



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

MÉTODOS APROXIMADOS PARA EL HAMILTONIANO CUÁNTICO DE RABI

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
WALLACE JAY HERRON MONTAÑO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JESÚS ALBERTO MAYTORENA CÓRDOVA
CENTRO DE NANOCIENCIAS Y NANOTECNOLOGÍA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. CATALINA LÓPEZ BASTIDAS
CENTRO DE NANOCIENCIAS Y NANOTECNOLOGÍA

DR. JORGE ALBERTO VILLAVICENCIO AGUILAR
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

ENSENADA, B.C. A ENERO DE 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a
mi madre*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por su comprensión, paciencia y tolerancia, muy especialmente a mi madre Elizabeth. A Abril por su apoyo y cariño.

Un agradecimiento sincero a mi comité de tutores, especialmente a Jesús, sin él este trabajo no hubiera sido posible, a Ernesto por su rigor y soporte, y por último a CONACYT por el respaldo económico que me brindó en el transcurso de la maestría.

Resumen

El modelo cuántico de Rabi resulta fundamental para describir muchos fenómenos en diversas áreas de la ciencia, en particular, cualquier sistema de dos niveles acoplado linealmente a un campo bosónico.

En el presente trabajo se estudian algunos de los métodos aproximados más importantes desarrollados recientemente para solucionar este modelo en distintos regímenes de acoplamiento. Primeramente se deriva el modelo de una manera intuitiva, se analiza el hamiltoniano del sistema, y se encuentran las energías y eigenestados para un caso particular de acoplamiento nulo. Posteriormente, con ayuda de este caso particular se presenta la aproximación de onda rotante, con la que el hamiltoniano cuántico de Rabi se reduce al famoso Modelo de Jaynes-Cummings, muy utilizado en óptica cuántica, donde se encuentran las correspondientes energías del sistema y los eigenestados. Además, se realiza una comparación entre los diferentes regímenes de acoplamiento del hamiltoniano cuántico de Rabi, y se trata un método perturbativo que hace uso de las propiedades de paridad de este hamiltoniano, válido para el régimen de acoplamiento denominado “ultra profundo”. Se resuelve otro caso particular (cuando la frecuencia de transición del sistema de dos niveles es cero) en donde el hamiltoniano cuántico de Rabi se reduce a algo muy similar a un oscilador armónico desplazado. Con ayuda de este caso particular se deriva la aproximación adiabática, la cual resulta útil cuando la frecuencia del campo bosónico es mucho mayor que la frecuencia de transición del sistema de dos niveles. De manera similar, utilizando los eigenestados adiabáticos derivamos una nueva aproximación que resulta ser una gener-

alización de la aproximación de onda rotante, válida para cualquier valor de acoplamiento entre los sistemas, pero sujeta a la condición de cuasi-resonancia. Además, se analizan las simetrías del hamiltoniano cuántico de Rabi y se derivan formas simétricas de la aproximación de onda rotante y la aproximación de onda rotante generalizada, las cuales respetan las invariancias del hamiltoniano respecto a sus parámetros y complementan fuera de resonancia dichas aproximaciones. Por último, se realiza una figura comparativa en la cual se ubican todas las aproximaciones estudiadas en este trabajo en función de las condiciones en donde resultan más precisas.

Abstract

The quantum Rabi model (QRM), which describes a two level quantum system (qubit) coupled to a bosonic mode, is one of the simplest model of the light-matter interaction, and has been widely applied to a variety of physical systems. In this work, we study the most relevant and novel approximations that has been recently developed to solve the QRM in the different coupling regimes identified from experiments and theoretical considerations. First, the model is introduced in a intuitively manner and the spectra of the simple case of zero coupling is considered. Next, we apply the famous Rotating Wave Approximation (RWA) to reduce the Rabi Hamiltonian to the celebrated Jaynes-Cummings Model, which holds for weak coupling and quasi-resonant conditions, and which is widely employed in the fields of cavity quantum electrodynamics and condensed matter physics among others. The corresponding stationary states and energy spectrum are obtained and discussed. Following this, a perturbative method is developed for the so called deep strong coupling regime, based on the parity symmetry of the Rabi Hamiltonian, and with no particular relation between the energy of the qubit and that of the photons. We next use the displaced oscillator basis to derive the Adiabatic Approximation, valid for arbitrary strength of the coupling but for small transition frequency of the two-level system compared to the photon energy. The corresponding adiabatic basis is then used to obtain a generalized version of the RWA (the GRWA), which leads to significantly more accurate expression for the energy levels of the system. This approximation is valid for quasi-resonant condition and works for all values of coupling strength. Finally, symmetric forms of the RWA and GRWA, that includes equal

amount of resonant and off-resonant terms and that preserve the invariances of the Rabi Hamiltonian with respect to its parameters, are presented. This work ends with a discussion of all these approximations located in the space of parameters defined by the transition energy of the qubit, the photon energy, and the coupling strength.

Contenido

Agradecimientos	II
Resumen	III
1 Introducción	1
2 Sistema cuántico de dos niveles en un campo electromagnético cuantizado	4
2.1 Modelo Cuántico de Rabi	4
2.2 Integrabilidad del Modelo Cuántico de Rabi	10
2.3 Sistema desacoplado	11
3 Aproximación de acoplamiento débil y cuasi-resonante	14
3.1 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	14
3.2 Eigenvalores y eigenfunciones	21
4 Régimen de acoplamiento ultra profundo	26
4.1 Regímenes de acoplamiento del Modelo Cuántico de Rabi	26
4.2 Cadenas de paridad	27
4.3 Eigenvalores y eigenfunciones	30
5 Aproximación adiabática	33
5.1 Oscilador armónico desplazado	33
5.2 Solución en el límite cuasi-degenerado ($\Omega \ll \omega$)	39

6	Aproximación de onda rotante generalizada	47
6.1	Hamiltoniano y eigenvalores	47
6.2	Términos resonantes y anti-resonantes	50
6.3	Análisis de la aproximación	53
7	Forma simétrica de la aproximación de onda rotante	56
7.1	Simetrías del Hamiltoniano Cuántico de Rabi	56
7.2	Aproximación de onda rotante simétrica	58
7.3	Aproximación de onda rotante generalizada simétrica	63
8	Conclusiones generales	68
	Bibliografía	72

Capítulo 1

Introducción

La interacción de la radiación electromagnética y la materia ha sido un fenómeno que ha preocupado a los físicos desde hace muchos años. Este fenómeno fue primeramente objeto de estudio de la óptica clásica, en donde se modelaba al átomo como un dipolo hertziano y a la radiación electromagnética mediante un campo clásico; posteriormente, con el desarrollo de la mecánica cuántica, fue posible estudiar este fenómeno de manera semi-clásica o completamente cuántica [1, 2, 3, 4].

En el modelo semi-clásico, la radiación sigue siendo una onda electromagnética descrita por un campo clásico y sólo la energía del átomo se encuentra cuantizada, mientras que en el modelo completamente cuántico, la radiación ahora es descrita por paquetes discretos de energía (fotones) y la energía del átomo también se encuentra cuantizada.

El problema de la interacción coherente entre la radiación y la materia posee tantos grados de libertad que hasta ahora ha sido imposible tratarlo de manera exacta. El modelo de Rabi es el modelo más simple que describe la interacción coherente entre la radiación y la materia, y posee una versión semi-clásica y otra completamente cuántica. En ambas se modela al átomo como el sistema cuántico no trivial más pequeño posible, esto es, como un sistema de dos niveles energéticos, y al campo como un solo modo de radiación electromagnética, representado de manera clásica o cuántica según el caso; en cuanto a la interacción entre la

radiación y el átomo, ésta se considera lineal, es decir, de carácter dipolar eléctrica.

Una ventaja del modelo puramente cuántico de Rabi es que permite explicar fenómenos que no pueden ser explicados con el modelo clásico o semi-clásico, por ejemplo, la emisión espontánea de la luz por un átomo excitado.

En general, el modelo cuántico de Rabi describe a un sistema de dos niveles acoplado linealmente a un campo bosónico. Por esta razón, encuentra aplicaciones en diversas áreas de la física además de la óptica cuántica, por ejemplo, en resonancia magnética en estado sólido [5], en física molecular [6], en electrodinámica cuántica de cavidades [7], en circuitos [8], y en computación cuántica [9].

Por más de 70 años se pensó que este modelo no tenía una solución analítica exacta, a pesar de ser un modelo aparentemente simple. Es por ello que existen una variedad de métodos aproximados para solucionarlo, cada uno con diferentes características y válido para ciertos valores de los parámetros del sistema. El más famoso de ellos y el primero en aplicarse fue el de la aproximación de onda rotante [10]. Esta aproximación permite reducir el hamiltoniano cuántico de Rabi al modelo de Jaynes-Cummings cuya solución es relativamente sencilla. El contexto de implementación de este modelo es la electrodinámica cuántica de cavidades y por mucho tiempo fue suficiente para describir la mayoría de los experimentos que aquí se realizaban; sin embargo, con el creciente desarrollo de dispositivos microfabricados de estado sólido, se logró tener acceso a valores en los parámetros fuera del rango de aplicabilidad de este modelo, lo que hizo necesario el desarrollo de nuevas aproximaciones.

Actualmente ya se cuenta con una solución analítica exacta [11]; sin embargo, esta solución está en la forma de una función trascendental compuesta definida en series de potencias, por lo tanto, algunas veces resulta más útil recurrir a un método aproximado que se ajuste a las necesidades de nuestro sistema. La solución exacta aun se encuentra en investigación y se estudian sus implicaciones. Como se ha dicho recientemente:

“Se necesitaría un intenso diálogo entre las matemáticas y la física para describir y predecir

unos fenómenos físicos sin precedentes, ya que podrían estar ocultos en los números cuánticos, asociados con el criterio de integrabilidad de Braak y las expresiones analíticas. De lo contrario, el logro actual no será otra cosa que un monólogo de matemáticas.” [12]

A la fecha, aun continua la búsqueda por métodos aproximados simples que revelen más de la física que esconde este modelo [13].

La presente tesis tiene como objeto de estudio el modelo cuántico de Rabi, específicamente los métodos aproximados más importantes para su solución. La importancia de estos métodos radica en su simplicidad analítica y su gran precisión al describir el modelo. Existen otras aproximaciones que no se abordan en este trabajo; sin embargo, la mayoría se basan en los métodos que aquí se presentan. Para fines de este trabajo nos limitaremos a encontrar las energías y eigenestados dejando de lado la dinámica del sistema.

Capítulo 2

Sistema cuántico de dos niveles en un campo electromagnético cuantizado

2.1 Modelo Cuántico de Rabi

Un modelo fundamental en la mecánica cuántica es el que describe la interacción entre un sistema de dos niveles y un oscilador armónico cuántico. En óptica cuántica este modelo es conocido como modelo cuántico de Rabi (MCR) y describe un átomo con acceso a sólo dos niveles de energía en una cavidad electromagnética en donde interactúa con fotones de un campo monocromático.

Aunque no existe un átomo (el más simple) de dos niveles como tal, es un hecho que muchos fenómenos de interacción resonante coherente involucran pocos niveles, de modo que la idealización de dos niveles resulta una aproximación muy razonable y útil en diversas aplicaciones. Este modelo promete mucho material teórico en el entendimiento de la interacción entre la radiación y la materia, así como de muchos otros sistemas con dinámicas similares.

Escribimos el hamiltoniano que describe a este sistema de la siguiente manera [4, 14]

$$H = H_A + H_C + H_I, \quad (2.1)$$

donde H_A y H_C representan las energías del átomo y del campo en ausencia de interacción respectivamente, mientras que H_I representa el término de interacción átomo-campo.

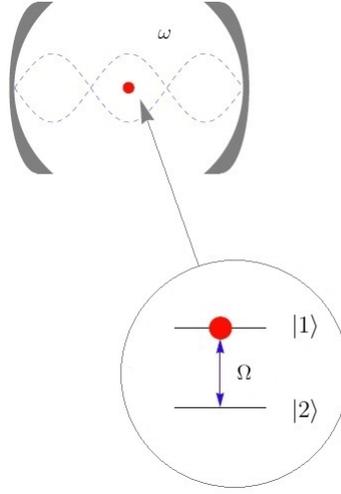


Figura 2.1: Ilustración de un átomo de dos niveles en una cavidad electromagnética.

En términos de los eigenestados atómicos $|1\rangle$ y $|2\rangle$ con energías E_1 y E_2 asociadas respectivamente, H_A está dado por

$$H_A = \sum_{i=1}^2 E_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.2)$$

en donde $|1\rangle$ representa el estado excitado del átomo y $|2\rangle$ el estado base, con $E_1 > E_2$.

Resulta conveniente escribir (2.2) de una manera alternativa en términos de los operadores atómicos $\sigma_{ij} = |i\rangle \langle j|$ como sigue

$$H_A = \sum_{i=1}^2 E_i \sigma_{ii}, \quad (2.3)$$

con

$$\sigma_{11} = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{22} = |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

además, como los eigenestados atómicos $|1\rangle$ y $|2\rangle$ forman una base, se cumple

$$\sum_{i=1}^2 \sigma_{ii} = I, \quad (2.4)$$

en donde I es la matriz identidad de 2×2 .

Es conveniente también reescribir las energías de H_A en términos del promedio $E_0 = \frac{E_1 + E_2}{2}$ de la siguiente manera

$$H_A = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)I + \frac{1}{2}(E_1 - E_2)(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = E_0I + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z, \quad (2.5)$$

en donde la cantidad $\Omega = (E_1 - E_2)/\hbar$ es la frecuencia atómica de transición y $\sigma_z = \sigma_{11} - \sigma_{22}$ es la matriz de Pauli respecto del eje de cuantización z .

De esta manera resulta útil redefinir a H_A como $H_A - E_0I$, esto por supuesto no afecta la dinámica del problema y nos permite expresar H_A sólo en términos de la matriz de Pauli σ_z , como se muestra a continuación

$$H_A = \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z. \quad (2.6)$$

La expresión (2.6) representa las energías del átomo en ausencia de interacción, simplemente con un desplazamiento arbitrario del cero de energía por el promedio $E_0 = \frac{E_1 + E_2}{2}$, esto se representa en la figura 2.2.

El término H_C , que representa la energía del campo electromagnético cuantizado en ausencia de interacción, puede escribirse en términos de los operadores bosónicos de aniquilación “ a_k ” y creación “ a_k^\dagger ” (método de segunda cuantización) de la siguiente manera [1, 2, 3, 4, 15]

$$H_C = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.7)$$

donde $a_k^\dagger a_k$ es conocido como operador de número de fotones (comúnmente se denota como N_k) y representa a un conjunto de osciladores armónicos cuánticos con frecuencias ω_k . Estos operadores siguen reglas de conmutación de Bose $[a_{k'}, a_k^\dagger] = \delta_{k',k}$.

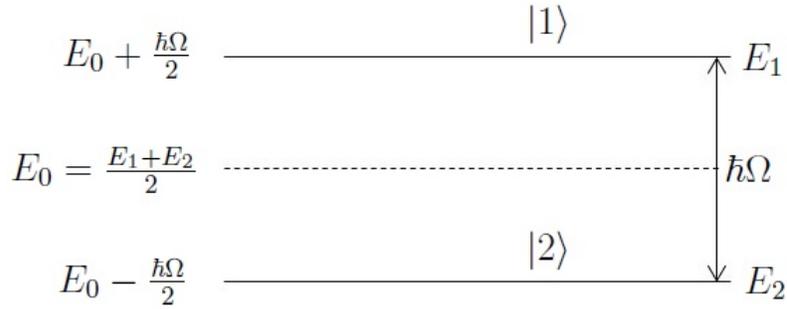


Figura 2.2: Estructura energética del átomo de dos niveles.

En el caso de un sólo modo de radiación, la expresión (2.7) se reduce a

$$H_C = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.8)$$

Es práctica común ignorar el término de energía de punto cero ($\frac{\hbar\omega}{2}$) en la expresión anterior, pues sólo corresponde a un corrimiento en los eigenvalores de H_C , por lo que de ahora en adelante usaremos

$$H_C = \hbar\omega a^\dagger a. \quad (2.9)$$

La expresión (2.9) es el hamiltoniano efectivo de un oscilador armónico cuántico y en este caso representa a un modo electromagnético de frecuencia ω .

Por último, el término de interacción H_I en la aproximación dipolar está dado por $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}$,

donde $\boldsymbol{\mu}$ es el operador atómico de momento dipolar y \mathbf{E} es el campo eléctrico.

Siguiendo el formalismo de segunda cuantización expresamos el campo eléctrico en términos de los operadores de creación y aniquilación como

$$\mathbf{E} = \sum \hat{\mathbf{e}}_k \xi_k (a_k + a_k^\dagger), \quad (2.10)$$

en donde $\hat{\mathbf{e}}_k$ es el vector de polarización de cada modo electromagnético y $\xi_k = \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}}$ una constante que depende de la frecuencia de cada modo electromagnético y el volumen de la región de cuantización considerada.

Dado que las dimensiones atómicas típicas son de unos cuantos ángstroms y, si además suponemos que sobre este se incide radiación de longitudes de onda en el rango del visible (4000-7000 Å) entonces, podemos aproximar a la unidad el término de fase en la expresión (2.10) ($e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx 1$).

Para un sólo modo de radiación electromagnética la expresión (2.10) se reduce a

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}} \xi (a + a^\dagger). \quad (2.11)$$

En cuanto al operador atómico de momento dipolar $\boldsymbol{\mu}$ podemos expresarlo en la base de los estados atómicos $|i\rangle$ como sigue [4, 14]

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i,j=1}^2 |i\rangle \langle i| \boldsymbol{\mu} |j\rangle \langle j|, \quad (2.12)$$

por lo que en términos de los operadores atómicos (σ_{ij}) la expresión anterior se reduce a

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i,j=1}^2 \boldsymbol{\mu}_{ij} \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{11} + \boldsymbol{\mu}_{22})I + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{11} - \boldsymbol{\mu}_{22})\sigma_z + \boldsymbol{\mu}_{12}\sigma_{12} + \boldsymbol{\mu}_{21}\sigma_{21}, \quad (2.13)$$

en donde $\boldsymbol{\mu}_{ij} = \langle i| \boldsymbol{\mu} |j\rangle$.

El operador atómico de momento dipolar ($\boldsymbol{\mu}$) posee paridad impar ya que es proporcional

al vector de posición del electrón, por lo que si consideramos que los estados atómicos $|i\rangle$ también poseen simetría de paridad entonces se cumple $\boldsymbol{\mu}_{11} = \boldsymbol{\mu}_{22} = 0$. Además, si consideramos simetría de inversión ($\boldsymbol{\mu}_{12} = \boldsymbol{\mu}_{21}$), es posible reescribir (2.13) como se muestra a continuación

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{12}(\sigma_{12} + \sigma_{21}). \quad (2.14)$$

Al sustituir las expresiones (2.11) y (2.14) en el término de interacción H_I obtenemos

$$H_I = \hbar g(\sigma_{12} + \sigma_{21})(a + a^\dagger), \quad (2.15)$$

donde $g = \frac{\xi}{\hbar}(\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \hat{\mathbf{e}})$ representa la constante de acoplamiento.

Es común encontrar la expresión anterior en términos de los operadores escalera de la siguiente manera

$$H_I = \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger), \quad (2.16)$$

con

$$\sigma_+ = \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \sigma_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

estos operadores cumplen las siguientes relaciones

$$\sigma_\pm |\mp z\rangle = |\pm z\rangle, \quad \sigma_\pm |\pm z\rangle = 0,$$

en donde $|+z\rangle$ y $|-z\rangle$ son los eigenestados de σ_z con eigenvalores 1 y -1 respectivamente, el estado excitado $|1\rangle$ corresponde a $|+z\rangle$ mientras que el estado base $|2\rangle$ corresponde a $|-z\rangle$.

