



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
(INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES)

ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍAS ESPACIO TEMPORALES

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

CARLOS ANDRÉS ESCOBAR RUIZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RÍOS
(Instituto de Ciencias Nucleares - U.N.A.M.)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
(Instituto de Ciencias Nucleares - U.N.A.M.)

DR. ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR
(Facultad de Ciencias - U.N.A.M.)

MÉXICO, D. F., DICIEMBRE 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más sincero y profundo agradecimiento al Director de Tesis, el Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos. Quiero destacar que su indiscutible talento, ejemplar profesionalismo y el entusiasmo demostrados en las discusiones de trabajo que hemos mantenido durante los últimos años han marcado y enriquecido enormemente mi visión acerca de la Física y en particular sobre los temas abordados en esta Tesis. Basta decir que su dedicación ha sido un referente invaluable y la mejor guía en mi formación académica. Asimismo, le agradezco su paciencia y los consejos personales. Muchas gracias por todo.

Agradezco a cada uno de los miembros del jurado por sus comentarios y sugerencias que mejoraron el contenido de la Tesis, destacando que lo han realizado de manera bastante eficiente y eficaz:

- Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos
- Dra. Myriam Mondragón Ceballos
- Dr. Miguel Ángel Pérez Angón
- Dr. Yuri Bonder Grimberg
- Dr. Mariano Chernicoff Minsberg

Un especial agradecimiento a

- Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar
- Dr. José David Vergara Oliver

Su gran capacidad, la seriedad de su trabajo y dinamismo han sido un apoyo excepcional. Ciertamente ha sido un privilegio haber contado con sus asesorías y amistad.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Ciencias Nucleares por la hospitalidad brindada durante los años en los cuales realicé mis estudios de posgrado.

Agradezco el apoyo económico brindado por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPPIT) a través del proyecto “*Simetrías espacio temporales y teorías de campo efectivas*” con clave IN104815.

A mi padre Abundio, por la educación y el amor que siempre me brindó. Todo se lo debo a él. Su manera de afrontar la vida ha sido la mayor inspiración que he recibido de una persona. Sólo mirando atrás, uno se da cuenta de que entiende aquellas decisiones que en su momento no parecían tener mucho sentido. Con un sentimiento de haberlo entendido tarde, sólo puedo decir: “Él tenía razón, siempre la tuvo, sólo era cuestión de seguir adelante y esperar”. Es justo en estos instantes cuando aquellas frases que solía decir en los momentos más difíciles toman más sentido... “No se preocupen, vamos a salir adelante”. Para él es el mayor de mis agradecimientos.

A mi madre Rosa y a mi hermano Adrián. El objetivo alcanzado también es de ustedes, y la voluntad que me ayudó a conseguirlo fue su gran apoyo. Con mucho esfuerzo y humildad, seguimos adelante, poco a poco.

A mi familia por toda su ayuda, cariño y alegría que me han brindado. Si bien es cierto que no acostumbro a ser muy expresivo, sí me doy cuenta que son un ejemplo de familia a seguir, y de la cual estoy muy orgulloso de ser parte. En particular, quiero agradecer a mi tía Dora, sin su apoyo este objetivo no se hubiese podido llevar a cabo; aún recuerdo esas noches en las que Gus, Adrián y yo ayudábamos a preparar las milanesas y el queso de puerco para que ella saliese al trabajo a las tres de la madrugada, todos los días, durante tanto tiempo... muchas gracias tía. También, un agradecimiento a Gus por ser como un pequeño hermano, “ya vendrán más tardes de xbox y películas, como aquellas en las que la televisión olía a quemado”.

A esas personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron listas para brindarme toda su ayuda, ahora me toca regresar un poquito de todo lo inmenso que me han otorgado. Un agradecimiento a mis amigos y compañeros, a aquellos que uno tiene presente aún estando lejos y su recuerdo te hace sonreír, Fredy Iván, Ricardo, Adriel, Laura y Juan Miguel. A aquellos amigos que han estado en la universidad y han hecho el recorrido más ameno y divertido, Manuel, Noel, Mike y Cintli. Por los consejos, pláticas y compañía, a Michelle y a Patricia. A Marcos y a Lici, porque estando junto a grandes personas uno se hace mejor persona, más allá de lo profesional, al grado de convivir con las familias. A Juan, por sus ayudas, “desayudas”, y vivencias junto a él que uno valora tanto. A todos aquellos que en su momento estuvieron presentes pero ahora ya no lo están, por las alegrías y lecciones aprendidas. A los amigos de oficina, por las discusiones de física y de no física que hemos mantenido estos últimos años, Hugo, Alberto, Omar y compañía. A Florence, porque aún sin convivir mucho, uno se da cuenta de que la gente es buena. A Marcela, porque valoro sus palabras y su ejemplo de salir adelante. Y por las últimas pláticas tan recientes e interesantes, a Alicia, porque ella cree ganar las discusiones, pero no lo hace.

Índice general

Resumen	7
Summary	11

Capítulo 1

1. Marco Teórico	13
1.1. Teoría Cuántica de Campos y el Modelo Estándar	13
1.2. Transformaciones de Lorentz	15
1.3. Simetrías	15
1.4. Covarianza de Lorentz	17
1.5. Violación de Lorentz en una teoría de campos	18
1.6. Rompimiento espontáneo de simetrías globales	20
1.7. Teorema de Goldstone	21
1.8. Violación de las simetrías de Lorentz y CPT	22
1.8.1. Relaciones de Dispersión modificadas	22
1.8.2. Relatividad Especial Doble o Deformada	23
1.8.3. Geometrías no conmutativas	23
1.8.4. Modelo Estándar Extendido	24
1.9. Fotones y Gravitones como bosones de Goldstone	25
1.10. Electrodinámica lineal	27
1.11. Electrodinámica no lineal	28

Capítulo 2

2. Rompimiento Espontáneo de la Simetría de Lorentz inducido por un valor de mínima energía no nulo para la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$	30
2.1. El modelo	31
2.2. Grados de libertad	34
2.2.1. Caso (1 + 1)-dimensional	35
2.2.2. Caso (3 + 1)-dimensional	37
2.3. El Teorema de Goldstone en Electrodinámica no lineal	41
2.4. Elección del estado de vacío e identificación de los modos de Goldstone	42

2.4.1.	Caso (1 + 1)-dimensional	42
2.4.2.	Caso (3 + 1)-dimensional	42
2.4.2.1.	El caso del vacío con $\det(C) \neq 0$	44
2.4.2.2.	El caso del vacío con $\det(C) = 0$	45
2.5.	Relaciones entre las susceptibilidades de orden superior	46
2.6.	Modos de propagación, grados de libertad y dinámica de los modelos	48
2.6.1.	Relaciones de Dispersión	51
2.6.1.1.	Métricas efectivas	55
2.7.	Soluciones para el caso (1 + 1)-dimensional	55
2.7.1.	Términos cinéticos BF para el caso (1 + 1)-dimensional	56
2.7.1.1.	Potencial arbitrario $\bar{V}(\phi_\mu\phi^\mu)$	56
2.7.1.2.	Potencial tipo modelo de abejorro	58
2.7.2.	Modelos de abejorro para el caso (1+1)-dimensional	61
2.7.2.1.	Congelando los modos que no son de Goldstone	61
2.7.2.2.	Modelo de abejorro con un potencial arbitrario	63
2.8.	Conclusiones	68

Capítulo 3

3.	Modelo de Nambu	70
3.1.	Modelo de Nambu Abeliano (Cálculo Perturbativo)	72
3.1.1.	La formulación perturbativa del ANM	73
3.1.2.	Electrodinámica en la norma $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$	75
3.1.3.	Las reglas de Feynman para la electrodinámica en la norma $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$	77
3.1.4.	Contribuciones de los fantasmas de Faddeev-Popov a procesos físicos	78
3.2.	Modelo de Nambu no Abeliano (Cálculo Analítico)	82
3.2.1.	El caso tipo espacio del modelo de Nambu no abeliano (SL-NANM)	83
3.2.1.1.	Las ecuaciones de movimiento del SL-NANM	84
3.2.1.2.	La densidad Hamiltoniana del SL-NANM	85
3.2.1.3.	Evolución de las funciones Ω^a en el SL-NANM	90
3.2.2.	Descripción unificada del modelo de Nambu no abeliano	91
3.2.2.1.	Las ecuaciones de movimiento	91
3.2.2.2.	La densidad Hamiltoniana	92
3.2.2.3.	Evolución temporal de las funciones de Gauss Ω^a	95
3.3.	Teorías de norma surgiendo a partir de modelos tipo Nambu	95
3.3.1.	Teorías de norma	96
3.3.2.	Teorías tipo modelo de Nambu (TTNM)	99
3.3.2.1.	Resolviendo para una variable x_l	100
3.3.2.2.	Resolviendo para una variable λ_m	104
3.3.3.	Ejemplos	107
3.3.3.1.	Modelo en mecánica clásica	107

3.3.3.2. Teorías de Yang-Mills	108
3.3.3.3. Gravitación de Einstein	108
3.4. Conclusiones	110

Capítulo 4

4. Estudio a temperatura finita dentro del Modelo Estándar Extendido	116
4.1. El Modelo	117
4.2. Función de Partición y Termodinámica	121
4.3. Conclusiones	130
Conclusiones Generales	132
Apéndices	134
A. Convenciones	135
B. Yang-Mills	136
C. El álgebra del SL-NANM	140
D. El Wronskiano	144
E. Álgebra de los modelos tipo Nambu	146
F. Método de Faddeev-Popov	153
F.1. Determinante de Faddeev-Popov	155
G. Evaluación de la función de partición	157
Referencias	161

Resumen

Hasta donde sabemos actualmente, la naturaleza está razonablemente bien descrita por teorías como el modelo estándar, relatividad general y teoría cuántica de campos, aún cuando la intersección entre las dos últimas es un problema abierto. Por esta razón, en orden de intentar resolver esta interrogante, hoy en día una considerable cantidad de estudios teóricos se centran en desarrollar una teoría más fundamental que trate de realizar una unificación que incluya una descripción cuántica de la gravedad. Es en esta búsqueda que emergen varios escenarios en física de altas energías que sugieren que deberían introducirse nuevas ideas en teoría cuántica de campos y/o relatividad general y, eventualmente, éstas podrían implicar modificaciones en los axiomas de teoría cuántica de campos y relatividad general.

Por ejemplo, algunas de las teorías de la gravitación cuántica predicen que el espacio puede tener una estructura granular a distancias del orden de la longitud de Planck, en lugar del comportamiento continuo en que se basan todas las predicciones que se hacen en el rango de energías accesibles en los aceleradores. Este comportamiento granular podría originar violaciones a la simetría de Lorentz, como fue originalmente propuesto en [1]. Por una parte, existen teorías que favorecen ambos puntos de vista en la literatura (la invariancia o su violación), y por otra es necesario contar con una verificación experimental/observacional de la validez o no de esta ley fundamental. Es claro que las posibles violaciones estarían muy suprimidas, por lo que su estudio debe hacerse con observaciones de gran precisión o incorporando muy altas energías. Sin embargo, la intensa investigación en física de altas energías demuestra que gran parte de los fenómenos de la física son no lineales, y por lo tanto, cualquier efecto por pequeño que sea, puede evolucionar hasta producir un efecto significativo. La teoría cuántica de campos y la relatividad general están llenas de estos ejemplos y cualquier desviación de la invariancia relativista y/o de la violación de otro axioma, en principio, es una posibilidad viable e interesante de estudiar en sí.

Si bien es cierto que existen escenarios en física de altas energías, por ejemplo en teorías que intentan describir gravedad cuántica, que motivan la búsqueda de una violación de la simetría de Lorentz, es importante mencionar que, aún si no consideramos dichos escenarios, un estudio sobre la simetría de Lorentz es de gran valor por sí mismo dado que siendo uno de los pilares de las teorías actuales, en los cuales se asume esta simetría como una simetría exacta, es importante realizar intentos por resolver a la pregunta aún abierta: ¿Es realmente la simetría de Lorentz una simetría exacta en todas las escalas de energías?. Pretender dar respuesta a la pregunta anterior es sin duda muy ambicioso, sin embargo, podemos tomar una actitud más modesta y preguntarnos, ¿qué sucede o cuáles son las consecuencias de permitir que una teoría incluya la posibilidad de una violación a la invariancia de Lorentz?. El camino más directo para resolver esto, aunque probablemente no el más efectivo, es incorporar de una manera prudente el concepto de violación a la simetría de Lorentz a una teoría y estudiar que consecuencias tiene. Como siempre, el experimento dirá si la manera en la cual realizamos lo anterior es correcta o no. Intentos como estos pueden darnos indicios para resolver la primera pregunta y clarificarnos un poco sobre el por qué la simetría de Lorentz debe ser exacta o no. Si la invariancia de Lorentz fuera violada dentro de esquemas que intentan describir una

teoría de gravedad cuántica, la escala natural de energía que uno podría esperar donde se presenten dichos efectos es la escala de la energía de Planck (10^{19} GeV). Sin embargo, es conveniente mantener una actitud abierta respecto a la magnitud de dicha escala.

Durante los últimos años se ha llevado a cabo una enorme variedad de experimentos que acotan los parámetros de violación [2], por ejemplo, en el marco del llamado Modelo Estándar Extendido, desarrollado por Kostelecky y colaboradores [3]. La detección de fotones de muy alta energía provenientes de fuentes cosmológicas permite poner cotas muy estrictas sobre los parámetros de violación [4, 5, 6, 7, 8]. Dichas observaciones pueden correlacionarse mediante el sector de la electrodinámica del Modelo Estándar Extendido, que incluye modificaciones lineales a ésta. Además de lo anterior, también ha habido mucho trabajo teórico al respecto [9, 10]. Un resumen de la actividad desarrollada en México en esta área se encuentra en [11].

El problema general a tratar en el presente trabajo está enmarcado en el área de simetrías espacio-temporales ($CPT + Lorentz$) con énfasis en la ruptura espontánea de éstas. El objetivo es realizar un estudio de esta idea mediante tres aproximaciones distintas, expresadas en los capítulos dos, tres y cuatro.

El Capítulo 1 es un marco teórico donde introducimos algunos conceptos fundamentales sobre la violación a la invariancia de Lorentz y el rompimiento espontáneo de simetría. Presentamos también algunos esquemas desarrollados recientemente que incorporan las ideas anteriores.

En el Capítulo 2 se estudia un modelo de la electrodinámica no lineal en el cual se produce un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz inducido por un valor de expectación distinto de cero de la configuración del vacío del tensor $F_{\mu\nu}$. Esta forma de obtener la ruptura, difiere fundamentalmente de la gran mayoría de los trabajos en la literatura por el hecho de considerar un valor de expectación para la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$, en lugar del potencial A_μ . Se lleva a cabo el conteo e identificación de los modos de Goldstone, requiriendo de una cuidadosa interpretación del teorema de Goldstone dado que todas las partículas son de masa nula porque la invariancia de norma es preservada en todo momento. Posteriormente se efectúa un estudio sobre la dinámica de los modelos.

El Capítulo 3 se divide en tres secciones, en las cuales se realiza un estudio del modelo de Nambu en sus versiones abeliana, no abeliana y generalizaciones. Estos modelos de Nambu están descritos básicamente por una densidad Lagrangiana que corresponde a una teoría de norma, por ejemplo la electrodinámica estándar, junto con una restricción no lineal que es motivada por un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz.

La sección I da una prueba de que el modelo de Nambu abeliano es equivalente a QED en la norma no lineal $A_\mu A^\mu - n^2 M^2 = 0$ a todo orden en teoría de perturbaciones, esto cuando en el primero se toman como condiciones iniciales la ley de Gauss junto con la conservación de la corriente. La demostración se basa en probar que las reglas de Feynman para las interacciones y propagadores son las mismas en ambos modelos cuando son escritos en las mismas variables. Un paso esencial para obtener la equivalencia es mostrar que los fantasmas que surgen en el proceso de fijar la norma en QED se desacoplan. Esto se verifica siguiendo un método similar al empleado al estudiar teorías de Yang-Mills cuando se consideran normas axiales.

En la sección II se realiza un análisis Hamiltoniano no perturbativo para probar que existe una equivalencia entre la teoría $SO(N)$ de Yang-Mills y su correspondiente modelo de Nambu no abeliano, una vez que las leyes de Gauss junto con la conservación de la corriente son impuestas como condiciones iniciales. Esta equivalencia es independiente de la norma fijada en Yang-Mills. Eligiendo una adecuada parametrización, que resuelve la restricción que define el modelo de Nambu no abeliano, nos permite mostrar que existe una relación entre las variables del modelo de Nambu no abeliano y la correspondiente teoría de Yang-Mills que respeta el álgebra canónica y donde los Hamiltonianos tienen la misma forma funcional, excepto por el hecho de que las leyes de Gauss no aparecen como restricciones en el modelo de Nambu no abeliano. La dinámica del modelo de Nambu no abeliano asegura que podemos incluirlas como condiciones iniciales y recobrar la equivalencia con la contraparte de Yang-Mills.

La sección III generaliza la idea anterior estableciendo los criterios bajo los cuales podemos encontrar una equivalencia entre una teoría de norma y una teoría tipo modelo de Nambu. El procedimiento a seguir es mostrar que, cuando se satisfacen ciertos criterios, las densidades Hamiltonianas y las álgebras canónicas que describen ambos modelos son idénticas. Nuevamente, se requiere de un análogo a las leyes de Gauss y de la conservación de la corriente como condiciones iniciales con el objeto de recobrar la equivalencia propuesta.

En el Capítulo 4 se estudia el comportamiento a temperatura finita del sector CPT-par del fotón dentro del Modelo Estándar Extendido, el cual es definido por el Lagrangiano estándar de Maxwell más el término $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$, donde este último término es motivado por un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz. Se lleva a cabo el análisis Hamiltoniano, y a partir del cual se obtienen los grados de libertad junto con las restricciones de la teoría. Se calcula explícitamente la función de partición para una configuración arbitraria de los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, a segundo orden, y ésta se emplea para obtener las propiedades termodinámicas. Encontramos correcciones a la ley de radiación de Planck en cuanto a su dependencia en la frecuencia e identificamos que la densidad de energía total es ajustada por una constante global de proporcionalidad que contiene contribuciones a la violación de Lorentz. Sin embargo, la ecuación de estado no es afectada por estas modificaciones.

Los resultados anteriores han sido reportados en los siguientes artículos:

■ Capítulo 2

1. *The Goldstone Theorem in non-linear electrodynamics*, C. A. Escobar and L.F. Urrutia, *Europhysics Letters* **106**, 31002 (2014).
2. *Towards an interpretation of spontaneous Lorentz symmetry breaking in modified BF theories*, C. A. Escobar and L.F. Urrutia, *AIP Conf. Proc.* **1577**, 254 (2014).
3. *The invariants of the electromagnetic field*, C. A. Escobar and L.F. Urrutia, *J. Math. Phys.* **55**, 032902 (2014).

■ Capítulo 3

1. *Photons emerging as Goldstone bosons from spontaneous Lorentz symmetry breaking: The Abelian Nambu model*, C. A. Escobar and L.F. Urrutia, *Physical Review D* **92**, 025042 (2015).
2. *Conditions for the emergence of gauge bosons from spontaneous Lorentz symmetry breaking*, C. A. Escobar and L.F. Urrutia, *Physical Review D* **92**, 025013 (2015).
3. *Gauge theories arising from a generalization of Nambu's models*, C. A. Escobar and L.F. Urrutia, en preparación.

■ Capítulo 4

1. *Full CPT-even photon sector of the Standard Model Extension at finite temperature*, C. A. Escobar and M.A. García, *Physical Review D* **92**, 025034 (2015).

Summary

In the present work the general problem we deal with is embedded in the area of space-time symmetries ($CPT + Lorentz$) and is mainly focused in the situation in which these symmetries are spontaneously broken. To explore this idea we will use three different approaches, each of them described in the Chapters two, three and four, respectively.

In Chapter I the fundamental concepts on Lorentz invariance violation as well as that of the spontaneous symmetry breaking are introduced. We also present some of the previous schemes (models) based on these concepts.

In Chapter II we study a non-linear electrodynamics (NLED) model arising from the spontaneous Lorentz symmetry breaking triggered by a non-zero vacuum expectation value of the electromagnetic field strength. This mechanism of symmetry breaking is quite different from those presented in the literature, since we focus on the non-zero vacuum expectation value of the field strength tensor $F_{\mu\nu}$, instead of the potential A_μ . We identify and numerate the Goldstone's modes where a careful interpretation of the Goldstone's theorem is needed because all the involved particles are massless due to the gauge invariance. We then move to the dynamical analysis of such a model.

Chapter III is divided in three sections devoted to the study of the Nambu's model. Both version the abelian and the non-abelian case as well as generalizations are considered. Basically, these models are described by a Lagrangian density associated with a gauge theory, for example the standard electrodynamics, plus a non-linear constraint, which causes the spontaneous Lorentz symmetry breaking.

In section one we present a proof that the abelian Nambu's model is equivalent to QED in the non-linear gauge $A_\mu A^\mu - n^2 M^2 = 0$ to any order of perturbation theory, provided that in the former model both the Gauss's law and the conservation of the current are chosen as initial conditions. The proof is based on the observation that the Feynman's rules, i.e. vertices and propagators, in both theories coincide when they are written in appropriate variables. An important element in the proof requires that the ghosts, which appear in the process of fixing the gauge in QED, to be decoupled. Following a similar method used in the study of axial gauges in Yang-Mills theories we verified that the mentioned ghosts are indeed decoupled.

In section two a non-perturbative Hamiltonian analysis is presented. In this section we show that there exists an equivalence between the $SO(N)$ Yang-Mills theory and the corresponding non-abelian Nambu's model upon taking both the Gauss's law and the conservation of the current as initial conditions in the latter. This equivalence does not depend on the gauge of the Yang-Mills theory. By choosing a suitable parametrization, which fulfills the constraint that defines the non-abelian Nambu's model, we will establish a relation between the variables of the non-abelian Nambu's model with those of the Yang-Mills theory. In this relation the canonical algebra is preserved and the corresponding Hamiltonians have the same functional

form but the Gauss's law does not appear as a constraint in the non-abelian Nambu's model. The dynamics of Nambu's model allows us to include the Gauss's law as initial condition and in this way recover the equivalence with the Yang-Mills counterpart.

The section three contains a generalization of the results presented in section two. We determine the criteria under which a gauge theory is equivalent to a Nambu-type model. To do so we use a general procedure to show that there exists certain conditions for which the Hamiltonian densities as well as the canonical algebra are the same for both theories. Again, an analog of the Gauss's law and the conservation of the current as initial conditions is required in order to establish the proposed equivalence.

Finally, in Chapter 4 we consider the behavior at finite-temperature of the CPT-even sector of the photon in the Extended Standard Model, which is defined by the usual Maxwell's Lagrangian plus the term $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$. This last term is motivated by the spontaneous Lorentz symmetry breaking. The Hamiltonian analysis is carried out to obtain the effective degrees of freedom and the constraints of the theory. Explicitly, we calculate the partition function for an arbitrary configuration of the coefficients $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ up to second order and the thermodynamical properties are then derived. We found corrections to the Planck's law in the dependence on the frequency. Moreover, we identified that the total energy density is adjusted by a global constant of proportionality which gives Lorentz violations contributions. However, the corresponding equation of state is not affected at all.

