada por la propiedad del conúcleo, y como el segundo cuadrado conmuta y f, q son epi, entonces h es epi.
Observemos que $f(K) \neq N$, pues f es sobre y $K \ll P$, así que por el lema anterior $f(K) \ll N$ y por lo tanto $N/f(K) \neq 0$. Como $M \in A \in R-conat \subseteq R-quot$, entonces $N/f(K) \in A$ y $N/f(K) \neq 0$, por lo que $P \in conat(A) = A$, así que A es cerrada bajo epimorfismos superfluos.

□

Sería deseable que $R-conat$ fuera el *dual* de $R-nat$ y que pudieramos describir a $R-conat$ como la gran retícula generada por un conjunto de cerraduras, en específico nos gustaría que $R-conat = L_{\{\twoheadrightarrow, P(), \prod\}}$, pero por desgracia esto es falso en general.

Recordemos algunas definiciones para demostrar la afirmación anterior.

Definición 4.17. Un grupo abeliano G es *n-divisible* si para $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $nG = G$ y se dice *divisible* si es n-divisible para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Observación. Dado un G grupo abeliano, G es un $\mathbb{Z}$- módulo, por lo que

$G \xrightarrow{n()} G$ es un morfismo de grupos cuya imagen es nG, así que siempre se tiene que $nG \subseteq G$, por lo que basta ver que $G \subseteq nG$ para que un grupo sea n-divisible.

Observemos que para ver que un grupo es divisible basta notar que es *p-divisible*, para todo p primo.

Lema 4.18. Son equivalentes para un grupo abeliano G:
1) G es divisible.
2) Para todo $p \in \mathbb{P}$ (primo), G es p-divisible.

Demostración. Es claro que 1) $\Rightarrow$ 2).
2) $\Rightarrow$ 1). Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, si $n = 1$ es claro, así que supongamos $1 \lneq n$, entonces $n = p_1^{m_1}...p_k^{m_k}$ es su factorización en primos. Es fácil ver por inducción que $p_j^{m_j}G = G$, por lo que $nG = p_1^{m_1}...p_k^{m_k}G = p_1^{m_1}...p_{k-1}^{m_{k-1}}G = ... = p_1^{m_1}G = G$, por lo que G es divisible.

□

Recordemos que un grupo abeliano G es simple si es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ con $p \in \mathbb{P}$, por lo que $\mathbb{Z} - simp = \{\mathbb{Z}_p | p \in \mathbb{P}\}$.

Lema 4.19. Si D es la clase de los grupos abelianos ($\mathbb{Z}-$módulos) divisibles, entonces D es una clase cohereditaria.

Demostración. Sea $G \in D$ y sea $G \xrightarrow{f} H$ un epimorfismo. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, veamos que $H \subseteq nH$. Sea $x \in H$, como f es epi entonces existe $y \in G$ tal que $f(y) = x$ y como G es divisible, existe $z \in G$ tal que $nz = y$, por lo que $nf(z) = f(nz) = f(y) = x$, así que $H \subseteq nH$, y por lo tanto H es divisible.

□

Lema 4.20. Si A es la clase cerrada bajo isomorfismos de $\mathbb{Z} - simp$ (la clase de los grupos abelianos simples), entonces $A \in \mathbb{Z} - quot$ y $D = A^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$, donde D es la clase de los grupos divisibles.

Demostración. Es claro que A es una clase cohereditaria y por el lema anterior D también lo es. Veamos que D es un pseudocomplemento fuerte de A en $\mathbb{Z} - quot$.

Si $G \in A \cap D$, entonces $G \cong \mathbb{Z}_p$ así que $pG = 0$, pero $G = pG$ pues $G \in D$, de donde $G = 0$, así que $A \cap D = \{0\}$.

Sea B una clase cohereditaria tal que $A \cap B = \{0\}$. Supongamos que B no está contenida en D, por lo que existe $G \in B$ tal que G no es divisible, entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $pG \neq G$, así que $G/pG \neq 0$, pero $p(G/pG) = 0$, así que G/pG tiene estructura de $\mathbb{Z}_p$ espacio vectorial. Como los espacios vectoriales tienen subespacios máximos, entonces existe $H \leq G/pG$ máximo. Así que $(G/pG)/H \neq 0$ y $(G/pG)/H$ es simple. Como B es cohereditaria $(G/pG)/H \in B$, así que $0 \neq (G/pG)/H \in B \cap A$, lo cual es una contradicción, así que $B \subseteq D$ y por lo tanto $D = A^{\perp\{\twoheadrightarrow\}}$.