También es común encontrar (2.15) en términos de las matrices de Pauli como sigue

$$H_I = \hbar g \sigma_x (a + a^\dagger), \quad (2.17)$$

en donde $\sigma_x = (\sigma_+ + \sigma_-)$. Una vez derivados todos los términos de H los reunimos para

llegar a la expresión

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z + \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger). \quad (2.18)$$

El hamiltoniano (2.18) es conocido como Hamiltoniano Cuántico de Rabi (HCR) y como ya se dijo, en óptica cuántica describe a un átomo de dos niveles en una cavidad electromagnética, pero en general describe a un sistema de dos niveles interactuando con un oscilador armónico cuántico. Este modelo gobierna la dinámica de una variedad de problemas adicionales y tiene aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, como física molecular [16], resonancia magnética en estado sólido [5], electrodinámica cuántica de cavidades [17], electrodinámica cuántica de circuitos [18], computación cuántica [19]. Experimentalmente se estudia en sistemas tales como: un qubit superconductor acoplado a un resonador nanomecánico de estado sólido [20], iones atrapados [21], pares de Cooper [22], qubits de flujo [23], electrones acoplados a modos fonónicos en una red cristalina [24] y muchos más.

2.2 Integrabilidad del Modelo Cuántico de Rabi

La solución analítica de un sistema siempre ha estado relacionada con la integrabilidad del mismo. En mecánica cuántica la existencia de subespacios invariantes asociados con cantidades conservadas (además de la energía) suele ser una condición suficiente para que un sistema sea integrable.

Por mucho tiempo se pensó que el HCR era un sistema no integrable y que la simetría que poseía relacionada con la paridad, no era suficiente para poder resolverlo. Utilizando la representación de los operadores bosónicos en el espacio de Bargmann para funciones analíticas [25], D. Braak encontró en 2011 que los eigenvalores de este hamiltoniano estaban en términos de los ceros de una función trascendental [11]. De esta manera el modelo pasa a ser integrable y a tener una solución analítica exacta.

Inspirado en el átomo de hidrógeno Braak propuso un nuevo criterio de integrabilidad

para sistemas cuánticos basado en la existencia de números cuánticos que clasifican los eigenestados de forma exclusiva en donde el MCR es integrable; sin embargo, también encontró que existe un caso generalizado que bajo este nuevo criterio no es integrable pero al mismo tiempo es soluble analíticamente, siendo el primer sistema de este tipo.

Todas estas cuestiones derivadas de la solución analítica encontrada por Braak aún se encuentran en discusión [26, 27]. Se espera que la solución de Braak sea útil en experimentos futuros, en los que se tenga acceso a regímenes de acoplamiento aun inaccesibles y que pueda develar fenómenos aun ocultos relacionados a este modelo [12].

Para propósitos de este trabajo, sólo nos abocaremos a tratar los métodos aproximados más importantes para solucionar el HCR, esto dada la complejidad de la solución analítica exacta y algunas cuestiones relacionadas con la integrabilidad del modelo que aun se debaten.

2.3 Sistema desacoplado

Antes de conocer algunas de las soluciones aproximadas al hamiltoniano (2.18) es necesario conocer la solución al sistema desacoplado, es decir, cuando no existe ningún tipo de interacción entre el átomo y el campo electromagnético, o bien, el caso con $g = 0$.

Sea H_0 el hamiltoniano que representa al sistema desacoplado

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z. \quad (2.19)$$

A diferencia de (2.18), H_0 tiene una solución analítica relativamente sencilla y es útil como primera aproximación a un sistema con acoplamiento muy débil ($g \approx 0$).

Notamos que el primer término de H_0 es proporcional (término del campo electromagnético) al operador de número de fotones ($\hat{N} = a^\dagger a$), mientras que el segundo (término atómico) a la matriz de Pauli σ_z ; la eigenbase de H_0 es entonces el producto directo de las

eigenbases de ambos operadores, es decir

$$|\pm, N\rangle = |\pm z\rangle \otimes |N\rangle, \quad (2.20)$$

con $N = 0, 1, 2, 3, \dots$, y en donde $|\pm z\rangle$ es la eigenbase de la matriz de Pauli σ_z , y $|N\rangle$ es la eigenbase del operador de número de fotones (\hat{N}). Su producto directo lo denotamos como $|\pm, N\rangle$.

Para comprobar esto, escribimos H_0 en su forma matricial en la base (2.20):

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_{-,0}^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_{+,0}^{(0)} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_{-,1}^{(0)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & E_{+,1}^{(0)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{-,2}^{(0)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

en donde los reglones y columnas de la matriz están ordenados siguiendo la secuencia $|-, 0\rangle, |+, 0\rangle, |-, 1\rangle, |+, 1\rangle, \dots$

La matriz anterior muestra que efectivamente el hamiltoniano es diagonal en esta base.

Si operamos H_0 en los estados en (2.20) obtenemos la siguiente ecuación de eigenvalores

$$H_0 |\pm, N\rangle = \left(\frac{1}{2} \hbar \Omega \sigma_z + \hbar \omega a^\dagger a \right) |\pm, N\rangle = E_{\pm, N}^{(0)} |\pm, N\rangle, \quad (2.22)$$

con $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ y en donde

$$E_{\pm, N}^{(0)} = \hbar \omega N \pm \frac{\hbar}{2} \Omega, \quad (2.23)$$

o bien,

$$E_{+, N} = \hbar \left(\omega N + \frac{1}{2} \omega + \frac{\delta}{2} \right),$$

Capítulo 3

Aproximación de acoplamiento débil y cuasi-resonante

3.1 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

La aproximación tomada por Jaynes y Cummings para darle solución a H , fue la llamada “aproximación de onda rotante” (RWA, por sus siglas en inglés). El modelo de Rabi (semi-clásico) se introdujo en el contexto de resonancia magnética nuclear y por razones históricas esta aproximación posee este nombre.

En óptica cuántica, “aproximación cuasi-resonante” describe mejor la situación física; sin embargo, nos referiremos a ella como “aproximación RWA” que es la denominación más común.

La aproximación consiste en despreciar los términos “anti-resonantes” proporcionales a σ_-a y σ_+a^\dagger en la energía de interacción (2.16) y conservar solamente los términos “resonantes” proporcionales a σ_+a y σ_-a^\dagger , bajo la condición de que la frecuencia atómica de transición (Ω) y la frecuencia del campo (ω) se encuentran en cuasi-resonancia ($\Omega \sim \omega$), y que además el acoplamiento entre ambos sistemas es débil ($g \ll \Omega \sim \omega$).

El contexto natural para la implementación de este modelo es la electrodinámica cuántica

de cavidades, en donde experimentos fundamentales han sido realizados utilizando microondas y cavidades ópticas permitiéndonos observar fenómenos cuánticos de coherencia [28, 29, 30, 31].

Históricamente, en los experimentos realizados de átomos en cavidades electromagnéticas se tienen estas condiciones, ya que la resonancia entre ambos sistemas hace válida la descripción del átomo como sistema de dos niveles de energía, y se sabe que la intensidad con la que interactúan el átomo y el campo está fuertemente determinada por la magnitud del dipolo intrínseco del átomo, y típicamente, es mucho menor que la frecuencia atómica de transición ($\frac{g}{\Omega} \sim 10^{-7} - 10^{-6}$) [42].

El modelo de Jaynes-Cummings (MJC) también ha sido utilizado en la descripción de iones atrapados, en donde los estados electrónicos de estos interactúan con sus estados vibracionales [32], puntos cuánticos dentro de cristales fotónicos, micropilares o microdiscos resonadores [33]. También ha sido útil describiendo la dinámica de qubits para la realización de algoritmos computacionales, teleportación cuántica y protocolos de criptografía cuántica [34].

Una manera sencilla de derivar la aproximación de onda rotante es trasladándose a la representación de interacción respecto del hamiltoniano no perturbado (2.19) mediante el operador unitario $U(t) = e^{iH_0 t/\hbar}$.

Consideremos la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano Cuántico de Rabi

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle, \quad (3.1)$$

en donde $|\Psi(t)\rangle$ es el estado del sistema al tiempo t .

En la representación de interacción esta ecuación se transforma en:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = \tilde{H}_I |\tilde{\Psi}(t)\rangle, \quad (3.2)$$

donde

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = U(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (3.3)$$

$$\tilde{H}_I(t) = U(t)H_I U^\dagger(t). \quad (3.4)$$

$$\tilde{H}_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} [\hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger)] e^{-iH_0 t/\hbar}.$$

Si utilizamos el lema de Baker-Hausdorff¹ [39] podemos reescribir (3.4) como

$$\tilde{H}_I(t) = \hbar g[\sigma_+ a e^{-i(\omega-\Omega)t} + \sigma_- a^\dagger e^{i(\omega-\Omega)t} + \sigma_+ a^\dagger e^{i(\omega+\Omega)t} + \sigma_- a e^{-i(\omega+\Omega)t}]. \quad (3.5)$$

Los dos primeros términos de la expresión anterior están relacionados con los términos resonantes ($\sigma_+ a$ y $\sigma_- a^\dagger$) y los dos últimos con los anti-resonantes ($\sigma_+ a^\dagger$ y $\sigma_- a$). La aproximación RWA consiste en asumir que el sistema se encuentra en cuasi-resonancia y acoplado débilmente, por lo que es posible desprestigiar estos últimos dos términos, ya que las exponenciales asociadas a los términos anti-resonantes ($e^{\pm i(\omega+\Omega)t}$), oscilan con frecuencias más rápidas que las de los términos resonantes ($e^{\pm i(\omega-\Omega)t}$) y su promedio temporal a escalas de tiempo de $\frac{1}{\omega}$ es muy pequeño.

Una vez eliminados los términos anti-resonantes de la expresión (3.5) ésta se reduce a

$$\tilde{H}_I(t) = \hbar g[\sigma_+ a e^{-i(\omega-\Omega)t} + \sigma_- a^\dagger e^{i(\omega-\Omega)t}]. \quad (3.6)$$

A continuación regresamos a la representación original de $\tilde{H}_I(t)$ con la transformación inversa ($H_I = U^\dagger(t)\tilde{H}_I(t)U(t)$)

$$H_I = \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (3.7)$$

El Hamiltoniano de Rabi (2.18) con esta aproximación en el término de interacción (H_I) se

¹ $e^{i\lambda X} Y e^{-i\lambda X} = Y + i\lambda[X, Y] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[X, [X, Y]] + \dots$

escribe de la siguiente manera

$$H_{JC} = \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (3.8)$$

El hamiltoniano (3.8) que denotamos como H_{JC} es conocido como el Modelo de Jaynes-Cummings (MJC) y es sólo el hamiltoniano (2.18) después de hacer la RWA.

Consideremos el operador $N_{JC} = a^\dagger a + \frac{1}{2}(\sigma_z + I)$. Es fácil demostrar que $[H_{JC}, N_{JC}] = 0$, además, como N_{JC} no depende explícitamente del tiempo, resulta ser una constante de movimiento para el MJC. Esta constante de movimiento garantiza la conservación del número de cuantos del sistema, es decir, el número de fotones y excitaciones del sistema.

Por otro lado, para apreciar el efecto que tiene el remover los términos anti-resonantes del HCR recurrimos a su representación matricial, en la base del sistema no perturbado $|S, N\rangle$ con $S = +, -$; para ello calculamos los elementos de esta matriz como

$$\begin{aligned} \langle S', M | H | S, N \rangle &= \langle S', M | H_0 | S, N \rangle + \langle S', M | \hbar g(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a) | S, N \rangle \\ &\quad + \langle S', M | \hbar g(\sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a) | S, N \rangle \\ &= \delta_{S'S} \delta_{MN} (E_{+,N}^{(0)} \delta_{S,+} + E_{-,N}^{(0)} \delta_{S,-}) + \hbar g \sqrt{N+1} \delta_{S',-} \delta_{S,+} \delta_{M,N+1} \\ &\quad + \hbar g \sqrt{N} \delta_{S',+} \delta_{S,-} \delta_{M,N-1} \\ &\quad + \hbar g \sqrt{N+1} \delta_{S',+} \delta_{S,-} \delta_{M,N+1} + \hbar g \sqrt{N} \delta_{S',-} \delta_{S,+} \delta_{M,N-1} \\ &= \delta_{S'S} \delta_{MN} (E_{+,N}^{(0)} \delta_{S,+} + E_{-,N}^{(0)} \delta_{S,-}) + \frac{\hbar}{2} (\Omega_N \delta_{M,N+1} + \Omega_{N-1} \delta_{M,N-1}) (1 - \delta_{S'S}), \end{aligned}$$

en donde $E_{\pm,N}^{(0)}$ son las energías del sistema sin perturbar (2.23) y la cantidad $\Omega_N = 2g\sqrt{N+1}$ es conocida como frecuencia de Rabi para N fotones.

Una vez calculados los elementos de matriz de H , éste se puede escribir explícitamente

como

$$H = \begin{pmatrix} E_{-,0}^{(0)} & 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & E_{+,0}^{(0)} & \frac{\hbar}{2}\Omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_0 & E_{-,1}^{(0)} & 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_1 & 0 & \cdots \\ \frac{\hbar}{2}\Omega_0 & 0 & 0 & E_{+,1}^{(0)} & \frac{\hbar}{2}\Omega_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_1 & E_{-,2}^{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_1 & 0 & 0 & E_{+,2}^{(0)} & \frac{\hbar}{2}\Omega_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_2 & E_{-,3}^{(0)} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

los renglones y columnas de la matriz están ordenados siguiendo la secuencia

$$|-, 0\rangle, |+, 0\rangle, |-, 1\rangle, |+, 1\rangle, \dots$$

Cerca de resonancia, los niveles de H_0 a excepción del estado base $|-, 0\rangle$, con energía asociada $E_{-,0}^{(0)} = -\hbar\omega/2$, están dispuestos en bloques (M_N), espaciados por una energía del orden de $\hbar\omega$. Cada bloque representa un subespacio que involucra a los estados $|+, N\rangle$ y $|-, N+1\rangle$, los cuales difieren en energía por $E_{+,N}^{(0)} - E_{-,N+1}^{(0)} = \hbar(\Omega - \omega)$. Los términos resonantes acoplan los estados de estos dobletes ($|+, N\rangle$ y $|-, N+1\rangle$) y están asociados con absorciones y emisiones del sistema; por ejemplo, en el subespacio M_0 : $\langle +, 0 | \hbar g \sigma_+ a | -, 1 \rangle = \hbar\Omega_0/2$, se absorbe un fotón y el sistema de dos niveles pasa al estado excitado, o en contraparte en el subespacio M_1 : $\langle -, 2 | \hbar g \sigma_- a^\dagger | +, 1 \rangle = \hbar\Omega_1/2$, se crea un fotón por el decaimiento del sistema de dos niveles (figura 3.1). Por otro lado, los términos anti-resonantes, los cuales aparecen en las diagonales más externas de la matriz, acoplan entre sí los estados de los dobletes M_N y M_{N+2} ; por ejemplo, el estado $|-, 1\rangle \in M_0$ está acoplado al estado $|+, 2\rangle \in M_2$ mediante el término anti-resonante $\sigma_- a$; de igual manera se encuentran acoplados los estados $|+, 3\rangle \in M_3$ y $|-, 2\rangle \in M_1$ mediante el término anti-resonante $\sigma_+ a^\dagger$. A diferencia de lo que sucede con los términos resonantes, en estas transiciones no se conserva la cantidad de cuantos del sistema, en el sentido de que decae el átomo y además se destruye un fotón o se excita el átomo y se crea un fotón (figura 3.2).

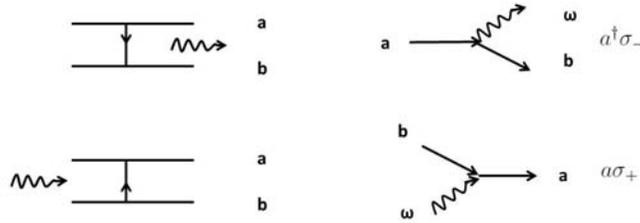


Figura 3.1: Términos resonantes. En la parte superior de la figura se ilustra el proceso de decaimiento del estado excitado “a” al estado base “b” y la creación de un fotón. Este proceso está asociado al término resonante $\sigma_- a^\dagger$. En la parte inferior se ilustra el proceso de excitación del estado base “b” al estado excitado “a” y está asociado al término resonante $\sigma_+ a$. Ambos procesos conservan la energía del sistema.

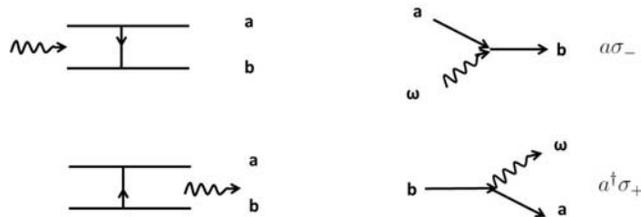


Figura 3.2: Términos anti-resonantes. En la parte superior de la figura se ilustra el proceso en el que el sistema absorbe un fotón y al mismo tiempo decae del estado “a” al “b” asociado al término anti-resonante $\sigma_- a$. En la parte inferior se ilustra el proceso en donde el sistema emite un fotón y pasa del estado “b” al estado “a” asociado al término anti-resonante $\sigma_+ a^\dagger$. Claramente en ambos procesos no se conserva la energía.

La RWA consiste en despreciar los términos anti-resonantes, lo que tiene como consecuencia que el espacio de Hilbert se fragmente en subespacios formados por estados de la forma $|+, N\rangle$ y $|-, N + 1\rangle$ y sólo los términos resonantes son los responsables de las transiciones en cada subespacio de tal manera que la matriz (3.9) se reduce una matriz diagonal por bloques de la siguiente forma

$$H_{JC} = \begin{pmatrix} E_{-,0}^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & E_{+,0}^{(0)} & \frac{\hbar}{2}\Omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_0 & E_{-,1}^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & E_{+,1}^{(0)} & \frac{\hbar}{2}\Omega_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_1 & E_{-,2}^{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{+,2}^{(0)} & \frac{\hbar}{2}\Omega_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega_2 & E_{-,3}^{(0)} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Es importante recordar que sólo es posible suprimir los términos anti-resonantes bajo el supuesto de que el sistema se encuentra en cuasi-resonancia ($\omega \sim \Omega$) y acoplamiento débil ($g \ll \omega \sim \Omega$). Esta última condición queda evidenciada bajo el esquema de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo, en donde H_0 es la parte del hamiltoniano cuya solución conocemos, y H_I es la perturbación. En este esquema una condición que se debe cumplir es que los elementos matriciales fuera de la diagonal (términos de interacción) sean pequeños comparados con la separación de las energías de la parte del hamiltoniano que se considera no perturbado (H_0), es decir

$$|\langle S', M | H_I | S, N \rangle| \ll \left| E_{S',M}^{(0)} - E_{S,N}^{(0)} \right|. \quad (3.11)$$

de esta condición llegamos a la siguiente expresión para los términos resonantes

$$\left| \frac{\hbar g \langle +, N | \sigma_+ a | -, N + 1 \rangle}{E_{+,N}^{(0)} - E_{-,N+1}^{(0)}} \right| = \left| \frac{\hbar g \langle -, N + 1 | \sigma_- a^\dagger | +, N \rangle}{E_{-,N+1}^{(0)} - E_{+,N}^{(0)}} \right| = \left| \frac{\Omega_N/2}{\Omega - \omega} \right| \sim \left| \frac{g}{\Omega - \omega} \right|. \quad (3.12)$$

En cuasi-resonancia ($\Omega = \omega$) resulta evidente que esta condición no cumple las condiciones de pequeñez; sin embargo, para los términos anti-resonantes tenemos

$$\left| \frac{\hbar g \langle -, N | \sigma_- a | +, N + 1 \rangle}{E_{-,N}^{(0)} - E_{+,N+1}^{(0)}} \right| = \left| \frac{\hbar g \langle +, N + 1 | \sigma_+ a^\dagger | -, N \rangle}{E_{+,N+1}^{(0)} - E_{-,N}^{(0)}} \right| = \left| \frac{\Omega_N/2}{\Omega + \omega} \right| \sim \frac{g}{2\omega}. \quad (3.13)$$

Aquí observamos que bajo la condición de que $g \ll \omega$ se satisface la condición (3.11), así, los términos anti-resonantes son pequeños comparados con los demás, por lo tanto, es válido despreciarlos.