Capítulo 1

Marco Teórico

El objetivo de este primer capítulo es presentar algunos conceptos fundamentales. Algunos de estos conceptos son de carácter básico y es posible encontrarlos en libros de texto, mientras que otros son un tanto más particulares, requiriendo de una búsqueda más especializada. El propósito de conjuntar ambos es proporcionar una idea tan precisa como sea posible del concepto de violación de la simetría de Lorentz (LSV), el cual será el elemento esencial del estudio desarrollado a lo largo de esta tesis.

Aunado al concepto de violación de la simetría de Lorentz, también hablaremos del rompimiento espontáneo de una simetría. En particular, dentro de este trabajo cada vez que se haga referencia a una LSV se estará en el entendido que se trata de una violación de la simetría de Lorentz producida por un rompimiento espontáneo. Conceptos como transformaciones activas y pasivas jugarán un papel fundamental en la comprensión de lo anterior.

Se describirán brevemente modelos que incorporan la idea de una LSV, esto con la finalidad de mostrar antecedentes que han tenido un continuo desarrollo en tiempos recientes.

Por último se presenta un modelo de electrodinámica no lineal que servirá de base para el estudio desarrollado en el siguiente capítulo.

A menos que se especifique explícitamente algún caso especial en el texto, las convenciones utilizadas a lo largo de la Tesis son las descritas en el Apéndice A.

1.1. Teoría Cuántica de Campos y el Modelo Estándar

Una teoría cuántica de campos en un espacio plano (T.C.C.) es una descripción que combina la mecánica cuántica (M.C.) y la teoría especial de la relatividad (T.E.R.). A grosso modo, la mecánica cuántica es una teoría que describe la física que se presenta a pequeñas escalas, mientras que la teoría especial de la relatividad estudia la física a altas energías, esto es, el movimiento de partículas o sistemas con velocidades cercanas a la de la luz (sin incluir la gravedad).

Dentro del esquema de T.C.C. se trabaja con campos que están parametrizados por puntos del espacio-tiempo y que describen tanto a las partículas como a las interacciones entre ellas. Estos campos son operadores que pueden crear o destruir partículas. En primera instancia,

tanto en M.C. como en T.E.R. estamos interesados en las partículas, su dinámica y las interacciones entre ellas. Sin embargo, dado que es posible entender a las partículas en términos de excitaciones de los campos (recordemos que estos las crean o destruyen), resulta conveniente trasladar el problema al estudio de los campos, los cuales tienen una dinámica e igualmente una interacción entre ellos. En otras palabras, si insistimos en una descripción de partículas que sea consistente con la mecánica cuántica y la relatividad especial terminaremos utilizando un esquema de teoría cuántica de campos.

Análogamente al caso clásico, la herramienta básica a utilizar es la densidad Lagrangiana L dentro de la acción.

$$S = \int d^4x L \quad ; \quad \delta S = 0. \quad (1.1)$$

La física es obtenida mediante el principio de acción $\delta S = 0$ y a partir del cual se derivan las ecuaciones de movimiento para la densidad Lagrangiana L . Simetrías del sistema, partículas con su dinámica e interacciones están completamente contenidos en lo anterior.

Como lo mencionamos previamente, a partir de una teoría cuántica de campos es posible describir las partículas fundamentales y sus interacciones. La teoría más exitosa hasta el momento es lo que conocemos como el Modelo Estándar (ME). Este modelo describe cada tipo de partícula en términos de un campo matemático, y a su vez las interacciones entre éstas (excepto la gravedad):

1. La interacción electromagnética.
2. La interacción débil.
3. La interacción fuerte.

Cada fuerza es mediada por una partícula llamada bosón de norma.

El grupo de norma asociado al ME es $G_{ME} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Este grupo de norma incluye al grupo de simetría de las interacciones fuertes, $SU(3)_C$, y al grupo de simetría de las interacciones electrodébiles $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El grupo de simetría de las interacciones electromagnéticas, $U(1)_{em}$ aparece en el ME como un subgrupo de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, y es en este sentido que se dice que las interacciones débiles y electromagnéticas están unificadas, como se describe en el Modelo Electrodébil desarrollado por Glashow, Salam y Weinberg en los años de 1960 [12].

En el ME se identifican tres sectores:

- a) El sector fermiónico: quarks y leptones.
- b) El sector bosónico: 8 gluones (bosones de norma de $SU(3)_C$), W^\pm, Z^0 y γ que son los bosones de norma de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.
- c) El sector escalar de Higgs: bosón de Higgs, en este sector se hace la predicción de dicha partícula junto con la introducción del llamado mecanismo de Higgs, en el cual la simetría de norma del Modelo Estándar es rota espontáneamente, y cuyo efecto es que las partículas

elementales adquieran masa debido a la interacción de éstas con el bosón de Higgs. Es precisamente en este sector donde hacen su aparición las ideas de: rompimiento espontáneo de simetrías, el teorema de Goldstone y el mecanismo de Higgs.

1.2. Transformaciones de Lorentz

Una transformación de Lorentz nos permite obtener una relación entre las mediciones realizadas por observadores en distintos sistemas de referencia inerciales. Dichas transformaciones tienen la estructura de un grupo, el cual es llamado Grupo de Lorentz. Este grupo L cumple con la propiedad de ser el conjunto de transformaciones $\Lambda^\mu{}_\nu$ que mantienen la métrica de Minkowski invariante (espacio pseudo-euclídeo con signatura (1,3)), es decir,

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\gamma\Lambda^\nu{}_\delta = \eta_{\gamma\delta}. \quad (1.2)$$

Entre dichas transformaciones encontramos aquéllas que están conectadas con la identidad y a su vez tienen $\det \Lambda = 1$. Éstas, de igual manera, forman un grupo y son conocidas como las transformaciones ortócronas propias L_+^\uparrow . En general todas las transformaciones de Lorentz son generadas por rotaciones \vec{J} y “boosts” \vec{K} , con las relaciones de conmutación:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ij}{}_k J^k \quad ; \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ij}{}_k K^k \quad ; \quad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ij}{}_k J^k. \quad (1.3)$$

1.3. Simetrías

Las leyes de conservación, es decir, la existencia de cantidades que no cambian con el tiempo, independientemente de la evolución del sistema, juegan un papel importante en la física teórica. La conservación de la energía, del momento lineal y del momento angular son leyes fundamentales que cualquier teoría tiene que garantizar si quiere dar una descripción válida de la naturaleza a las escalas de energía actualmente accesibles. Además de estas propiedades básicas, los sistemas físicos a menudo poseen otras cantidades conservadas, tales como la carga, el isospín o generalizaciones de éstas. A partir de un punto de vista fundamental, las leyes de conservación son una consecuencia natural de las propiedades de simetría de un sistema. Para cada transformación continua de las coordenadas y/o de los campos bajo las cuales la física, codificada en la acción del sistema, no sufra algún cambio es posible deducir la existencia de cantidades conservadas. Por ejemplo, la conservación de la energía, momento lineal y momento angular están basadas en la invariancia de la teoría bajo traslaciones temporales, traslaciones espaciales y rotaciones, respectivamente. Similarmente la conservación de la carga se sigue a partir de la invariancia ante transformaciones de fase.

El fundamento matemático de la conexión entre las propiedades de simetría y las leyes de conservación es conocido como teorema de Noether. Específicamente este teorema nos dice lo siguiente: Cada transformación de simetría continua conduce a una ley de conservación.

Si L denota el Lagrangiano del sistema y se consideran las transformaciones de simetría infinitesimales en las coordenadas,

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad (1.4)$$

con el correspondiente cambio en los campos escalares,

$$\phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \quad (1.5)$$

la cantidad

$$f_\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi_r)}\delta\phi_r(x) - \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi_r)} \frac{\partial\phi_r}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}L(\phi(x)) \right)\delta x^\nu, \quad (1.6)$$

es una densidad de corriente conservada

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} f_\mu = 0. \quad (1.7)$$

Como hemos mencionado anteriormente, una transformación de simetría es aquella en la cual la física del problema no cambia. Dentro de estas transformaciones de simetría debemos distinguir entre las globales y locales. Las globales son aquellas donde se aplica la misma transformación a todos los puntos del espacio, mientras que las locales son aquéllas donde es posible aplicar distintas transformaciones en distintos puntos del espacio.

A su vez debemos hacer una separación entre transformaciones continuas y discretas. Las transformaciones de simetría continuas son aquellas que pueden ser generadas a partir de la identidad mediante un parámetro continuo. Dentro de éstas encontramos a las transformaciones de Lorentz ortócronas. En cambio, las transformaciones de simetrías discretas son aquéllas que describen cambios no continuos en un sistema y por ende no pueden ser parametrizadas de manera continua a partir de la identidad. Como ejemplos de estas simetrías discretas tenemos las transformaciones de conjugación de carga, paridad e inversión temporal. La conjugación de carga (C) es la operación matemática que cambia los signos de todas las cargas de una partícula, por ejemplo, cambia el signo de la carga eléctrica. Conjugación de carga implica que para cada partícula cargada existe una antipartícula con la carga opuesta. La antipartícula de una partícula eléctricamente neutra puede ser idéntica a la partícula, como es el caso del pión neutro, o puede ser distinta, como pasa con el anti-neutrón debido a la carga adicional correspondiente al número bariónico. La paridad (P), o inversión espacial, es el reflejo en el origen del sistema de coordenadas; es decir, las tres dimensiones espaciales x, y, z se transforman en $-x, -y, -z$, respectivamente. La inversión temporal (T) es la operación matemática que reemplaza la variable temporal por su negativo en las fórmulas o ecuaciones, de modo tal que describan un evento en el cual todos los movimientos son revertidos. Las ecuaciones, que se derivan de la densidad Lagrangiana L dentro de la acción S , que permanecen sin modificaciones tras esta operación se dice que son invariantes bajo inversión temporal, lo cual implica que las mismas leyes de la física se aplican en ambas situaciones. Habiendo hablado de las transformaciones de coordenadas previas, debemos de recordar que éstas inducirán transformaciones de los campos, como lo establece la Ecu. (1.5).

En relación a las simetrías anteriores encontramos el llamado teorema CPT, el cual nos dice que, siempre que se cumplan las condiciones 1 y 2 enunciadas más abajo, en una teoría cuántica de campos es imposible escribir una densidad Lagrangiana local, escalar y hermitiana que viole CPT. Específicamente nos dice lo siguiente: Toda densidad Hamiltoniana H es invariante bajo CPT si las siguientes dos condiciones se cumplen:

1. La teoría es local, tiene un Lagrangiano hermitiano y es invariante bajo transformaciones propias de Lorentz.
2. La correspondiente teoría cuántica se obtiene mediante el principio de correspondencia, empleando conmutadores para campos con espín entero y anticonmutadores para campos con espín semientero.

Este teorema, que es considerado como uno de los pilares de teoría cuántica de campos, nos garantiza que bajo las condiciones anteriores, CPT es una simetría exacta de todos los tipos de interacciones fundamentales. Cabe notar que constantemente se realizan experimentos para verificar la validez de la simetría CPT, y hasta el día de hoy siempre se ha visto respetada. Las posibles violaciones a esta simetría se relacionan con el estudio del presente trabajo puesto que cualquier violación de la simetría CPT implica una violación a la simetría de Lorentz, según el teorema probado por O. Greenberg en 2002 [13], el enunciando inverso no es necesariamente cierto.

Para completar esta sección terminaremos mencionando el significado de la así llamada invariancia de norma en teorías abelianas y no abelianas. Una transformación de norma es una transformación de algún grado de libertad interno en los campos, que no modifica ninguna propiedad física observable, es decir, es una simetría interna. Los campos que median las interacciones que presentan este tipo de invariancia son denominados campos de norma. Desde el punto de vista físico, los campos de norma se manifiestan en forma de partículas bosónicas sin masa (bosones de norma). Así pues, la interacción entre los campos fermiónicos mediada por los bosones de norma puede ser vista como el resultado de introducir transformaciones locales pertenecientes a un grupo de simetría interna.

1.4. Covarianza de Lorentz

La covarianza de Lorentz se refiere a la propiedad de que las ecuaciones físicas no cambien de forma bajo transformaciones de coordenadas al pasar de un sistema inercial a otro. Concretamente, es requisito de la teoría de la relatividad especial que las leyes de la física tienen que tomar la misma forma tensorial en todos los marcos de referencia inerciales.

Específicamente, el requerimiento de covarianza de Lorentz afirma que si dos observadores inerciales O y O' usan coordenadas (t, x, y, z) y (t', x', y', z') , tales que ambas están relacionadas por una transformación de Lorentz, entonces cualesquiera dos ecuaciones que describan la misma física del problema se escribirán respectivamente como,

$$0 = T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} (x^\mu), \quad 0 = T_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_m}^{\beta'_1 \beta'_2 \dots \beta'_n} (x'^\mu), \quad (1.8)$$

donde $T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}(x^\mu)$ son las componentes de un tensor T n -veces covariante y m -veces contravariante en cada uno de los sistemas de coordenadas, transformando como

$$T_{\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_m}^{\beta'_1\beta'_2\dots\beta'_n} = \Lambda_{\beta'_1}^{\alpha_1}\Lambda_{\beta'_2}^{\alpha_2}\Lambda_{\alpha'_1}^{\beta_1}\Lambda_{\alpha'_2}^{\beta_2}\dots\Lambda_{\beta'_n}^{\alpha_p}\Lambda_{\alpha'_m}^{\beta_p}T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}. \quad (1.9)$$

La Teoría General de la Relatividad generaliza aún más este principio al extender el requerimiento a sistemas de referencia no inerciales.

Dentro de este contexto, en los últimos años se han realizado numerosos y diversos experimentos a distintas escalas de distancias y energías con la finalidad de demostrar la validez o violación de esta covariancia ante transformaciones de Lorentz. Hasta el momento no se han encontrado indicios de violación de esta propiedad fundamental. Sin embargo, la búsqueda de modelos que puedan ser sondeados experimentalmente y donde esta invariancia podría dejar de cumplirse sigue siendo de gran interés tanto teórico como experimental.

1.5. Violación de Lorentz en una teoría de campos

Veamos como es que entendemos una violación en la invariancia de Lorentz dentro de una teoría de campos. Consideremos una acción en la cual se incluyen los campos escalares ϕ y ψ ,

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + (\eta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}) \partial_\alpha \partial_\beta \psi), \quad (1.10)$$

donde $\tau^{\alpha\beta}$ es algún tensor simétrico arbitrario, distinto y no proporcional a la métrica $\eta^{\alpha\beta}$ y que se asume que surge de un rompimiento espontáneo de simetría en una teoría más fundamental. Solo el tensor $\eta^{\alpha\beta}$ es un campo de fondo fijo. Ahora consideremos una transformación de Lorentz y recordemos que la acción S es un escalar. Los escalares, por definición, son invariantes bajo todas las transformaciones pasivas. Éstas corresponden a una elección de un sistema de referencia y son aquéllas donde uno hace una transformación de coordenadas, en particular una transformación de Lorentz de cualquier tensor en la acción, incluyendo los campos de fondo. Esto implica que siempre que tengamos nuestras ecuaciones en forma covariante seremos libres de elegir el sistema de referencia donde deseemos realizar nuestros cálculos. Esta invariancia es comúnmente conocida como invariancia de Lorentz de observador.

Por otro lado, la invariancia de Lorentz en una teoría también está basada en la idea de transformaciones de Lorentz activas, donde lo único que transformamos son los campos dinámicos ϕ y ψ . Consideremos una transformación de Lorentz activa de ϕ y ψ ,

$$\phi'(x) = \phi((\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu), \quad \psi'(x) = \psi((\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu), \quad (1.11)$$

donde Λ^μ_ν es una matriz asociada a una transformación de Lorentz, $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. A su vez las derivadas transforman como,

$$\partial'_\nu \phi'(x) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu \phi((\Lambda^{-1})^\alpha_\beta x^\beta), \quad \partial'_\nu \psi'(x) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu \psi((\Lambda^{-1})^\alpha_\beta x^\beta), \quad (1.12)$$

de lo cual se sigue que $\eta^{\alpha\beta}\partial'_\alpha\phi'(x)\partial'_\beta\phi'(x) = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi(\Lambda^{-1}x)\partial_\beta\phi(\Lambda^{-1}x)$ dado que se cumple la condición $\eta^{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^\mu_\beta(\Lambda^{-1})^\nu_\alpha = \eta^{\mu\nu}$. Los términos que acompañan a $\eta^{\alpha\beta}$ son por lo tanto invariantes bajo Lorentz. Sin embargo, $\tau^{\alpha\beta}$ considerado como un campo de fondo no transforma en la acción, y por lo tanto la acción viola la invariancia de Lorentz activa. Las ecuaciones serán diferentes cuando son expresadas en los sistemas de referencia donde se llevó a cabo un “boost” o alguna rotación. En algunos textos a este tipo de transformaciones activas se les llama transformaciones de Lorentz de partículas.

Más adelante hablaremos del Modelo Estándar Extendido (SME) y veremos que una de sus características es requerir que la física del problema sea independiente del observador, es decir, que sea invariante ante transformaciones entre sistemas de referencia. Recordemos que una transformación de observador es un cambio del sistema de coordenadas, el cual puede ser visto como una rotación o “boost” de la base de vectores en un sistema local. De este modo, la filosofía del SME es que aunque exista una violación de Lorentz, la física debe mantenerse invariante ante transformaciones de observador. Insistimos, los resultados experimentales no dependen de la perspectiva del observador. En contraste, una transformación de Lorentz de partícula es llevar a cabo una transformación sobre los campos dinámicos individualmente manteniendo fijos tanto el sistema de coordenadas como los campos de fondo. En este caso, si existe una violación de Lorentz la física sufrirá un cambio.

En adelante, la designación violación a (ruptura de) la simetría de Lorentz se referirá siempre a las violaciones activas (de partícula) de dicha simetría.

Notemos que este comportamiento del SME no satisface las propiedades de relatividad, y específicamente no cumple con la equivalencia entre transformaciones de Lorentz pasivas y activas, cuando una es realizada como la inversa de la otra.

Una distinción similar entre transformaciones de observador y de partícula puede ser hecha para transformaciones de coordenadas generales llevadas a cabo en una variedad del espacio-tiempo de geometrías de Riemann o Riemann-Cartan. Una transformación de observador es simplemente un cambio de coordenadas del espacio-tiempo, el cual mantiene la física invariante. Por otro lado, una transformación de partícula es esencialmente un difeomorfismo, el cual mapea un punto del espacio-tiempo en otro, manteniendo fijo el sistema de coordenadas. Dentro de los esquemas que muestran un rompimiento espontáneo de simetría esperamos modelos que exhiban un valor esperado no nulo en la configuración de vacío para los campos involucrados, que pueden ser en general tensoriales, los cuales darán lugar a dicho rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz

$$\langle T_{\alpha\beta\gamma\dots} \rangle \equiv t_{\alpha\beta\gamma\dots} \neq 0. \quad (1.13)$$

Los valores $t_{\alpha\beta\gamma\dots}$ pueden ser constantes o especificar funciones del espacio-tiempo. Tales valores de expectación especifican una o más orientaciones privilegiadas dentro de cualquier sistema local, lo cual es característico de la ruptura de la invariancia de Lorentz. En particular, en el ejemplo previo el campo de fondo que produce el rompimiento espontáneo es precisamente $\tau^{\alpha\beta}$.

1.6. Rompimiento espontáneo de simetrías globales

Dentro de una teoría cuántica de campo, en la cual trabajamos en una descripción lagrangiana, decimos que existe un rompimiento espontáneo de simetría cuando el Lagrangiano del sistema es invariante ante un grupo de transformaciones G y a su vez exhibe un estado de mínima energía (vacío) que no es invariante bajo este grupo completo. En particular, esto implica que las soluciones a las ecuaciones de movimiento resultantes ya no exhiben dicha simetría inicial. Es decir, si $H \subseteq G$ y sólo H mantiene el vacío invariante, decimos que el rompimiento espontáneo está dado por $G \rightarrow H$.

Si T denota una transformación de simetría del Lagrangiano L y ϕ_0 un estado de vacío (mínimo del potencial), entonces un rompimiento espontáneo de simetría está dado si,

$$L = L' \quad \text{bajo } T \quad \text{y} \quad T\phi_0 \neq \phi_0. \quad (1.14)$$

Las transformaciones de simetría pueden ser tanto discretas como continuas (por ejemplo, reflexiones, rotaciones y paridad). Como veremos, lo mencionado anteriormente nos conduce al resultado de que un rompimiento espontáneo de simetría implica una degeneración del estado de vacío [14, 15]. Por otro lado, un rompimiento espontáneo de simetría también conlleva al resultado general de la aparición de partículas sin masa (Teorema de Goldstone), lo cual está asociado con el hecho de que algunos campos adquieren un valor de expectación no nulo en el estado de vacío.

Ahora bien, veamos cómo es que un rompimiento espontáneo de simetría en una teoría cuántica de campo siempre está asociado con la degeneración del estado de vacío. Consideremos una transformación de simetría de la acción, que actúa linealmente sobre campos escalares $\phi_n(x)$,

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi'_n(x) = \sum_m L_{nm} \phi_m(x), \quad (1.15)$$

(el mismo razonamiento aplica para objetos como $\bar{\psi}\Gamma_n\psi$). Dado que la acción efectiva respeta las simetrías de la acción original, tendremos que,

$$\Gamma[\phi] = \Gamma[L\phi]. \quad (1.16)$$

El valor de expectación en el vacío del campo $\phi(x)$, debe estar en un mínimo de la energía del vacío $-\Gamma[\phi]$, digamos en $\phi(x) = \bar{\phi}$ (una constante). Pero si $L\bar{\phi} \neq \bar{\phi}$, este vacío no es único; $-\Gamma[\phi]$ tiene el mismo valor en $\phi' = L\bar{\phi}$ como en $\bar{\phi}$, es decir, existe una degeneración del estado de vacío. En el caso de una transformación de simetría de reflexión, $\phi \rightarrow -\phi$, si $-\Gamma[\phi]$ tiene un mínimo distinto de cero $\bar{\phi}$, entonces tiene dos mínimos, en $\bar{\phi}$ y $-\bar{\phi}$.

El hecho de elegir un vacío hace que las ecuaciones de movimiento no exhiban las mismas simetrías del Lagrangiano cuando uno expande en torno a dicho estado de vacío particular, y que por ende, se produzca el rompimiento espontáneo.

1.7. Teorema de Goldstone

La aparición de partículas sin masa cuando una simetría continua global es espontáneamente rota es un resultado general, conocido como teorema de Goldstone [16, 17]. Para precisar este teorema, debemos empezar por contar el número inicial de transformaciones de simetría continuas e independientes, éste corresponde al número de parámetros (número de generadores) del grupo, posteriormente se procede a contar el número de transformaciones que no dejan invariante el estado de vacío, la diferencia entre ambos números corresponderá a las partículas sin masa que surgen. El modelo básico donde podemos ejemplificar dicho teorema es el Modelo Lineal Sigma SLM, cuyo Lagrangiano,

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.17)$$

es invariante bajo el grupo de transformaciones $O(N)$ (grupo de rotaciones en N dimensiones que posee $\frac{N(N-1)}{2}$ generadores). Por ejemplo, si después del rompimiento espontáneo el nuevo grupo de simetría resulta ser $O(N-1)$, tendremos que permanecerán $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ simetrías. El número de simetrías rotas es la diferencia, $N-1$, número que, como se mencionó, está asociado con las partículas sin masa que aparecen.

El teorema de Goldstone establece que para cada simetría continua, global, rota espontáneamente, la teoría debe de contener una partícula sin masa. Los campos sin masa que surgen a través de un rompimiento de simetría espontáneo son llamados bosones de Goldstone.

