



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**ANÁLISIS DE ALGUNOS PROCESOS RADIATIVOS EN MEDIOS MATERIALES  
EN LA ELECTRODINÁMICA CLÁSICA**

**TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**

**DOCTORA EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:**

**MIRNA VILLAVICENCIO TORRES**

**TUTOR: M. EN C. JOSÉ LUIS JIMÉNEZ RAMÍREZ**  
**UAM-IZTAPALAPA**

**MÉXICO, D.F., ENERO DE 2016**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A:*

*Ruy*

*y*

*Eduardo*

## Agradecimientos

Agradezco al M. en C. José Luis Jiménez por su guía y paciencia en la elaboración de este trabajo.

A los integrantes del jurado: Dra. Rosario Paredes, Dr. Luis Felipe del Castillo, Dr. Raúl Esquivel, Dr. José Luis Hernández, Dr. Darío Núñez y Dr. Juan Adrián Reyes, por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo y sus valiosos comentarios.

Al Dr. J. A. Eduardo Roa-Neri por todos los años de colaboración académica y apoyo incondicional.

A toda mi familia, en especial a Javi, Naty, Ruy, Ulrich, Daira y Hanna, cuyas risas alegran mi vida.

A mis amigos y colaboradores, en especial a Dario, Patsy y Rich cuyas porras fueron y serán más que alentadoras.

Al Biol. Rafael Serrano por toda su ayuda y hacer más fácil mi labor en la Facultad de Ciencias.

## Resumen

Entre los fenómenos radiativos inducidos por el paso de partículas cargadas a través de un medio, quizá los más conocidos, debido a sus aplicaciones en el diseño de detectores de partículas, sean el efecto Vavilov-Cherenkov y el de Radiación de Transición. Aunque estos efectos se presentan bajo distintas condiciones, ambos tienen en común el que se genera radiación electromagnética cuando la carga viaja con velocidad constante, lo que contrasta con el caso de una carga en movimiento uniforme en el vacío.

En el efecto Vavilov-Cherenkov, se emite radiación electromagnética sólo cuando la velocidad de la carga viajera es mayor que la velocidad de la luz en el medio, mientras que en la Radiación de Transición se observa la generación de radiación electromagnética cuando una partícula cargada viaja con velocidad constante a través de un medio que presenta inhomogeneidades, independientemente de la magnitud de su velocidad. Estas inhomogeneidades que el medio presenta a lo largo de la trayectoria de la carga, se refieren a que la permitividad, que describe el comportamiento eléctrico del medio, cambia como función de la posición o del tiempo. Cabe mencionar que en el efecto Vavilov-Cherenkov la carga siempre viaja a través de un medio homogéneo.

Aunque tanto el efecto Vavilov-Cherenkov como la Radiación de Transición han sido ampliamente estudiados, aún existen algunos puntos que deben ser discutidos, sobre todo en lo que respecta al origen de la emisión de radiación electromagnética.

En este trabajo, se discute detalladamente el origen físico tanto del efecto Vavilov-Cherenkov como de la Radiación de Transición considerándolos como efectos colectivos, en los que claramente el medio juega un papel importante. Ambos fenómenos se analizarán utilizando la idea de que al moverse a través de un medio, una partícula cargada induce la formación de dipolos elementales, dependientes del tiempo, de forma que cuando la velocidad de la carga es mayor que la velocidad de la luz en el medio, la radiación emitida por estos dipolos se superpone coherentemente para dar lugar a la radiación. Este modelo se aplica en el análisis de la radiación inducida por una partícula puntual y un dipolo eléctrico sin carga neta y puesto que el paso de un pulso electromagnético, o paquete de onda, a través de un medio también induce una polarización dependiente del tiempo en éste, se obtiene el espectro de emisión para este caso.

Ahora bien, dado que las propiedades del medio determinan el intervalo de frecuencias en las que se emite radiación Cherenkov, se analiza con detalle el papel que juega el medio en la emisión de la radiación y se exhibe que es posible definir un límite inferior para la velocidad de la partícula, el cual no depende de la frecuencia cuando se consideran tanto la respuesta específica del medio como la condición sobre la velocidad de la partícula.

Finalmente, utilizando la teoría de distribuciones y haciendo una analogía con los problemas típicos de la mecánica cuántica, se exhibe explícitamente el cálculo de todas las componentes del campo eléctrico y magnético en el caso de la Radiación de Transición.

## Abstract

Among the most important radiative phenomena induced by the passage of charged particles through a material medium, perhaps the best known, due to their applications in the design of particle detectors, are the Vavilov-Cherenkov effect and the Transition Radiation. Although these effects appear under different conditions, both have in common that there is radiation even though the charge travels with constant velocity.

In the Vavilov-Cherenkov effect, electromagnetic radiation is emitted only when the velocity of the charge is greater than the velocity of light in the medium, while Transition Radiation occurs independently of the velocity of the charge and the necessary condition for its existence is that along of the trajectory of the particle the permittivity changes as a function of position or of time.

Although these phenomena have been extensively studied, there are still some points that need to be discussed. In this work, the origin of the electromagnetic radiation generated in the Vavilov-Cherenkov effect and the Transition Radiation is physically discussed considering both as collective effects where clearly the medium plays an important role.

To study the Vavilov-Cherenkov we use the idea of the generation of time-dependent elemental dipoles in a material medium due to a point charge moving with constant velocity inside it. We obtain that if the velocity of the point charge is greater than the velocity of light in such medium, there is a coherent superposition of the radiation emitted by each elemental dipole; we identify the total coherent radiation as the Cherenkov radiation. We apply this model to analyze the Cherenkov radiation induced by a point particle, extended charge distributions and an electric dipole without net charge. Since the passage of an electromagnetic pulse, or wave packet, through a medium also induces a time-dependent polarization, the emission spectrum for this case is obtained.

Since the properties of the medium determine the frequency range where Cherenkov radiation is emitted, we discuss in detail the role of the media in the emission of radiation and define a lower bound for the velocity of the particle, which does not depend on the frequency when we consider the specific response of the medium and the condition over the particle's velocity.

Finally, using the Theory of Distributions and an analogy with some typical problems of quantum mechanics, we explicitly calculate all the components of the electric and magnetic field in the case of Transition Radiation.

# Índice general

<b>1. Introducción</b> .....	1
<b>2. El efecto Vavilov-Cherenkov como un efecto colectivo</b> .....	7
2.1. La polarización inducida y el efecto Vavilov-Cherenkov generado por una carga puntual.....	8
2.2. La radiación Cherenkov inducida por distribuciones extensas de carga.....	14
2.2.1. El cascarón esférico de carga.....	17
2.2.2. La distribución de carga tipo Yukawa.....	17
2.2.3. El paquete de partículas.....	18
2.3. El efecto Vavilov-Cherenkov generado por un dipolo eléctrico puntual.....	20
2.3.1. Radiación Cherenkov generada por un dipolo eléctrico puntual.....	20
2.3.2. Dipolo eléctrico apuntando en la dirección de movimiento.....	28
2.3.3. Dipolo eléctrico apuntando en una dirección arbitraria.....	30
<b>3. El efecto Vavilov-Cherenkov inducido por un pulso electromagnético</b> .....	32
3.1. Radiación Cherenkov generada por un pulso electromagnético.....	32
3.2. El Teorema de Poynting y el efecto Vavilov-Cherenkov inducido por un pulso electromagnético.....	38
3.3. Ejemplos.....	44
3.3.1. El pulso gaussiano.....	44
3.3.2. El pulso electromagnético de sombrero de copa .....	45
<b>4. El papel del medio en la emisión de radiación Cherenkov</b> .....	47
4.1. La condición Cherenkov sobre la velocidad de la distribución de carga.....	48
4.2. Medios no dispersivos.....	49
4.3. Medio transparente con dispersión.....	51
4.4. Medio semi-absorbente .....	53
<b>5. El campo electromagnético en el problema de Radiación de Transición</b> .....	58
5.1. Las ecuaciones diferenciales para el campo electromagnético en el fenómeno de Radiación de Transición.....	58
5.2. El campo electromagnético en $z \neq 0$ .....	64
5.3. Análisis de la discontinuidad en $z=0$ .....	68
5.4. Usando las condiciones a la frontera para determinar el campo electromagnético .....	72
<b>6. Conclusiones</b> .....	75
<b>Referencias</b> .....	78

# Capítulo 1

## Introducción

En la Electrodinámica Clásica se asegura que para que una partícula cargada emita radiación electromagnética debe estar acelerada. Sin embargo, esta aseveración es cierta solamente en el vacío, pues si la partícula se mueve a través de un medio, o cerca de éste, la emisión de radiación electromagnética es más una regla que una excepción. De hecho, para que no se emita radiación electromagnética se necesita que el medio sea homogéneo, que su permitividad no sea función del tiempo y que la partícula viaje con una velocidad menor que la velocidad de fase de cualquier onda que pueda propagarse en ese medio.

Entre los fenómenos radiativos inducidos por el paso de partículas cargadas a través de un medio, quizá los más conocidos, gracias a sus aplicaciones, sean el efecto Vavilov-Cherenkov y la Radiación de Transición, los cuales tienen en común el que se genera radiación electromagnética cuando se tiene una carga viajando con velocidad constante a través de un medio. Claramente, estos efectos contrastan con lo que se observa en el caso de una partícula viajando con velocidad constante en el vacío.

En el efecto Vavilov-Cherenkov, observado por primera vez en 1934 por P. A. Cherenkov y S. I. Vavilov [1] y estudiado teóricamente por I. E. Tamm e I. M. Frank en 1937 [2], se emite radiación electromagnética de frecuencia  $\omega$  cuando la velocidad de la carga viajera es mayor que la velocidad de fase de la luz de esa frecuencia en el medio, esto es cuando  $v > c/n(\omega)$ , con  $n(\omega)$  el índice de refracción del medio para la frecuencia  $\omega$ . Además, el ángulo  $\theta$  entre la velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula y el vector de onda  $\mathbf{k}$  de las ondas electromagnéticas emitidas, está dado por la expresión

$$\cos \theta = \frac{c}{vn(\omega)}, \quad (1)$$

indicando que las ondas emitidas a lo largo de la trayectoria de la fuente, con una velocidad de fase  $c_p = c/n(\omega)$ , están en fase sobre una superficie cónica (Figura 1) conocida como *cono Cherenkov*. Esta condición, verificada experimentalmente en 1938 por Collins y Reiling [3], tiene un análogo en acústica el llamado cono Mach, que es la onda cónica que emite una fuente supersónica.



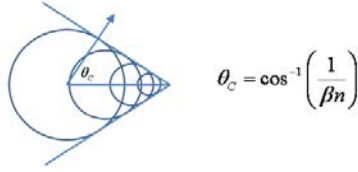


Figure 1: Figura 1. Cono Cherenkov

Cabe mencionar que en 1904, mucho antes de que se observara el efecto Vavilov-Cherenkov, Arnold Sommerfeld [4,5] sugirió que un electrón moviéndose uniformemente en el vacío con una velocidad mayor que la de la luz, esto es  $v > c$ , debía emitir radiación electromagnética. Esta condición de Sommerfeld coincide con la condición de Cherenkov sobre la velocidad de la partícula si consideramos un índice de refracción  $n = 1$ . En otras palabras, Sommerfeld estudió el efecto Vavilov-Cherenkov para un medio no dispersivo y no refractivo, como lo es el vacío. Sin embargo, ya que de acuerdo con la Teoría Especial de la Relatividad una partícula no puede viajar con una velocidad mayor a la luz y, más aún, la causalidad prohíbe la existencia de partículas viajando con  $v > c$ , dado que podrían ser utilizadas como señales superlumínicas, el resultado de Sommerfeld fue olvidado y nadie pensó en primera instancia en extenderlo al movimiento de una carga en un medio material.

Si experimentalmente se mide el *ángulo Cherenkov*, definido en la ec. (1), al cual se emite radiación electromagnética cuando una partícula viaja a través de un medio de permitividad  $\varepsilon(\omega)$  conocida, se podrá determinar la velocidad que ésta lleva. Ahora bien, ya que en general la constante dieléctrica depende de la frecuencia, la radiación Cherenkov incluye ondas electromagnéticas de distintas frecuencias emitidas a diferentes ángulos, así que si se utilizan filtros de banda muy angosta que seleccionen sólo un intervalo pequeño de frecuencias la precisión en la medición de la velocidad puede mejorarse considerablemente.

Es interesante notar que a pesar de que de 1937 a la fecha han pasado muchos años, el estudio de la radiación emitida por fuentes superlumínicas, es decir aquellas que viajan con una velocidad más grande que la velocidad de la luz en un medio, es un tema que sigue vigente debido a sus aplicaciones [6] principalmente en la detección de partículas [7], basta con mencionar el

uso de la radiación Cherenkov en el observatorio HAWC[8] para la detección de rayos cósmicos, la detección de rayos gamma y la detección de neutrinos [9]. Inclusive, en los últimos años este efecto se ha estado utilizando en el campo de la física médica para la generación de imágenes y el monitoreo de radionúclidos y radioterapia externa en humanos [10]. El estudio del efecto Vavilov-Cherenkov ha llevado a la publicación de cientos de trabajos teóricos y experimentales, al diseño de varios tipos de detectores de partículas y la escritura de monografías, libros y artículos de revisión [11].

En el caso de la Radiación de Transición, predicha por Ginzburg y Frank en 1946 [12] y observada por Goldsmith y Jelley [13], se observa la generación de radiación electromagnética cuando una partícula cargada viaja con velocidad constante a través de un medio que presenta inhomogeneidades, es decir, que su permitividad  $\varepsilon(\omega)$ , que describe su comportamiento eléctrico, cambia como función de la posición o del tiempo. Cabe mencionar que en este caso, a diferencia del efecto Vavilov-Cherenkov en el que la partícula siempre viaja a través de un medio homogéneo, se emite radiación electromagnética independientemente de la magnitud de la velocidad de la partícula.

El caso más sencillo en el que se presenta la Radiación de Transición es el de una carga puntual que cruza la frontera entre dos medios, como podría ser el de una partícula cargada que viajando en el vacío incide sobre un medio lineal, homogéneo e isotrópico. Este problema, analizado por Frank y Ginzburg, en cierto sentido muestra que la Radiación de Transición es un fenómeno mucho más simple que la radiación Vavilov-Cherenkov y ha sido explicado de la siguiente manera: el campo electromagnético en el primer medio, donde la carga se encuentra en cierto momento, está constituido por el campo generado por la carga y el campo generado por su carga imagen, la cual se mueve en el segundo medio hacia la carga. Desde el punto de vista del primer medio, cuando la carga cruza la frontera ésta y su imagen se aniquilan y reconstruyen dando lugar a la emisión de radiación electromagnética.

Al igual que con el efecto Vavilov-Cherenkov, el estudio del fenómeno de Radiación de Transición sigue siendo un tema actual que ha dado lugar a un gran cantidad de trabajos debido a sus numerosas aplicaciones en la física de altas energías, sobre todo en el diseño de detectores de partículas [14].

Aunque, como se ha mencionado, tanto el efecto Vavilov-Cherenkov como la Radiación de Transición han sido ampliamente estudiados, aún existen algunos puntos que deben ser discutidos, sobre todo en lo que respecta al origen de la radiación electromagnética emitida [11]. Por ejemplo, en los

textos de electromagnetismo [15-24] en los que se presenta al efecto Vavilov-Cherenkov, se determina el ángulo que forma el frente de onda de la radiación producida con la dirección en que se mueve la carga (el cono Cherenkov) y se encuentra una expresión para la energía radiada por unidad de trayectoria de la partícula viajera. Sin embargo, no se discute el origen de la radiación ni el porqué la partícula continúa viajando a velocidad constante a pesar que debe de haber una pérdida de energía. En uno de sus trabajos, Volkoff [25] plantea la aparente contradicción que hay entre el efecto Vavilov-Cherenkov y la ley de Gauss; aclarando además que debe tenerse extremo cuidado con el campo electromagnético sobre el cono Cherenkov cuando no hay dispersión, pues en ese caso su comportamiento es extremadamente singular. Existen también otros trabajos en donde se analiza el efecto Vavilov-Cherenkov [17-18, 26-30] y se completa el análisis que aparece en los textos; sin embargo, hay diferentes aspectos físicos que no quedan claros y dificultan la comprensión de este interesante efecto. Incluso, algunos de los métodos seguidos para obtener la expresión de la energía radiada por la carga en la unidad de longitud recorrida pueden parecer contradictorios puesto que a pesar de que en el efecto Vavilov-Cherenkov se supone que la velocidad de la partícula es constante, utilizan la expresión para la potencia radiada por una carga acelerada sin dar argumento alguno que justifique su uso. Por otra parte, la hipótesis según la cual la carga se mueve uniformemente causa también algunos problemas, puesto que al no hacerse mención de fuerza externa alguna que le restituya a la carga la energía que pierde por radiación, la carga aparece como una fuente inagotable de energía, lo que contradice el balance energético que se obtiene de la teoría electromagnética [11,31].

En el caso de la Radiación de Transición existen diversas deducciones [17-18,32-38], sin embargo, las de Durand [32] y Jackson [33] destacan sobre las otras dado que se basan en una idea sencilla y bella: la radiación tiene su origen en la polarización del medio, que fue inducida por el paso de la partícula cargada a través de éste. Es extraño que esta idea tan sencilla no se haya aplicado en el estudio del efecto Vavilov-Cherenkov a pesar de que existe una amplia literatura en la cual se discuten muchos de los detalles de este efecto desde diferentes puntos de vista.

En este trabajo, nuestro objetivo es discutir detalladamente el origen físico tanto del efecto Vavilov-Cherenkov como de la Radiación de Transición, considerándolos como efectos colectivos en donde claramente el medio juega un papel importante. Además, se demuestra la gran ventaja que tiene nuestra

interpretación del efecto Vavilov-Cherenkov sobre el estudio usual que se hace de este efecto, ya que no sólo permite discutir el origen físico de la radiación electromagnética que se emite, sino que también permite el cálculo, de forma directa y simple, del espectro de emisión Cherenkov cuando se tienen distintas distribuciones de cargas moviéndose con velocidad constante en el interior de un medio lineal, homogéneo e isotrópico. El mostrar explícitamente que la polarización, dependiente del tiempo, del medio es la responsable de la radiación electromagnética que se emite y por tanto que el medio es la fuente de la radiación y no la partícula viajera, resuelve el problema de la aparente contradicción que se tenía cuando se considera que la partícula se mueve a velocidad constante a pesar de la emisión de radiación. Cabe destacar que en este trabajo también se mostrará que este efecto puede ser inducido por un pulso electromagnético en el que claramente no se tiene una carga eléctrica, es decir, tenemos que ondas electromagnéticas inducen también la generación de radiación electromagnética, lo cual resulta novedoso.

Por otra parte, en la literatura usual no se calculan todas las componentes del campo electromagnético presente en el fenómeno de la Radiación de Transición ya que las condiciones a la frontera no proporcionan toda la información necesaria. Dado que es claro que un análisis completo de este problema requiere de determinar todas las componentes del campo electromagnético, en este trabajo, utilizando la teoría de distribuciones y haciendo una analogía con los problemas típicos de la mecánica cuántica, exhibimos explícitamente el cálculo de todas las componentes del campo eléctrico y magnético, lo cual no se ha realizado anteriormente.

Teniendo en mente nuestro objetivo, este trabajo se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se analiza el efecto Vavilov-Cherenkov utilizando la idea de que al moverse a través de un medio, una partícula cargada induce la formación de dipolos elementales, dependientes del tiempo, de forma que cuando la velocidad de la carga es mayor que la velocidad de la luz en el medio la radiación emitida por estos dipolos se superpone coherentemente para dar lugar a la radiación Cherenkov.

Una vez que se ha establecido un modelo para la emisión de la radiación Cherenkov, se procede a analizar la emisión de este tipo de radiación inducida por una partícula puntual, distribuciones extensas de carga y un dipolo eléctrico sin carga neta.

Ahora bien, ya que el paso de un pulso electromagnético, o paquete de

onda, a través de un medio también induce una polarización dependiente del tiempo en éste y por lo tanto deberá emitirse radiación Cherenkov, en el capítulo 3 se obtiene el espectro de emisión para distintos tipos de paquetes de onda.

Dado que las propiedades del medio determinan el intervalo de frecuencias en las que se emite radiación Cherenkov, en el capítulo 4 se analiza con detalle el papel que juega el medio en la emisión de la radiación. Se exhibe que es posible definir un límite inferior para la velocidad de la partícula, el cual no depende de la frecuencia cuando se consideran tanto la respuesta específica del medio como la condición sobre la velocidad de la partícula.

Finalmente, en el capítulo 5 se estudia a la Radiación de Transición, haciendo especial énfasis en lo que sucede en la frontera entre dos medios. Se utiliza la teoría de distribuciones y se hace una analogía con los problemas típicos de la mecánica cuántica, se para calcular todas las componentes del campo eléctrico y magnético.

## Capítulo 2

### El efecto Vavilov-Cherenkov como un efecto colectivo<sup>1</sup>

En la literatura especializada en Electrodinámica Clásica [5, 15-24], se afirma que la energía radiada por unidad de tiempo que se emite cuando una partícula puntual viaja con velocidad constante a través de un medio, se obtiene a partir de la solución de las ecuaciones de Maxwell, considerando a la carga como fuente, y de la definición del vector de Poynting. Aunque este análisis representa un método simple y directo, tiene la desventaja de que puede conducir a la idea equivocada de que la única fuente de la radiación electromagnética que se observa es la partícula viajera, contradiciendo el hecho de que ésta mantiene su movimiento con velocidad constante.

Por otra parte, aunque en el caso de la Radiación de Transición la emisión de radiación electromagnética ha sido analizada desde diferentes perspectivas [17-18, 32-38], es interesante notar que el método aplicado por Durand y Jackson, quienes utilizan una idea sugerida por Weisskopf [33], además de ser muy claro está basado en una bellísima idea debido a su sencillez: la radiación electromagnética que se emite se debe a la polarización del medio que ha sido inducida por el paso de la partícula cargada a través de éste.