Estas condiciones marcan los límites de aplicabilidad de la RWA y muestran que las condiciones de cuasi-resonancia y acoplamiento débil se encuentran ligadas.

3.2 Eigenvalores y eigenfunciones

Para encontrar los eigenvalores y eigenfunciones del MJC, basta con diagonalizar cada bloque de la matriz (3.10) por separado, escribimos el N-ésimo bloque de esta matriz como

$$H_N = \begin{pmatrix} \langle +, N | H_0 | +, N \rangle & \hbar g \langle +, N | \sigma_+ a | -, N + 1 \rangle \\ \hbar g \langle -, N + 1 | \sigma_- a^\dagger | +, N \rangle & \langle -, N + 1 | H_0 | -, N + 1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{+,N}^{(0)} & \frac{\hbar}{2} \Omega_N \\ \frac{\hbar}{2} \Omega_N & E_{-,N+1}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

o en términos de las matrices de Pauli

$$H_N = \frac{1}{2} \left(E_{+,N}^{(0)} + E_{-,N+1}^{(0)} \right) I + \frac{\hbar \Omega_N}{2} \sigma_x + \frac{1}{2} \left(E_{+,N}^{(0)} - E_{-,N+1}^{(0)} \right) \sigma_z. \quad (3.15)$$

Al diagonalizar estos bloques de 2x2 (H_N) en cualquiera de sus representaciones, obtenemos el siguiente espectro de energías

$$\begin{aligned}
E_{\pm, N}^{JC} &= \frac{1}{2} \left(E_{+, N}^{(0)} + E_{-, N+1}^{(0)} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\hbar\Omega_N)^2 + (E_{+, N}^{(0)} - E_{-, N+1}^{(0)})^2} \\
&= \hbar \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2} \right] = \hbar \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \pm \frac{R_N}{2} \right], \quad (3.16)
\end{aligned}$$

con $N \geq 0$ y en donde R_N es conocida como Frecuencia de Rabi Generalizada y se define como $R_N = \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2}$ con $\delta = (\Omega - \omega)$ y $\Omega_N = 2g\sqrt{N+1}$. Recordemos que el estado base queda aislado de los demás bloques y tiene una energía de $E_{-, 0}^{(0)} = -\frac{\hbar\Omega}{2}$. En las figuras 3.3 y 3.4 observamos una comparación entre las energías del sistema sin acoplamiento y las energías del modelo de JC (3.16).

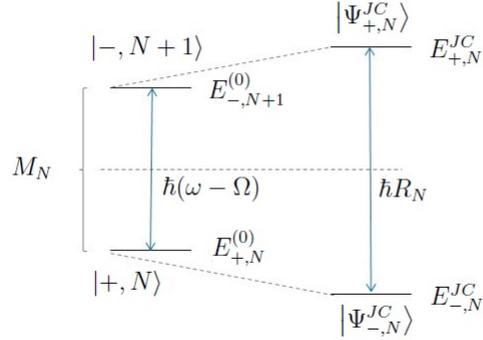


Figura 3.3: Comparación del N-ésimo doblete del sistema sin acoplamiento y el modelo de JC. En esta figura observamos que la separación energética del doblete M_N en el sistema desacoplado es proporcional a la diferencia de frecuencias del sistema, mientras que en el caso del modelo de Jaynes-Cummings es proporcional a la frecuencia de Rabi generalizada (R_N). Es importante destacar que en resonancia la diferencia energética de estos estados es $\hbar\Omega_N$ a diferencia de los primeros que se encuentran degenerados.

Los correspondientes eigenestados (\mathbf{v}_{\pm}) asociados al espectro de energías pueden ser encontrados mediante la siguiente ecuación de eigenvalores ($\Omega_N\sigma_x + \delta\sigma_z$) $\mathbf{v}_{\pm} = \pm R_N\mathbf{v}_{\pm}$.

Una vez que resolvemos la ecuación encontramos que los eigenestados del MJC son

$$|\Psi_{+,N}^{JC}\rangle = \begin{pmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_N}{2} \\ \sin \frac{\theta_N}{2} \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta_N}{2} |+, N\rangle + \sin \frac{\theta_N}{2} |-, N+1\rangle, \quad (3.17)$$

$$|\Psi_{-,N}^{JC}\rangle = \begin{pmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta_N}{2} \\ -\cos \frac{\theta_N}{2} \end{pmatrix} = \sin \frac{\theta_N}{2} |+, N\rangle - \cos \frac{\theta_N}{2} |-, N+1\rangle, \quad (3.18)$$

en donde

$$\cos \frac{\theta_N}{2} = \sqrt{\frac{R_N + \delta}{2R_N}}, \quad \sin \frac{\theta_N}{2} = \sqrt{\frac{R_N - \delta}{2R_N}}, \quad \tan \theta_N = \frac{\Omega_N}{\delta}.$$

Los estados (3.17) y (3.18) son conocidos como estados “vestidos” (“Dressed States” en inglés) y son estados entrelazados (no pueden ser escritos como estados producto) del sistema átomo-campo.

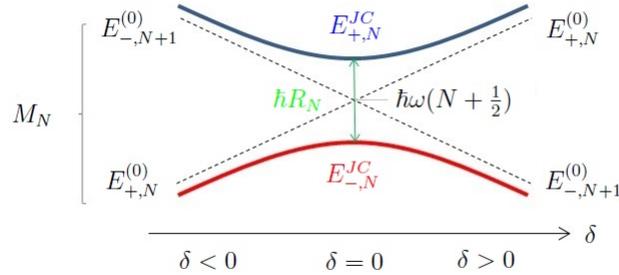


Figura 3.4: En esta figura se ilustra como se comportan las energías en la ecuación (3.16) en función del parámetro de resonancia ($\delta = \Omega - \omega$). Observamos que las energías del sistema desacoplado se cruzan en resonancia mientras que el espectro energético del modelo de JC no, además cuando $|\delta| \gg 1$ estos valores tienden a los del sistema desacoplado.

Cuando nos encontramos exactamente en resonancia los estados en (3.17) y (3.18) se reducen a

$$|\Psi_{\pm,N}^{JC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, N\rangle \pm |-, N+1\rangle),$$

y tenemos el máximo de entrelazamiento.

El término de interacción, resultado de la RWA, produce una transformación unitaria en la base de H_0 . Esta transformación es equivalente a una rotación de $\theta_N/2$ en los estados de cada doblete (M_N).

Como se mencionó antes, para fines de este trabajo sólo estudiaremos las energías y eigenestados del sistema; no abundaremos en detalles dinámicos; sin embargo, vale la pena mencionar los siguientes:

- Oscilaciones de Rabi.

Supongamos que el sistema se encuentra en el estado inicial $|+, N\rangle$. En resonancia, la probabilidad de ocupación de los niveles del MJC oscila a la frecuencia de Rabi ($\Omega_N = 2g\sqrt{N+1}$). A esta frecuencia el átomo y el campo intercambian un fotón y este proceso es conocido como Oscilaciones de Rabi.

- Oscilaciones de Rabi del vacío.

Consideremos el caso en que el sistema se encuentra en el estado puro $|+, 0\rangle$, es decir, el átomo se encuentra en el estado excitado y la cavidad se encuentra en el estado vacío $|0\rangle$ (ningún fotón). En este caso, la dinámica se desarrolla en el subespacio formado por los estados $|+, 0\rangle$ y $|-, 1\rangle$. Si calculamos la probabilidad de ocupación de los estados, ésta oscila con una frecuencia de Rabi $\Omega_0 = 2g$ entre ambos estados, es decir, existe una probabilidad de que el átomo emita un fotón de manera espontánea y lo intercambie con la cavidad reversiblemente (en contraste con la irreversibilidad de la emisión espontánea en el espacio libre).

- Colapsos y reanimaciones.

Los colapsos se dan bajo ciertas condiciones en donde las probabilidades de ocupación que oscilan a la frecuencia de Rabi interfieren destructivamente y colapsan. Se distribuyen equitativamente 50% de probabilidad para cada estado con pequeñas fluctuaciones. Este fenómeno exhibe un efecto clásico. Por otro lado, las reanimaciones

son periodos de tiempo en donde dos oscilaciones de Rabi de frecuencias cercanas interfieren constructivamente. Este fenómeno está asociado con el carácter granular de la luz.

El MJC actualmente sigue siendo utilizado debido a la simplicidad analítica que posee sumado con la precisión que ofrece. Recientemente han estado apareciendo sistemas cuánticos y opto-mecánicos cuyos hamiltonianos se puede decir que son del tipo Jaynes-Cummings, en el sentido de que son susceptibles a realizarles la RWA, aunque no necesariamente tenga la forma de la ecuación (2.18). Dos ejemplos de estos hamiltonianos podemos encontrarlos en las referencias [35, 36]. El primero es un sistema híbrido que combina la electrodinámica cuántica de cavidades y la optomecánica. Consta de un átomo de dos niveles acoplado a un modo fotónico en una cavidad y a un resonador nanomecánico. El segundo ejemplo consta de un punto cuántico en un nanotubo suspendido capaz de vibrar. En ambos ejemplos es posible realizar la RWA.

Capítulo 4

Régimen de acoplamiento ultra profundo

4.1 Regímenes de acoplamiento del Modelo Cuántico de Rabi

En este capítulo vamos a tratar un método aproximado en donde no existe ninguna relación de orden entre las frecuencias del sistema (Ω y ω); sin embargo, la aproximación está diseñada para funcionar en un régimen de acoplamiento más allá del ultra fuerte. Este régimen es conocido en inglés como “deep strong coupling”; basados en este nombre, en este trabajo nos referiremos a él como régimen de “acoplamiento ultra profundo”.

Antes de continuar vale la pena detenernos y analizar cada uno de los regímenes más importantes del HCR. Se identifican 4 regímenes importantes relacionados con el HCR (incluyendo el régimen ultra profundo) [13]. A continuación se enlistan

- El primero de ellos es el régimen de acoplamiento débil. Este régimen sucede cuando $g \ll \gamma, \kappa, \Omega$ y ω . Aquí κ y γ son los parámetros de decaimiento de la cavidad electromagnética y del átomo, respectivamente. En este régimen los términos anti-resonantes son pequeños y el MJC funciona perfectamente, sólo tenemos que tener cuidado con

la decoherencia ya que esto evita que ocurra la dinámica coherente del MJC.

- El segundo régimen es el de acoplamiento fuerte. Este sucede cuando $\gamma, \kappa \ll g \ll \Omega, \omega$. Aquí el sistema puede absorber y emitir fotones (coherentemente) las veces que sea sin pérdidas por la cavidad o emisión espontánea. En este régimen también funciona perfectamente el MJC.
- El tercero es el régimen de acoplamiento ultra fuerte. Este sucede cuando g es lo suficientemente grande como para competir con las frecuencias del sistema pero no mas grande que ellas, es decir, $g \lesssim \omega$. Aquí el MJC deja de tener validez y puede resultar útil la aproximación adiabática (ver capítulo 5) o la aproximación de onda rotante generalizada (ver capítulo 6).
- El último de ellos es el régimen de acoplamiento ultra profundo y se requiere $g \gtrsim \omega$. En este régimen suceden muchos fenómenos contraintuitivos como la excitación o de-sexcitación simultánea del átomo y el campo; además, conceptos como las oscilaciones de Rabi ya no resultan útiles y se deben dejar de lado ya que intervienen nuevos fenómenos como el movimiento de los paquetes de fotones a través de cadenas de paridad. Recientemente fue explorada experimentalmente la dinámica en este régimen mediante un análogo fotónico que simula un átomo de dos niveles en una cavidad electromagnética [37].

4.2 Cadenas de paridad

En esta sección estudiaremos el Modelo Cuántico de Rabi en el régimen de acoplamiento ultra profundo, particularmente cuando $\frac{g}{\omega} \gtrsim 1$. En este régimen el MCR y los tratamientos perturbativos no se pueden aplicar directamente debido a que el acoplamiento es comparable con las frecuencias del sistema [38].

Se ha notado que el espacio de Hilbert del hamiltoniano (2.18) se divide en dos “cadenas

de paridad” independientes, en donde los paquetes de fotones están restringidos a moverse por cada una de estas cadenas. Consideremos el operador de paridad $\Pi = -e^{ih(a^\dagger a + \sigma_z)} = -\sigma_z(-1)^{N_a}$ en donde $N_a = N = a^\dagger a$ (por cuestiones de conveniencia le agregaremos el subíndice a).

El operador Π conmuta con H ($[\Pi, H] = 0$) y además cumple con lo siguiente

$$\Pi |\pm, N_a\rangle = -\sigma_z(-1)^{N_a} |\pm, N_a\rangle = \mp(-1)^{a^\dagger a} |\pm, N_a\rangle, \quad (4.1)$$

en donde $|\pm, N_a\rangle = |\pm, N\rangle$ es la base de H_0 .

De la ecuación (4.1) pueden distinguirse cuatro casos con dos paridades distintas como se muestra a continuación

$$\textit{Paridad positiva (+)} \begin{cases} \Pi |-, N_a(\textit{par})\rangle = + |-, N_a(\textit{par})\rangle \\ \Pi |+, N_a(\textit{impar})\rangle = + |+, N_a(\textit{impar})\rangle \end{cases}$$

$$\textit{Paridad negativa (-)} \begin{cases} \Pi |-, N_a(\textit{impar})\rangle = - |-, N_a(\textit{impar})\rangle \\ \Pi |+, N_a(\textit{par})\rangle = - |+, N_a(\textit{par})\rangle \end{cases}$$

o bien, $\Pi |p\rangle = p |p\rangle$ con $p = \pm 1$.

Esto significa que el espacio de Hilbert consiste de dos subespacios desconectados, uno con paridad positiva tal que $\langle -, N_a(\textit{par}) | \Pi |-, N_a(\textit{par})\rangle = \langle +, N_a(\textit{impar}) | \Pi |+, N_a(\textit{impar})\rangle = +1$, que involucra los estados $|-, 0_a\rangle, |+, 1_a\rangle, |-, 2_a\rangle, |+, 3_a\rangle, \dots$; y otro con paridad negativa tal que $\langle -, N_a(\textit{impar}) | \Pi |-, N_a(\textit{impar})\rangle = \langle +, N_a(\textit{par}) | \Pi |+, N_a(\textit{par})\rangle = -1$, que involucra a los estados $|+, 0_a\rangle, |-, 1_a\rangle, |+, 2_a\rangle, |-, 3_a\rangle, \dots$

Los anteriores estados se encuentran conectados en la misma cadena mediante los términos resonantes o anti-resonantes. Por ejemplo, en la cadena positiva el término anti-resonante $\sigma_+ a^\dagger$ está relacionado con la transición $| -2_a \rangle \rightarrow | +3_a \rangle$, mientras que el término resonante $\sigma_+ a$ está relacionado con la transición $| +1_a \rangle \leftarrow | -2_a \rangle$ en la cadena negativa (figura 4.1).

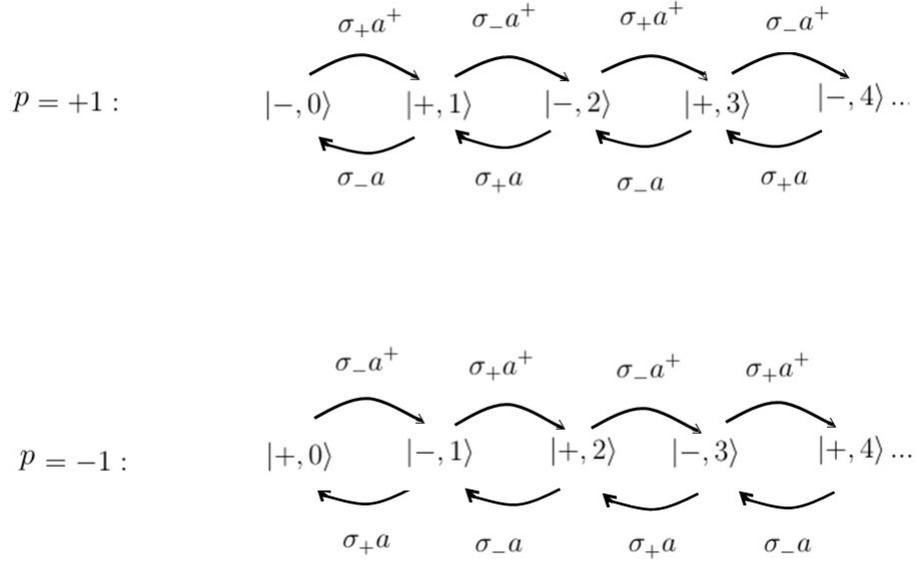


Figura 4.1: Cadenas de paridad del HCR. En esta figura observamos las cadenas de paridad positiva y negativa del HCR y cómo se encuentran conectados los estados por los términos resonantes o anti-resonantes.

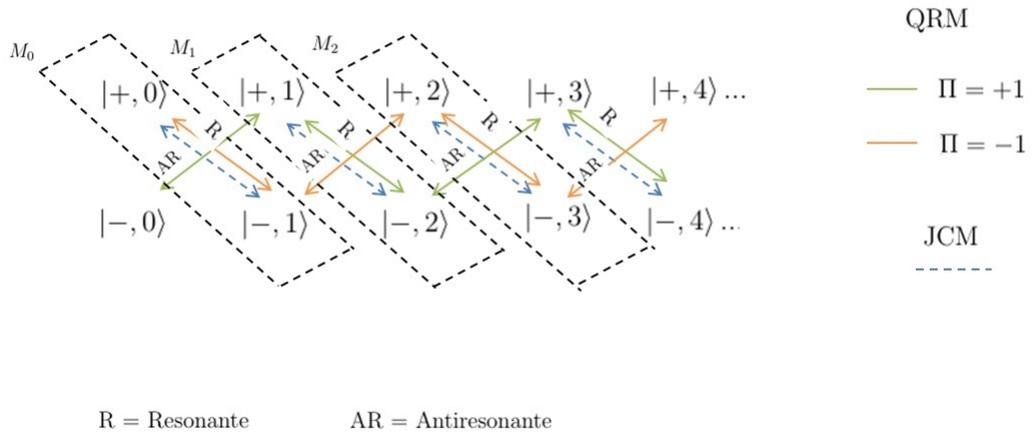


Figura 4.2: Cadenas de paridad del HCR y bloques del MJC. En esta figura observamos, al igual que en la figura 4.1, cómo están conectadas las cadenas de paridad mediante los términos resonantes o anti-resonantes. También distinguimos los bloques formados en el MJC, los cuales van alternando su paridad conforme nos pasamos del subespacio M_N al M_{N+1} o viceversa y sólo se conectan estados mediante los términos resonantes.

En el MJC estas cadenas de paridad se rompen partiendo el espacio de Hilbert en subespacios formado por dobletes de la forma $|+, N_a\rangle$ y $|-, (N+1)_a\rangle$ con el estado base aislado de los demás estados (ver figura 4.2).

4.3 Eigenvalores y eigenfunciones

Definimos la base de paridad $|p, N_b\rangle$, en donde p toma los valores de $+$ o $-$.

Sea $b = \sigma_x a$ y su conjugado hermítico $b^\dagger = \sigma_x a^\dagger$. Estos operadores cumplen la siguiente ecuación de eigenvalores $b^\dagger b |N_b\rangle = N_b |N_b\rangle$, además $b |p, N_b\rangle = \sqrt{N_b} |p, N_b - 1\rangle$ y $b^\dagger |p, N_b\rangle = \sqrt{N_b + 1} |p, N_b + 1\rangle$.

En términos de los operadores b y Π es posible escribir el HCR como sigue

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega b^\dagger b + \hbar g(b + b^\dagger) - \hbar \frac{\Omega}{2} (-1)^{b^\dagger b} \Pi \\ &= \hbar\omega \left(b^\dagger + \frac{g}{\omega}\right) \left(b + \frac{g}{\omega}\right) - \frac{\hbar g^2}{\omega} - \hbar \frac{\Omega}{2} (-1)^{b^\dagger b} \Pi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este hamiltoniano conmuta con el operador de paridad Π , y para cada cadena de paridad hay un hamiltoniano independiente que describe a un mismo oscilador armónico desplazado de frecuencia ω con una perturbación $(-\hbar \frac{\Omega}{2} (-1)^{b^\dagger b} \Pi)$.

