UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE LOS FUNTORES DERIVADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

KUAUHTEMOK GONZÁLEZ CORTÉS

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. EMILIO ESTEBAN LLUIS PUEBLA
2015

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno
   González
   Cortés
   Kuauhtemok
   58 78 29 40
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   308081822

2. Datos del Tutor
   Dr.
   Emilio Esteban
   Lluis
   Puebla

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Rodolfo
   San Agustín
   Chi

4. Datos del sinodal 2
   Dra.
   Bertha María
   Tomé
   Arreola

5. Datos del sinodal 3
   Dra.
   Eugenia
   O Reilly
   Regueiro

6. Datos del sinodal 4
   Dra.
   Diana
   Avella
   Alaminos

7. Datos del trabajo escrito
   Teoría de los Funtores Derivados
   232 p
   2015

Agradecimientos

A mi madre (Tedy), a mi padre (Oso), a mi tía (Lupe) y a mi hermana (Gran gato), por todo su apoyo y paciencia, ya que gracias a ellos pude llegar hasta este punto. A mi abuelita (Concepción) por darme mis primeras clases de Álgebra.

A todos mis profesores, en especial a los profesores: Héctor Méndez por toda su paciencia y por darme el impulso necesario para estudiar matemática, al profesor Emilio Lluis por enseñarme la belleza del Álgebra, a los profesores Enrique Bazúa, Luis Venegas y Saúl Arce por introducirme en la Teoría de las Categorías.

A mi gran amigo Alberto Almanza por estar conmigo durante toda la carrera acompañándome en las buenas y en las malas, a mi amigo Arturo Peralta por todo su apoyo y por las cosas que hemos vivido, a mi amiga Itzel Zárate por ser la primera persona que me habló de la Teoría de Categorías, a mis amigos Leonel y Dalid, a mi amiga Alma Maguey por apoyarme en la recta final, y a todos mis amigos que siempre me han apoyado.

Y a todos mis Alumnos que me han permitido enseñarles lo poco que se de esta gran ciencia llamada Matemática.

Contenido

Introducción

La teoría de los Funtores Derivados nace como uno de los principales resultados del seminario de Cartan de 1951 impartido por H. Cartan y S. Eilenberg. Es en este seminario donde se asentaron las bases necesarias para el desarrollo actual que conocemos del Álgebra Homológica, pues se introducen por primera vez definiciones fundamentales como las de módulo proyectivo, resolución proyectiva, funtor derivado derecho e izquierdo.

Aunque las definiciones de funtor derivado derecho e izquierdo se introdujeron en dicho seminario, éstas sólo fueron vistas como un lenguaje simplemente. Fue a mediados de la década de los cincuenta y principios de la década de los sesenta que diversos trabajos permitieron fundamentar dicha teoría. Entre esta fundamentación podemos destacar que uno de los trabajos más importantes es su artículo *"Sur quelques points d' Algebra Homologique"* de A. Grothendieck. Pues en dicho articulo Grothendieck en su artículo nos muestra que la gran mayoría de situaciones referentes al Álgebra Homológica pueden ser abordadas dentro de la Teoría de los Funtores Derivados.

Desde luego, la teoría de los funtores no sólo vino a revolucionar al Álgebra Homológica, sino más bien ésta teoría revolucionó a la matemática en general, ya que el desarrollo de esta teoria motivo a la Teoría de Categorías, la cual trajo una nueva forma de hacer matemáticas. Pues, si uno quiere resolver un problema relacionado a un objeto de alguna teoría matemática, lo más conveniente es tratar de "resolverlo desde afuera", es decir, tratar de plantear el problema a un lenguaje donde se considere la relación del objeto con los demás objetos de dicha teoría, ya que este camino donde se estudian las relaciones que tienen los objetos nos llevará a ver que la clase de objetos se "comporta" como un objeto de dicha teoría. En resumen la teoría de categorías estudia las estructuras de las teorías matemáticas.

Por tales aportaciones de la Teoría de Funtores, hemos decido presentar de una manera introductoria el desarrollo de esta teoría y de sus consecuencias dentro de la Teoría de Módulos y del Álgebra Homológica abordando el articulo[Ab. Ba]. Para tal desarrollo, el presente trabajo consta de 8 capítulos que a continuación se describen brevemente.

En el primer capítulo se abordará de una manera general la *Teoría de Módulos*, ya que esta teoría es el punto de partida para motivar la definición de categoría, funtor y la de morfismo.

Empezaremos este capítulo con la definición de *módulo izquierdo*, la cual podemos entender de la siguiente manera: dado un *anillo* Λ con $1 \neq 0$, y M un *grupo abeliano*, diremos que M es un $\Lambda - módulo\ izquierdo$, si existe

$$\eta : \Lambda \longrightarrow End\,(M, M)$$

un homomorfismo de anillos de Λ a $End\,(M, M)$ (los homomorfismos de grupos abelianos de M es sí mismo). Para cualesquiera $\alpha \in \Lambda$ y $x \in M$, denotaremos con αx a $\eta\,(\alpha)\,(x)$.

Si Λ es un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, diremos que M es un $\Lambda - módulo$, si es un $\Lambda - módulo\ izquierdo$. Cabe mencionar que la mayor parte con anillos conmutativos, por lo que la noción de $\Lambda - módulo$ corresponde con la de $\Lambda - módulo\ izquierdo$.

Es inmediato ver que la definición de $\Lambda - módulo$ sólo corresponde con una generalización de la definición de espacio vectorial, solo que esta vez la acción es de un anillo.

Sea $M \subseteq N$, con N un $\Lambda - módulo$, diremos M es un *submódulo* de N, si M es un subgrupo abeliano de N, tal que, $\alpha m \in M$ para cualquier $m \in M$ y $\alpha \in \Lambda$. Notemos que si M es un submódulo de N, entonces M es por sí mismo un $\Lambda - módulo$.

Después nuestra tarea será el estudiar la forma de relacionar dos $\Lambda - módulos$ M y N "*sin perder la información acerca de su estructura*". Para ello diremos que una función

$$f : M \longrightarrow N$$

es un $\Lambda - morfismo$, si f es un homomorfismo de grupos abelianos y $f\,(\alpha x) = \alpha\,(f\,(x))$ para cualesquiera $\alpha \in \Lambda$ y $x \in M$.

A partir de la definición anterior dado un $\Lambda - morfismo\ f : M \longrightarrow N$, podemos considerar los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{x \in M : \ f(x) = 0\} \\ im(f) &= \{f(x) : \ x \in M\} \end{aligned}$$

que van a resultar ser submódulos de M y N respectivamente. Dichos $\Lambda - $*módulos* nos serán de importancia para enunciar los llamados *"Teoremas de Isomorfismo"*, que básicamente son los mismos teoremas de isomorfismo para grupos abelianos.

Por otro lado, dichos submódulos nos ayudarán a introducir las siguientes definiciones: Sea

$$\mathbf{C} : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

una sucesión de $\Lambda - módulos$ y $\Lambda - morfismos$. Diremos que $\mathbf{C}$ es *semiexacta* en C_n, si $\partial^n \circ \partial^{n+1} = 0$. De dicha definición podemos deducir que $\mathbf{C}$ es *semiexacta* en C_n si, y solo si $\ker(\partial^n) \subseteq im\left(\partial^{n+1}\right)$. Por otro lado, si $\ker(\partial^n) = im\left(\partial^{n+1}\right)$, diremos que es $\mathbf{C}$ *exacta* en C_n.

Como veremos los $\Lambda - morfismos$ no sólo nos van a definir la forma de relacionar $\Lambda - módulos$, si no también nos ayudaran a establecer algunas construcciones de nuevos $\Lambda - módulos$ a través de las llamadas propiedades universales propuestas por D. Kan en la década de 1940; por ejemplo se introducirán las definiciones de *producto directo*(Π), *suma directa*$(\oplus)$, *producto tensorial* $(\otimes_\Lambda)$, *límite directo* $\left(\underrightarrow{lím}\right)$. A partir de dichas construcciones universales podremos dar la definición de un $\Lambda -$ *módulo libre,* que vendrá siendo una suma directa de Λ.

Un resultando importante que cabe hacer destacar es que vamos a ver que cualquier conjunto genera un $\Lambda - módulo$.

Después de este marco teórico empezaremos a notar que la definición de *categoría* surge por sí misma, pues veremos que para entender los $\Lambda -$ *módulos* los podemos entender a través de sus $\Lambda - morfismos$, ya que la colección

$$Hom_\Lambda(M, N) = \{f : M \longrightarrow N : \ f \text{ es } \Lambda - morfismo\}$$

es un $\Lambda - módulo$ (si Λ es un anillo conmutativo). Además por la introducción de las propiedades universales veremos que muchas definiciones se pueden establecer a partir de $\Lambda - morfismos$.

Aunque la *Teoría de Categorías* es objeto de estudio de nuestro segundo capítulo. En este primer capítulo se entenderá que una *categoría* consiste de una clase de *objetos* y otra clase de *morfismos (flechas)*, en donde los morfismos nos relacionan dos objetos. Mientras que la idea de *funtor* va hacer nuestra forma de relacionar dos categorías, es decir, un funtor $\mathbf{F} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, se entenderá como una asignación de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$, que manda objetos de $\mathbf{C}$ en objetos de $\mathbf{D}$ y que manda morfismos de $\mathbf{C}$ en morfismos de $\mathbf{D}$.

Para este primer capítulo notaremos que dado un anillo conmutativo Λ, la colección de todos los $\Lambda - \textit{módulos}$ y $\Lambda - morfismos$ va a formar una categoría, la cual denotaremos con ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$, de igual manera, si consideramos la colección de todos los grupos abelianos y sus homomorfismos tenemos una categoría, a la que denotaremos por $\mathbf{Ab}$ (la categoría de los grupos abelianos).

Si $f : M' \longrightarrow M$ es un $\Lambda - morfismo$, entonces para cualquier $\Lambda - morfismo$ $g : M \longrightarrow N$, la composición $g \circ f : M' \longrightarrow N$ es un $\Lambda - morfismo$. Por otro lado, si $g_1, g_2 : M \longrightarrow N$ y $\alpha \in \Lambda$, entonces para cualquier $x \in M'$

$$\begin{aligned} (g_1 + g_2) \circ f(x) &= g_1 \circ f(x) + g_2 \circ f(x) \\ (\alpha g_1) \circ f(x) &= \alpha (g_1 \circ f(x)) \end{aligned}$$

Por lo anterior f induce un $\Lambda - morfismo$,

$$f^* : Hom_\Lambda(M, N) \longrightarrow Hom_\Lambda(M', N)$$

con $f^*(g) = g \circ f$. Siguiendo un razonamiento análogo, si $f : N' \longrightarrow N$ es un $\Lambda - morfismo$, entonces f determina un $\Lambda - morfismo$

$$f_* : Hom_\Lambda(M, N') \longrightarrow Hom_\Lambda(M, N)$$

con $f_*(g) = f \circ g$ para cualquier $g \in Hom_\Lambda(M, N')$.

Dados $\varphi : M' \longrightarrow M$, $\psi : N' \longrightarrow N$ $\Lambda - morfismos$ definiremos los $\Lambda - morfismos$

$$\begin{array}{rccc} \varphi \otimes 1_N : & M' \otimes_\Lambda N & \longrightarrow & M \otimes_\Lambda N \\ & m' \otimes n & \longrightarrow & \varphi(m') \otimes n \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} 1_M \otimes \psi : & M \otimes_\Lambda N' & \longrightarrow & M \otimes_\Lambda N \\ & m \otimes n' & \longrightarrow & m \otimes \psi(n) \end{array}$$

A partir de los $\Lambda - morfismos$ definidos anteriormente, dados M y N $\Lambda - \textit{módulos}$, se definen los funtores

$$\begin{array}{rccc}
Hom_{\Lambda}(_, N): & {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & (\mathbf{Ab}) \quad {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} \\
& M & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(M, N) \\
& M' \xrightarrow{f} M & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(M, N) \xrightarrow{f^*} Hom_{\Lambda}(M', N)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
Hom_{\Lambda}(M, _): & {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & (\mathbf{Ab}) \quad {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} \\
& N & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(M, N) \\
& N' \xrightarrow{f} N & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(M, N') \xrightarrow{f_*} Hom_{\Lambda}(M, N)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
M \otimes_{\Lambda} _ : & {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & (\mathbf{Ab}) \quad {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} \\
& N & \longrightarrow & M \otimes_{\Lambda} N \\
& N' \xrightarrow{\psi} N & \longrightarrow & M \otimes_{\Lambda} N' \xrightarrow{\psi \otimes 1_N} M \otimes_{\Lambda} N
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
_ \otimes_{\Lambda} N : & {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & (\mathbf{Ab}) \quad {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} \\
& N & \longrightarrow & M \otimes_{\Lambda} N \\
& M' \xrightarrow{\varphi} M & \longrightarrow & M' \otimes_{\Lambda} N \xrightarrow{\varphi \otimes 1_N} M \otimes_{\Lambda} N
\end{array}$$

Establecidos estos funtores estudiaremos sus propiedades al ser aplicados a sucesiones exactas como a continuación se ilustra.

Proposición 1 *Si* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de* $\Lambda - \textit{módulos}$*. Entonces* $Hom_{\Lambda}(\_, N)$ *induce la sucesión exacta*

$$Hom_{\Lambda}\left(M', N\right) \longleftarrow Hom_{\Lambda}\left(M, N\right) \longleftarrow Hom_{\Lambda}\left(M'', N\right) \longleftarrow 0$$

Proposición 2 *Si* $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de* $\Lambda - \textit{módulos}$*. Entonces* $Hom_{\Lambda}(M, \_)$ *induce la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow Hom_{\Lambda}\left(M, N'\right) \longrightarrow Hom_{\Lambda}\left(M, N\right) \longrightarrow Hom_{\Lambda}\left(M, N''\right)$$

Proposición 3 *Si* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de* $\Lambda-$*módulos. Entonces* $\_ \otimes_\Lambda N$ *induce la sucesión exacta*

$$M' \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

Proposición 4 *Si* $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de* $\Lambda-$*módulos. Entonces* $M \otimes_\Lambda \_$ *induce la sucesión exacta*

$$M \otimes_\Lambda N' \longrightarrow M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0$$

De las proposiciones anteriores vemos que el funtor $Hom_\Lambda(M, \_)$ conserva la *exactitud izquierda* de una sucesión exacta corta, mientras que los funtores $Hom_\Lambda(\_, N)$, $\_ \otimes_\Lambda N$ y $M \otimes_\Lambda \_$ conservan la *exactitud derecha* de una sucesión exacta corta. Dichas proposiciones motivaran a preguntarnos ¿Existirán $\Lambda-$*módulos* que preserven toda la exactitud de la sucesión al aplicarles el funtor en cuestión? Desde luego, la respuesta es sí, para ello será necesario considerar las siguientes definiciones:

Definición 5 *Un* $\Lambda-$*módulo* P *es* proyectivo*, si para cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \rightarrow Hom_\Lambda\left(P, N'\right) \rightarrow Hom_\Lambda(P, N) \rightarrow Hom_\Lambda\left(P, N''\right) \rightarrow 0$$

es exacta.

Definición 6 *Un* $\Lambda-$*módulo* I *es* inyectivo*, si para cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \leftarrow Hom_\Lambda\left(M', I\right) \leftarrow Hom_\Lambda(M, I) \leftarrow Hom_\Lambda\left(M'', I\right) \leftarrow 0$$

es exacta.

Definición 7 *Un* $\Lambda -$ *módulo* F *se dice que es* plano, *si para cualquier*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

sucesión exacta de $\Lambda -$ *módulos, entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow M' \otimes_{\Lambda} F \longrightarrow M \otimes_{\Lambda} F \longrightarrow M'' \otimes_{\Lambda} F \longrightarrow 0$$

es exacta.

Para finalizar éste capítulo uno mostraremos que si L es un $\Lambda -$ *módulo* libre, entonces este es proyectivo y que un módulo proyectivo es plano. Por lo que podremos concluir que cualquier suma directa de anillos Λ conserva las exactitudes de las sucesiones expuestas en las proposiciones 2, 3 y 4.

En el segundo capítulo empezaremos notando que la colección ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ es *"bastante grande"* al igual que **Ab**, por lo que la pregunta que surge es: ¿estamos abusando del leguaje de la teoría de conjuntos al considerar dichas colecciones?, ya que al formular varias definiciones las estamos haciendo sobre una clase que en principio no es un conjunto; pues mayor parte de la matemática clásica utiliza dicho lenguaje para su formalización.

Para poder trabajar dichas colecciones, sin sentirnos tan mal por abusar del lenguaje de la teoría de conjuntos, en este capítulo introduciremos de manera muy breve los fundamentos de la *teoría de categorías*, que nos permitirá no sentirnos tan mal al trabajar con dichas colecciones.

En este capítulo aparte de dar los fundamentos de la teoría de categorías, se introducirá de manera formal las noción de: *categoría*, además que daremos algunos ejemplos de colecciones que inducen una Categoría, también introduciremos las nociones de*: objeto, morfismo, funtor contravariante, funtor covariante, transformación natural y equivalencia natural.*

En el capítulo III abordaremos el concepto de *categoría producto*, la cual puede ser vista como una generalización de la idea de producto cartesiano de conjuntos. Al considerar tal concepto se motiva la definición de *bifuntor*, la cual podemos entender como un funtor que va de una categoría producto a otra categoría. Un ejemplo de esto es que las asignaciones

$$\begin{array}{rccc} Hom_{\Lambda}(\_,\_): & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\times{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & (\mathbf{Ab}) \;\; {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \\ & (M,N) & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(M,N) \\ & (\varphi,\psi) & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(\varphi,\psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \_ \otimes_\Lambda \_ : & {}_\Lambda\mathbf{Mod} & \longrightarrow & (\mathbf{Ab})\ {}_\Lambda\mathbf{Mod} \\ & (M,N) & \longrightarrow & M \otimes_\Lambda N \\ & (\varphi,\psi) & \longrightarrow & \varphi \otimes \psi \end{array}$$

son bifuntores.

Otra definición de gran importancia que se aborda dicho capítulo es la definición de *Categoría Dual (Opuesta).* La cual de una manera informal la podemos entender como: Dada una categoría $\mathbf{C}$, la categoría dual a $\mathbf{C}$, denotada por $\mathbf{C}^{op}$, es la categoría formada a partir de los mismos objetos de $\mathbf{C}$, y con los morfismo de $\mathbf{C}$ en su sentido contrario. Este concepto nos permitirá "duplicar" los conceptos y resultados. Pues nos basaremos en el *"principio de dualidad"* que dice:

Principio de Dualidad (P.D.). (i) *Para cada concepto C, escritos en términos de única categoría K, el concepto dual (llamado $co - C$) es obtenido al aplicar este concepto a la categoría dual.*
(ii) *Para cada teorema válido en categorías, el "teorema dual" que se obtiene al cambiar los conceptos originales, por los conceptos duales es válido.*

En nuestro capítulo IV retomaremos los conceptos del capítulo I, solo que esta vez serán retomados para motivar su generalización en el lenguaje de la Teoría de Categorías.

En este capítulo daremos las definiciones de: *objeto cero, núcleo, conúcleo e imagen de un morfismo*, así como también las definiciones de: *producto fibrado* y *co-producto fibrado.* Estas definiciones serán los ingredientes necesarios para introducir las definiciones de *Categoría Aditiva y Abeliana*, las cuales podemos entender como aquellas categorías donde para cualquier conjunto de morfismos este tiene una estructura de grupo abeliano.

Aunque la mayor pensaremos una categoría abeliana como una generalización de las categorías $(\mathbf{Ab})$ y ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$, cabe mencionar que existen más ejemplo de ellas como $\mathbf{Top}\,(\mathbf{X})$ (la categoría de gavillas), esto puede consultarse en [Grot].

Después de haber introducido el concepto de categoría aditiva, centraremos nuestra atención en estudiar los funtores que conservan su estructura, para esto introduciremos el concepto de *funtor aditivo*, que desde luego este concepto va a ser motivado por el concepto de homomorfismo de grupos abelianos.

Para finalizar este capítulo se introducirá el concepto de *funtor exacto derecho* y el de *funtor exacto izquierdo*, que es una generalización de las proposiciones 1,2,3 y 4.

En el capítulo V se abordarán algunos resultados básicos así como fundamentales dentro del Álgebra Homológica. Para empezar este capítulo consideraremos una sucesión semi exacta descendente (cadena) de $\Lambda-\textit{módulos}$

$$\mathbf{C}: \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

definiremos el *Grupo de Homología de grado n*, denotado por $H_n(\mathbf{C})$, como

$$H_n(\mathbf{C}) = \ker(\partial_n)/im(\partial_{n+1})$$

Al considerar la situación dual, si

$$\mathbf{D}: \cdots \longrightarrow D^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} D^n \xrightarrow{\partial^n} D^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión semi exacta ascendente (co-cadena) de $\Lambda-\textit{módulos}$, se define *Grupo de Cohomología de grado n*, denotado por $H^n(\mathbf{D})$, como

$$H^n(\mathbf{D}) = \ker(\partial^n)/im\left(\partial^{n-1}\right)$$

Nótese que dichos grupos nos miden que tan exacta es una sucesión en C_n y D^n, puesto que si $H_n(\mathbf{C}) = 0$, entonces $\mathbf{C}$ es exacta en C_n; y sí $H^n(\mathbf{D}) = 0$, entonces $\mathbf{D}$ es exacta en D^n.

Como es de esperarse nuestro siguiente paso es definir una forma de relacionar cadenas, para ello dada una colección de $\Lambda - morfismos$, $\varphi = \{\varphi_n : C'_n \longrightarrow C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que solemos denotar con

$$\mathbf{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}$$

diremos que φ es un *morfismo de cadenas*, si el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{C}': & \cdots & \rightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & & {\scriptstyle\varphi_{n+1}}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_n}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_{n-1}}\downarrow & & \\
\mathbf{C}: & \cdots & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

conmuta, es decir, $\partial_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ \varphi_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

A partir de esta forma de relacionar cadenas, si consideramos la colección de cadenas y de sus morfismos tenemos una categoría abeliana $(\mathbf{C}({}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}))$. Por lo tanto, podemos considerar el concepto de sucesión exacta dentro de esta categoría. Una aplicación de este hecho es la siguiente proposición.

Proposición 8 *Para una sucesión exacta de cadenas*

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{C}' \xrightarrow{\varphi'} \mathbf{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

se induce una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H^n\left(\mathbf{C}'\right) \xrightarrow{H^n(\varphi')} H^n\left(\mathbf{C}\right) \xrightarrow{H^n(\varphi)} H^n\left(\mathbf{C}''\right) \xrightarrow{\triangle_n} H^{n-1}\left(\mathbf{C}'\right) \longrightarrow \cdots$$

De la proposición anterior, si $\mathbf{C}$ es una cadena, entonces al considerar los grupos de homología $H^n(\mathbf{C})$ inducen una nueva cadena $H^*(\mathbf{C})$, más aún podremos construir el funtor.

$$\begin{array}{rccc} H^*(\_): & \mathbf{C}\left({}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\right) & \longrightarrow & \mathbf{C}\left({}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\right) \quad (\mathbf{Ab}) \\ & \mathbf{C} & \longrightarrow & H^*(\mathbf{C}) \\ & \mathbf{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{D} & \longrightarrow & H^*(\mathbf{C}') \xrightarrow{H^*(\varphi)} H^*(\mathbf{C}) \end{array}$$

A partir del resultado anterior, cabe preguntarse lo siguiente: Sí: $\mathbf{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}$ y $\mathbf{C}' \xrightarrow{\psi} \mathbf{C}$ son dos morfismos de cadena, ¿cuándo $H_*(\varphi) = H_*(\psi)$? Para responder a dicha pregunta introduciremos la siguiente definición.

Definición 9 *Sean* $\mathbf{C} = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $\mathbf{C}' = \{C_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *dos cadenas y* $\mathbf{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}$ *y* $\mathbf{C}' \xrightarrow{\psi} \mathbf{C}$ *dos morfismos de cadenas. Diremos que* φ *es* homotópico *a* φ' *si existe una familia de* $\Lambda-morfismos$ $h = \{C'_n \xrightarrow{h_n} C_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$*, tales que,* $\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = \varphi_n - \psi_n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{Z}$ *en el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{C}': & ... & \to & C'_{n+1} & \overset{\partial'_{n+1}}{\to} & C'_n & \overset{\partial'_n}{\to} & C'_{n-1} & \to & ... \\ \varphi \downarrow\downarrow \varphi' & & & \varphi_{n+1} \downarrow\downarrow \psi_{n+1} & \overset{h_n}{\swarrow} & \varphi_n \downarrow\downarrow \psi_n & \overset{h_{n-1}}{\swarrow} & \varphi_{n-1} \downarrow\downarrow \psi_{n-1} & & \\ \mathbf{C}: & ... & \to & C_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & C_n & \overset{\partial_n}{\to} & C_{n-1} & \to & ... \end{array}$$

A la familia $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *se llama* homotopía de cadena*. Si* φ *es homotópico a* ψ *lo denotaremos por* $h : \varphi \simeq \psi$*.*

Como es de esperarse esta definición será de gran importancia, ya que con ello probaremos la siguiente proposición.

Proposición 10 *Si* $\mathbf{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C}$ *y* $\mathbf{C}' \xrightarrow{\psi} \mathbf{C}$ *son dos morfismos en* $\mathbf{C}\left({}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\right)$*, tales que,* $\varphi \simeq \varphi'$*. Entonces* $H_*\left(\varphi\right) = H_*\left(\varphi'\right)$*.*

Nuestro siguiente tema a tratar será las defenciones de: *resolución proyectiva* y *resolución inyectiva*, que son los cimientos para la definición de funtor derivado. Para ello entenderemos:

Que para un $\Lambda -$ *módulo* M, una *resolución proyectiva* de M, es una cadena P de la forma

$$P : \cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

con P_n proyectivo para todo $n \geq 0$.

De manera dual una *resolución inyectiva* de M, es una co-cadena I de la forma

$$I : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \xrightarrow{\partial^n} I^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

con I^n inyectivo para $n \geq 0$.

En este capítulo se hará notar que para cualquier $\Lambda -$*módulo* M siempre se puede encontrar una resolución proyectiva e inyectiva de M, aunque el caso de una resolución inyectiva se mostrará en el capítulo VII.

Para finalizar esta sección terminaremos con un teorema que nos ayudará a la definición central de nuestro siguiente capítulo.

Teorema 11 ***(de Comparación)*** *Para un diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
P: & ... & \to & P_n & \overset{\partial_n}{\to} & P_{n-1} & \overset{\partial_{n-1}}{\to} & ... & \to & P_1 & \overset{\partial_1}{\to} & P_0 & \overset{\varepsilon}{\to} & M & \to & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & \downarrow_f & & \\
Q: & ... & \to & Q_n & \overset{\partial'_n}{\to} & Q_{n-1} & \overset{\partial'_{n-1}}{\to} & ... & \to & Q_1 & \overset{\partial'_1}{\to} & Q_0 & \overset{\eta}{\to} & N & \to & 0
\end{array}$$

de $\Lambda -$ *módulos y* $\Lambda - morfismos$*, donde el renglón inferior es una cadena exacta al igual que el renglón superior, además para cada* $n \geq 0$ P_n *es un* $\Lambda -$ *módulo proyectivo. Entonces existe* $\widetilde{f} = \left\{P_n \overset{f_n}{\to} Q_n\right\}_{n \geq 0}$ *un morfismo sobre* f*, único salvo homotopía.*

En el capítulo VI nos centraremos en presentar la *Teoría de los Funtores Derivados (derecho e izquierdo)*.

Empezaremos considerando a

$$\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

un funtor aditivo covariante, y

$$\mathbf{T}' :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

un funtor aditivo contravariante.

Si M es un $\Lambda - \textit{módulo}$ y

$$\begin{array}{rcl} P & : & \cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \\ I & : & 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \xrightarrow{\partial^n} I^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

son resoluciones proyectiva e inyectiva de M respectivamente. Entonces se inducen las siguientes cadenas

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{T}(P) & : & \cdots \longrightarrow \mathbf{T}(P_{n+1}) \xrightarrow{\mathbf{T}(\partial_{n+1})} \mathbf{T}(P_n) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mathbf{T}(\varepsilon)} \mathbf{T}(M) \longrightarrow 0 \\ \mathbf{T}'(I) & : & 0 \longleftarrow \mathbf{T}'(M) \xleftarrow{\mathbf{T}'(\eta)} \mathbf{T}'\left(I^0\right) \xleftarrow{\mathbf{T}'\left(\partial^0\right)} \cdots \longleftarrow \mathbf{T}'(I^n) \xleftarrow{\mathbf{T}'(\partial^n)} \cdots \end{array}$$

Por lo que, si denotamos con:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{L}_n\mathbf{T}(M) & = & \ker(\mathbf{T}(\partial_n))\,/im\,(\mathbf{T}(\partial_{n+1})) = H_n(\mathbf{T}(P)) \\ \mathbf{R}^n\mathbf{T}'(M) & = & \ker\left(\mathbf{T}'(\partial_{n-1})\right)/im\left(\mathbf{T}'(\partial_n)\right) = H^n\left(\mathbf{T}'(I)\right) \end{array}$$

A partitr de dichas asignaciones y del teorema de comparación, éstas inducen los funtores

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{L}_n\mathbf{T} : & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\quad(\mathbf{Ab}) \\ & M & \longrightarrow & \mathbf{L}_n\mathbf{T}(M) \\ & M \xrightarrow{f} N & \longrightarrow & H_n(\mathbf{T}(f)) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{R}^n\mathbf{T}' : & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\quad(\mathbf{Ab}) \\ & M & \longrightarrow & \mathbf{R}^n\mathbf{T}'(M) \\ & M \xrightarrow{f} N & \longrightarrow & H^n(\mathbf{T}'(f)) \end{array}$$

a los que llamaremos *funtor derivado izquierdo de grado* n de $\mathbf{T}$ y *funtor derivado derecho de grado* n de $\mathbf{T}'$ respectivamente.

Una de las propiedades fundamentales que estudiaremos es cómo nos ayudan a reparar exactitudes de sucesiones, pues, si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, y

$$\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

y

$$\mathbf{T}':_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

funtores aditivos covariante y contravariante respectivamente. Entonces se inducen sucesiones exactas

$$\begin{array}{lll} \cdots & \longrightarrow & \mathbf{L}_n\mathbf{T}\,(M) \longrightarrow \mathbf{L}_n\mathbf{T}\left(M''\right) \longrightarrow \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{T}\left(M'\right) \longrightarrow \cdots \\ \cdots & \longleftarrow & \mathbf{R}^n\mathbf{T}'\left(M'\right) \longleftarrow \mathbf{R}^n\mathbf{T}'\,(M) \longleftarrow \mathbf{R}^n\mathbf{T}'\left(M''\right) \longleftarrow \cdots \end{array}$$

En este capítulo centraremos nuestra atención en los funtores derivados

$$\begin{array}{lll} \underline{Tor_n^{\Lambda}\,(\_,N)} & \text{a } L_n\mathbf{T}, & \text{si } \mathbf{T} = \_ \otimes_{\Lambda} N \\ \overline{Tor_n^{\Lambda}\,(M,\_)} & \text{a } L_n\mathbf{T}, & \text{si } \mathbf{T} = M \otimes_{\Lambda} \_ \\ \underline{Ext_{\Lambda}^n\,(\_,N)} & \text{a } R^n\mathbf{T}, & \text{si } \mathbf{T} = Hom_{\Lambda}\,(\_,N) \\ \overline{Ext_{\Lambda}^n\,(M,\_)} & \text{a } R^n\mathbf{T}, & \text{si } \mathbf{T} = Hom_{\Lambda}\,(M,\_) \end{array}$$

que en esencia son los primeros ejemplos de funtor derivados, dichos funtores fuerón abordados en el Seminario de Cartan de 1951. Por tal motivo, dentro de este capítulo dedicaremos una sección para el funtor Tor_n^{Λ}, al igual una sección para el funtor Ext_{Λ}^n.

En la sección de Tor_n^{Λ} mostraremos el siguiente teorema.

Teorema 12 *Para cualquier* $\Lambda -$ *módulo* N *se tiene*

$$Tor_1^{\Lambda}\,(K,N) \cong \tau N$$

Donde $\tau N = n \in N : \alpha n = 0$ *para algún* $\alpha \in \Lambda \diagdown \{0\}$.

Del teorema anterior veremos que el funtor $Tor_1^{\Lambda}(K,\_)$ es naturalmente equivalente al funtor $\tau\_$. Donde el funtor $\tau\_$ está definido por

$$\begin{array}{rccc} \tau\_ : & {}_{\Lambda}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_{\Lambda}\mathbf{Mod}\ (\mathbf{Ab}) \\ & M & \longrightarrow & \tau M \\ & M \xrightarrow{f} N & \longrightarrow & \tau M \xrightarrow{\tau(f)} \tau N \end{array}$$

Donde τN denota al *submódulo de torsión* de N. Por lo tanto esta proposición justifica porque a Tor_n^{Λ} se le suele llamar *funtor de torsión de grado n*. Para finalizar esta sección estudiaremos cómo este funtor es caracterizado a través de sucesiones de funtores derivados izquierdos con un resultado llamado *axiomas para Tor*.

Para la sección de Ext_{Λ}^n, abordaremos el siguiente problema: Dados M' y M'' $\Lambda-$*módulos* ¿Existe un $\Lambda-$*módulo* M, tal que, M' sea submódulo de M y $M'' \cong M/M'$? Obviamente la respuesta es sí, pues este problema se traduce al encontrar un $\Lambda-$*módulo* que induzca una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Vemos que dicha sucesión exacta existe pues basta con tomar a $M = M' \oplus M''$. Cabe mencionar que a dicha sucesión con la propiedad anterior se le suele llamar una *extensión* de M' a M''.

Después de haber notado que para M' y M'' $\Lambda-$*módulos* siempre podemos encontrar al menos una extensión de M' a M'', nuestra tarea será el dotar a la colección de extensiones de una estructura que lo haga grupo abeliano. Al grupo abeliano obtenido lo denotaremos por $Ext\,(M', M'')$. Cabe mencionar que esta estructura fue introducida R.Baer en la década de 1940, la importancia de dicha estructura va a radicar en que vamos a tener el siguiente teorema.

Teorema 13 ***(de Baer)*** *Para M' y M'' $\Lambda-$módulos se tiene*

$$Ext\left(M', M''\right) \cong Ext_{\Lambda}^1\left(M'', M'\right)$$

El que nos ilustra porque a Ext_{Λ}^n se le suele llamar *funtor de extensión de grado n*. De igual manera que para Tor_n^{Λ}, finalizaremos con una sección llamada *Axiomas* para *Ext* que caracterizara a los funtores Ext_{Λ}^n.

En el capítulo VII centraremos nuestra atención al estudio de los $\Lambda-$ *módulos* inyectivos, pues en este capítulo abordaremos proposiciones relativas a módulos inyectivos enunciadas en los capítulos I,V,VI.

Un resultado importante de este capítulo es el Criterio de Baer que nos ayudará a entender cómo saber si un $\Lambda -$ *módulo* es inyectivo, como se muestra a continuación.

Teorema 14 ***(Criterio de Baer)*** *Un $\Lambda -$ módulo I es inyectivo si, y solo si para cualquier $\Lambda - morfismo$ $J \xrightarrow{f} I$, con J un ideal de Λ, puede extenderse a Λ. Es decir existe un morfismo g, tal que, el diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & \Lambda \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Este resultado nos será de gran utilidad, pues nuestro resultado de mayor importancia es el demostrar que para cualquier $\Lambda - módulo$ M existe un $\Lambda - módulo$ I, tal que, M se encaja en I, es decir, existe un $\Lambda - morfismo$ $f : I \longrightarrow M$, tal que, $im\,(f) \cong M$.

En el capítulo final se abordaran resultados expuestos en [Ab. Ba]. Se mostrara como las definiciones de módulo inyectivo, plano y proyectivo se pueden definir a través de los funtores derivados Tor_n^{Λ} y Ext_n^{Λ}. Este hecho se deriva a partir de los siguientes teoremas:

Teorema 15 *Para un $\Lambda - módulo$ I, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) I es inyectivo.
(ii) $Ext_n^{\Lambda}(M, I) = 0$ para cualquier $\Lambda - módulo$ M y $n \geq 1$
(iii) $Ext_1^{\Lambda}(M, I) = 0$ para cualquier $\Lambda - módulo$ M.

Teorema 16 *Para un $\Lambda - módulo$ P, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) P es proyectivo.
(ii) $Ext_{\Lambda}^n(P, N) = 0$ para cualquier $\Lambda - módulo$ N y $n \geq 1$.
(iii) $Ext_{\Lambda}^1(P, N) = 0$ para cualquier $\Lambda - módulo$ N.

Teorema 17 *Para un $\Lambda-$módulo F las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) F es plano.
(ii) $Tor_n^\Lambda(M,F)=0$, para cualquier $\Lambda-$módulo M y $n\geq 1$.
(iii) $Tor_1^\Lambda(M,F)=0$, para cualquier $\Lambda-$módulo M.

De los teoremas anteriores es común preguntarse ¿Qué pasará si un $\Lambda-$*módulo* F cumple con que $Tor_1^\Lambda(M,F)\neq 0$, pero existe un $k\geq 0$, tal que, $Tor_j^\Lambda(M,F)=0$ para todo $j\geq k$ y M $\Lambda-$*módulo*? Es decir, que propiedades tendrá un $\Lambda-$*módulo* F, tal que, para cualquier

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$$

sucesión exacta se tenga la sucesión exacta

$$0\longrightarrow Tor_k^\Lambda(M,F)\longrightarrow Tor_k^\Lambda\left(M'',F\right)\longrightarrow\cdots\longrightarrow M''\otimes_\Lambda F\longrightarrow 0$$

Nótese que estos hechos son una generalización del comportamiento de un $\Lambda-$*módulo* plano, pues por el teorema 7, un $\Lambda-$*módulo* F es plano, si para cualquier sucesión exacta

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$$

se induce la sucesión exacta

$$0=Tor_1^\Lambda\left(M'',F\right)\longrightarrow M'\otimes_\Lambda F\longrightarrow M\otimes_\Lambda F\longrightarrow M''\otimes_\Lambda F\longrightarrow 0$$

De este hecho es natural considerar la siguiente definición.

Definición 18 *Un $\Lambda-$módulo F es $k-$plano si $Tor_n^\Lambda(M,F)=0$, para cualquier $\Lambda-$módulo M y $n\geq k$.*

Desde luego esta definición es la generalización de un módulo plano, pues, si F es $1-$*plano*, entonces F es plano.

Al considerar dicha generalización de plano, es inmediato obtener las siguientes generalizaciones de módulos proyectivos e inyectivos a través de las siguientes nociones.

Definición 19 *Un* $\Lambda -$ *módulo* I *es* $k -$ *inyectivo si* $Ext_n^{\Lambda}(M, I) = 0$ *para cualquier* $\Lambda -$ *módulo* M *y* $n \geq k$.

Definición 20 *Un* $\Lambda -$ *módulo* P *es* $k -$ *proyectivo si* $Ext_n^{\Lambda}(P, M) = 0$ *para cualquier* $\Lambda -$ *módulo* M *y* $n \geq k$.

Con base en las definiciones anteriores, nos centraremos por último en estudiar las generalizaciones de los resultados aplicados a $\Lambda -$ *módulos* $k -$ *planos*. Por ejemplo mostraremos que un $\Lambda -$ *módulo* $k -$ *proyectivo* es $k -$ *plano*, la cual corresponde con la generalización de que un módulo proyectivo sea plano.

Capítulo 1

Teoría de Módulos

1.1 Módulos

Sea $M = (M, +)$ un grupo abeliano cualquiera, y sea

$$End\,(M, M) = \{f : M \to M : f \quad \textit{es un homomorfismo}\}$$

el conjunto de endomorfismos de M. Al considerar las operaciones $+$ y $\circ$, suma de homomorfismos y composición de homomorfismos, respectivamente.

Si tomamos los homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} 0: & M & \longrightarrow & M \\ & x & \longrightarrow & 0(x) = 0 \end{array}$$

cero y

$$\begin{array}{rccc} 1_M: & M & \longrightarrow & M \\ & x & \longrightarrow & 1_M(x) = x \end{array}$$

identidad, entonces el homomorfismo 0 es el neutro para $+$, mientras que 1_M es el neutro para $\circ$. Por lo tanto podemos concluir que

$$(End\,(M, M)\,, +, \circ, 0, 1_M)$$

forma un anillo con $1 \neq 0$.

Sea $\Lambda = (\Lambda, +, \cdot, 0, 1)$ un anillo con $1 \neq 0$.

1.1 Definición. *Diremos que la pareja ordenada (M, η) es un $\Lambda-$ módulo* izquierdo*, si:*

(i) M es un grupo abeliano, y
(ii) $\eta : \Lambda \longrightarrow End\,(M, M)$ es un homomorfismo de anillos.

Si Λ es un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, diremos que M es un $\Lambda-$*módulo*, si M es un $\Lambda -$ *módulo izquierdo.*

Cabe mencionar que en la mayor parte de este trabajo Λ denotará a un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, a menos de que se diga lo contrario. Por lo tanto la mayor parte la definición de $\Lambda -$ *módulo*, es la misma que la de $\Lambda -$ *módulo izquierdo.*

Denotaremos a un $\Lambda -$ *módulo* (M, η) simplemente con M. De igual manera dados $\alpha \in \Lambda$, y $x \in \Lambda$ denotaremos a $(\eta\,(\alpha))\,(x)$ con αx.

1.2 Proposición. *Sea M un grupo abeliano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) M es un $\Lambda -$ módulo
(ii) Existe una función

$$\mu : \Lambda \times M \longrightarrow M$$

que satisface lo siguiente:
(1) $\mu\,(a, x + y) = \mu\,(a, x) + \mu(a, y)$
(2) $\mu\,(\alpha + \beta, x) = \mu\,(\alpha, x) + \mu\,(\beta, x)$
(3) $\mu\,(\alpha, \mu\,(\beta, x)) = \mu\,(\alpha\beta, x)$
(4) $\mu\,(1, x) = x; \forall \alpha, \beta \in \Lambda; \quad \forall x, y \in \Lambda$
Demostración
$(i) \Rightarrow (ii)$ Definamos

$$\mu : \Lambda \times M \longrightarrow M$$

como: $\mu\,(\alpha, x) = (\eta\,(\alpha))\,(x)\ \forall \alpha \in \Lambda$ y $\forall x \in M$.

Vemos que μ está bien definida, pues para cualesquiera $\alpha \in \Lambda$ y $x \in M$, $\mu(\alpha, x) = (\eta\,(\alpha))\,(x) \in M$, además éste es único en M, ya que $\eta\,(\alpha) \in End\,(M, M)$. Ahora mostremos que μ cumple las condiciones de (1) a (4).

Sean $\alpha, \beta \in \Lambda$, y $x, y \in M$.

(1) Como

$$\mu\,(a, x + y) = (\eta\,(a))\,(x + y) = (\eta\,(\alpha))\,(x) + (\eta\,(\alpha))\,(y) = \mu\,(a, x) + \mu(a, y)$$

pues $\eta\,(\alpha) \in End\,(M, M)$. Por lo tanto $\mu\,(a, x + y) = \mu\,(a, x) + \mu(a, y)$.

(2) Vemos que $\mu(\alpha+\beta,x)=\mu(\alpha,x)+\mu(\beta,x)$, pues

$$\begin{aligned}(\eta(\alpha+\beta))(x) &= (\eta(\alpha)+\eta(\beta))(x)\\ &= (\eta(\alpha))(x)+(\eta(\beta))(x)=\mu(\alpha,x)+\mu(\beta,x)\end{aligned}$$

ya que η es un homomorfismo de anillos. Por lo tanto $\mu(\alpha+\beta,x) = \mu(\alpha,x)+\mu(\beta,x)$.

(3) Como

$$\begin{aligned}\mu(\alpha,\mu(\beta,x)) &= \eta(\alpha)(\mu(\beta,x))\\ &= (\eta(\alpha))(\eta(\beta)(x))=(\eta(\alpha)\eta(\beta))(x)=\mu(\alpha\beta,x)\end{aligned}$$

pues η es un homomorfismo de anillos, entonces $\mu(\alpha,\mu(\beta,x))=\mu(\alpha\beta,x)$.

(4) Por último tenemos

$$\mu(1,x)=(\eta(1))(x)=x$$

ya que $\eta(1)$ es el homomorfismo identidad, pues η es morfismo de anillos.

$(ii)\Rightarrow(i)$ Sea

$$\begin{array}{rccc}\eta: & \Lambda & \longrightarrow & End(M,M)\\ & \alpha & \longrightarrow & \eta(\alpha):M\longrightarrow M\end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccc}\eta(\alpha): & M & \longrightarrow & M\\ & x & \longrightarrow & (\eta(\alpha))(x)=\mu(\alpha,x)\end{array}$$

Mostremos que η es un homomorfismo de anillos.

Sean $\alpha\in\Lambda$, y $x,y,1\in\Lambda$.

A partir de la definición de $\eta(\alpha)$, se sigue que dicha asignación está bien definida. Por otro lado

$$\eta(\alpha)(x+y)=\mu(\alpha,x+y)=(\eta(\alpha))(x)+(\eta(\alpha))(y)$$

por lo tanto $\eta(\alpha)\in End(M,M)$. Además

$$\begin{aligned}\eta(\alpha+\beta)(x) &= \mu(\alpha+\beta,x)=\mu(\alpha,x)+\mu(\beta,x)=\eta(\alpha)(x)+\eta(\beta)(x)\\ \eta(\alpha\beta)(x) &= \mu(\alpha\beta,x)=\mu(\alpha,\mu(\beta,x))=\eta(\alpha)(\eta(\beta)(x))\\ \eta(1)(x) &= \mu(1,x)=x\end{aligned}$$

Por lo tanto η es un homomorfismo de anillos. ■

De la proposición anterior, podemos pensar a un $\Lambda-$ *módulo* M como un sistema algebraico M que está dotado de una operación binaria

$$+ : M \times M \longrightarrow M$$

y un conjunto de operaciones unarias

$$\{\eta(\alpha) = \mu(\alpha, \_) : M \longrightarrow M\}_{\alpha\in\Lambda}$$

donde η se le llamará *multiplicación escalar*, y a los elementos de Λ se les llamarán *escalares*. A continuación consideremos algunos ejemplos de $\Lambda-$ *módulos*.

1.3 Ejemplo. *Si* $\Lambda = \mathbb{Z}$ *el anillo de números enteros, entonces para cualquier* G *grupo abeliano, la función,* $\eta : \mathbb{Z} \rightharpoonup End(G, G)$*, definida por* $(\eta(n))(x) = nx$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ *y* $\forall x \in G$*, define un homomorfismo de anillos. Por lo tanto para cualquier grupo abeliano* G *lo podemos considerar un* $\mathbb{Z}-$ *módulo.*

1.4 Ejemplo. *Si* Λ *es un campo* K*, entonces un espacio vectorial sobre* K *es un* $K-$ *módulo.*

1.5 Ejemplo. *Todo anillo conmutativo* Λ *es un* $\Lambda-$ *módulo, pues, la función,* $\eta : \Lambda \rightharpoonup End(\Lambda, \Lambda)$*, con* $(\eta(\alpha))(\beta) = \alpha\beta$ *para cualquier* $\alpha, \beta \in \Lambda$*, define un homomorfismo de anillos.*

1.6 Ejemplo. *Para* Λ *un dominio entero denotemos con* $Frac(\Lambda)$ *al campo de cocientes de* Λ *definido en* [Ac. y Llu.] *como:*

$$Frac(\Lambda) = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \Lambda \text{ y } b \neq 0\right\}$$

Si definimos la suma de dos elementos en $Frac(\Lambda)$ *como:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{ab}$$

y la multiplicación por un $n \in \mathbb{Z}$ *como:*

$$n\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{na}{b}$$

a partir de dichas definiciones dotamos a $Frac(\Lambda)$ *de una estructura de* $\mathbb{Z}-$ *módulo.*

A continuación consideremos la siguiente definición que nos permita relacionar dos $\Lambda - $*módulos* de tal manera que en dicha relación se preserven las propiedades de cada $\Lambda - $*módulo*.

1.7 Definición. *Sean M y N dos $\Lambda - $módulos, diremos que una función*

$$f : M \longrightarrow N$$

es un $\Lambda - morfismo$, si:
(i) $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de grupos.
(ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall \alpha \in \Lambda \forall x \in M$

Dado $f : M \longrightarrow N$ un $\Lambda - morfismo$ lo denotaremos con $M \xrightarrow{f} N$.

Sean $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow O$ dos $\Lambda - morfismos$ cualesquiera. Si consideremos la composición

$$g \circ f : M \to O$$

donde $g \circ f(x) = g(f(x))\ \forall x \in M$. Entonces para cualesquiera $x, y \in \Lambda$ y $\alpha \in \Lambda$, se tiene

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha(x)) &= g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha(g(f(x))) = \alpha(g \circ f(x)) \\ g \circ f(x+y) &= g(f(x+y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y) \end{aligned}$$

puesto que f y g son $\Lambda - morfismos$. Por lo tanto, se ha demostrado la siguiente proposición.

1.8 Proposición. *Para cualesquiera $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow O$ $\Lambda - morfismos$, la composición*

$$g \circ f : M \longrightarrow O$$

es un $\Lambda - morfismo$.■

Muchas veces dados $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow O$ dos $\Lambda - morfismos$. A la composición $g \circ f : M \longrightarrow O$ la denotaremos como $gf : M \longrightarrow N$.

Observemos que si $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow O$ y $h : O \to P$ son $\Lambda - morfismos$, de la definición se sigue que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Dado un $\Lambda - $*módulo* M, al $\Lambda - morfismo$

$$1_M : M \longrightarrow M$$

con $1_M(m) = m \; \forall m \in M$, se le suele llamar la *identidad en* M. Además, si $f' : M' \longrightarrow M$ y $f : M \longrightarrow N$ son dos $\Lambda - morfismos$, entonces

$$1_M \circ f'(m') = 1_M(f'(m')) = f'(m')$$

y

$$f \circ 1_M(m) = f(1_M(m)) = f(m)$$

para cualesquiera $m' \in M'$ y $m \in M$. Por lo tanto $1_M \circ f' = f'$ y $f \circ 1_M = f$.

1.9 Proposición. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un $\Lambda - morfismo$ diremos que:*
(i) f es un $\Lambda - monomorfismo$, si para cualesquiera $g_1, g_2 : M' \longrightarrow M$ $\Lambda - morfismos$ tales que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, se tiene que $g_1 = g_2$.
(ii) f es un $\Lambda - epimorfismo$, si para cualesquiera $g_1, g_2 : N \longrightarrow O$ $\Lambda - morfismos$ tales que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, se tiene que $g_1 = g_2$.
(iii) f es un $\Lambda - isomorfismo$, si existe un $\Lambda - morfismo$ $g : N \longrightarrow M$ tal que $g \circ f = 1_M$ y $f \circ g = 1_N$.

Si $f : M \longrightarrow N$ es un $\Lambda - monomorfismo$ lo denotaremos como $f : M \rightarrowtail N$, por otro lado, si f es un $\Lambda - epimorfismo$ lo denotaremos por $f : M \twoheadrightarrow N$, y sí. f es un $\Lambda - isomorfismo$ se le denotara por $f : M \xrightarrow{\cong} N$. Diremos que dos $\Lambda -$ *módulos* M y N son *isomorfos,* si existe $f : M \xrightarrow{\cong} N$.

Una observación muy importante de la definición anterior, es que, si $f : M \longrightarrow N$ es un $\Lambda - morfismo$, entonces f es un $\Lambda - isomorfismo$ si, y sólo si f es un $\Lambda - isomorfismo$ si, y solo si f es un $\Lambda - morfismo$ biyectivo.

1.10 Proposición. *Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow O$ dos $\Lambda - morfismos$. Entonces:*
(i) Si f y g son $\Lambda - monomorfismos$, entonces la composición $g \circ f$ es un $\Lambda - monomorfismo$.
(ii) Si f y g son $\Lambda - epimorfismos$, entonces la composición $g \circ f$ es un $\Lambda - epimorfismo$.
(iii) Si f y g son $\Lambda - isomorfismos$, entonces la composición $g \circ f$ es un $\Lambda - isomorfismo$.

Demostración.
(i) Sean $g_1, g_2 : O \longrightarrow M$ dos $\Lambda - morfismos$ tales que

$$(g \circ f) \circ g_1 = (g \circ f) \circ g_2$$

entonces $g \circ (f \circ g_1) = g \circ (f \circ g_2)$. Como g es un $\Lambda - monomorfismo$ se sigue que

$$f \circ g_1 = f \circ g_2$$

dado que f es $\Lambda - monomorfismo$, se tiene $g_1 = g_2$.

(ii) Sean $g_1, g_2 : O \longrightarrow O'$ $\Lambda - morfismos$ tales que

$$g_1 \circ (g \circ f) = g_2 \circ (g \circ f)$$

entonces $(g_1 \circ g) \circ f = (g_2 \circ g) \circ f$. Como f es un $\Lambda - epimorfismo$ se tiene

$$g_1 \circ g = g_2 \circ g$$

como g es un $\Lambda - epimorfismo$, entonces $g_1 = g_2$.

(iii) Como f y g son $\Lambda - isomorfismos$, entonces existen $\Lambda - morfismos$ $f' : N \to M$ y $g' : O \to N$, tales que

$$, f' \circ f = 1_M,\ f \circ f' = 1_N$$

y

$$g' \circ g = 1_N, g \circ g' = 1_O$$

Por lo que

$$(g \circ f) \circ (f' \circ g') = g \circ (f \circ f') \circ g' = (g \circ 1_N) \circ g' = g \circ g' = 1_O$$

y

$$(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ (g' \circ g) \circ f = (f' \circ 1_N) \circ f = f' \circ f = 1_M$$

Por lo tanto $g \circ f$ es un $\Lambda - isomorfismo$. ■

A partir de (1.6) podemos decir que los $\Lambda - morfismos$ son funciones que respetan la operación de grupos abelianos y respetan la multiplicación escalar. A continuación consideremos los siguientes ejemplos:

1.11 Ejemplos. (i) *Las transformaciones lineales en un $K - espacio$ vectorial $(K - módulo)$, son $K - morfismos$.*

(ii) *Para cualquiera M, N $\Lambda - módulos$, la función, $0 : M \longrightarrow N$, constante cero, define un $\Lambda - morfismo$. Al que llamaremos morfismo trivial.*

(iii) *Para cualquier $\Lambda - módulo$ M y $\alpha \in \Lambda$, la función, $\Lambda_\alpha : M \longrightarrow M$, definida por $\Lambda_\alpha (x) = \alpha x$ es un $\Lambda - morfismo$.*

1.12 Definición. *Sea* (M, η) *un* $\Lambda - módulo$*, decimos* $N \subseteq M$*, es un* submódulo *de* (M, η)*, si cumple con:*
(i) *N es un subgrupo del grupo M*
(ii) *La función*

$$\eta_N : \Lambda \longrightarrow End\,(N, N)$$

definida por: $\eta_N(\alpha) = \eta(\alpha) \upharpoonright_N \ \ \forall \alpha \in \Lambda$*, es un homomorfismo de anillos.*

De la definición anterior, si (M, η) es un $\Lambda - módulo$ y N un submódulo de M, entonces (N, η_N) es un $\Lambda - módulo$. Por otro lado, si N es un subgrupo del grupo M, tal que, para cualquier $\alpha \in \Lambda$ y $x \in N$ se tiene $\alpha x = (\eta(\alpha))(x) \in N$, entonces N es un submódulo de M. Por lo tanto, un submódulo N de un $\Lambda - módulo$ M, es un subgrupo abeliano de M estable bajo la multiplicación escalar. Esta observación puede traducirse en la siguiente proposición:

1.13 Proposición. *Sea* (M, η) *un* $\Lambda - módulo$*, y* N *un subconjunto de* M*. Entonces las siguientes son equivalentes:*
(i) *N es un submódulo de M*
(ii) *N es un subgrupo del grupo M y* $\forall \alpha \in \Lambda \ \ \alpha N = \{\alpha x : x \in N\} \subseteq N$.
■

1.14 Ejemplo. *Dado* M *un* $\Lambda - módulo$ *de manera inmediata se tiene que* M *es submódulo de sí mismo. Por otro lado el grupo* $0 = \{0\}$ *también resulta ser submódulo de* M*, puesto que* 0 *es subgrupo de* M*, y* $\alpha 0 = 0 \in \{0\}$ $\forall \alpha \in \Lambda$.

1.15 Ejemplo *Sea* M *un* $\Lambda - módulo$ *y* $x \in M$*. El conjunto* $Ann\,(x) = \{\alpha \in \Lambda : \alpha x = 0\}$ *llamado* anulador *de* x*, es un submódulo de* Λ *visto como un* $\Lambda - módulo$*.*

1.16 Definición. *Dado* M *un* $\Lambda - módulo$*, con* Λ *un dominio entero, diremos que un elemento* $x \in M$ *es de* torsión*, si existe* $\alpha \in \Lambda$*, con* $\alpha \neq 0$*, tal que,* $\alpha x = 0$*. Al subconjunto de* M *cuyos elementos son de torsión lo denotaremos por* τM*.*

1.17 Ejemplo. τM *es un submódulo de* M*. Pues, si* $x, y \in \tau M$*, entonces existen* $\alpha, \beta \in \Lambda$*, con* $\alpha, \beta \neq 0$*, tales que,* $\alpha x = \beta y = 0$*, entonces*

$$\alpha\beta\,(x + y) = \alpha\beta(x) + \alpha\beta\,(y) = \beta\,(\alpha x) + \alpha\,(\beta y) = 0 + 0 = 0$$

como Λ es conmutativo, y Λ es dominio entero, vemos que $\alpha\beta \neq 0$. Por lo tanto $x + y \in \tau M$. Por otra parte, si $x \in \tau M$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$, con $\alpha \neq 0$, tal que $\alpha x = 0$, por lo que para cualquier $\alpha' \in \Lambda$, se tiene que $\alpha(\alpha' x) = \alpha'(\alpha x) = \alpha' 0 = 0$. Por lo tanto $\alpha' x \in \tau M$ para cualquier $\alpha' \in \Lambda$.

A τM se le suele llamar *submódulo de torsión de M.* Por último, si $\tau M = 0$ diremos que M es *libre de torsión*, y si $\tau M = M$ diremos que M es de *torsión.*

Nótese que un $\Lambda - m\acute{o}dulo$ M es libre de torsión, si $Ann(x) = 0$ para cualquier $x \in M$. Por otro lado, M es de torsión, si $Ann(x) \neq 0$ para cualquier $x \in M$.

1.18 Definición. *Para Λ un dominio entero, diremos que un $\Lambda -$ módulo D es* divisible. *Si para cada $d \in D$ y $\alpha \in \Lambda$, $\alpha \neq 0$, existe un $d' \in D$ tal que $d = \alpha d'$.*

1.19 Proposición. *Sea Λ un dominio entero y $Q = Frac(\Lambda)$. Si M es un $\Lambda -$ módulo libre de torsión y divisible. Entonces M es un espacio vectorial sobre Q.*

Demostración. Dados $r \in \Lambda$, $r \neq 0$, $m \in M$, como M es divisible existe una única $m' \in M$ tal que $rm' = m$. Definamos $\left(\frac{1}{r}\right) m = m'$. Entonces para $\frac{s}{r} \in Q$ y $m \in M$ definamos $\frac{s}{r}(m) = sm'$. Para r, $r' \in \Lambda$ sean m, m_1, $m_2 \in M$ y m', m_1', $m_2' \in M$ los únicos elementos que satisfacen:

$$m = rm', \;\; m_1 = rm_1', \;\; m_2 = rm_2'$$

Sea $m'' \in M$ el único elemento que satisface $m' = r'm''$. Entonces como $m = rr'm''$, se tiene $m'' = \frac{1}{rr'}m$ y $\left(\frac{1}{r}\right) m = r'm''$. Entonces si $\frac{s}{r}$, $\frac{s'}{r'} \in Q$, se tiene

$$\begin{array}{rcccl} \left(\frac{s}{r} + \frac{s'}{r'}\right) m & = & \frac{sr'+s'r}{rr'}m & = & (sr' + s'r)\frac{1}{rr'}m \\ & = & (sr' + s'r)\, m'' & = & sm' + srm'' \\ & & & = & \left(\frac{s}{r}\right) m + \left(\frac{s'}{r'}\right) m' \end{array} \quad \text{y}$$

$$\begin{array}{rcccl} \left(\left(\frac{s}{r}\right)\left(\frac{s'}{s'}\right)\right) m & = & \frac{ss'}{rr'}m & = & ss'm'' \\ & = & ss'\left(\frac{1}{r}m'\right) & = & \frac{ss'}{r}m' \\ & = & \frac{ss'}{r}\left(\frac{1}{r'}m\right) & = & \frac{s}{r}\left(\frac{s'}{r'}m\right) \end{array}$$

Por otro lado

$$m_1 + m_2 = r'm_1' + r'm_2' = r'\left(m_1' + m_2'\right)$$

Entonces $\frac{1}{r'}\left(m_1 + m_2\right) = m_1' + m_2'$, de esto se sigue:

$$\tfrac{s'}{r'}\left(m_1 + m_2\right) = s\left(m_1' + m_2'\right) = s'm_1' + s'm_2' = \tfrac{s'}{r'}m_1' + \tfrac{s'}{r'}m_2'$$

Por lo tanto M es un espacio vectorial sobre Q. ■

1.20 Definición. D*iremos que un* $\Lambda-$ *módulo* S *es* cíclico*, si existe* $s \in S$ *tal que*

$$S = \{\alpha S : \alpha \in \Lambda\}$$

Para un $\Lambda-$ *módulo* M y $m \in M$, el conjunto $\langle m\rangle = \{rm : r \in \Lambda\}$ es un submódulo de M además este submódulo es cíclico. A dicho $\Lambda-$ *módulo* se le suele llamar el *submódulo cíclico generado* por m.

A continuación describiremos otros subconjuntos de un $\Lambda-$ *módulo* M, que resultan ser submódulo de M

1.21 Definición. *Sea un* $\Lambda - morfismo$. *El* núcleo *de* f, *denotado como* $\ker f$, *es el conjunto de los elementos* $x \in M$, *tales que,* $f(x) = 0$. *La* imagen *de* f, *denotada por* $im(f)$, *es el conjunto formado por los* $f(x)$ *con* $x \in M$.

1.22 Proposición. *Para cualquier* $f : M \longrightarrow N$ $\Lambda - morfismo$. *Si* M' *es submódulo de* M, *entonces* $f(M')$ *es submódulo de* N, *además si* N' *es submódulo de* N, *entonces* $f^{-1}(N')$ *es submódulo de* M.

Demostración. Veamos que $f(M') = \{f(x) : x \in M'\}$ es submódulo de N. Sean $u, v \in M'$ y $\alpha \in \Lambda$ entonces existen $x, y \in M'$ tales que $f(x) = u$ y $f(x) = v$, como f es un $\Lambda - morfismo$ se tiene que $u + v = f(x) + f(y) = f(x+y) \in f(M')$ y $\alpha f(x) = f(\alpha x) \in f(M')$, pues $x + y \in M'$ y $\alpha x \in M'$. Por lo tanto $f(M')$ es submódulo de N.

Mostremos también que $f^{-1}(N') = \{x \in M : f(x) \in N'\}$ es submódulo de M. Sean $x, y \in f^{-1}(N)$ y $\alpha \in \Lambda$, por lo que $f(x), f(y) \in N'$ y como N' es submódulo de N y f es $\Lambda - morfismo$ se tiene que $f(x+y) = f(x) + f(y) \in N'$ y $f(\alpha x) = \alpha f(x) \in N'$. Por lo tanto $x + y \in f^{-1}(N')$ y $\alpha x \in f^{-1}(N')$. Por lo que $f^{-1}(N')$ es submódulo de M.■

1.23 Corolario. *Para cualquier* $f : M \longrightarrow N$ $\Lambda - morfismo$. *La imagen de* f *es submódulo de* N *y el núcleo de* f *es un submódulo de* M.

Demostración. Como M es submódulo de sí mismo, entonces $f(M) = im(f)$ es submódulo de N y como 0 es submódulo de N, entonces $f^{-1}(0) = \ker(f)$ es submódulo de M.■

1.2 Teoremas de Isomorfismo

En esta sección se probarán los tres teoremas de isomorfismo que nos proporcionarán medios para determinar si dos $\Lambda-$*módulos* son isomorfos para un Λ anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

2.1 Proposición. *Sean $(N_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de un $\Lambda-$módulo M. Entonces $\cap_{i\in I}N_i$ es un submódulo de M.*

Demostración. Sean $x, y \in \cap_{i\in I}N_i$, y $\alpha \in \Lambda$, entonces $x, y \in N_i \ \ \forall i \in I$, ya que N_i es un submódulo de $M \ \ \forall i \in I$, por lo que $x + y \in N_i$ y $\alpha x \in N_i$ $\forall i \in I$. Por lo tanto $x + y \in \cap_{i\in I}N_i$ y $\alpha x \in \cap_{i\in I}N_i$.■

Sea S un subconjunto de un $\Lambda-$*módulo* M. Vemos que S está contenido en al menos un submódulo de M, pues al menos sabemos que $S \subseteq M$, entonces la intersección de todos los submódulos de M que contengan a S es no vacía. Por (2.1) dicha intersección es un submódulo de M. Por lo tanto dicha intersección resulta ser el submódulo más pequeño de M que contiene a S.c

2.2 Definición. *A la intersección de $\cap_{i\in I}N_i$ de los submódulos N_i de un $\Lambda-$módulo M, que contienen a un subconjunto S, se llama* submódulo generado *por S, denotado por $\langle S\rangle$. Si $\cap_{i\in I}N_i = M$ decimos que M es generado por S, y S es conjunto de generadores de M.*

2.3 Definición *Decimos que un elemento x de un $\Lambda-$módulo M es una* combinación lineal *de un $S \subseteq M$, si existen $x_1, ..., x_n \in S$, y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda$ con $n \in \mathbb{N}$, tales que, $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = x$.*

La mayoría de veces a los α_i se les suelen llamar *coeficientes*.

Si S es subconjunto de un Λ.*módulo* M con $S \neq \emptyset$, entonces el conjunto $\overline{S}$ cuyos elementos son combinaciones lineales de elementos de S resulta ser un submódulo de M, ya que la suma de combinaciones lineales de S es combinación lineal de S y la multiplicación de una combinación lineal de S

por un escalar es combinación lineal de S. Por lo tanto $\overline{S}$ es un submódulo que contiene a S.

Por un lado vemos que $\cap_{i\in I}N_i \subseteq \overline{S}$, donde N_i es un submódulo de M que contiene a S para cualquier $i \in I$. Por otro lado si $x \in \overline{S}$, entonces $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$, con $x_1, ..., x_n \in S$, y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda$ y $n \in \mathbb{N}$, como $x_1, ..., x_n \in S \subseteq N_i \ \ \forall i \in I$, entonces $\forall i \in I$, $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n \in N_i$, pues N_i es submódulo de M, entonces $x \in \cap_{i\in I}N_i$. Por lo tanto $\overline{S} = \cap_{i\in I}N_i = \langle S\rangle$. De lo anterior tenemos que el submódulo generado por S son todas las combinaciones lineales que se pueden hacer con los elementos de S.

Sea N un submódulo de un $\Lambda-$*módulo* (M, η), entonces al grupo abeliano cociente M/N, se le puede dotar de una multiplicación escalar:

$$\overline{\eta}: \ \ \Lambda \ \ \rightarrow \ \ End\,(M/N, M/N)$$

definida por:

$$\overline{\eta\,(\alpha)}\,(x+N) = (\eta\,(\alpha))\,(x) + N = \alpha x + N, \quad \forall\alpha \in \Lambda, \ \ x+N \in M/N.$$

Vemos que dicha multiplicación por escalar está bien definida, pues para cada $\alpha \in \Lambda$ y $x, y \in M$, si $x + N = y + N$, entonces $\alpha\,(x-y) \in N$. Por lo tanto $\alpha x + N = \alpha y + N$. Por otro lado

$$(\alpha x + \beta y) + N = (\alpha x + N) + (\beta y + N) = \overline{\eta\,(\alpha)}\,(x+N) + \overline{\eta\,(\beta)}\,(y+N)$$

A partir de este hecho podemos lo siguiente.

2.4 Definición *Si N es un submódulo de un $\Lambda-$ módulo (M, η), al $\Lambda-$ módulo $(M/N, \overline{\eta}) = M/N$ se le llama el $\Lambda-$ módulo* cociente de M.

2.5 Observación. *Sea $x + \tau M \in M/\tau M$ un elemento de torsión en $M/\tau M$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$, con $\alpha \neq 0$, tal que, $\alpha\,(x + \tau M) = \alpha x + \tau M = 0 + \tau M$, como $\alpha\,(x - \alpha x) = \alpha x + \alpha\,(\alpha x) = 0$, entonces $x - \alpha x \in \tau M$, por lo tanto $x + \tau M = \alpha x + \tau M$. Entonces, si $x + \tau M$ es de torsión, entonces $x + \tau M = \alpha x + \tau M = 0 + \tau M$. Por lo tanto $M/\tau m$ es libre de torsión.*

2.6 Definición. *Llamaremos coimagen y conúcleo de un $\Lambda-morfismo$*

$$f : M \longrightarrow N$$

a los $\Lambda -$ módulos cocientes de M y N

$$\begin{aligned} coim\,(f) &= M/\ker(f) \\ co\ker(f) &= N/im\,(f) \end{aligned}$$

respectivamente.

2.7 Proposición. *Un $\Lambda - morfismo$ $f : M \longrightarrow N$ es :*
(i) *f es una función inyectiva si, y sólo si* $\ker(f) = 0$
(ii) *f es una función suprayectiva si, y sólo si* $co\ker(f) = 0$
Demostración.
(i) Si f es una función inyectiva. Sea $x \in \ker(f)$, entonces $f(x) = 0$, por otro lado como $f(0) = 0$, entonces $f(x) = f(0)$. Por lo tanto $x = 0$.

Supongamos que $\ker(f) = 0$,sean $x, y \in M$, tales que, $f(x) = f(y)$, entonces $0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$, de esto se sigue que $x - y \in \ker(f)$. Por lo tanto $x = y$.

(ii) Si f es un función suprayectiva, entonces $im\,(f) = N$, por lo que si $x \in N = im\,(f)$, entonces $x + im\,(f) = im\,(f)$.

Por otro lado si $co\ker(f) = 0$. Entonces para cualquier $x \in N$, se tiene que $x + im\,(f) = im\,(f)$. Por lo tanto $x \in im\,(f)$.■

2.8 Proposición. Sea $\Lambda - morfismo$ $f : M \longrightarrow N$. Entonces:
(i) f es un $\Lambda - monomorfismo$ si, y sólo si f es una función inyectiva.
(ii) f es un $\Lambda - epimorfismo$ si, y sólo si f es una función suprayectiva
Demostración.
(i) $(\Longleftarrow)$ Supongamos que f es una función inyectiva. Sean $g_1, g_2 : M' \longrightarrow M$ dos $\Lambda - morfismos$, tales que, $fg_1 = fg_2$. Entonces para cualquier $x \in M'$, se tiene $fg_1(x) = fg_2(x)$, por lo que $0 = fg_1(x) - fg_2(x) = f(g_1(x) - g_2(x))$, entonces $g_1(x) - g_2(x) \in \ker(f) = 0$, pues f es inyectiva. Por lo tanto $g_1(x) = g_2(x)$ para cualquier $x \in M'$.

$(\Longrightarrow)$ Supongamos que f es un $\Lambda - monomorfismo$. Como $\ker(f)$ es un submódulo de M, en particular $\ker(f)$ un $\Lambda -$ *módulo*, por lo que al considerar los $\Lambda - morfismos$ $i : \ker(f) \longrightarrow M$ definido por $i(x) = x\ \forall x \in \ker(f)$ (la inclusión de $\ker(f)$ en M) y $0 : \ker(f) \longrightarrow M$ el $\Lambda - morfismo$ trivial, entonces $f \circ i(x) = f(x) = 0 = f \circ 0(x)$, para cualquier $x \in \ker(f)$, como f es un $\Lambda - monomorfismo$, entonces $i = 0$. Por lo tanto para cualquier $x \in \ker(f)$, se tiene $x = i(x) = 0(x) = 0$.

(ii) $(\Longleftarrow)$ Supongamos que f es una función suprayectiva. Sean $g_1, g_2 : N \longrightarrow N''$, dos $\Lambda - morfismos$, tales que, $g_1 f = g_2 f$, entonces para cualquier $x \in M$, se tiene $g_1 f(x) = g_2 f(x)$. Por otro lado para cualquier

$y \in N$, como f es suprayectiva existe $x \in M$, tal que, $f(x) = y$, por lo tanto $g_1(y) = g_1 f(x) = g_2 f(x) = g_2(y)$, para cualquier $y \in N$.

($\Longrightarrow$) Supongamos que f es un $\Lambda - epimorfismo$. Como $im(f)$ es submódulo de N podemos considerar al $\Lambda - morfismo$ $p : N \longrightarrow co\ker(f)$; donde $p(x) = x + im(f), \forall x \in N$ (la proyección de N en $im(f)$) y el morfismo trivial $0 : N \longrightarrow co\ker(f)$, entonces $pf(x) = p(f(x)) = 0 + im(f) = 0(f(x)) = 0f(x)$, como f es un $\Lambda - epimorfismo$ se sigue $0 = p$. Por lo tanto si $x \in N$, $p(x) = x + im(f) = 0 + im(f)$. Entonces $co\ker(f) = 0$. $\blacksquare$

Si $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow O$ son dos $\Lambda - morfismos$, sea $h = g \circ f$ el $\Lambda - morfismo$ composición. Si h es un $\Lambda - monomorfismo$, de la proposición anterior h $\Lambda - morfismo$ inyectivo, entonces f es un $\Lambda - morfismo$ inyectivo; por lo tanto f es un $\Lambda - monomorfismo$. Por otro lado, si h es un $\Lambda - epimorfismo$, entonces h es un $\Lambda - morfismo$ suprayectivo, entonces g es un $\Lambda - morfismo$ suprayectivo, por lo tanto g es un $\Lambda - epimorfismo$.

2.9 Corolario. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un $\Lambda - morfismo$. Entonces f es:*
(i) $\Lambda - monomorfismo$ si, y sólo si $\ker(f) = 0$
(ii) $\Lambda - epimorfismo$ si, y sólo si $co\ker(f) = 0$.$\blacksquare$

2.10 Corolario. *Para cualquier $f : M \longrightarrow N$ $\Lambda - morfismo$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) f es un $\Lambda - isomorfismo$
(ii) $\ker(f) = 0$ *y* $co\ker(f) = 0$
(iii) f es un $\Lambda - morfismo$ biyectivo.$\blacksquare$

De la proposición anterior podemos observar que la relación isomorfismo describe una relación de equivalencia en la colección de los $\Lambda - módulos$. Por lo tanto, si M, N son $\Lambda - módulos$, con M isomorfo a N, se tiene que M es igual N, pues están en correspondencia biyectiva y la estructura de M induce la estructura de N. Ahora veamos una aplicación.

2.11 Proposición. *Sea Λ un dominio entero. Entonces para un $\Lambda - módulo$ se tiene:*

(i) Si para todo $r \in \Lambda$, $r \neq 0$, el $\Lambda - morfismo$, $\mu_r : M \longrightarrow M$, que denota la multiplicación por r, i.e, $\mu_r(m) = rm$ para cualquier $m \in M$, es un $\Lambda - monomorfismo$. Entonces M es libre de torsión.