Es claro que si la posición de la partícula al viajar a través del medio cambia en función del tiempo, la polarización inducida en el medio también será una función dependiente del tiempo, dando lugar a la emisión de radiación electromagnética. Resulta extraño que esta idea no haya sido utilizada para analizar también al efecto Vavilov-Cherenkov, a pesar de que éste ha sido ampliamente estudiado en numerosos textos y artículos, en donde además se discuten en profundidad varias de sus características desde diferentes puntos de vista.

En este capítulo, a diferencia de lo que se presenta en la literatura, se analizará al efecto Vavilov-Cherenkov, como un efecto colectivo. Se utilizará la idea de Durand y Jackson para el fenómeno de Radiación de Transición, es decir: una partícula cargada viajando en el interior de un medio, con velocidad  $v$  constante, induce una polarización dependiente del tiempo de éste, la cual será responsable de la radiación electromagnética que se emite, demostrando que el medio es la fuente de la radiación y no la partícula viajera. Se demostrará además que la magnitud de la velocidad de la carga

---

<sup>1</sup>Roa-Neri, J. A. E., Jiménez J. L. and Villavicencio M. (1995) Eur. J. Phys. 16, 191-194

juega un papel muy importante: si  $v < c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$  no se emite radiación electromagnética, pero si  $v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$  si la hay. Cabe mencionar, que nuestra aproximación matemáticamente es mucho más simple que los otros métodos utilizados para analizar el efecto Vavilov-Cherenkov y tiene la gran ventaja de que nos permite hacer énfasis en los aspectos físicos de la emisión de radiación Cherenkov.

## 2.1. La polarización inducida y el efecto Vavilov-Cherenkov generado por una carga puntual

Como un primer paso, se necesita hacer la siguiente hipótesis: ya que la partícula puntual siempre viaja dentro del medio aparecerá un efecto de apantallamiento sobre la magnitud  $q$  de su carga, de forma que se debe considerar que tiene una carga efectiva  $q/\varepsilon(\omega)$  [32].

Si suponemos que el medio es lineal, homogéneo e isotrópico, la transformada de Fourier de la densidad de polarización inducida en él está dada por la expresión

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) = \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{4\pi} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega) = \chi(\omega) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega), \quad (2)$$

donde  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega)$  es el campo eléctrico generado por una partícula puntual de carga  $q/\varepsilon(\omega)$  que viaja con velocidad constante como si estuviese en el vacío. Debemos mencionar que las frecuencias relevantes en el efecto Vavilov-Cherenkov, donde se satisface la ecuación (2) son aquellas menores a la frecuencia de resonancia óptica [39].

El campo eléctrico generado por la carga viajera que aparece en la ecuación (2) depende de su posición  $\mathbf{r}$ , con respecto al sistema de referencia que hayamos elegido y debe evaluarse en la posición  $\mathbf{r}'$  de un elemento de volumen, dentro del medio, con respecto al mismo sistema de referencia. Evidentemente, como la partícula viaja dentro del medio, la distancia  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$  cambia con el tiempo, de forma que la polarización inducida dependerá del tiempo y ésta a su vez generará un campo electromagnético con dependencia temporal.

Más adelante, se demostrará que si la velocidad de la carga es mayor que la velocidad de la luz en el medio, esto es  $v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ , la radiación emitida por cada elemento del material se superpone coherentemente para dar lugar a la emisión de la radiación, mientras que si  $v < c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$  lo que existirá es

una superposición destructiva y por lo tanto no habrá emisión de radiación Vavilov-Cherenkov.

En el espacio de Fourier  $(\mathbf{k}', \omega)$ , el campo eléctrico generado por una carga puntual moviéndose con velocidad constante  $v$  en un medio caracterizado por una permitividad  $\varepsilon(\omega)$  está dado por la expresión [40]

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}', \omega) = \frac{2iq}{\varepsilon(\omega)} \left[ \frac{\omega}{c^2} v - k' \right] \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})}{k'^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (3)$$

mientras que el momento dipolar eléctrico de un elemento de volumen  $d^3r'$  alrededor de  $\mathbf{r}'$  en el medio será  $\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) d^3r'$ . En la zona de radiación, considerando solo el primer término diferente de cero del desarrollo multipolar, el campo electromagnético generado por un dipolo eléctrico  $\mathbf{p}$  toma la forma

$$\mathbf{B} = k^2 \left( \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{p} \right) \frac{e^{ikr}}{r},$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}},$$

por lo que en este caso, el campo electromagnético de radiación generado por cada uno de los elementos del medio estará dado por las expresiones

$$d\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikR}}{R} \hat{\mathbf{k}} \times \left( \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right) d^3r' \quad (4)$$

y

$$d\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \hat{\mathbf{k}} \times d\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega),$$

con  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  y donde, como es usual,  $\mathbf{k}$  es el vector de onda cuya magnitud está dada por

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon(\omega)} / c.$$

Si consideramos a los elementos de volumen del dieléctrico como fuentes localizadas de radiación [32], se puede utilizar la aproximación de radiación  $R \simeq r - \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{k}}$ , con lo cual la ec. (4) se transforma en

$$d\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikR}}{r} \hat{\mathbf{k}} \times \left( \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right) e^{-i\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{k}}} d^3r'.$$

Si se sustituye la densidad de polarización  $\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega)$ , dada en la ec. (2), y se integra sobre todo el espacio, se obtiene que el campo eléctrico total de radiación es

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \chi(\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \hat{\mathbf{k}} \times \left( \mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}$$



Al sustituir a  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega)$  en términos de su transformada de Fourier,

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' \mathbf{E}_0(\mathbf{k}', \omega) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'},$$

en la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) &= k^2 \chi(\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times \\ &\times \int d^3r' \hat{\mathbf{k}} \times \left[ \left( \int d^3k' \mathbf{E}_0(\mathbf{k}', \omega) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \right) \times \hat{\mathbf{k}} \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \\ &= k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \chi(\omega) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int d^3k' d^3r' \hat{\mathbf{k}} \times \left[ \mathbf{E}_0(\mathbf{k}', \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right] e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'}. \end{aligned}$$

La integral sobre  $d^3r'$  es inmediata obteniéndose un factor  $(2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , que facilita enormemente la integración sobre  $d^3k'$  para llegar a que

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \chi(\omega) \hat{\mathbf{k}} \times \left[ \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right]. \quad (5)$$

Sustituyendo en esta última expresión la ec. (3) se obtiene finalmente que para una partícula puntual viajando con velocidad constante dentro del medio, la polarización de este genera un campo eléctrico dado por

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \chi(\omega) (2\pi)^{3/2} \frac{2iq\omega}{\varepsilon(\omega) c^2} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left[ (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}} \right]. \quad (6)$$

Es interesante notar que, como era de esperarse,  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{rad} = 0$ , lo que claramente indica que se trata de un campo transversal de radiación. Definiendo al vector unitario

$$\hat{\phi} = \frac{(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}}}{\left| (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}} \right|} \quad (7)$$

la ec. (6) puede escribirse de una manera más compacta

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \chi(\omega) (2\pi)^{3/2} \frac{2iq\omega}{\varepsilon(\omega) c^2} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} v \text{sen} \theta \hat{\phi},$$

donde el ángulo  $\theta$ , que es el ángulo entre la velocidad de la partícula y la dirección del vector de onda  $\mathbf{k}$ , se define a través de la relación  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = v \cos \theta$ , la expresión para el ángulo Cherenkov, ec. (1).

Cuando se estudia al efecto Vavilov-Cherenkov se busca determinar la energía emitida por unidad de longitud de camino de la carga viajera por lo que es necesario calcular  $|\mathbf{E}_{rad}|^2$ . Esto implica que en el cálculo aparecerá la distribución delta de Dirac (comunmente llamada función delta de Dirac) elevada al cuadrado. Es decir, se tendrá una función generalizada elevada al cuadrado, lo que resulta interesante debido a que no es fácil trabajar con distribuciones y menos aún cuando se tienen productos o potencias de éstas, sobre todo considerando que estas operaciones no se encuentran claramente definidas. Debemos mencionar que la aparición de la función delta de Dirac elevada al cuadrado no es rara en la Física, pues se presenta en varios problemas, e inclusive, en el capítulo 5 de este trabajo se mostrará que en el análisis de la Radiación de Transición no sólo aparece sino que además se encuentra acompañada de productos y potencias de otras funciones generalizadas. En ese capítulo se mostrará que un manejo heurístico de estos productos y potencias lleva a resultados correctos en el análisis del campo electromagnético para el problema de la Radiación de Transición.

En este momento, se trabajará con la  $\delta^2$  utilizando la definición que hacen Panofsy y Phillips [41] y Good y Nelson [42] de la distribución delta de Dirac como el límite:

$$\begin{aligned} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) &= \frac{1}{2\pi v} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \exp i \left[ \left( \frac{\omega}{v} - k \cos \theta \right) z \right] dz = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi v} \frac{\text{sen} \left[ \left( \frac{\omega}{v} - k \cos \theta \right) \frac{L}{2} \right]}{\left( \frac{\omega}{v} - k \cos \theta \right)}, \end{aligned}$$

de forma que si se define

$$f = \frac{\omega}{v} - k \cos \theta,$$

se tiene que el campo eléctrico puede escribirse como

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \chi(\omega) (2\pi)^{3/2} \frac{2iq\omega}{\varepsilon(\omega) c^2} \frac{\text{sen} \theta}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{L \text{sen}(fL/2)}{2 \pi (fL/2)} \hat{\phi},$$

en donde no hay que olvidar que se debe tomar el límite  $L \rightarrow \infty$ .

Ya que la energía radiada por unidad de frecuencia, por unidad de ángulo sólido, está dada por la ecuación

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = 2 \frac{c}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\varepsilon(\omega)} |r \mathbf{E}_{rad}|^2, \quad (8)$$

se tiene que

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{2c\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{4\pi} \chi^2(\omega) |k^2|^2 (2\pi)^3 \frac{q^2 \omega^2}{|\varepsilon(\omega)|^2 c^4} \frac{L^2}{|k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}|^2} \frac{\text{sen}^2(fL/2)}{\pi^2 (fL/2)^2} \text{sen}^2\theta,$$

e integrando sobre el ángulo sólido se obtiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = |\varepsilon(\omega) - 1|^2 \frac{\pi \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{2} \frac{|k^2|^2 q^2 \omega^2 L^2}{|\varepsilon(\omega)|^2 c^2 \pi^2} \int_{-1}^1 du (1 - u^2) \frac{\text{sen}^2(fL/2)}{(fL/2)^2},$$

con  $u = \cos \theta$ .

Fijemonos en la integral que aparece en esta última expresión. Evaluarla es directo si se observa que el denominador que aparece en el integrando se anula cuando  $u = u_c$ , con  $u_c = \omega / (vk)$ , lo que indica que en ese punto se tiene un máximo muy agudo de forma que la radiación se emite principalmente en el ángulo definido por la relación  $\cos \theta = \omega / (vk)$ , el ángulo Cherenkov. Así que podemos considerar que

$$\int_{-1}^1 du (1 - u^2) \frac{\text{sen}^2(fL/2)}{(fL/2)^2} \simeq (1 - u_c^2) \int_{-1}^1 du \frac{\text{sen}^2(fL/2)}{(fL/2)^2}.$$

Para realizar esta última integración es conveniente hacer la sustitución

$$\eta = (fL/2),$$

con lo cual

$$\int_{-1}^1 du \frac{\text{sen}^2(fL/2)}{(fL/2)^2} = \frac{2}{kL} \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \frac{\text{sen}^2 \eta}{\eta^2}, \quad (9)$$

y los límites de integración quedan definidos como

$$\eta_1 = \left( \frac{\omega}{v} - k \right) \frac{L}{2}$$

y

$$\eta_2 = \left( \frac{\omega}{v} + k \right) \frac{L}{2}.$$

Observemos que cuando se toma el límite  $L \rightarrow \infty$ , el comportamiento de  $\eta_1$  y  $\eta_2$  es realmente de gran importancia. Ya que  $c$ ,  $k$  y  $\omega$  son cantidades positivas, en este límite  $\eta_2 \rightarrow \infty$ . Sin embargo, en este mismo límite hay dos posibilidades para  $\eta_1$ . Si  $\frac{\omega}{v} > k$ , tendremos que  $\eta_1 \rightarrow \infty$  y la integral (9) se anula. Por otra parte, si  $\frac{\omega}{v} < k$  el coeficiente  $\eta_1 \rightarrow -\infty$  y la integral es distinta de cero, indicando que hay radiación.

En resumen, el resultado de la integral (9) puede expresarse como

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \frac{\text{sen}^2 \eta}{\eta^2} = \pi \Theta \left( k - \frac{\omega}{v} \right),$$

donde  $\Theta$  es la función escalón de Heaviside, la cual es una función generalizada [43]. Este resultado muestra explícitamente que cuando  $k - \frac{\omega}{v} < 0$  la superposición de la radiación que emite cada elemento del medio no es coherente, mientras que si  $k - \frac{\omega}{v} > 0$  la superposición es coherente dando origen a la radiación Cherenkov.

Así pues, si se considera que se tiene  $k - \frac{\omega}{v} > 0$ , lo que se traduce, utilizando  $k = (\omega\sqrt{\varepsilon}/c)$ , en que la partícula se mueve con velocidad mayor que la velocidad de la luz en ese medio, la radiación emitida por unidad de intervalo de frecuencia y por unidad de longitud de camino es

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} = \frac{|\varepsilon(\omega) - 1|^2}{\left| \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varepsilon(\omega) \right|^2} |k^2|^2 \frac{\omega \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{ck} \frac{q^2 \omega^2}{c} \left( 1 - \frac{\omega^2}{v^2 k^2} \right) \Theta \left( k - \frac{\omega}{v} \right).$$

Finalmente, si se sustituye  $k = (\omega\sqrt{\varepsilon}/c)$  la expresión para la energía radiada se reduce a

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} = \frac{q^2 \omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \Theta \left( k - \frac{\omega}{v \varepsilon(\omega)} \right). \quad (10)$$

De aquí que

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{c^2} L \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \Theta \left( k - \frac{\omega}{v \varepsilon(\omega)} \right),$$

o bien

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{q^2}{c^2} \int d\omega \omega^2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)}\right) \Theta \left(k - \frac{\omega}{v \varepsilon(\omega)}\right), \quad (11)$$

expresión que concuerda exactamente con la intensidad de radiación por unidad de longitud conocida para el efecto Vavilov-Cherenkov [15].

Es conveniente recalcar que la radiación se emite principalmente en un ángulo  $\theta_c$  dado por

$$\cos \theta_c = c/v \sqrt{\varepsilon(\omega)}. \quad (12)$$

y que la condición para la existencia de radiación implica que solo habrá emisión de radiación si la velocidad de la partícula es mayor que la velocidad de propagación de la luz en el medio,  $v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ , una característica esencial del efecto Vavilov-Cherenkov.

Acabamos de mostrar, que uno de los modelos aplicados en el análisis de la Radiación de Transición también puede utilizarse para estudiar el efecto Vavilov-Cherenkov. Este es un claro ejemplo de como una idea física sencilla e intuitiva es de gran utilidad para analizar uno de los efectos radiativos en medios materiales más conocidos y discutir sus aspectos físicos más importantes. Con este modelo además se ha demostrado que la fuente real de la radiación Cherenkov no es la propia partícula viajera sino la polarización, dependiente del tiempo, inducida en el medio por el paso de ésta. De aquí que se puede considerar a la radiación Cherenkov como un efecto colectivo en donde la partícula cargada dispara un proceso en el que el medio radía como un todo.

## 2.2. La radiación Cherenkov generada por distribuciones extensas de carga<sup>2</sup>

Cuando se analiza el efecto Vavilov-Cherenkov, generalmente se considera el caso de una carga puntual que viaja uniformemente en el interior de un medio material. Sin embargo, este análisis puede generalizarse a distribuciones extensas de carga [45], o incluso a un grupo de partículas viajeras[24,28,44].

---

<sup>2</sup>Villavicencio M, Roa-Neri J A E and Jiménez J L (1996) *Il Nuovo Cimento* **111B**, 1041-1049

Villavicencio M, Jiménez J L and Roa-Neri J A E. (1999) *Can. J. Phys.* **77**, 775-84

El propósito de esta sección es aplicar nuestro modelo del efecto Vavilov-Cherenkov como un efecto colectivo para analizar la radiación Cherenkov generada por el paso de distribuciones extensas de carga a través de un medio lineal, homogéneo e isotrópico.

En analogía al procedimiento que seguimos en el caso de la carga puntual, para distribuciones extensas de carga que se mueven en el interior de un medio con una velocidad  $\mathbf{v}$  constante, debemos considerar en la ec. (5) el campo eléctrico de una distribución de carga efectiva  $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) / \varepsilon(\omega)$ , moviéndose en el vacío, esto es,

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i}{\varepsilon(\omega)} \left[ \frac{\omega}{c^2} v - k \right] \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

En consecuencia, se tendrá que ahora

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = 2(2\pi)^{5/2} i k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\chi(\omega)}{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega}{c^2} \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left[ (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}} \right],$$

en donde se puede ver que  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{rad} = 0$ , de forma que se tiene como se esperaba un campo transversal de radiación.

Con la definición del vector unitario  $\hat{\phi}$ , podemos escribir al campo de radiación de una forma más compacta

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = 2(2\pi)^{5/2} i k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\chi(\omega)}{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega}{c^2} \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} v \sin\theta \hat{\phi}, \quad (13)$$

la cual es una expresión totalmente general para el campo eléctrico de radiación generado por una distribución extensa de carga  $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$  que se mueve en el interior de un medio material con una velocidad constante  $\mathbf{v}$ . Observemos que, el ángulo  $\theta$  corresponde al ángulo entre el vector de velocidad y el vector de onda  $\mathbf{k}$ .

Para una distribución de carga con simetría esférica, esto es, una distribución de la forma

$$\rho(|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|),$$

con  $\mathbf{r}(t)$  la posición del centro de la distribución de carga con respecto a un origen, se tiene

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = \sqrt{2\pi} \rho(k) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}).$$

Sustituyendo este resultado en la ec. (13) se tendrá que

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = 2(2\pi)^3 ik^2 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\chi(\omega)\omega}{\varepsilon(\omega)c^2} \frac{\tilde{\rho}(k)\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} v \text{sen}\theta \hat{\phi}.$$

De nuevo, al igual que en el caso de la carga puntual, la función delta de Dirac garantiza que la radiación se emite principalmente en el ángulo Cherenkov definido por la expresión

$$\cos\theta = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon(\omega)}}.$$

Así pues, la energía radiada por unidad de frecuencia por unidad de ángulo sólido para distribuciones extensas de carga con simetría esférica será

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = 4(2\pi)^5 \frac{\chi^2(\omega)\omega^2 k^4}{[\varepsilon(\omega)]^{3/2} c^3} \frac{|\tilde{\rho}(k)|^2 \delta^2(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}]^2} v^2 \text{sen}^2\theta.$$

Manejando el cuadrado de la función delta de Dirac al igual que en la sección previa se tendrá que

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = (2\pi)^3 \frac{\omega}{c^2} \left| \tilde{\rho}\left(k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}\right) \right|^2 \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v^2}\right) \Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right), \quad (14)$$

donde se ha sustituido  $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ .

La función generalizada de Heaviside  $\Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right)$  exhibe explícitamente que existe una superposición constructiva de la radiación emitida por cada elemento del medio sólo si  $v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ , la condición Cherenkov sobre la velocidad de la distribución de carga.

Es conveniente recalcar que el análisis del efecto Vavilov-Cherenkov como un efecto colectivo nos proporciona un método claro y simple para determinar el espectro de radiación emitido por cualquier distribución de carga con simetría esférica pues la ec. (14) es completamente general y no es necesario realizar integrales complicadas como sucede con el método tradicional.

Con el objetivo de mostrar esto último aplicaremos nuestro resultado para determinar el espectro de radiación generado por dos distribuciones de carga.

### 2.2.1. El cascarón esférico de carga

Este tipo de distribución de carga, dada por

$$\rho(|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|) = \frac{Q}{4\pi a^2} \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)| - a),$$

con  $a$  el radio de la distribución, en el espacio de Fourier  $(\mathbf{k}', \omega)$  se escribe de la forma

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\text{sen}(ka)}{ka}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (14) tendremos que la energía radiada por unidad de frecuencia y por unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{Q^2\omega}{a^2} \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v^2}\right) \frac{\text{sen}\left(\omega a \sqrt{\varepsilon(\omega)}/c\right)}{\omega^2 \varepsilon(\omega)} \Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right).$$

Observemos que esta expresión se reduce a la de la carga puntual en el límite  $a \rightarrow 0$ , lo cual comprueba la validez de nuestro resultado.

### 2.2.2. Distribución de carga tipo Yukawa

Para una partícula con una estructura tipo Yukawa de la forma

$$\rho(|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|) = \frac{\alpha^2 \exp[-\alpha |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|]}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|}$$

es fácil demostrar que en el espacio de Fourier  $(\mathbf{k}', \omega)$

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{1}{\alpha^2 + k^2},$$

Entonces, utilizando la ec. (14) la energía radiada por unidad de frecuencia por unidad de ángulo sólido por este tipo de partícula es

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{\alpha^2\omega}{(4\pi)^2 c^2} \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v^2}\right) \left(\frac{1}{\alpha^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)}\right)^2 \Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right).$$



Cabe mencionar que aunque en este caso también se trata de una distribución de carga con simetría esférica, el espectro de energía que se obtuvo es notablemente diferente al de la carga puntual y al del cascarón esférico de carga, lo que demuestra que la estructura de la distribución juega un papel importante en la forma del espectro de emisión Cherenkov. Por otra parte, la condición sobre la velocidad sigue siendo la misma, esto es, independientemente de la forma de la distribución para que exista radiación Cherenkov, la velocidad de la distribución de carga debe de ser mayor que la velocidad de la luz en el medio.