Veamos como deducimos esta propiedad para campos escalares. Consideremos una teoría con los campos $\phi^i(x)$, con una densidad Lagrangiana de la forma

$$L = (\text{términos con derivadas}) - V(\phi), \quad (1.18)$$

que es invariante ante transformaciones activas de simetría. El estado de vacío del sistema corresponde a una configuración de mínima energía, independiente de las coordenadas para garantizar la invariancia ante traslaciones de la teoría resultante. Es posible mostrar que los términos cinéticos de L con derivadas no contribuyen al mínimo, con lo cual basta considerar sólo el potencial para obtener el vacío correspondiente.

Sea ϕ_0^a un campo constante que minimiza V , tal que,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} \right)_{\phi^a(x)=\phi_0^a} = 0. \quad (1.19)$$

A continuación expandimos alrededor de este mínimo, encontrando,

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^a(\phi - \phi_0)^b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right)_{\phi_0} + \dots \quad (1.20)$$

El coeficiente del término cuadrático está dado por,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0} = m_{ab}^2, \quad (1.21)$$

que es una matriz simétrica cuyos eigenvalores dan la masa a los campos. Estos eigenvalores no pueden ser negativos, dado que ϕ_0 es un mínimo.

Para probar el teorema de Goldstone, debemos mostrar que para cualquier simetría continua de la densidad Lagrangiana, que no es simetría para ϕ_0 , esta matriz de masas posee un eigenvalor nulo.

Una transformación de simetría general tiene la forma,

$$\phi^a \rightarrow \phi^a + \alpha \Delta^a(\phi), \quad (1.22)$$

donde α es un parámetro infinitesimal y Δ^a es alguna función de todas las ϕ 's.

La condición de invarianza para el potencial bajo la transformación de simetría (1.22) puede ser escrita como,

$$V(\phi^a) = V(\phi^a + \alpha \Delta^a(\phi)) \quad \implies \quad \Delta^a(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi^a} V(\phi) = 0. \quad (1.23)$$

Derivando respecto a ϕ^b , y tomando $\phi = \phi_0$ resulta,

$$0 = \left(\frac{\partial \Delta^a}{\partial \phi^b} \right)_{\phi_0} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} \right)_{\phi_0} + \Delta^a(\phi_0) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right)_{\phi_0}. \quad (1.24)$$

El primer término se anula dado que ϕ_0 es un mínimo de V , entonces el segundo término debe anularse de igual manera. Si la transformación mantiene invariante ϕ_0 (es decir, si la simetría respeta al estado base), entonces $\Delta^a(\phi_0) = 0$ y esta relación es trivial. Un rompimiento espontáneo de simetría es precisamente cuando $\Delta^a(\phi_0) \neq 0$; en este caso $\Delta^a(\phi_0)$ es nuestro deseado eigenvector con eigenvalor cero, siendo el eigenvector el bosón de Goldstone y el eigenvalor cero la masa nula asociada a dicho bosón.

1.8. Violación de las simetrías de Lorentz y CPT

Una vez conocidas las motivaciones que fueron presentadas en la Introducción junto con la explicación de los conceptos previos, es conveniente mostrar algunos modelos y esquemas donde se incorpora la posibilidad de tener una violación de la simetría de Lorentz y/o CPT. Lo siguiente tiene como único objetivo mencionar distintas aproximaciones actuales que abordan este concepto.

1.8.1. Relaciones de Dispersión modificadas

Una de las más simples aproximaciones es considerar que los efectos debidos a la violación de Lorentz modifican la relación de dispersión usual $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ a una relación más general de la forma $E^2 = F(\vec{p}, m)$. Con el objetivo de describir situaciones en las que $p_i \ll m$, es natural expandir la función $F(\vec{p}, m)$ considerando

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 + M f_i^{(1)} p_i + f_{ij}^{(2)} p_i p_j + \frac{f_{ijk}^{(3)}}{M} p_i p_j p_k + \dots, \quad (1.25)$$

donde las funciones $f^{(n)}$ son coeficientes cuya dimensión depende del orden de aproximación empleado y del tipo de partícula, y M denotando una masa cuya escala está asociada con la violación de Lorentz. Los coeficientes $f^{(n)}$ se consideran estar ampliamente suprimidos o acotados con el objetivo de que la violación de Lorentz se presente como un efecto muy pequeño. Notemos que para $n \geq 3$ esto será satisfecho siempre que $p_i \ll M$ si $f^{(n)}$ es de orden 1, esto debido al inverso de la masa M que aparece acompañando a dichos términos, por lo tanto, no se requiere de un mecanismo especial para que estos sean suprimidos. Es de notar que términos con potencias impar en \vec{p} tienden a tener problemas con la invariancia de coordenadas, causalidad y/o positividad, con lo cual suelen omitirse [18]. Algunos modelos en la literatura consideran que las violaciones de Lorentz conservan la invariancia rotacional, modificando (1.25) a

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 + M f^{(1)} |\vec{p}| + f^{(2)} \vec{p}^2 + \frac{f^{(3)}}{M} |\vec{p}|^3 + \dots \quad (1.26)$$

Un ejemplo de lo anterior puede verse en Ref. [19].

1.8.2. Relatividad Especial Doble o Deformada

Relatividad Especial Doble (DSR), es una idea desarrollada recientemente [20] en la cual se asume que las transformaciones de Lorentz actúan sobre el momento cuadridimensional en una forma modificada tal que se mantiene invariante la velocidad de la luz c junto con una escala de energía especial E_{DSR} . La energía y momento físico son tomados a ser

$$E = \frac{\epsilon}{1 + \lambda_{DSR}\epsilon}, \quad \vec{p} = \frac{\vec{\pi}}{1 + \lambda_{DSR}|\vec{\pi}|}, \quad (1.27)$$

donde $\lambda_{DSR} = E_{DSR}^{-1}$, ϵ y π corresponden a la pseudo-energía y pseudo-momento, respectivamente, los cuales transforman de manera normal bajo “boosts” de Lorentz. La relación de dispersión del modelo se convierte en

$$E^2 - \vec{p}^2 = \frac{m^2(1 - \lambda_{DSR}E)^2}{(1 - \lambda_{DSR}m)^2}. \quad (1.28)$$

1.8.3. Geometrías no conmutativas

Se considera un espacio-tiempo donde las coordenadas son cantidades que no conmutan [21]:

$$[x_\alpha, x_\beta] = \frac{i}{\Lambda_{NC}} \Theta_{\alpha\beta}. \quad (1.29)$$

Aquí $\Theta_{\alpha\beta}$ es un tensor que denota el carácter no conmutativo de la teoría y Λ_{NC} es una escala de energía.

Una teoría de campo cuántico no conmutativa puede ser construida tomando una teoría de campo cuántico ordinaria y reemplazando la multiplicación estándar por productos de Moyal:

$$f \star g(x) = \exp(\frac{1}{2}i\Theta^{\mu\nu}\partial_{x^\mu}\partial_{y^\nu})f(x)g(y)|_{x=y}. \quad (1.30)$$

La definición de transformaciones de norma debe ser adaptada en una manera similar.

Es posible expresar los resultados de una teoría de campo no conmutativa en función de los obtenidos en una teoría de campo conmutativa mediante el llamado mapeo de Seiberg-Witten [22]. Éste expresa los campos no conmutativos en términos de los campos de norma estándares. Por ejemplo, aplicando este mapeo a la versión de QED no conmutativa uno obtiene al orden más bajo en $1/\Lambda_{NC}$ la siguiente expresión:

$$S = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{q}{8} \frac{\Theta^{\alpha\beta}}{\Lambda_{NC}} \left[-i F_{\alpha\beta} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi \right. \\ \left. + 2i F_{\alpha\mu} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\beta \psi + 2m F_{\alpha\beta} \bar{\psi} \psi - 4F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} F^{\mu\nu} + F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (1.31)$$

Los efectos debidos a la violación de Lorentz son en principio sensibles a experimentos y pueden ser acotados.

Un estudio perturbativo de la dinámica de teorías de campo no conmutativa revela que a altas energías partículas virtuales en lazos producen no analiticidad, lo cual cuestiona la consistencia a bajas energías de la acción efectiva [23]. Las teorías de norma supersimétricas exhiben un mejor comportamiento en el infrarrojo [24]. Esto ha sido objeto de estudio recientemente.

1.8.4. Modelo Estándar Extendido

Otra manera de abordar el concepto de violación a la invariancia de Lorentz (LIV) y/o CPT es mediante una teoría efectiva que pueda ser verificada experimentalmente con la medición de cantidades asociadas a los efectos que se puedan presentar debidos a estas violaciones. Ahora, ¿cómo debería ser un esquema adecuado para describir LIV?. Podemos listar algunos criterios generales que deben ser satisfechos:

- *Independencia del observador*: La física que describe el modelo debe ser independiente de las transformaciones de coordenadas, esto es, un cambio de un sistema de referencia a otro debe corresponder a la misma situación física.
- *Realismo*: El esquema debe contener la física conocida, permitiendo incorporar una adecuada parametrización de los efectos LIV, los cuales se asumen como pequeñas modificaciones.
- *Generalidad*: El esquema debe ser idealmente tan general como sea posible, con el objeto de maximizar la búsqueda de nuevos efectos.

Un esquema que se construye para satisfacer todos estos criterios es el denominado Modelo Estándar Extendido (SME) [2, 3], el cual es una teoría de campos efectiva que amplía al Modelo Estándar y la Relatividad General considerando coeficientes que rompen la simetría de Lorentz, y que a su vez controlan la magnitud de dichos efectos. También pueden incluirse requerimientos adicionales como invariancia de norma, localidad, estabilidad y propiedades de renormalización.

En principio el SME incluye términos con dimensión de masa a una potencia arbitraria. Sin embargo, imponiendo criterios de renormalización por conteo de potencias la teoría se restringe a términos de dimensión cuatro. Añadiendo a esto el requisito de invariancia de norma se construye el denominado Modelo Estándar Extendido Mínimo (mSME). El mSME contiene un número finito de parámetros que producen LIV, mientras que el SME contiene un número no finito. Tanto el mSME como el SME producen términos que violan la invariancia de Lorentz como la simetría CPT. El estudio dentro de este esquema puede llevarse a cabo haciendo la separación por distintos sectores, por ejemplo, fermiónico, Higgs, fotones, etc.. La elección de cuando se consideran las correspondientes violaciones a cada sector dependerá del tipo de experimento que se desea realizar.

Cabe señalar que el SME es un esquema donde la violación de Lorentz es motivada vía un rompimiento espontáneo de simetría (SSB), en el cual los tensores no dinámicos que se incluyen en los acoplamientos que se añaden al Modelo Estándar y Relatividad General marcan direcciones fijas en el espacio, las cuales inducen el correspondiente rompimiento de simetría en un sistema de referencia dado. Se asume que estos campos tensoriales surgen de un valor de expectación no nulo del estado de vacío de campos más básicos que pertenecen a un modelo más fundamental, tal como teoría de cuerdas [25].

1.9. Fotones y Gravitones como bosones de Goldstone

La existencia de partículas sin masa usualmente es explicada por el requerimiento de preservar la invariancia de norma. En el caso de la electrodinámica, la masa nula del fotón se atribuye a la imposición de la invariancia de norma U(1); en el caso de la relatividad general, la masa nula del gravitón tiene su origen en la invariancia bajo difeomorfismos.

Uno de los primeros en abordar un modelo alternativo para explicar estas partículas con masa nula fue Y. Nambu [26]. Su propuesta es que el fotón puede ser visto como un bosón de Goldstone asociado con el rompimiento espontáneo de la invariancia de Lorentz.

Dentro de los modelos recientes que incorporan esta idea se encuentran los llamados modelos de abeja (bumblebee models), como el siguiente. Consideremos el Lagrangiano para el campo vectorial A_μ ,

$$L = -\frac{1}{4}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - V(\bar{A}_\mu, a_\mu), \quad (1.32)$$

donde $A_\mu = \bar{A}_\mu + a_\mu$, $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ y \bar{A}_μ es un valor de expectación del vacío (VEV) no nulo e independiente de las coordenadas del espacio-tiempo, el cual producirá el rompimiento espontáneo de la invariancia de Lorentz.

Aquí se considera el término cinético usual de Maxwell, el cual por sí mismo preserva la invariancia de norma, lo cual llevará a la teoría a reproducir la electrodinámica estándar cuando los términos del potencial que producen el rompimiento espontáneo tiendan a cero.

Los bosones de Goldstone pueden ser identificados alternativamente a partir de la acción de transformaciones de Lorentz infinitesimales, cuyos parámetros se hacen dependientes de las

coordenadas [27], actuando sobre el estado de vacío,

$$a_\mu = -\Theta_\mu{}^\nu(x)\bar{A}_\nu. \quad (1.33)$$

En esta formulación los campos de Goldstone están contenidos en $\Theta_{\mu\nu}(x)$, lo cual se verifica observando que, bajo esta parametrización, a_μ es ortogonal al estado de vacío \bar{A}_μ , es decir, $a_\mu\bar{A}^\mu = -\Theta_\mu{}^\nu(x)\bar{A}_\nu\bar{A}^\mu = 0$ (por la antisimetría de $\Theta_{\mu\nu}$) y a su vez la propiedad en la Ecu. (1.2) garantiza que no aparecen términos cuadráticos de $\Theta_\mu{}^\nu(x)$ en el potencial porque $a_\mu a^\mu = \Theta_\mu{}^\nu(x)\Theta^{\mu\alpha}(x)\bar{A}_\nu\bar{A}_\alpha = \bar{A}_\nu\bar{A}^\nu$, y por ende los campos contenidos en $\Theta_\mu{}^\nu(x)$ son de masa nula. Recordemos que aquí, $\Theta_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico de la forma,

$$[\Theta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -\beta_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\beta_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\beta_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

donde β_i son las rapidezces infinitesimales correspondientes a los “boosts” y θ_i son los correspondientes ángulos infinitesimales a las rotaciones en una transformación de Lorentz estándar, y que ahora se han promovido a campos que dependen de las coordenadas x^μ .

Dado que el rompimiento de simetría ocurre para los generadores que no dejan invariante al vacío \bar{A}_ν , es decir, aquéllos para los cuales ocurre que $\Theta^{\mu\nu}\bar{A}_\nu \neq 0$, podemos deducir que si elegimos un vector tipo espacio (espacialoide) de la forma,

$$\bar{A}^\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

éste preservará los “boosts” en las direcciones x,y junto con la rotación alrededor del eje z, por lo que el rompimiento de simetría estará dado por $SO(1,3) \rightarrow SO(1,2)$; mientras que si tomamos un vector tipo tiempo (temporaloide) de la forma,

$$\bar{A}^\nu = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

el rompimiento será de $SO(1,3) \rightarrow O(3)$, dado que este vacío rompe la invariancia de los tres “boosts”, manteniendo las rotaciones.

Ambos subgrupos de $SO(1,3)$ darán origen a tres bosones de Goldstone. Recordemos que la aparición de bosones de Goldstone para simetrías continuas está asociada con el número de simetrías que perdemos. A su vez sabemos que las dimensiones de los grupos en cuestión están dadas por 6 para $SO(1,3)$ y 3 para $SO(1,2)$ y $O(3)$.

En la Ref. [27] se hace la afirmación que, al orden más bajo en a_μ , cada elección de un VEV puede interpretarse como la elección de una norma particular en electrodinámica. En

el caso temporaloide, la elección del VEV es equivalente a la norma de Coulomb, en la cual se escoge el potencial escalar cero ($A_0 = 0$). Análogamente, la elección del VEV espacialoide está asociada con la norma axial.

El caso del gravitón, aunque similar, no es tan sencillo porque ahora tenemos un tensor simétrico de segundo rango que adquiere un VEV no nulo. Una partícula de espín 2 sin masa propagándose tiene dos grados de libertad. Dado que el grupo de Lorentz tiene 6 generadores, en principio habrá suficientes bosones de Goldstone para reproducir al gravitón. Sin embargo, el procedimiento no es tan automático como en el caso del fotón. Más aún, se puede considerar el caso donde se introduce la invariancia ante difeomorfismos, cuya violación también implica una violación de Lorentz local, con lo cual se puede demostrar que pueden aparecer hasta 10 modos de Goldstone [28]. Como en el caso del fotón, en la Ref. [27] se afirma que, la elección de un VEV particular está asociado con una norma fija en la teoría al orden más bajo. Así mismo, en este escenario se debe de tomar fuertemente en consideración la geometría del espacio-tiempo para establecer que tipo de dinámica resulta.

1.10. Electrodinámica lineal

Dentro de la electrodinámica lineal, las ecuaciones que rigen la dinámica del campo están dadas por las ecuaciones de Maxwell, en el Sistema Internacional de Unidades (SI):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.37)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.38)$$

donde $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \rho, \epsilon_0, \mu_0$ denotan el campo eléctrico, la intensidad de campo magnético, la densidad de corriente, la densidad de carga eléctrica, la constante de permitividad eléctrica y la constante de permeabilidad magnética, respectivamente.

En presencia de medios materiales, se introducen los vectores,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (1.39)$$

los cuales usualmente son llamados de desplazamiento eléctrico e inducción magnética, respectivamente. Aquí \mathbf{P} y \mathbf{M} son los vectores de polarización y magnetización del medio, respectivamente. Las ecuaciones para el campo electromagnético en medios materiales pueden ser escritas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.40)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.41)$$

donde ρ_f y \mathbf{J}_f designan las cargas y corrientes libres. Estas ecuaciones deben ser complementadas por apropiadas relaciones constitutivas, es decir, dar a \mathbf{D} y \mathbf{H} en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} . Éstas dependen de la naturaleza del material.

Cuando estas relaciones son lineales, tales como $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$ los medios son llamados medios materiales lineales.

Ahora bien, recordemos que definimos las susceptibilidades del medio como aquellas que indican la respuesta de éste ante un campo eléctrico o magnético. En una versión más general encontramos que estas susceptibilidades están descritas por los tensores constantes ϵ_{ij} y μ_{ij} , tales que en general tendremos,

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_{ij} H_j. \quad (1.42)$$

1.11. Electrodinámica no lineal

En los fenómenos electromagnéticos que ocurren en nuestra vida diaria (a grandes escalas) no tenemos evidencia de que el campo electromagnético en medios materiales viole el principio de superposición lineal. Es quizá en el nivel subatómico en el cual podrían esperarse desviaciones de este comportamiento. A medida que partículas cargadas se acercan unas a otras, sus campos eléctricos se hacen enormes. Es por ello que en la electrodinámica estándar algunas ocasiones aparecen infinitos, lo cual también está asociado con el concepto de carga puntual. La electrodinámica no lineal surgió como un modelo que evita este tipo de singularidades. Es natural, a fin de evitar los infinitos de las autoenergías de las partículas puntuales, pensar que ocurre una especie de saturación del campo, esto es, que la magnitud del campo electromagnético tiene un límite superior [29]. Esta última condición junto con la hipótesis de un radio finito para el electrón dió lugar a modelos de la electrodinámica no-lineal desarrollados por Born-Infeld [29]. En este trabajo consideraremos el modelo de Plebanski [30] como una de las alternativas para describir la electrodinámica no-lineal. A continuación lo revisamos brevemente. En este modelo encontramos que la acción está dada por,

$$S(P^{\mu\nu}, A_\alpha) = \int d^4x \left(\frac{1}{2} P^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - V(P, \check{Q}) + J^\alpha A_\alpha \right), \quad (1.43)$$

donde J^α es una densidad de corriente (por el momento externa) y

$$P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu} \quad P = \frac{1}{4} P^{\mu\nu} P_{\mu\nu} \quad \check{Q} = \frac{i}{4} \check{P}_{\mu\nu} P^{\mu\nu}. \quad (1.44)$$

El dual $\check{P}_{\mu\nu}$ del tensor $P_{\mu\nu}$ está definido como,

$$\check{P}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} P^{\mu\nu}. \quad (1.45)$$

De este modo se tiene que $\check{\check{P}} = 1_{(4x4)}$.

Para evitar violaciones de paridad usualmente se pide que,

$$V = V(P, \check{Q}^2). \quad (1.46)$$

Las ecuaciones de movimiento son,

$$\delta A_\alpha \quad : \quad \partial_\mu P^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.47)$$

$$\delta P^{\mu\nu} \quad : \quad (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 2 \frac{\partial V}{\partial P^{\mu\nu}}. \quad (1.48)$$

En este sentido $P_{\mu\nu}$ define los campos \mathbf{D}, \mathbf{H} y $F_{\mu\nu}$ define \mathbf{E}, \mathbf{B} .

Las relaciones constitutivas están dadas por la ecuación (1.48). Para calcular las ecuaciones de movimiento de A_μ es necesario invertir dichas relaciones, con el objeto de despejar $P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}(F_{\mu\nu})$ y posteriormente sustituirlo en (1.47).

Capítulo 2

Rompimiento Espontáneo de la Simetría de Lorentz inducido por un valor de mínima energía no nulo para la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$

Un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz (SLSB) requiere de un valor de expectación del estado de vacío (VEV) que sea no nulo, el cual es generado por campos tensoriales que seleccionan direcciones privilegiadas en el espacio-tiempo. En relación a esta idea, muchos de los casos discutidos en la literatura consideran a los modos de Goldstone como excitaciones asociadas a un valor propio nulo de la matriz de masa del problema, esto como consecuencia de la interpretación estándar del teorema de Goldstone donde dicha matriz de masa está relacionada a la segunda derivada del potencial, el cual en principio genera el VEV no nulo. En lo que sigue, por abuso de lenguaje, nos referiremos como un VEV o estado de vacío a un mínimo de la energía en la teoría, lo anterior lo aclaramos porque sabemos que clásicamente no tiene sentido referirnos a un VEV o estados de vacío.

En este capítulo se estudia el rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz generado por valores de expectación de estados del vacío no nulos C_μ y $C_{\mu\nu}$ de la intensidad de campo electromagnético en $(1 + 1)$ y $(3 + 1)$ -dimensiones, respectivamente, los cuales surgen de un mínimo del potencial $V(F_{\mu\nu})$ que proviene de una teoría más fundamental. Como veremos esto requiere de la introducción de una electrodinámica no lineal. Un aspecto a destacar es que se usará como variable básica la intensidad de campo electromagnético, en lugar del potencial vectorial, y a partir de éste se definirá el estado de vacío que produce el correspondiente SLSB. Este modelo fue propuesto originalmente en [31], donde algunos límites particulares de la violación de Lorentz fueron discutidos.

Todas las excitaciones de los modelos aquí empleados son de masa nula, con lo cual se requiere de una interpretación alternativa del teorema de Goldstone. La matriz que usualmente es asociada a una matriz de masa cambia a ser una matriz de susceptibilidades generalizadas. El esquema a seguir es el siguiente: en la Sección 2.1 se introducen los modelos de electrodinámica

no lineal, los cuales incorporan un potencial con un VEV no nulo para el estado de vacío que produce el correspondiente SLSB. También se presentan las ecuaciones de movimiento y las condiciones que describen el estado de vacío. En la Sección 2.2 se emplea el método de Dirac en sistemas con constricciones para determinar el número de grados de libertad que contiene cada modelo de acuerdo a su dimensionalidad. En la Sección 2.3 se desarrolla el teorema de Goldstone y se lleva a cabo una interpretación de éste. En la Sección 2.4 se presenta la construcción general de los modos de Goldstone de acuerdo a la elección de un estado de vacío. En la Sección 2.5 se presenta un algoritmo para obtener relaciones entre las susceptibilidades generalizadas. Para concluir, en las Secciones 2.6 y 2.7 se efectúa un estudio sobre la dinámica de los modelos para las dimensionalidades (3+1) y (1+1), respectivamente.