(ii) Si para todo $r \in \Lambda$, $r \neq 0$, el $\Lambda - morfismo$, $\mu_r : M \longrightarrow M$, es $\Lambda - epimorfismo$. Entonces M es de división.

(iii) Si para todo $r \in \Lambda$*,* $r \neq 0$*, el* $\Lambda - morfismo$*,* $\mu_r : M \longrightarrow M$*, es un* $\Lambda - isomorfismo$*. Entonces* M *es un espacio vectorial sobre* $Q = Frac(\Lambda)$*.*

Demostración. (i) Sea $x \in \tau M$, entonces existe $r \in \Lambda$, $r \neq 0$, tal que, $rx = 0$, entonces $x \in \ker(\mu_r)$. Por otro lado μ_r es un $\Lambda - monomorfismo$, entonces $\ker(\mu_r) = \{0\}$. Por lo tanto $x = 0$.

(ii) Sean $m \in M$ y $r \in \Lambda$, $r \neq 0$. Como μ_r es $\Lambda - epimorfismo$, entonces existe $m' \in M$, $\mu_r(m') = rm' = m$.

(iii) Como para toda $r \in \Lambda$, $r \neq 0$, el $\Lambda - morfismo$, $\mu_r : M \longrightarrow M$, es un $\Lambda - isomorfismo$. Entonces por (i) y (ii), M es de división y libre de torsión, por (1.20) es un espacio vectorial sobre Q. ■

Sea M un $\Lambda - módulo$ y sea N un submódulo de M, se define la proyección natural

$$p : M \longrightarrow M/N$$

con $p(x) = x + im(f)\ \forall x \in N$, es un $\Lambda - epimorfismo$ del módulo M en el módulo M/N. Además N es el núcleo de p, pues si $x \in N$, se tiene que $p(x) = x + N = 0 + N$. Por lo tanto todo submódulo N de un $\Lambda - módulo$ M es un núcleo de un cierto $\Lambda - morfismo$.

Ahora la pregunta a la que nos enfrentamos es: ¿Existe un submódulo N de un $\Lambda - módulo$ M tal que, si $f : M \longrightarrow M'$ es un $\Lambda - morfismo$, $im(f) \cong M/N$? Para tratar de dar una respuesta a esta pregunta demostraremos el siguiente teorema.

2.12 Teorema. (Primer Teorema de Isomorfismo). *Sea* M *un* $\Lambda - morfismo$ *y* $f : M \longrightarrow M'$ *un* $\Lambda - morfismo$ *si* N *es un submódulo de* M *tal que* $N \subseteq \ker(f)$*.Entonces existe un único* $h : M/N \longrightarrow M'$ $\Lambda - morfismo$ *tal que* $h \circ p = f$*. Además* $im(h) = im(f)$ *y* $\ker(h) = \ker(f)/N$*.*

Demostración. Definamos

$$\begin{array}{cccc} h: & M/N & \rightarrow & M' \\ & x+N & \rightarrow & h(x+N) = f(x) \end{array}$$

Veamos que está bien definida. Sean $x + N = y + N$, se tiene que $x - y \in N$ como $N \subseteq \ker(f)$, entonces $f(x - y) = 0$. Por lo tanto se tiene $h(x + N) = f(x) = f(y) = h(y + N)$.

Ahora veamos que h es un $\Lambda - morfismo$; sean $x + N, y + N \in M/N$ y $\alpha \in \Lambda$, se tiene que $h((x + N) + (y + N)) = h((x + y) + N) = f(x + y) = f(x) + f(y) = h(x + N) + h(y + N)$ y $h(\alpha(x + N)) = h(\alpha x + N) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha h(x + N)$.

Por otro lado, si $h : M/N \longrightarrow M'$ es tal que $h'p = f$. Entonces para cualquier $x+N \in M/N$ se tiene que $h'(x+N) = h'p\,(x) = f(x) = h\,(x+N)$. Por lo tanto $h'\,(x+N) = h\,(x+N)$.

Como $im\,(f) = \{f\,(x) : x \in M\} = \{h\,(x+N) : x+N \in M/N\} = im\,(h)$, entonces $im\,(f) = im\,(h)$. Por otro lado si $h\,(x+N) = 0$ si, y sólo si $f\,(x) = 0$, i.e, si, y sólo si $x \in \ker(f)$, tenemos que $x+N \in \ker(f)/N$. Por lo tanto $\ker(h) = \ker(f)/N$.■

Si en el teorema anterior tomamos $N = \ker(f)$, entonces h es un $\Lambda - monomorfismo$, pues $\ker(h) = \ker(f)/N = 0$. Como $f\,(M) = im\,(f) = im\,(h) \cong M/N = M/\ker(f)$, se sigue que $f\,(M) \cong M/\ker(f)$. Por lo que nuestra pregunta anterior queda contestada tomando $N = \ker(f)$.

Al submódulo generado por $\cup_{i \in i} N_i$ de submódulos N_i de un $\Lambda -$ *módulo* M se denotará por $\sum_{i \in I} N_i$, ya que $\langle \cup_{i \in i} N_i \rangle$ es el conjunto de combinaciones lineales que se pueden formar con $\cup_{i \in i} N_i$. En particular el submódulo generado por $N_1 \cup N_2$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $N_1 \cup N_2$ se tiene que $\langle N_1 \cup N_2 \rangle = \{x+y : x \in N_1, \quad y \in N_2\}$ al cual lo denotaremos por $N_1 + N_2 = \langle N_1 \cup N_2 \rangle$.

2.13 Teorema. (Segundo Teorema de Isomorfismo). *Sean* N, N' *dos submódulos de un* $\Lambda -$ *módulo* M. *Entonces:*

(i) *Para el* $\Lambda - morfismo$ *de inclusión* $i : N \longrightarrow N + N'$ *donde* $i\,(x) = x + 0 = x \ \forall x \in N$ *se tiene que* $i\,(N \cap N') \subseteq N'$

(ii) *i induce un* $\Lambda - isomorfismo$ $i' : N/N \cap N' \xrightarrow{\cong} (N+N')/N'$.

Demostración.

(i) Como $N \cap N' \subseteq N$, entonces $i\,(N \cap N') \subseteq i\,(N') = N'$, pues i es la inclusión. Por lo tanto $i\,(N \cap N') \subseteq N'$.

(ii) De (i) i induce un $\Lambda - morfismo$ $i' : N/N \cap N' \longrightarrow (N+N')/N'$ donde $i'\,(x + (N \cap N')) = i\,(x) + (N+N')$. Veamos que es $\Lambda - isomorfismo$.

Sea $x + (N \cap N') \in N/(N \cap N')$ tal que $i'\,(x + (N \cap N')) = 0 + N'$, como $x + N' = i'\,(x + (N \cap N')) = 0 + N'$, entonces $x \in N'$. Por lo tanto $x + (N \cap N') = 0 + (N \cap N')$, pues $x \in N \cap N'$. De esto se sigue que i' es un $\Lambda - monomorfismo$.

Sea $z + N' \in (N+N')/N'$, entonces $z = x + y$, con $x \in N$, $y \in N'$, como $x - z = x - (x+y) = -y \in N'$, se sigue que $x + N' = z + N'$. Por lo tanto tomando $x + (N \cap N') \in N/(N \cap N')$ se obtiene $i'\,(x + (N \cap N')) = x + N' = z + N'$. Por lo tanto i' es un $\Lambda - epimorfismo$.■

2.14 Teorema. (Tercer Teorema de Isomorfismo). *Sean* $M'' \subseteq M' \subseteq M$ $\Lambda -$ *módulos. Entonces* $(M/M'')/(M'/M'') \cong M/M'$.

Demostración. Definamos $f : M/M'' \longrightarrow M/M'$ de la siguiente forma

$$f(x + M'') = x + M'$$

Vemos que está bien definida, ya que si $x + M'' = y + M''$, entonces $x - y \in M' \subseteq M'$, por lo tanto $x, y \in M'$. Como $x + M' = y + M'$, se sigue que $h(x + M'') = x + M' = y + M' = h(y + M')$. Además define un $\Lambda - morfismo$, pues si $x + M'', y + M'' \in M/M''$ y $\alpha \in \Lambda$, se tiene: $h((x + y) + M'') = (x + y) + M'' = x + M'' + y + M'' = h(x + M'') + h(y + M'')$ y $h(\alpha x + M') = \alpha x + M' = \alpha(x + M') = \alpha h(x + M'')$.

Por otra parte f es un $\Lambda - monomorfismo$, ya que si $f(x + M') = x + M' = 0 + M'$ si, y solo si $x \in M'$. Por lo tanto $x + M'' \in \ker(f)$ si, y solo si $x + M' \in M'/M''$.

Como para cualquier $x + M' \in M/M'$ se tiene que $x \in M$, por lo que tomando $x + M'' \in M/M''$ se sigue $h(x + M') = x + M'$. Por lo que f es un $\Lambda - epimorfismo$.

Aplicando (2.10) se tiene

$$M/M' = im(f) \cong (M/M'')/\ker(f) = (M/M'')/(M'/M'')$$

Por lo tanto $M/M' \cong (M/M'')/(M'/M'')$. ■

A continuación mostraremos una pequeña aplicación del Primer Teorema de Isomorfismo

2.15 Ejemplo. *Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ un $\mathbb{Z} - morfismo$ dado por $f(m) = r$, donde r es el residuo de la división de m entre n. Sabemos que f es $\Lambda - epimorfimo$, ya que f es suprayectiva. Por otro lado se tiene que el núcleo de f es $n\mathbb{Z}$. Aplicando el Primer Teorema de Isomorfismo se tiene*

$$\mathbb{Z}_n = im(f) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

por lo tanto $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1.3 Sucesiones

A continuación nuestro objeto de estudio serán sucesiones finitas e infinitas de $\Lambda - morfismos$, las cuales van a jugar un papel muy importante para nuestro estudio en secciones posteriores.

3.1 Definición. *Una* sucesión ascendente *de* $\Lambda - morfismos$*, es una familia de* $\Lambda - morfismos$ $\{f_i\}_{i\in A} = \{f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}\}_{i\in A}$*,con* $A \subseteq \mathbb{Z}$*. La cual se suele representar con:*

$$\ldots \;\rightarrow\; M_{i-1} \;\overset{f_{i-1}}{\rightarrow}\; M_i \;\overset{f_i}{\rightarrow}\; M_{i+1} \;\rightarrow\; \ldots$$

Al $\Lambda - morfismo$ f_{i-1} se le suele llamar el $\Lambda - morfismo$ *entrante en* M_i o simplemente *entrante en* M_i, y a f_i se le suele llamar el $\Lambda - morfismo$ *saliente en* M_i o simplemente *saliente en* M_i.

3.2 Definición. *Una* sucesión descendente *de* $\Lambda - morfismos$*, es una familia de* $\Lambda - morfismos$ $\{f_i\}_{i\in A} = \{f_i : M_i \longrightarrow M_{i-1}\}_{i\in A}$*, con* $A \subseteq \mathbb{Z}$*. La cual solemos representar como:*

$$\ldots \;\rightarrow\; M_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\rightarrow}\; M_i \;\overset{fi}{\rightarrow}\; M_{i-1} \;\rightarrow\; \ldots$$

Al $\Lambda - morfismo$ f_{i+1} se le suele llamar el $\Lambda - morfismo$ *entrante en* M_i o simplemente *entrante en* M_i, y a f_i se le suele llamar el $\Lambda - morfismo$ *saliente en* M_i o simplemente *saliente en* M_i.

3.3 Definición. *Diremos que una sucesión de* $\Lambda - módulos$ $\{f_i\}_{i\in A}$ *ascendente (descendente) es* semiexacta en M_i*, si* $im\,(f_{i-1}) \subseteq \ker(f_i)$ $(im\,(f_{i+1}) \subseteq \ker(fi))$*. Diremos que es semiexacta, si para cualquier* $i \in A$ *es* semiexacta en M_i.

Está definición equivale (como a continuación veremos) a que la composición de los $\Lambda - morfismos$ entrante y saliente es el $\Lambda - morfismo$ trivial.

3.4 Proposición. *Para cualquier sucesión* $\{f_i\}_{i\in A}$ *ascendente (descendente) de* $\Lambda - morfismos$*. Las siguientes son equivalentes:*

(i) Es semiexacta en M_i

(ii) $f_i \circ f_{i-1} = 0$ $(\ f_i \circ f_{i+1} = 0)$

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $x \in M_{i-1}$ $(x \in M_{i-1})$, entonces $f_i \circ f_{i-1}(x) = f_i(f_{i-1}(x)) = 0$ $(f_{i+1} \circ f_i(x) = f_{i+1}(f_i(x)) = 0)$, pues $im\,(f_{i-1}) \subseteq \ker(f_i)$ $(im\,(f_{i+1}) \subseteq \ker(fi))$. Por lo tanto $f_i \circ f_{i-1} = 0$ $(f_i \circ f_{i+1} = 0)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $y \in im\,(f_{i-1})$ $(y \in im\,(f_{i+1}))$, entonces existe $x \in M_{i-1}$, tal que, $f_{i-1}(x) = y$ $(\ x \in M_{i+1}$, tal que, $f_{i+1}(x) = y)$ por lo que $f_i(y) = f_i(f_{i-1}(x)) = f_i \circ f_{i-1}(x) = 0$ $(f_i(y) = f_i(f_{i+1}(x)) = f_i \circ f_{i+1}(x) = 0)$. Por lo tanto $y \in \ker(f_i)$. ■

3.5 Definición. *Diremos que una sucesión ascendente (descendente) de* $\Lambda-morfismos$ $\{f_i\}_{i\in A}$ *es* exacta en M_i*, si es semiexacta en* M_i $\ker(f_{i-1}) \subseteq im(f_i)$ $(\ker(f_i) \subseteq im(f_{i+1}))$*. Si es exacta en* M_i *para cualquier* $i \in A$*, diremos que es* exacta*.*

Diremos que una sucesión ascendente (descendente) de $\Lambda - morfismos$ $\{f_i\}_{i\in A}$ es *exacta en* M_i si, y sólo si $\ker(f_{i-1}) = im(f_i)$ $(\ker(f_i) = im(f_{i+1}))$. Por lo tanto toda sucesión exacta en M_i es semiexacta en M_i, pero no toda sucesión semiexacta es exacta como a continuación lo muestra el siguiente ejemplo:

3.6 Ejemplo. *Consideremos el* $\mathbb{Z}-morfismo$ $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}_2$ *con* $f(n) = 2n \ \ \forall n\in\mathbb{Z}$*, entonces la sucesión:*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_2$$

es semiexacta, ya que $im(i) = 0 \subseteq \ker(f) = \mathbb{Z}$*, pero no es exacta en* $\mathbb{Z}$*, pues* $\ker(f) \subsetneq im(i)$*.*

A una sucesión exacta de la forma:

$$0 \ \rightarrow \ M' \ \xrightarrow{f} \ M \ \xrightarrow{g} \ M'' \rightarrow 0$$

la llamaremos *sucesión exacta corta.*

3.7 Ejemplo. Sea N un submódulo de un $\Lambda-módulo$ M. Consideremos el módulo cociente M/N. Sea

$$i: \ N \ \longrightarrow \ M$$

la inclusión de N en M y sea

$$p: \ M \ \longrightarrow \ M/N$$

el $\Lambda - epimorfismo$ de proyección. Como $im(i) = N = \ker(p)$, entonces

$$0 \ \rightarrow \ N \ \xrightarrow{i} \ M \ \xrightarrow{p} \ M/N \ \rightarrow \ 0$$

es una sucesión exacta corta.

3.8 Observación. *Consideremos una sucesión exacta corta:*

$$0 \ \xrightarrow{i} \ M' \ \xrightarrow{f} \ M \ \xrightarrow{g} \ M'' \ \xrightarrow{0} \ 0$$

Entonces f *es un* $\Lambda-monomorfismo$*, pues* $\ker(f) = im(i) = 0$*. Por otra parte* g *es un* $\Lambda-epimorfismo$*, pues* $im(g) = \ker(0) = M''$*. Considerando* $N = im(f) = \ker(g)$*, entonces se tiene que* f *establece un* $\Lambda-isomorfismo$ *de* $N \overset{\cong}{\longrightarrow} M'$*, y* g *establece un* $\Lambda-isomorfismo$ $M/N \overset{\cong}{\longrightarrow} M''$*. Por lo tanto una sucesión exacta corta es una sucesión con un submódulo y el módulo cociente de un* $\Lambda-$*módulo.*

Considerando una sucesión exacta de $\Lambda-$*módulos* de la forma:

$$0 \ \rightarrow \ N' \ \overset{f}{\rightarrow} \ N \ \overset{g}{\rightarrow} \ M \ \overset{h}{\rightarrow} \ M'' \ \rightarrow \ 0$$

Si suponemos que f es un $\Lambda-epimorfismo$ y h es un $\Lambda-monomorfismo$, entonces $im(f) = N$ y $\ker(h) = 0$, como $im(g) = \ker(h) = 0$. Por lo tanto g es el $\Lambda-morfismo$ trivial. Inversamente si g es el morfismo trivial. Como $\ker(h) = im(g) = 0$ y $im(f) = \ker(g) = N$, se sigue que f es un $\Lambda-epimorfismo$ y h es un $\Lambda-monomorfismo$. A partir de estos hechos acabamos de demostrar la siguiente proposición.

3.9 Proposición. *Si*

$$0 \rightarrow N' \overset{f}{\rightarrow} N \overset{g}{\rightarrow} M \overset{h}{\rightarrow} M'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Entonces h *es un* $\Lambda-monomorfismo$ *si, y sólo si* g *es el morfismo trivial, y* f *es un* $\Lambda-epimorfismo$ *si, y sólo si* g *es el morfismo trivial.* ■

3.10 Ejemplo. *De la proposición anterior, si* $f : M \longrightarrow N$ *es un* $\Lambda-morfismo$*. Entonces la sucesión*

$$0 \ \rightarrow \ \ker(f) \ \overset{i}{\longrightarrow} \ M \ \overset{f}{\longrightarrow} \ N \ \overset{p}{\longrightarrow} \ co\ker(f) \ \rightarrow \ 0$$

es exacta.

3.11. Definición. *Sean* $f' : M \longrightarrow N$*,* $f : N \longrightarrow N'$*,* $g' : M \longrightarrow M'$ *y* $g : M' \longrightarrow N'$ $\Lambda-morfismos$*, decimos que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{f'}{\longrightarrow} & N \\ \downarrow^{g'} & & \downarrow^{f} \\ M' & \overset{g}{\longrightarrow} & N' \end{array}$$

conmuta, si $g \circ g' = f \circ f' : M \rightarrow N'$*.*

Denotaremos a la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$, por la observación (3.8) podemos denotar dicha sucesión con $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$.

3.12 Proposición. *Sean* $M' \overset{f'}{\rightarrowtail} M \overset{f}{\twoheadrightarrow} M''$ *y* $N' \overset{g'}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} N''$ *dos sucesiones exactas cortas. Supongamos que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccccc} M' & \overset{f'}{\rightarrowtail} & M & \overset{f}{\twoheadrightarrow} & M'' \\ \downarrow^{h'} & & \downarrow^{h} & & \downarrow^{h''} \\ N' & \overset{g}{\rightarrowtail} & N & \overset{g'}{\twoheadrightarrow} & N'' \end{array}$$

donde dos de los tres $\Lambda - morfismos$ h', h, *y* h'' *son* $\Lambda - isomorfismos$. *Entonces el tercero también lo es.*

Demostración. Supongamos que h' y h son $\Lambda - isomorfismos$ y mostraremos que h'' es un $\Lambda - isomorfismo$.

Veamos que h'' es $\Lambda - monomorfismo$. Sea $x'' \in \ker(h'')$, entonces $h''(x'') = 0$; como $\acute{x} \in M''$ y f es $\Lambda - epimorfismo$, existe $x \in M$ tal que $f(x) = \acute{x}$. Entonces $h''(f(x)) = g(h(x)) = 0$, por lo tanto $h(x) \in \ker(g) = im(g')$,entonces existe $y' \in N'$ tal que $g'(y) = h(x)$. Como h' es $\Lambda - isomorfismo$ existe $x' \in M'$ tal que $h'(x') = y$, como $h(x) = g'(y) = g'(h'(x')) = h(\acute{f}(x'))$, entonces $h(x) = f'(x)$, como h es inyectiva se tiene que $x = f'(x)$. Por lo tanto $\acute{x} = f(x) = ff'(x) = 0$.

Ahora veamos que h'' es un $\Lambda - epimorfismo$. Sea $y'' \in N''$, entonces como g es $\Lambda - epimorfismo$ existe $y \in N$ tal que $g(y) = y''$. Como h es $\Lambda - isomorfismo$ existe $x \in M$, tal que $h(x) = y$, por lo que $y'' = g(y) = g(h(x)) = h''(f(x))$. Por lo tanto $y'' = h''(f(x))$.

Los otros casos son análogos.■

3.13 Observación. *De la proposición anterior vemos que se establece los* $\Lambda - isomorfismos$ *sólo cuando el* $\Lambda - morfismo$ $h : M \to N$ *es compatible con los demás* $\Lambda - morfismos$ *y el diagrama conmute. Por ejemplo, si consideramos el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Z}_2 & \overset{i}{\to} & \mathbb{Z}_4 & \overset{d_2}{\to} & \mathbb{Z}_2 & \to & 0 \\ & & \downarrow 1_{\mathbb{Z}_2} & & & & \downarrow 1_{\mathbb{Z}_2} & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z}_2 & \overset{i'}{\to} & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \overset{p}{\to} & \mathbb{Z}_2 & \to & 0 \end{array}.$$

con i la inclusión de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_4$, $d_2(m) = r\ \forall m \in \mathbb{Z}_4$ (donde r es el residuo de m entre 2), $i'(n) = (n, 0)\ \forall n \in \mathbb{Z}_2$, y $p(m, n) = m\ \forall (m, n) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, vemos que no se puede establecer un $\Lambda - isomorfismo$ entre $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, pues $\mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3.14 Proposición. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos*

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \overset{f'}{\rightarrowtail} & M & \overset{f}{\twoheadrightarrow} & M'' & \rightarrow 0 \\ & & \downarrow^{h'} & & \downarrow^{h} & & \downarrow^{h''} & \\ 0 \rightarrow & & N' & \overset{g}{\rightarrowtail} & N & \overset{g}{\twoheadrightarrow} & N'' & \end{array}$$

Entonces existe un $\Lambda - morfismo$

$$\partial : \ker\left(h''\right) \longrightarrow co\ker\left(h'\right)$$

tal que la sucesión:

$$\ker\left(h'\right) \overset{f'\restriction_{\ker(h')}}{\rightarrow} \ker(h) \overset{k}{\rightarrow} \ker\left(h''\right) \overset{\partial}{\rightarrow} co\ker\left(h'\right) \overset{k'}{\rightarrow} co\ker(h) \overset{\overline{g}}{\rightarrow} co\ker\left(h''\right)$$

es exacta.

Demostración.

Sea $c \in \ker(h'')$, como f es un $\Lambda - epimorfismo$ existe $b \in M$ tal que $f(b) = c$, como $g(h(b)) = h''(f(b)) = 0$, entonces $h(b) \in \ker(g) = im(g')$, por lo que existe $a' \in N'$ tal que $g'(a') = h(b)$.

Definamos

$$\begin{array}{rccc} \partial : & \ker(h'') & \longrightarrow & co\ker(h') \\ & c & \longrightarrow & \partial(c) = a' + im(h') \end{array}$$

Demostremos que ∂ está bien definida, $i.e$, es independiente de la elección de a'. Sea $b' \in M$ tal que $f(b') = c$, entonces $f(b'-b) = c-c = 0$, por lo que $b' - b \in \ker(f) = im(f')$, por otro lado existe $a \in M'$ tal que $f(a) = b' - b$, entonces $b' = b + f'(a)$ y $h(b') = h(b + f'(a)) = h(b) + h\left(f'(a)\right) = h(b) + g'(h'(a))$. Por lo tanto $\partial(c) = (a' + h'(a)) + im(h') = a' + im(h')$, es decir, ∂ está bien definida.

Mostremos ahora que ∂ es un $\Lambda - morfismo$. Sean $c, c' \in \ker(h'')$ y $\alpha \in \Lambda$. Entonces existen b, b' tales que $f(b) = c$ y $f(b') = c'$, además $g(h(b)) = h''(f(b)) = 0$ y $g(h(b')) = h''(f(b')) = 0$, entonces $h(b), h(b') \in \ker(g) = im(g')$, por lo que existen $a, a' \in N'$ tal que $h(b) = g'(a)$ y $h(b') = g'(a')$; como $c + c' = f(b + b')$, $g(h(b + b')) = h''(f(b + b')) = 0$ y $h(b + b') = h(b) + h(b') = g'(a) + g'(a') = g'(a + a')$. Por otro lado $\alpha c =$

$f(\alpha c)$, y a su vez $g(h(\alpha b)) = h''(f(\alpha b)) = 0$, entonces $\alpha h(b) = \alpha g'(a)$. Por lo tanto

$$\partial(c + c') = (a + a') + im(h') = (a + im(h')) + (a' + im(h')) = \partial(c) + \partial(c')$$

y

$$\partial(\alpha c) = \alpha a + im(h') = \alpha(a + im(h')) = \alpha\partial(c)$$

Por lo tanto ∂ es un $\Lambda - morfismo$.

Ahora veamos que las sucesiones:

$$\ker(h') \overset{f'\restriction_{\ker(h')}}{\longrightarrow} \ker(h) \overset{k}{\longrightarrow} \ker(h'')$$

y

$$co\ker(h') \overset{k'}{\longrightarrow} co\ker(h) \overset{\overline{g}}{\longrightarrow} co\ker(h'')$$

son exactas.

Veamos que $im(f' \restriction_{\ker(h')}) = \ker(k)$, donde $k = f \restriction_{\ker(h)}$. Sea $x \in \ker(h')$ como $h(f'(x)) = g'(h'(x)) = g'(0) = 0$, entonces $f'(x) \in \ker(h)$, como $f(f'(x)) = 0$. Por lo tanto $f'(x) \in \ker(\kappa)$. Sea $y \in \ker(\kappa)$, entonces $y \in \ker(f) = im(f')$ y $y \in \ker(h)$, entonces existe $a' \in M'$ tal que $f'(a') = y$, entonces $0 = h(y) = h(f'(a')) = g'(h'(a'))$; por lo tanto $h'(a') = 0$, pues g' es $\Lambda - monomorfismo$, entonces $a' \in \ker(h')$ y $f'(a') = y$, i.e $y \in im(f' \restriction_{\ker(h')})$.

Ahora mostremos que $im(k') = \ker(\overline{g})$. Donde

$$k' : co\ker(h') \longrightarrow co\ker(h)$$

está definida por $k(x' + im(h')) = g'(x') + im(h)$, y

$$\overline{g} : co\ker(h) \longrightarrow co\ker(h'')$$

está definida por $\overline{g}(x + im(h)) = g(x) + im(h'')$.

Sea $x' + im(h') \in co\ker(h')$, entonces $k(x' + co\ker(h')) = g'(x') + im(h) \in co\ker(h)$, y $\overline{g}(g'(x') + im(h)) = g(g'(x')) + im(h'') = 0 + im(h'')$. Por lo tanto $k(x' + co\ker(h')) \in \ker(\overline{g})$. Sea $y + co\ker(h) \in \ker(\overline{g})$, entonces

$$\overline{g}(y + co\ker(h)) = g(y) + im(h'') = 0 + im(h'')$$

por lo que $g(y) \in im(h'')$, entonces existe $m'' \in M''$, tal que, $h''(m'') = g(y)$, como $m'' \in M''$ existe $m \in M$, tal que, $f(m) = m''$. Como $g(y) = h''(f(m)) = g(h(m))$, entonces $g(y) = g(h(m))$, por lo tanto $g(y - h(m)) = 0$, i.e $y - h(m) \in \ker(g) = im(g')$, por lo que existe $a \in N'$, tal que,

$y - h(m) = g'(a)$, entonces $y = g'(a) + h(m)$. Por lo tanto $y + im(h) = g'(a) + im(h) = k'(a + im(h'))$, i.e $y + im(h) \in im(k')$.

A continuación mostraremos que la siguiente sucesión es exacta:

$$\ker(h') \overset{f'\restriction_{\ker(h')}}{\to} \ker(h) \xrightarrow{k} \ker(h'') \xrightarrow{\partial} co\ker(h') \xrightarrow{k'} co\ker(h) \xrightarrow{\overline{g}} co\ker(h'')$$

De lo anterior basta con demostrar que : $im(k) = \ker(\partial)$ y $im(\partial) = \ker(k')$

Mostremos que $im(k) = \ker(\partial)$. Sea $c \in \ker(h'')$, entonces $c = f(b)$, para alguna $b \in \ker(h)$, es decir, $h(b) = 0 = g'(a')$. Luego $a' = 0$, pues $g\'{}$ es un $\Lambda - monomorfismo$. A partir de la definición de ∂ se tiene $\partial(c) = \partial(f(b)) = a' + im(h') = 0 + im(h')$. Sea $c \in \ker(\partial)$, entonces $c \in \ker(h'')$ y $c = f(b)$ y $g'(a') = h(b) = 0$, como $a' + im(h') = 0$, entonces existe $a \in M$, tal que, $h'(a) = a'$, entonces tomando $b' = b - f'(a)$, tenemos $f(b') = f(b) - f(f'(a)) = f(b) = c$ y $h(b') = h(b) - h(f'(a)) = h(b) - g'(a') = h(b) - h(b) = 0$. Por lo tanto existe $b' \in \ker(h)$, tal que, $c = f(b')$, es decir, $c \in im(k)$.

Mostremos que $im(\partial) = \ker(k')$. Sea $\partial(c) = a' + im(h') \in co\ker(h')$, entonces $c = f(b)$, y $h(b) = g'(a')$, por lo tanto $k'(\partial(c)) = g'(a') + im(h) = h(b) + im(h) = 0 + im(h)$, por lo que $\partial(c) \in \ker(k')$. Sea $a' + im(h') \in \ker(k')$, entonces $k'(a' + im(h')) = g'(a') + im(h) = 0 + im(h)$, se tiene $g(a) = h(b)$, para alguna $b \in M$, y $c = f(b) \in \ker(h'')$, entonces de la definición de ∂ se tiene:$\partial(c) = \partial(f(b)) = a' + im(h')$. ■

1.4 Sumas y Productos Directos.

1.4.1 Suma y Producto Directo

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de $\Lambda-$*módulos*. Sea $\prod_{i\in I} M_i$ el producto cartesiano de los M_i, definido por $\prod_{i\in I} M_i = \{f : I \to \cup_{i\in I} M_i : f(i) \in M_i \quad \forall i \in I\}$. Queremos dotar a $\prod_{i\in I} M_i$ de una estructura para que sea un $\Lambda - módulo$. Definamos

$$+ : \quad \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i \quad \to \quad \prod_{i\in I} M_i$$

mediante

4.1
$$\begin{array}{rrcl} f+g: & I & \to & \bigcup_{i\in I} M_i \\ & i & \to & (f+g)(i) = f(i) + g(i) \end{array}$$

Es evidente que + hace de $\prod_{i\in I} M_i$ un grupo abeliano. Donde el elemento identidad bajo la suma de $\prod_{i\in I} M_i$ es la función

$$\begin{array}{rccl} 0: & I & \to & \bigcup_{i\in I} M_i \\ & i & \to & 0(i)=0 \end{array}$$

Definamos la multiplicación escalar:

$$\mu : \Lambda \times \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$$

mediante

$$\textbf{4.2} \qquad \begin{array}{rccc} \mu(\alpha, f) = \alpha f : & I & \to & \bigcup_{i\in I} M_i \\ & i & \to & \alpha f(i) = \alpha(f(i)) \end{array}$$

De las definiciones dadas en (4.1) y (4.2) vemos que $\prod_{i\in I} M_i$ posee una estructura de $\Lambda -$ *módulo.*

4.3 Definición. $\prod_{i\in I} M_i$, *junto con las definiciones de* (4.1) *y* (4.2), *se llama el* producto directo *de la familia* $\{M_i\}_{i\in I}$ *de* $\Lambda -$ *módulos.*

4.4 Definición. *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de* $\Lambda -$ *módulos. Definimos* $\bigoplus_{i\in I} M_i = \{f \in \prod_{i\in I} M_i : \ f(i) = 0$ *para casi toda* $i \in I\}$. *A* $\bigoplus_{i\in I} M_i$ *se le llama la* suma directa *de la familia* $\{M_i\}_{i\in I}$.

De la definición anterior se sigue que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$, y $\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i$, si $|I| = n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in I$ definamos el siguiente $\Lambda - morfismo.$

$$\begin{array}{rccc} p_j : & \prod_{i\in I} M_i & \longrightarrow & M_j \\ & f & \longrightarrow & p_j(f) = f(j) \end{array}$$

Vemos que para cualquier $j \in I$, p_j es un $\Lambda - epimorfismo$, ya que para cualquier $m \in M_j$ podemos tomar a $f \in \prod_{i\in I} M_i$, definida por $f(j) = m$ y $f(i) = 0$ si $i \neq j$. Al $\Lambda - epimorfismo$ p_j lo llamaremos *la proyección natural del producto* $\prod_{i\in I} M_i$ *en* M_j. A la restricción de p_j a $\bigoplus_{i\in I} M_i$ se llamará *la proyección natural de la suma directa* $\bigoplus_{i\in I} M_i$ *en* M_j.

Para cada $j \in I$ definamos el siguiente $\Lambda - morfismo$

$$\begin{array}{cccc} i_j: & M_j & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} M_i \\ & x & \longrightarrow & \begin{array}{l} i_j(x)(i) = x, \text{ si } i = j \\ i_j(x)(i) = 0, \text{ si } i \neq j \end{array} \end{array}$$

Vemos que para cada $j \in I$, i_j es un $\Lambda - monomorfismo$, ya que, si $x, y \in M_j$ son tales que $i_j(x) = i_j(y)$, entonces $i_j(x)(j) = x = i_j(y)(j) = y$. Por lo tanto $x = y$. Al $\Lambda - monomorfismo$ i_j lo llamaremos *la inclusión natural de* M_j *en* $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

Para cualquier $f \in \prod_{i\in I} M_i$, denotaremos a $f(i)$ con f_i $\forall i \in I$. Con dicha notación tenemos que los elementos de $\prod_{i\in I} M_i$ son familias $(f_i)_{i\in I}$; bajo esta misma notación, la suma y la multiplicación escalar son

$$(f_i)_{i\in I} + (g_i)_{i\in I} = (f_i + g_i)_{i\in I}$$

y

$$\alpha (f_i)_{i\in I} = (\alpha f_i)_{i\in I}$$

para cualesquiera $(f_i)_{i\in I}, (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ y $\alpha \in \Lambda$.

4.5 Observación. *Sea* $(f_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, *como* $\forall j \in I$ *se tiene:*

$$\begin{array}{rcl} i_j(f_j)(i) & = & f_j \text{ si } i = j \text{ y} \\ i_j(f_j)(i) & = & 0 \text{ si } i \neq j \end{array}$$

por lo que podemos ver a la familia $i_j(f_j) = \left(i_j(f_j)_i\right)_{i\in I}$ *como una sucesión de ceros quizás excepto por el lugar j-ésimo que lo ocupará* f_j. *Por lo tanto*

$$(f_i)_{i\in I} = \sum_{j\in I} i_j(f_j)$$

A continuación estableceremos las propiedades llamadas *Universales* de la Suma Directa y del Producto Directo.

4.6 Teorema.(Propiedad Universal de la Suma Directa). *Sea* M *un* $\Lambda -$ *módulo y* $\left\{\varphi_j : M_j \to M\right\}_{j\in I}$ *una familia de* $\Lambda - morfismos$. *Entonces existe un único* $\Lambda - morfismo$ $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$, *tal que,* $\varphi \circ i_j = \varphi_j$ $\forall j \in I$.

Demostración. Definamos

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \bigoplus_{i\in I} M_i & \to & M \\ & (f_j)_{j\in I} & \to & \varphi\left((f_j)_{j\in I}\right) = \sum_{j\in I} \varphi_j(f_j) \end{array}$$

Vemos que φ está bien definida. Como $f_j = 0$ para casi toda $j \in I$, entonces, si $\alpha \in \Lambda$ y $(f_j)_{j\in I}, (g_j)_{j\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi\left((f_j)_{j\in I} + (g_j)_{j\in I}\right) &= \varphi\left((f_j + g_j)_{j\in I}\right) \\
&= \textstyle\sum_{j\in I} \varphi_j\left(f_j + g_j\right) \\
&= \textstyle\sum_{j\in I} \varphi_j\left(f_j\right) + \varphi_j\left(g_j\right) \\
&= \textstyle\sum_{j\in I} \varphi_j\left(f_j\right) + \Sigma_{j\in I}\varphi_j\left(g_j\right) \\
&= \varphi\left((f_j)_{j\in I}\right) + \varphi\left((g_j)_{j\in I}\right)
\end{aligned}$$

Además también tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha\,(f_j)_{j\in I}\right) &= \textstyle\sum_{j\in I} \varphi_j\left(\alpha f_j\right) \\
&= \textstyle\sum_{j\in I} \alpha\left(\varphi_j\left(f_j\right)\right) \\
&= \alpha\left(\textstyle\sum_{j\in I} \varphi_j\left(f_j\right)\right)
\end{aligned}$$

Por lo que φ es un $\Lambda - morfismo$ Además hace conmutar el siguiente diagrama para toda $j \in I$.

$$\begin{array}{ccc}
 & & M \\
 & \overset{\varphi_j}{\nearrow} & \uparrow\varphi \\
M_j & \underset{i_j}{\rightarrow} & \bigoplus_{i\in I} M_i
\end{array}$$

pues para cualquier $x \in M_j$

$$\varphi\left(i_j\left(x\right)\right) = \Sigma_{j\in I}\varphi_j\left(i_j\left(x\right)\right) = \varphi_j\left(x\right)$$

ya que $i_j\left(x\right)\left(i\right) = 0$, si $i \neq j$. Por lo tanto $\varphi \circ i_j = \varphi_j \quad \forall j \in I$. Además es único, pues si existe otro $\Lambda - morfismo$

$$\varphi' : \bigoplus_{i\in I} M_i \rightarrow M$$

tal que $\varphi' \circ i_j = \varphi_j$. Si $(f_j)_{j\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, entonces al aplicarle φ se tiene

$$\varphi\left((f_j)_{j\in I}\right) = \sum_{j\in I} \varphi_j\left(f_j\right) = \sum_{j\in I} \varphi' \circ i_j\left(f_j\right)$$

pues $\varphi' \circ i_j = \varphi_j$, entonces

$$\varphi\left((f_j)_{j\in I}\right) = \sum_{j\in I} \varphi' \circ i_j\left(f_j\right) = \varphi'\left(\sum_{j\in I} i_j\left(f_j\right)\right)$$

por lo tanto por (4.5) se tiene

$$\varphi\left((f_j)_{j\in I}\right) = \varphi'\left(\sum_{j\in I} i_j(f_j)\right) = \varphi'\left((f_j)_{j\in I}\right)$$

Consecuentemente $\varphi = \varphi'$.■

4.7 Teorema (Propiedad Universal del Producto Directo). *Sea M un $\Lambda-$módulo y $\left\{\psi_j : M \to M_j\right\}$ una familia de $\Lambda - morfismos$. Entonces existe un único $\Lambda - morfismo$ $\psi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ tal que $p_j\psi = \psi_j$ $\forall j \in I$.*

Demostración. Para cualquier $j \in I$ y $x \in M$ definamos $(\psi(x))_j = \psi_j(x)$, es decir $\psi(x) = \left(\psi_j(x)\right)_{jeI}$ para cualquier $x \in M$. Vemos que ψ está bien definida, pues $\psi(x)(i) = \psi_i(x) \in M_i$ para cualquier $i \in I$. Por otro lado vemos que ψ resulta ser un $\Lambda - morfismo$, pues para cualesquiera $x, y \in M$ y $\alpha \in \Lambda$ se tiene

$$\begin{array}{rcccl} \psi(x+y) & = & (\psi_i(x+y))_{i\in I} & = & (\psi_i(x) + \psi_i(y))_{i\in I} \\ & = & (\psi_i(x))_{i\in I} + (\psi_i(y))_{i\in I} & = & \psi(x) + \psi(y) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcccl} \psi(\alpha x) & = & (\psi_i(\alpha x))_{i\in I} & = & (\alpha\psi_i(x))_{i\in I} \\ & = & \alpha(\psi_i(x))_{i\in I} & = & \alpha\psi(x) \end{array}$$

Por otra parte se tiene que para cualquier $j \in I$ y $x \in M$ se tiene $p_j(\psi(x)) = p_j\left((\psi_i(x))_{i\in I}\right) = \psi_j(x)$, por lo que $p_j(\psi(x)) = \psi_j(x)$ para cualquier $j \in I$ y $x \in M$. En otras palabras se tiene que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \prod_{i\in I} M_i \\ & \overset{\psi}{\nearrow} & \downarrow_{p_j} \\ M & \underset{\psi_j}{\rightarrow} & M_j \end{array}$$

conmuta para toda $j \in I$. Por otro lado, si existiera un $\Lambda - morfismo$

$$\psi' : M \to \prod_{i\in I} M_i$$

tal que $p_j\psi' = \psi_j$ $\forall j \in I$, entonces para cualquier $x \in M$ y $j \in I$ $(\psi(x))_j = \psi_j(x) = p_j\psi(x) = p_j\psi'(x) = \left(\psi'(x)\right)_j$ .Por lo tanto $\psi = \psi'$, por lo que ψ es el único $\Lambda - morfismo$ que hace conmutar el diagrama anterior.■

Debido a las propiedades universales de la suma directa y del producto directo, podemos decir que para definir un $\Lambda - morfismo$ desde la suma directa, es suficiente definir $\Lambda - morfismo$ en cada sumando; y para definir un $\Lambda - morfismo$ que vaya al producto directo, basta con definir $\Lambda - morfismos$ que vayan a cada factor.

Por otra parte hemos visto que considerando productos directos, al fijarnos en las proyecciones estamos hablando de $\Lambda - epimorfismos$ que salen del producto, y cuando consideramos la suma directa y al fijarnos en las inclusiones estamos hablando de $\Lambda - monomorfismos$ que entran a la suma directa

4.8 Definición. *Diremos que una sucesión exacta corta*

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$$

se escinde, *si existe un* $\Lambda - morfismo$

$$g' : M'' \longrightarrow M''$$

tal que $g \circ g'' = 1_{M''}$.

4.9 Observación. *Si* M', M *son* $\Lambda - módulos$, *la sucesión exacta*

$$M' \overset{i_{M'}}{\rightarrowtail} M' \oplus M \overset{p_M}{\twoheadrightarrow} M$$

se escinde.

Demostración. Sea $m \in M$, ahora como $i_M : M \to M' \oplus M$, tenemos que $p_M \circ i_M(m) = p_M\left(i_M\left(m\right)\right) = p_M\left((0, m)\right) = m = 1_M\left(m\right)$. Por lo tanto $p_M \circ i_M = 1_M$.■

4.9 Proposición. *Si* $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ *es una sucesión exacta corta que se escinde. Entonces* $M \cong M' \oplus M''$.

Demostración. Como $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ se escinde, existe un $\Lambda - morfismo$ $g' : M'' \longrightarrow M$ tal que $gg' = 1_{M''}$. Entonces al considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & M & \\
M' \arrow[ur, "f"] \arrow[r, tail, "i_{M'}"] & M' \oplus M'' & M'' \arrow[ul, "g'"'] \arrow[l, tail, "i_{M''}"']
\end{tikzcd}$$

y aplicando (4.6) se tiene que existe un $\Lambda - morfismo$ $h : M' + M'' \to M$, tal que,. $f = h(i_{M'})$ y $g' = h(i_{M''})$. Por otro lado, para cualquier $(x, y) \in M' \oplus M''$ tal que $h'(x, y) = f(x) + g'(y)$, entonces $h'(i_{M'}(x)) = h'(x, 0) = f(x)$ y $h'(i_{M''}(y)) = h'(0, y) = g'(y)$. Por (4.6) $h'(x, y) = h(x, y)$, i.e, $h(x, y) = f(x) + g'(y)$.

Sea $(x, y) \in M \oplus M''$, entonces $gh(x, y) = g(f(x) + g'(y)) = gf(x) + gg'(y) = 0 + y = y = p_{M''}(x, y)$. Por lo tanto $g \circ h = p_{M''}$.

Por lo anterior podemos decir que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} M' & \overset{i_{M'}}{\rightarrowtail} & M' \oplus M'' & \overset{p_{M''}}{\twoheadrightarrow} & M'' \\ \downarrow 1_{M'} & & \downarrow h & & \downarrow 1_{M''} \\ M' & \overset{f}{\rightarrowtail} & M & \overset{g}{\twoheadrightarrow} & M'' \end{array}$$

Como $1_{M'}$ y $1_{M''}$ son $\Lambda - isomorfismos$, entonces por (3.12) resulta que h es un $\Lambda - isomorfismo$.$\blacksquare$

Por el resultado anterior se sigue que cualquier sucesión exacta corta que se escinda es esencialmente de la forma $M' \overset{i_M}{\rightarrowtail} M' + M'' \overset{\acute{p}_{M''}}{\twoheadrightarrow} M''$.

4.10 Teorema. *Si un $\Lambda -$ módulo M posee submódulos N',N'' tales que $N' \cap N'' = 0$ y $N' + N'' = M$. Entonces*

$$\varphi : N' \oplus N'' \to M$$

definida por $\varphi(x, y) = x + y$ define un $\Lambda - isomorfismo$.

Demostración. Sean $\psi : N' \to M$ y $\psi' : N'' \to M$ las inclusiones. Como para cualesquiera $x \in N'$ y $y \in N''$ $\varphi(i_{N'}(x)) = x = \psi(x)$ y $\varphi(i_{N''}(y)) = y = \psi'(y)$, entonces por (4.6) φ es un $\Lambda - morfismo$. Además si $(x, y) \in \ker(\varphi)$, entonces $x + y = 0$, por lo que $x = -y \in N' \cap N'' = 0$, por lo tanto $x = y = 0$, es decir φ es un $\Lambda - monomorfismo$. Por otro lado como $N' + N'' = M$, entonces para cualquier $z \in M$ es de la forma $z = x + y$, con $x \in N'$ y $y \in N''$, por lo que $z = x + y = \varphi(x, y)$, entonces φ es un $\Lambda - epimorfismo$. Por lo tanto φ define un $\Lambda - isomorfismo$.$\blacksquare$

4. 11 Corolario. *Sea $f : M' \to M$ y $g : M \to M''$ dos $\Lambda - morfismos$ tales que $g \circ f$ es un un $\Lambda - isomorfismo$. Entonces $M \cong im(f) \oplus \ker(g)$.*

Demostración. Por el teorema anterior basta demostrar que $M = im(f) + \ker(g)$ y $im(f) \cap \ker(g) = 0$.

Sea $x \in M$, entonces $g(x) \in M''$. Como $gf : M' \longrightarrow M''$ es un $\Lambda - isomorfismo$ existe $y \in M'$ tal que $gf(y) = g(x)$. Sea $z = f(y) \in im(f)$

y $z' = x - z$, como $g(z') = g(x-z) = g(x) - g(z) = gf(y) - g(f(y)) = 0$, por lo que $z' \in \ker(g)$. Por lo tanto $x = z + z' \in im(f) + \ker(g)$.

Sea $x \in im(f) \cap \ker(f)$. Entonces existe $y \in M'$ tal que $f(y) = x$, por otra parte como $0 = g(x) = gf(y)$, entonces $gf(y) = 0$, puesto que gf es un $\Lambda - isomorfismo$, entonces $y = 0$. Por lo tanto $x = 0$.■

1.4.2 Módulos Libres.

Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, visto como $\Lambda -$ *módulo*. Para cualquier $\Lambda - morfismo$

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow M$$

vemos que para cualquier $t \in \Lambda$

$$\varphi(t) = \varphi(t1) = t\varphi(1)$$

Por lo tanto vemos que basta definir a φ en 1, es decir, φ queda definida con $\varphi(1)$.

Por lo anterior para cualquier $\Lambda -$ *módulo* M y $a \in M$ definimos el $\Lambda - morfismo$

$$\mu_a : \Lambda \longrightarrow M$$

Definido por $\mu_a(1) = a$, es decir $\mu_a(t) = t(a)$ para cualquier $t \in \Lambda$. A μ_a se le suele llamar la multiplicación por a.

4.12 Definición. *Sea L un $\Lambda-$módulo, diremos que L es un $\Lambda-$módulo* libre *sobre β, con $\beta \subseteq L$, si para cualquier $\{\psi_b : \Lambda \longrightarrow M\}_{b\in\beta}$ familia de $\Lambda - morfismos$, existe un único $\psi : L \longrightarrow M$, tal que, $\psi\mu_b = \psi_b \ \ \forall b \in \beta$, es decir, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \overset{\psi_b}{\nearrow} & \uparrow_{\psi} \\ \Lambda & \underset{\mu_b}{\rightarrow} & L \end{array}$$

conmuta $\forall b \in \beta$.

Diremos que un $\Lambda -$ *módulo* L es *libre,* si existe un $\beta \subseteq L$,tal que, L es libre sobre β.

4.13 Teorema (Equivalencias Universales). Sea L un $\Lambda - módulo$ y $\beta \subseteq L$. Entonces las siguientes afirmaciones:

(i) L es libre sobre β.

(ii) $L \cong \bigoplus_{b\in\beta} \Lambda$.

(iii) Para cualquier $\Lambda - módulo$ M y función $f : \beta \to M$ existe un único $\Lambda - morfismo$

$$\overline{f} : L \longrightarrow M$$

tal que $\overline{f}\,(b) = f\,(b)\ \ \forall b \in \beta$.

son equivalentes.

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Considerando $\left\{ i_b : \Lambda \to \bigoplus_{b\in\beta} \Lambda \right\}_{b\in\beta}$ la familia de inclusiones canónicas y $\{\mu_b : \Lambda \to L\}_{b\in\beta}$ la familia de multiplicaciones. Entonces por (4.6) se tiene que existe un único $\Lambda - morfismo$ $\varphi : \bigoplus_{b\in\beta} \Lambda \to L$, tal que, $\varphi \circ i_b = \mu_b\ \ \forall b \in \beta$, por (4.12) existe un único $\Lambda - morfismo$, $\psi : L \to \bigoplus_{b\in\beta} \Lambda$, tal que, $\psi\mu_b = i_b\ \forall b \in \beta$. Por lo que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} & & \bigoplus_{b\in\beta}\Lambda \\ & \overset{i_b}{\nearrow} & \downarrow\varphi \\ \Lambda & \underset{\mu_b}{\rightarrow} & L \\ & \underset{i_b}{\searrow} & \downarrow\psi \\ & & \bigoplus_{b\in\beta}\Lambda \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} & & L \\ & \overset{\mu_b}{\nearrow} & \downarrow\psi \\ \Lambda & \underset{i_b}{\rightarrow} & \bigoplus_{b\in\beta}\Lambda \\ & \underset{\mu_b}{\searrow} & \downarrow\varphi \\ & & L \end{array}$$

conmutan para toda $b \in \beta$. Como para cualquier $b \in \beta$

$$1_{\oplus\Lambda} \circ i_b = i_b = \psi\mu_b = \psi\varphi\,(i_b)$$

por lo tanto $1_{\oplus\Lambda} \circ i_b = \psi\varphi\,(i_b)\ \forall b \in \beta$. Entonces por la propiedad universal en (4.6), se sigue $\psi\varphi = 1_{\oplus\Lambda}$. De manera análoga como para cualquier $b \in \beta 1$

$$_L \circ \mu_b = \mu_b = \varphi \circ i_b = \varphi\psi\,(\mu_b)$$

entonces $1_L \circ \mu_b = \varphi\psi\,(\mu_b)$, por (i) se tiene que $\varphi\psi = 1_L$. Por lo tanto φ es un $\Lambda - isomorfismo$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea M un $\Lambda - módulo$ cualquiera y $f : \beta \to M$ una función. Mostremos que existe un $\Lambda - morfismo$ $\overline{f} : L \to M$, tal que $f\,(b) = \overline{f}\,(b)$ para cualquier $b \in \beta$.

Consideremos la familia de $\Lambda - morfismos$ $\{\varphi_b : \Lambda \to M\}_{b\in\beta}$, definidos como $\varphi_b\,(1) = f\,(b)\ \forall b \in \beta$. Entonces por (4.6) existe un único

$$\varphi : \bigoplus_{b\in\beta} \Lambda \cong L \longrightarrow M,$$

i.e existe un único $\varphi : L \to M$ tal que para cualquier $b \in \beta$, se tenga $f(b) = \varphi_b(1) = \varphi \circ i_b(1) = \varphi(i_b(1)) = \varphi(b)$, por lo que $\varphi(b) = f(b)$ $\forall b \in \beta$. Tomando a $\varphi = \overline{f}$ se tiene que $\overline{f}(b) = f(b)$ $\forall b \in \beta$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $\{\psi_b : \Lambda \to M\}_{b\in\beta}$ una familia de $\Lambda - morfismos$. Veamos que existe un único $\psi : L \to M$, tal que, $\psi\mu_b = \psi_b$ $\forall b \in \beta$.

Sea $f : \beta \to M$ tal que $b \to \psi_b(1)$, entonces existe un único $\overline{f} : L \to M$, tal que, $\overline{f}(b) = f(b)$ $\forall b \in \beta$, entonces para cualquier $b \in \beta$ $f\mu_b : \Lambda \to M$ tal que $\overline{f}\mu_b(1) = \overline{f}(b) = f(b) = \psi_b(1)$. Por lo tanto $\overline{f}\mu_b = \psi_b$ $\forall b \in \beta$.■

Del teorema anterior, tenemos que: L es un $\Lambda - módulo$ es libre sobre β si, y sólo si existe un $\Lambda - isomorfismo$ $\psi : \bigoplus_{b\in\beta} \Lambda \longrightarrow L$, es decir, L es libre si, y sólo si para cualquier $x \in L$ existe un único $(x_b)_{b\in\beta} \in \bigoplus_{b\in\beta} \Lambda$, tal que,

$$\begin{array}{rcccc} x & = & \psi\left((x_b)_{b\in\beta}\right) & = & \psi\left(\sum_{b\in\beta} x_b\,(i_b(1))\right) \\ & = & \sum_{b\in\beta} \psi\,(x_b\,(i_b(1))) & = & \sum_{b\in\beta} x_b\,(\psi\,((i_b(1)))) \\ & = & \sum_{b\in\beta} x_b\,(\mu_b(1)) & = & \sum_{b\in\beta} x_b b \end{array}$$

Por lo tanto L es un $\Lambda - módulo$ libre sobre β si, y solo si para cualquier elemento en L se puede escribir como una combinación lineal finita con elementos de β. Solemos decir que β es una *base* de L.

Además nótese que si dos $\Lambda - módulos$ L y L' son libres sobre $\beta \subseteq L$ y $\beta \subseteq L'$, entonces $L \cong \bigoplus_{b\in\beta} \Lambda \cong L'$. Por lo tanto $L \cong L'$, es decir dos $\Lambda - módulos$ que son libres sobre un mismo conjunto son isomorfos. Además para cualquier X subconjunto de un $\Lambda - módulo$ existe un $\Lambda - módulo$ libre sobre X, pues este será isomorfo a $\bigoplus_{x\in X} \Lambda$.

4.14 Ejemplos. *Los siguientes son ejemplos de $\Lambda - módulos$ libres.*

(i) Para cualquier J conjunto, $L = \bigoplus_{j\in J} \Lambda$ es un $\Lambda - módulo$ libre, además si $|J| = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, diremos que L es finitamente generado.

(ii) Si $\Lambda = K$, entonces todo $K - módulo\,(K - espacio\ vectorial)$ es libre.

4.15 Proposición *Si M es un $\Lambda - módulo$. Entonces M es cociente de un $\Lambda - módulo$ libre.*

Demostración. Sea X un subconjunto de M tal que $\langle X\rangle = M$, en particular $M = X$. Sea L el $\Lambda - módulo$ libre generado por X. Entonces la función inclusión $f : X \to M$, se extiende a un $\Lambda - morfismo$ $\overline{f} : L \to M$. Como $M = X \cong f(X) \subseteq \overline{f}(L) \subseteq M$. Por lo tanto $\overline{f}$ es $\Lambda - epimorfismo$, por el Primer Teorema de Isomorfismo se sigue $M \cong L/\ker(f)$.■

4.16 Corolario. *Para cualquier $\Lambda-$módulo existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con L un $\Lambda-$módulo libre. ■

1.5 Los funtores Hom y $\otimes_\Lambda$.

1.5.1 $M \otimes_\Lambda N$ y el funtor $\otimes_\Lambda$.

Producto Tensorial.

Sean M, N y T $\Lambda-módulos.$

5.1 Definición. *Una función $f : M \times N \longrightarrow T$ es bilineal, si cumple las siguientes propiedades:*
(i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$
(ii) $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$
(iii) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y)\,; \quad x, x_1, x_2 \in M;\ y, y_1, y_2 \in N;$ $\lambda \in \Lambda.$

A continuación dados dos $\Lambda-módulos$ M y N, construiremos un nuevo $\Lambda-módulo$ T con la propiedad de que las funciones bilineales de $M \times N \longrightarrow U$ estén en correspondencia biyectiva con los $\Lambda-morfismos$ $T \longrightarrow U$, para todo U $\Lambda-módulo.$

5.2 Definición. *El producto tensorial de M y N es la pareja (T, f) donde $f : M \times N \to T$ es una función bilineal que satisface:*
(i) $f(M \times N)$ genera a T, y
(ii) Si U es un $\Lambda-$módulo y $g : M \times N \longrightarrow U$ es una función bilineal, entonces existe un único $\Lambda-morfismo$ $h : T \longrightarrow U$, tal que, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & U \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $h \circ f = g$.

Veamos que si existe el producto tensorial de dos $\Lambda - \textit{módulos}$ este es único salvo isomorfismos, es decir, si (T, f) y (T', f') son productos tensoriales de M y N, entonces $T \cong T'$.

Pues, si T es producto tensorial, entonces existe un único $\Lambda - morfismo$

$$h : T \longrightarrow T'$$

tal que $f' = h \circ f$. Análogamente como T' es producto tensorial, existe

$$h' : T' \longrightarrow T$$

tal que $f = h' \circ f'$. Entonces los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} & T' \arrow[d, "h'"] \\ M \times N \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & T' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & T \arrow[d, "h"] \\ M \times N \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & T' \arrow[d, "h'"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

conmutan. Como

$$1_T \circ f = f = h' \circ f' = h' (h \circ f) = (h \circ h') f$$

entonces $1_T \circ f = (h \circ h') f$, pues T producto tensorial. Por lo tanto $h \circ h' = 1_T$. De manera análoga tenemos

$1_{T'} \circ f' = f' = h \circ f = h (h' \circ f) = (h' \circ h) f'$

entonces $1_{T'} \circ f' = (h' \circ h) f'$, pues T' producto tensorial. Por lo tanto $h' \circ h = 1_{T'}$. Entonces $h : T \to T'$ es un $\Lambda - isomorfismo$.

Por lo anterior podemos sentido hablar del producto tensorial de M y N, pues éste es único salvo isomorfismos. Cabe mencionar que denotaremos por $M \otimes_\Lambda N$ al producto tensorial de M y N.

Por (5.2) el producto tensorial de M y N cumple con la siguiente propiedad universal: Dada

$$g : M \times N \longrightarrow U$$

una función bilineal existe un único $\Lambda - morfismo$ $h : M \otimes_\Lambda N \longrightarrow U$, tal que, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & M \otimes_\Lambda N \arrow[d, "h"] \\ & U \end{tikzcd}$$

conmuta.

A continuación construiremos el producto tensorial de M y N dos $\Lambda-$ *módulos*. Sea L el $\Lambda-$*módulo* libre con base $M \times N$, es decir, los elementos de L son combinaciones lineales con coeficientes en Λ de las parejas (x, y), con $x \in M$ y $y \in N$. Sea K el módulo generado por:

(i) $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$

(ii) $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$

(iii) $(\alpha x, y) - (x, \alpha y)$

con $x, x' \in M$; $y, y' \in N$; y $\alpha \in \Lambda$.

Definamos $M \otimes_\Lambda N = L/K$. Denotaremos por $x \otimes y$ a la clase $(x, y) + K \in L/K$. Tomando a

$$f : M \times N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

definida por $f(x, y) = x \otimes y$. Vemos que f es bilineal, pues si $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$ y $\alpha \in \Lambda$, por definición de K,

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) &\in K \\
(x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2) &\in K \\
(\alpha x, y) - (x, \alpha y) &\in K
\end{aligned}$$

entonces $(x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y)$, $x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2)$ y $\alpha x \otimes y = x \otimes \alpha y = \alpha (x \otimes y)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
f(x_1 + x_2, y) &= (x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \\
f(x, y_1 + y_2) &= x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)
\end{aligned}$$

y

$$f(\alpha x, y) = \alpha x \otimes y = x \otimes \alpha y = f(x, \alpha y) = \alpha (x \otimes y) = \alpha f(x, y)$$

Ahora debemos comprobar que $M \otimes_\Lambda N$ es un producto tensorial. Sea $g : M \times N \longrightarrow U$ una función bilineal, como L es libre con base $M \times N$, existe único $\Lambda - morfismo$

$$h : L \longrightarrow U$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
M \times N & \overset{i}{\hookrightarrow} & L \\
 & \underset{g}{\searrow} & \downarrow_{h'} \\
 & & U
\end{array}$$

conmuta. Vemos que h' se anula en los elementos de la forma (i) , (ii) y (iii), pues

$$\begin{aligned} h'((x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y)) &= h'\circ i\,((x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y)) \\ &= g\,((x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y)) \\ &= g\,((x_1+x_2,y))-g\,(x_1,y)-g\,(x_2,y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que g es bilineal, además

$$\begin{aligned} h'((x,y_1+y_2)-(x,y_1)-(x,y_2)) &= h'\circ i\,((x,y_1+y_2)-(x,y_1)-(x,y_2)) \\ &= g\,(x,y_1+y_2)-g\,(x,y_1)-g\,(x,y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h'((\alpha x,y)-(x,\alpha y)) &= h'\circ i\,((\alpha x,y)-(x,\alpha y)) \\ &= g\,(\alpha x,y)-g\,(x,\alpha y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $K\subseteq \ker(h')$

Por el primer teorema de isomorfismo existe un único $\Lambda-morfismo$ $h:L/K\to U$ tal que $h'=p\circ h$. Por otro lado

$$g=i\circ h'=(i\circ p)\circ h=f\circ h$$

Por lo tanto existe un único $\Lambda-morfismo$

$$h:L/K=M\otimes_\Lambda N\to U$$

tal que $g=f\circ h$.

Como $f\,(M\times N)$ genera a $M\otimes_\Lambda N$, entonces todo elemento $t\in M\otimes_\Lambda N$ puede escribirse como

$$t=\Sigma\alpha_i\,(x_i\otimes y_i)$$

con $\alpha_i\in\Lambda$.

Sean $\varphi:M'\longrightarrow M$ y $\psi:N'\longrightarrow N$ dos $\Lambda-morfismos$, definamos

$$\varphi\times\psi:M'\times N'\longrightarrow M\times N$$

de la siguiente forma $\varphi\times\psi\,(x,y)=(\varphi\,(x)\,,\psi\,(y))\;\forall\,(x,y)\in M'\times N'$. Sean

$$f:M'\times N'\longrightarrow M'\otimes_\Lambda N'$$

y

$$g : M \times N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

las funciones bilineales inducidas por $M' \times N'$ y $M \times N$ respectivamente. Considerando la función

$$g \circ (\varphi \times \psi) : M' \times N' \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

definida por $g(\varphi(x), \psi(y)) = \varphi(x) \otimes \psi(y) \; \forall (x, y) \in M' \times N'$. Como φ y ψ son $\Lambda - morfismos$ y g es bilineal , entonces $g \circ (\varphi \times \psi)$ es bilineal. Por lo tanto existe un único $\Lambda - morfismo$

$$h : M' \otimes_\Lambda N' \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

al que denotaremos por $\varphi \otimes \psi$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M' \times N' & \xrightarrow{f} & M' \otimes_\Lambda N' \\ \downarrow_{\varphi \times \psi} & & \downarrow_{\varphi \otimes \psi} \\ M \times N & \xrightarrow{g} & M \otimes_\Lambda N \end{array}$$

conmuta, es decir, $(\varphi \otimes \psi) \circ f(x, y) = g \circ (\varphi \times \psi)(x, y), \forall (x, y) \in M' \times N'$. Luego $(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$ para $x \in M'$, $y \in N'$.

Como consecuencia de la unicidad de $\varphi \otimes \psi$ tenemos el siguiente resultado: Si $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M''$ y $N' \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\psi'} N''$ son $\Lambda - morfismos$, entonces $(\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi)$, pues para cualquier $x \otimes y \in M' \otimes_\Lambda N'$ se tiene:

$$((\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi))(x \otimes y) = \varphi'(\varphi(x)) \otimes \psi'(\psi(y))$$

y

$$((\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi))(x \otimes y) = (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi(x) \otimes \psi(y)) = \varphi'(\varphi(x)) \otimes \psi'(\psi(y))$$

5.3 Proposición. *Sea G es un grupo abeliano con cualquier elemento de orden finito y H un grupo abeliano con división. Entonces*

$$G \otimes_{\mathbb{Z}} H = 0$$

Demostración. Es suficiente probar que cada generador $g \otimes h$, donde $g \in G$ y $h \in H$ es 0 en $G \otimes_{\mathbb{Z}} H$. Como g tiene orden finito existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $ng = 0$. Por otro lado H es división existe $h' \in H$, tal que, $h = nh'$. Entonces

$$g \otimes h = t \otimes nh' = nt \otimes h' = 0 \otimes h' = 0.$$

5.4 Proposición. *Para un Λ dominio entero y N un $\Lambda -$ módulo de torsión. Entonces $M \otimes_\Lambda N$ es de torsión para cualquier $\Lambda -$ módulo.*

Demostración. Basta demostrar que para cada generador $m \otimes n$ de $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ es de torsión. Sea $m \otimes n$ un generador de $M \otimes_\Lambda N$. Como $n \in N$, existe $\alpha \in \Lambda$, con $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha n = 0$. Entonces

$$\alpha (m \otimes n) = m \otimes \alpha n = m \otimes 0 = 0$$

Por lo tanto $m \otimes n$ es de torsión. ■

5.5 Proposición. *Sean $\psi : N' \longrightarrow N$ y $\psi' : N \longrightarrow N''$ dos $\Lambda - morfismos$, y sea M un $\Lambda -$ módulo. Entonces*

(i) Si $1_M : M \to M$ y $1_N : N \to N$ son los $\Lambda - morfismos$ identidad, entonces $1_M \otimes 1_N$ es la identidad de $M \otimes_\Lambda N$, y

(ii) $\left(1_M \otimes \psi'\right) \circ (1_M \otimes \psi) = \left(1_M \otimes \left(\psi' \circ \psi\right)\right)$

Demostración. Sean $x \otimes y \in M \otimes_\Lambda N$

(i) Entonces $1_M \otimes 1_N (x \otimes y) = 1_M (x) \otimes 1_N (y) = x \otimes y$.

(ii) Como $\left(1_M \otimes \psi'\right) \circ (1_M \otimes \psi) = (1_M \circ 1_M) \otimes \left(\psi' \circ \psi\right) = \left(1_M \otimes \left(\psi' \circ \psi\right)\right)$.

5.6 Proposición. *Sean $\varphi : M' \longrightarrow M$ y $\varphi' : M \longrightarrow M''$ y N un $\Lambda -$ módulo. Entonces $(\varphi' \otimes 1_N) \circ (\varphi \otimes 1_N) = ((\varphi' \circ \varphi) \otimes 1_N)$.*

Demostración. Como

$$\left(\varphi' \otimes 1_N\right) \circ (\varphi \otimes 1_N) = \left(\varphi' \circ \varphi\right) \otimes (1_N \circ 1_N) = \left(\left(\varphi' \circ \varphi\right) \otimes 1_N\right)$$

Ahora veamos algunas propiedades del producto tensorial con la suma directa de $\Lambda -$ *módulos*.

5.7 Proposición. (i) *Sean M y N $\Lambda -$ módulos con $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$. Entonces $M \otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_\Lambda N_i)$.*

(ii) Sean $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ y N $\Lambda -$ módulos. Entonces $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_\Lambda N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_\Lambda N)$.

Demostración. Sea

$$g : M \times \bigoplus_{i \in I} N_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_\Lambda N_i)$$

dada por $g \left(x, (y_i)_{i \in I}\right) = (x \otimes y_i)_{i \in I}$.

Probemos que g es bilineal. Si $x, x' \in M$, $(y_i)_{i\in I}$, $(y_i')_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} N_i$ y $\alpha \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} g\left(x+x', (y_i)_{i\in I}\right) &= \left(x+x'\otimes y_i\right)_{i\in I} = (x\otimes y_i)_{i\in I} + \left(x'\otimes y_i\right)_{i\in I} \\ &= g\left(x, (y_i)_{i\in I}\right) + g\left(x', (y_i)_{i\in I}\right) \end{aligned}$$

Análogamente

$$g\left(x, (y_i)_{i\in I} + \left(y_i'\right)_{i\in I}\right) = g\left(x, (y_i)_{i\in I}\right) + g\left(x, \left(y_i'\right)_{i\in I}\right)$$

y

$$\begin{aligned} g\left(\alpha x, (y_i)_{i\in I}\right) &= (\alpha x \otimes y)_{i\in I} = \alpha\left(x\otimes y_i\right)_{i\in I} = (x\otimes \alpha y_i)_{i\in I} \\ &= g\left(x, \alpha\left(y_i\right)_{i\in I}\right) = \alpha(g(x, (y_i)_{i\in I})) \end{aligned}$$

Por lo tanto existe $h : M \otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} \left(M\otimes_\Lambda N_i\right)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"] & M\otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \arrow[d, "h"] \\ & M\otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea

$$\varphi_i : M\otimes_\Lambda N_i \longrightarrow M\otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right)$$

definida por $\varphi_i\left(x\otimes y_i\right) = x\otimes i_{N_I}(y)$, donde $i_{N_i} : N_i \longrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right)$ es la inclusión. Por (4.6) existe un único $\Lambda - morfismo$

$$\varphi : \bigoplus_{i\in I} M\otimes_\Lambda N_i \longrightarrow M\otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right)$$

tal que, si

$$i_{M\otimes_\Lambda N_i} : M\otimes_\Lambda N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M\otimes_\Lambda N_i$$

es la inclusión, entonces $\varphi_i = \varphi\circ\, i_{M\otimes_\Lambda N_i}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i\in I$.

$$\begin{tikzcd} & M\otimes_\Lambda \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \\ M\otimes_\Lambda N_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[r, "i_{M\otimes_\Lambda N_i}"'] & \bigoplus_{i\in I} M\otimes_\Lambda N_i \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Entonces para cualquier $\left(x,(y_i)_{i\in I}\right)$ se tiene

$$\begin{aligned}\left(1_{\oplus_{i\in I}(M\otimes_\Lambda N_i)}\circ g\right)\left(x,(y_i)_{i\in I}\right) &= g\left(x,(y_i)_{i\in I}\right)\\ &= (h\circ f)\left(x,(y_i)_{i\in I}\right)=h\left((x\otimes y_i)_{i\in I}\right)\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\left(1_{\oplus_{i\in I}(M\otimes_\Lambda N_i)}\circ g\right)(x,(y_i)_{i\in I}) &= h\left((x\otimes y_i)_{i\in I}\right)\\ &= h\circ\left(\sum_{i\in I}\varphi_i\,(x\otimes y_i)\right)\end{aligned}$$

ya que $y_i\neq 0$ a lo más para un número finito, entonces

$$\begin{aligned}h\circ(\sum_{i\in I}\varphi_i\,(x\otimes y_i)) &= h\circ(\sum_{i\in I}(\varphi\circ i_{M\otimes_\Lambda N_i})\,(x\otimes y_i))\\ &= (h\circ\varphi)\left(\sum_{i\in I} i_{M\otimes_\Lambda N_i}\,(x\otimes y_i)\right)\\ &= h\circ\varphi\,((x\otimes y_i)_{i\in I})\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left(1_{\oplus_{i\in I}(M\otimes_\Lambda N_i)}\circ g\right)=(h\circ\varphi)\circ g$, por (4.6) $h\circ\varphi=1_{\oplus_{i\in I}(M\otimes_\Lambda N_i)}$. Por otro lado, para cualquier $\left(x,(y_i)_{i\in I}\right)$ se tiene

$$1_{M\otimes_\Lambda(\oplus N_i)}\circ f\left(\left(x,(y_i)_{i\in I}\right)\right)=f\left(x,(y_i)_{i\in I}\right)$$

y

$$\begin{aligned}(\varphi\circ h)f\left(x,(y_i)_{i\in I}\right) &= \varphi(h\circ f\left(x,(y_i)_{i\in I}\right))=\varphi\circ g\left(x,(y_i)_{i\in I}\right)\\ &= \varphi\left((x\otimes y_i)_{i\in I}\right)=x\otimes(y_i)_{i\in I}=f\left(x,(y_i)_{i\in I}\right)\end{aligned}$$

entonces $1_{M\otimes_\Lambda(\oplus N_i)}\circ f=(\varphi\circ h)\circ f$, por propiedades del producto tensorial se sigue que $(\varphi\circ h)=1_{M\otimes_\Lambda(\oplus N_i)}$. Por lo tanto, h es un $\Lambda-isomorfismo$.

La demostración de (ii) es análoga.

5.8 Proposición. *(i) Si $N'\overset{\psi}{\rightarrowtail}N\overset{\psi'}{\twoheadrightarrow}N''$ es una sucesión exacta de $\Lambda-$módulos y M un $\Lambda-$módulo. Entonces la sucesión*

$$M\otimes_\Lambda N' \quad\overset{1_M\otimes\psi}{\longrightarrow}\quad M\otimes_\Lambda N \quad\overset{1_M\otimes\psi'}{\longrightarrow}\quad M\otimes_\Lambda N'' \quad\longrightarrow\quad 0$$

es una sucesión exacta.

(ii) Si $M'\overset{\varphi}{\rightarrowtail}M\overset{\varphi'}{\twoheadrightarrow}M''$ es una sucesión exacta de $\Lambda-$módulos y N un $\Lambda-$módulo. Entonces la sucesión

$$M'\otimes_\Lambda N \quad\overset{\varphi\otimes 1_N}{\longrightarrow}\quad M\otimes_\Lambda N \quad\overset{\varphi'\otimes 1_N}{\longrightarrow}\quad M''\otimes_\Lambda N \quad\longrightarrow\quad 0$$

es una sucesión exacta.

Demostración. (i) Veamos que $1_M \otimes \psi'$ es un $\Lambda - epimorfismo$: sea $t'' = \Sigma\,(x_i \otimes y_i'') \in M \otimes_\Lambda N''$, como ψ' es un $\Lambda - epimorfimo$ para toda i, existe $y_i \in N$, tal que, $\psi'(y_i) = y_i''$. Luego

$$\left(1_M \otimes \psi'\right)\left(\sum (x_i \otimes y_i)\right) = \sum \left(x_i \otimes y_i''\right)$$

Veamos que $\ker\left(1_M \otimes \psi'\right) = im\,(1_M \otimes \psi)$. Sea $x \otimes y \in \ker\left(1_M \otimes \psi'\right)$, entonces $1_M \otimes \psi'\,(x \otimes y) = x \otimes \psi'\,(y) = 0$, entonces $\psi'\,(y) \in \ker\left(\psi'\right)$, por lo que existe $y' \in M'$, tal que, $\psi(y') = y$, de aquí se sigue $x \otimes y = 1_M \otimes \psi(x \otimes y')$. Por otro lado $im\,(1_M \otimes \psi) \subseteq \ker(1_M \otimes \psi')$, pues $(1_M \otimes \psi) \circ (1_M \otimes \psi') = (1_M \otimes \psi\psi') = 1_M \otimes 0 = 0$. Por lo tanto la sucesión es exacta.

