



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

Volatilidad en los Mercados Financieros: El Análisis
Fractal de Curvas. Una Herramienta para Administrar el
Riesgo.

TESINA que para obtener el Título de
ACTUARIO

Presenta

Edgard de Jesús Huerta González

Asesor: M. en C. Alberto Sánchez Aldana



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres y hermanos por su amor y apoyo incondicional.

A mis amigos cuyas muestras de interés me motivaron a profundizar en el tema.

Índice general

Índice general	I
Introducción	1
1 El Riesgo en los Mercados Financieros	10
1.1. Bases generales de los modelos financieros	12
1.1.1. “Teoría de la Especulación”.	14
1.1.2. La Curva de Gauss.	15
1.1.3. Mercados Eficientes.	19
1.2. Modelos Financieros (los más representativos)	21
1.2.1. Teoría del Portafolio	22
1.2.2. El Modelo de Valoración de Activos Financieros	26
1.2.3. El Mercado de Opciones, la fórmula Black-Scholes	29
1.3. Debilidades Expuestas de los modelos tradicionales	33
1.3.1. Eventos Inesperados	34
1.3.1.1. Crisis Rusa	34
1.3.1.2. La era de la Información: Burbujas y la crisis de 2008	35
1.3.2. Análisis de los Fundamentos Teóricos	40
1.3.2.1. Tras Bachelier y la curva de Gauss	40

1.3.2.2.	Movimiento Browniano de Precios	43
1.4.	El Fenómeno de lo Altamente Aleatorio	47
1.4.1.	Defensores de un movimiento fallido	47
1.4.2.	Cisnes Negros y matemáticas para lo Irregular.	48
2	El Azar Fractal de los Mercados Financieros	52
2.1.	Fractales	55
2.1.1.	Simple complejidad	57
2.1.2.	Fractales aleatorios	60
2.1.2.1.	Fractales brownianos	63
2.1.2.2.	Fractales y turbulencia	67
2.2.	El modelo Multifractal del mercado	71
2.2.1.	Los tres componentes de la turbulencia financiera	71
2.2.1.1.	Distribuciones L-estables	73
2.2.1.2.	Leyes de potencias	77
2.2.1.3.	Memoria de Largo-Plazo	83
2.2.2.	Multifractales financieros	87
2.2.2.1.	Burbujas: La relación entre H's y α 's	88
2.2.2.2.	Tiempo Fractal: Multifractal Model of Asset Returns	91
2.2.3.	Análisis Multifractal de Series de Tiempo	97
2.2.4.	Análisis de la Dimensión Fractal	100
2.2.5.	Otras medidas multifractales	102
3	Administrar en la incertidumbre, investigaciones con Multifractales.	106
3.1.	Poblaciones	110
3.2.	Seguros	114

3.3. Finanzas	120
Conclusiones	132
Apéndices	135
Espacio Topológico y Dimensión de Hausdorff-Besicovitch	135
Vuelo de Lévy	137
Prueba R/S, estimando el exponente de Hurst	140
Análisis espectral de la Invarianza de Escala	141
Anexos	145
3 Modelos matemáticos para analizar mercados financieros	145
Medidas Multifractales	146
Nomenclatura	152
Índice alfabético	154
Índice de Figuras	158
Bibliografía	160

Introducción

Por cuestiones de supervivencia, ha sido necesidad, interés y labor del ser humano investigar y comprender la naturaleza de los eventos que nos rodean y que afectan nuestro diario accionar para poder actuar de manera anticipada a su ocurrencia y, en consecuencia, poder beneficiarse de la mejor manera posible de ello. Ha sido a través del desarrollo de la ciencia como el universo y las normas que lo rigen nos resultan cada vez menos desconocidos pero al mismo tiempo, incrementa nuestra curiosidad por lo que aún falta por conocer y queda fuera de nuestro control. Distintos han sido los campos en que se ha diversificado la ciencia, cada uno de ellos complementa nuestro entender de cómo se puede comportar el mundo a nuestro alrededor.

Ciertamente hay campos más desconocidos que otros (ya sea por la “juventud” de la investigación en la materia o porque la profundidad del estudio tiene efectos diversos que generan más dudas que respuestas) y unos, dependiendo de la influencia que ejerzan en nuestras relaciones, tienen mayor o menor afectación dependiendo del grado de comprensión que se tenga del caso. En este sentido, se hace la *distinción de incertidumbre y riesgo*, primero se relaciona con “la imperfección del conocimiento” sobre la naturaleza de un proceso; el segundo tiene que ver con la percepción de las probabilidades de un evento contraproducente, esto implica que necesariamente hay una medida de alguna parte de la incertidumbre que es perjudicial en algún grado probabilístico. Es decir, **el riesgo al que se está expuesto varía en el grado en que se está en control de la situación**. Por ejemplo, el saber que una explosión de supernova (lo suficientemente cercana) podría aniquilar la vida terrestre tal como la conocemos, no tiene mayor consecuencia en nuestra vida diaria si caemos en cuenta que no saberlo tampoco mejora nuestras posibilidades de sobrevivir a tal evento; por otro lado, un asesor financiero que deba opinar sobre el futuro de qué hacer con X o Y activos de algún portafolio dependerá, generalmente, de la capacidad de obtención y fidelidad de los datos históricos, la habilidad de analizarlos, comprenderlos y emitir un juicio en base a esto y, finalmente, de quien adopta tales resultados como verdades y los respalda, dejando ver con esto que el riesgo de tomar una decisión que resulte contraproducente recae principalmente en factores subjetivos, los cuales permiten establecer distintos criterios respecto de qué riesgos asumir y en qué cantidad.¹

¹Taleb, Nassim N. *El cisne negro* [The Black Swan]. 1^a ed. México: Editorial Paidós, 2010.

En este sentido nos exponemos a distintos tipos de riesgos, tanto naturales como artificiales, cada vez que nos involucramos con escenarios que presentan algún grado de incertidumbre; los primeros, nos han llevado a tener vidas más precavidas, sedentarias y con entendimiento que nos sitúa en un cierto estado de *control de la situación*; los artificiales, como los que se generan por conflictos bélicos, políticos, movimientos financieros, etcétera, nos han resultado un tanto más complicados de manejar en tanto que, en una gran cantidad de ocasiones, la incertidumbre generada por la falta de comprensión total del fenómeno particular y sus componentes e interacciones, junto con la fragilidad de las herramientas para analizarlo (punto a tratar más abajo) nos vuelve vulnerables a su impacto.

En particular, el interés académico de este trabajo se orienta al estudio concerniente a los mercados financieros dada la gran influencia actual e histórica, que han ejercido y ejercen sobre las economías del mundo. La actuaría es la disciplina que sobresale del resto por su capacidad teórica de analizar la problemática desde el enfoque estadístico y su afinidad con este escenario de riesgos (los mercados financieros). Esto justifica la realización de este trabajo, con el propósito de presentar una herramienta de análisis alternativa al conjunto ya existente.

La exposición de esa herramienta lleva a identificar como objetivos tres puntos a tratar y a relacionar entre sí, para lograr una propuesta de estudio significativa y útil para la comunidad actuarial y cualquier interesado en un enfoque distinto al convencional de la “estadística financiera”. A saber: 1) dado que el fin último en esta temática es entender de antemano el funcionamiento de los mercados financieros y poder describir esto con fidelidad a la realidad, se analizará el funcionamiento de algunas de las herramientas que han sido, y siguen siendo, utilizadas por la generalidad de los interesados en este tema, explicando sus fundamentos y funcionalidad, así como dar una evaluación de su desempeño en la vida real y con esto exponer las debilidades y consecuencias que trae su utilización; 2) haciendo énfasis en las razones documentadas por la parte anterior, se tratará presentar un enfoque de estudio distinto al convencional que se ha venido desarrollando para generar información que ayude a comprender de otra manera el comportamiento de los escenarios con este tipo de aleatoriedad, los fractales; y 3) enunciar algunos estudios que emplean a la teoría fractal como base de los fenómenos estudiados, lo que tendrá como resultado provocar la necesidad de continuar con la investigación

[U.S.A. Random House, NY: 2008].

en este campo, pretendiendo con ello mostrar que los fractales constituyen una herramienta a modo para la administración del riesgo.

La hipótesis sobre la que descansa este trabajo, se basa en la investigación realizada por un grupo de científicos e intelectuales que han discutido extensamente la dificultad de predecir en escenarios donde el azar juega un papel importante y las formas en que pueden ser abordados. La hipótesis que se sostiene es que, dada la dificultad de generar predicciones precisas y confiables del comportamiento de los mercados financieros, el análisis de curvas fractales tiene el potencial de servir a este propósito; y de esto, finalmente se obtiene una útil opción para el análisis y la gestión de riesgos. Es decir, mediante fractales como base del comportamiento, se podrían generar, por ejemplo, planes de inversión, regulaciones del mercado, etc. vinculados al fractal, y los componentes de éste, que mejor describan el comportamiento del fenómeno en cuestión.

Para desarrollar lo anterior, la investigación a seguir será de carácter documental y, el método empleado para confrontar la información es el análisis-síntesis, buscando reafirmar la hipótesis mencionada pasando en el capitulado por los tres puntos del objetivo. Expresamente, para el primero de ellos, se hará observación de los modelos utilizados para pronosticar el comportamiento de los mercados financieros, analizando los conceptos generales y las suposiciones que les sirven de fundamento teórico y, de manera importante, habrá que confrontarlos con los eventos que han probado que estos modelos resultan estar equivocados (ya sea por el mal planteamiento del problema, o por la mala interpretación de los resultados), generalmente con graves consecuencias para con los involucrados en su utilización; en esta sección se hará notar la evolución del debate acerca de cómo trabajar en este especial escenario de riesgo haciendo mención de las posturas en contra y a favor por continuar utilizando y desarrollando este tipo de modelos. Esto se hará descomponiendo las partes que conforman el planteamiento y funcionamiento de

algunos modelos, y las consecuencias de su aplicación; es decir, los componentes del análisis de lo aleatorio y su vinculación con la administración de riesgos.

En la misma línea de presentación, en el segundo capítulo se plantea el concepto de fractal, tanto natural como artificial, y su practicidad para modelar el ordenamiento de lo aleatorio. Luego, siguiendo esta idea, se menciona cómo es vinculado el concepto geométrico de fractal y las propiedades técnicas de éste a los mercados financieros, siendo precisamente este punto la propuesta principal de este trabajo.

En el capítulo tercero se ejemplifica la vinculación hecha en el capítulo dos a través de estudios que resultan de interés para el administrador del riesgo en diversos sectores. Con esto se busca concluir generando una comparación entre lo tradicional y este nuevo enfoque, clasificando los *beneficios esperados* (cualesquiera que éstos sean) que, de uno sobre otro, resulten en una mejora de desempeño en cuanto a la previsión y prevención de riesgos.

Para comprobar la hipótesis de este estudio fue necesario recopilar y documentar las teorías, casos y discusiones en los que estén presentes los síntomas del problema, además de que se desarrollan los conceptos y la teoría fractal necesaria para vincularla al estudio de los mercados financieros. Esto confirmará o desconfirmará la validez de su aplicación y así como fomentar el interés por continuar investigando, en grados científicos posteriores, este tópico.

Un relato contado en Wall Street trata sobre un joven quien aprendía a ser un especulador profesional. En algún momento tuvo un problema del que necesitaba apoyo para poder discernir su actuar, así que fue con un afamado sabio distinguido por su agudo juicio sobre las inversiones. El hecho -dijo el joven- fue haber tomado parte en una extensa línea de acciones, pero el mercado parecía alto (tal vez

demasiado) y por ello pensaba que su posición traía demasiados riesgos por lo que dudaba de si vender o no. Estaba tan preocupado en eso, explicó, que no podía dormir por las noches. El único consejo del sabio fue simple y directo: “VENDE -dijo- vende todo de vuelta hasta el punto en que dormías”.²

Los mercados financieros (en adelante M.F.) han estado presentes y ejercido gran influencia en el accionar económico de diversos países, tanto que se han vuelto desde un medio de expansión corporativa hasta uno de fondeo público que mueve cantidades impresionantes de activos. Es en las economías más grandes donde, debido a lo anterior y a su capacidad ya observada y latente de generar pérdidas catastróficas en diversos de los sectores (tanto a los directamente involucrados en el mercado como a los que no, y esto agrava el problema), se crea la necesidad de estudiar el comportamiento de los precios y de los índices que son parte de este ambiente.

Con M.F., se hace alusión a la definición del Banco de México como los “foros y conjunto de reglas [regulados o no] en donde sus participantes se permiten realizar operaciones de inversión, financiamiento y cobertura, [...] mediante la negociación de diversos instrumentos financieros...”³. Esta definición coincide con la que se puede inferir de los conceptos que maneja la Bolsa Mexicana de Valores (BMV)⁴ donde se describe como un espacio donde se realizan transacciones de compra y venta, esencialmente de valores.

Este concepto, deriva en la investigación de la evolución de este sistema y, tomando como base sus resultados, pretende ayudar a la mejor toma de decisiones,

²Jenkins, David. *How to Profit from Formula Plans in the Stock Market*. U.S.A., American Research Council, 1st. ed.: 1961. p.9.

³Banco de México, página electrónica revisada el 27-VI-2014:

<http://www.banxico.org.mx/sistema-financiero/material-educativo/basico/fichas/estructura-del-sistema-financiero>

⁴La institución define Mercado de Capitales y Mercado de Valores como *espacios* donde se operan instrumentos de capital, por un lado, y donde se congregan oferentes y demandantes de valores por el otro. Bolsa Mexicana de Valores, página electrónica revisada el 27-X-2015:

<https://www.bmv.com.mx/es/grupo-bmv/glosario>

cuyo propósito es obtener un *beneficio*. Es pertinente precisar lo que debe entenderse por *beneficio* en el contexto de los M.F., donde el entorno de riesgo constante al que se está expuesto (por el hecho de ser parte de tal sistema) puede provocar dos sentidos en su apreciación: el primero, es afín al instinto inmediato que busca alcanzar *en los buenos tiempos*, la *mayor ganancia posible*; en el segundo, la idea de “beneficiarse” en los *malos tiempos*, implica, generalmente, la manera de incurrir en la *menor pérdida posible*, ya que en el ambiente de competitividad que está presente en el sistema, esta sería la situación menos comprometedora. Dicho esto, buscar beneficiarse de los cambios del mercado mediante la utilización de modelos matemáticos ha derivado en una creciente industria de “científicos financieros” que ofertan sus productos al inversionista común, pero también ha implicado una necesidad clara de regular esta industria⁵.

A lo largo de la joven historia de este campo de estudio, han aparecido diversos ponentes y modelos que buscan caracterizar la naturaleza del comportamiento de los M.F. Tomando en cuenta el relato inicial del capítulo, se hacen notar algunos puntos importantes que tienen que ver con la sabiduría convencional que se debiera manejar con mayor claridad: primero, dado que ninguno conoce con certeza el futuro del mercado, para reducir el riesgo de perder demasiado hará falta tomar una postura menos riesgosa; sin embargo esto no significa desechar todo y huir ya que, de la misma manera que pudieran caer los precios, éstos podrían continuar su alza, por lo tanto habrá que mantener un cierto grado de exposición, lo suficiente para poder beneficiarse si esto pasara y “poder dormir” sin perder la oportunidad. Por último, y esto es muy importante, el límite que señale el “punto de descanso” se deja totalmente al criterio de quien está expuesto y no al experto pues, finalmente

⁵ *Op. Cit.* Jenkins, p. 10

el principal afectado es el arriesgado.

Esto sirve de preámbulo para acercar la necesidad de materializar maneras de producir información de utilidad (mediante modelos) para tomar decisiones y un aspecto un tanto subjetivo de la forma en que se producen, la idealización de los modelos y su capacidad de reproducir la realidad con fidelidad.

Hay diversos exponentes que critican la manera en que se llevan a cabo ciertas conjeturas y se asumen ciertas suposiciones con la finalidad de “facilitar” y “hacer fluir” la modelación de fenómenos aleatorios. Nassim Nicholas Taleb, abarca con bastante extensión en su libro *El Cisne Negro*⁶ los problemas que se presentan, tanto a la hora de conceptualizar una idea tan abstracta como el azar y modelarlo, como los que resultan de tomar con demasiada confianza los resultados de realizar todo el proceso anterior. Además, profundiza en un artículo⁷ posterior a la redacción original del Cisne Negro⁸ los siguientes puntos, que resultan de gran importancia y han de tenerse en cuenta cada vez que se realice este proceso de modelaje:

- Generalmente, los principios en los que se basan los modelos son bastante discutibles, y debido a esto, los resultados de ellos obtenidos tienen un sesgo informativo que pocas veces es tomado en cuenta con las precauciones adecuadas.
- Además, la academia dedicada a esta labor suele tener tintes tendenciales hacia quien “patrocina” o hacia quien busca “beneficiarse” de la investigación generando información que no es compartida o que presenta algún favoritismo hacia alguna corriente y por tanto el dividir ideas (etiquetar) y ge-

⁶ *op. cit.*

⁷ Taleb, Nassim N. *Common errors in interpreting the ideas of the Black Swan and Associated Papers*. New York Polytechnic Institute, Octubre 19, 2009.

⁸ Taleb, Nassim N. *The Black Swan*. Random House U.S.A. 2007

neralizar demasiadas teorías (compactarlas), producen resultados que pasan por alto la evidencia de datos al discriminar aquellos preceptos que quedan fuera del etiquetamiento.

Por otro lado, al pasar de la teoría al mundo real, el análisis de este escenario muestra que hay dos factores que generan problemas y no siempre son tomados en cuenta, los que Taleb denomina *Problemas Inversos* y *Pre-Asintóticos*:

- *Problemas Inversos*: Son los más conflictivos cuando buscamos generar modelos que nos enseñen las propiedades “extrapolables” de un conjunto de datos. Es decir, ver hacia atrás no es tan simple como poner a trabajar una distribución en una computadora. En la realidad, no vemos tal cosa, sólo alcanzamos a presenciar eventos cuyas propiedades estadísticas son desconocidas hasta una vez pasado el evento. La dificultad radica en la selección de las distribuciones que se utilizarán para modelar y analizar el evento. Hay datos que aceptan una gran cantidad de distribuciones, y esto, a la hora de extrapolar, van generando muy distintos panoramas.
- *Problemas de Aplatonicidad (Pre-asintóticos)*: Existe un sesgo mental entre lo que sabemos y lo que creemos que sabemos, el cual proviene de la preferencia de abordar la realidad con figuras *platónicas* (idealizadas) y nítidas que la describan dejando de lado aquellas que son más confusas. Es decir, de las representaciones mentales del modelo de la realidad que estudiamos, surge una diferencia localizable únicamente mediante su confrontación con la realidad; esta diferencia, generalmente es difusa en cuanto a su extensión debido a que se ignora de antemano (sólo se tiene una idea hasta después de la confrontación) dónde es erróneo el modelo. Esto genera modelos cuyos errores pueden tener consecuencias graves. Si con el *problema inverso* es

complicado tener un modelo adecuado, en escenarios de alta incertidumbre, los modelos no trabajan bien cuando son idealizados tomando en cuenta como base escenarios menos inciertos.

Con esto en cuenta, pasemos a la descripción de cómo se han idealizado los modelos estándar de la teoría financiera.

Capítulo 1

El Riesgo en los Mercados

Financieros

Para hacer frente a la incertidumbre que generan las inversiones en los M.F., fue necesario contar con herramientas que pudieran tomar la información que generaba el mercado, analizarla con ellas, y transformarla en conocimiento útil para beneficiarse de él. Al inicio de los mercados financieros modernos (a finales del siglo XIX), el accionar de los involucrados en la bolsa se basaba principalmente en *dos tipos de análisis* y éstos aún forman parte del conjunto de métodos utilizados para aprehender el riesgo existente en los mercados, los cuales son diferentes entre sí en cuanto al tipo de estudio pero equivalentes en cuanto al rigor científico que implica cada uno¹, ellos son:

- El **Análisis Fundamental**, que busca las causas de los cambios en los precios de alguna acción, en la sociedad (sus cuentas, productos, decisiones estratégicas, etc.), su sector o su ambiente económico; esto con la finalidad de encontrar un hilo de causalidad y poder actuar en consecuencia si hubiera

¹Herlin Philippe. *Finance: le nouveau paradigme*. France: Éditions d'Organisation, Groupe Eyrolles, 2010. p. 24.

indicios de poderse repetir. La idea asumida es que si se conoce la causa, se puede prever el evento y manejar el riesgo. Alrededor de este tipo de análisis florece toda una industria destinada a *exponer* y “*rankear*”² los **porqués** que mueven el día a día de la bolsa, entre ellos: diarios y revistas financieras, boletines y demás. Este tipo de análisis funciona *a posteriori* pero donde es en verdad necesario, *a priori*, presenta serias dificultades. Su principal obstáculo proviene de que no todas las causas son evidentes, ni son fáciles de delimitar o medir; esto es debido a que, por ejemplo, hay unas que no tienen siempre el mismo efecto; otras cuyo origen es tan complejo que, al ponerle límites, resulta incompleta su medición (su incorporación de lo real al modelo de causalidad) o es sesgada, etc. Lo anterior implica cierta inconsistencia en un planteamiento de *causa-efecto* de un movimiento en los precios; todo esto sin tomar en cuenta que es imposible conocer cada uno de los detalles que generan un movimiento de compra o venta y que a final de cuentas influyen en los valores.

- Por otro lado, el **Análisis Técnico** hace su aparición para complementar al anterior. Su intención es encontrar patrones en el curso de alguna acción (o acciones) de forma que sea posible predecirlo. Los “Chartistas” (del inglés *chartist*³), son empleados por grandes instituciones de inversión para estudiar diversos gráficos de precios, de volúmenes e indicadores y encontrar pistas para comprar o vender. De igual forma que con el pasado, una opinión resultante de este tipo de análisis se verá altamente sesgada por la falta de

²Los analistas utilizan un ordenamiento ponderado de la información que depende de cuán importante es el impacto de su surgimiento. El término viene del inglés *ranking* que, en su sentido literal, indica un estatus o posición dado a los componentes de una clasificación.

³En español, la palabra inglesa *chart* denota un dibujo, diagrama, gráfico que traza la evolución de una o varias variables. Aquí, se hace referencia a las personas encargadas de leer, reproducir e interpretar tal objeto.

rigor científico, ya que cada analista puede interpretar tal o cual forma en un gráfico de manera distinta dependiendo de sus intereses, estos son los famosos *escotomas mentales* (la mente ve lo que quiere ver).

Así, resulta bastante ingenuo basar completamente un sistema global de intercambio de valores en tal “Astrología Financiera”⁴, pues le hizo falta una herramienta que presentara con rigor científico la naturaleza de este mercado para que los inversionistas se sintieran más cómodos en este escenario; es aquí donde vemos nacer lo que conocemos como Finanzas *Modernas*⁵ o *modelo clásico* de las finanzas a principios del siglo XX. Antes de iniciar con las teorías que formaron la base del sistema financiero global, es necesario mencionar un par de principios que sirvieron, uno de antesala y otro de soporte al primero, que sirvieron a los teóricos para llegar a tales modelos.

1.1. Bases generales de los modelos financieros

Un modelo matemático que busque replicar un fenómeno debe ser entendido como una idealización del fenómeno en cuestión, básicamente para poder estudiar el fenómeno y anticipar lo que sucederá de acuerdo con las variables que lo conforman y son modeladas. Los modelos estadísticos deben recibir especial cuidado por lo mencionado respecto de la *platonidad* y el problema inverso en cuanto que el alcance interpretativo de tales modelos debe ser tomado con precaución si se quieren tomar decisiones basadas en los resultados obtenidos por el modelo.

Para contextualizar un poco la siguiente exposición habrá que recordar que el estudio de la probabilidad nace de los juegos de azar, Blaise Pascal (1623-1662) y

⁴Mandelbrot, Benoît. *The (mis)behaviour of markets*. United States of America: Basic Books, 2009. p. 9. En lo sucesivo, se referirá a esta obra como Mandelbrot (2009a).

⁵*Ídem*.

Pierre de Fermat (1601-1665) le dieron fuerza a las cuestiones del rigor matemático en la incertidumbre. Luego vinieron Jacob Bernoulli (1654-1705) y Abraham De Moivre (1667-1754) quienes dieron los primeros teoremas y definiciones en el campo de la probabilidad. Thomas Bayes (1702-1761) dio respuesta al problema de la suma y multiplicación de probabilidades y Pierre-Simon Laplace (1749-1827) pulió el teorema de Bayes⁶. Son de vital importancia, Bernoulli (y posteriormente su sobrino, Niklaus Bernoulli) por formular (el otro aplica y comprueba) la Ley de los Grandes Números -en adelante “LGN”- y De Moivre (auxiliado por James Stirling, 1692-1770) junto con Laplace por el Teorema Central del Límite -en adelante “TCL”⁷.

Como sabemos, la importancia de la LGN radica en su gran utilidad para el muestreo y la probabilidad ya que propone que un gran número de observaciones reflejará la “certeza moral” (él ya era consciente que en ciertos escenarios la *certeza absoluta es imposible de alcanzar*) de las probabilidades de un evento, es decir, que a mayor número de repeticiones (de muestras más grandes) de un experimento, se tendrá que reflejar con mayor precisión la naturaleza “real” del evento. Luego, De Moivre intenta resolver un problema dejado por Bernoulli en la LGN: ¿cuál era la probabilidad de que el número de éxitos de un suceso de probabilidad p y n pruebas estuviera entre A y B ? Su respuesta: la ecuación que describe la “curva Normal”

$$\sum \Pr \left\{ X = \frac{n}{2} + t \right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^k e^{-\left(\frac{2t^2}{n}\right)} dt;$$

A pesar de que no alcanzó a ver la profundidad de su descubrimiento, De Moivre

⁶Todhunter, Isaac: *History of the mathematical theory of probability*. New York: Chelsea, 1965. [Original, Cambridge, 1865].

⁷Stirling encuentra que la constante \sqrt{c} propuesta por De Moivre era $\sqrt{2\pi}$, fuera de ello la construcción de la integral probabilística pertenece al último. El detalle técnico de la construcción de la curva PEARSON, Karl. *A historical note on the origin of the Normal Curve of Errors*. *Biometrika*. Diciembre, 1924. Volumen 16, No. 3/4. [fecha de consulta: 26 Julio 2015]. Oxford University Press en representación del Biometrika Trust. pp 402-404. Disponible en: <http://www.jstor.org/stable/2331714>.

encontró que \sqrt{n} era la unidad de distancia al centro, lo que implicaba que la precisión de una estimación de la probabilidad aumenta en razón del cuadrado del número de experimentos. Acababa de ver la importancia de la Varianza.

1.1.1. “Teoría de la Especulación”.

El 29 de Marzo de 1900, un francés de nombre Louis Bachelier , presentó la defensa de su tesis doctoral “*Théorie de la Spéculation*”⁸. En ella, se estableció el contacto entre los mercados financieros y la teoría de probabilidades; uniendo para esto la teoría creada por Pascal, Fermat y luego Laplace con un objeto “menospreciado por la investigación matemática de entonces, la Bolsa...” concretamente, fue aplicado en los bonos del Tesoro Francés. Aunque en su momento fue un trabajo poco trascendental para la academia, la mayor virtud de esta obra fue la introducción a un enfoque distinto al fenómeno bursátil: no intenta conocer si el curso del precio de alguna acción subirá o bajará, cuánto, ni por qué periodo; en su lugar, busca establecer la *Ley Probabilística* que le es aplicable, es decir, busca evaluar la amplitud e importancia de los movimientos de tal curso.

De esta manera, al encontrar la distribución probabilística de una acción, será posible decir que “esa acción subirá (o bajará) 10 % el mes que viene con una tal probabilidad”. Esa Ley de Probabilidad es la noción fundamental de su trabajo, con ella justifica que, dada la gran cantidad de factores que afectan al comportamiento del precio de la acción y la imposibilidad de tenerlos a todos en cuenta, bajo un esquema probabilístico es posible, desde cierta perspectiva, describir el comportamiento general.

Esta idea la toma de Laplace, quien habla sobre la imposibilidad de generar,

⁸Bachelier, Louis, *Théorie de la spéculation*. Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, Sér. 3, 17, 1900, p. 21-86. Disponible en http://archive.numdam.org/ARCHIVE/ASENS/ASENS_1900_3_17_/ASENS_1900_3_17__21_0/ASENS_1900_3_17__21_0.pdf

mediante un enfoque totalmente determinista, una visión absoluta del comportamiento del universo; proponiendo que sea desde una perspectiva más abierta, la probabilística, acercarse a ella mediante la medición de la conjunción de los fenómenos erráticos individuales, es decir, la forma en que varía el curso en general, su Ley de Probabilidad.

Si el comportamiento de los precios no son determinados por el azar, puede suponerse como si lo fueran; Kolmogorov explica esto al decir que: “El valor epistemológico de la teoría de las probabilidades tiene el hecho que los fenómenos ligados al azar, considerados colectivamente y a una grande escala, crean una regularidad no aleatoria”.⁹

Así mismo, Bachelier dice que “el mercado, en un instante dado, no *crece* ni a la alta ni a la baja del curso verdadero”¹⁰ implicando que el mercado está siempre en equilibrio (por todos los que venden y todos los que compran). No podemos prever el siguiente movimiento, los precios pueden descender e incrementarse con la misma probabilidad, como un lanzamiento de moneda.

1.1.2. La Curva de Gauss.

La teoría moderna de la probabilidad, según Isaac Todhunter¹¹, “*le debe más a De Moivre que a ningún otro matemático, con la única excepción de Laplace*”. Además de los ya mencionados, Chebyshev, Markov, von Mises y Kolmogorov contribuyeron a solucionar la dificultad de tener una definición de probabilidad que fuera lo suficientemente precisa para su uso en matemáticas y ser lo suficientemente comprensible para ser utilizada en una amplia gama de fenómenos. Como ya fue mencionado, fue De Moivre quien presentó la ecuación que describe la llamada

⁹ *op. cit.* Herlin, p.25 -28

¹⁰ *op. cit.* Bachelier, p. 32

¹¹ *Op. Cit.* Todhunter. p.135

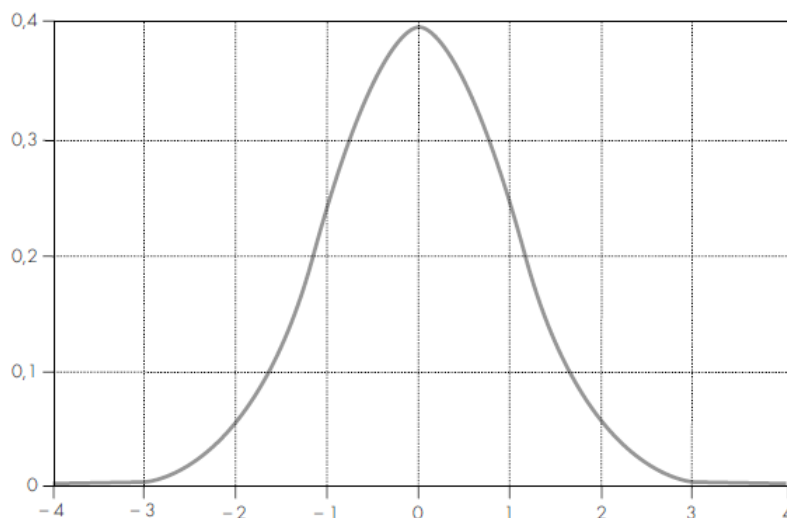


Figura 1.1.1: Distribución Normal

curva de la campana para aproximar una distribución binomial mediante grandes valores de n , pero fue Laplace quien amplió el resultado obtenido; paralelamente Carl F. Gauss (1777-1855) alcanzó este mismo resultado y lo utilizó ampliamente en el estudio de datos astronómicos derivando en la teoría de errores; actualmente, es relacionado con su nombre por haberlo utilizado y justificado rigurosamente.

Hay que remarcar que el inicio de la probabilidad como ciencia, se dio por la necesidad de comprender y manejar la fortuna en los juegos de azar. El clásico ejemplo, es el del lanzamiento de una moneda equilibrada (es decir que ambas caras tienen la misma probabilidad de salir en cada tiro) y apostar una unidad monetaria a que alguna de las caras esté boca arriba al caer. Si se repite el lanzamiento 1000 veces y se registra cada vez que se acierta y se gana, o se falla y se pierde la apuesta, tendremos al final que estaremos muy cerca de donde empezamos (en ceros); si esto se realiza muchas más veces, cada vez será más notoria una tendencia al equilibrio; pero en algunas ocasiones habrá un aparente alejamiento hacia el enriquecerse (acertar muchas veces seguidas) o empobrecerse (el caso

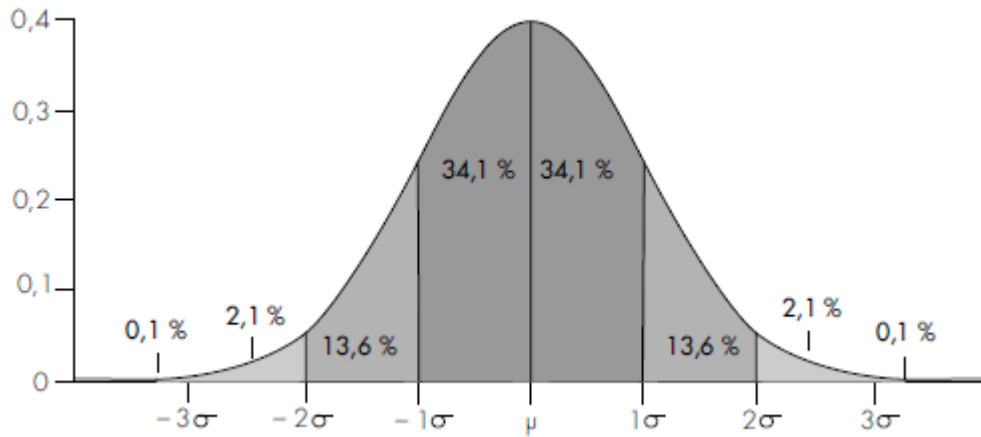


Figura 1.1.2: Desviación Estándar de una Distribución Normal

contrario). Si se toman grupos de lanzamientos formando periodos de ganancia (o pérdida) y se grafican estos resultados, obtendremos la famosa *Curva de Gauss*.

De la misma forma, se le conoce como *Distribución Normal* pues existen una gran variedad de fenómenos “aleatorios” tanto en la naturaleza (como la estatura, el peso de los individuos de cada especie) como *artificiales* (como el cociente intelectual) que se distribuyen de esta manera. Para ser desarrollada, esta función sólo necesita de dos números para ser caracterizada: la *MEDIA* $-\mu-$ y la *DESVIACIÓN ESTÁNDAR* $-\sigma-$ (o *VARIANZA* que resulta de elevar al cuadrado ésta última). La ecuación y su gráfica (Figura 1.1.1) en la forma más simple ($\mu = 0$, $\sigma = 1$), es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

De su formulación, la *desviación estándar* sobresale por el papel que juega en la dispersión de los datos alrededor de la *Media* en esta distribución: 68.2% de los valores se encuentran entre más o menos 1 desviación estándar (-1 y $+1$ en la Figura 1.1.1), 95.4% entre más o menos 2 desviaciones estándar, 99.6% entre

más o menos 3 desviaciones, etc.¹² Marcando lo anterior, tenemos la figura 1.1.2. El punto principal a remarcar es que *los valores se aglomeran alrededor de la media*, dejando a los valores *raros* en las “delgadas” colas de la distribución; esto es, que la probabilidad de que este tipo de valores hagan presencia, es mínima en comparación con la gran mayoría de los demás eventos.

El ejemplo del lanzamiento de la moneda, matemáticamente, genera un proceso conocido como *Caminata Aleatoria*, el cual supone cada uno de los lanzamientos como una Variable Aleatoria Independiente e Idénticamente Distribuida -*V.A.i.i.d.*- lo que significa que, si queremos conocer la probabilidad de acumular cierta cantidad de ganancias o pérdidas, es decir la suma de resultados de las V.A.'s, el ya mencionado Teorema Central del Límite resulta la solución a dicha cuestión. Esto, debido a que cada posible suma de variables, con estas características de independencia y distribución idéntica, convergerá a una distribución normal. Mientras mayor sea la cantidad de sumandos mayor es la aproximación a tal distribución, lo que resulta muy conveniente a la hora de realizar conjeturas acerca del porvenir del juego.

El Teorema Central del Límite es uno de los más importantes resultados en el desarrollo de la teoría de la probabilidad; pero lo es sobre todo para las aplicaciones. Propuesto por Pierre Simon Laplace, el TCL permitió simplificar el cálculo de la probabilidad de la ocurrencia de un evento al disminuir el efecto individual de cada variable mediante la *aglomeración* de datos y el suavizamiento de la curva¹³. Sus fundamentos matemáticos permitieron su aplicación en una amplia gama

¹²En una nota histórica, Laplace descubre este fenómeno y deduce igualmente la constante $\sqrt{2\pi}$ en una obra suya (Laplace, P.S., *Mémoire sur les probabilités*, Académie de Sciences de Paris, 1778, Oeuvres Complètes 9, pp. 227-332.) cuyo interés era desarrollar la teoría de probabilidades inversas y, en particular, encontrar la probabilidad de eventos que se componen de muchos eventos de menor impacto cuya probabilidad es desconocida. Este documento está disponible electrónicamente en: http://cerebro.xu.edu/math/Sources/Laplace/memoir_probabilities.pdf.

¹³Refiriéndose con suavizamiento de curva a que la unión de una gran cantidad de datos

de estudios científicos que aprovecharon la versatilidad entre el acoplamiento de eventos aleatorios y la capacidad de preverlos.

1.1.3. Mercados Eficientes.

El principal problema con que se topaba la teorización del funcionamiento del mercado era que los modelos de precios refirieran a la “realidad” de éste. Es decir, que los precios reflejaran y sintetizaran en sí mismos, toda la información disponible; si ellos no lo hicieren y fueran sólo un indicador mientras los operadores se entienden entre ellos para intercambiar acciones, cualquier modelo basado en los precios no tendría sentido.

Entonces, en los años 60's, Eugene Fama propuso una hipótesis que resultaba coherente en su formulación y, principalmente, hacía de los modelos financieros basados en precios del mercado algo funcional y de sus fundamentos algo asequible de ser estudiados.

La Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME en adelante) sostiene que no existe tal riesgo de falta de sentido en la formulación de un modelo ya que los mercados son “eficientes”, es decir que incorporan en cada instante toda la información disponible. Por ejemplo, si una empresa consigue un contrato que hará doblar sus ganancias de finales de año, su acción inmediatamente subirá al nivel que tal noticia le afecte, de modo que ya no habrá interés en comprarla por una posible subida, pues eso ya sucedió.

Matemáticamente, esta hipótesis trabaja con los principios de Bachelier: la **esperanza matemática** de ganancias de un especulador es **cero**. Si este personaje (puntos) generan una curva sin bordes rectos (como un polígono) dejando una sensación de continuidad (y diferenciabilidad) y completitud de la muestra tomada; esto es importante pues en el caso de tener una curva con “saltos”, las herramientas del cálculo diferencial (base de todas los modelos financieros disponibles) serían inutilizables.

se beneficia del porvenir, al comprar una acción pensando en que ésta subirá de precio, tiene también la posibilidad de perder, lo que nos sitúa en el fenómeno antes descrito, en donde puede que hayan rachas de ganancias pero igualmente habrá ocasiones en donde pierda, dejando todo en equilibrio o en ceros. Y aunque no sea explícitamente *cero* el resultado -parcial- de este fenómeno, con este supuesto de equilibrio, sitúa el desarrollo matemático en un cuadro gaussiano.¹⁴

Sobre esto, en la obra de Philippe Herlin explica como se integra la información existente en los precios del mercado: “La incorporación de la información en los precios resulta esencialmente de la acción de los *operadores bien informados* y de las conclusiones que sacan los *operadores menos informados*, pero *racionales*, de la observación de los mercados”¹⁵. Aunque habría que detallar qué es lo que operador “bien informado” y “menos informado pero racional” quiere decir, hasta este punto se dejará esta idea asentada pues es la que permite desarrollar las subsecciones siguientes, después (sección 3 de este capítulo) se retomarán estas ideas y se hará un análisis de sus fundamentos y consecuencias. Por ahora, se continuará con la exposición de los modelos que forman la teoría moderna de las finanzas que ocupan esta HME a modo de “*calzador intelectual* para reposar sus teorías”.¹⁶

¹⁴ *op. cit.* Herlin p. 35

¹⁵ *idem.* Cita textual de: Portrait, Roland; Poncet, Patrice, *Finance de marché*, Dalloz, 2008. p. 24

¹⁶ Mandelbrot, Benoît, *Une approche fractale des marchés*, Odile Jacob, 2005.