### 2.2.3. El paquete de partículas

En los grandes aceleradores de partículas usualmente se crean paquetes de partículas cargadas que muchas veces desencadenan la aparición del efecto Vavilov-Cherenkov [16,26,28]. Ya que estos grupos de partículas pueden describirse utilizando una distribución extensa de carga con una sección transversal infinitesimal y un tamaño finito a lo largo de la dirección de movimiento, podemos analizar fácilmente la radiación Cherenkov que se emitirá aplicando el método que hemos utilizado en las secciones anteriores.

Si consideramos, sin pérdida de generalidad, que el paquete de partículas se mueve en la dirección  $z$  y que en esta dirección la distribución de carga presenta la forma de una función gaussiana con parámetro  $\alpha$ , de forma que la longitud  $2\alpha$  representa el tamaño del paquete de partículas, podemos escribir que

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi}\alpha} \delta(x) \delta(y) \exp\left[-\frac{(z - vt)^2}{\alpha^2}\right],$$

con  $Q$  la carga total del paquete. Así pues, en el espacio de Fourier  $(\mathbf{k}', \omega)$  se tiene

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{k_z \alpha}{2}\right)^2\right].$$

Cabe resaltar que aunque esta distribución de carga no es esféricamente simétrica, su transformada de Fourier presenta una estructura análoga a los casos antes estudiados por lo que podemos encontrar la expresión para la

energía radiada de la misma forma. Así pues, en este caso se tendrá que

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{Q^2\omega}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v^2}\right) \exp\left[-\frac{\omega^2\alpha^2}{2v^2}\right] \Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right), \quad (15)$$

el cual es el mismo resultado que se obtiene en otros trabajos [28,45] en los que se aplicó un método diferente para el análisis de la radiación Cherenkov.

Las diferencias en la estructura matemática que presentan los espectros de emisión que se han obtenido para estos tres ejemplos de distribución extensa de carga, demuestran explícitamente que existe una estrecha relación entre la forma del espectro de emisión y la estructura de la distribución de carga. Por otra parte, también se observa que tanto el cono Cherenkov como la condición sobre la velocidad de la distribución para que aparezca la radiación Cherenkov son independientes de la forma de la distribución de carga. Así pues, se puede considerar que el cono Cherenkov es un efecto cinemático debido al movimiento uniforme de la distribución de la carga con una velocidad mayor que la velocidad de la luz en el medio.

Es conveniente resaltar el alcance y la gran simplicidad de cálculo que nos proporciona el considerar al efecto Vavilov-Cherenkov como un efecto colectivo, pues nos permite calcular, de manera sencilla y expedita, el espectro de emisión generado por distintas distribuciones de carga. Esto exhibe las ventajas que presenta nuestro método sobre los métodos usados por otros autores.

Puesto que, como se ha demostrado, la energía perdida por unidad de longitud y por unidad de frecuencia, en forma de radiación electromagnética, depende de la forma de la distribución de carga viajera; mientras que el cono Cherenkov y la condición sobre la velocidad de la distribución para que haya emisión de radiación son los mismos que en el caso de la carga puntal, se puede concluir que el análisis del espectro de emisión de radiación Cherenkov que se obtenga experimentalmente puede dar información sobre la estructura y forma de la carga, o paquete de cargas, que lo desencadenó.

## 2.3. El efecto Vavilov-Cherenkov generado por un dipolo eléctrico puntual<sup>3</sup>

En las secciones anteriores se analizó la emisión de radiación Cherenkov por una carga puntual y distribuciones extensas de carga viajando a velocidad constante en el interior de un medio material. Este análisis se realizó considerando al efecto Vavilov-Cherenkov como un fenómeno colectivo, en el que la radiación tiene su origen en la polarización, dependiente del tiempo, inducida por el paso de distribución de carga viajando a través de un medio. Ahora, es interesante notar que una distribución de carga neutra, como lo es un dipolo eléctrico, también puede generar, bajo ciertas circunstancias, la emisión de radiación Cherenkov. Como es de esperarse, esta emisión de radiación dependerá de la dirección en la que apunta el momento dipolar eléctrico característico del dipolo con respecto a la dirección de su movimiento. El análisis de este ejemplo permite demostrar que no siempre se obtendrá una expresión para la energía radiada con la misma estructura que la obtenida para una carga puntual, ec. (11).

Ahora bien, a diferencia de la sección anterior, para corroborar los resultados que se obtengan se utilizará primero el método usual de análisis del efecto Vavilov-Cherenkov y después el método desarrollado en las secciones anteriores.

### 2.3.1. Radiación Cherenkov generada por un dipolo eléctrico puntual

Consideremos un dipolo eléctrico puntual  $\mathbf{p}$ , moviéndose en el interior de un medio material caracterizado por una permitividad  $\varepsilon(\omega)$ . Para calcular la energía radiada por unidad de longitud por el dipolo eléctrico se necesita como primer paso encontrar la expresión para el campo eléctrico que éste genera. Este campo se obtiene resolviendo las ecuaciones de Maxwell, en términos de los potenciales electromagnéticos  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$  y  $\phi(\mathbf{r},t)$ , en el espacio de Fourier  $(\mathbf{k},\omega)$ , en donde se tiene que

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right)\tilde{\phi}(\mathbf{k},\omega) = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)}\tilde{\rho}(\mathbf{k},\omega), \quad (16)$$

---

<sup>3</sup>Villavicencio M, Jiménez J L and Roa-Neri J A E (1998) Found. Phys. Lett **11**, 445-59

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right) \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k},\omega). \quad (17)$$

En este caso  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{\mathbf{J}}$  corresponden, respectivamente, a la densidad de carga y a la densidad de corriente, en el espacio de Fourier, inducidas en el medio por el dipolo eléctrico.

Si  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  es la polarización por unidad de volumen, la densidad de carga inducida está dada por:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t),$$

con

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)),$$

donde  $\mathbf{p}$  corresponde al momento dipolar eléctrico moviéndose en una trayectoria definida por el vector  $\mathbf{r}'(t)$ . Dado que el dipolo se mueve con velocidad constante

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}t,$$

con lo que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

Definiendo la transformada de Fourier como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k d\omega \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

y considerando que el dipolo mantiene su dirección y magnitud, la densidad de carga, en el espacio de Fourier, es

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (18)$$

mientras que la densidad de corriente está dada por

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{v}\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = -i\mathbf{v} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}).$$

Substituyendo estas expresiones en las ecs. (16) y (17) se obtienen las transformadas de Fourier de los potenciales

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) = -2i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\varepsilon(\omega)} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right)}, \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, \omega) = -2i\mathbf{v}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}) \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{c(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega))} = \epsilon(\omega) \frac{\mathbf{v}}{c} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega). \quad (20)$$

Ya que en este espacio el campo eléctrico y el campo magnético se escriben en términos de los potenciales como

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = -i\mathbf{k}\tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) + i\frac{\omega}{c}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, \omega),$$

la ec. (20) permite escribir

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = i \left[ \frac{\omega\epsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{v} - \mathbf{k} \right] \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) \quad (21)$$

y

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = i\frac{\epsilon(\omega)}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{v} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega). \quad (22)$$

Substituyendo la ec. (19) en la ec. (21) se tiene que el campo eléctrico generado por el dipolo eléctrico viajero está dado por

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\epsilon(\omega)} \frac{\left[ \frac{\omega\epsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{v} - \mathbf{k} \right]}{\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (23)$$

Ahora bien, la energía perdida por unidad de tiempo debida al dipolo eléctrico que viaja en el medio es igual a la energía electromagnética que fluye a través de una superficie cerrada, esto es

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} da. \quad (24)$$

Si se considera, sin perdida de generalidad, que el dipolo eléctrico se mueve dentro del medio con velocidad constante a lo largo de la dirección  $z$ , el problema presenta una simetría cilíndrica por lo que la superficie sobre la que se integrará la ec. (24) será un cilindro de radio  $b$  alrededor de la trayectoria del dipolo, esto es

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\perp} 2\pi b dz,$$

donde  $S_{\perp}$  es la componente del vector de Poynting ortogonal a la dirección  $z$ .

Para simplificar el cálculo, y de nuevo sin pérdida de generalidad, se considerará que  $S_{\perp} = S_x$ , con lo cual

$$\frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{cb}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} dz (E_y B_z - E_z B_y).$$

Pero dado que el campo magnético y el campo eléctrico están relacionados a través de la expresión

$$\mathbf{B} = \varepsilon(\omega) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}, \quad (25)$$

se tendrá que

$$B_z = 0,$$

con lo cual

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = -\frac{cb}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z B_y,$$

lo que puede reescribirse como

$$\frac{d\mathcal{E}(\omega)}{dz} = -cb \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega E_z(\omega) B_y^*(\omega).$$

Esta última expresión puede escribirse solo en términos del campo eléctrico si se toma en cuenta la ec. (25) y si además se considera que el medio en el cual se mueve el dipolo eléctrico es cuasi-transparente, esto es, que la permitividad  $\varepsilon(\omega)$  es una función real, con lo cual se tendrá

$$\frac{d\mathcal{E}(\omega)}{dz} = -vb \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varepsilon(\omega) E_z(\omega) E_x^*(\omega). \quad (26)$$

Así pues, para determinar el espectro de energía radiada solo se necesita determinar  $E_x(\omega)$  y  $E_z(\omega)$ , por lo que se debe usar la transformada inversa de Fourier

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\varepsilon(\omega)} \frac{\left[ \frac{\omega \varepsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{v} - \mathbf{k} \right]}{\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (27)$$

Ahora bien, se debe recalcar que en esta última expresión la información sobre el cono Cherenkov se encuentra contenida en la función delta de Dirac, la cual solo es distinta de cero cuando se satisface

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = kv \cos \theta = (n\omega/c) v \cos \theta,$$

es decir, cuando

$$\cos \theta_c = c / (nv),$$

con  $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  el índice de refracción del medio.

Dado que se debe integrar sobre un cilindro alrededor de la dirección  $z$ , solo será necesario calcular la transformada de Fourier en el tiempo del campo electromagnético y evaluarla a una distancia perpendicular  $b$  de la trayectoria del dipolo, es decir, se debe evaluar el campo eléctrico en el punto

$$\mathbf{r} = (R_x, R_y, 0),$$

con

$$b = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Así pues,

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, 2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\varepsilon(\omega)} \frac{\left[ \frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c^2} v - k_z \right]}{\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right)} \delta(\omega - k_z v) e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}.$$

Ya que

$$\delta(\omega - k_z v) = \frac{1}{v} \delta\left(\frac{\omega}{v} - k_z\right),$$

la integración sobre  $k_z$  es inmediata y si además se elige

$$\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{x}},$$

se obtiene

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2p}{v\varepsilon(\omega)} \left[ \frac{\omega\varepsilon(\omega)v}{c^2} - \frac{\omega}{v} \right] \int \int dk_x dk_y \, k_x \frac{e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2)}, \quad (28)$$

donde

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2} \left[ 1 - \frac{v^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} \right].$$

Es importante mencionar que se ha considerado una orientación específica para el dipolo eléctrico. En general, si el momento dipolar eléctrico  $\mathbf{p}$  apunta en una dirección arbitraria sobre un plano normal a la dirección de movimiento, es usual hacer un promedio sobre todas las posibles orientaciones por lo que aparece un factor de  $\frac{1}{2}$  en el resultado final. La expresión (28) coincide con la obtenida por Ginzburg [17], quien sigue un método diferente.

Cuando la velocidad del dipolo es menor que la velocidad de la luz en el medio, esto es  $v < c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ , se tiene que  $\lambda^2 \geq 0$  y es fácil demostrar [18] que los campos obtenidos no son campos de radiación. Ya que se quiere estudiar la radiación Cherenkov, se debe considerar el caso en que  $v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ , esto es

$$\lambda = -i|\lambda|. \quad (29)$$

La integral

$$I_{xy} = \int \int dk_x dk_y k_x \frac{e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2)},$$

que aparece en la expresión (28) se evalúa utilizando el teorema del residuo dando como resultado

$$I_{xy} = \pi i \int dk_y \exp\left(-R_x \sqrt{R_y^2 + \lambda^2}\right) = 2\pi i \lambda \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} K_1 \left[\lambda \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\right],$$

con lo cual

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2ip\omega}{c^2} \left[1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v^2}\right] \lambda \frac{R_x}{b} K_1[\lambda b]. \quad (30)$$

Por otro lado, la componente  $E_x(\mathbf{r}, \omega)$  del campo eléctrico puede evaluarse de forma análoga ya que

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k 2 \frac{k_x p}{\varepsilon(\omega)} \frac{[-k_x]}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega))} \delta(\omega - k_z v) e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}.$$

La integración sobre  $k_z$  es inmediata y da como resultado

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2p}{v\varepsilon(\omega)} \int \int dk_x dk_y k_x^2 \frac{e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2)}.$$

Ya que

$$\begin{aligned} I'_{xy} &= \int \int dk_x dk_y k_x^2 \frac{e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2)}, \\ &= -\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sqrt{k_y^2 + \lambda^2} \exp\left(-R_x \sqrt{k_y^2 + \lambda^2}\right) \exp(ik_y R_y) = \\ &= -\pi \frac{\partial}{\partial R_x} \left[2\lambda \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} K_1 \left[\lambda \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\right]\right], \end{aligned} \quad (31)$$



se tiene

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p\lambda^2}{\varepsilon(\omega)v} [K_0(\lambda b) + K_2(\lambda b)]. \quad (32)$$

En la zona lejana, en la que se debe considerar  $b \gg 1$ , las funciones modificadas de Bessel pueden aproximarse por su forma asintótica [43]

$$K_n(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \gg 1,$$

por lo que las componentes del campo eléctrico se transforman en

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) \simeq \frac{p\lambda^2}{\varepsilon(\omega)v} \sqrt{\frac{1}{\lambda b}} e^{-\lambda b}, \quad (33)$$

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) \simeq \frac{ip\omega}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v^2}\right) \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda b}} e^{-\lambda b}. \quad (34)$$

Puesto que  $\lambda$  es un número complejo, ec. (29), los campos decrecen con  $b$  y son campos de radiación. Substituyendo las expresiones para las componentes del campo eléctrico en la ecuación (26), la energía radiada por unidad de camino y por unidad de frecuencia está dada por la expresión:

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dzd\omega} = \frac{p^2\omega^3}{c^4} \varepsilon(\omega) \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v^2}\right)^2 \Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right), \quad (35)$$

donde se ha utilizado a la función generalizada de Heaviside para remarcar la condición Cherenkov sobre la velocidad del dipolo,  $v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ .

Debe observarse que aunque esta expresión tiene una estructura similar a la obtenida para el caso de una carga puntual, ec. (10), también presenta grandes diferencias, pues su dependencia con la velocidad de la partícula y la frecuencia es distinta. Sin embargo, es importante recalcar que el cono Cherenkov sigue siendo el mismo.

Después de mostrar la dificultad matemática que implica aplicar el método tradicional de análisis del efecto Vavilov-Cherenkov inducido por un dipolo eléctrico, es conveniente mostrar que este mismo resultado puede obtenerse directamente si aplicamos el método descrito en las secciones anteriores, en donde se analizó al efecto Vavilov-Cherenkov como un efecto colectivo. Desde esta perspectiva, así como en el caso de una carga puntual viajando en el interior de un medio se presenta un efecto de apantallamiento en la magnitud

de la carga, por lo que se trabaja con una carga efectiva  $q/\varepsilon(\omega)$ , en analogía, si ahora se tiene un dipolo eléctrico, caracterizado por un momento dipolar  $\mathbf{p}$ , moviéndose con velocidad constante en el interior de un medio con permitividad  $\varepsilon(\omega)$ , se debe considerar que el campo eléctrico que aparece en la expresión (2),  $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)$ , es el generado por un dipolo eléctrico efectivo de magnitud  $p/\varepsilon(\omega)$ , por lo que en este caso

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\varepsilon(\omega)} \frac{\left[\frac{\omega}{c^2}\mathbf{v} - \mathbf{k}\right]}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (36)$$

Si se sigue el mismo razonamiento que en las secciones anteriores, la expresión para el campo de radiación será

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = 2(2\pi)^{3/2} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \chi(\omega) \frac{\omega}{c^2 \varepsilon(\omega)} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left[ (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}} \right] \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (37)$$

de forma que si se utiliza la definición (7), esta última expresión puede escribirse de forma compacta como

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = 2(2\pi)^{3/2} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \chi(\omega) \frac{\omega}{c^2 \varepsilon(\omega)} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} v \sin \theta \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \hat{\phi}, \quad (38)$$

con  $\theta$  el ángulo Cherenkov definido por la relación  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = v \cos \theta$ .

Esta última expresión tiene una estructura muy similar a la obtenida para la carga puntual por lo que para obtener la expresión para la energía emitida por unidad de frecuencia por unidad de longitud se deberá considerar  $|\mathbf{E}_{rad}|^2$ , lo que involucra de nuevo una función delta de Dirac elevada al cuadrado, la cual se maneja de la misma forma hemos hecho, conduciendo a que en este caso, la radiación emitida por unidad de camino por unidad de frecuencia sea

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} = \frac{\varepsilon(\omega)^{-3/2}}{c^3} |\varepsilon(\omega) - 1|^2 k^5 \omega^2 p^2 \frac{\left(1 - \frac{\omega}{vk}\right)^2}{\left|k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right|^2} \Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right). \quad (39)$$

Si se utiliza  $k = \omega \sqrt{\varepsilon(\omega)}/c$  esta última ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} = \frac{p^2 \omega^3}{c^4} \varepsilon(\omega) \left[1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega) v^2}\right]^2 \Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right),$$

el resultado previamente obtenido, en el cual se tiene la condición Cherenkov para la emisión de radiación y el espectro electromagnético emitido.

Cabe resaltar que la aplicación en este caso de nuestro método nos lleva al resultado de una manera mucho más directa y simple que los métodos usados por otros autores.

### 2.3.2. Radiación Vavilov-Cherenkov para un dipolo eléctrico apuntando en la dirección de movimiento

Como se estudió en la sección 2.2., el análisis de la energía radiada en el efecto Vavilov-Cherenkov, visto como un efecto colectivo, puede ser generalizado al caso de partículas con estructura o grupos de partículas [44-46], obteniéndose que en todos estos casos el espectro de energía radiada tiene la forma

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dzd\omega} = \frac{e^2}{c^2} f(\omega) \left[ 1 - \frac{c^2}{v^2\varepsilon(\omega)} \right] \Theta \left( k - \frac{\omega}{v} \right), \quad (40)$$

con  $f(\omega)$  una función que depende de la distribución de carga. Cabe mencionar que en estos casos no cambia la dependencia con la velocidad. Ahora mostraremos que en el caso del dipolo eléctrico, la energía radiada dependerá significativamente de la orientación del momento dipolar con respecto a su dirección de movimiento.

Como la ec. (27) es válida para cualquier orientación del dipolo, si el dipolo apunta en la misma dirección que su velocidad, esto es

$$\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}},$$

el campo eléctrico es ahora

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, 2 \frac{k_z p}{\varepsilon(\omega)} \frac{\left[ \frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{v} - \mathbf{k} \right]}{\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (41)$$

y sus componentes serán

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\omega p}{v^2\varepsilon(\omega)} \left[ \frac{\omega\varepsilon(\omega)v}{c^2} - \frac{\omega}{v} \right] \int \int dk_x dk_y \frac{e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2)},$$

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\omega p}{v^2\varepsilon(\omega)} \int \int dk_x dk_y \, k_x \frac{e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2)}.$$

Utilizando la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikR}}{k^2 + \eta^2} = \frac{\pi}{\eta} e^{-\eta R},$$

con  $\text{Re } \eta > 0$ , se tiene

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\pi\omega p}{v^2 \varepsilon(\omega)} \left[ \frac{\omega \varepsilon(\omega) v}{c^2} - \frac{\omega}{v} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y R_y} \frac{e^{-R_x \sqrt{R_y^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{k_y^2 + \lambda^2}}. \quad (42)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y R_y} \frac{e^{-R_x \sqrt{R_y^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{k_y^2 + \lambda^2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \cos(k_y R_y) \frac{e^{-R_x \sqrt{R_y^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{k_y^2 + \lambda^2}} = \\ &= 2K_0\left(\lambda \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\right), \end{aligned}$$

con  $\text{Re } \lambda > 0$ , la componente  $E_z(\mathbf{r}, \omega)$  del campo eléctrico será

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\omega^2 p}{v c^2} \left[ 1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega) v^2} \right] K_0(\lambda b), \quad (43)$$

con  $b = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ .

La integral (31) permite calcular fácilmente  $E_x(\mathbf{r}, \omega)$

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\omega p}{\varepsilon(\omega) v^2} \frac{\lambda}{b} R_x K_1(\lambda b). \quad (44)$$

Usando la expresión asintótica para las funciones modificadas de Bessel, se tendrá que en la zona lejana las componentes del campo eléctrico están dadas por

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, \omega) &\simeq -i \frac{\omega p}{\varepsilon(\omega) v^2} \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda b}} e^{-\lambda b}, \\ E_z(\mathbf{r}, \omega) &\simeq \frac{\omega^2 p}{v c^2} \left[ 1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega) v^2} \right] \sqrt{\frac{1}{\lambda b}} e^{-\lambda b}. \end{aligned}$$

Substituyendo estas expresiones en la ec. (26) se tiene

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} = \frac{\omega^3 p^2}{c^2 v^2} \left[ 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right] \Theta\left(k - \frac{\omega}{v}\right) \quad (45)$$

Como puede observarse, esta expresión es diferente a la ecuación (35), ya que aunque sigue apareciendo la condición Cherenkov sobre la velocidad del

dipolo eléctrico, la dependencia en la permitividad y la velocidad cambia, lo que demuestra que el espectro de energía radiada depende de la dirección en la que apunta el dipolo

### 2.3.3. Dipolo eléctrico apuntando en una dirección arbitraria

Utilizando los resultados previos es fácil generalizar el análisis del espectro de energía emitido por un dipolo puntual para encontrar la energía radiada cuando el dipolo eléctrico apunta en una dirección arbitraria.