(ii) La demostración es análoga. ■

El Funtor $\otimes_\Lambda$

Como ya se mencionó en la introducción, en este primer capítulo, una categoría **C** está formada por una clase objetos y otra clase de morfismos; mientras que un funtor es una forma de relacionar a dos categorías. Nuestro trabajo hasta el momento nos lleva a considerar a la categoría ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$, como la categoría cuya clase de objetos es la de los $\Lambda - módulos$ y su clase de morfismos está formada por los $\Lambda - morfismos$. En esta sección construiremos funtores que vayan de ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$ en sí mismo, o en general, si Λ no es conmutativo, a la categoría **Ab**(la categoría formada por los grupos abelianos y homomorfismos de grupos). Cabe destacar que estos funtores son de gran importancia para el desarrollo del presente trabajo.

Observemos que dados M', M,N' y N $\Lambda - módulos$, y $\varphi : M' \longrightarrow M$, $\psi : N' \longrightarrow N$ $\Lambda - morfismos$, tenemos que $M \otimes_\Lambda N$ es un $\Lambda - módulo$, y $\varphi \otimes \psi : M' \otimes_\Lambda N' \to M \otimes_\Lambda N$ es un $\Lambda - morfismo$. Por lo que a continuación podemos pensar en los siguientes funtores

5.9
$$\begin{array}{rccc} M_\varphi \bigotimes_\Lambda \_ : & {}_\Lambda\mathbf{Mod} & \to & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \\ & N & \to & M_\varphi \bigotimes_\Lambda \_(N) = M \otimes_\Lambda N \\ & f : K' \to K & \to & M_\varphi \bigotimes_\Lambda \_(f) = \varphi \otimes f \end{array}$$

Si $\varphi = 1_M$,, entonces denotaremos a $M_{1_M} \bigotimes_\Lambda \_$ simplemente con $M \bigotimes_\Lambda \_$.

$$\mathbf{5.10}\qquad \begin{array}{rccc} \_\bigotimes_\Lambda N_\psi : & {}_\Lambda\mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \\ & M & \rightarrow & \_\bigotimes_\Lambda N_\psi(M) = M \otimes_\Lambda N \\ & f : K' \rightarrow K & \rightarrow & \_\bigotimes_\Lambda N_\psi(f) = f \otimes \psi \end{array}$$

Si $\psi = 1_N$,, entonces denotaremos a $\_\bigotimes_\Lambda N_{1_N}$ simplemente con $\_\bigotimes_\Lambda N$.

Considerando nuestra categoría ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$, podemos pensar en la categoría ${}_\Lambda\mathbf{Mod} \times_\Lambda \mathbf{Mod}$ (producto), cuyos objetos son de la forma (M, N) donde M y N son $\Lambda - módulos$ y sus morfismos son de la forma (f, g) donde f y g son $\Lambda - morfismos$. Cabe resaltar que este estudio se formalizará en el Capítulo III, donde veremos que ${}_\Lambda\mathbf{Mod} \times_\Lambda \mathbf{Mod}$ es una categoría.

Por las propiedades vistas a lo largo de esta sección, podemos construir de manera intuitiva el siguiente funtor:

$$\mathbf{5.11}\qquad \begin{array}{rccc} \bigotimes_\Lambda : & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \times_\Lambda \mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \\ & (M, N) & \rightarrow & M \otimes_\Lambda N \\ & (\varphi, \psi) & \rightarrow & \varphi \otimes \psi \end{array}$$

para cualesquiera M y N $\Lambda - módulos$, y $\varphi : M' \rightarrow M$ y $\psi : N' \rightarrow N$ $\Lambda - morfismos$.

1.5.2 El Funtor Hom_Λ.

Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$ y sean M, N dos $\Lambda - módulos$. El conjunto

$$Hom_\Lambda(M, N) = \{f : M \longrightarrow N \mid f \ es \ un \ \Lambda - morfismo\}$$

vemos que dicho conjunto resulta ser un grupo abeliano bajo la suma $+$ definida por

$$\begin{array}{rccc} + : & Hom_\Lambda(M, N) \times Hom_\Lambda(M, N) & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M, N) \\ & (f, g) & \longrightarrow & f + g \end{array}$$

donde $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ para cualquier $a \in M$; donde el neutro aditivo es el $\Lambda - morfismo$ 0, y para cualquier $f \in Hom_\Lambda(M, N)$ su inverso aditivo $-f$ se define como: $-f(a) = -(f(a))\ \forall a \in M$.

Considerando a

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \Lambda \times Hom_\Lambda(M, N) & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M, N) \\ & (\alpha, f) & \longrightarrow & \alpha f \end{array}$$

donde $\alpha f(a) = \alpha\,(f\,(a))\ \forall a \in M$. Vemos que μ está bien definida, ya que para cualesquiera $m, m' \in M$ y $\beta \in \Lambda$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha f\left(m+m'\right) &= \alpha(f\,(m)+f\left(m'\right)) = \alpha f\,(m)+\alpha f\left(m'\right) \\ \alpha f\,(\beta m) &= \alpha(\beta f\,(m)) = \alpha\beta(f\,(m)) = \beta(\alpha f\,(m)) \end{aligned}$$

pues Λ es un anillo conmutativo.

Por otro lado, μ cumple con ser una multiplicación escalar, ya que para cualesquiera $f, g \in Hom_\Lambda(M,N)$, $\alpha, \beta \in \Lambda$, y $a \in M$ se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha(f+g)\,(a) &= \alpha(f\,(a)+g\,(a)) = \alpha(f(a))+\alpha(f(a)), \\ (\alpha+\beta)\,f(a) &= \alpha f(a)+\beta f(a) \\ 1f(a) &= 1(f(a)) = f(a) \text{ y} \\ (\alpha\beta)f(a) &= \alpha\beta(f\,(a)) = \alpha\,(\beta f(a)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si Λ es un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, al grupo abeliano $Hom_\Lambda(M,N)$ se le puede dotar de una estructura de $\Lambda-$*módulo*. Pero en general, si Λ es un anillo cualquiera, solo podemos asegurar que $Hom_\Lambda(M,N)$ es un grupo abeliano.

5.12 Definición. *Para un anillo conmutativo* Λ *con* $1 \neq 0$*, si* M *y* N *son dos* $\Lambda-$*módulos, al* conjunto $Hom_\Lambda(M,N)$*, se le suele llamar el* $\Lambda-$*módulo de* morfismos de M *en* N*.*

Sean $\varphi : N' \longrightarrow N$ un $\Lambda-morfismo$. Vemos que si $f \in Hom_\Lambda(M,N')$, entonces $\varphi f \in Hom_\Lambda(M,N)$. Además para cualesquiera $f, g \in Hom_\Lambda(M,N')$ y $\alpha \in \Lambda$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi((f+g)\,(a)) &= \varphi(f(a)+g(a)) = \varphi\,(f(a))+\varphi\,(g(a)) \\ \varphi(\alpha f(a)) &= \alpha(\varphi\,(f\,(a))) \end{aligned}$$

para cualquier $a \in M$. Por lo tanto, φ induce un $\Lambda-morfismo$ entre $Hom_\Lambda(M,N')$ y $Hom_\Lambda(M,N)$.

5.13 Definición. *Sean* M, N', N $\Lambda-$*módulos y* $\varphi : N' \to N$ *un* $\Lambda-morfismo$*, el* $\Lambda-morfismo$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_* : & Hom_\Lambda(M,N') & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M,N) \\ & f & \longrightarrow & \varphi_*(f) = \varphi f \end{array}$$

recibe el nombre del $\Lambda - morfismo$ inducido por φ.

Si $1_{N'} : N' \to N'$ es el $\Lambda - morfismo$ identidad, entonces $(1_N)_* (f) = 1_N (f) = f$ $\forall f \in Hom_\Lambda(M, N')$. Por otro lado, si $\varphi' : N'' \to N'$ y $\varphi : N' \to N$ son $\Lambda - morfismos$, entonces para cualquier $f \in Hom_\Lambda(M, N'')$ se tiene que $\varphi'\varphi(f) \in Hom_\Lambda(M, N)$. Por lo tanto $(\varphi'\varphi)_*$ es un $\Lambda - morfismo$. Además

$$\left(\varphi'\varphi\right)_* (f) = \varphi'\varphi(f) = \varphi'(\varphi (f)) = \varphi'_* (\varphi (f)) = \varphi'_*(\varphi_*(f)) = \varphi'_*\varphi_*(f)$$

para toda $f \in Hom_\Lambda(M, N'')$. Por lo tanto $(1_N)_* = 1_{Hom_\Lambda(M,N)}$ y $(\varphi'\varphi)_* = \varphi'_*\varphi_*$.

Sean $\psi : M' \longrightarrow M$ un $\Lambda - morfismo$. Si $f \in Hom_\Lambda(M, N)$, entonces $f\psi \in Hom_\Lambda(M', N)$. Además para cualesquiera $f, g \in Hom_\Lambda(M, N)$ y $\alpha \in \Lambda$ se tiene

$$\begin{aligned} (f + g)\, \psi\, (a) &= f\psi\, (a) + g\psi\, (a) \\ (\alpha f)\, \psi\, (a) &= \alpha(f\psi(a)) \end{aligned}$$

para toda $a \in M'$. Por lo tanto ψ induce un $\Lambda - morfismo$ de $Hom_\Lambda(M, N)$ a $Hom_\Lambda(M', N)$.

5.14 Definición. *Sean M', M, N $\Lambda - $módulos y $\psi : M' \longrightarrow M$ un $\Lambda - morfismo$, al $\Lambda - morfismo$*

$$\begin{array}{rccc} \psi^* : & Hom_\Lambda(M, N) & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M', N) \\ & f & \longrightarrow & \psi^*(f) = f\psi \end{array}$$

lo llamaremos el $\Lambda - morfismo$ inducido por ψ.

Además, si $1_M : M \longrightarrow M$ es el $\Lambda - morfismo$ identidad, entonces $(1_M)^* (f) = f(1_M) = f$ $\forall f \in Hom_\Lambda(M, N)$. Por otro lado, si $\psi : M' \longrightarrow M$ y $\psi' : M \longrightarrow M''$ son $\Lambda - morfismos$, entonces para cualquier $f \in Hom_\Lambda(M'', N)$ se tiene $f(\psi'\psi) \in Hom_\Lambda(M', N)$, entonces $(\psi'\psi)^*$ está definida, y

$$(\psi'\psi)^*(f) = f(\psi'\psi) = (f\psi')\psi = \psi^*(f\psi') = \psi^*\psi'^*(f)$$

Por lo tanto $(1_M)^* = 1_{Hom_\Lambda(M,N)}$ y $(\psi'\psi)^* = \psi^*\psi'^*$.

5.15 Proposición. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ y $\{N_i\}_{i\in I}$ familias de $\Lambda - $módulos, si M y N son $\Lambda - $módulos. Entonces*

(i) $Hom_\Lambda\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$
(ii) $Hom_\Lambda(M, \prod_{i\in I} N_i) \cong \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$

Demostración. (i) Como $\forall i \in I$ se tiene que $i_{M_i} : M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$, y para cualquier $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$, se tiene $\varphi \circ i_{M_i} : M_i \longrightarrow N$. Por lo que definamos

$$\rho : Hom_\Lambda\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$$

como $\rho(\varphi) = (\varphi i_{M_i})_{i\in I}$ $\forall \varphi \in Hom_\Lambda\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right)$, a partir de su definición vemos que ρ está bien definida. Ahora mostremos que ρ es un $\Lambda - isomorfismo$. Sean $\varphi, \varphi' \in Hom_\Lambda\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right)$ y $\alpha \in \Lambda$, entonces para cada $i \in I$

$$\begin{aligned}(\varphi + \varphi')i_{M_i} &= \varphi i_{M_i} + \varphi' i_{M_i}\\ (\alpha\varphi)\, i_{M_i} &= \alpha\,(\varphi i_{M_i})\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\rho(\varphi + \varphi') = ((\varphi + \varphi')i_{M_i})_{i\in I} = (\varphi i_{M_i})_{i\in I} + (\varphi' i_{M_i})_{i\in I} = \rho(\varphi) + \rho(\varphi')$$

y

$$\rho\,(\alpha\varphi) = ((\alpha\varphi)\, i_{M_i})_{i\in I} = (\alpha\,(\varphi i_{M_i}))_{i\in I} = \alpha(\varphi i_{M_i})_{i\in I}$$

Entonces ρ es un $\Lambda - morfismo$. Veamos que ρ es un $\Lambda - isomorfismo$.

Sea $\varphi \in \ker(\rho)$, entonces $\rho(\varphi) = (\varphi i_{M_i})_{i\in I} = 0$, entonces $\forall i \in I$ $\varphi\,(i_{M_i}) = 0 = 0\,(i_{M_i})$, por (4.6) se sigue $\varphi = 0$. Por lo tanto ρ es un $\Lambda - monomorfismo$.

Sea $(\varphi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M_i, N)$, entonces $\forall i \in I$ $\varphi_i \in Hom_\Lambda(M_i, N)$, entonces por (4.6) existe $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$, tal que, $\varphi i_{M_i} = \varphi_i$ $\forall i \in I$, entonces

$$\rho\,(\varphi) = (\varphi i_{M_i})_{i\in I} = (\varphi_i)_{i\in I}$$

Por lo tanto ρ es un $\Lambda - epimorfismo$.

(ii) Como para cualquier $\psi \in Hom_\Lambda\left(M, \prod_{i\in I} N_i\right)$ y $i \in I$, se tiene que $p_i\psi \in Hom_\Lambda(M, N_i)$. Definamos

$$\phi : Hom_\Lambda\left(M, \prod_{i\in I} N_i\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$$

con $\phi(\psi) = (p_i\psi)_{i\in I}$ $\forall \psi \in Hom_\Lambda\left(M, \prod_{i\in I} N_i\right)$. Análogamente a como se mostró en (i) se muestra que ϕ es un $\Lambda - morfismo$. Ahora mostremos que ϕ es un $\Lambda - isomorfismo$.

Sea $\psi \in \ker(\phi)$, entonces $\phi(\psi) = (p_i\psi)_{i\in I} = 0$ por lo que $p_i\psi = 0 = p_i(0)$ $\forall i \in I$, entonces por (4.7) se tiene que $\psi = 0$. Por lo tanto ψ es un $\Lambda - monomorfismo$.

Sea $(\psi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(M, N_i)$ con $\psi_i \in Hom_\Lambda(M, N_i)$ $\forall i \in I$, por (4.7) existe un único $\psi : M \to \prod_{i\in I} N_i$, tal que, $p_i\psi = \psi_i$ $\forall i \in I$. Por lo tanto ϕ es un $\Lambda - epimorfismo$.$\blacksquare$

5.16 Proposición Sea $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\to} N''$ una sucesión exacta de $\Lambda -$ *módulos*. Entonces para cualquier $\Lambda -$ *módulo* M la sucesión

$$0 \quad \to \quad Hom_\Lambda(M, N') \quad \overset{\psi_*}{\to} \quad Hom_\Lambda(M, N) \quad \overset{\psi'_*}{\to} \quad Hom_\Lambda(M, N'')$$

es exacta.

Demostración. Veamos que ψ_* es un $\Lambda - monomorfismo$. Sea $f \in \ker(\psi_*)$, entonces $\psi_*(f) = \psi(f) = 0$, es decir, $\psi(f(y)) = 0$ $\forall y \in N'$, entonces como ψ es un $\Lambda - monomorfismo$ se tiene $f(y) = 0$ $\forall y \in N'$, por lo tanto $f = 0$.

Veamos que $im(\psi_*) = \ker(\psi'_*)$. Veamos que $im(\psi_*) \subseteq \ker(\psi'_*)$; sea $g \in im(\psi_*)$, entonces existe $f \in Hom_\Lambda(M, N')$, tal que, $\psi_*(f) = g$, entonces $\psi'_*(g) = \psi'_*(\psi_*(f)) = \psi'(\psi(f)) = (\psi'\psi)f = 0$, por lo tanto $\psi'_*(g)$, es decir, $g \in \ker(\psi'_*)$. Ahora veamos que $\ker(\psi'_*) \subseteq im(\psi_*)$; sea $g \in \ker(\psi'_*)$, como $\psi'_*(g) = 0$, entonces $\psi'(g(x)) = 0$ $\forall x \in M$, entonces $g(x) \in \ker(\psi') = im(\psi)$, entonces existe una única $y \in N'$tal que $\psi(y) = g(x)$, ya que ψ es un $\Lambda - monomorfismo$; por lo que definiendo $f(x) = y = \psi^{-1}(g(x))$ $\forall x \in M$, se tiene que $\psi_*(f) = g$.$\blacksquare$

Observemos que aun cuando ψ' sea un $\Lambda - epimorfismo$, no necesariamente ψ'_* lo es. Por ejemplo considerando a $\Lambda = \mathbb{Z}$, $N' = N = \mathbb{Z}$ y $N'' = M = \mathbb{Z}_n$ para $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \overset{\mu_n}{\rightarrowtail} \mathbb{Z} \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_n$$

donde $\mu_n(z) = nz$ $\forall z \in \mathbb{Z}$. Como $Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_n, 0) = \{0\}$, y $Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) = \{0, 1_{\mathbb{Z}_n}\}$, entonces la sucesión obtenida

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \overset{(\mu_n)_*}{\longrightarrow} Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \overset{\psi'_*}{\longrightarrow} Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \longrightarrow 0$$

se puede ver como

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \overset{\psi'_*}{\longrightarrow} Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \longrightarrow 0$$

por lo que ψ'_* no es un $\Lambda - epimorfismo$.

5.17 Proposición. *Sean* $M' \xrightarrow{\varphi} M \overset{\varphi'}{\twoheadrightarrow} M''$ *una sucesión de* $\Lambda-$*módulos y* N *un* $\Lambda -$ *módulo. Entonces la sucesión*

$$Hom_\Lambda(M', N) \quad \xleftarrow{\varphi^*} \quad Hom_\Lambda(M, N) \quad \xleftarrow{\varphi'^*} \quad Hom_\Lambda(M'', N) \quad \longleftarrow \quad 0$$

es exacta.

Demostración. Veamos que φ'^* es un $\Lambda - monomorfismo$. Sea $f \in \ker(\varphi'^*)$, entonces $\varphi'^*(f) = f\varphi' = 0$, como $0\varphi' = 0$, entonces $f\varphi' = 0\varphi'$, como φ' es un $\Lambda - epimorfismo$, entonces $f = 0$.

Ahora mostremos que $im\,(\varphi'^*) = \ker(\varphi^*)$. Sea $f \in Hom_\Lambda(M'', N)$, entonces se tiene $\varphi'^*(f) = f\varphi' \in im\,(\varphi'^*)$, y además $\varphi^*(\varphi'^*(f)) = \varphi^*(f\varphi') = f(\varphi'\varphi) = f(0) = 0$, entonces $\varphi'^*(f) \in \ker(\varphi^*)$. Sea $g \in \ker(\varphi^*)$, entonces $\varphi^*(g) = g\varphi = 0$, lo que nos lleva a que $g(\varphi(x)) = 0\ \forall x \in M'$, entonces $\forall y \in im\,(\varphi) = \ker(\varphi')\ g\,(y) = 0$, por otra parte como φ' es un $\Lambda-epimorfismo$, y por el primer teorema de isomorfismo se tiene $M'' \cong M/\ker(\varphi')$. Entonces, si $p : M \to M/\ker(\varphi')$ es la proyección canonica, entonces $p\varphi'$ define un $\Lambda - isomorfismo$, por lo que existe una única $f : M'' \cong M/\ker(\varphi') \longrightarrow N$, tal que, $f(p\varphi') = (fp)\varphi' = g$. Por lo tanto $\varphi'^*(fp) = g$.■

Sea N un $\Lambda - módulo$ considerando la asignación

5.18
$$\begin{array}{rccc} Hom_\Lambda(\_, N) : & {}_\Lambda\mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \\ & M & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M, N) \\ & \psi : M' \to M & \longrightarrow & Hom_\Lambda(\_, N)(\psi) = \psi^* \end{array}$$

Por otro lado, si ψ, ψ' son $\Lambda - morfismos$, tales que, tiene sentido $\psi'\psi$, entonces

$$Hom_\Lambda(\_, N)(\psi'\psi) = (\psi'\psi)^* = \psi^*\psi'^* = Hom_\Lambda(\_, N)(\psi) \circ Hom_\Lambda(\_, N)(\psi')$$

y

$$(1_M)^* = 1_{Hom_\Lambda(M,N)}.$$

De manera análoga, si M es un $\Lambda - módulo$, la asignación

5.19
$$\begin{array}{rccc} Hom_\Lambda(M, \_) : & {}_\Lambda\mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \\ & N & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M, N) \\ & \psi : N' \to N & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M, \_)(\psi) = \psi_* \end{array}$$

para cada $\Lambda-módulo$ N y para cada $\Lambda-morfismo$ $\varphi : N' \to N$. Si φ, φ' son $\Lambda-morfismos$, tales que tiene sentido $\varphi'\varphi$, entonces

$$Hom_\Lambda(M,\_)(\varphi'\varphi) = (\varphi'\varphi)_* = \varphi'_*\varphi_* = Hom_\Lambda(M,\_)(\varphi') \circ Hom_\Lambda(M,\_)(\varphi)$$

y

$$(1_N)_* = 1_{Hom_\Lambda(M,N)}$$

Sean M', M, N' y N $\Lambda-módulos$, $\varphi : M' \longrightarrow M$, $\psi : N' \longrightarrow N$ dos $\Lambda-morfismos$, y $f \in Hom_\Lambda(M,N')$. Entonces $\psi f\varphi \in Hom_\Lambda(M',N)$. Por lo tanto la asignación $f \longrightarrow \psi f\varphi$, para cualquier $f \in Hom_\Lambda(M,N')$ determina un $\Lambda-morfismo$ entre $Hom_\Lambda(M,N')$ y $Hom_\Lambda(M',N)$, a la cual denotaremos por $Hom(\varphi,\psi)$, es decir, la asignación:

5.20 $$\begin{array}{rccc} Hom(\varphi,\psi): & Hom_\Lambda(M,N') & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M',N) \\ & f & \longrightarrow & Hom(\varphi,\psi)(f) = \psi f\varphi \end{array}$$

determina un $\Lambda-morfismo$. Por otro lado

$$\psi f\varphi = \psi_*(f\varphi) = (\psi_*(f))\varphi = \varphi^*(\psi_*(f)) = \varphi^*\psi_*(f)$$

Por lo tanto $Hom(\varphi,\psi)(f) = \psi f\varphi = \varphi^*\psi_*(f)$, es decir, $Hom(\varphi,\psi)(f) = \varphi^*\psi_*(f)$ $\forall f \in Hom_\Lambda(M,N')$.

5.21 Proposición. *Sean M, N $\Lambda-módulos$, consideremos a $1_M : M \to M$ y $1_N : N \to N$ los $\Lambda-morfismos$ identidad, y sean φ, φ', ψ y ψ $\Lambda-morfismos$, tales que, $\varphi'\varphi$ y $\psi'\psi$, están bien definidos. Entonces:*
(i) $Hom(1_M, 1_N) = 1_{Hom_\Lambda(M,N)}$
(ii) $Hom(\varphi'\varphi, \psi'\psi) = Hom\left(\varphi', \psi'\right) \circ Hom\,(\varphi,\psi)$.
Demostración.
(i) Sea $f \in Hom_\Lambda(M,N)$, entonces

$$Hom(1_M,1_N)(f) = 1_N \circ f \circ 1_M = 1_N \circ (f \circ 1_M) = 1_N \circ (f) = f = 1_{Hom_\Lambda(M,N)}(f)$$

Por lo tanto $Hom(1_M, 1_N)(f) = 1_{Hom_\Lambda(M,N)}(f)$.
(ii) Como para cualquier $\Lambda-morfismo$ f, se tiene

$$Hom(\varphi'\varphi,\psi'\psi)(f) = (\varphi'\varphi)_*(\psi'\psi)^*(f) = (\varphi'_*\varphi_*)(\psi^*\psi^*)(f) = \\ \varphi'_*(\varphi_*\psi^*)(f)\psi'^* = \varphi'_*\psi'^*(\varphi_*\psi^*)(f) = Hom(\varphi',\psi') \circ Hom(\varphi,\psi)(f)$$

Por lo tanto $Hom(\varphi'\varphi, \psi'\psi)(f) = Hom(\varphi', \psi') \circ Hom(\varphi, \psi)(f)$. ■

5.21 Proposición. *Sean* $\varphi : M' \to M$ *y* $\psi : N' \to N$ *dos* $\Lambda-morfismos$. *Entonces para cualesquiera* $\varphi_1, \varphi_2 : M' \longrightarrow M$ *y* $\psi_1, \psi_2 : N' \longrightarrow N$ *son* $\Lambda - morfismos$, *se tiene:*

(i) $Hom(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = Hom(\varphi_1, \psi) + Hom(\varphi_2, \psi)$.

(ii) $Hom\,(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = Hom(\varphi, \psi_1) + Hom(\varphi, \psi_2)$.

Demostración. Sean $f \in Hom_\Lambda(M, N')$ y $x \in M$.

(i) $Hom(\varphi_1+\varphi_2, \psi)(f(x)) = \psi(f((\varphi_1+\varphi_2)(x))) = \psi(f\varphi_1(x)+f\varphi_2(x)) = \psi f\varphi_1(x)+\psi f\varphi_2(x)$, es decir $Hom(\varphi_1+\varphi_2, \psi)(f(x)) = \psi f\varphi_1(x)+\psi f\varphi_2(x)$. Por lo tanto $Hom(\varphi_1 + \varphi_2, \psi)(f) = Hom(\varphi_1, \psi)(f) + Hom(\varphi_2, \psi)(f)$.

(ii) $Hom\,(\varphi, \psi_1 + \psi_2)\,(f(x)) = (\psi_1 + \psi_2)f(\varphi(x)) = (\psi_1 + \psi_2)(f\varphi(x)) = \psi_1(f\varphi(x)) + \psi_2(f\varphi(x))$, por lo que $Hom\,(\varphi, \psi_1 + \psi_2)\,(f(x)) = \psi_1(f\varphi(x)) + \psi_2(f\varphi(x))$. Por lo tanto

$$Hom\,(\varphi, \psi_1 + \psi_2)\,(f) = Hom(\varphi, \psi_1)\,(f) + Hom(\varphi, \psi_2)\,(f)$$

■

Como resultado de lo anterior podemos crear la asignación $Hom_\Lambda\,(\_,\_)$, la cual va de ${}_\Lambda\mathbf{Mod}, \times_\Lambda \mathbf{Mod}$ en ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$, definida por:

$$\begin{array}{rccc} Hom_\Lambda\,(\_,\_): & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \times_\Lambda \mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \\ & (M, N) & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M, N) \\ & (f, g) & \longrightarrow & Hom\,(f, g) \end{array}$$

$\forall\, M,\, N \in_\Lambda \mathbf{Mod}$, $\forall f, g$ $\Lambda-$*módulos* resulta ser un bifuntor, pues su dominio en este caso es un producto de categorías. Cabe mencionar que este hecho será abordado en el capítulo III para su mejor entendimiento.

1.6 Límites Directos

Como se ha hecho en las secciones anteriores definiremos nuevos $\Lambda-$*módulos*, a través de las llamadas *"Propiedades Universales"*.

6.1 Definición. *Sea* I *un conjunto y* $\leq \subseteq I \times I$, *diremos que* $(I, \leq)$ *es un* conjunto preordenado, *si:*

(i) $\forall i \in I\,(i \leq i)$, *(Reflexivo)*.

(ii) $\forall i, j, k \in I((i \leq j \wedge j \leq k) \Rightarrow i \leq k)$ *(Transitivo)*.

Denotaremos por I al conjunto preordenado $(I, \leq)$.

Si $(I, \leq)$ es un conjunto preordenado tal que para cualesquiera $i, j \in I$ existe $k \in I$, $i \leq k$ y $j \leq k$, diremos que I es un *conjunto directo*.

6.2 Definición. *Dado un conjunto preordenado I, un sistema dirigido $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$ de $\Lambda -$ módulos es un conjunto de $\Lambda -$ módulos $\{M_i : i \in I\}$ para el que, si $i, j \in I$ son tales que $i \leq j$, entonces $\varphi_i^j : M_i \longrightarrow M_j$ es un $\Lambda - morfismo$, que cumplen con las siguientes propiedades:*

(i) $\varphi_j^k \varphi_i^j = \varphi_i^k$, *cuando* $i \leq j \leq k$.

(ii) $\varphi_i^i = 1_{M_i} \quad \forall i \in I$.

Si I es un conjunto directo diremos que el sistema $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$ es un *sistema directo.*

6.3 Ejemplos: *(i) Si I tiene el preorden trivial, entonces, φ_i^j existe si, y sólo si $i = j$, pues si $i \neq j$ estos no son comparables.*

(ii) Si I es la familia de submódulos de un $\Lambda -$ módulo M se puede definir un orden parcial a través de la inclusión, i.e, $S' \leq S$ si, y sólo si la inclusión de S' a S está definida. Por otro lado, si S', $S \in I$, entonces $S' + S = \{s' + s : s' \in S' \text{ y } s \in S\} \in I$. *Por lo tanto el sistema $\left(S_i, \varphi_i^j\right)$.es un sistema directo, donde φ_i^j denota la inclusión de S_i a S_j.*

(iii) Si M es un $\Lambda-$módulo, la familia $Fin\,(M)$ de todos los submódulos finitamente generados de M, dotándole del mismo orden que en el inciso anterior, se tiene que $Fin\,(M)$ define un sistema directo de $\Lambda -$ módulos.

(iv) Si Λ es un dominio entero y $Q = Frac\,(\Lambda)$, entonces la familia de submódulos cíclicos generados por $\langle 1/r \rangle$, con $r \in \Lambda$ y $r \neq 0$, define un sistema dirigido con el orden parcial definido a través de los morfismos de inclusión. Además para cualesquiera $\langle 1/r \rangle$ y $\langle 1/s \rangle$ están contenidos en $\langle 1/rs \rangle$. De lo anterior dicha familia define un sistema directo.

6.4 Definición. *El* límite directo *de un sistema dirigido (directo)*

$$\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$$

es un $\Lambda-$módulo denotado por $\varinjlim M_i$ (o más precisamente como $\varinjlim(M_i, \varphi_i^j)$), para el cual existe una familia de $\Lambda - morfismos$ $\{\mu_i : M_i \to \varinjlim M_i\}$ tales que $\mu_i = \mu_j \varphi_i^j$, si $i \leq j$. Además para cualquier familia de $\Lambda - morfismos$

$\{g_i : M_i \to M\}$ tales que $g_i = g_j\varphi_i^j$, si $i \leq j$, entonces existe un único $\Lambda - morfismo$

$$g : \varinjlim M_i \longrightarrow M$$

tal que, $g\mu_i = g_i$ $\forall i \in I$, es decir, g completa el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \varinjlim M_i \\ & \overset{\mu_i}{\nearrow} & \uparrow \mu_j \\ M_i & \xrightarrow{\varphi_i^j} & M_j \\ & \underset{g_i}{\searrow} & \downarrow g_j \\ & & M \end{array}$$

si $i \leq j$.

6.5 Ejemplos. A partir de la definición anterior podemos decir:

(i) Si I tiene el orden trivial, entonces a $\varinjlim M_i$ lo podemos interpretar como $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

(ii) Si I es una cadena, entonces podemos interpretar a $\varinjlim M_i$ como $\bigcup_{i \in I} M_i$.

A continuación mostraremos que para cualquier sistema dirigido el límite directo existe y que es único salvo isomorfismos.

6.6 Proposición. *Sea $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$ un sistema dirigido de $\Lambda-$módulos, para el que existe el límite directo. Entonces dicho límite es único, salvo isomorfismos.*

Demostración. Supóngase que $\left(\varinjlim M_i\right)'$ es otro límite directo para el sistema $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$. Mostraremos que $\left(\varinjlim M_i\right)' \cong \varinjlim M_i$.

Sean $\left\{\mu_i' : M_i \to \left(\varinjlim M_i\right)'\right\}$ y $\left\{\mu_i : M_i \to \left(\varinjlim M_i\right)\right\}$ las familias de $\Lambda - morfismos$ que cumplen la condición de que $\left(\varinjlim M_i\right)'$ y $\varinjlim M_i$ sean límites directos de $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$, entonces existe un único $\Lambda - morfismo$

$$g : \varinjlim M_i \longrightarrow \left(\varinjlim M_i\right)'$$

tal que $\mu_i' = g\mu_i$ para cualquier $i \in I$. Por otro lado existe un $\Lambda - morfismo$

$$g' : \left(\underset{\rightarrow}{lím} M_i\right)' \longrightarrow \underset{\rightarrow}{lím} M_i$$

tal que, $\mu_i = g'\mu_i'$ para cualquier $i \in I$. Entonces

$$1_{\left(\underset{\rightarrow}{lím} M_i\right)'}\mu_i' = \mu_i' = g\mu_i = g(g'\mu_i') = (gg')\mu_i$$

para cualquier $i \in I$, por (6.4) $gg' = 1_{\left(\underset{\rightarrow}{lím} M_i\right)'}$. Por otro lado

$$1_{\underset{\rightarrow}{lím} M_i}\mu_i = \mu_i = g'\mu_i' = g'(g\mu_i) = (g'g)\mu_i$$

de igual manera por (6.4) $g'g = 1_{\underset{\rightarrow}{lím} M_i}$. Por lo tanto $g : \underset{\rightarrow}{lím} M_i \longrightarrow \left(\underset{\rightarrow}{lím} M_i\right)$ es un $\Lambda - isomorfismo$.■

6.7 Proposición. *Cualquier* $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$ *sistema dirigido de* $\Lambda -$ *módulos tiene límite directo.*

Demostración. Sea $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$ un sistema dirigido de $\Lambda - módulos$, para cualquier $i \in I$ denotemos por

$$\mu_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$

al $\Lambda - morfismo$ de inclusión. Sea

$$N = \sum_{i \leq j} (\mu_j \varphi_i^j - \mu_i)(M_i)$$

A partir de la definición de N, vemos que N es un submódulo de $\bigoplus_{i \in I} M_i$, entonces para cada $i \in I$ se tiene que μ_i induce un $\Lambda - morfismo$

$$\overline{\mu_i} : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i/N$$

Por lo tanto, si $i \leq j$ y $x \in M_i$, entonces $\mu_j \varphi_i^j(x) - \mu_i(x) \in N$, por lo que $\overline{\mu_j}\varphi_i^j - \overline{\mu_i} = 0$, entonces $\overline{\mu_j}\varphi_i^j = \overline{\mu i}$ si $i \leq j$.

Ahora mostremos que $\underset{\rightarrow}{lím} M_i$ es isomorfo a $\bigoplus_{i \in I} M_i/N$. Sea $\{g_i : M_i \rightarrow M\}_{i \in I}$ una familia de $\Lambda - módulos$ tal que $g_j \varphi_i^j = g_i$, si $i \leq j$, entonces por (4.6) existe un único $\Lambda - morfismo$

$$g' : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M$$

tal que $g'\mu_i = g_i \; \forall i \in I$. Por otro lado $0 = g_j\varphi_i^j - g_i = (g'\mu_j)\varphi_i^j - g'\mu_i = g'(\mu_j\varphi_i^j - \mu_i)$, entonces N es submódulo de $\ker(g')$. Por (2.11) existe un único $\Lambda - morfismo$

$$g : \bigoplus_{i\in I} M_i/N \longrightarrow M$$

tal que $g\overline{\mu_i} = g_i \; \forall i \in I$. Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} M_i/N \cong \underrightarrow{lím} M_i$ y sus $\Lambda - morfismos$ son los $\overline{\mu_i}$.■

6.8. Ejemplos. *(i) Si M es un $\Lambda -$ módulo, entonces la familia $Fin\,(M)$ es un sistema directo y $\underrightarrow{lím} M_i \cong M$*

(ii) Si Λ es un dominio entero y $Q = Frac\,(\Lambda)$. Si $M_r = \langle 1/r\rangle$ y i_r^s denota la inclusión de M_r a M_s, entonces $\underrightarrow{lím}\,(M_r, i_r^s) = Q$

6.9 Proposición. *Sea $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j\in I}$ un sistema directo de $\Lambda-$módulos, con $\left\{\mu_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i\right\}$ las inyecciones canónicas. Entonces*

(i) Cada elemento de $\underrightarrow{lím} M_i$ tiene una representación de la forma $\mu_i\,(m_i) + S$.

(ii) $\mu_i\,(m_i) + S = 0$ si, y sólo si para algún $t \in I$ con $i \leq t$ $\varphi_i^t\,(mi) = 0$.

Demostración. (i) Para $x \in \underrightarrow{lím} M_i$, por (6.7) $x = \sum_i \mu_i\,(m_i) + S$. Como I es un conjunto dirigido, podemos tomar $j \in I$, tal que, $j \geq i \; \forall i$.

Para cada i definamos $b^i = \varphi_i^j\,(m_i) \in M_j$. Si $b_j = \sum_i b^i \in M_j$, entonces

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_i \mu_i\,(m_i) - \mu_j\,(b_j) &= \textstyle\sum_i \mu_i\,(m_i) - \mu_j\left(b^i\right)\\ &= \textstyle\sum_i \mu_i\,(m_i) - \mu_j\left(\varphi_i^j\,(m_i)\right) \in S\end{aligned}$$

Por lo tanto $x = \sum_i \mu_i\,(m_i) + S = \mu_j\,(b_j) + S$.

(ii) $(\Longleftarrow)$ Si $\varphi_i^j\,(mi) = 0$ para algún $i \leq t$. Entonces

$$\begin{aligned}\mu_i\,(m_i) + S &= \mu_i\,(m_i) + \left(\mu_j\left(\varphi_i^j\,(m_i)\right) - \mu_i\,(mi)\right) + S\\ &= 0 + S\\ &= S\end{aligned}$$

$(\Longrightarrow)$ Si $\mu_i\,(m_i) + S = 0$, entonces $\mu_i\,(m_i) \in S$, y

$$\mu_i\,(m_i) = \sum_j a_j\left(\mu_k\varphi_j^k\,(m_j) - \mu_j\,(m_j)\right) \in S$$

con $a_j \in \Lambda$. Si para $j \leq k$ denotamos con

$$r\left(j,k,m_j\right)=\mu_k\varphi_j^k\left(m_j\right)-\mu_j\left(m_j\right).$$

Entonces para $a_j\in\Lambda$

$$r\left(j,k,a_jm_j\right)=a_jr\left(j,k,m_j\right).$$

Entonces con dicha notación se tiene

$$\mu_i\left(m_i\right)=\sum_j r\left(j,k,m_j\right).$$

Como I es un conjunto directo, podemos tomar t más grande que i,j,k, tal que,

$$\begin{array}{rcl}\mu_t\circ\varphi_i^j\left(m_i\right) & = & \mu_j\left(\varphi_i^j\left(m_i\right)-\mu_i\left(m_i\right)\right)\\ & = & r\left(i,t,m_i\right)+\sum_j r\left(j,k,m_j\right).\end{array}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{array}{rcl}r\left(j,k,m_j\right) & = & \mu_k\varphi_j^k\left(m_j\right)-\mu_j\left(m_j\right)\\ & = & \left(\mu_t\varphi_j^t\left(m_j\right)-\mu_j\left(m_j\right)\right)+\left[\mu_t\varphi_k^t\left(-\varphi_j^k\left(m_j\right)\right)-\mu_k\left(-\varphi_j^k\left(m_j\right)\right)\right]\\ & = & r\left(j,t,m_j\right)+r\left(k,t,-\varphi_j^k\left(m_j\right)\right).\end{array}$$

Como $\varphi_k^t\circ\varphi_i^k=\varphi_i^t$, se tiene

$$\mu_t\circ\varphi_i^t\left(m_i\right)=\sum_l r\left(l,k,m_l\right)$$

con $m_l\in M_l$, Además para $l\leq t$ se tiene

$$r\left(l,k,m_l\right)+r\left(l,k,m_l'\right)=r\left(l,k,m_l+m_l'\right)$$

Aplicando las igualdades anteriores tenemos

$$\begin{array}{rcl}\mu_t\circ\varphi_i^t\left(m_i\right) & = & \sum_l r\left(l,k,m_l\right)\\ & = & \sum_l \mu_k\varphi_j^k\left(m_j\right)-\mu_j\left(m_j\right)\\ & = & \mu_t\left(\sum_l\varphi_l^t\left(m_l\right)\right)-\sum_l\mu_l\left(m_l\right)\end{array}$$

con $m_l\in M_l$. Como todos los índices son distintos, y la expresión es única en términos de la suma directa, por lo que, si $l\neq t$ y $\mu_l\left(m_l\right)=0$, entonces $x_l=0$, pues μ_l son inyecciones. Entonces en el lado derecho de la igualdad se tiene $\mu_t \circ \varphi_t^t(m_t) - \mu_t(m_t) = 0$, pues $\varphi_t^t = 1_{M_t}$. Entonces $\mu_t \circ \varphi_i^t(m_i) = 0$, como μ_t es una inyección se tiene $\varphi_i^t(m_i) = 0$. ■

6.10 Definición. *Sean* $M = \left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j\in I}$ *y* $N = \left(N_i, \psi_i^j\right)_{i,j\in I}$ *dos sistemas dirigidos (directos) de* $\Lambda-$ *módulos. Un* morfismo de sistemas dirigidos $M \xrightarrow{f} N$ $\left(f : \left(M_i, \varphi_i^j\right) \longrightarrow \left(N_i, \psi_i^j\right)\right)$ *es una colección de morfismos* $\left(M_i \xrightarrow{f_i} N_i\right)_{i\in I}$ *tales que para* $i \leq j$ *el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f_i} & N_i \\ \varphi_i^j \downarrow & & \downarrow_{\psi_i^j} \\ M_j & \underset{f_j}{\longrightarrow} & N_j \end{array}$$

Vemos que un morfismo $f : \left(M_i, \varphi_i^j\right) \longrightarrow \left(N_i, \psi_i^j\right)$ de sistema dirigidos determina un $\Lambda - morfismo$

$$\begin{array}{cccc} \overline{f}: & \varinjlim \left(M_i, \varphi_i^j\right) & \longrightarrow & \varinjlim \left(N_i, \psi_i^j\right) \\ & \sum \mu_i(m_i) + S & \longrightarrow & \sum \eta_i(f_i(m_i)) + T \end{array}$$

donde $S \subseteq \bigoplus M_i$ y $T \subseteq \bigoplus N_i$ son las relaciones definidas en la construcción de $\varinjlim(M_i)$ y $\varinjlim(N_i)$, respectivamente, y μ_i, η_i son las inyecciones de M_i y N_i a las sumas directas.

6.11 Proposición. *Sean* $M' = \left(M_i', \left(\varphi_i^j\right)'\right)_{i,j\in I}$, $M = \left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j\in I}$, $M'' = \left(M_i'', \left(\varphi_i^j\right)''\right)_{i,j\in I}$ *sistemas directos de* $\Lambda -$ *módulos. Si* $M' \xrightarrow{f} M$ *y* $M \xrightarrow{g} M''$ *son morfismos de sistemas directos tales que para cada* $i \in I$ *la sucesión*

$$0 \longrightarrow M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M_i'' \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces

$$0 \longrightarrow \varinjlim(M_i') \xrightarrow{\overline{f}} \varinjlim(M_i) \xrightarrow{\overline{g}} \varinjlim(M_i'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Veamos que $\overline{f}$ es una inyección. Supongamos que $\overline{f}(x) = 0$, con $x \in \varinjlim (M_i')$, entonces $x = \mu_i'(m_i') + N'$, por lo que $\overline{f}(x) = \mu_i \circ f_i(m_i) + N$, por (6.9) existe $k \geq i$ tal que $\varphi_i^k(f_i(m_i)) = 0$. Como $\overline{f}$ es un morfismo de sistemas directos, entonces:

$$0 = \varphi_i^k(f_i(m_i)) = f_k\left(\varphi_i^k(m_i)\right)$$

Como f_k es inyectiva, se sigue $\varphi_i^k(m_i) = 0$. Por lo tanto $x = \mu_i'(m_i') + S' = 0$.

Para terminar veamos que $\overline{g}$ es una función suprayectiva. Sea $y = \sum \mu_i''(m_i'') + S'' \in \varinjlim (M_i'')$, como para cada $i \in I$, $m_i'' \in M_i''$ y g_i es suprayectiva, entonces existe $m_i \in M_i$ tal que $g(m_i) = m_i''$. Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} y & = & \sum \mu_i''(m_i'') + S'' \\ & = & \sum \mu_i''(f_i(m_i)) + S'' \\ & = & \overline{f}\left(\sum \mu_i(m_i) + S\right) \end{array}$$

Para finalizar esta sección demostremos estas dos proposiciones que nos serán útiles en secciones posteriores.

6.12 Proposición. *Si* $\left(N_i, \psi_i^j\right)_{i,j\in I}$ *es un sistema dirigido de* $\Lambda -$ *módulos con límite directo* N, *y* M *es un* $\Lambda -$ *módulo, entonces* $(M \otimes_\Lambda N_i, 1_M \otimes \psi_i^j)_{i,j\in I}$ *es un sistema dirigido de* $\Lambda -$ *módulos y*

$$M \otimes_\Lambda N \cong \varinjlim (M \otimes_\Lambda N_i).$$

Demostración. Sea $N = \varinjlim N_i$ con los $\Lambda - morfismos$ μ_i. Veamos que $(M \otimes_\Lambda N_i, 1_M \otimes \psi_i^j)_{i,j\in I}$ es un sistema dirigido, sean $i, j \in I$ tales que $i \leq j$, como

$$1_M \otimes \mu_i = 1_M \otimes \mu_j \psi_i^j = (1_M \otimes \mu_j)(1_M \otimes \psi_i^j)$$

y

$$1_M \otimes \psi_i^i = 1_M \otimes 1_{N_i}$$

Por lo tanto $(M \otimes_\Lambda N_i, 1_M \otimes \psi_i^j)_{i,j\in I}$ es un sistema dirigido. Ahora veamos cómo es su límite directo.

Si $\{g_i : M \otimes_\Lambda N_i \to M\}_{i\in I}$ son una familia de $\Lambda - morfismos$, tales que, $g_i = g_j(1_M \otimes \varphi_i^j)$, necesitamos que $g(1_M \otimes \mu_i) = g_i$ $\forall i \in I$. Sea $a \in M$, definamos

$$h_{ia} : N_i \longrightarrow M$$

como $h_{ia}(x) = g_i(a \otimes x)$ $\forall x \in N_i$, notemos que $h_{ia}(x) = g_i(a \otimes x) = g_j(a \otimes \varphi_i^j(x)) = h_{ja}(\varphi_i^j(x))$. Por hipótesis existe $h_a : N \longrightarrow M$, tal que, $h_a \mu_i = h_{ia}$ $\forall i \in I$, además notemos que para cualquier $\lambda \in \Lambda$ $h_{i\lambda a}(x) = h_{ia}(\lambda x)$, entonces $h_{\lambda a}(x) = h_a(\lambda x)$. Definamos

$$h : M \times N \longrightarrow M$$

como $h(a, x) = h_a(x)$ $\forall (a, x) \in M \times N$, de la construcción de h, se sigue que h es bilineal, por lo que existe un único $\Lambda - morfismo$

$$g : M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M$$

tal que $g(a \otimes x) = h(a, x)$.

Ahora vemos que

$$g \circ (1_M \otimes \mu_i)(a \otimes x) = g(a \otimes \mu_i(x)) = h_a(\mu_i(x)) = h_{ia}(x) = g_i(a \otimes x)$$

$\forall a \in M$ y $\forall x \in N$. Por lo tanto $g(1_M \otimes \mu_i) = g_i$ $\forall i \in I$.■

De manera análoga podemos establecer la siguiente proposición.

6.13 Proposición. *Si* $\left(M_i, \varphi_i^j\right)_{i,j \in I}$ *es un sistema dirigido de* $\Lambda -$ *módulos con límite directo* M *y si* N *es un* $\Lambda -$ *módulo, entonces* $(M_i \otimes_\Lambda N, \varphi_i^j \otimes 1_N)_{i,j \in I}$ *es un sistema dirigido de* $\Lambda -$ *módulos y:*

$$M \otimes_\Lambda N = \varinjlim (M_i \otimes_\Lambda N).$$

1.7 Módulos Especiales

En esta sección se estudiarán algunos $\Lambda - módulos$, que nos serán de gran importancia para entender nuestras secciones posteriores.

1.7.1 Módulos Proyectivos

En (5.16) vimos que dada una sucesión exacta

$$0 \;\to\; N' \;\overset{\psi}{\to}\; N \;\overset{\psi'}{\to}\; N''$$

la sucesión inducida por $Hom_\Lambda\,(M, \_)$

$$0 \;\to\; Hom_\Lambda\,(M, N') \;\overset{\psi_*}{\to}\; Hom_\Lambda\,(M, N) \;\overset{\psi'_*}{\to}\; Hom_\Lambda\,(M, N'')$$

es exacta. Además, si ψ' es un $\Lambda - epimorfismo$ no necesariamente se tiene que ψ'_* es un $\Lambda - epimorfismo$. A continuación estudiaremos el caso donde, si ψ' es un $\Lambda - epimorfismo$, entonces ψ'_* lo sea también.

7.1 Definición Un $\Lambda-$*módulo* P se llamará *Proyectivo*, si para cualquier $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} N''$ sucesión exacta, se tenga que la sucesión inducida por $Hom_\Lambda(P, \_)$ sea exacta, es decir la sucesión

$$0 \;\to\; Hom_\Lambda\,(P, N') \;\overset{\psi_*}{\to}\; Hom_\Lambda\,(P, N) \;\overset{\psi'_*}{\to}\; Hom_\Lambda\,(P, N'') \;\to 0$$

es exacta.

7.2 Observación. *Por* (5.14) *podemos decir que un* $\Lambda -$ *módulo* P *es proyectivo si, y sólo si para cualquier sucesión* $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} N''$*se tenga que* ψ'_* *sea un* $\Lambda - epimorfismo$. *Es decir,* P *es proyectivo, si y sólo si para cualquier* $\Lambda - epimorfismo$ $\psi' : N \to N''$ *y cualquier* $f \in Hom_\Lambda\,(P, N'')$, *existe un* $h \in Hom_\Lambda\,(P, N)$ *tal que* $\psi'_*(h) = \psi' h = f$, *es decir, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

7.3 Proposición. *Si* L *es un* $\Lambda-$*módulo libre, entonces* L *es proyectivo.*

Demostración. Sea $\psi' : N \to N''$ un $\Lambda - epimorfismo$ y $f : L \to N''$ un $\Lambda - morfismo$.

Como L es libre, entonces existe $\beta \subseteq L$ base de L. Por otro lado, como ψ' es un $\Lambda - epimorfismo$, entonces $\forall x_i \in \beta$ existe $g(x_i) \in N$ tal que $\psi'(g(x_i)) = f(x_i)$. Como L es libre sobre β, entonces existe un $\Lambda - morfismo$

$$h : L \longrightarrow N$$

tal que $h(x_i) = g(x_i)\ \forall x_i \in \beta$. Si $x \in L$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e x_i$, con $\alpha_i \in \Lambda$ y $x_i \in \beta$, por lo que

$$\psi'(h(x)) = \psi'\left(h\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\psi' g(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = f(x)$$

Por lo tanto $\psi'(h(x)) = f(x)\ \forall x \in L$.■

A partir de la definición anterior vimos que cualquier $\Lambda-$*módulo* libre es proyectivo, entonces como ejemplos de proyectivos se tiene: a los $K-$*módulos* (espacios vectoriales), a Λ visto como $\Lambda-$*módulo*, y desde luego cualquier suma directa de copias de Λ.

7.4 Proposición. *$P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ es un $\Lambda-$módulo proyectivo si, y solo si P_i es un $\Lambda-$módulo proyectivo $\forall i \in I$.*

Demostración Haremos la demostración para $i = 1, 2$. El caso general es análogo.

($\Longrightarrow$) Supongamos que $P = P_1 \oplus P_2$ es un $\Lambda-$*módulo* proyectivo. Veamos que P_2 es proyectivo. Sean

$$f : P_2 \longrightarrow N$$

y

$$\psi' : N \to N''$$

un $\Lambda-morfismo$ y un $\Lambda-epimorfismo$ respectivamente, también consideremos a $i_2 : P_2 \longrightarrow P$ y $p_2 : P \longrightarrow P_2$, la inclusión y la proyección respectivamente. Considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} P_2 & \xrightarrow{i_2} & P & \xrightarrow{p_2} & P_2 \\ & \searrow_{k} & \downarrow h & \swarrow_{k} & \downarrow f \\ & & N & \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} & N'' \end{array}$$

Como P es proyectivo, existe

$$h : P \longrightarrow N$$

con $\psi' \circ h = f \circ p_2$. Sea $k = h \circ i_2 : P_2 \to N$, entonces $\psi' \circ k = (\psi' \circ h) \circ i_2 = (f \circ p_2) \circ i_2 = f$, ya que $p_2 \circ i_2 = 1_{P_2}$. De manera análoga se demuestra que P_1 es proyectivo

Supongamos que P_1 y P_2 son proyectivos. Sea $\psi' : N \to N''$ un $\Lambda-epimorfismo$ y $h : P_1 \oplus P_2 \longrightarrow N''$ un $\Lambda-morfismo$, definamos $h_1 =$

$h \circ i_1 : P_1 \to N''$ y $h_2 = h \circ i_2 : P_2 \to N''$. Como P_1 y P_2 son proyectivos existen k_1 y k_2 $\Lambda - morfismos$, tales que, $\psi' \circ k_1 = h_1$ y $\psi' \circ k_2 = h_2$.

Por la propiedad (4.6), existe $k : P_1 \oplus P_2 \to N$, tal que, $k \circ i_1 = k_1$ y $k \circ i_2 = k_2$. Entonces

$$\begin{gathered}(\psi' \circ k) \circ i_1 = \psi' \circ k_1 = h_1 = h \circ i_1 \text{ y} \\ (\psi' \circ k) \circ i_2 = \psi' \circ k_2 = h_2 = h \circ i_2\end{gathered}$$

Por la unicidad de (4.6) tenemos que $\psi' \circ k = h$.■

7.5 Teorema. *Sea P un $\Lambda -$ módulo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) *P es un $\Lambda -$ módulo proyectivo.*

(ii) *Cualquier sucesión corta de la forma*

$$N' \overset{f}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} P$$

se escinde.

(iii) *P es sumando directo de un $\Lambda -$ módulo libre.*

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos P proyectivo. Sea una sucesión corta

$$N' \overset{f}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} P$$

Como $g : N \longrightarrow P$ es un $\Lambda - epimorfismo$ y $1_P : P \longrightarrow P$ es un $\Lambda - morfismo$, entonces por (7.2) existe

$$h : P \longrightarrow N$$

tal que, $g \circ h = 1_P$. Por lo tanto la sucesión se escinde.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como P es isomorfo al cociente de un $\Lambda -$ *módulo* libre L, entonces existe un $\Lambda - epimorfismo$ $g : L \to P$. Por lo que podemos considerar la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \ker(g) \to L \xrightarrow{g} P \to 0$$

Por hipótesis existe $h : P \longrightarrow L$ tal que $1_P = g \circ h$, como 1_P es un $\Lambda - monomorfismo$, entonces h es un $\Lambda - monomorfismo$, por (4.11), $L \cong im(h) + \ker(g)$, ya que 1_P es un $\Lambda - isomorfismo$. Como $im(h) \cong P$, se tiene que P es un sumando directo de L.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Como $P \oplus N = L$, para algún $\Lambda -$ *módulo* libre L, como L es libre se tiene que L es proyectivo, por lo tanto P es proyectivo, ya que es sumando directo de L.■

1.7.2 Módulos Inyectivos

Ahora estudiaremos el proceso dual a VII.1

7.6 Definición. Un $\Lambda-$*módulo* I se llamará *Inyectivo*, si para cualquier sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow M' \stackrel{\varphi}{\rightarrow} M \stackrel{\varphi'}{\rightarrow} M'' \rightarrow 0$$

se tenga que la sucesión inducida por $Hom_\Lambda(\_, I)$

$$0 \leftarrow Hom_\Lambda(M', I) \stackrel{\varphi^*}{\leftarrow} Hom_\Lambda(M, I) \stackrel{\varphi'^*}{\leftarrow} Hom_\Lambda(M'', I) \leftarrow 0$$

sea exacta.

Notemos que esta definición repara la exactitud de la proposición (5.17)

7.7 Observación. *A partir* (5.17) *podemos decir que un* $\Lambda-$*módulo* I *es inyectivo si, y sólo si para cualquier* $\varphi : M' \rightarrow M$ $\Lambda - monomorfismo$ *y para cualquier* $\Lambda - morfismo$ $f : M' \rightarrow I$, *existe* $h : M \rightarrow I$ *tal que* $h \circ \varphi = f$, *es decir el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, "h"] \\ & & I \end{tikzcd}$$

7.8 Proposición *Si* $I = \bigoplus_{j \in I} I_j$ *es un* $\Lambda-$*módulo inyectivo, entonces* $\forall j \in I$ *se tiene que* I_j *es un* $\Lambda-$*módulo inyectivo.*

Demostración. Haremos la demostración para $j = 1, 2$, el caso general es análogo. Supongamos que $I = I_1 \bigoplus I_2$ es un $\Lambda-$ *módulo* inyectivo. Probemos que I_1 es inyectivo. Sean $\varphi : M' \rightarrow M$ y $f : M' \longrightarrow I_1$, un $\Lambda - monomorfismo$ y un $\Lambda - morfismo$ respectivamente, también consideremos a $i_1 : I_1 \longrightarrow I$ y $p_1 : I \longrightarrow I_1$, la inclusión y la proyección respectivamente. Entonces como I es inyectivo, existe un $\Lambda - morfismo$ $k : M \rightarrow I$, tal que, $k \circ \varphi = i_1 \circ f$, por lo que considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "i_1 \circ f"] & M \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "h"] & \\ & I_1 \arrow[r, "i_1"] & I \arrow[r, "p_1"] & I_1 \end{tikzcd}$$

Definiendo $h = p_1 \circ k : M \to I_1$, se tiene $h \circ \varphi = (p_1 \circ k) \circ \varphi = (p_1 \circ i_1) \circ f = f$. Por lo tanto I_1 es inyectivo. De manera similar se demuestra que I_2 es inyectivo.■

7.9 Proposición. *Sea $\{I_j\}_{j\in I}$ una familia de $\Lambda -$ módulos inyectivos, entonces el producto directo $\prod_{j\in I} I_j$ es un $\Lambda -$ módulo inyectivo.*

Demostración. Sean $\varphi : M' \longrightarrow M$, $f : M' \longrightarrow \prod_{j\in I} I_j$ un $\Lambda - monomorfismo$ y un $\Lambda - morfismo$ respectivamente, considerando a $i_j : M_j \to \prod_{j\in I} I_j$ y a $p_j : \prod_{j\in I} I_j \to I_j$ los $\Lambda - morfismos$ inclusión y proyección respectivamente, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & M' & \xrightarrow{\varphi} & M & & \\ & & \downarrow_f & & \downarrow_{h_j} & \overset{h}{\searrow} & \\ & & \prod_{j\in I} I_j & \xrightarrow{p_j} & I_j & \xrightarrow{i_j} & \prod_{j\in I} I_j \end{array}$$

para cualquier $j \in I$. Como I_j es inyectivo para cualquier $j \in I$, existe un $\Lambda - morfismo$ $h_j : M \to I_j$, tal que, $h_j \circ \varphi = p_j \circ f$, entonces por (4.7) existe $h : M \to \prod_{j\in I} I_j$, tal que, $h \circ \varphi = f \circ (p_j \circ i_j) = f$. Por lo tanto $\prod_{j\in I} I_j$ es un $\Lambda - módulo$ inyectivo.

7.10 Proposición. *Sea I un $\Lambda -$ módulo inyectivo, entonces cualquier sucesión exacta corta de la forma*

$$0 \quad \to \quad I \quad \xrightarrow{\varphi} \quad M \quad \xrightarrow{\varphi'} \quad M'' \quad \to \quad 0$$

se escinde.

Demostración. Sea

$$0 \quad \to \quad I \quad \xrightarrow{\varphi} \quad M \quad \xrightarrow{\varphi'} \quad M'' \quad \to \quad 0$$

una sucesión exacta, entonces como $\varphi : I \to M$ es un $\Lambda - monomorfismo$ y $1_I : I \to I$ es un $\Lambda - morfismo$, entonces como I es inyectivo existe $h : M \to I$ tal que $h \circ \varphi = 1_I$. Por lo tanto la sucesión se escinde.■

La última afirmación nos hace preguntarnos, *¿El recíproco es cierto?* En efecto la respuesta es sí, pero esto se demostrará en secciones posteriores, ya que necesitamos un poco más de herramienta.

1.7.3 Módulos Planos

Ahora analizaremos un caso especial del funtor $\_\bigotimes_\Lambda F$.

7.11 Definición. *Un $\Lambda-$módulo F se llamará* Plano*, si para cualquier sucesión*

$$0 \;\to\; M' \;\overset{\varphi}{\to}\; M \;\overset{\varphi'}{\to}\; M'' \;\to\; 0$$

exacta corta, se tenga que la sucesión inducida por $\_\bigotimes_\Lambda F$

$$0 \;\to\; M'\otimes_\Lambda F \;\overset{\varphi\otimes 1_F}{\longrightarrow}\; M\otimes_\Lambda F \;\overset{\varphi'\otimes 1_F}{\longrightarrow}\; M''\otimes_\Lambda F \;\to\; 0$$

sea exacta.

7.12 Observación. *Por* (5.8) *un $\Lambda-$ módulo F es plano si, y sólo si para cualquier $\varphi : M' \longrightarrow M$ $\Lambda - monomorfismo$, se tenga que:*

$$\varphi \otimes 1_F : M' \otimes_\Lambda F \longrightarrow M \otimes_\Lambda F$$

sea un $\Lambda - monomorfismo$.

7.13 Proposición. *Para cualquier $\Lambda-$ módulo M, se tiene:*

$$M \otimes_\Lambda \Lambda \cong M$$

Demostración. Consideremos a $\mu : M \times \Lambda \to M$, como $\mu(x,\alpha) = \alpha x$ $\forall\,(x,\alpha) \in M \times \Lambda$, se sigue que μ es una función bilineal, ya que M es un $\Lambda-$ *módulo*. Entonces existe un $\Lambda - morfismo$ $f : M\bigotimes_\Lambda \Lambda \to M$, tal que, $f(x\otimes\alpha) = \alpha x$ $\forall\,(x,\alpha) \in M \times \Lambda$.

Vemos que es un $\Lambda - epimorfismo$, ya que para cualquier $x \in M$, se tiene que $f(x\otimes 1) = 1(x) = x$. Por otro lado si $\alpha x = \beta y$, entonces por la construcción de $M\bigotimes_\Lambda \Lambda$, se sigue $x\otimes\alpha = y\otimes\beta$. Por lo tanto, si $f(x\otimes\alpha) = f(y\otimes\beta)$, entonces $x\otimes\alpha = y\otimes\beta$.■

7.14 Observación. *Por la proposición anterior se tiene que Λ es plano, ya que para cualquier $\Lambda-$ módulo M se tiene $M\otimes_\Lambda \Lambda \cong M$.*

7.15 Proposición. *Sea $F = \bigoplus_{i\in I} F_i$ un $\Lambda-$ módulo, entonces F es un $\Lambda-$ módulo plano si, y solo si $\forall i \in I$ F_i es plano.*

Demostración. Supóngase que F_i es plano para cualquier $i \in I$**.** Sea $\varphi : M' \to M$ un $\Lambda - monomorfismo$, demostremos que $\ker(\varphi\otimes 1_F) = 0$.

Como $\ker(\varphi \otimes 1_F) = \bigoplus_{i\in I} \ker(\varphi \otimes 1_{F_i})$. Pues si $\left(m \otimes (x_i)_{i\in I}\right) \in \ker(\varphi \otimes 1_F)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \otimes 1_F \left(m \otimes (x_i)_{i\in I}\right) = (\varphi(m) \otimes 1_F((x_i)_{i\in I})) \\ &= (\varphi(m) \otimes (x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} (\varphi(m) \otimes x_i) = \sum_{i\in I} (\varphi \otimes 1_{F_i})(m \otimes x_i) \end{aligned}$$

entonces $\varphi(m) \otimes x_i = 0\ \forall i \in I$, por lo que $(m \otimes x_i) \in \ker(\varphi \otimes 1_{F_i})\ \forall i \in I$, por lo tanto $\left(m \otimes (x_i)_{i\in I}\right) \in \bigoplus_{i\in I} \ker(\varphi \otimes 1_{F_i})$. Ahora si $(m \otimes x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \ker(\varphi \otimes 1_{F_i})$, entonces $(\varphi \otimes 1_{F_i})(m \otimes x_i) = 0\ \forall i \in I$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i\in I} (\varphi \otimes 1_{F_i})(m \otimes x_i) = (\varphi(m) \otimes x_i)_{i\in I} = \left(\varphi(m) \otimes (x_i)_{i\in I}\right) \\ &= (\varphi \otimes 1_F)(m \otimes (x_i)_{i\in I}) = (\varphi \otimes 1_F)((m \otimes x)_{i\in I}) \end{aligned}$$

entonces $(m \otimes x_i)_{i\in I} \in \ker(\varphi \otimes 1_F)$.

Como $\forall i \in I\ \ker(\varphi \otimes 1_{F_i}) = 0$, entonces

$$\ker(\varphi \otimes 1_F) = \bigoplus_{i\in I} \ker(\varphi \otimes 1_{F_i}) = 0$$

Supongamos $F = \bigoplus_{i\in I} F_i$ plano, mostremos que F_i es plano para cualquier $i \in I$. Sea $\varphi : M' \longrightarrow M$ un $\Lambda - monomorfismo$, y mostremos que $\ker(\varphi \otimes 1_{F_i}) = 0$. Por la propiedad universal de la suma directa el $\Lambda - morfismo$

$$\varphi \otimes 1_F : \bigoplus_{i\in I} M' \otimes_\Lambda F_i = M' \otimes_\Lambda F \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M \otimes_\Lambda F_i = M' \otimes_\Lambda F$$

está bien definido, además por ser F plano se tiene: $\ker(\varphi \otimes 1_F) = 0$, ahora por la observación pasada como $0 = \ker(\varphi \otimes 1_F) = \bigoplus_{i\in I} \ker(\varphi \otimes 1_{F_i})$, entonces $\ker(\varphi \otimes 1_{F_i}) = 0\ \forall i \in I$, es decir, F_i es plano $\forall i \in I$.■

7.16 Corolario. *Cualquier $\Lambda -$ módulo P proyectivo es plano.*

Demostración. Sea P un $\Lambda - m\acute{o}dulo$ proyectivo, entonces existe un $\Lambda - m\acute{o}dulo$ libre L, tal que, $P \oplus N = L$, para algún $\Lambda - m\acute{o}dulo\ N$.

Por otro lado como $L = \bigoplus_{i\in I} \Lambda$, entonces L es plano, ya que Λ es plano. Entonces de la proposición anterior se sigue que P es plano.■

7.17 Proposición. Si $\left(F_i, \varphi_i^j\right)_{i,j\in I}$ es un sistema directo de $\Lambda - m\acute{o}dulos$ planos. Entonces $\varinjlim \left(F_i, \varphi_i^j\right)$ es un $\Lambda - m\acute{o}dulo$ plano.

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$$

una sucesión exacta izquierda de $\Lambda-$ *módulos*. Como cada F_i es plano, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow F_i \otimes_\Lambda M' \overset{1_{F_i}\otimes f}{\longrightarrow} F_i \otimes_\Lambda M$$

es exacta. Considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \underset{\rightarrow}{lím}\,(F_i \otimes_\Lambda M') & \overset{\overline{f}}{\longrightarrow} & \underset{\rightarrow}{lím}\,(F_i \otimes_\Lambda M) \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \underset{\rightarrow}{lím}\,(F_i) \otimes_\Lambda M' & \underset{1\otimes f}{\longrightarrow} & \underset{\rightarrow}{lím}\,(F_i) \otimes_\Lambda M \end{array}$$

Donde α, β son los isomorfismos definidos en (6.8) y $\overline{f}$ es el $\Lambda - morfismo$ inducido por el sistema directo $(1_{F_i} \otimes f)$ y 1 es el $\Lambda - morfismo$ identidad en $\underset{\rightarrow}{lím}\,(F_i)$. Como $\overline{f}$ es una función inyectiva por (6.9), y $1 \otimes f = \beta f \alpha^{-1}$, entonces $1 \otimes f$ es inyectiva, pues es composición de funciones inyectivas. Por lo tanto $\underset{\rightarrow}{lím}\left(F_i, \varphi_i^j\right)$ es plano. ■

7.18 Corolario. Sea Λ un dominio entero con $Q = Frac\,(\Lambda)$. Entonces
(i) Q es un $\Lambda -$ *módulo* plano.
(ii) Si cualquier submódulo finitamente generado de un $\Lambda -$ *módulo* M es plano, entonces es plano entonces Mes plano.

Demostración. (i) Como Q es límite directo de submódulos cíclicos, y cada uno de ellos es isomorfo a Λ. Entonces como Λ es plano, entonces $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$ es plano, para cualquier $r \in \Lambda$, $r \neq 0$. Por lo tanto Q es plano.

(ii) Como M es un límite directo de submódulos finitamente generados, y por hipótesis cada submódulo finitamente es plano, entonces M es plano. ■

Capítulo 2

Teoría de Categorías

Las categorías y los funtores surgen como necesidad de unificar y simplificar sistemas matemáticos. Estos conceptos fueron introducidos en la década de los 40 por Eilenberg y Mac Lane. Dicho de una manera informal, una categoría consiste en una clase de "objetos" y otra de "morfismos" combinados de manera adecuada, y un funtor es la forma de relacionar dos categorías.

En el presente capítulo expondremos el desarrollo de esta teoría para así poder desarrollar la teoría de funtores derivados, y dar material suficiente para poder resolver algunos puntos pendientes que quedaron del capítulo anterior.

2.1 Fundamentos Lógicos.

Es común en la práctica de las matemáticas considerar colecciones bastantes "grandes", como: "todos los grupos", "todos los espacios topológicos", "todos los conjuntos", "todos los $\Lambda-$módulos",..., etc. Por ejemplo en el capítulo anterior podemos definir a un $\Lambda - módulo$ proyectivo, como: Un $\Lambda - módulo$ P es proyectivo si, y sólo si para cualquier $f : M \to M''$ $\Lambda - epimorfismo$ y $g : P \to M''$ $\Lambda - morfismo$, existe un $\Lambda - morfismo$ $h : M \to P$, tal que, $f = g \circ h$. Esta definición nos lleva a considerar una lista de cuantificadores universales como:

$$\forall M,\ \forall M'',\ \forall f,\ \forall g,\ ..$$

Pero esta definición nos causa un pequeño problema, visto desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos, ya que las variables M, M'' pertenecen a la colección de $\Lambda - m\acute{o}dulos$, que esta colección no es un conjunto, ya que a cada conjunto le podemos dotar de una estructura de $\Lambda - m\acute{o}dulo$, y la colección de los conjuntos no es un conjunto. Este último hecho se sigue de la siguiente proposición.

1.1 Proposición. *No existe un conjunto S tal que*

$$x \in S \iff x \text{ es conjunto}$$

Demostración. Supongamos que existe dicho conjunto S. Como $x \notin x$, está escrita en lenguaje de la teoría de los conjuntos definamos:

$$T = \{x \in S : \ x \notin x\}$$

de manera inmediata se tiene que T es un subconjunto de S, por lo que T es un conjunto. Además de que si $T \in T$, entonces $T \notin T$, o bien si $T \notin T$, entonces $T \in T$. Por lo tanto $T \in T$ si, y sólo si $T \notin T$ **!.**

Por lo tanto S no es conjunto.■

Como nuestro propósito dentro de la Teoría de Categorías será trabajar con colecciones bastantes grandes, como por ejemplo: "La colección de todos los grupos", "La colección de todos los $\Lambda - m\acute{o}dulos$", "La colección de todos los espacios topológicos", "La colección de todos los conjuntos",..., etc. Por lo que nos va a ser de suma importancia poner atención a los problemas de tipo de "tamaño" de las colecciones.

Por tal motivo, en primera estancia daremos por asentado la existencia de los "*Universos*", los cuales van a ser conjuntos que tratan de comportarse como la colección de todos los conjuntos.

1.2 Definición. *Un* universo U *es un conjunto no vacío tal que cumple las siguientes propiedades:*

(i) Si $y \in x$ y $x \in U$, entonces $y \in U$.

(ii) Si $I \in U$ y para cualquier $i \in I$ $x_i \in U$, entonces $\bigcup_{i \in I} x_i \in U$.

(iii) Si $x \in U$, entonces $P(x) \in U$.

(iv) Si $x \in U$ y $f : x \to y$ es una función suprayectiva, entonces $y \in U$.

(v) $\omega \in U$.

Donde ω es el conjunto de los ordinales finitos (números naturales) y $P(x)$ denota al conjunto potencia de x.

De la definición anterior se tiene la siguiente proposición.

1.3 Proposición. *Sea U un universo, entonces U cumple lo siguiente:*
(i) *Si $y \in U$ y $x \subseteq y$, entonces $x \in U$.*
(ii) *Si $x, y \in U$, entonces $\{x, y\} \in U$.*
(iii) *Si $x, y \in U$, entonces $x \times y \in U$.*
(iv) *Si $x, y \in U$, entonces $x^y \in U$.*
Demostración. Sean $x, y \in U$.

(i) Supongamos $x \subseteq y$. Si $x = \varnothing$, como $x \in \omega$ y $\omega \in U$, por ser U un universo se tiene $x \in U$. Por otro lado si $x \neq \varnothing$, existe $z \in x$, entonces tomando dicha z, definamos

$$\begin{array}{rccc} f: & x & \longrightarrow & y \\ & t & \longrightarrow & \begin{array}{c} f(t) = t \text{ si } t \in y \\ f(t) = z \text{ si } t \notin y \end{array} \end{array}$$

Por la definición de f, se tiene que f es una función suprayectiva, por lo tanto $x \in U$.

(ii) Como $x \in P(x)$ y $y \in P(y)$, entonces $\{x, y\} \in P(x) \cup P(y)$. Por otro lado como U es universo, entonces $P(x) \cup P(y) \in U$. Por lo tanto $\{x, y\} \in U$.

(iii) Como para cualesquiera $x' \in x$ y $y' \in y$, se tiene por (i) y (ii) que $\{x'\} \in U$ y $\{x', y'\} \in U$, por lo que $\{\{x'\}, \{x', y'\}\} \in U$. Como

$$x \times y = \left\{\left\{\left\{x'\right\}, \left\{x', y'\right\}\right\} : x' \in x \text{ y } y' \in y\right\}$$

de esto se sigue que

$$x \times y = \bigcup_{x' \in x,\ y' \in y} \left\{\left\{x'\right\}, \left\{x', y'\right\}\right\}$$

Por lo tanto como U es universo se sigue $x \times y \in U$.

(iv) Como $x^y \subseteq x \times y$, entonces por (iii) y (i) se tiene $x^y \in U$.■

A continuación introduzcamos un axioma que nos relacione a los conjuntos y a los universos.