2.1. El modelo

Empezamos a partir de una formulación de electrodinámica no lineal en (3+1)-dimensiones, la cual es alternativa a la que se presenta en Ref. [30] introducida en el Capítulo 1. Ésta presenta la ventaja de que no se requiere invertir las relaciones no lineales que definen los campos \mathbf{E}, \mathbf{B} en términos de \mathbf{D}, \mathbf{H} . El precio que uno tiene que pagar es que el acoplamiento con la corriente electromagnética aparece en una forma no local en la acción cuando no se ha considerado el rompimiento espontáneo de simetría, lo cual es originado por el hecho de que deseamos trabajar con $F_{\alpha\beta}$ como variable inicial, en lugar de A_ν . Nuestras convenciones son las mismas que se presentan en Ref. [32].

La acción es [31],

$$S[F_{\mu\nu}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}V(F_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\partial_\nu X_\mu + F_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \right), \quad (2.1)$$

con

$$J^{\mu\nu} = \int d^4x' [f^\mu(x-x')J^\nu(x') - f^\nu(x-x')J^\mu(x')]. \quad (2.2)$$

La cual es invariante bajo las transformaciones de norma

$$X_\mu \rightarrow X_\mu + \partial_\mu X. \quad (2.3)$$

La función de distribución $f^\mu(x-x')$ fue introducida por Schwinger en su discusión sobre la carga magnética en la descripción de modelos de fuentes electromagnéticas en QED [33], y satisface la propiedad $\partial_\mu f^\mu(x-x') = \delta^{(4)}(x-x')$.

Las ecuaciones de movimiento que surgen de la acción (2.1) bajo las variaciones δX_μ y $\delta F_{\mu\nu}$ son

$$\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \quad 0 = \frac{\partial V}{\partial F_{\alpha\beta}} + \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\partial_\nu X_\mu - J^{\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

respectivamente. Los campos X_μ juegan el rol de multiplicadores de Lagrange e implican la existencia del potencial A^ν para la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$, esto como una consecuencia de

la identidad de Bianchi que se produce por la primera ecuación en (2.4). Los multiplicadores de Lagrange pueden ser eliminados tomando la divergencia de la segunda ecuación en (2.4), dando las ecuaciones no lineales de Maxwell

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial F_{\alpha\beta}} \right) = J^\beta(x). \quad (2.5)$$

Aquí hemos usado explícitamente la conservación de la corriente $\partial_\beta J^\beta = 0$, la cual es recuperada a partir de la Ecu. (2.5). Para hacer contacto con la formulación en la Ref. [30] presentada en el Capítulo 1 hacemos la identificación del tensor $P^{\alpha\beta} \rightarrow \partial V / \partial F_{\alpha\beta}$, el cual contiene los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} . Después de imponer la identidad de Bianchi para la intensidad de campo en la Ecu. (2.1) recuperamos la acción local

$$S(A_\alpha) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}V(F_{\alpha\beta}) + J^\mu A_\mu \right), \quad (2.6)$$

que reproduce las ecuaciones de movimiento (2.5). La forma más general del potencial $V(F_{\mu\nu})$ será una función arbitraria de los dos invariantes $F = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ y $G = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ [34]. Notemos que las elecciones $B = \frac{1}{2}F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$; $X = X_\mu dx^\mu$; $F = dX = \partial_\nu X_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu$ nos permiten reescribir la Ecu. (2.1) como la acción de una teoría BF [35] modificada

$$S(B, F) = \int B \wedge F + S_{V(B)} + S_{J,B}. \quad (2.7)$$

Ahora consideramos el rompimiento espontáneo de simetría que surge a partir de la acción (2.1), el cual se obtiene expandiendo los campos alrededor de la configuración constante (y distinta de cero) del campo $C_{\mu\nu}$ que minimiza la energía. El hecho de considerar configuraciones constantes para el estado de vacío es debido a que se desea conservar una teoría que sea invariante bajo traslaciones espaciales, y con lo cual la conservación de la energía se cumple como una consecuencia del teorema de Noether. Para realizar lo anterior obtenemos el tensor de energía-momento, asociado a $F_{\mu\nu}$, que corresponde a la acción en la Ecu. (2.1), el cual es

$$T^\mu{}_\nu = \left(V(F_{\alpha\beta}) + \tilde{F}_{\kappa\alpha} \partial^\kappa X^\alpha \right) \delta^\mu_\nu - \tilde{F}^\mu{}_\alpha \partial_\nu X^\alpha, \quad (2.8)$$

donde hemos empleado que

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu F_{\alpha\beta})} \partial_\nu F_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\nu} L, \quad (2.9)$$

porque a nivel de la acción (2.1) la variable básica es aún $F_{\mu\nu}$. Esta cantidad es conservada ($\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$) cuando se hace uso de las ecuaciones de movimiento (2.4). La correspondiente energía será

$$E(F, X) = \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left(V(F_{\alpha\beta}) + \tilde{F}_{i\alpha} \partial^i X^\alpha \right). \quad (2.10)$$

El siguiente paso es encontrar las condiciones que determinan las condiciones del mínimo en la energía. Con lo cual requerimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta E}{\delta F^{\alpha\beta}} = \frac{\partial V}{\partial F^{\alpha\beta}} + \epsilon_{i\alpha\alpha\beta} \partial^i X^\alpha, \\ 0 &= \frac{\delta E}{\delta X^\alpha} = -\partial^i \tilde{F}_{i\alpha}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

y buscamos soluciones constantes $(F_{\alpha\beta})_M = C_{\alpha\beta}$, $(X_\alpha)_M = C_\alpha$ con el objetivo de preservar la invariancia traslacional. De esta forma la condición que satisface el mínimo de la teoría cumple que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial F^{\alpha\beta}} \right)_{F=C} = 0, \quad (2.12)$$

Una vez que el vacío ha sido determinado lo siguiente es expandir alrededor de éste tomando

$$F_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}, \quad X_\alpha = C_\alpha + \bar{X}_\alpha, \quad (2.13)$$

lo cual define la intensidad de campo física del fotón: $f_{\alpha\beta}$. La expansión anterior lleva a la acción

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \bar{V} - \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \partial_\nu \bar{X}_\mu + f_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right), \quad (2.14)$$

donde hemos omitido constantes y derivadas totales (asumiendo que \bar{X}_μ va a cero suficientemente rápido en el infinito). Aquí

$$\bar{V} = \bar{V}(f_{\alpha\beta}) = V(C_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}). \quad (2.15)$$

Las ecuaciones de movimiento son las mismas que se obtienen de la Ecu. (2.4) con los reemplazos $V \rightarrow \bar{V}$, $F_{\alpha\beta} \rightarrow f_{\alpha\beta}$, $X_\alpha \rightarrow \bar{X}_\alpha$.

Los multiplicadores de Lagrange pueden ser determinados, hasta una transformación de norma, a partir de las ecuaciones correspondientes en (2.4). Su eliminación conduce a las ecuaciones de Maxwell finales

$$\Sigma_{\alpha\beta\mu\nu}(f) \partial^\alpha f^{\mu\nu} = J_\beta, \quad \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\alpha f^{\mu\nu} = 0, \quad (2.16)$$

donde hemos introducido la susceptibilidad no lineal $\Sigma_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial f^{\alpha\beta} \partial f^{\mu\nu}}$.

Para verificar que las condiciones de mínimo se conservan después de la eliminación de los multiplicadores \bar{X} veamos lo siguiente: por un lado realizando la expansión directamente en la energía (2.10) implica que

$$E = E(C_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}(x), C_\alpha + \bar{X}_\alpha) = \int d^3x \left(\bar{V} + \tilde{f}_{i\alpha} \partial^i \bar{X}^\alpha \right). \quad (2.17)$$

Por otro lado, si primero eliminamos los multiplicadores \bar{X} a nivel de la acción obteniendo Ecu. (2.6), arribamos a la energía

$$\mathcal{E} = \int d^3x t_{00} = \int d^3x \bar{V}(f_{\alpha\beta}) - f^{0i} \frac{\partial \bar{V}}{\partial f^{0i}}, \quad (2.18)$$

donde se empleó

$$t^\mu{}_\nu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial_\nu A_\alpha - \eta_{\mu\nu} L, \quad (2.19)$$

porque al ser eliminados los multiplicadores \bar{X} la variable básica será A_μ , esto debido a la identidad de Bianchi que satisface $F_{\mu\nu}$. Notemos que para obtener (2.18) a partir de (2.19) se hizo uso de que $\partial_0 A_\alpha = f_{0\alpha} + \partial_\alpha A_0$ más una integración por partes junto con las ecuaciones de movimiento $\partial_\alpha \frac{\partial \bar{V}}{\partial f_{0\alpha}} = 0$, esto para eliminar el término que va con $\partial_\alpha A_0$.

Nos gustaría asegurarnos que la energía $E(f, \bar{X})$ corresponde a la energía $\mathcal{E} = \int d^3x t_{00}$ cuando los multiplicadores \bar{X} son eliminados en la Ecu. (2.17) empleando sus ecuaciones de movimiento. Escribiendo el segundo término en (2.17) en su descomposición (3 + 1) obtenemos la siguiente expresión para la energía

$$E(f, \bar{X}) = \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left[\bar{V}(f_{\alpha\beta}) + \mathcal{B}_i \partial^i \bar{X}^0 + \epsilon_{ikm} \mathcal{E}^m \partial^i \bar{X}^k \right]. \quad (2.20)$$

Aquí \mathcal{E}_m y \mathcal{B}_i son los campos eléctricos y magnéticos que definen la intensidad de campo $f_{\alpha\beta}$. Observemos que bajo la integral el segundo término del lado derecho es cero cuando se realiza una integración por partes y se toma que \bar{X}^0 va a cero en el infinito. El siguiente paso es obtener \bar{X}^k , recalando que estos campos están determinados hasta una transformación de norma. De la ecuación (2.4) se sigue que

$$(\partial_\rho \bar{X}_\sigma - \partial_\sigma \bar{X}_\rho) = \epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial f_{\alpha\beta}}. \quad (2.21)$$

Ahora derivando la expresión anterior respecto a ∂_ρ y eligiendo la norma de Coulomb $\partial_i \bar{X}^i = 0$, tenemos

$$\bar{X}^k = \epsilon^{krp} \frac{1}{\partial^2} \partial_p \frac{\partial \bar{V}}{\partial \mathcal{E}^r}, \quad \partial^2 = \partial^i \partial_i, \quad (2.22)$$

fuera de las fuentes $J^{\alpha\beta}$. Sustituyendo en la expresión (2.20) produce

$$E(f, \bar{X}) = \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left[\tilde{V}(f_{\alpha\beta}) - \mathcal{E}^r \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathcal{E}^r} + \mathcal{E}^p \frac{1}{\partial^2} \partial_p \left(\partial^r \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathcal{E}^r} \right) \right]. \quad (2.23)$$

El último término desvanece por virtud de la ecuación de movimiento (2.5) para $\beta = 0$ (recordando que estamos trabajando fuera de las fuentes). De esta forma, después de que se eliminan los multiplicadores \bar{X} , la energía E se reduce a la energía \mathcal{E} de la misma manera que lo hacen las ecuaciones de Maxwell modificadas. A su vez, lo anterior también muestra que cuando los multiplicadores \bar{X} son eliminados las condiciones de mínimo se preservan después de la expansión en la Ecu. (2.13).

2.2. Grados de libertad

En la sección anterior se presentó una manera alternativa de definir modelos de electrodinámica no lineal, así mismo, se mostró que es posible entender dichos modelos como una

teoría BF modificada que difiere del caso estándar por la introducción de términos asociados al rompimiento espontáneo de simetría.

En esta sección se realiza el cálculo explícito del número de grados de libertad que contienen los modelos anteriores, esto con la finalidad de establecer si es posible que en un límite reproduzcan teorías de electrodinámica estándar. Como se mostrará más adelante, después de que el rompimiento de simetría se produzca, el número de grados de libertad puede ser diferente al inicial, esto en virtud de que la aparición de modos de Goldstone puede introducir restricciones adicionales dependiendo de si se lleva a cabo alguna aproximación o no, y el orden a la cual se realiza.

El hecho de que en la acción (2.6) aparezcan coordenadas y no las velocidades asociadas a éstas hace que la teoría contenga constricciones, por ende el correcto conteo de los grados de libertad debe ser hecho con el método de Dirac [36]. Adicionalmente, a partir de este esquema es posible determinar si la teoría es invariante bajo transformaciones de norma, es decir, si contiene constricciones de primera clase.

La ausencia o presencia de la invariancia de norma hace que los casos (1 + 1) y (3 + 1)-dimensional deban ser tratados separadamente. A continuación mostramos ambas situaciones.

2.2.1. Caso (1 + 1)-dimensional

El caso (1 + 1)-dimensional corresponde a las reducciones

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \Phi_\mu, \quad X_\mu \rightarrow X, \quad \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow \epsilon_{\mu\alpha}, \quad (2.24)$$

y definido por la densidad Lagrangiana

$$L(X, \Phi_\mu) = \Phi_\nu \epsilon^{\nu\mu} \partial_\mu X - V(\Phi^\mu) - \Phi_\mu J^\mu, \quad (2.25)$$

donde $\mu = 0, 1$, con la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ y $\epsilon^{01} = 1$. Dado que deseamos trabajar con una teoría invariante bajo transformaciones de Lorentz de observador, debemos tomar el potencial de la forma $V = V(\Phi^\mu \Phi_\mu)$, análogamente esto será para el caso (3 + 1)-dimensional. Iniciando con la densidad Lagrangiana

$$L = (\partial_0 \Phi_1) X - (\partial_1 \Phi_0) X - V(\Phi^2) - \Phi_\nu J^\nu, \quad (2.26)$$

Las variables X , Φ_0 y Φ_1 están asociadas con los momentos canónicos Π_X , Π_0 y Π_1 , respectivamente, mediante la definición estándar

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i}, \quad (\dot{\phi} = \partial_0 \phi), \quad (2.27)$$

siendo ϕ_i alguna de las variables previamente mencionadas. El álgebra del modelo está definida por los paréntesis de Poisson no nulos

$$\{X, \Pi_X\} = 1, \quad \{\Phi_0, \Pi_0\} = 1, \quad \{\Phi_1, \Pi_1\} = 1. \quad (2.28)$$

Dado que los momentos canónicos asociados a X y Φ_0 son nulos, el Hamiltoniano canónico será

$$\begin{aligned} H_c &= \Pi_1 \dot{\Phi}_1 - L, \\ &= \partial_1 \Phi_0 X + V(\Phi^2) + \Phi_\nu J^\nu. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Las constricciones primarias son

$$\Psi_0 = \Pi_0 \approx 0, \quad \Psi_1 = \Pi_1 - X \approx 0, \quad \Psi_X = \Pi_X \approx 0, \quad (2.30)$$

donde aquí el símbolo \approx denota débilmente igual a cero. A partir de lo anterior podemos escribir el Hamiltoniano extendido como

$$H_E = \partial_1 \Phi_0 X + V(\Phi^2) + \Phi_\nu J^\nu + \lambda \Pi_0 + \rho (\Pi_1 - X) + \kappa \Pi_X, \quad (2.31)$$

donde λ , ρ y κ son multiplicadores de Lagrange. Con el objeto de que las constricciones se mantengan válidas para todo tiempo, debemos asegurar que su evolución temporal permanezca sobre la superficie inicial de restricción. Calculando la evolución temporal de Ψ_1 y Ψ_X

$$\dot{\Psi}_1 = \{\Psi_1, H_E\} = - \left(\frac{\partial V}{\partial \Phi^1} + J_1 + \kappa \right) \approx 0, \quad \dot{\Psi}_X = \{\Psi_X, H_E\} = -\partial_1 \Phi_0 + \rho \approx 0, \quad (2.32)$$

encontramos que los multiplicadores κ y ρ se fijan de la siguiente manera

$$\kappa = - \left(\frac{\partial V}{\partial \Phi^1} + J_1 \right), \quad \rho = \partial_1 \Phi_0. \quad (2.33)$$

La evolución temporal de Ψ_0 genera la restricción secundaria

$$\Lambda_0 = \dot{\Psi}_0 = \{\Psi_0, H_E\} = \partial_1 X - \frac{\partial V}{\partial \Phi_0} - J_0 \approx 0, \quad (2.34)$$

y a su vez, la evolución de esta última

$$\dot{\Lambda}_0 = \{\Lambda_0, H_E\} = -\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_0^2} + \partial_1 \kappa - \frac{\partial J^0}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_0 \partial \Phi_1} \approx 0, \quad (2.35)$$

fija el multiplicador λ

$$\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_0^2} = \partial_1 \kappa - \frac{\partial J^0}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_0 \partial \Phi_1}. \quad (2.36)$$

El método de Dirac se detiene en este paso.

Por otro lado, tenemos que $V = V(\Phi^2)$, y por lo tanto

$$\partial^2 V / \partial \Phi_0^2 = 2V' + 4\Phi_0^2 V'', \quad (2.37)$$

donde V' denota derivada respecto al argumento Φ^2 . La cantidad anterior jugará un papel esencial para determinar que las constricciones son de segunda clase.

Resumiendo, hay únicamente 4 constricciones dadas por las Ecs. (2.30) y (2.34). El álgebra que satisfacen estas constricciones es

$$\left[\{\Omega(x), \Omega(y)\} \right] = \begin{bmatrix} & \Psi_0 & \Psi_1 & \Psi_X & \Lambda_0 \\ \Psi_0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_0^2} \delta^2 \\ \Psi_1 & 0 & 0 & -\delta^2 & \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_0 \partial \Phi_1} \delta^2 \\ \Psi_X & 0 & \delta^2 & 0 & -\partial_1 \delta^2 \\ \Lambda_0 & -\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_0^2} \delta^2 & -\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_0 \partial \Phi_1} \delta^2 & \partial_1 \delta^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

donde $\Omega(x)$ denota alguna de las constricciones marcadas en el renglón o columna de la Ecu. (2.38) y $\delta^2 = \delta^2(x-y)$. El determinante de la matriz anterior es proporcional a $(4V''\Phi_0^2 + 2V')^2$, el cual pedimos que sea distinto de cero. Esto implica que todas las constricciones son de segunda clase y refleja el hecho de que la teoría no tiene invariancia de norma. El número de grados de libertad es $\#d.o.f. = \frac{1}{2}[\text{variables en el espacio fase-constricciones de segunda clase} - 2 \times \text{constricciones de primera clase}] = \frac{1}{2}(2 \times 3 - 4) = 1$.

Es conocido que el caso estándar de electrodinámica en $(1+1)$ -dimensiones no tiene grados de libertad, por lo cual, el modelo que estamos empleando en este trabajo no reproduce directamente el caso estándar en esta dimensionalidad. Sin embargo, como veremos a continuación, en el caso de mayor interés, $(3+1)$ -dimensiones, los grados de libertad del caso estándar y el correspondiente modelo aquí empleado coinciden, por lo tanto, se espera que dicho modelo pueda reproducir la electrodinámica estándar en algún límite. Bajo este esquema se podría dar una interpretación a los modos de Goldstone, y así mismo, relacionarlos con los grados de libertad de la teoría.

2.2.2. Caso $(3+1)$ -dimensional

El caso $(3+1)$ -dimensional se trabaja en el mismo esquema haciendo las modificaciones adecuadas. El Lagrangiano, salvo un factor global de $\frac{1}{2}$ y fuera de las fuentes, está dado por

$$\begin{aligned} L &= \phi_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha X_\beta + V(\phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}), \\ &= \tilde{\phi}^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_\beta + V(\tilde{\phi}_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{\mu\nu}), \\ &= -(\partial_\alpha \tilde{\phi}^{\alpha\beta}) X_\beta + V(\tilde{\phi}), \\ &= -(\partial_0 \tilde{\phi}^{0\beta}) X_\beta - (\partial_i \tilde{\phi}^{i\beta}) X_\beta + V(\tilde{\phi}), \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde se ha definido $\tilde{\phi}^{\alpha\beta} = \phi_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_{\mu\nu} \tilde{\phi}^{\mu\nu}$. Las 10 variables de la teoría son: X_ν (4 variables) y $\tilde{\phi}_{\mu\nu}$ (6 variables), las cuales hemos dividido en $\tilde{\phi}_{0i}$ y $\tilde{\phi}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Nótese que $\tilde{\phi}_{\mu\nu}$ (y en particular $\tilde{\phi}_{ij}$) es un objeto antisimétrico. Los correspondientes momentos conjugados a las variables X_0 , X_ν , $\tilde{\phi}_{0i}$ y $\tilde{\phi}_{ij}$ son

$$\pi_0^X = 0, \quad \pi_i^X = 0, \quad \tilde{\pi}_{0i} = -X_i, \quad \tilde{\pi}_{ij} = 0. \quad (2.40)$$

El Hamiltoniano canónico es

$$\begin{aligned} H_c &= \tilde{\pi}_{0i} \partial_0 \tilde{\phi}^{0i} + (\partial_0 \tilde{\phi}^{0i}) X_i + (\partial_i \tilde{\phi}^{i\beta}) X_\beta - V(\tilde{\phi}), \\ &= -X_i \partial_0 \tilde{\phi}^{0i} + (\partial_0 \tilde{\phi}^{0i}) X_i + (\partial_i \tilde{\phi}^{i\beta}) X_\beta - V(\tilde{\phi}), \\ &= (\partial_i \tilde{\phi}^{i\beta}) X_\beta - V(\tilde{\phi}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

A partir de las relaciones en la Ecu. (2.40) junto con H_c obtenido previamente podemos construir el Hamiltoniano extendido

$$H_E = \partial_i \tilde{\phi}^{i\beta} X_\beta - V(\tilde{\phi}) + \lambda \pi_0^X + \beta_i \pi_i^X + \gamma_i (\tilde{\pi}_{0i} + X_i) + \sigma_{ij} \tilde{\pi}_{ij}, \quad (2.42)$$

siendo $\lambda, \beta_i, \gamma_i$ y σ_{ij} multiplicadores de Lagrange. Las relaciones de conmutación fundamentales están dadas por los paréntesis de Poisson no nulos

$$\{X_0, \pi_0^X\} = 1, \quad \{X_i, \pi_j^X\} = \delta_{ij}, \quad \{\tilde{\phi}^{0i}, \tilde{\pi}^{0j}\} = \delta^{ij}, \quad \{\tilde{\phi}_{ij}, \tilde{\pi}_{lm}\} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (2.43)$$

Nuevamente a partir de la Ecu. (2.40) podemos leer que las constricciones primarias son

$$\Delta_1 = \pi_0^X, \quad \Delta_{2i} = \pi_i^X, \quad \Delta_{3ij} = \tilde{\pi}_{ij}, \quad \Delta_{4i} = (\tilde{\pi}_{0i} + X_i). \quad (2.44)$$

El siguiente paso es calcular la evolución de las constricciones primarias con la finalidad de que éstas se preserven. Empezamos calculando la evolución temporal de Δ_1

$$\dot{\Delta}_1 = \{\pi_0^X, H_E\} = -\partial_i \tilde{\phi}^{i0} = -\Gamma_1. \quad (2.45)$$

Lo cual vemos que genera la restricción secundaria Γ_1 , cuya evolución produce

$$\dot{\Gamma}_1 = \partial_i \{\tilde{\phi}^{0i}, H_E\} = \partial_i \gamma_i \approx 0. \quad (2.46)$$

La evolución de Δ_{2i} implica que

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{2i} &= \{\pi_i^X, H_E\} = \{\pi_i^X, \partial^j \tilde{\phi}_{jk} X_k + \gamma_k X_k\}, \\ &= -\partial^j \tilde{\phi}_{ji} - \gamma_i, \end{aligned} \quad (2.47)$$

y de esta manera Δ_{2i} no produce más constricciones fijando el multiplicador γ_i . Observemos que el resultado en la Ecu. (2.47) es consistente con la evolución de Γ_1 , la cual recordemos que es $\dot{\Gamma}_1 = \partial_i \gamma_i \approx 0$. A continuación procedemos con la evolución temporal de Δ_{3ij}

$$\dot{\Delta}_{3ij} = \{\tilde{\pi}_{ij}, H_E\} = \partial_i X_j - \partial_j X_i + 4 \frac{\partial V}{\partial \tilde{\phi}} \tilde{\phi}_{ij} = \Gamma_{3ij}. \quad (2.48)$$

A partir de la evolución temporal de esta restricción secundaria obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{3ij} &= \{\partial_i X_j - \partial_j X_i + 4 \frac{\partial V}{\partial \tilde{\phi}} \tilde{\phi}_{ij}, H_E\}, \\ &= \partial_i \beta_j - \partial_j \beta_i + 4 \{V' \tilde{\phi}_{ij}, \gamma_l \tilde{\pi}_{0l} + \sigma_{lm} \tilde{\pi}_{lm}\}, \\ &= \partial_i \beta_j - \partial_j \beta_i + 4^2 V'' \tilde{\phi}_{0l} \gamma_l \tilde{\phi}_{ij} + 4(4V'' \tilde{\phi}_{lm} \sigma_{lm} \tilde{\phi}_{ij} + V' \sigma_{ij}), \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde V' y V'' significan derivadas respecto al argumento $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_{\mu\nu}\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ (en lo sucesivo se usará esta notación). Esta última relación fija los multiplicadores σ_{ij} . Veamos bajo que condiciones se pueden obtener explícitamente estos multiplicadores σ_{ij} . De la evolución de $\dot{\Gamma}_{3ij}$ tenemos que

$$\partial_i\beta_j - \partial_j\beta_i + 4^2V''\tilde{\phi}_{0l}\gamma_l\tilde{\phi}_{ij} + 4(4V''\tilde{\phi}_{lm}\sigma_{lm}\tilde{\phi}_{ij} + V'\sigma_{ij}) \approx 0. \quad (2.50)$$

Si definimos $\Lambda_{ij} = \partial_i\beta_j - \partial_j\beta_i + 4^2V''\tilde{\phi}_{0l}\gamma_l\tilde{\phi}_{ij}$ y $M_{ijklm} = 4(4V''\tilde{\phi}_{lm}\tilde{\phi}_{ij} + V'I_{ijklm})$, siendo I_{ijklm} la identidad en el espacio de los objetos de dos índices antisimétricos (σ_{ij}), la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\Lambda_{ij} + M_{ijklm}\sigma_{lm} \approx 0. \quad (2.51)$$

Esto nos dice que para la determinación de los multiplicadores σ_{ij} es necesario que la matriz M_{ijklm} sea invertible, lo cual generalmente se cumple debido al termino $V'I_{ijklm}$, que está presente siempre y cuando $V' \neq 0$.