Si se expresa al momento dipolar  $\mathbf{p}$  en términos de sus componentes transversal y longitudinal, esto es

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_l + \mathbf{p}_t,$$

el término  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})$ , que juega el papel de la carga de polarización en la ec. (18) toma la forma

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_l + \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_t,$$

por lo que el campo eléctrico puede escribirse como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_t.$$

Con este resultado, la energía radiada por unidad de longitud por unidad de frecuencia por el dipolo eléctrico, está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} &= -vb\varepsilon(\omega) [E_{zl} + E_{zt}] [E_{xl} + E_{xt}]^* \\ &= -vb\varepsilon(\omega) [E_{xl}^* E_{zl} + E_{xt}^* E_{zl} + E_{xl}^* E_{zt} + E_{xt}^* E_{zt}], \end{aligned}$$

donde se debe substituir las expresiones asintóticas para los campos eléctricos, para obtener que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} &= \left\{ \frac{p_l^2 \omega^3}{v^2 c^2} \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) + \frac{p_t^2 \omega^3}{c^4} \varepsilon(\omega) \left( 1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega) v^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p_l p_t \omega^3 \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{vc^3} \left( 1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega) v^2} \right)^{3/2} \right\} \Theta \left( k - \frac{\omega}{v} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Es fácil demostrar que este mismo resultado puede encontrarse utilizando el método empleado de forma usual.

De los resultados obtenidos anteriormente, ecs. (40) y (46), es evidente que la radiación Cherenkov se emite principalmente en el cono Cherenkov, independientemente de la orientación del dipolo eléctrico. Este hecho también aparece cuando se consideran otras distribuciones de carga [45]. Así pues, se puede considerar que esta es una característica intrínseca de la radiación Cherenkov y puede esperarse para cualquier tipo de distribución de carga.

Ahora bien, cuando se analiza el espectro de radiación que se emite en el caso del dipolo eléctrico se obtiene un nuevo comportamiento, ahora la energía radiada depende fuertemente de la orientación del dipolo eléctrico. Si  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0$ , la radiación se comporta como  $\left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)}\right)^2$ , en vez de comportarse como  $\left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)}\right)$  que aparece en todos los casos relacionados con la ec. (10). Además es importante notar que si  $\mathbf{p} \times \mathbf{v} = 0$ , la radiación emitida es inversamente proporcional al cuadrado de la magnitud de la velocidad, ver ec. (45), entonces, para una velocidad más grande se emite menos radiación y ésta es emitida en un ángulo Cherenkov más grande. El espectro de radiación Cherenkov para un dipolo eléctrico orientado en una dirección arbitraria tiene una dependencia complicada con  $v$  y  $\omega$ , ec. (46), dado que los campos electromagnético son aditivos pero el vector de Poyntig no, llevando a la aparición de términos de interferencia.

## Capítulo 3

### El efecto Vavilov-Cherenkov inducido por un pulso electromagnético<sup>4</sup>

Es interesante notar que el efecto Vavilov-Cherenkov puede presentarse no sólo cuando se tienen partículas puntuales cargadas [41], distribuciones de carga [45], e incluso dipolos eléctricos sin carga neta [46], viajando con velocidad constante a través de un medio, pues como se ha discutido en las secciones anteriores, este efecto puede verse como un fenómeno colectivo, en donde, el detalle fundamental se encuentra en la polarización dependiente del tiempo que se induce en cada elemento del medio y la superposición coherente de la radiación emitida por estos elementos. La estructura de la distribución de carga viajera resulta importante sólo en el cálculo de los detalles del espectro de emisión pero es irrelevante como una condición para la emisión de radiación Cherenkov.

Ahora bien, ya que un pulso electromagnético, o paquete de onda, que se propaga en el interior de un medio también puede inducir una polarización dependiente del tiempo, es claro que también puede desencadenar la emisión de radiación Cherenkov, lo cual ha sido observado experimentalmente [46].

Aunque este fenómeno ha sido analizado anteriormente desde diferentes puntos de vista [17, 46-48], este análisis se ha hecho en forma cualitativa aplicando directamente los resultados obtenidos para una carga puntual [40] o un dipolo eléctrico [45], lo cual no es totalmente válido pues en las secciones anteriores se demostró que el espectro de radiación Cherenkov emitido por una partícula puntual y un dipolo eléctrico no tienen la misma estructura matemática.

En este capítulo, se analizará el efecto Vavilov-Cherenkov inducido por un paquete de onda utilizando los dos métodos de cálculo que se han presentado en los capítulos anteriores [49].

#### 3.1. Radiación Cherenkov generada por un pulso electromagnético

Para analizar, como un efecto colectivo, el efecto Vavilov-Cherenkov inducido por un pulso electromagnético propagándose dentro de un medio, es

---

<sup>4</sup>Jiménez J L, Villavicencio M and Roa-Neri J. A E (2001) *J. of Opt. A: Pure and Applied Optics* **3**, 131

necesario especificar la forma del campo eléctrico  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  que aparece en la expresión (2). En este caso, es importante recalcar que el campo eléctrico del pulso está localizado y no afecta a todo el medio, por lo que no se puede identificar directamente con  $\tilde{\mathbf{E}}_0$ .

El pulso electromagnético sólo afecta a los elementos del medio que encuentra a su paso induciendo una carga de polarización dada por la expresión [50]

$$\rho_{ind} = -\chi(\omega) \nabla \cdot \mathbf{E}_p,$$

con  $\mathbf{E}_p$  el campo eléctrico que describe al pulso. Así pues, el paquete de onda o pulso electromagnético puede verse como una distribución de carga inducida  $\rho_{ind}$  viajando a través del medio con una velocidad igual en magnitud y dirección a la velocidad de grupo del pulso electromagnético. Esta distribución de carga efectiva produce un campo electromagnético  $\tilde{\mathbf{E}}_0$ , dado por la ec. (3), con la velocidad de grupo del pulso  $\mathbf{v}_g$  como la velocidad de la partícula, así que

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \chi(\omega) \frac{[\frac{\omega}{c^2} \mathbf{v}_g - \mathbf{k}]}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{k}, \omega)) \quad (47)$$

y el campo eléctrico de radiación, dado por la ec. (6), es ahora

$$\mathbf{E}_{rad} = 2(2\pi)^{5/2} k^2 \frac{\chi^2(\omega)}{c^2 \varepsilon(\omega)} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\omega}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{k}, \omega)) v_g \sin \theta \hat{\phi}, \quad (48)$$

donde se ha definido, en analogía a los casos anteriores, al vector unitario

$$\hat{\phi} = \frac{(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_g) \times \hat{\mathbf{k}}}{|(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_g) \times \hat{\mathbf{k}}|}$$

y el ángulo  $\theta$  está dado por la relación  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_g = v_g \cos \theta$ .

Es interesante notar que  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{rad} = 0$ , lo que indica que se trata de un campo transversal, tal como se esperaba.

Ahora bien, un paquete de onda o pulso electromagnético se construye como la superposición de ondas de diferentes frecuencias[51], esto es

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) = \hat{\xi} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega(k)t},$$



con  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  la polarización del pulso y  $A(\mathbf{k})$  la amplitud que especifica al pulso incidente. Para tener un pulso de onda finito y localizado,  $A(\mathbf{k})$  debe de ser una función muy angosta con un ancho del orden de  $\Delta\mathbf{k}$ , centrado alrededor de  $\mathbf{k}_0$ , el número de onda dominante en la onda modulada. Así pues, la frecuencia  $\omega(k)$  puede desarrollarse alrededor de este valor de  $k$ , de forma que

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \mathbf{v}_g \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0),$$

con

$$\omega_0 = \frac{k_0 c}{\sqrt{\varepsilon(\omega_0)}}$$

y

$$\mathbf{v}_g = \nabla_k \omega|_{k_0},$$

la velocidad de grupo.

Entonces

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) = \hat{\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\zeta t} \int d^3k A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\mathbf{v}_g\cdot\mathbf{k}t}, \quad (49)$$

con

$$\zeta = \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}_0 - \omega_0, \quad (50)$$

una constante que solo depende de las características del paquete de onda.

Es bien conocido que en un medio transparente la velocidad de fase,  $v_p = c/n(k)$ , es más grande que la velocidad de grupo,  $v_g$ [51]. Sin embargo, en un medio con dispersión anómala la velocidad de grupo  $v_g$  puede ser más grande que la velocidad de fase  $v_p$ [52]. En este tipo de medios, el paquete de onda puede distorsionarse severamente, especialmente si  $v_g > c/n(k)$ , y el paso del pulso a través del medio se vuelve muy complicado [15, 54]. A pesar de este hecho, es posible restringir el análisis que nos interesa a una región de frecuencias donde  $v_p < v_g < c$ , de forma que el paquete de onda sufrirá solo una muy pequeña distorsión [47] y la distorsión anómala es irrelevante. Bajo estas condiciones es posible demostrar que aparecerá la radiación Cherenkov [46].

Considerando un medio dispersivo, donde el pulso viaja con una pequeña dispersión [39], podemos suponer que  $\zeta = 0$  [14]. Entonces, en el espacio de Fourier

$$\tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{k}, \omega) = \sqrt{2\pi} \hat{\boldsymbol{\xi}} A(\mathbf{k}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g). \quad (51)$$

Substituyendo esta expresión en la ec. (48) el campo total radiado es

$$\mathbf{E}_{rad} = 2(2\pi)^3 k^2 \frac{\chi^2(\omega)}{c^2 \varepsilon(\omega)} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\omega}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} A(\mathbf{k}) \left( \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g) v_g \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (52)$$

De la ec. (8) se puede obtener de inmediato que la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia por unidad de ángulo sólido inducida por el paso del pulso electromagnético a través del medio es

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega} &= 2^2 \frac{(2\pi)^5}{c^3 (\varepsilon(\omega))^{3/2}} \frac{k^4 \omega^2 v_g^2}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})^2} |\chi^2(\omega)|^2 \times \\ &\times \left( \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^2 |A(\mathbf{k})|^2 \sin^2 \theta \delta^2(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g). \end{aligned} \quad (53)$$

Una vez más, la función delta de Dirac elevada al cuadrado que aparece en esta expresión deberá manejarse como en los casos anteriores, es decir, se considera que

$$\begin{aligned} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g) &= \frac{1}{2\pi v_g} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \exp \left[ i \left( \frac{\omega}{v_g} - k \cos \theta \right) z \right] dz \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi v_g} \frac{\sin \left[ \left( \frac{\omega}{v_g} - k \cos \theta \right) \frac{L}{2} \right]}{\left( \frac{\omega}{v_g} - k \cos \theta \right)}. \end{aligned}$$

Definiendo  $f = \left( \frac{\omega}{v_g} - k \cos \theta \right)$  la ec. (53) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega d\Omega} &= 2^2 \frac{(2\pi)^3}{c^3 (\varepsilon(\omega))^{3/2}} \frac{k^4 \omega^2 L^2}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})^2} |\chi^2(\omega)|^2 \times \\ &\times \left( \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^2 |A(\mathbf{k})|^2 \sin^2 \theta \frac{\sin^2 \left[ \frac{fL}{2} \right]}{\left( \frac{fL}{2} \right)^2}, \end{aligned}$$

sin olvidar tomar el límite  $L \rightarrow \infty$ .

La integración sobre el ángulo sólido conduce a que

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = 2^2 \frac{(2\pi)^4}{c^3 (\varepsilon(\omega))^{3/2}} \frac{k^4 \omega^2 L^2}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})^2} |\chi^2(\omega)|^2 |A(\mathbf{k})|^2 \times$$

$$\times \int_{-1}^1 du (1 - u^2) (\mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}})^2 \frac{\sin^2 [fL/2]}{(fL/2)^2}, \quad (54)$$

donde  $u = \cos \theta$  y  $f = \frac{\omega}{v_g} - ku$ . La evaluación de la última integral es inmediata ya que el integrando tiene un máximo muy agudo en  $u = u_c$ , con

$$u_c = \frac{\omega}{kv_g};$$

así pues, la radiación debe emitirse principalmente en el ángulo

$$\cos \theta = \frac{\omega}{kv_g} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}v_g}, \quad (55)$$

una expresión análoga a la obtenida para una distribución de carga viajando en un medio. Si se supone que la velocidad de grupo  $\mathbf{v}_g$  se encuentra a lo largo de la dirección  $z$ , esta condición también puede expresarse como

$$k_z = \frac{\omega}{v_g}. \quad (56)$$

Definiendo de nuevo  $\eta = fL/2$  y considerando al vector de polarización  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  ortogonal a la dirección de la velocidad de grupo, la integral en la ec. (54) puede escribirse como

$$\int_{-1}^1 du (1 - u^2) (\mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}})^2 \frac{\sin^2 [fL/2]}{(fL/2)^2} \simeq (1 - u_c^2)^2 \frac{2k}{L} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} d\eta, \quad (57)$$

donde

$$\eta_1 = \left( \frac{\omega}{v_g} - k \right) \frac{L}{2}$$

$$\eta_2 = \left( \frac{\omega}{v_g} + k \right) \frac{L}{2}$$

Esta expresión se obtuvo anteriormente, ec. (9)

Dado que  $v_g$ ,  $k$  y  $\omega$  son cantidades positivas  $\eta_2 \rightarrow \infty$  en el límite  $L \rightarrow \infty$ , pero en este mismo límite hay dos posibles valores para  $\eta_1$ .

*i)* Si  $\frac{\omega}{v_g} > k$ , esto es, si

$$v_g > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = v_p,$$

$\eta_1 \rightarrow \infty$  y la integral es cero.

ii) Si  $\frac{\omega}{v_g} < k$ , esto es, si

$$v_g < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = v_p,$$

$\eta_1 \rightarrow -\infty$  y la integral es diferente de cero.

Entonces, la integral que aparece en la ec. (57) puede expresarse como

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} d\eta = \pi \Theta \left( k - \frac{\omega}{v_g} \right).$$

En conclusión, si la velocidad de grupo es mayor que la velocidad de fase en la región de frecuencias que se están considerando,  $v_p < v_g < c$ , la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia por unidad de longitud está dada por la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} &= (2\pi)^3 \frac{\omega^3 \varepsilon(\omega)}{c^4} |\chi(\omega)|^2 \left| A \left( k = \omega \sqrt{\varepsilon(\omega)} / c, k_z = \frac{\omega}{v_g} \right) \right|^2 \times \\ &\times \left( 1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega) v_g^2} \right)^2 \Theta \left( k - \frac{\omega}{v_g} \right), \end{aligned} \quad (58)$$

o en términos de la velocidad de fase

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} &= (2\pi)^3 \frac{\omega^3 \varepsilon(\omega)}{c^4} |\chi(\omega)|^2 \left| A \left( k = \omega \sqrt{\varepsilon(\omega)} / c, k_z = \frac{\omega}{v_g} \right) \right|^2 \times \\ &\times \left( 1 - \frac{v_p^2}{v_g^2} \right)^2 \Theta \left( k - \frac{\omega}{v_g} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Observemos que las ecs. (58) y (59) son bastante generales y la forma del pulso electromagnético aún no se ha especificado. Es claro que la dependencia explícita de la energía radiada con la permitividad del medio  $\varepsilon(\omega)$  y la frecuencia  $\omega$ , estará determinada por la expresión que se tenga para  $A(k)$ , la amplitud que especifica al pulso. Sin embargo, es importante hacer notar la estructura tan similar que tiene esta última expresión con la obtenida para la energía radiada en el caso de un dipolo eléctrico que viaja a través del medio con una dirección para su momento dipolar perpendicular a la dirección de movimiento, ec. (35).

Así pues, para calcular la energía radiada en el efecto Vavilov-Cherenkov inducido por un pulso electromagnético se puede identificar a éste con un dipolo eléctrico puntual efectivo de magnitud

$$p_{efec}^2 = (2\pi)^3 |\chi(\omega)|^2 \left| A \left( k = \omega \sqrt{\varepsilon(\omega)}/c, k_z = \frac{\omega}{v_g} \right) \right|^2$$

que viaja con la velocidad de grupo a través del medio.

### 3.2. El Teorema de Poynting y el efecto Cherenkov inducido por un pulso electromagnético

En la sección anterior se analizó la radiación Cherenkov inducida por el paso de un pulso electromagnético a través de un medio considerando al efecto Vavilov-Cherenko como un efecto colectivo, en donde aunque el pulso y los dipolos eléctricos puntuales inducidos en el medio juegan papeles diferentes, es posible considerar ambas contribuciones como un todo.

Ahora bien, en la literatura usual, el método más utilizado en el análisis del efecto Vavilov-Cherenkov es el basado en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el vector de Poynting. Este método, aunque es un método claro puede, a primera vista, llevar a la idea errónea de que la partícula viajera, o en este caso el paquete de onda viajero, es la única fuente de radiación.

En esta sección se aplicará el método usual con la única intención de corroborar los resultados obtenidos en la sección anterior.

Es bien conocido [15-24,31] que la energía emitida por unidad de tiempo por una distribución de carga es igual a la energía electromagnética que fluye a través de una superficie cerrada, esto es

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} da. \quad (60)$$

Si se considera, sin pérdida de generalidad, que la distribución de carga se mueve a lo largo de la dirección  $z$  se tiene simetría cilíndrica y esta ecuación puede integrarse sobre un cilindro de radio  $b$  alrededor del camino de la distribución de carga incidente, entonces

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\perp} 2\pi b dz,$$

donde  $S_{\perp}$  es la componente ortogonal del vector de Poynting a la dirección de movimiento.

Considerando, de nuevo sin pérdida de generalidad, que  $S_{\perp} = S_x$  se tiene que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{cb}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} dz (E_y B_z - E_z B_y)$$

y ya que

$$\mathbf{B} =_{\varepsilon}(\omega) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E},$$

se tendrá que  $B_z = 0$  y

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = -\frac{cb}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z B_y. \quad (61)$$

Dada la relación entre el campo eléctrico y el magnético, en el espacio de Fourier  $(\mathbf{r}, \omega)$  esta expresión puede escribirse como

$$\frac{d\mathcal{E}(\omega)}{dz} = -vb \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varepsilon(\omega) E_z(\omega) E_x^*(\omega), \quad (62)$$

donde por simplicidad se ha considerado que la permitividad  $\varepsilon(\omega)$  es una función real, es decir, que el medio no presenta absorción, lo cual es una hipótesis usual en el análisis del efecto Vavilov-Cherenkov.

Así pues, para determinar la energía radiada por unidad de longitud y por unidad de frecuencia por una distribución de carga  $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$  moviéndose con velocidad constante, solo es necesario determinar el campo eléctrico, en el espacio de Fourier  $(\mathbf{r}, \omega)$ , que genera. Es directo demostrar que el campo eléctrico requerido es

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi\varepsilon(\omega)}} \int d^3k \frac{\left[ \frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{v} - \mathbf{k} \right]}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]} \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (63)$$

pero es evidente de la ec. (61) que sólo es necesario conocer el campo eléctrico a una distancia perpendicular  $b$  del camino de la distribución de carga, por lo que se debe evaluar la ec. (63) en el punto

$$\mathbf{r} = (R_x, R_y, 0),$$

con

$$b = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

el mismo radio mencionado en la ec. (60), entonces

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}\varepsilon(\omega)} \int d^3k \frac{\left[ \frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{v} - \mathbf{k} \right]}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]} \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}. \quad (64)$$

A diferencia de los campos en el vacío, este campo no es producido directa y exclusivamente por la distribución de carga, es la solución inhomogénea a las ecuaciones macroscópicas de Maxwell con la distribución de carga viajera como fuente. Así pues, este campo incluye la contribución del medio, lo cual implica de nuevo, como se ha estado mencionando, que el efecto Vavilov-Cherenkov debe entenderse como un efecto colectivo.

De nuevo, como se discutió en la sección previa, un pulso electromagnético propagándose en un medio puede verse como una distribución efectiva de carga,  $\rho_{ind}$ , viajando a través del medio en la misma dirección de propagación del pulso con la velocidad de grupo. Así pues, en esta aproximación,  $\mathbf{E}$  será el campo electromagnético producido por esta distribución de carga efectiva. Esto es,

$$\tilde{\rho}_{ind}(\mathbf{k}, \omega) = -i\chi(\omega) \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{k}, \omega)$$

y suponiendo que  $\mathbf{v}_g$  se encuentra a lo largo de la dirección  $z$ , la ec. (64) nos proporciona las componentes del campo eléctrico que deben sustituirse en la ecuación (62):

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \chi(\omega) \int d^3k \frac{k_x \left( \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{k}, \omega) \right)}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)},$$

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \chi(\omega) \int d^3k \frac{\left[ \frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c^2} v_g - k_z \right]}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]} \times$$

$$\times \left( \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{k}, \omega) \right) e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}.$$

Sustituyendo la ec. (51) con  $\varepsilon(\omega)$  real y  $\eta = 0$ , como se discutió previamente,

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{2}{\varepsilon(\omega)} \chi(\omega) \int d^3k \frac{k_x \left( \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} \right) A(\mathbf{k}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g)}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)},$$

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2}{\varepsilon(\omega)} \chi(\omega) \int d^3k \left[ \frac{\left[ \frac{\omega \varepsilon(\omega)}{c^2} v_g - k_z \right]}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]} \left( \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} \right) A(\mathbf{k}) \right. \\ \left. \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g) e^{i(k_x R_x + k_y R_y)} \right],$$

donde es claro que  $A(\mathbf{k})$  describe la forma del pulso incidente. Como se vió en la sección anterior, se supondrá que  $k$  y  $\omega(k)$  son funciones reales por lo que los efectos disipativos han sido excluidos.