1.4 Axioma (Universo). *Cualquier conjunto pertenece a algún universo.*

Observamos que tomando este axioma como válido, se tiene que para cualquier conjunto x, existe un universo U tal que $x \in U$, ahora notamos que los elementos de dicho universo deben ser "conjuntos suficientemente pequeños", esto debido a que si $y \in U$ y $z \subseteq y$ entonces $z \in U$. Por lo anterior, dado un universo U, llamaremos con el nombre de *"conjuntos pequeños"* a los elementos de U. Lo que nos lleva a la siguiente proposición.

1.5 Proposición. *Existe un conjunto S con la siguiente propiedad.*

$$x \in S \Leftrightarrow x \text{ es un conjunto pequeño.}$$

Demostración. Tomando $S = U$, de donde U el universo al que pertenecen los conjuntos pequeños. ■

Considerando el resultado anterior, nos lleva a considerar colecciones como: la colección de pequeños grupos, pequeños espacios topológicos, conjuntos pequeños, ..., etc. Ya que por ejemplo: si hablamos del universo de los grupos pequeños estos deben ser pequeños (en cuanto tamaño), pues un grupo pequeño G es una pareja $(G, +)$, donde G es un conjunto pequeño y $+ : G \times G \longrightarrow G$, por lo que $G = (G, +)$ es un conjunto pequeño.

A partir de estos hechos sólo podemos considerar colecciones cuyos objetos son pequeños.

Otra alternativa para manejar estos problemas de tamaño, se puede recurrir a la Teoría de Conjuntos y Clases de Gödel-Bernays. Pues recordemos que en la teoría de Zermelo-Fränkel las nociones son la de "conjunto" y la relación de pertenencia $\in$, pero en Gödel-Bernays se considera una idea más primitiva, que es la noción de clase (a la que podemos pensar como un "conjunto grande"); ésta definición nos conduce a considerar que un conjunto es una clase y que:

1.6 Axioma (de Clase). *Una clase es conjunto si ésta pertenece a otra clase.*

El trabajar con clases, desde luego nos lleva a preguntas del tipo ¿Cómo podemos construir a las clases?, para dar una respuesta a esto se consideraremos el siguiente axioma

1.7 Axioma (Esquema de Comprensión). *Sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula escrita en leguaje de la Teoría de Conjuntos, entonces existe una clase A, tal que, $(x_1, ..., x_n) \in A$ si, y sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ se cumple.*

Por ejemplo existe una clase A con la propiedad:

$$(G,+) \in A \Leftrightarrow (G,+) \text{ es un "grupo".}$$

donde es un "grupo" es la abreviación a que $(G,+)$ cumpla con la axiomática de grupo. De este hecho se deduce que la clase de todos los grupos está bien definida. De igual manera se obtiene que las clases de "espacios topológicos", "$\Lambda - \textit{módulos}$", "conjuntos",...etc., están bien definidas.

Para la Teoría de Categorías, se puede trabajar considerando la existencia de universos o bien trabajar con la Teoría de Gödel-Bernays. Pero para el presente trabajo se utilizará la Teoría Gödel-Bernays, ya que nuestro objetivo es estudiar "colecciones bastantes grandes".

2.2 Categorías

2.1 Definición. *Una Categoría* $\mathbf{C}$ *consiste de lo siguiente:*

(i) *Una clase* $|\mathbf{C}|$, *cuyos elementos son llamados objetos de la categoría* $\mathbf{C}$, *o simplemente objetos.*

(ii) *Para cualesquiera* $A, B \in |\mathbf{C}|$, *existe un conjunto* $\mathbf{C}(A,B)$, *cuyos elementos son llamados morfismos o flechas de* A *en* B.

(iii) *Para cualesquiera* $A, B, C, D \in |\mathbf{C}|$, $\mathbf{C}(A,B) = \mathbf{C}(C,D)$ *si, y sólo si* $A = C$ *y* $B = D$.

(iv) *Para cualesquiera* $A, B, C \in |\mathbf{C}|$, *existe una operación binaria*

$$\circ : \mathbf{C}(A,B) \times \mathbf{C}(B,C) \longrightarrow \mathbf{C}(A,C)$$

tal que:

(a) *Para cualesquiera* $f \in \mathbf{C}(A,B)$, $g \in \mathbf{C}(B,C)$, $h \in \mathbf{C}(C,D)$, *se cumple*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(b) *Para cualquier* $A \in |\mathbf{C}|$, *existe* $1_A \in \mathbf{C}(A,A)$ *tal que para cualesquiera* $f \in \mathbf{C}(A,B)$ *y* $g \in \mathbf{C}(A',A)$, *se tiene:*

$$f \circ 1_A = f \qquad \text{y} \qquad 1_A \circ g = g$$

a 1_A *se le suele llamar la identidad en* A.

Dado $f \in \mathbf{C}(A,B)$, lo denotaremos por $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$; también diremos que A es el *dominio* de f, y que B es el *codominio* de f. A su vez denotaremos por $\mathbf{C}^{mor} = \bigcup_{A,B\in|\mathbf{C}|} \mathbf{C}(A,B)$.

Diremos que una categoría $\mathbf{C}$ es pequeña, si $|\mathbf{C}|$ es un conjunto.

A continuación veamos algunos ejemplos de categorías, así también como la notación que se utilizará.

2.2 Ejemplo. **Set** *denotará la categoría de todos conjuntos, cuyos objetos son todos los conjuntos y los morfismos son funciones de un conjunto en otro conjunto.*

2.3 Ejemplo. **Top** *denotará la categoría de todos espacios topológicos. Sus objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas-*

2.4 Ejemplo. **Gr** *denotará a la categoría de todos los grupos. Donde sus objetos serán los grupos, y sus morfismos son los homomorfismos de grupos.*

2.5 Ejemplo. *Dado $\langle X, < \rangle$ un conjunto preordenado, definimos a X como la categoría cuyos objetos son los elementos de X, y para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene $X(x,y) = \{(x,y)\}$.*

De manera semejante denotaremos por **Ab**, **An**, $\mathbf{An}_1$, $_{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ y $\mathbf{EV}_K$, denotan a las categorías de los grupos abelianos, anillos, anillos con 1, $\Lambda-$módulos y $k-$espacios vectoriales, con morfismos homomorfismos de grupos, anillos, $\Lambda-$morfismos, y transformaciones lineales respectivamente.

2.6 Ejemplo. *Sea Λ un anillo conmutativo, denotemos a $Mod_\Lambda^\mathbb{Z}$, cuyos objetos son familias de Λ-módulos $M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, con morfismos $p : M \longrightarrow N = \{p_i : M_i \longrightarrow N_{i+j}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de grado j entre objetos M y N. Vemos que $Mod_\Lambda^\mathbb{Z}$ forma una categoría.*

Demostración.

(i) $\left|\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}\right| = \left\{M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : M_i \text{ es } \Lambda - \textit{módulo}\right\}$ forma una clase.

(ii) Para cualesquiera $M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$,$N = \{N_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \left|\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}\right|$, la colección $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,N) = \{p : M \to N : p \text{ es de grado } j, \text{ p.a } j \in \mathbb{Z}\}$, es un conjunto, ya que dicha colección es una colección de $\Lambda - morfismos$.

(iii) Pues $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,N) = \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(O,P)$ si, y solo si para cualquier $f \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,N)$, se tenga que $f \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(O,P)$, y viceversa, es decir, para cualquier f

$$\{f_i : M_i \longrightarrow N_{i+j}\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{f_i : O_i \longrightarrow P_{i+j}\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

es decir $f_i : M_i \longrightarrow N_{i+j} = f_i : O_i \longrightarrow P_{i+j}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, es decir, si, y solo si $M_i = O_i$ y $N_i = P_i$ $\forall i$

(iv) Para cualesquiera $f \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,N)$ y $g \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(N,O)$, de grado j y k respectivamente. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, y $M_i \overset{f_i}{\to} N_{i+j} \overset{g_{i+j}}{\to} O_{(i+j)+k}$ $\Lambda - morfismos$, se tiene que $g_{i+j} \circ f_i : M_i \longrightarrow O_{(i+j)+k}$ es un $\Lambda - morfismo$. Por lo tanto denotando

$$g \circ f = \left\{g_{i+j} \circ f_i : M_i \longrightarrow O_{(i+j)+k}\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

Vemos que $g \circ f$ es un morfismo de grado $j+k$, entonces podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,N) \times \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(N,O) & \longrightarrow & \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,O) \\ & (f,g) & \longrightarrow & g \circ f \end{array}$$

Ahora por la definición de $\circ$, se siguen los siguientes resultados:

(a) Para cualesquiera $f \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,N)$, $g \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(N,O)$ y $h \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(O,P)$, se tiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(b) Vemos que $1_M = \{1_{M_i} : M_i \to M_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,M)$, además para cualesquiera $f \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,N)$ y $f' \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M',M)$ de grado j y k respectivamente, se tiene que $1_M \circ f' = \{1_{M_{i+k}} \circ f_i : M'_i \to M_{i+k}\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{f'_i : M'_i \to M_{i+k}\} = f'$ y $f \circ 1_M = \{f_i \circ 1_{M_i} : M_i \to N_{i+j}\} = \{f_i : M_i \to N_{i+j}\} = f$. Por lo tanto $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M,M)$ tiene identidad.■

Para finalizar esta sección una última definición.

2.7 Definición. *Una categoría* $\mathbf{C}$ *se llamará* subcategoría *de una categoría* $\mathbf{D}$*, si:*

(i) *Los objetos de* $\mathbf{C}$*, son objetos de* $\mathbf{D}$*, que denotaremos por* $|\mathbf{C}| \subseteq |\mathbf{D}|$.

(ii) $\mathbf{C}(A,B) \subseteq \mathbf{D}(A,B)$*, para cualesquiera* $A,B \in |\mathbf{C}|$.

(iii) *Si* $f \in \mathbf{C}(A,B)$ *y* $g \in \mathbf{C}(B,C)$*, entonces* $g \circ f \in \mathbf{C}(A,C)$*. Para cualesquiera* $A,B,C \in |\mathbf{C}|$.

(iv) *Para cada* $A \in |\mathbf{C}|$ 1_A *es la misma en* $\mathbf{C}$ *que en* $\mathbf{D}$.

Diremos que $\mathbf{C}$ es una *subcategoría plena* de $\mathbf{D}$, si $\mathbf{C}$ es una subcategoría de $\mathbf{D}$, y para cualesquiera $A,B \in |\mathbf{C}|$, se tiene $\mathbf{C}(A,B) = \mathbf{D}(A,B)$.

De la definición anterior se tiene que $\mathbf{Ab}$.es una subcategoría plena de $\mathbf{Gr}$. Por último cabe mencionar que $\mathbf{Ab}, \mathbf{Gr}$, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{EV}_K$, son subcategorías de $\mathbf{Set}$, pero estas no son plenas.

2.3 Funtores

Ahora como es de esperarse, vamos a dar una forma de relacionar dos categorías.

3.1 Definición. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías. Un funtor covariante*

$$\mathbf{F}: \quad \mathbf{C} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}$$

de la categoría $\mathbf{C}$ *a la categoría* $\mathbf{D}$, *es una regla de correspondencia que cumple lo siguiente:*

(i) *Para cada objeto* $A \in |\mathbf{C}|$ *le corresponde un único objeto* $\mathbf{F}(A) \in |\mathbf{D}|$.

(ii) *Para cada morfismo* $\left(A \xrightarrow{f} B\right) \in \mathbf{C}(A, B)$ *un morfismo*

$$\left(\mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B)\right) \in \mathbf{D}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B))$$

que satisface las siguientes condiciones:

(iii) $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f)$

(iv) $\mathbf{F}(1_A) = 1_{\mathbf{F}(A)}$

3.2 Definición. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías. Diremos que*

$$\mathbf{F}: \quad \mathbf{C} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}$$

es un funtor contravariante, *si se satisface* (i) *y* (iv) *de la definición anterior, y además se dan las siguientes condiciones:*

(ii) *A cada morfismo* $\left(A \xrightarrow{f} B\right) \in \mathbf{C}(A, B)$, *le asocia un morfismo*

$$\left(\mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A)\right) \in \mathbf{D}(\mathbf{F}(B), \mathbf{F}(A))$$

(iii) $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(g)$

Dado $\mathbf{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtor covariante (contravariante), decimos que $\mathbf{C}$ es el dominio de $\mathbf{F}$, y que $\mathbf{D}$ es el codominio de $\mathbf{F}$.

A continuación daremos algunos ejemplos de funtores y estableceremos notación para algunos de ellos.

3.3 Ejemplo. *Dada una categoría* $\mathbf{C}$*, consideremos a*

$$\begin{array}{cccc} 1_{\mathbf{C}}: & \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ & A & \rightarrow & A \\ & A \overset{f}{\rightarrow} B & \rightarrow & A \overset{f}{\rightarrow} B \end{array}$$

para cualesquiera $A \in |\mathbf{C}|$ *y* $A \overset{f}{\rightarrow} B \in \mathbf{C}^{mor}$*. Es evidente que* $1_{\mathbf{C}}$ *es un funtor covariante, al cual llamaremos* funtor identidad *en* $\mathbf{C}$*.*

3.4 Ejemplo. *Definamos un funtor covariante*

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{F}: & \mathbf{Set} & \rightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \\ & X & \rightarrow & F(X) \\ & X \overset{f}{\rightarrow} Y & \rightarrow & F(X) \overset{F(f)}{\rightarrow} F(Y) \end{array}$$

donde $\mathbf{F}(X)$ *denota al* $\Lambda - módulo$ *con base en conjunto* X*, y* $\mathbf{F}(X) \overset{F(f)}{\rightarrow} \mathbf{F}(Y)$ *es el único* $\Lambda - morfismo$ *obtenido al extender* $X \overset{f}{\rightarrow} Y$*. A través de estas reglas de asociación se sigue que* $\mathbf{F}$ *es un funtor covariante.*

3.5 Ejemplo. *Sea* Λ *un anillo conmutativo con* $1 \neq 0$*, y sea* M *un* $\Lambda - módulo$*. Definamos*

$$\begin{array}{cccc} Hom_{\Lambda}(M, \_): & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \\ & N & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(M, N) \\ & N' \overset{\psi}{\rightarrow} N & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(M, N') \overset{\psi_*}{\rightarrow} Hom_{\Lambda}(M, N) \end{array}$$

para todo $N \in |{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}|$ *y* $N' \overset{\psi}{\rightarrow} N \in_{\mathbf{\Lambda}} Mod^{mor}$*. Por* $(I.5.19)$ *se sigue que* $Hom_{\Lambda}(M, \_)$ *es un funtor covariante.*

3.6 Ejemplo. *Sea* Λ *un anillo conmutativo con* $1 \neq 0$*, y sea* N *un* $\Lambda - módulo$*. Definamos*

$$\begin{array}{cccc} Hom_{\Lambda}(\_, N): & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \\ & M & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(M, N) \\ & M' \overset{\varphi}{\longrightarrow} M & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(M', N) \overset{\varphi^*}{\longleftarrow} Hom_{\Lambda}(M, N) \end{array}$$

para cualesquiera $M \in |{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}|$ *y* $M' \overset{\varphi}{\longrightarrow} M \in_{\mathbf{\Lambda}} Mod^{mor}$*. Por* $(I.5.18)$ *se sigue que* $Hom_{\Lambda}(M, \_)$ *es un funtor contravariante*

3.7 Ejemplo. *Sea* Λ *un anillo conmutativo con* $1 \neq 0$ *y* M *un* $\Lambda-$*módulo, definamos:*

$$\begin{array}{rccc} M \bigotimes_\Lambda \_ : & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \\ & N & \rightarrow & M \bigotimes_\Lambda N \\ & N' \xrightarrow{\psi} N & \rightarrow & M \bigotimes_\Lambda N' \xrightarrow{1_M \otimes \psi} M \bigotimes_\Lambda N \end{array}$$

para cualesquiera $N \in |{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}|$ *y* $(N' \xrightarrow{\psi} N) \in_{\mathbf{\Lambda}} Mod^{mor}$*. Por* $(I.5.9)$ *Es un funtor covariante.*

3.8 Ejemplo. *Sea* Λ *un anillo conmutativo con* $1 \neq 0$ *y* N *un* $\Lambda-$*módulo, definamos*

$$\begin{array}{rccc} \_ \bigotimes_\Lambda N : & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \\ & M & \rightarrow & M \bigotimes_\Lambda N \\ & M' \xrightarrow{\varphi} M & \rightarrow & M' \bigotimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi \otimes 1_N} M \bigotimes_\Lambda N \end{array}$$

para cualesquiera $M \in |{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}|$ *y* $(M' \xrightarrow{\varphi} M) \in_{\mathbf{\Lambda}} Mod^{mor}$*. Por* $(I.5.10)$ *Es un funtor covariante.*

3.9 Ejemplo. *Recordemos que para cualquier* $\Lambda-$*módulo* M*, se denota al submódulo de torsión de* M *con* τM*. Ahora definamos*

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\tau}\_ : & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \\ & M & \rightarrow & \tau M \\ & M \xrightarrow{f} N & \rightarrow & \tau M \xrightarrow{f\restriction_{\tau M}} \tau N \end{array}$$

para cualesquiera $M \in |{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}|$ *y* $(M \xrightarrow{f} N) \in_{\mathbf{\Lambda}} Mod^{mor}$*. Por la construcción de* $\boldsymbol{\tau}\_$*, se sigue que* $\boldsymbol{\tau}\_$ *es un funtor covariante.*

Para los funtores definidos en (3.5) a (3.8), si se trabajará con un anillo Λ no conmutativo, se tendría que su codominio cambiaría a la categoría **Ab**, por lo que se tendría definidos los funtores covariantes: $Hom_\Lambda(M, \_) :_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ y $Hom_\Lambda(\_, N) :_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Gr}$.

3.10 Definición. *Diremos que un funtor covariante* $\mathbf{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ *es* fiel (pleno)*, si para cualesquiera* $A, A' \in |\mathbf{C}|$*, la función:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}(A, A') & \longrightarrow & \mathbf{C}(F(A), F(A')) \\ f & \longrightarrow & \mathbf{F}(f) \end{array}$$

es inyectiva (suprayectiva).

3.11 Definición. Diremos que un funtor contravariante $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es *fiel (pleno),* si para cualesquiera $A, A' \in |\mathbf{C}|$, la función:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}\,(A, A') & \longrightarrow & \mathbf{C}\,(F\,(A')\,, F\,(A)) \\ f & \longrightarrow & \mathbf{F}\,(f) \end{array}$$

es inyectiva (suprayectiva).

3.12 Definición. *Diremos que un funtor covariante (contravariante)*

$$\mathbf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

es un encaje pleno, si:
(i) $\mathbf{F}$ *es fiel*
(ii) $\mathbf{F}$ *es pleno*
(iii) $\mathbf{F}$ *es inyectivo en objetos.*

Diremos que una categoría $\mathbf{C}$ *se encaja plenamente* en una categoría $\mathbf{D}$**,** si existe un funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, que sea un encaje pleno.

Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $\mathbf{C}'$ una subcategoría de $\mathbf{C}$, considerando la asignación

$$\begin{array}{rccc} i_{\mathbf{C}'} : & \mathbf{C}' & \to & \mathbf{C} \\ & A & \to & A \\ & A \xrightarrow{f} B & \to & A \xrightarrow{f} B \end{array}$$

resulta ser un funtor covariante. Ahora si $\mathbf{C}'$ es una subcategoría plena de $\mathbf{C}$, se tiene que $i_{\mathbf{C}'}$ es un encaje pleno. De este último hecho se sigue que $\mathbf{Ab}$ se encaja plenamente en $\mathbf{Gr}$.

Para terminar esta sección demos un ejemplo de una categoría construida a través de funtores.

3.13 Definición. *Sea* $Top\,(\mathbf{X})$ *la categoría cuyos objetos son los abiertos de un espacio topológico* X *y cuyos morfismos son las funciones continuas de inclusión. Una* pregavilla de grupos abelianos *es un funtor covariante de* $Top\,(\mathbf{X})$ *a Ab.*

3.14 Definición. *Una* gavilla de grupos abelianos *es una pregavilla que cumple los siguientes dos axiomas:*

(i) Si $(U_i)_{i \in I}$ es una cubierta abierta de un conjunto abierto U, y si $s, t \in F(U)$ son tales que $s \upharpoonright_{U_i} = t \upharpoonright_{U_i}$ para cada $i \in I$, entonces $s = t$.

(ii) Si $(U_i)_{i \in I}$ es una cubierta abierta de un conjunto abierto U, y una colección $s_i \in F(U_i)$ para cada $i \in I$, tal que, $s_i \upharpoonright_{U_i \cap U_j} = s_j \upharpoonright_{U_i \cap U_j}$ para cada $i, j \in I$, existe un único $s \in F(U)$, tal que, $s_i = s \upharpoonright_{U_i}$ $\forall\ i \in I$.

3.15 Ejemplo. *Denotaremos con Gav a la categoría de gavillas de grupos abelianos.*

2.4 Morfismos y Objetos

A continuación hablaremos un poco de las propiedades de los morfismos y los objetos de una categoría.

Muchas veces para $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $A \xrightarrow{h} C$ morfismos de una categoría $\mathbf{C}$, diremos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

conmuta, si $g \circ f = h$.

4.1 Proposición. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $|A| \in \mathbf{C}$, entonces $A \xrightarrow{1_A} A$ es única.*

Demostración. Supongamos que existe $1'_A \in \mathbf{C}(A, A)$ otro morfismo identidad en A, entonces $1'_A = 1_A \circ 1'_A$, pues 1_A es identidad en A, por otro lado $1_A \circ 1'_A = 1_A$, pues $1'_A$ es identidad en A. Por lo tanto $1_A = 1'_A$.■

4.2 Definición. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría, diremos que un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es:*

(i) Monomorfismo *o simplemente* mono*, si para cualesquiera $g_1, g_2 \in C(A', A)$ tales que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces $g_1 = g_2$.*

(ii) Epimorfismo *o simplemente* epi*, si para cualesquiera $g_1, g_2 \in C(B, B'')$ tales que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, entonces $g_1 = g_2$.*

(iii) Isomorfismo *o simplemente* iso*, si existe un morfismo $f^{-1} \in C(B, A)$ tal que. $f \circ f^{-1} = 1_B$ y $f^{-1} \circ f = 1_A$.*

Diremos que dos objetos $A, B \in |\mathbf{C}|$, *son isomorfos*, si existe un isomorfismo $A \xrightarrow{f} B$, en este caso se denotará con $A \cong B$.

Como para cualquier $A \in |\mathbf{C}|$, se tiene que $1_A \circ 1_A = 1_A$, entonces se tiene que la identidad en A es un isomorfismo, por lo que podemos decir que: $A \cong A$.

4.3 Ejemplos.
(*i*) *En* **Set**, *los monomorfismos son las funciones inyectivas, mientras que los epimorfismos son las funciones suprayectivas, y los isomorfismos son las funciones biyectivas.*
(*ii*) *Del capítulo I vemos que en* $_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ *los monomorfismos son los* $\Lambda - monomorfismos$, *mientras que los epimorfismos son los* $\Lambda - epimorfismos$, *y los isomorfismos son los* $\Lambda - isomorfismos$.
(*iii*) *En* **Gr** *y* **Ab**, *los monos son los homomorfismos inyectivos, los epis son los homomorfismos suprayectivos, y los isos son los homomorfismos biyectivos.*

Del capítulo I podemos decir que los monomorfismos, los epimorfismo, y los isomorfismos, resultan ser generalizaciones de los $\Lambda - monomorfismos$, $\Lambda - epimorfismos$, $\Lambda - isomorfismos$, respectivamente. A partir de este hecho resulta inmediata la siguiente proposición.

4.4 Proposición. *Sea* **C** *una categoría, si:*
(*i*) $\left(A \xrightarrow{f} B\right), \left(B \xrightarrow{g} C\right) \in \mathbf{C}^{mor}$ *son monomorfismos, entonces* $A \xrightarrow{g \circ f} C$ *es un monomorfismo.*
(*ii*) $\left(A \xrightarrow{f} B\right), \left(B \xrightarrow{g} C\right) \in \mathbf{C}^{mor}$ *son epimorfismos, entonces* $A \xrightarrow{g \circ f} C$ *es un epimorfismo.*
(*iii*) $\left(A \xrightarrow{f} B\right), \left(B \xrightarrow{g} C\right) \in \mathbf{C}^{mor}$ *son isomorfismos, entonces* $A \xrightarrow{g \circ f} C$ *es un isomorfismo.*$\blacksquare$

De la proposición anterior es inmediato pensar que la "relación" de $\cong$, en la clase de $|\mathbf{C}|$, juega un papel parecido a una relación de equivalencia. Por lo tanto, si $A, B \in |\mathbf{C}|$, $A \cong B$, entonces de cierta manera A es igual a B.

4.5 Proposición. *Sea* **C** *una categoría y* $A \xrightarrow{f} B$ *un isomorfismo, entonces* $f^{-1} \in C(B, A)$ *es único.*

Demostración. Supongamos que existe $g \in \mathbf{C}\,(B, A)$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$. Entonces $g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ f^{-1})$, por $(4, 1)$, entonces $g = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = 1_A \circ f^{-1} = f^{-1}$. Por lo tanto $g = f^{-1}$.■

De la proposición anterior se sigue si $A \xrightarrow{f} B$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} \in \mathbf{C}\,(A, B)$ es un isomorfismo.

4.6 Proposición. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría y* $A \xrightarrow{f} B$ *un isomorfismo, entonces* f *es monomorfismo y epimorfismo.*

Demostración. Veamos que f es un monomorfismo. Sean $g_1, g_2 \in \mathbf{C}\,(A', A)$ tales que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces existe $f^{-1} \in \mathbf{C}\,(B, A)$ puesto que f es isomorfismo, por lo que $f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2)$, entonces $(f^{-1} \circ f) \circ g_1 = (f^{-1} \circ f) \circ g_2$. Por lo tanto $g_1 = g_2$.

Ahora veamos que f es un epimorfismo. Sean $g_1, g_2 \in \mathbf{C}(B, B'')$, tales que, $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, entonces $(g_1 \circ f) \circ f^{-1} = (g_2 \circ f) \circ f^{-1}$, entonces $g_1 \circ (f \circ f^{-1}) = g_2(f \circ f^{-1})$. Por lo tanto $g_1 = g_2$. ■

A continuación estudiaremos algunos tipos de objetos.

4.7 Definición. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría, un* $A \in |\mathbf{C}|$ *se llamará* inicial*, si para cada* $B \in |\mathbf{C}|$*, existe un único morfismo* $A \xrightarrow{f} B$*. Por otro lado, diremos que un objeto* $B \in |\mathbf{C}|$ *es* terminal*, si para cada* $A \in |\mathbf{C}|$ *existe un único morfismo* $A \xrightarrow{g} B$*.*

4.8 Proposición. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría y* C *un objeto inicial (terminal), entonces el único morfismo de* C *en* C*, es la identidad.*

Demostración. Como C es inicial (terminal), entonces existe un único morfismo $f \in \mathbf{C}\,(C, C)$, por otro lado como $1_C \in \mathbf{C}\,(C, C)$, entonces $f = 1_C$. ■

4.9 Proposición. *Para cualesquiera dos objetos iniciales (terminales) son isomorfos.*

Demostración. Sean $A, B \in |\mathbf{C}|$ dos objetos iniciales, como A y B son iniciales, entonces existen $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} A$ morfismos únicos, entonces $g \circ f \in \mathbf{C}\,(A, A)$ y $f \circ g \in \mathbf{C}\,(B, B)$, entonces por la proposición anterior: $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Por lo tanto $A \cong B$.

La demostración es análoga para A, B terminales. ■

4.10 Definición. *Un objeto* cero*, denotado como* 0*, en una categoría* C*, es un objeto que es inicial y terminal a la vez.*

De las proposiciones anteriores se tiene que un objeto cero es único salvo isomorfismos.

4.15 Proposición. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría con objeto cero, entonces para cualesquiera* $A, B \in |\mathbf{C}|$ *existe un único morfismo*

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$$

llamado morfismo cero de A *en* B*, que denotaremos por* $A \xrightarrow{0} B$*.*

Demostración. Como 0 es terminal e inicial, existen $f \in \mathbf{C}(A, 0)$ y $g \in \mathbf{C}(0, B)$. Por lo que tomando a $g \circ f$, se tiene el morfismo buscado. ■

Para finalizar cabe hacer notar que en la categoría **Ab** el grupo trivial 0, es el objeto 0, y si Λ es un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, el $\Lambda -$ *módulo* trivial 0 es el objeto cero en ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$. Además el morfismo 0 en ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ y **Ab**, es el $\Lambda - morfismo$ 0 y el homomorfismo 0, respectivamente.

2.5 Transformaciones Naturales

Dados dos funtores $\mathbf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $\mathbf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, podemos pensar en la "composición" de F con G definida por:

$$\begin{array}{llcl} \mathbf{G} \circ \mathbf{F} : & \mathbf{C} & \to & \mathbf{E} \\ & C & \to & \mathbf{G} \circ \mathbf{F}(C) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(C)) \\ & \left(A \xrightarrow{f} B\right) & \to & \mathbf{G} \circ \mathbf{F}(f) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(f)) \end{array}$$

para cualesquiera $C \in |\mathbf{C}|$ y $\left(A \xrightarrow{f} B\right) \in \mathbf{C}^{mor}$. De la construcción anterior vemos que $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ es un funtor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{E}$.

A $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ se le suele denotar como $\mathbf{GF}$.

5.1 Definición. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías, y* $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *dos funtores covariantes. Una transformación natural* $\mathbf{t}$ *de* $\mathbf{F}$ *en* $\mathbf{G}$*,* $\mathbf{t} : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$*, es una colección de morfismos* $\mathbf{F}(\mathbf{A}) \xrightarrow{t_A} \mathbf{G}(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{D}$*, uno para cada* $A \in |\mathbf{C}|$ *tal que, para cualquier morfismo* $A \xrightarrow{f} B \in \mathbf{C}^{mor}$*, se tenga* $\mathbf{G}(f) \circ \mathbf{t}_A = \mathbf{t}_B \circ \mathbf{F}(f)$*, es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(A) & \xrightarrow{\mathbf{t}_A} & \mathbf{G}(A) \\ {\scriptstyle \mathbf{F}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{G}(f)} \\ \mathbf{F}(B) & \xrightarrow{\mathbf{t}_B} & \mathbf{G}(B) \end{array}$$

Si esto sucede, diremos que $\mathbf{F}(A) \stackrel{t_A}{\to} \mathbf{G}(A)$ *es natural en* A.

5.2 Definición. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías, y* $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *dos funtores contravariantes. Una transformación natural* $\mathbf{t}$ *de* $\mathbf{F}$ *en* $\mathbf{G}$, $\mathbf{t} : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$, *es una colección de morfismos* $\mathbf{F}(A) \stackrel{t_A}{\to} \mathbf{G}(A)$ *en* $\mathbf{D}$, *uno para cada* $A \in |\mathbf{C}|$, *tal que para cualquier morfismo* $A \stackrel{f}{\to} B \in C^{mor}$, *se tenga* $G(f) \circ t_B = t_A \circ F(f)$, *es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(B) & \stackrel{\mathbf{t}_B}{\to} & \mathbf{G}(B) \\ {\scriptstyle \mathbf{F}(f)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathbf{G}(f)} \\ \mathbf{F}(A) & \stackrel{t_A}{\to} & \mathbf{G}(A) \end{array}$$

Si esto sucede, diremos que $\mathbf{F}(A) \stackrel{t_A}{\to} \mathbf{G}(A)$ *es natural en* A.

5.4 Ejemplo. *Sea* A *un* $\Lambda - $*módulo, entonces el* $\Lambda - morfismo$ *de inclusión* $i_A : \boldsymbol{\tau}(A) \to A$, *es tal que para cualesquiera* $A, B \in |\mathbf{C}|$ *y* $\left(A \stackrel{f}{\to} B\right), \in C^{mor}$, $1_{\mathbf{\Lambda Mod}}(f) \circ i_A = i_B \circ \tau(f)$. *Por lo que la familia*

$$\{i_A : \boldsymbol{\tau}(A) \to A\}_{A \in |\mathbf{C}|}$$

define una transformación de $\boldsymbol{\tau}\_$ *en* $1_{\mathbf{\Lambda Mod}}$.

5.5 Ejemplo. *Sea* V *un espacio vectorial sobre un campo* K. *Sea*

$$V^* = \{f : V \to K : f \text{ es lineal}\}$$

el espacio dual de V. *Definamos una transformación lineal*

$$t : V \longrightarrow (V^*)^*$$

dada por $t(v) = \widehat{v}$, *donde* $\widehat{v}(f) = f(v)$, $v \in V$, $f \in V^*$, $\widehat{v} \in (V^*)^*$.

Vemos que

$$t : 1_{\mathbf{EV}_K} \to (\_)^{**}$$

es una transformación natural del funtor identidad $1_{\mathbf{EV}_K} : \mathbf{EV}_K \to \mathbf{EV}_K$ *y el funtor doble dual* $(\_)^{**} : \mathbf{EV}_K \to \mathbf{EV}_K$, *donde* $(\_)^{**}(V) = (V^*)^*$ *y* $(\_)^{**}(f : V \to W) = f^{**} : (V^*)^* \to (W^*)^*$, *es tal que,* $f^{**}(g) = g \circ f^*$ $\forall g \in (V^*)^*$, *donde* $f^* : W^* \to V^*$, *es tal que,* $f^*(g') = g' \circ f$ $\forall g' \in W^*$; *cualquier* $V \in |\mathbf{EV}_K|$ *y* $f : V \to W \in \mathbf{EV}_K^{mor}$.

5.6 Definición. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías,* $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *dos funtores y* $\mathbf{t} : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ *una transformación natural. Diremos que* $\mathbf{t}$ *es una equivalencia* *natural, si* $\mathbf{t}_A : \mathbf{F}(A) \to \mathbf{G}(A)$ *es un isomorfismo para cada* $A \in |\mathbf{C}|$*. Si esto sucede diremos que los funtores* $\mathbf{F}$ *y* $\mathbf{G}$ *son equivalentes de forma natural.*

5.7 Definición. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías. Sea* $\mathbf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *un funtor. Diremos que* $\mathbf{F}$ *es una* equivalencia*, si existe un funtor* $\mathbf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *tal que* $\mathbf{GF}, \mathbf{1_C} \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *son equivalentes de forma natural, al igual para* $\mathbf{FG}, \mathbf{1_D} \colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}$*. Si* $\mathbf{F}$ *es una equivalencia, diremos que las categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *son* equivalentes*.*

En el caso de que $\mathbf{C}$ sea una categoría pequeña y $\mathbf{D}$ cualquier categoría, podemos considerar a la categoría cuyos objetos sean los funtores $\mathbf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, y para cualesquiera $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funtores, los morfismos entre ellos serán las transformaciones naturales $\mathbf{t} : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$, a dicha categoría se le suele denotar con $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. Por último podemos observar que en esta categoría los isomorfismos van hacer las equivalencias.

Capítulo 3

Construcciones en Categorías

En este breve capítulo introduciremos el *Principio de Dualidad* que va a jugar un papel muy importante en la construcción de conceptos y teoremas a partir de teoremas existentes; para finalizar este capítulo generalizaremos la idea de *Producto* dentro de la teoría de categorías.

3.1 Principio de Dualidad

1.1 Definición. *La* categoría dual $\mathbf{C}^{op}$ *de una categoría* $\mathbf{C}$*, se define por:*

(i) $|\mathbf{C}^{op}| = |\mathbf{C}|$.

(ii) *Para cualesquiera* $A, B \in |\mathbf{C}^{op}|$*, se define el conjunto* $C^{op}(A, B) = C(B, A)$.

Para cualquier $f \in \mathbf{C}^{op}(A, B)$*, se denotará con* $A \xrightarrow{f^{op}} B$*. Con esta notación es evidente que* $1_A^{op} = 1_A$*, y que* $A \overset{f^{op}}{\to} B = B \overset{f}{\to} A$*, por lo que si* $A \overset{f^{op}}{\to} B$ *y* $B \overset{g^{op}}{\to} C$ *son dos morfismos, entonces* $g^{op} \circ f^{op} = f \circ g$.

A continuación, estableceremos el *Principio de Dualidad*, que nos da una forma de duplicar "conceptos" y "teoremas".

1.2 Principio de Dualidad (P.D.).

(i) *Para cada concepto* C*, escritos en términos de única categoría* $\mathbf{K}$*, el concepto dual (llamado* $co - C$*) es obtenido al aplicar este concepto a la categoría dual.*

(ii) *Para cada teorema válido en categorías, el "teorema dual" que se obtiene al cambiar los conceptos originales, por los conceptos duales es válido.*

Vemos que este principio es resultado de la definición de categoría dual, ya que esta se forma a partir de girar flechas.

Recordemos que un monomorfismo $f : A \longrightarrow B$ de una categoría $\mathbf{C}$, es aquel que para cualesquiera $g_1, g_2 : A' \longrightarrow A$ si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces $g_1 = g_2$. Aplicando el (P.D.) se tiene que un co-monomorfismo $f : B \longrightarrow A$ es un morfismo, tal que, para cualesquiera $g_1, g_2 : A \longrightarrow A'$,si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, entonces $g_1 = g_2$. Por $(II.4.2)$ se tiene que los co-monomorfismos son los epimorfismos, análogamente por el (P.D.) se tiene que los co-epimorfismos son los monomorfismos.

Notemos que al aplicar el (P.D.) en la categoría ${}_{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{Mod}$, si consideramos la definición de $\Lambda -$ *módulo* proyectivo se obtiene la definición de un $\Lambda -$ *módulo* co-proyectivo, pero por $(I.VII.7.6)$ este concepto corresponde con el de $\Lambda -$ *módulo* inyectivo.

3.2 Producto Cartesiano de Categorías

A continuación generalizaremos el concepto de producto cartesiano de dos categorías.

2.1 Definición. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías, el producto cartesiano de* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$*,* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$*. Queda definido por:*

(i) Los objetos de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$*, son parejas ordenadas de la forma* (C, D)*, donde* $C \in |\mathbf{C}|$ *y* $D \in |\mathbf{D}|$ *.*

(ii) Para cualesquiera $(C', D'), (C, D) \in |\mathbf{C} \times \mathbf{D}|$*. El conjunto de morfismos de* (C', D') *a* (C, D)*, denotado por* $C \times D((C', D'), (C, D))$*, está definido por:*

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D}(\left(C', D'\right), (C, D)) = \mathbf{C}\left(C', C\right) \times \mathbf{D}\left(D', D\right)$$

es decir, sí $(f, g) \in C \times D((C', D'), (C, D))$*, entonces* $(C' \xrightarrow{f} C) \in \mathbf{C}^{mor}$ *y* $(D' \xrightarrow{g} D) \in \mathbf{D}^{mor}$*.*

(iii) Para cualesquiera $(C', D'), (C, D), (C'', D'') \in |\mathbf{C} \times \mathbf{D}|$*, y para cualesquiera* $(f', g') \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}((C', D'), (C, D))$*,* $(f, g) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}((C, D), (C'', D''))$*, se define*

$$(f, g) \circ (f', g') = \left(f \circ f', g \circ g'\right)$$

De la definición anterior, se sigue que $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ es una categoría, donde para cada $(C,D)\in|\mathbf{C}\times\mathbf{D}|$, se tiene la identidad $1_{(C,D)}\in\mathbf{C}\times\mathbf{D}((C,D),(C,D))$, está dada por $1_{(C,D)}=(1_C,1_D)$.

2.2 Definición. *Sean* $\mathbf{C},\mathbf{D}$ *y* $\mathbf{E}$ *categorías, un* bifuntor $\mathbf{F}:\mathbf{C}\times\mathbf{D}\to\mathbf{E}$ *es una regla que asocia:*
(i) Para cada $(C,D)\in|\mathbf{C}\times\mathbf{D}|$*, un único* $\mathbf{F}((C,D))\in|\mathbf{D}|$.
(ii) Para cada $(f,g)\in(\mathbf{C}\times\mathbf{D})^{mor}$*, un único* $\mathbf{F}(f,g)\in\mathbf{D}^{mor}$*, tal que*

$$\mathbf{F}((f,g)\circ(f',g'))=\mathbf{F}((f,g))\circ F((f,g))$$
$$\mathbf{F}\left(1_{(C,D)}\right)=1_{F(C,D)}$$

2.3 Ejemplo. *La asignación* $Hom_\Lambda(\_,\_)$ *definida en* $I.V$ *es un bifuntor.*

Consideremos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos categorías cualesquiera, definamos el funtor proyección de $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ en $\mathbf{C}$ como:

$$\begin{array}{rccc} P_{\mathbf{C}}: & \mathbf{C}\times\mathbf{D} & \to & \mathbf{C}\\ & (C,D) & \to & C\\ & (f,g) & \to & f \end{array}$$

para cualesquiera $(C,D)\in|\mathbf{C}\times\mathbf{D}|$ y $(f,g)\in(\mathbf{C}\times\mathbf{D})^{mor}$. Análogamente definimos el funtor proyección de $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ en $\mathbf{D}$ como

$$\begin{array}{rccc} P_{\mathbf{C}}: & \mathbf{C}\times\mathbf{D} & \to & \mathbf{D}\\ & (C,D) & \to & D\\ & (f,g) & \to & g \end{array}$$

para cualesquiera $(C,D)\in|\mathbf{C}\times\mathbf{D}|$ y $(f,g)\in(\mathbf{C}\times\mathbf{D})^{mor}$.

Como se hizo para módulos daremos una propiedad universal para el producto cartesiano de categorías.

2.4 Teorema (Propiedad Universal del Producto Cartesiano). *Para cualesquiera* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *categorías y para cualesquiera* $F_{\mathbf{C}}:E\to C$ *y* $F_{\mathbf{D}}:E\to D$ *funtores, existe un único funtor* F: $\mathbf{E}\to\mathbf{C}\times\mathbf{D}$*, tal que,* $P_{\mathbf{C}}F=F_{\mathbf{C}}$ y $P_{\mathbf{D}}F=F_{\mathbf{D}}$.

Demostración. Sean $F_{\mathbf{C}}:\mathbf{E}\to\mathbf{C}$ y $F_{\mathbf{D}}:\mathbf{E}\to\mathbf{D}$ funtores. Definamos:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbf{E} & \rightarrow & \mathbf{C}\times\mathbf{D} \\ & A & \rightarrow & \left(F_{\mathbf{C}}\left(A\right),F_{\mathbf{D}}\left(A\right)\right) \\ & A\xrightarrow{f}B & \rightarrow & \left(F_{\mathbf{C}}\left(f\right),F_{\mathbf{D}}\left(f\right)\right) \end{array}$$

para cualesquiera $A \in |\mathbf{E}|$ y $\left(A \xrightarrow{f} B\right) \in \mathbf{E}^{mor}$. Por la definición de F es un funtor

Vemos que $P_{\mathbf{C}}F(A) = F_C(A)$ y $P_{\mathbf{D}}F(A) = F_{\mathbf{D}}(A)$, para cualesquiera $A \in |\mathbf{E}|$; y $P_{\mathbf{C}}F(f) = F_C(f)$ y $P_{\mathbf{D}}F(f) = F_{\mathbf{D}}(f)$, para cualesquiera $f \in \mathbf{E}^{mor}$.

Supongamos que existe otro funtor $\widetilde{F} : \mathbf{E} \to \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ tal que $P_{\mathbf{C}}\widetilde{F} = F_{\mathbf{C}}$ y $P_{\mathbf{D}}\widetilde{F} = F_{\mathbf{D}}$. Como para cualquier $A \in |\mathbf{E}|$ $F(A) = (\alpha, \beta)$, por lo que $P_{\mathbf{C}}\widetilde{F}\left(A\right) = \alpha$ y $P_{\mathbf{D}}\widetilde{F}\left(A\right) = \beta$, entonces $F_{\mathbf{C}}(A) = \alpha$ y $F_{\mathbf{D}}\left(A\right) = \beta$, por lo tanto $\widetilde{F}(A) = (\alpha, \beta) = F(A)$. Por otro lado para cualquier $f \in \mathbf{E}^{mor}$ $F(f) = (\varphi, \psi)$, por lo que $P_{\mathbf{C}}\widetilde{F}\left(f\right) = \varphi$ y $P_{\mathbf{D}}\widetilde{F}\left(f\right) = \psi$, entonces $F_{\mathbf{C}}(f) = \varphi$ y $F_{\mathbf{D}}\left(f\right) = \psi$, por lo tanto $\widetilde{F}(f) = (\varphi, \psi) = F(f)$. Como consecuencia se tiene $F = \widetilde{F}$.$\blacksquare$

Capítulo 4

Categorías Abelianas

Muchas veces al estudiar grupos abelianos, anillos conmutativos y módulos nos damos cuenta que muchas definiciones y teoremas son muy similares, lo que nos lleva a decir que las categorías **Ab**, **An** y ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ tienen una estructura muy parecida, es decir que el comportamiento algebraico de la clase de morfismos bajo la composición es "muy parecido". Este hecho motiva el concepto de categoría abeliana que es una generalización del comportamiento algebraico que tiene la clase de morfismos de las categorías **Ab**, **An** y ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$.

En el presente capítulo se pretende abordar de una manera muy general algunos resultados dentro de la teoría de categorías Abelianas.

4.1 Núcleos y Conúcleos

Sea $\mathbf{C}$ una categoría arbitraria con objeto 0.

1.1 Definición. *Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *un morfismo en* $\mathbf{C}$*, diremos que* $U \xrightarrow{k} A$ *es* núcleo *de* f*, si cumple lo siguiente:*

(i) $f \circ k = 0$

(ii) *Para cualquier morfismo* $U' \xrightarrow{q} A$ *tal que* $f \circ q = 0$*, entonces existe* *un único morfismo* $U' \xrightarrow{h} U$ *tal que* $q = h \circ k$. *Es decir el diagrama*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "k"] & & \\ & A \arrow[r, "f"] & B \\ U' \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "q"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Si $U \xrightarrow{k} A$ es núcleo de un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ lo denotaremos con $\ker(f) = U \xrightarrow{k} A$.

Aplicando el (P.D.) a la definición anterior se tiene la siguiente definición.

1.2 Definición. *Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *un morfismo en* C, *diremos que* $B \xrightarrow{k} U$ *es* conúcleo *de* f, *si se cumple lo siguiente:*
(i) $k \circ f = 0$
(ii) *Para cualquier morfismo* $B \xrightarrow{q} C'$ *tal que* $q \circ f = 0$, *entonces existe un único morfismo* $C \xrightarrow{h} C'$ *tal que* $q = h \circ k$.

$$\begin{tikzcd} & & C \arrow[dd, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "k"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Si $B \xrightarrow{k} C$ es conúcleo de $A \xrightarrow{f} B$ lo denotaremos con $co\ker(f)$.

En general, para una categoría $\mathbf{C}$ dado un morfismo, $A \xrightarrow{f} B$, en $\mathbf{C}$ no siempre se puede asegurar que f tenga núcleo y/o conúcleo.

1.3 Ejemplo. *Si* $A \xrightarrow{f} B$ *es un morfismo en* ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$, *entonces los morfismos* $\ker(f) \xrightarrow{i} A$ *y* $B \xrightarrow{p} B/im(f)$, *inclusión y proyección, respectivamente, son en núcleo y conúcleo de* f *respectivamente.*

Del ejemplo anterior, si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$, vemos que el núcleo de su conúcleo es el morfismo $im(f) \hookrightarrow B$, por lo que podemos decir que la imagen de f determina el núcleo de su conúcleo. Esta observación motiva nuestra siguiente definición.

1.4 Definición. *La* imagen *de un morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ $(im\,(f))$, *es el núcleo de su conúcleo, es decir,*

$$im\,(f) = \ker\,(co\ker\,(f))$$

4.2 Productos y Límites

Las siguientes definiciones se conocen como *Propiedades Universales* para el producto, coproducto y límite.

2.1 Definición. *Sea* **C** *una categoría y sea* $\{A_j\}_{j\in I}$ *una familia de objetos en* **C**. *El* producto *de* $\{A_j\}_{j\in I}$ *en* **C** *consta de un objeto* P *en* **C** *y una familia de morfismos* $\{P \xrightarrow{p_j} A_j\}_{j\in I}$, *tales que, para cualquier familia de morfismos* $\{X \xrightarrow{f_j} A_j\}_{j\in I}$, *existe un único morfismo,* $X \xrightarrow{h} P$, *tal que, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ P \arrow[r, "p_j"] & A_j \end{tikzcd}$$

conmuta para toda $j \in I$.

Dualizando la definición anterior se tiene la siguiente definición:

2.2 Definición. *Sea* **C** *una categoría y sea* $\{A_j\}_{j\in I}$ *una familia de objetos en* **C**. *El* coproducto *de* $\{A_j\}_{j\in I}$ *en* **C** *consta de un objeto* Q *en* **C** *y una familia de morfismos* $\{A_j \xrightarrow{i_j} Q\}_{j\in I}$, *tales que, para cualquier familia de morfismos* $\{A_j \xrightarrow{g_j} X\}_{j\in I}$, *existe un único morfismo* $Q \xrightarrow{h} X$, *tal que, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X & \\ Q \arrow[u, "h"] & A_j \arrow[l, "i_j"'] \arrow[ul, "g_j"'] \end{tikzcd}$$

conmuta para toda $i \in I$.

Para cada $j \in I$, al morfismo $P \xrightarrow{p_j} A_j$ se le llama la proyección de P en A_j, y al morfismo $A_j \xrightarrow{i_j} Q$ se le llama la inclusión de A_j en Q. Se suele escribir $P = \prod_{j\in I} A_j$ y $Q = \coprod_{j\in I} A_j$. Diremos que una categoría posee *producto (coproducto)*, si para cualquier familia $\{A_j\}_{j\in I}$ existe su producto (coproducto).

Dada una categoría $\mathbf{C}$ cualquiera, no siempre se puede asegurar que el producto o coproducto exista. Lo que sí se puede asegurar es que si el producto o el coproducto existen, entonces este es único salvo isomorfismos.

2.3 Proposición. *Sean P y P' dos productos para una familia $\{A_j\}_{j\in I}$ de objetos en $\mathbf{C}$. Entonces existe un único isomorfismo $P \xrightarrow{h'} P'$ tal que, si $\{P' \xrightarrow{p'_j} A_j\}_{j\in I}$ es la familia de proyecciones, entonces $p_j = p'_j \circ h'$ $\forall j \in I$.*

Demostración. Como P es un producto para $\{A_j\}_{j\in I}$, existe un único morfismo $P' \xrightarrow{h} P$, tal que, $p'_j = p_j \circ h$ $\forall j \in I$. A su vez como P' es producto existe un único morfismo $P \xrightarrow{h'} P'$, tal que, $p_j = p'_j \circ h'$.

Como para cada $j \in I$, se tiene $p_j \circ 1_P = p_j = p'_j \circ h' = p_j \circ (h \circ h')$, por lo que $p_j \circ 1_P = p_j \circ (h \circ h')$, entonces como P es producto $1_P = h \circ h'$. Por otro lado, para cada $j \in I$, se tiene $p'_j \circ 1_{P'} = p'_j = p_j \circ h = p'_j \circ (h' \circ h)$, entonces como P' es producto $1_{P'} = h' \circ h$.

Por lo tanto h' es un isomorfismo único.■

Aplicando el (P.D) a la proposición anterior, la siguiente proposición es inmediata.

2.4 Proposición. *Sean Q y Q' dos coproductos para una familia $\{A_j\}_{j\in I}$ de objetos en $\mathbf{C}$. Entonces existe un isomorfismo $Q' \xrightarrow{h'} Q$ tal que, si $\{A_j \xrightarrow{i'_j} Q'\}_{j\in I}$ es la familia de inclusiones, entonces $i_j = i'_j \circ h'$.*■

Por $(I.4.1)$ para una familia $\{M_i\}_{j\in I}$ de $\Lambda - m\acute{o}dulos$, el producto de $\{M_i\}_{j\in I}$ corresponde con el producto directo, y el coproducto de $\{M_i\}_{j\in I}$ corresponde con la suma directa. Por lo tanto $_{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ es una categoría con producto y coproducto. También se sabe que **Gr**, **An** poseen producto y coproducto, este último hecho se puede consultar en [Ll. P. 2].y [Ac. y Ll]

2.5 Definición. *Para un conjunto preordenado I y una categoría $\mathbf{C}$ la familia $(C_i, \varphi_i^j)_{i,j\in I}$ es un sistema dirigido en $\mathbf{C}$, si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia*

de objetos, para el que si $i, j \in I$, son tales que $i \leq j$, entonces $C_i \xrightarrow{\varphi_i^j} C_j$ es un morfismo, además dichos morfismos cumplen:
(i) $\varphi_j^k \circ \varphi_i^j = \varphi_i^k$, si $i \leq j \leq k$.
(ii) $\varphi_i^i = 1_{C_i}$ $\forall i \in I$.

2.6 Ejemplo. *Si I es el preorden trivial, entonces φ_i^j existe si $i = j$, por lo que $(C_i, 1_{C_i})_{i\in I}$ es un sistema dirigido para cualquier categoría* $\mathbf{C}$.

2.7 Definición. *Sea I un conjunto preordenado. El* límite directo *de un sistema dirigido $(C_i, \varphi_i^j)_{i,j\in I}$ es un objeto en C, denotado por $\varinjlim C_i$ (o más precisamente $\varinjlim(C_i, \varphi_i^j)_{i,j\in I}$), para el cual existe una familia de morfismos $\{C_i \xrightarrow{\mu_i} \varinjlim C_i\}_{i\in I}$ tal que $\mu_i = \mu_j \circ \varphi_i^j$, si $i \leq j$, además para cualquier familia de morfismos $\{C_i \xrightarrow{g_i} C\}_{i\in I}$ tal que $g_i = g_i\mu_i^j$ si $i \leq j$, entonces existe un único morfismo $\varinjlim C_i \xrightarrow{h} C$, tal que $g \circ \mu_i = g_i$ $\forall i \in I$, es decir el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim C_i \\
C_i \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[r, "\varphi_i^j"] \arrow[dr, "g_i"'] & C_j \arrow[u, "\mu_j"'] \arrow[d, "g_j"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

conmuta, si $i \leq j$.

2.8 Ejemplo. *Si I tiene el orden trivial, entonces el límite del sistema dirigido $(C_i, 1_{C_i})_{i\in I}$ lo podemos interpretar como su coproducto, es decir $\varinjlim C_i = \coprod_{i\in I} C_i$.*

Al igual que para el producto y coproducto, en una categoría $\mathbf{C}$ arbitraria no siempre se puede asegurar que para cualquier sistema dirigido este tenga límite, sin embargo lo que se puede asegurar que si este existe es único.

2.9 Proposición. *Sea $\left(C_i, \varphi_i^j\right)_{i,j\in I}$ un sistema dirigido en una categoría $\mathbf{C}$, entonces, si existe su límite este es único salvo isomorfismos.*
Demostración. Análoga a $(I.6.6)$.■

Cabe destacar que por $(I.6.7)$ en la categoría ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ cualquier sistema dirigido tiene límite directo, es decir, ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ es un ejemplo de una categoría con límite. Otro ejemplo de categoría con límite es **An** este hecho se puede consultar en [Ro. Lo]

A continuación definiremos el concepto de producto fibrado y coproducto fibrado que se utilizarán posteriormente.

2.10 Definición. *Sean* $X \xrightarrow{f} A$ *y* $Y \xrightarrow{g} A$ *dos morfismos en una categoría* C*. El* producto fibrado *o* cuadrado cartesiano *de* (f, g) *es una pareja de morfismos* $B \xrightarrow{\varphi} X$ *y* $B \xrightarrow{\psi} Y$ *con* $f \circ \varphi = g \circ \psi$*, tal que, si* $C \xrightarrow{\varphi'} X$ *y* $C \xrightarrow{\psi'} Y$*, son morfismos, tales que,* $f \circ \varphi' = g \circ \psi'$*, entonces existe un único morfismo* $B \xrightarrow{h} C$*, tal que,* $\varphi' = \varphi \circ h$ *y* $\psi' = \psi \circ h$*, es decir el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "\varphi'"] \arrow[ddr, "\psi'"'] & & \\ & B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Denotamos con $(B, (\varphi, \psi))$ *o simplemente* $Y \bigwedge X$*, al producto fibrado de* (f, g)*.*

2.11 Definición. *Sea* $A \xrightarrow{f} X$ *y* $A \xrightarrow{g} Y$ *morfismos en una categoría* C*. El* coproducto fibrado *o* suma fibrada *de* (f, g) *es una pareja de morfismos* $X \xrightarrow{\varphi} B$ *y* $Y \xrightarrow{\psi} B$ *con* $\varphi \circ f = \psi \circ g$*, tal que, si existen morfismos* $X \xrightarrow{\varphi'} C$ *y* $Y \xrightarrow{\psi'} C$*, tales que,* $\varphi' \circ f = \psi' \circ g$*, entonces existe un único morfismo* $B \xrightarrow{h} C$*, tal que,* $\varphi' = h \circ \varphi$ *y* $\psi' = h \circ \psi$*, es decir el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddr, "\varphi'"] & \\ Y \arrow[r, "\psi"'] \arrow[drr, "\psi'"'] & B \arrow[dr, "h"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

conmuta. Denotamos con $(B, (\varphi, \psi))$ *o simplemente* $X \bigvee Y$*, al coproducto fibrado de* (f, g)*.*

2.12 Ejemplo. *En la categoría* **Set**, *considérese X y Y como subconjuntos de A con inclusiones f y g, respectivamente. Si $B = X \cap Y$ y φ, γ son también inclusiones, entonces B es el producto fibrado de (f, g). Por otro lado si consideramos a $A = X \cap Y$ y $B = X \cup Y$, tenemos que el coproducto fibrado de (f, g).*

En general para una categoría $\mathbf{C}$ no siempre se puede asegurar que el producto fibrado o el coproducto fibrado existan. Veamos que un ejemplo de categorías con producto y coproducto fibrado son $_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ y **Ab** como a continuación se muestra.

2.13 Proposición. *Para cualesquiera $A \xrightarrow{f} X$, $A \xrightarrow{g} Y$ morfismos en $_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ (**Ab**) existe $X \bigvee Y$.*

Demostración. Sean $A \overset{f}{\to} X$, $A \overset{g}{\to} Y$ morfismos en $_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ (**Ab**). Definamos a $B = (X \oplus Y)/S$, donde

$$S = \{(f(a), -g(a)) : a \in A\}$$

Definamos $X \xrightarrow{\varphi} B$ y $Y \xrightarrow{\psi} B$ dados por: $\varphi(x) = (x, 0) + S$, y $\psi(y) = (0, y) + S$, por la definición de φ, ψ se sigue que son $\Lambda - morfismos$ (homomorfismos), además para cualquier $a \in A$

$$\begin{aligned} S &= ((f(a), 0) - (0, g(a))) + S \\ &= ((f(a), 0) + S) - ((0, g(a)) + S) \\ &= \varphi(f(a)) - \psi(g(a)) \end{aligned}$$

Supongamos que existen morfismos $X \xrightarrow{\varphi'} C$, $Y \xrightarrow{\psi'} C$, tal que, $\varphi' \circ f = \psi' \circ g$. Entonces existe $X \oplus Y \xrightarrow{h'} C$, tal que, $h'(x, y) = \varphi'(x) + \psi'(y)$; además si $(f(a), -g(a)) \in S$, entonces $h'(f(a), -g(a)) = \varphi'(f(a)) + \psi'(-g(a)) = 0$, por lo que $S \subseteq \ker(h')$, entonces h' induce un morfismo

$$B \xrightarrow{h} C$$

Dado por $h((x, y) + S) = \varphi'(x) + \psi'(y)$, tal que, $h \circ \varphi = \varphi'$ y $h \circ \psi = \psi'$. Finalmente, si $B \xrightarrow{k} C$ es otro morfismo, tal que, $k \circ \varphi = \varphi'$ y $k \circ \psi = \psi'$, entonces $\varphi'(x) = k \circ \varphi(x) = k((x, 0) + S)$ y $\psi'(y) = k \circ \psi(y) = k((0, y) + S)$. Por lo tanto $h((x, y) + S) = \varphi'(x) + \psi'(y) = k((x, y) + S)$ $\forall (x, y) + S \in P$. ■

2.14 Proposición. *Para cualesquiera* $X \xrightarrow{f} A$ *y* $Y \xrightarrow{g} A$ *morfismos en* ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$ *existe* $X \bigwedge Y$*.*

Demostración. Sean $X \xrightarrow{f} A$, $Y \xrightarrow{g} A$ morfismos, sea

$$B = \{(x, y) \in X \bigoplus Y : f(x) = g(y)\}$$

Por la definición de B, se tiene que B es un submódulo de $X \oplus Y$. Sean $B \xrightarrow{\varphi} X$ y $B \xrightarrow{\psi} Y$ las proyecciones canónicas restringidas a B. De la definición de φ y ψ, se tiene: $f \circ \varphi = g \circ \psi$. Además si suponemos que existen morfismos $C \xrightarrow{\varphi'} X$ y $C \xrightarrow{\psi'} Y$, tal que, $f \circ \varphi' = g \circ \psi'$. Entonces existe un morfismo $C \xrightarrow{h'} X \oplus Y$, definido por $h'(c) = \big(\varphi'(c), \psi'(c)\big)$. Como $f \circ \varphi' = g \circ \psi'$, entonces $im(h') \subseteq P$. Por lo tanto h' induce un único morfismo $C \xrightarrow{h} B$, tal que, $\varphi \circ h = \varphi'$ y $\psi \circ h = \psi'$. ■

4.3 Categorías Abelianas

3.1 Definición. *Una* categoría aditiva A *es una categoría con objeto cero tal que para cualesquiera dos objetos poseen un producto, además el conjunto de morfismos* $\mathbf{A}(X, Y)$ *es un grupo abeliano, y la composición*

$$\circ : \quad \mathbf{A}(X, Y) \times \mathbf{A}(Y, Z) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}(X, Z)$$

es bilineal.

Las categorías $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{An}$ y ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ son categorías aditivas, ya que $\mathbf{Ab}(X, Y)$, $\mathbf{An}(X, Y)$ y ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}(X, Y)$ son grupos abelianos con respecto a la suma de morfismos, además que la composición de morfismos actúa como una función lineal bajo esta operación.

3.2 Definición. *Para dos objetos* A*,* B *de una categoría* $\mathbf{A}$*, decimos que un objeto* C *es* biproducto *de* A *y* B*, si existe un diagrama:*

$$A \underset{p_1}{\overset{i_1}{\rightleftarrows}} C \underset{i_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} B$$

con $i_1 \circ p_1 = 1_A$*,* $i_2 \circ p_2 = 1_B$ *y* $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = 1_C$*.*

Diremos que una categoría $\mathbf{A}$ posee biproducto, si para cualesquiera dos objetos existe su biproducto.

3.3 Proposición. *Sea* **A** *una categoría aditiva. Entonces* **A** *posee producto si, y sólo si posee biproducto.*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Supongamos que **A** posee biproducto. Sean A, $B \in |\mathbf{A}|$ y sea C el biproducto de A y B definido en (3.2). Entonces

$$p_1 \circ i_2 = p_1 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ i_2 = 1_A \circ (p_1 \circ i_2) + (p_1 \circ i_2) \circ 1_B = p_1 \circ i_2 + p_1 \circ i_2$$

Por lo tanto $p_1 \circ i_2 = 0$; análogamente $p_2 \circ i_1 = 0$.

Si $D \xrightarrow{f_1} A$ y $D \xrightarrow{f_2} B$ son morfismos definamos $D \xrightarrow{h} C$ como $h = i_1 \circ f_1 + i_2 \circ f_2$, entonces

$$\begin{aligned} p_1 \circ (i_1 \circ f_1 + i_2 \circ f_2) &= 1_A \circ f_1 + 0 \circ f_2 = f_1 \\ p_2 \circ (i_1 \circ f_1 + i_2 \circ f_2) &= 0 \circ f_1 + 1_B \circ f_2 = f_2. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $D \xrightarrow{h'} C$ es otro morfismo tal que $p_1 \circ h' = f_1$ y $p_2 \circ h' = f_2$. Entonces $h' = 1_C \circ h' = (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ h' = i_1 \circ f_1 + i_2 \circ f_2 = h$. Por lo tanto $h = h'$. Entonces $C \cong A \times B$.

($\Longrightarrow$) Supóngase que **A** posee producto. Sean A, $B \in |\mathbf{A}|$ y $A \times B$ el producto de A y B, con $A \times B \overset{p_1}{\to} A$ y $A \times B \overset{p_2}{\to} B$ las proyecciones. Entonces existen únicos morfismos $A \xrightarrow{i_1} A \times B$ y $B \xrightarrow{i_2} A \times B$, tales que $p_1 \circ i_1 = 1_A$, $p_2 \circ i_1 = 0$, $p_1 \circ i_2 = 0$, $p_2 \circ i_2 = 1_B$. Como

$$\begin{aligned} p_1 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) &= 1_A \circ p_1 + 0 \circ p_2 = p_1 \quad \text{y} \\ p_2 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) &= 0 \circ p_1 + 1_B \circ p_2 = p_2 \end{aligned}$$

Entonces por la propiedad universal del producto $A \times B \overset{i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2}{\longrightarrow} A \times B$ es el morfismo identidad. Por lo tanto $A \times B$ es biproducto de A y B. ■

3.4 Definición. *Una* categoría Abeliana **A** *es una categoría aditiva que satisface las siguientes propiedades:*

(i) *Todo morfismo posee núcleo y conúcleo.*

(ii) *Cualquier monomorfismo es el núcleo de su conúcleo*

(iii) *Todo epimorfismo es el conúcleo de su núcleo.*

3.5 Proposición. Las categorías **Ab** y ${}_{\mathbf{\Lambda}}$**Mod** son categorías abelianas.

Demostración. Como ${}_{\mathbf{\Lambda}}$**Mod** y **Ab** son categorías aditivas con núcleo y conúcleo, basta con demostrar la condición (ii) y (iii) de la definición anterior.

(i) Sea $A \overset{f}{\to} B$ un monomorfismo en ${}_{\mathbf{\Lambda}}$**Mod** (**Ab**), probemos que $A \overset{f}{\to} B = \ker(co\ker(f))$, como $co\ker(f) = B \overset{p}{\to} B/im(f)$, entonces $p \circ f = 0$.

Por otro lado como f es un monomorfismo $A \cong A/\ker(f)$, ya que $\ker(f) = 0$, además por el primer teorema de isomorfismo $A \cong A/\ker(f) \cong im\,(f)$, por lo que si $A' \xrightarrow{g} B$ es un morfismo, tal que, $p \circ g = 0$, entonces existe un único morfismo $A' \xrightarrow{g'} A$, tal que, $g = f \circ g'$. Por lo tanto $A \xrightarrow{f} B$ es el núcleo de su conúcleo.

(ii) Sea $A \xrightarrow{f} B$ un epimorfismo en ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$, como $\ker(f) \xrightarrow{i} A$ es núcleo de f se tiene $f \circ i = 0$, además por el primer teorema de isomorfismo $A/\ker(f) \cong B$, por lo que para cualquier morfismo $A \xrightarrow{h} A'$, tal que, $h \circ i = 0$, existe un único morfismo $B \xrightarrow{j} A'$, tal que, $j \circ f = h$. Por lo tanto $A \xrightarrow{f} B$ es conúcleo de su núcleo.■

Veamos un ejemplo más de categoría abeliana.

3.6 Proposición. *La categoría* $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}$ *con morfismos de grado cero es abeliana.*

Demostración. Tomando a $0 = \{M_i : M_i = 0\}_{i\in\mathbb{Z}}$ vemos que dicho objeto es el objeto cero de $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}$. Por otro lado si $M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $N = \{N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ son objetos en $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}$, y si $f, g \in \mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M, N)$, definiendo $f + g = \{M_i \xrightarrow{f_i+g_i} N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, se tiene que $(\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}(M, N), +)$ es un grupo abeliano. Además es evidente que la composición es una operación bilineal con respecto a $+$.

Para cualesquiera $M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $N = \{N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ dos objetos en $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}$, si tomamos a $N \times M = \{M_i \times N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, donde $M_i \times N_i$ denota el producto cartesiano de M_i con N_i, se sigue que $N \times M$ es el producto de M y N con $p = \{M_i \times N_i \xrightarrow{p_i} M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $q = \{M_i \times N_i \xrightarrow{q_i} M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ los morfismos de proyección. Por lo tanto $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}$ es una categoría con producto.

Si $M \xrightarrow{f} N = \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo en $\mathbf{Mod}_\Lambda^\mathbb{Z}$, como para cada $i \in \mathbb{Z}$ el núcleo de f_i es $\ker(f_i) \to M_i$ y el conúcleo de f_i es $N_i \to N_i/im\,(f_i)$, por lo que $\{\ker(f_i) \to M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\{N_i \to N_i/im\,(f_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ son el núcleo y conúcleo de f respectivamente.

Suponiendo que $M \xrightarrow{f} N = \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es un monomorfismo, entonces para cada $i \in \mathbb{Z}$ f_i es un monomorfismo, por la proposición anterior f_i es el núcleo de $N_i \to N_i/im\,(f_i)$, entonces $M \xrightarrow{f} N$ es el núcleo de $\{N_i \to N_i/im\,(f_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Suponiendo que $M \xrightarrow{f} N = \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es un epimorfimo, entonces para cada $i \in \mathbb{Z}$ f_i es un epimorfismo, por la proposición anterior f_i es el conúcleo de $\ker(f_i) \to M_i$, por lo que $M \xrightarrow{f} N$ es el conúcleo de $\{\ker(f_i) \to M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$.■

4.3.1 Morfismos

A continuación estudiemos algunas propiedades de los morfismos dentro de una categoría abeliana.

3.7 Proposición. *Un morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *en* $\mathbf{A}$ *es un monomorfismo si, y solo si para cualquier morfismo* $A' \xrightarrow{f'} A$*, tal que,* $f \circ f' = 0$*. Entonces* $f' = 0$*.*

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Sea $A' \xrightarrow{f'} A$ un morfismo en $\mathbf{A}$, tal que, $f \circ f' = 0$, como $f \circ 0 = 0$, entonces $f \circ f' = f \circ 0$, por lo tanto $f' = 0$ pues f es monomorfismo.

$(\Longleftarrow)$ Sean $A' \xrightarrow{f_1'} A$ y $A' \xrightarrow{f_2'} A$ dos morfismos en $\mathbf{A}$, tal que, $f \circ f_1 = f \circ f_2$, entonces $f \circ f_1 - f \circ f_2 = 0$, pues $\mathbf{A}(A', B)$ es un grupo abeliano, como la composición es bilineal se tiene $f \circ (f_1 - f_2) = f \circ f_1 - f \circ f_2 = 0$, entonces $f_1 - f_2 = 0$. Por lo tanto $f_1 = f_2$.■

Aplicando el (P.D.) a la proposición anterior la siguiente proposición es inmediata.

3.8 Proposición. *Un morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *en* $\mathbf{A}$ *es un epimorfismo si, y sólo si para cualquier morfismo* $B \xrightarrow{f'} B''$ *tal que* $f \circ f = 0$*, entonces* $f = 0$*.*■

Aplicando la proposición (3.5) a una categoría abeliana $\mathbf{A}$, si $A \xrightarrow{f} B$ es un monomorfismo en $\mathbf{A}$, como $\ker(f) \xrightarrow{n} A$ es tal que $f \circ n = 0$, entonces $n = 0$. Por lo tanto $\ker(f) \xrightarrow{n} A$ es el morfismo cero. Por otro lado si el núcleo del morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es 0, entonces para cualquier morfismo $A' \xrightarrow{f} A$, tal que, $f \circ f' = 0$, entonces por la propiedad del núcleo existe un morfismo h, tal que, $f' = n \circ h$, entonces $f' = 0 \circ h = 0$, pues el núcleo es cero, con este último hecho hemos demostrado la siguiente proposición.

3.9 Proposición. *Un* $A \xrightarrow{f} B$ *morfismo en* $\mathbf{A}$ *es monomorfismo si, y solo si su núcleo es cero.* ■

Dualizando la proposición anterior, la siguiente proposición es inmediata.

3.10 Proposición. *Un* $A \xrightarrow{f} B$ *morfismo en* $\mathbf{A}$ *es epimorfismo si, y solo si su conúcleo es cero.* ■

4.4 Cadenas y Cocadenas

En esta sección generalizaremos la noción de sucesión semiexacta y exacta dentro del marco de la teoría de las categorías abelianas.

Sea $\mathbf{A}$ una categoría con objeto 0.

4.1 Definición. *Sea* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *una familia de objetos en* $\mathbf{A}$, *y sea* $\{A_n \overset{\partial_n}{\to} A_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *una familia de morfismos en* $\mathbf{A}$ *tales que* $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. *Llamaremos* complejo de cadena (cadena) *en* $\mathbf{A}$ *a la pareja* $A = \{A_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *y lo escribimos*

$$A: \quad ... \quad \to \quad A_{n+1} \quad \overset{\partial_{n+1}}{\to} \quad A_n \quad \overset{\partial_n}{\to} \quad A_{n-1} \quad \to \quad ...$$

4.2 Ejemplo. *Para una sucesión semiexacta*

$$C: \quad ... \quad \to \quad C_{n+1} \quad \overset{\partial_{n+1}}{\to} \quad C_n \quad \overset{\partial_n}{\to} \quad C_{n+1} \quad \to \quad ...$$

en ${}_{\mathbf{\Lambda}}Mod$ $(\mathbf{Ab})$, *la pareja* $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una cadena en* ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$.

Del ejemplo anterior podemos decir que un complejo de cadenas es la generalización de una sucesión semiexacta descendente con índices en $\mathbb{Z}$.

4.3 Definición. *Sean* $A = \{A_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $B = \{B_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *dos cadenas en* A. *Un* morfismo de cadenas $\varphi : A \longrightarrow B$ *es una familia de morfismos* $\{A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *tal que, los cuadrados del siguiente diagrama conmutan*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A: & ... & \to & A_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & A_n & \overset{\partial_n}{\to} & A_{n-1} & \to & ... \\
\downarrow\varphi & & & \downarrow\varphi_{n+1} & & \downarrow\varphi_n & & \downarrow\varphi_{n-1} & & \\
B: & ... & \to & B_{n+1} & \overset{\partial'_{n+1}}{\to} & B_n & \overset{\partial'_n}{\to} & B_{n+1} & \to & ...
\end{array}$$

Observemos que para una categoría aditiva $\mathbf{A}$, si $A = \{A_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $B = \{B_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $C = \{C_n, \partial''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son cadenas en $\mathbf{A}$, y $\varphi : A \longrightarrow B$, $\psi : B \longrightarrow C$ son morfismos de cadenas, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A: & ... & \to & A_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & A_n & \overset{\partial_n}{\to} & A_{n-1} & \to & ... \\
\downarrow\varphi & & & \downarrow\varphi_{n+1} & & \downarrow\varphi_n & & \downarrow\varphi_{n-1} & & \\
B: & ... & \to & B_{n+1} & \overset{\partial'_{n+1}}{\to} & B_n & \overset{\partial'_n}{\to} & B_{n+1} & \to & ... \\
\downarrow\psi & & & \downarrow\psi_{n+1} & & \downarrow\psi_n & & \downarrow\psi_{n-1} & & \\
C: & ... & \to & C_{n+1} & \overset{\partial''_{n+1}}{\to} & B_n & \overset{\partial''_n}{\to} & C_{n+1} & \to & ...
\end{array}$$

conmuta, pues para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ $\partial''_n \circ (\psi_n \circ \varphi_n) = (\partial''_n \circ \psi_n) \circ \varphi_n = (\partial_n \circ \varphi_n) \circ \psi_n = \partial_n \circ (\varphi_n \circ \psi_n)$, entonces $\partial''_n \circ (\psi_n \circ \varphi_n) = \partial_n \circ (\varphi_n \circ \psi_n)$, por lo tanto $\psi \circ \varphi : A \longrightarrow C$ es un morfismo de cadenas.