Definimos el operador de desplazamiento de posición dependiente de espín como

$$D_s(\pm\epsilon\sigma_x) = e^{\mp\sigma_x\epsilon(a^\dagger - a)} = e^{\mp\epsilon(b^\dagger - b)}. \quad (4.3)$$

Si utilizamos el lema de Baker-Hausdorff¹ [39] es posible demostrar que este operador tiene el efecto de desplazar b y b^\dagger una cantidad $\pm\epsilon$, como se muestra a continuación

$$D_s(\pm\epsilon\sigma_x) b D_s^\dagger(\pm\epsilon\sigma_x) = b \mp \epsilon[(b^\dagger - b), b] = b \pm \epsilon, \quad (4.4)$$

¹ $e^{i\lambda X} Y e^{-i\lambda X} = Y + i\lambda[X, Y] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [X, [X, Y]] + \dots$

$$D_s(\pm\epsilon\sigma_x)b^\dagger D_s^\dagger(\pm\epsilon\sigma_x) = b^\dagger \mp \epsilon[(b^\dagger - b), b^\dagger] = b^\dagger \pm \epsilon. \quad (4.5)$$

De esta manera, es posible escribir el hamiltoniano (4.2) como sigue

$$H = \hbar\omega D_s \left(\frac{g}{\omega} \sigma_x \right) b^\dagger b D_s^\dagger \left(\frac{g}{\omega} \sigma_x \right) - \frac{\hbar g^2}{\omega} - \hbar \frac{\Omega}{2} (-1)^{b^\dagger b} \Pi. \quad (4.6)$$

Con el fin de diagonalizar el primer término de (4.6) es conveniente realizar la siguiente transformación unitaria $H' = D_s^\dagger \left(\frac{g}{\omega} \sigma_x \right) H D_s \left(\frac{g}{\omega} \sigma_x \right)$. Esto nos lleva al siguiente hamiltoniano

$$H' = \hbar\omega b^\dagger b - \frac{\hbar g^2}{\omega} - \hbar \frac{\Omega}{2} D_s^\dagger \left(\frac{g}{\omega} \sigma_x \right) \left[(-1)^{b^\dagger b} \Pi \right] D_s \left(\frac{g}{\omega} \sigma_x \right). \quad (4.7)$$

El hamiltoniano (4.7) posee los mismos eigenvalores que (4.6) y se encuentra de una forma más conveniente para tratarlo perturbativamente.

Si utilizamos el operador (4.3) en su forma matricial

$$D_s(\pm\epsilon\sigma_x) = e^{\mp\sigma_x\epsilon(a^\dagger - a)} = \begin{pmatrix} \cosh(\epsilon) & \mp \sinh(\epsilon) \\ \mp \sinh(\epsilon) & \cosh(\epsilon) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

es fácil demostrar que $D_s^\dagger(\pm\epsilon\sigma_x)\sigma_z D_s(\pm\epsilon\sigma_x) = \sigma_z D_s(\pm 2\epsilon\sigma_x)$, así podemos escribir (4.7) de la siguiente manera

$$H' = \hbar\omega b^\dagger b - \frac{\hbar g^2}{\omega} - \hbar \frac{\Omega}{2} (-1)^{b^\dagger b} \Pi D_s \left(\frac{2g}{\omega} \sigma_x \right), \quad (4.9)$$

El operador (4.3) diagonalizó al oscilador armónico desplazado que teníamos en (4.2); sin embargo, agregó un factor extra ($D_s(\frac{2g}{\omega}\sigma_x)$) a la perturbación. Para encontrar los eigenvalores utilizamos la teoría de perturbaciones independiente del tiempo, en donde los dos primeros términos son la parte del hamiltoniano cuyos eigenvalores conocemos ($\hbar\omega N_b - \hbar g^2/\omega = \langle p, N_b | (\hbar\omega b^\dagger b - \hbar g^2/\omega) | p, N_b \rangle$) y como se dijo antes, el último término es la perturbación.

La energía puede ser aproximada en series de Ω/ω de la siguiente manera

$$E_{p,N_b}^{approx}/\hbar \approx \omega N_b - g^2/\omega - \frac{\Omega}{2} p (-1)^{N_b} \Delta_{N_b N_b} + \sum_{M_b \neq N_b} \frac{\Omega^2}{4\omega(N_b - M_b)} |\Delta_{N_b M_b}|^2 + O(\Omega^3/\omega^3), \quad (4.10)$$

y sus eigenestados como

$$|\Psi_{p,N_b}^{approx}\rangle = |p, N_b\rangle + \sum_{M_b \neq N_b} \frac{\Omega p (-1)^{N_b}}{2\omega(N_b - M_b)} \Delta_{N_b, M_b} |p, M_b\rangle + O(\Omega^2/\omega^2), \quad (4.11)$$

en donde $\Delta_{N_b M_b} = \langle N_b | D(\frac{2g}{\omega} \sigma_x) | M_b \rangle$.

Observamos un desplazamiento en las energías del oscilador armónico desplazado debido a la correcciones inducidas por el término de paridad que actúa como una perturbación, este formalismo es válido cuando $\frac{g}{\omega} \gtrsim 1$, precisamente en el régimen ultra profundo.

La barrera entre el régimen fuerte y el ultra profundo aún es difusa. El régimen intermedio (ultra fuerte) suele tratarse como el primero con correcciones de altos órdenes. El modelo previamente definido provee un marco teórico para el estudio del régimen ultra profundo en el que se revelan nuevos fenómenos que no están presentes en el MJC tales como: colapsos y reanimaciones en donde no necesariamente se parte de un estado coherente, rebotes en la propagación de los paquetes de fotones a través de las cadenas de paridad y contrapropagaciones de los paquetes de fotones que a su vez producen interferencias en la propagación. Al igual como el MJC es considerado un modelo intuitivo en el régimen fuerte (cuando el acoplamiento es débil), este método tiene esas características en el régimen ultra profundo.

Capítulo 5

Aproximación adiabática

5.1 Oscilador armónico desplazado

Con el avance en construcción y manipulación de sistemas de estado sólido y dispositivos microfabricados, se ha revelado una similitud en la dinámica de estos últimos con algunos sistemas óptico cuánticos. Esta similitud se basa en describir sistemas de estado sólido mediante el mismo modelo matemático que sistemas óptico cuánticos. Tal es el caso del sistema llamado en inglés “Cooper-pair box” acoplado a un resonador nanomecánico [40, 41]. Este sistema de estado sólido puede ser descrito utilizando el Hamiltoniano Cuántico de Rabi, pero permitiéndonos tener acceso a otros valores en los parámetros fuera del rango de aplicabilidad de la RWA [42]. A manera de comparación, la fuerza de acoplamiento de un átomo en una cavidad es del orden de $g/\omega = 10^{-7} - 10^{-6}$ [43, 44], mientras que como lo han demostrado algunos experimentos, la fuerza de acoplamiento en los sistemas de estado sólido puede ser del orden de $g/\omega = 10^{-3}$ [45, 46]. Esto hace necesario y justificado el desarrollo de nuevas aproximaciones teóricas para la exploración de estos nuevos regímenes.

Comúnmente, en el contexto de estado sólido, el HCR es utilizado de la siguiente manera:

$$H_{\pi/2} = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_x + g\sigma_z(a + a^\dagger). \quad (5.1)$$

Este hamiltoniano, a diferencia de (2.18), posee una rotación de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje de cuantización y , mediante la transformación $e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_y/2} H e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_y/2}$; sin embargo, por tratarse de una transformación unitaria, no se ven alterados los eigenvalores del mismo. En adelante utilizaremos (5.1) como base para nuestros cálculos y por simplicidad lo denotaremos como H .

En el capítulo 2 encontramos que cuando el HCR se encuentra desacoplado ($g = 0$) posee una solución analítica exacta relativamente sencilla de calcular. Existe otro caso particular en donde sucede lo mismo, esto es, cuando la frecuencia atómica de transición es cero ($\Omega = 0$). Bajo esta condición el término atómico (que ahora es $H_A = \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_x$) desaparece y resulta un hamiltoniano fácil de diagonalizar

$$H_{\Omega=0} = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g \sigma_z (a^\dagger + a). \quad (5.2)$$

Este caso resulta particularmente importante debido a que, al igual que como H_0 fue utilizado para derivar el MJC, $H_{\Omega=0}$ nos ayudará a derivar una nueva aproximación válida fuera del régimen de aplicabilidad de la RWA, es decir, acoplamiento débil y resonancia.

Consideremos eigenestados de la forma $|\pm, N_\pm\rangle = |\pm\rangle \otimes |N_\pm\rangle$ para (5.2), en donde $|\pm\rangle$ son los eigenestados de σ_z y $|N_\pm\rangle$ son los eigenestados del operador $\langle \pm | H_{\Omega=0} | \pm \rangle$ en la base de espín. La ecuación de eigenvalores para $H_{\Omega=0}$ resulta

$$H_{\Omega=0} |\pm, N_\pm\rangle = [\hbar\omega a^\dagger a + \hbar g \sigma_z (a^\dagger + a)] |\pm, N_\pm\rangle = E^{\Omega=0} |\pm, N_\pm\rangle. \quad (5.3)$$

Con el fin de conocer los estados $|N_\pm\rangle$ y las energías $E^{\Omega=0}$, proyectamos $H_{\Omega=0}$ en la base de σ_z ($|\pm\rangle$) y nos olvidamos por el momento de estos estados en la ecuación de eigenvalores como se muestra a continuación

$$\hbar\omega a^\dagger a \pm \hbar g (a^\dagger + a) |N_\pm\rangle = E^{\Omega=0} |N_\pm\rangle, \quad (5.4)$$

es posible factorizar la ecuación anterior como sigue

$$\left[\hbar\omega \left(a^\dagger \pm \frac{g}{\omega} \right) \left(a \pm \frac{g}{\omega} \right) \right] |N_\pm\rangle = \left(E^{\Omega=0} - \frac{\hbar g^2}{\omega} \right) |N_\pm\rangle. \quad (5.5)$$

El operador unitario de desplazamiento [47] definido de la siguiente forma

$$D(\pm\nu) = e^{\pm\nu(a^\dagger - a)}, \quad (5.6)$$

tiene el efecto de desplazar los operadores a y a^\dagger una cantidad constante $\pm\nu$ de la siguiente manera $D^\dagger(\pm\nu)aD(\pm\nu) = a \pm \nu$ y $D^\dagger(\pm\nu)a^\dagger D(\pm\nu) = a^\dagger \pm \nu$, por lo tanto podemos reescribir la ecuación (5.5) como

$$[\hbar\omega D^\dagger(\pm g/\omega) a^\dagger a D(\pm g/\omega)] |N_\pm\rangle = \left(E^{\Omega=0} - \frac{\hbar g^2}{\omega} \right) |N_\pm\rangle. \quad (5.7)$$

A continuación vamos a demostrar que el lado izquierdo de la ecuación anterior representa a un oscilador armónico cuántico desplazado de su origen una cantidad $\pm g/\omega$.

Consideremos un oscilador armónico cuántico caracterizado por el Hamiltoniano (5.8)

$$H_{os} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2, \quad (5.8)$$

en donde P es el operador de momento, X es el operador de posición, m la masa asociada a este oscilador y ω su frecuencia.

Introducimos las unidades naturales del sistema

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}},$$

por lo tanto las variables adimensionales de posición y momento son

$$X_0 = \frac{X}{x_0}, \quad P_0 = \frac{P}{p_0},$$

utilizando estas nuevas variables la expresión (5.8) se convierte en

$$H_{os} = \hbar\omega [P_0^2 + X_0^2].$$

Definimos el operador no-hermitiano $a = X_0 + iP_0$ y su conjugado $a^\dagger = X_0 - iP_0$ (operadores de aniquilación y creación), con relación de conmutación $[a, a^\dagger] = 1$.

Podemos expresar los operadores de momento y posición en términos de estos de la siguiente manera

$$X_0 = \frac{a + a^\dagger}{2}, \quad P_0 = i\frac{a^\dagger - a}{2},$$

por lo que la expresión (5.8) en estas nuevas variables se transforma en

$$H_{os} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).$$

El término constante $\hbar\omega/2$ es la energía de punto cero y como se mencionó en el capítulo 2 puede ser eliminado redefiniendo el origen en el espectro de energías, por lo tanto el hamiltoniano efectivo del oscilador armónico resulta

$$H_{os} = \hbar\omega (a^\dagger a). \tag{5.9}$$

Podemos realizar una transformación unitaria de desplazamiento sobre este hamiltoniano utilizando el operador $D(g/\omega)$ y así obtener una expresión que es igual al lado izquierdo de la ecuación (5.7). Bajo esta transformación el operador de momento asociado al oscilador no se ve afectado

$$P' = D^\dagger(\pm g/\omega)PD(\pm g/\omega) = P, \tag{5.10}$$

sin embargo, el nuevo operador de posición si, y es de la siguiente forma

$$X' = D^\dagger(\pm g/\omega)XD(\pm g/\omega), \tag{5.11}$$

si continuamos desarrollando esta ecuación llegamos a

$$X' = 2x_0 \left[\frac{(a \pm g/\omega) + (a^\dagger \pm g/\omega)}{2} \right] = X \pm 2(g/\omega)x_0,$$

Aquí observamos que el nuevo operador de posición está desplazado una cantidad $\pm 2(g/\omega)x_0$ respecto al operador de posición original. La transformación de desplazamiento tuvo el efecto de desplazar el oscilador armónico de su punto de equilibrio.

Esto puede ser visto también desde la forma del operador de desplazamiento ($D(\nu) = e^{\nu(a^\dagger - a)}$), usando la relación $x_0 p_0 = \hbar/2$ es posible escribirlo como sigue

$$D(\pm\nu) = e^{-i(\pm\nu P/p_0)} = e^{-i(\pm 2x_0\nu P/\hbar)},$$

lo que evidencia que $D(\pm\nu)$ es una traslación de $\pm 2x_0\nu$, o en nuestro caso de $\pm 2(g/\omega)x_0$.

Ahora bien, para encontrar los eigenvalores del oscilador armónico desplazado, basta con recordar que el operador de número de fotones ($\hat{N} = a^\dagger a$) cumple con la siguiente ecuación

$$a^\dagger a |N\rangle = N |N\rangle, \quad (5.12)$$

en donde $|N\rangle$ es la base del operador de número de fotones (Base de Fock) y $N=0,1,2,3,\dots$

Si utilizamos las propiedades del operador unitario $D(\pm g/\omega)$ transformamos la ecuación anterior en la siguiente

$$D^\dagger(\pm g/\omega) a^\dagger a D(\pm g/\omega) D^\dagger(\pm g/\omega) |N\rangle = N D^\dagger(\pm g/\omega) |N\rangle, \quad (5.13)$$

al comparar la ecuación (5.13) con la (5.7) encontramos que los estados de oscilador armónico desplazado son de la siguiente manera

$$|N_\pm\rangle = D^\dagger(\pm g/\omega) |N\rangle = e^{\mp(g/\omega)(a^\dagger - a)} |N\rangle. \quad (5.14)$$

Los eigenestados de $H_{\Omega=0}$ resultan entonces

$$|\pm, N_{\pm}\rangle = |\pm\rangle \otimes e^{\mp(g/\omega)(a^{\dagger}-a)} |N\rangle \quad (5.15)$$

y su espectro de energías correspondiente es

$$E_N^{\Omega=0} = E^{\Omega=0} = \hbar\omega \left(N - \frac{g^2}{\omega} \right), \quad (5.16)$$

con $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

En la figura 5.1 observamos una representación de los potenciales de los osciladores armónicos desplazados y sus respectivas energías para cada estado.

Los estados (5.15) y sus respectivas energías son las soluciones analíticas a un caso particular del HCR (cuando $\Omega = 0$).

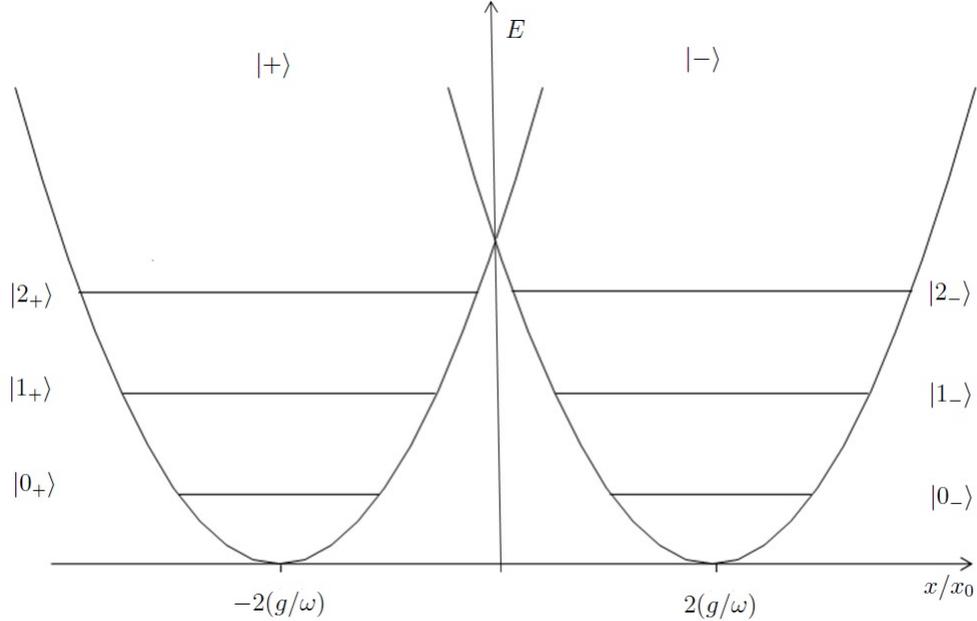


Figura 5.1: Espectro de energías de los osciladores armónicos desplazados (5.16). Cada oscilador está desplazado una cantidad proporcional a g/ω y se encuentran degenerados en energía para un mismo valor de N .

Es importante notar que los estados de oscilador armónico desplazado (5.14) cumplen $\langle M_+ | N_+ \rangle = \delta_{MN}$ y $\langle M_- | N_- \rangle = \delta_{MN}$, pero no son mutuamente ortogonales y su traslape esta dado de la siguiente manera

$$\langle M_- | N_+ \rangle = e^{-2g^2/\omega^2} (-2g/\omega)^{M-N} \sqrt{N!/M!} L_N^{M-N} (4g^2/\omega^2) \quad (5.17)$$

para $M \geq N$ y

$$\langle M_- | N_+ \rangle = e^{-2g^2/\omega^2} (2g/\omega)^{N-M} \sqrt{M!/N!} L_M^{N-M} (4g^2/\omega^2) \quad (5.18)$$

para $M < N$, en donde L_i^j son los polinomios asociados de Laguerre.

5.2 Solución en el límite cuasi-degenerado ($\Omega \ll \omega$)

A continuación vamos a tratar el caso del HCR en el que la frecuencia del oscilador (ω) es mucho más grande que la frecuencia de transición atómica (Ω). Esta aproximación también es conocida como “aproximación adiabática en el límite de degeneración atómico”, y describe un régimen fuera del rango de aplicabilidad del MJC en donde el acoplamiento (g) puede llegar a ser hasta del orden de la frecuencia del oscilador ($g \simeq \omega$).

Consideremos la eigenbase de $H_{\Omega=0}$ obtenida en la sección anterior

$$|\pm, N_{\pm}\rangle, \quad (5.19)$$

con sus respectivas energías

$$E_N^{\Omega=0} = \hbar\omega \left(N - \frac{g^2}{\omega} \right). \quad (5.20)$$

Como se dijo antes, en la aproximación adiabática. Esta base jugará el mismo papel que la base de H_0 ($|\pm, N\rangle$) en la RWA y al igual que el término de interacción (H_I), el término atómico (H_A) será reintroducido al hamiltoniano como una perturbación para romper la

degeneración energética de la parte del Hamiltoniano que para este caso se considera no perturbada ($H_{\Omega=0}$).