Por último tenemos la evolución de Δ_{4i}

$$\dot{\Delta}_{4i} = \{\tilde{\pi}_{0i} + X_i, H_E\} = \partial_i X_0 + 4V'\tilde{\phi}_{0i} + \beta_i. \quad (2.52)$$

Lo cual fija los multiplicadores β_i . Al no generarse más constricciones el método de Dirac se detiene en este punto. Por lo tanto se tienen las constricciones primarias

$$\Delta_1 = \pi_0^X, \quad \Delta_{2i} = \pi_i^X, \quad \Delta_{3ij} = \tilde{\pi}_{ij}, \quad \Delta_{4i} = (\tilde{\pi}_{0i} + X_i), \quad (2.53)$$

y las constricciones secundarias

$$\Gamma_1 = \partial_i\tilde{\phi}^{0i}, \quad \Gamma_{3ij} = \partial_i X_j - \partial_j X_i + 4\frac{\partial V}{\partial\tilde{\phi}}\tilde{\phi}_{ij}. \quad (2.54)$$

A partir de éstas podemos definir la constricción dada por

$$\Theta = \Gamma_1 + \partial_i\Delta_{2i} = \partial_i\tilde{\phi}^{0i} + \partial_i\tilde{\pi}_i^X, \quad (2.55)$$

y dejar el conjunto de constricciones finales como

$$\Delta_1 = \pi_0^X, \quad \Delta_{2i} = \pi_i^X, \quad \Delta_{3ij} = \tilde{\pi}_{ij}, \quad \Delta_{4i} = (\tilde{\pi}_{0i} + X_i), \quad (2.56)$$

$$\Theta = \partial_i\tilde{\phi}^{0i} + \partial_i\tilde{\pi}_i^X, \quad \Gamma_{3ij} = \partial_i X_j - \partial_j X_i + 4\frac{\partial V}{\partial\tilde{\phi}}\tilde{\phi}_{ij}. \quad (2.57)$$

Las constricciones Θ y Δ_1 conmutan con todas las restantes constricciones (y entre ellas), lo cual implica que éstas son constricciones de primera clase. Ahora debemos verificar que en el conjunto de constricciones restantes no se encuentren constricciones de primera clase adicionales. Para lo cual calculamos el determinante de los paréntesis de Poisson que satisfacen estas últimas constricciones.

Encontramos que la matriz que se deriva de los correspondientes paréntesis de Poisson es

	π_1^X	π_2^X	π_3^X	$\tilde{\pi}_{01} + X_1$	$\tilde{\pi}_{02} + X_2$	$\tilde{\pi}_{03} + X_3$	$\tilde{\pi}_{12}$	$\tilde{\pi}_{13}$	$\tilde{\pi}_{23}$	Γ_{12}	Γ_{13}	Γ_{23}
π_1^X	0	0	0	$-\delta$	0	0	0	0	0	A_1	B_1	0
π_2^X	0	0	0	0	$-\delta$	0	0	0	0	A_2	0	C_2
π_3^X	0	0	0	0	0	$-\delta$	0	0	0	0	B_3	C_3
$\tilde{\pi}_{01} + X_1$	δ	0	0	0	0	0	0	0	0	a_1	a_2	a_3
$\tilde{\pi}_{02} + X_2$	0	δ	0	0	0	0	0	0	0	b_1	b_2	b_3
$\tilde{\pi}_{03} + X_3$	0	0	δ	0	0	0	0	0	0	c_1	c_2	c_3
$\tilde{\pi}_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	d_1	d_2	d_3
$\tilde{\pi}_{13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	e_1	e_2	e_3
$\tilde{\pi}_{23}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	f_1	f_2	f_3
Γ_{12}	$-A_1$	$-A_2$	0	$-a_1$	$-b_1$	$-c_1$	$-d_1$	$-e_1$	$-f_1$	0	0	0
Γ_{13}	$-B_1$	0	$-B_3$	$-a_2$	$-b_2$	$-c_2$	$-d_2$	$-e_2$	$-f_2$	0	0	0
Γ_{23}	0	$-C_2$	$-C_3$	$-a_3$	$-b_3$	$-c_3$	$-d_3$	$-e_3$	$-f_3$	0	0	0

donde $\delta = \delta^3(x - y)$ es la delta usual y la notación es análoga a la de la Ecu. (2.38) . Los restantes valores marcados con una letra del alfabeto son no nulos y provienen de realizar el conmutador indicado. La razón del porqué no se escriben explícitamente los valores de los conmutadores es debido a que el determinante de esta matriz solamente depende de un sector particular, es decir,

$$\text{Det}(\{\Omega_i, \Omega_j\}) = \delta^6 \text{Det}(M), \quad (2.58)$$

donde M es la matriz dada por el sector

$$[M] = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

definido en la matriz formada por todas las constricciones. Esta matriz se construye entre las constricciones $\tilde{\pi}_{ij}$ y $\Gamma_{3ij} = \partial_i X_j - \partial_j X_i + 4V' \tilde{\phi}_{ij}$, y resulta

$$[M] = \begin{pmatrix} 4V' + 4^2 V'' \tilde{\phi}_{12}^2 & 4^2 V'' \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{13} & 4^2 V'' \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{23} \\ 4^2 V'' \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{13} & 4V' + 4^2 V'' \tilde{\phi}_{13}^2 & 4^2 V'' \tilde{\phi}_{23} \tilde{\phi}_{13} \\ 4^2 V'' \tilde{\phi}_{23} \tilde{\phi}_{12} & 4^2 V'' \tilde{\phi}_{23} \tilde{\phi}_{13} & 4V' + 4^2 V'' \tilde{\phi}_{23}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

con determinante

$$\text{Det}(M) = A^2 \left(A + B(\tilde{\phi}_{12}^2 + \tilde{\phi}_{13}^2 + \tilde{\phi}_{23}^2) \right), \quad (2.61)$$

donde $A = 4V'$ y $B = 4^2 V''$. Pidiendo que las cantidades A y $A + B(\tilde{\phi}_{12}^2 + \tilde{\phi}_{13}^2 + \tilde{\phi}_{23}^2)$ sean distintas de cero se tendrá que las 12 constricciones, numeradas en la tabla anterior, son de segunda clase.

Para el conteo de los grados de libertad tenemos 10 coordenadas, 2 constricciones de primera clase y 12 de segunda clase. Por lo tanto, en el caso $(3 + 1)$ -dimensional

$$\# \text{d.o.f.} = \frac{1}{2} \left[2(10) - 2(2) - 12 \right] = 2. \quad (2.62)$$

Lo cual corresponde al mismo número de grados de libertad que en la electrodinámica estándar.

2.3. El Teorema de Goldstone en Electrodinámica no lineal

Nuestro punto de inicio es el potencial efectivo $V(F)$, el cual asumimos que surge en una teoría efectiva a bajas energías que es obtenida integrando algunos grados de libertad a una cierta escala en una teoría fundamental, como se propone en la Ref. [31]. Una teoría cuántica estable se construye alrededor de un mínimo en el potencial, el cual denotamos como $C_{\mu\nu}$. Dado que el rompimiento de simetría se lleva a cabo introduciendo un VEV no nulo de la intensidad de campo $F_{\alpha\beta}$, en lugar del potencial vectorial A_μ , la invariancia de norma se preserva. Usualmente los modos de Goldstone se identifican como excitaciones de masa cero, pero en este caso la invariancia de norma garantiza que todas las excitaciones serán sin masa, lo cual requiere una manera alternativa de identificar e interpretar tales modos.

La correspondiente formulación del teorema de Goldstone es obtenida siguiendo pasos similares al caso del modelo sigma lineal [16], por ejemplo. Iniciamos imponiendo que el potencial V sea invariante bajo transformaciones infinitesimales del grupo de Lorentz generadas por G^μ_α

$$\delta F^{\mu\nu} = G^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} + G^\nu_\alpha F^{\mu\alpha}, \quad (2.63)$$

donde la condición de invariancia $V(F^{\mu\nu}) = V(F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu})$ implica

$$0 = \delta F^{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial F^{\mu\nu}}. \quad (2.64)$$

Dado que esta condición es válida para un $F^{\mu\nu}$ arbitrario, podemos tomar una derivada adicional respecto a $F^{\alpha\beta}$ y obtener

$$0 = \frac{\partial \delta F^{\mu\nu}}{\partial F^{\alpha\beta}} \frac{\partial V}{\partial F^{\mu\nu}} + \delta F^{\mu\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial F^{\alpha\beta} \partial F^{\mu\nu}}. \quad (2.65)$$

El siguiente paso es evaluar la ecuación anterior en el mínimo del potencial, de lo cual se sigue que

$$0 = \delta C^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial F^{\alpha\beta} \partial F^{\mu\nu}} \right)_C. \quad (2.66)$$

La ecuación anterior se divide en dos casos de acuerdo a la elección del vacío $C^{\alpha\beta}$. Existen dos familias de generadores: (i) aquellos $\hat{G}^{\alpha\beta}$ que mantienen el vacío $C^{\mu\nu}$ invariante ($\delta_{\hat{G}} C^{\mu\nu} = 0$)

y para los cuales (2.66) se satisface automáticamente y (ii) aquellos generadores $\tilde{G}^{\alpha\beta}$ que no dejan el estado de vacío invariante ($\delta_{\tilde{G}} C^{\mu\nu} \neq 0$). En este último caso, (2.66) implica que la matriz

$$\Sigma_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial F^{\alpha\beta} \partial F^{\mu\nu}} \right)_C, \quad (2.67)$$

tiene valores propios cero con vectores propios $\delta_{\tilde{G}} C^{\mu\nu}$. Estos son precisamente los modos de Goldstone de la teoría.

2.4. Elección del estado de vacío e identificación de los modos de Goldstone

2.4.1. Caso (1 + 1)-dimensional

Con el objetivo de adquirir práctica de cómo se aplica el teorema anterior en casos particulares, empezaremos analizando el modelo (1 + 1)-dimensional. La ecuación (2.66) se lee como

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^\alpha \partial \Phi^\mu} \right)_C G^\mu{}_\nu C^\nu = 0, \quad (2.68)$$

En este caso el grupo de Lorentz únicamente contiene un “boost” en la dirección espacial, el cual tomamos a ser $x^1 = x$. De esta forma el único generador infinitesimal del grupo es

$$[G^\mu{}_\nu] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

el cual produce la transformación finita de Lorentz

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Sin embargo, no existe vacío $C^\nu \neq 0$ que sea invariante bajo la acción de este único generador del grupo de Lorentz. Por lo tanto, siempre existirá un modo de Goldstone en el modelo, el cual se encuentra en un subespacio uno-dimensional y ortogonal al estado de vacío. Un objetivo planteado más adelante será entender la relación entre el modo de Goldstone y el grado de libertad que contiene la teoría. El hecho de que la teoría sólo contenga un único modo de Goldstone es una particularidad que se presenta por la dimensionalidad en la que se está trabajando. Este no será el caso en dimensiones 3 o 4, donde esperamos tener entre 1 y 3 o entre 1 y 6 modos de Goldstone, respectivamente, cada uno de ellos asociado a los generadores de Lorentz que no mantienen el vacío invariante.

2.4.2. Caso (3 + 1)-dimensional

En esta ocasión el vacío está dado por un tensor electromagnético constante $C^{\mu\nu}$ o equivalentemente, por un campo eléctrico \mathbf{e} junto con un campo magnético \mathbf{b} , ambos constantes.

Estos vectores determinan un plano y siempre es posible elegir los ejes de coordenadas de tal manera que estos coincidan con las direcciones de los vectores \mathbf{e} y \mathbf{b} . Junto a esto, se tiene la libertad de realizar “boosts” de Lorentz (pasivos) en la dirección perpendicular al plano. A este nivel, dos posibilidades surgen: (1) \mathbf{e} y \mathbf{b} no son ortogonales y pueden volverse paralelos con este “boost”, (2) \mathbf{e} y \mathbf{b} son ortogonales y así se mantendrán después de cualquier “boost”. Escogiendo el plano \mathbf{e} y \mathbf{b} como el $y - z$, ambos casos son descritos por

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ e & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

respectivamente. La notación es $\mathbf{C} = [C^\mu_\nu]$. Esta es una parametrización que incluye todos los posibles estados de vacío de la teoría, la cual fue introducida en Ref. [37] y puede ser caracterizada por $\det(\mathbf{C}_1) \neq 0$ junto con $\det(\mathbf{C}_2) = 0$.

Una vez que se haya realizado la elección del estado de vacío, la estrategia general para identificar los modos de Goldstone se presenta a continuación. Empezamos a partir de una transformación activa del grupo de Lorentz actuando sobre un tensor antisimétrico $H^{\mu\nu}$, que puede ser escrita en forma matricial como

$$\delta\mathbf{H} = [\mathbf{G}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = [H^\mu_\nu]. \quad (2.72)$$

Vamos a denotar por \mathbf{G}_A , $A = 1, \dots, 6$ una base conveniente para los seis generadores independientes del grupo de Lorentz, la cual es adaptada al estado de vacío de acuerdo a las siguientes consideraciones. Separamos los generadores \mathbf{G}_A en dos grupos: (i) el primero de ellos $\{\mathbf{G}_{\tilde{A}}, \tilde{A} = 1, 2, \dots, p\}$ incluye los generadores linealmente independientes que no mantienen el estado de vacío invariante: $[\mathbf{G}_{\tilde{A}}, \mathbf{C}] \neq 0$ y (ii) el segundo grupo $\{\mathbf{G}_{\hat{A}}, \hat{A} = p + 1, \dots, 6\}$ que incluye aquellos generadores que sí lo mantienen invariante: $[\mathbf{G}_{\hat{A}}, \mathbf{C}] = 0$. Consecuentemente, dividimos los índices (A) en (\tilde{A}, \hat{A}) . Los modos de Goldstone $\Theta^{\tilde{A}}$ son entonces identificados como aquellos tensores linealmente independientes que surgen de las transformaciones $\mathbf{G}_{\tilde{A}}$ actuando sobre el estado de vacío, es decir, $\Theta^{\tilde{A}} = \delta_{\tilde{A}}\mathbf{C} = [\mathbf{G}_{\tilde{A}}, \mathbf{C}]$. La independencia lineal de estos modos es garantizada porque los generadores $\mathbf{G}_{\tilde{A}}$ también lo son. Ahora bien, también es claro que cualquier combinación de $\delta_{\tilde{A}}\mathbf{C}$ es un modo de Goldstone. Otra base $\{\Theta^A\}$ para el espacio tensorial antisimétrico se consigue completando de manera conveniente los objetos $\Theta^{\tilde{A}}$ con modos linealmente independientes $\Theta^{\hat{A}}$. Encontramos conveniente parametrizar la acción del grupo de Lorentz actuando sobre el estado de vacío como

$$\delta_A\mathbf{C} = [\mathbf{G}_A, \mathbf{C}] = R_{(A)(B)}\Theta^B, \quad (2.73)$$

donde $R_{(\hat{A})(B)} = 0$. Una notación más compacta de lo anterior puede realizarse si proyectamos los índices tensoriales antisimétricos $K_{\dots\mu\nu\dots}$ en la base $\Theta^A = (\Theta^{\tilde{A}}, \Theta^{\hat{A}})$, definiendo $K_{\dots(A)\dots} = \Theta^{(A)\mu\nu}K_{\dots\mu\nu\dots}$ para cada par de índices antisimétricos $\mu\nu$.

Una información importante que se requerirá más adelante son las propiedades de transformación de la base elegida $\Theta^{(A)}$ bajo las transformaciones de Lorentz asociadas. Claramente,

las transformaciones $\delta_B \Theta^{(A)}$ pueden ser escritas como una combinación de la misma base, es decir,

$$\delta_B \Theta^{(A)} = [\mathbf{G}_B, \Theta^{(A)}] \equiv C_B^{(A)}{}_{(M)} \Theta^{(M)}, \quad (2.74)$$

donde $C_B^{(A)}{}_{(M)}$ es la correspondiente representación infinitesimal de la transformación de Lorentz inducida por el generador \mathbf{G}_B . Dada una elección específica de una base $\Theta^{(A)}$ los coeficientes $C_B^{(A)}{}_{(M)}$ pueden ser debidamente determinados.

A continuación mostraremos que es conveniente hacer uso de la representación $SU(2) \times SU(2)$ para el grupo de Lorentz. En términos de los generadores estándares para rotaciones y “boosts” $\mathbf{L}_a, \mathbf{K}_a$, $a = 1, 2, 3$ tenemos que se pueden definir los generadores $\mathbf{G}_{(\alpha a)} = \mathbf{L}_a + \alpha \mathbf{K}_a$, $\alpha = \pm$, que tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}_{(\alpha a)}, \mathbf{G}_{(\beta b)}] &= 2i\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{abc}\mathbf{G}_{(\beta c)}, \\ Tr(\mathbf{G}_{(\alpha a)}\mathbf{G}_{(\beta b)}) &= 4\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

2.4.2.1. El caso del vacío con $\det(C) \neq 0$

En esta subsección hacemos explícita la estrategia general para identificar los modos de Goldstone en el caso del vacío \mathbf{C}_1 , definido en Ecu. (2.71). Usando la representación de los generadores de Lorentz dada en la Ecu. (2.75) reescribimos

$$\mathbf{C} = -\frac{i}{2}\omega_+ \mathbf{G}_{+3} - \frac{i}{2}\omega_- \mathbf{G}_{-3}, \quad \omega_\alpha = -b + i\alpha e. \quad (2.76)$$

A partir de las relaciones de conmutación (2.75) es claro que podemos elegir $\mathbf{G}_{+3}, \mathbf{G}_{-3}$ como generadores linealmente independientes que mantienen el vacío invariante. Esto significa que hemos hecho la identificación $\{\hat{A}\} = \{+3, -3\} = \{\alpha 3, \alpha = \pm\}$ y escogido $\mathbf{G}_{\hat{A}} : \mathbf{G}_{\alpha 3}$. Los restantes cuatro generadores $\mathbf{G}_{\tilde{A}} : \mathbf{G}_{\alpha \tilde{a}}$, $\tilde{a} = 1, 2$, $\{\hat{A}\} = \{\alpha \tilde{a}\}$ dan origen a los modos de Goldstone. En este caso es conveniente definir los modos de Goldstone como una combinación lineal de los generadores anteriores, de acuerdo a

$$\Theta^{(\alpha \tilde{a})} = \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}} [\mathbf{G}_{\alpha \tilde{b}}, \mathbf{C}], \quad \epsilon_{\tilde{1}\tilde{2}} = +1, \quad (2.77)$$

en tal forma que estos se reducen a

$$\begin{aligned} \Theta^{(\beta \tilde{b})} &= \omega_{\beta \tilde{b}} \mathbf{G}_{\beta \tilde{b}}, \quad \omega_{\beta \tilde{b}} = \omega_\beta, \\ \omega_{\beta 1} &= \omega_{\beta 2} = (-b + i\beta e) \equiv \omega_\beta. \end{aligned} \quad (2.78)$$

No existe suma sobre los índices repetidos β y \tilde{b} en el lado derecho de la ecuación anterior. La misma convención se adoptará en adelante, es decir, cuando se tengan índices repetidos en el lado derecho de una igualdad y un solo índice libre en el lado izquierdo.

Los restantes dos elementos de la base $\Theta^{(A)}$ se eligen como $\Theta^{(\gamma 3)} = \omega_\gamma G_{\gamma 3}$, donde el factor ω_γ se ha insertado por razones dimensionales y para la simplificación de cálculos posteriores.