$\square$

Corolario 4.21. $D^{\perp\{\twoheadrightarrow\}} = conat(\mathbb{Z} - simp)$.

Demostración. Se sigue del hecho que la clase conatural generada por una clase cohereditaria es igual al doble pseudocomplemento y del lema anterior.

$\square$

Lema 4.22. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ distintos, entonces $\mathbb{Z}_q$ es p-divisible.

Demostración. Como p, q son primos distintos, entonces $(p, q) = 1$, así que existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $ap+bq = 1$, por lo que $p[b] = [1]$ en $\mathbb{Z}_q$. Sea $[x] \in \mathbb{Z}_q$, por lo anterior $[x] = p[b][x]$, por lo que $[y] = [bx]$ cumple que $[x] = p[y]$. Por lo tanto $\mathbb{Z}_q \subseteq p\mathbb{Z}_q$, así que $\mathbb{Z}_q$ es p-divisible.

$\square$

Lema 4.23. $\prod \mathbb{Z}_p / \bigoplus \mathbb{Z}_p$ es divisible y distinto de cero.

Demostracíon. Por el lema anterior, basta ver que es p-divisible para todo primo. Sean así $p \in \mathbb{P}$ primo y $[x] \in \prod \mathbb{Z}_p / \bigoplus \mathbb{Z}_p$, con $x \in \prod \mathbb{Z}_p$, entonces $x : \mathbb{P} \to \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$ es tal que $x(r) \in \mathbb{Z}_r$. Por el lema anterior, para todo $q \in \mathbb{P}$ distinto de p, $\mathbb{Z}_q$ es p-divisible, por lo que $x(q) = py_q$. Sea $y : \mathbb{P} \to \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$ definido como $y(q) = y_q$ si $q \neq p$ y $y(p) = 0$, veamos que $[x] = p[y]$, es decir, $x - py \in \bigoplus \mathbb{Z}_p$. Sea $q \in \mathbb{P}$, si $q \neq p$, entonces $(x - py)(q) = x(q) - py_q = 0$, por lo que $sop(x - py) \subseteq \{p\}$, es decir que $x - py$ tiene soporte finito y $x - yp \in \bigoplus \mathbb{Z}_p$, así que $[x] = p[y]$ y $\prod \mathbb{Z}_p / \bigoplus \mathbb{Z}_p$ es p-divisible para todo primo

y por lo tanto divisible.
Observemos que $\prod \mathbb{Z}_p / \bigoplus \mathbb{Z}_p$ es distinto de cero, pues $x \in \prod \mathbb{Z}_p$ dado por $x(p) = 1$ no tiene soporte finito, por lo que $[x] \neq 0$. □

Teorema 4.24. $\mathbb{Z} - conat \nsubseteq L_{\{\prod\}}$

De lo anterior se sigue que $D = \{G \in \mathbb{Z}|\ G \text{ es divisible } \} \in \mathbb{Z} - quot$ y que $D^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = conat(\mathbb{Z} - simp) \in \mathbb{Z} - conat$. Veamos que $conat(\mathbb{Z} - simp)$ no es cerrada bajo productos, pues en caso contrario $\prod \mathbb{Z}_p \in conat(\mathbb{Z} - simp)$ y así $\prod \mathbb{Z}_p / \bigoplus \mathbb{Z}_p \in conat(\mathbb{Z} - simp)$, pero es distinto de cero y es divisible, lo cual es una contradicacción, por lo que $conat(\mathbb{Z} - simp)$ no es cerrado bajo productos arbitrarios.

□

Capítulo 5

R-qext y R-sext

El propósito de este último capítulo es caracterizar anillos comparando las retículas estudiadas.

Definición 5.1. Una clase libre de torsión es una clase $A \in L_{\{\leq, ext, \prod\}}$.