A partir de esta observación vemos que dada una categoría aditiva $\mathbf{A}$, podemos construir a la categoría cuyos objetos sean cadenas y sus morfismos sean morfismos de cadenas, a dicha categoría se denotará con $\mathbf{C}(\mathbf{A})$. Cabe hacer notar que está categoría resultante va a ser abeliana, pues el objeto cero de esta categoría es la cadena cuyos objetos son el objeto cero, además si

$$\begin{array}{rcl} \varphi & : & \{A_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{B_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ \varphi' & : & \{A_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{B_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

son morfismos de cadenas podemos definir a

$$\varphi + \varphi' : \{A_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{B_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

como $(\varphi + \varphi')_n = \varphi_n + \varphi'_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, dotando así a $\mathbf{C}(\mathbf{A})(\{A_n, \partial_n\}, \{B_n, \partial'_n\})$ de una estructura de grupo abeliano.

A continuación consideremos la situación dual.

4.4 Definición. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de objetos en $\mathbf{A}$, y sea $\{A^n \overset{\partial^n}{\to} A^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de morfismos en $\mathbf{A}$ tales que $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$. Llamaremos* complejo de co-cadena (co-cadena) *en A a la pareja $A = \{A^n, \partial^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, y lo escribimos*

$$A : \ \ldots \ \to \ A^{n-1} \ \overset{\partial^{n-1}}{\to} \ A^n \ \overset{\partial^n}{\to} \ A^{n+1} \ \to \ \ldots$$

4.5 Ejemplo. *Para una sucesión semiexacta*

$$C : \ \ldots \ \to \ C^{n-1} \ \overset{\partial^{n-1}}{\to} \ C^n \ \overset{\partial^n}{\to} \ C^{n+1} \ \to \ \ldots$$

en ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$, la pareja $C = \{C^n, \partial^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una co-cadena.

Del ejemplo anterior un complejo de co-cadenas es la generalización de una sucesión semiexacta ascendente con índices en $\mathbb{Z}$.

4.6 Definición. *Sean $A = \{A^n, \partial^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $B = \{B^n, \partial'^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dos co-cadenas en A. Un* morfismo de co-cadenas *$\varphi : A \longrightarrow B$ es una familia de morfismos $\{A_n \overset{\varphi_n}{\to} B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que los cuadrados en el siguiente diagrama conmutan*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
A: & ... & \to & A^{n-1} & \overset{\partial^{n-1}}{\to} & A^{n} & \overset{\partial^{n}}{\to} & A^{n+1} & \to & ... \\
\downarrow_{\varphi} & & & \downarrow_{\varphi_{n-1}} & & \downarrow_{\varphi_{n}} & & \downarrow_{\varphi_{n+1}} & & \\
B: & ... & \to & B^{n-1} & \overset{\partial'^{n-1}}{\to} & B^{n} & \overset{\partial'^{n}}{\to} & B^{n+1} & \to & ...
\end{array}
$$

Para una categoría aditiva $\mathbf{A}$, dados dos morfismos de co-cadenas $\varphi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow C$, por el principio de dualidad se tiene que $\psi \circ \varphi : A \to C$ es un morfismo de co-cadenas.

De manera dual a $\mathbf{C}(\mathbf{A})$, para una categoría aditiva $\mathbf{A}$, podemos considerar la categoría cuyos objetos sean co-cadenas, y sus morfismos sean morfismos de co-cadenas, a dicha categoría se denotará con $\mathbf{C}^{op}(\mathbf{A})$, además esta categoría resulta ser aditiva.

Recordemos que sí $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una cadena en ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$ decimos que la sucesión

$$C: \ ... \ \to \ C_{n+1} \ \overset{\partial_{n+1}}{\to} \ C_n \ \overset{\partial_n}{\to} \ C_{n+1} \ \to \ ...$$

es exacta en C_n, si $im\,(\partial_{n+1}) = \ker(\partial_n)$; y que C es exacta , si C_n es exacta para toda $n \in \mathbb{Z}$. Como ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ y $\mathbf{Ab}$ son ejemplos de categorías abelianas, este último hecho motiva la siguiente definición.

4.7 Definición. *Una cadena $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en una categoría abeliana A, se dice que es* exacta en C_n, *si $im\,(\partial_{n+1}) = \ker(\partial_n)$. Diremos que C es* exacta*, si para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, es exacta en C_n.*

Para finalizar esta sección hagamos una observación.

4.8 Observación. Si

$$0 \ \longrightarrow \ M' \ \xrightarrow{\varphi} \ M \ \xrightarrow{\varphi'} \ M'' \ \longrightarrow \ 0$$

es una cadena exacta en ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$ que se escinde, entonces $M = M' \oplus_{\Lambda} M''$, e inversamente la sucesión

$$0 \ \longrightarrow \ M' \ \xrightarrow{i_{M'}} \ M' \oplus_{\Lambda} M'' \ \xrightarrow{p_{M''}} \ M'' \ \longrightarrow \ 0$$

se escinde. Por (3.2) $M' \oplus_{\Lambda} M''$ es el biproducto de M' y M. Entonces una cadena

$$0 \ \longrightarrow \ M' \ \xrightarrow{\varphi} \ M \ \xrightarrow{\varphi'} \ M'' \ \longrightarrow \ 0$$

se escinde si, y sólo si M es un biproducto de M' y M. Es decir, se escinde si, y sólo si existen morfismos $M \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} M'$ y $M'' \xrightarrow{\widetilde{\varphi}'} M$, tales que, $\widetilde{\varphi} \circ \varphi = 1_{M'}$, $\varphi' \circ \widetilde{\varphi}' = 1_{M''}$ y $\widetilde{\varphi} \circ \varphi + \varphi' \circ \widetilde{\varphi}' = 1_M$.

4.5 Funtores en Categorías Abelianas.

A continuación introduciremos algunas definiciones de funtores que van a hacer de gran importancia al relacionar categorías aditivas.

5.1 Definición. *Sean* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ *dos categorías aditivas. Un funtor*

$$\mathbf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$$

es un funtor aditivo, si para cualquier $X, Y \in |\mathbf{C}|$ *la función:*

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{F}: & \mathbf{C}(X,Y) & \to & \mathbf{C}'(\mathbf{F}(X), \mathbf{F}(Y)) \\ & X \xrightarrow{f} Y & \to & \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(Y) \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos.

Consideremos a Λ, Λ' dos anillos conmutativos con $1 \neq 0$.

5.2 Proposición. *Sea* $\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \to_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$ *un funtor aditivo. Entonces*

(i) *Si* $A \xrightarrow{0} B$ *es el morfismo cero. Entonces* $\mathbf{T}(A) \xrightarrow{\mathbf{T}(0)} \mathbf{T}(B)$ *es el morfismo cero.*

(ii) $\mathbf{T}(\{0\}) = \{0\}$.

Demostración. (i) Sea $A \xrightarrow{0} B$ el morfismo cero, como $0 = 0 + 0$, entonces $\mathbf{T}(0+0) = \mathbf{T}(0)$, como $\mathbf{T}$ es aditivo $\mathbf{T}(0) + \mathbf{T}(0) = \mathbf{T}(0)$. Por lo tanto $\mathbf{T}(0) = 0$.

(ii) Si A es un $\Lambda -$ *módulo*, tal que, $1_A = 0$, entonces $A = 0$, pues $1_A(a) = a = 0$ para cualquier $a \in A$. Por lo tanto $1_A = 0$ si, y solo si $A = 0$. Como $\mathbf{T}(0) = \mathbf{T}(1_0)$, entonces $0 = 1_{\mathbf{T}(0)}$, por lo tanto $0 = \mathbf{T}(0)$. ∎

5.3 Proposición. *Sea* $\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \to_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$ *un funtor aditivo. Si la cadena*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M'' \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbf{T}(M') \xrightarrow{\mathbf{T}(\varphi)} \mathbf{T}(M) \xrightarrow{\mathbf{T}(\varphi')} \mathbf{T}(M'') \longrightarrow 0$$

se escinde.

Demostración. Como la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M'' \longrightarrow 0$$

se escinde, entonces existen morfismos $M \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} M'$ y $M'' \xrightarrow{\widetilde{\varphi}'} M$ tales que $\widetilde{\varphi} \circ \varphi = 1_{M'}$, $\varphi' \circ \widetilde{\varphi}' = 1_{M''}$ y $\widetilde{\varphi} \circ \varphi + \varphi' \circ \widetilde{\varphi}' = 1_M$. Entonces como $\mathbf{T}$ es un funtor aditivo tenemos: $\mathbf{T}(\varphi') \circ \mathbf{T}(\varphi) = 0$, $1_{\mathbf{T}(M')} = \mathbf{T}(\widetilde{\varphi} \circ \varphi) = \mathbf{T}(\widetilde{\varphi}) \circ \mathbf{T}(\varphi)$, $1_{\mathbf{T}(M'')} = \mathbf{T}\left(\varphi' \circ \widetilde{\varphi}'\right) = \mathbf{T}(\varphi') \circ \mathbf{T}\left(\widetilde{\varphi}'\right)$, y $1_{\mathbf{T}(M)} = \mathbf{T}(\widetilde{\varphi}) \circ \mathbf{T}(\varphi) + \mathbf{T}(\varphi') \circ \mathbf{T}\left(\widetilde{\varphi}'\right)$. Por lo tanto

$$0 \longrightarrow \mathbf{T}(M') \xrightarrow{\mathbf{T}(\varphi)} \mathbf{T}(M) \xrightarrow{\mathbf{T}(\varphi')} \mathbf{T}(M'') \longrightarrow 0$$

es una cadena que se escinde. ■

5.3 Definición. *Dadas dos categorías C, C' abelianas. Diremos que un funtor $\mathbf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ es* exacto derecho (izquierdo)*, si para cualquier complejo exacto*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

el complejo

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}(X) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(Y) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(Z) \longrightarrow 0$$

es exacto, excepto quizás en $\mathbf{F}(X)$ $(\mathbf{F}(Y))$.

5.4 Ejemplo. *Por $(I.5.14)$, el funtor $Hom_{\Lambda}(M, \_)$ es exacto derecho.*

5.5 Ejemplo. *Por $(I.5.6)$ y $(I.5.15)$, los funtores $Hom_{\Lambda}(\_, N)$, $\_ \bigotimes_{\Lambda} N$ y $M \bigotimes_{\Lambda} \_$ son exactos izquierdos.*

Diremos que un funtor $\mathbf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ entre categorías abelianas es *exacto*, si manda complejos exactos en complejos exactos.

Capítulo 5

Elementos del Álgebra Homológica

En el presenté capítulo introduciremos algunos conceptos y resultados importantes del Álgebra Homológica.

5.1 Homología

Denotaremos con **CC** a la categoría $\mathbf{C}\left({}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\right)$.

1.1 Definición. *Sea* $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\epsilon\mathbb{Z}}$ *un objeto en* CC. *El* módulo de homología de grado n *(*dimensión n*),* $H_n(C)$*, de* C*, se define como el cociente*

$$H_n(C) = \ker(\partial_n) / im(\partial_{n+1}).$$

Dado una cadena $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\epsilon\mathbb{Z}}$, a los elementos C_n se les conocen como *cadenas de grado* n, y a los morfismos ∂_n se llaman *diferenciales u operadores frontera*. Los elementos del núcleo de ∂_n se denominan *ciclos de grado* n , denotados con $Z_n(C)$ y los elementos de la imagen de ∂_{n+1} se llaman *fronteras de grado* n, denotados con $B_n(C)$. Así $H_n(C) = Z_n(C) / B_n(C)$.

Diremos que dos elementos de $H_n(C)$ son *homólogos* si pertenecen a la misma clase lateral. El elemento de $H_n(C)$, determinado por el ciclo

c de grado n, se llama clase de homología de c y se denota con $[c]$ o con $c + im\,(\partial_{n+1})$.

Dada una cadena $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos un $\Lambda -$ *módulo* de homología $H_n\,(C)$. Entonces a la cadena C le asociamos un módulo graduado $H_*\,(C) = \{H_n\,(C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, al cual se le denomina como *homología de cadena*.

Sea $C \xrightarrow{\varphi} D$ un morfismo de cadenas

$$\begin{array}{lllllllll}
C: & ... & \to & C_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & C_n & \overset{\partial_n}{\to} & C_{n-1} & \to & ... \\
\varphi\downarrow & & & \downarrow_{\varphi_{n+1}} & & \downarrow_{\varphi_n} & & \downarrow_{\varphi_{n-1}} & & \\
D: & ... & \to & D_{n+1} & \overset{\partial'_{n+1}}{\to} & D_n & \overset{\partial'_n}{\to} & D_{n-1} & \to & ...
\end{array}$$

Para cualquiera $n \in \mathbb{Z}$, y $z \in \ker\,(\partial_n)$. Como $\partial'_n \circ \varphi_n\,(z) = \varphi_{n-1} \circ \partial_n\,(z) = 0$, entonces $\varphi_n\,(z) \in \ker\,(\partial'_n)$.

Por otro lado, si $w \in im\,(\partial_{n+1})$, entonces existe $v \in C_{n+1}$ tal que $\partial_{n+1}\,(v) = w$, como

$$\varphi_n\,(w) = \varphi_n \circ \partial_{n+1}\,(v) = \partial'_{n+1} \circ \varphi_{n+1}\,(v)$$

entonces $\varphi_n\,(w) \in im(\partial'_{n+1})$. Por lo tanto, φ_n manda el núcleo de ∂_n en el núcleo de ∂'_n, y la imagen de ∂_{n+1} en la imagen de ∂'_{n+1}.

Del hecho anterior, si $z, w \in [c] \in H_n\,(C)$, entonces $[\varphi_n\,(z)]\,, [\varphi_n\,(w)] \in H_n\,(D)$ y $[\varphi_n\,(z)] = [\varphi_n\,(w)]$. Definiendo $(\varphi_n)_*\,[c] = [\varphi_n\,(c)]$, para cualquier $[c] \in H_n\,(C)$, define un $\Lambda - morfismo$ de $H_n\,(C)$ en $H_n\,(D)$ denotado por

$$H_n\,(C) \xrightarrow{(\varphi_n)_*} H_n\,(D)$$

Por lo tanto, si $C \overset{\varphi}{\to} D$ es un morfismo de cadenas, entonces φ induce un morfismo de módulos graduados $H_*\,(C) \overset{\varphi_*}{\to} H_*\,(D) = \{H_n\,(C) \overset{(\varphi_n)_*}{\to} H_n\,(D)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Considerando la asignación

$$\begin{array}{rccc}
H_*\,(_): & \mathbf{CC} & \to & \mathbf{Mod}_{\mathbf{\Lambda}}^{\mathbb{Z}} \\
& C = \{C_n, \partial_n\} & \to & H_*\,(C) \\
& C \overset{\varphi}{\to} D & \to & H_*\,(C) \xrightarrow{\varphi_*} H_*\,(D)
\end{array}$$

vemos que a partir de su definición $H_*(\_)$ resulta ser un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas en la categoría de $\Lambda -$ *módulos* graduados.

A continuación consideremos la situación dual.

Denotaremos con $\mathbf{CC}^{op}$ a la categoría $\mathbf{C}^{op}({}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod})$.

1.2 Definición. *Dado* $C = \{C^n, \partial^n\}_{ne\mathbb{Z}}$ *un objeto en* $\mathbf{CC}^{op}$. *El* módulo de cohomología de grado n *(* dimensión n*),* $H^n(C)$*, de* C*, se define como el cociente*

$$H^n(C) = \ker(\partial^n) / im\left(\partial^{n-1}\right)$$

Por la dualidad de los conceptos para cohomología hablaremos del conjunto de *cocíclos* $Z^n(C)$ de una co-cadena, del conjunto de *cofronteras* $B^n(C)$ y de *clases de cohomología*. Llamaremos *cohomología de la co-cadena* C al módulo graduado $H^*(C) = \{H^n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. De manera dual a $H_*(\_)$, podemos considerar el funtor $H^*(\_)$ de la categoría de co-cadenas en la categoría de los $\Lambda -$ *módulos* graduados.

Diremos que una cadena $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es *trivial (cero)* si $C_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Luego, su homología es

$$H_*(C) = \{H_n(C) = 0\}_{n\in\mathbb{Z}} = 0$$

Si $C \xrightarrow{\varphi} D$ es un morfismo trivial, entonces $H_n(C) \xrightarrow{(\varphi_n)_*} H_n(D)$ es trivial para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Dados dos morfismos $C \xrightarrow{\varphi} D$ y $C \xrightarrow{\psi} D$, la pregunta natural qué surge es: ¿Bajo que condiciones se tiene $H_*(\varphi) = H_*(\psi)$? Para contestar esta pregunta introduciremos el concepto de homotopía.

1.3 Definición. *Sean* $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *dos cadenas y* $C \xrightarrow{\varphi} D$*,* $C \xrightarrow{\psi} D \in \mathbf{C}(\mathbf{A})^{mor}$*, para una categoría abeliana* A*. Diremos que* φ *es* homotópico *a* ψ *si existe una familia de* $\Lambda - morfismos$

$$h = \{C_n \xrightarrow{h_n} D_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

tales que, $\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = \varphi_n - \psi_{n,}$ *para cualquier* $n \in \mathbb{Z}$*, es decir, el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc}
C: & ... & \to & C_{n+1} & \overset{\partial_{n+1}}{\to} & C_n & \overset{\partial_n}{\to} & C_{n-1} & \to & ... \\
\varphi \downarrow\downarrow \psi & & & \varphi_{n+1} \downarrow\downarrow \psi_{n+1} & \overset{h_n}{\swarrow} & \varphi_n \downarrow\downarrow \psi_n & \overset{h_{n-1}}{\swarrow} & \varphi_{n-1} \downarrow\downarrow \psi_{n-1} & & \\
D: & ... & \to & D_{n+1} & \overset{\partial'_{n+1}}{\to} & D_n & \overset{\partial'_n}{\to} & D_{n-1} & \to & ...
\end{array}$$

conmuta. A la familia $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *se llama* homotopía de cadenas*. Si* φ *es homotópico a* ψ *lo denotaremos por* $\varphi \simeq \psi$ *o bien por* $h : \varphi \simeq \psi$ *(donde* h *es la homotopía de cadenas).*

1.4 Proposición. *Sean* $C' = \{C'_n, \partial'_n\}$*,* $C = \{C_n, \partial_n\}$*,* $C'' = \{C''_n, \partial''_n\} \in |\mathbf{C}(\mathbf{A})|$*, para una categoría abeliana* $\mathbf{A}$*. Si* $C' \xrightarrow{\varphi} C$*,* $C' \xrightarrow{\varphi'} C$ *son morfismos homotópicos, al igual que* $C \xrightarrow{\psi} C''$*,* $C \xrightarrow{\psi'} C''$*, entonces los morfismos* $\psi \circ \varphi$*,* $\psi' \circ \varphi'$ *son homotópicos.*

Demostración. Sea $h = \left\{C'_{n+1} \xrightarrow{h_n} C_n\right\}$ la homotopía entre φ y ψ, y sea $h' = \left\{C_{n+1} \xrightarrow{h'_n} C''_n\right\}$ la homotopía entre φ' y ψ'. Entonces para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\begin{array}{c}
\varphi_n - \psi_n = h_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ h_n \ \text{ y} \\
\varphi'_n - \psi'_n = h'_{n-1} \circ \partial''_n + \partial_{n+1} \circ h_n
\end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi'_n \circ \varphi_n - \psi'_n \circ \psi_n &= \varphi'_n \circ \varphi_n - \varphi'_n \circ \psi_n + \varphi'_n \circ \psi_n - \psi'_n \circ \psi_n \\
&= \varphi'_n (\varphi_n - \psi_n) + \left(\varphi'_n - \psi'_n\right) \psi_n \\
&= \left(h_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ h_n\right).
\end{aligned}$$

1.4 Teorema. *Si* $C \xrightarrow{\varphi} D$ *y* $C \xrightarrow{\psi} D$ *son dos morfismos en* $\mathbf{CC}$*, tales que,* $\varphi \simeq \psi$*. Entonces* $H_*(\varphi) = H_*(\psi)$*.*

Demostración. Sea h la homotopía. Sea $[c] \in H_n(C)$ arbitraria, y $c \in Z_n(C)$, tal que, $p(c) = [c]$, donde $Z_n(C) \xrightarrow{p} H_n(C)$ es la proyección en su cociente. Entonces

$$\varphi_n(c) - \psi_n(c) = \partial'_{n+1} \circ h_n(c) + h_{n-1} \circ \partial_n(c) = \partial'_{n+1} \circ h_n(c)$$

pues $\partial_n(c) = 0$. Como $\partial'_{n+1} \circ h_n(c) \in B_n(D)$, entonces $[\varphi_n(c)] = [\psi_n(c)]$, por lo que $(\varphi_n)_*[c] = (\psi_n)_*[c]$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $H_*(\varphi) = H_*(\psi)$.$\blacksquare$

1.5 Proposición. *Sean* $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in C(\mathbf{A})$, *con* A *una categoría abeliana , y sean* $C \xrightarrow{\varphi} D$, $C \xrightarrow{\psi} D$ *dos morfismos, tales que,* $\varphi \simeq \psi$. *Si*

$$\mathbf{T} : _{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow _{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

es un funtor aditivo, entonces los morfismos de cadenas $\mathbf{T}(\varphi)$ *y* $\mathbf{T}(\psi)$ *son homotópicos.*

Demostración. Como φ, φ' son homotópicos, entonces existe una familia $h = \left\{C_{n+1} \xrightarrow{h_n} D_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, tal que

$$\varphi_n - \psi_n = \partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como $\mathbf{T}$ es un funtor aditivo, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, tenemos un $\Lambda - morfismo$ $\mathbf{T}(C_{n+1}) \xrightarrow{\mathbf{T}(h_n)} \mathbf{T}(D_n)$ y

$$\mathbf{T}(\varphi_n - \psi_n) = \mathbf{T}\left(\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n\right) = \mathbf{T}\left(\partial'_{n+1} \circ h_n\right) + \mathbf{T}(h_{n-1} \circ \partial_n).$$

Entonces

$$\mathbf{T}(\varphi_n) - \mathbf{T}(\psi_n) = \mathbf{T}\left(\partial'_{n+1} \circ h_n\right) + \mathbf{T}(h_{n-1} \circ \partial_n).$$

Por lo tanto $\mathbf{T}(h) : \mathbf{T}(\varphi) \simeq \mathbf{T}(\psi)$ es una homotopía.$\blacksquare$

Si $C \xrightarrow{0} C$ es el morfismo trivial y $C \xrightarrow{1_C} C$ es el morfismo identidad, entonces una homotopía h, tal que, $0 \simeq_h 1_C$, se llama *contracción*. Si h es una contracción, entonces

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = 1c_n,\, n \in \mathbb{Z}$$

Por (1.4) $H_*(C) = 0$, por lo tanto, C es exacta.

Dadas C, D, E cadenas en $\mathbf{CC}$. Como $\mathbf{CC}$ es una categoría abeliana, entonces podemos formar sucesiones exactas de cortas de la forma:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

para entender mejor estas sucesiones utilizaremos la siguiente proposición.

1.6 Proposición. *Sean* $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $E = \{E_n, \partial''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *objetos en* **CC** *y* $C \xrightarrow{f} D$, $D \xrightarrow{g} E$ *morfismos de cadenas en* **CC**. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta*

(ii) Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, *la sucesión* $0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$ *es exacta.*

Demostración. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Como $\ker(g) = im\,(f)$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $\ker(g_n) = im\,(f_n.)$. Como $im\,(g) = 0$ y $\ker(f) = 0$, entonces $im\,(g_n) = 0$ y $\ker(f_n) = 0$, para cada $n \geq 0$. Por lo tanto $0 \to C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \to 0$ es exacta.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Como para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $\ker(g_n) = im\,(f_n)$, entonces $\ker(g) = \{\ker(g_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{im\,(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = im\,(f)$, entonces $\ker(g) = im\,(f)$. Por otro lado como $im\,(g_n) = 0$ y $\ker(f_n) = 0$, para cada $n \geq 0$, entonces $im\,(g) = 0$ y $\ker(f) = 0$. Por lo tanto $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ es una sucesión exacta. ■

De la proposición anterior dada una sucesión exacta corta de cadenas

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

si ponemos las cadenas verticales se tiene el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & E_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial_{n+1}\downarrow & & \partial'_{n+1}\downarrow & & \partial''_{n+1}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial_n\downarrow & & \partial'_n\downarrow & & \partial''_n\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Donde cada renglón es exacto.

Para finalizar esta sección, probaremos el siguiente teorema básico.

1.7 Teorema. *Sea* $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\varphi} D \xrightarrow{\varphi'} E \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de cadenas. Entonces existe un* $\Lambda - morfismo$

$$k_n : H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$*, tal que, la siguiente sucesión es exacta.*

$$\begin{array}{cccccccc} ... & \rightarrow & H_n(D) & \overset{(\varphi'_n)_*}{\rightarrow} & H_n(E) & \overset{k_n}{\rightarrow} & H_{n-1}(C) & \rightarrow \\ \cdots & \overset{(\varphi'_{n-1})}{\rightarrow} & H_{n-1}(E) & \overset{k_{n-1}}{\rightarrow} & H_{n-2}(C) & \overset{(\varphi_n)_*}{\rightarrow} & \cdots & \end{array}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Considerando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & C_{n+1} & \overset{\varphi_{n+1}}{\rightarrow} & D_{n+1} & \overset{\varphi'_{n+1}}{\rightarrow} & E_{n+1} & \rightarrow & 0 \\ & & \partial_{n+1}\downarrow & & \partial'_{n+1}\downarrow & & \partial''_{n+1}\downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & C_n & \overset{\varphi_n}{\rightarrow} & D_n & \overset{\varphi'_n}{\rightarrow} & E_n & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Por $(I.3.14)$ tenemos dos sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow \ker(\partial_n) \rightarrow \ker(\partial'_n) \rightarrow \ker(\partial''_n) \quad \text{y}$$

$$co\ker(\partial_n) \rightarrow co\ker(\partial'_n) \rightarrow co\ker(\partial''_n) \rightarrow 0.$$

Como $im(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$, la asignación $j_n(c + im(\partial_{n+1})) = c + \ker(\partial_n)$, $c + im(\partial_{n+1}) \in C_n/im(\partial_{n+1})$, es un $\Lambda - morfismo$, entonces j_n induce un $\Lambda - morfismo$

$$i_n : co\ker(\partial_n) = C_n/im(\partial_{n+1}) \rightarrow C_n/\ker(\partial_n) \cong im(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$$

tal que

$$\begin{array}{rcl} \ker(i_n) & = & \ker(\partial_n)/im(\partial_{n+1}) = H_n(C) \\ co\ker(i_n) & = & \ker(\partial_{n-1})/im(\partial_n) = H_{n-1}(C) \end{array}$$

por lo tanto, ∂_n induce a i_n. Análogamente, ∂'_n y ∂''_n inducen morfismos

$$i'_n : co\ker(\partial'_n) \rightarrow \ker(\partial'_{n-1}) \quad \text{y} \quad i''_n : co\ker(\partial''_n) \rightarrow \ker(\partial''_{n-1})$$

tales que $\ker(i'_n) = H_n(D)$, $co\ker(i'_n) = H_{n-1}(D)$ y $\ker(i''_n) = H_n(E)$, $co\ker(i''_n) = H_{n-1}(E)$. Entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{rcccccccc} & co\ker(\partial_n) & \rightarrow & co\ker(\partial'_n) & \rightarrow & co\ker(\partial''_n) & \rightarrow & 0 \\ & i_n\downarrow & & i'_n\downarrow & & i''_n\downarrow & & \\ 0 \rightarrow & \ker(\partial_{n-1}) & \rightarrow & \ker(\partial'_{n-1}) & \rightarrow & \ker(\partial''_{n-1}) & & \end{array}$$

Por $(I.3.14)$ existe un $\Lambda - morfismo$ de conexión, tal que, la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to \ker(i_n) \to \ker(i'_n) \to \ker(i''_n) \overset{k_n}{\to} co\ker(i_n) \to co\ker(i'_n) \to co\ker(i''_n) \to 0$$

Es decir la sucesión

$$\cdots \to H_n(D) \longrightarrow H_n(E) \xrightarrow{k_n} H_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(D) \to \cdots$$

es exacta. ■

5.2 Resoluciones

2.1 Definición. *Sea M un $\Lambda -$ módulo. Una* resolución proyectiva *de M es una cadena exacta P de la forma:*

$$P: \ \ldots \ \to \ P_n \ \overset{\partial_n}{\to} \ P_{n-1} \ \overset{\partial_{n-1}}{\to} \ \ldots \ \to \ P_1 \ \overset{\partial_1}{\to} \ P_0 \ \overset{\varepsilon}{\to} \ M \ \to \ 0$$

donde P_n es proyectivo para toda $n \geq 0$.

Es decir una resolución proyectiva de M es una cadena positiva de $\Lambda -$ *módulos* proyectivos $P = \{P_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (i.e, $P_n = 0$ para $n \leq -1$), tal que, $H_n(P) = 0$ para $n \geq 1$.

En particular, si en (2.1) P_n es libre para cada n, diremos que P es una resolución libre de M.

2.2 Definición. *Sea M un $\Lambda -$ módulo. Una* presentación proyectiva *de M es una sucesión exacta corta de $\Lambda -$ módulos*

$$0 \ \longrightarrow \ K \ \longrightarrow \ P \ \longrightarrow \ M \ \longrightarrow \ 0$$

donde P es proyectivo. Es decir, es un segmento inicial de una resolución proyectiva con $P = P_0$ y $K = \ker(\partial_1)$.

En el caso de que P sea libre tendremos una *presentación libre* de M.

Si, para cada $i > n$, $P_i = 0$, diremos que la resolución P tiene *longitud* $\leq n$, es decir, la resolución es de la forma

$$0 \ \to \ P_n \ \overset{\partial_n}{\to} \ P_{n-1} \ \overset{\partial_{n-1}}{\to} \ \cdots \ \to \ P_1 \ \overset{\partial_1}{\to} \ P_0 \ \overset{\varepsilon}{\to} \ M \ \to \ 0$$

2.3 Definición. *Diremos que un complejo de cadena positiva* $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es* acíclica, *si* $H_n(C) = 0$ *para* $n \geq 1$. *Es decir* C *es exacta hasta* C_1 *y* $H_0(C)$ *puede ser diferente de cero. Es decir, la sucesión.*

$$\cdots \;\to\; C_n \;\overset{\partial_n}{\to}\; C_{n-1} \;\to\; \cdots \;\to\; C_1 \;\overset{\partial_1}{\to}\; C_0 \;\to\; H_0(C) \;\to\; 0$$

es exacta.

2.4 Definición. Dada P una resolución proyectiva de un $\Lambda-$ *módulo* M

$$P: \;\; ... \;\to\; P_n \;\overset{\partial_n}{\to}\; P_{n-1} \;\overset{\partial_{n-1}}{\to}\; ... \;\to\; P_1 \;\overset{\partial_1}{\to}\; P_0 \;\overset{\varepsilon}{\to}\; M \;\to\; 0$$

Una *resolución proyectiva reducida* de M es una resolución proyectiva de M en la cual M se ha suprimido,

$$P_M: \;\; ... \;\to\; P_n \;\overset{\partial_n}{\to}\; P_{n-1} \;\overset{\partial_{n-1}}{\to}\; ... \;\to\; P_1 \;\overset{\partial_1}{\to}\; P_0 \;\to\; 0$$

Nótese que no perdemos información acerca de P, pues $M \cong co\ker(\partial_1)$.

2.5 Ejemplo. Sea L un $\Lambda-$ *módulo* libre. Entonces

$$0 \;\to\; L \;\overset{1_L}{\to}\; L \;\to 0$$

es una resolución libre de L de longitud 0.

2.6 Ejemplo. *Consideremos* $\mathbb{Z}-$*módulos. Si* G *es un grupo cíclico de orden* n. *Entonces* G *es isomorfo a* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. *Es decir la sucesión*

$$0 \;\to\; \mathbb{Z} \;\overset{\eta}{\to}\; \mathbb{Z} \;\overset{\pi}{\to}\; G \;\to\; 0$$

donde π *es la proyección natural y* η *es la multiplicación por* n, *es una presentación proyectiva de* M. *Más aún, si consideramos la sucesión*

$$... \;\to\; P_{n+1} \;\to\; P_n \;\to\; ... \;\to\; P_1 \;\overset{\partial_1}{\to}\; P_0 \;\overset{\varepsilon}{\to}\; G \;\to 0$$

con $P_0 = P_1 = \mathbb{Z}$, $P_n = 0$ $n \geq 2$, $\varepsilon = \pi$ *y* $\partial_1 = \eta$, *es una resolución proyectiva de* G.

A continuación veamos que todo $\Lambda-$*módulo* posee una resolución proyectiva.

2.7 Proposición. *Sea* M *un* $\Lambda-$ *módulo. Entonces* M *posee una resolución libre.*

Demostración. Por $(I.4.6)$, todo $\Lambda-$ *módulo* M es cociente de un $\Lambda-$ *módulo* libre, es decir existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\mu_0} L_0 \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0$$

con L_0 libre. Como M_0 es un $\Lambda-$ *módulo*, entonces M_0 es el cociente de un $\Lambda-$ *módulo* libre, es decir, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\mu_1} L_1 \xrightarrow{\nu_1} M_0 \longrightarrow 0$$

con L_1 libre. Por inducción obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{\mu_n} L_n \xrightarrow{\nu_n} M_{n-1} \rightarrow 0$$

con L_n libre, para cada n. Definamos una sucesión

$$L: \ ... \longrightarrow L_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} L_n \xrightarrow{\partial_{n-1}} L_{n-1} \longrightarrow ...$$

con:

$$L_n = \begin{matrix} M \ \text{ si } n=-1 \\ L_n \ \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \ \text{ si } n \leq -1 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \partial_n = \begin{matrix} \eta \ \text{ si } n=0 \\ \nu_n \circ \mu_{n-1} \ \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \ \text{ si } n<0 \end{matrix}$$

Como μ_n es monomorfismo y ν_n es epimorfismo, tenemos que:

$$im\,(\partial_{n+1}) = im\,(\mu_n) = \ker(\nu_n) = \ker(\partial_n)$$

Por lo tanto L es exacta. ■

2.8 Corolario. *Cualquier* $\Lambda-$ *módulo* M *posee una resolución proyectiva.*■

Del corolario anterior para cada $\Lambda-$ *módulo* se tiene al menos una resolución proyectiva. Por lo que ahora nuestro propósito es comparar dos resoluciones proyectivas de un $\Lambda-$ *módulo*.

2.9 Definición. Dadas dos cadenas

$$\begin{array}{lcccccccccccc} C: & ... \rightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & ... \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \rightarrow 0 \\ & & & & & & & & & & & \downarrow f & \\ D: & ... \rightarrow & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & ... \rightarrow & D_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & D_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & N & \rightarrow 0 \end{array}$$

de $\Lambda-módulos$, y $M \xrightarrow{f} N$ un morfismo, una colección de $\Lambda-morfismos$

$$\widetilde{f}=\left\{C_n \xrightarrow{f_n} D_n\right\}_{n\geq 0}$$

es llamado *morfismo de cadenas sobre* f o simplemente *morfismo sobre* f, si $f_{n-1}\circ\partial_n=\partial'_n\circ f_n$ y $\varepsilon'\circ f_0=f\circ\varepsilon$.

2.10 Proposición (Teorema de Comparación). Para un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} P: & ... & \to & P_n & \overset{\partial_n}{\to} & P_{n-1} & \overset{\partial_{n-1}}{\to} & ... & \to & P_1 & \overset{\partial_1}{\to} & P_0 & \overset{\varepsilon}{\to} & M & \to & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & \downarrow_f & & \\ Q: & ... & \to & Q_n & \overset{\partial'_n}{\to} & Q_{n-1} & \overset{\partial'_{n-1}}{\to} & ... & \to & Q_1 & \overset{\partial'_1}{\to} & Q_0 & \overset{\eta}{\to} & N & \to & 0 \end{array}$$

de $\Lambda-módulos$ y $\Lambda-morfismos$, donde el renglón inferior es una cadena exacta al igual que el renglón superior, donde para cada $n\geq 0$ P_n es un $\Lambda-módulo$ proyectivo. Entonces existe $\widetilde{f}=\left\{P_n \overset{f_n}{\to} Q_n\right\}_{n\geq 0}$ un morfismo sobre f, único salvo homotopía.

Demostración. Primero probaremos la existencia de los $\Lambda-morfismos$ $P_n \overset{f_n}{\to} Q_n$ tal que $\partial'_{n+1}\circ f_{n+1}=f_n\circ\partial_{n+1}$ para toda $n\geq 0$ y $f\circ\varepsilon=\eta\circ f_0$, esto lo haremos por inducción.

Como P_0 es un $\Lambda-módulo$ proyectivo y η es un epimorfismo, existe un $\Lambda-morfismo$ $P_0 \xrightarrow{f_0} Q_0$, tal que, $\eta\circ f_0=f\circ\varepsilon$. Supongamos que $n\geq 0$, y que están definidos los morfismos $P_i \xrightarrow{f_I} Q_i$ para $0\leq i\leq n$, tales que, $\partial'_i\circ f_{i+1}=f_i\circ\partial_{i+1}$ para $0\leq i\leq n-1$. Como P_{n+1} es proyectivo, y la sucesión Q es exacta , se tiene que el $\Lambda-morfismo$ $f_n\circ\partial_{n+1}$ cumple con

$$\partial'_n\circ(f_n\circ\partial_{n+1})=\left(\partial'_n\circ f_n\right)\circ\partial_{n+1}=(f_{n-1}\circ\partial_n)\circ\partial_{n+1}=0$$

Entonces existe un $\Lambda-morfismo$ $P_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}} Q_{n+1}$ tal que $\partial'_{n+1}\circ f_{n+1}=f_n\circ\partial_{n+1}$, ya que P_{n+1} es proyectivo. Por lo tanto hemos definido $\widetilde{f}=\left\{C_n \xrightarrow{f_n} D_n\right\}_{n\geq 0}$ un morfismo sobre f.

Supongamos que $g=\left\{P_n \overset{g_n}{\to} Q_n\right\}_{n\geq 0}$ es otro morfismo sobre f. Es decir $\eta\circ g_0=f\circ\varepsilon$ y $\partial'_{n+1}\circ g_{n+1}=g_n\circ\partial_{n+1}$ para $n\geq 0$.

Como $\eta\,(f_0-g_0)=0$, y $Q_1 \xrightarrow{\partial'_1} Q_0 \xrightarrow{\eta} N$ es exacta, entonces existe un $\Lambda-morfismo$ $P_0 \xrightarrow{h_0} Q_1$ tal que $\partial'_1\circ h_0=f_0-g_0$, ya que P_0 es proyectivo. Por otro lado, si $M \xrightarrow{h_{-1}} Q_0$ es el morfismo cero, entonces tenemos $f_0-g_0=\partial'_1\circ h_0+h_{-1}\circ\varepsilon$.

Supongamos que $n \geq 0$, y que se tienen construidos $\Lambda - morfismos$ $P_i \xrightarrow{h_i} Q_{i+1}$ con $0 \leq i \leq n$ tales que $f_i - g_i = \partial'_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ \partial_i$ para $0 \leq i \leq n$ y $f_0 - g_0 = \partial'_1 \circ h_0 + h_{-1} \circ \varepsilon$. Considerando el diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & P_{n+1} & & \\ & & \downarrow & f_{n+1}-g_{n+1}-h_n\circ\partial_{n+1} & \\ Q_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & Q_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & Q_n \end{array}$$

Se sigue

$$\begin{aligned} & \partial'_{n+1} \circ (f_{n+1} - g_{n+1} - h_n \circ \partial_{n+1}) \\ = \; & f_n \circ \partial_{n+1} - g_n \circ \partial_{n+1} - \partial'_{n+1} \circ (h_n \circ \partial_{n+1}) \\ = \; & \big(f_n - g_n - \partial'_{n+1} \circ h_n\big) \circ \partial_{n+1} \\ = \; & (h_{n-1} \circ \partial_n) \circ \partial_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

entonces existe un $\Lambda - morfismo$ $P_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} Q_{n+2}$, tal que, $f_{n+1} - g_{n+1} - h_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+2} \circ h_{n+1}$, es decir $f_{n+1} - g_{n+1} = h_n \circ \partial_{n+1} + \partial'_{n+2} \circ h_{n+1}$. Por lo tanto $\widetilde{f}$ y g son homotópicas ■

2.11 Observación. *Para un $\Lambda -$ módulo M y*

$$P: \quad \ldots \to P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

$$P': \quad \ldots \to P'_n \xrightarrow{\partial'_n} P'_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \ldots \to P'_1 \xrightarrow{\partial'_1} P'_0 \xrightarrow{\eta} M \to 0$$

dos resoluciones proyectivas de M. Por el teorema de comparación existen morfismos $P_M \xrightarrow{f} P'_M$ y $P'_M \xrightarrow{g} P_M$ de cadenas sobre 1_M. Entonces $P_M \xrightarrow{g\circ f} P_M$ y $P'_M \xrightarrow{f\circ g} P'_M$ son morfismos sobre 1_M, como $P_M \xrightarrow{1_{P_M}} P_M$ y $P'_M \xrightarrow{1_{P'_M}} P'_M$ son morfismos sobre 1_M, entonces $g \circ f \simeq 1_{P_M}$ y $f \circ g \simeq 1_{P'_M}$.

A partir de la observación anterior para un $\Lambda - módulo$ M, con P, P' dos resoluciones proyectivas de M, existe un morfismo de cadenas $P \xrightarrow{\varphi} P'$ único salvo homotopías.

Consideremos la situación dual a (2.1).

2.12 Definición. *Dada un $\Lambda -$ módulo M, diremos que la co-cadena exacta*

$$I: \quad 0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots \xrightarrow{\partial^{n-1}} I^n \xrightarrow{\partial^n} I^{n+1} \to \cdots$$

es una resolución inyectiva *de M, si I^n es un $\Lambda -$ módulo inyectivo para cada $n \geq 0$.*

En otras palabras una resolución inyectiva de un $\Lambda -$ *módulo* M es una co-cadena positiva de $\Lambda -$ *módulos* inyectivos.

Más adelante probaremos la situación dual a (2.8). Por lo mientras se asumiremos que es válido.

2.13 Definición. *Para dos co-cadenas.*

$$\begin{array}{cccccccccccccc} I: & 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \xrightarrow{\partial^0} & I^1 & \xrightarrow{\partial^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{\partial^n} & I^{n+1} & \rightarrow & \cdots \\ & & & {}_f\downarrow & & & & & & & & & & & & \\ J: & 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{\eta} & J^0 & \xrightarrow{\partial_*^0} & J^1 & \xrightarrow{\partial_*^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial_*^{n-1}} & J^n & \xrightarrow{\partial_*^n} & J^{n+1} & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

y $M \xrightarrow{f} N$ un $\Lambda - morfismo$, si $\widetilde{f} = \left\{ I^n \xrightarrow{f_n} J^n \right\}_{n \geq 0}$ es una familia $\Lambda -$ $morfismos$, tales que, $f_{n+1} \circ \partial_n = \partial_*^n \circ f_n$ para $n \geq 0$, y $f_0 \circ \varepsilon = \eta \circ f$. Diremos que $\widetilde{f}$ es un morfismo de co-cadenas *sobre f ó simplemente un* morfismo *sobre f.*

Dualizando (2.10) se obtiene la siguiente proposición.

2.14 Proposición. *Considerando el diagrama*

$$\begin{array}{cccccccccccccc} J: & 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{\eta} & J^0 & \xrightarrow{\partial_*^0} & J^1 & \xrightarrow{\partial_*^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial_*^{n-1}} & J^n & \xrightarrow{\partial_*^n} & J^{n+1} & \rightarrow & \cdots \\ & & & {}_f\downarrow & & & & & & & & & & & & \\ I: & 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \xrightarrow{\partial^0} & I^1 & \xrightarrow{\partial^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{\partial^n} & I^{n+1} & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

de $\Lambda-$módulos y $\Lambda-morfismos$, en el cual ambos renglones son co-cadenas exactas, y I^n es un $\Lambda -$ módulo inyectivo para cada $n \geq 0$. Entonces existe $\widetilde{f}$ un morfismo sobre f, único salvo homotopías.

2.15 Observación. *Para un $\Lambda -$ módulo M, y*

$$\begin{array}{cccccccccccccc} I: & 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \xrightarrow{\partial^0} & I^1 & \xrightarrow{\partial^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{\partial^n} & I^{n+1} & \rightarrow & \cdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ I_*: & 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\varepsilon_*} & I_*^0 & \xrightarrow{\partial_*^0} & I_*^1 & \xrightarrow{\partial_*^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial_*^{n-1}} & I_*^n & \xrightarrow{\partial_*^n} & I_*^{n+1} & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

dos resoluciones inyectivas de M. De manera dual a (2.11) existe un morfismo $I \xrightarrow{\psi} I_*$ de co-cadenas único salvo homotopías, y además es una equivalencia homotópica.

Capítulo 6

Funtores Derivados

6.1 Construcciones de los Funtores Derivados.

Sean Λ, Λ' dos anillos conmutativos con $1 \neq 0$.

Sean

$$\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

un funtor covariante aditivo y

$$\mathbf{T}' :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

un funtor contravariante aditivo. Sean M', M, M'' $\Lambda - \textit{módulos}$, con

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
P': & ... & \rightarrow & P'_n & \overset{\partial'_n}{\rightarrow} & P_{n-1} & \overset{\partial'_{n-1}}{\rightarrow} & ... & \rightarrow & P_1 & \overset{\partial'_1}{\rightarrow} & P_0 & \overset{\varepsilon'}{\rightarrow} & M' & \rightarrow & 0 \\
P: & ... & \rightarrow & P_n & \overset{\partial_n}{\rightarrow} & P_{n-1} & \overset{\partial_{n-1}}{\rightarrow} & ... & \rightarrow & P_1 & \overset{\partial_1}{\rightarrow} & P_0 & \overset{\varepsilon}{\rightarrow} & M & \rightarrow & 0 \\
P'': & ... & \rightarrow & P''_n & \overset{\partial''_n}{\rightarrow} & P''_{n-1} & \overset{\partial''_{n-1}}{\rightarrow} & ... & \rightarrow & P''_1 & \overset{\partial''_1}{\rightarrow} & P_0 & \overset{\varepsilon''}{\rightarrow} & M'' & \rightarrow & 0
\end{array}$$

resoluciones proyectivas de M', M, M'' respectivamente.

Como $\mathbf{T}\,(P_M)$ es una sucesión descendente, mientras que $\mathbf{T}'\,(P_M)$ es una sucesión ascendente, entonces para cada $n \geq 0$ tiene sentido definir:

$$\begin{array}{rcl}
L_n\mathbf{T}(M) & = & H_n\,(\mathbf{T}\,(P_M)) = \ker\,(\mathbf{T}\,(\partial_n))\,/im\,(\mathbf{T}\,(\partial_{n+1})) \\
R^n\mathbf{T}'\,(M) & = & H^n\left(\mathbf{T}'\,(P_M)\right) = \ker\left(\mathbf{T}'\,(\partial_{n+1})\right)/im\left(\mathbf{T}'\,(\partial_n)\right)
\end{array}$$

1.1 Proposición. *Para un $\Lambda-$ módulo M, $L_n\mathbf{T}(M)$ $(R^n\mathbf{T}'(M))$, no depende de la resolución proyectiva.*

Demostración. Consideremos a

$$Q: \quad ... \quad \to \quad Q_n \quad \overset{\partial'_n}{\to} \quad Q_{n-1} \quad \overset{\partial'_{n-1}}{\to} \quad ... \quad \to \quad Q_1 \quad \overset{\partial'_1}{\to} \quad Q_0 \quad \overset{\varepsilon'}{\to} \quad M \quad \to \quad 0$$

otra resolución proyectiva de M. Por $(V.2.11)$ existen $P_M \xrightarrow{f} Q_M$, $Q_M \xrightarrow{g} P_M$ morfismos de cadenas, tales que, $g \circ f \sim 1_{P_M}$ y $f \circ g \sim 1_{Q_M}$. Como $\mathbf{T}$ $(\mathbf{T}')$ es un funtor aditivo se tiene:

$$\mathbf{T}(g \circ f) \simeq \mathbf{T}(1_{P_M})$$

y

$$\mathbf{T}(f \circ g) \simeq \mathbf{T}(1_{Q_M})$$

$(\mathbf{T}'(g \circ f) \simeq \mathbf{T}'(1_{P_M})$ y $\mathbf{T}'(f \circ g) \simeq \mathbf{T}'(1_{Q_M}))$

Por lo tanto

$$\mathbf{T}(g) \circ \mathbf{T}(f) \simeq 1_{\mathbf{T}(P_M)} \text{ y } \mathbf{T}(f) \circ \mathbf{T}(g) \simeq 1_{\mathbf{T}(Q_M)}$$

$(\mathbf{T}'(f) \circ \mathbf{T}'(g) \simeq 1_{\mathbf{T}'(P_M)}$ .y .$\mathbf{T}'(g) \circ \mathbf{T}'(f) \simeq 1_{\mathbf{T}'(Q_M)})$.

Por $(V.1.4)$

$$(\mathbf{T}(g))_* \circ (\mathbf{T}(f))_* = \left(1_{\mathbf{T}(P_M)}\right)_* \text{ y } (\mathbf{T}(f))_* \circ (\mathbf{T}(g))_* = \left(1_{\mathbf{T}(Q_M)}\right)_*$$

$((\mathbf{T}'(f))^* \circ (\mathbf{T}'(g))^* = \left(1_{\mathbf{T}'(P_M)}\right)^*$ y $(\mathbf{T}(g))^* \circ (\mathbf{T}(f))^* = \left(1_{\mathbf{T}(Q_M)}\right)^*)$. Por lo tanto $(\mathbf{T}(g))_* \circ (\mathbf{T}(f))_*$ y $(\mathbf{T}(f))_* \circ (\mathbf{T}(g))_*$ $((\mathbf{T}'(g))^* \circ (\mathbf{T}'(f))^*$ y $(\mathbf{T}'(f))^* \circ (\mathbf{T}'(g))^*)$ son los automorfismos identidad, entonces $(\mathbf{T}(g))_*$ y $(\mathbf{T}(f))_*$ $((\mathbf{T}'(f))^*$ y $(\mathbf{T}'(g))^*)$ son isomorfismos. Por lo tanto para toda $n \geq 0$,

$$H_n(\mathbf{T}(P_M)) \cong H_n(\mathbf{T}(Q_M))$$

$(H^n(\mathbf{T}'(P_M)) \cong H^n(\mathbf{T}'(Q_M)))$. ■

Sea $M' \xrightarrow{f} M$ un $\Lambda - morfismo$, por $(V.2.10)$ existe un morfismo de cadenas

$$P'_{M'} \xrightarrow{\widetilde{f}} P_M = \left\{P'_n \xrightarrow{f_n} P_n\right\}_{n \geq 0}$$

sobre f. Entonces $\mathbf{T}\left(\widetilde{f}\right)$, $\mathbf{T}'\left(\widetilde{f}\right)$ son morfismos sobre $\mathbf{T}(f)$ y $\mathbf{T}'(f)$ respectivamente. Entonces dichas familias de morfismos inducen $\Lambda - morfismos$

$$\begin{array}{rccc} H_n\left(\mathbf{T}\left(f\right)\right): & L_n\mathbf{T}\left(M'\right) & \longrightarrow & L_n\mathbf{T}\left(M\right) \\ & x+im\left(\mathbf{T}\left(\partial'_{n+1}\right)\right) & \longrightarrow & \mathbf{T}\left(f_n\left(x\right)\right)+im\left(\mathbf{T}\left(\partial_{n+1}\right)\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} H^n\left(\mathbf{T}'\left(f\right)\right): & R^n\mathbf{T}'\left(M\right) & \longrightarrow & R^n\mathbf{T}'\left(M'\right) \\ & y+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial_n\right)\right) & \longrightarrow & \mathbf{T}'\left(f_n\left(y\right)\right)+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial_n\right)\right) \end{array}$$

con $x\in\ker\left(\mathbf{T}\left(\partial'_n\right)\right)$ y $y\in\ker\left(\mathbf{T}'\left(\partial_{n+1}\right)\right)$.

Vemos que los morfismos anteriormente definidos no dependen de $\widetilde{f}$. Pues, si suponemos que

$$\widetilde{f}'=\left\{P'_n\xrightarrow{f'_n}P_n\right\}_{n\geq 0}$$

es otro morfismo sobre f, entonces $\widetilde{f}\simeq\widetilde{f}'$, como $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}'$) es un funtor aditivo se sigue:

$$\mathbf{T}\left(\widetilde{f}\right)\simeq\mathbf{T}\left(\widetilde{f}'\right)$$

($\mathbf{T}'\left(\widetilde{f}\right)\simeq\mathbf{T}'\left(\widetilde{f}'\right)$)

Por (1.4) $H_n\left(\mathbf{T}\left(f\right)\right)=H_n\left(\mathbf{T}\left(f'\right)\right)$ y $H^n\left(\mathbf{T}'\left(f\right)\right)=H^n\left(\mathbf{T}'\left(f'\right)\right)$ para cualquier $n\geq 0$. Por lo tanto $H_n\left(\mathbf{T}\left(f\right)\right)$ y $H^n\left(\mathbf{T}'\left(f\right)\right)$ son independientes de la elección de $\left\{P'_n\xrightarrow{f_n}P_n\right\}_{n\geq 0}$.

Denotaremos $H_n\left(\mathbf{T}\left(f\right)\right)=L_n\mathbf{T}\left(f\right)$ y $R^n\mathbf{T}'\left(f\right)=H^n\left(\mathbf{T}'\left(f\right)\right)$.

Como 1_P es un morfismo sobre 1_M, de las definiciones de $L_n\mathbf{T}\left(1_M\right)$ y $R^n\mathbf{T}'\left(1_M\right)$ se sigue que son las identidades en $L_n\mathbf{T}\left(M\right)$ y $R^n\mathbf{T}'\left(M\right)$ respectivamente. Por lo tanto $L_n\mathbf{T}\left(1_M\right)=1_{L_n\mathbf{T}(M)}$ y $R^n\mathbf{T}'\left(1_M\right)=1_{R^n\mathbf{T}'(1_M)}$.

Si $M\xrightarrow{g}M''$ es un $\Lambda-morfismo$ y

$$\left\{M_n\xrightarrow{g_n}M''_n\right\}_{n\geq 0}$$

un morfismo sobre g, entonces

$$\left\{M'_n\xrightarrow{g_n\circ f_n}M''_n\right\}_{n\geq 0}$$

es un morfismo sobre $g\circ f$. Además, si $x\in\ker\left(\mathbf{T}\left(\partial'_n\right)\right)$ y $y\in\ker\left(\mathbf{T}'\left(\partial''_n\right)\right)$, entonces

$$\begin{array}{cc} & L_n\mathbf{T}\left(g\circ f\right)\left(x+im\left(\mathbf{T}\left(\partial'_{n+1}\right)\right)\right) \\ = & \left(\mathbf{T}\left(g_n\right)\circ\mathbf{T}\left(f_n\right)\right)\left(x\right)+im\left(\mathbf{T}\left(\partial''_{n+1}\right)\right) \\ = & \mathbf{T}\left(g_n\right)\left(\mathbf{T}\left(f_n\right)\left(x\right)\right)+im\left(\mathbf{T}\left(\partial''_{n+1}\right)\right) \\ = & L_n\mathbf{T}\left(g\right)\left(\left(\mathbf{T}\left(f_n\right)\left(x\right)\right)+im\left(\mathbf{T}\left(\partial_{n+1}\right)\right)\right) \\ = & L_n\mathbf{T}\left(g\right)\circ L_n\mathbf{T}\left(f\right)\left(x+im\left(\mathbf{T}\left(\partial'_{n+1}\right)\right)\right) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{cc} & R^n\mathbf{T}'(g\circ f)\left(y+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial''_{n+1}\right)\right)\right) \\ = & \mathbf{T}'(g_n\circ f_n)(y)+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial'_{n+1}\right)\right) \\ = & \mathbf{T}'(f_n)\circ\mathbf{T}'(g_n)(y)+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial'_{n+1}\right)\right) \\ = & R^n\mathbf{T}'(f)\left(\mathbf{T}'(g_n)(y)+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial_{n+1}\right)\right)\right) \\ = & R^n\mathbf{T}'(f)\circ R^n\mathbf{T}'(g)\left(y+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial''_{n+1}\right)\right)\right) \end{array}$$

Por lo tanto

$$L_n\mathbf{T}(g\circ f)=L_n\mathbf{T}(g)\circ L_n\mathbf{T}(f)$$

y

$$R^n\mathbf{T}'(g\circ f)=R^n\mathbf{T}'(f)\circ R^n\mathbf{T}'(g)$$

A partir de esos resultados hemos demostrado la siguiente proposición.

1.2 Proposición. *Sean $n\geq 0$, $\mathbf{T}:{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\rightarrow{}_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\ (\mathbf{Ab})$ un funtor covariante aditivo y $\mathbf{T}':{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\rightarrow{}_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\ (\mathbf{Ab})$ un funtor contravariante aditivo. Entonces las asignaciones*

$$\begin{array}{cccc} L_n\mathbf{T}: & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab}) \\ & M & \rightarrow & L_n\mathbf{T}(M) \\ & M\xrightarrow{f}N & \rightarrow & L_n\mathbf{T}(M)\xrightarrow{L_n\mathbf{T}(f)}L_n\mathbf{T}(N) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} R^n\mathbf{T}': & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \rightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab}) \\ & M & \rightarrow & R^n\mathbf{T}'(M) \\ & M\xrightarrow{f}N & \rightarrow & R^n\mathbf{T}'(N)\xrightarrow{R^n\mathbf{T}'(f)}R^n\mathbf{T}'(M) \end{array}$$

son funtores covariante y contravariante respectivamente.■

Si $M'\xrightarrow{h}M$ es un $\Lambda-morfismo$ con $\widetilde{h}=\left\{M'_n\xrightarrow{h_n}M_n\right\}_{n\geq 0}$ un morfismo sobre h, entonces

$$\left\{M'_n\xrightarrow{f_n+h_n}M_n\right\}_{n\geq 0}$$

es un morfismo sobre $f+h$. Entonces para cualesquiera $x\in\ker\left(\mathbf{T}\left(\partial'_{n+1}\right)\right)$ y $y\in\ker\left(\mathbf{T}'\left(\partial_{n+1}\right)\right)$ se tiene:

$$\begin{array}{cc} & L_n\mathbf{T}(f+h)\left(x+im\left(\mathbf{T}\left(\partial'_{n+1}\right)\right)\right) \\ = & \mathbf{T}(f_n+h_n)(x)+im\left(\mathbf{T}\left(\partial_{n+1}\right)\right) \\ = & \left(\mathbf{T}(f_n)(x)+\mathbf{T}(h_n)(x)\right)+im\left(\mathbf{T}\left(\partial_{n+1}\right)\right) \\ = & \left(\mathbf{T}(f_n)(x)+im\left(\mathbf{T}\left(\partial_{n+1}\right)\right)\right)+\left(\mathbf{T}(h_n)(x)+im\left(\mathbf{T}\left(\partial_{n+1}\right)\right)\right) \\ = & L_n\mathbf{T}(f)\left(x+im\left(\mathbf{T}\left(\partial'_{n+1}\right)\right)\right)+L_n\mathbf{T}(h)\left(x+im\left(\mathbf{T}\left(\partial'_{n+1}\right)\right)\right) \end{array}$$

Por otro lado

$$\begin{array}{rc} & R^n\mathbf{T}'(f+h)(y+im(\mathbf{T}(\partial_{n+1}))) \\ = & \mathbf{T}'(f_n+h_n)(y)+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial'_{n+1}\right)\right) \\ = & (\mathbf{T}'(f_n)(y)+\mathbf{T}'(h_n)(y))+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial'_{n+1}\right)\right) \\ = & \left(\mathbf{T}'(f_n)(y)+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial'_{n+1}\right)\right)\right)+\left(\mathbf{T}'(h_n)(y)+im\left(\mathbf{T}'\left(\partial'_{n+1}\right)\right)\right) \\ = & R^n\mathbf{T}'(f)(y+im(\mathbf{T}(\partial_{n+1})))+R^n\mathbf{T}'(h)(y+im(\mathbf{T}(\partial_{n+1}))) \end{array}$$

Por lo tanto

$$L_n\mathbf{T}(f+h)=L_n\mathbf{T}(f)+L_n\mathbf{T}(f)$$

y

$$R^n\mathbf{T}'(f+h)=R^n\mathbf{T}'(f)+R^n\mathbf{T}'(h)$$

Con esto acabamos de demostrar la siguiente proposición.

1.3 Proposición. *Sean $n\geq 0$, $\mathbf{T}:_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\to_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\;(\mathbf{Ab})$ un funtor covariante aditivo y $\mathbf{T}':_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\to_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\;(\mathbf{Ab})$ un funtor contravariante aditivo. Entonces los funtores L_nT y R^nT' son aditivos.*$\blacksquare$

Al funtor $L_n\mathbf{T}$ se le suele llamar el *funtor derivado izquierdo de grado* n de $\mathbf{T}$, mientras que a $R^n\mathbf{T}'$ se le suele llamar el *funtor derivado derecho de grado* n de $\mathbf{T}'$. Nótese que hasta el momento sólo tenemos el concepto de funtor derivado izquierdo para un funtor covariante aditivo, mientras que solo hemos definido el concepto de funtor derivado derecho para funtores aditivos contravariantes.

A continuación construyamos el concepto de *funtor derivado derecho* para un funtor

$$\mathbf{T}:_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\to_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

covariante aditivo, y el concepto *funtor derivado izquierdo* para un funtor

$$\mathbf{T}':_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\to_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

contravariante aditivo.

Sean M', M, M'' $\Lambda-$*módulos* y sean

$$\begin{array}{ccccccccccccc} I': & 0 & \to & M' & \xrightarrow{\varepsilon'} & I_*^0 & \xrightarrow{\partial_*^0} & I_*^1 & \xrightarrow{\partial_*^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial_*^{n-1}} & I_*^n & \xrightarrow{\partial_*^n} & \cdots \\ I: & 0 & \to & M & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \xrightarrow{\partial^0} & I^1 & \xrightarrow{\partial^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{\partial^n} & \cdots \\ I'': & 0 & \to & M'' & \xrightarrow{\varepsilon''} & I_{**}^0 & \xrightarrow{\partial_{**}^0} & I_{**}^1 & \xrightarrow{\partial_{**}^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial_{**}^{n-1}} & I_{**}^n & \xrightarrow{\partial_{**}^n} & \cdots \end{array}$$

resoluciones inyectivas de M', M, M'' respectivamente. Para $n \geq 0$ definamos

$$\begin{aligned} R^n\mathbf{T}(M) &= H^n(\mathbf{T}(I_M)) = \ker(\mathbf{T}(\partial^n))/im\left(\mathbf{T}\left(\partial^{n-1}\right)\right) \\ L_n\mathbf{T}'(M) &= H_n\left(\mathbf{T}'(I_M)\right) = \ker\left(\mathbf{T}'\left(\partial^{n-1}\right)\right)/im\left(\mathbf{T}'(\partial^n)\right) \end{aligned}$$

De manera análoga a (1.1) se obtiene que $R^n\mathbf{T}$ y $L_n\mathbf{T}'$ no dependen de la resolución inyectiva de M.

Para un $\Lambda - morfismo\ M' \xrightarrow{f} M$ y $\widetilde{f} = \left\{I_*^n \xrightarrow{f_n} I^n\right\}_{n\geq 0}$ un morfismo de co-cadenas sobre f. Entonces $\mathbf{T}\left(\widetilde{f}\right)$ es un morfismo sobre $\mathbf{T}(f)$, al igual que $\mathbf{T}'\left(\widetilde{f}\right)$ es un morfismo sobre $\mathbf{T}'(f)$. Estas familias de morfismos inducen morfismos

$$\begin{array}{rccc} H^n(\mathbf{T}(f)): & R^n\mathbf{T}(M') & \longrightarrow & R^n\mathbf{T}(M) \\ & x + im\left(\mathbf{T}\left(\partial_*^{n-1}\right)\right) & \longrightarrow & \mathbf{T}(f_n(x)) + im\left(\mathbf{T}\left(\partial^{n-1}\right)\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} H_n(\mathbf{T}'(f)): & L_n\mathbf{T}'(M) & \longrightarrow & L_n\mathbf{T}'(M') \\ & y + im(\mathbf{T}'(\partial^n)) & \longrightarrow & \mathbf{T}'(f_n(y)) + im(\mathbf{T}'(\partial_*^n)) \end{array}$$

Para $x \in \ker(\mathbf{T}(\partial_*^n))$ y $y \in \ker\left(\mathbf{T}'\left(\partial^{n-1}\right)\right)$. Procediendo de manera dual a los funtores $L_n\mathbf{T}$ y $R^n\mathbf{T}'$ se obtiene que $H^n(\mathbf{T}(f))$ y $H_n(\mathbf{T}'(f))$ no dependen de la elección de $\widetilde{f}$. Denotaremos a $H^n(\mathbf{T}(f))$ con $R^n\mathbf{T}(f)$ y $H_n(\mathbf{T}'(f))$ con $L_n\mathbf{T}(f)$.

De manera análoga a (1.3) se obtiene la siguiente proposición.

1.4 Proposición. *Sean* $n \geq 0$, $\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\ (\mathbf{Ab})$ *un funtor covariante aditivo y* $\mathbf{T}' :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\ (\mathbf{Ab})$ *un funtor contravariante aditivo. Entonces las asignaciones*

$$\begin{array}{rccc} R^n\mathbf{T}: & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab}) \\ & M & \longrightarrow & R^n\mathbf{T}(M) \\ & M \xrightarrow{f} N & \longrightarrow & R^n\mathbf{T}(M) \xrightarrow{R^n\mathbf{T}(f)} R^n\mathbf{T}(N) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} L_n\mathbf{T}': & {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab}) \\ & M & \longrightarrow & L_n\mathbf{T}'\,(M) \\ & M \xrightarrow{f} N & \longrightarrow & L_n\mathbf{T}'\,(N) \overset{L_n\mathbf{T}'(f)}{\longrightarrow} L_n\mathbf{T}'\,(M) \end{array}$$

son un funtor covariante aditivo y un funtor contravariante aditivo respectivamente. ■

Diremos que $R^n\mathbf{T}$ es el *funtor derivado derecho de grado* n de $\mathbf{T}$, mientras que $L_n\mathbf{T}'$ es el *funtor derivado izquierdo de grado* n de $\mathbf{T}'$.

Retomando lo estudiado en los capítulos I y II, si M y N son $\Lambda-$*módulos*, entonces $Hom_\Lambda(M, \_)$, $M \bigotimes_\Lambda \_$, $\_ \bigotimes_\Lambda N :_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{Mod} \rightarrow_\Lambda \mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$ son funtores covariantes aditivos mientras que $Hom_\Lambda(\_, N) :_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{Mod} \rightarrow_\Lambda \mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$ es un funtor contravariante aditivo.

1.5 Definición. *Sean $n \geq 0$, M, N $\Lambda-$ módulos. Denotaremos con:*

$$\begin{array}{lll} Tor_n^\Lambda(\_, N) & \text{a } L_nT, & \text{si } T = \_ \bigotimes_\Lambda N \\ \overline{Tor_n^\Lambda}(M, \_) & \text{a } L_nT, & \text{si } T = M \bigotimes_\Lambda \_ \\ Ext_\Lambda^n(\_, N) & \text{a } R^nT, & \text{si } T = Hom_\Lambda(\_, N) \\ \overline{Ext_\Lambda^n}(M, \_) & \text{a } R^nT, & \text{si } T = Hom_\Lambda(M, \_) \end{array}$$

De la definición anterior, $Tor_n^\Lambda(\_, N)$, $\overline{Tor_n^\Lambda}(M, \_)$ y $\overline{Ext_\Lambda^n}(M, \_)$ son funtores covariantes aditivos, mientras que $Ext_\Lambda^n(\_, N)$ es un funtor contravariante aditivo. Más adelante abordaremos la conexión que hay entre $Tor_n^\Lambda(\_, N)$ y $\overline{Tor_n^\Lambda}(M, \_)$, al igual la conexión para $Ext_\Lambda^n(\_, N)$ y $\overline{Ext_\Lambda^n}(M, \_)$.

1.6 Proposición. (Lema de Horseshoe). *Sean M', M y M'' $\Lambda-$ módulos con*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} P': & ... & \rightarrow & P_n' & \overset{\partial_n'}{\rightarrow} & P_{n-1} & \overset{\partial_{n-1}'}{\rightarrow} & ... & \rightarrow & P_1 & \overset{\partial_1'}{\rightarrow} & P_0 & \overset{\varepsilon'}{\rightarrow} & M' & \rightarrow & 0 \\ P'': & ... & \rightarrow & P_n'' & \overset{\partial_n''}{\rightarrow} & P_{n-1}'' & \overset{\partial_{n-1}''}{\rightarrow} & ... & \rightarrow & P_1'' & \overset{\partial_1''}{\rightarrow} & P_0 & \overset{\varepsilon''}{\rightarrow} & M'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

resoluciones proyectivas de M', M'' respectivamente. Si la sucesión

$$0 \rightarrow M' \overset{f}{\rightarrow} M \overset{g}{\rightarrow} M'' \rightarrow 0$$

es exacta, entonces existe

$$P: \ ... \rightarrow P_n \overset{\partial_n}{\rightarrow} P_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\rightarrow} ... \rightarrow P_1 \overset{\partial_1}{\rightarrow} P_0 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} M \rightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M *y* $P'_{M'} \xrightarrow{\widetilde{f}} P_M$, $P_M \xrightarrow{\widetilde{g}} P''_{M''}$ *morfismos sobre* f *y* g *respectivamente tales que*

$$0 \;\to\; P'_{M'} \;\overset{\widetilde{f}}{\to}\; P_M \;\overset{\widetilde{g}}{\to}\; P''_{M''} \;\to\; 0$$

es una sucesión exacta corta.

Demostración. Para $n \geq 0$, definamos a $P_n = P'_n \oplus P''_n$, y $\Lambda - morfismos$ $P'_n \xrightarrow{f_n} P_n$ y $P_n \xrightarrow{g_n} P''_n$ definidos por

$$f_n\left(x'\right) = \left(x', 0\right) \text{ y } g_n\left(x', x''\right) = x'',\; x' \in P'_n,\; x'' \in P''_n.$$

De la definición de P_n este va resultar ser un $\Lambda - módulo$ proyectivo y la sucesión

$$0 \;\longrightarrow\; P'_n \;\xrightarrow{f_n}\; P_n \;\xrightarrow{g_n}\; P''_n \;\longrightarrow\; 0$$

es exacta.

Como el $\Lambda - módulo$ P''_0 es proyectivo y g es un $\Lambda - morfismo$, entonces existe un $\Lambda - morfismo$ $P''_0 \xrightarrow{\eta} M$ tal que $g \circ \eta = \varepsilon''$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & P''_0 \\ & \overset{\eta}{\swarrow} & \downarrow_{\varepsilon''} \\ M & \underset{g}{\longrightarrow} & M'' \end{array}$$

Definiendo

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon : & P_0 & \longrightarrow & M \\ & \left(x', x''\right) & \longrightarrow & f \circ \varepsilon'\left(x'\right) + \eta\left(x''\right) \end{array}$$

Para toda $\left(x', x''\right) \in P_0$. Por la definición de ε se sigue que ε es un $\Lambda - morfismo$ tal que

$$\varepsilon \circ f_0\left(x'\right) = \varepsilon\left(x', 0\right) = f \circ \varepsilon'\left(x'\right) + \eta\left(0\right) = f \circ \varepsilon'\left(x'\right)$$

y

$$\begin{array}{rcl} g \circ \varepsilon\left(x', x''\right) & = & g\left(f \circ \varepsilon'\left(x'\right) + \eta\left(x''\right)\right) = g(f \circ \varepsilon'\left(x'\right)) + g(\eta(x)) \\ & = & 0 + g \circ \eta(x'') = \varepsilon''(x'') = \varepsilon'' \circ g_0(x', x'') \end{array}$$

para cualquier $x' \in P'_0$ y $(x', x'') \in P_0$. Por lo tanto $\varepsilon \circ f_0 = f \circ \varepsilon'$ y $g \circ \varepsilon = \varepsilon'' \circ g_0$. Si $x \in M$, entonces existe $x'' \in P''_0$ tal que $g\left(x\right) = \varepsilon''(x'')$, entonces

$$g(x) - \varepsilon''(x'') = g\left(x\right) - g \circ \eta(x'') = g(x - \eta(x'')) = 0$$

como $\ker(g) = im(f)$, entonces existe $x' \in P_0'$ tal que $x - \eta(x'') = f \circ \varepsilon'(x')$, es decir, $x = f \circ \varepsilon'(x') + \eta(x'') = \varepsilon(x', x'')$. Por lo tanto ε es un $\Lambda - epimorfismo$.

Denotando con $K_0' = \ker(\varepsilon')$, $K_0 = \ker(\varepsilon)$ y $K_0'' = \ker(\varepsilon'')$, y $K_0' \xrightarrow{i'} P_0'$, $K_0 \xrightarrow{i} P_0$, $K_0'' \xrightarrow{i''} P_0''$ los $\Lambda - morfismos$ de inclusión, entonces tomando las restricciones de f_0 en K_0' y g_0 en K_0 se inducen morfismos

$$K_0' \xrightarrow{\overline{f_0}} K_0 \ \text{ y } \ K_0 \xrightarrow{\overline{g_0}} K_0''$$

tales que $\overline{f_0}$ es un $\Lambda - morfismo$ y $\overline{g_0} \circ \overline{f_0} = 0$. Si $(x', x'') \in K_0 \cap \ker(\overline{g_0})$, entonces $x'' = 0$ y $f \circ \varepsilon'(x') = 0$, como f es un $\Lambda - morfismo$ inyectivo, entonces $\varepsilon'(x') = 0$. Por lo tanto, si $x \in K_0'$ y $(x', x'') = (x', 0) = \overline{f_0}(x')$, entonces $\ker(\overline{g_0}) \subseteq im\left(\overline{f_0}\right)$. Por lo tanto, $\ker(\overline{g_0}) = im\left(\overline{f_0}\right)$.