Finalmente, la base del espacio tensorial antisimétrico que incluye a los modos de Goldstone puede ser escrita como

$$\Theta^{(\alpha a)} = \omega_{\alpha a} \mathbf{G}_{\alpha a}, \quad \omega_{\alpha 1} = \omega_{\alpha 2} = \omega_{\alpha 3} = (-b + i\alpha e). \quad (2.79)$$

De las Ecs. (2.77) y (2.78) podemos identificar los restantes coeficientes $R_{(\tilde{A})(B)}$ definidos en (2.73), resultando

$$R_{(\alpha\tilde{a})(\beta\tilde{b})} = -\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}} \quad , \quad R_{(\alpha\tilde{a})(\beta 3)} = 0. \quad (2.80)$$

Ahora calculamos los coeficientes $C_B^{(A)}{}_{(M)}$ definidos en (2.74), los cuales se obtienen a partir de

$$\delta_{\alpha a} \Theta^{(\beta b)} = [\mathbf{G}_{\alpha a}, \Theta^{(\beta b)}] = C_{\alpha a}^{(\beta b)}{}_{(\gamma c)} \Theta^{(\gamma c)}, \quad (2.81)$$

en la notación modificada. Calculando directamente,

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha a} \Theta^{(\beta b)} = \omega_{\beta} [\mathbf{G}_{\alpha a}, \mathbf{G}_{\beta b}] &= 2i\omega_{\beta} \delta_{\alpha\beta} \sum_e \epsilon_{abe} \mathbf{G}_{\beta e}, \\ &= 2i\delta_{\alpha\beta} \omega_{\beta} \sum_{\gamma, e, c} \epsilon_{abe} \frac{\delta_{\gamma\beta} \delta_{ec}}{\omega_{\gamma}} \Theta^{(\gamma c)}, \\ &= 2i\delta_{\alpha\beta} \omega_{\beta} \sum_{\gamma, c} \frac{\delta_{\gamma\beta} \epsilon_{abc}}{\omega_{\gamma}} \Theta^{(\gamma c)}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

deducimos que los coeficientes están dados por,

$$C_{\alpha a}^{(\beta b)}{}_{(\gamma c)} = 2i\epsilon_{abc} \frac{\omega_{\beta}}{\omega_{\gamma}} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} = 2i\epsilon_{abc} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma}, \quad (2.83)$$

en esta nueva notación. Los coeficientes distintos de cero son

$$C_{+a}^{(+b)}{}_{(+c)} = 2i\epsilon_{abc}, \quad C_{-a}^{(-b)}{}_{(-c)} = 2i\epsilon_{abc}. \quad (2.84)$$

2.4.2.2. El caso del vacío con $\det(C) = 0$

Este corresponde a la elección \mathbf{C}_2 en la Ecu. (2.71). Siguiendo pasos similares a los llevados a cabo en la sección anterior, reescribimos el estado de vacío en términos de los generadores $G_{\alpha a}$, obteniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{2}L [\cosh \theta \mathbf{G}_{+2} + i \sinh \theta \mathbf{G}_{+3}], \\ &+ \frac{1}{2}L [-\cosh \theta \mathbf{G}_{-2} + i \sinh \theta \mathbf{G}_{-3}], \end{aligned} \quad (2.85)$$

donde $e^2 \neq b^2$ y hemos introducido la notación

$$e/L = \cosh \theta, \quad b/L = \sinh \theta, \quad L = \sqrt{(e^2 - b^2)}. \quad (2.86)$$

Ahora tomamos

$$\hat{\mathcal{G}}_{+\hat{\theta}} = -[\cosh \theta \mathbf{G}_{+2} + i \sinh \theta \mathbf{G}_{+3}], \quad (2.87)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{-\hat{\theta}} = [\cosh \theta \mathbf{G}_{-2} - i \sinh \theta \mathbf{G}_{-3}], \quad (2.88)$$

como nuevos generadores que, como puede demostrarse, dejan el vacío invariante. En relación a la notación previa hemos elegido $(\hat{A}) = (+\hat{\theta}, -\hat{\theta}) = (\alpha \hat{\theta})$. Los restantes 4 generadores se escogen como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_{+1} &= \mathbf{G}_{+1}, & \tilde{\mathcal{G}}_{-1} &= \mathbf{G}_{-1}, \\ \tilde{\mathcal{G}}_{+\tilde{\theta}} &= [\cosh \theta \mathbf{G}_{+3} - i \sinh \theta \mathbf{G}_{+2}], \\ \tilde{\mathcal{G}}_{-\tilde{\theta}} &= -[\cosh \theta \mathbf{G}_{-3} + i \sinh \theta \mathbf{G}_{-2}], \end{aligned} \quad (2.89)$$

los cuales son etiquetados por los índices $(\tilde{A}) = (+1, -1, +\tilde{\theta}, -\tilde{\theta}) = (\alpha 1, \beta \tilde{\theta})$. De esta forma, los índices $(a : 1, 2, 3)$ de la subsección previa son ahora reemplazados por $(a^* : 1, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$. Los generadores $\mathcal{G}_{\alpha a^*}$ satisfacen las mismas propiedades de conmutación mostradas en la Ecu. (2.75) con $\epsilon_{1\tilde{\theta}\hat{\theta}} = +1$. En completa analogía con el caso previo definimos los modos de Goldstone como

$$\Theta^{(\alpha \tilde{a})} = \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}} \left[\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha \tilde{b}}, \mathbf{C} \right], \quad \tilde{a}, \tilde{b} = 1, \tilde{\theta}, \quad \epsilon_{1\tilde{\theta}} = +1 = -\epsilon_{\tilde{\theta}1}. \quad (2.90)$$

Los restantes elementos de la base para el espacio antisimétrico se escogen como $\Theta^{(\alpha \hat{\theta})} = -iL\hat{\mathcal{G}}_{\alpha \hat{\theta}}$. Las ecuaciones anteriores pueden ser resumidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Theta^{(\alpha a^*)} &= \omega_{\alpha a^*} \mathcal{G}_{\alpha a^*}, \quad a^* = 1, \tilde{\theta}, \hat{\theta}, \\ \omega_{\alpha 1} &= \omega_{\alpha \tilde{\theta}} = \omega_{\alpha \hat{\theta}} = -iL, \end{aligned} \quad (2.91)$$

las cuales son análogas a la Ecu. (2.79) de la subsección previa. Por lo tanto, todas las propiedades en el caso del vacío \mathbf{C}_1 pueden ser trasladadas al caso del vacío \mathbf{C}_2 haciendo los reemplazos $1 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow \tilde{\theta}, \quad 3 \rightarrow \hat{\theta}, \quad \omega_\alpha \rightarrow -iL$, siempre que $L \neq 0$. En el caso $L = 0$, es decir, cuando $b = \lambda e$, $\lambda = \pm 1$, las combinaciones $K_2 + i\lambda L_3$ y $K_3 - i\lambda L_2$ mantienen el vacío invariante, mientras que $K_2 - i\lambda L_3$, $K_3 + i\lambda L_2$, K_1 y L_1 generan los 4 modos de Goldstone linealmente independientes.

2.5. Relaciones entre las susceptibilidades de orden superior

Como una extensión al procedimiento usado para derivar el teorema de Goldstone en la Sección 2.3, observamos que tomando derivadas adicionales respecto al campo $F_{\mu\nu}$ sobre la relación (2.65) y evaluando en el estado de vacío obtenemos relaciones entre las susceptibilidades generalizadas de orden superior $\Sigma_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_n\beta_n}^{(2n)}$ definidas por

$$\Sigma_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_n\beta_n}^{(2n)} = \left(\frac{\partial^n V}{\partial F^{\alpha_1\beta_1} \partial F^{\alpha_2\beta_2} \dots \partial F^{\alpha_n\beta_n}} \right)_C. \quad (2.92)$$

Estas relaciones pueden ser relevantes porque el potencial expandido $\bar{V}(f)$ definido en Ecu. (2.15), junto con la susceptibilidad total $\Sigma_{\alpha\beta\mu\nu}(f)$, pueden ser escritas en términos de éstas como

$$\bar{V}(f_{\mu\nu}) = \sum_{n=2} \frac{1}{n! \times 2^n} \Sigma_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_n\beta_n}^{(2n)} f^{\alpha_1\beta_1} \dots f^{\alpha_n\beta_n}, \quad (2.93)$$

$$\Sigma_{\alpha\beta\mu\nu} = \sum_{n=2} \frac{1}{2^{n-2} (n-2)!} \Sigma_{\alpha\beta\mu\nu\alpha_3\beta_3\dots\alpha_n\beta_n}^{(2n)} f^{\alpha_3\beta_3} \dots f^{\alpha_n\beta_n}, \quad (2.94)$$

respectivamente. La formulación del modelo en términos de la expansión (2.93) puede ser útil en el caso donde el potencial $V(F)$ no es conocido y uno tiene que tratar con la teoría hasta un orden dado. Más adelante veremos que se debe poner atención cuando se realiza una aproximación en las Ecs. (2.93) y (2.94), esto debido a que la aparición de los modos de Goldstone puede imponer restricciones adicionales si sólo usamos la susceptibilidad de orden más bajo $\Sigma_{\mu\nu\alpha\beta}^{(4)}$. Como hemos mencionado los modos de Goldstone son vectores propios con autovalor cero de esta susceptibilidad $\Sigma_{\mu\nu\alpha\beta}^{(4)}$.

Para encontrar la relación entre las susceptibilidades de orden $2n$ y $2n+2$ debemos tomar una derivada adicional respecto al campo $F_{\mu\nu}$ en la Ecu. (2.65) y evaluar el resultado en el estado de vacío. Encontramos que

$$\begin{aligned} & (G_A)^\mu{}_\alpha \Sigma_{\mu\beta\kappa\lambda}^{(4)} + (G_A)^\mu{}_\beta \Sigma_{\alpha\mu\kappa\lambda}^{(4)} + (G_A)^\mu{}_\kappa \Sigma_{\alpha\beta\mu\lambda}^{(4)} \\ & + (G_A)^\mu{}_\lambda \Sigma_{\alpha\beta\kappa\mu}^{(4)} + \frac{1}{2} (\delta_A C^{\mu\nu}) \Sigma_{\mu\nu\alpha\beta\kappa\lambda}^{(6)} = 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

La relación (2.95) naturalmente se divide en dos casos de acuerdo a las elecciones $R_{(\hat{A})(B)} = 0$ y $R_{(\hat{A})(B)} \neq 0$, lo cual se traduce en $\delta_{\hat{A}} C^{\mu\nu} = 0$ y $\delta_{\hat{A}} C^{\mu\nu} \neq 0$, respectivamente. Los coeficientes $R_{(A)(B)}$ han sido definidos en la Ecu. (2.73) y previamente calculados en la Ecu. (2.80) para el vacío \mathbf{C}_1 . La proyección en la base $\Theta^{(A)}$ produce

$$C_{\hat{A}(M)}^{(B)} \Sigma^{(4)(M)(C)} + C_{\hat{A}(M)}^{(C)} \Sigma^{(4)(B)(M)} = 0, \quad (2.96)$$

$$-\frac{1}{2} R_{(\hat{A})(M)} \Sigma^{(6)(M)(\tilde{B})(\hat{C})} = C_{\hat{A}(\hat{M})}^{(\tilde{B})} \Sigma^{(4)(\hat{M})(\hat{C})}, \quad (2.97)$$

respectivamente. La primera de las ecuaciones anteriores establece que las componentes $\Sigma^{(4)(A)(B)}$ son un tensor invariante bajo el subgrupo de simetría que deja el vacío invariante. La segunda proporciona una relación entre las componentes de $\Sigma^{(6)}$ y aquellas de menor orden $\Sigma^{(4)}$. Tomando derivadas adicionales en (2.65) y evaluando el resultando en la condición de mínimo podemos generalizar el resultado anterior para obtener

$$\delta_{\hat{A}} \Sigma^{(2n)(B_1)(B_2)\dots(B_n)} = 0, \quad (2.98)$$

$$\delta_{\hat{A}} \Sigma^{2n(B_1)(B_2)\dots(B_n)} = -\frac{1}{2} R_{(\hat{A})(M)} \times \Sigma^{2(n+1)(M)(B_1)(B_2)\dots(B_n)}. \quad (2.99)$$

Ahora, como ejemplo de lo anterior estudiamos la información que puede ser obtenida en el caso más simple cuando se relaciona $\Sigma^{(6)}$ con $\Sigma^{(4)}$ para el vacío \mathbf{C}_1 y donde los coeficientes

$R_{(A)(B)}$ y $C_A^B{}_{(C)}$ ya fueron calculados previamente. La primera condición (2.98) nos dice que $\Sigma^{(4)(A)(B)}$ es un tensor invariante bajo el subgrupo que mantiene el vacío invariante. La condición restante (2.99) se reduce a

$$\Sigma^{(6)(\alpha\tilde{a})(\delta d)(\gamma c)} = -2\epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}} \left(C_{\alpha\tilde{b}}^{(\delta d)}{}_{(\mu 3)} \Sigma^{(4)(\mu 3)(\gamma c)} + C_{\alpha\tilde{b}}^{(\gamma c)}{}_{(\mu 3)} \Sigma^{(4)(\delta d)(\mu 3)} \right). \quad (2.100)$$

Las posibles elecciones para d y c en la partición de índices $(\tilde{A}, 3)$ son

$$(d, c) : \left(\tilde{d}, \tilde{c} \right), \quad (3, 3), \quad \left(\tilde{d}, 3 \right). \quad (2.101)$$

Lo cual produce

$$\Sigma^{(6)(\alpha\tilde{a})(\beta\tilde{b})(\gamma\tilde{c})} = 0, \quad (2.102)$$

$$\Sigma^{(6)(\alpha\tilde{a})(\delta 3)(\gamma 3)} = 0, \quad (2.103)$$

$$\Sigma^{(6)(\alpha\tilde{a})(\beta\tilde{b})(\gamma 3)} = 4i\delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \left(\delta_{\alpha+}\delta_{\beta+} \Sigma^{(4)(+3)(\gamma 3)} + \delta_{\alpha-}\delta_{\beta-} \Sigma^{(4)(-3)(\gamma 3)} \right), \quad (2.104)$$

respectivamente. Observemos que no se cuenta con información para $\Sigma^{(6)(\alpha 3)(\beta 3)(\gamma 3)}$. Para relaciones de orden superior los cálculos se complican y al igual que en el caso presentado anteriormente se encuentra la falta de información para algunas cantidades. Es decir, no es posible construir las susceptibilidades de orden $2n + 2$ en términos de aquellas de orden $2n$ en base a las relaciones en las Ecs. (2.98) y (2.99).

2.6. Modos de propagación, grados de libertad y dinámica de los modelos

Hasta el momento se ha trabajado en una formulación alternativa de modelos en electrodinámica no lineal en los que se presenta un rompimiento espontáneo de simetría. Dos resultados descartados, que han sido desarrollados en secciones previas fueron: (i) mostrar explícitamente que para el caso $(3 + 1)$ -dimensional el modelo contiene 2 grados de libertad y 4 modos de Goldstone (bajo la condición de elegir un vacío constante), mientras que, (ii) en el caso $(1 + 1)$ -dimensional se obtiene un grado de libertad y un modo de Goldstone.

En este punto surgen dos cuestiones, la primera de ellas es en relación al número de grados de libertad y el número de modos de Goldstone que contiene la teoría, es decir, se plantea la pregunta de cuándo dichos modos corresponden o no a grados de libertad. Como se mencionó previamente, en el caso $(3 + 1)$ -dimensional aparecen 4 modos de Goldstone y solamente 2 grados de libertad. La segunda cuestión es referente a la dinámica de los modelos y los modos de Goldstone (y aquellos que no corresponden a modos de Goldstone), es decir, si estos se propagan y cómo lo hacen. Dada la no linealidad de los modelos, y como consecuencia, el no poder encontrar soluciones explícitas hace que las dos cuestiones anteriores sean no triviales de responder. En el caso $(1 + 1)$ -dimensional surgen simplificaciones que permiten hacer un estudio más amplio y responder a estas cuestiones de una manera adecuada, lo cual

abordaremos en una sección posterior, sin embargo, para el caso $(3 + 1)$ -dimensional no es así.

A continuación nos concentramos únicamente en el caso $(3 + 1)$ -dimensional. Ahora bien, en el estudio de teorías no lineales es común emplear aproximaciones adecuadas o bien métodos de linealización. Ya sea que se emplee uno u otro esquema siempre es necesario verificar que la teoría sigue siendo consistente. Como ejemplo a lo anterior, estudiaremos lo que ocurre en los modelos que estamos considerando. Recordemos que después de expandir el potencial en torno al estado de vacío podemos escribir este último como función de lo que denominamos susceptibilidades generalizadas y potencias de la fluctuación $f^{\mu\nu}$ como lo establece la ecuación (2.93). Una primera aproximación al modelo sería considerar sólo el primer término de esta expansión, el cual es proporcional a $\Sigma_{\mu\nu\alpha\beta}^{(4)} f^{\mu\nu} f^{\alpha\beta} \approx C_{\mu\nu} C_{\alpha\beta} f^{\mu\nu} f^{\alpha\beta}$, donde $C_{\mu\nu}$ es el estado de vacío de $V = V(F)$. Un cálculo directo, vía el método de Dirac, muestra que si tomamos este término como Lagrangiano de nuestra teoría ésta no contiene grados de libertad, aún cuando inicialmente la teoría completa sí contenía. Lo anterior surge por el hecho de considerar sólo el término que contiene a $\Sigma_{\mu\nu\alpha\beta}^{(4)}$ y que este objeto contenga 4 vectores nulos correspondientes a los modos de Goldstone. Es por esto que la aproximación anterior no es de utilidad. Otra manera diferente de ver lo anterior es tomando una linealización directamente de la ecuación de movimiento. Haciendo uso de (2.15), obtenemos que la primera ecuación de movimiento en (2.16) se escribe como

$$(4(C_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta})(C_{\mu\nu} + f_{\mu\nu})\bar{V}'' + 2I_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{V}') \partial^\beta f^{\mu\nu} = 0, \quad (2.105)$$

donde la notación es $I_{\alpha\beta\mu\nu} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu}$. La segunda ecuación en (2.16) implica que podemos escribir $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$.

Para tener como referencia lo que sucede en el caso usual, vamos a comparar la ecuación (2.105) con la correspondiente ecuación que surge en los llamados modelos de abejerro, donde el rompimiento espontáneo de simetría es producido por un valor de expectación no nulo C^μ del potencial A^μ . En este caso, empezando a partir del Lagrangiano $L(A_\mu) = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}/4 - W(A^\mu A_\mu)$, con W teniendo uno de sus mínimos en $A^\mu = C^\mu$, y expandiendo $A^\mu = a^\mu + C^\mu$, la ecuación análoga a (2.105) resulta en

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} - 2(a^\nu + C^\nu)\bar{W}' = 0. \quad (2.106)$$

Ambas ecuaciones (2.105) y (2.106) son no lineales, debido a la presencia de los términos \bar{V}' , \bar{V}'' , \bar{W}' . Dado que los términos V y W tienen un mínimo en $C_{\mu\nu}$ y C_μ , la expansión de \bar{V}' y \bar{W}' en términos de $f_{\mu\nu}$ y a_μ empiezan como $(p C_{\mu\nu} f^{\mu\nu})$ y $(q C_\mu a^\mu)$, respectivamente.

Ahora bien, en el caso de la Ecu. (2.106), se puede mostrar que una aproximación lineal como $\partial_\mu f^{\mu\nu} - 2q C^\nu C_\mu a^\mu = 0$ preserva el mismo número de grados de libertad que la teoría original, y por tanto, en principio puede ser empleada para realizar un estudio. En el caso alternativo de la Ecu. (2.105), un ligero análisis podría sugerir que

$$4\bar{V}''(C) C_{\alpha\beta} C_{\mu\nu} \partial^\beta f^{\mu\nu} = 0, \quad (2.107)$$

es una adecuada aproximación lineal, lo cual básicamente significa tomar el orden cero dentro del paréntesis en la Ecu. (2.105) para mantener el orden lineal en toda la ecuación. Sin

embargo, uno puede verificar que la Ecu. (2.107) describe grados de libertad negativos en 4 dimensiones si se lleva a cabo el conteo usando el método de Dirac para el Lagrangiano

$$L = \kappa(C_{\mu\nu}f^{\mu\nu})^2, \quad (2.108)$$

siendo κ una constante, que reproduce la ecuación de movimiento en (2.107). La permanencia del término $\bar{V}'I_{\alpha\beta\mu\nu}$ en la Ecu. (2.105) es crucial para mantener los dos grados de libertad originales que surgen de la acción (2.1). De esta forma, la Ecu. (2.105) no puede ser linealizada alrededor de $f^{\mu\nu} = 0$ (se tendría que $\bar{V}' = 0$), por lo tanto, es necesario realizar esta operación alrededor de un campo adicional $f_0^{\mu\nu}$ el cual sea una solución de la ecuación no lineal (2.105) de tal forma que $\bar{V}'(f_0^{\mu\nu}) \neq 0$. Observemos que $\bar{V} \rightarrow \bar{V}(f_{\mu\nu}f^{\mu\nu})$, en el límite $C_{\mu\nu} \rightarrow 0$. Por lo tanto, la Ecu. (2.105) no provee pequeñas correcciones en $C_{\mu\nu}$ a la electrodinámica estándar, sino más bien a una teoría no lineal alternativa.

Una vez que hemos discutido el detalle de una correcta aproximación podemos regresar a la cuestión de la relación entre el número de grados de libertad, modos de Goldstone y su dinámica. Dado que se ha respetado la invariancia de norma, los dos grados de libertad en el modelo deben ser de masa nula.

Algo que veremos a detalle en la próxima subsección es que las propiedades de propagación de la electrodinámica no lineal se caracterizan normalmente seleccionando un campo de fondo $f_0^{\mu\nu}$, el cual es solución de las ecuaciones no lineales, y estudiando las perturbaciones alrededor de éste. Esto último puede hacerse estudiando el comportamiento del campo de discontinuidades al cruzar una superficie (ver Ref. [38]) que está determinada por las ecuaciones de Fresnel [30], o bien, realizando una apropiada linealización de la Ecu. (2.105): $f^{\mu\nu} = f_0^{\mu\nu} + (f_L)^{\mu\nu}$. En nuestro caso, existe una condición adicional que dice que $\bar{V}'(f_0^{\mu\nu}) \neq 0$. El campo $(f_L)^{\mu\nu}$ caracterizará los grados de libertad del modelo.

Por otro lado, los modos de Goldstone fueron definidos en la Sección 2.3 como una cierta combinación de los campos eléctricos y magnéticos formando tensores nulos de la susceptibilidad de cuarto orden $\Sigma^{(4)\alpha\beta\mu\nu}$. Debemos enfatizar nuevamente que en nuestro caso los modos de Goldstone no están relacionados a ninguna matriz de masa. Las propiedades de propagación de los modos de Goldstone, que dependerán del estado de vacío $C^{\mu\nu}$ y del punto seleccionado de linealización $f_0^{\mu\nu}$, pueden ser subsecuentemente obtenidas proyectando la solución $(f_L)^{\mu\nu}$ sobre la base que incluye los modos de Goldstone y los no modos de Goldstone (NMG). Como se discutió previamente, la base para el espacio de tensores antisimétricos $\Theta_{\mu\nu}^A$ puede ser siempre dividida en dos conjuntos ortogonales: (i) $\{\Theta_{\mu\nu}^{\hat{A}}, \hat{A} = 1, 2\}$ que surge de los generadores que mantienen el vacío invariante y (ii) $\{\Theta_{\mu\nu}^{\tilde{A}}, \tilde{A} = 1, 2, 3, 4, \Theta^{\tilde{A}\alpha\beta}\Theta_{\alpha\beta}^{\tilde{B}} = N_{\tilde{A}}\delta^{\tilde{A}\tilde{B}}\}$ que surge de los generadores que no dejan el estado de vacío invariante. Este último expande el conjunto que contiene a los modos de Goldstone. Entonces, la contribución de los modos de Goldstone a los grados de libertad que se propagan en el modelo está dada por

$$f_{\mu\nu}^{(GM)} = \sum_{\tilde{A}} \frac{1}{N_{\tilde{A}}} \left(\Theta_{\alpha\beta}^{(\tilde{A})} (f_L)^{\alpha\beta} \right) \Theta_{\mu\nu}^{\tilde{A}}. \quad (2.109)$$

Similarmente, el comportamiento de los NMG está determinado por la proyección de $(f_L)^{\mu\nu}$ sobre el subespacio generado por $\Theta_{\mu\nu}^{\hat{A}}$. Bien puede ocurrir que $(f_L)^{\mu\nu}$ tenga una proyección

no nula en ambos subespacios. De esta forma, la división de los grados de libertad del modelo en modos de Goldstone y los NMG tiene que ser estudiada en cada caso particular. La única afirmación que puede ser hecha es que los modos de Goldstone pueden soportar los dos grados de libertad, mientras que los NMG pueden soportar uno.