La integral sobre  $k_z$  es inmediata y si, además, se considera que  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  se encuentra a lo largo de la dirección  $x$  se tendrá que:

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{2}{\varepsilon(\omega) v_g} \chi(\omega) \int \int dk_x dk_y \frac{k_x^2 A\left(k_x, k_y, k_z = \frac{\omega}{v_g}\right)}{\left(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2\right)} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}, \quad (65)$$

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2}{\varepsilon(\omega) v_g} \chi(\omega) \left[ \frac{\omega \varepsilon(\omega)}{c^2} v_g - \frac{\omega}{v_g} \right] \times \\ \int \int dk_x dk_y \frac{(k_x) A\left(k_x, k_y, k_z = \frac{\omega}{v_g}\right)}{\left(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2\right)} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}, \quad (66)$$

donde

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v_g^2} - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2}.$$

Si  $\frac{\omega^2}{v_g^2} > \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2}$ , esto es, si  $k < \frac{\omega}{v_g}$ , se tendrá que  $\lambda^2 \geq 0$  y los campos no son campos de radiación. Dado que el objetivo de este trabajo es estudiar la radiación Cherenkov se deberá considerar que  $k > \frac{\omega}{v_g}$ , y por lo tanto

$$\lambda = -i |\lambda|.$$

Por otro lado, las ecuaciones (65) y (66) tienen un máximo muy agudo en  $k_x^2 + k_y^2 = -\lambda^2$  por lo que, con un buen grado de aproximación, se puede considerar

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) \simeq -\frac{2}{\varepsilon(\omega) v_g} \chi(\omega) A\left(k_x^2 + k_y^2 = -\lambda^2, k_z = \frac{\omega}{v_g}\right) \times \\ \times \int \int dk_x dk_y \frac{k_x^2}{\left(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2\right)} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)},$$



$$E_z(\mathbf{r}, \omega) \simeq \frac{2}{\varepsilon(\omega) v_g} \chi(\omega) \left[ \frac{\omega \varepsilon(\omega)}{c^2} v_g - \frac{\omega}{v_g} \right] A \left( k_x^2 + k_y^2 = -\lambda^2, k_z = \frac{\omega}{v_g} \right) \times \\ \times \int \int dk_x dk_y \frac{k_x}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2)} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)}.$$

Las integrales requeridas pueden calcularse fácilmente [55] para obtener

$$\int \int dk_x dk_y \frac{k_x}{[k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2]} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)} \\ = -i \frac{\partial}{\partial R_x} \int \int dk_x dk_y \frac{1}{[k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2]} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)} \\ = 2i\pi \frac{\lambda R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} K_1 \left[ \lambda \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \right]$$

y

$$\int \int dk_x dk_y \frac{k_x^2}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2)} e^{i(k_x R_x + k_y R_y)} = \\ = -\pi \frac{\partial}{\partial R_x} \left[ 2\lambda \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} K_1 \left[ \lambda \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \right] \right].$$

Con estos resultados tendremos que:

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) \simeq -\frac{2\pi}{\varepsilon(\omega) v_g} \lambda^2 \chi(\omega) A \left( k_x^2 + k_y^2 = -\lambda^2, k_z = \frac{\omega}{v_g} \right) \times \\ \times [K_0[\lambda b] + K_2[\lambda b]] \\ E_z(\mathbf{r}, \omega) \simeq \frac{4\pi i}{\varepsilon(\omega) v_g} \chi(\omega) \left[ \frac{\omega \varepsilon(\omega)}{c^2} v_g - \frac{\omega}{v_g} \right] \times \\ \times A \left( k_x^2 + k_y^2 = -\lambda^2, k_z = \frac{\omega}{v_g} \right) \frac{\lambda R_x}{b} K_1[\lambda b].$$

En la zona lejana,  $b \gg 1$ , las funciones modificadas de Bessel pueden aproximarse por su forma asintótica [43],

$$K_n(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \gg 1,$$

y las componentes del campo eléctrico se transforman en

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) \simeq -\frac{8\pi}{\varepsilon(\omega)v_g} \lambda^2 \chi(\omega) A\left(k_x^2 + k_y^2 = -\lambda^2, k_z = \frac{\omega}{v_g}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda b}} e^{-\lambda b} \quad (67)$$

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) \simeq \frac{4\pi i}{\varepsilon(\omega)v_g} \chi(\omega) \left[ \frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c^2} v_g - \frac{\omega}{v_g} \right] A\left(k_x^2 + k_y^2 = -\lambda^2, k_z = \frac{\omega}{v_g}\right) \times \\ \times \frac{\lambda R_x}{b} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda b}} e^{-\lambda b}. \quad (68)$$

Como  $\lambda$  es un número complejo estos campos decaen con  $b$  comportándose como campos de radiación.

Sustituyendo estas expresiones en la ec. (62), la energía radiada por unidad de longitud y por unidad de frecuencia es

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\omega dz} = (2\pi)^3 \frac{\omega^3 \varepsilon(\omega)}{c^4} |\chi(\omega)|^2 \left| A\left(k = \omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}/c, k_z = \frac{\omega}{v_g}\right) \right|^2 \times \\ \times \left(1 - \frac{v_p^2}{v_g^2}\right)^2 \Theta\left(k - \frac{\omega}{v_g}\right), \quad (69)$$

la cual es igual al resultado obtenido con el método previo, ec. (58).

Es importante recalcar que Askar'yan [48] también considera a la polarización del medio, inducida por el paquete de onda, como fuente de la radiación Cherenkov, sin embargo, calcula la energía radiada haciendo uso de la expresión para la radiación Cherenkov inducida por una partícula puntual, la cual considera como fuente de la carga de polarización inducida. Es importante resaltar que la ecuación (69) no solo es general, dado que se puede usar para diferentes tipos de paquetes de onda, sino que también revela que para un pulso electromagnético, la radiación Cherenkov es similar en estructura a la inducida por un dipolo eléctrico puntual más que a la inducida por partículas puntuales.

Finalmente, habiendo establecido el marco general, será interesante evaluar el espectro de energía inducido por algunos tipos específicos de pulsos electromagnéticos.

### 3.3. Ejemplos

#### 3.3.1. El pulso gaussiano

La amplitud  $A(\mathbf{k})$  para un pulso electromagnético gaussiano es

$$A(\mathbf{k}) = \frac{D}{2} \exp \left[ -\frac{D^2}{2} (k_z - k_{z0})^2 \right],$$

donde  $D$  es la anchura. Ahora bien, es necesario imponer la condición  $D \gg a$ , con  $a$  una longitud constante, que corresponde a una longitud de onda típica donde los efectos de "ensanchamiento" se vuelven importantes. Con esta condición se tendrá un pulso electromagnético viajando dentro del medio sin alterar su forma.

Sustituyendo esta expresión en la ec. (69), la energía radiada por unidad de longitud por unidad de frecuencia está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} &= 2\pi^3 \frac{D^2 \omega^3 \varepsilon(\omega)}{c^4} |\chi(\omega)|^2 \exp \left[ -D^2 \left( \frac{\omega}{v_g} - k_{0z} \right)^2 \right] \times \\ &\times \left( 1 - \frac{v_p^2}{v_g^2} \right)^2 \Theta \left( k - \frac{\omega}{v_g} \right). \end{aligned}$$

Esta expresión es diferente en estructura a la obtenida para cargas extensas [44,56] pero tiene el factor  $\left( 1 - \frac{v_p^2}{v_g^2} \right)^2$  asociado al espectro de energía para un dipolo eléctrico puntual [45], ortogonal a su dirección de movimiento.

Para un paquete de onda gaussiano tridimensional descrito por la amplitud

$$A(\mathbf{k}) = \frac{D}{2} \frac{L^2}{4} \exp \left[ -\frac{D^2}{2} (k_z - k_{z0})^2 \right] \exp \left[ -\frac{L^2}{2} (k_x^2 + k_y^2) \right]$$

la ec. (69) lleva al resultado

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} &= \pi^3 \frac{D^2 L^4 \omega^3 \varepsilon(\omega)}{8c^4} |\chi(\omega)|^2 \exp \left[ -D^2 \left( \frac{\omega}{v_g} - k_{0z} \right)^2 \right] \times \\ &\times \exp \left[ -L^2 \frac{\omega^2}{v_p^2} \left( 1 - \frac{v_p^2}{v_g^2} \right) \right]^2 \left( 1 - \frac{v_p^2}{v_g^2} \right)^2 \Theta \left( k - \frac{\omega}{v_g} \right), \end{aligned} \quad (70)$$

el cual, aunque más complicado que el resultado unidimensional, también tiene una estructura similar a la obtenida para un dipolo eléctrico que apunta en la dirección ortogonal a su dirección de movimiento.

### 3.3.2. El pulso electromagnético de sombrero de copa

Suponiendo un pulso electromagnético en el cual el campo eléctrico está dado por la expresión

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, 0) = \hat{\boldsymbol{\xi}} E_0 \Theta(a - \rho) \Theta(L - |z|),$$

se tendrá que en el espacio de Fourier la amplitud del pulso se escribe como

$$A(\mathbf{k}) = \frac{2E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{k_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} J_1\left(a\sqrt{k_x^2 + k_y^2}\right) \sin(k_z L)$$

y de la ec. (69) se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\omega dz} &= 4(2\pi)^2 \frac{E_0^2 a^2 \varepsilon(\omega) v_g^2 v_p^2}{\omega c^4} |\chi(\omega)|^2 \left(1 - \frac{v_p^2}{v_g^2}\right) \times \\ &\times \left[ J_1\left(a \frac{\omega}{v_p} \left[1 - \frac{v_p^2}{v_g^2}\right]^{1/2}\right) \right]^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{v_g} L\right) \Theta\left(k - \frac{\omega}{v_g}\right). \end{aligned} \quad (71)$$

En este caso, la dependencia en  $\omega$  es más complicada que en el caso previo. Es importante notar que la transformada de Fourier de este pulso electromagnético ha enmascarado la similitud de esta expresión con el resultado obtenido para un dipolo eléctrico ortogonal a su dirección de movimiento. Aunque la ec. (71) posee el factor  $\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v_g^2}\right)$  asociado al espectro de energía de una partícula puntual, es importante recalcar que esto es un hecho fortuito y que este comportamiento también puede aparecer para otro tipo de pulsos electromagnéticos.

Hasta este momento se ha demostrado no solo que existe la emisión de radiación Cherenkov cuando partículas cargadas viajan en el interior de un medio material con una velocidad constante mayor que la velocidad de la luz en el medio, sino que también se presenta la emisión de radiación cuando se tiene un pulso electromagnético propagándose en un medio. En este último caso, la radiación emitida se analizó utilizando la idea intuitiva de que el

paquete de onda incidente da lugar a una carga de polarización inducida, la cual se mueve a través del medio con el pulso electromagnético. Esta carga inducida, o carga efectiva, da lugar a una polarización dependiente del tiempo de cada elemento del medio. Si la velocidad de grupo es mayor que la velocidad de la luz en el medio, hay una superposición constructiva de la radiación emitida por cada dipolo elemental, radiación que puede identificarse con la radiación Cherenkov.

Aunque la expresión exacta para la energía radiada por unidad de frecuencia y por unidad de trayectoria depende de la forma específica del pulso electromagnético que se esté considerando, pueden apreciarse algunos factores comunes con la expresión obtenida para un dipolo puntual cuyo momento dipolar apunta en la dirección ortogonal a la dirección de movimiento, lo cual parece obvio dado que el pulso electromagnético induce una carga de polarización. Sin embargo, también debemos resaltar que en algunos casos este hecho puede ser enmascarado por la forma específica del pulso electromagnético.

## Capítulo 4

### El papel del medio en la emisión de radiación Cherenkov<sup>5</sup>

En los capítulos anteriores se demostró, utilizando dos métodos distintos, que en el efecto Vavilov-Cherenkov, sólo se tiene la emisión de radiación electromagnética cuando la distribución de carga que viaja en interior de un medio lo hace con una velocidad constante  $v$  mayor que la velocidad de la luz en ese medio. En el caso en que este efecto haya sido inducido por el paso de un pulso electromagnético, la radiación Cherenkov se presenta sólo cuando la velocidad de grupo de este pulso es mayor que la velocidad de la luz en el medio.

Usualmente en la literatura, esta condición que existe entre la velocidad de la distribución de carga  $v$  y la velocidad de fase de la luz en el medio  $v_p(\omega)$ , la cual es función de la frecuencia, se discute sólo de forma muy general y no se considera la respuesta específica del medio [57-60].

El objetivo de este capítulo es exhibir explícitamente la información que la condición Cherenkov sobre la velocidad de la partícula viajera,  $v > v_p(\omega)$ , puede proporcionarnos cuando se considera la respuesta específica del medio.

Se demostrará que esta condición no sólo involucra una condición sobre la magnitud de la velocidad de la distribución de carga sino que también determina el intervalo de frecuencias en el que se emite radiación electromagnética para cada velocidad. Se discutirá el hecho de que para cada intervalo de frecuencias aparece un límite inferior para la velocidad que puede tener la distribución de carga y se exhibirá que ésta es una restricción "*débil*" dado que la velocidad de fase  $v_p$  depende de la frecuencia.

Se mostrará, además, que es posible establecer una restricción "*fuerte*" sobre la velocidad de la partícula que no depende de la frecuencia, a la que llamaremos el *límite inferior general* y que para encontrarla se requiere de conocer la respuesta específica del medio.

Este límite inferior general para la velocidad  $v$ , existe tanto para medios no dispersivos como para medios ligeramente absorbentes, pero no aparece cuando se considera un medio transparente con dispersión. Es importante recalcar que esta discusión no se presenta en la literatura usual.

---

<sup>5</sup>Villavicencio M, Roa-Neri J A E and Jiménez J L (2006) *Found. Phys. Lett* **19**, 249-258

#### 4.1. La condición Cherenkov sobre la velocidad de la distribución de carga

Desde el punto de vista del efecto Vavilov-Cherenkov como un efecto colectivo, una partícula cargada  $q$  que viaja uniformemente en el interior de un medio, caracterizado por una permitividad  $\varepsilon$ , induce la generación de una polarización dependiente del tiempo en el medio. Si la velocidad de la partícula es mayor que la velocidad de fase de la luz en el medio, la radiación emitida por cada elemento del medio se superpone constructivamente para dar lugar a la conocida radiación Cherenkov, donde la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia por unidad de longitud está dada por la expresión

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dzd\omega} = \frac{q^2}{c^2} \omega \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \Theta \left( k - \frac{\omega}{v} \right), \quad (72)$$

y la velocidad  $v$  de la partícula debe de satisfacer la condición

$$v > v_p(\omega), \quad (73)$$

con  $v_p(\omega)$  la velocidad de fase de la luz en el medio.

Ahora bien, la forma en que una onda electromagnética se propaga en un medio material, isotrópico y no magnético, es decir  $\mu = 1$ , está determinada por el índice de refracción del medio, el que a su vez depende de la permitividad  $\varepsilon$  del material de acuerdo con la relación

$$n = c/v_p(\omega) = \sqrt{\varepsilon}.$$

Ya que en general los dieléctricos presentan un índice de refracción que depende de la frecuencia, lo que se conoce con el nombre de *dispersión*, debido a que la permitividad es función de la frecuencia  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ , la condición (73) representa una relación entre un número, la velocidad de la partícula  $v$ , y una función  $v_p(\omega) = c/n(\omega)$ , la velocidad de fase de la luz. Dado que  $v_p(\omega)$  toma diferentes valores dependiendo de la frecuencia, la condición Cherenkov para la velocidad de la partícula sólo podrá satisfacerse para algunas frecuencias, es decir, esta condición determina para una velocidad  $v$  dada un espectro de frecuencias para la radiación emitida que dependerá de la respuesta específica del medio.

La energía radiada por intervalo de frecuencia y de longitud ha sido determinada en la literatura utilizando diversos métodos. Landau [18], al igual

que Jackson [15] consideran que la ec. (72) es válida aún cuando el medio presente una ligera absorción, mientras que en otras aproximaciones se considera que esta expresión y la condición Cherenkov para la velocidad son válidas aún cuando exista absorción y el que ésta se presente sólo modifica los límites de integración cuando la ec. (72) se integra sobre las frecuencias.

Ahora bien, si se considera un índice de refracción complejo

$$\hat{n} = n(\omega) + i\alpha(\omega),$$

donde  $n$  y  $\alpha$  son las llamadas constantes ópticas y en particular  $\alpha(\omega)$  es el coeficiente de absorción, se tendrá que

$$(n(\omega) + i\alpha(\omega))^2 = \varepsilon(\omega), \quad (74)$$

es decir, se puede escribir

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega), \quad (75)$$

con  $\varepsilon_1(\omega)$  y  $\varepsilon_2(\omega)$  funciones reales.

Puesto que

$$n(\omega) = \frac{c}{v_p(\omega)}, \quad (76)$$

es claro que las características de  $v_p(\omega)$  dependerán de la respuesta específica del medio a través de su índice de refracción.

En un material en donde el número de onda  $k$  es comparable en magnitud con  $n$ , la onda decae casi en una longitud de onda; pero si  $k \ll n$ , como en un medio de conductividad pequeña, la onda se propaga sin pérdida apreciable por lo que el material puede considerarse transparente.

A continuación, se tomará en cuenta la respuesta del medio al analizar la condición sobre la velocidad de la partícula para que se genere la radiación Cherenkov, lo que permitirá obtener un límite general y para ejemplificarlo se discutirá este límite para tres tipos de medio.

## 4.2. Medios no dispersivos

Es bien conocido que la respuesta electromagnética de un medio depende de la frecuencia, de hecho, toda la materia presenta dispersión. Sin embargo, si se considera un pequeño intervalo de frecuencias es posible ignorar la dispersión en una primera aproximación.



Para un medio no dispersivo la permitividad es una constante,  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(0)$ , la permitividad electrostática, por lo que la velocidad de fase de la luz en el medio es un constante dada por

$$v_p(\omega) = v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}}. \quad (77)$$

Así pues, para que exista radiación Cherenkov la velocidad de la partícula viajera debe satisfacer la condición

$$v_0 < v < c, \quad (78)$$

lo que significa que la velocidad de la partícula tiene un límite superior y uno inferior. El límite superior está impuesto por la Relatividad Especial, mientras que el inferior es la conocida condición Cherenkov. Entonces, para tener radiación Cherenkov se tiene una restricción general para todos los posibles valores que puede tomar la velocidad de la partícula (ver la figura 2).

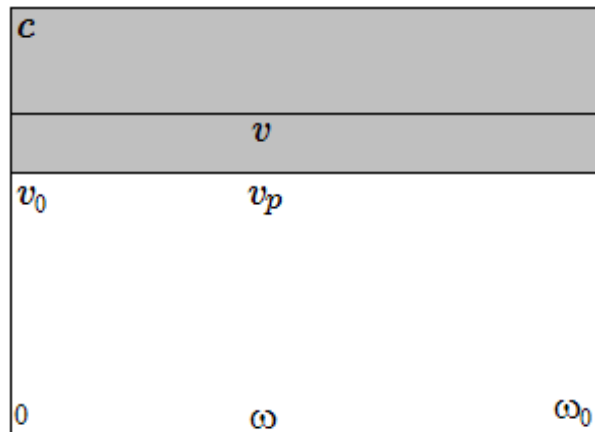


Fig. 2. En un medio no dispersivo se emite radiación Cherenkov solo cuando la velocidad de la carga es al que  $v_0 < v < c$  y existe una condición general para la velocidad

Tomando en cuenta la expresión (77), la expresión (78) puede escribirse como

$$v_p(\omega) < v < c, \quad (79)$$

lo que obviamente se parece a la condición  $v_0 < v < c$ . Sin embargo, existe una gran diferencia entre ellas. Esta última establece que un número,  $v$ , debe de ser más grande que otro número,  $v_0$ , y no es necesario hacer ninguna otra aclaración, mientras que la condición (73) establece que  $v$  debe de ser más grande que  $v_p(\omega)$ , por lo que debemos analizar qué valores de  $\omega$  satisfacen la condición. Además, podemos concluir que para un medio no dispersivo dado que a todas las frecuencias les corresponde el mismo valor de la permitividad, y por ende del índice de refracción, es posible tener presentes todas las frecuencias en el espectro de radiación emitido.

En general, la condición (73) es insuficiente para realizar un análisis profundo de la radiación Cherenkov, sin embargo, si se considera un medio en el que existe dispersión se puede entender mejor esta condición.

### 4.3. Medio transparente con dispersión

Para hacer más clara la discusión de la condición Cherenkov para un medio en el que se presenta dispersión, es conveniente usar un modelo microscópico que proporcione una expresión para la permitividad de éste. Lo más común es considerar que cada electrón del medio está ligado por una fuerza de tipo oscilador armónico que está siendo excitado por un campo eléctrico externo, de forma que su ecuación de movimiento está dada por [60]

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - e\mathbf{E},$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia de resonancia o natural, que corresponde a la frecuencia de oscilación del electrón sin excitación y  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico externo.

Si se supone que todos los electrones tienen la misma frecuencia natural de oscilación  $\omega_0$ , es directo obtener una permitividad dada por la expresión [57,58]

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{(\varepsilon(0) - 1)\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (80)$$

la cual es una función real y positiva para  $0 \leq \omega < \omega_0$ . Debe mencionarse que al estar considerando un medio transparente, no se ha tomado en cuenta

a la parte imaginaria de la permitividad. Así pues, la velocidad de fase de la luz en este tipo de medio se obtiene de las ecs. (76) y (74), dando como resultado

$$v_p(\omega) = c \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 \varepsilon(0)}}. \quad (81)$$

En el intervalo  $0 \leq \omega < \omega_0$  esta velocidad es una función monótonamente decreciente de la frecuencia, cuyo máximo,  $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}}$ , se obtiene cuando  $\omega = 0$ , mientras que  $v_p \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

Cualquier condición para la velocidad de la partícula debe escribirse como una desigualdad entre dos números como en la ec. (78). De la expresión (81) se puede ver que siempre se cumple que  $0 < v_p(\omega) < v_0$  y  $v_0 < c$ , por lo que en este tipo de medio, la velocidad de la partícula cargada debe satisfacer

$$0 < v < c \quad (82)$$

para desencadenar la emisión de radiación Cherenkov.

Las frecuencias contenidas en tal radiación son las que satisfacen la condición (73) para una  $v$  dada. Estas están separadas de las frecuencias restantes por las soluciones a la ecuación  $v = v_p(\omega)$ . Sin embargo, el parámetro  $v_0$  separa dos comportamientos, uno para  $v > v_0$  y otro para  $v < v_0$ ; los que se analizarán por separado.