1.2. Modelos Financieros (los más representativos)

Un activo financiero, según Herlin es: “un título o contrato, que se le puede comprar o vender en un mercado financiero, y que es susceptible de producir retornos (financieros) y/o ganancias en capital, agregando en contraparte una cierta toma de riesgo”¹⁷. Así, el valor de un activo financiero viene dado por la suma actualizada de sus rendimientos futuros, método que proviene del cálculo de sus obligaciones. El riesgo que lo comprende depende de dos elementos:

- La calidad de la firma del emisor, fácil de garantizar por las instituciones de renombre que las respaldan.
- El nivel de inflación, relativamente fácil de limitar en el siglo XIX pues el patrón-oro predominaba y la ausencia de bancos centrales volvía este fenómeno un tanto predecible, más que ahora, más “mecánico”, menos aleatorio. La posterior introducción del poder político y los bancos centrales intervenirían con mucha más fuerza en su valuación.

Luego, una acción otorga rendimientos mediante Dividendos de la utilidad generada. Como consecuencia de tal definición, Myron J. Gordon y Eli Shapiro, presentaron en 1956, su fórmula (conocida como Gordon-Shapiro) para calcular el precio de una acción que resumía estos factores mencionados:

$$P = \frac{D}{(r - g)}$$

donde,

P: el valor teórico de la acción

¹⁷ *Op. Cit.* Herlin p. 22

D: el dividendo anual

r: la tasa de rendimiento esperado por los accionistas

g: la tasa de crecimiento anual de los dividendos

Aunque pareciera bastante directa y simple su aplicación, el mercado real no es así de sencillo y por tanto resulta inaplicable; principalmente por su remarcable necesidad de que los factores sean estables. Supone que los rendimientos, año con año, serán constantes y que su ritmo de crecimiento siempre será menor a la tasa de descuento de mercado ($g < r$), cosa que no ocurre en realidad; además es posible observar que si la tasa de crecimiento de los dividendos se acerca a la de los rendimientos esperados el modelo se vuelve volátil y los precios se disparan (i.e. si $g \rightarrow r$ entonces $P \rightarrow \infty$). Notando esto, se puede aseverar que carece de una gran variable que influya casi todas las del modelo, a saber: el *Riesgo*.

En su momento, el comportamiento e influencia del riesgo fue estudiado por los dos tipos de análisis ya mencionados en la introducción a este capítulo, pero tales acercamientos no son enteramente funcionales pues dependen mucho de quien realiza el análisis y permiten que las *burbujas* y las *estrepitosas caídas* de los precios se formen y ocurran sin aparente aviso. De esta forma, la necesidad de formular mejores herramientas resulta inminente. Por otro lado, en 1952 y posteriormente en su tesis defendida en 1955 en Chicago, Harry Markowitz (1927-) desarrolla el punto de partida del modelo clásico de las finanzas.

1.2.1. Teoría del Portafolio

Luego de la Segunda Guerra Mundial, Estados Unidos tuvo un gran repuntamiento económico debido en parte a su incrementada producción industrial y a la presión competitiva ejercida por la URSS durante la Guerra Fría: de 1945

a 1975, el periodo es conocido como “Los Treinta Gloriosos”. En pleno desarrollo de la época, de 1950 a 1960, el crecimiento era fuerte y, en el mercado bursátil, bastaba comprar los valores mejor posicionados para ver “buenos” rendimientos sin necesidad de recurrir a las técnicas elaboradas. Es en medio de este *boom* que Markowitz presenta su obra, la que en 1990 le valió un premio Nobel.¹⁸

Markowitz, basó sus ideas en el pensamiento literario prevaleciente en ese entonces, siguiendo principalmente a John Burr Williams, uno de los autores más representativos. Según Williams, para invertir en la Bolsa habría que realizar una clasificación de las acciones, de las más lucrativas a las menos; esto tomando en cuenta la estimación de los dividendos y contraponerlos con otros datos como la inflación.¹⁹ De este principio, Markowitz concluye que si es el único método utilizado por todos los participantes para invertir, sólo habrá una acción que valdrá la pena comprar, aquella que reporte mejores ganancias; sin embargo, también observa que el comportamiento de los inversionistas al “no poner todos los huevos en la misma canasta” se rige no sólo por eso, sino por el riesgo de cada inversión que realizarán. Entonces surge la cuestión de cómo acoplar estos dos fenómenos a un modelo matemático.

La respuesta la obtuvo en la idea de Bachelier de utilizar la curva de Gauss como puente entre las matemáticas y las finanzas. Sus componentes definitorios -la media y la varianza- resultaron óptimos para describir esto que suponía un problema de teorización:

- La media, permite analizar el precio al día de la transacción, y ya que el beneficio depende del precio de reventa, para conocer el precio futuro de una acción basta tomar la media de los precios pasados para tener la mejor

¹⁸Markowitz, Harry, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 1952.

¹⁹Williams, John Burr, *Theory of investment value*, Fraser Publishing, 1938

estimación de éste, pues bajo el modelo gaussiano, la mayoría de los cambios se presentan alrededor de esta cantidad. Aquí no se trata de “leer el porvenir” sino de tener el valor más probable.

- La desviación estándar (o la varianza) permite asimilar el riesgo de una acción pues ésta refleja qué tanto pueden variar los precios de un momento a otro. Si ésta es baja, la acción es estable; si no, hay una gran posibilidad de tener ganancias o pérdidas importantes.

Entonces, la mejor estimación del precio de una acción es la media de sus precios anteriores y *el riesgo se mide con las variaciones alrededor de esta media*. Con ello se puede hablar de un “criterio esperanza-varianza”. Luego, al tener en cuenta diversas acciones con medias y varianzas propias, se puede formar un **portafolio** combinando distintas acciones con la finalidad de *repartir el riesgo*, es decir que se pueden tomar algunas acciones con mucha volatilidad y juntarlas con otras que tengan poca pero con ganancias “seguras”; con esto se busca generar alguna ganancia importante ocasionalmente y tener protección y ganancia (si es posible) constante.

Pero Markowitz va un poco más allá al darse cuenta de que no todos los sectores financieros se desarrollan de la misma manera en todos los periodos de tiempo (una recesión genera una caída en el consumo de muchos bienes pero no de los indispensables como los de salud o, una subida en el precio del petróleo magnifica el valor del sector que lo trabaja pero termina disminuyendo el valor del sector que lo consume como el aeroespacial pues sus gastos se incrementan), por lo que consideró necesario introducir una medida para esta interacción entre sectores y mercados: la correlación estadística. Ella, permite analizar acciones que resultarían óptimas al ser combinadas, pues si encontramos unas que se vinculen opuestamen-

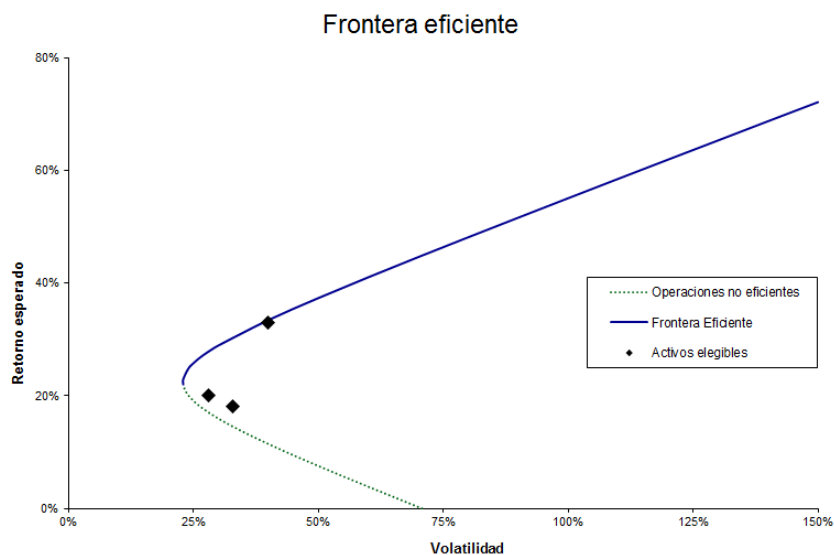


Figura 1.2.1: Ejemplo del modelo de portafolio eficiente de Markowitz.

te (correlación negativa) existe la posibilidad de formar un portafolio con acciones que mermen la posibilidad de perder sin sacrificar mucha rentabilidad.

La correlación se calcula con la *Covarianza* entre dos acciones (suponiendo un portafolio de dos acciones). Si dicha correlación es *no-nula* entonces tenemos dependencia entre las variables. La varianza del portafolio (su riesgo), es una ecuación que adiciona (de manera ponderada) las varianzas de cada acción y su covarianza.

Al agregar más acciones que se comporten de forma distinta, se puede reducir el riesgo del portafolio sin la necesidad de sacrificar ganancias. Esto es un *Portafolio Eficiente*. Dependiendo del grado de riesgo al que se está dispuesto absorber, se pueden generar muchos portafolios, formando así una *Frontera Eficiente* que asimila las ganancias en función del riesgo, de tal manera que dependerá de la aversión al riesgo y/o de la rentabilidad buscada que se acoplará un portafolio a esa necesidad. Como en la Figura 1.2.1, habrá ocasiones en que ciertos portafolios tengan el mismo riesgo asociado a distintos niveles de ganancias; en la formulación

de esta teoría se asume que el interesado siempre busca la mayor ganancia por lo que dirigirá su elección desde la izquierda de la curva hacia el punto más alto yendo a la derecha. *No permite, por el contrario, que hayan portafolios que compartan los beneficios a grados distintos de riesgo.*

Había un inconveniente importante en este método, necesitaba de muchos cálculos (medias, varianzas y sobretodo covarianzas de cada acción todas las demás) que para la época resultaban un reto enorme para la capacidad de computar que poseían. Pero aparecería alguien con la solución un día en 1960 a consultar su trabajo con Markowitz.

1.2.2. El Modelo de Valoración de Activos Financieros

El trabajo de William F. Sharpe vino a simplificar el cálculo necesario para operar en la bolsa bajo la teoría de Markowitz y esto le dio visto bueno a su utilización en la práctica y explica su amplia difusión en el medio.

Sharpe, inició el planteamiento de su modelo suponiendo que todos los participantes del mercado utilizaran la idea de Markowitz, en este caso ocurre que sólo habrá un portafolio eficiente para todos, el mercado mismo. Es él quien realiza todos los cálculos, pues el precio y riesgo de cada acción es el reflejo del comportamiento del conjunto de los inversionistas, es “el mejor portafolio posible”.²⁰

Con este modelo, se da inicio a una vertiente que ahora es una de las más utilizadas: la gestión indicitaria. El *Dow Jones Industrial Average* (DJIA) en Estados Unidos, en Francia el *Cotation Assistée en Continu* (CAC 40), en Inglaterra el *Financial Times Stock Exchange* (FTSE 100), en Japón el *Nikkei 225* (nombre corto de *Nihon Keizai Shimbun*, la corporación mediática que lo calcula) y el *Índice Bursátil Español* (IBEX 35), fueron tomando gran importancia con esta fórmula.

²⁰ *op.cit.* Herlin p.41

Si el mercado siempre refleja la realidad, entonces es inútil intentar vencerlo, mejores resultados se obtendrán si el portafolio sólo lo copia lo mejor posible. Así, permitiéndose ver al mercado como la mejor referencia, las acciones sólo deben compararse contra él y no una a una entre todas.

Para elaborar su trabajo, Sharpe introduce la noción de “Activo Libre de Riesgo” (que en su modelo son los Bonos del Tesoro) y “Prima de Riesgo” que viene a ser el beneficio que se espera de invertir en un activo bursátil y por lo tanto, propenso a los efectos del riesgo (al elegir esta opción por sobre los activos libres de riesgo, se espera una rentabilidad por lo menos igual a la contraparte). De esta manera, el mercado también tiene una *prima de riesgo*:

$$P_{RM} = R_{MB} - R_{LR}$$

P_{RM} : Prima de Riesgo de Mercado

R_{MB} : Rentabilidad del Mercado Bursátil

R_{LR} : Rendimientos del activo Libre de Riesgo (bonos del tesoro o equivalentes)

Luego, con esta información, en vez de calcular todas las correlaciones de cada acción y el resto, como con Markowitz, únicamente se calcula la correlación de la acción con respecto al mercado. A ella, comúnmente se le conoce como el parámetro β ; cada acción tiene una *beta* asociada a la comparación entre el comportamiento de ella y el del mercado. Esta β mide la volatilidad de la acción (el riesgo, pero volatilidad es su término financiero), y se calcula:

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_m, R_i)}{\text{var}(R_m)}$$

en donde la beta del activo i (β_i) es obtenida al dividir la covarianza de la Rentabilidad del Mercado m (R_m) y la del activo i (R_i), entre la varianza de

la rentabilidad del mercado. Entonces, el valor de β se interpreta de la siguiente manera:

$\beta = 1$: la acción sigue al mercado en todos sus movimientos y en las mismas proporciones;

$\beta = 0$: es el caso del activo libre de riesgo, éste no tiene nada que ver con el mercado;

$\beta > 1$: el valor de la acción es más volátil que el mercado (tanto a la alta como a la baja), es un valor especulativo;

$0 < \beta < 1$: la acción “minimiza” la evolución del mercado, es menos volátil que los cambios de éste;

$-1 < \beta < 0$: la acción evoluciona “ligeramente” en sentido opuesto al mercado;

$\beta = -1$: cuando la acción es inversamente proporcional al desarrollo del mercado;

$\beta < -1$: el valor de la acción se mueve inversamente al mercado en proporciones más altas.

Con esta información se puede modelar el rendimiento de la acción en función de la del mercado, dejando la ecuación del ampliamente utilizado y mejor conocido como CAPM (Capital Asset Pricing Model) de la siguiente forma:

$$E_i = r + \beta (E_m - r)$$

con

E_i : esperanza de rentabilidad del título i ,

r : tasa libre de riesgo,

E_m : esperanza de la rentabilidad del mercado;

Nótese que $(E_m - r)$ es la Prima de Riesgo que se mencionó previamente. De esta forma se puede observar que la β juega un papel trascendental en el modelo, pues verifica que a mayor riesgo, mayor ganancia puede esperarse. Esto, además de la importante reducción de cálculos, le valió al CAPM una enorme difusión en la gestión de portafolios en los mercados financieros.

Un problema que presentaba era la limitación de los riesgos que medía (sólo asociaba una β al riesgo del mercado), pues en la realidad hay una gran cantidad de fenómenos que evidentemente influyen de manera importante en la valuación de un activo. Stephen Ross, en 1976 presentó la solución realizando la generalización del concepto de Sharpe: el modelo APT (*Arbitrage Pricing Theory*) que, en lugar de tomar sólo una fuente de riesgo (la β del mercado de Sharpe), agrega otras variables de riesgo ponderadas de manera distinta. Así, también se produce la necesidad de estudiar y agregar otros fenómenos a la variabilidad del valor, en lugar de tener un factor decisivo se tiene una matriz de varianzas-covarianzas, lo que incrementa la complejidad del modelo; sin embargo, el notable crecimiento del poder informático permitiría al APT gran aceptación como método de valuación financiera e incluso ser utilizada para la valoración de proyectos de diversa índole. En 1990, junto a Markowitz, Sharpe recibió el Premio Nobel de Economía por esta aportación.

1.2.3. El Mercado de Opciones, la fórmula Black-Scholes

La reformación de la valuación del dólar con el patrón-oro y de los cambios fijos a los cambios “flotantes” con los acuerdos de Bretton-Woods y el posterior crecimiento del mercado de divisas, permitieron la creación de ciertos instrumentos financieros que servirían de protección contra la variación de monedas y otros

bienes y activos. Las opciones, como mercado formal reglamentado, aparecen en 1973 en Chicago. Se puede afirmar que ya existía el precepto que sostienen estos contratos (hay referentes provenientes de la edad media del pacto anticipado del precio de granos), la *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) simplemente inició la regulación de este mercado.

Además del incremento acelerado de la capacidad computacional de los 80's y 90's, hubo mejoras en el crecimiento económico y bajas en la inflación, volviendo el mercado de acciones más interesante provocando que hubiera un incremento en la cantidad de productos financieros para proteger las inversiones de los participantes. Entre ellas, las opciones desarrollaron una gran presencia en el mercado *Over-the-Counter* aunque el elevado riesgo que implicaba tal informalidad, la CBOE viene a establecer ciertos parámetros que aseguraban las transacciones.

Una opción, es un contrato que como su nombre indica, otorga la posibilidad de ejercer un derecho ligado a un activo dado y a ciertas condiciones como son:

- Derecho de compra (opción de *call*) o venta (*put*),
- El *activo subyacente* (al que está ligado el contrato) puede ser un activo cualquiera (físico, intangible o financiero) como divisas, acciones, índices bursátiles, materias primas, etc.
- Un precio del subyacente pactado por adelantado (*precio de ejercicio* o *strike price*),
- Una *fecha de expiración*, y
- Una *prima* (el costo de la opción);

comúnmente son utilizados para protegerse de un riesgo en una inversión o para beneficiarse de él. Es decir, funciona a modo de cobertura contra el riesgo de

variaciones (a la alta o a la baja) del precio del subyacente debido al cambio de divisas; para especular (buscar beneficiarse de los cambios mismos) a la baja o al alta del subyacente y, como se verá más adelante, permite especular sobre la volatilidad.

Entonces es necesario saber cuánto vale este tipo de contratos (la prima). Inicialmente, en el mercado OTC y en el CBOE, la valuación era empírica. Para encontrar una fórmula que transformara esta situación se pensaba que era necesario conocer el precio del subyacente y así valorar la importancia de la opción, sin embargo; al conocer eso la opción perdía sentido pues ya no sería necesario pagar por la cobertura de algo que ya es conocido.

Fischer Black (1938-1995) y Myron Scholes (1941-) tuvieron otro enfoque: lo que importa, es la volatilidad.

- Si una acción es muy riesgosa, una opción cuyo precio de ejercicio sea “diferente pero no mucho” del real, valdrá la pena pues la probabilidad de que sobrepase este precio es alta. Se habla de que la opción está *in-the-money* (o que vale la pena ejercerla).
- Si la volatilidad es poca, una opción cuyo precio de ejercicio sea muy diferente al del subyacente, no valdrá mucho ya que la probabilidad de que pase tal precio es muy débil: a esto se le conoce como opción *out-of-the-money*.

La idea es que, en el primer caso donde la opción “vale algo”, la fórmula de Black-Scholes define el cuánto, ya que el precio real puede alcanzar el de ejercicio y entonces hay espacio para beneficiarse de ella. En el segundo caso, cuando hay poca volatilidad, la opción no valdrá mucho ya que habrá poca necesidad de cubrirse contra un activo que no varíe mucho.

De esta manera se puede observar cómo es posible especular sobre la volatilidad, a saber: se puede anticipar al cambio de precio de una acción cuya volatilidad aumentará por algún evento preciso gracias a las opciones; por otra parte si tenemos una opción sobre una acción poco volátil y ocurre algún imprevisto que dispare su valor, la opción igualmente crecerá súbitamente generando un gran beneficio para el poseedor. Esto dará paso a un nuevo campo de la gestión financiera del riesgo basado exclusivamente en la volatilidad.

De sus conclusiones, que resulta de compleja formulación para el inversionista no técnico²¹, se rescata que el principio que rige el cambio de los precios es de orden gaussiano:

$$C = S \cdot N(d_i) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_z)$$

$$P = K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_z) - S \cdot N(-d_i)$$

donde,

$$d_i = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_z = d_i - \sigma\sqrt{T-t}$$

C: valor de una opción de compra, opción europea²²

P: valor de una opción de venta, opción europea

²¹Se recomienda al interesado en profundizar en este modelo, por su amplia difusión, dirigirse a la obra:

Hull, John C. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Prentice Hall 9th ed., E.U.A., 2015. Chapter 15.

²²Existen distintos tipos de opciones y una clasificación que se les da proviene de los términos en que son actadas las fechas de ejercicio: las *opciones europeas* solo pueden ser ejercidas en una fecha determinada; las *opciones americanas* pueden ejercerse en cualquier punto hasta la fecha de ejercicio.

S: precio spot del subyacente

K: precio de ejercicio (*strike price*) de la opción

r: tasa libre de riesgo (anual, calculada con composición continua)

T – t: es el tiempo faltante para la expiración del contrato

σ : es la volatilidad de los retornos del subyacente

$N(\cdot)$: es la probabilidad un evento en una distribución Normal.

El trabajo que realizaron todos los autores aquí señalados, establecieron la manera de ver el mercado y su comportamiento, además influenciaron a los organismos reguladores para utilizar sus estructuras y fundamentos como herramientas para simular el probable curso que seguiría y así crear las *medidas necesarias* para contrarrestar los perjuicios económicos que arrastraría un fenómeno contraproducente (fondos de reserva, límites de endeudamiento, etc.).

1.3. Debilidades Expuestas de los modelos tradicionales

El mercado parecía comportarse como fue predicho por los modelos financieros antes desarrollados, pero un conjunto de hechos a finales de los años 80's, durante los 90's y más recientemente, en la primera década del nuevo siglo permiten poner en tela de duda los fundamentos que sostienen la ortodoxia financiera. Se hará mención de un par de ellas que causaron gran revuelo por lo inesperado de su ocurrencia y por las severas consecuencias que acarrearón, en seguida, se abrirá un desglose de los puntos de la teoría financiera moderna que simplemente fueron

exhibidos en su deficiente capacidad de modelar tales eventos y dan paso al análisis que se propone.

1.3.1. Eventos Inesperados

Para dar pie a la descripción del problema, es oportuno hacer la revisión de algunas fechas que han exhibido existencia de una errada o incompleta aproximación al fenómeno:

1.3.1.1. Crisis Rusa

En el verano de 1998, Rusia desató una crisis de tales consecuencias que, relacionada con otra serie de problemas menores pero latentes y preocupantes (recesión en Japón, posible devaluación de la moneda china y el impedimento presidencial que enfrentaba Bill Clinton en E.U., etc.), “tomaría toda una vida recuperar algo de esas pérdidas” según comentó un analista en el *Wall Street Journal*²³.

Dos años antes, Rusia era el mercado emergente (la oportunidad de mercado de los países en desarrollo) más importante a nivel mundial, y debido a una serie de factores (ahora describibles y observables en casi cualquier canal informativo financiero) macro y microeconómicos sufrieron la devaluación de su moneda, arrastrando bancos occidentales y a los comerciantes de deuda. Luego, Wall Street reflejó esos problemas con la caída de 3.5% del *Dow Jones Industrial Average* (DJIA) el 4 de agosto de 1998. A medida que la crisis rusa aumentaba (unas semanas después se hizo oficial la devaluación del rublo, el desplome de la economía se hizo presente además de la fuga masiva de capitales, que aún continúa), este índice seguía impactando: 3 semanas después del primer golpe, el DJIA cayó 4.4%

²³ *op. cit.* Mandelbrot (2009a), Notes Chapter I p.279.

más; después de esto, el 31 de agosto, una vez más, cayó 6.8 %. En otras partes, los bonos bancarios caían a un tercio de su valor usual comparado contra los bonos gubernamentales. El caso más sonado entre los afectados es el de LTCM (Long-Term Capital Management), dirigido en parte por los entonces recién laureados por el Nobel, Myron Scholes y Robert Merton (los involucrados en el desarrollo, el primero, y la complementación, el segundo, de la fórmula Black-Scholes), quien luego de sufrir pérdidas multimillonarias por un endeudamiento imposible de pagar, tuvo que ser rescatado por los más importantes bancos de E.U. bajo supervisión de la Reserva Federal de E.U. (FED).

El Fondo Monetario Internacional desfogó el problema ruso y la FED estabilizó Wall Street, frenando así un revés al sistema financiero. Al analizar lo sucedido, ese final del 31 de agosto no debió haber sucedido de acuerdo al modelo estándar; su probabilidad de ocurrencia era tan *despreciable* (una entre 20 millones, equivalente a no verlo en casi 100 mil años de transacciones diarias) que era *imposible* tomar en cuenta su presencia. La probabilidad de las tres caídas en el mes es aún más ínfima: una entre 500 mil millones. Un antecedente de gran eco es el “Black Monday” del 19 de Octubre de 1987, una caída del Dow del 29.2 %, cuya probabilidad de ocurrencia se reducía a una entre 10^{50} , tal número no existe en la naturaleza -no significa nada para los modelos financieros. Aún así, sucedió. Su ocurrencia permite cuestionar las mediciones hechas para describir el comportamiento del mercado.²⁴

1.3.1.2. La era de la Información: Burbujas y la crisis de 2008

En la primera década del nuevo milenio ocurrieron un par de casos que alcanzan el interés de este trabajo, ellos son las llamadas burbujas (aquí mencionaremos la “Burbuja Dot-Com” o “Burbuja de Internet”) y la crisis desatada en el 2008,

²⁴ *op. cit.* Mandelbrot (2009a), p. 4-6.

marcada por el quiebre de diversas instituciones financieras y bancarias alrededor del mundo. Se procederá a desarrollar una resumida explicación de lo sucedido en ambos acontecimientos.

Dentro del mercado hay ocasiones en las que el precio de las acciones sube temporalmente sobre un periodo extendido por algunos meses o años, evidentemente no siempre es un mercado ascendente pero en la suma de las vicisitudes del periodo el resultado es un mercado creciente, esto es conocido como “*Bull Market*”; su contraparte, un mercado cuyo efecto acumulativo de los cambios de los precios sea decreciente, es el “*Bear Market*”. Las “Burbujas” pueden verse como un caso particular de interacción entre “Bull” y “Bear Market”, en donde la ocurrencia de ámbos se da de manera súbita y notable. Principalmente son describibles una vez que ocurre la caída de los precios que fueron alzados de manera especulativa (debido a la **anticipación de una subida** en los mismos) por los participantes de un mercado en crecimiento.

A finales de los años 90, la red de Internet se expandía a gran velocidad entre la población; las empresas que se encargaban de la distribución del servicio y aquellas ligadas al desarrollo de su tecnología presentaban grandes ganancias en este periodo, por lo que una gran cantidad de inversionistas apostaban a este mercado en auge. La expectativa del retorno financiero que se esperaba de estos activos venía alimentado por las promesas de un incremento en la cobertura del servicio y del desarrollo tecnológico (inversiones en redes inalámbricas 3G, cableado de Alta-Velocidad, etc.) además de que el gobierno mismo impulsaba a las empresas tecnológicas con reducciones en impuestos. El NASDAQ, índice que enlista a las empresas relacionadas con la tecnología, refleja el desarrollo de este evento (ver Figura 1.3.1).

Al no cumplir las expectativas que se tenían marcadas, diversas compañías

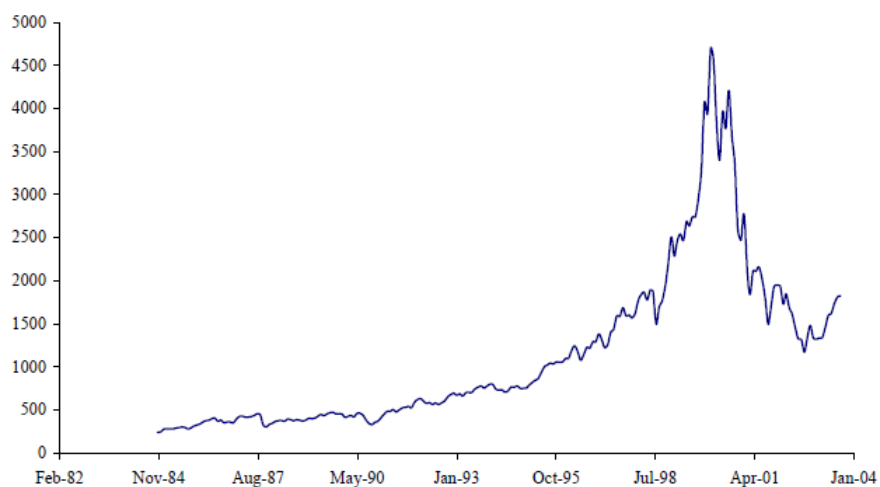


Figura 1.3.1: NASDAQ Composite (Cierre Mensual)

Galbraith, James K., Hale, Travis, *Income distribution and the Information Technology Bubble*. Austin, TX: LBJ School of Public Affairs, University of Texas Inequality Project, Working paper 17 January 14, 2008.

no pudieron hacer frente a su carga financiera y parte de ellas perdieron su valor comercial. Varios puntos, que van desde el fallido alcance de la comercialización hasta el problema de Microsoft vs. Estados Unidos (declararon que era un monopolio) contribuyen a su caída. En cuestión de meses muchos de los involucrados quebraron (las empresas) y perdieron grandes sumas de dinero (los inversionistas); algunos, como “Amazon.com”, aunque perdieron casi el 90 % de su valor lograron superar la burbuja y estabilizarse; una década después, incluso lograron volverse 3 veces más rentables de lo que fueron en la burbuja.²⁵

Ahora bien, aparte de la “Burbuja de Internet”, el nuevo milenio sumió al mundo en una crisis financiera a finales de la primera década, la cual sigue impactando actualmente. La crisis de 2008 (realmente iniciada en 2007, incluso podrían encontrarse antecedentes previos) enfrascó al sistema financiero, económico y monetario en un grave aprieto, del que existe un (ampliamente descrito) conjunto de cau-

²⁵ *op. cit.* Galbraith & Hale.

sas e involucrados; el Otoño de este año marcó un punto a favor de la crítica de los modelos financieros prevalecientes, pues fue en su diversificación y aplicación (productos financieros creados a partir de la medición del riesgo) que se desató la caída de todos los mercados y varias economías del mundo.

Evidentemente existen muchos puntos macroeconómicos y políticos involucrados en lo sucedido, aquí se hará la distinción de lo sucedido en el “mercado del riesgo”. La caída, como ya se mencionó, inició en 2007 siendo el agente más relevante en ello la emisión de créditos *subprime* (básicamente créditos dados a aquellos que tienen registros crediticios negativos, con mayor riesgo de incumplimiento -”default” en inglés²⁶- que un deudor *prime*) llevó a los mercados financieros a ofrecer un producto para diversificar el riesgo de pérdida por *default*: los CDOs (“Collateralized Debt Obligations”) repartían el riesgo de *default* entre diversos deudores, de diversas edades y sectores laborales, con distintas capacidades económicas, con miras a disminuir el efecto de que algunos no pagaran. Esto aumentó la probabilidad de un fallo más grave. La correlación entre diversos factores a niveles macro y microeconómicos es bastante impredecible.

En el 2000, David X. Li hizo pública una forma de resolver el problema del riesgo de *default*. Debido a la presencia de este riesgo, existe un contrato financiero para hacerle frente: el “Credit Default Swap” (*CDS*), cuya función es asegurar a la entidad que lo compra contra el *default* de un deudor cualquiera (país, sociedad, activo financiero) mediante el pago de *primas* al vendedor que, en caso de que ocurra el *default*, reembolsa el valor de la pérdida²⁷. Así, para cada CDO se le debería asociar un CDS a partir de las características del primero; entonces, se

²⁶El término “Default crediticio” refiere al estatus en que cae un deudor cuando incurre en incumplimiento del pago de su deuda, es decir que falla en cumplir sus obligaciones legales (o las condiciones) de un préstamo adquirido.

²⁷Li, David X., *On default correlation: a copula function approach*, Journal of Fixed Income, E.U., marzo 2000.

tiene una manera de *medir* el riesgo de *default* -al aumentar la cantidad de éstos, el valor de los CDS asociados reflejará este cambio aumentando su precio; lo mismo para el caso opuesto- y mitigar su efecto. A estos productos, las calificadoras, les otorgaron la nota “AAA” -la mejor posible- y el número de *CDS* aumentó considerablemente en ese mismo año.

Hay que mencionar que el fundamento matemático asociado a la medición de un *default simultáneo* de muchos deudores, conocido como *riesgo de correlación*, es la llamada Teoría de Cópulas; en particular, el trabajo de Li utiliza la Cópula Gaussiana que, al llevar la curva de Gauss como base, disminuye la probabilidad de un evento extremo.²⁸ Además, se debe tener en cuenta que la historia de los créditos *subprime* es relativamente nueva y, en ese momento histórico, el mercado inmobiliario iba en crecimiento.

La sobreconfianza puesta en estos modelos y su popularización debida a la facilidad de cálculo otorgada por el gran desarrollo tecnológico e informático, llevó a los bancos y diversas instituciones financieras a realizar grandes operaciones especulativas respecto del *default* hipotecario. Por otra parte, los reguladores del mercado también adoptaron estas probabilidades de *default* para tomar decisiones acerca del nivel de aseguramiento en efectivo que debieran tener estas empresas; fue notorio que la *Securities and Exchange Commission* de E.U. relajó la regla de capital neto -las reservas en caso de *default*- en 2004 y, consecuencia de esto, Wall Street llegó a tener un endeudamiento masivo; así tenemos los casos siguientes: Fannie Mae y Freddie Mac, bancos inmobiliarios, tomaron un proyecto asegurador de hipotecas cuyo rescate, después de la caída, llegó a valorarse en 363 mil millones de dólares²⁹; Bear Stearns, uno de los más grandes emisores de instrumentos

²⁸Cifuentes, Arturo; Katsaros, Georgios, *The One-Factor Gaussian Copula Applied To CDOs: Just Say NO (Or, If You See A Correlation Smile, She Is Laughing At Your “Results”)*. The Journal of Structured Finance, New York, E. U. 13 de marzo de 2007. 60-71.

²⁹Schwartz, Nelson D., Roose, Kevin. *Federal regulators sue big banks over mortgages*. The

financieros respaldados por hipotecas, tuvo un apalancamiento de lo que debía contra lo que poseía de 33 a 1. Poco después los precios del mercado inmobiliario cayeron y todo empeoró. El 29 de septiembre, el DJIA cayó 7% y con ello 1.6 mil millones de dólares desaparecieron de la industria norteamericana.³⁰

1.3.2. Análisis de los Fundamentos Teóricos

Tomando en cuenta la evidencia anterior, resulta claro ver que hay fallas en los modelos convencionales que deben de ser tomados en cuenta. Aclaremos los puntos que sobresalen por su participación en este problema de la medición del riesgo financiero.

1.3.2.1. Tras Bachelier y la curva de Gauss

Hay que mencionar la evidente influencia del modelo económico neoclásico, que dota al estudio de este fenómeno de un acercamiento puramente matemático, suponiendo en él que todo debe ser calculable y, además, crea la figura del *homo economicus*: el ser racional que busca maximizar su beneficio analizando el conjunto de información disponible. Las hipótesis generales tras la aplicación de la curva de Gauss al estudio del comportamiento de los Mercados Financieros son:

1. La gente es racional con la toma de decisiones (analiza la información a su alrededor y la utiliza para tomar la mejor decisión), tiende a maximizar el beneficio lo cual puede ser expresado por una “función de utilidad” que se maximiza al hacerse más rica. Es decir, el supuesto de racionalidad en los

New York Times [en línea]. 2 de Septiembre de 2011. [Fecha de consulta: 12 de agosto de 2015]. Disponible en:

http://www.nytimes.com/2011/09/03/business/bank-suits-over-mortgages-are-filed.html?_r=0

³⁰ *op. cit.* Herlin pp. 68-70.

op.cit. Mandelbrot (2009a) p. xvi.

inversionistas proviene de que prefieren tener más dinero que menos dinero. A este punto se le debate que la realidad muestra un comportamiento más bien errático de los individuos, no existe la misma valoración entre ganancias y pérdidas, por tanto un argumento de racionalidad total está errado. Un estudio que evidencia esta situación lo llevaron a cabo Allen Poteshman y Vitaly Servin³¹, en el que observan el ejercicio de opciones Call americanas antes del tiempo de su vencimiento durante un periodo de baja volatilidad, lo cual es irracional ya que este tipo de opciones son de mayor utilidad en tiempos donde hay - como dicen los autores- “fricción en el mercado” ya que es ahí donde es posible generar una ganancia con estos contratos; el llamado “Comportamiento de Rebaño”³² amplifica el efecto de esta situación al difundirlo a través de distintos tipos de participantes en el mercado, al ocurrir esto la irracionalidad es, entonces, parte del mercado lo cual refuta la hipótesis de eficiencia.

2. Homogeneidad de los inversionistas: todos tienen los mismos horizontes temporales y las mismas metas, con la misma información toman las mismas decisiones y aunque su riqueza varíe, ninguno es lo suficientemente poderoso para influenciar los precios por sí mismos - tienen expectativas homogéneas. Aquí, simplemente se puede objetar que en realidad cada inversionista es distinto, los hay quienes mantienen acciones por décadas para un fondo, así como quienes especulan en cada momento donde se presente una “tendencia” que les beneficie. Un experimento muestra que la interacción entre

³¹Poteshman, Allen M. y Servin, Vitaly, *Clearly Irrational Financial Market Behavior: Evidence from the Early Exercise of Exchange Traded Stock Options* (August 2001). Disponible en la Social Science Research Network [en línea]: <http://ssrn.com/abstract=280795> ó <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.280795>

³²*Herding Behaviour* en inglés. Este quiere decir que el general de los inversionistas pequeños y débiles tienden a seguir las acciones efectuadas por los más fuertes a modo de protección.

dos tipos distintos de inversionistas genera burbujas y caídas espontáneas, el mercado pasa de un sistema “lineal” -en el que cada factor agrega predecibilidad al siguiente- a uno “no-lineal”, más caótico -donde los factores interactúan y reaccionan impredeciblemente-.³³ Otro experimento muestra que las poblaciones que buscan beneficiarse tomando decisiones en contra de la mayoría, al depender de qué tan rápido y a través de quiénes se transmite la información, pasan del estadio de inconformidad a ser la misma mayoría trastornando el circuito de la información en este proceso; así, aquellos que buscaban independencia del general terminan siendo el nuevo foco rector³⁴.

3. El cambio entre cada variación de precios es prácticamente continuo: no hay saltos inesperados, se mueven suavemente de uno a otro. El modelo de Markowitz asume esto para funcionar y poder utilizar las herramientas del cálculo diferencial e integral para la probabilidad.

Mandelbrot ataca esto aseverando que cuando se estudia a detalle el fenómeno, hay una constante de saltos debido al redondeo de precios y al retraso del mercado para efectuar las órdenes de compra y venta, produciendo desequilibrio y obliga un balance “a saltos”³⁵.

Estos puntos son la base de la aproximación probabilística de Louis Bachelier al estudio de los cambios en los precios de los M.F. y justifica el por qué se debe utilizar la distribución de probabilidad gaussiana. A continuación se analiza esto último con mayor detalle.

³³De Grauwe, P., Grimaldi, M. *Bubbling and crashing exchanges rates* CESifo Working Paper 1045, 2003.

³⁴Touboul, Jonathan, *The Hipster Effect: when anticonformists all look the same*. The Mathematical Neuroscience Laboratory/ Collège de France. Paris, Octubre 30, 2014.