Escribimos el HCR en la base (5.19) como sigue

$$\begin{aligned}\langle S', M_{S'} | H | S, N_S \rangle &= \langle S', M_{S'} | H_{\Omega=0} | S, N_S \rangle + \langle S', M_{S'} | H_A | S, N_S \rangle \\ &= E_N^{\Omega=0} \delta_{S S'} \delta_{M N} + (1 - \delta_{S' S}) \frac{\hbar \Omega}{2} \langle M_{S'} | N_S \rangle.\end{aligned}$$

en donde se utilizó la ortonormalidad $\langle M_S | N_S \rangle = \delta_{M, N}$, con $S=+, -$. La correspondiente matriz tiene la forma

$$H = \begin{pmatrix} E_0^{\Omega=0} & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 0_+ | 0_- \rangle & 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 0_+ | 1_- \rangle & 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 0_+ | 2_- \rangle & \dots \\ \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 0_- | 0_+ \rangle & E_0^{\Omega=0} & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 0_- | 1_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 0_- | 2_+ \rangle & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 1_+ | 0_- \rangle & E_1^{\Omega=0} & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 1_+ | 1_- \rangle & 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 1_+ | 2_- \rangle & \dots \\ \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 1_- | 0_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 1_- | 1_+ \rangle & E_1^{\Omega=0} & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 1_- | 2_+ \rangle & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 2_+ | 0_- \rangle & 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 2_+ | 1_- \rangle & E_2^{\Omega=0} & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 2_+ | 2_- \rangle & \dots \\ \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 2_- | 0_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 2_- | 1_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 2_- | 2_+ \rangle & E_2^{\Omega=0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

en donde el ordenamiento de renglones y columnas sigue la secuencia $|+, 0_+\rangle, |-, 0_-\rangle, |+, 1_+\rangle, |-, 1_-\rangle, \dots$.

Los elementos matriciales que contienen estados del mismo oscilador armónico son nulos (excepto si el estado es el mismo, ej. $\langle N_+ |$ y $|N_+\rangle$), los estados $|N_+\rangle$ y $|N_-\rangle$ no son ortogonales y su traslape está dado por las ecuaciones (5.17) y (5.18).

Es conveniente reescribir la matriz anterior de otra manera, si utilizamos la identidad $\langle M_- | N_+ \rangle = (-1)^{N-M} \langle N_- | M_+ \rangle$ junto con el hecho de que $\langle M_- | N_+ \rangle$ es un número real, encontramos que $\langle M_+ | N_- \rangle = (-1)^{M-N} \langle M_- | N_+ \rangle$ y con estas relaciones llegamos a la siguiente matriz

$$H = \begin{pmatrix} E_0^{\Omega=0} & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 0_- | 0_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 1_- | 0_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 0_+ \rangle & \dots \\ \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 0_- | 0_+ \rangle & E_0^{\Omega=0} & -\frac{\hbar\Omega}{2} \langle 1_- | 0_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 0_+ \rangle & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\hbar\Omega}{2} \langle 1_- | 0_+ \rangle & E_1^{\Omega=0} & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 1_- | 1_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 1_+ \rangle & \dots \\ \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 1_- | 0_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 1_- | 1_+ \rangle & E_1^{\Omega=0} & -\frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 1_+ \rangle & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 0_+ \rangle & 0 & -\frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 1_+ \rangle & E_2^{\Omega=0} & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 2_+ \rangle & \dots \\ \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 0_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 1_+ \rangle & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 2_+ \rangle & E_2^{\Omega=0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

De manera similar que en la RWA, la aproximación adiabática consiste en truncar esta matriz de tal manera que la reducimos a una matriz diagonal por bloques como se muestra a continuación

$$H^{ad} = \begin{pmatrix} E_0^{\Omega=0} & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 0_- | 0_+ \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 0_- | 0_+ \rangle & E_0^{\Omega=0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_1^{\Omega=0} & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 1_- | 1_+ \rangle & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 1_- | 1_+ \rangle & E_1^{\Omega=0} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2^{\Omega=0} & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 2_+ \rangle & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle 2_- | 2_+ \rangle & E_2^{\Omega=0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Como resultado de esta aproximación se forman N subespacios, los cuales están dispuestos en dobletes del tipo $|-, N_- \rangle$ y $|+, N_+ \rangle$. Ambos estados se encuentran degenerados energéticamente, y los términos atómicos fuera de la diagonal principal de la matriz que fueron conservados, conectan estos estados en cada subespacio rompiendo la degeneración

energética. Es claro que sólo son permitidas las transiciones entre estados con una misma energía, i.e., un mismo valor de N . Como consecuencia, si el oscilador comenzó en el estado $|+, N_+\rangle$ o $|-, N_-\rangle$, éste estará restringido sólo al subespacio N . Una manera de entender esto es pensar en que los niveles energéticos del oscilador armónico están demasiado espaciados con respecto a los del sistema de dos niveles. Así una transición en éste nunca podrá excitar al oscilador armónico.

La matriz denotada como H^{ad} (ecuación 5.21) representa al Hamiltoniano Cuántico de Rabi en la aproximación adiabática y es posible escribir el N -ésimo bloque de éste como

$$H_N^{ad} = E_N^{\Omega=0} I + \frac{\hbar\Omega}{2} \langle N_- | N_+ \rangle \sigma_x = \begin{pmatrix} E_N^{\Omega=0} & \frac{\hbar\Omega}{2} \langle N_- | N_+ \rangle \\ \frac{\hbar\Omega}{2} \langle N_- | N_+ \rangle & E_N^{\Omega=0} \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Al diagonalizarlo en cualquiera de sus representaciones obtenemos los siguientes eigenestados

$$|\Psi_{\pm, N}^{ad}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, N_+\rangle \pm |-, N_-\rangle), \quad (5.23)$$

en donde sus respectivas energías son de la siguiente forma

$$E_{\pm, N}^{ad} = E_N^{\Omega=0} \pm \frac{\hbar}{2}\Omega \langle N_- | N_+ \rangle \quad (5.24)$$

Estos eigenestados y energías son resultado de la aproximación adiabática al menor orden en Ω/ω (bloques de 2×2). Vale la pena destacar que en el límite en que g/ω tiende a infinito, el traslape entre los estados se hace cada vez menor, aproximando el espectro energético al de 2 osciladores armónicos desplazados. En la figura 5.2 se muestra cómo se distribuyen energéticamente estos estados.

Si analizamos los elementos matriciales no nulos provenientes del término atómico bajo un esquema perturbativo, observamos que la condición que debe cumplir es

$$\left| \frac{(\hbar\Omega/2)\langle\mp, M_{\mp} | \sigma_z | \pm, N_{\pm}\rangle}{E_M^{\Omega=0} - E_N^{\Omega=0}} \right| \sim \frac{\Omega}{\omega} \ll 1, \quad (5.25)$$

para que el término atómico cumpla las condiciones de pequeñez y sea válido despreciarlo.

En la figura 5.3 observamos una comparación de la aproximación adiabática (5.24) versus la solución numérica para el caso cuando $\Omega/\omega = 1/3$ [42]; en este dominio la aproximación adiabática funciona perfectamente bien y conforme $g/\omega \rightarrow \infty$ la distancia entre los osciladores armónicos se vuelve infinita, por lo tanto, el traslape $\langle N_- | N_+ \rangle \rightarrow 0$ resultando dos osciladores armónicos cuyas energías se encuentran degeneradas.

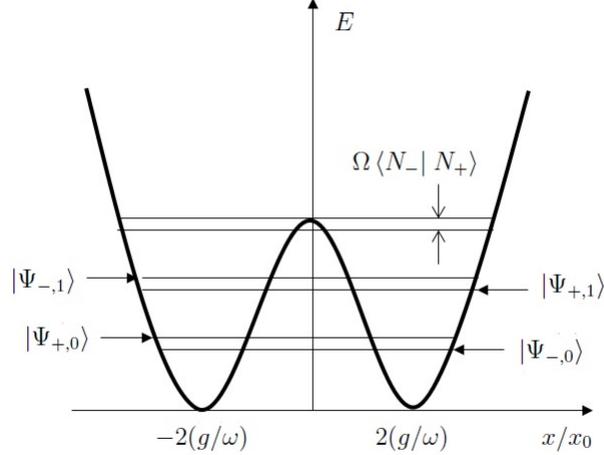


Figura 5.2: Forma en la que se distribuyen los estados (5.23) y el espectro de energías (5.24) de la aproximación adiabática. La diferencia energética entre estados es proporcional al traslape de los estados de oscilador armónico desplazado. Estos estados ahora pueden interactuar mediante los términos fuera de la diagonal que conservamos en esta aproximación.

De la misma manera, en la figura 5.4 comparamos la aproximación adiabática (5.24) con la solución numérica cuando el sistema se encuentra en resonancia ($\Omega = \omega$) [42]. A pesar de no cumplir precisamente las condiciones requeridas por esta aproximación ($\Omega \ll \omega$) observamos que ésta se ajusta razonablemente bien a la solución numérica incluso para valores grandes de g/ω a diferencia de la RWA (figura 5.5) la cual diverge rápidamente.

Por último, en la figura 5.6 observamos la comparación de la aproximación adiabática y la solución numérica para un caso fuera del límite de aplicabilidad de esta misma $\Omega/\omega = 3$ [42].

En general, en las gráficas anteriores observamos que existen múltiples cruces que aparecen entre pares de niveles. Estos cruces son permitidos debido a la conservación del operador de paridad $\Pi = -\sigma_x(-1)^{a^\dagger a}$ en el hamiltoniano de Rabi. Los estados aproximados (5.23) son eigenestados de Π ; esto permite que se crucen los pares de niveles con diferentes eigenvalores de Π , en otras palabras en los puntos de cruce los estados cuánticos de los osciladores armónicos desplazados interfieren destructivamente, atenuando el proceso de tunelaje que permite la mezcla de estados y es causante de la separación energética.

La aproximación adiabática derivada previamente nos ofrece un marco teórico robusto para la exploración del HCR fuera del rango de validez de la RWA, especialmente aplicable en sistemas de estados sólido en donde el término de acoplamiento es varios órdenes de magnitud mayor que el acoplamiento dipolar presente en los sistemas óptico cuánticos.

Con respecto a la dinámica, esta aproximación permite observar los colapsos y renacimientos de las probabilidades de ocupación cuando el estado inicial del sistema es un estado térmico, a diferencia del MJC que posee un comportamiento errático. Además, cuando el estado inicial es un estado coherente encontramos una fuerte dependencia respecto del parámetro de acoplamiento y la amplitud inicial de los estados de oscilador en la dinámica del sistema [42].

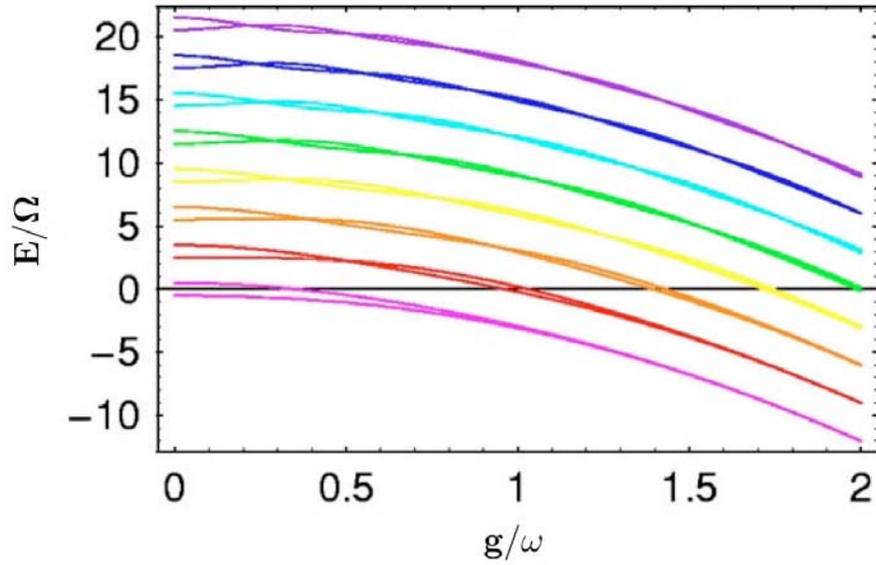


Figura 5.3: Comparación entre la aproximación adiabática (ecuación 5.24) representada por líneas sólidas de colores y la solución numérica de (5.1) representada por líneas punteadas negras para el caso $\Omega/\omega = 1/3$. En esta figura observamos cómo la aproximación adiabática y la solución numérica se empalman incluso en valores pequeños de g/ω y conforme aumenta g/ω los niveles energéticos comienzan a degenerarse. Figura tomada de la referencia [42].

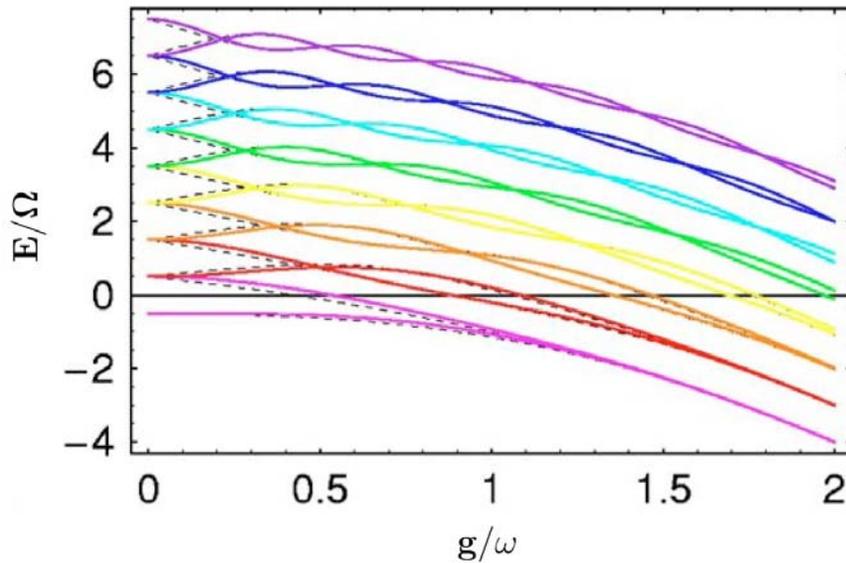


Figura 5.4: Comparación entre la aproximación adiabática (ecuación 5.24) representada por líneas sólidas de colores y la solución numérica de (5.1) representada por líneas punteadas negras para el caso $\Omega/\omega = 1$. En esta figura observamos como la aproximación adiabática sigue siendo precisa incluso en resonancia. Figura tomada de la referencia [42].

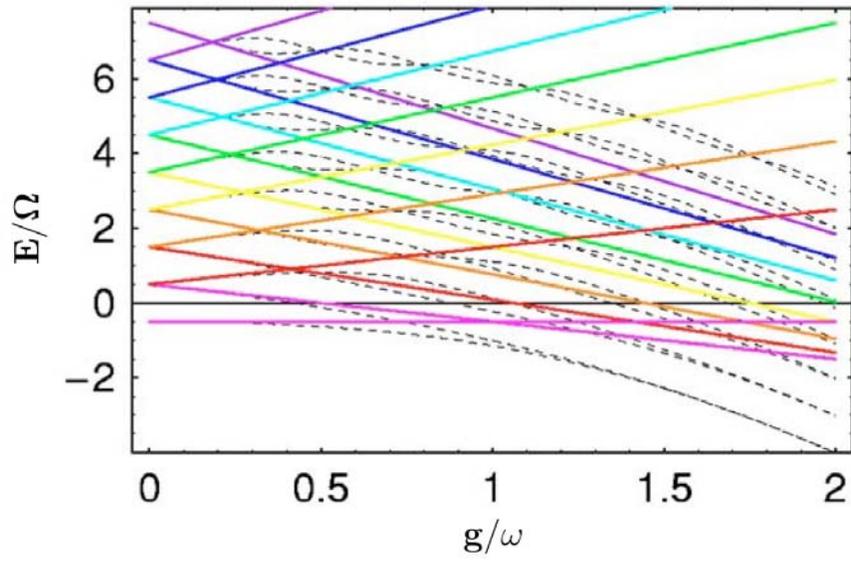


Figura 5.5: Comparación entre la RWA representada por líneas sólidas de colores (ecuación 3.16) y la solución numérica de (5.1) representada por líneas punteadas negras para el caso $\Omega/\omega = 1$. Aquí observamos como la RWA diverge de la solución numérica conforme incrementamos g/ω . Figura tomada de la referencia [42].

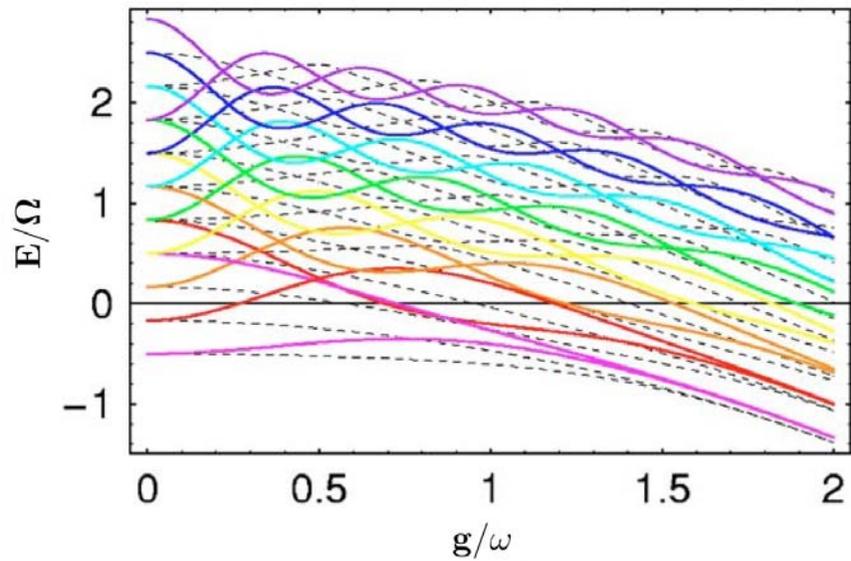


Figura 5.6: Comparación entre la aproximación adiabática (ecuación 5.24) representada por líneas sólidas de colores y la solución numérica de (5.1) representada por líneas punteadas negras para el caso $\Omega/\omega = 3$. En este régimen la aproximación adiabática aunque no reproduce con exactitud el espectro energético, observamos algunas coincidencias en valores muy pequeños o muy grandes de acoplamiento. Figura tomada de la referencia [42].

Capítulo 6

Aproximación de onda rotante generalizada

6.1 Hamiltoniano y eigenvalores

Una versión generalizada de la RWA es la llamada GRWA, por sus siglas en inglés (Generalized Rotating-Wave Approximation). Esta aproximación, a diferencia de la primera, tiene un rango de validez más amplio, ya que permite cualquier intensidad de acoplamiento entre los sistemas y permite más libertad en la condición de cuasi-resonancia en contraste con la RWA [5], con posibles aplicaciones en dispositivos de estado sólido y superconductores [50, 49]; la única diferencia en su derivación respecto a la RWA es un cambio de base previo a eliminar los términos anti-resonantes.

En el capítulo anterior derivamos la Aproximación Adiabática, en donde escribimos el HCR en la base $|\pm, N_{\pm}\rangle$ (ver 5.19) y esto nos llevó a una matriz hamiltoniana susceptible de ser reducida a una matriz diagonal por bloques. En el espíritu de la RWA, despreciamos los términos más alejados de la diagonal principal.