Sea $x'' \in K_0''$, entonces $g \circ \eta(x'') = 0$, por lo que existe un $x' \in P_0'$ tal que $\eta(x'') = f \circ \varepsilon'(x')$, entonces $\varepsilon(-x', x'') = -f \circ \varepsilon'(x') + \eta(x'') = 0$, con $(-x', x'') \in K_0$ y $\overline{g_0}(-x', x'') = x''$. Por lo tanto $\overline{g_0}$ es un $\Lambda - epimorfismo$. Entonces la siguiente sucesión es exacta.

$$0 \longrightarrow K_0' \xrightarrow{\overline{f_0}} K_0 \xrightarrow{\overline{g_0}} K_0'' \longrightarrow 0$$

Como $im(\partial_1') = K_0'$ y $im(\partial_1'') = K_0''$, entonces las asignaciones

$$\begin{array}{rccc} \overline{\partial_1'}: & P_1' & \longrightarrow & K_0' \\ & x' & \longrightarrow & \partial_1'(x') \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \overline{\partial_1''}: & P_1'' & \longrightarrow & K_0'' \\ & x'' & \longrightarrow & \partial_1''(x'') \end{array}$$

son $\Lambda - epimorfismos$, tales que, $\partial_1' = i' \circ \overline{\partial_1'}$ y $\partial_1'' = i'' \circ \overline{\partial_1''}$. Como P_1'' es proyectivo y $\overline{g_0}$ es un $\Lambda - epimorfismo$, entonces existe un $\Lambda - morfismo$ $P_1'' \xrightarrow{\eta_1} K_0$, tal que, $\overline{g_0} \circ \eta_1 = \overline{\partial_1''}$. Definiendo

$$\begin{array}{rccc} \overline{\partial_1}: & P_1 & \longrightarrow & K_0 \\ & (x', x'') & \longrightarrow & \overline{f_0} \circ \overline{\partial_1'}(x') + \eta_1(x'') \end{array}$$

$\forall\ (x', x'') \in P_1$. A partir de dicha definición se sigue $\overline{\partial_1}$ que es un $\Lambda - morfismo$. Si $x' \in P_1'$, entonces $\overline{\partial_1} \circ f_1(x') = \overline{\partial_1}(x', 0) = \overline{f_0} \circ \overline{\partial_1'}(x') + \eta_1(0) = \overline{f_0} \circ \overline{\partial_1'}(x')$. Por otro lado si $(x', x'') \in P_1$, entonces $\overline{g_0} \circ \overline{\partial_1}(x', x'') = \overline{g_0}(\overline{f_0} \circ \overline{\partial_1'}(x') + \eta_1(x'')) = 0 + \overline{g_0} \circ \eta_1(x'') = \overline{\partial_1''}(x'') = \overline{\partial_1''} \circ g_1(x'')$. Por lo tanto $\overline{\partial_1} \circ f_1 = \overline{f_0} \circ \overline{\partial_1'}$ y $\overline{g_0} \circ \overline{\partial_1} = \overline{\partial_1''} \circ g_1$.

Si $x \in K_0$, entonces existe $x'' \in P_1''$, tal que, $\overline{g_0}(x) = \overline{\partial_1''}(x'') = \overline{g_0} \circ \eta_1(x'')$, entonces $0 = \overline{g_0}(x) - \overline{g_0} \circ \eta_1(x'') = \overline{g_0}(x - \eta_1(x''))$, entonces existe $x' \in P_1'$, tal que, $x - \eta_1(x'') = \overline{f_0} \circ \overline{\partial_1'}(x')$, entonces $x = \overline{f_0} \circ \overline{\partial_1'}(x') + \eta_1(x'') = \overline{\partial_1}(x', x'')$. Por lo tanto $\overline{\partial_1}$ es un $\Lambda - epimorfismo$.

Definamos $\partial_1 = i \circ \overline{\partial_1}$. Como i es el morfismo de inclusión, entonces $im\,(\partial_1) = im\left(\overline{\partial_1}\right) = K_0 = \ker(\varepsilon)$. Por lo tanto hemos probado que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & P_1' & \overset{f_1}{\to} & P_1 & \overset{g_1}{\to} & P_1'' & \to & 0 \\
 & & \partial_1' \downarrow & & \partial_1 \downarrow & & \partial_1'' \downarrow & & \\
0 & \to & P_0' & \overset{f_0}{\to} & P_0 & \overset{g_0}{\to} & P_0'' & \to & 0 \\
 & & \varepsilon' \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & \varepsilon'' \downarrow & & \\
0 & \to & M' & \overset{f}{\to} & M & \overset{g}{\to} & M'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

es conmutativo con renglones y columnas exactas.

Supóngase que ya tenemos definidos $P_j \xrightarrow{\partial_j} P_{j-1}$ para $0 \leq j \leq n$, tal que, $\partial_j' \circ f_j = f_{j-1} \circ \partial_j$ y $\partial_j'' \circ g_j = g_{j-1} \circ \partial_j$ y $im\,(\partial_j) = \ker(\partial_{j-1})$, para $0 \leq j \leq n-1$.

Sean K_n', K_n, K_n'' los núcleos de ∂_n', ∂_n, ∂_n'' respectivamente, con $K_n' \xrightarrow{i'} P_n'$, $K_n \xrightarrow{i} P_n$, $K_n'' \xrightarrow{i''} P_n''$ los $\Lambda - morfismos$ de inclusión. Definamos a $\overline{f_n}$ como la restricción de f_n a K_n', y $\overline{g_n}$ la restricción de g_n a K_n. Como el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & P_n' & \overset{f_n}{\to} & P_n & \overset{g_n}{\to} & P_n'' & \to & 0 \\
 & & \partial_n' \downarrow & & \partial_n \downarrow & & \partial_n'' \downarrow & & \\
0 & \to & P_{n-1}' & \overset{f_{n-1}}{\to} & P_{n-1} & \overset{g_{n-1}}{\to} & P_{n-1}'' & \to & 0 \\
 & & \partial_{n-1}' \downarrow & & \partial_{n-1} \downarrow & & \partial_{n-1}'' \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

conmuta. Sí $x' \in K_n'$, como $\partial_n \circ f_n(x') = f_{n-1} \circ \partial_n'(x') = f_{n-1}(0) = 0$, entonces $f_n(x') \in K_n$. Por lo tanto $\overline{f_n}$ toma valores en K_n. Análogamente se prueba que $\overline{g_n}$ toma valores en K_n''.

Como $g_n \circ f_n = 0$, entonces $\overline{g_n} \circ \overline{f_n} = 0$; además como f_n es un $\Lambda - monomorfismo$ se tiene que $\overline{f_n}$ es un $\Lambda - monomorfismo$. Por otro lado si $(x', x'') \in K_n \cap \ker(g_n)$, entonces $x'' = 0$ y $f_{n-1} \circ \partial_n'(x') = 0$, como f_{n-1} es monomorfismo, entonces $\partial_n'(x') = 0$, es decir, si $x' \in K_n'$ y $(x', x'') = (x', 0) = \overline{f_n}(x')$, entonces $\ker(\overline{g_n}) \subseteq im\,(f_n)$. Análogamente a como se mostró que $\overline{g_0}$ es un $\Lambda - epimorfismo$, se muestra que $\overline{g_n}$ es un $\Lambda - epimorfismo$.

De lo anterior se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow K_n' \xrightarrow{\overline{f_n}} K_n \xrightarrow{\overline{g_n}} K_n'' \longrightarrow 0$$

es exacta. Consideremos los siguientes $\Lambda - morfismos$

$$\begin{array}{rccc} \overline{\partial'_{n+1}}: & P'_{n+1} & \longrightarrow & K'_n \\ & x' & \longrightarrow & \partial'_{n+1}(x') \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} \overline{\partial''_{n+1}}: & P''_{n+1} & \longrightarrow & K''_n \\ & x'' & \longrightarrow & \partial''_{n+1}(x'') \end{array}$$

A partir de su definición se tiene que son epimorfismos, tales que, $\partial'_{n+1} = i' \circ \overline{\partial'_{n+1}}$ y $\partial''_{n+1} = i'' \circ \overline{\partial''_{n+1}}$. Como $\overline{g_n}$ es un $\Lambda - epimorfismo$ y P''_{n+1} es proyectivo, entonces existe un $\Lambda - morfismo$, $P''_{n+1} \stackrel{\eta_{n+1}}{\longrightarrow} K_n$, tal que, $\overline{g_n} \circ \eta_{n+1} = \overline{\partial''_{n+1}}$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \overline{\partial_{n+1}}: & P_{n+1} & \longrightarrow & K_n \\ & (x', x'') & \longrightarrow & \overline{f_n} \circ \overline{\partial'_{n+1}}(x') + \eta_{n+1}(x'') \end{array}$$

De manera análoga a como se probó que $\overline{\partial_1}$ es un $\Lambda - epimorfismo$, se prueba que $\overline{\partial_{n+1}}$ es un $\Lambda - epimorfismo$. Además $\overline{g_n} \circ \overline{\partial_{n+1}} = \overline{\partial''_{n+1}} \circ \overline{g_{n+1}}$ y $\overline{f_n} \circ \overline{\partial'_{n+1}} = \overline{\partial_{n+1}} \circ \overline{f_{n+1}}$. Si definimos $\partial_{n+1} = i \circ \overline{\partial_{n+1}}$, se tiene que $\partial_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ \partial'_{n+1}$ y $g_n \circ \partial_{n+1} = \partial''_{n+1} \circ g_{n+1}$. Como $im(\partial_{n+1}) = im\left(\overline{\partial_{n+1}}\right) = K_n = \ker(\partial_n)$, entonces $im(\partial_{n+1}) = \ker(\partial_n)$.

Por lo tanto hemos construido la cadena

$$P: \quad ... \quad \rightarrow \quad P_n \quad \stackrel{\partial_n}{\rightarrow} \quad P_{n-1} \quad \stackrel{\partial_{n-1}}{\rightarrow} \quad ... \quad \rightarrow \quad P_1 \quad \stackrel{\partial_1}{\rightarrow} \quad P_0 \quad \stackrel{\varepsilon}{\rightarrow} \quad M \quad \rightarrow \quad 0$$

que es una resolución proyectiva de M, tal que, la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow P'_{M'} \stackrel{\widetilde{f}}{\longrightarrow} P_M \stackrel{\widetilde{g}}{\longrightarrow} P''_{M''} \longrightarrow 0$$

es exacta. ■

Aplicando el principio de dualidad a la proposición anterior se tiene el siguiente resultado.

1.7 Proposición. Sea

$$0 \longrightarrow M' \stackrel{f}{\longrightarrow} M \stackrel{g}{\longrightarrow} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de $\Lambda - módulos$, y sean

$$\begin{array}{lllllllllllll} I': & 0 & \rightarrow & M' & \stackrel{\varepsilon'}{\rightarrow} & I^0_* & \stackrel{\partial^0_*}{\rightarrow} & I^1_* & \stackrel{\partial^1_*}{\rightarrow} & \cdots & \stackrel{\partial^{n-1}_*}{\rightarrow} & I^n_* & \stackrel{\partial^n_*}{\rightarrow} & \cdots \\ I'': & 0 & \rightarrow & M'' & \stackrel{\varepsilon''}{\rightarrow} & I^0_{**} & \stackrel{\partial^0_{**}}{\rightarrow} & I^1_{**} & \stackrel{\partial^1_{**}}{\rightarrow} & \cdots & \stackrel{\partial^{n-1}_{**}}{\rightarrow} & I^n_{**} & \stackrel{\partial^n_{**}}{\rightarrow} & \cdots \end{array}$$

resoluciones inyectivas de M', M'' respectivamente. Entonces existen

$$I: \quad 0 \quad \rightarrow \quad M \quad \xrightarrow{\varepsilon} \quad I^0 \quad \xrightarrow{\partial^0} \quad I^1 \quad \xrightarrow{\partial^1} \quad \cdots \quad \xrightarrow{\partial^{n-1}} \quad I^n \quad \xrightarrow{\partial^n} \quad \cdots$$

una resolución inyectiva de M, y $I_{M'} \xrightarrow{\widetilde{f}} I_M$, $I_M \xrightarrow{\widetilde{g}} I_{M''}$ morfismos sobre f y g, tales que,

$$0 \longrightarrow I_{M'} \xrightarrow{\widetilde{f}} I_M \xrightarrow{\widetilde{g}} I_{M''} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. ■

1.8 Teorema. *Sean*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de $\Lambda-$módulos, y $T :_{\mathbf{\Lambda}} Mod \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'} Mod$ $(\mathbf{Ab})$ un funtor covariante aditivo. Entonces para cada $n \geq 0$ existen morfismos

$$L_n\mathbf{T}\left(M''\right) \xrightarrow{\kappa_n} L_{n-1}\mathbf{T}\left(M'\right)$$

tales que la sucesión

$$\begin{array}{llllllll} \cdots & \rightarrow & L_n\mathbf{T}(M') & \xrightarrow{L_n\mathbf{T}(f)} & L_n\mathbf{T}(M) & \xrightarrow{L_n\mathbf{T}(g)} & L_n\mathbf{T}(M'') & \xrightarrow{k_n} \\ \cdots & \xrightarrow{\kappa_1} & L_0\mathbf{T}(M') & \xrightarrow{L_0\mathbf{T}(f)} & L_0\mathbf{T}(M) & \xrightarrow{L_0\mathbf{T}(g)} & L_0\mathbf{T}(M'') & \rightarrow 0 \end{array}$$

es exacta.

Demostración. Sean

$$\begin{array}{lllllllllllll} P': & ... & \rightarrow & P'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & ... & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & M' & \rightarrow & 0 \\ P'': & ... & \rightarrow & P''_n & \xrightarrow{\partial''_n} & P''_{n-1} & \xrightarrow{\partial''_{n-1}} & ... & \rightarrow & P''_1 & \xrightarrow{\partial''_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon''} & M'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

resoluciones proyectivas de M', M''. Por (1.6), existe una resolución proyectiva

$$P: \quad ... \quad \rightarrow \quad P_n \quad \xrightarrow{\partial_n} \quad P_{n-1} \quad \xrightarrow{\partial_{n-1}} \quad ... \quad \rightarrow \quad P_1 \quad \xrightarrow{\partial_1} \quad P_0 \quad \xrightarrow{\varepsilon} \quad M \quad \rightarrow \quad 0$$

de M y morfismos $\left\{P'_n \xrightarrow{f_n} P_n\right\}_{n\geq 0}$, $\left\{P_n \xrightarrow{g_n} P''_n\right\}_{n\geq 0}$ sobre f y g, tal que, para cada $n \geq 0$ la sucesión

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{f_n} P_n \xrightarrow{g_n} P''_n \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces como P''_n es un $\Lambda-$*módulo* proyectivo, dicha sucesión se escinde. Por (IV.5.3) para cada $n \geq 0$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbf{T}(P'_n) \xrightarrow{\mathbf{T}(f_n)} \mathbf{T}(P_n) \xrightarrow{\mathbf{T}(g_n)} \mathbf{T}(P''_n) \longrightarrow 0$$

se escinde. Por (V.1.7), para cada $n \geq 0$ existen morfismos

$$H_n\mathbf{T}\left(P''_{M''}\right) \xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}\mathbf{T}\left(P'_{M'}\right)$$

tal que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_n(P_M) \longrightarrow H_n\left(P''_{M''}\right) \xrightarrow{k_n} H_{n-1}\left(P'_{M'}\right) \longrightarrow H_{n-1}(P_M) \longrightarrow \cdots$$

es exacta. ■

1.9 Teorema. *Sea*

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de $\Lambda-$ *módulos, y sea* $T' :_{\mathbf{\Lambda}} Mod \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'} Mod$ $(\mathbf{Ab})$ *un funtor contravariante aditivo. Entonces para cada* $n \geq 0$ *existen morfismos*

$$R^n\mathbf{T}\left(M'\right) \xrightarrow{(\kappa_n)_*} R^{n-1}\mathbf{T}\left(M''\right)$$

tales que la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & R^0\mathbf{T}'(M'') & \overset{R^0\mathbf{T}'(g)}{\rightarrow} & R^0\mathbf{T}'(M) & \overset{R^0\mathbf{T}'(f)}{\rightarrow} \\ R^0\mathbf{T}'(M') & \overset{(k_1)_*}{\rightarrow} & R^1\mathbf{T}'(M'') & \rightarrow & \cdots & \overset{R^n\mathbf{T}'(f)}{\rightarrow} \\ R^n\mathbf{T}'(M') & \overset{(k_n)_*}{\rightarrow} & R^n\mathbf{T}'(M'') & \rightarrow & \cdots & \end{array}$$

es exacta.

Demostración. Sean

$$\begin{array}{l} P' : \ \ldots \rightarrow P'_n \overset{\partial'_n}{\rightarrow} P_{n-1} \overset{\partial'_{n-1}}{\rightarrow} \ldots \rightarrow P_1 \overset{\partial'_1}{\rightarrow} P_0 \overset{\varepsilon'}{\rightarrow} M' \rightarrow 0 \\ P'' : \ \ldots \rightarrow P''_n \overset{\partial''_n}{\rightarrow} P''_{n-1} \overset{\partial''_{n-1}}{\rightarrow} \ldots \rightarrow P''_1 \overset{\partial''_1}{\rightarrow} P_0 \overset{\varepsilon''}{\rightarrow} M'' \rightarrow 0 \end{array}$$

resoluciones proyectivas de M', M''. Por (V.1.6) existe una resolución proyectiva

$$P : \ \ldots \rightarrow P_n \overset{\partial_n}{\rightarrow} P_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\rightarrow} \ldots \rightarrow P_1 \overset{\partial_1}{\rightarrow} P_0 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} M \rightarrow 0$$

de M y morfismos $\left\{P_n' \xrightarrow{f_n} P_n\right\}_{n\geq 0}$, $\left\{P_n \xrightarrow{g_n} P_n''\right\}_{n\geq 0}$ sobre f y g, tal que, para cada $n \geq 0$ la sucesión

$$0 \longrightarrow P_n' \xrightarrow{f_n} P_n \xrightarrow{g_n} P_n'' \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces como P_n'' es un $\Lambda - módulo$ proyectivo, dicha sucesión se escinde. Por $(IV.5.3)$ para cada $n \geq 0$ la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbf{T}'\left(P_n''\right) \overset{\mathbf{T}(g_n)}{\rightarrow} \mathbf{T}\left(P_n\right) \overset{\mathbf{T}(f_n)}{\rightarrow} \mathbf{T}\left(P_n'\right) \rightarrow 0$$

se escinde. Por $(V.1.7)$ para cada $n \geq 0$ existen morfismos

$$H^n\mathbf{T}\left(P_{M'}'\right) \xrightarrow{(\kappa_n)_*} H^{n-1}\mathbf{T}\left(P_{M''}''\right)$$

tal que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H^n\left(P_M\right) \longrightarrow H^n\left(P_{M'}'\right) \xrightarrow{(k_n)_*} H^{n+1}\left(P_{M''}''\right) \longrightarrow H^{n+1}\left(P_M\right) \longrightarrow \cdots$$

es exacta. ■

Para el siguiente teorema supondremos la existencia de las resoluciones inyectivas.

1.10 Teorema. Sean

$$0 \rightarrow M' \overset{f}{\rightarrow} M \overset{g}{\rightarrow} M'' \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de $\Lambda - módulos$, y sea $\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$ un funtor covariante aditivo. Entonces para cada $n \geq 0$ existen morfismos

$$R^n\mathbf{T}\left(M''\right) \xrightarrow{\lambda_n} R^{n+1}\mathbf{T}\left(M'\right)$$

tales que la sucesión

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \rightarrow & R^0\mathbf{T}\left(M'\right) & \overset{R^0\mathbf{T}(f)}{\rightarrow} & R^0\mathbf{T}\left(M\right) & \overset{R^0\mathbf{T}(g)}{\rightarrow} & R^0\mathbf{T}\left(M''\right) & \overset{\lambda_0}{\rightarrow} \\ R^1\mathbf{T}\left(M'\right) & \rightarrow & \cdots & \overset{R^n\mathbf{T}'(g)}{\rightarrow} & R^n\mathbf{T}\left(M''\right) & \overset{\lambda_n}{\rightarrow} & R^n\mathbf{T}'\left(M'\right) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

es exacta.

Demostración. Sean

$$\begin{array}{lllllllllllll} I' : & 0 & \rightarrow & M' & \overset{\varepsilon'}{\rightarrow} & I_*^0 & \overset{\partial_*^0}{\rightarrow} & I_*^1 & \overset{\partial_*^1}{\rightarrow} & \cdots & \overset{\partial_*^{n-1}}{\rightarrow} & I_*^n & \overset{\partial_*^n}{\rightarrow} & \cdots \\ I'' : & 0 & \rightarrow & M'' & \overset{\varepsilon''}{\rightarrow} & I_{**}^0 & \overset{\partial_{**}^0}{\rightarrow} & I_{**}^1 & \overset{\partial_{**}^1}{\rightarrow} & \cdots & \overset{\partial_{**}^{n-1}}{\rightarrow} & I_{**}^n & \overset{\partial_{**}^n}{\rightarrow} & \cdots \end{array}$$

resoluciones inyectivas de M', M'' respectivamente. Por (1.7) existen

$$I: \quad 0 \quad \to \quad M \quad \overset{\varepsilon}{\to} \quad I^0 \quad \overset{\partial^0}{\to} \quad I^1 \quad \overset{\partial^1}{\to} \quad \cdots \quad \overset{\partial^{n-1}}{\to} \quad I^n \quad \overset{\partial^n}{\to} \quad \cdots$$

resolución inyectiva de M y morfismos $\left\{I_*^n \xrightarrow{f_n} I^n\right\}$, $\left\{I^n \xrightarrow{g_n} I_{**}^n\right\}$ sobre f y g, tales que, para cada $n \geq 0$ la sucesión

$$0 \quad \longrightarrow \quad I_*^n \quad \xrightarrow{f_n} \quad I^n \quad \xrightarrow{g_n} \quad I_{**}^n \quad \longrightarrow \quad 0$$

es exacta, además $I^n \cong I_*^n \oplus I_{**}^n$. Por lo tanto la sucesión

$$0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{T}\left(I_*^n\right) \quad \xrightarrow{\mathbf{T}(f_n)} \quad \mathbf{T}\left(I^n\right) \quad \xrightarrow{\mathbf{T}(g_n)} \quad \mathbf{T}\left(I_{**}^n\right) \quad \longrightarrow \quad 0$$

se escinde. Por $(V.1.7)$ para cada $n \geq 0$ existen morfismos

$$H^n\mathbf{T}\left(M''\right) \xrightarrow{\lambda_n} H^{n+1}\mathbf{T}\left(M'\right)$$

tales que, la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H^n\left(I_M\right) \longrightarrow H^n\left(I''_{M''}\right) \xrightarrow{\lambda_n} H^{n+1}\left(I'_{M'}\right) \longrightarrow H^{n+1}\left(P_M\right) \longrightarrow \cdots$$

es exacta. ■

De manera análoga se prueba el siguiente teorema.

1.11 Teorema. *Sean*

$$0 \quad \longrightarrow \quad M' \quad \xrightarrow{f} \quad M \quad \xrightarrow{g} \quad M'' \quad \longrightarrow \quad 0$$

una sucesión exacta de $\Lambda -$ módulos, y sea $T' :_{\mathbf{\Lambda}} Mod \to_{\mathbf{\Lambda}'} Mod\ (\mathbf{Ab})$ un funtor contravariante aditivo. Entonces para cada $n \geq 0$ existen morfismos

$$L_n\mathbf{T}'\left(M'\right) \xrightarrow{\nu_n} L_{n-1}\mathbf{T}'\left(M''\right)$$

tales que la sucesión

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdots & \longrightarrow & L_n\mathbf{T}'(M) & \xrightarrow{L_n\mathbf{T}'(f)} & L_n\mathbf{T}'(M') & \xrightarrow{\nu_n} & L_{n-1}\mathbf{T}'(M'') & \xrightarrow{L_n\mathbf{T}'(g)} \\
\cdots & \xrightarrow{\kappa_1} & L_0\mathbf{T}'(M'') & \xrightarrow{L_0\mathbf{T}(g)} & L_0\mathbf{T}'(M) & \xrightarrow{L_0\mathbf{T}(f)} & L_0\mathbf{T}'(M') & \longrightarrow 0
\end{array}$$

es exacta.

1.12 Observación. *Sean M un $\Lambda-$ módulo proyectivo, N un $\Lambda-$ módulo inyectivo,*

$$\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

un funtor covariante aditivo y

$$\mathbf{T}' :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

un funtor contravariante aditivo. Si consideramos la cadena proyectiva

$$P: \quad ... \quad \rightarrow \quad P_n \quad \overset{\partial_n}{\rightarrow} \quad P_{n-1} \quad \overset{\partial_{n-1}}{\rightarrow} \quad ... \quad \rightarrow \quad P_1 \quad \overset{\partial_1}{\rightarrow} \quad P_0 \quad \overset{\varepsilon}{\rightarrow} \quad M \quad \rightarrow \quad 0$$

con $P_n = 0$, si $n \geq 1$, $P_0 = M$, $\varepsilon = 1_M$, se sigue que P es una resolución proyectiva de M. Por otro lado considerando la co-cadena inyectiva

$$I: \quad 0 \quad \rightarrow \quad N \quad \overset{\eta}{\rightarrow} \quad I^0 \quad \overset{\partial^0}{\rightarrow} \quad I^1 \quad \overset{\partial^1}{\rightarrow} \quad \cdots \quad \overset{\partial^{n-1}}{\rightarrow} \quad I^n \quad \overset{\partial^n}{\rightarrow} \quad \cdots$$

con $I^n = 0$, si $n \geq 1$, $I^0 = N$, $\eta = 1_N$, se sigue que I es una resolución inyectiva de N. Entonces para cada $n \geq 1$ $T\,(P_n) = 0 = T'\,(I_n)$. Por las definición de L_nT, R^nT', R^nT, para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} L_n\mathbf{T}\,(M) &= 0 \\ R^n\mathbf{T}'\,(M) &= 0 \\ R^n\mathbf{T}\,(N) &= 0 \end{aligned}$$

Pues no dependen de la elección de resoluciones.

De la observación anterior es inmediato el siguiente teorema.

1.13 Teorema. *Sean M un $\Lambda-$ módulo proyectivo, N un $\Lambda-$ módulo inyectivo,*

$$\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

un funtor covariante aditivo y

$$\mathbf{T}' :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}'}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$$

un funtor contravariante aditivo. Entonces para cada $n \geq 1$ se tiene

$$L_n\mathbf{T}\,(M) = 0, \;\; R^n\mathbf{T}'\,(M) = 0 \;\; \text{y} \;\; R^n\mathbf{T}\,(N) = 0$$

En particular, para cada $n \geq 1$ y M', N' $\Lambda-$ módulos, se tiene

$$\begin{aligned} Tor_n^{\Lambda}\left(M', M\right) &= 0 \\ Ext_{\Lambda}^{n}\left(M', M\right) &= 0 \\ \overline{Ext_{\Lambda}^{n}}\left(M, N'\right) &= 0 \\ \overline{Tor_n^{\Lambda}}\left(M, M'\right) &= 0 \end{aligned}$$

1.14 Teorema. *Sean* $\mathbf{T} :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$ *un funtor covariante exacto derecho y* $\mathbf{T}' :_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ $(\mathbf{Ab})$ *un funtor covariante (contravariante) exacto izquierdo. Entonces*

(i) $L_0\mathbf{T}$ *es naturalmente equivalente a* $\mathbf{T}$*.*

(ii) $R^0\mathbf{T}'$ *es naturalmente equivalente a* $\mathbf{T}'$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{T}'$ es un funtor contravariante exacto izquierdo. Sea M un $\Lambda-$ *módulo* y consideremos

$$P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

la parte terminal de una resolución proyectiva P de M. Como el funtor $\mathbf{T}$ es exacto derecho y $\mathbf{T}'$ es exacto izquierdo, entonces las sucesiones

$$\mathbf{T}(P_1) \xrightarrow{\mathbf{T}(\partial_1)} \mathbf{T}(P_0) \xrightarrow{\mathbf{T}(\varepsilon)} \mathbf{T}(M) \longrightarrow 0$$

$$\mathbf{T}'(P_1) \xleftarrow{\mathbf{T}'(\partial_1)} \mathbf{T}'(P_0) \xleftarrow{\mathbf{T}'(\varepsilon)} \mathbf{T}'(M) \longleftarrow 0$$

son exactas. Como $\mathbf{T}(\varepsilon)$ es un epimorfismo, entonces $\mathbf{T}(M) \cong im(\mathbf{T}(\varepsilon)) \cong \mathbf{T}(P_0)/\ker(\mathbf{T}(\varepsilon)) \cong \mathbf{T}(P_0)/im(\mathbf{T}(\partial_1))$. Por lo tanto

$$\mathbf{T}(M) \cong \mathbf{T}(P_0)/im(\mathbf{T}(\partial_1))$$

Por otro lado, como $\mathbf{T}'(\varepsilon)$ es un monomorfismo, entonces

$$\mathbf{T}'(M) \cong im\left(\mathbf{T}'(\varepsilon)\right) = \ker\left(\mathbf{T}'(\partial_1)\right)$$

Por lo tanto existen isomorfismos

$$\mathbf{T}(P_0)/im(\mathbf{T}(\partial_1)) \longrightarrow \mathbf{T}(M) \text{ y } \mathbf{T}'(M) \longrightarrow \ker(\mathbf{T}'(\partial_1))$$

A partir de la definición de $L_0\mathbf{T}$ y $R^0\mathbf{T}'$ se tiene

$$L_0\mathbf{T}(M) = \mathbf{T}(P_0)/im(\mathbf{T}(\partial_1)) \cong \mathbf{T}(M)$$

$$R^0\mathbf{T}'(M) = \ker\left(\mathbf{T}'(\partial_1)\right)/0 = \ker\left(\mathbf{T}'(\partial_1)\right) \cong \mathbf{T}'(M)$$

Sea N un $\Lambda - módulo$ y $M \xrightarrow{f} N$ un $\Lambda - morfismo$. Sea

$$Q_1 \xrightarrow{\partial_1'} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon'} N \longrightarrow 0$$

una parte terminal de una resolución proyectiva de N y sea $\left\{P_n \xrightarrow{f_n} Q_n\right\}_{n\geq 0}$ un morfismo de cadenas sobre f. Entonces los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{T}(P_1) & \xrightarrow{\mathbf{T}(\partial_1)} & \mathbf{T}(P_0) & \xrightarrow{\mathbf{T}(\varepsilon)} & \mathbf{T}(M) & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle \mathbf{T}(f_1)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{T}(f_0)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{T}(f)}\downarrow & & \\
\mathbf{T}(Q_1) & \xrightarrow{\mathbf{T}(\partial_1')} & \mathbf{T}(Q_0) & \xrightarrow{\mathbf{T}(\varepsilon')} & \mathbf{T}(N) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{T}'(P_1) & \xleftarrow{\mathbf{T}'(\partial_1)} & \mathbf{T}'(P_0) & \xleftarrow{\mathbf{T}'(\varepsilon)} & \mathbf{T}'(M) & \longleftarrow & 0 \\
{\scriptstyle \mathbf{T}'(f_1)}\uparrow & & {\scriptstyle \mathbf{T}'(f_0)}\uparrow & & {\scriptstyle \mathbf{T}'(f)}\uparrow & & \\
\mathbf{T}'(Q_1) & \xleftarrow{\mathbf{T}'(\partial_1')} & \mathbf{T}'(Q_0) & \xleftarrow{\mathbf{T}'(\varepsilon')} & \mathbf{T}'(N) & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Como dichos diagramas tienen renglones exactos, entonces se inducen los diagramas

$$\begin{array}{ccccc}
L_0\mathbf{T}(M) & \cong & \mathbf{T}(P_0)/im(\mathbf{T}(\partial_1)) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{T}(M) \\
 & & {\scriptstyle L_0\mathbf{T}(f_0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{T}(f)} \\
L_0\mathbf{T}(N) & \cong & \mathbf{T}(Q_0)/im(\mathbf{T}(\partial_1')) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{T}(N)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{T}'(N) & \xrightarrow{\cong} & \ker(\mathbf{T}'(\partial_1')) & \cong & R^0\mathbf{T}'(N) \\
{\scriptstyle \mathbf{T}'(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^0\mathbf{T}'(f)} & & \\
\mathbf{T}'(M) & \xrightarrow[\cong]{} & \ker(\mathbf{T}'(\partial_1)) & \cong & R^0\mathbf{T}'(M)
\end{array}$$

conmutativos, donde los renglones son isomorfismos. Por lo tanto $L_0\mathbf{T}$ es naturalmente equivalente a $\mathbf{T}$; mientras que el funtor $R^0\mathbf{T}'$ es naturalmente equivalente a $\mathbf{T}'$. La demostración para el caso de $\mathbf{T}'$ un funtor covariante es análoga. ■

Si M, N son $\Lambda - módulos$. Entonces los funtores $M \bigotimes_\Lambda \_$, $\_ \bigotimes_\Lambda N$ son covariantes y exactos derechos, mientras que el funtor $Hom_\Lambda(M, \_)$ es un funtor covariante exacto izquierdo y el funtor $Hom_{\Lambda}(\_, N)$ es un funtor contravariante exacto derecho. De lo anterior se sigue el siguiente corolario.

1.15. Corolario. *Para cualesquiera M, N $\Lambda-$módulos se tiene lo siguiente:*
(i) $\underline{Tor_0^{\Lambda}(\_, N)}$ es naturalmente equivalente a $\_ \bigotimes_{\Lambda} N$.
(ii) $\overline{Tor_0^{\Lambda}}(M, \_)$ es naturalmente equivalente a $M \bigotimes_{\Lambda} \_$.
(iii) $\underline{Ext_{\Lambda}^0}(\_, N)$ es naturalmente equivalente a $Hom_{\Lambda}(\_, N)$.
(iv) $\overline{Ext_{\Lambda}^0}(M, \_)$ es naturalmente equivalente a $Hom_{\Lambda}(M, \_)$.

Si $\mathbf{T} :_{\Lambda}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$ es un funtor covariante aditivo, y la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces por (1.11) se induce una sucesión exacta de la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & L_n\mathbf{T}(M') & \longrightarrow & L_n\mathbf{T}(M) & \longrightarrow & L_n\mathbf{T}(M'') & \longrightarrow & \cdots \\ \longrightarrow & \mathbf{T}(M') & \longrightarrow & \mathbf{T}(M) & \longrightarrow & \mathbf{T}(M'') & \longrightarrow & 0 & . \end{array}$$

Por otro lado, si P es una resolución proyectiva de M y $\mathbf{T}$ es un funtor exacto derecho obtenemos la sucesión

$$\mathbf{T}(P): \ \cdots \longrightarrow \mathbf{T}(P_n) \longrightarrow \cdots \ \mathbf{T}(P_0) \longrightarrow \mathbf{T}(M) \longrightarrow 0 \ .$$

Obviamente $H_m(\mathbf{T}(P)) = L_m\mathbf{T}(M) = 0$, si $m > n$. Más aún como $im\,(\mathbf{T}(P_{n+1})) = 0$, entonces

$$L_n\mathbf{T}(M) = \ker(\mathbf{T}(P_n)).$$

En el caso de $P_1 \rightarrowtail P_0 \twoheadrightarrow M$ una representación proyectiva de M se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L_1\mathbf{T}(M) \longrightarrow \mathbf{T}(P_1) \longrightarrow \mathbf{T}(P_0) \longrightarrow \mathbf{T}(M) \longrightarrow 0 \ .$$

Es decir $L_1\mathbf{T}(M)$ nos repara la inexactitud de $\mathbf{T}$ al considerar una resolución proyectiva finita de M.

Siguiendo un proceso dual, si $\mathbf{T}'_{\Lambda}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$ es un funtor contravariante exacto izquierdo, entonces $R^1\mathbf{T}'(M)$ nos repara la inexactitud al considerar una resolución proyectiva finita. Por lo que si

$$P_1 \rightarrowtail P_0 \twoheadrightarrow M$$

es una representación proyectiva de M, entonces se forma la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbf{T}'(M) \longrightarrow \mathbf{T}(P_0) \longrightarrow \mathbf{T}(P_1) \longrightarrow R^n\mathbf{T}(M) \longrightarrow 0$$

De estos dos hechos, si $P_1 \rightarrowtail P_0 \twoheadrightarrow M$ es una representación proyectiva de M y N un $\Lambda -$ *módulo*, entonces se inducen las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow Tor_1^{\Lambda}(M.N) \rightarrow P_1 \otimes_{\Lambda} N \rightarrow P_0 \otimes_{\Lambda} N \rightarrow M \otimes_{\Lambda} N \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(M,N) & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(P_0,N) \\ \rightarrow & Hom_{\Lambda}(P_1,N) & \rightarrow & Ext_{\Lambda}^n(M,N) & \rightarrow 0. \end{array}$$

Ahora consideremos a $\mathbf{T}$ un funtor covariante aditivo y $\mathbf{U}$ un funtor aditivo contravariante de ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$ a ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})$. Sea M un $\Lambda -$ *módulo*,

$$P: \quad ... \rightarrow P_n \overset{\partial_n}{\rightarrow} P_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\rightarrow} ... \rightarrow P_1 \overset{\partial_1}{\rightarrow} P_0 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} M \rightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M y

$$I: \quad 0 \rightarrow N \overset{\eta}{\rightarrow} I^0 \overset{\partial^0}{\rightarrow} I^1 \overset{\partial^1}{\rightarrow} \cdots \overset{\partial^{n-1}}{\rightarrow} I^n \overset{\partial^n}{\rightarrow} \cdots$$

una resolución inyectiva de M. Para $n \geq 0$, sea

$$K_n = im(\partial_{n+1}) \qquad \text{y} \qquad L^n = im(\partial^n)$$

Entonces

$$\cdots \longrightarrow P_{n+2} \overset{\partial_{n+2}}{\longrightarrow} P_{n+1} \overset{\overline{\partial_{n+1}}}{\longrightarrow} K_n \longrightarrow 0$$

con $\overline{\partial_{n+1}}$ el morfismo inducido por ∂_{n+1} a su imagen genera una resolución proyectiva de K_n. Por otro lado la sucesión

$$0 \longrightarrow L^n \overset{i}{\longrightarrow} I^{n+1} \overset{\partial^{n+1}}{\longrightarrow} I^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

con i el morfismo de inclusión es una resolución inyectiva de L^n. Como la definición de funtor derivado es independiente de las resoluciones. Entonces

$$\begin{array}{c} L_1\mathbf{T}(K_n) \cong \ker(\mathbf{T}(\partial_{n+2}))/im(\mathbf{T}(\partial_{n+3})) \cong L_{n+2}\mathbf{T}(M) \\ R^1\mathbf{T}(L^n) \cong \ker\left(\mathbf{T}\left(\partial^{n+2}\right)\right)/im\left(\mathbf{T}\left(\partial^{n+1}\right)\right) \cong R^{n+2}\mathbf{T}(M) \\ R^1\mathbf{U}(K_n) \cong \ker(\mathbf{U}(\partial_{n+3}))/im(\mathbf{U}(\partial_{n+2})) \cong R^{n+2}\mathbf{U}(M). \end{array}$$

A partir de estas observaciones acabamos de demostrar la siguiente proposición.

1.16 Proposición. *Para cualesquiera M, N $\Lambda -$ módulos se cumple:*
(i) $Tor_{n+2}^{\Lambda}(N, M) \cong Tor_1^{\Lambda}(N, K_n)$.
(ii) $\overline{Ext_{\Lambda}^{n+2}}(N, M) \cong \overline{Ext_{\Lambda}^{1}}(N, L^n)$.
(iii) $Ext_{\Lambda}^{n+2}(M, N) \cong Ext_{\Lambda}^{1}(K_n, N)$. ■

1.17 Teorema. *Para cualesquiera $m, n \geq 1$ y M, N $\Lambda -$ módulos se tiene:*
(i) $L_{m+1}\mathbf{T}(K_{n-1}) \cong L_m\mathbf{T}(K_n)$
(ii) $R^{m+1}\mathbf{U}(K_{n-1}) \cong R^{m+1}\mathbf{U}(K_n)$
(iii) $R^{m+1}\mathbf{T}\left(L^{n-1}\right) \cong R^m\mathbf{T}(L^n)$
En particular
(i) $Tor_{m+1}^{\Lambda}(N, K_{n-1}) \cong Tor_m^{\Lambda}(N, K_n)$
(ii) $\overline{Ext_{\Lambda}^{m+1}}\left(N, L^{n-1}\right) \cong \overline{Ext_{\Lambda}^{m}}(N, L^n)$
(iii) $Ext_{\Lambda}^{m+1}(K_{n-1}, N) \cong Ext_{\Lambda}^{m}(K_n, N)$

Demostración. Como $K_n = im(\partial_{n+1}) = \ker(\partial_n)$, y $L^{n-1} = im\left(\partial^{n-1}\right) = \ker(\partial^n)$. Entonces tenemos las sucesiones exactas

$$\begin{array}{c} (1) \quad 0 \longrightarrow K_n \xrightarrow{i} P_n \xrightarrow{\overline{\partial_n}} K_{n-1} \longrightarrow 0 \\ (2) \quad 0 \longrightarrow L^{n-1} \longrightarrow I^n \xrightarrow{\overline{\partial^n}} L^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

Entonces aplicando $L_m\mathbf{T}$ y $R^m\mathbf{U}$ a la sucesión (1) y $R^m\mathbf{T}$ a (2) se obtienen las sucesiones exactas

$$\begin{array}{c} L_m\mathbf{T}(P_n) \longrightarrow L_m\mathbf{T}(K_{n-1}) \longrightarrow L_{m-1}\mathbf{T}(K_n) \longrightarrow L_{m-1}\mathbf{T}(P_{n-1}) \\ R^m\mathbf{U}(P_n) \longrightarrow R^m\mathbf{U}(K_n) \longrightarrow R^{m+1}\mathbf{U}(K_{n-1}) \longrightarrow R^{m+1}\mathbf{U}(P_n) \\ R^m\mathbf{T}(I^n) \longrightarrow R^m\mathbf{T}(L^n) \longrightarrow R^{m+1}\mathbf{T}\left(L^{n-1}\right) \longrightarrow R^{m+1}\mathbf{T}\left(I^{n-1}\right). \end{array}$$

Como $L_m\mathbf{T}(P_n) = R^m\mathbf{U}(P_n) = R^m\mathbf{T}(I^n) = 0$ para toda $m \geq 1$, entonces

$$\begin{array}{c} L_m\mathbf{T}(K_{n-1}) \cong L_{m-1}\mathbf{T}(K_n) \\ R^m\mathbf{U}(K_n) \cong R^{m+1}\mathbf{U}(K_{n-1}) \\ R^m\mathbf{T}(L^n) \cong R^{m+1}\mathbf{T}\left(L^{n-1}\right). \end{array}$$

En particular como $N \bigotimes_{\Lambda} \_$ y $Hom_{\Lambda}(N, \_)$ son funtores aditivos covariantes y $Hom_{\Lambda}(\_, N)$ es un funtor contravariante aditivo, se sigue la última parte. ■

1.18 Corolario. *Para cualquier $n \geq 1$ y M, N $\Lambda - m\acute{o}dulos$.*
(i) $Tor_n^{\Lambda}(N, K_0) \cong Tor_1^{\Lambda}(N, K_{n-1})$
(ii) $\overline{Ext_{\Lambda}^n}\left(N, L^0\right) \cong \overline{Ext_{\Lambda}^1}\left(N, L^{n-1}\right)$
(iii) $Ext_{\Lambda}^n(K_0, N) \cong Ext_{\Lambda}^1(K_{n-1}, N)$
Demostración.

$$\begin{aligned} Tor_n^{\Lambda}(N, K_0) &\cong Tor_{n+1}^{\Lambda}(N, K_{-1}) \\ &\cong Tor_{n+1}^{\Lambda}(N, M) \\ &\cong Tor_1^{\Lambda}(N, K_{n-1}). \end{aligned}$$

La demostración de (ii) y (iii) son análogas. ■

6.2 El Funtor Tor_n^{Λ}

Por (1.5) se puede construir a $Tor_n^{\Lambda}(M, N)$ de la siguiente manera: Tomar una resolución proyectiva reducida P_M de M, después aplicarle el funtor covariante $\_ \otimes_{\Lambda} N$ a P y finalmente tomar su grupo de homología de grado n de $P_M \otimes_{\Lambda} N$, es decir:

$$Tor_n^{\Lambda}(M, N) = H_n(P_M \otimes_{\Lambda} N)$$

Sean $M \xrightarrow{f} M''$ y $N \xrightarrow{g} N''$ $\Lambda - morfismos$. Sean P_M y $P''_{M''}$ resoluciones proyectivas reducidas de M y M'' respectivamente. Por el teorema de comparación existe un morfismo de cadenas $\widetilde{f} = \left\{P_n \xrightarrow{f_n} P''_n\right\}_{n \geq 0}$ tal que

$$\widetilde{f} \otimes g = \left\{P_n \otimes_{\Lambda} N \xrightarrow{f_n \otimes g} P''_n \otimes_{\Lambda} N''\right\}_{n \geq 0}$$

es un morfismo de cadenas que induce el morfismo

$$\left(\widetilde{f} \otimes g\right)_* : H_*(P_M \otimes_{\Lambda} N) \longrightarrow H_*\left(P''_{M''} \otimes_{\Lambda} N\right)$$

es decir, $\left(\widetilde{f} \otimes g\right)_* : Tor_*^{\Lambda}(M, N) \longrightarrow Tor_*^{\Lambda}(M'', N'')$, además este morfismo no depende de $\widetilde{f}$, si no exclusivamente de n, f y g. Por lo tanto tiene sentido denotar con $Tor_*^{\Lambda}(f, g)$ a $\left(\widetilde{f} \otimes g\right)_*$.

2.1 Teorema. *Para* $n \geq 0$. *La asignación*

$$\begin{array}{llcc} Tor_n^\Lambda(\_,\_): & {}_\Lambda\mathbf{Mod}\times{}_\Lambda\mathbf{Mod} & \longrightarrow & {}_\Lambda\mathbf{Mod} \\ & (M,N) & \longrightarrow & Tor_n^\Lambda(M,N) \\ & \left(M \xrightarrow{f} M'', N \xrightarrow{g} N''\right) & \longrightarrow & Tor_n^\Lambda(f,g) \end{array}$$

es un bifuntor.

Demostración. Para cualquier morfismo $\left(M \xrightarrow{f} M'', N \xrightarrow{g} N''\right)$ en ${}_\Lambda\mathbf{Mod}\times{}_\Lambda\mathbf{Mod}$ se define el morfismo

$$Tor_n^\Lambda(f,g): Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda\left(M'',N''\right)$$

A partir de esta definición $Tor_n^\Lambda(\_,\_)$ respeta el sentido de los morfismos.

Por otro lado, si $\left(M' \xrightarrow{f} M, N' \xrightarrow{g} N\right)$ y $\left(M \xrightarrow{f'} M'', N \xrightarrow{g'} N''\right)$ son morfismos en ${}_\Lambda\mathbf{Mod}\times{}_\Lambda\mathbf{Mod}$, entonces para cada $n \geq 0$,

$$H_n\left(f' \circ f \otimes g' \circ g\right) = Tor_n^\Lambda\left(f' \circ f, g' \circ g\right)$$

es decir

$$Tor_n^\Lambda\left(f' \circ f, g' \circ g\right): H_n\left(P_{M'} \otimes_\Lambda N'\right) \longrightarrow H_n\left(P_{M''} \otimes_\Lambda N''\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_n(f' \circ f \otimes g' \circ g) &= H_n((f' \otimes g') \circ (f \otimes g)) \\ &= H_n(f' \otimes g') \circ H_n(f \otimes g) \\ &= Tor_n^\Lambda(f',g') \circ Tor_n^\Lambda(f,g) \end{aligned}$$

Por lo tanto $Tor_n^\Lambda(f' \circ f, g' \circ g) = Tor_n^\Lambda(f',g') \circ Tor_n^\Lambda(f,g)$. ■

Sean $N' \overset{g}{\rightarrowtail} N \overset{g}{\twoheadrightarrow} N''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda-$*módulos* y P_M una resolución proyectiva de M. Entonces

$$0 \longrightarrow P_M \otimes_\Lambda N' \longrightarrow P_M \otimes_\Lambda N \longrightarrow P_M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Por $(V.1.7)$ para cada $n \geq 0$ existe un $\Lambda - morfismo$ $H_n(P_M \otimes_\Lambda N'') \xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N')$, tal que, la siguiente sucesión es exacta

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & \rightarrow & H_n(P_M \otimes_\Lambda N) & \rightarrow & H_n(P_M \otimes_\Lambda N'') \\ \overset{\kappa_n}{\rightarrow} & H_{n-1}(P_M \otimes_\Lambda N') & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

A partir de este hecho y del teorema anterior se sigue la siguiente proposición.

2.2 Proposición. *Sea $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda -$ módulos y M un $\Lambda -$ módulo. Entonces existe*

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \to & Tor_n^{\Lambda}(M, N'') & \to & Tor_{n-1}^{\Lambda}(M, N') & \to \\ Tor_{n-1}^{\Lambda}(M, N') & \to & \cdots & \to & Tor_1^{\Lambda}(M, N'') & \to \\ Tor_0^{\Lambda}(M, N') & \to & Tor_0^{\Lambda}(M, N) & \to & Tor_0^{\Lambda}(M, N'') & \to 0 \end{array}$$

una sucesión exacta larga. ■

De manera análoga se deduce la siguiente proposición.

2.3 Proposición. *Sea $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta corta de $\Lambda -$ módulos y N un $\Lambda -$ módulo. Entonces existe una sucesión*

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & Tor_n^{\Lambda}(M'', N) & \longrightarrow & Tor_{n-1}^{\Lambda}(M', N) & \longrightarrow \\ Tor_{n-1}^{\Lambda}(M, N) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Tor_1^{\Lambda}(M'', N) & \longrightarrow \\ Tor_0^{\Lambda}(M', N) & \longrightarrow & Tor_0^{\Lambda}(M, N) & \longrightarrow & Tor_0^{\Lambda}(M, N'') & \longrightarrow 0 \end{array}$$

exacta.

De igual manera por (1.5) para dos $\Lambda -$ *módulos* M, N podemos definir a $\overline{Tor_n^{\Lambda}}(M, N)$ a partir de una resolución proyectiva Q_N reducida de N, después considerando su producto tensorial con M, $M \otimes_{\Lambda} Q_N$, y finalmente tomando su homología de grado n, i.e,

$$H_n(M \otimes_{\Lambda} Q_N) = \overline{Tor_n^{\Lambda}}(M, N)$$

Por (V.1.7), se tienen resultados análogos a (2.2) y (2.3), para $\overline{Tor_n^{\Lambda}}(M, N)$.

2.4 Observación. *Por* (1.13) *los funtores $Tor_0^{\Lambda}(\_, N)$ y $\overline{Tor_0^{\Lambda}}(M, \_)$ son naturalmente equivalentes a los funtores $\_ \otimes_{\Lambda} N$ y $M \otimes_{\Lambda} \_$ respectivamente. Entonces $Tor_0^{\Lambda}(M, N) \cong M \otimes_{\Lambda} N \cong \overline{Tor_0^{\Lambda}}(M, N)$. Por lo tanto $Tor_0^{\Lambda}(M, N) \cong \overline{Tor_0^{\Lambda}}(M, N)$.*

2.5 Observación. *Por* (1.11), *si P es proyectivo, entonces para M, N $\Lambda -$ módulos se tienen las siguientes igualdades:*

$$Tor_n^{\Lambda}(P, N) = 0 = \overline{Tor_n^{\Lambda}}(M, P)$$

y

$$Tor_n^\Lambda(M,P) = 0 = \overline{Tor_n^\Lambda}(P,N)$$

2.6 Teorema. *Para M, N $\Lambda-$módulos y $n \geq 0$ se tiene:*

$$Tor_n^\Lambda(M,N) \cong \overline{Tor_n^\Lambda}(M,N)$$

Demostración. Si $n=0$, por (1.4) se tiene $Tor_0^\Lambda(M,N) \cong \overline{Tor_0^\Lambda}(M,N)$.

Sea $K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow M$ una resolución proyectiva reducida de M. Por (2.3) existe una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Tor_n^\Lambda(P,N) & \longrightarrow & Tor_n^\Lambda(M,N) & \longrightarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & P\otimes_\Lambda N & \longrightarrow & M\otimes_\Lambda N & \longrightarrow 0. & \end{array}$$

Por el teorema correspondiente a $\overline{Tor_n^\Lambda}(M,\_)$, se tiene una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \overline{Tor_n^\Lambda}(P,N) & \longrightarrow & \overline{Tor_n^\Lambda}(M,N) & \longrightarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & \overline{P\otimes_\Lambda N} & \longrightarrow & \overline{M\otimes_\Lambda N} & \longrightarrow 0. & \end{array}$$

Para $n=1$, las sucesiones se convierten en:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Tor_1^\Lambda(M,N) & \longrightarrow & K\otimes_\Lambda N & \longrightarrow & P\otimes_\Lambda N \\ & & & & \downarrow 1_{K\otimes_\Lambda N} & & \downarrow 1_{P\otimes_\Lambda N} \\ 0 & \longrightarrow & \overline{Tor_1^\Lambda}(M,N) & \longrightarrow & K\otimes_\Lambda N & \longrightarrow & P\otimes_\Lambda N. \end{array}$$

Para $n \geq 2$, se tienen sucesiones exactas de la forma

$$0 \longrightarrow Tor_n^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(K,N) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \overline{Tor_n^\Lambda}(M,N) \longrightarrow \overline{Tor_{n-1}^\Lambda}(K,N) \longrightarrow 0.$$

Utilizando el diagrama conmutativo para $n=1$ se sigue

$$Tor_1^\Lambda(M,N) \cong \overline{Tor_1^\Lambda}(M,N).$$

Procediendo de manera inductiva y utilizando el diagrama conmutativo para $n \geq 2$, se sigue $Tor_n^\Lambda(M,N) \cong \overline{Tor_n^\Lambda}(M,N)$. ■

2.7 Teorema. *Sea P un $\Lambda-$módulo.*

(i) Si P es plano, entonces $Tor_n^{\Lambda}(P,N)=0$ para cualquier $n\geq 1$ y N un $\Lambda-$módulo.

(ii) Si $Tor_1^{\Lambda}(P,N)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo N, entonces P es plano.

Demostración. (i) Sea Q_N una resolución proyectiva de N. Como P es plano, entonces el funtor $P\bigotimes_{\Lambda}\_$ es exacto. Por lo tanto $H_n(P\otimes_{\Lambda}Q_N)=0$ para $n\geq 1$.

(ii) Sea $N'\overset{f}{\rightarrowtail}N\overset{g}{\twoheadrightarrow}N''$ una sucesión exacta corta, entonces la sucesión

$$0\longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(P,N)\longrightarrow P\otimes_{\Lambda}N'\overset{1_P\otimes f}{\longrightarrow}P\otimes_{\Lambda}N\longrightarrow P\otimes_{\Lambda}N''\longrightarrow 0$$

es exacta. Como $Tor_1^{\Lambda}(P,N)=0$, entonces $1_P\otimes f$ es monomorfismo. Por lo tanto P es plano.

2.8 Definición. *Una sucesión exacta corta*

$$N'\overset{f}{\rightarrowtail}N\overset{g}{\twoheadrightarrow}N''$$

se dice que es pura*, si la sucesión*

$$0\longrightarrow M\otimes_{\Lambda}N'\overset{1_M\otimes f}{\longrightarrow}M\otimes_{\Lambda}N\overset{1_M\otimes g}{\longrightarrow}M\otimes_{\Lambda}N''\longrightarrow 0$$

es exacta para cualquier $\Lambda-$módulo M.

2.9 Corolario. *Un $\Lambda-$módulo N'' es plano si, y sólo si para cualquier sucesión exacta*

$$N'\overset{f}{\rightarrowtail}N\overset{g}{\twoheadrightarrow}N''$$

es exacta pura.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que N'' es plano y sea

$$0\longrightarrow N'\overset{\psi}{\longrightarrow}N\overset{\psi'}{\longrightarrow}N''\longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. Entonces para cualquier $\Lambda-$*módulo* M la sucesión

$$Tor_1^{\Lambda}(M,N'')\to M\otimes_{\Lambda}N'\to M\otimes_{\Lambda}N\to M\otimes_{\Lambda}N''\to 0$$

es exacta. Por otro lado como N'' es plano, entonces $Tor_1^{\Lambda}(M,N'')=0$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que cualquier sucesión es exacta pura. Sea

$$0\longrightarrow N'\longrightarrow N\longrightarrow N''\longrightarrow 0$$

una presentación proyectiva de N'', entonces para cualquier $\Lambda -$ *módulo* M al considerar la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} Tor_1^{\Lambda}(M,N) & \to & Tor_1^{\Lambda}(M,N'') & \to \\ M \otimes_{\Lambda} N' & \xrightarrow{1_M \otimes \psi} & M \otimes_{\Lambda} N & \to \\ M \otimes_{\Lambda} N'' & \to & 0 & \end{array}$$

se tiene que $Tor_1^{\Lambda}(M,N'') = \ker(1_M \otimes \psi)$, pues $Tor_1^{\Lambda}(M,N) = 0$. Por otro lado como la sucesión es exacta pura se tiene $\ker(1_M \otimes \psi) = 0$, entonces $Tor_1^{\Lambda}(M,N'') = 0$. Por lo tanto N'' es plano. ■

2.10 Corolario. *Para una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M'' \longrightarrow 0$$

de $\Lambda -$ *módulos. Si* M'' *es plano, entonces* M' *es plano si, y sólo si* M *es plano.*

Demostración. Sea N un $\Lambda -$ *módulo*, entonces existe una sucesión exacta

$$Tor_2^{\Lambda}\left(M'',N\right) \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}\left(M',N\right) \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}\left(M'',N\right)$$

Como M'' es plano se tiene: $Tor_2^{\Lambda}(M'',N) = 0 = Tor_1^{\Lambda}(M'',N)$. Entonces $Tor_1^{\Lambda}(M',N) \cong Tor_1^{\Lambda}(M,N)$, entonces $0 = Tor_1^{\Lambda}(M',N)$ si, y sólo si $Tor_1^{\Lambda}(M,N) = 0$. Por lo tanto M' es plano si, y sólo si M'' es plano.

2.11 Proposición. *Si* $\{N_j\}_{j\in I}$ *es una familia de* $\Lambda -$ *módulos. Entonces para cualquier* M $\Lambda -$ *módulo y* $n \geq 0$.

$$Tor_n^{\Lambda}\left(M, \bigoplus_{j\in J} N_j\right) \cong \bigoplus_{j\in J} Tor_n^{\Lambda}(M,N_j)$$

Demostración. Si $n = 0$. Como $Tor_0^{\Lambda}(M, \_)$ es naturalmente equivalente a $M \bigotimes_{\Lambda} \_$, entonces

$$Tor_n^{\Lambda}\left(M, \bigoplus_{j\in I} N_j\right) \cong M_{\Lambda}\left(\bigoplus_{j\in I} N_j\right)$$

Por $(I.5.5)$

$$M \otimes_{\Lambda}\left(\bigoplus_{j\in I} N_j\right) \cong \bigoplus_{j\in I}(M \otimes_{\Lambda} N_j)$$

Por lo tanto

$$Tor_0^{\Lambda}\left(M, \bigoplus_{j\in I} N_j\right) \cong \bigoplus_{j\in I} Tor_0^{\Lambda}(M, N_j)$$

Sea $n = 1$, para cada $j \in I$ sea

$$0 \to K_j \to P_j \to N_j \to 0$$

una representación proyectiva de N_j. Entonces

$$0 \to \bigoplus_{j\in I} K_j \to \bigoplus_{j\in I} P_j \to \bigoplus_{j\in I} N_j \to 0$$

es una representación proyectiva de $\bigoplus_{j\in I} N_j$. Entonces al considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
Tor_1^{\Lambda}(M, \oplus_{j\in I} P_j) & \to & Tor_1^{\Lambda}(M, \oplus_{j\in I} N_j) & \to & M \otimes_{\Lambda} (\oplus_{j\in I} K_j) & \to & M \otimes_{\Lambda} (\oplus_{j\in I} P_j) \\
\| & & & & \downarrow_{\alpha} & & \downarrow_{\beta} \\
\oplus_{j\in I} Tor_1^{\Lambda}(M, P_j) & \to & \oplus_{j\in I} Tor_1^{\Lambda}(M, P_j) & \longrightarrow & \oplus_{j\in I}(M \otimes_{\Lambda} K_j) & \to & \oplus_{j\in I}(M \otimes_{\Lambda} P_j)
\end{array}$$

Donde α, β son los isomorfismos definidos en $(I.5.5)$. Por lo tanto

$$Tor_1^{\Lambda}\left(M, \bigoplus_{j\in I} N_j\right) \cong \bigoplus_{j\in I} Tor_1^{\Lambda}(M, N_j)$$

Así procediendo de manera inductiva se concluye la demostración. ■

2.12 Ejemplo. *Sea G un grupo abeliano y $n \geq 0$. Sea*

$$G[n] = \left\{ g \in G : \ ng = \sum_{i=1}^{n} g = 0 \right\}$$

Si consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

donde μ_n es la multiplicación por n. Entonces al considerar la sucesión exacta

$$Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) \to Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) \to \mathbb{Z} \otimes_{\Lambda} G \overset{\mu_n \otimes 1_G}{\to} \mathbb{Z} \otimes_{\Lambda} G$$

Como $\mathbb{Z}$ es proyectivo, obtenemos $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) = 0$.

Por otro lado, como $\mathbb{Z}\otimes_{\Lambda} G \cong G$, y el morfismo $\mu_n \otimes 1_G$ es la multiplicación por n. Entonces podemos deducir que el funtor $\mathbb{Z}\bigotimes_{\Lambda}\_$ es naturalmente equivalente al funtor $1_{\mathbf{Ab}}$ identidad en Ab. Por lo tanto al considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G[n] & \overset{i_{G[n]}}{\rightarrow} & G & \overset{\mu_n}{\rightarrow} & G \\ & & & & \tau\downarrow & & \tau\downarrow \\ 0 & \rightarrow & Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) & \rightarrow & \mathbb{Z}\otimes_{\Lambda} G & \overset{\mu_n\otimes 1_G}{\rightarrow} & \mathbb{Z}\otimes_{\Lambda} G \end{array}$$

obtenemos $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) \cong G[n]$.

2.13 Proposición. *Si $n \geq 2$, entonces $Tor_n^{\mathbb{Z}}(G,H) = 0$ para cualesquiera G y H grupos abelianos.*

Demostración. Sean G y H grupos abelianos. Como cualquier grupo abeliano es isomorfo a la imagen de un grupo abeliano libre, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \overset{i}{\longrightarrow} L \overset{\pi}{\longrightarrow} G \longrightarrow 0$$

con L un grupo libre. Por otro lado, cualquier subgrupo de un grupo abeliano es libre, entonces

$$P: \; ... \rightarrow P_n \overset{\partial_n}{\rightarrow} P_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\rightarrow} ... \rightarrow P_1 \overset{\partial_1}{\rightarrow} P_0 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} G \rightarrow 0$$

con $P_0 = L$, $P_1 = K$, $P_n = 0$ $n \geq 2$, se sigue que P es una resolución proyectiva de G. Por lo tanto $Tor_n^{\mathbb{Z}}(G,H) = 0$ para $n \geq 2$. ■

Ahora estudiemos la relación que hay entre Tor_n^{Λ} y los límites directos.

Si $\left(N_i, \pi_i^j\right)_{i,j\in I}$ es un sistema dirigido y M un $\Lambda-$*módulo*, entonces por $(I.6.12)$ y (1.13) se tiene

$$M \otimes_{\Lambda} \underset{\longrightarrow}{lím}\left(N_i, \pi_i^j\right)_{i,j\in I} \cong Tor_0^{\Lambda}(M, \underset{\longrightarrow}{lím}(N_i))$$

y

$$\underset{\longrightarrow}{lím}(M\otimes_{\Lambda} N_i) \cong \underset{\longrightarrow}{lím} Tor_0^{\Lambda}(M, N_i)$$

Por lo tanto $Tor_0^{\Lambda}(M, \underset{\longrightarrow}{lím}(N_i)) \cong \underset{\longrightarrow}{lím} Tor_0^{\Lambda}(M, N_i)$.

2.14 Proposición. *Sea $M = \underset{\longrightarrow}{lím}\left(M_\alpha, \pi_\alpha^\beta\right)_{\alpha,\beta\in S}$. Entonces existen resoluciones P_α de M_α que forman un sistema dirigido de cadenas sobre S y $P = \underset{\longrightarrow}{lím}(P_\alpha)$ una resolución proyectiva de M.*

Demostración. Para cada $\alpha \in S$, sea P_0^α el $\Lambda-$*módulo* libre con el conjunto M_α como base. Entonces para cada $m \in M_\alpha$ podemos tomar x_m un elemento básico de P_0^α. Definamos el epimorfismo

$$\epsilon_\alpha : P_0^\alpha \longrightarrow M_\alpha$$

Donde $\epsilon_\alpha(x_m) = m$ para cada elemento básico x_m de P_0^α. Para $\alpha \leq \beta$ definamos el morfismo

$$\lambda_\alpha^\beta : P_0^\alpha \longrightarrow P_0^\beta$$

con $\lambda_\alpha^\beta(x_m) = x_{\pi_\alpha^\beta(m)}$ $\forall m \in M_\alpha$.

Entonces $\left(P_0^\alpha, \lambda_\alpha^\beta\right)_{\alpha,\beta\in S}$ es un sistema dirigido de $\Lambda-$*módulos* y

$$\left(P_0^\alpha, \lambda_\alpha^\beta\right) \xrightarrow{\epsilon} \left(M_\alpha, \pi_\alpha^\beta\right)$$

es un morfismo de sistemas dirigidos. Sea P_0 el $\Lambda-$*módulo* libre generado por M. Para cada $\alpha \in S$, definamos

$$\lambda_\alpha : P_0^\alpha \longrightarrow P_0$$

con $\lambda_\alpha(x_m) = x_{\pi_\alpha(m)}$. Como $\pi_\alpha(m) \in M$, entonces determina un único $x_{\pi_\alpha(m)}$ elemento básico de P_0, por lo tanto λ_α es un morfismo bien definido. Por otro lado para cada $m \in M_\alpha$ y $\alpha \leq \beta$ en S se tiene: $\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^\beta(x_m) = \lambda_\beta\left(x_{\pi_\alpha^\beta(m)}\right) = x_{\pi_\beta\left(\pi_\alpha^\beta(m)\right)} = x_{\pi_\alpha(m)} = \lambda_\alpha(x_m)$, entonces $\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^\beta = \lambda_\alpha$. Además si Q es otro $\Lambda-$*módulo* con morfismos $P_0^\alpha \xrightarrow{\mu_\alpha} P_0$, tales que, $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ \lambda_\alpha^\beta$ para $\alpha \leq \beta$.

Definamos a

$$\mu : P_0 \longrightarrow Q$$

mediante $\mu\left(x_{\pi_\alpha(m)}\right) = \mu_\alpha(x_m)$, $m \in M_\alpha$. De la definición de μ se sigue que este es un morfismo bien definido, además que μ se extiende a un morfismo, pues para cada $m \in M_\alpha$, $\mu \circ \lambda_\alpha(x_m) = \mu\left(x_{\pi_\alpha(m)}\right) = \mu_\alpha(x_m)$, entonces $\mu \circ \lambda_\alpha = \mu_\alpha$ para cualquier $\alpha \in S$. Entonces podemos decir que $P_0 = \underrightarrow{lím}\,(P_0^\alpha, \lambda)$.

Sea

$$\epsilon : P_0 \longrightarrow M$$

el epimorfismo definido por $\epsilon\left(x_{\pi_\alpha(m)}\right) = \pi_\alpha(m)$, $m \in M_\alpha$. Sea $K_0 = \ker(\epsilon)$ y $K_0^\alpha = \ker(\epsilon_\alpha)$. Entonces $\left(K_0^\alpha, \lambda_\alpha^\beta\right)$ es un sistema dirigido de $\Lambda-$*módulos* y para cada $\alpha \in S$ la sucesión

$$0 \longrightarrow K_0^\alpha \xrightarrow{i} P_0^\alpha \xrightarrow{\epsilon_\alpha} M_\alpha \longrightarrow 0$$

donde i denota a la inclusión, es una sucesión exacta corta. Entonces la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow \varinjlim (K_0^\alpha) \xrightarrow{\bar{i}} \varinjlim (P_0^\alpha) \xrightarrow{\epsilon} \varinjlim (M_\alpha) \longrightarrow 0$$

es exacta por $(I.6.11)$. Por otro lado, como

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y $\varinjlim (P_0^\alpha) \cong P_0$ y $\varinjlim (M_\alpha) = M$, entonces

$$\varinjlim (K_0^\alpha) \cong K_0$$

Análogamente trabajando con K_0^α y K_0 en lugar de M^α y M, podemos encontrar $\Lambda - módulos$ libres P_1^α para cada α , tales que, $P_1 = \varinjlim \{P_1^\alpha\}$ y se obtengan sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow K_1^\alpha \longrightarrow P_1^\alpha \longrightarrow K_0^\alpha \longrightarrow 0$$

para cada $\alpha \in S$,

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$$

Por lo que podemos obtener sucesiones exactas

$$0 \to K_1^\alpha \to P_1^\alpha \to P_0^\alpha \to M_\alpha \to 0$$

para cada $\alpha \in S$, y

$$0 \to K_1 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

Continuando este proceso de manera inductiva se construyen resoluciones proyectivas

$$P^\alpha : \ ... \to P_n^\alpha \to P_{n-1}^\alpha \to ... \to P_1^\alpha \to P_0^\alpha \to M_\alpha \to 0$$

de M_α para cada α, y

$$P : \ ... \to P_n \to P_{n-1} \to ... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

de M, tal que, $P = \varinjlim (P_\alpha)$. ■

2.15 Teorema. *Sea* $\left(M_\alpha, \pi_\alpha^\beta\right)_{\alpha,\beta\in S}$ *un sistema dirigido de* $\Lambda-$*módulos y* N *un* $\Lambda-$ *módulos. Entonces para cada* $n \geq 0$

$$Tor_n^\Lambda\left(\varinjlim (M_\alpha), N\right) = \varinjlim \left(Tor_n^\Lambda (M_\alpha, N)\right)$$

Demostración. El caso de $n = 0$ es inmediato. Supongamos que $n \geq 1$. Para cada $\alpha \in S$, sea P_α una resolución proyectiva de M_α, tal que, $\left(P_\alpha, \lambda_\alpha^\beta\right)$ es un sistema dirigido de resoluciones proyectivas y $\varinjlim \left(P_\alpha, \lambda_\alpha^\beta\right)$ es una resolución proyectiva de $\varinjlim \left(M_\alpha, \pi_\alpha^\beta\right)$. Entonces para $\alpha \leq \beta$ en S y $n \geq 1$ se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
P^\alpha: & \ldots & \to & P_n^\alpha & \xrightarrow{\partial_n^\alpha} & P_{n-1}^\alpha & \to & \ldots & \to & P_1^\alpha & \xrightarrow{\partial_1^\alpha} & P_0^\alpha & \to & M_\alpha & \to & 0 \\
\lambda_\alpha^\beta \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
P^\beta: & \ldots & \to & P_n^\beta & \underset{\partial_n^\beta}{\to} & P_{n-1}^\beta & \to & \ldots & \to & P_1^\beta & \underset{\partial_1^\beta}{\to} & P_0^\beta & \to & M_\beta & \to & 0
\end{array}$$

conmutativo y $\lambda_\alpha^\beta \circ \partial_n^\alpha = \partial_n^\beta \circ \lambda_\alpha^\beta$. Entonces $\left(P_\alpha \otimes_\Lambda N, \lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right)$ es un sistema dirigido de cadenas. En particular para cualquier $\alpha \leq \beta$ en S y $n \geq 1$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
P_{n+1}^\alpha \otimes_\Lambda N & \xrightarrow{\partial_{n+1}^\alpha \otimes 1_N} & P_n^\alpha \otimes_\Lambda N & \xrightarrow{\partial_n^\alpha \otimes 1_N} & P_{n-1}^\alpha \otimes_\Lambda N \\
\downarrow_{\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N} & & \downarrow_{\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N} & & \downarrow_{\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N} \\
P_{n+1}^\beta \otimes_\Lambda N & \underset{\partial_{n+1}^\beta \otimes 1_N}{\longrightarrow} & P_n^\beta \otimes_\Lambda N & \underset{\partial_n^\beta \otimes 1_N}{\longrightarrow} & P_{n-1}^\beta \otimes_\Lambda N
\end{array}$$

A partir de dicho diagrama se induce un $\Lambda - morfismo$

$$H_n\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right): \; Tor_n^\Lambda (P^\alpha, N) \;\longrightarrow\; Tor_n^\Lambda \left(P^\beta, N\right)$$

definido por:

$$H_n\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right)\left(u + im\left(\partial_{n+1}^\alpha \otimes 1_N\right)\right) = \left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right)(u) + im\left(\partial_{n+1}^\beta \otimes 1_N\right)$$

con $u \in \ker (\partial_n^\alpha \otimes 1_N)$, por las propiedades de λ_α^β se sigue que la familia

$$\left(Tor_n^\Lambda (P^\alpha, N), H_n\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right)\right)$$

es un sistema dirigido de $\mathbb{Z} - módulos$. Entonces

$$\begin{aligned}
Tor_n^\Lambda\left(\varinjlim \{M_\alpha\}, N\right) &\cong H_n\left(\varinjlim (P_\alpha, \lambda) \otimes_\Lambda N\right) \\
&\cong H_n\left(\varinjlim (P_\alpha \otimes_\Lambda N, \lambda \otimes 1_N)\right)
\end{aligned}$$

Por lo que para cualquier $\alpha \in S$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1}^{\alpha} \otimes_{\Lambda} N & \overset{\partial_{n+1}^{\alpha} \otimes 1}{\longrightarrow} & P_n^{\alpha} \otimes_{\Lambda} N & \overset{\partial_{n+1}^{\alpha} \otimes 1}{\longrightarrow} & P_{n-1}^{\alpha} \otimes_{\Lambda} N \\ \mu_\alpha \downarrow & & \mu_\alpha \downarrow & & \mu_\alpha \downarrow \\ \underrightarrow{lím}\left(P_{n+1}^{\alpha} \otimes_{\Lambda} N\right) & \underset{D_{n+1}}{\longrightarrow} & \underrightarrow{lím}\left(P_n^{\alpha} \otimes_{\Lambda} N\right) & \underset{D_n}{\longrightarrow} & \underrightarrow{lím}\left(P_n^{\alpha} \otimes_{\Lambda} N\right) \end{array}$$

donde μ_α son los morfismos dados en la definición de límite directo y los morfismos D_n están definidos por

$$D_n(z) = D_n(\mu_\alpha(u)) = \mu_\alpha\left(\partial_{n+1}^{\alpha} \otimes 1\right)(u)$$

con $z = \mu_\alpha(u) \in \underrightarrow{lím}\,(P_n^\alpha \otimes_\Lambda N)$. Entonces se induce un morfismo

$$\begin{array}{rccc} \theta_\alpha : & Tor_n^{\alpha}(M_\alpha, N) & \longrightarrow & H_n\left(\underrightarrow{lím}\,(P_\alpha \otimes_\Lambda N)\right) \\ & u + im\left(\partial_{n+1}^{\alpha} \otimes 1_N\right) & \longrightarrow & \mu_\alpha(u) + im(D_{n+1}) \end{array}$$

para toda $u \in \ker\left({}_{n+1}^{\alpha} \otimes 1_N\right)$. Para $\alpha \leq \beta$ en S y $u \in \ker\left({}_{n+1}^{\alpha} \otimes 1_N\right)$

$$\begin{array}{rc} & \theta_\beta \circ H_n\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right)\left(u + im\left(\partial_{n+1}^{\alpha} \otimes 1_N\right)\right) \\ = & \left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right)(u) + im\left(\partial_{n+1}^{\alpha} \otimes 1_N\right) \\ = & \mu_\beta\left(\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right)(u)\right) + im(D_{n+1}) \\ = & \mu_\alpha(u) + im(D_{n+1}) \end{array}$$

Por lo tanto $\theta_\beta \circ H_n\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right) = \theta_\alpha$. Sea G es un grupo abeliano con morfismos $Tor_n^\alpha(M_\alpha, N) \xrightarrow{\phi_\alpha} G$, tal que, $\phi_\beta \circ H_n\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right) = \phi_\alpha$. Si $z \in \underrightarrow{lím}\,(P_n^\alpha \otimes_\Lambda N)$ es tal que $D_n(z) = 0$, entonces existe $u \in P_n^\alpha \otimes_\Lambda N$ para alguna $\alpha \in S$, tal que, $z = \mu_\alpha(u)$, entonces $0 = D_n(\mu_\alpha(u)) = \mu_\alpha \circ \left(\partial_{n+1}^\alpha \otimes 1\right)(u)$. Por lo que si $(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N) \circ (\partial_{n+1}^\alpha \otimes 1)(u) = 0$, entonces $(\partial_n^\beta \otimes 1_N) \circ (\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N)(u) = 0$, i.e, $(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N)(u) \in \ker(\partial_n^\beta \otimes 1_N)$. Definamos

$$\begin{array}{rcc} \phi(z + im(D_{n+1})) & = & \phi_\beta\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N)(u) + im\left(\partial_{n+1}^\beta \otimes 1_N\right)\right) \\ & = & \phi_\beta \circ H_n\left(\lambda_\alpha^\beta \otimes 1_N\right)\left(u + im\left(\partial_{n+1}^\alpha \otimes 1_N\right)\right) \\ & = & \phi_\alpha\left(u + im\left(\partial_{n+1}^\alpha \otimes 1_N\right)\right) \end{array}$$

Entonces $H_n\left(\underrightarrow{lím}\,(P_\alpha \otimes_\Lambda N)\right) \xrightarrow{\phi} \underrightarrow{lím}\left(Tor_n^\Lambda(M_\alpha, N)\right)$ es un morfismo bien definidos, tal que, $\phi \circ \theta_\alpha = \phi_\alpha$ para $\alpha \in S$. Entonces $H_n\left(\underrightarrow{lím}\,(P_\alpha \otimes_\Lambda N)\right) \cong \left(\underrightarrow{lím} Tor_n^\Lambda(M_\alpha, N)\right)$. Por lo tanto

$$Tor_n^\Lambda\left(\underrightarrow{lím}\,(M_\alpha), N\right) = \underrightarrow{lím}\left(Tor_n^\Lambda(M_\alpha, N)\right)$$

De manera análoga se prueba el siguiente teorema.