³⁵*op. cit.* Mandelbrot p. 86

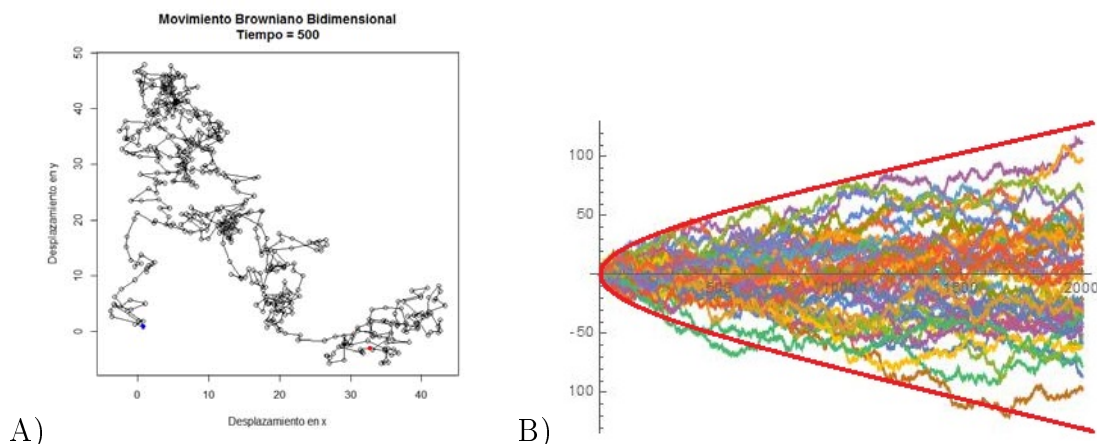
1.3.2.2. Movimiento Browniano de Precios

La manera en que la curva de Gauss se enlaza con la descripción probabilística del tamaño de los cambios en la variación de los precios de los Mercados Financieros, se desarrolla mediante un proceso tomado de la física conocido como Movimiento Browniano (En adelante *MBr*). Éste observa el movimiento de una partícula suspendida en un fluido provocado por el choque de la primera con las moléculas del segundo. Su desarrollo matemático necesita que el movimiento cumpla con las siguientes condiciones:

- Incrementos Independientes, i.e. independencia entre cada cambio: no tiene que ver el primer cambio con el siguiente, ni con ningún otro;
- Incrementos Estacionarios, i.e. la distribución de los incrementos sólo depende del incremento temporal: cada cambio está regido por la misma ley en el transcurso del tiempo, nunca cambia; e
- Incrementos Gaussianos: la ley probabilística que rige dichos cambios es la Distribución Normal.

El *MBr* puede verse como la representación tiempo-espacio de la curva Normal, que resulta asociable, en sus principios, al proceso de variación de precios, contribuyendo a su amplia utilización para la simulación del fenómeno.

Gráficamente (ver Figura 1.3.2). lo que genera el *MBr* es una curva errática que se superpone en varios puntos pero cuya dirección permanece por veces (todas las direcciones tienen la misma probabilidad de ocurrencia). Si se toma en cuenta únicamente el tamaño de la variación de los cambios, obtenemos un proceso (ver parte superior de la Figura 1.3.3) que permanece dentro de un rango “medible”



A) Un movimiento Browniano en su versión bidimensional: espacio-tiempo. El punto azul, en aproximadamente $(0,0)$, indica la posición inicial de la partícula; el rojo es el punto final de esta caminata. Se observa la consistencia de la distancia entre puntos que refleja los pequeños cambios alrededor de la media. A pesar de que puede haber un considerable alejamiento del origen, en sí el proceso es poco variante de un grupo de puntos a otro.

B) En el caso unidimensional (simulado en repetidas ocasiones), siempre partiendo del $(0,0)$, las trayectorias superpuestas formarán la campana gaussiana. Aquí, dado que la media es cero, el centro de la campana se encontrará sobre el eje X y las posibles divergencias respecto de él quedarán encerradas por los límites de la curva roja, salvo muy escasas excepciones.

pues la gran mayoría de los cambios serán pequeños y muy pocos ocurrirán fuera de él, el equivalente del “ruido blanco”.

Si se comparan los cambios de un típico *MBr* con los del Dow Jones (Figura 1.3.3) se puede observar la disparidad del concepto con la práctica. En el primero, como ya fue mencionado antes, la mayoría de los cambios (68 %) está alrededor una σ de la media, el 95 % a 2σ y el 98 % dentro de 3σ , más allá hay “pocos” valores. En realidad, el DJIA tiene cambios “frecuentes” de hasta 10σ ; el de 1987 es de 22σ (aquel 29.2 % antes mencionado).

Además de esto, existe en la literatura evidencia de que este enfoque está mal encausado: en los mercados de bienes los cambios no siguen la curva de Gauss y que su varianza no permanece constante como debiera esperarse (Mandelbrot observó esto con el cambio en el precio del algodón a lo largo de 100 años); en las

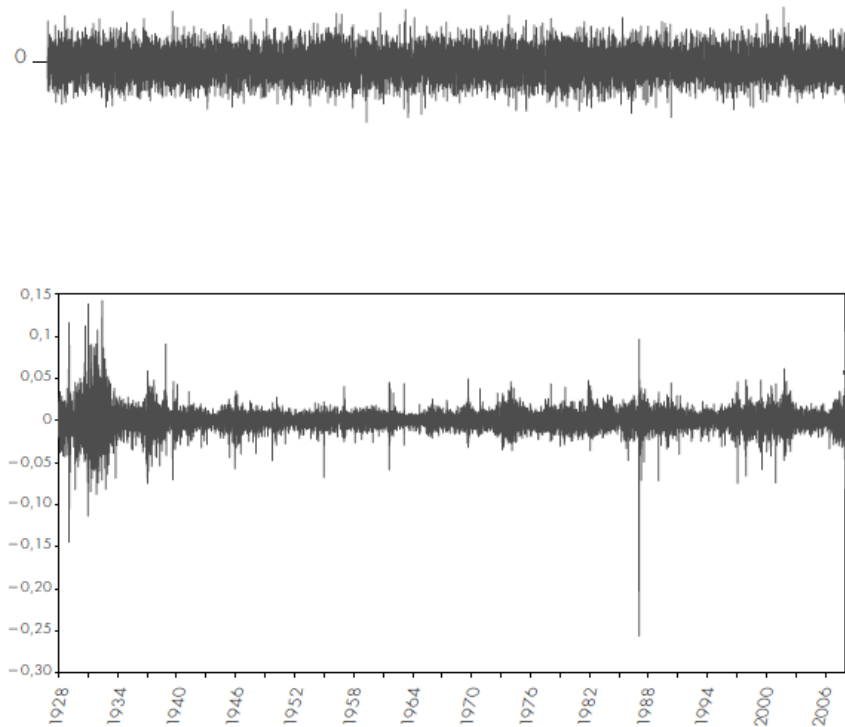


Figura 1.3.3: Variaciones de un Movimiento Browniano típico (arriba) y variaciones del DJIA de 1928 a 2006 (abajo).

Op.Cit. Herlin p. 59

acciones, se encontraron casos en los que el tamaño de las variaciones no coincidían en su incidencia real con la esperada, la *kurtosis* (encargada de medir la relación entre los datos agrupados al rededor de la media y los existentes en las colas de una distribución ³⁶) fue utilizada para estudiar este escenario dejando claro que no hay coincidencia entre una curva gaussiana ($kurtosis = 3$) y el mercado (el índice Standard & Poor's 500 tuvo una kurtosis de 43.36 entre 1970 y 2001, si se quita Octubre del '87, aún queda un valor de 7.17; el NASDAQ de 5.78 y el CAC-40: 4.63). Igualmente, en el mercado de divisas hay registros de que la realidad no es explicable bajo Gauss. Y, finalmente, se ha demostrado que existe *Dependencia* en

³⁶A mayor kurtosis es más notoria la coexistencia de eventos cercanos a la media y eventos lejanos de ella.

los cambios de los precios, sucediendo esto a corto (1-2 años), mediano (3-8 años) y largo plazo; en el primer caso, se ha observado un “arrastre” en las tendencias que se va degradando a medida que avanza el tiempo (una caída importante provoca una caída menor al día siguiente); a mediano plazo se tiene que el comportamiento es inverso (a un periodo de ganancias es más probable que le siga uno decreciente) y, por último, Mandelbrot defiende que el efecto más importante se da en el largo plazo -teóricamente, un efecto infinito- pero a esto regresaremos luego.

Queda aclarar que debido a esto se ha combatido la utilización y predominancia académica de estos modelos, pero también cabe resaltar que cada uno de los que se han mencionado en este capítulo tiene sus propias desventajas.

El CAPM está expuesto a la crítica debido a una serie de anomalías expuestas relacionadas con su funcionamiento (“ β is Dead” es como se les conoce) :

- El *efecto $\frac{P}{E}$* : mide la relación precio (P) - ganancias por acción (E)³⁷ para indicar si una acción está siendo comprada a un valor mayor o menor del que realmente posee. Pero según la teoría, únicamente la β es relevante para aportar información al precio. Si este cociente es alto, habrá un peor desempeño de la acción en cuestión respecto de aquellas con uno menor.
- El *efecto Pequeña-firma-en-Enero*: Se descubrió que existe, por un lado, una tendencia del mercado a crecer en Enero y por el otro, las acciones de firmas pequeñas tienen, generalmente, un mejor desempeño que las de las grandes. Al juntar ambos casos se tiene un fenómeno aún más notorio; cosa que solamente la β debiera reflejar.
- El *efecto Valor en libros-Valor de mercado* (“Market-to-Book effect”): Este cociente mide la relación entre el precio de mercado y el precio manejado

³⁷La nomenclatura P y E hace referencia a *Price* (precio) y *Earnings* (ganancias).

por los “libros” contables. Si el valor es pequeño (precio de mercado menor que en los libros), se tendrá un mejor desempeño de la acción.

En cuanto a Black-Scholes, la fórmula original ha sido ampliamente debatida y se está de acuerdo en su imprecisión, en el mejor de los casos, si no es que se le considera del todo errónea.

1.4. El Fenómeno de lo Altamente Aleatorio

En este capítulo se analiza y concluye que los modelos financieros convencionales tienen muy discutibles principios (en gran medida relacionados con la forma de plantear el problema) y abordan el tema de lo aleatorio de los M. F. desde una perspectiva incompleta y mal enfocada. Sobre esto, diversos autores se enfocan a desarrollar formulaciones alternativas al fenómeno, las cuales serán discutidas a continuación.

1.4.1. Defensores de un movimiento fallido

En la búsqueda por aferrarse al modelo financiero prevaleciente, uno de los remedios que se crearon fue el análisis de series a tiempo discreto mediante los famosos modelos ARCH (“Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, referidos en español como “Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva”) que tratan de modelar varianza inestable. El modelo Black-Scholes asume la varianza, σ , como una constante derivada de observaciones hechas en tiempos suficientemente pequeños (tiempo continuo) lo cual permite interpretar esta varianza como la volatilidad de los precios; los ARCH generan una volatilidad estocástica (aleatoria) cuyo beneficio radica en evolucionar conforme se actualiza la información disponible. Sin embargo, los fundamentos de esta tendencia igualmente caen en

la modelación basada en que los cambios se rigen por la Normal³⁸. Con esto se crea un híbrido en el que la varianza del Black-Scholes es estimada através de un modelo ARCH.

Debido a la presencia de errores en su desempeño, se han ido “parchando” los defectos del modelo creando una cantidad importante de variantes del ARCH: GARCH (General Autoregressive...), NGARCH (Nonlinear GARCH), iGARCH (integrated GARCH), EGARCH (Exponential GARCH), etc. Todos “mejoran” cierto aspecto del modelo para hacerlo más fiel a la realidad, pero no pretenden explicar ni dar razón de las “mejoras”, simplemente se aplican para acoplar los modelos a los datos empíricos.³⁹

El punto a debatir es que el azar que modela la curva Normal no es representativo del fenómeno que prevalece en los mercados financieros. Nassim N. Taleb y Benoît Mandelbrot ratifican este pensamiento y el último de ellos presenta una solida respuesta, la cual le da sentido a este trabajo.

1.4.2. Cisnes Negros y matemáticas para lo Irregular.

Wilfrido Pareto, descubrió un fenómeno interesante respecto de la distribución del ingreso: a medida que éste cambiaba entre individuos (de ricos a pobres) la evolución del diferencial aumentaba; es decir, comparando la diferencia de ingresos entre un pobre y un rico, ésta aumentaba conforme pasaba el tiempo (los ricos se hacían más ricos y los pobres, más pobres). De este estudio hay que mencionar que prevalecía en la Europa de entonces (suele asociarse el pensamiento filosófico de Pareto como precursor del fascismo de Mussolini) la idea de que el socialismo

³⁸Los retornos no siguen la distriución gaussiana sino una mezcla de distribuciones de este tipo, definida por el periodo de tiempo analizado.

³⁹Chaudhury, M. & Wei, Jason Z. *A comparative study of GARCH (1,1) and Black-Scholes Option Prices*. University of Saskatchewan, Canada, 1996.

nivelaría este asunto.

Nassim Nicolas Taleb, presenta un análisis asertivo de la forma en que comprendemos lo desconocido y cómo existe un desequilibrio entre nuestra apreciación de lo que puede ser y cómo ciertos fenómenos contribuyen al escalamiento de otros más graves; particularmente habla del fenómeno de lo aleatorio en escenarios de alto riesgo. La tendencia a sentirse más cómodo cuando se tiene una “imagen” (aunque sea una imagen errónea) del porvenir, nos deja inhabilitados ante un revés de la fortuna. Al engañar la percepción que se tiene de la ocurrencia de un suceso adverso caemos en la falsa idea de que éste puede ser medido y combatido. El autor ha demostrado en diversos trabajos, que un suceso medido en las “colas de la distribución” está más expuesto al error estadístico; es decir, mientras más raro es el evento, menor es nuestra capacidad de predecir su verdadera naturaleza y de comprender sus verdaderos alcances.

En su obra *El cisne negro*⁴⁰, Taleb desarrolla estas premisas de las que ya se mencionó que el *problema inverso* se agrava al no tomar en cuenta la *platonidad* del pensamiento⁴¹. Esto implica que cuando estamos en búsqueda de prever un suceso en los mercados (cuya naturaleza es bastante errática) a partir de idealizaciones de baja aleatoriedad (en este caso gaussiana) dejamos espacio para que la confrontación del modelo con la práctica genere un vacío interpretativo, el cual abre paso a que lo imprevisto suceda. Precisamente por esta “ceguera” es imposible que se pueda predecir la siguiente gran variación “fuera de la norma”, pues la modelación de eventos basándose en la historia del evento (la que se pudo construir), sólo generará previsiones dentro del mismo catálogo de opciones disponibles que

⁴⁰*op. cit.*

⁴¹El problema inverso, como se menciona antes en la Introducción, trata de nuestra reducida capacidad para vislumbrar el futuro a partir del estudio del pasado y, la platonidad es la forma en que idealizamos situaciones reales a través de conceptos limitados, el problema de confundir “el mapa con el territorio”.

fue utilizado para la construcción de la historia y, en su mejor caso, extrapolará bajo la misma escala de aparición e impacto de las mediciones originales.

Luego, dado que no sabemos cuándo ni en qué proporciones ocurrirá un evento adverso, tomar precauciones acerca de la magnitud y frecuencia de éste resulta ser una tarea poco clara ya que no se puede estar seguro de cuánta reserva es necesaria tener disponible para enfrentar algo que no sabemos que vaya a ocurrir. Por ello, una vez que ocurren los eventos raros (fuera de la norma) tienen un alto impacto en su dominio, que puede ser tanto positivo como negativo, el cual genera alerta y promueve el interés hacia la naturaleza de su ocurrencia. Es decir, sólo son describibles una vez que han sucedido (nada del pasado puede decir convincentemente de antemano su posibilidad) y se procede a generar una explicación contextualizada de su formación. Con lo que se hace explicable y predecible.⁴²

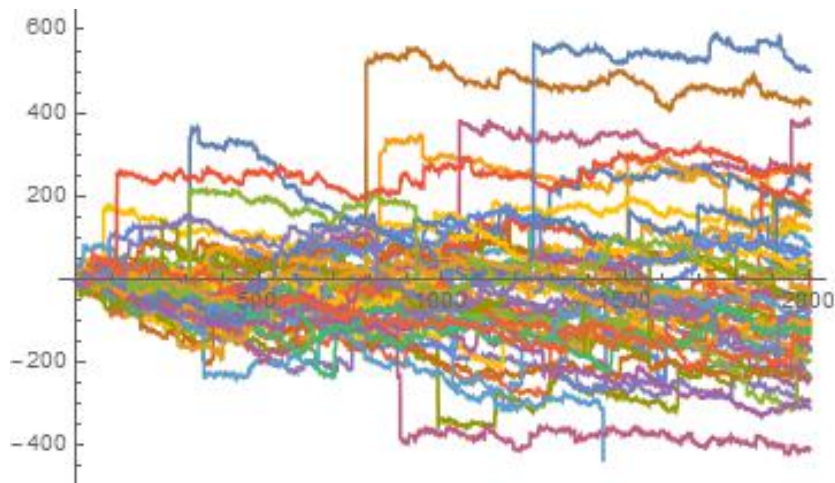
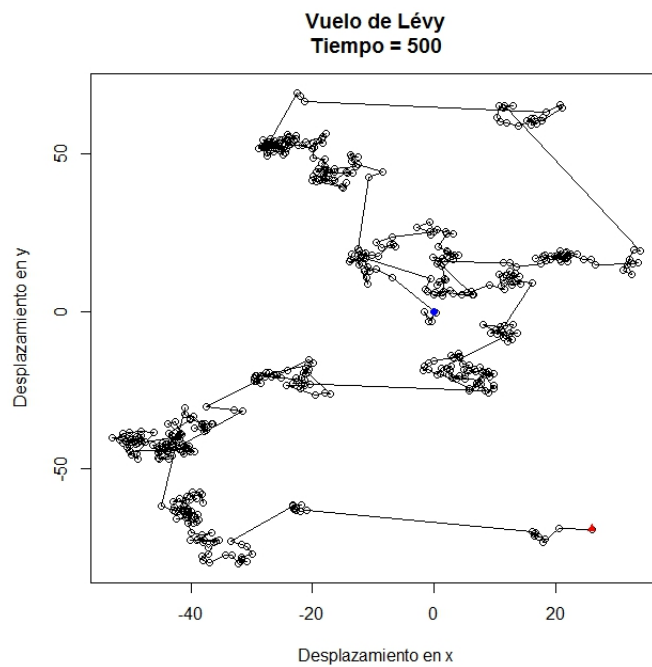
Los Cisnes Negros (eventos imprevistos, de gran impacto y sólo observables una vez ocurridos), como él los llama en su obra citada, encuentran en los mercados financieros una amplia gama de ejemplos que ratifican su existencia. Dado que son impredecibles, hay que amoldarse a su existencia (más que intentar preverlos). El qué hacer para comprender mejor cómo funciona su actuar y el impacto que pueden tener en los mercados financieros, Taleb dice, viene del genio que dio las bases matemáticas para el desarrollo de una nueva revolución científica. Para él (y este trabajo) Benoît Mandelbrot y los Fractales tienen el principio que permite un mejor acercamiento al problema que se tiene.⁴³

Mandelbrot desarrolla una diversa serie de investigaciones relacionadas con el

⁴²Cabe mencionar que un evento altamente impactante puede vincularse tanto al hecho de la ocurrencia un evento altamente inesperado (de muy baja probabilidad), como la no ocurrencia de uno altamente esperado (de muy alta probabilidad). Por lo que prever eventos adversos y favorables comparten el problema mencionado.

⁴³*op. cit.* Taleb (2009) y Taleb (2010)

gran descubrimiento de su vida: los Fractales, de los cuales, los relacionados con las finanzas y los precios del mercado llevan a un nuevo nivel el estudio y análisis de la información financiera para presentar la alternativa a lo convencional: el modelo Multifractal que describirá el *cómo* se comportan los MF. Veremos cómo la alternativa al proceso browniano de la Figura 1.3.2 se presenta con otro tipo de procesos, los cuales son capaces de generar las grandes variaciones y las tendencias que son observables en los precios de los mercados.



Capítulo 2

El Azar Fractal de los Mercados Financieros

Como hemos observado, los modelos más utilizados sobre los cambios de los precios de mercado muestran inconsistencias al ser aplicados, las cuales provienen de un cuestionable grupo de supuestos que son asumidos como verdades, sobre los cuales se erige un sistema financiero global. Benoît Mandelbrot, entre otros, ha señalado que ante tal situación es deseable que el modelo alternativo permita elaborar construcciones más realistas del comportamiento del mercado a través de la refutación de esos supuestos y la adopción de la evidencia empírica de los datos y sucesos¹, debido a que:

- el cambio de precios no surge de un proceso aleatorio continuo,
- el tipo de distribución probabilística detrás del tamaño de las variaciones no coincide con la aleatoriedad “manejable” de lo gaussiano, por lo que debe existir algún otro tipo de distribución más fiel a lo que observamos (aunque no necesariamente más sencilla)

¹ *op. cit.* Mandelbrot (2009a).

- el general de los participantes no son iguales ni toman decisiones totalmente racionales, con lo que la información obtenida no sigue la Hipótesis de los Mercados Eficientes; un punto que pasa desapercibido a la hora de modelar es la anticipación de los participantes, este comportamiento irracional altera el desarrollo esperado del mercado; por ello, los modelos deben tomar en cuenta esta conducta que altera la evolución del mismo, y
- debe hacerse notar la dependencia histórica de las variables involucradas en sistemas tan complejos como son el financiero y el económico.

Estos puntos finales son las nociones primordiales que dan sustento a la construcción del modelo multifractal que es la herramienta propuesta a lo largo de este capítulo. Esto resulta de tomar en cuenta el estudio de un fenómeno físico muy peculiar: la turbulencia de fluidos en movimiento. Este tema aunque bastante conocido en la física, es un tópico con teorías aún en discusión; al pretender adaptar la formulación matemática del modelo que la describe hacia nuestra área de interés, da como resultado un modelo que aproxima el conocimiento del comportamiento de los mercados.

La turbulencia es parte de la dinámica de fluidos que se caracteriza porque el flujo no es simple, constante y monótono, sino que de vez en vez surgen fluctuaciones intermitentes en su movimiento que alteran el paso del fluido, el viento, por ejemplo, pasa de formar corrientes estables, de las que se dice que son de forma laminar² (en las que un avión planea sin sobresaltos) a tomar *repentinamente* desde ligeras variaciones como los remolinos y los cambios de dirección e intensidad hasta catastróficos tornados (los rebotes que hace el avión reflejan la aparición de

²Haciendo referencia a la formación de corrientes 'horizontales' que favorecen el desplazamiento através del fluido.

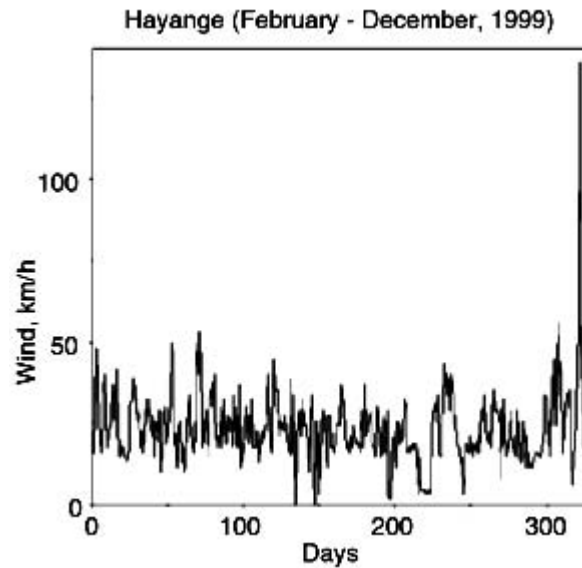


Figura 2.0.1: Un fluido turbulento. Cambios en la Velocidad diaria del viento de Febrero a Diciembre de 1999 en la estación Hayange, Francia. Nótese el agrupamiento de las fluctuaciones y la gran variación hacia el final del periodo.

estas anomalías), en ambos casos se retorna en algún punto a un estado de calma como en el principio.

Este fenómeno, como puede verse en la Figura 2.0.1³, muestra el cambio errático e impredecible de la evolución del flujo (aquí en relación con la velocidad del viento, la cual cambia constantemente en las fluctuaciones ya descritas), cabe rescatar que se alcanza a observar la aglomeración de los grandes cambios. El mercado, como se alcanza a apreciar en la Figura 2.0.2, tiene similitudes gráficas con el viento (muchas variaciones de diversos tamaños y la aglomeración de los grandes cambios) como debería ser al comparar dos sistemas de turbulencia.

Los mercados financieros -sugiere Mandelbrot- pueden tomar el modelo multifractal de la turbulencia como directriz y utilizarlo para representar su compor-

³ITchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Lovejoy, S., y Veysseire, J.M. (2007). Wind extremes and scales: Multifractal Insights and empirical evidence. En Prof. Dr. J. Peinke, Prof. Dr.-Ing. P. Schaumann, y Dr. S. Barth (Eds.), *Wind energy: proceedings of the Euromech Colloquium* (p.100). Berlín: Springer.

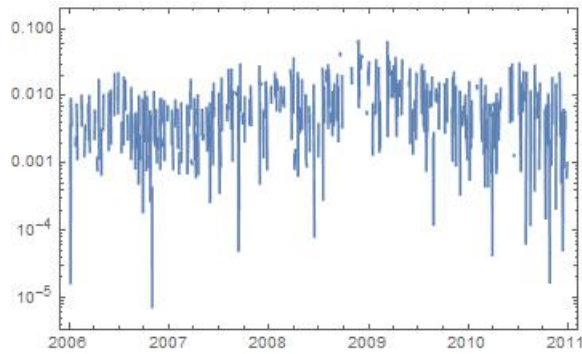


Figura 2.0.2: Retornos del S&P500 de 2006 a 2011

tamiento. Antes de poder exponer cómo funciona, es necesario explicar qué son los fractales y qué podemos aprender de sus propiedades, pues ellas son la clave para la formulación de las hipótesis del modelo propuesto.

2.1. Fractales

El término *Fractal*, acuñado por Mandelbrot en los años 70's, proviene del latín *fractus*, conjugación al participio pasado de *frangere* (romper), el cual hace referencia a un objeto de forma irregular para el que resulta complicado tratar sus propiedades matemáticas con la geometría euclideana, ya que ésta se desarrolla sobre “curvas lisas y figuras de forma perfecta”⁴. Tales objetos cumplen la premisa de que sus propiedades totales son reproducidas a disitintos niveles dentro del mismo objeto a distintas escalas -las partes son un eco del todo. Así, “las nubes no son esferas montadas una sobre de otra, ni las montañas conos perfectos que han sido erosionados por el tiempo, los árboles no son triángulos”⁵, para estos casos, la geometría fractal es la herramienta por exelencia para analizar estos fenómenos aparentemente caóticos.

⁴*op. cit.* Herlin p. 75

⁵Mandelbrot, Benoît, *La Geometría Fractal de la naturaleza*. España: Tusquets Editores, 3a edición: septiembre de 2009. En lo sucesivo, se referirá a esta obra como Mandelbrot (2009b).

La idea detrás del concepto matemático de estos objetos ya había sido estudiada con anterioridad al trabajo expositivo de Mandelbrot en su obra *Les objets fractales*, pero a él le debemos su adscripción a la geometría; antes tales curvas eran una consideradas una “aberración” para los matemáticos.

Uno de las principales cualidades de estos objetos es que permiten trabajar con curvas de características excepcionales que dificultan su análisis mediante las herramientas comunes del cálculo y la geometría: curvas continuas, sin derivada (no se puede trazar una tangente a ningún punto sin tocar otro), de longitud infinita y/o que encierran un área definida. Existen, por ejemplo, las conocidas *curvas de Peano* que llenan el plano, así como los conocidos *copos de Von Koch*, o el *polvo de Cantor*, que eran “monstruos” a la luz del análisis matemático, sin embargo, bajo el análisis fractal sus estructuras son fácilmente construibles a partir de 3 simples pasos:

1. Dar un *iniciador*, que puede ser un triángulo, un círculo, una línea, un intervalo, etc. que indicará el “rumbo general” a seguir.
2. En seguida dar un *generador*, el cual indica el patrón de cambio a seguir; en el caso de los fractales más simples suele ser un patrón geométrico.
3. Luego, proponer la *regla de recurrencia*, la cual determinará la frecuencia de aparición del generador a lo largo del iniciador, creando con esto el proceso de construcción del fractal.

Con esta información es posible generar figuras de intrincada estructura; al conocer los tres pasos anteriores, se puede describir el grado de su irregularidad, lo que hace más simple la labor de estudio y modelación de estos objetos.

2.1.1. Simple complejidad

Existe una diversa gama de fractales hoy en día, cada uno difiere en el *iniciador*, en el *generador* o en la *regla de recurrencia* que se utiliza para su elaboración. Sin importar la complejidad de la formulación ni lo accidentado de la forma final, la utilidad de esta herramienta se basa en un simple número que determina el grado de irregularidad del fractal en cuestión. Este número indica la Dimensión Fractal. Así como existen las dimensiones creadas por Euclides para la recta, el plano y el espacio tridimensional (dimensión 1, 2a y 3a dimensión respectivamente) y que sirven casi a todas las ramas de la ciencia, la dimensión fractal permite medir de otra manera los objetos irregulares asignándole un valor numérico al nivel de irregularidad que presenta mediante la asociación de un número fraccionario como valor dimensional. Es decir, si la recta es de dimensión 1 y el plano de dimensión 2, entonces (para la geometría fractal) cualquier “línea” que tenga un comportamiento errático (que no sea una recta) pero que nunca alcance a cubrir el plano, tendrá una dimensión fraccionaria entre 1 y 2. Análogamente, para un plano irregular que no cubra el espacio tridimensional en su totalidad se tendrá una dimensión fractal entre 2 y 3; mientras más cercana sea dicha fracción a la dimensión inferior (o superior), menos (o más) irregular es el objeto.

No hay una sola definición matemática para tal número, debido a que distintas deficiones sirven a diferentes propósitos de estudio. En el caso de los fractales más simples, la dimensión fractal (D) viene dada por la *dimensión de similaridad* u *homotecia* (como también es conocida):

$$D = d_s = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

donde:

r : es la razón a la que escala la unidad utilizada (hacia arriba o hacia abajo) es

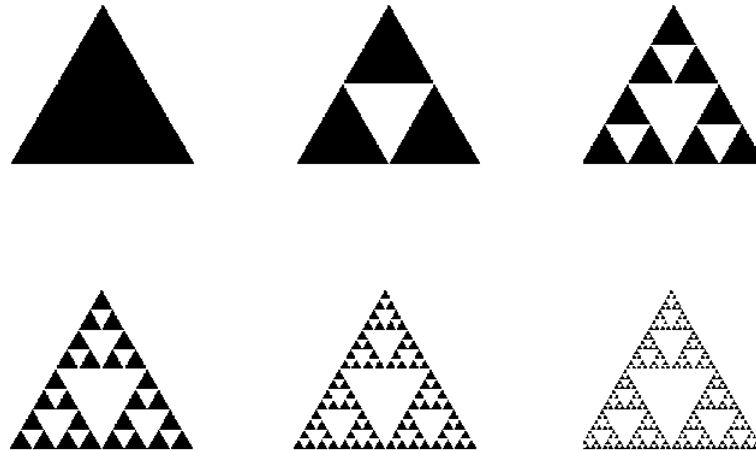


Figura 2.1.1: Triángulo de Sierpinski y su construcción fractal.

decir, la cantidad del *iniciador* que debe ocupar el *generador* en cada fase de la construcción;

N : es el número de unidades del *generador* que se necesitan para completar el objeto en el *iniciador*.

Es decir, si tenemos un iniciador de tamaño 1 en la dimensión euclidiana D (que es siempre un entero) y reducimos su tamaño en razón de $\frac{1}{l}$ en todas las direcciones, necesitaremos de $N = l^D$ objetos autosimilares al original para recubrirlo de nuevo. Al despejar esta ecuación para D obtenemos la dimensión antes descrita.

Por ejemplo, para el *Triángulo de Sierpinski* (ver Figura 2.1.1) se tiene que el *iniciador* es un triángulo cuyos lados tienen longitud 1, el *generador* parte cada lado en 2 (reducimos el triángulo original a la mitad tanto el ancho como la altura) y agrega 3 reproducciones similares⁶ del triángulo *iniciador* para completar el área original; este proceso se sigue hasta el infinito sobre cada uno de los triángulos

⁶Haciendo uso del concepto geométrico de *similitud* (que altera el tamaño y no la forma).

que aparecen cada vez. Aquí $r = \frac{1}{2}$ y $N = 3$, por lo que su dimensión fractal es

$$D = d_s = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.5896$$

Como $1 < D < 2$ y es un número irracional, sabremos que el triángulo de Sierpinski habitará un espacio “hueco” casi la mitad de las veces, pues su construcción generará espacios en sí mismo infinitamente.

Una generalización de ésta, la aplicación más común, es la *dimensión cuenta-cajas*, la cual como su nombre indica, encierra el fractal en cajas (o cubos e hipercubos) cada vez más pequeñas y otorgar el valor numérico correspondiente a la cantidad necesaria para cubrirlo:

$$D = d_c = \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{\log(N_{r_n})}{\log\left(\frac{1}{r_n}\right)} \quad (2.1.1)$$

r_n busca que en cada instante n el radio r de la estructura autosimilar sea cada vez más cercano a 0. Para el ejemplo anterior

$$D = d_c = \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{\log(N_{r_n})}{\log\left(\frac{1}{r_n}\right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(3^k)}{\log(2^k)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.5896$$

En casos más complicados, otras dimensiones resultan útiles para medir esta irregularidad dependiendo del campo en que sea utilizada. Una de las más importantes es la *dimensión de Hausdorff-Besicovitch* (D_H), cuya demostración no es cuestión de discusión en este trabajo⁷. Esta definición permite otorgarle una definición matemática más pura a lo que es un fractal mediante la relación:

$$d_T \leq d_s \leq D \leq d_c \leq D_H \leq d_E$$

con

d_T : la dimensión Topológica usual (un entero).⁸

⁷Ver APÉNDICE: Dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

⁸Ver APÉNDICE: Espacio Topológico y Dimensión Topológica.

d_s : dimensión de similitud u homotecia

d_c : dimensión de cajas

d_E : dimensión euclideana (el espacio que contiene al fractal, también un entero)

Esta habilidad para organizar lo aparentemente errático permitió establecer una solución práctica al problema de medir y mapear el territorio de un país, las costas, etc. en las que siempre existe un sesgo en la información pues dependen de la precisión del instrumento de medición ya que al aumentarla, las mediciones siempre diferían en los resultados finales pues los espacios aparecen a medida que se refina la escala (como con Sierpinski). ¿Cómo acercar una figura rígida como el triángulo de Sierpinski a las formas de la naturaleza? Al asociar la *regla de recurrencia* con un proceso aleatorio, tendremos que los objetos de dimensión fractal similares tendrán un interesante comportamiento como veremos a continuación.

2.1.2. Fractales aleatorios

¿Qué ocurre si se añade un poco de incertidumbre a la construcción de un fractal? Según Mandelbrot, la idea de trabajar con fractales básicos adquiere verdadero valor y significancia al abordar el tema de los fractales aleatorios al mismo tiempo que los primeros mejoran la comprensión del azar⁹; la diferencia radica en la ponderación que se le da al azar en la evolución de sistemas naturales; la física por ejemplo, trata este tema con sumo cuidado a nivel microscópico pero es totalmente descuidado en la escala macroscópica. Con fractales, esto no ocurre pues la importancia de lo aleatorio importa para cada uno de los niveles que los comprenden.

⁹ *op. cit.* Mandelbrot (2009b) p. 287.

¿Cómo aleatorizar un fractal? Antes se describió que para hacer un fractal, se requiere de tres factores: un iniciador (el espacio donde se desarrollará el fractal), un generador (la forma que será iterada) y la regla de recurrencia (que define la aparición del generador en el iniciador); para crear fractales aleatorios basta con hacer que la regla de recurrencia o el generador se reproduzcan mediante un proceso aleatorio:

- Para la regla de recurrencia, únicamente se pretende que el generador aparezca al azar, y no determinísticamente, a través del iniciador.
- El generador aleatorizado se crea al modificar al azar las propiedades de éste; longitud, área, forma de las líneas, ángulos, etc.

Cambiar estas partes de un fractal, generará una figura con **propiedades estadísticamente medibles** pero que estética y analíticamente es más compleja que un fractal determinista.

Es pertinente mencionar que ocurre un fenómeno dentro de este tipo de construcciones pues existen aquellos fractales cuya estructura aleatoria permite que existan puntos dobles (que el recorrido “dé vueltas” sobre sí mismo), caso que Mandelbrot llama azar *sin ligaduras*; por otro lado habrá ocasiones en las que los estadíos futuros de la construcción estén condicionados a los anteriores y entonces el azar estará sometido a *fuertes autoligaduras por la geometría del espacio*.¹⁰

Existe un experimento conocido como “El juego del Caos”, en el que se dibuja un triángulo y fuera de él un punto P. Cada vértice del triángulo se asocia con un par de números del 1 al 6 i.e. al vértice A los números 1 y 2, al B los números 3 y 4, al C el 5 y el 6. Se lanza un dado y, dependiendo del resultado, se coloca un punto P' a la mitad de la recta que uniría al punto P con el vértice correspondiente

¹⁰ *op. cit.* Mandelbrot (2009b) p. 291.

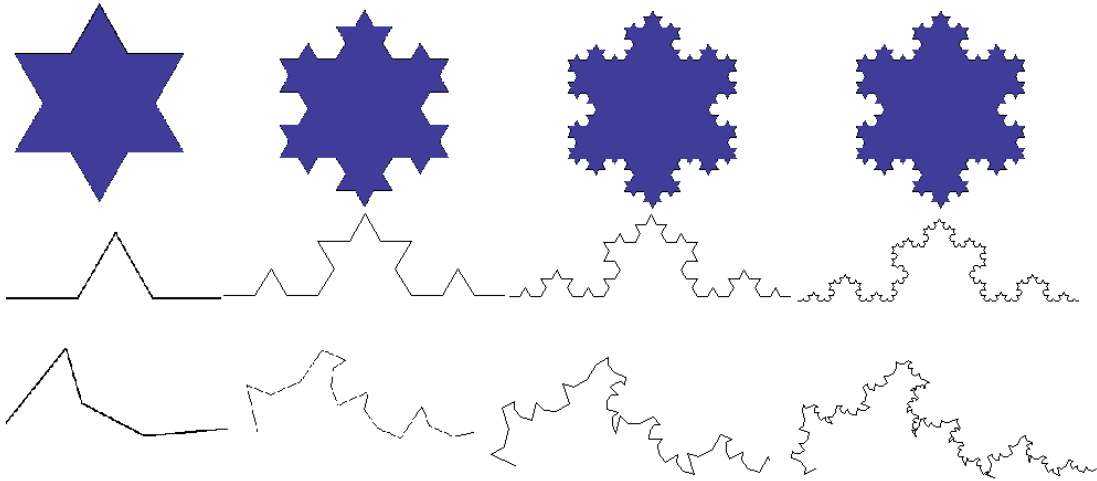


Figura 2.1.2: Fractal de Von Koch aleatorizado con el lanzamiento de una moneda

al resultado del dado. Después este P' pasaría a ser el nuevo punto inicial y se repite el proceso *ad infinitum*. Luego de las iteraciones se obtiene el triángulo de Sierpinsky, mostrando con ello cómo un proceso aparentemente caótico genera una estructura definida, ordenada (limitada únicamente por el espacio).