El N-ésimo bloque tenía la forma

$$\begin{pmatrix} E_N^{\Omega=0} & \frac{\hbar}{2}\Omega \langle N_- | N_+ \rangle \\ \frac{\hbar}{2}\Omega \langle N_- | N_+ \rangle & E_N^{\Omega=0} \end{pmatrix},$$

en donde $E_N^{\Omega=0}$ son las energías de $H_{\Omega=0}$ (ecuación 5.20) y $\langle N_- | N_+ \rangle$ el traslape de esta base (ver 5.17 y 5.18). La diagonalización conduce a los estados (5.23) y energías (5.24).

$$|\Psi_{\pm, N}^{ad}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, N_+\rangle \pm |-, N_-\rangle),$$

$$E_{\pm, N}^{ad} = E_N^{\Omega=0} \pm \frac{\hbar}{2}\Omega \langle N_- | N_+ \rangle.$$

La base adiabática (5.23) será utilizada para realizar un cambio de base previo a la GRWA. En ese sentido, cumple la misma función que los estados (5.15) en el caso de la aproximación adiabática o bien, la base del sistema desacoplado (2.20) en el caso de la RWA.

Consideremos los elementos de matriz de (5.1) en la base adiabática.

$$\langle \Psi_{S', M}^{ad} | H | \Psi_{S, N}^{ad} \rangle = E_{S, N}^{ad} \delta_{MN} \delta_{S'S} + \frac{\hbar\Omega}{2} \langle M_- | N_+ \rangle (1 - \delta_{MN}) f_{M-N}(S, S'), \quad (6.1)$$

en donde $S, S' = \pm$ y $f_{M-N}(S, S') = [S' + S(-1)^{M-N}]/2$, esto es

$$f_{M-N}(S, S') = \begin{cases} S\delta_{S, S'}, & (M-N) \text{ par} \\ S'\delta_{S, -S'}, & (M-N) \text{ impar} \end{cases}. \quad (6.2)$$

En forma matricial, según el ordenamiento $|\Psi_{-}^{ad}, 0\rangle, |\Psi_{+}^{ad}, 0\rangle, |\Psi_{-}^{ad}, 1\rangle, |\Psi_{+}^{ad}, 1\rangle, \dots$,

$$H = \begin{pmatrix} E_{-,0}^{ad} & 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2}\Omega'_{0,1} & -\frac{\hbar}{2}\Omega'_{0,2} & \cdots \\ 0 & E_{+,0}^{ad} & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{0,1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{0,1} & E_{-,1}^{ad} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{\hbar}{2}\Omega'_{0,1} & 0 & 0 & E_{+,1}^{ad} & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{1,2} & \cdots \\ -\frac{\hbar}{2}\Omega'_{0,2} & 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{1,2} & E_{-,2}^{ad} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

en donde $\Omega'_{M,N} \equiv \Omega \langle M_- | N_+ \rangle$. Al igual que en la RWA, la GRWA consiste en despreciar los términos más alejados de la diagonal y así reducir la matriz a una forma diagonal por bloques, como se muestra a continuación

$$H_{GRWA} = \begin{pmatrix} E_{-,0}^{ad} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & E_{+,0}^{ad} & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{0,1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{0,1} & E_{-,1}^{ad} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & E_{+,1}^{ad} & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{1,2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{1,2} & E_{-,2}^{ad} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

en donde la energía del estado base $E_{-,0}^{ad}$ queda aislada de los demás bloques y el N-ésimo bloque es de la forma

$$\begin{pmatrix} E_{+,N}^{ad} & \frac{\hbar}{2}\Omega'_{N,N+1} \\ \frac{\hbar}{2}\Omega'_{N,N+1} & E_{-,N+1}^{ad} \end{pmatrix},$$

con $N = 0, 1, 2, 3, \dots$. La diagonalización nos da el siguiente espectro de energías

$$E_{\pm,N}^{GRWA} = \frac{1}{2} (E_{+,N}^{ad} + E_{-,N+1}^{ad}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(E_{+,N}^{ad} - E_{-,N+1}^{ad})^2 + (\hbar\Omega'_{N,N+1})^2}, \quad (6.5)$$

con sus correspondientes eigenestados

$$|\Psi_{+,N}^{GRWA}\rangle = \cos \frac{\alpha_N}{2} |\Psi_{+,N}^{ad}\rangle + \sin \frac{\alpha_N}{2} |\Psi_{-,N+1}^{ad}\rangle, \quad (6.6)$$

$$|\Psi_{-,N}^{GRWA}\rangle = \sin \frac{\alpha_N}{2} |\Psi_{+,N}^{ad}\rangle - \cos \frac{\alpha_N}{2} |\Psi_{-,N+1}^{ad}\rangle, \quad (6.7)$$

en donde

$$\cos \frac{\alpha_N}{2} = \sqrt{\frac{T_N + \Delta}{2T_N}}, \quad \sin \frac{\alpha_N}{2} = \sqrt{\frac{T_N - \Delta}{2T_N}}, \quad \tan \alpha_N = \hbar\Omega'_{N,N+1}/\Delta$$

$$\text{con } \Delta = E_{+,N}^{ad} - E_{-,N+1}^{ad} \text{ y } T_N = \sqrt{(\hbar\Omega'_{N,N+1})^2 + \Delta^2}.$$

Una ventaja de esta aproximación es que permite una magnitud arbitraria del acoplamiento entre los sistemas, a diferencia de la RWA donde estábamos restringidos a acoplamientos débiles; sin embargo, aunque también estamos sujetos a la condición de cuasiresonancia en esta aproximación, la condición es más flexible y permite valores más grandes en la diferencia $\Omega - \omega$, en contraste con la RWA (figura 6.2).

6.2 Términos resonantes y anti-resonantes

No resulta evidente que los términos que conservamos, al igual que en la RWA, corresponden a los de carácter resonante (“que conservan energía”), debido a que la base en la que representamos el hamiltoniano no es la base de H_0 . A continuación analizaremos los términos del hamiltoniano en esta nueva base.

El operador que conecta la base de H_0 (que ahora es $|\pm x, N\rangle$) con la base adiabática ($|\Psi_{\pm,N}^{ad}\rangle$) es

$$D_s \left(\frac{g}{\omega} \sigma_z \right) = e^{-\frac{g}{\omega} \sigma_z (a^\dagger - a)}, \quad (6.8)$$

es decir, $D_s \left(\frac{g}{\omega} \sigma_z \right) |\pm x, N\rangle = |\Psi_{\pm,N}^{ad}\rangle$; este operador es conocido como operador de desplazamiento de posición dependiente de spin y en su forma matricial es

$$D_s \left(\frac{g}{\omega} \sigma_z \right) = \begin{pmatrix} e^{-g/\omega(a^\dagger - a)} & 0 \\ 0 & e^{g/\omega(a^\dagger - a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^\dagger(g/\omega) & 0 \\ 0 & D(g/\omega) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

en donde D es el operador de desplazamiento.

El hamiltoniano (5.1) en esta nueva base ($D^\dagger \left(\frac{g}{\omega} \sigma_z \right) H D \left(\frac{g}{\omega} \sigma_z \right)$) es de la siguiente forma

$$H' = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar}{2} \Omega \sigma_x e^{[-\frac{2g}{\omega} \sigma_z (a^\dagger - a)]}, \quad (6.10)$$

un desarrollo en series de la exponencial permite escribir H' como

$$H' = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar}{2} \Omega \sigma_z + H'_x + H'_y,$$

en donde

$$H'_x = \frac{1}{2} \Omega \sigma_x \left[2 \left(\frac{g}{\omega} \right)^2 (a^\dagger - a)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{g}{\omega} \right)^4 (a^\dagger - a)^4 + \dots \right] = H'_x{}^{(2)} + H'_x{}^{(4)} + \dots$$

y

$$H'_y = \frac{i}{2} \Omega \sigma_y \left[2 \left(\frac{g}{\omega} \right) (a^\dagger - a) + \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\omega} \right)^3 (a^\dagger - a)^3 + \dots \right] = H'_y{}^{(1)} + H'_y{}^{(3)} + \dots$$

Los términos cuadráticos de H'_x en la representación de interacción respecto de H_0 son proporcionales al lado derecho de la siguiente expresión

$$\tilde{H}_x{}^{(2)} = e^{iH_0 t/\hbar} H_x{}^{(2)} e^{-iH_0 t/\hbar} \propto \sigma_x (-2a^\dagger a - 1 + a^{\dagger 2} e^{2i\omega t} + a^2 e^{-2i\omega t}),$$

los primeros dos son independientes del tiempo y corresponden a transiciones de orden cero, es decir, no está involucrada la emisión o absorción de ningún fotón. Estos términos son diagonales en la base adiabática (aparecen en las energías (5.24) como $\pm \frac{1}{2} \Omega \langle N_- | N_+ \rangle$). Los dos términos restantes corresponden a transiciones de orden dos (se absorben o emiten dos fotones) y cerca de resonancia oscilan a frecuencias mayores o iguales a 2ω por lo que bajo

esta aproximación se desprecian.

Al desarrollar los términos de H'_x de orden mayor en la representación de interacción ($\tilde{H}_x^{(4)}, \tilde{H}_x^{(6)}, \dots$), siguen apareciendo términos diagonales que debemos conservar y términos correspondientes a transiciones pares de orden 2 o mayor (2, 4, ...), estos son términos remotos en la matriz (6.3) y en resonancia nos llevan a términos que oscilan con frecuencias mayores a 2ω por lo tanto la GRWA los desprecia.

Por otro lado, los primeros términos de primer orden de H'_y en la representación de interacción son proporcionales a la siguiente expresión

$$\tilde{H}_y^{(1)} \propto a^\dagger \sigma_- e^{i(\omega-\Omega)t} + a \sigma_+ e^{-i(\omega-\Omega)t} - a^\dagger \sigma_+ e^{i(\omega+\Omega)t} - a \sigma_- e^{-i(\omega+\Omega)t}.$$

Observamos en los primeros dos términos transiciones de primer orden (sólo se emite o absorbe un fónon) que en resonancia oscilan lento, por lo tanto bajo la GRWA se conservan. Los otros dos términos restantes se desprecian ya que en resonancia oscilan en 2ω .

Los términos cúbicos de H'_y son de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y^{(3)} \propto & -3\sigma_- a^\dagger (a^\dagger a + 1) e^{i(\omega-\Omega)t} + 3\sigma_+ (a^\dagger a + 1) a e^{-i(\omega-\Omega)t} \\ & -3\sigma_+ a^\dagger (a^\dagger a + 1) e^{i(\omega+\Omega)t} + 3\sigma_- (a^\dagger a + 1) a e^{-i(\omega+\Omega)t} \\ & + \sigma_- a^{\dagger 3} e^{i(3\omega-\Omega)t} - \sigma_+ a^3 e^{-i(3\omega-\Omega)t} + \sigma_+ a^{\dagger 3} e^{i(3\omega+\Omega)t} - \sigma_- a^3 e^{-i(3\omega+\Omega)t}. \end{aligned}$$

Los primeros dos términos corresponden a transiciones de primer orden y están relacionados con los términos matriciales $\langle \Psi_{+,N}^{ad} | H | \Psi_{-,N+1}^{ad} \rangle$ y $\langle \Psi_{-,N+1}^{ad} | H | \Psi_{+,N}^{ad} \rangle$, a su vez oscilan lento, por lo tanto, siguiendo con el espíritu de la RWA se conservan en esta aproximación, los restantes en resonancia oscilan con frecuencias mayores a 2ω y son despreciados.

En general, los términos que conservaremos de H'_y al final tendrán la forma

$$\Omega \left(\frac{g}{\omega} \right) [\sigma_- a^\dagger f(a^\dagger a) + \sigma_+ f^*(a^\dagger a) a], \quad (6.11)$$

en donde $f(a^\dagger a)$ tiene una muy forma complicada para mostrarla aquí.

La expresión (6.11) resulta una generalización del término de interacción correspondiente al MJC ($g(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a)$).

6.3 Análisis de la aproximación

Al desarrollar la ecuación (6.5) obtenemos

$$E_{\pm, N}^{GRWA} = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} - \frac{g^2}{\omega^2} \right) + \frac{\hbar\Omega}{4} [\langle N_- | N_+ \rangle - \langle (N+1)_- | (N+1)_+ \rangle] \\ \pm \frac{1}{2} \left[\left(-\hbar\omega + \frac{\hbar\Omega}{2} [\langle N_- | N_+ \rangle + \langle (N+1)_- | (N+1)_+ \rangle] \right)^2 + [\hbar\Omega \langle N_- | (N+1)_+ \rangle]^2 \right]^{1/2},$$

y en su forma más explícita tenemos

$$E_{\pm, N}^{GRWA} = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} - \frac{g^2}{\omega^2} \right) + \frac{\hbar\Omega}{4} e^{-2g^2/\omega^2} [L_N(4g^2/\omega^2) - L_{N+1}(4g^2/\omega^2)] \quad (6.12)$$

$$\pm \hbar \left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\Omega e^{-2g^2/\omega^2} [L_N(4g^2/\omega^2) + L_{N+1}(4g^2/\omega^2)] \right) \\ + \frac{g^2\Omega^2}{\omega(N+1)} e^{-4g^2/\omega^2} [L_N^1(4g^2/\omega^2)]^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.13)$$

en donde L_N son los polinomios de Laguerre y L_N^M los polinomios asociados de Laguerre.

En la figura 6.1 observamos cómo la RWA reproduce muy bien los niveles energéticos cuando $g/\omega \rightarrow 0$. Esta aproximación empieza a alejarse de la solución numérica poco antes del primer cruce energético. Por otro lado, apreciamos cómo la aproximación adiabática (6.1) no funciona muy bien para valores pequeños de g/ω (recordemos que si $g = 0$, sólo nos quedaría el término $\hbar\omega a^\dagger a$ en el hamiltoniano 5.2), aunque, después del primer cruce captura con mucha exactitud el comportamiento de ésta. La GRWA combina las cualidades de ambas aproximaciones resultando especialmente buena cerca de resonancia.

En la figura 6.2 observamos una comparación entre la GRWA y la solución numérica para el caso $\omega = 0.75\Omega$. La GRWA reproduce razonablemente bien las energías del sistema

incluso bajo condiciones donde la RWA deja de tener validez ($\omega < \Omega$). En ese sentido la GRWA ofrece mayor flexibilidad en la condición de cuasi-resonancia reproduciendo el espectro energético incluso hasta para valores de $\omega = 0.5\Omega$, en donde el error llega a 0.2ω para el estado base y decrece para los estados excitados [5]. Un dato interesante de esta aproximación es que se comienza a alejar de la solución numérica cuando $\omega > \Omega$ con mayor rapidez que cuando $\omega < \Omega$ [48].

En la RWA, los términos resonantes rompen la degeneración en la eigenbase de H_0 (2.20). Esta degeneración ocurre cuando ($\Omega = \omega, g/\omega \ll 1$). Por otro lado, en el caso de la aproximación adiabática, este fenómeno sucede cuando ($\Omega \ll \omega$) para cualquier valor de g . Ambas aproximaciones resultan muy precisas en un régimen cerca de estas condiciones. La GRWA combina la precisión de ambas aproximaciones cerca de sus puntos de degeneración y como resultado obtenemos un espectro energético bastante acertado.

Por la precisión que ha demostrado, este método aproximado podría tener aplicaciones en experimentos tales como: un qubit de carga acoplado a un resonador de microondas en donde se han alcanzado acoplamientos de $g/\omega \sim 0.02$ [49], un qubit de flujo acoplado a un circuito LC superconductor en el que se ha llegado a $g/\omega \sim 0.05$ [50] o un resonador nanomecánico acoplado a un qubit de carga donde se han logrado valores de $g/\omega \sim 0.01 - 1$ [42] y probablemente en experimentos futuros en donde se pueda acceder a acoplamientos aun más grandes.

Actualmente ya existe una generalización de esta aproximación para el caso de dos qubits idénticos [51]. Esta generalización posee más aplicaciones potenciales que el caso de un qubit. Una posible aplicación es en el área de información cuántica, específicamente en protocolos de información cuántica en donde el oscilador transfiere información coherente entre ambos qubits en el régimen ultra-fuerte [52].

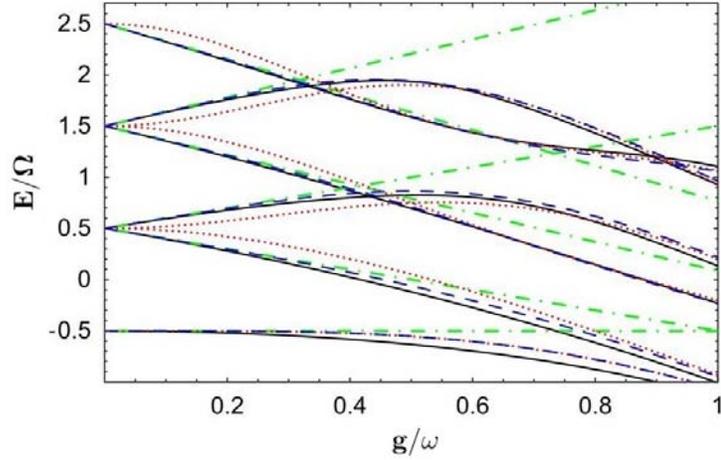


Figura 6.1: Comparación de la RWA (3.16) representada por las líneas punteadas discontinuas verdes, la aproximación adiabática (5.24) representada por las líneas punteadas rojas, la GRWA (ecuación 6.13) representada por las líneas discontinuas azules y la solución numérica de (2.18) representada por las líneas continuas negras para el caso $\omega = \Omega$. Observamos como la aproximación adiabática se aleja de la solución numérica para valores pequeños de g/ω y la RWA diverge de ésta conforme g/ω va incrementando su valor, mientras que la GRWA se empalma con la solución numérica para valores grandes y pequeños de g/ω . Figura tomada de la referencia [5].

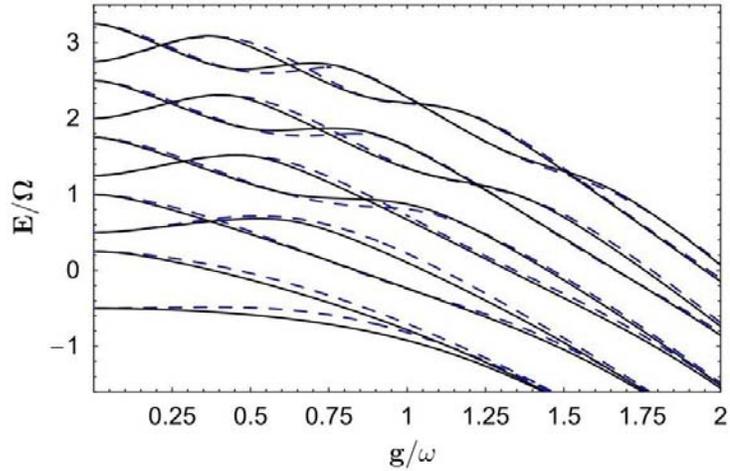


Figura 6.2: Comparación de los niveles energéticos obtenidos con la GRWA (6.13) representado por las líneas discontinuas azules con la solución numérica de (2.18) representada por las líneas solidas negras para el caso $\omega = 0.75\Omega$. En esta figura observamos como aún fuera de resonancia la GRWA se ajusta con gran precisión a la solución numérica exacta. Figura tomada de la referencia [5].

Capítulo 7

Forma simétrica de la aproximación de onda rotante

7.1 Simetrías del Hamiltoniano Cuántico de Rabi

La contribución de los términos anti-resonantes se vuelve importante en regímenes de acoplamiento como el ultra fuerte ($g/\omega \sim 0.1$) y ultra profundo ($g/\omega \gtrsim 1$), que quedan fuera del alcance de la RWA; por lo tanto, algunos efectos que están presentes en la dinámica del sistema como el Zeno y Anti-Zeno no pueden ser reproducidos con esta aproximación. Existe una aproximación llamada “aproximación de onda rotante simétrica” o S-RWA por sus siglas en inglés, la cual funciona muy bien en aquellos regímenes e incluso fuera de resonancia ($\omega \ll \Omega$), y reproduce con mucha exactitud los efectos cuánticos mencionados anteriormente. Esta aproximación posee la misma simplicidad matemática que la RWA pero a diferencia de ésta, trata de la misma manera los términos resonantes y anti-resonantes preservando la simetría de H respecto a sus parámetros.

Antes de continuar con esta aproximación analizaremos las simetrías que posee el HCR. Para ello, vamos a tratar dos ejemplos importantes que nos darán la pauta para entender la S-RWA.