2.6.1. Relaciones de Dispersión

La obtención de las relaciones de dispersión del modelo estudiado se llevará a cabo siguiendo pasos similares a los utilizados en teorías de electrodinámica no lineal [39].

Antes de realizar lo anterior queremos mencionar las similitudes y diferencias entre ambos esquemas. Nótese que la manera en la cual hemos introducido el rompimiento espontáneo de simetría conlleva a que la teoría sea no lineal debido a que inicialmente hemos asumido la existencia de un mínimo en el potencial $V = V(F^{\mu\nu})$ distinto de cero. Por lo tanto, se requiere que dicho potencial sea una función de los invariantes $F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $G = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ con potencias mayores a 2. Por otro lado, una descripción de una electrodinámica no lineal definida únicamente por el potencial $V = V(F, G)$ no implica necesariamente un rompimiento espontáneo de simetría, dado que el potencial puede contener potencias mayores a 2 y aún así no contar con un mínimo no nulo. Recordemos que la teoría inicial que define nuestro modelo está dada por la acción (2.1), siendo esta última invariante de norma e invariante bajo transformaciones de Lorentz pasivas o de observador. La primera condición se satisface por el hecho de hacer uso de $F_{\mu\nu}$ como variable básica, mientras que la segunda condición se cumple por el hecho de no introducir campos de fondo adicionales. A modo de ejemplo, si en la acción de la teoría se introduce un tensor constante $M_{\mu\nu}$ mediante la combinación $M_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ pasaríamos a tener una teoría con rompimiento explícito de Lorentz, lo cual es distinto a la aproximación de un rompimiento espontáneo que se desea abordar en este trabajo.

La teoría física que se sigue del modelo aquí empleado se obtiene después de que el rompimiento espontáneo de simetría es llevado a cabo. La acción que se tiene a este nivel es (2.14) y una de las ecuaciones de movimiento resultante es

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial f^{\alpha\beta}} \right) = 0, \quad (2.110)$$

donde hemos tomado $J_\beta = 0$ y \tilde{V} está definido como $\tilde{V} = V(F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} + C_{\mu\nu})$. El tensor $f^{\mu\nu}$ es quien describe las cantidades físicas a observar en esta teoría. Notemos que el potencial \tilde{V} al ser función de $f_{\mu\nu}$ continua siendo invariante de norma. El haber impuesto la invariancia de Lorentz ante transformaciones pasivas en la teoría inicial, es decir que $V = V(F, G)$, asegura que la estructura funcional más general de \tilde{V} es de la forma $\tilde{V} = \tilde{V}(f + 2C \cdot f, g + 2\tilde{C} \cdot f)$, siendo $f = f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$, $g = f_{\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu}$ y $C \cdot f = C_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$. Este último hecho nos permite llevar a cabo procedimientos análogos a los de la electrodinámica no lineal descritos en la Ref. [39]. Para seguir la analogía notemos que la teoría se resume en lo siguiente

$$\tilde{V} = \tilde{V}(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = f + 2C \cdot f, \quad \xi_2 = g + 2\tilde{C} \cdot f, \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial f^{\alpha\beta}} = 4(f^{\alpha\beta} + C^{\alpha\beta}) = 4F^{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial f^{\alpha\beta}} = 4(\tilde{f}^{\alpha\beta} + \tilde{C}^{\alpha\beta}) = 4\tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (2.112)$$

junto con la ecuación de movimiento dada en (2.110), que puede ser reescrita como

$$(L_{\xi_1} F^{\mu\nu} + L_{\xi_2} \tilde{F}^{\mu\nu})_{,\nu} = 0, \quad (2.113)$$

donde hemos hecho uso de que $L = -\tilde{V}$. Las convenciones son las siguientes: la coma denota derivada parcial respecto a las coordenadas espacio-temporales, L_{ξ_1} denota la derivada respecto al invariante ξ_1 y L_{ξ_2} denota la derivada respecto a ξ_2 . Usando las relaciones $\xi_{1,\nu} = 2F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta,\nu}$ y $\xi_{2,\nu} = 2F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta,\nu}$ (donde hemos hecho uso de que $f^{\alpha\beta}_{,\nu} = F^{\alpha\beta}_{,\nu}$) obtenemos que (2.113) se reescribe como

$$2N^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta,\nu} + L_{\xi_1} F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \quad (2.114)$$

donde se ha introducido el tensor

$$N^{\mu\nu\alpha\beta} \doteq L_{\xi_1 \xi_1} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + L_{\xi_2 \xi_2} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\beta} + L_{\xi_1 \xi_2} (F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}), \quad (2.115)$$

y se ha utilizado la propiedad que los campos $f^{\alpha\beta}$ y $C^{\alpha\beta}$ satisfacen la identidad de Bianchi, lo cual implica que $F^{\alpha\beta}$ también lo hace.

El paso siguiente es analizar la propagación de las ondas de choque asociadas con las perturbaciones del campo en el límite de la óptica geométrica [38]. Se considera una superficie de discontinuidad Σ definida por

$$z(x^\mu) = 0. \quad (2.116)$$

Esta superficie Σ es tal que divide el espacio-tiempo en dos regiones U^- y U^+ ($z > 0$ y $z < 0$, respectivamente). Dada una función arbitraria de las coordenadas $f(x^\mu)$, se define su discontinuidad sobre Σ como

$$[f(x^\alpha)]_\Sigma \doteq \lim_{\{P^\pm\} \rightarrow P} [f(P^+) - f(P^-)], \quad (2.117)$$

donde P^+ , P^- y P se encuentran en U^+ , U^- y Σ respectivamente.

Antes de aplicar este procedimiento a las Ecs. (2.114) vamos a explicar a grosso modo como se interpreta el estudio de una superficie de discontinuidad. Dentro de la teoría de la electrodinámica no lineal, este método considera una solución $F^{\mu\nu}$ a las ecuaciones no lineales completas y a partir de ésta analiza discontinuidades o perturbaciones que se propagan. Otra manera de decirlo es pensar a $F^{\mu\nu}$ como un campo de fondo en el cual se propaga una perturbación. Las propiedades de propagación, como por ejemplo relaciones de dispersión, están asociadas a esta perturbación propagándose en el campo de fondo $F^{\mu\nu}$. Lo anterior se hace porque el procedimiento linealiza las ecuaciones para las discontinuidades, lo cual permite, como se mencionó anteriormente, estudiar algunas de sus propiedades de propagación.

Aplicando las condiciones de continuidad sobre $F^{\mu\nu}$ y discontinuidad sobre su derivada (lo cual es lo mismo que aplicarlas sobre $f^{\mu\nu}$) se obtiene que

$$[F_{\alpha\beta}]_\Sigma = 0, \quad [F_{\alpha\beta,\lambda}]_\Sigma = R_{\alpha\beta} k_\lambda, \quad (2.118)$$

donde $R_{\alpha\beta}$ representa la discontinuidad del campo sobre la superficie Σ y k_λ denota el vector de onda, el cual es ortogonal a la superficie de discontinuidad e indica la direcci3n de propagaci3n. Esta discontinuidad aplicada sobre la identidad de Bianchi produce

$$R_{\alpha\beta}k_\lambda + R_{\beta\lambda}k_\alpha + R_{\lambda\alpha}k_\beta = 0. \quad (2.119)$$

Dado que las relaciones de dispersi3n requieren relaciones escalares, es conveniente considerar los productos de la ecuaci3n anterior con $F^{\alpha\beta}k^\lambda$ y $\tilde{F}^{\alpha\beta}k^\lambda$, lo cual implica

$$\zeta k^\lambda k_\lambda = -2F^{\alpha\beta}R_{\beta\lambda}k^\lambda k_\alpha, \quad (2.120)$$

$$\tilde{\zeta} k^\lambda k_\lambda = -2\tilde{F}^{\alpha\beta}R_{\beta\lambda}k^\lambda k_\alpha, \quad (2.121)$$

donde

$$\zeta \doteq F^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \quad \tilde{\zeta} \doteq \tilde{F}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (2.122)$$

De la misma forma, considerando las condiciones de continuidad y discontinuidad sobre el campo y su derivada, respectivamente, la Ecu. (2.114) se transforma en

$$R_{\beta\lambda}k^\lambda = -\frac{2}{L_{\xi_1}}N_\beta{}^{\mu\nu\rho}R_{\nu\rho}k_\mu. \quad (2.123)$$

Haciendo uso de las siguientes identidades entre el campo y su dual

$$\tilde{F}_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu = -\frac{1}{4}G\eta_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha} - \tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}F\delta^\nu{}_\mu, \quad (2.124)$$

y sustituyendo (2.123) en (2.120) y (2.121) se obtiene

$$\zeta k^2 = \frac{4}{L_{\xi_1}}F^{\mu\nu}F^\tau{}_\mu k_\nu k_\tau (L_{\xi_1\xi_1}\zeta + L_{\xi_1\xi_2}\tilde{\zeta}) - \frac{G}{L_{\xi_1}}k^2(L_{\xi_1\xi_2}\zeta + L_{\xi_2\xi_2}\tilde{\zeta}), \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} k^2 &= \frac{4}{L_{\xi_1}}F^{\mu\nu}F^\tau{}_\mu k_\nu k_\tau (L_{\xi_1\xi_2}\zeta + L_{\xi_2\xi_2}\tilde{\zeta}) - \frac{G}{L_{\xi_1}}k^2(L_{\xi_1\xi_1}\zeta + L_{\xi_1\xi_2}\tilde{\zeta}) \\ &+ \frac{2F}{L_{\xi_1}}k^2(L_{\xi_1\xi_2}\zeta + L_{\xi_2\xi_2}\tilde{\zeta}), \end{aligned} \quad (2.126)$$

donde $k^2 = \eta_{\mu\nu}k^\nu k^\mu$, $F = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = (f^{\mu\nu} + C^{\mu\nu})(f_{\mu\nu} + C_{\mu\nu})$ y $G = F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = (f^{\mu\nu} + C^{\mu\nu})(\tilde{f}_{\mu\nu} + \tilde{C}_{\mu\nu})$.

Con la finalidad de obtener una ecuaci3n que caracterice la propagaci3n de la discontinuidad del campo debemos conseguir cantidades que sean independientes de $R_{\mu\nu}$ (es decir, ζ y $\tilde{\zeta}$). El primer paso para conseguir esto es despejar el t3rmino $F^{\mu\nu}F^\tau{}_\mu k_\nu k_\tau$ en las Ecs. (2.125)-(2.126) y tomar su diferencia. As3 obtenemos

$$\frac{\zeta k^2}{L_{\xi_1\xi_1}\zeta + L_{\xi_1\xi_2}\tilde{\zeta}} - \frac{\tilde{\zeta} k^2}{L_{\xi_1\xi_2}\zeta + L_{\xi_2\xi_2}\tilde{\zeta}} = -\frac{2Fk^2}{L_{\xi_1}} + \frac{Gk^2}{L_{\xi_1}} \left(\frac{L_{\xi_1\xi_1}\zeta + L_{\xi_1\xi_2}\tilde{\zeta}}{L_{\xi_1\xi_2}\zeta + L_{\xi_2\xi_2}\tilde{\zeta}} - \frac{L_{\xi_1\xi_2}\zeta + L_{\xi_2\xi_2}\tilde{\zeta}}{L_{\xi_1\xi_1}\zeta + L_{\xi_1\xi_2}\tilde{\zeta}} \right). \quad (2.127)$$

Asumiendo que $k^2 \neq 0$, la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\Omega_1 \tilde{\zeta}^2 + \Omega_2 \zeta \tilde{\zeta} + \Omega_3 \zeta^2 = 0. \quad (2.128)$$

donde

$$\Omega_1 \doteq -L_{\xi_1 \xi_2} + 2 \frac{F}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_2} L_{\xi_2 \xi_2} - \frac{G}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_2}^2 + \frac{G}{L_{\xi_1}} L_{\xi_2 \xi_2}^2, \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 \doteq L_{\xi_2 \xi_2} - L_{\xi_1 \xi_1} + 2 \frac{F}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_1} L_{\xi_2 \xi_2} + 2 \frac{F}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_2}^2 - 2 \frac{G}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_1} L_{\xi_1 \xi_2} \\ + 2 \frac{G}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_2} L_{\xi_2 \xi_2} \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\Omega_3 \doteq L_{\xi_1 \xi_2} + 2 \frac{F}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_1} L_{\xi_1 \xi_2} - \frac{G}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_1}^2 + \frac{G}{L_{\xi_1}} L_{\xi_1 \xi_2}^2. \quad (2.131)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática (2.128) para $\tilde{\zeta}$ se obtiene

$$\tilde{\zeta} = \Omega_{\pm} \zeta, \quad (2.132)$$

con

$$\Omega_{\pm} = \frac{-\Omega_2 \pm \sqrt{\Omega_2^2 - 4\Omega_1 \Omega_3}}{2\Omega_1}. \quad (2.133)$$

Usando esta relación en (2.125) y tomando $\zeta \neq 0$ llegamos a la condición de cono de luz para los campos de espín uno

$$\left[1 + \frac{G}{L_{\xi_1}} (L_{\xi_1 \xi_2} + \Omega_{\pm} L_{\xi_2 \xi_2}) \right] k^2 - \frac{4}{L_{\xi_1}} (L_{\xi_1 \xi_1} + \Omega_{\pm} L_{\xi_1 \xi_2}) F^{\mu\nu} F^{\tau}{}_{\mu} k_{\nu} k_{\tau} = 0. \quad (2.134)$$

De manera similar a partir de la Ecu. (2.126) se llega

$$\left[\Omega_{\pm} - \frac{2F}{L_{\xi_1}} (L_{\xi_1 \xi_2} + \Omega_{\pm} L_{\xi_2 \xi_2}) + \frac{G}{L_{\xi_1}} (L_{\xi_1 \xi_1} + \Omega_{\pm} L_{\xi_1 \xi_2}) \right] k^2 - \frac{4}{L_{\xi_1}} (L_{\xi_1 \xi_2} + \Omega_{\pm} L_{\xi_2 \xi_2}) F^{\mu\nu} F^{\tau}{}_{\mu} k_{\nu} k_{\tau} = 0. \quad (2.135)$$

Puede mostrarse que las ecuaciones anteriores son iguales. La propagación de las discontinuidades tiene dos soluciones de acuerdo a la cantidad Ω_{\pm} . Estas dos condiciones están asociadas a distintos modos de polarización y reflejan el hecho de posible birrefringencia. Podemos reescribir (2.134) en una forma más compacta

$$k^2 = 4 \frac{L_{\xi_1 \xi_1} + \Omega_{\pm} L_{\xi_1 \xi_2}}{L_{\xi_1} + G(L_{\xi_1 \xi_2} + \Omega_{\pm} L_{\xi_2 \xi_2})} F^{\lambda\mu} F^{\nu}{}_{\lambda} k_{\mu} k_{\nu}, \quad (2.136)$$

lo cual define la relación de dispersión del modelo estudiado. Notemos que en el caso de la Electrodinámica estándar $L_{\xi_1 \xi_1} = L_{\xi_1 \xi_2} = 0$, y por lo tanto, recuperamos el resultado bien conocido $k^2 = 0$.

2.6.1.1. Métricas efectivas

La idea de construir modelos análogos a la relatividad general es actualmente una línea que tiene considerable interés. Dada la no viabilidad de trabajar con campos gravitacionales intensos en un laboratorio, la atención se ha centrado en investigar la posibilidad de simular aspectos de la relatividad general. En particular, podemos mencionar los efectos que se presentan en medios dieléctricos y acústica en fluidos simulando métricas efectivas y agujeros negros (acústicos), respectivamente.

El tema en el cual nos centraremos en esta subsección es referente a las métricas efectivas. Un trabajo importante sobre esta idea lo encontramos en la Ref. [40], donde se muestra que dada una teoría no lineal con un campo escalar el proceso de linealización implica el surgimiento de una métrica efectiva.

En nuestro caso hemos linealizado la teoría considerando una solución particular de las ecuaciones no lineales para posteriormente analizar las fluctuaciones alrededor de ésta; esta solución particular se interpreta como un campo de fondo. A su vez, se encontró que la relación de dispersión que satisface la propagación de las fluctuaciones está dada por la Ecu. (2.136). Ahora bien, recordemos que en el caso lineal los fotones se propagan a través de trayectorias nulas en el espacio de Minkowski $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$, siendo $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. En nuestro caso podemos continuar con esta idea, es decir, que los fotones se propagan sobre trayectorias nulas que satisfacen

$$g_{\pm}^{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu} = 0, \quad (2.137)$$

lo cual es una manera de reescribir (2.136) en función de la métrica efectiva

$$g_{\pm}^{\mu\nu} = L_{\xi_1}\eta^{\mu\nu} - 4[(L_{\xi_1\xi_1} + \Omega_{\pm}L_{\xi_1\xi_2})F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\lambda\nu} + (L_{\xi_1\xi_2} + \Omega_{\pm}L_{\xi_2\xi_2})F^{\mu}{}_{\lambda}\tilde{F}^{\lambda\nu}]. \quad (2.138)$$

El resumen de la línea que optamos seguir es la siguiente: la introducción de una teoría con rompimiento espontáneo de simetría a través de un valor de expectación no nulo para el estado de vacío por medio de un potencial $V = V(F^{\mu\nu})$ necesariamente conlleva a una teoría no lineal, y en el proceso de linealización de ésta se encuentra que surge una métrica efectiva que determina como se propagan las discontinuidades del campo, con lo cual, uno puede interpretar que la no linealidad que se tiene inicialmente, proveniente del rompimiento espontáneo de simetría, se traduce en una modificación de la geometría del espacio.

Se desea recalcar que el surgimiento de las métricas efectivas se deriva del proceso de linealización de una teoría no lineal general, sin embargo, el punto de vista que tomamos en este trabajo es interpretar el surgimiento de la métrica efectiva como una consecuencia del rompimiento espontáneo de simetría, ya que éste es precisamente el que produce que la teoría sea no lineal.

2.7. Soluciones para el caso (1 + 1)-dimensional

La sencillez que presenta este modelo permite encontrar y estudiar soluciones explícitas. Así mismo, se puede establecer la relación entre los grados de libertad, los modos de Goldstone y

su dinámica. Como se ha mencionado, existe un inconveniente en el caso $(3 + 1)$ -dimensional cuando se consideran sólo términos de orden 2 como una primera aproximación al potencial. En este caso, la invariancia de norma junto con la aparición de los modos de Goldstone producen constricciones tales que la teoría no cuenta con grados de libertad al orden considerado. El caso $(1 + 1)$ -dimensional no cuenta con invariancia de norma y, como veremos más adelante, aún con la aparición de un modo de Goldstone la teoría conserva el grado de libertad inicial incluso si se consideran aproximaciones a orden 2. Este grado de libertad indica que la teoría tendrá un modo que se propaga, y éste bien pueden ser un modo de Goldstone o no. Esta cuestión es lo que se desea clarificar en esta sección. Para lo anterior estudiaremos diferentes modelos con rompimiento espontáneo de simetría de Lorentz en esta dimensionalidad.

2.7.1. Términos cinéticos BF para el caso $(1 + 1)$ -dimensional

2.7.1.1. Potencial arbitrario $\bar{V}(\phi_\mu\phi^\mu)$

Empezaremos describiendo los modelos que contienen los términos cinéticos BF con un potencial arbitrario $\bar{V}(\phi_\mu\phi^\mu)$. Para este caso la densidad Lagrangiana está definida en la Ecu. (2.26), la cual es

$$L = \partial_0\phi_1 X - \partial_1\phi_0 X - \bar{V}(\phi_\mu\phi^\mu) - \phi_\nu J^\nu, \quad (2.139)$$

de la cual se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi^\nu} + \epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu X + J_\nu = 0, \quad \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_\nu = 0. \quad (2.140)$$

De lo anterior se deduce

$$\partial^\nu \left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi^\nu} \right) = -\partial^\nu J_\nu = -J, \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial\phi^\alpha\partial\phi^\beta} \right) \partial^\alpha\phi^\beta = -J. \quad (2.141)$$

La segunda relación en la Ecu. (2.140) implica que

$$\phi_\nu = \partial_\nu A, \quad (2.142)$$

donde hemos introducido el potencial A . Haciendo uso de esto último, la ecuación de movimiento final es

$$\left(\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial\phi^\beta\partial\phi^\alpha} \right)_{\phi_\nu=\partial_\nu A} \partial^\beta\partial^\alpha A = -J. \quad (2.143)$$

En términos de las susceptibilidades generalizadas se tiene

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \Sigma_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n-2}\alpha\beta}^{(n)} (\partial^{\nu_1} A)(\partial^{\nu_2} A) \cdots (\partial^{\nu_{n-2}} A) \right) \partial^\alpha\partial^\beta A = -J, \quad (2.144)$$

donde $\Sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$ tiene un vector propio con valor propio cero que proviene de la acción del único generador en la Ecu. (2.69) actuando sobre el estado de vacío; este vector propio es precisamente el modo de Goldstone.

Cuando se toma la aproximación al orden más bajo, la ecuación que describe la dinámica de la teoría es

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \partial^\beta \partial^\alpha A = -J. \quad (2.145)$$

Ahora se considera el vacío arbitrario dado por

$$C^\mu = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad a \neq b, \quad C^2 = a^2 - b^2. \quad (2.146)$$

El modo de Goldstone es proporcional al modo cero N^μ , el cual es

$$N^\mu = G^\mu \nu C^\nu = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}. \quad (2.147)$$

Salvo una constante que depende del modelo, la susceptibilidad de orden dos está dada por $\Sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = C_\alpha C_\beta$, teniendo N^μ como el único vector nulo. Sustituyendo en la Ecu. (2.145) se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$[a\partial_t + b\partial_x]^2 A = -J(t, x). \quad (2.148)$$

Una forma de encontrar una solución general para la Ecu. (2.148) es realizar el siguiente cambio de variables

$$x = av + bu, \quad t = bv + au, \quad (2.149)$$

$$v = \frac{1}{c}(-bt + ax), \quad u = \frac{1}{c}(at - bx), \quad c \equiv a^2 - b^2, \quad (2.150)$$

De tal manera que

$$\partial_u = b\partial_x + a\partial_t, \quad \partial_v = b\partial_t + a\partial_x. \quad (2.151)$$

Entonces de la Ecu. (2.148) encontramos que

$$\partial_u^2 A = \bar{J}(u, v), \quad (2.152)$$

la cual puede ser integrada dando como resultado final

$$A(u, v) = - \int_0^u du'' \int_0^{u''} du' \bar{J}(u', v) + F(v)u + G(v). \quad (2.153)$$

Como caso particular, consideremos una onda plana que se propaga en la dirección x fuera de las fuentes, la Ecu. (2.153) tiene soluciones de la forma $F(v) = 0$, $G(v) = G(x - (b/a)t)$, lo cual muestra que la teoría contiene modos que se propagan.

Bajo estas condiciones, la solución general de (2.153) está dada por

$$A(v) = A_0 e^{iK_\mu x^\mu}, \quad (2.154)$$

con $K_0 = \Omega$, $K_1 = K$. La relación de dispersión se obtiene a partir de (2.148) considerando que $A(v) = A(x, t)$, dando como resultado $K = -(a/b)\Omega$.