Profundicemos pues en los casos en que durante la construcción de un fractal la *regla de recurrencia* puede ser transformada para generar un proceso aleatorio. Mandelbrot asocia, por ejemplo (ver Figura 2.1.2¹¹), la curva de von Koch (también conocido como *copo de nieve K* o *isla triádica de von Koch*), de dimensión $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26$, con el lanzamiento de una moneda, en el que cada lanzamiento determinará si el siguiente paso, en vez de tomar la línea cerrada de un triángulo, será en sentido directo (R) o inverso (I). Este proceso genera una curva cuya *rugosidad* es bastante cercana a la de la costa de Gran Bretaña (de dimensión fractal estimada en 1.24). Aquí puede verse el problema de las autoligaduras pues al querer modelar las costas, éstas no deben intersecarse, generando así un problema

¹¹Elaboración con el código disponible en: "*Create Alternative Koch Snowflakes*" from the Wolfram Demonstrations Project <http://demonstrations.wolfram.com/CreateAlternativeKochSnowflakes/>

Contribución de: Tammo Jan Dijkema

aún sin resolver.

Este sistema de azar fractal resulta importante en diversas áreas de la ciencia y la industria, desde la distribución no uniforme de las galaxias en el universo, la interrupción de señales electromagnéticas en los sistemas informáticos, pasando por la creación de gráficos por computadora, hasta la distribución de árboles en un bosque o de las vetas de oro, la simulación de imperfecciones en un metal, el clima y las nubes, la utilización del lenguaje, y, como veremos a continuación, la turbulencia y los mercados financieros. Como podemos ver, los fractales “son el lenguaje de la naturaleza”, pues constituyen complejos sistemas aparentemente sin norma alguna pero con una presencia definida.

2.1.2.1. Fractales brownianos

Del universo de fractales y en particular los fractales aleatorios, la teoría de la probabilidad permite expandir la capacidad representativa de estos objetos para acoplarlos a algún modelo funcional. Si modificamos la regla de recurrencia para que los cambios o la frecuencia de ellos en el generador se distribuyan de acuerdo a una distribución normal, tendremos un fractal de orden estadísticamente gaussiano con lo cual se puede generar una caminata aleatoria gaussiana. Es decir, del MBr podemos retomar los principios que lo definen (independencia de los cambios, continuidad, el tamaño de los cambios es dirigido por la curva normal) para construir un fractal que sea compatible con la descripción de lo que *estadísticamente* es el movimiento browniano.

Es decir, si el MBr pretende generar muchos pequeños cambios independientes e idénticamente distribuidos, (recordando el trazo del tamaño de los cambios y una simulación de un movimiento browniano está la Figura 2.1.3) podemos tomar un iniciador y un generador apropiados, los cuales se harán variar de acuerdo a

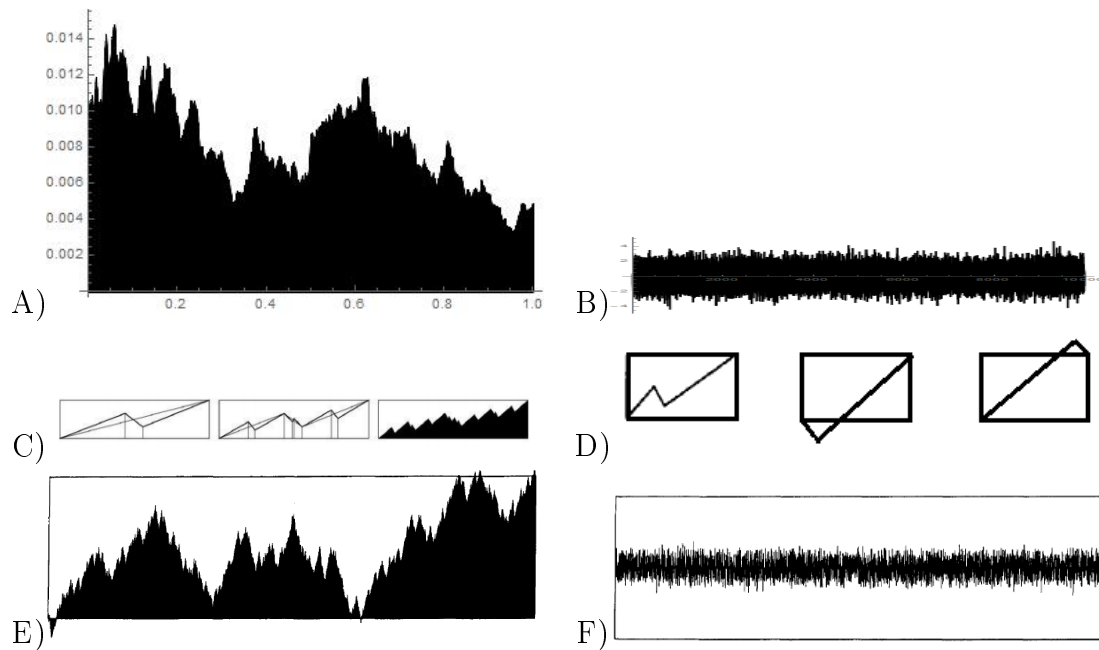


Figura 2.1.3: Gráfico de A) un proceso browniano y B) la magnitud de los cambios de éste.
 C) El generador de una tendencia (al alza en este ejemplo) tiene la forma Arriba-Abajo-Arriba, la regla de recurrencia se aplica a cada semirecta de éste, cuando la pendiente es negativa se reemplaza por Abajo-Arriba-Abajo.
 D) Modificación del generador para agregar realismo: El resultado final se modifica al cambiar los “puntos de quiebre” del generador. Aquí, se divide el generador obteniendo 3 “subgeneradores”: el original (Arriba-Abajo-Arriba), a partir del primer punto de quiebre del original se obtiene uno tipo Abajo-Arriba-Arriba y, finalmente antes del primer punto de quiebre tenemos otro tipo Arriba-Arriba-Abajo.
 E) Los nuevos generadores son aleatorizados a lo largo del proceso, se inicia con el original y en cada nueva iteración se lanza una moneda para ver cual de los otros será aplicado.
 F) El proceso obtenido conserva la proporción de los cambios del movimiento browniano.
 Las imágenes C), D), E) y F) corresponden a Mandelbrot, Benoît. *Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk*. New York: Springer-Verlag, 1997.

la *regla de recurrencia* elaborada con la instrucción de aleatorizar el generador de acuerdo con la distribución asociada a este movimiento y generar con ello un gráfico totalmente análogo al que se vería utilizando la teoría matemática convencional de este fenómeno. Por ejemplo, se han modelado estructuras del relieve terrestre como una *función browniana* de latitud y de longitud. En esta figura vemos un *fractal browniano*, la base de esta simulación es el *iniciador* que en este caso podría ser una “tendencia al alza” de una acción, el *generador* sería la línea zigzagueante a lo largo del iniciador y la *regla de recurrencia* sería tomar cada una de las 3 rectas que forman el generador y aplicar los quiebres de éste indefinidamente. Para acercarlo a un gráfico real de precios, se toman “piezas” o segmentos del resultado final y se revuelven dentro del espacio original. Como se alcanza a apreciar, el grafo (sin índices ni escalas) se asemeja bastante a lo que veríamos en un gráfico accionario.

Si $B(t)$ es la función que describe la evolución de la variable como función de t , dependiendo de la dimensión tendremos una curva plana; si $B(t)$ está en un punto E -dimensional, la gráfica es una curva en un espacio $(E + 1)$ -dimensional (donde la coordenada t se añade a las E coordenadas de B). Sin embargo, lo que importa es la *trayectoria* trazada en el espacio E -dimensional. Otro ejemplo de esta unión entre fractales y el movimiento browniano se puede observar en la Figura 2.1.4. Detrás de tales fractales, las propiedades importantes que han sido modificadas de la construcción de un fractal no-aleatorio son: 1) la alteración del punto de referencia del $(k + 1)$ -ésimo paso de la construcción a través del desplazamiento transversal del punto en el paso k -ésimo, y 2) la longitud del desplazamiento de la trayectoria seguirá una distribución Normal.

Este tipo de construcciones, dice Mandelbrot¹², tienen ciertos resultados que

¹²Véase Mandelbrot (2009b) pp. 329-346 para mayor desarrollo de la teoría.

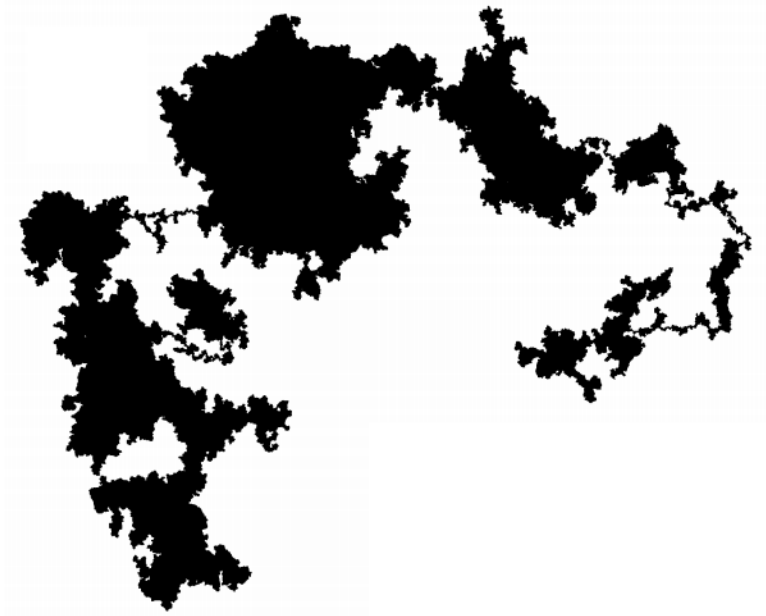


Figura 2.1.4: Envolturas/islas brownianas; movimiento browniano “autoevitante”.

son interesantes, a saber:

- La trayectoria browniana tiene incrementos estacionarios. Dado un intervalo correspondiente a un lapso de tiempo t , no es posible “adivinar” cuál es la posición del trazo en el eje temporal pues todas las posiciones de las posibles en el intervalo tienen la misma distribución.
- La trayectoria browniana es autosemejante estadísticamente. No requiere que todas las partes sean exactamente iguales al todo, basta con que **las partes y el todo**, al reducirlo por semejanza **tengan distribuciones idénticas**.
- El kernel (o conjunto donde la función toma el valor constante 0) browniano es autosemejante. Además tiene una dimensión fractal $D = \frac{1}{2}$, lo que implica una gran dispersión en el plano de este conjunto.
- La longitud del kernel satisface $\Pr(U > u) = u^{-D}$, con $D = \frac{1}{2}$.

- La función browniana es autoafín. Es decir, se puede descomponer la curva existente entre t_1 y t_2 en M porciones simétricas correspondientes a cada t , al contraer la(s) coordenada(s) espacial(es) en una proporción r , y la coordenada temporal en una proporción distinta $r^2 = \frac{1}{M}$, lo que implicaría que la dimensión de semejanza antes mencionada (d_s) no está definida. La dimensión Cuenta Cajas o la de Hausdorff-Besicovitch son ideales para caracterizar este movimiento, obteniendo $D = 2$.

Estas propiedades, junto con algunas otras, vuelven académicamente atractivos a los fractales brownianos así contruidos; sin embargo, son de poca utilidad por las restricciones asociadas a las traslaciones y semejanzas que pueden tener. Necesitamos entonces recurrir a una generalización del concepto de MBr , introducida por Kolmogorov en 1940¹³ y cuyas propiedades fueron profundizadas por Mandelbrot y Van Ness en 1968¹⁴. Estas propiedades permitirán formular reglas de construcción que tiendan a explicar la naturaleza del comportamiento del mercado, entre ellas están la autosemejanza y la no-estacionariedad.

2.1.2.2. Fractales y turbulencia

El proceso que se explicará a continuación fue ideado por un científico inglés, Harold Edwin Hurst, quien estudió las fluctuaciones del Nilo por más de 50 años, de cuya investigación se rescata la manera en que formuló, a pesar de no ser un matemático puro de laboratorio, la dependencia temporal de variables aleatorias a través de una excepcionalmente documentada cantidad de datos.

Hurst era el encargado de conocer a fondo las fluctuaciones del Nilo para hacer

¹³Kolmogorov, A. N. *Wienshe Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen raum*. Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie de Sciences de l'URSS, 1940.

¹⁴Mandelbrot, B. and Van Ness, J. W., *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review, 1968. pp 422-437.

frente a los periodos de sequías aprovechando para ello, los periodos de abundancia pluvial. Para lograr esto debía conocer, entre otras cosas, el tamaño máximo y el mínimo de precipitaciones para obtener un diferencial que serviría para construir la presa que serviría de regulador. La conclusión a la que llegó, se puede enunciar de la siguiente manera:

Sea $X(t)$ la descarga acumulada de un río entre el inicio del año 0 y al final del año t . Tomemos la descarga media muestral $\mu(d)$ entre los años 0 y d . Utilicemos $\mu(d)$ para ajustar $X(t)$ cuando $0 < t < d$ y llamémosla $X^*(t)$. Se define:

$$R(d) = \text{máx} \{X^*(t)\} - \text{mín} \{X^*(t)\}$$

De esta construcción se puede deducir que $R(d)$ es la capacidad que debe tener la presa para asegurar un adecuado funcionamiento los d años que se plantean. Lo ideal sería que este nivel siempre se mantuviera pero aunque no sucede así, $R(d)$ permite desarrollar otro método para construir presas (que no veremos en esta obra); sin embargo, Hurst vio en $R(d)$ un importante medidor del comportamiento de las fluctuaciones. Por criterios de conveniencia, dividió este número entre $S(d)$ que es un factor de escala y estudió la dependencia en d de $\frac{R(d)}{S(d)}$.

Al suponer que un proceso gaussiano rige el tamaño de las descargas (es decir, que el proceso de cambios sigue una distribución Normal, también llamado “ruido blanco gaussiano”), entonces S se vuelve irrelevante y se demuestra que $X^*(t)$ es una función browniana, como la $B(t)$ antes descrita. Entonces $R(d)$ es proporcional a la raíz de la media cuadrática de $X^*(t)$ siendo esta $\propto \sqrt{d}$. Luego $\frac{R}{S} \propto d^{\frac{1}{2}}$.¹⁵

Hurst, basándose en una amplia evidencia empírica, llegó a la conclusión que $\frac{R}{S} \propto d^H$, siendo H casi siempre mayor a $\frac{1}{2}$ (el Nilo, concluyó, tiene un $H = 0.9$;

¹⁵Para mayor detalle, véase Mandelbrot (2009b) pp 351-362.

el Loira en Francia y el Colorado, que cruza Estados Unidos y México, tienen $0.5 < H < 0.9$). Mandelbrot llama a un ruido o fluctuación cualquiera $X(t)$ “*ruido de Hurst*” si tal proceso sigue este $\frac{R}{S} \propto d^H$, además comprueba que $0 \leq H \leq 1$. Esto implica de fondo que hay una invarianza estadística al cambio de escala, de aquí el término *ruido escalante*.¹⁶

Se demuestra también que basta con que la varianza estadística del proceso gaussiano acumulativo $X^*(t)$ sea igual a $|\Delta t|^{2H}$ y la esperanza matemática nula para formar un proceso browniano, notando claramente que $2H$ es fraccionario. De esta manera $B_H(t)$ se conoce como Movimiento Browniano Fraccionario (*mbf*). Además se puede hacer la conjetura de que una curva fractal cuya dimensión sea $D = \frac{1}{H}$ y sea parametrizada con el tiempo (la trayectoria $B_H(t)$) es la única con incrementos gaussianos, estacionarios bajo cualquier traslación (lo que implica una diferencia importante a la de un fractal simple) y escalantes para todo $r > 0$.¹⁷

Si $H = \frac{1}{2} \Rightarrow D = 2$, tenemos entonces el *MBr* original con incrementos independientes (que *no es persistente*¹⁸). Para $0 < H < \frac{1}{2}$, el *mbf* es altamente errático pues genera cambios significativos con mayor frecuencia que el *mbf* descrito al inicio del párrafo. Es de nuestro interés el caso en el que $\frac{1}{2} < H < 1$, pues $D = \frac{1}{H}$ dejándola entre 1 y 2. Cuando el *mbf* tiene esta dimensión presenta dependencia al desarrollo histórico de la variable en cuestión, esto es, el pasado y el presente influyen en la evolución del movimiento; *es persistente* pues permite

¹⁶Se le llama ruido debido a que toda fluctuación natural puede ser procesada para ser audible. Existen en la naturaleza ruidos que al ser acelerados y luego ralentizados, se esperaría escuchar grandes diferencias (un instrumento musical deja de sonar como debe al pasar por este proceso), sin embargo existen aquellos sonidos que tienen una persistencia y basta sólo con ajustar el volumen para escuchar el mismo sonido a diferentes velocidades de frecuencia de onda. El ruido blanco gaussiano es parte de este grupo, siempre reproduce el mismo sonido, pero existen otro tipo de ruidos escalantes que pueden ser utilizados para verificar este punto.

¹⁷Esto implica cierta afinidad al movimiento browniano ordinario, más adelante se introduce al Movimiento L-estable, que permite una aproximación no gaussiana de la persistencia.

¹⁸Un fenómeno persistente refiere a que hay rachas en las que alguna tendencia prevalezca, que *persista* durante cierta cantidad de tiempo antes de cambiar.

el agrupamiento de alguna tendencia en un intervalo de tiempo.

Este caso de $H > \frac{1}{2}$ desarrolla una curiosa propiedad, la persistencia de los incrementos es **infinita** (para Hurst esto implica que la persistencia de las descargas fluviales se extienden a periodos bastante extensos de tiempo, llegando a ser de siglos e incluso milenios) y aunque parece generar ciertos ciclos al verlo en una gráfica de cambios, dichos ciclos no son extrapolables a mayores duraciones de las que tienen definidas y la interpolación es no-lineal al depender de cada nuevo instante de uno anterior (es importante notar que esto implica la importancia de las condiciones iniciales que se planteen en el modelo)¹⁹.

Como se viene afirmando, el estudio fractal radica en encontrar la regularidad en lo irregular y el objeto de estudio puede ser tanto una figura geométrica como un patrón estadístico. Los fractales más simples que escalan en las mismas proporciones en todas direcciones son llamados *autosimilares*, en ellos se puede observar el mismo patrón en muchas escalas distintas. Aquellos fractales que escalan en mayor (o menor) proporción en una dirección más que en la otra son llamados *autoafines* (la figura 2.1.3 del movimiento browniano ordinario modelado como fractal es un ejemplo de ello). En ambos casos se habla de que estamos frente a un *monofractal*. Ahora bien, si el objeto estudiado escala de maneras distintas en diferentes porciones o puntos (en un árbol por ejemplo, las nervaduras de las hojas asemejan a la distribución de hojas en las ramas, y de ramas en el árbol) entonces tal objeto es llamado *multifractal*. H se vuelve un conjunto de medidas sobre un mismo objeto. Su formulación matemática se vuelve algo compleja pero

¹⁹Hay que hacer mención que, de las implicaciones de las cifras de Hurst para el caso que estudiaba, sigue en discusión la gran cantidad de variables que yacen en la explicación completa del fenómeno sobretodo por que la persistencia infinita requiere de una gran cantidad de componentes hidrometeorológicos, sin embargo, para los fines prácticos que buscaban, $D \geq \frac{3}{2}$ permite un desarrollo bastante fiel en el corto y el largo plazo.

tienen grandes e importantes implicaciones para nuestro estudio. Como veremos a continuación, los mercados financieros son de naturaleza multifractal.

2.2. El modelo Multifractal del mercado

Si bien las matemáticas aplicadas a la generación de un proceso multifractal como lo antes mencionado no son triviales en lo absoluto, su construcción permite establecer otro enfoque a la observación del fenómeno de la volatilidad en los precios de los mercados. La naturaleza de los supuestos elementales sobre los que se construye el *mbf*, dan lugar a una explicación más coherente de los supuestos iniciales del modelo con la evidencia observada. Es decir, tenemos una formulación alternativa del problema de la que finalmente se obtiene un modelo que refleja de mejor manera el comportamiento del mercado.

A continuación se describe de qué manera son compatibles el desarrollo de un fractal aleatorio con las propiedades intrínsecas de los mercados financieros.

2.2.1. Los tres componentes de la turbulencia financiera

El modelo multifractal que a continuación será descrito, está formulado bajo supuestos muy diferentes a los establecidos por la teoría de Bachelier. Es de vital importancia para este documento describir la asociación de los conceptos matemáticos ligados a los supuestos que serán la base del modelo. En breve,

- se trata de las llamadas **Distribuciones Estables**, que son la generalización de la distribución normal que permite trabajar con varianzas infinitas;
- una consecuencia de utilizar este tipo de distribuciones es la presencia de **Colas pesadas** que permitirán un escalamiento potencial de la intensidad

de los fenómenos posibles y,

- se necesita de la introducción de una **Memoria de largo plazo** en la evolución del fenómeno, la importancia del pasado en el presente y de éste en el futuro es incluida en este concepto.

El primero, parte de un caso estudiado en diversas ramas de la Estadística, esto es la posibilidad de encontrarse ante un fenómeno que siga una distribución “de colas pesadas”; llamado así por la clara diferencia entre tales distribuciones con la Normal, principalmente en los extremos -las colas- de la distribución (que es donde los sucesos altamente aleatorios suceden). Recordemos que la curva Normal rápidamente decrece las posibilidades de que ocurra un suceso más allá de tres desviaciones estándar, por lo que una distribución de “colas pesadas” permite una mayor frecuencia de sucesos bastante alejados de las poblaciones medias.

Evidentemente utilizar tales distribuciones permite la aparición de sucesos como el Lunes Negro (el 19 de octubre de 1987), sin embargo, no pueden ser utilizadas indiscriminadamente en un modelo, y en el nuestro habrá que tener precaución, como ya se mencionó antes, hacia el tipo de distribución que se acoplará a los datos y viceversa. En el caso nuestro, las distribuciones utilizadas para generar este modelo son las llamadas L-estables, cuya explicación se expone más adelante.²⁰

Luego, hay que considerar que en tales distribuciones surge un efecto peculiar al que se le conoce como *escalamiento*. La distribución Normal hace que los eventos sean “igualitarios”, pues cada suceso nuevo se va agregando al total y este suceso no rige la evolución del conjunto total; en contraparte, la distribución de Cauchy

²⁰Llamadas así por ser el matemático francés Paul Lévy el que las describió. El término estable refiere a un objeto al que se le pueden aplicar diversas transformaciones, como rotarlo, encogerlo o añadirlo a otro objeto y el primero mantiene sus propiedades básicas. Por ejemplo, la curva Normal es L-estable para la suma (añadir datos puede aumentar la media o la desviación estándar pero finalmente sigue siendo una curva Normal).

(también una distribución L-estable) genera una gran disparidad en los sucesos, ya que éstos pueden transformar completamente el resultado final. Esta distribución permite observar la existencia tanto de puntos de ínfima trascendencia como de gran influencia en un mismo fenómeno. Esta disparidad permite analizar los sucesos de diferentes maneras al tratar con el azar en tipificaciones de su misma naturaleza, el azar medio, neutro y poco exitante de la curva Normal y, el opuesto, azar “salvaje” y atemorizante de una distribución escalante y un término medio entre ambas formas de azar. El escalamiento presente en los fractales toma así un importante significado en este punto pues se sugiere un escalamiento estadístico que será detallado más adelante²¹.

Por último y la más importante, la memoria de largo plazo en los fenómenos aleatorios. H. E. Hurst, con su estudio de las fluctuaciones del Nilo, dejó plasmada una idea brillante: no sólo importa el tamaño de las inundaciones sino la precisa secuencia en que éstas ocurren lo que modificará su comportamiento futuro.

Se analiza entonces, en las líneas siguientes, los puntos fundadores del modelo multifractal.

2.2.1.1. Distribuciones L-estables

Paul Lévy, matemático francés, inició el desarrollo de la teoría sobre sumas de variables aleatorias idénticamente distribuidas pero con la capacidad de permitir la presencia de colas pesadas y de sesgo en las distribuciones. Esta familia de distribuciones tienen la habilidad de ser “variaciones” una de la otra, las cuales son determinadas por 4 parámetros que a su vez, generan las propiedades de la distribución.

La estabilidad se define de la siguiente manera:

²¹ *op. cit.* Mandelbrot (2009a) p. 161.

Si X_1 y X_2 son copias de una variable aleatoria X , X se dice que es *estable* si $\forall a, b > 0$ constantes; la variable aleatoria $aX_1 + bX_2$ tiene la misma distribución que $cX + d$ para algún $c > 0$ y d . Si $d = 0$ se dice que es *estrictamente estable*.

Recordemos que cualquier distribución de probabilidad está determinada por su *función característica*, usualmente denotada como $\varphi(t)$, por la siguiente ecuación:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \exp(-ixt) dt$$

Con la excepción de la Normal, la distribución de Cauchy y la distribución de Lévy, en las demás distribuciones pertenecientes a esta familia no puede darse una ecuación cerrada de su función de densidad, pero todas ellas están descritas por la función característica.

$$\varphi(t) = \exp\left\{i\delta t - \gamma|t|^\alpha \left[1 + i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

o equivalentemente

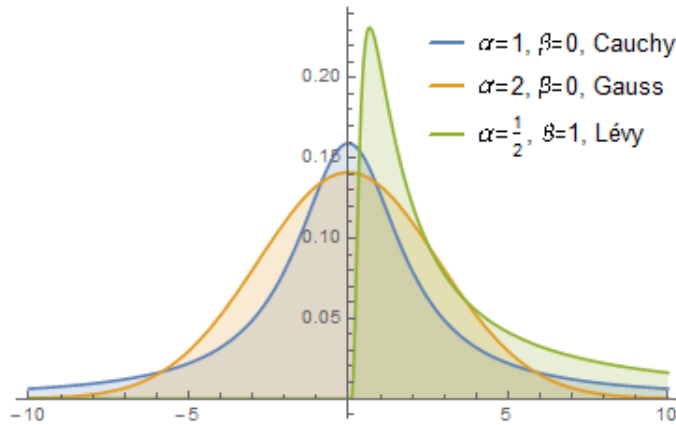
$$\log(\varphi(t)) = i\delta t - \gamma|t|^\alpha \left[1 + i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]$$

entonces α , β , γ , y δ definen a la familia de distribuciones $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ que caracterizan a la variable aleatoria Z , i. e. $Z \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Grosso modo, cada uno de los parámetros anteriores modifica la distribución final de acuerdo a la manera en que son definidos:

$\alpha \in (0, 2]$: Llamado *exponente característico* o *de singularidad*, define el “peso” de las colas en la distribución.

$\beta \in [-1, 1]$: Es el grado de simetría de la distribución, el sesgo de la misma; si éste es nulo, la distribución es simétrica.

$\gamma > 0$: Determina la magnitud de las probabilidades totales, la *escala* de ellas. Es vinculada a la varianza.



c	$P(X > c)$		
	Gauss	Cauchy	Lévy
0	0.5000	0.5000	1.0000
2	0.1587	0.2500	0.6827
4	0.0228	0.1476	0.5205
6	0.001347	0.1024	0.4363
8	0.00003167	0.0780	0.3829
10	0.0000002866	0.0628	0.3453

Figura 2.2.1: Distribuciones L-estables, su caracterización paramétrica. La tabla muestra las probabilidades de tener eventos X mayores a un valor fijo c ; se alcanza a distinguir el efecto del “tamaño” en las colas de las distribuciones Cauchy y Lévy, el desvanecimiento de las probabilidades de eventos extremos se presenta a un ritmo notablemente más lento que con la curva gaussiana.

$\delta \in \mathbb{R}$: Indica la *posición* (localización) de la distribución, funciona a modo de media.

α y β son los más importantes ya que γ y δ pueden ser eliminados con la traslación y transformación de escala adecuada. Cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 0$, se obtiene la distribución normal estándar; la general viene dada por $S\left(2, \beta, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \mu\right)$. La distribución de Cauchy con sus grandes colas, de *escala* γ y *localización* δ , se obtiene de $S(1, 0, \gamma, \delta)$.

Una importante distribución dentro de este conjunto es la llamada Distribución de Lévy ($\alpha = 1/2, \beta = 1$), la cual está completamente sesgada a la derecha, es decir, su dominio lo comprenden los reales positivos \mathbb{R}_+ (en general para $\alpha < 1$,

las distribuciones están completamente sesgadas a la derecha si $\beta = 1$, o izquierda si $\beta = -1$). Ésta presenta una cola de mayor peso que la distribución Cauchy y sirve en general para caracterizar fenómenos en los que la variabilidad es altamente inestable. Esta familia de distribuciones permitieron a Mandelbrot, definir un proceso estocástico que no se comportara de acuerdo a un cuadro gaussiano: el Vuelo de Lévy (ver figura final del Capítulo 1 y el APÉNDICE 3.3). En su creación difiere del modelo browniano en la variedad de las trayectorias presentes, es decir, a un cúmulo de puntos cercanos alcanzados por trayectorias pequeñas (poca variación) les sigue, o conecta con otro cúmulo, una trayectoria más larga (una gran variación con alguna tendencia en la dirección) o una serie de trayectorias de longitud mayor y dirección persistente. Aquí, el parámetro α indicará el tamaño de los cambios: a menor valor de α , tendremos un vuelo con trayectorias más largas y cambios más bruscos, lo opuesto para $\alpha \rightarrow 2$. En la naturaleza, algunos autores -como Gabriel Ramos-Fernández²² y David Sims²³- han demostrado que el movimiento realizado por disitintas especies de animales para buscar alimento sigue un Vuelo de Lévy.

Es vital remarcar que las distribuciones L-estables tienen una importante característica en su formulación, nótese que al no restringir la “varianza” superiormente, ésta puede ser infinita. Esta característica permite generalizar el TCL: la diferencia radica en que, el original, requiere de varianza finita para que la sucesión de variables aleatorias X_i con $i \in \mathbb{N}$, i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) cumpla que el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n [X_i - E(X)]}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot n}}$ converge en distribución a una Normal Estándar (de media 0 y varianza 1); al no asegurar el “tamaño” de la

²²Ramos-Fernandez, Gabriel. Patterns of association, feeding competition and vocal communication in spider monkeys, *Ateles geoffroyi*. January 1, 2001. Disertación disponible por ProQuest. Papel AAI3003685. Accesible vía: <http://repository.upenn.edu/dissertations/AAI3003685>

²³Sims, David, et al. Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators. *Letters, Nature* 465. June, 2010.

varianza, las distribuciones L-estables requerirían de encontrar una secuencia de factores a_n y b_n tales que el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n [X_i - a_n]}{b_n}$ converja en distribución hacia una variable aleatoria no-degenerada²⁴ Y . Entonces esta Y , tendrá necesariamente que existir dentro de la familia de distribuciones $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, lo cual es particularmente útil cuando, como hemos visto, la variación de los precios difícilmente es reflejada por la varianza constante de una distribución gaussiana.

2.2.1.2. Leyes de potencias

El trabajo de Pareto como economista dejó como legado la famosa regla del 80/20 (o del 50/1)²⁵ o de Pareto en la que se postula que el 80 % de la riqueza está en manos del 20 % de la población, como también que el 80 % de la producción la realizan el 20 % de la población productiva, o que el 80 % del valor del mercado está en el 20 % de las empresas que lo conforman, así como que el 80 % de las ventas provengan del 20 % de los clientes, etc. Esta regla establece que el 80 % de los efectos provienen del 20 % de las causas.

Detrás de este concepto de la inequidad de la relación causa-consecuencia se aloja la idea de las Leyes Potenciales o Leyes de Potencias, las cuales permiten describir matemáticamente la *invarianza de escala*²⁶ de un fenómeno que genera desequilibrios “predecibles” (como en un fractal). Por ejemplo para el caso del triángulo de Sierpinski, el escalamiento se da a razón de $\frac{1}{2}$ si se reduce el triángulo original (o se duplica si se quiere ver el desarrollo del fractal en el otro sentido),

²⁴Una distribución degenerada ocurre cuando la variable aleatoria X toma el valor $k \in \mathbb{R}$ con probabilidad 1 es decir, que X tome un valor constante es un evento seguro: $\Pr(X = k) = 1$. Se dice entonces que X es degenerada en k .

²⁵Al aplicar sucesivamente la misma ley sobre sí misma se llega a esta relación, es decir si tenemos el 80 % de algo y el 20 % que lo produce o lo posee, entonces de ese 80 y 20 %, de nuevo el 80/20 es aplicado hasta dar con que 50/1 es equivalente.

²⁶La posibilidad de encontrar la misma forma o comportamiento a distintas escalas.

siendo este el exponente p de la ecuación:

$$y = ax^p$$

donde y depende de x , a es una constante de proporcionalidad y p es un *exponente de escala*. Para efectos prácticos, puede verse como:

$$\log(y) = p \cdot \log(x) + \log(a)$$

La practicidad mencionada se debe a que si se grafica tal ecuación en un plano cuyos ejes están divididos en escala logarítmica (1, 10, 100, 1000, 10000, etc.) el resultado obtenido es una recta. Así, la pendiente de la recta determinará la potencia en cuestión ²⁷. En el plano real, forma una curva vertiginosamente decreciente al inicio y de "cola larga" para el resto. La naturaleza asintótica de este tipo de funciones aglomera grandes variaciones en pocos valores y reduce la variabilidad en la mayor parte de la gráfica, en la cola²⁸. Las distribuciones L-estables y su aplicación particular a los Vuelos de Lévy, presentan este tipo de comportamiento en las colas de sus respectivas distribuciones, es decir, la función de supervivencia (la cual mide la probabilidad de "sobrevivir" a un punto temporal en específico, usualmente asociada a la mortalidad o al fallo de un sistema) sigue una ley potencial (Ver Anexo 3.3 para detalles del comportamiento de la función de supervivencia y en general del proceso).

Este tipo de leyes han sido utilizadas para describir fenómenos como la frecuencia de utilización de las palabras permitiendo con ello medir la riqueza del vocabulario de alguien. Este fenómeno es aproximadamente descrito por la "Ley de Zipf-Mandelbrot", llamada así por George Kingsley Zipf quien enunció la ley

²⁷Inversamente, si se quiere probar que algo está regido por una de estas leyes, entonces basta con graficarlo en escala logarítmica, si se genera una recta estamos en presencia de una ley potencial.

²⁸Mostrando el sesgo o asimetría de la distribución.

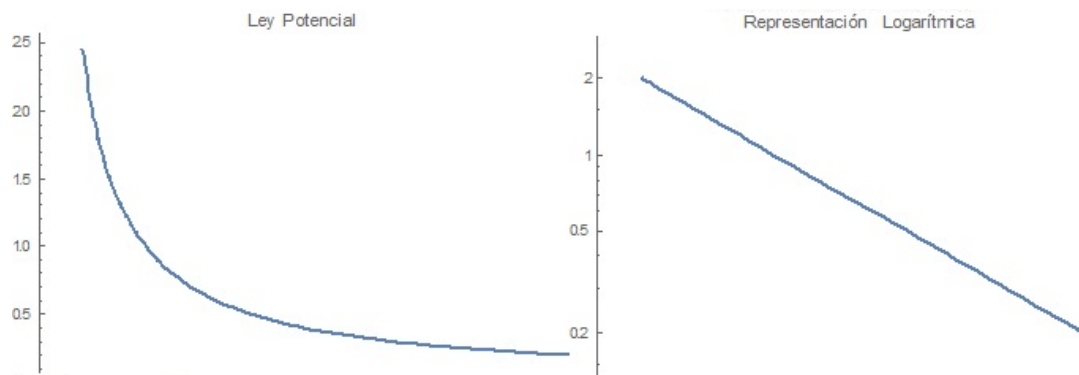


Figura 2.2.2: Ley Potencial y su representación en escala logarítmica.

que se muestra a continuación, y que Mandelbrot generalizó. La idea proviene del ordenamiento de la frecuencia de las palabras, siendo 1 la más frecuente, 2 la siguiente, y así sucesivamente. Luego, la probabilidad de que cada palabra sea utilizada en un texto es aproximadamente:

$$Q(r) \approx Fr^{-\frac{1}{\alpha}}$$

con Q la distribución de probabilidad, r la posición, F es una constante que Zipf estimó en $\frac{1}{10}$, y $\frac{1}{\alpha}$ es el factor importante pues define la ley potencial. A mayor α , mayor vocabulario.

Otro caso interesante es el de, una vez más, Wilfrido Pareto, cuyas aseveraciones provienen de su estudio acerca de la repartición del ingreso entre las personas. Este modelo determina que, en un proceso económico, la diferencia entre ricos y pobres es cada vez más notoria dado que la repartición del dinero entre quienes poseen mucho y quienes poseen poco sigue un patrón de escalamiento (los ricos serán más ricos y los pobres más pobres). Su fórmula se denota como:

$$P(u) = \left(\frac{u}{m}\right)^{-\alpha}$$

donde P indica la proporción de la población que sobrepasa de un ingreso u , m es el salario mínimo; con lo cual tenemos que al dividir u con m se obtiene

el grado de ingreso que se posee. Aquí $-\alpha$ fue estimado en $-\frac{3}{2}$ por Pareto. Así sabemos qué porcentaje de la población excede este u anualmente.

En la función denotada por $y = ax^p$, es p la clave de la “fisonomía” de la distribución en cuestión. Si $p < 2$, no existe la varianza, ésta es infinita. Con $p < 1$, la media tampoco.

La distribución gaussiana reduce las probabilidades de pasar a ser multimillonario siendo millonario y de pobre a pobre en extremo a medida que la diferencia es más notoria. Con estas leyes, la probabilidad de pasar de un estado a otro (de millonario a multimillonario o al revés) condicionada a que se esté en un estado inicial es mucho más homogénea entre las distintas diferencias que pudieran haber entre ambos extremos. Es decir, la probabilidad de tener medio millón de dólares y producir con ello un millón es la misma que de tener medio billón y obtener un billón.

En general, las propiedades de las leyes de potencias contrastadas con la distribución normal son:

- La rapidez con que decrece la probabilidad en las colas de la distribución es mucho más lenta y prolongada que la desaparición “rápida” de los valores extremos en una curva de Gauss.
- La desigualdad es imposible de ocultar; si todos tienen la misma probabilidad de mejorar (o empeorar) su suerte, entonces unos pocos mantendrán el dominio sobre los beneficios y la mayoría se repartirá el resto (como vimos, la ley del 80/20 implica la de 50/1, el 1% de la población tiene la mitad de la riqueza).
- El equilibrio es algo relativo a la distribución. En la Normal, la media indica la posición de equilibrio del sistema, el punto sobre el que se rige el resto;

con las leyes potenciales esto no ocurre, el equilibrio es siempre cambiante, dicho de otro modo, el equilibrio es raro y puntual en estos sistemas. Consecuentemente, la inestabilidad es rectora de una ley potencial, al contrario de una distribución gaussiana.

- La mediana pierde sentido en una ley potencial; en la curva de Gauss ésta indica el valor más probable, en el otro caso no aporta información alguna pues no hay un sólo valor con predominancia (cuando hay gran desigualdad entre los valores que pueden tomarse, la mediana no indica un punto de convergencia ni de regularidad). Lo mismo ocurre con la desviación estándar o varianza pues se vuelve infinita.
- La correlación tiene validez únicamente para un fenómeno gaussiano; fuera de éste, la más mínima variación provocaría grandes desfases entre lo teórico y lo práctico.

En un proceso fractal como el browniano, podemos incluir discontinuidades, positivas o negativas²⁹ en la evolución del proceso, las cuales siguen una ley potencial. El escalamiento de estos cambios, positivos o negativos, tomados en conjunto o separados pueden ser medidos por el α antes mencionado. El generador fractal entonces estará determinado por este α y la asimetría entre las colas.

En nuestro modelo, α es particularmente interesante pues no sólo denota el índice de estabilidad, sino que es la potencia a la que cambia nuestro fenómeno. Si éste es un escalamiento potencial, entonces α denota la dimensión local. Al tener un fenómeno cuyo exponente sea variable, se puede generar una función $f(\alpha) = dim(\alpha)$ que permite establecer el grado de rugosidad estadística de un proceso aleatorio.

²⁹Por ejemplo en un gráfico de precios serían brincos “al alza” o “a la baja”.