El primer ejemplo es un sistema de dos niveles de la forma $H_a = \epsilon + \frac{\hbar}{2}\Omega\sigma_x$. Si recordamos que una transformación unitaria es equivalente a hacer un cambio de base y además tiene la propiedad de mantener invariantes los eigenvalores, entonces debe existir una transformación de este tipo que tenga la propiedad de cambiar Ω por $-\Omega$.

Consideremos el llamado operador fermiónico de reflexión $U_r(\phi = \pi) = e^{i\pi\sigma_y/2}$ y consideremos la transformación unitaria $U_r^\dagger(\pi)H_aU_r(\pi)$. Esta transformación en particular es equivalente a cambiar Ω por $-\Omega$, es decir, $U_r^\dagger(\pi)H_a(\Omega)U_r(\pi) = H_a(-\Omega)$, permaneciendo invariantes los eigenvalores del sistema de dos niveles ($\epsilon \pm \frac{\hbar}{2}\Omega$).

El segundo ejemplo a considerar está relacionado con el oscilador armónico desplazado. Consideremos el hamiltoniano $H_{OAD} = \omega a^\dagger a + g(a + a^\dagger)$. De capítulos anteriores sabemos que podemos diagonalizar este hamiltoniano mediante el operador unitario de desplazamiento $D(g/\omega) = e^{(a - a^\dagger)g/\omega}$ resultando el siguiente espectro de energías ($\omega N - \frac{g^2}{\omega}$), donde $N = 0, 1, 2, \dots$. Consideremos el llamado operador bosónico de reflexión-paridad $R = e^{i\pi a^\dagger a}$ y la siguiente transformación unitaria o cambio de base $U_r^\dagger(\pi)H_{OAD}U_r(\pi)$. Este operador tiene la propiedad de cambiar g por $-g$, es decir, $U_r^\dagger(\pi)H_{OAD}(g)U_r(\pi) = H_{OAD}(-g)$, permaneciendo invariante el espectro de energías; sin embargo, a diferencia de las energías del sistema de dos niveles en donde ocurre un reordenamiento de los signos ($\epsilon \pm \Omega \rightarrow \epsilon \mp \Omega$), la invariancia es más pronunciada, ya que cada eigenestado sigue teniendo las mismas energías antes y después de la transformación dada la dependencia cuadrática de g .

En cuanto al sistema compuesto espín-bosón, tenemos en consecuencia que las transformaciones unitarias R y $U_r(\pi)R$ al HCR es equivalente a cambiar g por $-g$ y Ω por $-\Omega$ respectivamente.

La invariancia en Ω no está presente después de aplicar la RWA o la GRWA al HCR, ya que rompemos esta simetría cuando aislamos al estado base de los demás (ver ecuación 3.16 y 6.13).

7.2 Aproximación de onda rotante simétrica

A continuación vamos a obtener la aproximación de onda rotante simétrica o S-RWA.

Consideremos el HQR (5.1)

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_x + \hbar g\sigma_z(a + a^\dagger).$$

Este hamiltoniano puede escribirse matricialmente en la base de espín $|\pm\rangle$ como matrices simétricas en el espacio de Fock en la forma

$$H = \begin{pmatrix} H^+ & \frac{\hbar\Omega}{2} \\ \frac{\hbar\Omega}{2} & H^- \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

donde la entrada superior izquierda es $|+\rangle\langle+|$ y donde $H^\pm = \langle\pm|H|\pm\rangle = \hbar\omega a^\dagger a \pm \hbar g(a^\dagger + a)$ son las matrices simétricas en el espacio de Fock y $\langle\pm|H|\mp\rangle = \frac{\hbar\Omega}{2}$.

Consideremos la transformación unitaria

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -P \\ P^\dagger & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Esta transformación ($H' = U^\dagger H U$) diagonaliza la matriz (7.1) en el espacio de espín si y sólo si P cumple las siguientes propiedades

$$P^\dagger H^+ P = H^-, \quad (7.3)$$

$$P^2 = 1. \quad (7.4)$$

La ecuación (7.4) define a P como un operador de paridad, tal que $P = P^{-1} = P^\dagger$.

Bajo (7.2),(7.1) se vuelve a diagonal en el espacio de espín; además, por conveniencia

haremos $\hbar = 1$

$$H' = \begin{pmatrix} H^+ + \frac{\Omega}{2}P & 0 \\ 0 & H^- - \frac{\Omega}{2}P \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

Es posible verificar que el operador de reflexión-paridad $R = e^{i\pi a^\dagger a}$ cumple las condiciones (7.3) y (7.4), por lo tanto, proponemos $P = R = e^{i\pi a^\dagger a}$ y cada elemento diagonal del hamiltoniano (7.5) resulta de la siguiente forma

$$H'^{\pm} = H^{\pm} \pm \frac{\Omega}{2}R = \omega a^\dagger a \pm g(a + a^\dagger) \pm \frac{\Omega}{2}R. \quad (7.6)$$

Observamos que sólo difieren entre ellos en los signos de los parámetros (g y Ω). Cada subespacio formado está relacionado con cierta paridad (± 1), o bien, cada subespacio representa una cadena de paridad y puede ser tratado por separado. Proyectamos (7.6) en el espacio de Fock ($|N\rangle$)

$$H'^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm\frac{\Omega}{2} & \pm g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \pm g & \omega \mp \frac{\Omega}{2} & \pm g\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \pm g\sqrt{2} & 2\omega \pm \frac{\Omega}{2} & \pm g\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \pm g\sqrt{3} & 3\omega \mp \frac{\Omega}{2} & \pm g\sqrt{4} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \pm g\sqrt{4} & 4\omega \pm \frac{\Omega}{2} & \pm g\sqrt{5} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm g\sqrt{5} & 5\omega \mp \frac{\Omega}{2} & \pm g\sqrt{6} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm g\sqrt{6} & 6\omega \pm \frac{\Omega}{2} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

El ordenamiento de los renglones y columnas de la matriz (7.7) es de la forma $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$

La matriz (7.7) es susceptible de ser reducida a una matriz diagonal por bloques si, en el espíritu de la RWA, despreciamos los términos de la forma $\langle 2N + 1 | H^{\pm} | 2N + 2 \rangle$ y

$\langle 2N + 2 | H^\pm | 2N + 1 \rangle$ para obtener la siguiente matriz diagonal por bloques

$$H^{\pm S-RWA} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\Omega}{2} & \pm g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \pm g & \omega \mp \frac{\Omega}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\omega \pm \frac{\Omega}{2} & \pm g\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \pm g\sqrt{3} & 3\omega \mp \frac{\Omega}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\omega \pm \frac{\Omega}{2} & \pm g\sqrt{5} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm g\sqrt{5} & 5\omega \mp \frac{\Omega}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\omega \pm \frac{\Omega}{2} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

El N-ésimo bloque es de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 2N\omega \pm \frac{\Omega}{2} & \pm g\sqrt{2N+1} \\ \pm g\sqrt{2N+1} & (2N+1)\omega \mp \frac{\Omega}{2} \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

al diagonalizar obtenemos un espectro de energías para cada paridad. Es posible condensar ambos espectros en uno solo si agregamos un índice extra (p):

$$E_{N,p,\pm}^{SRWA} = \left(2N + \frac{1}{2}\right) \omega \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}p\Omega\right)^2 + g^2(2N+1)}, \quad (7.10)$$

con $N = 0, 1, 2, \dots$; y sus correspondientes eigenestados

$$|\Psi_{N,p,+}^{S-RWA}\rangle = p \cos \frac{\alpha_N}{2} |p, 2N\rangle + \sin \frac{\alpha_N}{2} |p, 2N+1\rangle, \quad (7.11)$$

$$|\Psi_{N,p,-}^{S-RWA}\rangle = p \sin \frac{\alpha_N}{2} |p, 2N\rangle - \cos \frac{\alpha_N}{2} |p, 2N+1\rangle, \quad (7.12)$$

en donde

$$\cos \frac{\alpha_N}{2} = \sqrt{\frac{T_N + \Delta}{2T_N}}, \quad \sin \frac{\alpha_N}{2} = \sqrt{\frac{T_N - \Delta}{2T_N}}, \quad \tan \alpha_N = g\sqrt{2N+1}/\Delta$$

con $\Delta = \frac{1}{2}(p\Omega - \omega)$ y $T_N = \sqrt{g^2(2N + 1) + \Delta^2}$.

El espectro de energías (7.10) posee un índice extra (p) con respecto a los espectros energéticos obtenidos previamente en otros capítulos. Este índice extra es el responsable de la invariancia ante el cambio de signo en el parámetro Ω . Las energías con paridad positiva están contenidas exactamente en el espectro de la RWA (3.16). Observamos también que el estado base no queda aislado del resto como en el caso del espectro obtenido con la RWA o GRWA y además su energía ($E_{0,-,-}^{SRWA} = \frac{\omega}{2} - \sqrt{(\frac{1}{2}(\omega + \Omega)^2 + g^2)}$) ya no es independiente del acoplamiento del sistema.

La transformación del HCR que involucra a (7.2) es equivalente a escribir H en la base $|\phi_{\pm,N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\pm, N\rangle \pm (-1)^N |\mp, N\rangle]$. En esta base se cumple $\langle \phi_{\pm,N} | H | \phi_{\mp,M} \rangle = 0$. Esto significa que podemos tratar a $\langle \phi_{+,N} | H | \phi_{+,M} \rangle$ y $\langle \phi_{-,N} | H | \phi_{-,M} \rangle$ individualmente, cada uno se encuentra relacionado con H^+ y H^- respectivamente.

Observamos en la matriz (7.7) que existen dos tipos de términos fuera de la diagonal: los de la forma $\langle \phi_{\pm,2N} | H | \phi_{\pm,2N+1} \rangle$ y los de la forma $\langle \phi_{\pm,2N+1} | H | \phi_{\pm,2N+2} \rangle$. Los primeros acoplan los estados $|\pm, 2N\rangle$ y $|\mp, 2N + 1\rangle$ y los segundos acoplan a los estados $|\pm, 2N + 1\rangle$ y $|\mp, 2N + 2\rangle$ (H^+ mediante los resonantes y H^- mediante los anti-resonantes en ambos casos). Como la S-RWA desprecia los segundos términos, es equivalente a sólo tomar la mitad de los términos resonantes y anti-resonantes.

En la figura 7.1 comparamos las energías obtenidas con la SRWA (7.10) versus las obtenidas utilizando la RWA (3.16) cuando el sistema se encuentra fuera de resonancia ($\Omega = \frac{1}{2}\omega$). En ella observamos que para alguna g después del régimen de acoplamiento ultra-fuerte las energías que provienen de estados con paridades opuestas se acercan más unas a otras conforme incrementamos N ($E_{N,p,\pm}^{SRWA} \sim E_{N,-p,\pm}^{SRWA}$). En este régimen la paridad ya no determina la energía, el espectro energético se encuentra degenerado y puede ser representado por una u otra cadena de paridad. En contraste, observamos cómo se comporta la aproximación RWA, en la cual, podemos notar que las energías de estados vecinos en función del parámetro g/ω tienen pendientes opuestas y el estado base sobrepasa al primer

estado excitado, esta aproximación claramente falla cuando g es lo suficientemente grande.

La S-RWA se ve superada en precisión por la RWA cuando existe acoplamiento débil y cuasi-resonancia, esto sucede debido a que los términos resonantes gobiernan en este régimen y en la S-RWA despreciamos la mitad de ellos; sin embargo, en el régimen ultra fuerte y ultra profundo fuera de resonancia donde los términos anti-resonantes comienzan a tener importancia y no es posible aplicar la RWA, en estas condiciones, la S-RWA describe el modelo con una gran precisión.

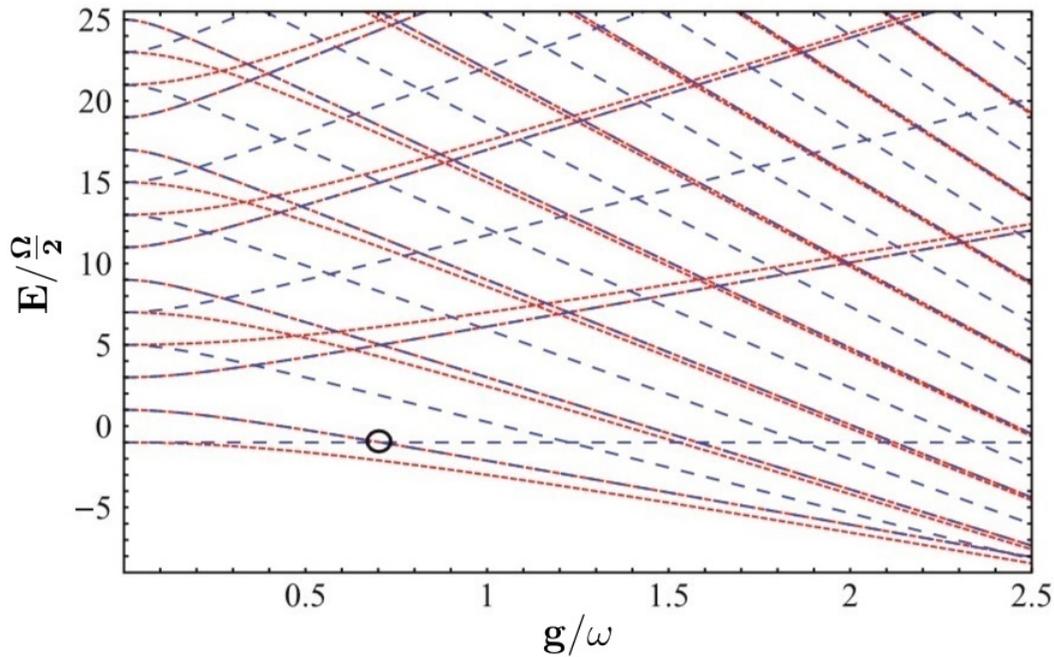


Figura 7.1: Comparación entre las energías obtenidas con la RWA (líneas azules discontinuas) y las obtenidas con la S-RWA (7.10) (líneas rojas punteadas) en función del parámetro de acoplamiento para el caso $2\omega = \Omega$. El círculo negro indica el punto en que el estado base de la RWA sobrepasa al primer estado excitado. Figura tomada de Victor V. Albert, Gregory D. Scholes, and Paul Brumer, Phys. Rev. A 84, 042110 (2011).

7.3 Aproximación de onda rotante generalizada simétrica

La GRWA es una aproximación que extiende el rango de validez de la RWA a valores de acoplamiento arbitrarios. En ese mismo sentido, existe una simetrización de esta aproximación que complementa a la S-RWA pero para valores de acoplamiento pequeños.

La derivación de esta aproximación a la que denotaremos como S-GRWA es análoga a la derivación de la S-RWA realizada en la sección anterior; sin embargo, al igual que en la GRWA, se requiere un cambio de base previo utilizando el operador de desplazamiento dependiente de espín $D_s(\frac{g}{\omega}\sigma_z) = e^{-i\frac{g}{\omega}\sigma_z(a^\dagger - a)}$ (expresión 6.9).

Partimos de la ecuación (7.5) y aplicamos el cambio de base $D_s(\frac{g}{\omega}\sigma_z)H'D_s^\dagger(\frac{g}{\omega}\sigma_z) = \hat{H}'$, bajo esta transformación cada subespacio de paridad resulta de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{H}'^\pm &= D_s(\frac{g}{\omega}\sigma_z)H'^\pm |\pm\rangle \langle \pm| D_s^\dagger(\frac{g}{\omega}\sigma_z) \\ &= \omega a^\dagger a - g^2/\omega \pm \frac{\Omega}{2}RD(\pm 2g/\omega),\end{aligned}\tag{7.13}$$

en donde $D(\pm\frac{g}{\omega})$ es el operador de desplazamiento (5.6).

Al igual que se hizo en la S-RWA debemos proyectar estos subespacios en la base de Fock y reducir la matriz a una matriz diagonal por bloques, para ello, requerimos calcular los elementos matriciales del operador de desplazamiento $D_{M,N} = \langle M|D(\pm 2g/\omega\sigma_z)|N\rangle$ en el espacio de Fock [53], los cuales resultan ser

$$D_{M,N} = \begin{cases} \sqrt{\frac{M!}{N!}}e^{-2g^2/\omega^2} \left(\frac{2g}{\omega}\right)^{N-M} L_M^{N-M} \left(\frac{4g^2}{\omega^2}\right) & \text{si } (M \leq N) \\ \sqrt{\frac{N!}{M!}}e^{-2g^2/\omega^2} \left(-\frac{2g}{\omega}\right)^{M-N} L_N^{M-N} \left(\frac{4g^2}{\omega^2}\right) & \text{si } (M \geq N) \end{cases}\tag{7.14}$$

en donde L_M^{N-M} son los polinomios asociados de Laguerre.

Escribimos (7.13) en forma matricial en la base de Fock de la siguiente manera

$$\hat{H}^{\pm} = \begin{pmatrix} -\frac{g^2}{\omega} \pm \frac{\Omega}{2} D_{0,0} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{0,1} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{0,2} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{0,3} & \cdots \\ \mp \frac{\Omega}{2} D_{1,0} & \omega - \frac{g^2}{\omega} \mp \frac{\Omega}{2} D_{1,1} & \mp \frac{\Omega}{2} D_{1,2} & \mp \frac{\Omega}{2} D_{1,3} & \cdots \\ \pm \frac{\Omega}{2} D_{2,0} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{2,1} & 2\omega - \frac{g^2}{\omega} \pm \frac{\Omega}{2} D_{2,2} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{2,3} & \cdots \\ \mp \frac{\Omega}{2} D_{3,0} & \mp \frac{\Omega}{2} D_{3,1} & \mp \frac{\Omega}{2} D_{3,2} & 3\omega - \frac{g^2}{\omega} \mp \frac{\Omega}{2} D_{3,3} & \cdots \\ \pm \frac{\Omega}{2} D_{4,0} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{4,1} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{4,2} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{4,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

El ordenamiento de los renglones y columnas de la matriz (7.8) es de la forma $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$

A diferencia de la matriz (6.3), en la S-GRWA no tenemos elementos nulos, por lo que existe la libertad de escoger el tamaño de los bloques que formaran la matriz aproximada. Para propósitos de este trabajo tomaremos bloques de 2x2 como se ha venido haciendo en otras aproximaciones, de tal manera que obtenemos la siguiente matriz

$$H^{S-GRWA} = \begin{pmatrix} -\frac{g^2}{\omega} \pm \frac{\Omega}{2} D_{0,0} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{0,1} & 0 & 0 & \cdots \\ \mp \frac{\Omega}{2} D_{1,0} & \omega - \frac{g^2}{\omega} \mp \frac{\Omega}{2} D_{1,1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2\omega - \frac{g^2}{\omega} \pm \frac{\Omega}{2} D_{2,2} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{2,3} & \cdots \\ 0 & 0 & \mp \frac{\Omega}{2} D_{3,2} & 3\omega - \frac{g^2}{\omega} \mp \frac{\Omega}{2} D_{3,3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

El ordenamiento de los renglones y columnas de la matriz (7.8) es de la forma $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$

De (7.14) es fácil demostrar que $D_{M,N} = -D_{N,M}$ cuando $N - M$ es impar, por lo tanto, podemos escribir el N-ésimo bloque de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 2N\omega \pm \frac{\Omega}{2} D_{2N,2N} & \pm \frac{\Omega}{2} D_{2N,2N+1} \\ \pm \frac{\Omega}{2} D_{2N,2N+1} & (2N+1)\omega \mp \frac{\Omega}{2} D_{2N+1,2N+1} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

al diagonalizar este bloque obtenemos las energías

$$\begin{aligned}
E_{N,p,\pm}^{S-GRWA} &= \left(2N + \frac{1}{2}\right) \omega - \frac{g^2}{\omega} + p \frac{\Omega}{4} e^{-2g^2/\omega^2} [L_{2N}(4g^2/\omega^2) - L_{2N+1}(4g^2/\omega^2)] \\
&\pm \left(\left(\frac{1}{2} \omega - p \frac{\Omega}{4} e^{-2g^2/\omega^2} [L_{2N}(4g^2/\omega^2) + L_{2N+1}(4g^2/\omega^2)] \right)^2 \right. \\
&\left. + \frac{g^2 \Omega^2}{\omega^2 (2N+1)} e^{-4g^2/\omega^2} [L_{2N}^1(4g^2/\omega^2)]^2 \right)^{1/2}. \tag{7.18}
\end{aligned}$$

En la expresión anterior observamos como las energías con paridad positiva están contenidas en el espectro energético de la GRWA. Los correspondientes eigenestados son

$$|\Psi_{N,p,+}^{S-GRWA}\rangle = p \cos \frac{\alpha_N}{2} |p, 2N\rangle + \sin \frac{\alpha_N}{2} |p, 2N+1\rangle, \tag{7.19}$$

$$|\Psi_{N,p,-}^{S-GRWA}\rangle = p \sin \frac{\alpha_N}{2} |p, 2N\rangle - \cos \frac{\alpha_N}{2} |p, 2N+1\rangle, \tag{7.20}$$

en donde

$$\cos \frac{\alpha_N}{2} = \sqrt{\frac{T_N + \Delta}{2T_N}}, \quad \sin \frac{\alpha_N}{2} = \sqrt{\frac{T_N - \Delta}{2T_N}}, \quad \tan \alpha_N = \left(\frac{\Omega}{2} D_{2N,2N+1} \right) / \Delta$$

con $\Delta = -\frac{\omega}{2} + \frac{\Omega}{4} p [D_{2N,2N} - D_{2N+1,2N+1}]$ y $T_N = \sqrt{(\frac{\Omega}{2} D_{2N,2N+1})^2 + \Delta^2}$. En la figura 7.2 se comparan las energías de la GRWA y las de la S-GRWA con la solución numérica para el caso de resonancia ($\Omega = \omega$). La superioridad en precisión de la GRWA ante la S-GRWA para valores de acoplamiento pequeños es evidente, ya en valores en donde $g/\omega > 0.5$ resultan ser muy semejantes, salvo por el estado base, el cual es descrito mejor por la S-GRWA ajustándose más a la solución numérica.