Cuando  $v > v_0$ , no hay solución a la igualdad  $v = v_p(\omega)$  ya que  $v_0 > v_p(\omega)$  en todo el intervalo  $0 \leq \omega < \omega_0$ . Así pues, todas estas frecuencias aparecen en el espectro de radiación [57-59].

Para  $v < v_0$ , hay una  $\omega_t$  que es solución a la ecuación  $v_p(\omega_t) = v$  y las frecuencias contenidas en el espectro de radiación deben ser tales que  $\omega_t < \omega < \omega_0$  (ver Figura 3).

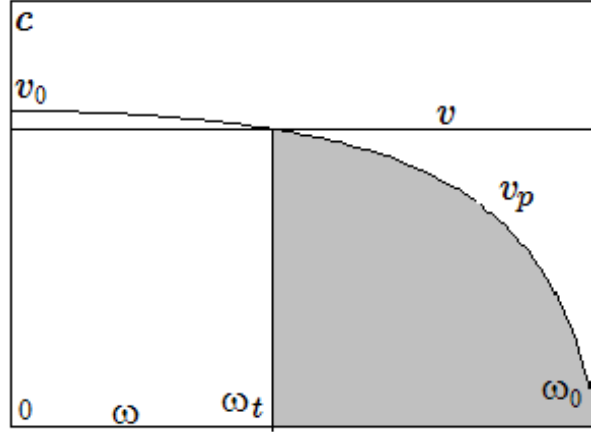


Fig. 3. En un medio transparente pero dispersivo la radiación se induce independientemente de la velocidad de la partícula,  $0 < v < c$ , por lo que no existe una restricción general. Para  $v > v_0$  se encuentran presentes todas las frecuencias en la radiación. Para  $v < v_0$  el intervalo de frecuencias es  $\omega_t < \omega < \omega_0$ , el cual se va haciendo cada vez más pequeño conforme  $v$  se aproxima a  $v_0$ .

Esto significa que en un medio transparente pero dispersivo, una partícula moviéndose muy lentamente puede desencadenar la emisión de radiación Cherenkov en una banda extremadamente angosta de frecuencias.

#### 4.4. Medio semi-absorbente

Un medio dispersivo puede considerarse transparente solo en un intervalo pequeño de frecuencias. Sin embargo, el formalismo de la electrodinámica clásica conduce las bien conocidas relaciones de Kramers-Kroning [61], que establecen siempre existe absorción.

Como se mencionó anteriormente, la expresión (72) es válida aún cuando el medio presente una pequeña absorción, por lo que será interesante analizar la condición (73) cuando se considera que existe absorción, o en otras palabras, cuando en el medio se presenta disipación. En este caso, el medio se

modela considerando que los electrones satisfacen una ecuación de movimiento análoga a la del oscilador armónico amortiguado, es decir

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{E} ,$$

donde  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento y de nuevo  $\omega_0$  es la frecuencia de resonancia o natural, que corresponde a la frecuencia de oscilación del electrón sin excitación . En este caso, la permitividad es una función compleja dada por la ecuación (75) con

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{(\varepsilon(0) - 1)\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (83)$$

y

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\gamma(\varepsilon(0) - 1)\omega_0^2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} . \quad (84)$$

Las relaciones de Kramers-Kronig exhiben la relación entre estas cantidades cuando se considera que la respuesta del medio es lineal [61].

Es directo demostrar que el índice de refracción y el coeficiente de absorción en este caso están dados por

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \varepsilon_1(\omega) + \sqrt{\varepsilon_1^2(\omega) + \varepsilon_2^2(\omega)} \right]} \quad (85)$$

y

$$\alpha(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ -\varepsilon_1(\omega) + \sqrt{\varepsilon_1^2(\omega) + \varepsilon_2^2(\omega)} \right]} , \quad (86)$$

respectivamente. Es importante notar que para  $\omega = 0$ , se tendrá que  $\alpha = 0$  dado que  $\varepsilon_2(0) = 0$ , entonces para frecuencias pequeñas  $\varepsilon_1(\omega) \gg \varepsilon_2(\omega)$  y el medio es casi transparente.

La ec. (76) continua siendo válida con un índice de refracción dado por (85), por que la velocidad de fase de la luz en este tipo de medio está dada entonces por

$$v_p(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[ \varepsilon_1(\omega) + \sqrt{\varepsilon_1^2(\omega) + \varepsilon_2^2(\omega)} \right]}} . \quad (87)$$

De nuevo, el intervalo de interés es  $0 \leq \omega \leq \omega_0$ . Para  $\omega = 0$ , se tiene  $v_p = v_0$ , con  $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}}$ , justo como en el caso anterior y es menor que  $c$ . Por otro lado, cuando  $\omega = \omega_0$ ,

$$v_p(\omega_0) = c \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon(0)-1)^2 \omega_0^2}{\gamma^2}}}}. \quad (88)$$

Claramente  $v_p(\omega_0) > 0$ . Entonces, en el caso general ( $\gamma \neq 0$ )  $v_p \neq 0$  en todo el intervalo. De hecho, el comportamiento en un medio transparente, analizado en la sección anterior, se recupera cuando  $\gamma \rightarrow 0$ .

En algunos trabajos [63, 64], se menciona el caso extremo en el que

$$(\varepsilon(0) - 1)^2 \ll \frac{\gamma^2}{\omega_0^2},$$

tal que  $v_p(\omega_0) = c$  por lo que el medio se comporta como el vacío. Para esta frecuencia  $\omega_0$  entonces es imposible satisfacer la condición (73). La velocidad de fase de la luz en el medio primero decrece con la frecuencia, ver ec. (87), y luego aumenta hasta alcanzar el valor de  $c$ . Entonces,  $v_p$  tiene un valor mínimo para una frecuencia que se encuentra en el intervalo  $0 \leq \omega \leq \omega_0$ .

En un medio ligeramente absorbente debemos considerar  $\gamma$  pequeña, pero no hay restricción en el valor de  $\varepsilon(0)$ . En el intervalo  $0 \leq \omega \leq \omega_0$ , la velocidad de fase de la luz comienza con el valor  $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}}$  y termina con el valor  $v_p(\omega_0)$ , donde  $0 < v_p(\omega_0) < c$ , con  $v_p(\omega_0)$  dada por la ec. (88). Esto significa que en el intervalo  $0 \leq \omega \leq \omega_0$  la velocidad de fase de la luz tiene un mínimo,  $v_{p(\min)} > 0$ .

La existencia de este mínimo implica, para satisfacer la condición (73), que existe un límite inferior general para la velocidad de la partícula cargada que desencadena la radiación Cherenkov. Entonces, solo si la velocidad de la partícula cargada satisface una restricción general, dada por

$$v_{p(\min)} < v < c, \quad (89)$$

hay radiación Cherenkov en un medio ligeramente absorbente. Este tipo de medio y el medio no dispersivo comparten la existencia de una condición estricta sobre la velocidad de la partícula.

De hecho, la condición (82) se recupera de la condición (89) notando que  $v_{p(\min)} = 0$  para un medio dispersivo y transparente, como se mostró en

la sección anterior. Así pues, la condición (89) es la verdadera condición a la velocidad de la partícula que desencadena la radiación Cherenkov en cualquier tipo de medio (Fig. 4)

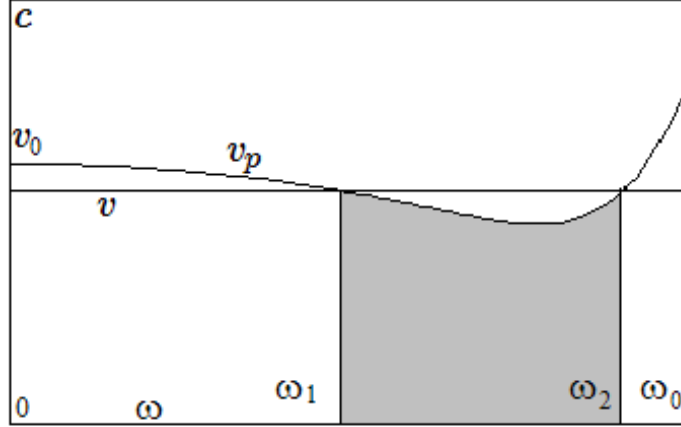


Fig. 4. En un medio ligeramente absorbente se emite radiación Cherenkov cuando la velocidad de la partícula satisface la relación  $v_{p(\min)} < v < c$ . Esta es una restricción general para la velocidad. Para  $v < v_0$  y  $v < v_p(\omega_0)$  el intervalo de frecuencias presentes es  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  el cual es cada vez más angosto conforme  $v$  se acerca a  $v_{p(\min)}$ .

Las frecuencias radiadas deben satisfacer la condición (73) y están determinadas por la solución a la ecuación  $v = v_p(\omega)$  para una  $v$  dada. Hay dos parámetros,  $v_0$  y  $v_p(\omega_0)$ . Si comparamos cada uno de ellos con  $v$  surgen varios casos:

- Para  $v > v_p(\omega)$  en todo el intervalo  $0 < \omega \leq \omega_0$ , se emite radiación electromagnética en todas las frecuencias.
- Para  $v > v_0$  pero  $v < v_p(\omega_0)$ , existe un  $\omega_1$  tal que  $v_p(\omega_1) = v$ , y el espectro de frecuencias está dado por  $0 < \omega \leq \omega_1$ .
- Para  $v < v_0$  pero  $v > v_p(\omega_0)$ , la ecuación  $v_p(\omega) = v$  tiene una solución en  $\omega = \omega_1$ , y las frecuencias radiadas se encuentran en el intervalo  $\omega_1 < \omega \leq \omega_0$ .
- Para  $v < v_0$  y  $v < v_p(\omega_0)$ , la ecuación  $v_p(\omega) = v$  tiene dos soluciones  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , respectivamente, y el espectro de frecuencias está contenido en el

intervalo  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ . Conforme  $v$  se aproxima a  $v_{p(\min)}$  la banda de frecuencias se vuelve más angosta (Figura 3).

La condición (73) proporciona una restricción sobre el intervalo de frecuencias contenidas en la radiación para cada velocidad que satisface la condición (89).

Con base en lo que se ha discutido se puede concluir que la condición  $v > v_p(\omega)$  por si sola no constituye una restricción real para la velocidad de la partícula cargada. Ésta solo determina el intervalo de frecuencias de la radiación emitida para cada velocidad. Tal condición lleva a un límite inferior para la velocidad de la partícula sólo cuando se considera la respuesta específica del medio.

La verdadera condición para la velocidad de la partícula está dada por  $v_{p(\min)} < v < c$ , donde  $v_{p(\min)}$  es la velocidad de fase mínima de la luz en un intervalo dado de frecuencias. Este es un límite inferior para  $v$ .

- En un medio no dispersivo, la velocidad de fase de la luz es una constante, tal que  $v_{p(\min)} = v_0$ . La velocidad de la partícula puede ser cualquiera en el intervalo  $v_0 < v < c$ .
- En un medio completamente transparente pero dispersivo no existe un límite inferior general para la velocidad de la partícula  $v$ , ya que  $v_{p(\min)} = v_0$ . Es decir, la velocidad de la partícula puede ser cualquiera en el intervalo  $0 < v < c$  lo que parece completamente contradictorio con  $v > v_p(\omega)$ , pero es consistente con esto.
- En un medio ligeramente absorbente  $v_{p(\min)} \neq 0$ . La velocidad de la partícula puede encontrarse en el intervalo  $v_{p(\min)} < v < c$ , lo que parece tener el mismo significado que  $v > v_p(\omega)$ . Sin embargo, este no es el caso debido a que en la primera expresión solo se comparan número y en esta última se compara un número y una función.



## Capítulo 5

### El campo electromagnético en el problema de Radiación de Transición

Como un capítulo final, ya que hemos analizado el efecto Vavilov-Cherenkov basándonos en el método utilizado para analizar la radiación de transición, nos enfocaremos a discutir un punto en el análisis de este efecto que no aparece en la literatura usual [11, 61-67] y es el que la mayoría de los autores solo obtienen la expresión para las componentes normales del campo eléctrico y solo mencionan como pueden obtenerse el resto de las componentes. Este hecho seguramente se debe a que un cálculo explícito de las componentes longitudinales del campo eléctrico no es simple ya que las condiciones a la frontera no dan suficiente información para encontrarlas. Además, como mostraremos, las ecuaciones diferenciales que dichas componentes satisfacen involucran distribuciones, o funciones generalizadas, como la función delta de Dirac, la función Heaviside y sus productos evaluados en la frontera.

Aunque el producto de distribuciones ha surgido en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería, en general las distribuciones no pueden multiplicarse. Este problema ha sido resuelto con la construcción de nuevas álgebras de funciones generalizadas, como la definida por Colombeau [68] o la de Loder [69], donde la multiplicación, diferenciación e integración son similares a las que se definen en el espacio  $C^\infty$  de las funciones suaves e infinitamente diferenciables.

En este capítulo mostraremos como manejando heurísticamente el producto de las distribuciones, pueden obtenerse condiciones sobre la derivadas del campo eléctrico y magnético en la frontera, lo cual nos permitirá determinar las expresiones explícitas para todas las componentes del campo electromagnético y analizar su comportamiento en la frontera. La comparación de nuestros resultados con los que se obtienen en uno de los casos más sencillos de radiación de transición demuestra que las transformaciones no lineales de distribuciones no son siempre carecen de significado y que aún cuando se aplican heurísticamente pueden llevar a resultados físicos correctos.

#### 5.1. Las ecuaciones diferenciales para el campo electromagnético en el fenómeno de Radiación de Transición.

Como un primer paso, estableceremos las ecuaciones diferenciales que satisfacen las componentes del campo electromagnético generado por una

distribución de carga que se mueve uniformemente a lo largo del eje  $z$  y cruza la frontera, situada en  $z = 0$ , entre dos medios lineales, homogéneos e isotrópicos.

En esta situación, veremos a los dos medios como uno solo caracterizado por una permitividad dada por la expresión

$$\varepsilon(z, \omega) = \begin{cases} \varepsilon_1 & (z < 0) \\ \varepsilon_2 & (z \geq 0) \end{cases},$$

con  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  las permitividades características de cada uno de los medios, respectivamente. Evidentemente,  $\varepsilon(z, \omega)$  es una función de la posición y presenta una discontinuidad en  $z = 0$ .

Esta función dieléctrica también puede escribirse de la forma

$$\varepsilon(z, \omega) = \varepsilon_1 H_1(z) + \varepsilon_2 H_2(z), \quad (90)$$

donde

$$H_1(z) = \begin{cases} 1 & (z < 0) \\ 0 & (z \geq 0) \end{cases}, \quad (91)$$

y

$$H_2(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ 1 & (z \geq 0) \end{cases}. \quad (92)$$

son funciones que se comportan como la función escalón de Heaveside [70-73].

Si suponemos que ambos medios son lineales, homogéneos, isotrópicos y no magnéticos, esto es  $\mu_1(\omega) = \mu_2(\omega) = 1$ , las ecuaciones de Maxwell en el espacio de Fourier  $(\mathbf{r}, \omega)$ , definido por la transformación

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \tilde{F}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t},$$

se escriben como [83]

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)] = 4\pi \tilde{\rho}(\mathbf{r}, \omega), \quad (93)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (94)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{i\omega}{c} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (95)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (96)$$

donde hemos utilizado las expresiones

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega),$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega),$$

De las ecs. (94)-(96) obtenemos una ecuación diferencial para el campo magnético

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \nabla \varepsilon(\omega) \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega).$$

Ahora bien, ya que

$$\nabla \varepsilon(\omega) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \delta(z) \hat{\mathbf{z}}, \quad (97)$$

esta última ecuación se transforma en

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \phi \delta(z) \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (98)$$

donde hemos utilizado la definición

$$\phi = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

En el espacio de Fourier  $(\mathbf{k}_\perp, z, \omega)$ , definido por la transformación

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(\mathbf{k}_\perp, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} dk_x dk_y,$$

tendremos que nuestra ecuación diferencial para  $\mathbf{B}$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\mathbf{B}} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_\perp^2 \right] \tilde{\mathbf{B}} = \\ & = -\frac{4\pi}{c} \left[ \hat{i} \left( ik_y \tilde{J}_z - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{J}_y \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} \tilde{J}_x - ik_x \tilde{J}_z \right) + \hat{\mathbf{z}} \left( ik_x \tilde{J}_y - ik_y \tilde{J}_x \right) \right] + \\ & \quad + \frac{i\omega}{c} \phi \delta(z) \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}, \end{aligned} \quad (99)$$

una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden, donde hemos escrito  $\tilde{f} = \tilde{f}(\mathbf{k}_\perp, z, \omega)$ .

La función delta de Dirac en el lado derecho de esta ecuación hace evidente que el campo magnético está relacionado explícitamente con el comportamiento de las componentes transversales del campo eléctrico en la frontera,  $z = 0$ , las cuales sabemos que deben de ser funciones continuas en este punto.

Ahora bien, para el caso del campo eléctrico, de las ec. (95) y (96), se sigue que

$$\begin{aligned} \nabla \left[ \varepsilon(\omega) \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right] - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \nabla \varepsilon(\omega) - \varepsilon(\omega) \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \\ - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^2(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{i4\pi\omega}{c^2} \varepsilon(\omega) \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Dado que  $\varepsilon(\omega)$  es una función de la posición, la ec. (93) implica que

$$\varepsilon(\omega) \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = - [\nabla \varepsilon(\omega)] \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + 4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r}, \omega).$$

Si sustituimos esta expresión en la anterior y utilizamos la ec. (97), se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \varepsilon \phi \delta(z) \nabla \left[ \tilde{E}_z(\mathbf{r}, \omega) \right] + \varepsilon \phi \tilde{E}_z(\mathbf{r}, \omega) \nabla \delta(z) - \\ - \phi^2 \tilde{E}_z(\mathbf{r}, \omega) \delta(z) \delta(z) \hat{\mathbf{z}} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^3 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \\ = \varepsilon 4\pi \nabla \tilde{\rho}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{i4\pi\omega}{c^2} \varepsilon^2 \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega) - 4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r}, \omega) \phi \delta(z) \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

expresión que en el espacio de Fourier  $(\mathbf{k}_\perp, z, \omega)$ , se escribe como

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\mathbf{E}} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_\perp^2 \right] \tilde{\mathbf{E}} + \phi \varepsilon \delta(z) \left[ ik_x \tilde{E}_z \hat{\mathbf{i}} + ik_y \tilde{E}_z \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z \hat{\mathbf{z}} \right] + \\ + \tilde{E}_z \varepsilon \phi \delta'(z) \hat{\mathbf{z}} - \phi^2 \delta(z) \delta(z) \hat{\mathbf{z}} \tilde{E}_z(\mathbf{r}, \omega) = \\ = 4\pi \varepsilon \left[ ik_x \tilde{\rho} \hat{\mathbf{i}} + ik_y \tilde{\rho} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\rho} \hat{\mathbf{z}} \right] - \frac{i4\pi\omega}{c^2} \varepsilon^2 \tilde{\mathbf{J}} - 4\pi\tilde{\rho} \phi \delta(z) \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (101)$$

una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea que involucra productos, derivadas y potencias de distribuciones: la función Heaviside, en la expresión para  $\varepsilon$ , y la función delta de Dirac.

Aunque la presencia de las funciones delta de Dirac exhibe una fuerte relación entre el campo eléctrico y lo que sucede en la frontera, esto también

hace evidente las dificultades en manejar esta ecuación. Además, debemos enfatizar que dado que los campos eléctrico y magnético son soluciones a ecuaciones diferenciales de segundo orden, la dependencia lineal o independencia de estas soluciones se establece del conocimiento de sus valores y de los de su primera derivada en un punto particular, el cual en este caso es la frontera,  $z = 0$ .

A pesar de que las distribuciones, o funciones generalizadas se utilizan en muchas áreas de la Física [74-76], trabajar apropiadamente con ellas en la ec. (101) no es simple. Cuando trabajamos con la multiplicación de distribuciones hay dos tipos de problemas: el producto de dos distribuciones en general no está definido y la diferenciación es inconsistente con la multiplicación debido a que la regla de Leibniz, o aún la asociatividad, puede fallar bajo ciertas circunstancias. [77, 78].