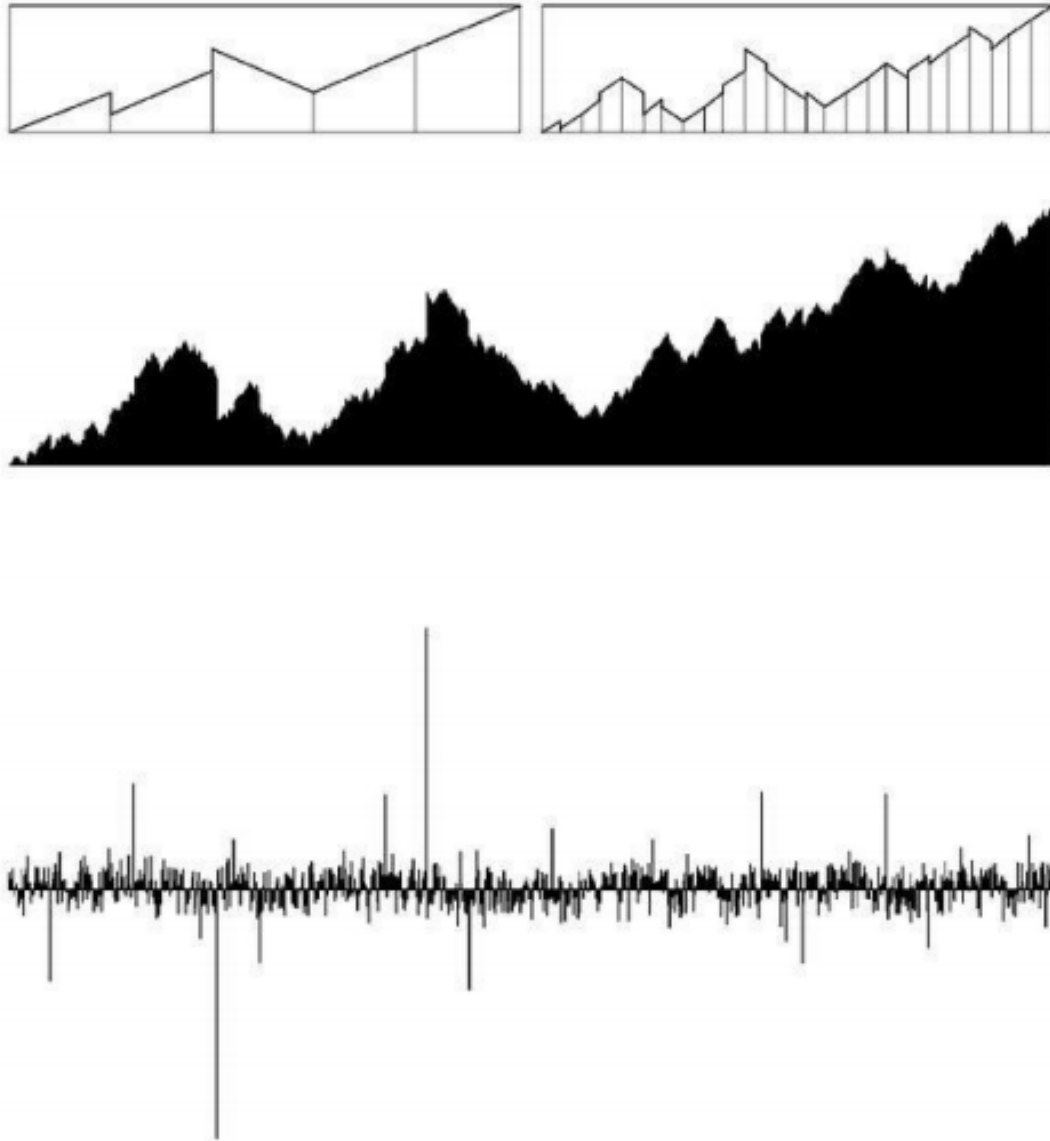


Figura 2.2.3: Un fractal con colas pesadas. La presencia de una ley ley potencial genera discontinuidades en la evolución del proceso. Aquí, Mandelbrot realiza este proceso mediante la alteración del generador agregándole discontinuidades, las cuales pueden producir cambios con valores extremos. El resultado final es un fractal como el obtenido en el inciso C) de la Figura 2.1.3, vale decir que sin aleatorizar el generador se obtiene cierto realismo con las discontinuidades.

Imagen tomada de Mandelbrot (2009a) p. 171.

2.2.1.3. Memoria de Largo-Plazo

Es común que a diferencia de las suposiciones sobre independencia de los modelos financieros clásicos, se tome la modelación de fenómenos económicos bajo otra postura que defiende la existencia de alguna forma de dependencia entre diversas variables -desempleo, producción, inflación, etc. Debido a esta suposición, se intenta medir el grado de dependencia, así como la duración de la misma mediante la medición de cuán fuerte es la correlación, cuyos valores se sitúan entre 1, cuando los eventos siguen el mismo patrón, y -1 , para eventos que son totalmente opuestos, siendo que en 0 indica que no existe correlación, es decir que los eventos ocurren sin afectar a otros.

Dada la infinita cantidad de valores que existe en el intervalo $[-1, 1]$, la correlación explica en cada una de ellas una distinta intensidad y dirección de la dependencia a corto plazo. Es en este lapso donde se observan las correlaciones más fuertes, a plazos más largos la correlación se hace más débil.³⁰ Si se grafican dichas correlaciones a través del tiempo -del corto al largo plazo- se obtiene una curva que decrece “rápidamente”; diversas variables económicas varían en cuán “rápido” lo hacen. Un fenómeno *persistente* (que se mantiene presente por un tiempo antes de desaparecer) es identificable como aquel cuya curva decrece lentamente; la inflación evoca una curva con tal propiedad, una vez que inicia es difícil detener su avance. Igualmente existen curvas que tienen “protuberancias” en su trayecto descendente las cuales indican la aparición algún evento que altera la influencia decreciente de la correlación en cada uno de estos puntos. El precio de los granos muestran este fenómeno anualmente en cada ciclo de cosecha y siembra. El producto interno bruto sigue este patrón irregular en su descenso al 0 correlacional, pero para ello se toman plazos de pocos años, o de 15 a 20 años y hasta de 40 o

³⁰ *op. cit.* Mandelbrot (2009a) p.182.

60 años.

El trabajo de Hurst lleva este punto de la correlación histórica a más de un periodo definido en el que se desvanece la fuerza de la dependencia, su investigación permite enfocar el análisis hacia correlaciones que no decrecen del todo sin importar cuán largo sea el periodo examinado. Hurst halló evidencia de este tipo de dependencia de largo plazo, en la influencia de los fenómenos meteorológicos sobre la cantidad de agua que la presa debe poseer, a través del tiempo los periodos de fuertes lluvias mantenían los niveles del agua en los periodos donde las sequías dominaban.

El modelo de Hurst requiere de calcular el promedio anual de precipitaciones dándole seguimiento anual, y calculando la desviación acumulada año con año de las descargas con ese promedio. Luego observa la mayor y menor variación que se obtenga y calcula su diferencia R la cual denomina rango, que sería el tamaño ideal de la presa para evitar inundaciones y hacer frente a las sequías; además necesita de σ , la variación estándar de las descargas de un año con otro; N que denotará la cantidad de años en el estudio y K el exponente de esta ley potencial, luego entonces se tiene que:

$$\log\left(\frac{R}{\sigma}\right) = K \log\left(\frac{N}{2}\right)$$

o sin logaritmos y despejando para R :

$$R = \sigma \left(\frac{N}{2}\right)^K$$

Aunque K tiene algunos defectos que han sido remarcados, Mandelbrot desarrolló que el H antes mencionado prueba ser una mejor alternativa.

En los mercados financieros, Mandelbrot hace la analogía de este fenómeno de larga dependencia (o memoria de largo plazo), mencionando como ejemplo

el caso de IBM: su competidor Apple generó el desarrollo de las computadoras personales, esto los llevó a invertir en una pequeña compañía para la creación de microprocesadores llamada Intel, y en un chico llamado Bill Gates para el desarrollo del software. Como sabemos IBM, de ser un gigante computacional pasó a sufrir un notorio encogimiento mientras que las empresas que impulsó crecieron desproporcionadamente, aunque las tres aún hoy día están muy relacionadas la una con la otra. La influencia ejercida entre los participantes del mercado deja un rastro en la evolución del mismo. Si introducimos esta idea a un fractal, lo que implica es que, *a lo largo del generador habrá cambios locales que influenciarán la evolución de la construcción en distintos niveles temporales.*

En comparación con el MBr , cuyo cambio acumulativo a través de un determinado tiempo es estimable a través de la raíz cuadrada del número de pasos que se han dado, multiplicada por el tamaño de los pasos, lo cual hace posible dar un intervalo que contenga este número con cierta certeza (se habla de la probabilidad de estar entre a y b dado el tiempo transcurrido t) con lo que se asegura la evolución del sistema. La dependencia de largo plazo exhibe un comportamiento más errático que dicha regla, por lo que la distancia recorrida puede ser mucho mayor de lo que un intervalo definido como el anterior abarca. Mientras que el primero varíe a razón de $\frac{1}{2}$ se puede hacer una predicción por intervalos en la que será posible encontrar un valor futuro a partir de lo observado en el presente; sin embargo, cuando esta razón no es la regla aparece el fenómeno de la *persistencia*. Se da a lugar pequeñas tendencias que “amañan” el juego y, aunque tales sean cambiantes y erráticas, en el largo plazo serán cada vez más lejanas al punto inicial. Es entonces que el exponente fraccionario H sirve para describir este desarrollo. Recordemos que $\frac{1}{2} < H < 0.9$ implican persistencia en el fenómeno, pero ya que los cambios incluyen reveses en sus tendencias el alejamiento del punto inicial se

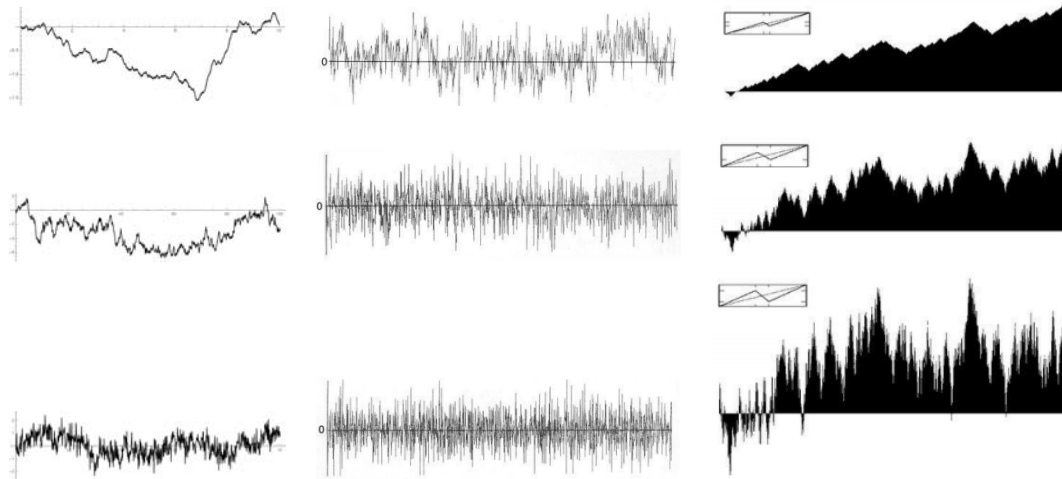


Figura 2.2.4: Larga dependencia. Podemos ver en la columna de la izquierda las distintas implicaciones de la variación de H en un mbf ; arriba tenemos $H = 0.9$ donde se pueden ver las tendencias que prevalecen durante cierto tiempo (la persistencia); en seguida se tiene $H = 0.5$ del típico movimiento browniano (aparentemente con tendencias pero cada cambio es independiente del anterior) y, por último, $H = 0.1$ el cual muestra un incesante cambio, la antipersistencia del fenómeno hace que para cada paso dado, el siguiente sea en dirección opuesta. En la columna central observamos los cambios de cada proceso. Finalmente, la columna de la derecha muestra el respectivo fractal asociado. La dependencia se crea modificando la posición horizontal y vertical de los “puntos de quiebre”.

dará debido a los periodos que se agrupan. Si $H < \frac{1}{2}$, como veíamos anteriormente provoca un menor distanciamiento del punto inicial pero vuelve más “salvaje” y frecuente el cambio entre las tendencias.

La Figura 2.2.4³¹ muestra la construcción de un fractal como el de Bachelier, al que se le ha agregado la propiedad de la dependencia que hemos adoptado en este modelo. Una vez más, $H > 0.5$ genera un proceso persistente en el que hay periodos de crecimiento positivo para luego cambiar a periodos de comportamiento opuesto; $H < 0.5$ muestra una evolución *anti-persistente* caracterizada por ser completamente opuesta al caso anterior haciendo de las variaciones del fenómeno algo extremadamente cambiante.

³¹Las imágenes de la segunda y tercera columna pertenecen a Mandelbrot (2009a) páginas 188 y 194 respectivamente.

2.2.2. Multifractales financieros

El trabajo de Mandelbrot ha llevado a diversos investigadores a estudiar la fractalidad en los mercados financieros, Herlin hace mención del trabajo de Edgar Peters³² quien calculó para el periodo de 1950 a 1988 una dimensión fractal del índice S&P 500 de 1.28, la acción de IBM en 1.39 , la de Coca-Cola en 1.43... Nótese que ninguno alcanza la dimensión 2 característica del movimiento browniano ordinario por lo que es más que evidente la necesidad de parámetros de medición alternativos a los utilizados para ese tipo de movimiento. Con H se tiene una representación del “estado” del mercado, un H alto implica que el mercado está en un periodo muy alarmante pudiendo eliminar a los participantes; uno más bajo al 0.5 browniano denotaría un mercado fuertemente regulado. En la misma obra de Peters se menciona que Apple tiene $H = 0.75$, IBM tendría $H = 0.72$. La investigación precursora de Mandelbrot con los fractales financieros se ha esparcido a acciones de IBM, el famoso caso del algodón que permitió analizar los componentes mencionados en la sección 2.2.1, divisas, etc.

Veamos entonces que al analizar la evolución del precio se observa frecuentemente la falta de continuidad en el proceso de cambio siendo que hay muchos pequeños cambios, pocos de tamaño medio y varios grandes, lo que hace que la curva Normal no pueda ser reconstruida por este fenómeno. Luego se observa la similaridad que tienen los periodos de un año con un mes, de un mes con un día, etc. La aglomeración de la acción también es reconocible y por lo anterior, si se observa a detalle un periodo de tiempo que presente dicha aglomeración también se verán aglomeraciones en menor escala dentro de los subperiodos del tiempo original.

³²*op. cit.* Herlin. Citando la obra: Peters, Edgar *Chaos and order in capital market*, John Wiley, 1990.

Pasemos pues a la elaboración de cómo se plantea el modelo multifractal del mercado, ya con las bases conceptuales establecidas y su vinculación a la teoría que se desarrolló en esta subsección.

2.2.2.1. Burbujas: La relación entre H 's y α 's

En el funcionamiento de los mercados, Mandelbrot ha destacado la presencia de dos fenómenos rectores del cambio: el tipo de variación que se da y sus consecuencias. Ambos fenómenos deben su nombre a los personajes centrales de un par de historias bíblicas que funcionan a modo de analogía para el fenómeno de la variabilidad. El primero fue bautizado por Mandelbrot con el nombre de *efecto Noé* pues en la historia de este personaje ocurre un diluvio que dura 40 días y 40 noches, la idea detrás del nombre radica en la **evidente desigualdad** que se observa en ciertos lugares donde la sequía es extrema y en otros, donde la frecuencia de las precipitaciones resulta problemática. El segundo fenómeno recibió el nombre de *efecto José* (o Josef) haciendo referencia al caso del joven que explicó el significado de los sueños del faraón en los que 7 años de bienestar y prosperidad serían seguidos de 7 años de hambruna y pericias; explicando con ello la **agrupación** de los periodos de bonanza y de desventura. Ambos fenómenos están presentes en los mercados financieros pero Mandelbrot ha probado que diversos mercados tienen una mezcla distinta de cada uno de ellos, produciendo distintos tipos de variaciones.

El α antes mencionado sirvió a Mandelbrot para crear pruebas sobre estos conceptos en un mercado; así, uno con un α bajo será muy riesgoso, proclive a grandes saltos en el precio, si es por el contrario un α alto el mercado es más parecido al caso del lanzamiento de moneda. Por otra parte, como ya se mencionó H , el exponente de Hurst, sirve también para medir la larga dependencia en

un fenómeno. De esta manera α se asocia con el efecto Noé y H con el efecto José. Ambos efectos, no son exclusivos de las finanzas, existe una diversidad de fenómenos que presentan estas peculiaridades, por ejemplo, para el efecto José y la *persistencia* se puede observar que las personas sanas tienden a permanecer sanas; también se observa cuando un equipo mantiene una racha de victorias (o derrotas), etc. Para el efecto Noé y los cambios abruptos, podremos ver personas absolutamente sanas contraer enfermedades mortales, o encontrar equipos deportivos cuyas expectativas de ganar un campeonato son ínfimas (dado su historial), sin embargo logran un año que rompe récords.

Para examinar su presencia en un caso de interés, Mandelbrot desarrolló la prueba estadística $\frac{R}{S}$, en la cual el efecto José (que depende del orden de los eventos) se separa del efecto Noé (que depende del tamaño relativo de los eventos) que componen el fenómeno en cuestión³³. La idea es que si los datos que se tienen son mezclados al azar, cualquier rastro del efecto José será removido y sólo será el efecto Noé el que se mantenga igual antes y después de la mezcla. Entonces, si la muestra indica alguna variación se deberá a que hay dependencia de largo plazo, importa el orden y esta importancia puede ser medida. Si no hay diferencia, entonces cualquier indicio de dependencia en el conjunto de datos original no era importante. Con esto *tenemos una medida para la dependencia de largo plazo*.

Vale mencionar que $H = \frac{1}{\alpha}$, estableciendo así una relación entre las colas pesadas de una distribución estable y el fenómeno de la dependencia de largo plazo. Con $H = \frac{1}{2}$, α será 2 y tendremos el caso de un lazamiento de moneda, un escenario gaussiano.

Un punto muy importante a mencionar es que el efecto José conduce al efecto Noé. Suponiendo que se tiene una acción que muestre un incremento en su va-

³³De rango entre desviación estándar (“Range” y “Standard Deviation” en inglés). Ver Apéndice correspondiente.

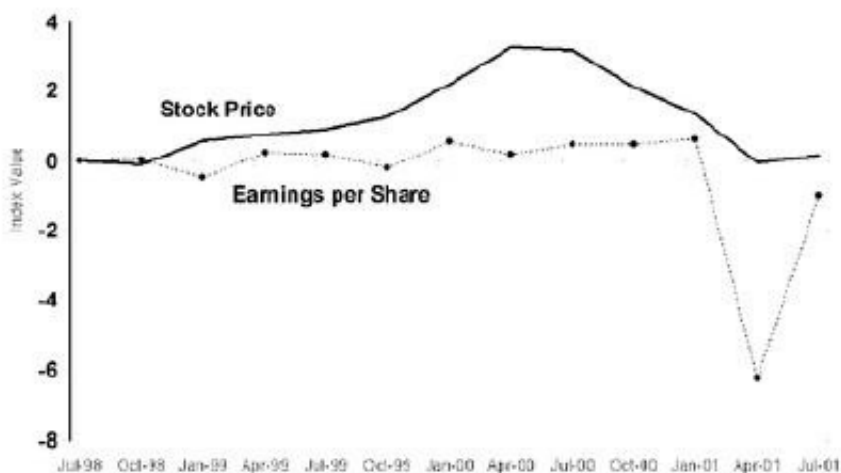


Figura 2.2.5: Burbuja de Cisco Systems. Mandelbrot *op.cit.* p. 205

lor durante cierto periodo de tiempo, hasta que llega el punto de cambio en la tendencia, el cual puede ser, en el mismo sentido hipotético (más no deja de ser posible) un cambio brusco provocando con ello una discontinuidad en el precio. Aquí la dependencia generó discontinuidad. Esta relación, dice Mandelbrot es la que produce burbujas financieras de las que se habló en la subsección 1.3.1.2; en el periodo inicial en el que la dependencia de largo plazo muestra sus efectos (generando tendencias); así tenemos que el precio real de un bien puede aumentar por un lapso de tiempo en el que se tienen malas noticias cambiando las expectativas de su valor (mal clima para los bienes agrícolas en temporada de cosecha por ejemplo), sin embargo, a la llegada de situaciones “estabilizadoras” dicho precio retornará a su valor óptimo (el cambio en el clima definiría el retorno a un precio menos especulativo del producto). Es un ciclo incesante, efecto José, luego efecto Noé. Cisco Systems, una de las empresas de la burbuja de internet vivió este escenario durante el periodo comprendido entre julio del '98 y julio de 2001. Al extrapolar las ganancias del '99, el precio de la acción se disparó hasta que en el 2000 se refrenaron, estabilizando el precio; pero en el 2001 al presentar sus

primeras pérdidas del trimestre, el precio descendió hasta casi su valor inicial.

El multifractal, con su construcción de leyes potenciales permite que H , el exponente, genere aquella desviación de 25σ alcanzada en la crisis de subprimes, “inconcebible bajo la distribución normal”³⁴.

2.2.2.2. Tiempo Fractal: Multifractal Model of Asset Returns

En el estudio del comportamiento del mercado debe hacerse notar que el tiempo es algo muy peculiar al que poca atención se le ponía con los modelos convencionales, pues sugerían que éste era de carácter continuo (a pesar de que las bolsas de valores no laboran en fines de semana ni las 24 horas del día). Con Mandelbrot se tiene una visión más completa de lo que realmente ocurre: el tiempo “natural” difiere del tiempo de la bolsa (el *tiempo de transacciones*). Esta radical diferencia permite analizar el comportamiento del mercado en cuanto a las variaciones de los precios.

Debido a que la acción se desarrolla durante este tiempo de transacciones, es aquí donde vemos el verdadero cambio de los precios. Estos varían de acuerdo al volumen de las transacciones que son llevadas a cabo. Si se observa el modo en que interactúan los participantes veremos lapsos en los que la actividad es poca y realmente no hay mucho qué hacer, mientras que hay ocasiones donde hay un gran número de transacciones.

Como veremos a continuación, el tiempo en los mercados es la clave del multifractal que planteamos. Recordemos que un fractal ordinario asume longitud infinita, dimensión fraccionaria y detalle a cualquier escala, por lo que al asociar el tiempo con fractales, en rigor se tendría que generar un ciclo extenuante pues contendría en sí mismo “todo pasado y futuro y viviríamos a cada instante nuestra

³⁴ *op. cit.* Herlin p.88

muerte”, lo cual resulta imposible pues si la distribución de materia del universo siguiera al pie de la letra un proceso fractal, estaríamos en todas partes todo el tiempo, “seríamos el universo mismo”.³⁵

Entonces, según Vicente Talanquer³⁶, un fractal de tiempo puede ser pensado como “un fenómeno cuyos eventos que lo conforman ocurren no en intervalos igualmente espaciados de tiempo, sino por paquetes, y dentro de éstos habrían también eventos similares distribuidos también en paquetes, y dentro de ellos, más paquetes, así hasta agotar la escala de tiempo.” En general -explica Talanquer- los fenómenos así modelados³⁷ (por empaquetamiento) se tratan de sistemas que viven al borde del colapso, pero que a la vez muestran una enorme capacidad de recuperación después de cada catástrofe.³⁸

Así, Mandelbrot unifica las leyes potenciales (el efecto Noé), la dependencia de largo plazo (el efecto José) y la turbulencia en la modelación de lo que llama un Multifractal. Este tipo de fractales superan a los originales por su capacidad de aleatorizar un proceso escalable dando como resultado mejores modelos de la naturaleza.

El modelo de tiempo multifractal crea generadores (ver Figura 2.2.6) mediante una función compuesta del tiempo natural, del tiempo de transacciones y del precio. Primeramente, el tiempo natural $t \in [0, \infty)$ es convertido a un tiempo de transacciones θ (que funciona a modo de escala auxiliar), luego se toma el tiempo natural contra el precio P del que finalmente se desprende un tercer generador cuyas propiedades son “heredadas” de los dos anteriores obteniendo finalmente

³⁵Talanquer, Vicente, *Fractus, fracta, fractal. Fractales, de laberintos y espejos*. México: FCE, SEP, CONACYT. 3a ed. 2003. Capítulo VII.

³⁶*idem.*

³⁷La modelación por paquetes ha sido utilizada para medir las fallas estructurales en un material amorfo, siendo que presentan diferentes bloques de fracturación pues la repartición de las partículas es aleatoria y por tanto la resistencia al movimiento es desigual; esto implica que el material no muestra defectos uniformemente a través del tiempo, lo hace mediante paquetes.

³⁸*idem.*

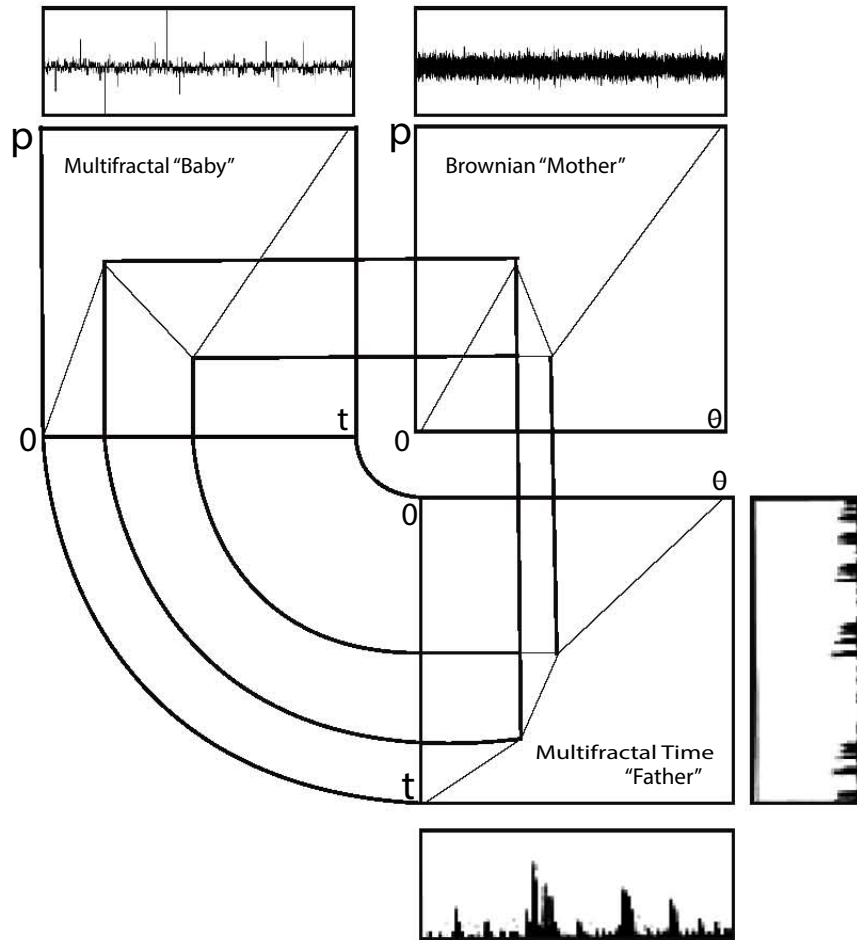


Figura 2.2.6: Creación del proceso multifractal del tiempo de mercado. En la esquina superior derecha se tiene un generador (“Mother”) de movimiento browniano, como el visto en la Figura 2.1.3, para el tiempo natural; debajo, el generador multifractal (“Father”) deforma las propiedades del anterior para producir una nueva escala temporal, el “tiempo de transacciones”. Finalmente, en la esquina superior izquierda se observa el generador final (“Baby”) el cual es producto de la adopción de las propiedades del segundo generador por el primero, es aquí donde los puntos de “quiebre” son alterados para generar distintos procesos. Arriba del generador *Baby*, se observa el proceso de cambios multifractal; debajo del generador *Father* se observa la naturaleza cambiante de las transacciones a través del tiempo en los mercados. Mandelbrot *op. cit.* p. 213

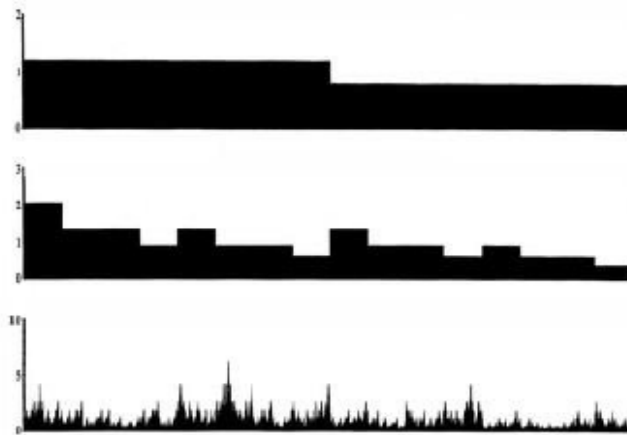


Figura 2.2.7: Cascada Binomial. El proceso parte con un cuadro de densidad 1, el cual es dividido en dos partes de distinta densidad que a su vez son subdivididas en la misma proporción que el paso anterior. Este proceso se repite tantas veces sea necesario, generando con ello una curva de tiempo-precios en la que se observa la acumulación de la acción en ciertas partes del proceso, así como periodos de baja interactividad.

un proceso determinado por el tiempo de transacciones (multifractal) y el precio. Matemáticamente, se tiene que si al *mbf* $B_H(t)$, t es transformada en la función de distribución $\phi(t)$, el proceso $X(t)$ propuesto por Mandelbrot, el MMAR, es un multifractal del tipo

$$X(t) = B_H[\phi(t)]$$

Es decir, se trata de un *mbf* con índice de autoafinidad H con incrementos temporales que se distribuyen de acuerdo a $\phi(t)$. Esta última es la función de distribución acumulada de una medida multifractal sobre $[0, T]$, es decir $\phi(t)$ es un proceso multifractal con trayectoria continua y no-decreciente, e incrementos estacionarios.³⁹

El proceso mediante el que se transforma el tiempo natural se conoce como “Cascada Multiplicativa” (su funcionamiento es similar al caso que tratamos acer-

³⁹Véase: Mandelbrot, Benoît, Fisher, Adlai, Calvet, Laurent. *A Multifractal Model of Asset Returns*. Cowles Foundation for Research in Economics Discussion Paper #1164, Yale University, September 15, 1997..

ca de la regla del 80/20, en el que repetitivamente fragmentábamos cada sección nueva en las mismas proporciones iniciales). Entonces el proceso aquí descrito denota una función en el que el precio es una función del tiempo de transacciones, que a su vez es una función del tiempo natural. Este modelo permite generar cualquier cantidad de gráficos que tienen las propiedades mencionadas en la sección 2.2.1: colas pesadas, periodos en los que la volatilidad se agrupa en grandes cambios y otros en los que la variación es muy pobre, enmarcando así la presencia de dependencia de largo plazo y de persistencia. Los momentos estadísticos de un multifractal, analizados mediante la función de estructura de invarianza de escala (la cual es una extensión al dominio temporal del análisis espectral), siguen un patrón de escalamiento.

Ahora bien, como en los fractales naturales, existe un límite superior e inferior para el que el escalamiento es útil, válido e incluso necesario (por ejemplo con los vasos respiratorios dentro de los pulmones, cuya estructura principal se limita a dos tubos principales que alimentan de aire a los bronquios y éstos a su vez a los alvéolos de las células). Este límite se alcanza inferiormente en el periodo de 2 horas y superiormente por 180 días. Fuera de estos periodos el efecto Noé parece perder fuerza y un nuevo modelo es necesario. Sin embargo, para el propósito de analizar lo que ocurre y prepararse para lo posible este modelo permite tener conocimiento útil acerca de la naturaleza del mercado. Pantanella et al. componen un portafolio con acciones europeas y otro con acciones americanas; en el cual la medida de riesgo sobre la que se contrapesan las diferentes acciones es la maximización de H ($H \rightarrow 1$), pues esto genera un portafolio compuesto por acciones que mantienen tendencias más evidentes. Estos dos portafolios tuvieron un mejor desempeño al tener casi siempre mayores retornos que otros dos creados a través de la medida gaussiana de los portafolios eficientes de Markowitz dentro de un

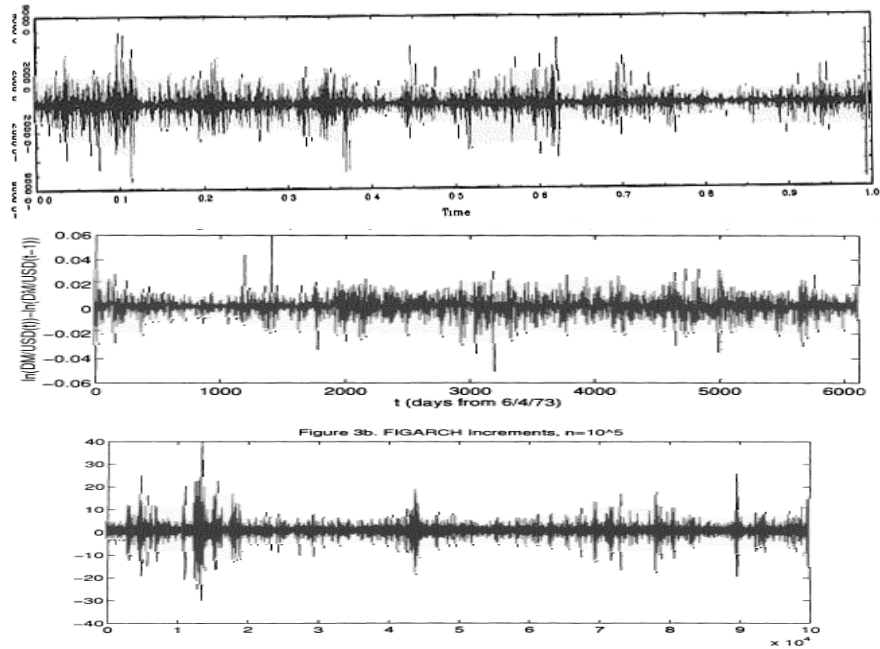


Figura 2.2.8: Modelo Multifractal de Rendimientos de Mandelbrot (arriba). Simulación obtenida de Mandelbrot (1997) utilizada para analizar los cambios del DM/USD (medio) y una simulación del FIGARCH (abajo).

periodo aproximado de 160 días.⁴⁰

El modelo en sí debe ser trabajado en dos sentidos, hacia adelante y hacia atrás. Es decir, que debe construir un gráfico de precios completo a partir de semillas fractales (los parámetros de escalamiento y dependencia) y, por el contrario también debe ser capaz de tomar datos en bruto, descomponer la información y estimar con ella los parámetros del modelo multifractal, para que luego el mercado pueda ser reconstituido y aunque no pueda ser una copia exacta -como nunca lo es al simular-, tendrá las mismas propiedades estadísticas que el original.

Lo que se puede aprender del modelo multifractal está más cercano al verdadero comportamiento del mercado y a la naturaleza de sus variaciones, el GARCH,

⁴⁰Pantarella, Alexandre, Pianesse, Augusto *Minimum risk portfolios using MMAR*. Aparece en: Proceedings of the 10th WSEAS Int. Conference on MATHEMATICS and COMPUTERS in BUSINESS and ECONOMICS. Republica Checa 2009. pp: 64-71. Ver Anexo: Portafolios Multifractales

que vimos antes, igualmente es utilizado para modelar estos periodos de aglomeración de la volatilidad en los que hace “vibrar” la campana de Gauss mediante la modificación de nuevos parámetros para ampliar o reducir la curva pero no hay una razón convincente para decir porqué vibra la distribución. El modelo multifractal nace de la evidencia misma del mercado. Su aparición permite un nuevo tipo de administración, la cual aún necesita de más investigación, sin embargo la sola aparición de esta teoría marca un nuevo paradigma sobre la modelación de la volatilidad en los mercados con lo que se abre el campo a la continuación y desarrollo de la teoría y la práctica.⁴¹El cuadro siguiente resume las cualidades del modelo multifractal frente al *mbf* simple y el GARCH:

	GARCH	<i>mbf</i> ($H \neq 0.5$)	FiGARCH	MMAR
Memoria de largo plazo	No	Sí	Sí	Sí
Invarianza de escala	Inconsistente	Consistente	Inconsistente	Consistente
Agrupamiento de la Volatilidad	Sí	No	Sí	Sí

2.2.3. Análisis Multifractal de Series de Tiempo

Arriba se hizo mención de que buscar multifractalidad en una serie de datos requiere de un modelo que funcione “hacia adelante” y “hacia atrás”. La manera en que esto se realiza es mediante el análisis de un posible comportamiento en los datos de la forma:

$$P(k) \propto k^{-\Psi} \tag{2.2.1}$$

⁴¹*op. cit.* Mandelbrot (2009a) p. 207-222

siendo $P(k)$ el espectro de potencias (obtenido mediante un análisis de Fourier) y k el número de onda (la inversa del tiempo). Estadísticamente genera:

$\Psi < 1$ un proceso estacionario, si $X(t)$ es un proceso con tal espectro, éste es estadísticamente invariante por traslación en t .

$1 < \Psi < 3$ un proceso no-estacionario, pero con incrementos que sí lo son.

Retomando el exponente de estacionariedad de Hurst para el proceso $X(t)$, H , tendremos que

$$\Psi = 2H + 1$$

El problema radica en que podemos tener dos procesos⁴² con diferentes propiedades estadísticas pero con un mismo Ψ , para eliminar esta ambigüedad, un multifractal, a diferencia de los monofractales⁴³, hace a un lado la fijación del exponente H y lo caracteriza jerárquicamente⁴⁴ aplicando lo que se conoce como **análisis multifractal**: la versión de tiempo del análisis espectral de invarianza de escala. Este análisis examina el escalamiento de las fluctuaciones en tiempos no-superpuestos del proceso, los cuales únicamente dependen del tamaño del intervalo τ tomado, es decir que si tenemos el incremento:

$$\Delta X_\tau(t) = |X(t + \tau) - X(t)|$$

⁴²Uno aditivo con muchas observaciones que suavicen la curva, y uno multiplicativo con un alto grado de intermitencia. Lantsman, Yakov, Major, John A., *Actuarial applications of Multifractal Modeling, Part II: Time Series Applications*. Winter Forum, Casualty Actuarial Society, 2001. pp 371-385. Este contenido en p. 377. En adelante, esta obra será referida como Lantsman & Major (2001b).

⁴³Con un proceso fractal subyacente, el cual genera variaciones estables del tipo $(\Delta t)^H$ con H constante, es decir, un cambio mono-afín, al contrario de un proceso multifractal en el que el cambio de H es una función decreciente.

⁴⁴En este punto, H recibe el nombre de exponente de Hölder que será descrito más adelante.

entonces, mediante los q -momentos estadísticos del proceso, se estudia el cumplimiento de la relación:

$$E(\Delta X_\tau(t)^q) \sim E(\Delta X_T(t)) \left(\frac{\tau}{T}\right)^{\zeta(q)}$$

en la que $E(\Delta X_T(t))$ es una constante, T la escala más grande de tiempo y, la más importante $\zeta(q)$, es la función de estructura invariante de escala la cual determinará la multifractalidad del sistema.

Esencialmente, los multifractales son medidas (distribuciones vistas desde la Teoría de la Medida) que exhiben un espectro de dimensión fractal. Estas medidas, generalmente, no pueden ser caracterizadas en términos de densidades cerradas, masas. Como ya se mencionó, son construidos a base de un proceso conocido como cascada multiplicativa, el cual repetitivamente modifica un generador inicial con las instrucciones proporcionadas por α y H . En un proceso aleatorio, se busca analizar el comportamiento de los distintos momentos estadísticos para hallar indicios de multifractalidad.