2.16 Teorema. *Sea* $\left(N_\alpha, \pi_\alpha^\beta\right)_{\alpha,\beta\in S}$ *un sistema dirigido de* $\Lambda-$*módulos y* M *un* $\Lambda-$*módulos. Entonces para cada* $n \geq 0$

$$Tor_n^\Lambda\left(M, \varinjlim (N_\alpha)\right) = \varinjlim \left(Tor_n^\Lambda (M, N_\alpha)\right).$$

Para Λ un dominio entero denotemos por Q al campo de fracciones de Λ y K denota a $Q \setminus \Lambda$.

A continuación enunciaremos una proposición que utilizaremos para probar las siguientes proposiciones, aunque dicha proposición se demostrara más adelante.

2.17 Proposición. *Sea* Λ *un dominio entero con* $Q = Frac(\Lambda)$.
(i) *Si* M *es un* $\Lambda-$*módulo libre de torsión, entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow V \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

donde V *es un espacio vectorial y* T *es un* $\Lambda-$ *módulo de torsión.*
(ii) *Si* M *es finitamente generado y libre de torsión, entonces* M *es encajado en un* $\Lambda-$ *módulo libremente generado.*

2.18 Proposición. *Para un dominio entero* Λ.
(i) *Si* N *es un* $\Lambda-$ *módulo de torsión, entonces* $Tor_1^\Lambda(K, N) \cong N$.
(ii) *Para cualquier* $\Lambda-$ *módulo* N, $Tor_n^\Lambda(K, N) = 0$ *para* $n \geq 2$.
(iii) *Si* N *es un* $\Lambda-$*módulo libre de torsión, entonces* $Tor_1^\Lambda(K, N) = 0$.
Demostración. (i) Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

Como Q es plano al considerar la sucesión exacta

$$Tor_1^\Lambda(Q, N) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(K, N) \longrightarrow \Lambda \otimes_\Lambda N \longrightarrow Q \otimes_\Lambda N$$

se tiene que $Tor_1^\Lambda(Q, N) = 0$, pues Q es plano. Por otro lado por $(I.5.3)$, $Q \otimes_\Lambda N = 0$. Entonces el morfismo $Tor_1^\Lambda(K, N) \longrightarrow \Lambda \otimes_\Lambda N \cong N$ es un isomorfismo.
(ii) Si $n \geq 2$, al considerar la sucesión

$$Tor_n^\Lambda(Q, N) \longrightarrow Tor_n^\Lambda(K, N) \longrightarrow Tor_{n-1}^\Lambda(K, N)$$

se tiene que es exacta, además como Λ, Q son planos, entonces $Tor_n^{\Lambda}(Q,N) = 0 = Tor_{n-1}^{\Lambda}(K,N)$. Por lo tanto $Tor_n^{\Lambda}(K,N) = 0$.

(iii) Por el lema anterior existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow V \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

con V un espacio vectorial sobre Q y T de torsión. Como V es libre entonces $V = \bigoplus Q$, por otro lado como Q es plano se sigue que V es plano. Entonces al considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow V \longrightarrow V/M \longrightarrow 0$$

se induce la sucesión exacta

$$Tor_2^{\Lambda}(K,V/N) \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(K,N) \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(K,V)$$

Como $Tor_2^{\Lambda}(K,V/N) = 0$ y $Tor_1^{\Lambda}(K,V) = 0$. Por lo tanto $Tor_1^{\Lambda}(K,N) = 0$. ■

2.19 Teorema. *Para cualquier $\Lambda -$ módulo N se tiene*

$$\tau N \cong Tor_1^{\Lambda}(K,N)$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccc} Tor_2^{\Lambda}(K,N/\tau N) & \rightarrow & Tor_1^{\Lambda}(K,\tau N) \quad \xrightarrow{i_{N_*}} \\ Tor_1^{\Lambda}(K,N) & \rightarrow & Tor_1^{\Lambda}(K,N/\tau N) \end{array}$$

donde i_{N_*} es el morfismo inducido por el morfismo de inclusión $\tau N \xrightarrow{i_N} N$. El primer y último término son cero a consecuencia de la proposición anterior. Entonces el morfismo i_{N_*} es un isomorfismo, i.e $\tau N \cong Tor_1^{\Lambda}(K,N)$.

Por otro lado, si $N \xrightarrow{f} N''$ es un morfismo y $\tau N \xrightarrow{\tau f} \tau N''$ el morfismo f restringido a τN, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} Tor_1^{\Lambda}(K,\tau N) & \xrightarrow{i_{N_*}} & Tor_1^{\Lambda}(K,N) \\ {\scriptstyle (\tau f)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f)_*} \\ Tor_1^{\Lambda}(K,\tau N'') & \xrightarrow[i_{N''_*}]{} & Tor_1^{\Lambda}(K,N'') \end{array}$$

con i_{N_*} y $i_{N''_*}$ isomorfismos. ■

2.20 Corolario. *Para un dominio entero Λ, y cualquier $\Lambda-$módulo N, existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow N \longrightarrow Q \otimes_\Lambda N \longrightarrow K \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

Demostración. Considerando la sucesión exacta

$$Tor_1^\Lambda(Q,N) \to Tor_1^\Lambda(K,N) \to \Lambda \otimes_\Lambda N \to Q \otimes_\Lambda N \to K \otimes_\Lambda N \to 0$$

Como Q es plano, entonces $Tor_1^\Lambda(Q,N) = 0$. Por otro lado $Tor_1^\Lambda(K,N) \cong \tau N$ y $\Lambda \otimes_\Lambda N \cong N$. ■

Ahora analicemos otras razones por que al funtor Tor_n^Λ se le suele llamar funtor torsión de grado n.

2.21 Proposición. *Si Λ es un dominio entero y N es un $\Lambda-$módulo de torsión. Entonces $Tor_n^\Lambda(M,N)$ es de torsión para cualquier $\Lambda-$módulo M y $n \geq 0$.*

Demostración. Verificaremos que $Tor_n^\Lambda(M,N)$ es de torsión mediante inducción.

Para $n = 0$, como $Tor_0^\Lambda(M,N) \cong M \otimes_\Lambda N$ y N es de torsión, entonces $Tor_0^\Lambda(M,N)$ es de torsión.

Si $n = 1$, sea $L \rightarrowtail P \twoheadrightarrow M$ una presentación proyectiva de M, entonces a partir de la sucesión exacta

$$0 = Tor_1^\Lambda(P,N) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M,N) \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

vemos que el morfismo $Tor_1^\Lambda(M,N) \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$ es un monomorfismo, entonces $Tor_1^\Lambda(M,N)$ es un submódulo de $M \otimes_\Lambda N$. Por lo tanto $Tor_1^\Lambda(M,N)$ es de torsión.

Supongamos que para $n \geq 1$ $Tor_n^\Lambda(M,N)$ es de torsión para cualquier $\Lambda-$*módulo* M. Considerando la sucesión exacta

$$0 = Tor_{n+1}^\Lambda(P,N) \to Tor_{n+1}^\Lambda(M,N) \to Tor_n^\Lambda(L,N) \to Tor_n^\Lambda(P,N) = 0$$

se sigue $Tor_{n+1}^\Lambda(M,N) \cong Tor_n^\Lambda(L,N)$. Como $Tor_n^\Lambda(L,N)$ es de torsión, entonces $Tor_{n+1}^\Lambda(M,N)$ es de torsión. ■

2.22 Teorema. *Si Λ es un dominio entero. Entonces $Tor_n^\Lambda(M,N)$ es de torsión para todo M, N $\Lambda-$módulos y $n \geq 1$.*

Demostración. Sea $n = 1$, consideremos el caso de N un $\Lambda-$*módulo* libre de torsión. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow V \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

donde V es un espacio vectorial sobre Q y $T \cong V/N$ es de torsión. Entonces considerando la sucesión exacta

$$Tor_2^\Lambda(M,T) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M,V)$$

Como $Tor_2^\Lambda(M,T)$ es de torsión y $Tor_1^\Lambda(M,V) = 0$, pues V es plano, entonces $Tor_1^\Lambda(M,N)$ es cociente de un $\Lambda - \textit{módulo}$ de torsión. Por lo tanto $Tor_1^\Lambda(M,N)$ es de torsión.

Sea N un $\Lambda - \textit{módulo}$ arbitrario. Considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow N \longrightarrow N/\tau N \longrightarrow 0$$

se induce la sucesión exacta

$$Tor_1^\Lambda(M,\tau N) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M,N) \longrightarrow Tor_1^\Lambda(M,N/\tau N)$$

Como τN es de torsión y $N/\tau N$ es libre de torsión, entonces $Tor_1^\Lambda(M,\tau N)$ y $Tor_1^\Lambda(M,N/\tau N)$ son de torsión. Por lo tanto $Tor_1^\Lambda(M,N)$ es de torsión. Procediendo de manera inductiva se tiene $Tor_n^\Lambda(M,N)$ es de torsión. ■

Ahora para finalizar esta sección daremos una caracterización de la sucesión de los funtores $Tor_n^\Lambda(\_,N)$.

2.23 Teorema (Axiomas para Tor). *Sea*

$$\{\mathbf{T}_n :_\Lambda \mathbf{Mod} \to_\Lambda \mathbf{Mod}\ (\mathbf{Ab})\}_{n\geq 0}$$

una sucesión de funtores covariantes aditivos. Con las siguientes propiedades

(i) Para cualquier sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

de $\Lambda - \textit{módulos}$, existe una sucesión exacta con morfismos de conexión Δ_n

$$\begin{array}{cccc} \cdots & \to & \mathbf{T}_{n+1}(M'') & \overset{\Delta_{n+1}}{\to} \\ \mathbf{T}_n(M') & \to & \mathbf{T}_n(M) & \to \\ \mathbf{T}_n(M'') & \overset{\Delta_n}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_{n-1}(M') & \to \\ \mathbf{T}_{n-1}(M) & \to & \cdots & \end{array}$$

(ii) $\mathbf{T}_0$ es naturalmente equivalente a $\_ \bigotimes_\Lambda N$ para algún $\Lambda - \textit{módulo}$ N.

(iii) $\mathbf{T}_n(\mathbf{P}) = 0$ para todo $\Lambda - \textit{módulo}$ P proyectivo y $n \geq 1$.

Entonces $\mathbf{T}_n$ es naturalmente equivalente a $Tor_n^\Lambda(\_,N)$ para $n \geq 0$.

Demostración. Por inducción sobre n. El caso $n = 0$ se cumple pues es consecuencia de (ii). Probemos el caso $n = 1$. Sea M un $\Lambda - $*módulo* y sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

una presentación proyectiva de M. Entonces por (i) existe un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{T}_1(P) & \to & \mathbf{T}_1(M) & \overset{\Delta_1}{\to} & \mathbf{T}_0(K) & \to & \mathbf{T}_0(P) \\
 & & & & \downarrow\tau_0 K & & \downarrow\tau_0 P \\
Tor_1^{\Lambda}(P,N) & \to & Tor_1^{\Lambda}(M,N) & \underset{\delta_1}{\to} & Tor_0^{\Lambda}(K,N) & \to & Tor_0^{\Lambda}(P,N)
\end{array}$$

donde $\tau_0 K$ y $\tau_0 P$ son los isomorfismos inducidos por (ii). Como $\mathbf{T}_1(P) = 0$ y $Tor_1^{\Lambda}(P,N) = 0$, pues P un módulo proyectivo, entonces los morfismos Δ_1 y δ_1 son inyecciones. Entonces existe un isomorfismo $\tau_1 M$ entre $\mathbf{T}_1(M)$ y $Tor_1^{\Lambda}(M,N)$, tal que, hace conmutar el diagrama.

Procediendo de manera inductiva supongamos que para $n \geq 1$ se cumple. Mostremos que se cumple para $n+1$. Por (i) tenemos un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{T}_{n+1}(P) & \to & \mathbf{T}_{n+1}(M) & \overset{\Delta_{n+1}}{\to} & \mathbf{T}_n(K) & \to & \mathbf{T}_n(P) \\
 & & & & \downarrow\tau_n K & & \downarrow \\
Tor_{n+1}^{\Lambda}(P,N) & \to & Tor_{n+1}^{\Lambda}(M,N) & \underset{\delta_{n+1}}{\to} & Tor_n^{\Lambda}(K,N) & \to & Tor_n^{\Lambda}(P,N)
\end{array}$$

donde $\tau_n K$ es el isomorfismo dado por la hipótesis de inducción. Como $\mathbf{T}_{n+1}(P) = \mathbf{T}_n(P) = 0$ y $Tor_{n+1}^{\Lambda}(P,N) = Tor_n^{\Lambda}(P,N) = 0$. Entonces $\mathbf{T}_{n+1}(M) \cong \mathbf{T}_n(K)$ y $Tor_{n+1}^{\Lambda}(M,N) \cong Tor_{n+1}^{\Lambda}(K,N)$. Por lo tanto existe un isomorfismo $\mathbf{T}_{n+1}(M) \overset{\tau_{n+1}M}{\longrightarrow} Tor_{n+1}^{\Lambda}(M,N)$. ■

De la demostración anterior cabe hacer resaltar la importancia radica en la base de inducción en $n = 0$ y $n = 1$.

Notemos que nuestro teorema se puede generalizar con el siguiente corolario.

2.24 Corolario. *Sean*

$$\{\mathbf{T}_n :_{\Lambda} \mathbf{Mod} \to_{\Lambda}\mathbf{Mod}\ (\mathbf{Ab})\}_{n\geq 0} \text{ y } \{\mathbf{T}'_n :_{\Lambda} \mathbf{Mod} \to_{\Lambda}\mathbf{Mod}\,(\mathbf{Ab})\}_{n\geq 0}$$

dos sucesiones de funtores aditivos covariantes. Si *(i) Para cualquier sucesión exacta de $\Lambda-$módulos*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

existen sucesiones exactas inducidas

$$\cdots \to \mathbf{T}_{n+1}\left(M''\right) \overset{\Delta_{n+1}}{\to} \mathbf{T}_n\left(M'\right) \to \mathbf{T}_n\left(M\right) \to \mathbf{T}_n\left(M''\right) \overset{\Delta_n}{\to} \cdots$$

y

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{T}'_{n+1}\left(M''\right) \overset{\Delta'_{n+1}}{\to} \mathbf{T}'_n\left(M'\right) \to \mathbf{T}'_n\left(M\right) \to \mathbf{T}'_n\left(M''\right) \overset{\Delta'_n}{\to} \cdots$$

(ii) $\mathbf{T}_0$ es naturalmente equivalente a T'_0.
(iii) $\mathbf{T}_n\left(P\right) = \mathbf{T}'_n\left(P\right) = 0$ para todo $\Lambda-$módulo proyectivo y $n \geq 1$.
Entonces $\mathbf{T}_n$ es naturalmente equivalente a $\mathbf{T}'_n$ para toda $n \geq 0$. ■

Obsérvese que este resultado no pide que las sucesiones $\{\mathbf{T}_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathbf{T}'_n\}_{n\geq 0}$ sean sucesiones de funtores derivados.

A continuación veamos como nuestros resultados anteriores pueden ser generalizados dentro de la teoría de categorías abelianas y la teoría de funtores derivados.

2.25 Definición. *Un objeto P en una categoría abeliana $\mathbf{A}$, se dice que es* proyectivo *en $\mathbf{A}$, si para cualquier $M \xrightarrow{f} N$ epimorfismo y morfismo $P \xrightarrow{g} N$ existe un morfismo $P \xrightarrow{h} M$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P \\ & & & \overset{h}{\swarrow} & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & M & \underset{f}{\longrightarrow} & N \end{array}$$

conmuta.

2.26 Definición. *Si $\boldsymbol{\chi}$ es una clase de objetos de una categoría abeliana $\mathbf{A}$, diremos que $\mathbf{A}$* tiene bastantes *$\boldsymbol{\chi}-$objetos, si para cualquier objeto en $\mathbf{A}$ es cociente de algún objeto en $\boldsymbol{\chi}$.*

2.27 Definición. *Para una clase de objetos $\boldsymbol{\chi}$ en una categoría $\mathbf{A}$ diremos que una sucesión de funtores aditivos $\{\mathbf{T}_n : \mathbf{A} \to \mathbf{B}\}_{n\geq 0}$ es $\chi-$borrable, si $\mathbf{T}_n\left(P\right) = 0$ para cualquier $P \in \chi$ y $n \geq 0$.*

Nótese que la categoría ${}_\Lambda\mathbf{Mod}$ tiene bastantes $\Lambda-$*módulos* proyectivos, además que son borrables para la sucesión de funtores $\{Tor_n^\Lambda\left(\_, N\right)\}_{n\geq 0}$.

Por lo tanto nuestro teorema expuesto en (2.23) se puede generalizar a través del siguiente resultado.

2.28 Corolario. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos categorías abelianas y* $\{\mathbf{T}_n\}_{n\geq 0}$*,* $\{\mathbf{T}'_n\}_{n\geq 0}$ *dos sucesiones de funtores covariantes aditivos de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$*. Si* $\mathbf{A}$ *posee bastantes* $\chi-$*objetos y se cumple*

(i) Si para cualquier sucesión exacta en $\mathbf{A}$

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

se inducen sucesiones exactas

$$\cdots \to \mathbf{T}_{n+1}\left(M''\right) \stackrel{\Delta_{n+1}}{\to} \mathbf{T}_n\left(M'\right) \to \mathbf{T}_n\left(M\right) \to \mathbf{T}_n\left(M''\right) \stackrel{\Delta_n}{\to} \cdots$$

$$\cdots \to \mathbf{T}'_{n+1}\left(M''\right) \stackrel{\Delta'_{n+1}}{\to} \mathbf{T}'_n\left(M'\right) \to \mathbf{T}'_n\left(M\right) \to \mathbf{T}'_n\left(M''\right) \stackrel{\Delta'_n}{\to} \cdots$$

(ii) T_0 *y* T'_0 *son naturalmente equivalentes.*

(iii) $\{\mathbf{T}_n\}_{n\geq 0}$ *y* $\{\mathbf{T}'_n\}_{n\geq 0}$ *son* $\boldsymbol{\chi}-$*borrables.*

Entonces T_n *y* T'_n *son naturalmente equivalentes para toda* $n \geq 0$*.* ■

2.29 Definición. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son dos categorías abelianas y* $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_n\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión de funtores covariantes aditivos, diremos que* $\mathbf{T}$ *es un* $\partial-$*funtor* homológico*, si para cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

en $\mathbf{A}$*, existe una sucesión exacta*

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & \to & \mathbf{T}_{n+1}\left(M''\right) & \stackrel{\partial_{n+1}}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_n\left(M'\right) & \longrightarrow \\ \mathbf{T}_n\left(M\right) & \longrightarrow & \mathbf{T}_n\left(M''\right) & \stackrel{\partial_n}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_{n-1}\left(M'\right) & \longrightarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbf{T}_0\left(M'\right) & \longrightarrow & \mathbf{T}_0\left(M\right) & \longrightarrow \\ \mathbf{T}_0\left(M''\right) & & & & & \end{array}$$

tal que, si

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $\mathbf{A}$*, entonces existe un diagrama que conmuta para toda* $n \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}_n\left(M''\right) & \stackrel{\partial_n}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_{n-1}\left(M'\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{T}_n\left(N''\right) & \underset{\partial'_n}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_n\left(N'\right) \end{array}$$

2.30 Definición. *Si* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un funtor aditivo, entonces diremos que un* $\partial - funtor$ *homológico* $(\mathbf{T}_n : \mathbf{A} \to \mathbf{B})_{0 \leq n}$ *es una* extensión homológica*, si existe una equivalencia natural* $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{F} \to \mathbf{T}_0$*.*

Cabe mencionar que para una categoría abeliana $\mathbf{A}$ con bastantes objetos proyectivos, las nociones de resolución proyectiva, funtor derivado derecho e izquierdo se pueden plantear de igual manera que para ${}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}$ y $\mathbf{Ab}$ (ver [Rot. J] Cap. VI). Para terminar esta sección probaremos un resultado que nos caracterizara aún más los funtores derivados.

2.31 Teorema. *Sea una categoría abeliana* $\mathbf{A}$ *con bastantes objetos proyectivos* $\mathbf{P_A}$*. Entonces*

(i) *Si* $(\mathbf{T}_n)_{n \geq 0}$ *y* $(\mathbf{H}_n)_{n \geq 0}$ *son* ∂ *funtores homológicos de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{Ab}$ $({}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod})$ *con* $\mathbf{H}_n(P) = 0$ *para todo* P *objeto proyectivo,* $n \geq 1$*, y existe* $\tau_0 : T_0 \to H_0$ *una transformación natural. Entonces existe un único morfismo*

$$\tau_n : (\mathbf{T}_n) \to (\mathbf{H}_n)$$

Más aún, si τ_0 *es una equivalencia natural, entonces* τ_n *es un isomorfismo para* $n \geq 0$*.*

(ii) *Si* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{Ab}$ $({}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod})$ *es un funtor covariante aditivo exacto derecho. Existe una única extensión homológica* $(\mathbf{H}_n)_{n \geq 0}$*, con* $\mathbf{H}_n(P) = 0$*, para todo* $P \in \mathbf{P_A}$ *y* $n \geq 0$*.*

Demostración. (i) *Sea* $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ *una sucesión exacta en* A*. Construyamos a* $\tau_n : T_n \to H_n$ *de manera inductiva.*

Por hipótesis la existencia de τ_0 está asegurada. Supongamos que $n > 0$ y que existen transformaciones naturales $\tau_{n-1} : \mathbf{T}_{n-1} \to \mathbf{H}_{n-1}$. Como $\mathbf{A}$ tiene bastantes $\mathbf{P_A} -$ *objetos* existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Entonces se induce el siguiente diagrama con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{T}_n(M'') & \longrightarrow & \mathbf{T}_{n-1}(L) & \longrightarrow & \mathbf{T}_{n-1}(P) \\ & & & & \downarrow_{\tau_{n-1,L}} & & \downarrow_{\tau_{n-1,P}} \\ \mathbf{H}_n(P) & \longrightarrow & \mathbf{H}_n(M'') & \longrightarrow & \mathbf{H}_{n-1}(L) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{n-1}(P) \end{array}$$

Como $\mathbf{H}_n(P) = \mathbf{H}_{n-1}(P) = 0$, pues P es proyectivo. Entonces $\mathbf{H}_n(M'') \cong \mathbf{H}_{n-1}(L)$, por lo que existe un único morfismo $\tau_n, M'' : \mathbf{T}_n(M'') \longrightarrow \mathbf{H}_n(M'')$ que hace el diagrama conmutar.

Mostremos que $\tau_n = (\tau_n, C : \mathbf{T}_n(C) \longrightarrow \mathbf{H}_n(C))_{C\in|\mathbf{A}|}$ es una transformación natural, que está bien definida (es decir que no depende de la presentación proyectiva), y que conmuta con los morfismos de conexión de $(\mathbf{T}_n)$ y $(\mathbf{H}_n)$. Para probar estas afirmaciones consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & M'' \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde el renglón inferior es exacto, entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_n(M'') \arrow[r, "\mathbf{T}_n(f)"] \arrow[d, "\tau_{n,M''}"'] & \mathbf{T}_n(N'') \arrow[r, "\partial"] & \mathbf{T}_{n-1}(M_0) \arrow[d, "\tau_{n-1,M_0}"] \\ \mathbf{H}_n(M'') \arrow[r, "\mathbf{H}_n(f)"'] & \mathbf{H}_n(N'') \arrow[r, "\partial"'] & \mathbf{H}_{n-1}(M_0) \end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_n(M'') \arrow[rrr, "\partial"] \arrow[dr, "\tau_{n,M''}"] \arrow[ddd, "\mathbf{T}_n(f)"'] & & & \mathbf{T}_{n-1}(L) \arrow[dl, "\tau_{n-1,L}"'] \arrow[ddd, "\tau_{n-1,L}"] \\ & \mathbf{H}_n(M'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}_{n-1}(L) \arrow[d] & \\ & \mathbf{H}_n(N'') \arrow[r] & \mathbf{H}_{n-1}(M_0) & \\ \mathbf{T}_n(N'') \arrow[rrr, "\partial"'] \arrow[ur] & & & \mathbf{T}_n(M_0) \arrow[ul, "\tau_{n-1,M_0}"'] \end{tikzcd}$$

Por la construcción de τ_n, M'' el trapezoide superior del diagrama conmuta y como $(\mathbf{H}_n)$ es un $\partial - funtor$ el cuadrado de adentro conmuta, y finalmente como τ_{n-1} es transformación natural, entonces el trapezoide derecho conmuta y como $(\mathbf{T}_n)$ es un $\partial - funtor$ el cuadro exterior conmuta, por lo tanto el diagrama es conmutativo.

Mostremos que τ_n es natural. Sean X_1, $X_2 \in |\mathbf{A}|$ y sean

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

las presentaciones proyectivas de X_1, X_2 respectivamente. Para $X_1 \xrightarrow{f} X_2$, se define $\tau_n, X_i : \mathbf{T}_n(X_i) \longrightarrow \mathbf{H}_n(X_i)$, para $i = 1, 2$, como en la primera parte de la demostración. Entonces para el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & X_1 & & \\ & & & & & & \downarrow_f & & \\ 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Se obtiene el diagrama con perímetro conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{T}_n(X_1) & \overset{\mathbf{T}_n(f)}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_n(X_2) & \overset{\partial}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_{n-1}(L_2) \\ {\scriptstyle \tau_n, X_1} \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_n, X_2} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{n-1}, L_2} \\ \mathbf{H}_n(X_1) & \underset{\mathbf{H}_n(f)}{\longrightarrow} & \mathbf{H}_n(X_2) & \underset{\partial}{\longrightarrow} & \mathbf{H}_{n-1}(L_2) \end{array}$$

Entonces el cuadrado de la derecha conmuta por la construcción de τ_n, X_2, mientras que el morfismo de conexión ∂ del renglón inferior es inyectivo ya que $\mathbf{H}_{n-1}(P_2) = 0$. Por lo tanto el cuadrado izquierdo conmuta, por lo que $\tau_n = (\tau_n, X)$ es natural. Para ver que τ_n, X_1 no depende de la presentación proyectiva, basta aplicar el argumento anterior con $X_1 = X_2$ y $f = 1_{X_1}$. Finalmente para ver que τ_n conmuta con los morfismos de conexión, tomemos una sucesión exacta $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ y el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & M'' & & \\ & & & & & & \downarrow_{1_{M''}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces se induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{T}_n(M'') & \overset{\mathbf{1}_{\mathbf{T}_n(M'')}}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_n(M'') & \overset{\partial}{\longrightarrow} & \mathbf{T}_{n-1}(L) \\ {\scriptstyle \tau_n, M''} \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_n} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{n-1}, L} \\ \mathbf{H}_n(M'') & \underset{\mathbf{1}_{\mathbf{H}_n(M'')}}{\longrightarrow} & \mathbf{H}_n(M'') & \underset{\partial}{\longrightarrow} & \mathbf{H}_{n-1}(L) \end{array}$$

Por lo tanto τ_n conmuta con los morfismo de conexión.

(*ii*) Cabe resaltar que por (3.12) generalizado a categorías abelianas con bastantes objetos proyectivos, $\mathbf{F}$ es naturalmente equivalente a $\mathbf{L}_0\mathbf{F}$, por lo que tomando a $\mathbf{H}_n = \mathbf{L}_n\mathbf{F}$ para $n \geq 0$, entonces por (*i*) se obtiene el resultado deseado. ■

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos que $(Tor_n^{\Lambda}(\_, N))_{n \geq 0}$ se puede definir como la extensión homológica de $\_ \bigotimes_{\Lambda} N$, al igual que $(\overline{Tor_n^{\Lambda}}(M, \_))_{n \geq 0}$ queda definido como la extensión homológica de $M \bigotimes_{\Lambda} \_$.

6.3 El Funtor Ext_{Λ}^{n}

Sean dos $\Lambda -$ *módulos* M, N, por (1.5) se puede definir a $Ext_{\Lambda}^{n}(M,N)$ a partir de una resolución proyectiva reducida P_M de M, a la que se le aplica el funtor contravariante $Hom_{\Lambda}(\_, N)$ y finalmente se toma su grupo de cohomología de grado n, es decir,

$$Ext_{\Lambda}^{n}(M,N) = H^{n}(Hom_{\Lambda}(P_M, N))$$

Sean $M \xrightarrow{f} M''$, $N \xrightarrow{g} N''$ $\Lambda - morfismos$, y sean P_M y $P_{M''}$ dos resoluciones proyectivas reducidas de M y M'' respectivamente. Por (2.10) existe un morfismo de cadenas, $P_M \xrightarrow{\overline{f}} P_{M''}$ sobre f, entonces

$$Hom_{\Lambda}\left(\overline{f}, g\right) = \{Hom_{\Lambda}(f_n, g) : Hom_{\Lambda}\left(P''_n, N\right) \longrightarrow Hom_{\Lambda}\left(P_n, N''\right)\}$$

es un morfismo de cocadenas que induce un morfismo:

$$\left(Hom_{\Lambda}\left(\overline{f}, g\right)\right)^{*} : H^{*}\left(Hom_{\Lambda}\left(P''_n, N\right)\right) \longrightarrow H^{*}\left(Hom_{\Lambda}\left(P_n, N''\right)\right)$$

Es decir

$$\left(Hom_{\Lambda}\left(\overline{f}, g\right)\right)^{*} : Ext_{\Lambda}^{*}\left(M'', N\right) \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{*}(M, N)$$

Además dicho morfismo no depende de $\overline{f}$, si no exclusivamente de n, f y g, por lo que tiene sentido denotar a $\left(Hom_{\Lambda}\left(\overline{f}, g\right)\right)^{*}$ con $Ext_{\Lambda}^{*}(f,g)$.

Este último motiva el siguiente teorema.

3.1 Teorema. *$Ext_{\Lambda}^{n}(\_,\_)$ es un bifuntor de la categoría $_{\mathbf{\Lambda}}Mod \times {_{\mathbf{\Lambda}}Mod}$ en $_{\mathbf{\Lambda}}Mod$ (**Ab**). Además dicho bifuntor es contravariante en la primera entrada y contravariante en la segunda.* ■

Para una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

de $\Lambda -$ *módulos* y P_M una resolución proyectiva reducida de M. Entonces

$$0 \rightarrow Hom_{\Lambda}(P_M, N') \rightarrow Hom_{\Lambda}(P_M, N) \rightarrow Hom_{\Lambda}(P_M, N'') \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de cocadenas. Por (1.7) existe un morfismo

$$H^{n}(Hom_{\Lambda}\left(P_M, N''\right)) \xrightarrow{\kappa_n} H^{n+1}(Hom_{\Lambda}\left(P_M, N'\right))$$

tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \longrightarrow & H^n(Hom_{\Lambda}(P_M,N)) & \longrightarrow \\ H^n(Hom_{\Lambda}(P_M,N'')) & \xrightarrow{\kappa_n} & H^{n+1}(Hom_{\Lambda}(P_M,N')) & \longrightarrow \\ H^{n+1}(Hom_{\Lambda}(P_M,N')) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

De la observación anterior y (3.1) se sigue el sigue el siguiente teorema.

3.2 Teorema. *Para cualquier sucesión exacta corta $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ de $\Lambda -$ módulos, y un $\Lambda -$ módulo M. Existe una sucesión exacta larga*

$$0 \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{0}(M,N') \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{0}(M,N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{n}(M,N'') \xrightarrow{\kappa_n} Ext_{\Lambda}^{n+1}(M,N') \longrightarrow \cdots$$

Aplicando (1.9) a $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ se tiene el siguiente teorema.

3.3 Teorema. *Sea $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta de $\Lambda-$módulos y N un $\Lambda -$ módulo. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$0 \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{0}(M'',N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Ext_{\Lambda}^{n}(M',N) \xrightarrow{\kappa_n} Ext_{\Lambda}^{n+1}(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

Recordemos que por (3.5) para dos $\Lambda -$ *módulos* M, N, se definió a $\overline{Ext_{\Lambda}^{n}(M,N)}$, a partir de I_N una resolución inyectiva reducida de N, luego se le aplico el funtor covariante $Hom_{\Lambda}(M,\_)$ y finalmente se toma su cohomología, i.e,

$$\overline{Ext_{\Lambda}^{n}(M,N)} = H^n(Hom_{\Lambda}(M,I_N))$$

Por otro lado, cabe hacer notar que si P es una resolución proyectiva de M, entonces

$$H^n(Hom_{\Lambda}(P_M,N)) = H^n(Hom_{\Lambda}(P,N))$$

para cualquier $n \geq 0$. De igual manera, si I es una resolución inyectiva de N, entonces $H^n(Hom_{\Lambda}(M,I_N)) = H^n(Hom_{\Lambda}(M,I))$ para $n \geq 0$.

3.4 Observación. *Por* (1.15)*, para cualesquiera M, N $\Lambda -$ módulos se tiene:*

$Ext^0_\Lambda(\_,N)$ *es naturalmente equivalente a* $Hom_\Lambda(\_,N)$, *y*
$\overline{Ext^0_\Lambda(M,\_)}$ *es naturalmente equivalente a* $Hom_\Lambda(M,\_)$.

Por lo tanto $Ext^0_\Lambda(M,N) \cong \overline{Ext^0_\Lambda(M,N)}$.

De la observación anterior se motiva al siguiente teorema.

3.5 Teorema. *Para cualesquiera* M, N $\Lambda-$*módulos, se tiene*

$$Ext^n_\Lambda(M,N) \cong \overline{Ext^n_\Lambda(M,N)}$$

Demostración.
El caso $n=0$ se obtiene de la observación anterior.
Mostremos para $n \geq 1$. Sea (P,∂_n) una resolución proyectiva de M y (I,∂_1^n) una resolución inyectiva de N. Denotemos con $K_{n-1} = im(\partial_n)$ y $L^{n-1} = \ker(\partial_1^n)$. Consideremos las sucesiones exactas

$$(*) \quad 0 \to K_0 \xrightarrow{i} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

$$(**) \quad 0 \to N \to I^0 \xrightarrow{\overline{\partial_1^0}} L^0 \to 0$$

donde i es el morfismo de inclusión y $\overline{\partial_1^0}$ es el morfismo inducido por ∂_1^0.
Como el funtor $Ext^0_\Lambda(\_,N)$ es naturalmente equivalente a $Hom_\Lambda(\_,N)$ y el funtor $\overline{Ext^0_\Lambda(M,\_)}$ es naturalmente equivalente a $Hom_\Lambda(M,\_)$, si

$$0 \longrightarrow J' \longrightarrow J \longrightarrow J'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, entonces se inducen las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{array}{lccccc}
(1) & 0 & \to & Hom_\Lambda(M,J') & \to & \\
& \to & Hom_\Lambda(M,J) & \to & Hom_\Lambda(M,J'') & \\
& \to & \overline{Ext^1_\Lambda(M,J')} & \to & \overline{Ext^1_\Lambda(M,J)} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc}
(2) & 0 & \to & Hom_\Lambda(J'',N) & \to \\
& Hom_\Lambda(J,N) & \to & Hom_\Lambda(J',N) & \to \\
& Ext^1_\Lambda(J'',N) & \to & Ext^1_\Lambda(J,N) &
\end{array}$$

Considerando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Hom_{\Lambda}(M,N) & \to & Hom_{\Lambda}(P_0,N) & \xrightarrow{\psi} & Hom_{\Lambda}(K_0,N) & \to & Ext_{\Lambda}^{1}(M,N) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & Hom_{\Lambda}\left(M,I^0\right) & \to & Hom_{\Lambda}\left(P_0,I^0\right) & \xrightarrow{\phi} & Hom_{\Lambda}\left(K_0,I^0\right) & \to & 0 & & \\
 & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \downarrow\gamma & & & & \\
0 & \to & Hom_{\Lambda}\left(M,L^0\right) & \to & Hom_{\Lambda}\left(P_0,L^0\right) & \xrightarrow{\theta} & Hom_{\Lambda}\left(K_0,L^0\right) & \to & Ext_{\Lambda}^{1}\left(M,L^0\right) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \overline{Ext_{\Lambda}^{1}(M,N)} & & 0 & & \overline{Ext_{\Lambda}^{1}(K^0,N)} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Del diagrama anterior la segunda columna es exacta, pues $\mathbf{Hom}_{\Lambda}(P_0,\_)$ es exacto izquierdo y P_0 es proyectivo, al igual que el segundo renglón es exacto, pues $\mathbf{Hom}_{\Lambda}\left(\_,I^0\right)$ es exacto izquierdo, y I^0 es inyectivo. Por otro lado el primer y tercer renglón son exactos, pues son las sucesiones correspondientes a (2) aplicadas a $(*)$, además como P_0 es proyectivo se tiene $Ext_{\Lambda}^{1}(P_{0,}N) = Ext_{\Lambda}^{1}(P_0,L_0) = 0$. La primera y tercera columna son las sucesiones exactas de (1) aplicadas en $(**)$, además como I^0 es inyectivo se tiene $\overline{Ext_{\Lambda}^{1}(M,I^0)} = \overline{Ext_{\Lambda}^{1}(K_0,I^0)} = 0$. También como

$$Hom_{\Lambda}(\_,\_) :_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{Mod}\times_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}\left(_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\right)$$

es un bifuntor, se sigue que todos los cuadrados del diagrama conmutan. Por lo tanto el diagrama anterior es un diagrama conmutativo de renglones y columnas exactos. Como ϕ, β son epimorfismos, se sigue

$$im(\theta) = im(\beta\theta) = im(\gamma\phi) = im(\gamma)$$

Entonces

$$Ext_{\Lambda}^{1}\left(M,L^0\right) \cong co\ker(\theta) = co\ker(\gamma) \cong \overline{Ext_{\Lambda}^{1}(K_0,N)}$$

Del diagrama anterior se induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
Hom_{\Lambda}(P_0,N) & \xrightarrow{\psi} & Hom_{\Lambda}(K_0,N) & \to & Ext_{\Lambda}^{1}(M,N) & \to & 0 \\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow & & & & (3) \\
\ker(\beta) & \xrightarrow{\overline{\phi}} & \ker(\gamma) & \to & co\ker(\alpha) & \to & co\ker(\beta)
\end{array}$$

con los isomorfismos inducidos de manera vertical y $\overline{\phi}$ el morfismo inducido por ϕ. Como β es un epimorfismo, entonces $co\ker(\beta) = 0$. Por otro lado, como $co\ker(\alpha) \cong \overline{Ext^1_\Lambda(M, N)}$, entonces se induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} Hom_\Lambda(P_0, N) & \xrightarrow{\psi} & Hom_\Lambda(K_0, N) & \rightarrow & Ext^1_\Lambda(M, N) & \rightarrow & 0 \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & & & \\ \ker(\beta) & \xrightarrow{\overline{\phi}} & \ker(\gamma) & \rightarrow & \overline{Ext^1_\Lambda(M, N)} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Por lo tanto

$$(4) \quad Ext^1_\Lambda(M, N) \cong \overline{Ext^1_\Lambda(M, N)}$$

Siguiendo este proceso de manera inductiva para los isomorfismos obtenidos en (3) cuando se lo aplicamos a las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow K_n \xrightarrow{i} P_n \xrightarrow{\overline{\partial_n}} K_n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L^{m-1} \xrightarrow{i} I^m \xrightarrow{\overline{\partial^m_1}} L^m \longrightarrow 0$$

Por (3), (4) y (1.17)

$$\begin{array}{rcl} \overline{Ext^1_\Lambda(K_{n-1}, L^m)} & \cong & Ext^1_\Lambda(K_{n-1}, L^m) \cong \\ \overline{Ext^1_\Lambda(K_n, L^m)} & \cong & Ext^1_\Lambda\left(K_n, L^{m-1}\right) \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcccc} \overline{Ext^{n+1}_\Lambda(M, N)} & \cong & \overline{Ext^1_\Lambda(M, L^{n-1})} & \cong & \overline{Ext^1_\Lambda(K_{n-2}, L^0)} \\ & \cong & Ext^1_\Lambda\left(K_{n-2}, L^0\right) & \cong & Ext^1_\Lambda(K_{n-1}, N) \\ & \cong & Ext^{n+1}_\Lambda(M, N) & \blacksquare & \end{array}$$

3.6 Observación. *A partir de* (1.11) *y del teorema anterior se siguen las siguientes afirmaciones.*

(i) Si I es un $\Lambda -$ módulo inyectivo. Entonces $Ext^n_\Lambda(M, I) = 0$ para cualesquiera $n \geq 1$ y M $\Lambda -$ módulo.

(ii) Si P es un $\Lambda -$ módulo proyectivo. Entonces $Ext^n_\Lambda(P, N) = 0$ para cualesquiera $n \geq 1$ y N $\Lambda -$ módulo.

3.7 Proposición. *Si G, H son grupos abelianos. Entonces para cualquier $n \geq 2$*

$$Ext^n_{\mathbb{Z}}(G, H) = 0$$

Demostración. Como G es un grupo abeliano, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$$

donde L es un grupo abeliano libre, entonces como los submódulos de un grupo abeliano libre son libres, entonces K es libre. Por lo tanto tomando la cadena

$$P: \ \dots \ \to \ P_n \ \to \ P_{n-1} \ \to \ \dots \ \to \ P_1 \ \to \ P_0 \ \to \ G \ \to \ 0$$

con $P_0 = L$, $P_1 = K$, $P_n = 0$ $n > 1$, se tiene una resolución proyectiva de G. Entonces $Ext_{\mathbb{Z}}^{n}(G,H) = 0$, para $n \geq 2$. ■

3.8 Ejemplo. *Para cualquier grupo abeliano H, si $m \geq 2$, entonces*

$$Ext_{\mathbb{Z}}^{1}(\mathbb{Z}_m, H) = H/mH$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu_m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0$$

con μ_m la multiplicación por m. Aplicando el funtor $Ext_{\mathbb{Z}}(\_, H)$ a la sucesión anterior, se induce la sucesión exacta

$$Hom_{\Lambda}(\mathbb{Z}, H) \xrightarrow{(\mu_m)_*} Hom_{\Lambda}(\mathbb{Z}, H) \longrightarrow Ext_{\mathbb{Z}}^{1}(\mathbb{Z}_m, H) \longrightarrow Ext_{\mathbb{Z}}^{1}(\mathbb{Z}, H)$$

Como $Ext_{\mathbb{Z}}^{1}(\mathbb{Z}, H) = 0$, pues $\mathbb{Z}$ es proyectivo. Por otro lado $Hom_{\Lambda}(\mathbb{Z}, H) \cong H$.

Entonces al considerar el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\mu_M} & H & \longrightarrow & H/mH & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(\mathbb{Z}, H) & \underset{(\mu_m)_*}{\longrightarrow} & Hom_{\Lambda}(\mathbb{Z}, H) & \longrightarrow & Ext_{\mathbb{Z}}^{1}(\mathbb{Z}_m, H) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

se tiene $Ext_{\mathbb{Z}}^{1}(\mathbb{Z}_m, H) = H/mH$. ■

3.9 Proposición. Si $\{M_k\}_{k \in K}$ es una familia de $\Lambda-$*módulos*. Entonces para todo $n \geq 0$

$$Ext_{\Lambda}^{n}\left(\bigoplus_{k \in K} M_k, N\right) \cong \prod_{k \in K} Ext_{\Lambda}^{n}(M_k, N)$$

Demostración. Si $n = 0$. Entonces

$$Ext^0_\Lambda\left(\bigoplus_{k\in K} M_k, N\right) \cong Hom_\Lambda\left(\bigoplus_{k\in K} M_k, N\right)$$

Por $(I.5.13)$

$$Hom_\Lambda\left(\bigoplus_{k\in K} M_k, N\right) \cong \prod_{k\in K} Hom_\Lambda\left(M_k, N\right) \cong \prod_{k\in K} Ext^0_\Lambda\left(M_k, N\right)$$

Por lo tanto, $Ext^0_\Lambda\left(\bigoplus_{k\in K} M_k, N\right) \cong \prod_{k\in K} Ext^0_\Lambda\left(M_k, N\right)$.
Para $n = 1$, para cada $k \in K$, sea

$$0 \longrightarrow L_k \longrightarrow P_k \longrightarrow M_k \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva M_k. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} L_k \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} P_k \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} M_k \longrightarrow 0$$

es exacta.

Como P_k es proyectivo para cada $k \in K$, entonces $\bigoplus_{k\in K} P_k$ es proyectivo. Entonces podemos inducir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
Hom_\Lambda\left(\oplus P_k, N\right) & \rightarrow & Hom_\Lambda\left(\oplus L_k, N\right) & \rightarrow & Ext^1_\Lambda\left(\oplus M_k, N\right) & \rightarrow & Ext^1_\Lambda\left(\oplus P_k, N\right) \\
\varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & & & \\
\mathbf{\Pi} Hom_\Lambda\left(P_k, N\right) & \rightarrow & \mathbf{\Pi} Hom_\Lambda\left(L_k, N\right) & \rightarrow & \mathbf{\Pi} Ext^1_\Lambda\left(M_k, N\right) & \rightarrow & \mathbf{\Pi} Ext^1_\Lambda\left(P_k, N\right)
\end{array}$$

donde φ y ψ son los isomorfismos definidos en $(I.5.13)$. Como P_k y $\bigoplus_{k\in K} P_k$ son proyectivos, entonces $Ext^1_\Lambda\left(\bigoplus_{k\in K} P_k, N\right) = 0$ y $\prod_{k\in K} Ext^1_\Lambda\left(P_k, N\right) = 0$. Por lo tanto $Ext^1_\Lambda\left(\bigoplus_{k\in K} M_k, N\right) \cong \prod_{k\in K} Ext^1_\Lambda\left(M_k, N\right)$.

Supongamos que hemos probado para $n \geq 1$. Entonces considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
Ext^n_\Lambda\left(\oplus P_k, N\right) & \rightarrow & Ext^n_\Lambda\left(\oplus L_k, N\right) & \overset{\partial}{\rightarrow} & Ext^{n+1}_\Lambda\left(\oplus M_k, N\right) & \rightarrow & Ext^{n+1}_\Lambda\left(\oplus P_k, N\right) \\
& & \gamma \downarrow & & & & \\
\mathbf{\Pi} Ext^n_\Lambda\left(P_k, N\right) & \rightarrow & \mathbf{\Pi} Ext^n_\Lambda\left(L_k, N\right) & \overset{\partial'}{\rightarrow} & \mathbf{\Pi} Ext^{n+1}_\Lambda\left(M_k, N\right) & \rightarrow & \mathbf{\Pi} Ext^{n+1}_\Lambda\left(P_k, N\right)
\end{array}$$

donde γ es el isomorfismo definido en la hipótesis de inducción. Como

$$Ext^n_\Lambda\left(\bigoplus_{k\in K} P_k, N\right) = 0 = Ext^{n+1}_\Lambda\left(\bigoplus_{k\in K} P_k, N\right)$$

y

$$\prod_{k\in K} Ext^n_\Lambda\left(P_k, N\right) = 0 = \prod_{k\in K} Ext^{n+1}_\Lambda\left(P_k, N\right)$$

Entonces ∂, ∂' son isomorfismos. Por lo tanto

$$Ext_{\Lambda}^{n+1}\left(\bigoplus_{k\in K} M_k, N\right) \cong \prod_{k\in K} Ext_{\Lambda}^{n+1}(M_k, N)$$

■

Análogamente a la proposición anterior se tiene la siguiente proposición.

3.10 Proposición. *Si $\{N_k\}_{k\in K}$ es una familia de $\Lambda-$ módulos. Entonces para todo $n \geq 0$*

$$Ext_{\Lambda}^{n}\left(M, \prod_{k\in K} N_k\right) \cong \prod_{k\in K} Ext_{\Lambda}^{n}(M, N_k)$$

A continuación consideremos el siguiente problema: Sean M' y M'' dos $\Lambda-$*módulos*, ¿Cuáles son los $\Lambda-$*módulos* M, tales que, M' sea un submódulo de M, y M'' sea su módulo cociente?, i.e, ¿Cuáles son los $\Lambda -$ *módulos* M, tales que,

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta? Encontrar o clasificar dichos $\Lambda -$ *módulos* M constituye lo que se le conoce el *problema de extensión* de $\Lambda -$ *módulos*.

3.11 Definición. *Una extensión de M' por M'' es una sucesión exacta corta de $\Lambda -$ módulos*

$$\varepsilon: \ 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Diremos que la *extensión se escinde,* si dicha sucesión exacta se escinde.

Vemos que para cualesquiera M', M'' $\Lambda -$ *módulos*, la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i_{M'}} M' \oplus M'' \xrightarrow{p_{M''}} M'' \longrightarrow 0$$

es una extensión de M' por M''. Por lo tanto el conjunto de extensiones de M' por M'' no es el vacío.

3.12 Definición. Sean $\varepsilon : M' \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M''$ y $\varepsilon' : M' \rightarrowtail M_2 \twoheadrightarrow M$ dos extensiones de M' por M''. Diremos que son equivalentes si existe un $\Lambda - morfismo$ $M_1 \xrightarrow{\psi} M_2$, tal que, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} M' & \rightarrowtail & M_1 & \twoheadrightarrow & M'' \\ 1_{M'} \downarrow & & \psi \downarrow & & 1_{M''} \downarrow \\ M' & \rightarrowtail & M_2 & \twoheadrightarrow & M'' \end{array}$$

Cabe hacer notar que el morfismo ψ de la definición anterior es un isomorfismo debido a $(I.3.12)$. Por otro lado si M', M'' $\Lambda-$*módulos* la relación definida anteriormente, induce una relación de equivalencia sobre las extensiones de M' por M''. A partir de este hecho podemos denotar con $Ext\,(M', M'')$ al conjunto de clases de equivalencia de M', M'' y por $[\varepsilon]$ un elemento. Además podemos observar que $Ext\,(M', M'') \neq \varnothing$, pues la clase de equivalencia de la extensión. $M' \rightarrowtail M' \bigoplus M'' \twoheadrightarrow M''$ es un elemento de $Ext\,(M', M'')$.

3.13 Proposición. Si $Ext^1_\Lambda\,(M'', M') = 0$. Entonces para cualquier extensión de M' por M'' se escinde.

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow M' \stackrel{f}{\longrightarrow} M \stackrel{g}{\longrightarrow} M'' \longrightarrow 0$$

una extensión de M' por M''. Entonces se induce la siguiente sucesión exacta

$$Hom_\Lambda\,(M'', M) \stackrel{g^*}{\longrightarrow} Hom_\Lambda\,(M'', M'') \longrightarrow Ext^1_\Lambda\,(M'', M')$$

Como $Ext^1_\Lambda\,(M'', M') = 0$, entonces g^* es un epimorfismo. Por lo tanto existe $\varphi \in Hom_\Lambda\,(M'', M)$, tal que, $g \circ \varphi = 1_{M''}$. ■

3.14 Corolario. (i) Un $\Lambda-$*módulo* P es proyectivo si, y sólo si $Ext^1_\Lambda\,(P, N) = 0$ para cualquier $\Lambda-$*módulo* N.

(ii) Un $\Lambda-$*módulo* I es inyectivo si, y sólo si $Ext^1_\Lambda\,(M, I) = 0$ para cualquier $\Lambda-$*módulo* M.

Demostración.(i) $(\Longrightarrow)$ Por (3.6) $Ext^n_\Lambda\,(P, N) = 0$ para $n \geq 1$, en particular para $n = 1$.

$(\Longleftarrow)$ Si $Ext^1_\Lambda\,(P, N) = 0$, entonces cualquier sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

se escinde. Por lo tanto P es proyectivo.

(ii) $(\Longrightarrow)$ Por (3.6) se tiene $Ext^1_\Lambda\,(M, I) = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Si $Ext^1_\Lambda\,(M, I) = 0$, entonces cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

se escinde. Entonces I es inyectivo. ■

Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una extensión de M' por M''. Sea

$$P: \ \ldots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \ldots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M''. Entonces por el teorema de comparación existen morfismos $P_0 \xrightarrow{f_0} M$, $P_1 \xrightarrow{f_1} M'$, tales que, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow 1_{M''} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta. Como $f_1 \circ \partial_2 = 0$, entonces $f_1 \in \ker(\partial_2^*)$. Por otro lado, si $P_0' \xrightarrow{f_0'} M$, $P_1' \xrightarrow{f_1'} M'$ son morfismos, tales que, $f \circ f_1' = f_0' \circ \partial_1$ y $g \circ f_0' = \varepsilon$, entonces por el teorema de comparación existe un morfismo $P_0 \xrightarrow{h} M'$, tal que, $f_1 - f_1' = h \circ \partial_1 = \partial_1^* (h)$ $(Hom_{\Lambda} (P_1, M') \xrightarrow{\partial_1^*} Hom_{\Lambda}(P_2, M'))$, entonces $f_1 + im\,(\partial_1^*) = f_1' + im\,(\partial_1^*)$, y $f_1 + im\,(\partial_1^*) \in Ext_{\Lambda}^1 \,(M'', M')$.

Estos hechos motivan la siguiente asignación

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & Ext\,(M', M'') & \longrightarrow & Ext_{\Lambda}^1\,(M'', M') \\ & [\varepsilon] & \longrightarrow & f_1 + im\,(\partial_1^*) = cls\,(f_1) \end{array}$$

3.15 Observación. *ψ está bien definida.*

Demostración. Sean $\varepsilon : M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$, $\varepsilon' : M' \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M''$ dos extensiones equivalentes.

Si P es una resolución proyectiva de M'' se induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{cccccccccc} & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow 1_{M''} & & \\ \varepsilon: & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow 1_{M'} & & \downarrow \psi & & \downarrow 1_{M''} & & \\ \varepsilon': & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & M_1 & \xrightarrow{g'} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces $\Psi\,[\varepsilon] = f_1 + im\,(\partial_1^*)$, y $\Psi\,[\varepsilon'] = f_1 + im\,(\partial_1^*)$, pues ψ es un isomorfismo. Por lo tanto $\Psi\,[\varepsilon] = \Psi\,[\varepsilon']$.

3.16 Observación. *Si* $\varepsilon : M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ *es una extensión que se escinde, entonces* $\Psi[\varepsilon] = 0$*.*

Demostración. Sea $\varepsilon : M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ una extensión escindible, entonces existe un morfismo $M'' \xrightarrow{j} M$, tal que, $g \circ j = 1_{M''}$, entonces se induce el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow_0 & & \downarrow_{j\circ\varepsilon} & & \downarrow_{1_{M''}} & & \\ \varepsilon : & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmutativo, con P una resolución proyectiva de M''. Por lo tanto $\Psi[\varepsilon] = 0 + im(\partial_1^*) = 0$.

3.17 Observación. Ψ *es una función biyectiva.*

Demostración. Veamos que Ψ es una función inyectiva. Sean $[\varepsilon]$, $[\varepsilon'] \in Ext(M', M'')$, tales que, $\Psi[\varepsilon] = \Psi[\varepsilon']$, i.e, $f_1 + im(\partial_1^*) = f_1' + im(\partial_1^*)$, entonces existe un $\Lambda - morfismo$ $P_0 \xrightarrow{h} M'$, tal que, $f_1 - f_1' = h \circ \partial_1$. Sea $m \in M$, entonces existe $x \in P_0$, tal que, $g(m) = \varepsilon(x) = g(f_0(x))$ y $m = f_0(x) + f(m')$, para algún $m' \in M'$. Definiendo

$$\phi(m) = f'(h(x)) + f_0'(x) + f'(m')$$

Por otro lado, si tenemos $y \in P_0$, $\widetilde{m} \in M'$, tal que, $m = f_0(y) + f'(\widetilde{m})$, entonces existe $z \in P_1$, tal que, $x - y = \partial_1(z)$ y

$$f_0(x - y) = f(\widetilde{m}) - f\left(m'\right)$$

además

$$f \circ f_1(z) = f_0 \circ \partial_1(z) = f(\widetilde{m}) - f\left(m'\right)$$

Por lo tanto $\widetilde{m} - m' = f_1(z)$, por otro lado

$$\begin{array}{rc} & f'(h(y)) + f_0'(y) + f'(m') \\ = & f'(h(x)) + f_0'(x) + f'(m') - f'(h(\partial_1(z))) - f_0'(\partial_1(z)) \\ = & f'(h(x)) + f_0'(x) + f'(m') + f'(f_1(z)) - f'(f_1(z)) + f'(f_1'(z)) - f_0'(\partial_1(z)) \\ = & f'(h(x)) + f_0'(x) + f'(m') \end{array}$$

Por lo tanto, ϕ está bien definida; además $\phi \circ f = f'$, $g' \circ \phi = g$. Entonces $[\varepsilon] = [\varepsilon']$.

Veamos que Ψ es una función suprayectiva, i.e, mostremos que existe una extensión de M' por M''. Sea $f + im\left(\partial_1^*\right) \in Ext_1^\Lambda\left(M'', M'\right)$, donde $f \in Hom_\Lambda\left(P_1, M'\right)$, tal que, $\partial_2^*\left(f\right) = f \circ \partial_2 = 0$. Consideremos el submódulo

$$L = \left\{\left(f\left(z\right), -\partial_1\left(z\right)\right) : z \in P_1\right\}$$

de $M' \oplus P_0$. Definamos a $M = M' \oplus P_0 / L$ y el morfismo $M' \xrightarrow{\alpha} M$, como $\alpha\left(m'\right) = \left(m', 0\right) + L$, $m' \in M'$. Tomando el morfismo

$$M' \oplus P_0 \xrightarrow{\beta'} M''$$

dado por $\beta'\left(m', x\right) = \varepsilon\left(x\right)$, con $m' \in M'$ y $x \in P_0$. A partir de la definición de β' se duce que β' es un $\Lambda - epimorfismo$. Entonces β' induce un epimorfismo

$$M \xrightarrow{\beta} M''$$

con $\beta\left(\left(m', x\right) + L\right) = \varepsilon\left(x\right)$ para $\left(m', x\right) + L \in M$.

Supongamos que $\alpha\left(m'\right) = 0$, para alguna $m' \in M'$. Entonces $\left(m', 0\right) = \left(f\left(z\right), -\partial_1\left(z\right)\right)$, para alguna $z \in P_1$. Por lo tanto, si $\partial_1\left(z\right) = 0$, esto implica que $z = \partial_2\left(t\right)$ para alguna $t \in P_2$. Entonces $m' = f\left(z\right) = f \circ \partial_2\left(t\right) = 0$, pues $f \circ \partial_2\left(z\right) = 0$. Entonces α es un monomorfismo.

Por las definiciones de α y β se tiene $im\left(\alpha\right) \subseteq \ker\left(\beta\right)$. Sea $\left(a, x\right) \in M' \oplus P_0$, tal que, $\beta\left(\left(a, x\right) + L\right) = \varepsilon\left(x\right) = 0$. Entonces existe $z \in P_1$, tal que, $x = \partial_1\left(z\right)$ y $\left(m', x\right) + L = \left(m', \partial_1\left(z\right)\right) + L = \left(m', \partial_1\left(z\right)\right) + \left(f\left(z\right), -\partial_1\left(z\right)\right) + L = \left(m' + f\left(z\right), 0\right) + L = \alpha\left(m' + f\left(z\right)\right)$. Por lo tanto $\ker\left(\beta\right) = im\left(\alpha\right)$, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$\varepsilon : \quad 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

Definamos al morfismo $P_0 \xrightarrow{f_0} M$, como $f_0\left(x\right) = \left(0, x\right) + L$. Además, si $z \in P_1$, $x \in P_0$, $\alpha \circ f\left(z\right) = \left(f\left(z\right), 0\right) + L = \left(f\left(z\right), -\partial_1\left(z\right)\right) + \left(0, \partial_1\left(z\right)\right) + L = \left(0, \partial_1\left(z\right)\right) + L = f_0 \circ \partial_1\left(z\right)$, y $\beta\left(f_0\left(x\right)\right) = \beta\left(\left(0, x\right) + L\right) = \varepsilon\left(x\right)$. Por lo tanto el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow_f & & \downarrow_{f_0} & & \downarrow_{1_{M''}} & & \\
\varepsilon : & & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

es conmutativo y $\Psi\left[\varepsilon\right] = f + im\left(\partial_1^*\right)$. Por lo tanto Ψ es suprayectiva. ■

Recordemos que si X es un conjunto y G un grupo, y $X \xrightarrow{\psi} G$ una función biyectiva, entonces existe una única estructura de grupo para X, tal que,

ψ es un isomorfismo de grupos. En particular $Ext\,(M', M'')$ tiene una estructura de grupos, pues de hemos definido una biyección entre $Ext\,(M', M'')$ y $Ext^1_\Lambda\,(M'', M')$. Lo que a continuación haremos es describir la estructura de grupo de $Ext\,(M', M'')$ de manera explícita.

3.18 Lema. *Si* $\varepsilon : M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ *es una extensión de* M' *por* M'' *y* $M' \xrightarrow{\varphi} M'_1$ *un morfismo. Entonces existe una extensión* $\varepsilon' : M'_1 \rightarrowtail M_{\varepsilon'} \twoheadrightarrow M''$ *y un morfismo de cadenas* $\Gamma = (\varphi_{\prime}, \beta, 1_{M'''}) : \varepsilon \longrightarrow \varepsilon'$*, tal que, la pareja* (ε', Γ) *es única salvo equivalencias.*

Demostración. Sea $M_{\varepsilon'} = M \bigvee M'_1$ del diagrama

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ \varphi \downarrow & & \\ M'_1 & & \end{array}$$

Entonces existen morfismos $M \xrightarrow{\beta} M_{\varepsilon'}$ y $M'_1 \xrightarrow{f'} M_{\varepsilon'}$. Por otro lado, de los morfismos $M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ y $M'_1 \xrightarrow{0} M''$ y de la propiedad universal del coproducto fibrado, existe un morfismo $M_{\varepsilon'} \xrightarrow{g'} M''$, tal que, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \varepsilon: & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow\varphi & & \downarrow\beta & & \downarrow 1_{M''} & & \\ & & & M'_1 & \underset{f'}{\longrightarrow} & M_{\varepsilon'} & \underset{g'}{\longrightarrow} & M'' & & \end{array}$$

conmuta. A partir de la definición de coproducto fibrado se tiene $g' \circ f' = 0$. Ahora mostremos que $\ker\,(g') = im\,(f')$. Como $M_{\varepsilon'} = M' \oplus M/S$ con $S = \{(\varphi\,(m'), -f\,(m')) : m' \in M\}$, además el morfismo $f'\,(m') = (m', 0) + S$ y el morfismo β está definido por $\beta\,(m) = (0, m) + S$, más aun $g'\,((m', m) + S) = g\,(m)$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \ker\,(g') & = & \{(m', m) + S : g\,(m) = 0\} \\ & = & \{(m', m) + S : m \in \ker\,(g) = im\,(f)\} \\ & = & \{(m', f\,(n)) + S : m' \in M'_1 \wedge n \in M'\} \\ & = & f\,(M'_1) \end{array}$$

Por lo tanto $\ker\,(g') = im\,(f')$. Como $\ker\,(f') = \{m' \in M'_1 : (m', 0) \in S\}$, si $(m', 0) \in S$, entonces existe $a \in M'$ con $(m', 0) = (\varphi\,(a), -f\,(a))$, entonces $f\,(a) = 0$, como f es monomorfismo entonces $a = 0$ y $\alpha\,(0) = 0$. Por lo tanto f' es monomorfismo. Entonces

$$\varepsilon' : 0 \longrightarrow M'_1 \longrightarrow M_{\varepsilon'} \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Además, si ε'' es otra extensión de M_1' por M'', con la propiedad mencionada anteriormente, entonces definiendo el morfismo $M^{\varepsilon''} \xrightarrow{\beta'} M^{\varepsilon'}$ con $\beta'(m'') = \left(\beta''(m''), g''(m'')\right)$ se tiene que ε'' es equivalente con ε ■

3.19 Lema. *Si $\varepsilon : M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ es una extensión de M' por M'' y $M_1'' \xrightarrow{\psi} M''$ un morfismo. Entonces existe una extensión $\varepsilon' : M' \overset{f'}{\rightarrowtail} M^{\varepsilon'} \overset{g'}{\twoheadrightarrow} M_1''$ y un morfismo de cadenas $\Gamma = (1_{M'}, \beta, \psi) : \varepsilon \longrightarrow \varepsilon'$ tal que la pareja (ε', Γ) es única salvo equivalencias.*

Demostración. Sea $M^{\varepsilon'} = M \bigwedge M''$ del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & M_1'' & & \\ & & \downarrow\psi & & \\ M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces existen morfismos $M^{\varepsilon'} \xrightarrow{g'} M_1''$ y $M^{\varepsilon'} \xrightarrow{\beta} M$, más aun a partir de los morfismos $M' \xrightarrow{0} M_1''$ y $M' \xrightarrow{f} M$ existe un único morfismo $M' \xrightarrow{f'} M^{\varepsilon'}$, tal que, $g' \circ f' = 0$ y $\beta \circ f' = f$. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M' & \xrightarrow{f'} & M^{\varepsilon'} & \xrightarrow{g} & M_1'' & & \\ & & 1_{M'}\downarrow & & \downarrow\beta & & \downarrow\varphi & & \\ \varepsilon : & 0 \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Del diagrama anterior se tiene que f' es un monomorfismo. Siguiendo un proceso dual al lema anterior se muestra que la sucesión obtenida es exacta. Si ε'' es otra extensión de M' por M_1'' definiendo el morfismo $M^{\varepsilon''} \xrightarrow{\beta'} M^{\varepsilon'}$ con $\beta'(m'') = \left(\beta''(m''), g''(m'')\right)$. Entonces se tiene que ε'' es equivalente con ε. ■

Para dos extensiones $\varepsilon : M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ y $\varepsilon' : M' \overset{f'}{\rightarrowtail} M_1 \overset{g'}{\twoheadrightarrow} M''$. Sea

$$\varepsilon \oplus \varepsilon' : \quad 0 \rightarrow M' \bigoplus M' \overset{f \oplus f'}{\rightarrow} M \bigoplus M \overset{g \oplus g'}{\rightarrow} M'' \bigoplus M'' \rightarrow 0$$

la suma directa de ε y ε', se tiene $\varepsilon \oplus \varepsilon'$ es una sucesión exacta. Defiendo los morfismos

$$M' \bigoplus M' \xrightarrow{\nabla_{M'}} M'$$

y

$$M'' \xrightarrow{\triangle_{M''}} M'' \bigoplus M''$$

codiagonal y *diagonal* respectivamente, definidos por $\nabla(m_1', m_2') = m_1' + m_2'$ y $\triangle(m'') = (m'', m'')$. Entonces por los lemas anteriores existen sucesiones

$$\varepsilon_1 : \quad 0 \longrightarrow M' \longrightarrow E_1 \longrightarrow M'' \bigoplus M'' \longrightarrow 0$$

$$\varepsilon_2 : \quad 0 \longrightarrow M' \longrightarrow E_2 \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M' \bigoplus M' & \stackrel{f\oplus f'}{\longrightarrow} & M \bigoplus M & \stackrel{g\oplus g'}{\longrightarrow} & M'' \bigoplus M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow_{\nabla_{M'}} & & \downarrow_{\beta_1} & & \downarrow_{1_{M''\oplus M''}} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & M'' \bigoplus M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & {}_{1_{M'}}\uparrow & & \uparrow_{\beta_2} & & \uparrow_{\triangle_{M''}} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

A ε_2 se le suele llamar *la suma de Baer* de ε y ε', a la cual se le suele denotar por $\nabla_{M'}(\varepsilon \oplus \varepsilon')\triangle_{M''}$.

Si $\varepsilon_1 : M' \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M''$, $\varepsilon_1{\acute{}} : M' \rightarrowtail M_1' \twoheadrightarrow M''$ son extensiones equivalentes, al igual que $\varepsilon_2 : M' \rightarrowtail M_2 \twoheadrightarrow M''$, $\varepsilon_1{\acute{}} : M' \rightarrowtail M_2' \twoheadrightarrow M''$. Entonces

$$M_1 \bigoplus M_2 \cong M_1' \bigoplus M_2'$$

por lo tanto $\nabla_{M'}(\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2)\triangle_{M''}$ es equivalente a $\nabla_{M'}(\varepsilon_1' \oplus \varepsilon_2')\triangle_{M''}$.

Del hecho anterior para $[\varepsilon]$, $[\varepsilon'] \in Ext(M', M'')$ definimos

$$[\varepsilon] + \left[\varepsilon'\right] = \nabla_{M'}\left(\varepsilon \oplus \varepsilon'\right)\triangle_{M''}$$

De esta definición podemos decir que $+$ se puede ver como la composición:

$$\left([\varepsilon], \left[\varepsilon'\right]\right) \longrightarrow \left(\varepsilon \oplus \varepsilon'\right) \longrightarrow \left(\nabla_{M'}\left(\varepsilon \oplus \varepsilon'\right)\right) \longrightarrow \left(\nabla_{M'}\left(\varepsilon \oplus \varepsilon'\right)\right)\triangle_{M''}$$

3.20 Proposición. *Si ε' es una extensión de M' por M'' que se escinde, entonces para cualquier extensión ε de M' a M'', se tiene*

$$[\varepsilon] + \left[\varepsilon'\right] = [\varepsilon]$$

Demostración. Sea $\varepsilon : M' \stackrel{f}{\rightarrowtail} M \stackrel{g}{\twoheadrightarrow} M''$ una extensión de M' por M'', y sea ε' una extensión escindible de M' por M'', como ε' se escinde, entonces podemos tomar a $\varepsilon' : M' \overset{i}{\rightarrowtail} M' \bigoplus M'' \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$. Entonces $\triangledown(\varepsilon \oplus \varepsilon')$ es la extensión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M'' \bigoplus M'' \longrightarrow 0$$

con $M_1 = M' \bigoplus M \bigoplus (M' \bigoplus M'')/S$, donde

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{(\triangledown(m_1', m_2'), -(f,i)(m_1', m_2'), 0) : m_1', m_2' \in M'\} \\ & = & \{(m_1' + m_2', -f(m_1'), -m_2', 0) : m_1', m_2' \in M'\} \end{array}$$

y los morfismos f y g están dados por:

$$f'(a) = (a, 0, 0, 0) + S, a \in S$$

y

$$g'((a,b,c,d) + S) = (g,\pi)(b,(a,c)) = (g(b), c) \;\; a, c \in M', b \in M, c \in M''$$

Por otro lado la extensión $\triangledown(\varepsilon \oplus \varepsilon')$ se puede ver como

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{g''} M'' \longrightarrow 0$$

con

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{(b', c) : g'(b) = \triangle(c)\} \\ & = & \{((a,b,a_1,c) + S) : (g(b), c) = (c,c)\} \\ & = & \{((a,b,a_1,c) + S) : g(b) = c\} \end{array}$$

y los morfismos f'' y g'' definidos por

$$f''(a) = \left(f'(a), 0\right) = ((a,0,0,0) + S, 0), m \in M'$$

y

$$g''((a,b,a_1,c) + S, c) = c$$

Definiendo el morfismo $M \xrightarrow{\varphi} E$, dado por

$$\varphi(b) = ((0,b,0,g(b)) + K, g(b)), b \in M$$

Entonces para cada $a' \in M'$, $b \in M$

$$\begin{array}{rcl} \varphi(f(a)) & = & ((0, f(a), 0, 0) + K, 0) \\ & = & ((-a, f(a), 0, 0) + (a, f(a), 0, 0) + S, 0) \\ & = & f''(a) \end{array}$$

$$\begin{aligned} g''(\varphi(b)) &= {}''((0,b,0,g(b))+K,g(b)) \\ &= g(b) \end{aligned}$$

Por lo tanto el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f''} & E & \xrightarrow{g''} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & 1_{M'}\downarrow & & \varphi\downarrow & & \downarrow 1_{M''} & & \\ {}'0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M'\bigoplus M'' & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por lo tanto $\nabla(\varepsilon \oplus \varepsilon')$ equivalente a ε. ■

3.21 Proposición. *Para una extensión* $\varepsilon : M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ *de* M' *a* M''*, si tomamos la extensión* $\overline{\varepsilon} : M' \overset{\overline{f}}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$*, con* $\overline{f}(m') = -f(m')$*,* $m' \in M'$*. Entonces la extensión* $(\nabla_{M'}(\varepsilon \oplus \varepsilon'))\triangle_{M''}$ *se escinde.*

Demostración. Como la extensión

$$\nabla(\varepsilon \oplus \overline{\varepsilon}) : \quad 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} M_1 \xrightarrow{g'} M''\bigoplus M'' \longrightarrow 0$$

es tal que $M_1 = M'\bigoplus M\bigoplus M/S$, con

$$S = \left\{\left(m_1' + m_2', -f\left(m_1'\right), f\left(m_2'\right)\right) : m_1', m_2' \in M'\right\}$$

y los morfismos f' y g' están definidos por

$$f'\left(m'\right) = \left(m', 0, 0\right) + K, m' \in M'$$

$$g'\left(\left(m', m_1, m_2\right) + K\right) = \left(g\left(m_1\right), g\left(m_2\right)\right), \left(m', m_1, m_2\right) \in M'\bigoplus M\bigoplus M$$

Entonces la extensión $\nabla(\varepsilon \oplus \overline{\varepsilon})\triangle$ puede tomarse como

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f''} E \xrightarrow{g''} M'' \longrightarrow 0$$

con

$$\begin{aligned} E &= \{(e', m'') \in M_1\bigoplus M'' : g'(e') = \triangle(m'')\} \\ &= \{((m', m_1, m_2) + S, m'') : g(m_1) = g(m_2) = m''\} \end{aligned}$$

$$f''\left(m'\right) = \left(\left(m', 0, 0\right) + S, 0\right),\ m' \in M'$$

$$g''\left(\left(m', m_1, m_2\right) + S, m''\right) = m''$$

Si $m'' \in M''$ y $m \in M$, tal que, $m'' = g(m)$. Entonces $((0, m, m) + S, m'') \in E$.