El siguiente resultado nos ayudará a caracterizar anillos comparando retículas, la demostracción puede encontrarse en *(3)* de [3].

Teorema 5.2. Son equivalentes para un anillo R:
1) R es isomorfo a un producto finito de anillos de matrices sobre anillos locales izquierdos y perfectos derechos.
2) Toda clase libre de torsión es una clase de torsión.

Lema 5.3. Si $R - sext \subseteq R - qext$, entonces R es isomorfo a un producto finito de anillo de matrices sobre anillos locales izquierdos y perfectos derechos.

Demostración. Claramente para toda clase A libre de torsión, $A \in R - sext$ por definición, pero $R - sext \subseteq R - qext$, por lo que A es cerrada bajo cocientes. Sea $\{M_i\}_I$ una familia de elementos de A, veamos que $\oplus_I\{M_i\} \in A$. Por definición $\prod\{M_i\} \in A$ y $\oplus\{M_i\} \leq \prod\{M_i\}$ y A es cerrada bajo submódulos, por lo que $\oplus\{M_i\} \in A$, así que $A \in L_{\{\twoheadrightarrow, ext, \oplus\}}$, esto es, A es una clase de torsión, luego por el teorema anterior R tiene la descomposición deseada.

□

Lema 5.4. Si $R - sext \subseteq R - qext$, entonces todo simple se sumerge en R.

Demostración. Al igual que el en lema anterior, tenemos que $qext(R) \subseteq sext(R)$, pero todo simple es cociente de R, así para todo simple S, $S \in sext(R) = \xi_{ext}(L(R)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^n(L(R), L(R))$. Sea n es mínimo natural tal que $S \in E^n(L(R), L(R))$. Por definición, tenemos una sucesión exacta de la forma $0 \to I \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} L \to 0$, con $I \leq R$ y $L \in E^{n-1}(L(R), L(R))$. Observemos que $I \cong f(I) \leq S$, pero S es simple por lo que $S = f(I)$ y S se sumerge en R o $f(I) = 0$, veamos que este último caso no puede pasar pues en caso contrario $I = 0$ y g sería mono, por lo que g sería isomorfismo y $S \cong L \in E^{n-1}(L(R), L(R))$, lo cual es una contradicción ya que n era el mínimo con la propiedad de que $S \in E^n(L(R), L(R))$, por lo que S se sumerge en R.

□

Lema 5.5. Si $R - qext \subseteq R - sext$, entonces R es noetheriano.

Demostración. Igual que el primer lema de la sección, tenemos que $sext(R) \subseteq qext(R)$, pero $L(R) \subseteq sext(R)$, por lo que todo ideal de R pertecene a $qext(R) = \{M | \ M \text{ finitamente generado}\}$, por lo que todo ideal es finitamente generado y así R es noetheriano.

□

Teorema 5.6. Si $R - sext = R - qext$, entonces R es isomorfo a un producto finito de anillo de matrices sobre anillos artinianos izquierdos y locales izquierdos.

Demostración. Como $R - sext \subseteq R - qext$, entonces R es isomorfo a un producto finito de anillos de matrices sobre anillos perfectos derechos y locales izquierdos. Como $R - qext \subseteq R - sext$, entonces R es noetheriano, así que cada factor en la descomposición de R es noetheriano y por equivalencia de morita R es isomorfo a un producto finito de anillo de matrices sobre anillos noetherianos izquierdos, perfectos derechos y locales izquierdos. Por el teorema de bass sabemos que los anillos perfectos derechos son semiartinianos izquierdos, y los anillos noetherianos y semiartinianos son artiniamos, así que R es isomorfo a un producto finito de anillo de matrices sobre anillos artinianos izquierdos y locales izquierdos.

$\square$

Bibliografía

[1] A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos, *On big lattices of classes of R-modules defined by closure properties*. Trends in mathematics, 19-36, 2000.

[2] A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos, *On lattices of natural and conatural classes in R-mod*. Comm. Algebra. 29(2) 541-556. 2001.

[3] R. Bronowitz y M. Teply, *Torsion theories of simple type*. J. Pure Apl. Algebra 3 329- 336, 1973.

[4] B. Stenstrom, *Rings of quotients*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[5] F.W. Anderson y K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1978.