$\zeta(q)$ resulta esencial en el análisis de multifractales en dimensión euclidiana 1, como las series de tiempo, sus propiedades básicas son $\zeta(0) = 0$, pero principalmente $\zeta(q)$ es cóncava, lo cual permite crear una jerarquía de exponentes H :

$$H(q) = \frac{\zeta(q)}{q}$$

siendo $H(q)$ no creciente, hay que resaltar que para el segundo momento estadístico ($q = 2$),

$$\Psi = 2H(2) + 1 = \zeta(2) + 1$$

entonces la meta del análisis de estructura se remite a hallar esta $H(q)$ o $\zeta(q)$, ya que $H(q)$ constante implica que estamos ante la presencia de un proceso

monofractal (monoafín); con un $H(q)$ decreciente encontraremos un multifractal. En los procesos aditivos (modelos basados en movimientos brownianos y de Lévy, descritos más adelante) son monofractales a lo sumo, su $H(q)$ es constante:

- Para el Movimiento Browniano (MBr) y Browniano Fraccionario (mbf), respectivamente: $\varsigma_{MBr}(q) = \frac{q}{2}$ y $\varsigma_{mbf}(q) = q(h - \frac{1}{2})$, siendo h el orden de integración fraccional de un ruido gaussiano.
- Para el Vuelo de Lévy (VL): $\varsigma_{VL}(q) = \frac{q}{\alpha}$, con $0 < \alpha \leq 2$, y $q < \alpha$; si $q \geq \alpha$, entonces $\varsigma_{VL}(q) = 1$.

Para mayor profundidad en este tema se puede acudir al Apéndice 3.3 en el que se desarrolla el sustento matemático de este análisis. Esta caracterización no es trivial y requiere de cierto dominio de programación y modelación informática, lo cual incrementa la complejidad del modelo. A continuación se da una alternativa al análisis por función de estructura a través de la estimación de la dimensión fractal del proceso definido en base a distribuciones estables.

2.2.4. Análisis de la Dimensión Fractal

Jesús Muñoz⁴⁵ desarrolla un método simplificado para realizar una prueba empírica de fractalidad sobre una serie temporal real en la que busca adquirir los parámetros de estabilidad (α) y de larga dependencia (H). Su procedimiento proviene de ciertos resultados muy puntuales que envuelven la relación entre fractales, las definiciones del proceso browniano fraccionario y las distribuciones estables:

⁴⁵Muñoz San Miguel, Jesús, *Movimiento Browniano y Geometría Fractal: el IBEX35*. XIII Jornadas de la ASEPUMA, Universidad de Sevilla. 2005.

- El primer paso es verificar que el conjunto de datos disponibles no pertenezca a una distribución normal a través de la construcción del gráfico de frecuencias, el cual no cubrirá con suficiencia en las colas, primordialmente pero de igual forma la curtosis y el sesgo diferirán de los propios de la curva gaussiana.
- Una característica deseable de una serie temporal que sea propicia para analizarse a través de medidas fractales, es que en el incremento de la escala temporal las medias pueden seguir una tendencia lineal clara, sin embargo las varianzas de un proceso autoafín no-gaussiano serán bastante erráticas y hasta divergentes.

Dentro de los procesos temporales de Lévy, los definidos a través de las distribuciones estables son los únicos que presentan la autoafinidad estadística necesaria para definir un fractal temporal. Es decir, un proceso $\{X_t\}$ es H -autoafín (que el cambio de escala a es igual a una potencia- H - de b , $a = b^H$) si y sólo si éste es α -estable ($0 < \alpha \leq 2$). Además $H = \frac{1}{\alpha}$.

Si el proceso tiene incrementos independientes y cumple que los incrementos de tamaño h mantienen la misma distribución estable $S(\alpha, \beta, \gamma \cdot h, 0)$ únicamente escalando la proporción de los incrementos del movimiento con el incremento temporal.

Entonces, para un proceso $\{L_{\alpha,\beta}(t) : t \geq 0\}$, L-estable con exponente estable α , simétrico⁴⁶ para $\alpha = 1$ y $a > 0$:

$$L_{\alpha,\beta}(t) \cong a^{-\frac{1}{\alpha}} L_{\alpha,\beta}(a \cdot t)$$

es decir, se tiene un proceso estable con exponente de autoafinidad $H = \frac{1}{\alpha}$.

⁴⁶Esta condición se debe a que el proceso autoafín requiere de ser estable en todo momento y las distribuciones L-estables, sólo son estrictamente estables para $\alpha = 1$ si, y sólo si, son simétricas.

Estos procesos tienen esperanza finita para $1 < \alpha \leq 2$. En un grafo de un proceso autoafín con esperanza finita, en el intervalo $[0, 1]$ la dimensión cuenta-cajas es casi seguramente $D = 2 - \frac{1}{\alpha} = 2 - H$.

En la serie que se pretende estudiar, queda finalmente por encontrar la dimensión fractal para poder deducir de ella los demás exponentes característicos.

Este método es particularmente útil para conocer un estimado del grado de irregularidad del proceso en cuestión, además permite aproximar los exponentes de Hurst y de estabilidad sin recurrir a complejos modelos computacionales como el caso de la función de estructura.

2.2.5. Otras medidas multifractales

En general, todos los multifractales pueden ser descritos a través de la dimensión generalizada D_q que describe, en función de los momentos estadísticos, la variabilidad de un proceso multifractal a través del análisis de la probabilidad de hallar ciertos eventos en un espacio definido, es decir, a través un análisis local de la frecuencia de ellos y su posible escalamiento en una vecindad de tamaño ϵ . Para una mejor comprensión se sugiere ver el Anexo 3.3.

Si un monofractal crece homogéneamente de acuerdo a la dimensión D como

$$\epsilon^{-D}$$

entonces, un multifractal, en el que hay una infinidad de singularidades en la distribución, crecerá de acuerdo a

$$\epsilon^{\alpha_i} \tag{2.2.2}$$

donde α_i es la fuerza de la singularidad local, llamada *exponente de Lipshitz-Hölder*. Este exponente puede no ser único, dado que otras vecindades o subdivi-

siones del espacio pueden tener el mismo valor. El número de éstas con el mismo α_i viene dado por

$$\epsilon^{-f(\alpha_i)} \quad (2.2.3)$$

asi, $f(\alpha_i)$ es la dimensión fractal del conjunto de subdivisiones con fuerza de singularidad α_i .

Al probabilizar la posibilidad de tener eventos en el espacio de tamaño ϵ , tendremos que su distribución sigue una ley potencial como en la ec. 2.2.3, la cual es caracterizable a través de los momentos estadísticos -que funcionan a modo de resolución- como:

$$Z_q(\epsilon) \sim \epsilon^{-\tau(q)} \quad (2.2.4)$$

con

$$\tau(q) = q \cdot \alpha(q) - f(\alpha(q)) \quad (2.2.5)$$

que es usualmente presentada en términos de la Dimensión Generalizada:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(Z_q(\epsilon))}{\log(\epsilon)} \quad (2.2.6)$$

$$\tau(q) = (q-1)D_q \quad (2.2.7)$$

si se conoce D_q , la dimensión general del sistema, podemos estimar α_i y $f(\alpha_i)$.

Resumiendo:

$\tau(q)$ Para distintos q , la probabilidad de los eventos es distinta. Este exponente de masa lo refleja, si es alto tendremos más eventos en la resolución q que con otro sistema con $\tau(q)$ bajo.

$\alpha(q)$ Al igual que arriba, la probabilidad varía, sin embargo existen probabilidades iguales, este parámetro mide la variedad de las densidades de los eventos en

un sistema en el nivel q . Si es alto, hay una mayor variedad de densidades a esa resolución.

$f(\alpha(q))$ Es la dimensión f del conjunto de regiones con un mismo $\alpha(q)$. Si D_q es la distribución de eventos en todo el sistema, este parámetro es la dimensión de las distintas regiones con el mismo α .

El grafo de $f(\alpha)$ vs α (figura 2.2.9)⁴⁷ otorga una descripción general de toda la estructura multifractal en términos de la extensión y variedad de las diferentes distribuciones de eventos.

⁴⁷Imagen tomada de Theiler, James *Estimating the fractal dimension of chaotic time series*. Aparece en The Lincoln Laboratory Journal, Volumen 3, Número 1, 1990. pp. 63-86. Esta imagen se encuentra en la p. 76

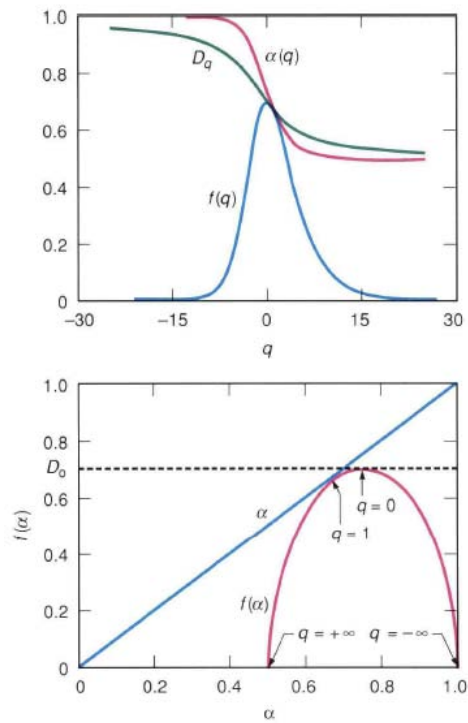


Figura 2.2.9: Dimensión Generalizada: (arriba) D_q como función de q para un típico multifractal. También aparece f y α como función de q para el mismo multifractal. (abajo) f como función de α , siempre será convexa hacia arriba y el máximo se alcanza en $q = 0$; aquí $f = D_0$. Obsérvese que $f(\alpha)$ es tangente a la curva $f = \alpha$, siempre en $q = 1$. En general el lado izquierdo de la curva corresponde a $q > 0$ y el derecho a $q < 0$.

Capítulo 3

Administrar en la incertidumbre, investigaciones con Multifractales.

El riesgo, como se mencionó en la introducción, se comprende como aquella parte de la incertidumbre que puede afectar negativamente una postura que se toma para intentar alcanzar un beneficio. Es decir, para beneficiarse cuando hay incertidumbre se debe adoptar una postura especulativa donde se asume que ésta será más benéfica que contraproducente, el riesgo se observa como la **probabilidad de que a futuro esto no suceda** (i.e. que sea contraproducente). La administración de riesgos de cualquier índole es parte del proceso de toma de decisiones de un ente donde metódicamente¹ se abordan los riesgos concernientes a su actividad buscando maximizar el beneficio de las acciones que realiza la entidad. La administración de riesgos de mercado aborda la gestión de activos financieros cuyos componentes son riesgosos, mediante la asignación de probabi-

¹Usualmente, el método se puede resumir en: Identificación de los riesgos, Cuantificación y control mediante el establecimiento de límites de tolerancia al riesgo, y finalmente modificación o nulificación de riesgos a través de la disminución de la exposición o de aplicar una cobertura. Rincón, Luis *Introducción a la teoría del riesgo*. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM. México, D.F 2012. p. 2

lidades a tareas, acciones o eventos que puedan producir efectos negativos en el valor de dichos activos². En materia de seguros, el riesgo suele verse como el monto total de las reclamaciones de una cartera de valores asegurados³.

A lo largo de este documento hemos advertido la existencia de diversos modelos matemáticos que hacen uso de ciertas herramientas estadísticas para describir los fenómenos del cambio de precios y el comportamiento del mercado. Los desarrollados en el capítulo primero, presentan su modelo basados en la *estadística paramétrica*; la cual analiza la información y la describe basando su criterio de caracterización en algún parámetro rector que define la distribución subyacente del fenómeno. Para el modelo multifractal que ha sido expuesto, la prueba $\frac{R}{S}$ pertenece a las pruebas estadísticas que son conocidas como *no paramétricas* debido a que, como el nombre indica, no asumen tal parametrización de la población. Sin embargo, encaja mejor en la distinción hecha por David Sheshkin⁴ en la que la *estadística no paramétrica* se distingue por evaluar la información de carácter *nominal* o *categorico* así como *ordinal* o *clasificadorio*; la contraparte se dedica a analizar la información mediante *intervalos* y *cocientes*.

Esta alternativa al enfoque paramétrico permite establecer un análisis asentado en la observación de la realidad. La violación de alguno de los supuestos de un modelo paramétrico y la omisión de este punto desemboca en un análisis errado y discordante con la evidencia empírica. Los puntos críticos donde la teoría convencional ha fallado en modelar, recordemos, son:

- *Escalamiento* de precios (autosimilitud en distintas escalas de tiempo).

²Banco de México, *Definiciones básicas de Riesgos*. Documento electrónico disponible en : <http://www.banxico.org.mx/sistema-financiero/material-educativo/intermedio/riesgos/%7BA5059B92-176D-0BB6-2958-7257E2799FAD%7D.pdf>

³*op.cit.* Rincón, p. 2.

⁴Sheskin, David J., *Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures*. U.S.: Chapman & Hall/CRC. Second edition. 2000. p. 33

- Memoria de Largo Plazo (persistencia).
- Agrupamiento de la volatilidad (*clustering*).
- Colas Pesadas (también conocidas como *hiperbólicas* o *Paretianas*).

Para compensar estos puntos débiles, se han ampliado las teorías mediante la agregación de parámetros, esto -según Yakov Lantsman y John Major⁵- sólo conduce a la inestabilidad de tales modelos, mermando así su capacidad predictiva. Entre ellos, cabe distinguir 3 tipos de procesos matemáticos actuales mediante los que se analizan los mercados financieros:

- Modelos discretos de regresión y medias móviles (A.R.M.A., por *Auto-Regresive Moving-Average*), los cuales han sido “parchados”, como ya se mencionó antes, para hacer que los conceptos arriba puntualizados, sean agregados a la simulación. Ya se mencionaron algunas variaciones del ARCH, el más cercano a las representaciones del modelo multifractal es el FIGARCH (éste incorpora a su modelación la memoria de Largo Plazo a la volatilidad) pero aún tiene desventajas hacia el escalamiento⁶.
- Modelos Aditivos, en los que la agregación de información se supone eficiente, entre ellos están la modelación mediante el Movimiento Browniano Fraccionario, el llamado Vuelo de Lévy y la versión de éste conocida como Vuelo de Lévy Truncado. Pero éstos caen en el campo de los *monofractales*, los cuales aún quedan con simulaciones deficientes.
- Los modelos más avanzados son los que se conocen como modelos de difusión, que nacen del aquí relegado movimiento browniano. Por ejemplo,

⁵*op. cit.* Lantsman & Major (2001b).

⁶Mandelbrot, Benoît, Fisher, Adlai, Calvet, Laurent, *A Multifractal Model of Asset Returns*. Cowles Foundation Discussion Paper #1164, Yale University, September 1997. p. 24

para modelar tasas de interés, el más simple es el de Merton, uno de los más sofisticados es el de Cox-Ingersoll-Ross (CIR); aunque sigue siendo analíticamente tratable. Pero estos modelos aún muestran debilidades para modelar tendencias locales, heterocedasticidad que no es función del interés y el agrupamiento de la volatilidad. El Andersen-Lund retoma el CIR y lo generaliza para generar esos eventos en un sistema de tres ecuaciones paramétricas, haciendo del análisis algo extenuante.⁷

Dado lo mencionado en las últimas secciones del capítulo anterior, hallar no linealidades en $\zeta(q)$ nos otorgará un buen argumento para no utilizar modelos aditivos para un proceso en estudio. Es de nuestro interés diversos resultados que hacen del multifractal un óptimo para una gran cantidad de fenómenos financieros que han sido estudiados, principalmente por encontrar curvaturas en $\zeta(q)$ para distintas series estudiadas. Además se muestran aplicaciones relativas a las diversas medidas multifractales en tópicos de interés para el administrador de riesgos.

Procedamos entonces a señalar ciertos resultados obtenidos mediante el análisis de la multifractalidad en ciertos fenómenos que son de especial interés e importancia para la comunidad actuarial, especialmente aquella involucrada con la administración del riesgo de mercados. Principalmente habrá una comparación entre la funcionalidad de un modelo basado en hipótesis del movimiento browniano ordinario (*MBr*), el fraccionario (*mbf*) y un multifractal.⁸

⁷Ver Anexo 3.3

⁸Es importante recordar que el hecho de tener un movimiento browniano, a pesar de ser fraccionario, como base del modelo en cuestión, el análisis se mantiene dentro de un campo aleatorio gaussiano.

3.1. Poblaciones

Los procesos fractales no sólo abordan tópicos físicos y biológicos, además se ha notado su presencia en fenómenos sociales. El más frecuente enfoque es la distribución poblacional en alguna región. Más de un estudio sugiere que las poblaciones humanas reproducen la organización fractal de la naturaleza a través de la morfología de las ciudades. Las estructuras que rigen la distribución de bienes y servicios por ejemplo han sido caracterizados por tener procesos escalantes del tipo descrito en la ec. 2.2.3. Geoffrey West ha realizado diversas investigaciones en las que ha encontrado que muchos factores relacionados al tamaño de la población crecen de acuerdo a alguna ley potencial subyacente⁹, desde el tamaño de los salarios, pasando por el número de gasolineras, de policías, enfermedades, cantidad de basura, índices de crimen, gente creativa (medida en número de patentes), empresas y el tamaño de ellas, etc. Encontrando que, generalmente, si se duplica el tamaño de la ciudad el crecimiento de cada una de estas cantidades es de aproximadamente 15%; con esto en mente, él propone generar sistemas mejor organizados y estructurados que mejoren la calidad de vida en las ciudades.¹⁰

Es por esto que es importante considerar la factibilidad de encontrar procesos fractales en diversos tópicos relacionados con la distribución humana, tema que es particularmente útil para la administración de carteras delimitadas por un espacio geográfico, por ejemplo para zonas de alta y baja frecuencia sísmica, pero igualmente pueden derivar en previsiones concernientes a la organización inteli-

⁹Se sugiere la exposición resumida de su trabajo disponible en la página electrónica: www.ted.com/talks/geoffrey_west_the_surprising_math_of_cities_and_corporations

¹⁰Esta exposición proviene de los temas tratados en sus artículos “*Growth, Innovation, Scaling, and the Pace of Life in Cities*”, “The origins of scaling in cities”, “*Invention in the city: increasing returns to patenting as a scaling function of metropolitan size*” y “*Urban scaling and its deviations: Revealing the structure of wealth, innovation and crime across cities*”. Todos disponibles a través de la página institucional de la Universidad de Santa Fe: www.santafe.edu/research/cities-scaling-and-sustainability/papers/

gente de nuevas poblaciones y la reestructuración de las normas e instituciones que dependen de las poblaciones existentes.

Un ejemplo de este enfoque está expuesto en el artículo de Murcio et al.¹¹ en el que analizan la evolución histórica de la red de calles de la ciudad de Londres (Figura 3.1.1 concluyendo que ésta se desarrolla entre dos ámbitos de fractalidad, no sólo la dimensión rígida de los monofractales, sino que existe una transición histórica de un proceso multifractal a uno monofractal, en este caso principalmente porque entre 1940 y 1965 se estableció un “cinturón verde” alrededor de la ciudad impidiendo la expansión territorial de la misma. El estudio se basó en nueve mapas de distintos periodos históricos del que se obtuvieron distintas medidas multifractales como D_q , $\alpha(q)$ y $f(\alpha(q))$, luego de obtener estos datos empíricamente, se procedió a simular un modelo de Agregación de Difusión Limitada (DLA, siglas de su nombre en inglés: *Diffusion-limited Aggregation*) en el que se reproduce un proceso multifractal de difusión de partículas. Los resultados están resumidos en la Figura 3.1.2 y son explicados a continuación, algunos de los datos utilizados más significativos -y una explicación de ellos- se muestran en el Anexo 3.3:

Al observar la evolución de las curvas de dimensión D_q a través de los q -momentos (mostrada en los incisos a) y c)), se remarca la importancia del incremento de la dimensión en el tiempo para q fijo. Se puede ver que la diferencia morfológica de un año a otro es inferible por el espacio entre las curvas. Por ejemplo, para $q = 5$ la evolución entre 1880 y 1900 es menos similar que la ocurrida entre 1900 y 1920; en los últimos tres años del inciso a), para todos los q , la diferencia es casi cero indicando que no es trivial encontrar mucha discrepancia en cuanto a la

¹¹Murcio, Roberto, Masucci, A. Paolo, Arcaute, Elsa, Batty, Michael *Multifractal to monofractal evolution of the London's street network*. Centre for Advanced Spatial Analysis. University College London. UK, Mayo 12, 2015.

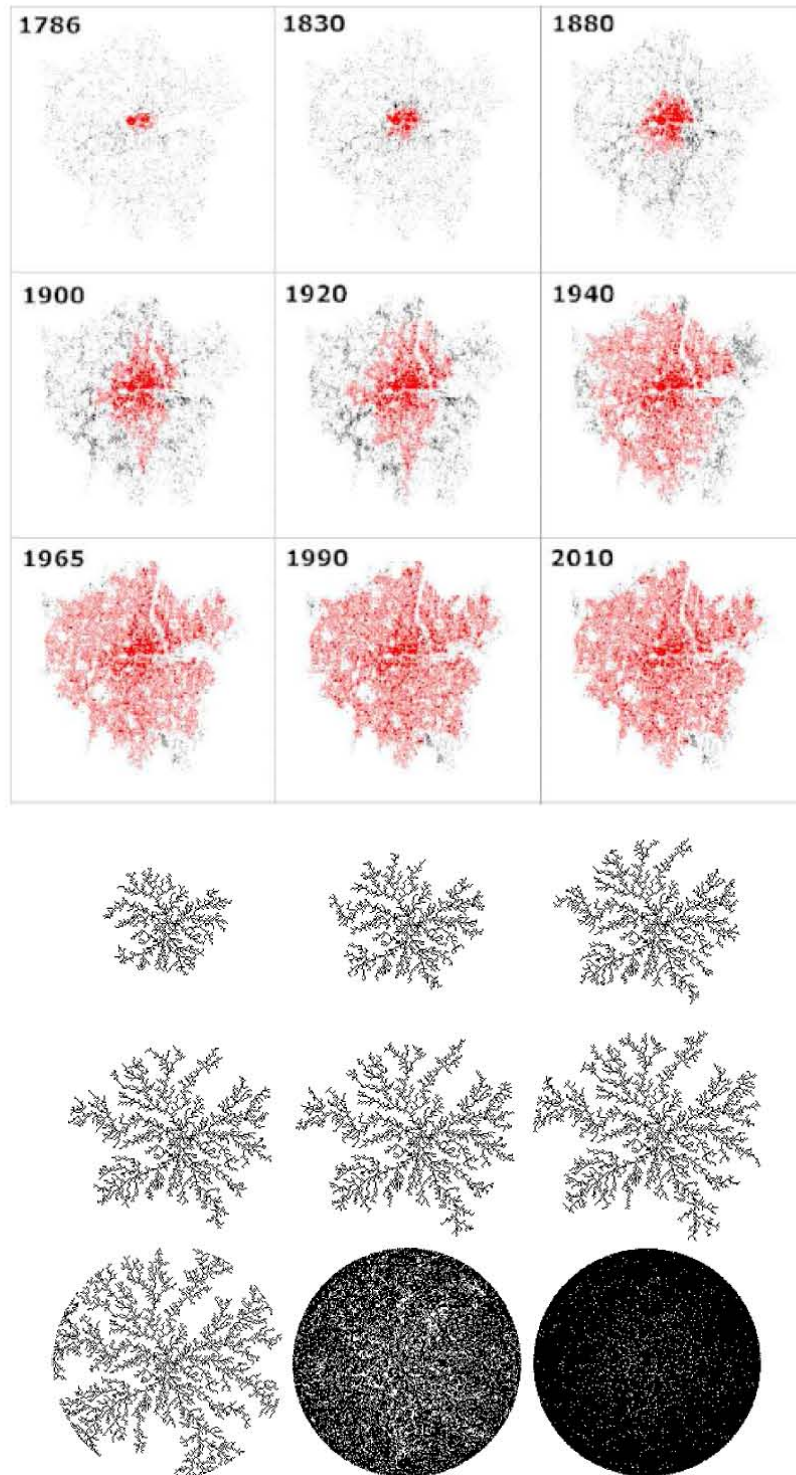


Figura 3.1.1: Desarrollo histórico de las intersecciones de las calles de Londres (arriba) marcadas en rojo. Simulación DLA con los parámetros fractales encontrados. Nótese que al alcanzar el límite establecido (en los tres últimos mapas y simulaciones) , el proceso pasa de ser describible a través de un espectro multifractal a uno más homogéneo, monofractal. En la simulación, las dos últimas imágenes saturan el espacio monofractalmente pero igualmente lo hace el kernel del proceso (los espacios en blanco).

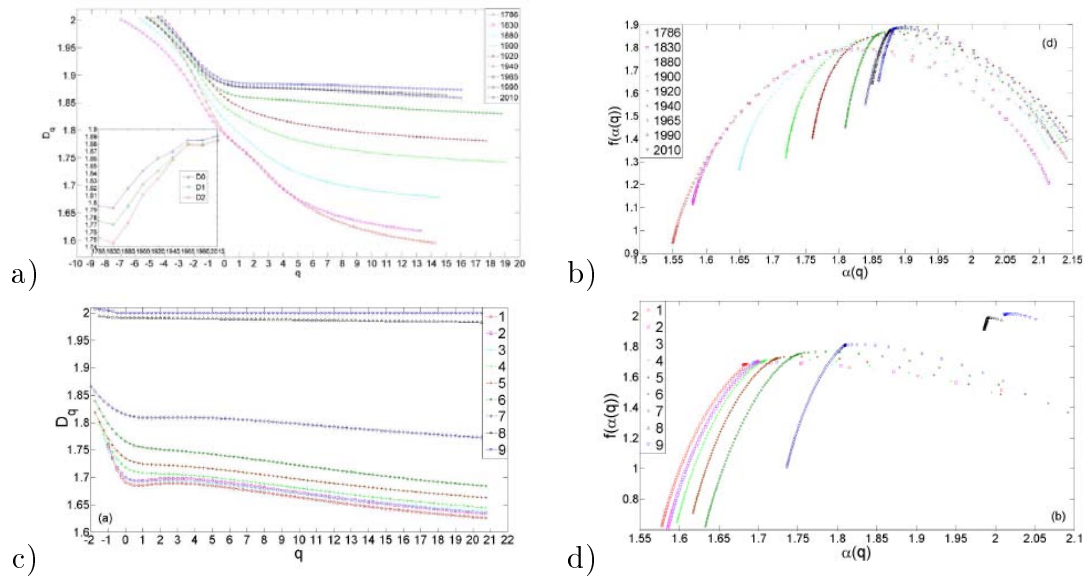


Figura 3.1.2: Análisis Multifractal de las intersecciones entre calles en Londres. Los incisos a) y b) corresponden a los datos obtenidos con los 9 mapas, los otros dos incisos corresponden a la simulación DLA. En la columna izquierda se trazan las dimensiones generalizadas contra los q momentos, la columna derecha muestra el espectro multifractal también llamado *curva* $f(\alpha)$.

distribución de las intersecciones. En el recuadro inscrito se ve que en el periodo de 1786-1920, $D_0 > D_1 > D_2$ lo cual es un claro indicio de multifractalidad; en el resto del tiempo la diferencia es cada vez menor, casi nula, lo que sugiere una transformación del sistema -una degradación de las propiedades multifractales-.

En seguida se observa la curva $f(\alpha(q))$ como función de $\alpha(q)$ (incisos b) y d)) que como ya se dijo, denota la dimensión fractal del conjunto con la misma fuerza de singularidad; cabe mencionar que esto implica que $f(\alpha)$ **no representa la dimensión de regiones continuas**. El lado izquierdo de la curva en relación con el máximo alcanzado en $q = 0$, se asocia a los $q > 0$, lo contrario para el otro lado. La asimetría de estas curvas reflejan de alguna manera la asimetría entre las distribuciones entre regiones con muchas/pocas intersecciones.

Otra observación que puede ser hecha tiene que ver con que las dimensiones de los α asociados a $q < 0$ sean mayores, siendo que estas zonas corresponden a

las de menor cantidad de intersecciones. En cambio, cuando el espectro colapsa a un sólo punto se entiende que la dimensión es la misma para todo $\alpha(q)$. Por ejemplo, en 1786 la dimensión de los espacios menos poblados es mayor que la dimensión de las zonas con muchas intersecciones. En los últimos tres años se alcanza a ver una tendencia a la reducción del espectro lo cual es consecuencia de que todas las regiones del sistema compartan la misma fuerza de singularidad o que todos los exponentes tienen la misma dimensión a distintas resoluciones; en cualquier caso se trata de un monofractal. Al estudiar la reducción de la simetría de la curva entre diferentes años se logra representar el hecho del incremento de la densidad de las intersecciones en años más recientes remarcando la hipótesis de la transición de multifractal a monofractal.

Las curvas obtenidas de simular un proceso difusivo restringido tienen rasgos similares a aquellos obtenidos del análisis empírico, a saber: diferenciación marcada entre periodos, tendencia al colapso del espectro multifractal, etc.

3.2. Seguros

Primeramente, la discusión de fenómenos que han sido modelados con procesos multifractales ha sido llevada a muchos campos en los que la incertidumbre aún juega un papel primario en el comportamiento del problema. Fenómenos como los hidrometeorológicos aún dependen de modelaciones varias; lo mismo sucede con la distribución poblacional en algún territorio, la misma forma geológica del terreno, etc. que han sido focos de interés para aplicar el análisis multifractal. Las aseguradoras de daños, tienen gran atención en la modelación de estos fenómenos que son actores esenciales en el rendimiento de una cartera de seguros, las posibles reclamaciones (la frecuencia de ellas) por destrucción a consecuencia de tornados,

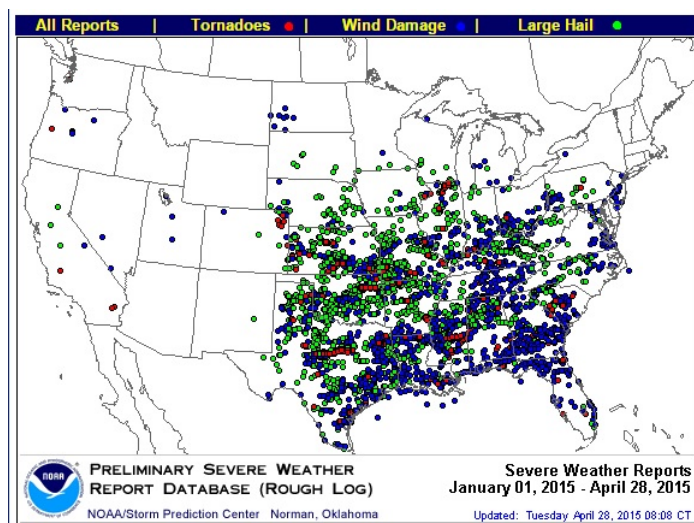


Figura 3.2.1: Reportes de tormentas de granizo (en verde), tornados (en rojo) y daño por ventisca (en azul). Se observan grandes porciones “blancas”, zonas con eventos escasos pero variables en cuanto a su intensidad -obsérvese la costa oeste- y zonas con gran aglomeración de reportes. Una simulación basada en la distribución uniforme del Valor Total Asegurado sobreestimaré el riesgo de pérdidas pequeñas y subestimaré las grandes. Para la distribución en un centroide, ocurrirá lo contrario.

huracanes y otros fenómenos, es un conocido problema de las matemáticas actuariales; los causantes son siempre puntos que deben ser tomados en cuenta a la hora de constituir una cartera; la repartición de los bienes asegurados, el grado de exposición a ciertos fenómenos y la intensidad de ellos, son todos participantes en el desarrollo de dicha cartera.

Yakov Lantsman y John Major hacen mención de la importancia de la modelación de fenómenos geográficos para el ámbito asegurador¹², por ejemplo, se examina la probabilidad de ser golpeado por un huracán de X nivel. Comúnmente, el enfoque ha sido el de agregar a los modelos de catástrofe, información por la extensión territorial promedio por código postal¹³, además de que la simulación está orientada a examinar huracanes, pero no los fenómenos que aunque intensos

¹²Major, John A., Lantsman, Yakov, *Actuarial Applications of Multifractal Modeling, Part I: Introduction and Spatial Applications*. Winter Forum, Casualty Actuarial Society, 2001. pp 321-349. En adelante se referirá a esta obra como Lantsman & Major (2001a).

¹³Se cuenta la frecuencia de ciertos eventos por zona

no alcanzan este grado, siendo que ocurren otros fenómenos (vientos de tormenta, tornados, tormentas de granizo, etc.) los cuales pueden generar pérdidas (pequeñas o grandes) en bastas áreas.

Los modelos utilizados para el pronóstico de estos fenómenos tienen dos enfoques: el primero asume una distribución aleatoriamente uniforme del Valor Total Asegurado; el otro, totalmente opuesto, lo asume concentrado en un punto (el centroide del área). Observando el mapa de la Figura 3.2.1¹⁴ se alcanza a notar la flaqueza de estos enfoques, el primero es “ciego” ante las zonas más claras (donde hay poca o nula ocurrencia de eventos) lo que desembocaría en una simulación con demasiadas pérdidas pequeñas e insuficientes pérdidas graves; el segundo enfoque conseguiría lo opuesto.

Para responder esta cuestión, los autores citados proponen un modelo multifractal que genere la distribución espacial de bienes asegurados, en el que se crea una red con propiedades multifractales; así, cuando analizan la proporción logarítmica de densidad y espacio del territorio norteamericano, surge (con una escala adecuada) la recta antes mencionada, característica de una ley de potencia presente. Luego, al estimar y trazar la curva $K(q)$ ¹⁵ obtenemos un multifractal de la distribución del portafolio con las propiedades observadas empíricamente. La figura 3.2.2 contiene un resumen del trabajo hecho por los autores respecto de la distribución espacial del portafolio además del mapa de reportes de tormenta de granizo en Estados Unidos con dos simulaciones multifractales.

Igualmente, el análisis de regiones sísmicas, de la frecuencia y magnitud de los eventos, ha sido abordado en años recientes con un enfoque multifractal del fenó-

¹⁴Storm Prediction Center: National Oceanic and Atmospheric Administration/National Weather Service. Página electrónica revisada el 28-IV-2015:

http://www.spc.noaa.gov/climo/online/monthly/2015_annual_summary.html

¹⁵El equivalente bidimensional de $\zeta(q)$, para mayor detalle ver Lantsman & Major (2001a) pp. 338,339.

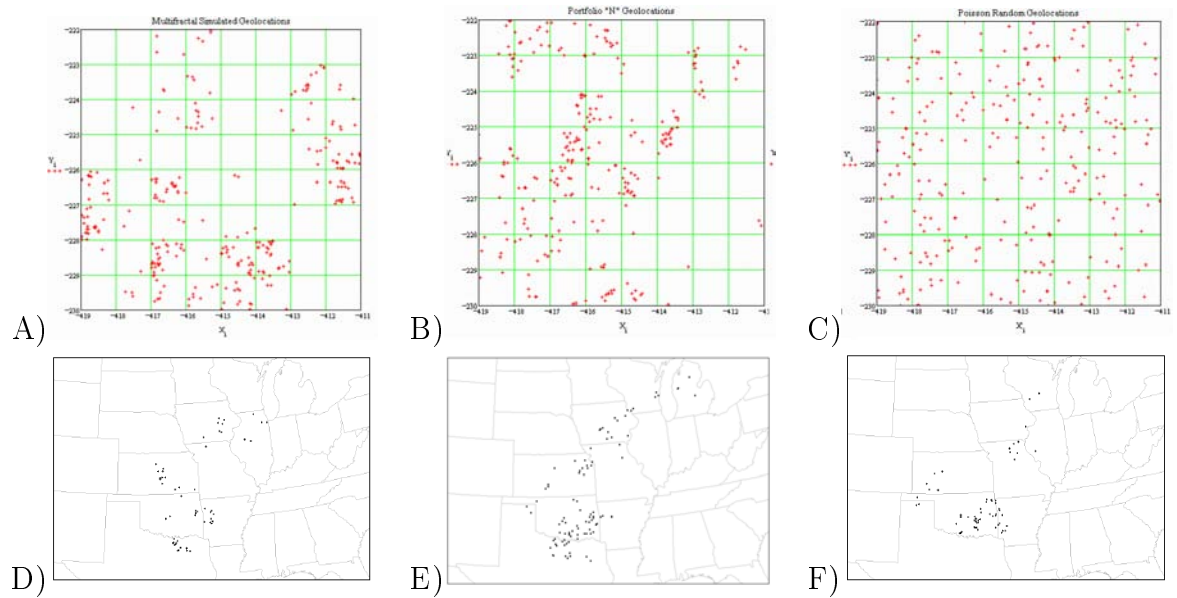


Figura 3.2.2: Mapas del portafolio

- A) Simulación Multifractal.
- B) Datos Reales.
- C) Simulación Poisson.
- D) Simulación multifractal de reportes de tormenta.
- E) Reportes reales del 30 de marzo de 1998.
- F) Otra simulación multifractal de reportes de tormenta.

meno. El impacto de dichos fenómenos magnifica la importancia de la investigación en este sector para el ramo asegurador, pero ello amerita un estudio separado y suficientemente amplio, lo cual va más allá del alcance del presente trabajo. El estudio presentado¹⁶ es de un sismo en México del 24 de Octubre de 1993 con epicentro a 100km de la ciudad de Acapulco. El objetivo es determinar si existe persistencia en el fenómeno estudiado a través del análisis de la serie temporal de señales electrosísmicas divididas en periodos mensuales, tomando muestras diarias de 6 horas de actividad. El enfoque abarca al espectro de potencias y su pendiente en cada uno de estos meses. Es decir, se busca un Ψ como en la ec. 2.2.3 que sea

¹⁶Ramírez-Rojas, A., Muñoz-Diosdado, A., Pavía-Miller, C.G., Angulo-Brown, F. *Spectral and multifractal study of electroseismic time series associated to the earthquake of 24 October 1993 in Mexico*. Aparece en: Natural Hazards and Earth System Sciences. European Geosciences Union, 2004. pp:703-709.