Actualmente, *la teoría de Colombeau de funciones generalizadas es considerada por muchos matemáticos como una generalización de la teoría de distribuciones tal que la multiplicación siempre es posible* [79]. En el álgebra de Colombeau, la suma, la multiplicación, la diferenciación y la integración son similares a las que se realizan con las funciones de  $\mathcal{C}^\infty$ , haciendo que las operaciones en  $\mathcal{G}(\Omega)$ , el espacio de las funciones generalizadas de Colombeau, sean una mera extensión de las que se realizan en  $\mathcal{C}^\infty$ . En esta álgebra, si  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}(\Omega)$  tales que para cualquier  $\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (G_1(x) - G_2(x)) \Psi(x) dx = 0$$

decimos que  $G_1$  está asociada con  $G_2$ , esto es  $G_1 \sim G_2$ . Así que la asociación es una generalización del concepto de igualdad entre distribuciones. De esta definición es claro que  $G_1 \sim G_2 \implies DG_1 \sim DG_2$  para cualquier diferenciación parcial  $D$ . Las funciones  $H_1$  y  $H_2$ , definidas en las ecs. (91) y (92), son funciones generalizadas de Heaviside que satisfacen

$$H_1^n(z) \sim H_1(z), \quad H_2^n(z) \sim H_2(z). \quad (102)$$

y

$$H_1(z) H_2(z) = H_1(z) H_1(-z) = 0. \quad (103a)$$

Así pues, la permitividad, definida por la ec. (90), satisface

$$\varepsilon^n(\omega) \sim \varepsilon_1^n H_1(z) + \varepsilon_2^n H_2(z). \quad (104)$$

En este caso, resolveremos la ec. (101) manejando las funciones generalizadas de una forma muy intuitiva, considerando, como en el álgebra de Colombeau, que su suma, multiplicación, diferenciación e integración son similares a las que se realizan con las funciones  $C^\infty$ . La invaluable utilidad de este análisis se mostrará comparando los resultados que obtengamos con aquellos que se tienen para el caso más simple de Radiación de Transición: el de una carga puntual que se mueve con velocidad constante  $v$  a lo largo del eje  $z$ , y que atraviesa la frontera entre dos medios. En este caso, se considerará una distribución de carga y corriente dadas por

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}_\perp, z, \omega) = \frac{q}{(2\pi)^{3/2} v} e^{i\omega z/v}, \quad (105)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k}_\perp, z, \omega) = \frac{q}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\omega z/v} \hat{z}. \quad (106)$$

Con estas expresiones, las ecuaciones diferenciales para el campo eléctrico y el magnético se reducen a

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_{x,y} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_\perp^2 \right] \varepsilon^2 \tilde{E}_{x,y} + \phi \delta(z) i k_{x,y} \varepsilon \tilde{E}_z = \\ = \frac{i4\pi q k_{x,y}}{(2\pi)^{3/2} v} \varepsilon e^{i\omega z/v}, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_z + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_\perp^2 \right] \varepsilon^2 \tilde{E}_z + \\ + \phi \varepsilon \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z + \tilde{E}_z \varepsilon \phi \delta'(z) - \phi^2 \delta(z) \delta(z) \tilde{E}_z = \\ = \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right] \frac{\varepsilon \omega}{v^2} \frac{i4\pi q}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\omega z/v} - \frac{4\pi q}{(2\pi)^{3/2} v} \phi \delta(z), \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \left[ -k_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{B}_x + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \tilde{B}_x = \\ = -\frac{4\pi i q k_y}{c (2\pi)^{3/2}} e^{i\omega z/v} - \frac{i\omega}{c} \phi \delta(z) \tilde{E}_y, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\left[ -k_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{B}_y + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \tilde{B}_y =$$

$$= \frac{4\pi i q k_x}{c (2\pi)^{3/2}} e^{i\omega z/v} + \frac{i\omega}{c} \phi \delta(z) \tilde{E}_x, \quad (110)$$

$$\left[ -k_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{B}_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \tilde{B}_z = 0. \quad (111)$$

Cabe mencionar, que uno de los problemas que presentan estas ecuaciones es la presencia de la función delta de Dirac  $\delta(x)$ , la cual por definición se anula en todos los puntos del espacio, en  $z = 0$ . Sin embargo, demostraremos que es posible analizar el comportamiento de las componentes del campo electromagnético en la frontera si conocemos sus expresiones para  $z \neq 0$ .

## 5.2. El campo electromagnético en $z \neq 0$

Para todos los puntos tales que  $z \neq 0$ , las ecuaciones diferenciales que satisfacen las componentes del campo eléctrico y el magnético, ecs. (107)-(111), se reducen a las expresiones

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_{x,y} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_{\perp}^2 \right] \varepsilon^2 \tilde{E}_{x,y} = \frac{i4\pi q k_{x,y}}{(2\pi)^{3/2} v} \varepsilon e^{i\omega z/v}, \quad (112)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_z + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_{\perp}^2 \right] \varepsilon^2 \tilde{E}_z = \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right] \frac{\varepsilon \omega}{v^2} \frac{i4\pi q}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\omega z/v}, \quad (113)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{B}_x + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_{\perp}^2 \right] \tilde{B}_x = -\frac{4\pi i q k_y}{c (2\pi)^{3/2}} e^{i\omega z/v}, \quad (114)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{B}_y + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_{\perp}^2 \right] \tilde{B}_y = \frac{4\pi i q k_x}{c (2\pi)^{3/2}} e^{i\omega z/v}, \quad (115)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{B}_z + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_{\perp}^2 \right] \tilde{B}_z = 0. \quad (116)$$

Todas estas ecuaciones, excepto la última, son ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, las cuales pueden resolverse a través del método de la función de Green. Sin embargo, su linealidad nos permite utilizar el método de la función complementaria en el cual si  $u_1$  es una solución particular a la ecuación no homogénea y  $y$  es la solución general a la ecuación homogénea, entonces  $u = u_1 + y$  será una solución general a la ecuación no homogénea.

Notemos que las soluciones para  $z < 0$  y  $z > 0$  de las ecuaciones diferenciales (112)-(116) tienen la misma estructura, difiriendo solamente en el valor

de la permitividad. Para  $z < 0$  la función  $\varepsilon(\omega)$  toma el valor  $\varepsilon_1$  mientras que para  $z > 0$  tomará un valor  $\varepsilon_2$ . A partir de este momento, los subíndices 1 y 2 en las expresiones para el campo eléctrico y magnético nos indicarán el valor de los campos en las zonas  $z < 0$  y  $z > 0$ , respectivamente.

Para  $z < 0$ , las ecuaciones diferenciales homogéneas tienen como soluciones

$$\left(\tilde{E}_{1x,y,z}\right)_{\text{hom}} = a \exp \left[ \pm i \left( \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) z \right], \quad (117)$$

$$\left(\tilde{B}_{1x,y,z}\right)_{\text{hom}} = b \exp \left[ \pm i \left( \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) z \right]. \quad (118)$$

Estas soluciones representarán campos de radiación solo si describen ondas viajeras, esto es si

$$\frac{\omega^2 \varepsilon_1}{c^2} - k_{\perp}^2 > 0,$$

o bien

$$\varepsilon_1 > \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}.$$

Cuando se tiene que

$$\varepsilon_1 < \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2},$$

las soluciones decrecen exponencialmente a partir de la frontera. Aunque es posible tener este tipo de campos, al igual que la mayoría de los autores, no los consideraremos en este trabajo.

Ahora bien, la solución que involucra al término  $\exp \left[ +i \left( \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) z \right]$  describe a una onda que viaja de  $-\infty$  hacia las  $z$  positivas, mientras que la solución que involucra el término  $\exp \left[ -i \left( \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) z \right]$  describe una onda que viaja de  $+\infty$  hacia las  $z$  negativas. Dado que no hay nada que refleje la radiación, en la zona lejana el campo electromagnético debe de propagarse alejándose de la frontera entre los dos medios. Entonces, para  $z < 0$  debemos tener un campo de radiación propagándose hacia la izquierda, esto es,

$$\left(\tilde{E}_{1x,y,z}\right)_{\text{hom}} = a \exp \left[ -i \left( \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) z \right], \quad (119)$$



$$\left(\tilde{B}_{1x,y,z}\right)_{\text{hom}} = b \exp \left[ -i \left( \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) z \right], \quad (120)$$

y las soluciones particulares para las ecuaciones no homogéneas serán

$$\left(\tilde{E}_{x,y,z}\right)_{\text{non hom}} = A_{x,y,z} \exp \left[ i \left( \frac{\omega z}{v} \right) \right], \quad (121)$$

$$\left(\tilde{B}_{x,y}\right)_{\text{non hom}} = C_{x,y} \exp \left[ i \left( \frac{\omega z}{v} \right) \right], \quad (122)$$

con

$$\begin{aligned} A_{x,y} &= \frac{i4\pi q k_{x,y}}{(2\pi)^{3/2} v \varepsilon_1} \frac{1}{\left[ \frac{\omega^2 \varepsilon_1}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2} - k_{\perp}^2 \right]}, \\ A_z &= \frac{i4\pi q \omega}{(2\pi)^{3/2} v^2 \varepsilon_1} (1 - \beta^2 \varepsilon_1) \frac{1}{\left[ \frac{\omega^2 \varepsilon_1}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2} - k_{\perp}^2 \right]}, \\ C_x &= -\frac{4\pi i q}{v (2\pi)^{3/2}} \frac{\frac{v}{c} k_y}{\left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right]}, \end{aligned} \quad (123)$$

y

$$C_y = \frac{4\pi i q}{v (2\pi)^{3/2}} \frac{\frac{v}{c} k_x}{\left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right]}.$$

Así pues, para  $z < 0$

$$\left(\tilde{E}_1\right)_{x,y} = \frac{A k_{x,y} \alpha_1}{\varepsilon_1} e^{i\omega z/v} + a_{1,2} A \exp[-i\xi_1 z], \quad (124)$$

$$\left(\tilde{E}_1\right)_z = \frac{A \omega \alpha_1}{v \varepsilon_1} (1 - \beta^2 \varepsilon_1) e^{i\omega z/v} + a_3 A \exp[-i\xi_1 z], \quad (125)$$

$$\tilde{B}_{1x} = -k_y \frac{v}{c} A \alpha_1 e^{i\omega z/v} + b_1 A e^{-i\xi_1 z}, \quad (126)$$

$$\tilde{B}_{1y} = k_x \frac{v}{c} A \alpha_1 \frac{e^{i\omega z/v}}{\alpha_1} + b_2 A e^{-i\xi_1 z}, \quad (127)$$

$$\tilde{B}_{1z} = b_3 A e^{-i\xi_1 z}, \quad (128)$$

donde definimos

$$\alpha_{1,2} = \left[ \frac{\omega^2 \varepsilon_{1,2}}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2} - k_{\perp}^2 \right]^{-1},$$

$$\xi_{1,2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{1,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}},$$

$$A = \frac{i4\pi q}{(2\pi)^{3/2} v}.$$

Para  $z > 0$ , la función dieléctrica toma el valor  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_2$ , por lo que en esta región tendremos

$$\left(\tilde{E}_2\right)_{x,y} = \frac{Ak_{x,y}\alpha_2}{\varepsilon_2} e^{i\omega z/v} + a_{4,5}A \exp[i\xi_2 z], \quad (129)$$

$$\left(\tilde{E}_2\right)_z = \frac{A\omega\alpha_2}{v\varepsilon_2} (1 - \beta^2\varepsilon_2) e^{i\omega z/v} + a_6A \exp[i\xi_2 z]. \quad (130)$$

$$\tilde{B}_{2x} = -k_y \frac{v}{c} A\alpha_2 e^{i\omega z/v} + b_4 A e^{i\xi_2 z}, \quad (131)$$

$$\tilde{B}_{2y} = k_x \frac{v}{c} A\alpha_2 e^{i\omega z/v} + b_5 A e^{i\xi_2 z}, \quad (132)$$

$$\tilde{B}_{2z} = b_6 A e^{i\xi_2 z}, \quad (133)$$

y el campo de radiación se representa por una onda electromagnética propagándose hacia la derecha.

El cálculo, completo y único, del campo electromagnético para todo los puntos del espacio implica determinar 12 constantes desconocidas,  $a_i$  y  $b_i$  con  $i = 1, \dots, 6$ . Las condiciones a la frontera, considerando que no tenemos ni densidad de carga o corriente libres en la frontera,

$$(\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (134)$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (135)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (136)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (137)$$

nos permiten calcular solo seis de estas constantes. Para determinar todas las componentes del campo electromagnético será necesario encontrar otras seis condiciones. El análisis del comportamiento de las ecuaciones diferenciales (107)-(111) en la frontera nos proporcionará precisamente las condiciones que nos hacen falta.

Otros autores solo determinan explícitamente la componente  $z$  del campo eléctrico utilizando dos condiciones: la discontinuidad de la componente normal del campo eléctrico, ec. (134), y la continuidad de la proyección de la componente tangencial de éste, es decir,  $\mathbf{k}_\perp \cdot \tilde{\mathbf{E}}_\perp$ , y generalmente argumentan

que las otras componentes del campo eléctrico y magnético pueden calcularse a partir de esta última.

### 5.3. Análisis de la discontinuidad en $z=0$

Aunque la presencia de las funciones generalizadas de Dirac y Heaviside en las ecuaciones diferenciales para las componentes del campo electromagnético, ecs. (107-111), nos proporciona información sobre el comportamiento de éstas, es claro que si integramos, obtendremos muchísima más información. De hecho, las funciones generalizadas son más fáciles de manejar cuando se encuentran bajo un signo de integral, lo cual además, nos permiten utilizar la definición de asociación entre funciones generalizadas, ecs. (102) y (103a), en el álgebra de Colombeau.

Entonces, para analizar el comportamiento del campo eléctrico y magnético en la frontera entre los dos medios, integraremos las ecuaciones diferenciales (107)-(111) en un intervalo  $[-\lambda, \lambda]$  alrededor de  $z = 0$ , con  $\lambda \rightarrow 0$ , como se hace en otros problemas físicos [90-93], esto es

$$\begin{aligned}
& \int_{-\lambda}^{\lambda} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_{x,y} \right) dz + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^3 \tilde{E}_{x,y} dz - k_{\perp}^2 \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^2 \tilde{E}_{x,y} dz + \\
& \quad + ik_{x,y} \phi \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon \delta(z) \tilde{E}_z dz = \frac{i4\pi q k_{x,y}}{(2\pi)^{3/2} v} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon e^{i\omega z/v} dz, \\
& \int_{-\lambda}^{\lambda} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_z \right) dz + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^3 \tilde{E}_z dz - k_{\perp}^2 \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^2 \tilde{E}_z dz + \\
& + \phi \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon \delta(z) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z dz + \phi \int_{-\lambda}^{\lambda} \left( \tilde{E}_z \varepsilon \right) \delta'(z) dz - \phi^2 \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(z) \delta(z) \tilde{E}_z dz = \\
& = \frac{\omega}{v^2} \frac{i4\pi q}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon e^{i\omega z/v} dz - \frac{v^2 \omega}{c^2 v^2} \frac{i4\pi q}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^2 e^{i\omega z/v} dz - \\
& \quad - \frac{4\pi q \phi}{(2\pi)^{3/2} v} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\omega z/v} \delta(z) dz, \tag{138}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left[ -k_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{B}_x(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega) dz + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon(\omega) \tilde{B}_x(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega) dz =$$

$$= -\frac{4\pi i q k_y}{c(2\pi)^{3/2}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\omega z/v} dz - \frac{i\omega}{c} \phi \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(z) \tilde{E}_y(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega) dz, \quad (139)$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{B}_y dz + \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_{\perp}^2 \right] \tilde{B}_y dz = \frac{4\pi i q k_x}{c(2\pi)^{3/2}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\omega z/v} dz, \quad (140)$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{B}_z dz + \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_{\perp}^2 \right] \tilde{B}_z dz = 0. \quad (141)$$

Debemos recalcar que algunas de las integrales que aparecen esta ecuación no son triviales de realizar. No solo aparecen funciones delta de Dirac y Heaviside sino que además se encuentran presentes productos entre ellas, potencias de ellas y sus derivadas, acompañadas de funciones discontinuas en  $z = 0$ , como lo es  $E_z$ .

La propiedad de la delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0), \quad (142)$$

está bien definida solo si  $g(x)$  es una función continua en el origen [80]. Sin embargo, si  $g(x)$  es una función discontinua en dicho punto y se considera a la función delta de Dirac como el límite de una serie de funciones pares [81-84] se tiene que ahora

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} g(x) \delta(x) dx = \langle g(0) \rangle, \quad (143)$$

donde

$$\langle g(0) \rangle = \frac{1}{2} [g(0^+) + g(0^-)]. \quad (144)$$

Ahora bien, si integramos por partes  $n$  veces, es fácil demostrar que [94]

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} g(x) \frac{d^n}{dx^n} \delta(x) dx = \int_{-\lambda}^{\lambda} g(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n \langle g^{(n)}(0) \rangle. \quad (145)$$

Por otra parte, para funciones continuas, como  $E_x$  y  $E_y$ , debemos usar la definición usual de la función delta de Dirac, ec. (142).

Cuando se resuelven las ecuaciones de Maxwell para un espacio constituido por varios medios no magnéticos, las condiciones a la frontera (134)-(137) se utilizan para obtener las relaciones entre las componentes normal y tangencial de los campos en cada lado de la frontera. Para el caso específico de

Radiación de Transición que estamos analizando, las condiciones a la frontera aplicadas en  $z = 0$ , son

$$\tilde{E}_{1x,y}(0^-) = \tilde{E}_{2x,y}(0^+), \quad (146)$$

$$\varepsilon_1 \tilde{E}_{1z}(0^-) = \varepsilon_2 \tilde{E}_{2z}(0^+), \quad (147)$$

$$\tilde{B}_{1x,y,z}(0^-) = \tilde{B}_{2x,y,z}(0^+), \quad (148)$$

De estas relaciones puede establecerse que  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ , y  $B_z$  son funciones continuas en  $z = 0$  pero  $E_z$  no lo es. Por otro lado, cabe mencionar que aunque las componentes tangenciales del campo electromagnético sean funciones continuas en  $z = 0$ , sus derivadas pueden ser funciones discontinuas, sobre todo si existen distribuciones superficiales de carga inducidas por polarización.

Integrando por partes y usando la definición de las funciones generalizadas de Heaviside  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ , ecs. (104) y (143), es fácil obtener en el límite  $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_{-\lambda}^{\lambda} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_{x,y} \right) dz \sim \\ & \sim \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{x,y}(0^+) - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{x,y}(0^-) \right), \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}_z dz \sim \\ & \sim \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(0^+) - \varepsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(0^-) - \phi \left( \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(0^-) + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(0^+) \right). \end{aligned} \quad (150)$$

Dado que  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ , y  $B_z$  son funciones continuas en  $z = 0$ , es posible demostrar que en el límite  $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^n \tilde{E}_x dz = \int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^n \tilde{E}_y dz = 0. \quad (151)$$

Por otro lado, aún cuando  $E_z$  es una función discontinua en  $z = 0$ , su producto con las funciones generalizadas de Heaviside  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ , involucradas en la función  $\varepsilon(\omega)$  bajo el símbolo de la integral, evitan este punto. Entonces, en el límite  $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^n \tilde{E}_z dz = 0. \quad (152)$$

De las definiciones (143) y (145)

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} (\varepsilon \tilde{E}_z) \delta(z) dz = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_1 \tilde{E}_z(0^-) + \varepsilon_2 \tilde{E}_z(0^+) \right], \quad (153)$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z \right) \delta(z) dz = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(0^-) + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(0^+) \right), \quad (154)$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} (\tilde{E}_z \varepsilon) \delta'(z) dz = -\frac{1}{2} \left[ \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(0^-) + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(0^+) \right]. \quad (155)$$

Ahora bien, la integral

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \tilde{E}_z \delta(z) \delta(z) dz \quad (156)$$

merece una atención especial ya que en ella aparece una función delta de Dirac elevada al cuadrado, acompañada de una función discontinua en el origen. Aunque existen muchos argumentos que demuestran que en la teoría de distribuciones no existe una manera razonable de introducir el cuadrado  $\delta^2(z)$  de la función delta de Dirac  $\delta(z)$  [69], ésta es comúnmente usada en la solución de muchos problemas físicos.

La integral (156) puede evaluarse si consideramos que la función delta de Dirac actúa sobre la función  $\delta(z) \tilde{E}_z$ , la cual evidentemente es una función discontinua en el origen, entonces

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} (\tilde{E}_z \delta(z)) \delta(z) dz = \langle \delta(z) \tilde{E}_z \rangle, \quad (157)$$

pero  $\delta(z) \tilde{E}_z$  se anula en todos los puntos excepto en  $z = 0$ , punto que no se considera en el promedio  $\langle \delta(z) \tilde{E}_z \rangle$ , por lo que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} (\tilde{E}_z \delta(z)) \delta(z) dz = \langle \delta(z) \tilde{E}_z \rangle = 0. \quad (158)$$

Dado que  $e^{i\omega z/v}$  es una función continua, en el límite  $\lambda \rightarrow 0$  se tendrá que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \varepsilon^n e^{i\omega z/v} dz = 0. \quad (159)$$

Con estos resultados, las condiciones a la frontera para la derivadas de las componentes del campo electromagnético son

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{x,y} (0^+) - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_{x,y} (0^-) = -ik_{x,y} \frac{\phi}{\varepsilon_2} \tilde{E}_z (0^-), \quad (160)$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z (0^+) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z (0^-) = -\frac{4\pi q \phi}{(2\pi)^{3/2} v}, \quad (161)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_x (0^+)}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{B}_x (0^-)}{\partial z} = -\frac{i\omega}{c} \phi \tilde{E}_y (0), \quad (162)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_y (0^+)}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{B}_y (0^-)}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} \phi \tilde{E}_x (0), \quad (163)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_z (0^+)}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{B}_z (0^-)}{\partial z}. \quad (164)$$

Aún cuando las componentes del campo magnético y las componentes tangenciales del campo eléctrico son funciones continuas en  $z = 0$ , dado que no hay una densidad superficial de carga libre o una densidad de corriente en la frontera entre los dos medios, sus derivadas en este punto son funciones discontinuas.