Si $m_1 \in M$ es otro elemento, tal que, $m'' = g(m_1)$, entonces $m_1 - m = f(m')$ para algún $m' \in M'$. Entonces

$$\begin{aligned}(0, m_1, m_1) + S &= (0, m, m) + (0, f(m'), f(m')) + S \\ &= (0, m, m) + (-m' + m', f(m'), f(m')) + S \\ &= (0, m, m) + S\end{aligned}$$

pues $(-m' + m', f(m'), f(m')) \in S$. Por lo tanto $((0, m, m) + S, m'')$ determina un único elemento en E. Definiendo $\gamma(m'') = ((0, m, m) + S, m'')$ con $m \in M$, tal que, $g(m) = m''$, determina un morfismo M'' en E, tal que, $g'' \circ \gamma = 1_E$. ■

A partir de las proposiciones anteriores vemos que la suma de Baer dota a $Ext(M', M'')$ de una estructura de un grupo abeliano, donde el neutro aditivo es la clase de la extensión escindible.

Recordemos que la función Ψ es biyectiva, por lo que ahora nos falta es ver que con la estructura de grupo abeliano con que se le dotó a $Ext(M', M'')$, resulta que Ψ es un isomorfismo de grupos abelianos.

3.22 Proposición (Formula I). $\Psi[\varepsilon \oplus \varepsilon'] = \Psi[\varepsilon] \oplus \Psi[\varepsilon']$

Demostración. Del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 \bigoplus P_1' & \longrightarrow & P_0 \bigoplus P_0' & \longrightarrow & M'' \bigoplus M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha_1 \oplus \alpha_1'} \downarrow & & {\scriptstyle \alpha_0 \oplus \alpha_0'} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle 1_{M''} \oplus 1_{M''}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' \bigoplus M' & \longrightarrow & M \bigoplus M & \longrightarrow & M'' \bigoplus M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde P, P' son resoluciones proyectivas de M''. Como

$$Ext(M' \bigoplus M', M'' \bigoplus M'')$$

es independiente de la elección de la resolución proyectiva y $P \bigoplus P'$ es una resolución proyectiva de $M'' \bigoplus M''$, entonces $\Psi[\varepsilon \oplus \varepsilon'] = cls(\alpha_1 \oplus \alpha_1) = cls(\alpha_1) \oplus cls(\alpha_1) = \Psi[\varepsilon] \oplus \Psi[\varepsilon']$. ■

3.23 Proposición (Formula II). *Si* $[\varepsilon] \in Ext(M', M'')$ *y* $M' \xrightarrow{h} N'$, *entonces* $\Psi[h \circ \varepsilon] = h\Psi[\varepsilon]$.

Demostración. Sea P una resolución proyectiva de M'', entonces al considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha_1} \downarrow & & {\scriptstyle \alpha_0} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle 1_{M''}} & & \\ \varepsilon: \ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle h} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle 1_{M''}} & & \\ h \circ \varepsilon: \ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde $h \circ \varepsilon$ es la extensión obtenida a partir del morfismo $M' \xrightarrow{h} N'$, por lo que P es una resolución proyectiva de $h \circ \varepsilon$. Entonces $\Psi[h \circ \varepsilon] = cls\,(h \circ \alpha_1) = h\,(cls\,(\alpha_1)) = h\Psi[\varepsilon]$. ■

3.24 Proposición (Formula III). *Si* $[\varepsilon] \in Ext\,(M', M'')$ *y* $M'' \xrightarrow{k} N''$, *entonces* $[\varepsilon k] \in Ext\,(M', N'')$.

Demostración. Sea Ψ' la biyección entre $Ext\,(M', N'')$ y $Ext^1_\Lambda\,(N'', M')$. Si P' es una resolución proyectiva de N'', entonces $\Psi'([\varepsilon k]) = cls\,(k'_1)$, donde k'_1 es la primera componente del morfismo $P_{N''} \longrightarrow \varepsilon k$ sobre $1_{N''}$, entonces

$$\Psi'([\varepsilon k]) = \Psi[\varepsilon]\,k'_1$$

En $Ext\,(M', N'')$. Considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & P'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & P'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & P_0 & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & {\scriptstyle\gamma_1}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \\
\varepsilon k: & 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & {\scriptstyle 1_{M'}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M''}} & & \\
\varepsilon: & 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde $\Psi'[\varepsilon k] = cls\,(\gamma_1)$, por otro lado considerando el diagrama para $\Psi[\varepsilon]\,k'_1$, se induce el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
P'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & P'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & P_0 & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle k_1} & & \downarrow{\scriptstyle k_0} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \\
P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M''}} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Entonces como $\alpha_1 \circ k'_1$ y γ_1 son la primera componente del morfismo $P_{N''} \longrightarrow \varepsilon$, por el teorema de comparación

$$cls\,(\gamma_1) = cls\,(\alpha_1 \circ k'_1)$$

3.25 Corolario. *La función*

$$\begin{array}{cccc}
\Psi: & Ext\,(M', M'') & \longrightarrow & Ext^1_\Lambda\,(M'', M') \\
 & [\varepsilon] & \longrightarrow & f_1 + im\,(\partial_1^*) = cls\,(f_1)
\end{array}$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Como Ψ es una biyección basta probar que es un homeomorfismo.

Sean $[\varepsilon]$, $[\varepsilon'] \in Ext\,(M', M'')$. Entonces

$$\begin{array}{rcll} \Psi\left([\varepsilon]+[\varepsilon']\right) & = & \Psi\left([\nabla\left(\varepsilon\oplus\varepsilon'\right)]\,\triangle\right) & \\ & = & \left(\Psi\left[\nabla\left(\varepsilon\oplus\varepsilon'\right)\right]\right)\triangle & \text{Fomula III} \\ & = & \nabla\left(\Psi\left(\varepsilon\oplus\varepsilon'\right)\right)\triangle & \text{Formula II} \\ & = & \nabla\left(\Psi\left[\varepsilon\right]\oplus\Psi\left[\varepsilon'\right]\right)\triangle & \text{Formula I} \\ & = & \Psi\left[\varepsilon\right]+\Psi\left[\varepsilon'\right] & \end{array}$$

Por lo tanto Ψ es un isomorfismo. ■

Para finalizar esta sección al igual que se hizo para $Tor_n^{\Lambda}(M, \_)$ demos una caracterización para $Ext_{\Lambda}^{n}(M, \_)$.

3.26 Teorema (Axiomas para Ext). *Sea*

$$\left(\mathbf{F}^n{:}_{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{Mod} \rightarrow_{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{Mod}\ (\mathbf{Ab})\right)_{0\leq n}$$

una sucesión de funtores covariantes aditivos que cumple:

(i) *Para cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

existe una sucesión exacta larga con morfismo de conexión

$$\longrightarrow \mathbf{F}^{n-1}\left(N''\right) \xrightarrow{\triangle^{n-1}} \mathbf{F}^{n}\left(N'\right) \longrightarrow \mathbf{F}^{n}\left(N\right) \longrightarrow \mathbf{F}^{n}\left(N''\right) \xrightarrow{\triangle^{n}} \mathbf{F}^{n-1}\left(N'\right) \longrightarrow$$

(ii) *Existe un $\Lambda -$ módulo M, tal que, $\mathbf{F}^0(M)$ es naturalmente equivalente a $Hom_{\Lambda}(M, \_)$.*

(iii) $\mathbf{F}^n(I) = 0$ *para todo $\Lambda -$ módulo inyectivo I y $n \geq 1$.*

Entonces $\mathbf{F}^n$ es naturalmente equivalente a $Ext_{\Lambda}^{n}(M, \_)$ para $n \geq 0$.

Demostración. Por inducción sobre n. El caso $n = 0$ se tiene por (ii). Mostremos para $n = 1$. Como N es un $\Lambda -$ *módulo* existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

con I inyectivo. Entonces por (ii) se induce el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{F}^0(I) & \rightarrow & \mathbf{F}^0(V) & \rightarrow & \mathbf{F}^1(N) & \rightarrow & \mathbf{F}^1(I) \\ \downarrow_{\tau^0,I} & & \downarrow_{\tau^0,V} & & & & \downarrow \\ Ext_{\Lambda}^{0}(M,I) & \rightarrow & Ext_{\Lambda}^{0}(M,V) & \rightarrow & Ext_{\Lambda}^{1}(M,N) & \rightarrow & Ext_{\Lambda}^{1}(M,I) \end{array}$$

con reglones exactos, donde τ^0, I y τ^0, V son los isomorfismos descritos en (ii), como $\mathbf{F}^1(I) = 0 = Ext^1_\Lambda(M, I)$, existe un isomorfismo $\mathbf{F}^1(N) \stackrel{\tau_1,N}{\longrightarrow} Ext^1_\Lambda(M, N)$ que hace conmutar el diagrama. Así procediendo de manera inductiva, existen isomorfismos $\mathbf{F}^n(N) \stackrel{\tau_n,N}{\longrightarrow} Ext^n_\Lambda(M, N)$ para cada $n \geq 1$. ■

Procediendo de manera dual a (2.25) se tiene la siguiente definición.

3.27 Definición. *Un objeto I en una categoría abeliana $\mathbf{A}$ se dice que es* inyectivo, *si para cualquier monomorfismo $M' \stackrel{f}{\longrightarrow} M$ y morfismo $M' \stackrel{g}{\longrightarrow} I$, existe un morfismo $M \stackrel{h}{\longrightarrow} I$, tal que, $g = h \circ f$, es decir, el diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \stackrel{f}{\longrightarrow} & M \\ & & & \underset{g}{\searrow} & \downarrow h \\ & & & & I \end{array}$$

3.28 Definición. *Dados dos objetos M, N en una categoría abeliana $\mathbf{A}$, diremos que M se* encaja *en N, si existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M \stackrel{f}{\longrightarrow} N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

3.29 Definición. *Si γ es una clase de objetos en una categoría abeliana $\mathbf{A}$, diremos que* tiene bastantes *$co-\gamma-objetos$, si para cualquier elemento en $\mathbf{A}$ se puede encajar en algún objeto de γ.*

3.30 Definición. *Para una sucesión $(\mathbf{F}^n \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B})_{0 \leq n}$ de funtores aditivos. Diremos que dicha sucesión γ – coborrable, si $\mathbf{F}^n(Y) = 0$ para cualquier $n \geq 0$ y $Y \in \gamma$.*

Notemos que las definiciones anteriores corresponden a una generalización de los $\Lambda-$*módulos* inyectivos planteado desde la teoría de categorías abelianas y de los funtores derivados. Por lo que el teorema anterior se puede rescribir de la siguiente manera.

3.31 Proposición. *Para dos sucesiones de funtores covariantes aditivos $(F^n : A \to B)_{0 \leq n}$, $(F^{n\prime} : A \to B)_{0 \leq n}$, si $\mathbf{A}$ tiene bastantes $co-\gamma-objetos$, y* *(i) Para cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

de objetos en A, existen sucesiones exactas largas

$$\longrightarrow \mathbf{F}^{n-1}\left(N''\right) \overset{\triangle^{n-1}}{\longrightarrow} \mathbf{F}^{n}\left(N'\right) \longrightarrow \cdots \overset{\triangle^{n}}{\longrightarrow} \mathbf{F}^{n-1}\left(N'\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathbf{F}^{n-1\prime}\left(N''\right) \overset{\triangle^{n-1\prime}}{\longrightarrow} \mathbf{F}^{n\prime}\left(N'\right) \longrightarrow \cdots \overset{\triangle^{n\prime}}{\longrightarrow} \mathbf{F}^{n-1}\left(N'\right) \longrightarrow$$

(ii) $\mathbf{F}^0$ *es naturalmente equivalente a* $F^{0\prime}$
(iii) $(\mathbf{F}^n)_{0\leq n}$ *y* $(\mathbf{F}^{n\prime})_{0\leq n}$ *son* $\gamma-coborrables$.
Entonces $\mathbf{F}^n$ *es naturalmente equivalente a* $F^{n\prime}$ *para toda* $n \geq 0$.

3.32 Definición. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son dos categorías abelianas y*

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{T}^n : \mathbf{A} \to \mathbf{B}\right)_{n\geq 0}$$

una sucesión de funtores aditivos, diremos que $\mathbf{T}$ *es un* $\partial - funtor$ cohomológico*, si para cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

en $\mathbf{A}$ *existe una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{T}^n\left(N''\right) \overset{\partial^n}{\longrightarrow} \mathbf{T}^{n+1}\left(N'\right) \longrightarrow \mathbf{T}^{n+1}(N) \longrightarrow \mathbf{T}^{n+1}\left(N''\right) \overset{\partial^{n+1}}{\longrightarrow} \cdots$$

que inicia en $\mathbf{T}^0(N') \longrightarrow \mathbf{T}^0(N) \longrightarrow \mathbf{T}^0(N'')$ *tal que, si*

$$0 \longrightarrow Q' \longrightarrow Q \longrightarrow Q'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en A, entonces existe un diagrama que conmuta para toda $n \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}^n(N'') & \overset{\partial}{\longrightarrow} & \mathbf{T}^{n+1}(N') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{T}^n(Q'') & \underset{\partial'}{\longrightarrow} & \mathbf{T}^{n+1}(Q') \end{array}$$

3.33 Definición. *Un* morfismo $\tau : (\mathbf{H}^n)_{n\geq 0} \to (\mathbf{T}^n)_{n\geq 0}$ *de* $\partial-funtores$ *cohomológicos es una sucesión de transformaciones naturales*

$$\tau = \left(\tau^n : \mathbf{H}^n \to \mathbf{T}^n\right)_{n\geq 0}$$

tal que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^n(N'') & \xrightarrow{\partial} & \mathbf{T}^{n+1}(N') \\ {\scriptstyle \tau^n, N''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau^{n+1}, N'} \\ \mathbf{T}^n(N'') & \underset{\partial'}{\longrightarrow} & \mathbf{T}^{n+1}(N') \end{array}$$

para toda $n \geq 0$ *y toda sucesión exacta* $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ *en* $\mathbf{A}$.

3.34 Definición. *Si* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un funtor aditivo, entonces un* $\partial -$ *funtor cohomológico* $\mathbf{T} = (\mathbf{T}^n : \mathbf{A} \to \mathbf{B})_{n \geq 0}$ *es una* extensión cohomológica *de* F, *si existe una equivalencia natural* $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{F} \to \mathbf{T}^0$.

Cabe hacer notar que $\left(Ext_n^{\Lambda}(M, \_)\right)_{n\geq 0}$ es una extensión cohomológica de $Hom_{\Lambda}(M, \_)$

Como los conceptos de (3.27) a (3.29) corresponden a la generalización del comportamiento de un $\Lambda -$ *módulo* inyectivo en una categoría abeliana, que es el concepto dual presentado en (2.27). Por lo que de manera dual a (2.31) se obtiene el siguiente teorema.

3.35 Teorema. *Si* $\mathbf{A}$ *es una categoría con bastantes objetos inyectivos* $\left(\mathbf{I}^{\mathbf{A}}\right)$. *Entonces*

(i) *Si* $(\mathbf{H}^n)_{n\geq 0}$ *y* $(\mathbf{T}^n)_{n\geq 0}$ *son dos* $\partial -$ *funtores cohomológicos, con* $H^n(I) = 0$ *para cualquier* $I \in I^{\mathbf{A}}$ *y* $n \geq 1$ *y existe* $\tau^0 : \mathbf{H}^0 \to \mathbf{T}^0$ *una transformación natural. Entonces existe una única transformación natural* $\tau^n : \mathbf{H}^n \to \mathbf{T}^n$ *para cualquier* $n \geq 0$. *Más aún si* τ^0 *es una equivalencia natural se tiene que* τ^n *son equivalencias naturales.*

(ii) *Si* $\mathbf{F} : {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ *es un funtor covariante aditivo exacto izquierdo, entonces existe una única extensión cohomológica* $(\mathbf{H}^n)_{n\geq 0}$ *de* $\mathbf{F}$ *tal que* $H^n(I) = 0$ *para cualquier* $I \in I^{\mathbf{A}}$ *y* $n \geq 0$

Demostración. (i) *Es dual de* (2.33)

(ii) *Tomando* $R^n\mathbf{T} = \mathbf{H}^n$, *para* $n \geq 0$, *se obtiene el resultado deseado.* ■

De esta manera podemos concluir que $\left(Ext_n^{\Lambda}(M, \_)\right)_{n\geq 0}$ se construye como la extensión cohomológica de $Hom_{\Lambda}(M, \_)$.

Capítulo 7

La cubierta inyectiva.

En esta sección mostraremos resultados importantes acerca de los $\Lambda-$*módulos* inyectivos

1.1 Definición. *Un subanillo J de Λ se llamará* ideal izquierdo *de Λ, si para toda $x \in \Lambda$ y para toda $a \in J$ se tiene $xa \in J$, es decir, $\Lambda J \subseteq J$. Un subanillo J de Λ se llamará* ideal derecho *de Λ, si para toda $x \in \Lambda$ y para toda $a \in J$ se tiene que $ax \in J$, es decir, $J\Lambda \subseteq J$. Un subanillo J de Λ se llamará* ideal *de Λ, si es ideal izquierdo y derecho.*

Si Λ es un anillo conmutativo, entonces un ideal derecho (izquierdo) de Λ es un ideal izquierdo (derecho).

1.2 Teorema (Criterio de Baer). *Un $\Lambda - módulo$ I es inyectivo si, y solo si para cualquier $\Lambda - morfismo$ $J \xrightarrow{f} I$, con J un ideal de Λ, puede extenderse a Λ, es decir, existe un morfismo g, tal que, el diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & \Lambda \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Como J es un submódulo de Λ, entonces la existencia de dicho morfismo se sigue de la definición de módulo inyectivo.

($\Longleftarrow$) Supongamos que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & N \end{tikzcd}$$

donde M es un submódulo de N. Sin pérdida de la generalidad asumamos que i es la inclusión. Definamos el conjunto X, formado por parejas ordenadas (M', g'), donde $M \subseteq M' \subseteq N$ y $M' \xrightarrow{g'} I$ extiende a f, i.e $g' \restriction_M = f$. Notemos que $X \neq \varnothing$, pues $(M, f) \in X$.

Diremos que
$$\left(M', g'\right) \leq \left(M'', g''\right)$$
si $M' \subseteq M''$ y g'' extiende a g'. A partir de esta definición, X es un conjunto parcialmente ordenado; más aún podemos formar cadenas acotadas superiormente. Entonces por el lema de Zorn existe (N_0, g_0) un elemento maximal en X. Es claro que si $M_0 = N$, entonces hemos terminado, por lo que ahora demostraremos $M_0 = N$.

Supongamos que existe $n \in N$, tal que, $n \notin M_0$. Definamos el ideal
$$J = \{r \in \Lambda : rn \in M_0\}$$

Sea
$$\begin{array}{rccc} h: & J & \longrightarrow & I \\ & r & \longrightarrow & g_0\left(rn\right) \end{array}$$

Entonces existe un $\Lambda - morfismo$ $\Lambda \xrightarrow{h^*} I$ que extiende a h. Finalmente definamos $M_1 = M_0 + \langle n \rangle$ y
$$\begin{array}{rccc} g_1: & M_1 & \longrightarrow & I \\ & m_0 + rn & \longrightarrow & g_0\left(m_0\right) + rh^*\left(1\right) \end{array}$$

Mostremos que g_1 está bien definida. Supóngase $m_0 + rn = m_0' + r'n'$, entonces $\left(r - r'\right) n = m_0' - m_0 \in M_0$, entonces $r - r' \in J$, por lo que
$$g_0\left(m_0' - m_0\right) = g_0\left(\left(r - r'\right) n\right) = h\left(r - r'\right) = \left(r - r'\right) h^*\left(1\right)$$

Por lo tanto $g_0\left(m_0'\right) + rh^*\left(1\right) = g_0\left(m_0'\right) + r'h^*\left(1\right)$. Entonces g_1 extiende g_0. Por lo que $(M_0, g_0) < (M_1, g_1)$. Lo cual contradice la maximalidad de (M_0, g_0). Por lo tanto $M_0 = N$ y g_0 extiende a f. ■

Ahora analicemos más propiedades de los módulos inyectivos.

1.3 Proposición. *Si Λ es un dominio entero, entonces cualquier $\Lambda -$ módulo inyectivo I es divisible.*

Demostración. Supongamos que I es inyectivo. Sea $e \in I$ y $r_0 \in \Lambda$, $r_0 \neq 0$. Mostraremos que existe un $x \in I$, tal que, $e = r_0 x$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda r_0 & \longrightarrow & I \\ & rr_0 & \longrightarrow & re \end{array}$$

Observemos que f está bien definida, pues si $rr_0 = r'r_0$, entonces $r = r'$, pues Λ es dominio entero. Entonces existe un morfismo $\Lambda \xrightarrow{h} I$, tal que, extiende a f. En particular

$$e = f(r_0) = h(r_0) = r_0 h(1)$$

con $h(1) \in I$. Por lo tanto I es divisible. ■

1.4 Proposición. *Sea un dominio entero y $Q = Frac(\Lambda)$. Entonces*
(i) Q es un $\Lambda -$ módulo inyectivo.
(ii) Cualquier espacio vectorial I sobre Q es un $\Lambda -$ módulo inyectivo.
Demostración. (i) Por el criterio de Baer, es suficiente demostrar que cualquier morfismo $J \xrightarrow{f} Q$, con J ideal de Λ se extiende a Λ. Notemos que si $a, b \in J$, $a, b \neq 0$, entonces $af(b) = f(ab) = bf(a)$, por lo que $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$ en Q para cualesquiera $a, b \neq 0$.

Sea $c \in Q$ este valor común. Definamos

$$\begin{array}{rccc} g: & \Lambda & \longrightarrow & Q \\ & r & \longrightarrow & rc \end{array}$$

Entonces para cualesquiera $a \in J$, $a \neq 0$, se tiene

$$g(a) = ac = a\frac{f(a)}{a} = f(a)$$

Por lo tanto g extiende a f.

(ii) Sea J un ideal de Λ y $J \xrightarrow{f} I$, entonces para cada $a \in I$ no cero, como I es divisible tenemos $f(a) = ae_a$.

Probemos que $e_a = e_b$ para $a, b \in J$. Como f es un $\Lambda - morfismo$ tenemos $f(ab) = af(b) = a(be_b)$, similarmente $f(ba) = b(ae_a)$. Como Λ es conmutativo, entonces $ab = ba$ y $abe_a = abe_b$, por lo que $ab(e_a - e_b) = 0$. Como I es un espacio vectorial y $a, b \neq 0$, entonces $e_a - e_b = 0$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & \Lambda & \longrightarrow & I \\ & r & \longrightarrow & rf(1) = re_a \end{array}$$

con $a \in I$ no cero. Entonces $\widetilde{f}$ extiende a f. ■

1.5 Observación. *Si Λ es un dominio entero con $Q = Frac(\Lambda)$, de la prueba del inciso (ii) de la proposición anterior se muestra que cualquier $\Lambda -$ módulo libre de torsión divisibles es inyectivo.*

1.6 Definición. *Un ideal I de un anillo Λ se llama* ideal principal*, si $I = \langle a \rangle$, para algún $a \in I$. Diremos que Λ es un* dominio de ideales principales, *si cualquier ideal es principal.*

1.7 Corolario. *Para un dominio de ideales principales Λ, se cumple:*
(i) Un $\Lambda-$módulo I es inyectivo si, y solo si es divisible
´(ii) Cualquier cociente de un $\Lambda.-$módulo inyectivo es inyectivo.

Demostración. Sea J un ideal no cero y $J \xrightarrow{f} I$ un $\Lambda - morfismo$, entonces $\Lambda a = J$ para alguna $a \in \Lambda$, $a \neq 0$.

Como I es divisible, entonces existe $e \in I$, $f(a) = ae$. Definiendo

$$\begin{array}{rccc} h: & \Lambda & \longrightarrow & I \\ & s & \longrightarrow & se \end{array}$$

vemos que este es un $\Lambda - morfismo$ que extiende a f, pues si $s = ra \in I$, entonces $h(s) = h(ra) = rae = r = rf(a) = f(ra)$. Por lo tanto I es inyectivo.

(ii) Como I es inyectivo, entonces es divisible. Si $M \subseteq I$ es un submódulo de I, entonces I/M es divisible. Por (i) E/M es inyectivo. ■

Entenderemos que un $\Lambda-$*módulo* M' *se encaja* en un $\Lambda-$*módulo* M, si existe un submódulo M'' de M, tal que, $M'' \cong M'$.

1.8 Corolario. *Cualquier grupo abeliano G puede ser encajado en algún grupo abeliano inyectivo.*

Demostración. Por $(I.4.15)$ y $(I.4.16)$ existe un grupo abeliano libre $L = \bigoplus_i \mathbb{Z}$, tal que, $G \cong L/K$, para algún K submódulo de L. Entonces $G \cong L/K = \bigoplus_i \mathbb{Z}/K \subseteq \bigoplus_i \mathbb{Q}/K$, pues $\mathbb{Z}$ se encaja en $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ es divisible, entonces $\bigoplus_i \mathbb{Q}$ es divisible, más aun $\bigoplus_i \mathbb{Q}/K$ es divisible. Por la proposición anterior $\bigoplus_i \mathbb{Q}/K$ es inyectivo. ■

1.9 Proposición. Sean M', M, M'' $\Lambda-$*módulos*. Entonces existe un isomorfismo

$$\tau_{M',M,M''} : Hom_\Lambda\left(M' \otimes_\Lambda M, M''\right) \longrightarrow Hom_\Lambda\left(M', Hom_\Lambda\left(M, M''\right)\right)$$

donde para cada $M' \otimes_\Lambda M \xrightarrow{f} M''$, y $m' \in M'$ y $m \in M$

$$\tau_{M',M,M''}(f) = \tau(f)$$

con $\tau(f)(m')(m) = f(m' \otimes m)$

Demostración. Probemos que $\tau = \tau_{M',M,M''}$ es un $\Lambda - morfismo.$ Sean $M' \otimes_\Lambda M \xrightarrow{f} M''$ y $M' \otimes_\Lambda M \xrightarrow{g} M''$, y $m' \in M'$, $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}\tau(f+g)(m')(m) &= (f+g)(m'\otimes m)\\ &= f(m'\otimes m)+g(m'\otimes m)\\ &= \tau(f)(m')(m)+\tau(g)(m')(m)\end{aligned}$$

Veamos que τ es inyectivo. Si $\tau(f)(m')=0$ para cualquier $m'\in M'$, entonces $0=\tau(f)(m')(m)=f(m'\otimes m)$ para todo $m\in M$ y $m'\in M'$. Por lo tanto $f=0$.

Veamos que τ es suprayectiva. Si $M'\xrightarrow{F} Hom_\Lambda(M,M'')$ es un $\Lambda-morfismo$, definamos $\varphi(m',m)=F(m')(m)$, para $m'\in M'$ y $m\in M$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} M'\times M \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & M'\otimes_\Lambda M \arrow[dl, "\widetilde{\varphi}"] \\ & M'' & \end{tikzcd}$$

Como φ es una función bilineal, existe un $\mathbb{Z}-morfismo$ $M'\otimes_\Lambda M\xrightarrow{\widetilde{\varphi}} M''$ con $\widetilde{\varphi}(m'\otimes m)=\varphi(m',m)=F(m')(m)$, para todo $m'\in M'$ y $m\in M$. Entonces $\tau(\widetilde{\varphi})=F$. Por lo tanto τ es un isomorfismo. ■

1.10 Corolario. *Para M', M $\Lambda-$módulos ($\Lambda'-$módulos), los funtores*

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda\left(\_,Hom_\Lambda\left(M',M\right)\right) &: {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\to(\mathbf{Ab})\\ Hom_{\Lambda'}\left(M'\otimes_\Lambda \_,M\right) &: {}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}\to(\mathbf{Ab})\end{aligned}$$

son naturalmente equivalentes. ■

1.11 Lema. *Si D es un grupo abeliano divisible, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda,D)$ es un $\Lambda-$ módulo inyectivo.*

Demostración. Para cada $\Lambda\xrightarrow{f} D\in Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda,D)$ y $\alpha\in\Lambda$, definamos (αf) como

$$(\alpha f)(r)=f(\alpha r)\quad \forall r\in\Lambda$$

De esta definición se sigue que $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda,D)$ es un $\Lambda-módulo$. Para probar esto mostraremos que $Hom_\Lambda(\_,Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda,D)$ es un funtor exacto. Por la proposición anterior dicho funtor es naturalmente equivalente $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda\otimes_\Lambda \_,D)$, como $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda\otimes_\Lambda \_,D)=Hom_{\mathbb{Z}}(\_,D)\circ(\Lambda\otimes_\Lambda \_)$. Por otro lado, como D es $\mathbb{Z}-módulo$ inyectivo y $\Lambda\otimes_\Lambda \_$ es naturalmente equivalente a $1_{{}_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{Mod}}$. Entonces $Hom_\Lambda(\_,Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda,D))$ es exacto. ■

1.12 Teorema. *Cualquier $\Lambda - módulo$ M se puede encajar en un $\Lambda - módulo$ inyectivo.*

Demostración. Sea M un $\Lambda - módulo$. Tomando a M como un grupo abeliano definamos el $\mathbb{Z} - morfismo$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, M) \\ & m & \longrightarrow & \varphi_m \end{array}$$

donde $\varphi_m(r) = rm\ \forall r \in \Lambda$. Si $\varphi_m = \varphi_{m'}$, entonces $rm = \varphi_m(r) = \varphi_{m'}(r) = rm'\ \forall r \in \Lambda$, en particular para $r = 1$ se tiene $m = \varphi_m(1) = \varphi_{m'}(1) = m'$. Por (1.8) existe un grupo abeliano inyectivo y un $\mathbb{Z} - monomorfismo$, $M \xrightarrow{i} D$. Por la exactitud izquierda de $Hom_{\mathbb{Z}}$ tenemos la inyección

$$i_* : Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, M) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, D)$$

Entonces $i_* \circ \varphi$ es una inyección. Por último mostremos que $i_*\varphi$ es un $\Lambda - morfismo$. Sean $a \in \Lambda$ y $m \in M$. Como $i_*\varphi(am) = i\varphi(am)$, donde $i\varphi(am)(r) = r(am)\ \forall r \in \Lambda$, entonces $a(i_*\varphi(m))(r) = (i\varphi_m)(ra) = i(ra)m = ram\ \forall r \in \Lambda$. Por lo tanto $i_*\varphi(am) = a(i_*\varphi(m))$. ■

Cabe hacer notar que de este teorema podemos decir que para cualquier $\Lambda - módulo$ M tiene una resolución inyectiva, pues existe un $\Lambda - módulo$ I^0 en el que se encaja M, por lo que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta_0} I^0 \xrightarrow{\pi_0} V^0 \longrightarrow 0$$

con $V^0 = co\ker(\eta)$ y π la proyección natural, repitiendo lo mismo para V^0, existe un $\Lambda - módulo$ I^1, tal que, V_0 se encaja en I, lo que motiva a considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\eta_0"] & I^0 \arrow[rr, "\partial^0"] \arrow[dr, "\pi_0"'] & & I^1 \arrow[dr, "\pi_1"] & & \\ & & & V^0 \arrow[ur, "\eta_1"'] & & V^1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $\partial_0 = \eta_1 \circ \pi_0$. Así procediendo de manera inductiva se obtiene dicha sucesión.

Otro resultado que se sigue del teorema anterior es el de demostrar el reciproco de la proposición $(I.7.10)$.

1.13 Proposición. *Sea I un $\Lambda-$ módulo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *I es inyectivo.*

(ii) *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

se escinde.

(iii) *I es isomorfo a un sumando directo de un $\Lambda-$ módulo inyectivo.*

Demostración. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Es la proposición $(I.7.10)$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Del teorema anterior existe un $\Lambda-módulo$ M inyectivo, tal que, existe un $\Lambda-monomorfismo$ $I \xrightarrow{f} M$. Sea $K = f(I)$ y consideremos el cociente M/K. Entonces se induce la sucesión

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} M/K \longrightarrow 0$$

exacta. Por (ii) esta sucesión se escinde, entonces K es sumando directo de M. Como $K \cong I$, entonces I es sumando directo de M.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Es la proposición $(I.7.8)$. ■

1.14 Definición. *Para dos $\Lambda-$ módulos M, N diremos que N es una* extensión esencial *de M, si existe un $\Lambda-$ $monomorfismo$ $M \xrightarrow{f} N$, tal que, para cualquier N' submódulo de N que cumpla con $N' \cap f(M) = 0$, implique $N' = 0$. Si $f(M)$ está contenido propiamente en N, diremos que N es una* extensión propia.

Nótese que un monomorfismo $M \xrightarrow{f} N$ es una extensión esencial si, y solo si para cualquier $n \in N$, $n \neq 0$, existe $r \in \Lambda$, tal que, $rn \neq 0$ y $rn \in M$.

1.15 Proposición. *Sea $M \xrightarrow{f} N$ una extensión esencial y $M \xrightarrow{g} J$ un $\Lambda-$ $monomorfismo$ con J un $\Lambda-$ módulo inyectivo. Entonces existe un $\Lambda-$ $monomorfismo$ $N \xrightarrow{h} J$, tal que, $h \circ f = g$.*

Demostración. Como J es un $\Lambda-módulo$ inyectivo, existe un morfismo h, tal que, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & & & N \\ & & & \overset{f}{\nearrow} & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & M & \underset{g}{\longrightarrow} & J \end{array}$$

conmuta. Sea $K = \ker(h)$, entonces $K \cap f(M) = 0$, pues $x \in K \cap f(M)$, existe $m \in M$, tal que, $f(m) = x$, entonces $h(x) = h(f(m)) = g(m) = 0$, por lo tanto $x = 0$. Entonces como M es esencial en N, $K = 0$. ■

1.16 Proposición. *Un $\Lambda-$módulo I es inyectivo si, y solo si no tiene extensiones propias.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si $I \xrightarrow{f} J$ es una extensión esencial de I. Entonces para cualquier S submódulo de J no cero, se tiene $S \cap f(I) \neq 0$. Como I y $f(I)$ son inyectivos, entonces $f(I)$ es sumando directo de J, es decir existe $S \subseteq J$ con $J = f(I) \bigoplus S$ y $S \cap f(I) = 0$. Pero como f es esencial, entonces $S = 0$, por lo que $f(I) = J$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que I no tiene extensiones esenciales propias. Por (1.12) hay un $\Lambda-$ *módulo* inyectivo E y una inyección $I \xrightarrow{i} E$, si i es una extensión esencial de I, entonces i es un isomorfismo. En otro caso supongamos que existe un submódulo $S \subseteq E$ no cero, tal que, $S \cap i(M) = 0$. Aplicando el lema de Zorn, existe un submódulo N de E, tal que $S \subseteq N$ y $N \cap i(M) = 0$. Considerando la proyección $I \xrightarrow{\pi} I/N$, entonces $\ker(\pi) \cap i(M) = N \cap i(M) = \{0\}$. Por lo tanto $\pi \restriction_{i(M)}$es un monomorfismo, por lo que $N = \ker(\pi) = 0$, lo que contradice a que $S \subseteq N$ sea distinto de 0. Por lo tanto I es inyectivo. ■

1.17 Teorema. *Para cualquier $\Lambda-$módulo M hay una extensión esencial $M \xrightarrow{f} I$, con I inyectivo. Además, si $M \xrightarrow{f'} I'$* con I' inyectivo *es otra extensión esencial. Entonces hay un isomorfismo $I \xrightarrow{\alpha} I'$, tal que, $\alpha \circ f = f'$.*

Demostración. Por (1.11) existe un $\Lambda-$ *módulo* J_0, con J_0 inyectivo y M un submódulo de J_0. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de submódulos S de J_0, con M esencial en S. Si $\{S_i\}$ es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, la unión $\bigcup S_i \in \mathcal{L}$.

Por otro lado por el lema de Zorn existe un elemento maximal I de $\mathcal{L}$, por (1.14) para cualquier extensión propia de I puede ser encajada en J_0, por lo que I no es maximal. Por lo tanto I es inyectivo.

Sea $M \xrightarrow{f} I$ dicha inyección. Si $M \xrightarrow{f'} I'$ es otra extensión esencial a un $\Lambda-$ *módulo* inyectivo I'. Entonces por (1.14) hay un monomorfismo $I' \xrightarrow{\mu} I$ con $\mu \circ f' = f$. Como $\mu(I')$ es inyectivo es sumando directo de I. Como $M \xrightarrow{f} I$ es esencial entonces $\mu(I') = I$. Por lo tanto μ es un isomorfismo. ■

Nótese que del teorema anterior la extensión *esencial, $M \xrightarrow{f} I$, con I*

inyectivo, es única, por lo que el módulo I es único, salvo isomorfismos. A dicho $\Lambda-$ *módulo* se le suele llamar *la cubierta inyectiva* de M, denotada muchas veces por $Env(M)$.

Para finalizar esta sección demostremos el siguiente resultado.

1.18 Lema. *Sea Λ un dominio entero con $Q = Frac(\Lambda)$. Entonces*
(i) Si M es un $\Lambda-$módulo libre de torsión. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow V \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

donde V es un espacio vectorial sobre Q y T es de torsión.
(ii) Si M es finitamente generado y libre de torsión. Entonces M puede ser encajado en un $\Lambda-$ módulo libre de torsión.

Demostración. (i) Sea $V = Env(M)$ la cubierta inyectiva de M Si $v \in V$, entonces existe $r \in \Lambda$ con $rv \neq 0$ y $rv \in M$. Entonces si M es libre de torsión, se tiene que V/M es de torsión y por ($I.1.20$), V es un espacio vectorial sobre Q.

(ii) Sea $M = \langle a_1, ..., a_n \rangle$. Por ($i$) M puede ser encajado en un espacio vectorial V sobre Q. Si X es base de V, entonces para cualquier a_i es una combinación lineal de vectores básicos de X. De esta manera M puede ser encajado en un espacio vectorial $B = \langle x_1, ..., x_m \rangle$ generado por los elementos $x \in X$, tal que, a_i es combinación lineal de B. Para cada a_i, existen $r_{ij}, s_{ij} \in \Lambda$, con

$a_i = \sum_j (r_{ij})(s_{ij})x_j$. Si $S = \prod_{i,j} s_{ij}$, entonces $S^{-1}B = \left\{s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_m\right\}$ es una base de V, además $\left\langle S^{-1}B \right\rangle$ contiene a M. ■

Capítulo 8

Los funtores Tor_n^Λ y Ext_Λ^nen la Teoría de Módulos.

En este último capítulo veremos como los funtores derivados Tor y Ext se pueden utilizar para caracterizar a los módulos: proyectivos, inyectivos y planos. Para finalizar este capítulo veremos una generalización de estos módulos (proyectivos, inyectivos y planos) en términos de Tor y Ext.

Recordemos que de la proposición $(VII.1.9)$ para M', M, M'' $\Lambda-$*módulos* se tiene el siguiente isomorfismo

$$Hom_\Lambda\left(M', Hom_\Lambda\left(M, M''\right)\right) \cong Hom_\Lambda\left(M' \otimes_\Lambda M, M''\right)$$

Si $\varphi \in Hom_\Lambda(M', Hom_\Lambda(M, M''))$, entonces para cualquier $m' \in M'$ $\varphi(m') \in Hom_\Lambda(M, M'')$, por lo tanto $\varphi(m')(m) \in M''$ para cualesquiera $m' \in M'$ y $m \in M$, entonces la asignación

$$\begin{array}{rccc} \psi: & Hom_\Lambda(M', Hom_\Lambda(M, M'')) & \longrightarrow & Hom_\Lambda(M, Hom_\Lambda(M', M'')) \\ & \varphi & \longrightarrow & \varphi(m')(m) \end{array}$$

para cualesquiera $\varphi \in Hom_\Lambda(M', Hom_\Lambda(M, M''))$, $m' \in M'$ y $m \in M$, define un $\Lambda - isomorfismo$.

A partir de estos hechos podemos hacer las siguientes observaciones.

1.1 Observación. *Sea* I *un* $\Lambda -$ *módulo inyectivo y*

$$0 \longrightarrow Hom_{\Lambda}(M'', I) \longrightarrow Hom_{\Lambda}(M, I) \longrightarrow Hom_{\Lambda}(M', I) \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. Si F *es un* $\Lambda -$ *módulo plano, a partir del primer isomorfismo, mencionado anteriormente, el funtor* $Hom_{\Lambda}(F, \_)$ *preserva la exactitud de la sucesión anterior. Por lo tanto, el funtor* $Hom_{\Lambda}(\_, I)$ *para un módulo inyectivo* I *permite hacer a un módulo plano lo que hace un módulo proyectivo En un resultado más general, al aplicar los funtores* $F \bigotimes_{\Lambda} \_$ *y* $Hom_{\Lambda}(\_, I)$ *a una sucesión exacta* $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ *esta conserve su exactitud.*

1.2 Proposición. *La siguientes afirmaciones son equivalentes*
(i) $Hom_{\Lambda}(F, I)$ *es inyectivo.*
(ii) $Hom_{\Lambda}(F \otimes_{\Lambda} \_, I)$ *es exacto.*
Demostración. Sea $M' \rightarrowtail M \rightarrowtail M''$ una sucesión exacta, entonces la sucesión

$$0 \to Hom_{\Lambda}\left(F \otimes_{\Lambda} M'', I\right) \to Hom_{\Lambda}(F \otimes_{\Lambda} M, I) \to Hom_{\Lambda}\left(F \otimes_{\Lambda} M', I\right) \to 0$$

es exacta si, y sólo si la sucesión

$$\begin{array}{rcl} 0 & \to & Hom_{\Lambda}(M'', Hom_{\Lambda}(F, I)) \quad \to \\ Hom_{\Lambda}(M, Hom_{\Lambda}(F, I)) & \to & Hom_{\Lambda}(M', Hom_{\Lambda}(F, I)) \quad \to \\ 0 & & \end{array}$$

es exacta, pues

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\Lambda}\left(F \otimes_{\Lambda} M'', I\right) & \cong & Hom_{\Lambda}\left(M'', Hom_{\Lambda}(F, I)\right) \\ Hom_{\Lambda}(F \otimes_{\Lambda} M, I) & \cong & Hom_{\Lambda}(M, Hom_{\Lambda}(F, I)) \\ Hom_{\Lambda}\left(F \otimes_{\Lambda} M', I\right) & \cong & Hom_{\Lambda}\left(M', Hom_{\Lambda}(F, I)\right) \end{array}$$

Por lo tanto, la sucesión anterior es exacta si, y solo si $Hom_{\Lambda}(F, I)$ es inyectivo. ■

1.3. Proposición. Si $Hom_{\Lambda}(F, I)$ es un $\Lambda -$ *módulo* inyectivo para todo $\Lambda -$ *módulo* inyectivo I, entonces F es un $\Lambda -$ *módulo* plano.

Demostración. Por la proposición anterior, si $Hom_{\Lambda}(F, I)$ es un $\Lambda -$ *módulo* inyectivo para todo $\Lambda -$ *módulo* inyectivo I, entonces el funtor $Hom_{\Lambda}(F \bigotimes_{\Lambda} \_, I)$ es exacto para todo $\Lambda -$ *módulo* inyectivo I.

Sea M un $\Lambda -$ *módulo* arbitrario y consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con L un $\Lambda-$ *módulo* libre. A partir de dicha sucesión induce la sucesión

$$0 \to Tor_1^{\Lambda}(F,M) \to F \otimes_{\Lambda} K \to F \otimes_{\Lambda} L \to F \otimes_{\Lambda} M \to 0$$

exacta. Entonces para cualquier $\Lambda-$ *módulo* inyectivo I la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & Hom_{\Lambda}(F \otimes_{\Lambda} M, I) & \to \\ Hom_{\Lambda}(F \otimes_{\Lambda} L, I) & \to & Hom_{\Lambda}(F \otimes_{\Lambda} K, I) & \to \\ Hom_{\Lambda}\left(Tor_1^{\Lambda}(F,M), I\right) & \to & 0 & \end{array}$$

es exacta, como $Hom_{\Lambda}(F \otimes_{\Lambda} \_, I)$ es un funtor exacto para todo I inyectivo, entonces $Hom_{\Lambda}\left(Tor_1^{\Lambda}(F,M), I\right) = 0$, para cualquier inyectivo I.

Por otro lado, como $Tor_1^{\Lambda}(F,M)$ puede ser encajado en un $\Lambda-$*módulo* inyectivo I', entonces $Hom_{\Lambda}\left(Tor_1^{\Lambda}(F,M), I'\right) = 0$. Por lo tanto $Tor_1^{\Lambda}(F,M) = 0$ para cualquier $\Lambda-$ *módulo* M. ■

1.4 Observación. Si P, Q son $\Lambda-$ *módulos* proyectivos, entonces $P \otimes_{\Lambda} Q$ es proyectivo, ya que el funtor $Hom_{\Lambda}(P \otimes_{\Lambda} Q, \_)$ es exacto, pues este se puede ver como la composición de de los funtores $Hom_{\Lambda}(P, \_)$ y $Hom_{\Lambda}(Q, \_)$.

A partir de la definición de módulo proyectivo y lo estudiado en el capítulo VI podemos establecer una caracterización de un módulo proyectivo a través del siguiente teorema.

1.5 Teorema. *Para un $\Lambda-$ módulo P las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) P es proyectivo.
(ii) $Ext_{\Lambda}^{n}(P,N) = 0$ para cualquier $\Lambda-$ módulo N y $n \geq 1$.
(iii) $Ext_{\Lambda}^{1}(P,N) = 0$ para cualquier $\Lambda-$ módulo N. ■

De manera dual al teorema anterior podemos caracterizar a un módulo inyectivo a través del siguiente teorema.

1.6 Teorema. *Para un $\Lambda-$ módulo I las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) I es inyectivo.
(ii) $Ext_{n}^{\Lambda}(M,I) = 0$ para cualquier $\Lambda-$ módulo M y $n \geq 1$.
(iii) $Ext_{1}^{\Lambda}(M,I) = 0$ para cualquier $\Lambda-$ módulo M. ■

Recordemos que cualquier $\Lambda-$ *módulo* libre es proyectivo, es decir, cualquier suma directa de Λ es un módulo proyectivo, por lo que la pregunta más natural que uno se plantea es: ¿Cuándo existen módulos proyectivos que sean suma directos de Λ?, para dar respuesta a la pregunta anterior consideremos el siguiente resultado.

1.7 Proposición. *Existen* $\Lambda-$*módulos proyectivos que son suma directa de* Λ *si, y sólo si* Λ *no contiene idempotentes no triviales.*

Demostración.($\Longrightarrow$) Supongamos que Λ puede escribirse como $M \bigoplus_\Lambda N$, donde M, N son ideales de Λ. Entonces el 1 puede escribirse como una suma de $i + (1-i)$, con $i \in M$ y $1 - i \in N$. Considerando el elemento $i\,(1-i)$, vemos que está en M y N, además que $i\,(1-i) = 0$, por lo tanto i es un idempotente en Λ. Si $i = 0$ ó $i = 1$, entonces $M = \Lambda$. Por lo tanto Λ no contiene idempotentes triviales.

($\Longleftarrow$) Supongamos que existe $j \in \Lambda$, tal que, $j \neq 0, 1$. Considerando los ideales $\langle j \rangle$ $\langle 1-j \rangle$, vemos que estos son distintos de cero, además que $\langle j \rangle + \langle 1-j \rangle = \Lambda$, por lo que basta demostrar que $\langle j \rangle \cap \langle 1-j \rangle = 0$. Si $jx = (1-j)y$, entonces $y = j\,(x+y)$, entonces $jx = (1-j)j(x+y)$, pero como $(1-j)j = 0$, entonces $jx = 0$. Por lo tanto $\langle j \rangle \cap \langle 1-j \rangle = 0$. ■

Consideremos a M, N $\Lambda - módulos$, y sean

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & F_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & F_N & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

las *presentaciones planas* de M y N respectivamente, i.e, F_N y F_M son $\Lambda - módulos$ planos. Considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & Tor_1^\Lambda(N, M) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & K \otimes_\Lambda K' & \longrightarrow & F_M \otimes_\Lambda K' & \longrightarrow & M \otimes_\Lambda K' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K \otimes_\Lambda F_N & \longrightarrow & F_M \otimes_\Lambda F_N & & M \otimes_\Lambda F_N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & K \otimes_\Lambda N & \longrightarrow & F_M \otimes_\Lambda N & & M \otimes_\Lambda N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

por $(I.3.14)$ se induce la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Tor_1^\Lambda(N, M) \longrightarrow K \otimes_\Lambda N \longrightarrow F_M \otimes_\Lambda N$$

Por otro lado tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(M,N) \longrightarrow K \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow F_M \otimes_{\Lambda} N$$

Por lo tanto $Tor_1^{\Lambda}(M,N) \cong Tor_1^{\Lambda}(N,M)$. De esta última observación podemos decir que un $\Lambda - módulo$ F es plano si, y sólo si $Tor_1^{\Lambda}(M,F) = 0$ para cualquier $\Lambda - módulo$ M. Además siguiendo un procedimiento inductivo al anterior se muestra que $Tor_n^{\Lambda}(M,N) \cong Tor_n^{\Lambda}(N,M)$. Por lo tanto se tiene el siguiente teorema

1.8 Teorema. *Para un $\Lambda - módulo$ F las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) F es plano.
(ii) $Tor_n^{\Lambda}(M,F) = 0$, para cualquier $\Lambda - módulo$ M y $n \geq 1$.
(iii) $Tor_1^{\Lambda}(M,F) = 0$, para cualquier $\Lambda - módulo$ M. ■

1.9 Proposición. *Sean P un $\Lambda - módulo$ proyectivo y M, N $\Lambda - módulos$. Entonces*

$$Hom_{\Lambda}\left(P, Ext_{\Lambda}^1(M,N)\right) \cong Ext_{\Lambda}^1(P \otimes_{\Lambda} M, N)$$

Demostración. Como N es un $\Lambda - módulo$ existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

con I inyectivo. Entonces se induce la sucesión exacta

$$0 \to Hom_{\Lambda}(M,N) \to Hom_{\Lambda}(M,I) \to Hom_{\Lambda}(M,V) \to Ext_{\Lambda}^1(M,N) \to 0$$

Como P es un $\Lambda - módulo$ proyectivo, entonces se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\begin{array}{rcl} 0 & \to & Hom_{\Lambda}(P, Hom_{\Lambda}(M,N)) \quad \to \\ Hom_{\Lambda}(P, Hom_{\Lambda}(M,I)) & \to & Hom_{\Lambda}(P, Hom_{\Lambda}(M,V)) \quad \to \\ Hom_{\Lambda}\left(P, Ext_{\Lambda}^1(M,N)\right) & \to & 0 \end{array}$$

Por otro lado se obtiene la sucesión exacta

$$\begin{array}{rcl} 0 & \to & Hom_{\Lambda}(P \otimes_{\Lambda} M, N) \quad \to \\ Hom_{\Lambda}(P \otimes_{\Lambda} M, I) & \to & Hom_{\Lambda}(P \otimes_{\Lambda} M, V) \quad \to \\ Ext_{\Lambda}^1(P \otimes_{\Lambda} M, N) & \to & 0 \end{array}$$

Como los primeros tres términos de las dos sucesiones exactas anteriores son isomorfos, entonces

$$Hom_{\Lambda}\left(P, Ext_{\Lambda}^1(M,N)\right) \cong Ext_{\Lambda}^1(P \otimes_{\Lambda} M, N)$$

■

1.10 Proposición. *Para cualquier $\Lambda-$módulo inyectivo I se tiene el siguiente isomorfismo:*

$$Hom_{\Lambda}\left(Tor_1^{\Lambda}(M,N), I\right) \cong Ext_{\Lambda}^1(N, Hom_{\Lambda}(M,I))$$

para cualesquiera M, N $\Lambda-$módulo, con M finitamente generado.

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M$$

una presentación libre de M, entonces se induce la siguiente sucesión exacta

$$0 \to Tor_1^{\Lambda}(M,N) \to K \otimes_{\Lambda} N \to L \otimes_{\Lambda} N \to M \otimes_{\Lambda} N \to 0$$

Como I es un $\Lambda-$*módulo* inyectivo, al aplicar el funtor $Hom_{\Lambda}(\_, I)$ se conserva la exactitud de dicha sucesión.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & Hom_{\Lambda}(M \otimes_{\Lambda} N, I) & \to \\ Hom_{\Lambda}(L \otimes_{\Lambda} N, I) & \to & Hom_{\Lambda}(K \otimes_{\Lambda} N, I) & \to \\ Hom_{\Lambda}\left(Tor_1^{\Lambda}(M,N), I\right) & \to & 0 & & ....(1) \end{array}$$

Por otro lado, podemos considerar la sucesión exacta

$$0 \to Hom_{\Lambda}(M,I) \to Hom_{\Lambda}(L,I) \to Hom_{\Lambda}(K,I) \to 0$$

que induce la sucesión exacta

$$\begin{array}{cccc} 0 & \to & Hom_{\Lambda}(N, Hom_{\Lambda}(M,I)) & \to \\ Hom_{\Lambda}(N, Hom_{\Lambda}(L,I)) & \to & Hom_{\Lambda}(N, Hom_{\Lambda}(K,I)) & \to \\ Ext_{\Lambda}^1(N, Hom_{\Lambda}(M,I)) & \to & Ext_{\Lambda}^1(N, Hom_{\Lambda}(L,I)) & \end{array}$$

Como M es finitamente generado, entonces L tiene una base finita, por lo que $Hom_{\Lambda}(L,I) \cong \bigoplus_{j\in J} I$ con $|J| = m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$Ext_{\Lambda}^1(N, Hom_{\Lambda}(L,I)) = 0$$

por lo tanto, la sucesión obtenida anteriormente se reduce a

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & Hom_{\Lambda}\left(N, Hom_{\Lambda}\left(M, I\right)\right) & \to \\ Hom_{\Lambda}\left(N, Hom_{\Lambda}\left(L, I\right)\right) & \to & Hom_{\Lambda}\left(N, Hom_{\Lambda}\left(K, I\right)\right) & \to \\ Ext_{\Lambda}^{1}\left(N, Hom_{\Lambda}\left(M, I\right)\right) & \to & 0 & \ldots(2) \end{array}$$

como los tres primeros términos de (1) y (2) son isomorfos. Entonces

$$Hom_{\Lambda}\left(Tor_{1}^{\Lambda}\left(M, N\right), I\right) \cong Ext_{\Lambda}^{1}\left(N, Hom_{\Lambda}\left(M, I\right)\right). \blacksquare$$

Al considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

para un $\Lambda - módulo\ N$ se induce la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \to & Tor_{n}^{\Lambda}\left(M', N\right) & \to & Tor_{n}^{\Lambda}\left(M, N\right) & \to \\ \cdots & \to & Tor_{2}^{\Lambda}\left(M'', N\right) & \to & Tor_{1}^{\Lambda}\left(M', N\right) & \to \\ Tor_{1}^{\Lambda}\left(M, N\right) & \to & Tor_{1}^{\Lambda}\left(M'', N\right) & \to & M' \otimes_{\Lambda} N & \to \\ M \otimes_{\Lambda} N & \to & M'' \otimes_{\Lambda} N & \to & 0 \end{array}$$

podemos observar que si $Tor_{j}^{\Lambda}\left(M, N\right) = 0$ para todo $\Lambda - módulo\ M$, entonces $Tor_{k}^{\Lambda}\left(M, N\right) = 0$ para $k \geq j$ y cualquier $\Lambda - módulo\ M$.

De igual manera, si

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, entonces para un $\Lambda - módulo\ M$ se induce la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & Hom_{\Lambda}\left(M, N'\right) & \to & Hom_{\Lambda}\left(M, N\right) & \to \\ Hom_{\Lambda}\left(M, N''\right) & \to & Ext_{\Lambda}^{1}\left(M, N'\right) & \to & \cdots & \to \\ Ext_{\Lambda}^{n}\left(M, N'\right) & \to & Ext_{\Lambda}^{n}\left(M, N\right) & \to & Ext_{\Lambda}^{n}\left(M, N''\right) & \to \\ Ext_{\Lambda}^{n+1}\left(M, N'\right) & \to & \cdots \end{array}$$

De la cual podemos ver que si $Ext_{\Lambda}^{j}\left(M, N\right) = 0$ para cualquier $\Lambda - módulo\ N$, entonces $Ext_{\Lambda}^{k}\left(M, N\right) = 0$ para cualquier $\Lambda - módulo\ N$ y $k \geq j$.

Del teorema (1.10) cabe resaltar que un $\Lambda-$*módulo* F es plano si, y sólo si $Tor_n^\Lambda(M,N)=0$ para cualquier $n\geq 1$ y M un $\Lambda-$*módulo*, es decir para la sucesión exacta

$$\begin{array}{cccccc}
\cdots & \to & Tor_n^\Lambda(M',F) & \to & Tor_n^\Lambda(M,F) & \to \\
\cdots & \to & Tor_2^\Lambda(M'',F) & \to & Tor_1^\Lambda(M',F) & \to \\
Tor_1^\Lambda(M,F) & \to & Tor_1^\Lambda(M'',F) & \to & M'\otimes_\Lambda F & \to \\
M\otimes_\Lambda F & \to & M''\otimes_\Lambda F & \to & 0 &
\end{array}$$

inducida por la sucesión exacta

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$$

queda reducida a

$$0\to M'\otimes_\Lambda F\to M\otimes_\Lambda F\to M''\otimes_\Lambda F\to 0$$

A continuación estudiemos una generalización de esta definición.

1.11 Definición. *Diremos que un* $\Lambda-$ *módulo* F *es* $k-$ *plano, si* $Tor_k^\Lambda(M,F)=0$ *para cualquier* $\Lambda-$*módulo* M.

Nótese que a partir de las observaciones anteriores se tiene la siguiente equivalencia.

1.12 Teorema. *Para un* $\Lambda-$*módulo* F *las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) F *es* $k-$*plano.*

(ii) $Tor_j^\Lambda(M,F)=0$ *para cualquier* $\Lambda-$*módulo* M *y* $j\geq k$.

(iii) $Tor_k^\Lambda(M,F)=0$ *para cualquier* $\Lambda-$*módulo* M. ■

A partir del teorema anterior podemos decir que un $\Lambda-$ *módulo* F es $2-$*plano*, entonces para cualquier sucesión exacta

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$$

al obtener su sucesión exacta inducida por $Tor_n^\Lambda(\_,F)$

$$\begin{array}{cccccc}
\cdots & \to & Tor_n^\Lambda(M',F) & \to & Tor_n^\Lambda(M,F) & \to \\
\cdots & \to & Tor_2^\Lambda(M'',F) & \to & Tor_1^\Lambda(M',F) & \to \\
Tor_1^\Lambda(M,F) & \to & Tor_1^\Lambda(M'',F) & \to & M'\otimes_\Lambda F & \to \\
M\otimes_\Lambda F & \to & M''\otimes_\Lambda F & \to & 0 &
\end{array}$$

esta se reduce a

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & Tor_1^{\Lambda}(M',F) & \to & Tor_1^{\Lambda}(M,F) \\ \to & Tor_1^{\Lambda}(M'',F) & \to & M'\otimes_{\Lambda} F & \to \\ M\otimes_{\Lambda} F & \to & M''\otimes_{\Lambda} F & \to & 0 \end{array}$$

De igual manera para las equivalencias presentadas en (1.5) y (1.6) podemos generalizarlas a través de las siguientes definiciones.

1.13 Definición. *Diremos que un $\Lambda-$módulo P es $k-$proyectivo, si $Ext_{\Lambda}^{k}(P,N)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo N.*

1.14 Definición. *Diremos que un $\Lambda-$módulo I es $k-$inyectivo, si $Ext_{\Lambda}^{k}(M,I)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo M.*

De igual manera que para la definición de $\Lambda-$*módulos* $k-$*planos* se tienen las siguientes equivalencias para $k-$*proyectivos* y $k-$*inyectivos.*

1.15 Teorema. *Para un $\Lambda-$módulo P las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) P es $k-$proyectivo
(ii) $Ext_{\Lambda}^{j}(P,N)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo N y $j\geq k$.
(iii) $Ext_{\Lambda}^{k}(P,N)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo N. ■

1.16 Teorema. *Para un $\Lambda-$módulo I las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) I es $k-$inyectivo.
(ii) $Ext_{\Lambda}^{j}(M,I)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo M y $j\geq k$.
(iii) $Ext_{\Lambda}^{k}(M,I)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo M. ■

A continuación analicemos algunos resultados para módulos $k-$*planos.*

1.17 Observación. *Si F es un $\Lambda-$módulo $k-$plano, entonces $Tor_j^{\Lambda}(M,F)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo M y $j\geq k$, en particular si $j=k+1$ se tiene $Tor_{k+1}^{\Lambda}(M,F)=0$ para cualquier $\Lambda-$módulo M. Por lo tanto si F es $k-$plano, entonces es $k+1$ plano. Más aún vemos que si F es $k-$plano, entonces es $j-$plano con $j\geq k$.*

1.18 Observación. *De manera análoga a la observación anterior. Si P es un $\Lambda-$módulo $k-$proyectivo, entonces es $k+1-$proyectivo. De igual manera si I es $k-$inyectivo, entonces es $k+1-$inyectivo.*

1.19 Proposición. *Un* $\Lambda-$*módulo* F *es* $k-$*plano si, sólo si*

$$Tor_{k-1}^\Lambda(K,F)=0$$

para cualquier submódulo K *de algún* $\Lambda-$*módulo libre.*

Demostración. Notemos que cualquier $\Lambda-$*módulo* M existe una sucesión exacta

$$0\longrightarrow K\longrightarrow L\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

con L un $\Lambda-$*módulo* libre (plano). Entonces la sucesión exacta inducida por el funtor $Tor_n^\Lambda(\_,F)$ es de la forma

$$\begin{array}{cccc}
\to & \cdots & \to & 0 \\
\to & Tor_k^\Lambda(M,F) & \to & Tor_{k-1}^\Lambda(K,F) \\
\to & 0 & \to & \cdots \\
\to & K\otimes_\Lambda F & \to & L\otimes_\Lambda F \\
\to & M\otimes_\Lambda F & \to & 0
\end{array}$$

Entonces $Tor_k^\Lambda(M,F)=0$ si, y solo si $Tor_{k-1}^\Lambda(K,F)=0$. Por lo tanto F es plano si, y solo si $Tor_{k-1}^\Lambda(K,F)=0$ para cualquier submódulo K de un $\Lambda-$*módulo* libre L. ■

1.20 Proposición. *Si* F *es un* $\Lambda-$*módulo finitamente generado. Entonces* F *es* $2-$*plano si, y sólo si* $Hom_\Lambda(F,I)=0$ *es* $2-$*inyectivo para cualquier* $\Lambda-$*módulo inyectivo* I.

Demostración. Supongamos que F es $2-$*plano*. Como F es un $\Lambda-$*módulo* existe una sucesión exacta

$$0\longrightarrow K\longrightarrow L\longrightarrow F\longrightarrow 0$$

Entonces para cualquier $\Lambda-$*módulo* inyectivo I se induce la sucesión exacta

$$0\to Hom_\Lambda(F,I)\to Hom_\Lambda(L,I)\to Hom_\Lambda(K,I)\to 0$$

la que induce la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccc}
Ext_\Lambda^1(E,Hom_\Lambda(K,I)) & \to & Ext_\Lambda^2(E,Hom_\Lambda(F,I)) & \to \\
Ext_\Lambda^2(E,Hom_\Lambda(L,I)) & \to & Ext_\Lambda^2(E,Hom_\Lambda(K,I))
\end{array}$$

El primer y último de la sucesión son cero pues $Hom_{\Lambda}(K,I)$ es un módulo inyectivo. Además como $Hom_{\Lambda}(L,I)$ es isomorfo a una suma directa finita de copias de I, entonces $Hom_{\Lambda}(L,I)$ es inyectivo, por lo tanto $Ext^2_{\Lambda}(E, Hom_{\Lambda}(F,I)) = 0$ para cualquier $\Lambda - módulo\ E$.

Ahora supongamos que $Hom_{\Lambda}(F,I)$ es $2-inyectivo$ para cualquier módulo inyectivo I. Sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

una presentación libre de F, entonces para cualquier módulo inyectivo se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to Hom_{\Lambda}(F,I) \to Hom_{\Lambda}(L,I) \to Hom_{\Lambda}(K,I) \to 0$$

Entonces para cualquier $\Lambda - módulo\ E$ se obtiene la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccc} Ext^1_{\Lambda}(E, Hom_{\Lambda}(L,I)) & \to & Ext^1_{\Lambda}(E, Hom_{\Lambda}(K,I)) & \to \\ Ext^2_{\Lambda}(E, Hom_{\Lambda}(F,I)) & \to & Ext^2_{\Lambda}(E, Hom_{\Lambda}(K,I)) \end{array}$$

Donde el primer y el último término son cero. Además como $Hom_{\Lambda}(F,I)$ es $2-inyectivo$. Entonces $Hom_{\Lambda}(K,I)$ es inyectivo, por lo tanto I es plano. De la proposición anterior F es $2 - plano$. ■

De la observación (1.17) se sigue que si un $\Lambda - módulo$ es plano, entonces es $2 - plano$, por lo que la pregunta natural que surge es ¿Bajo qué condiciones un módulo $2 - plano$ es plano? Para responder dicha pregunta consideremos la siguiente proposición.

1.21. Proposición. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) M *es plano.*

(ii) M *es* $2 - plano$ *y* $Tor^{\Lambda}_1(I,M) = 0$ *para cualquier módulo inyectivo* I.

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Se sigue de (1.17).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supongamos que M es $2 - plano$ y sea N un $\Lambda - módulo$. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

con I un $\Lambda - módulo$ inyectivo y $V \cong I/N$. Entonces como M es plano se induce la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccc} 0 & \to & Tor^{\Lambda}_1(N,M) & \to \\ Tor^{\Lambda}_1(I,M) & \to & Tor^{\Lambda}_1(I/N,M) & \to \\ N \otimes_{\Lambda} M & \to & \cdots \end{array}$$

Como I es un $\Lambda - módulo$ inyectivo se tiene $Tor_1^{\Lambda}(I, M) = 0$, entonces $Tor_1^{\Lambda}(N, M) = 0$ para cualquier módulo N. Por lo tanto M es plano. ■

1.22 Proposición. *Sea M un $\Lambda - módulo$. Si I es un ideal de Λ, entonces el morfismo $I \otimes_{\Lambda} M \longrightarrow M$ es un monomorfismo si, y sólo si $Tor_1^{\Lambda}(\Lambda/I, M) = 0$.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/I \longrightarrow 0$$

Al considerar la sucesión exacta inducida por $Tor_n^{\Lambda}(\_, M)$, se obtiene

$$0 \longrightarrow Tor_1^{\Lambda}(\Lambda/I, M) \longrightarrow I \otimes_{\Lambda} M \longrightarrow \Lambda \otimes_{\Lambda} M \cong M$$

Entonces $Tor_1^{\Lambda}(\Lambda/I, M)$ es el núcleo de $I \otimes_{\Lambda} M \longrightarrow M$, por lo tanto $Tor_1^{\Lambda}(\Lambda/I, M) = 0$ si, y solo si $I \otimes_{\Lambda} M \longrightarrow M$ es un monomorfismo. ■

1.23 Lema. *Un $\Lambda - módulo$ M es cíclico si, y sólo si existe $I \subseteq \Lambda$ ideal, tal que, $\Lambda/I \cong M$.*

Demostración. Supongamos que M es cíclico, entonces existe $x \in M$, tal que, $M = \langle x \rangle$. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow Ann(x) \overset{i}{\hookrightarrow} \Lambda \overset{\varphi}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$$

donde i denota el morfismo de inclusión, y $\varphi(r) = rx$ para cualquier $r \in \Lambda$, es exacta. Por lo tanto $M \cong \Lambda/I$.

Supongamos que existe $I \subseteq \Lambda$ ideal, tal que, $\Lambda/I \cong M$. Entonces de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \overset{i}{\hookrightarrow} \Lambda \overset{\pi}{\longrightarrow} \Lambda/I \cong M \longrightarrow 0$$

donde i y π denota los morfismos de inclusión y proyección, respectivamente. Si $r \in \Lambda$, es tal que $r(1 + I) = 0$, entonces $r1 \in I$. Por lo tanto $I = Ann(1 + I)$, entonces $\Lambda(1 + I) \cong \Lambda/I = M$. Por lo tanto M es cíclico. ■

1.24 Proposición. *Un $\Lambda - módulo$ F es plano si, y solo si para cualquier ideal I de Λ se tiene $Tor_1^{\Lambda}(\Lambda/I, F) = 0$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Se sigue de la definición de planaridad.

($\Longleftarrow$) Observemos que tenemos para una inyección $M' \rightarrowtail M$, si $\gamma \in M' \otimes_{\Lambda} F$, entonces $\gamma = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes m_i'$, por lo que existe un submódulo finitamente generado $\widetilde{M'}$ de M', tal que, $\gamma \in \widetilde{M'} \otimes_{\Lambda} F$ además al considerar la imagen de γ bajo el morfismo inducido vemos que existe un submódulo

$\widetilde{M}$ de M, tal que, $\widetilde{M} \otimes_\Lambda F$ contiene a la imagen de γ. Por lo que basta con demostrar que $M' \rightarrowtail M$ es un monomorfismo de $\Lambda - \textit{módulos}$ finitamente generados, el morfismo $M' \otimes_\Lambda F \longrightarrow M \otimes_\Lambda F$ es una inyección.

Si $M' \rightarrowtail M$ es un monomorfismo de $\Lambda - \textit{módulos}$ finitamente generados, entonces existe una finita de $\Lambda - \textit{módulos}$ cíclicos, tal que,

$$M' = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

Por otro lado $M_{i+1}/M_i \cong \Lambda/I$, para algún ideal I de Λ. Por lo que para cada i, al considera la sucesión exacta

$$Tor_1^\Lambda (M_{i+1}/M_i, F) \longrightarrow M_i \otimes_\Lambda F \longrightarrow M_{i+1} \otimes_\Lambda F$$

se tiene $Tor_1^\Lambda (M_{i+1}/M_i, F) = Tor_1^\Lambda (\Lambda/I, F) = 0$, entonces $M_i \otimes_\Lambda F \longrightarrow M_{i+1} \otimes_\Lambda F$ es una inyección. Por lo tanto $M' \otimes_\Lambda F \longrightarrow M \otimes_\Lambda F$ es una inyección. ■

Recordando los resultados vistos en el Capítulo I acerca de $\Lambda - \textit{módulos}$ la pregunta natural es: ¿Qué propiedades de los módulos planos se conservan para módulos $k - \textit{planos}$?

1.25 Proposición. *Sea $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$ un $\Lambda - \textit{módulo}$. Entonces F es $k - \textit{plano}$ si, y solo si F_i es $k - \textit{plano}$.*

Demostración. Basta con demostrar el caso $|I| = 2$, ya que está da pie a la demostración en el caso general. Por demostrar que $Tor_k^\Lambda (M, F_1 \bigoplus F_2) = 0$ si, y solo si $Tor_k^\Lambda (M, F_1) = 0$ y $Tor_k^\Lambda (M, F_2) = 0$ para cualquier $\Lambda - \textit{módulo}\ M$. Nótese que el caso para $k = 1$ se sigue de $(I.7.15)$.

Supongamos que es válido para $k - 1$. Sea M un $\Lambda - \textit{módulo}$ con presentación libre

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Entonces considerando al considerar las sucesiones exactas

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow Tor_k^\Lambda (M, F_1 \bigoplus F_2) \longrightarrow Tor_{k-1}^\Lambda (K, F_1 \bigoplus F_2) \to 0 \\ 0 \longrightarrow Tor_k^\Lambda (M, F_1) \longrightarrow Tor_{k-1}^\Lambda (K, F_1) \to 0 \\ 0 \longrightarrow Tor_k^\Lambda (M, F_2) \longrightarrow Tor_{k-1}^\Lambda (K, F_2) \to 0 \end{gathered}$$

Vemos que $Tor_k^\Lambda (M, F_1 \bigoplus F_2) = 0$ si, y sólo si $Tor_{k-1}^\Lambda (K, F_1 \bigoplus F_2) = 0$. Por hipótesis $Tor_{k-1}^\Lambda (K, F_1 \bigoplus F_2)$ si, y solo si $Tor_{k-1}^\Lambda (K, F_1) = 0$ y $Tor_{k-1}^\Lambda (K, F_2) = 0$, pero además por otro lado $Tor_k^\Lambda (M, F_1) = 0$ y $Tor_k^\Lambda (M, F_1)$.

Por lo tanto $Tor_k^\Lambda(M, F_1 \bigoplus F_2) = 0$ si, y solo si $Tor_k^\Lambda(M, F_1) = 0$ y $Tor_k^\Lambda(M, F_1)$. ■

1.26 Proposición. *Si un* $\Lambda - $ *módulo es* $k -$ *proyectivo, entonces es* $k -$ *plano.*

Demostración. Por inducción sobre k. El caso $k = 1$ se sigue de (1.7.16).

Supongamos que es válido para $k-1$. Sea P un $\Lambda-$*módulo* $k-$*proyectivo*, entonces $Ext_\Lambda^k(P, N) = 0$ para cualquier $\Lambda -$ *módulo* N. Sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

una presentación libre de P. Entonces $Ext_\Lambda^n(\_, N)$ para cualquier $\Lambda -$ *módulo* N induce la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ext_\Lambda^{k-1}(K, N) \longrightarrow Ext_\Lambda^k(P, N) \longrightarrow 0$$

por lo que $Ext_\Lambda^{k-1}(K, N) = 0$ para cualquier $\Lambda -$ *módulo* N, entonces K es $k-1$ proyectivo, por hipótesis de inducción obtenemos que K es $k-1-$*plano*.

Por otro lado el funtor $Tor_n^\Lambda(\_, N)$ induce la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Tor_k^\Lambda(P, N) \longrightarrow Tor_{k-1}^\Lambda(K, N) \longrightarrow 0$$

entonces $Tor_k^\Lambda(P, N) \cong Tor_{k-1}^\Lambda(K, N) = 0$. Por lo tanto $Tor_k^\Lambda(P, N) = 0$ para cualquier $\Lambda -$ *módulo* N. ■

Bibliografía

[Ab. Ba] Abhishek, B. Exactness, Tor and flat Modules Over a Commutative Ring. American Journal of Undergraduate Research. Vol. 3 No. 3. (2004)

[Ad. Ji] Adámek, J. Theory of Mathematical Structures. D. Reidel Publishing Company. (1983).

[Bo. Fra.] Borceux, F. Handbook of Categorical Algebra I (Basic Category Theory). Cambrige University Press. (1994).

[Ac. y Llu] Aceff, F., LLuis, P. Teoría de Galois. Un primer curso. Segunda Edición. Sociedad Matemática Méxicana. México. (2013).

[Ca. y Eil] Cartan, H., Eilenberg, S. Homological Algebra. Princenton University Press. (1956).

[Gro. A] Grothendieck, A. Sur quelques points d'Algrébre Homologique, (1957)

[Llu. P. 1] Lluis, P. Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica. Sociedad Matemática Mexicana. México. (2005).

[Llu. P. 2] Lluis, P.Teoría de Grupos. Un primer curso. Sociedad Matemática Mexicana. México. (2006).

[Mc S 1] Mac Lane, S. Homology. Springer-Verlang. (1975).

[Mc. S. 2] Mac Lane, S. Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag. (1998).

[Ro. J] Rotman, J. An introduction to Homological Algebra. Springer. (2009).

[Ro. Lo] Rowen, L H. Ring Theory. Academic Press Inc. (2005).

[Ve. L] Vermani, L.R. An elementary approach to Homological Algebra. Chapman and Hall/Crc monograph and surveys in pure and applied mathematics. (2003).

[We. C.1] Weibel, C. An Introduction to Homological Algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38. Cambridge U. Press. (1994).

[We. C.2] Weibel, C. History of the Homological Algebra. (1997).