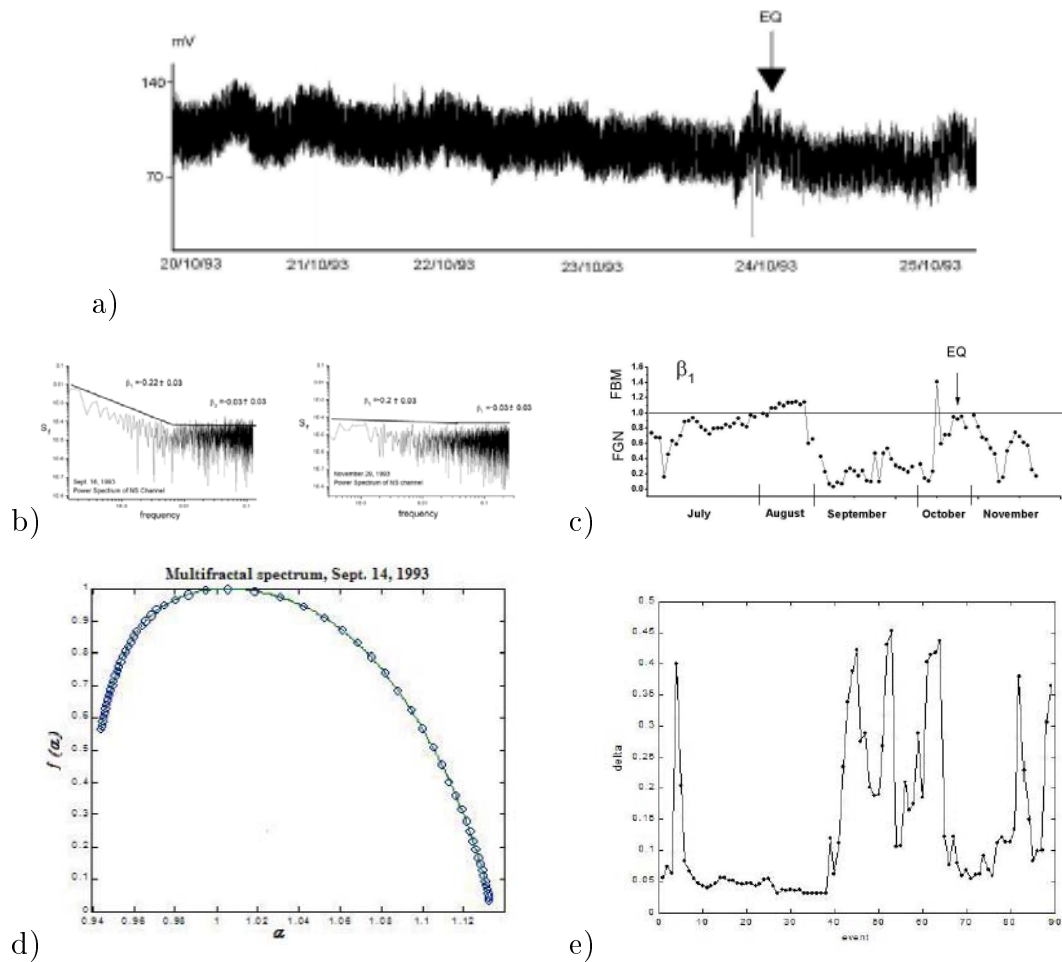


Figura 3.2.3: Análisis multifractal de señales electrosísmicas.

a) 6 días de la serie temporal de la señal. La flecha indica el día del sismo.

b) Espectro de potencias de Septiembre y Noviembre. Nótese el cambio de pendientes y que días posteriores a la ocurrencia del sismo ambas pendientes son casi nulas.

c) Evolución temporal de Ψ_1 . Obsérvese la gran perturbación al inicio de octubre.

d) Espectro multifractal, $f(\alpha)$ vs α de un día observado. Que la curva tenga más dimensiones pequeñas a medida que α crece, sugiere que la ocurrencia de eventos fuertes es poca en comparación con los eventos de baja intensidad que tienen dimensiones mayores.

e) El grado de multifractalidad $\Delta\alpha = \alpha_{\text{máx}} - \alpha_{\text{mín}}$ graficado en función del tiempo. Nótese la correlación inversa con el grafo c).

rector del proceso de cambios; en este caso surgió la necesidad de utilizar 2 de ellos para cada mes estudiado, i.e. Ψ_1 y Ψ_2 . En la figura 3.2.3 se observan algunos resultados de la investigación realizada.

Para todos los meses se encontró que el espectro requiere de ambos exponentes porque existe un cambio en las frecuencias de los datos registrados, Ψ_1 funciona para las frecuencias más bajas y usualmente implicaría multifractalidad en ellas; Ψ_2 describe frecuencias más altas. Es importante remarcar que casi siempre $\Psi_2 \approx 0$ con un comportamiento tipo ruido blanco. Para el otro exponente (inciso c) de la figura) se observa que el patrón sismológico es casi constante a través de julio y agosto ($0.55 < \Psi_1 < 1.1$), del tipo Ruido Gaussiano Fraccionario. Mes y medio antes del suceso, desde finales de agosto hasta la primera semana de octubre, hay un descenso en el rango en que se halla nuestro exponente ($0 < \Psi_1 < 0.55$), proceso que ya ha sido observado en estudios similares en otras regiones. En octubre y noviembre, las variaciones del exponente son más pronunciadas llegando hasta, aproximadamente, 1.7 dos semanas antes del suceso (0.8 en promedio para este periodo).

Todos estos rangos, salvo algunas excepciones, se mantienen en el orden de la persistencia descrita por el exponente de Hurst $0.5 < H < 1$, dada la propiedad $H = \frac{(\Psi+1)}{2}$ para el ruido gaussiano fraccionario. Este hecho otorga credibilidad a la inestabilidad perjudicial propia del sistema estudiado.

En el espectro multifractal se observó empíricamente una anticorrelación entre el ancho del espectro y la pendiente Ψ_1 a través del tiempo $\Delta\alpha \approx \frac{1}{3}(1 - \Psi_1)$, esta observación es una cuestión pendiente que requiere mayor análisis y rigor; sin embargo para casos prácticos es notable que la persistencia y el gran cambio (efectos José y Noé) evoca la gran variabilidad que pueden alcanzar las magnitudes sísmicas.

3.3. Finanzas

En el subcapítulo anterior se ha expuesto la importancia de la aplicación de multifractales en el área de interés de un actuario, pero para este trabajo, los Mercados Financieros son el verdadero objetivo a tratar. Mandelbrot es sólo el pionero del análisis multifractal en este ámbito, otros más han dedicado investigaciones respecto a la fractalidad de algunos índices y precios, generalmente en búsqueda de una dimensión fractal y sus parámetros rectores.

En la segunda parte del artículo de Lantsman y Major¹⁷ se analizan dos casos particulares, uno correspondiente al mercado de divisas (FX, del inglés *foreign-exchange*) y el otro a tasas de interés. El proceso de descomposición de las partes y de su análisis es el mismo para ambos casos:

1. Se examinan los datos en busca de intermitencia y autosimilitud. Esto se hace con el espectro de potencias (análisis log-log del cambio).
2. Se busca la función de estructura del sistema en cuestión para definir si es monofractal o multifractal y obtener características cualitativas.
3. Se buscan los parámetros de la forma universal de la función de estructura.
4. Con los parámetros encontrados, se simula una cascada multiplicativa usando como generador la forma universal del generador.
5. Se hacen inferencias respecto del proceso subyacente.

Ahora bien, $\zeta(q)$ -la función de estructura de los q momentos- tiene una forma

¹⁷*op. cit.* Lantsman & Major (2001b).

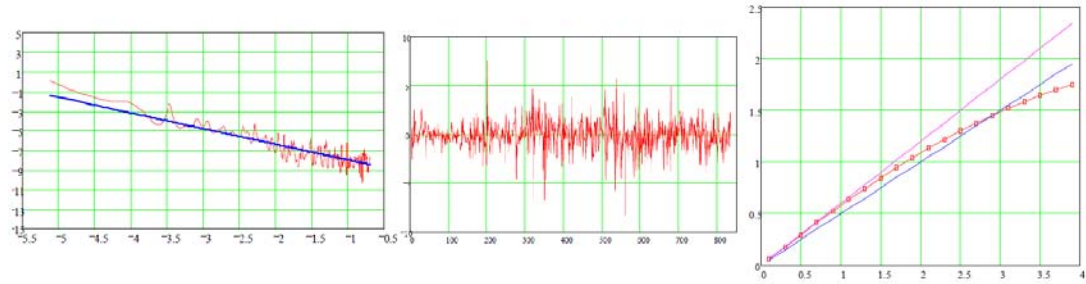


Figura 3.3.1: FX, espectro de los cambios (izquierda), tamaño de los cambios (centro) y función de estructura (derecha).

universal para el caso de un proceso no estacionario, a saber:

$$\begin{aligned} \varsigma(q) &= qH - \frac{Cl}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \\ K(q) - qH &= \begin{cases} \frac{Cl}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) & \alpha \neq 1 \\ Clq \log q & \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

donde $H = \varsigma(1)$, Cl es el parámetro de magnificación, y α es el índice de Lévy que ya mencionamos.¹⁸

De esta manera, el primer caso de FX es sobre la tasa spot de USD/GDM¹⁹ de 1975 a 1990. Su análisis espectral refleja una ley de potencias subyacente y por tanto, se puede aplicar la pendiente $m = 1.592$ de tal recta como estimador de β ; esto refleja que el proceso subyacente tiene incrementos estacionarios siendo en general un proceso no estacionario. En la Figura 3.3.1 se puede ver los cambios en escala logarítmica, el respectivo análisis de potencias ($\log E(\Delta X_\tau(t)^q) - \log(\tau)$) en el que se aprecia la linealidad de los q momentos implicando autosimilitud. Para la función de estructura $\varsigma(q)$, se grafica cada q con su respectiva pendiente y se obtiene la curva (roja) de la derecha. Aquí se graficó al lado de un movimiento browniano $m = 0.5$ (azul) y un mbf $m = 0.6$ (rosa). La curvatura de la función

¹⁸Ver *op. cit.* Lantsman & Major (2001a) pp. 340-343.

¹⁹Dólar americano y *Global Derivative Market* (Mercado global de derivados)

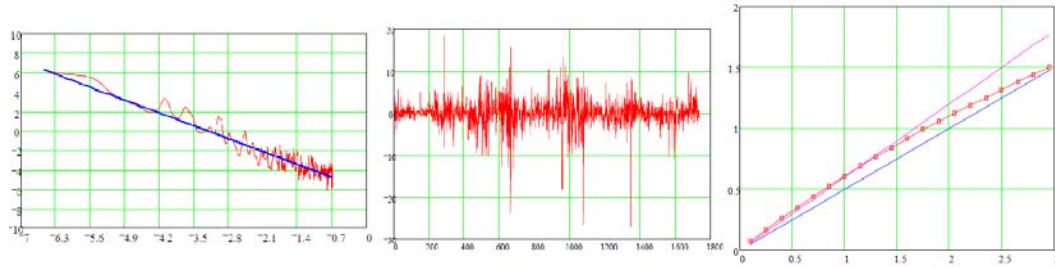


Figura 3.3.2: 3-month T-Bill Yield Rate, espectro de los cambios (izquierda), tamaño de los cambios (centro) y función de estructura (derecha).

de estructura es el signo característico de un fenómeno multifractal. Con estos datos se obtienen los parámetros de la ecuación universal: $H = 0.532$, $\alpha = 1.985$ y $Cl = 0.035$.

El siguiente caso (Figura 3.3.2) trata las observaciones semanales de la tasa de retorno para los bonos del tesoro norteamericano a tres meses (del 5 de enero de 1962 al 31 de diciembre de 1995). Se estima $\beta = 1.893$, lo cual implica un proceso no estacionario con incrementos estacionarios. Con esta información se realiza el análisis de potencias, que indica un proceso autoafín subyacente; la función de estructura, igualmente localizada entre las rectas de movimiento browniano normal y fraccionario, presenta la reconocible curvatura de un proceso multifractal. Para construir la cascada multiplicativa obtenemos $H = 0.612$, $\alpha = 1.492$ y $Cl = 0.095$.

Antes de pasar a otro caso, veamos en la Figura 3.3.3 que una simulación por Andersen-Lund tiene una función estructural muy similar a la del movimiento browniano, evidenciando un trabajo modelativo que carecerá del rango adecuado de variabilidad. Un portafolio constituido con esta acción que considere este modelo para dirigir el curso de sus cambios en el mercado, se verá expuesto a los riesgos del escalamiento de los precios en su sector.

Ahora, haremos mención del trabajo del español Jesús Muñoz, el cual analizó

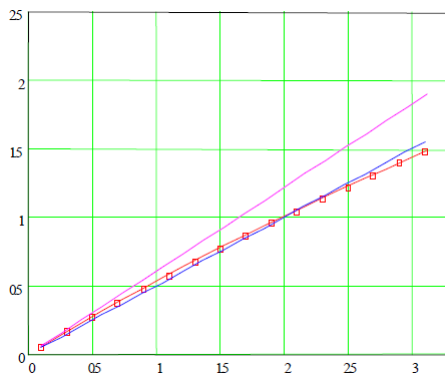


Figura 3.3.3: Función estructural de una simulación de tasas de retorno por Andersen-Lund.

la posible multifractalidad del IBEX35. En su artículo²⁰, Muñoz hace la distinción entre el movimiento browniano fraccionario y lo que llama movimiento L-estable, ambos con incrementos independientes, pero el último se distribuye con las mencionadas distribuciones L-estables. Como ya sabemos, la dimensión fractal (fraccionaria) D relaciona la variabilidad del proceso: a mayor D , mayor variación entre puntos próximos. Muñoz estima, a través de la dimensión cuenta cajas, que el IBEX35 exhibe una $D = 1.3663$ con un error de ± 0.202 . Del que se obtiene $H = 0.6337 \pm 0.0202$ y $\alpha = 1.5780 \pm 0.0520$. De estos datos podemos observar que la dependencia no se desvanece, el IBEX35 es persistente ($\frac{1}{2} < H < 1$) por lo que hay una cierta tendencia presente en cada cambio. El $\alpha < 2$ implica una distribución no gaussiana, con esperanza finita pero varianza infinita o inestable.

Estas investigaciones son sólo algunas de las que se han realizado en el escenario de los mercados financieros. Eugene Fama, halló distintos α 's para una gran cantidad de acciones bursátiles, precios de combustibles y demás; también Edgar Peters de PanAgora Asset Management, quien halló alta dependencia en acciones de empresas de alta tecnología (H alto)²¹.

En general, hay una cantidad considerable de modelos multifractales aplicados a

²⁰ *op. cit.*

²¹ Ambos casos son citados en *op. cit.* Mandelbrot (2009a)

las finanzas²², como son:

- La alternativa al método de generación de multifractales a través de la cascada binomial de Mandelbrot (MMAR) y sus limitaciones, que la dan Laurent Calvet y Adlai Fisher en 2001: el “Poisson MMAR”, en lugar del cuadro binomial, toma que $\theta(t)$ será obtenida mediante la división de un espacio cuyos puntos de corte en cada iteración serán determinados por una distribución Poisson.
- En el mismo trabajo presentan una versión a tiempo discreto, el “Markov-Switching Multifractal Model”.
- Modelos Bivariados, presentados en el 2006 por los mismos autores.
- Ruipeng Liu generaliza en 2008 el caso N-dimensional de los retornos financieros.

Una respuesta al problema de la limitación temporal del MMAR que necesita rigurosamente de varianza infinita, la da el Modelo Quasi-multifractal, el cual genera propiedades multifractales sólo en ciertos rangos de q , con lo que se evitan ciertas inconsistencias, es decir, no hay propiedades multifractales en escalas infinitas de resolución sino en un rango finito. Este proceso como el descrito en la sección referente a poblaciones, evoca una transición del sistema multifractal a uno monofractal.

Existe también un modelo que fusiona procesos quasi-multifractales y la teoría convencional del ARCH, en lo que se conoce como el Modelo Multifractal Autoexcitado, que ubica a la volatilidad de los retornos, no como una constante sino

²²Recopilados en: Segnon, Mawuli, Lux, Thomas. *Multifractal models in finance: their origin, properties and applications*. Kiel Working Paper No. 1860. Germany: Kiel Institute for the World Economy. Agosto, 2013.

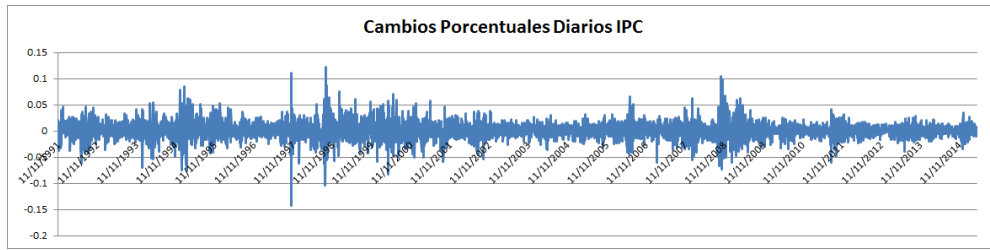


Figura 3.3.4: Variación porcentual de los cierres diarios del IPC del 11 de noviembre de 1991 al 29 de abril de 2015. Obsérvese la agrupación de la variabilidad a lo largo de la década de los 90 y del 2005 en adelante.

como un proceso con memoria que decae lentamente.

En general el modelo multifractal puede ser aplicado a cualquier serie de tiempo que presumiblemente cumpla las características de tener una ley potencial subyacente, siendo esto observado por la frecuencia de los cambios, los cuales no admiten la curva gaussiana (en las colas principalmente). Este capítulo concluirá con un análisis del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores buscando la presencia de multifractalidad en la medición de los cierres diarios del índice. El análisis de este índice es de carácter empírico pues aún carece de una prueba rigurosa de la existencia de multifractalidad en él; la idea principal es precisamente indicar la posibilidad de que este tipo de índices financieros son propensos a exhibir multifractalidad y lo que ello conlleva: estacionariedad (o la ausencia de ella) y algún grado de autoafinidad. El índice mexicano es bastante joven en comparación con el amplio historial de otros mercados, por ejemplo el Dow Jones, por lo que hacer conjeturas rigurosas sobre el primero pudiera ser un tanto aventurado, ya que no existe ningún estudio sobre el particular. El análisis realizado aborda los siguientes aspectos:

En primera instancia (ver Figura 3.3.4), los datos observados son las diferencias diarias de los puntos del índice tomados al cierre²³. Se alcanza a notar el

²³Datos tomados de Yahoo! Finanzas el 30 de abril de 2015, serie disponible en: <https://es-us.finanzas.yahoo.com/q/hp?s=%5EMXX+Precios+hist%C3%B3ricos>

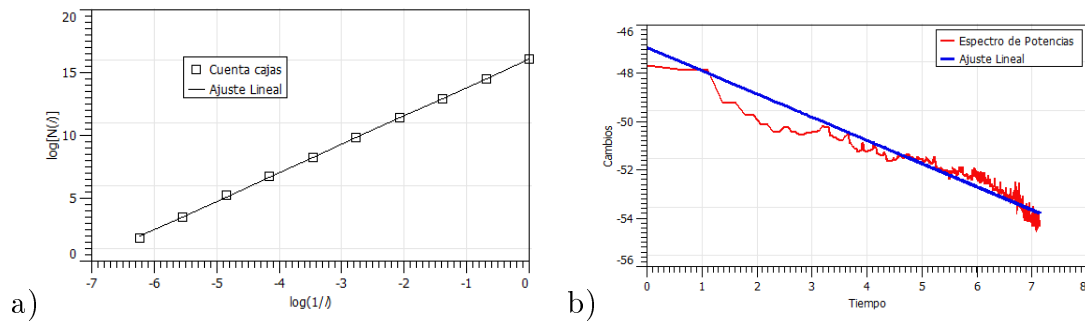


Figura 3.3.5: a) Dimensión cuenta cajas de IPC.

b) Espectro de potencias. Se observa, en azul, un ajuste lineal dejando entrever un escalamiento subyacente en el espectro -rojo- lo cual sugiere la presencia de fractalidad en el proceso. Elaboración propia

aglutinamiento de la volatilidad en ciertos periodos, notablemente resaltan los periodos de volatilidad cuyas causas son varias pero resaltan la especulación por la firma del Tratado de Libre Comercio de América del Norte en 1992 y su posterior aplicación en 1994; en este año además ocurre el llamado “Error de Diciembre” que desata la crisis conocida globalmente como el “Efecto Tequila”. En seguida, la crisis rusa en el '97 repercutió en los mercados, y en el '98 a consecuencia del tratado antes mencionado, se eliminaron los aranceles de diversos bienes. Más adelante se observaron las repercusiones de la burbuja Dot-com mencionada en el primer capítulo, seguida de un lustro de aparente “calma” para luego encontrarse con el fatídico golpe que fue el 2008 para una economía tan ligada a la norteamericana como lo es la nuestra.

Continuando con el análisis empírico, se toma el logaritmo de los cierres y se busca una ley potencial subyacente en el proceso. Esto se ha realizado con una Regresión Lineal simple dando como resultado la imagen del inciso a) en la Figura 3.3.5. Presumiblemente se nota una tendencia lineal en el comportamiento logarítmico de los valores del índice. Así, podemos buscar fractalidad en el proceso. A continuación, en el inciso b) de la misma figura, el espectro de potencias reitera lo observado en la imagen anterior, una tendencia de escalamiento potencial en la

serie, lo que confirma por un lado que sea caracterizable de una dimensión fractal y por el otro, que dicha propiedad permite la derivación de un proceso definido a través de los parámetros de estabilidad y estacionariedad: α y H , respectivamente.

Para ello, tomemos como referencia el procedimiento seguido por Jesús Muñoz en su análisis del IBEX35 (ver el desarrollo resumido en la última sección del Capítulo 2 y la obra citada para mayor detalle), en la que se procede a calcular la dimensión fractal $-D$ - de la serie para luego vincularla al índice estable α y obtener también el exponente de Hurst H , mediante la relación:

$$D = 2 - \frac{1}{\alpha} = 2 - H$$

Para encontrar la dimensión, hemos tomado en cuenta la Dimensión Cuenta-cajas, por simplicidad -y accesibilidad-, aplicada al grafo de la serie cambios del IPC antes visto y ha sido analizado a través de un programa computacional especializado en el análisis de datos e imágenes, el cual otorga la capacidad de encontrar una aproximación a esta dimensión mediante el análisis de imágenes de superficies autoafines a través del llamado *microscopio de fuerza atómica* ²⁴. De esta manera la dimensión obtenida empíricamente es $D_{IPC} = 1.26$ con un error de ± 0.23 . Con esta información se deduce que $H_{IPC} \approx 0.74$, lo cual indica persistencia en el índice, los incrementos (o decrementos) de los intervalos $[0, t]$ y $[t, t + h]$ tienden a ser del mismo signo, es decir si creció en uno lo seguirá haciendo en el siguiente y viceversa para el caso en que decrece. En cuanto al índice de estabilidad, se tiene que $\alpha \approx 1.3513$, lo cual asegura que se tendrá esperanza finita localmente pero la varianza es infinita y las colas son más pesadas que las que con un proceso browniano se podrían asumir.

²⁴Un tipo de análisis perteneciente a la variedad de Microscopios de Sonda de Barrido (en inglés se conoce como *Scanning Probe Microscopy*, SPM). El utilizado para este documento, es un programa de código abierto llamado Gwyddion (versión 2.40, con fecha de lanzamiento del 7 de febrero de 2015).

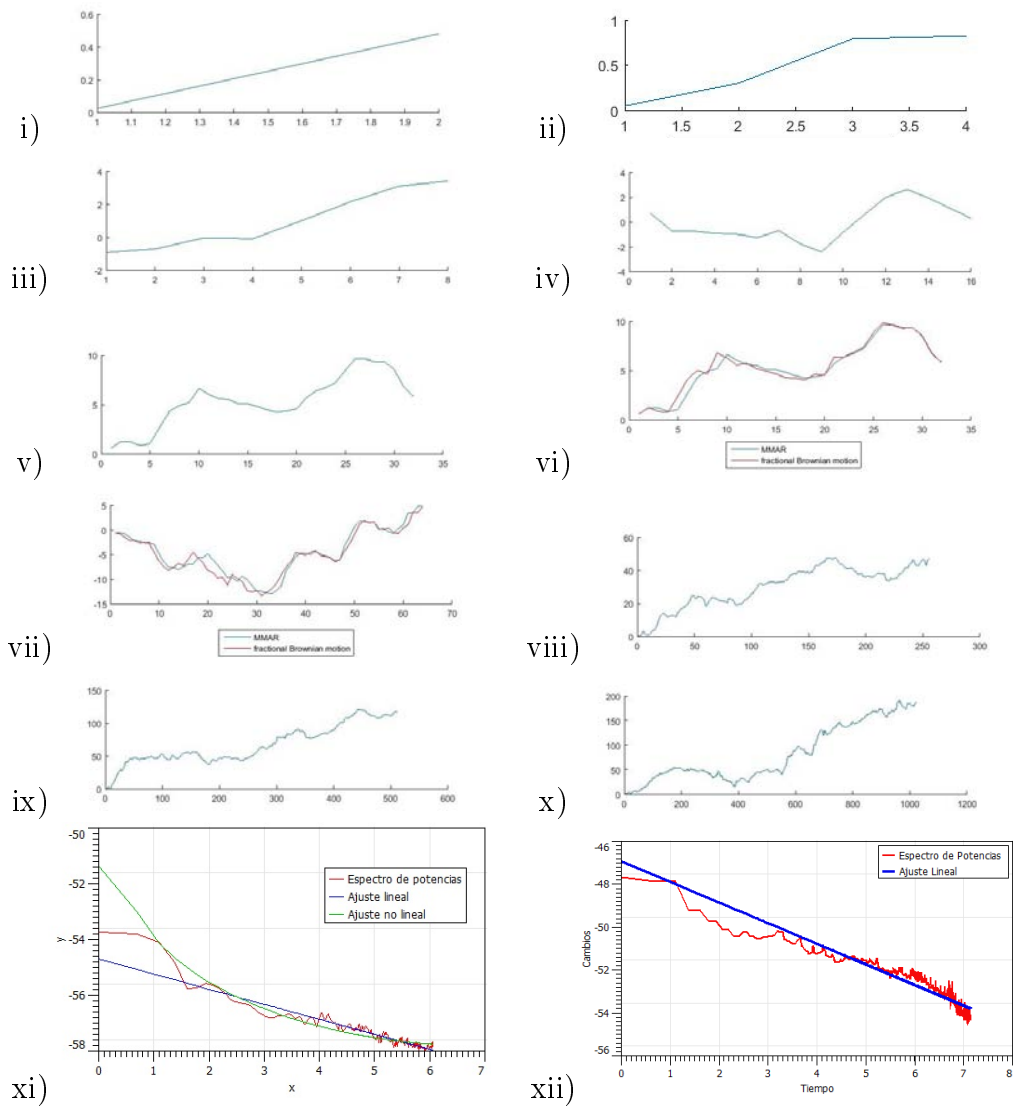


Figura 3.3.6: El MMAR del IPC. Simulación de 10 momentos: de 2 a 1000 días.

vi), vii) compara el MMAR con un Movimiento Browniano Fraccionario, se observa la “expansión” del proceso debida a la medida multifractal.

xi) y xii) Espectros de potencias, MMAR e IPC observado respectivamente. El ajuste no lineal implica la multifractalidad del proceso simulado.

De aquí en adelante, no queda más que hacer la comparación entre índices, el IBEX35 y el IPC muestran ligeras diferencias, sin embargo hay que notar que el grado de irregularidad es mayor en el índice español; la dimensión fractal y el índice de estabilidad lo reflejan. El mercado español es más volátil que el nuestro, o de menos se puede asegurar que tiene cambios más bruscos. Además, el índice mexicano muestra tener mayor reticencia al cambio espontáneo que el otro índice, sus tendencias prevalecen en mayor medida que las del IBEX35. Un inversionista cauto podría asegurarse de tener mejores posibilidades de no caer en bancarrota apostando por nuestro mercado, alguno un tanto más atrevido y dispuesto a tomar mayores riesgos buscaría en el índice español alguna retribución más significativa. Ahora bien, con base en el conocimiento de las medidas multifractales de estos índices se podrá desarrollar la *estrategia en tiempos de incertidumbre* llamada así por Hugh Courtney²⁵. En ella, el riesgo es observado a través de la sectorización de los mercados, dividiendo la incertidumbre en cuatro niveles:

- El primero, se basa en encontrar tendencias claras del futuro, cosas del orden gaussiano: crecimiento poblacional, escolaridad, etc.
- El segundo, hay ciertos escenarios específicos de entre un conjunto de alternativos, que resultan de ciertos cambios que son evidentes de antemano con el análisis adecuado: la elasticidad de la demanda, resultados de la tecnología vigente, etc. Los resultados posibles son claros y específicos, no es posible saber cuál ocurrirá y la mejor estrategia dependerá del que prevalezca.
- En el tercero y cuarto niveles, luego del análisis queda lo que denomina *incertidumbre residual*. Para el tercer nivel, funciona como un abanico de

²⁵Courtney, Hugh, Kirkland, Jane, Viguerie, Patrick *Strategy under uncertainty*. USA: McKinsey. 1997. Aparece en Harvard Business Review, Estrategia en tiempos de incertidumbre. Trad. Rafael Aparicio Aldazabal. España: Ediciones Deusto, S.A. 1999. pp. 1-36.

posibilidades que pueden surgir de ciertos escenarios esenciales. No hay un claro panorama dado que cualquier estrategia podría cambiar si alguna de estas variables se conociera de antemano. Este caso es particularmente visible en los mercados emergentes.

- En el cuarto nivel, hay una total ambigüedad, tanto en las causas como en las consecuencias, no se puede formar el abanico de posibilidades porque no hay escenarios esenciales claros. Este nivel se caracteriza por ser transitivo, luego de ser introducido a él, hay un desplazamiento hacia los demás niveles de riesgo.

Para contrarrestar el efecto de la incertidumbre, hay estrategias que cubren cada nivel:

- Para el primer nivel, la estrategia generalmente consiste en adaptarse al mercado y al sector, conforme las previsiones y la calidad de ellas demuestren que son aptas de ser guía en un escenario establecido. Como *Gateway 2000* y su línea de bajo costo de computadoras personales adquiridas en línea, un mercado ya explotado por *Dell* pero con miras a la expansión de la demanda. Otra postura, menos frecuente pero igualmente aceptada, es la de reconfigurar el mercado introduciendo formas nuevas que modifiquen las estructuras prevalecientes, pero esto provoca que la incertidumbre residual aparezca donde no existía.
- El segundo nivel es afrontado directamente mediante el aumento de la probabilidad de que se produzca un escenario en particular. El caso en que la reconfiguración del mercado derive en este nivel de riesgo, hay una estrategia principal que puede ser rápidamente adaptada conforme el evolucione

el curso de los hechos. Es decir, hay posturas pequeñas y anticipadas que proporcionan posiciones privilegiadas ante el cambio.

- En el tercer nivel no se busca que un escenario prevalezca ya que hay una gran cantidad de ellos, se busca que todo el mercado o sector tome una dirección general. El reservarse el derecho de participación también es una postura común. Para las finanzas, este es el caso frecuente de la protección mediante los contratos de opciones.
- El último nivel, como ya se mencionó, es transitorio y dada la total dispersión de posibilidades no hay una estrategia que pueda denominarse “la mejor”; lo que se busca entonces, es crear un análisis de la estructura y los criterios del sector el cual permita coordinar la evolución del mercado hacia niveles más estables. Aquí, reservarse el derecho a participar puede ser peligroso dado que se pierde una gran oportunidad de éxito, aunque también de fracaso por lo que la postura habitual es la mencionada antes, favorecer la transición a los otros niveles.

Como se puede advertir, las herramientas del análisis de los niveles de riesgo que utiliza el autor son aún pocas. El objeto de este trabajo es presentar la idea de solución a esta necesidad, mediante la utilización de fractales para crear un orden de la variabilidad sin recurrir a descripciones exhaustivas ni predicciones puntuales; la categorización del riesgo y los niveles de la volatilidad son propicios para generar un panorama general del estado y comportamiento de los mercados para construir las estrategias adecuadas.

Conclusiones

Al agotar los aspectos generales y particulares de esta exposición sobre los beneficios de tomar en cuenta el fenómeno fractal en la toma de riesgos financieros, se pudo constar que en el ámbito de la administración de riesgo, los mercados financieros son más erráticos e impredecibles de lo que las probabilidades gaussianas suponen. Consecuencia de ello es que existan tantos casos donde la adopción de este nivel de aleatoriedad como rector del proceso evolutivo de la volatilidad, ha concluido en reveses inesperados para quien (usualmente por conveniencia técnica) se fía de modelos construidos sobre este concepto para la toma de decisiones.

La construcción de un modelo estadístico representativo del comportamiento del mercado debe incluir en su estructura: distribuciones de colas pesadas, agrupamiento de la volatilidad de precios y debe tomar en cuenta en sus cálculos la dependencia temporal de ciertas variables. El objetivo de este trabajo consistió en demostrar pues la ventaja de incluir el análisis fractal de curvas en las herramientas disponibles, ya que esas características son parte de su formulación, para con ello generar un modelo realista del comportamiento de los mercados.

El fenómeno fractal -y en particular el multifractal de la turbulencia- permite generar procesos aleatorios cuyas propiedades coinciden con los puntos mencionados arriba. La forma como la multifractalidad genera complejos sistemas a través de similitudes (autosimilitud) y afinidades (autoafinidad) de variables más simples

estadísticamente medibles, permiten su aplicación en un amplio rango de ciencias.

A la cuestión de utilizar distribuciones de probabilidad óptimas que permitan generar grandes variaciones, las L-estables son las propuestas como solución para la medición estadística de los mercados financieros pues permiten generalizar el Teorema Central del Límite hacia variables aleatorias que requieran colas pesadas además de que uno de sus parámetros funciona a modo de medida para el grado de “concentración” de lo aleatorio. La dependencia temporal y el agrupamiento de la variación son eventos que surgen intrínsecamente de la invarianza estadística propia de un multifractal.

El hecho de que sea un modelo ampliamente adoptado por diversas ramas de las ciencias duras que buscan describir sistemas aparentemente caóticos que están limitados a cierta estructura de fondo, como suelen ser los fenómenos propios de la naturaleza, sugiere que es así como los sistemas naturales se desarrollan. Esto puede fortalecer a la hipótesis de que los fenómenos sociales, tan íntimamente ligados a la evolución de los procesos naturales, se acoplan a un comportamiento de este tipo, multifractal.

Cabe hacer notar que esta herramienta simplifica la comprensión del proceso evolutivo de los mercados al efectuar simulaciones con semillas fractales que nacen de la evidencia empírica de los mismos mercados. Tal simplificación proviene de comprender que, primero, no se parte de la HME, esto ya es de por sí un notable adelanto pues si Bachelier necesitó de ella para que su modelo fuera consistente, el MMAR no asume tal postura. Luego, un grafo de precios generado por semillas fractales es un proceso un tanto determinista ya que se obtiene directamente al conocer las medidas adecuadas, estas medidas permiten establecer la relación y fuerza de los efectos Noé y José (varianza inestable y larga dependencia, respectivamente) que cada uno aporta a los mercados partiendo de que la influencia de

los compradores y vendedores muestran un comportamiento irregular.

Bajo tales premisas, las medidas del análisis multifractal son herramientas útiles que sirven para describir el grado de aleatoriedad que presenta un conjunto de datos y el estado de los mismos. Es decir, al ser capaces de formular y describir la estacionariedad del sistema se puede orientar, desde la administración financiera de riesgos, la creación de un plan de acción que tenga el alcance necesario para cubrir cada nivel de riesgo vinculado al valor de H de un portafolio. Como se vio en el tercer capítulo, estas mismas medidas permiten descartar otras herramientas de análisis por medio de la función de estructura, el caso de la simulación Andersen-Lund es prueba de ello; se puede crear una especie de prueba de escalamiento para tests estadísticos a través de estas medidas, la cual determinará la competencia del test para analizar los datos del fenómeno en cuestión.

El actuario, como profesional especializado en la administración del riesgo, debe poseer en su formación académica un conjunto de herramientas diversas que le otorguen alternativas de modelación y simulación que faciliten la comprensión de los fenómenos que presentan esa naturaleza de riesgo. En el ámbito de la administración financiera, el análisis multifractal aquí expuesto debe tomarse, no obstante, con reserva y cautela, ya que el modelo aún requiere de demostración de su validez generalizada para periodos mayores a un año, con el fin de propiciar su aplicación en distintos sectores financieros y económicos. Sin embargo en un espacio de temporalidad adecuado, usualmente en espacios menores a 180 días la multifractalidad es una herramienta importante; encontrar regularidad en un proceso irregular es ya en sí un gran paso hacia adelante en el camino de la comprensión causal y modal de los fenómenos aleatorios.

APÉNDICES

Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Definición 1. Espacio Topológico

Sea X un espacio, τ se dice que es una Topología en X si:

1. Los conjuntos \emptyset y X , el vacío y el espacio mismo, pertenecen a τ .
2. Para todo $U_{i \in \Lambda} \in \tau$, i denota un elemento del conjunto de índices Λ ; la unión arbitraria de U_i 's pertenece a τ .

$$\bigcup_{i \in \Lambda} U_i \in \tau$$

3. La intersección finita de U_i 's pertenece a τ .

$$\bigcap_{i \in \Lambda} U_i \in \tau$$

Al par (X, τ) se le denomina Espacio Topológico y U será un conjunto abierto en X .

Definición 2. Cubrimiento de un espacio.

Una colección \mathcal{A} de subconjuntos del espacio X , se dice que cubre a X o que es un cubrimiento de X , si la unión de elementos de \mathcal{A} coincide con X . \mathcal{A} es

un cubrimiento abierto de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X .

$$\bigcup A \subseteq X; \forall A \in \mathcal{A}$$

Definición 3. Orden de un conjunto.

Una colección \mathcal{A} de subconjuntos de X se dice de orden $m + 1$ si algún punto de X pertenece a $m + 1$ elementos de \mathcal{A} , y no existe ningún punto en X que pertenezca a más de $m + 1$ elementos de \mathcal{A} .

Definición 4. Refinamiento de un conjunto.

Sea \mathcal{A} una colección de subconjuntos de X , se dice que \mathcal{B} refina a \mathcal{A} , o que es un refinamiento de \mathcal{A} si, para todo $B \in \mathcal{B}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$.

Definición 5. Dimensión Topológica

Un espacio X se dice que es de *Dimensión Finita* si existe algún entero m , tal que para todo recubrimiento abierto \mathcal{A} de X existe un cubrimiento abierto \mathcal{B} de X que refina a \mathcal{A} y que tiene orden $m + 1$ como máximo.

La *Dimensión Topológica* de X se define como el menor valor m que satisface lo anterior, y se denota (en este documento) por $D_T(X)$.

Definición 6. Medida de Hausdorff.

Sea X un espacio métrico (donde la noción de distancia esta bien definida), sea \mathcal{A} un subconjunto de X , y $d \geq 0$. Sea A_i^r el i -conjunto cerrado de diámetro r . La medida de Hausdorff d -dimensional, $\mathcal{H}^d(\mathcal{A})$, se define como:

$$\mathcal{H}^d(\mathcal{A}) = \inf \left\{ y > 0 : \forall \rho > 0, \rho < r, \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i < \infty} A_i^\rho \right\}$$

donde además

$$\sum r_i^d < y$$

$\mathcal{H}^d(\mathcal{A})$ puede ser infinito a medida que r decrece y d no es necesariamente un entero.

Definición 7. Dimensión de Hausdorff.

La dimensión de Hausdorff, $D_H(\mathcal{A})$ se define como:

$$\inf \{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(\mathcal{A}) = 0\}$$

Vuelo de Lévy

Este anexo es un breve resumen de la obra de Chechkin et al.²⁶, para mayor detalle se recomienda remitirse al documento original. Como preliminar importante, se puede ver en *La Geometría Fractal de la Naturaleza* (p. 409), que para Mandelbrot, un “Vuelo de Lévy” es un proceso definido en términos de la función de supervivencia de la distribución de pasos de tamaño U :

$$\Pr(U > u) = \begin{cases} 1 & : u < 1 \\ u^{-D} & : u \geq 1 \end{cases}$$

además D se vincula con la dimensión fractal del proceso y es un caso particular de la distribución Pareto. En general, toda proceso aleatorio para el que la función de supervivencia de su distribución muestre colas que sigan una ley potencial: $\Pr(U > u) = \mathcal{O}(u^{-k})$, para $1 < k < 3$ es un Vuelo de Lévy.²⁷

Básicamente se trata de que cada incremento tenga distribución hiperbólica (o de colas pesadas), i.e.

$$\Pr(U > u) \approx \frac{1}{x^a}$$

²⁶Chechkin, A. V., Metzler, R., Klafter, J. and Gonchar, V. Yu. *Introduction to the Theory of Lévy Flights*, en *Anomalous Transport: Foundations and Applications* (2008) (eds R. Klages, G. Radons and I. M. Sokolov), Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany. Capítulo 5, pp.129 - 162

²⁷La notación $\mathcal{O}(\cdot)$ hace alusión al comportamiento límite de una función cuando el argumento tiende a un valor en particular o al infinito.

con $x \rightarrow \infty$, $0 < a$. Esto implica que el segundo momento diverge y por tanto, no puede hacerse uso del Teorema Central del Límite ordinario.

Esta descripción induce un tipo de movimiento aleatorio, siendo el browniano un caso pero a diferencia de éste, se generan aglomeraciones de puntos, y por ende de trayectorias, a las cuales se accede por un otro gran desplazamiento en alguna dirección cada cierto tiempo.