En particular, la discontinuidad de las derivadas del campo eléctrico está relacionada con una carga de polarización inducida, dada por  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$  y dentro de cada medio

$$\mathbf{P}_i = \frac{(\varepsilon_i - 1)}{4\pi} \mathbf{E}_i. \quad (165)$$

#### 5.4. Usando las condiciones a la frontera para determinar el campo electromagnético

Cuando las ecs. (125) y (130) se substituyen en las condiciones a la frontera (147) y (161) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$a_3 \varepsilon_1 - a_6 \varepsilon_2 = \frac{\omega}{v} (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{\omega}{v} \beta^2 (\alpha_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \varepsilon_2),$$

$$\xi_1 a_3 + a_6 \xi_2 = -\frac{4\pi q \phi}{i (2\pi)^{3/2} A v \varepsilon_1 \varepsilon_2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \left[ \frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} + \beta^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \right],$$

que tiene como solución

$$a_3 = -\frac{v}{\omega} \frac{v}{c} \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \frac{1}{\left[ \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right]} \times$$

$$\times \left[ \frac{1 - \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}}{1 - \frac{v^2 \varepsilon_2}{c^2} + \frac{v^2}{\omega^2} k_{\perp}^2} - \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}}{1 - \frac{v^2 \varepsilon_1}{c^2} + \frac{v^2}{\omega^2} k_{\perp}^2} \right], \quad (166)$$

$$a_6 = \frac{v}{\omega} \frac{v}{c} \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \frac{1}{\left[ \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right]} \times$$

$$\times \left[ \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}}{1 - \frac{v^2 \varepsilon_1}{c^2} + \frac{v^2}{\omega^2} k_{\perp}^2} - \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}}{1 - \frac{v^2 \varepsilon_2}{c^2} + \frac{v^2}{\omega^2} k_{\perp}^2} \right]. \quad (167)$$

En analogía, de las ecs. (124) y (129) y las condiciones a la frontera (146) y (160) es fácil encontrar

$$a_1 = a_3 \frac{k_x}{k_{\perp}^2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}, \quad (168)$$

$$a_2 = a_3 \frac{k_y}{k_{\perp}^2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}, \quad (169)$$

$$a_4 = -a_6 \frac{k_x}{k_{\perp}^2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}, \quad (170)$$

$$a_5 = -a_6 \frac{k_x}{k_{\perp}^2} \frac{\omega}{c} \lambda \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}. \quad (171)$$

Las ecs. (126), (131), (148) y (162) llevan al sistema de ecuaciones

$$b_1 - b_4 = k_y \frac{v}{c} (\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$\xi_1 b_1 + b_4 \xi_2 = -\frac{\omega}{c} \phi \left( \frac{k_y \alpha_1}{\varepsilon_1} + a_2 \right) + k_y \frac{\omega}{c} \alpha_2 - k_y \frac{\omega}{c} \alpha_1,$$



cuya solución es

$$b_1 = \frac{\omega}{c} a_3 \frac{k_y}{k_\perp^2} \varepsilon_1, \quad (172)$$

$$b_4 = \frac{\omega}{c} \frac{k_y}{k_\perp^2} a_6 \varepsilon_2. \quad (173)$$

De las ecs. (127), (132), y las condiciones a la frontera (148) y (163) es fácil obtener

$$b_2 = -\frac{\omega}{c} a_3 \frac{k_x}{k_\perp^2} \varepsilon_1, \quad (174)$$

$$b_5 = -\frac{\omega}{c} a_6 \frac{k_x}{k_\perp^2} \varepsilon_2. \quad (175)$$

Finalmente, de las ecs. (128), (133), (148) y (164) se tiene

$$b_3 = b_6 = 0.$$

El haber determinado los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$ , con  $i = 1 \dots, 6$ , permite escribir la expresión para todas las componentes del campo magnético y eléctrico en todo el espacio. Las expresiones que obtuvimos para las componentes normales del campo eléctrico  $\tilde{E}_{1z}$  y  $\tilde{E}_{2z}$ , concuerdan con las que se calculan en otros trabajos [30].

Es importante mencionar que en contraste con los trabajos usuales sobre Radiación de Transición, el uso de funciones generalizadas permite determinar directamente todas las componentes del campo electromagnético.

Aunque la Radiación de Transición ha sido ampliamente estudiada, todos los autores solo determinan explícitamente las componentes normales a la frontera de los campos eléctrico y magnético, quizá debido a la dificultad en resolver las ecuaciones diferenciales que las otras componentes satisfacen ya que involucran funciones generalizadas. En este capítulo mostramos como se pueden manejar las funciones generalizadas y sus productos para obtener las condiciones a la frontera que satisfacen las componentes longitudinales de los campos, lo cual nos permite determinar explícitamente todas las componentes del campo electromagnético en todos los puntos del espacio. Es claro que el conocer completamente la expresión para el campo electromagnético en todos los puntos del espacio en el fenómeno de Radiación de Transición nos permitirá conocer con mayor detalle este tipo de radiación y sus posibles aplicaciones.

## Capítulo 6

### Conclusiones

A pesar de que los efectos radiativos inducidos por el paso de partículas cargadas viajando en el interior de medios materiales fueron observados desde hace más de setenta años, su estudio, bajo diferentes circunstancias, continua siendo un tema de gran interés principalmente debido a sus innumerables aplicaciones tanto en la física de altas energías como en nuevos campos de estudio como es la física biomédica. Si nos centramos en el ámbito de la Electrodinámica Clásica, el estudio del efecto Vavilov-Cherenkov y la Radiación de Transición constituye un tema fundamental debido a que aún existen algunos puntos oscuros que merecen ser discutidos debido a que contrastan con los aspectos conceptuales básicos de esta área de la Física.

Usualmente, la mayoría de los autores no discuten con detalle el origen de la radiación Cherenkov lo que muchas veces conduce a la idea equivocada de que la única fuente de la energía emitida es la partícula o distribución de carga viajera. Esta afirmación además contrasta con el hecho de que tanto en el efecto Vavilov-Cherenkov como en la Radiación de Transición se considera que la carga siempre viaja con velocidad constante a pesar de que hay una pérdida de energía sin hacer mención a ninguna fuerza externa que le restituya a la carga la energía que pierde por radiación. En este sentido, tal parece que se considera a la carga como una fuente inagotable de energía lo que claramente contradice el balance energético que se obtiene de la teoría electromagnética. Cabe mencionar que en un trabajo previo se demostró [55] que para evitar inconsistencias con la Electrodinámica Clásica, en el efecto Vavilov-Cherenkov es necesario contar con una fuerza externa de forma que la carga se comporta, en este caso, como un transductor que transforma íntegramente trabajo mecánico en radiación. En ese mismo trabajo se muestra que los resultados usuales del efecto Vavilov-Cherenkov pueden obtenerse a partir del análisis de la reacción de radiación de una carga moviéndose en un medio isotrópico, homogéneo y lineal.

En esta tesis se ha mostrado que el problema del origen de la radiación Cherenkov y la Radiación de Transición se resuelve muy fácilmente si se utiliza una idea que resalta por su belleza y claridad: en ambos casos se tiene un efecto colectivo, en donde claramente el medio juega un papel muy importante.

En este trabajo, para analizar el efecto Vavilov-Cherenkov se utilizó la

idea de que al moverse a través de un medio, una partícula cargada induce la formación de dipolos elementales, dependientes del tiempo, de forma que cuando la velocidad de la carga es mayor que la velocidad de la luz en el medio, la radiación emitida por estos dipolos se superpone coherentemente para dar lugar a la radiación Cherenkov. Esta es una idea heredada del análisis de la Radiación de Transición y contrasta por su sencillez tanto en el planteamiento físico como en los cálculos necesarios con el método de análisis utilizado en la literatura usual.

Lo más importante del uso de la idea de la polarización inducida es que puede reproducir los resultados obtenidos para el espectro de energía emitido por efecto Vavilov-Cherenkov para distintas distribuciones de carga, pues no sólo se pueden obtener los resultados conocidos para el caso de la partícula cargada puntual, sino que además puede ser generalizado fácilmente para determinar el espectro de emisión de distintas distribuciones extensas de carga, paquetes de partículas e incluso distribuciones sin carga neta como lo es un dipolo puntual eléctrico.

En todos estos casos se obtuvo la forma explícita del espectro emitido, llevando a la conclusión de que este espectro depende fuertemente de la estructura de la distribución de carga y que, en particular, en el caso del dipolo eléctrico también depende de la dirección en la que el momento dipolar apunta con respecto a la dirección de movimiento. Es claro que estas diferencias pueden utilizarse en el experimento pues una vez que se mide el espectro de emisión se puede determinar el tipo de partículas, o paquetes de partículas, que viajan en el medio; hecho que resulta de gran utilidad en la física de altas energías en donde los detectores que se emplean generalmente trabajan analizando la radiación Cherenkov.

Cabe mencionar que la condición Cherenkov sobre la magnitud de la velocidad, así como el cono Cherenkov son totalmente independientes de la forma de la distribución de carga pudiendo interpretarlos como condiciones que aparecen debido a la condición cinemática de movimiento uniforme de la distribución de carga.

Dado que la radiación Cherenkov tiene su origen en la polarización del medio y que un pulso electromagnético o paquete de onda que viaja a través de un medio también induce una polarización dependiente del tiempo, se estudió la radiación Cherenkov que se podía generar y se analizó el caso de distintos tipos de pulso.

Ya que las propiedades del medio determinan el intervalo de frecuencias

en las que se emite radiación Cherenkov, se exhibió que es posible definir un límite inferior para la velocidad de la partícula, el cual no depende de la frecuencia cuando se consideran tanto la respuesta específica del medio como la condición sobre la velocidad de la partícula.

Se debe destacar que en el análisis del efecto Vavilov-Cherenkov generado por diversas distribuciones de carga, e incluso por el pulso electromagnético, apareció la función delta de Dirac elevada al cuadrado, lo que resalta pues aunque es común encontrarla en problema de la Física, el producto o potencias de funciones generalizadas no está bien definida. En el efecto Vavilov-Cherenkov esta función generalizada se manejó de forma heurística, al igual que en otros problemas de la Física, llevando a los resultados que se obtienen siguiendo otros métodos de análisis.

Finalmente, se analizó con sumo detalle los campos electromagnéticos que se generan en el fenómeno de Radiación de Transición, del cual se heredó la idea que permitió el análisis del efecto Vavilov-Cherenkov. Aunque en la literatura usual la Radiación de Transición se analiza desde diferentes perspectivas para distintos problemas, no se obtienen todas las componentes del campo electromagnético pues las condiciones a la frontera no proporcionan el número necesario de ecuaciones para determinarlas. En este trabajo se demostró que es posible imponer condiciones a la frontera sobre las derivadas del campo electromagnético cuando se analiza el caso de una partícula que cruza la frontera entre dos medios lineales, homogéneos e isotrópicos. Este análisis involucró el uso de la teoría de distribuciones y el establecimiento de analogías con algunos problemas típicos de la mecánica cuántica, llevando a obtener explícitamente todas las componentes del campo electromagnético, lo cual no se muestra en la literatura usual.

## Referencias

- [1] Cherenkov, P. A. (1934). *Dokl Akad Nauk SSSR*, **2**, 451.  
Vavilov, S. I. (1934). *Dokl Akad Nauk SSSR*, **2**, 457.
- [2] Tamm, I. E., Frank, I. M. (1937). *Dokl Akad Nauk SSSR*, **14**, 107.  
Tamm, I. E., Frank, I. M. (1937). *Dokl Akad Nauk SSSR*, **2**, 451  
Frank, I. M. (1984). *Sov. Phys. Usp.*, **27**(5), 385.
- [3] Collins, G. B., Reiling, V. (1938). *Phys. Rev.*, **54**, 499.
- [4] Sommerfeld, A. (1904). *Göttingen Nachr S*, **19**, 3.
- [5] Sommerfeld, A. (1953). *Optics*. New York: Academic Press. Capítulo 47.
- [6] Afanasiev, G. N. (2004). *Vavilov-Cherenkov and Synchrotron Radiation: Foundations and Applications*. United States: Kluwer Academic Publishers.  
Jelley, J. V. (1955). *British Journal of Applied Physics*, **6**, 227.  
Ginzburg, V. L. (1996). *Physics-Uspeski*, **39**(10), 974.
- [7] Lippman, Ch. (2012). *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, **666**, 148-172.  
Allison, W. W. M., Cobb, J. H. (1980). *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **30**, 253-298.  
Govorkov, B. B. (2005). *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, **553**, 9-17.
- [8] Abeysekera, A. U., Alfaro, R., et al. (2015). *Ap. J.*, **800**, 78.  
Longair, M. S. (2004) *High Energy Astrophysics. Vol. I. Particles, Photons and their Detection*. Cambridge: Cambridge University Press.  
Vries, K. D., Van der Ber, A. M., Scholten, O., Werner, K. (2011) *Phys. Rev. Lett.* **107**, 061101  
Watson, A. A. (2011) *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*. **212-213**, 13-19.  
[www.hawc-observatory.org](http://www.hawc-observatory.org)
- [9] D’Olivo, J. C., Nieves, J. F., Palash, B. P. (1996). *Phys. Lett. B*, **365**, 178-184.  
Aartsen, M. G. (2015). *Phys. Rev. D*, **91**, 022001-1.
- [10] Ruggiero, A., Holland, J. P., Lewis, J. S., Grimm, J. (2010). *The Journal of Nuclear Medicine*, **51**(7), 1123.  
Spinelli, A. E., D’Ambrosio, D., Calderan, L., Marengo, M., Sharbati, A., Boschi, F. (2010). *Phys. Med. Biol.* **55**, 483.

- Spinelli, A. E., Boschi, F. (2015). *Physica Medica*, **31**, 120-129.
- Mitchell, G. S., Gill, R. K., et. al. (2011). *Phil. Trans. R Soc. A*, **369**, 4605-4619.
- [11] Kobzev, A P. (2010) *Physics of Particles and Nuclei* **41**(3), 452-470  
 Bolotovskii, B. M. (2009). *Physics Usphekt*, **52**(11), 107.
- Ginzburg, V. L. (2001). *The Physics of a LifeTime. Reflections on the problems and personalities of 20th Century Physics*. New York: Springer-Verlag.
- [12] Ginzburg, V. L., Frank, I. M. (1946). *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, **16**, 15.
- [13] Goldsmith, J. V., Jelley, J. V. (1959). *Pilosophical Magazine*, **4**, 836.
- [14] Andronic, A., Wessels, J. P. (2012). *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, **666**, 130-147.
- [15] Eyges, L. (1980). *The Classical Electromagnetic Field*. New York: Dover.
- [16] Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. Third edition. New York: John Wiley and Sons.
- [17] Ginzburg, V. L. (1989). *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics*. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [18] Ginzburg, V. L., Tsytovich, V. N. (1990). *Transition Radiation and Transition Scattering*. Bristol: Adam Hilger.
- [19] Good, R. H., Nelson, T. J. (1971). *Classical Theory of Electric and Magnetic Fields*. New York: Academic.
- [20] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1984). *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford: Pergamon Press.
- [21] Panofsky, W. K. H., Phillips, M. (1962) *Classical Electricity and Magnetism* 2nd edn. Reading MA: Addison-Wesley.
- [22] Portis, A. M. (1978). *Electromagnetic Field Sources and Media*. New York: Wiley. pp 567-76.
- [23] Heald, M. A., Marion, J. B. (2012). *Classical Electromagnetic Radiation. Third Edition*. USA: Dover.
- [24] Ohanian H. (2007). *Classic Electrodynamics. Second Edition*. Massachusetts: Infinity Science Press LCL.
- [25] Volkoff, G. M. (1963). *Am. J. Phys.*, **31**, 601.
- [26] Lalor, E., Wolf, E. (1971) *Phys. Rev. Lett.* **26**(20), 1275.

- [27] Ginzburg, V. L. (2005) *Acoustical Physics*. **51**(1), 24-36.
- [28] Burskirk, F. R., Neighbours J. R. (1985) *Phys. Rev. A*. **31**(6), 3750-3754.
- [29] Haus, H. A. (1986). *Am. J. Phys*, **54**, 1126.
- [30] Bornatici, M., Spada, M. (1989). *Am. J. Phys.*, **57**, 634.
- [31] Roa-Neri, J. A. E., Villavicencio, M., Jiménez, J. L. (1993). *Rev. Mex Fis.*, **39**, 2.
- [32] Durand, L. (1973). *Astrophys. J.* **182**, 417-32.
- [33] Jackson, J. D. (1975) *Classical Electrodynamics*, 2nd. edition. New York: John Wiley and Sons. pp. 685.
- [34] Garybian, G. M. (1957). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 1403. (Engl. Trans 1960 *Sov. Phys.-JETP*, **6**, 1079-85).
- [35] Ginzburg, V. L., Tsytoich, V. N. (1979) *Physics Reports*. **49**(1), 1-89.
- [36] Bass, F. G., Yakovenko, V. M. (1965). *Usp. Fis. Nauk.* **86**, 189. (Engl. trans. 1965 *Phys.-Usp.* **8**. 420-44)
- [37] Frank, I. M. (1965). *Usp. Fis. Nauk.* **87**, 189 (Engl. trans. 1966 *Phys.-Usp.* **8**, 729-42)
- [38] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1984) *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford: Pergamon Press. pp. 406-7, 408-12.
- [39] Jackson, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. 2nd edn. New York: Wiley. pp. 636.
- [40] Roa-Neri, J. A. E., Jiménez, J. L., Villavicencio, M. (1995). *Eur. J. Phys.*, **16**, 191-194.
- [41] Panofsky, delta cuadrada
- [42] Good, R. H., Nelson, T. J. (1971). *Classical Theory of Electric and Magnetic Fields*. New York: Academic.
- [43] Arfken, G. (1985). *Mathematical Methods for Physicists*. Orlando: Academic Press.
- Butkov, E. (1968). *Mathematical Physics*. Reading Massachusetts: Addison-Wesley.
- [44] Villavicencio, M., Roa-Neri, J. A. E., Jiménez, J. L. (1996). *Il Nuovo Cimento*. **111B**, 1041.
- [45] Villavicencio, M., Jiménez, J. L. and Roa-Neri, J. A. E. (1998). *Found. Phys. Lett* **11**, 445-59.
- [46] Golub, I., Erez, G., Shuker, R. (1986). *J. Phys. B*. **19**, L115.

- [47] Askar'yan, G. A. (1962) *Soviet Physics JETP*. **15**, 943.
- [48] Agranovich, V. M., Ginzburg, V. L. (1979). *Crystal Optics with Spatial Dispersion and the Theory of Excitons*. New York: Wiley.
- [49] Jiménez, J. L., Villavicencio, M., Roa-Neri, J. A. E. (2001). *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **2**, 131-8.
- [50] Jackson, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. 2nd edn. New York: Wiley. pp. 145, 148.
- [51] Jackson, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. 2nd edn. New York: Wiley. pp. 299.
- [52] Born, M., Wolf, E. (1997) *Principles of Optics*. 7th edition. Cambridge: Cambridge University Press.
- [53] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1984) *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford: Pergamon Press. p. 286.
- [54] Sommerfeld, A. (1914). *Ann. Phys.* **44**, 177.  
 Brillouin, L. (1914) *Ann. Phys.* **44**, 203.  
 Brillouin, L. (1960). *Wave Propagation and Group Velocity*. New York: Academic.
- [55] Erdélyi, A. (editor). (1954). *Tables of Integral Transforms*. New York: McGraw-Hill.
- [56] Villavicencio, M., Jiménez, J. L., Roa-Neri, J. A. E. (1999). *Can. J. Phys.* **77**, 775-84.
- [57] Fermi, E. (1940). *Phys. Rev.* **57**, 485-93.
- [58] Afanasiev, G. N., Kartavenko, V. G. (1998). *J. Phys. D: Appl. Phys.* **31**, 2760-76.
- [59] Sternheimer, R. M. (1953). *Phys. Rev.* **91**, 256-65.
- [60] Hecht, E. (2000). *Óptica*. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana. p. 365
- [61] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1984). *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford: Pergamon Press. pp. Kramers-KRONING.
- [62] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1984). *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford: Pergamon Press. pp. 406-7.
- [63] Panofsky, W. K. H., Phillips, M. (1962). *Classical Electricity and Magnetism*. 2nd edn. Reading MA: Addison-Wesley. pp. 373-75, 411-4.
- [64] Christy, R. W. (1972). *Am. J. Phys.* **40**, 1403-19.
- [65] Guenther, R. D. (1990). *Modern Optics*. New York: Wiley. pp 266-72.



- [66] Ter-Mikaelian, M. L. (1972). *High-Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media*. New York: Wiley-Interscience.
- [67] Vekstein, G. E. (1992). *Physics of Continuous Media*. Bristol: Adam Hilger.
- [68] Colombeau, J. F. (1983). *J. Math. Anal. Appl.* **94**, 96-115.  
 Colombeau, J. F. (1984). *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*. Amsterdam: North-Holland.  
 Colombeau, J. F. (1985). *Elementary Introduction to New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*. Amsterdam: North-Holland.  
 Colombeau, J. F. (1990). *Bull. Am. Math. Soc.* **23**, 251-68.  
 Colombeau, J. F. (1992). *Multiplication of Distributions*. New York: Springer Verlag.
- [69] Lodder, J. J. (1982). *Physica*. **116A**, 45-48.  
 Lodder, J. J. (1982). *Physica*. **116A**, 59-73.  
 Lodder, J. J. (1982). *Physica*. **116A**, 380-391.  
 Lodder, J. J. (1982). *Physica*. **116A**, 392-403.  
 Lodder, J. J. (1982). *Physica*. **116A**, 404-410.  
 Lodder, J. J. (1985). *Physica*. **132A**, 318-333.
- [70] Arfken, G. (1985). *Mathematical Methods for Physicists*. New York: Academic Press.
- [71] Butkov, E. (1968). *Mathematical Physics*. Reading Massachusetts: Addison-Wesley.
- [72] Jones, D. S. (1970). *Generalized Functions*. London: McGraw-Hill.
- [73] Korn, G. A., Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for scientists and Engineers*. New York: Dover Publications.
- [74] Saichev, A. I., Woyczynski, W. A. (1997). *Distributions in the Physical and Engineering Sciences. Vol 1 . Distributional and Fractal Calculus, Integral Transforms and Wavelets*. Boston: Birkhäuser. p. 21
- [75] Aitchison, I. J. R., Hey, A. J. G. (1982). *Gauge Theories in Particle Physics*. Bristol: Adam Hilger. p. 314,
- [76] Greiner, M. (2000). *Gauge Theory of Weak Interactions*. Third Edition. New York: Springer.
- [77] Sakurai, J. J. (1982). *Advanced Quantum Mechanics*. Ninth edition. Reading Massachusetts: Addison-Wesley. p. 190,
- [78] A. Gsponer, *Eur. J. Phys.* **30**, 109-126 (2009).

- [79] J. F. Colombeau and A. Y. Le Roux A, *J. Math. Phys* **29** (2), 315-319 (1988).
- [80] Gsponer, A. (2008). *J. Math. Phys.* **49**, 102901-14
- [81] Arfken, G. (1985). *Mathematical Methods for Physicists*. New York: Academic Press.
- [82] Gasiorowicz, S. (1966). *Elementary Particle Physics*. New York: John Wiley and Sons.
- [83] Griffiths, D. J. (1989). *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall. p.48.
- [84] Griffiths, D. J. (1993). *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 2265-2267.
- [85] Zhao, B. H. (1992). *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, L617-L618.
- [86] Kurasov, P. (1996). *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **201**, 297-323.