Así como la GRWA generaliza a la RWA para valores de acoplamiento grandes, la S-GRWA generaliza a la S-RWA pero para acoplamientos pequeños; sin embargo, estas últimas aunque funcionan relativamente bien en cuasi-resonancia poseen mayor precisión fuera de ella.

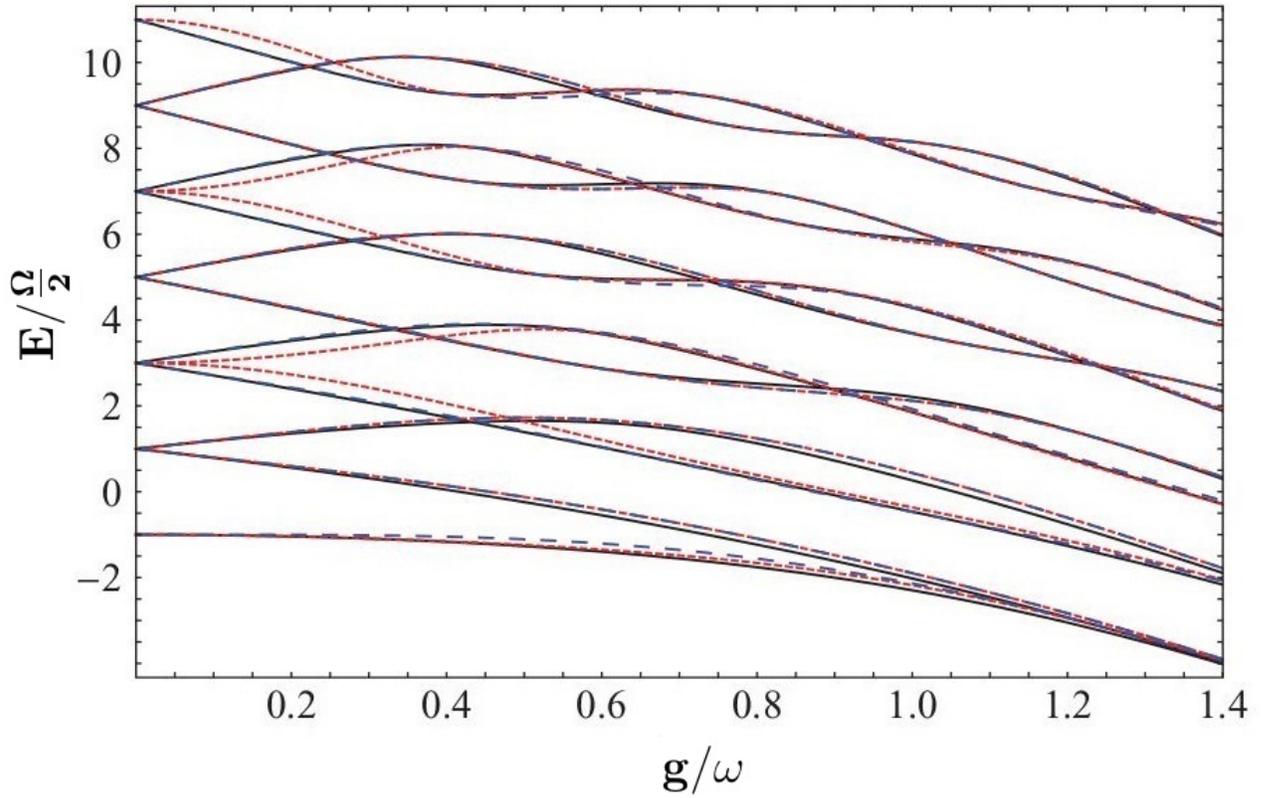


Figura 7.2: Comparación de la GRWA (líneas discontinuas azules), la S-GRWA (líneas rojas discontinuas) y la solución numérica (líneas solidas negras en resonancia ($\Omega = \omega$)). Figura tomada de Victor V. Albert, Gregory D. Scholes, and Paul Brumer, Phys. Rev. A 84, 042110 (2011).

Lo anterior se resume en la tabla 7.1.

	$g \ll \omega$	$g \gtrsim \omega$
$\omega \approx \Omega$	RWA	GRWA
$\omega \gg \Omega$	S-GRWA	S-RWA

Tabla 7.1: Regímenes en los que cada aproximación es más precisa que las demás.

Capítulo 8

Conclusiones generales

La motivación de este trabajo surge a raíz de la diversidad de métodos aproximados que han sido desarrollados para el HCR, impulsados por el reciente desarrollo de dispositivos micro-fabricados de estado sólido, tales como circuitos superconductores y sistemas optomecánicos, que pueden ser descritos utilizando el HCR pero en regímenes de acoplamiento fuera del alcance del MJC.

A continuación algunas conclusiones e ideas principales de cada aproximación estudiada en el presente trabajo:

- Modelo de Jaynes-Cummings y RWA

Históricamente este fue el primer método aproximado para resolver el HCR. Se obtuvo mediante la aproximación de onda rotante (conservar términos resonantes) con la que se redujo el HCR a una matriz diagonal por bloques. Esta aproximación fue derivada bajo las condiciones de cuasi-resonancia ($\Omega \sim \omega$) y acoplamiento débil ($g/\omega \ll 1$). Las condiciones para las que está diseñado este modelo coinciden con la mayoría de los sistemas óptico cuánticos, por lo que ha sido ampliamente utilizado en electrodinámica cuántica de cavidades [28, 29, 30, 31]. A la fecha se sigue aplicando la RWA en nuevos sistemas que son descritos por hamiltonianos que comparten términos con el HCR y son susceptibles a esta aproximación [54, 55].

- Método perturbativo para acoplamiento ultra profundo

Este método perturbativo se deriva mediante un cambio de variable y con ayuda del operador de paridad (II) del HCR. Funciona para acoplamiento ultra profundo ($g/\omega \gtrsim 1$) y se requiere $\omega \gtrsim \Omega$. También revela cuestiones relacionadas con la paridad del HCR. Tiene utilidad igual que la GRWA para estudiar sistemas de estado sólido con acceso al régimen ultra profundo pero fuera de cuasi-resonancia. Recientemente se ha utilizado este método como marco teórico en la exploración experimental del régimen ultra profundo con un análogo fotónico del HCR [37].

- Aproximación adiabática

Esta aproximación se realiza con ayuda de la base de oscilador armónico desplazado y bajo la condición de que la frecuencia de transición del sistema de dos niveles sea mucho menor que la frecuencia del campo bosónico ($\Omega \ll \omega$). La aproximación describe con gran precisión el HCR para valores de acoplamiento hasta del orden de la frecuencia del campo o más grandes ($g \gtrsim \omega$); sin embargo, tiene problemas con acoplamientos pequeños. El estado base no se trata por separado y los eigenestados aproximados también son eigenestados del operador de paridad II. Se utiliza para estudiar dispositivos de estado sólido como el sistema llamado en inglés “Cooper-pair box” acoplado a un resonador nanomecánico [40, 41]. Recientemente se han desarrollado generalizaciones de esta aproximación para dos y tres qubits [56, 57].

- Aproximación de onda rotante generalizada

Esta es una generalización de la RWA, también conserva los términos de carácter resonante y desprecia los que corresponden a transiciones de dos o más fotones. El método permite un valor de acoplamiento arbitrario y resulta particularmente útil en el régimen de acoplamiento ultra fuerte, se deriva bajo la condición de cuasi-resonancia ($\Omega \sim \omega$) y al igual que la RWA, no es tan precisa cuando $\Omega > \omega$ [58]. Tiene posibles aplicaciones en dispositivos de estado sólido como circuitos superconductores [50, 49].

Recientemente ha sido utilizada para calcular el espectro del sistema llamado en inglés “biased qubit-oscillator systems” [59]. Además también ofrece la posibilidad de estudiar sistemas que ya han sido estudiados con la RWA pero para valores de acoplamiento donde la RWA ya no es válida.

- Aproximación de onda rotante simétrica

Esta aproximación preserva las simetrías del HCR respecto a sus parámetros y trata de la misma manera a los términos resonantes y anti-resonantes. Funciona con mucha precisión fuera de resonancia ($\omega \ll \Omega$) y para valores de acoplamiento grandes. Conserva la mitad de los términos resonantes y anti-resonantes.

- Aproximación de onda rotante simétrica generalizada

Esta aproximación al igual que la S-RWA funciona para cuando el sistema se encuentra fuera de resonancia ($\omega \ll \Omega$), sin embargo, a diferencia de la S-RWA funciona para acoplamiento débil ($g/\omega \ll 1$).

Todo lo anterior se resume de manera cualitativa en el siguiente diagrama

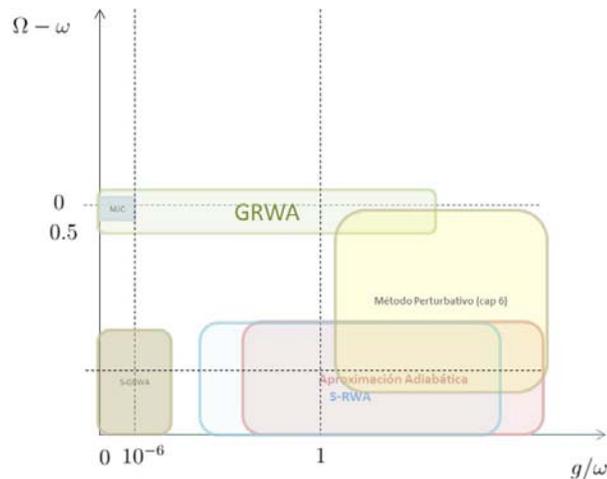


Figura 8.1: Representación de los rangos de mayor precisión de cada aproximación estudiada en este trabajo.

Aunque se sabe que estas aproximaciones pueden ofrecer una precisión razonable fuera de los rangos, se destacan aquellos donde cada aproximación posee mayor precisión.

Como vemos, cada una de estas aproximaciones está diseñada para funcionar bajo ciertas condiciones y en ciertos regímenes de acoplamiento. Por su simplicidad y precisión, proveen un marco teórico robusto para el estudio del HCR y tienen potencial aplicación para diversos sistemas físicos que van desde óptica cuántica y estado sólido hasta la computación cuántica.

Actualmente continua la búsqueda de nuevas aproximaciones que llenen los espacios que no se encuentran atendidos por ningún método. Por ejemplo, recientemente se desarrolló una aproximación basada en promedios temporales [13] denotada como “IRWA” (aproximación de onda rotante intermedia) que pretende cubrir la región entre el acoplamiento fuerte y el ultra fuerte, cerca de resonancia y lejos de ella, que aún permanecía difusa. También se ha estudiado el caso cuando $\Omega > \omega$ en donde la mayoría de las aproximaciones aquí estudiadas tienen dificultad [58]. Quedan por revisar una variedad de métodos tanto numéricos como analíticos, por ejemplo, el método basado en la teoría perturbativa de Van Vleck para el régimen ultra fuerte[48], el método de estados coherentes bosónicos extendidos en el que se encuentran expresiones analíticas exactas para resolver el hamiltoniano numéricamente y métodos variacionales para corregir el estado base [60].

Existen sistemas que aunque no se describen precisamente con el hamiltoniano cuántico de Rabi, tienen términos comunes y podrían ser susceptibles de ser estudiados mediante estas aproximaciones (véase las referencias [54, 55]). El primero de ellos trata de un átomo en una cavidad electromagnética descrito por el HJC acoplado a un resonador mecánico que involucra un término extra y un acoplamiento optomecánico; el segundo, trata de un punto cuántico sobre un nanotubo capaz de vibrar en donde la interacción espín-órbita induce un término de acoplamiento. En ambos sistemas se emplea la RWA; sin embargo, se espera que en el futuro se puedan implementar otro tipo de aproximaciones como las aquí estudiadas.

Bibliografía

- [1] Gilbert Grynberg, Alain Aspect y Claude Fabre, *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*, Cambridge University Press, Nueva York, Estados Unidos: 2010.
- [2] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc y Gilbert Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, Wiley, Weinheim, Alemania: 2008.
- [3] L. Allen y J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Dover Publications, Inc., Nueva York, Estados Unidos: 1987.
- [4] Marx Fox, *Quantum Optics, and introduction*, Oxford University Press, Nueva York, Estados Unidos: 2006.
- [5] E. K. Irish, Phys. Rev. Lett. **99**, 173601 (2007).
- [6] I. Thanopoulos, E. Paspalakis, and Z. Kis, Chem. Phys. Lett. **390**, 228 (2004).
- [7] D. Englund et al., Nature (London) **450**, 857 (2007).
- [8] T. Niemczyk et al., Nature Phys. **6**, 772 (2010).
- [9] T. Pellizzari, S.A. Gardiner, J.I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **75**, 3788 (1995).
- [10] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963)
- [11] D. Braak, Phys. Rev. Lett. **107**, 100401 (2011).

- [12] Enrique Solano, *Physics* **4**, 68 (2011).
- [13] Yimin Wang, Jing Yan Haw, *Phys. Rev. Lett. A* **379**, 779-786 (2015).
- [14] *Eur. Phys. J. Special Topics* **203**, 163–183 (2012)
- [15] Luis de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, UNAM, Ediciones científicas universitarias, México: 2010.
- [16] I. Thanopoulos, E. Paspalakis, and Z. Kis, *Chem. Phys. Lett.* **390**, 228 (2004).
- [17] D. Englund et al., *Nature (London)* **450**, 857 (2007).
- [18] T. Niemczyk et al., *Nature Phys.* **6**, 772 (2010).
- [19] T. Pellizzari, S. A. Gardiner, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3788 (1995).
- [20] A. T. Sornborger, A.N. Cleland, and M. R. Geller, *Phys. Rev. A* **70**, 052315 (2004).
- [21] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [22] A. Wallraff et al., *Nature (London)* **431**, 162 (2004).
- [23] P. Forn-Diaz et al., *Phys. Rev. Lett.* **105**, 237001 (2010).
- [24] T. Holstein, *Ann. Phys. (N.Y.)* **8**, 325 (1959).
- [25] V. Bargmann, *Commun. Pure Appl. Math.* **14**, 187 (1961).
- [26] Alexander Moroz, Comment on "Integrability of the Rabi model", arXiv:1205.3139v2 (2012).
- [27] Alexander Moroz, *Annals of Physics Volume* **338**, Pages 319–340, (2013).
- [28] H. Mabuchi, A.C. Doherty, *Science* **298**, 1372 (2002).
- [29] G. Rempe, H. Walther, N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 353 (1987).

- [30] M. Brune, et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).
- [31] E. Hagley, et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 1 (1997).
- [32] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, D. Wineland, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
- [33] G. Khitrova, H.M. Gibbs, M. Kira, S.W. Koch, A. Scherer, Nat. Phys. **2**, 81 (2006)
- [34] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [35] Juan Restrepo, Cristiano Ciuti, and Ivan Favero, Phys. Rev. Lett. **112**, 013601 (2014).
- [36] Andras Palyi, P. R. Struck, Mark Rudner, Karsten Flensberg, and Guido Burkard, Phys.Rev. Lett. **108**, 206811 (2012).
- [37] A. Crespi, Longhi, and R. Osellame, Phys. Rev. Lett. **108**, 163601 (2012).
- [38] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll, and E. Solano, Phys. Rev. Lett. **105**, 263603 (2010).
- [39] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co., Estados Unidos: Revised edition 1994.
- [40] A. D. Armour, M. P. Blencowe, and K. C. Schwab, Physica B **406**, 316–317, (2002).
- [41] A. D. Armour, M. P. Blencowe, and K. C. Schwab, Phys. Rev. Lett. **88**, 148301 2002.
- [42] E. K. Irish, J. Gea-Banacloche, I. Martin, and K. C. Schwab, Rev. B **72**, 195410 (2005).
- [43] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
- [44] C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins, and H. J. Kimble, Science **287**, 1447 (2000).
- [45] C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins, and H. J. Kimble, Science **287**, 1447 (2000).

- [46] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R. S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature London* **431**, 162 (2004).
- [47] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* Cambridge University Press, Cambridge, England, (1995).
- [48] Johannes Hausinger, and Milena Grifoni, *Phys. Rev. A* **82**, 062320 (2010).
- [49] D. I. Schuster, A.A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, B. Johnson, and M. H. Devoret et al., *Nature (London)* **445**, 515 (2007).
- [50] J. Johansson, S. Saito, T. Meno, H. Nakano, M. Ueda, K. Semba, and H. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 127006 (2006).
- [51] Yu-Yu Zhang y Qing-Hu Chen, *Phys. Rev. A* **91**, 01381 (2015).
- [52] P. J. Leek, S. Filipp, P. Maurer, M. Baur, R. Bianchetti, J. M. Fink, M. Goppl, L. Steffen, and A. Wallraff, *Phys. Rev. B* **79**, 180511 (2009).
- [53] A. M. *Perelomov*, *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer, Berlin, 1986).
- [54] András Pályi, P. R. Struck, Mark Rudner, Karsten Flensberg, and Guido Burkard, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 206811 (2012).
- [55] Juan Restrepo, Cristiano Ciuti, and Ivan Favero, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 013601 (2014).
- [56] S. Agarwal, S. M. Hashemi Rafsanjani, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **85**, 043815 (2012).
- [57] Li-Tuo Shen, Rong-Xin Chen, Huai-Zhi Wu, and Zhen-Biao Yang, *Phys.Rev. A* **89**, 023810 (2014).

- [58] Lixian Yu, Shiqun Zhu, Qifeng Liang, Gang Chen, and Suotang Jia, Phys. Rev. A **86**, 015803 (2012).
- [59] Yu-Yu Zhang, Qing-Hu Chen, and Yang Zhao, Phys. Rev. A **87**, 033827 (2013).
- [60] Yuanwei Zhang, Gang Chen, Lixian Yu, Qifeng Liang, J.-Q. Liang, Suotang Jia Phys. Rev. A **83**, 065802 (2011).
- [61] M. Bina, Phys. J. Special Topics **203**, 163–183 (2012).
- [62] Victor V. Albert, Gregory D. Scholes, and Paul Brumer, Phys. Rev. A **84**, 042110 (2011).