Matemáticamente, el Vuelo de Levy es un proceso estocástico definido como una caminata aleatoria en tiempo continuo en términos de la pareja $\lambda(\xi)$ y $\psi(\tau)$, distribuciones del tamaño del salto y tiempo de espera, respectivamente. Cada paso es caracterizado por el tamaño ξ proveniente de la distribución λ , y el tiempo τ entre dos pasos se distribuye de acuerdo a ψ (esto implica que se asume un paso inicial instantáneo). Entonces la distribución conjunta de esta caminata se puede expresar por

$$\Pr(\xi, \tau) = \lambda(\xi) \psi(\tau)$$

De la que, si se quiere conocer la posición del proceso en el tiempo t , la distribución $W(x, t)$ se calcula mediante la transformada de Laplace-Fourier de esta función:

$$W(k, u) = \frac{1 - \psi(u)}{u} \cdot \frac{1}{1 - \lambda(k) \psi(u)}$$

donde $\psi(u)$ es la transformada de Laplace y $\lambda(k)$ es la transformada de Fourier. Lo interesante de un modelo así definido, son las anomalías que surgen al utilizar distribuciones Lévy-Estables:

- Si $\lambda(\xi)$ es gaussiana ($\alpha = 2$) con varianza σ^2 y $\psi(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$, se obtiene que la distribución de densidad conjunta es gaussiana

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Kt}} \exp\left\{\frac{-x^2}{4Kt}\right\}$$

que es un proceso de difusión con constante $K = \frac{\sigma^2}{\tau_0}$. Su segundo momento corresponde a un desplazamiento que crece linealmente con el tiempo: $E[x^2(t)] = 2Kt$. Esto indica que es un movimiento browniano ordinario en escalas de tiempo y espacio muy grandes.²⁸

- Si $\lambda(\xi)$ es gaussiana y se asume una distribución sesgada en un solo lado para $\psi(\tau)$, con índice estable $0 < \alpha < 1$, la transformación genera $\psi(u) \simeq 1 - (ut_0)^\alpha$ que diverge para el segundo momento. Este proceso es conocido como subdifusión, donde no hay una escala temporal que delimite el espacio microscópico (eventos de pasos únicos) del macroscópico (a nivel de escalas tipo $f(x, t)$, que ya no es de dominio gaussiano).
- Finalmente, tomando $\psi(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$ con una alta curtosis, pero $\lambda(\xi)$ es ahora Lévy-estable con $0 < \alpha < 2$. Se obtiene un proceso markoviano cuya varianza diverge, sus momentos fraccionales escalan de la forma $E[|x(t)|^q] \propto (K_\alpha t)^{\frac{q}{\alpha}}$, donde $K_\alpha = \frac{\sigma^\alpha}{\tau_0}$. Esto se conoce como un proceso súperdifusivo. Su función de densidad es del tipo

$$W(k, t) = \exp\{-K_\alpha \cdot |k|^\alpha \cdot t\}$$

que es la función característica de una distribución Lévy-estable, simétrica y de índice α . Cuando se encuentra este tipo de proceso se dice que es un Vuelo de Lévy.

²⁸ $\delta(\tau - \tau_0)$ es la llamada Delta de Dirac que, como función de distribución de densidad se define:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

Prueba R/S, estimando el exponente de Hurst²⁹

El Análisis R/S consiste en encontrar la distancia que ha recorrido un fenómeno en una unidad temporal n : $R(n)$, el rango ajustado, es “normalizado” al reescalarlo a una media nula, y es expresado en términos de la desviación estándar local S , i.e. $\frac{R}{S}$.

Tomando distintos n , es posible formular la relación

$$\frac{R}{S_n} = C \cdot n^H$$

donde C es una constante y H es el exponente de Hurst. A continuación, el procedimiento para estimar H es:

1. En una serie temporal de datos (para este tema, por ejemplo, se toman las variaciones diarias de algún índice) se toma la muestra X_t , $t = 1, \dots, T$.
2. La muestra total, de tamaño N , es dividida en i submuestras de iguales: $n = \frac{N}{i}$.
3. Se calcula la media y desviación estándar local (de cada submuestra):

$$m_{N,t_0} = \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} \frac{x_t}{N}$$

$$S_{N,t_0} = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} [x_t - m_{N,t_0}]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

4. Luego, se obtiene una nueva serie que medirá la diferencia acumulada respecto a la media de los datos:

$$Y_{N,t_0}^\tau = \sum_{t=t_0+1}^{t_0+\tau} [x_t - m_{N,t_0}]$$

con $1 \leq \tau \leq N$.

²⁹Peters, Edgar *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1994. pp. 53-57.

5. El rango R de cada submuestra es obtenido de la diferencia entre el máximo y mínimo de las diferencias acumuladas para cada submuestra:

$$R_{N,t_0} = \max_{\tau} Y_{N,t_0}^{\tau} - \min_{\tau} Y_{N,t_0}^{\tau}$$

6. El estadístico R/S se obtiene de dividir la suma de los rangos con la suma de las desviaciones encontradas anteriormente:

$$\frac{R}{S_N} = \frac{\sum_{t_0} R_{N,t_0}}{\sum_{t_0} S_{N,t_0}}$$

7. Dado que se asume una ley potencial subyacente, el exponente H es obtenido de la regresión:

$$\log \frac{R}{S} = a + H \cdot \log N$$

Análisis espectral de la invarianza de escala

Estos resultados se obtienen de una de las distintas obras de Davis et Al.³⁰ en las que abordan el tema del análisis multifractal de datos. Ellos principalmente desarrollan el tema aplicado a fenómenos geofísicos (señales geofísicas). Este es una simplificación de los conceptos relacionados con la función de estructura y su valor para datos que presentan (aparentemente) varianza inestable.

Si de un proceso aleatorio unidimensional (una serie temporal) $\phi(x)$ con $N + 1$ valores reales en un intervalo $[0, L]$ y muestreado a razón de $\frac{1}{l}$, es decir $\frac{x}{l} = 0, 1, \dots, N$ ($N = \frac{L}{l}$), se observa alta fluctuación, irregularidad y posiblemente discontinuidades, se está en presencia de un complejo problema físico al que la única simetría aplicable es una posible invarianza de escala. Así r , la escala, será

³⁰Davis, Anthony, Marshak, Alexander, Wiscombe, Warren *Wavelet-based Multifractal Analysis of non-stationary and/or intermittent geophysical signals*. USA: NASA Goddard Space Flight Center, Climate & Radiation Branch. Aparece en: *Wavelets in Geophysics* Efi Foufoula-Georgiou, Praveen Kumar (editores). Academic Press, pp. 249-298.

el parámetro a analizar buscando comportamiento estadísticamente robusto de ley de potencias.

Primero, hay que buscar “estacionariedad” (en esencia invarianza bajo traslaciones) en la serie de datos analizada. El estadístico más simple dependiente de la escala de un proceso estacionario es su función bipuntual de auto-correlación:

$$G_\phi(r) = E[\phi(x)\phi(x-r)] \sim r^{-\mu_\phi}$$

donde $l \leq r \leq L$, $0 < \mu_\phi < 1$. Esto último dado a que se espera que las correlaciones decrezcan a medida que la separación aumenta ($\mu_\phi > 0$) para luego precipitarse rápidamente ($\mu_\phi \geq 1$).

Otro estadístico de segundo orden comúnmente utilizado es el espectro de energía $\varepsilon_\phi(k)$:

$$\varepsilon_\phi(k) = \sum_{\pm} E[\hat{\phi}(\pm k)\hat{\phi}(\pm k)^*] \sim k^{-\beta_\phi}$$

donde $\frac{1}{L} \leq k \leq \frac{1}{2l}$, $0 < \beta_\phi = 1 - \mu_\phi < 1$. $(\cdot)^*$ es la transpuesta conjugada y $\hat{\cdot}$ es una transformada de Fourier. En el límite $\mu_\phi \rightarrow 0$ (i.e. $\beta_\phi \rightarrow 1$) se espera correlación de largo rango (o plazo), síntoma de estacionariedad. Los procesos con $1 < \beta_\phi < 3$ tienen incrementos estacionarios. Muchos sistemas turbulentos se encuentran en esta categoría.

En turbulencia, los campos y señales aleatorios invariantes de escala son caracterizados por estadísticos condicionados a la escala, la cual sigue una ley potencial. Para la señal de onda $\varpi(x)$ que aproximará un incremento de $f(r)$, se tiene la transformación

$$T_\varpi[f](a, b) = \frac{1}{a} \int f(x) \varpi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

entonces el tamaño esperado del cambio en la función $f(r)$ es

$$E[|\Delta f(r)|^p] \approx \frac{1}{L} \int_0^L |T_\varpi[f](a, b)|^p db, \quad 0 < r \leq L, p > -1$$

Entonces, para buscar comportamiento multi-escala, hay que caracterizar cada incremento dentro de todo el rango de escalas, lo cual trata directamente el problema de la no-estacionariedad. Para ello se toma el incremento independiente $\Delta\phi(r, x) = \phi(x) - \phi(x - r)$

luego, se presume que

$$E [|\Delta\phi(r, x)|^p] \sim r^{\zeta_\phi(p)}$$

con $l \leq r \leq L$, $-1 < p < \infty$. La normalización requiere de que $\zeta_\phi(0) = 0$. La transformada de Legendre permite dar una interpretación formal a la medida multifractal $\zeta_\phi(p)$, ella genera un espectro $D_\phi(h)$ que se toma por la dimensión fractal del intervalo $[0, L]$. Así, de $E [|\Delta\phi(r, x)|] \sim r^{h(x)}$ el exponente local de Hurst es $h(x) = h$. Cuando hay incrementos débilmente variables, es decir $E [|\Delta\phi(r, x)|^p] \approx E [|\Delta\phi(r, x)|^p]$, se tiene que $\zeta_\phi(p) = p \cdot H$, en otras palabras, una función con escalamiento simple o mono-escalante donde $0 < H < 1$. El límite inferior ($H \rightarrow 0$) lleva a procesos con escalamiento estacionario. El superior, a procesos diferenciables casi en todas partes. Si $\zeta_\phi(p)$ no es lineal, entonces es necesariamente cóncava ($\zeta_\phi''(p) < 0$) y se crea la jerarquía de exponentes $H_\phi(p) = \frac{\zeta_\phi(p)}{p}$. Dos valores de p resultan notorios:

$p = 2$ indica una dualidad entre $\varepsilon_\phi(k)$ y $E [(\phi(x) - \phi(x - r))^2]$, la cual es llamada *función de estructura*. Para procesos escalantes esto deriva en que el exponente β_ϕ es de la forma

$$\beta_\phi = 2 \cdot H_\phi(2) + 1 \geq 1$$

donde la igualdad se da en el límite de estacionariedad ($H_\phi(2) \rightarrow 0$). Después del límite opuesto ($H_\phi(2) \rightarrow 1$) se tiene que $1 < \beta_\phi < 3$.

$p = 1$ permite crear una relación directa entre la dimensión fractal $D_{g(\phi)}$ del gráfico $g(\phi)$ de la señal $\phi(x)$, viéndolo como un objeto autoafín en espacio

bidimensional:

$$H_1 = H_\phi(1) = 2 - D_{g(\phi)} \geq 0$$

una vez más, la igualdad se da en el límite de estacionariedad ($H_1 \rightarrow 0$) donde $D_{g(\phi)} = 2$ (la gráfica llena el espacio). El otro límite implica un proceso diferenciable casi en todas partes y gráficos con $D_{g(\phi)} = 1$. Entonces en procesos escalantes, la estacionariedad estará acompañada de más rugosidad (aspereza) y discontinuidad; la no-estacionariedad, de más uniformidad y continuidad.

Cuando $H_\phi(p)$ no es constante, se puede hablar de procesos multi-afines. H_1 es entonces un cuantificador de primer orden para la no-estacionariedad invariante de escala y toda la jerarquía de $H_\phi(p)$ es un medio para calificarla.

ANEXOS

Tres modelos matemáticos para analizar mercados financieros

Un modelo de difusión general tiene la forma $dX = \mu(X, t) dt + \sigma(X, t) dW$ donde W es una caminata aleatoria gaussiana.

- Merton: $dr_t = \theta \cdot dt + \sigma \cdot dW$; r_t es la tasa al tiempo t , θ es el promedio de crecimiento del proceso y σ es la volatilidad.
- CIR: $dr_t = \kappa \cdot (\theta - r_t) dt + \sigma \cdot r_t^{\frac{1}{2}} \cdot dW$; κ es la constante de reversión media y θ es la media total del proceso.

$$dr_t = \kappa_1 (\mu_t - r_t) dt + \sigma_t \cdot r_t^\gamma \cdot dW_{1,t}$$

- Adersen-Lund: $d \log \sigma_t^2 = \kappa_2 (\alpha - \log \sigma_t^2) dt + \xi_1 \cdot dW_{2,t}$;

$$d\mu_t = \kappa_3 (\theta - \mu_t) dt + \xi_2 \cdot \mu_t^{\frac{1}{2}} \cdot dW_{3,t}$$

esto se puede ver como una generalización del CIR, con γ en vez de $\frac{1}{2}$ y en el que la media y varianza evolucionan en sus propias difusiones.

Medidas Multifractales

Este resumen es una asimilación de lo descrito en la obra de Murcio et. al³¹ y Theiler³².

Sea $\mu(x)$ el valor de la medida μ en la posición x . La cantidad de esta medida en un volumen $V(\epsilon, x)$ delimitado por la vecindad de x de tamaño ϵ se define como

$$\mu_\epsilon(x) = \int_{V(\epsilon, x)} \mu(y) dy$$

para un monofractal se tendrá que la medida es homogénea $\mu(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$, siendo D la dimensión fractal.

Como un multifractal tendrá distintas medidas en lugares distintos, se puede subdividir en regiones alrededor de vecindades x_i donde una distribución es asociada a cada región. Si se normaliza la medida (que suma 1), tal distribución se puede construir de la siguiente manera:

$$P_i(\epsilon) = \mu'_\epsilon(x_i) = \frac{\mu_\epsilon(x_i)}{\int \mu(y) dy}$$

entonces la medida será

$$P_i(\epsilon) \sim \epsilon^{\alpha_i}$$

α_i es la fuerza de la singularidad local, referido como el exponente de *Lipshitz-Hölder*, la cual puede no ser única pues habrá otras subdivisiones que tengan un valor similar. El número de éstas que comparten un mismo α_i viene dado por:

$$\mu(\alpha_i, \epsilon) = \epsilon^{-f(\alpha_i)}$$

donde $f(\alpha_i)$ es la dimensión fractal del conjunto de subdivisiones con fuerza de singularidad α_i . Es decir que mientras más ϵ -región tengan la misma intensidad, mayor será la dimensión; en el caso de tener un sólo punto, la dimensión es cero.

³¹ *op. cit.*

³² *op. cit.*

Ya que se tiene una función de distribución $P_i(\epsilon)$ para las medidas de intensidad en la ϵ -región del sistema, ésta se puede caracterizar a través de sus momentos estadísticos:

$$Z_q(\epsilon) = \sum_i P_i(\epsilon)^q$$

en $q = 0$ se tiene el número de cajas $N(\epsilon)$ de tamaño ϵ necesarias para cubrir el sistema $Z_0(\epsilon) = N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$. Luego, como α_i es el exponente de escalamiento de $P_i(\epsilon)$ con respecto de ϵ , $Z_q(\epsilon)$ también debe seguir tal principio.

$$Z_q(\epsilon) = \sum_i P_i(\epsilon)^q \sim \epsilon^{-\tau(q)}$$

donde $\tau(q)$ es el exponente de masa definido por

$$\tau(q) = q \cdot \alpha(q) - f(\alpha(q))$$

o en términos de la dimensión generalizada descrita por la ecuación 2.2.6,

$$\tau(q) = (q - 1) D_q$$

Si se conoce D_q entonces se pueden obtener los valores de α y $f(\alpha)$

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [(q - 1) D_q]$$

$$q = \frac{d}{d\alpha} [f(\alpha(q))]$$

de esta última ecuación se infiere que $f(\alpha)$ alcanza su máximo en $f(\alpha(0))$ y para todos los demás valores de q la dimensión es menor.

La interpretación dada a las distintas medidas es como sigue:

D_0 corresponde a la mencionada *dimensión cuenta-cajas* (de capacidad). Determina la probabilidad de encontrar un evento en la vecindad establecida, pero es totalmente ciega a la masa dentro de cada ϵ -caja. Esto implica que hay sistemas que comparten dimensión pero no hay información acerca de la distribución de la densidad de los eventos.

D_1 se calcula con el límite de $q \rightarrow 1$, se conoce como la *Dimensión de Información*.

Mide la disparidad de la distribución de densidad puntual en las ϵ -cajas. Si su valor es mayor en comparación con otro sistema similar, se entiende que hay una distribución uniforme de los eventos en el sistema (saturación del espacio o estructuras regulares puntuales).

D_2 llamada *Dimensión de Correlación* debido a que mide la dimensión de la correlación entre pares de eventos A y B, i.e. la probabilidad de que ambos estén en la misma ϵ -caja. Para objetos espaciales, esta dimensión resulta más útil que la de capacidad pues toma en cuenta la estructura espacial del sistema. Si su valor es bajo, la estructura del fenómeno es poco rígida, mientras que los valores más grandes indican estructuras compactas y ordenadas.

en general, cada q otorga la posibilidad de elegir distintas secciones del fenómeno de acuerdo a su relativa P_i , convirtiéndose entonces en un parámetro de resolución (zoom). Así, un sistema con valores positivos de q corresponde a medidas multifractales para frecuencias altas y lo opuesto para $q < 0$.

Los datos más relevantes, utilizados para el estudio de las calles de Londres se encuentran resumidos en la siguiente tabla:

Año	q	D_0	D_1	D_2	$\alpha(0)$
1786	[-5.00,14.25]	1.7959	1.7697	1.7467	1.8287
1830	[-7.00,13.25]	1.7926	1.7698	1.7448	1.8187
1880	[-5.75,14.50]	1.8252	1.7950	1.7722	1.8487
1900	[-4.75,19.00]	1.8434	1.8252	1.8109	1.8658
1920	[-4.25,17.75]	1.8602	1.8431	1.8322	1.8824
1940	[-5.25,18.75]	1.8699	1.8619	1.8586	1.8820
1965	[-5.25,16.00]	1.8850	1.8803	1.8780	1.8927
1990	[-4.50,15.00]	1.8851	1.8793	1.8766	1.8948
2010	[-4.50,16.00]	1.8913	1.8858	1.8842	1.9004

Portafolios multifractales

Recientemente, la difusión del modelo multifractal en las finanzas ha provocado la inserción de nuevos conceptos y modelos para aplicar la teoría multifractal de mandelbrot a portafolios de inversión. Existen tres líneas principales en la investigación de dichos portafolios:

- La Teoría Jerárquica del Portafolio de Muzy et al³³. que aprovecha la invarianza de escala para generar portafolios multivariados basados en activos analizados simultáneamente a través correlaciones en horizontes de tiempo distintos y activos distintos.
- Los “portafolios de riesgo mínimo” de Alexandre Pantanella et al. quienes optan por adecuar la teoría del portafolio de Markowitz alterando el supuesto de que los retornos financieros se distribuyen de acuerdo a una normal multi-

³³Muzy, J.F., Sornette, D., Delour, J., Arneodo, A. *Multifractal returns and Hierarchical Portfolio Theory*. Agosto, 2000. Disponible [en línea]: <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0008069v2.pdf>

variada ³⁴ para hacerlo consistente con la teoría multifractal de turbulencia. Entonces si la aversión al riesgo se vincula con el tamaño de la varianza que lo mide, el portafolio toma como medida de riesgo a H y busca maximizar el portafolio con activos con $0.5 < H < 1$ pues estos valores implican una reducción de los periodos de volatilidad pronunciada. Así, su trabajo concluye que en periodos de 1, 2, 3, 6 y 12 meses estos portafolios tiene mejores rendimientos que la teoría convencional.

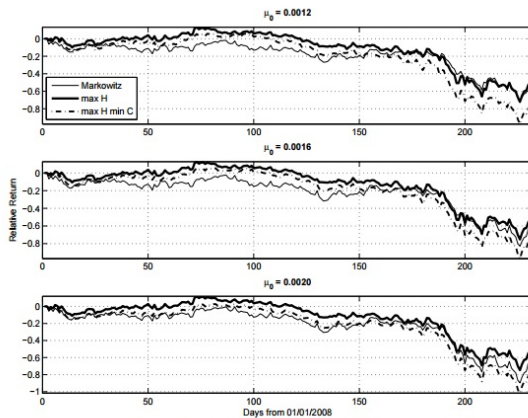


Figure 1: Europe Relative Returns

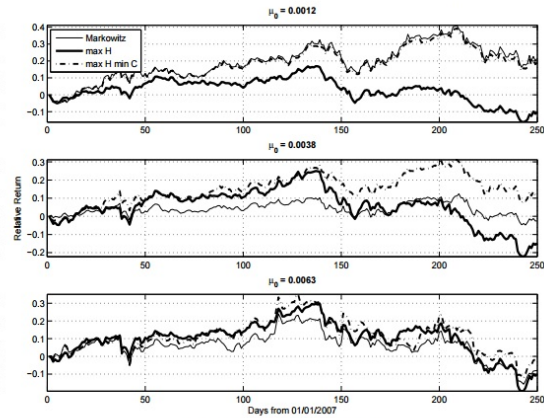


Figure 2: USA Relative Returns

En

la figura se observan dos portafolios formados por acciones europeas (Figure 1) y otro con acciones norteamericanas (Figure 2). La línea negra más gruesa es un portafolio creado bajo parámetros del MMAR maximizando H ; la línea punteada igualmente es un portafolio de riesgo mínimo pero se agrega a la función objetivo minimizar C , la matriz de covarianzas del portafolio, comparado con un portafolio de Markowitz (línea indicada en la imagen) en general, durante 150 días los portafolios basados en multifractales tienen mejores rendimientos que uno construido con la teoría del portafolio de Markowitz.

- Otra corriente proviene del Análisis de Fluctuación Sin Tendencia (*Detrended Fluctuation Analysis, DFA*) que busca autoafinidad en una serie estocástica

³⁴ *op. cit.* Pantanella et al.

removiendo cualquier indicio de influencia de largo plazo para solo dejar al corto plazo, aunado a la hipótesis de multifractalidad (MF-DFA) se pretende maximizar $h(q)$ (versión de H obtenida a través de un MF-DFA a una serie) de manera similar a Pantanella et al. pero la diferencia de este enfoque es que el MF-DFA aborda series sin estacionariedad. Este modelo mostró un mejor desempeño que un portafolio constituido bajo Markowitz en el mercado chino.³⁵

³⁵Xiaobo Wen, Hui Wang, Zongfang Zhou, Hua Zhang *The Return-Risk performance-The comparisson of asset portfolio performance of Institution Fund with that based on Multifractal Detrended Fluctuation Approach*. Marzo, 2012. Disponible en [en línea]: <http://dx.doi.org/10.4236/me.2012.34059>

Nomenclatura

M.F.	Mercados Financieros
L.G.N.	Ley de los grandes números
T.C.L.	Teorema Central del Límite
μ	Media
σ	Desviación Estándar
V.A. i.i.d.	Variable aleatoria, independiente, idénticamente distribuida
HME	Hipótesis de los Mercados Eficientes
DJIA	Dow Jones Industrial Average
CAC 40	Cotation Assistée en Continu
FTSE 100	Financial Times Stock Exchange
Nikkei 225	Nihon Keizai Shimbun
IBEX 35	Índice Bursátil Español
CAPM	Capital Asset Pricing Model
APT	Arbitrage Pricing Theory
CBOE	Chicago Board of Options Exchange
OTC	Over-the-Counter
LTCM	Long- Term Capital Management
FED	Reserva Federal de E.U.
CDO	Collateralized Debt Obligations
CDS	Credit Defaul Swap
MBr	Movimiento Browniano Ordinario
$\frac{P}{E}$	Relación Precio-Ganancia

ARCH	Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
D	Dimensión fractal
d_T	Dimensión Topológica
d_s	Dimensión de Similitud
d_C	Dimensión Cuenta-cajas
d_E	Dimensión Euclidiana
H	Exponente de Hurst
α	Exponente de singularidad o característico
$\frac{R}{S}$	Prueba estadística Rango-Desviación Estándar
$f(\alpha)$	Dimensión multifractal
mbf	Movimiento Browniano Fraccionario
MMAR	Multifractal Model of Asset Returns
$\zeta(q)$	Función de Estructura de Invarianza de Escala
α_i	Exponente de Hölder
D_q	Dimensión Genelalizada
ARMA	Auto-Regresive Moving-Average
CIR	Cox-Ingersoll-Ross
DLA	Diffusion-Limited Aggregation
FX	Foreign Exchange
USD	Dólar Norteamericano
GDM	Global Derivative Market
IPC	Índice de Precios y Cotizaciones

Índice alfabético

- Activo financiero, 21
- Aglomeración, 54, 108
- Agregación de Difusión Limitada, 111
- α , 88, 111
- Análisis Fundamental, 10
- Análisis Multifractal, 98, 120
- Análisis Técnico, 11
- Andersen-Lund, 122
- APT, 29
- ARCH, 47
- Autoafinidad, 67, 101
- Autosemejanza Estadística, 66
- Bachelier, 14
- Bear Market, 36
- Beta de Sharpe, 27, 46
- Black-Scholes, 31
- Bull Market, 36
- Burbuja, 35, 36, 90, 126
- Cópulas, 39
- CAC 40, 26, 45
- CAPM, 28, 46
- Cascada Multiplicativa, 94
- Caso FX, 121
- Caso T-Bill, 122
- CBOE, 30, 31
- Cisne Negro, 7, 49
- Colas Pesadas, 71, 108
- Comparación de Indices, 129
- Correlación, 83
- Courtney, 129
- Covarianza, 25
- Crisis de 2008, 37
- Curva de Gauss, 23, 39, 97
- Curva Normal, 16, 33, 43
- De Moivre, 13
- Default, 38
- Dependencia de variables, 45
- Desviación Estándar, 17, 24, 44

Dimensión Cuenta-cajas, 59
 Dimensión de Hausdorff-Besicovitch, 137
 Dimensión de similaridad, 57
 Dimensión Fractal, 57
 Dimensión Fractal Generalizada, 102, 111
 Dimensión Hausdorff-Besicovitch, 59
 Distribución Cauchy, 75
 Distribución de Lévy, 75
 Distribución Estable, 71, 74
 Distribución Normal, 68, 75
 DJIA, 26, 34, 35, 40, 44
 Efecto José, 88
 Efecto Noé, 88
 Empaquetamiento, 92
 Escalamiento, 72, 110
 Espectro de Potencias, 120
 Estrategia en Tiempos de Incertidumbre, 129
 Exponente de Hölder, 98, 102
 Exponente de Hurst, 88, 98, 127
 Exponente de Singularidad, 74
 $f(\alpha)$, 81, 111
 FED, 35
 Fractal, 55
 Fractal aleatorio, 60
 Fractal Browniano, 65
 Fractalidad en Londres, 111
 Frontera Eficiente, 25
 FTSE 100, 26
 Función Caraterística, 74
 Función de Estructura, 99, 109, 120
 GARCH, 96
 Generador Aleatorio, 61
 Generador Fractal, 56, 58, 65
 Gordon-Shapiro, 21
 Herlin, 20
 Hurst, 67, 84
 IBEX 35, 26, 123
 In-the-money, 31
 Incremento Estacionario, 43
 Independencia de variables, 43
 Iniciador Fractal, 56, 58, 65
 Invarianza de Escala, 77
 Invarianza Estadística, 69
 IPC, 125
 Irracionalidad de los participantes, 53
 Juego del Caos, 61

L-estable, 76, 78
 Lantsman & Major, 115, 120
 Ley de los Grandes Números, 13
 Ley Potencial, 77, 110
 LTCM, 35

 M.F., 5
 Markowitz, 23
 Media, 17, 19, 23, 44, 80
 Medidas Multifractales, 103, 146
 Memoria de Largo Plazo, 72, 84, 85
 Mercados Eficientes, 19
 MMAR, 94, 124
 Modelos de Difusión, 108
 Monofractal, 70, 102
 Movimiento Browniano, 43, 63, 100
 Movimiento Browniano Fraccionario,
 69
 Muñoz, 100, 122
 Multifractal, 70, 71, 92, 102

 NASDAQ, 36, 45
 Nikkei 225, 26
 Normal vs Potencial, 80

 Opciones, 30
 Out-of-the-money, 31
 Over-the-Counter, 30, 31

 Pareto, 48, 77, 79
 Persistencia, 70, 83
 Platonicidad, 8, 49
 Poisson MMAR, 124
 Portafolio, 24
 Portafolio Eficiente, 25
 Prima de riesgo, 27, 29
 Problemas Inversos, 8, 49
 Prueba $\frac{R}{S}$, 89, 107, 140

 Quasi-multifractal, 124

 Racionalidad de los participantes, 40
 Regla de Recurrencia Aleatoria, 61
 Regla de Recurrencia Fractal, 56
 Ruido de Hurst, 69

 Seguros: Distribución Espacial, 116
 Seguros: Sismo Multifractal, 117
 Sharpe, 26
 Sierpinski, 58
 Standard & Poor's 500, 45

 Talanquer, 92
 Taleb, 49
 TCL, 76
 Tiempo de Transacciones, 91
 Tiempo Multifractal, 92
 Triángulo de von Koch, 62

Turbulencia, 53

Varianza, 17, 80

Varianza Inestable, 44, 141

Vuelo de Lévy, 76, 100, 137

West, 110

Williams, 23

Zipf, 78

Índice de Figuras

Página	Figura
16...	1.1.1 Distribución Normal.
17...	1.1.2 Desviación Estándar de una Distribución Normal.
25...	1.2.1 Ejemplo del modelo de portafolio eficiente de Markowitz.
37...	1.3.1.NASDAQ Composite (Cierre Mensual)
44...	1.3.2.Movimiento Browniano: Bidimensional y unidimensional.
45...	1.3.3.Variaciones de un MBr y del DJIA de 1928 a 2006.
54...	2.0.1.Un fluido turbulento.
55...	2.0.2.Retornos del S&P500 de 2006 a 2011.
58...	2.1.1.Triángulo de Sierpinski y su construcción fractal.
62...	2.1.2.Fractal de Von Koch aleatorizado.
64...	2.1.3. Fractal browniano.
66...	2.1.4.Envolturas/islas brownianas.
75...	2.2.1.Distribuciones L-estables, su caracterización paramétrica.
79...	2.2.2.Ley Potencial y su representación en escala logarítmica.
82...	2.2.3.Un fractal con colas pesadas.
86...	2.2.4.Larga dependencia.
90...	2.2.5.Burbuja de Cisco Systems.
93...	2.2.6.Creación del proceso multifractal del tiempo de mercado.
94...	2.2.7.Cascada Binomial.
96...	2.2.8.Simulación MMAR y FiGARCH de los cambios del DM/USD.
105...	2.2.9.Dimensión Generalizada.
112...	3.1.1.Desarrollo histórico de las intersecciones de las calles de Londres.

- 113... 3.1.2.Análisis Multifractal de las intersecciones entre calles en Londres.
- 115... 3.2.1.Reportes de tormentas, granizo y ventisca.
- 117... 3.2.2.Mapas del portafolio.
- 118... 3.2.3.Análisis multifractal de señales electrosísmicas.
- 121... 3.3.1.FX.
- 122... 3.3.2.3-month T-Bill Yield Rate.
- 123... 3.3.3. $\zeta(q)$ de una simulación Andersen-Lund de tasas de retorno.
- 125... 3.3.4.Cambios % de los cierres diarios del IPC.
- 126... 3.3.5.IPC su dimensión fractal y su espectro de potencias.
- 128... 3.3.6.Dimensión fractal cuenta-cajas del IPC.

Bibliografía

Libros

-Herlin Philippe. *Finance: le nouveau paradigme*. France: Éditions d'Organisation, Groupe Eyrolles, 2010. ISBN: 978-2-212-54657-6.

-Hull, John C. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Prentice Hall 9th ed., E.U.A., 2015. Chapter 15.

-Jenkins, David, *How to Profit from Formula Plans in the Stock Market*, U.S.A., American Research Council, 1st. ed.: 1961.

-Mandelbrot, Benoît. *Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk*. New York: Springer-Verlag, 1997. ISBN: 0-387-98363-5.

-Mandelbrot, Benoît, *Une approche fractale des marchés*. Odile Jacob, 2005.

-Mandelbrot, Benoît. *The (mis)behaviour of markets*. United States of America: Basic Books, 2009. ISBN: 978-0-465-04357-6.

-Mandelbrot, Benoît, *La Geometría Fractal de la naturaleza*. España: Tusquets Editores, 3a edición: septiembre de 2009. ISBN: 978-84-8310-549-8.

-Peters, Edgar *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1994. ISBN: 978-0-471-58524-4.

-Rincón, Luis *Introducción a la teoría del riesgo*. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM. México, D.F 2012.

-Sheskin, David J., *Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures*. U.S.: Chapman & Hall/CRC. Second edition. 2000 ISBN: 1-58488-133-X.

-Talanquer, Vicente, *Fractus, fracta, fractal. Fractales, de laberintos y espejos*. México: FCE, SEP, CONACYT. 3a ed. 2003.

-Taleb, Nassim N. *El cisne negro [The Black Swan]*. 1ª ed. México: Editorial Paidós, 2010. [U.S.A. Random House, NY: 2008] ISBN: 978-607-7626-27-5.

-Todhunter, Isaac, *History of the mathematical theory of probability*. New York: Chelsea, 1965. (Original, Cambridge, 1865).

-Williams, John Burr, *Theory of investment value*. Fraser Publishing, 1938.

Artículos

-Bachelier, Louis, *Théorie de la spéculation*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 17, 1900, p. 21-86.

-Chaudhury, M. & Wei, Jason Z. *A comparative study of GARCH (1,1) and Black-Scholes Option Prices*. University of Saskatchewan, Canada, 1996.

-Checkin, A. V., Metzler, R., Klafter, J. and Gonchar, V. Yu. *Introduction to the Theory of Lévy Flights*, en Anomalous Transport: Foundations and Applications (2008) (eds R. Klages, G. Radons and I. M. Sokolov), Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany. Capítulo 5, pp.129 - 162.

-Cifuentes, Arturo; Katsaros, Georgios, *The One-Factor Gaussian Copula Applied To CDOs: Just Say NO (Or, If You See A Correlation Smile, She Is Laughing At Your "Results")*. The Journal of Structured Finance, New York, E. U. 13 de marzo de 2007. 60-71.

-Courtney, Hugh, Kirkland, Jane, Viguerie, Patrick *Strategy under uncertainty*. USA: McKinsey. 1997. Aparece en Harvard Business Review, *Estrategia en tiempos*

de incertidumbre. Trad. Rafael Aparicio Aldazabal. España: Ediciones Deusto, S.A. 1999. pp. 1-36.

-Davis, Anthony, Marshak, Alexander, Wiscombe, Warren *Wavelet-based Multifractal Analysis of non-stationary and/or intermitent geophysical signals*. USA: NASA Goddard Space Flight Center, Climate & Radiation Branch. Aparece en: *Wavelets in Geophysics* Efi Foufoula-Georgiou, Praveen Kumar (editores). Academic Press, pp. 249-298.

-De Grauwe, P., Grimaldi, M. *Bubbling and crashing exchanges rates* CESifo Working Paper 1045, 2003.

-Galbraith, James K., Hale, Travis, *Income distribution and the Information Technology Bubble*. Austin, TX: LBJ School of Public Affairs, University of Texas Inequality Project, Working paper 17 January 14, 2008.

-Major, John A., Lantsman, Yakov, *Actuarial Applications of Multifractal Modeling, Part I: Introduction and Spatial Applications*. Winter Forum, Casualty Actuarial Society, 2001. pp 321-349.

-Lantsman, Yakov, Major, John A., *Actuarial applications of Multifractal Modeling, Part II: Time Series Applications*. Winter Forum, Casualty Actuarial Society, 2001. pp 371-385.

-Laplace, Pierre Simon, *Mémoire sur les probabilités*, Mémoires de l'Academie royale de Sciences de Paris, 1778(1781). Oeuvres complètes 9. pp. 227-332.

-Li, David X., *On default correlation: a copula function approach*, Journal of Fixed Income, E.U., marzo 2000.

-Mandelbrot, B. and Van Ness, J. W., *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review, 1968. pp 422-437.

-Mandelbrot, Benoît, Fisher, Adlai, Calvet, Laurent. *A Multifractal Model of Asset Returns*. Cowles Foundation for Research in Economics Discussion Paper

#1164, Yale University, September 15, 1997.

-Markowitz, Harry, *Portfolio selection*: Journal of Finance, 1952.

-Muñoz San Miguel, Jesús, *Movimiento Browniano y Geometría Fractal: el IBEX35*. XIII Jornadas de la ASEPUMA, Universidad de Sevilla. 2005.

-Murcio, Roberto, Masucci, A. Paolo, Arcaute, Elsa, Batty, Michael *Multifractal to monofractal evolution of the London's street network*. Centre for Advanced Spatial Analysis. University College London. UK, Mayo 12, 2015.

-Muzy, J.F., Sornette, D., Delour, J., Arneodo, A. *Multifractal returns and Hierarchical Portfolio Theory*. Agosto, 2000. Disponible [en línea]: <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0008069v2.pdf>

-Pantarella, Alexandre, Pianesse, Augusto *Minimum risk portfolios using MMAR*. Aparece en: Proceedings of the 10th WSEAS Int. Conference on MATHEMATICS and COMPUTERS in BUSINESS and ECONOMICS. Republica Checa 2009. pp: 64-71.

-Poteshman, Allen M. y Serbin, Vitaly, *Clearly Irrational Financial Market Behavior: Evidence from the Early Exercise of Exchange Traded Stock Options* (August 2001). Disponible en la Social Science Research Network [en línea]: <http://ssrn.com/abstract=280795> ó <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.280795>.

-Ramírez-Rojas, A., Muñoz-Diosdado, A., Pavía-Miller, C.G., Angulo-Brown, F. *Spectral and multifractal study of electroseismic time series associated to the $M_w = 6.5$ earthquake of 24 October 1993 in Mexico*. Aparece en: Natural Hazards and Earth System Sciences. European Geosciences Union, 2004. pp:703-709.

-Ramos-Fernandez, Gabriel. *Patterns of association, feeding competition and vocal communication in spider monkeys, Ateles geoffroyi*. January 1, 2001. Disertación disponible por ProQuest. Papel AAI3003685. Accesible vía: <http://repository.upenn.edu/dissertations/AAI3003685>.

-Segnon, Mawuli, Lux, Thomas. *Multifractal models in finance: their origin, properties and applications*. Kiel Working Paper No. 1860. Germany: Kiel Institute for the World Economy. Agosto, 2013.

-Sims, David, et al. *Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators*. Letters, Nature 465. June, 2010.

-Taleb, Nassim N. *Common errors in interpreting the ideas of the Black Swan and Associated Papers*. New York Polytechnic Institute, Octubre 19, 2009.

-Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Lovejoy, S., y Veysseire, J.M. (2007). *Wind extremes and scales: Multifractal Insights and empirical evidence*. En Prof. Dr. J. Peinke, Prof. Dr.-Ing. P. Schaumann, y Dr. S. Barth (Eds.), Wind energy: proceedings of the Euromech Colloquium (p.100). Berlín: Springer.

-Theiler, James *Estimating the fractal dimension of chaotic time series*. Aparece en The Lincoln Laboratory Journal, Volumen 3, Número 1, 1990. pp. 63-86.

-Touboul, Jonathan, *The Hipster Effect: when anticonformists all look the same*. The Mathematical Neuroscience Laboratory/ Collège de France. Paris, Octubre 30, 2014.

-Xiaobo Wen, Hui Wang, Zongfang Zhou, Hua Zhang *The Return-Risk performance- The comparisson of asset portfolio performance of Institution Fund with that based on Multifractal Detrended Fluctuation Approach*. Marzo, 2012. Disponible en [en línea]: <http://dx.doi.org/10.4236/me.2012.34059>