Una vez obtenido el potencial calculamos la intensidad de campo mediante $\phi^\mu = \partial^\mu A$, la cual en principio incluye tanto el modo de Goldstone como aquel que no es de Goldstone. Para determinar lo anterior se requiere

$$\partial_t A = -\frac{b}{c}\partial_v A + \frac{a}{c}\partial_u A, \quad \partial_x A = \frac{a}{c}\partial_v A - \frac{b}{c}\partial_u A. \quad (2.155)$$

Recordando que $A = A(v)$, el resultado final es

$$\phi^0 = -\frac{b}{c}\partial_v A, \quad \phi^1 = -\frac{a}{c}\partial_v A, \quad (2.156)$$

de lo cual se encuentra que ϕ^μ es proporcional al vector N^μ definido en la Ecu. (2.147). Por lo tanto, el único grado de libertad de la teoría corresponde al modo de Goldstone que se propaga.

2.7.1.2. Potencial tipo modelo de abejorro

Una manera alternativa de considerar la realización del rompimiento de simetría, para estudiar la dinámica del modelo, es incluyendo una restricción adicional que fije directamente el campo Φ^μ en su mínimo. De esta forma se *congelan* los modos que no son de Goldstone de una manera similar a lo que se realiza en los llamados modelos de abejorro.

Partimos del Lagrangiano

$$L = -\frac{\lambda}{2}(\Phi^2 - C^2) - A^\nu \Phi_\nu - \Phi_\mu J^\mu, \quad (2.157)$$

donde se ha introducido la notación

$$A^\nu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu X. \quad (2.158)$$

Esta teoría cuenta con restricciones y el correcto conteo de los grados de libertad deberá realizarse siguiendo el método de Dirac empleado en secciones anteriores. Los momentos canónicos asociados a las variables $\lambda, \phi_0, \phi_1, X$ se encuentran dados por

$$\pi^\lambda = 0, \quad \pi^0 = 0, \quad \pi^1 = 0, \quad \pi^X = -\phi_1, \quad (2.159)$$

respectivamente. Los paréntesis de Poisson no nulos están dados por

$$\{\lambda, \pi^\lambda\} = 1, \quad \{\phi_0, \pi^0\} = 1, \quad \{\phi_1, \pi^1\} = 1, \quad \{X, \pi^X\} = 1. \quad (2.160)$$

El siguiente paso es construir el Hamiltoniano canónico, obteniendo

$$H_c = -\phi_0 \partial_1 X + \frac{\lambda}{2}(\Phi^2 - C^2) + \Phi_\mu J^\mu, \quad (2.161)$$

con el conjunto de 4 constricciones primarias

$$\Psi_1 = \pi_\lambda, \quad \Psi_2 = \pi_0, \quad \Psi_3 = \pi_1, \quad \Psi_4 = \pi^X + \phi_1. \quad (2.162)$$

El Hamiltoniano extendido estará dado por

$$H_E = -\phi_0 \partial_1 X + \frac{\lambda}{2}(\Phi^2 - C^2) + \Phi_\mu J^\mu + \alpha_1 \pi^\lambda + \alpha_2 \pi^0 + \alpha_3 \pi^1 + \alpha_4(\pi^X + \phi_1), \quad (2.163)$$

siendo α_i ($i = 1, \dots, 4$) multiplicadores de Lagrange. La evolución de las constricciones Ψ_1 y Ψ_2 producen dos constricciones secundarias

$$\Psi_5 = \{\Psi_1, H_E\} = \frac{1}{2}(\Phi^2 - C^2), \quad \Psi_6 = \{\Psi_2, H_E\} = \lambda\phi_0 + \partial_1 X + J^0, \quad (2.164)$$

respectivamente. La evolución temporal de las constricciones $\Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6$ no produce constricciones adicionales, con lo cual el método de Dirac se detiene en este momento. El determinante de la matriz que surge del álgebra entre las constricciones $\{\Psi_i, \Psi_j\}$ con ($i, j = 1, \dots, 6$) es igual a ϕ_0^4 , el cual pedimos que sea no nulo. Por lo tanto, la teoría cuenta con 6 constricciones de segunda clase. Recordando que las variables del modelo son $(\phi_0, \phi_1, \lambda, X)$ se sigue de manera inmediata que la teoría cuenta con 1 grado de libertad ($\#d.o.f. = \frac{1}{2}[2 \times 4 - 6] = 1$). Las ecuaciones de movimiento que resultan del Lagrangiano para este modelo son

$$\Phi^2 = C^2, \quad \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi_\nu = 0, \quad \Phi_\nu = -\frac{1}{\lambda}(A_\nu + J_\nu). \quad (2.165)$$

Multiplicando por Φ^ν ambos lados de la última ecuación en (2.165) se puede obtener λ , lo cual da

$$\lambda = -\frac{1}{C^2} \Phi^\alpha (A_\alpha + J_\alpha), \quad (2.166)$$

Sustituyendo λ de vuelta en la misma ecuación, podemos reescribirla como

$$\left(\eta^{\nu\alpha} - \frac{1}{C^2} \Phi^\nu \Phi^\alpha \right) (A_\alpha + J_\alpha) = 0. \quad (2.167)$$

Si bien esta ecuación es lineal en X ($A^\nu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu X$), la manera que se acopla con Φ_ν no permite obtener soluciones analíticas.

Otra forma alternativa de resolver para λ es tomar el cuadrado de la última ecuación en (2.165) y posteriormente hacer uso de que $\Phi^2 = C^2$, con esto se obtiene

$$\Phi^2 = \frac{1}{\lambda^2} (A_\nu + J_\nu)^2 = C^2. \quad (2.168)$$

Y por lo tanto, nuevamente despejando para λ y sustituyéndola de vuelta conseguimos

$$\Phi_\nu = -\frac{\sqrt{C^2}}{\sqrt{(A_\alpha + J_\alpha)^2}} (A_\nu + J_\nu), \quad (2.169)$$

dando la ecuación

$$\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\frac{(A_\nu + J_\nu)}{\sqrt{(A_\alpha + J_\alpha)^2}} \right) = 0, \quad (2.170)$$

donde el grado de libertad es descrito por el campo X . Nuevamente la no linealidad de la ecuación no permite obtener soluciones explícitas.

Una forma más de tratar el Lagrangiano anterior es considerar a Φ_ν como un campo auxiliar. Resolviendo para este campo a partir de su ecuación de movimiento tenemos que

$$\delta\Phi : \quad -\lambda\Phi_\nu - (A_\nu + J_\nu) = 0, \quad \rightarrow \quad \Phi_\nu = -\frac{1}{\lambda} (A_\nu + J_\nu). \quad (2.171)$$

Sustituyendo esto directamente en el Lagrangiano obtenemos

$$L = \frac{\lambda}{2} C^2 + \frac{1}{2\lambda} (A_\nu + J_\nu)^2. \quad (2.172)$$

Ahora resolviendo para λ a partir de su ecuación de movimiento obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{C^2}} \sqrt{(A_\nu + J_\nu)^2}, \quad (2.173)$$

lo cual da el Lagrangiano final

$$L = \sqrt{C^2} \sqrt{(A_\nu + J_\nu)^2}. \quad (2.174)$$

Tomando en cuenta la definición de A^ν en la Ecu. (2.158), la variación del Lagrangiano anterior respecto al campo X da la ecuación mostrada en (2.170).

Una estrategia más conveniente para la obtención de soluciones en función de los modos de Goldstone es parametrizar el campo Φ^μ mediante transformaciones de Lorentz actuando sobre el estado de vacío (2.146) y considerar a los parámetros de la transformación dependientes de las coordenadas

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}. \quad (2.175)$$

De lo anterior obtenemos

$$\Phi^0 = a \cosh \theta + b \sinh \theta, \quad \Phi^1 = a \sinh \theta + b \cosh \theta, \quad (2.176)$$

donde el modo de Goldstone es descrito por el campo $\theta(x)$. Se verifica que la parametrización anterior satisface la constricción $\Phi^2 = C^2$. Sustituyendo la parametrización en el Lagrangiano de la Ecu. (2.157) tenemos

$$L = -[a(\partial_x X + J_0) + b(\partial_t X + J_1)] \cosh \theta - [b(\partial_x X + J_0) + a(\partial_t X + J_1)] \sinh \theta.$$

Las ecuaciones de movimiento que se originan de este Lagrangiano son

$$\delta\theta : [(\partial_x X + J_0) a + b (\partial_t X + J_1)] \sinh \theta + [b (\partial_x X + J_0) + a (\partial_t X + J_1)] \cosh \theta = 0, \quad (2.177)$$

$$\delta X : (a \sinh \theta + b \cosh \theta) \partial_x \theta + (b \sinh \theta + a \cosh \theta) \partial_t \theta = 0. \quad (2.178)$$

La aproximación lineal de las ecuaciones de movimiento fuera de las fuentes se lee como

$$[(a\partial_x + b\partial_t)X] \theta + [(b\partial_x + a\partial_t)X] = 0, \quad b\partial_x \theta + a\partial_t \theta = 0. \quad (2.179)$$

Haciendo uso de las coordenadas u, v definidas en (2.150), las ecuaciones anteriores se pueden reescribir como

$$(\partial_v X)\theta + \partial_u X = 0, \quad \partial_u \theta = 0, \quad (2.180)$$

de tal manera que el grado de libertad θ es una función arbitraria de v . El campo $\theta = \theta(ax - bt)$ describe una función que se propaga en términos de las variables t y x . La ecuación restante es

$$\partial_u X = -\theta(v)\partial_v X. \quad (2.181)$$

Esta ecuación se resuelve mediante separación de variables

$$X = U(u)V(v), \quad (2.182)$$

con el resultado final

$$U(u) = U_0 \exp(-\alpha u), \quad V(v) = V_0 \exp\left(\alpha \int_0^v \frac{dv'}{\theta(v')}\right), \quad (2.183)$$

donde α es una constante de separación. Se debe enfatizar que el campo X está determinado por el grado de libertad θ , lo cual se puede observar en las últimas dos ecuaciones.

2.7.2. Modelos de abejorro para el caso (1+1)-dimensional

2.7.2.1. Congelando los modos que no son de Goldstone

A continuación consideramos el caso (1 + 1)-dimensional en los denominados modelos de abejorro y realizamos algunas comparaciones con el modelo que estudiamos previamente. Iniciamos analizando el caso donde se introduce un multiplicador de Lagrange que fija el campo Φ en su mínimo con la finalidad de *congelar* los modos que no son de Goldstone. La densidad Lagrangiana que define el modelo de abejorro se lee como

$$L = -\frac{1}{4}\Phi^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\Phi^2 - C^2), \quad \Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu\Phi_\mu, \quad (2.184)$$

donde C^μ denota el estado de vacío del modelo. Las ecuaciones de movimiento son

$$\partial^\mu\Phi_{\mu\nu} - \lambda\Phi_\nu = 0, \quad \Phi^2 = C^2. \quad (2.185)$$

Los multiplicadores de Lagrange pueden ser eliminados multiplicando la primera relación en (2.185) por Φ^ν , posteriormente se usa la segunda relación, igualmente de (2.185), y con esto se resuelve para λ . El resultado es

$$\lambda = \frac{1}{C^2}\Phi^\alpha\partial^\beta\Phi_{\beta\alpha}. \quad (2.186)$$

Sustituyendo de vuelta en la primera relación obtenemos

$$\left(\delta_\alpha^\nu - \frac{\Phi^\nu \Phi_\alpha}{C^2} \right) \partial_\beta \Phi^{\beta\alpha} = 0. \quad (2.187)$$

Ahora se parametrizan los modos de Goldstone por medio de transformaciones de Lorentz donde los parámetros dependen de las coordenadas

$$\Phi^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(x) C^\nu, \quad (2.188)$$

en la aproximación lineal obtenemos

$$\Phi^\mu = C^\mu + G^\mu{}_\nu C^\nu, \quad \phi^\mu = G^\mu{}_\nu C^\nu. \quad (2.189)$$

Aquí $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$, es el generador del grupo de Lorentz que contiene el parámetro que depende de las coordenadas, el cual describe el modo de Goldstone de la teoría. También se cumple que $C_\mu \phi^\mu = 0$ idénticamente, el cual está de acuerdo con la propiedad bien conocida de que los modos de Goldstone son ortogonales al estado de vacío. Sustituyendo $\Phi^\mu = C^\mu + \phi^\mu$ en la Ecu. (2.187) se produce la ecuación

$$\left(\delta_\alpha^\nu - \frac{C^\nu C_\alpha}{C^2} \right) \partial_\beta \phi^{\beta\alpha} - \frac{1}{C^2} (\phi^\nu C_\alpha + C^\nu \phi_\alpha) \partial_\beta \phi^{\beta\alpha} - \frac{1}{C^2} \phi^\nu \phi_\alpha \partial_\beta \phi^{\beta\alpha} = 0. \quad (2.190)$$

Para el estudio de las propiedades de propagación de los modos de Goldstone contenidos en ϕ^μ es suficiente considerar la versión linealizada de (2.190), la cual es

$$\left(\eta^{\nu\alpha} - \frac{C^\nu C^\alpha}{C^2} \right) \partial^\beta \phi_{\beta\alpha} = 0, \quad C_\alpha \phi^\alpha = 0. \quad (2.191)$$

Estas ecuaciones son análogas a las que se consideran en la Ref. [27] donde se discute la propagación de los modos de Goldstone en gravitación cuando se presenta una violación de la simetría de Lorentz. La aproximación lineal considerada anteriormente en la Ecu. (2.190) se satisface siempre y cuando se considere

$$|\phi|/\sqrt{|C^2|} \ll 1. \quad (2.192)$$

A diferencia del caso (3+1)-dimensional donde se hace uso de términos cinéticos tipo teorías BF ($\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \partial_\mu X_\nu$), vemos que estos modelos de abejorro en (1+1)-dimensiones con términos cinéticos estándares ($\Phi_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}$) conservan una dinámica cuando uno linealiza directamente la ecuación al orden más bajo. Esto puede ser observado de la Ecu. (2.191), que básicamente describe las ecuaciones estándares ($\partial_\mu \phi^{\mu\nu} = 0$) proyectadas en el subespacio ortogonal al estado de vacío.

2.7.2.2. Modelo de abejorro con un potencial arbitrario

A continuación estudiamos otro modelo de abejorro en $(1 + 1)$ -dimensiones en el cual se presenta un rompimiento espontáneo de simetría debido a un valor de expectación no nulo del estado de vacío, ahora en el caso donde se considera un potencial arbitrario $V(\Phi^2)$. El Lagrangiano es

$$L = -\frac{1}{4}\Phi^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} - V(\Phi^\mu\Phi_\mu) - \Phi_\mu J^\mu, \quad \Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu\Phi_\mu, \quad (2.193)$$

donde V tiene uno de sus mínimos en $\Phi_\mu = C_\mu$, definidos por $\Phi_\mu\Phi^\mu = C_\mu C^\mu = \text{cte}$.

A diferencia de la electrodinámica estándar este modelo de abejorro si cuenta con un grado de libertad, lo cual ocurre porque el potencial $V(\Phi^\mu\Phi_\mu)$ rompe la invariancia de norma, que a final de cuentas es la que termina eliminando los grados de libertad en el caso estándar $(1 + 1)$ -dimensional. Para ver explícitamente que el modelo contiene un grado de libertad nuevamente tenemos que llevar a cabo el método de Dirac. Los momentos canónicos asociados a las variables Φ_0 y Φ_1 son

$$\pi^0 = 0, \quad \pi^1 = \Phi_{01} = \partial_0\Phi_1 - \partial_1\Phi_0. \quad (2.194)$$

El Hamiltoniano canónico será

$$\begin{aligned} H_c &= \pi^1\dot{\Phi}_1 - L, \\ &= \frac{1}{2}(\pi^1)^2 - \Phi_0\partial_1\pi^1 + V(\Phi^\mu\Phi_\mu) + \Phi_\mu J^\mu. \end{aligned} \quad (2.195)$$

Con los paréntesis de Poisson no nulos

$$\{\Phi_0, \pi^0\} = 1, \quad \{\Phi_1, \pi^1\} = 1. \quad (2.196)$$

El Hamiltoniano extendido estará dado por

$$H_E = \frac{1}{2}(\pi^1)^2 - \Phi_0\partial_1\pi^1 + V(\Phi^\mu\Phi_\mu) + \Phi_\mu J^\mu + \lambda\pi^0, \quad (2.197)$$

siendo λ un multiplicador de Lagrange. La evolución temporal de la restricción primaria $\Psi_1 = \pi^0 \approx 0$ genera la restricción secundaria $\Psi_2 = \partial_1\pi^1 - 2V'\Phi_0$, donde V' indica derivada respecto al argumento $\Phi^2 = \Phi^\mu\Phi_\mu$. La evolución de esta última restricción fija el multiplicador de Lagrange λ y no se obtienen más restricciones. Es fácil observar que estas restricciones no conmutan entre ellas $\{\Psi_1, \Psi_2\} \neq 0$, con lo cual constituyen restricciones de segunda clase. El conteo de los grados de libertad será $\#d.o.f. = \frac{1}{2}[2 \times 2 - 2] = 1$. Notemos que en el caso de la electrodinámica estándar $V' = 0$ y las restricciones anteriores conmutan entre ellas, por ende serán restricciones de primera clase, mostrando que la teoría contiene invariancia de norma. El conteo de los grados de libertad para el caso de la electrodinámica estándar será $\#d.o.f. = \frac{1}{2}[2 \times 2 - 2 \times 2] = 0$.

Regresando al modelo de abejorro, vemos que la principal diferencia respecto al Lagrangiano (2.139) es la aparición del término cinético estándar $\Phi^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu}$, en lugar del considerado en

dicho Lagrangiano (2.139) como un término BF, lo que produce una dinámica diferente en cada caso.

A continuación expandimos el potencial alrededor de uno de sus mínimos tomando

$$\Phi_\mu(x) = C_\mu + \phi_\mu(x). \quad (2.198)$$

Separando las componentes de ϕ^μ en la dirección del estado de vacío identificamos los modos de Goldstone Θ_μ de la siguiente manera

$$\phi_\mu(x) = C_\mu \omega(x) + \Theta_\mu(x), \quad C^\mu \Theta_\mu = 0, \quad (2.199)$$

donde $\omega(x)$ describe los modos masivos. Observamos que ω y Θ_μ pueden ser escritos en términos de ϕ_μ como

$$\omega = \frac{1}{C^2} C^\mu \phi_\mu, \quad \Theta^\mu = \left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{1}{C^2} C^\mu C^\alpha \right) \phi_\alpha. \quad (2.200)$$

También tenemos que

$$\Phi_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} = C_\nu \partial_\mu \omega - C_\mu \partial_\nu \omega + \Theta_{\mu\nu}, \quad (2.201)$$

para la segunda relación en (2.193).

Dado que ω y Θ_μ están unificados en el campo ϕ_μ , realizamos la expansión del potencial en términos de este último campo y subsecuentemente analizamos la propagación de ω y Θ_μ . En completa analogía con (2.93) tenemos

$$V(C^\nu + \phi^\nu) \equiv \bar{V}(\phi^\nu) = V(C^\nu) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \Sigma_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1} \nu_n}^{(n)} \phi^{\nu_1} \phi^{\nu_2} \dots \phi^{\nu_{n-1}} \phi^{\nu_n}, \quad (2.202)$$

donde las matrices $\Sigma^{(n)}$ están definidas por

$$\Sigma_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1} \nu_n}^{(n)} = \left(\frac{\partial^n V(\Phi^2)}{\partial \Phi^{\nu_1} \partial \Phi^{\nu_2} \dots \partial \Phi^{\nu_{n-1}} \partial \Phi^{\nu_n}} \right)_C. \quad (2.203)$$

Descartando el término constante y separando la contribución cuadrática, el potencial \bar{V} puede ser escrito como

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \Sigma_{\mu\nu}^{(2)} \phi^\mu \phi^\nu + \bar{V}_{int}, \quad (2.204)$$

donde \bar{V}_{int} incluye términos con $n \geq 3$ que provienen de la expansión (2.202). Estos términos producirán autointeracciones no lineales entre ω y Θ^μ en las ecuaciones de movimiento. Dado que $V = V(\Phi^2)$ se tiene que $\Sigma_{\mu\nu}^{(2)} = 4V''(C^2)C_\mu C_\nu$. Nuevamente, el teorema de Goldstone establece que $\Sigma_{\mu\nu}^{(2)}$ tiene modos cero definidos por $\Sigma_{\mu\nu}^{(2)} \Theta^\mu = 0$, con $C_\mu \Theta^\mu = 0$.

El siguiente paso es encontrar las ecuaciones de movimiento para los campos independientes Θ^μ y ω , lo cual puede ser hecho sustituyendo (2.199) en el Lagrangiano

$$\hat{L} = -\frac{1}{4}\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}^{(2)}\phi^\mu\phi^\nu - \bar{V}_{int} - \phi_\mu J^\mu + \Lambda C^\alpha\Theta_\alpha \equiv L(\phi_\mu) + \Lambda C^\alpha\Theta_\alpha, \quad \phi_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu, \quad (2.205)$$

y realizando las correspondientes variaciones. Observamos que en (2.205) se ha incluido la constricción $C^\alpha\Theta_\alpha = 0$ a través del multiplicador de Lagrange Λ . Introducimos la notación

$$\hat{S}(\phi_\mu, \Theta_\mu) = \int d^4x \hat{L} = S(\phi_\mu) + \int d^4x \Lambda C^\alpha\Theta_\alpha, \quad S(\phi_\mu) = \int d^4x L(\phi_\mu), \quad (2.206)$$

por medio de la cual pueden ser obtenidas las ecuaciones de movimiento para ω y Θ_μ en función de ϕ_μ . De hecho

$$0 = \frac{\delta\hat{S}}{\delta\omega(x)} = C^\mu \left(\frac{\delta S}{\delta\phi^\mu(x)} \right), \quad 0 = \frac{\delta\hat{S}}{\delta\Theta^\mu(x)} = \frac{\delta S}{\delta\phi^\mu(x)} + \Lambda C_\mu, \quad (2.207)$$

donde el primer y segundo término producen las ecuaciones de movimiento para ω y Θ_μ , respectivamente. Resolviendo el multiplicador de Lagrange en la segunda relación de (2.207) y sustituyéndola en la ecuación de movimiento para Θ_μ obtenemos

$$\left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{1}{C^2} C^\mu C^\alpha \right) \left(\frac{\delta S}{\delta\phi^\alpha(x)} \right) = 0, \quad (2.208)$$

donde la cantidad en el primero de los paréntesis corresponde a un proyector en el espacio ortogonal al estado de vacío C^μ . De esta forma, ambas ecuaciones de movimiento pueden ser derivadas del objeto básico

$$\left(\frac{\delta S}{\delta\phi^\nu(x)} \right) = \partial^\mu\phi_{\mu\nu} + 4C^2 V''(C^2) C_\nu\omega + \frac{\partial\bar{V}_{int}}{\partial\phi^\nu} + J_\nu, \quad (2.209)$$

donde hemos empleado la primera relación de (2.200). Ahora consideramos las ecuaciones de movimiento en la aproximación lineal y fuera de las fuentes. Bajo estas consideraciones, después de usar (2.201), reescribimos (2.209) como

$$\left(\frac{\delta S}{\delta\phi^\nu(x)} \right) = C_\nu (\partial^2 + M^2)\omega - C_\mu\partial^\mu\partial_\nu\omega + \partial^\mu\Theta_{\mu\nu}, \quad M^2 = 4C^2 V''(C^2), \quad (2.210)$$

donde hemos tomado $M^2 > 0$ y la identificamos como la masa del campo ω . Las ecuaciones de movimiento para ω son obtenidas proyectando (2.210) en C^ν , lo cual da

$$(\partial^2 + M^2)\omega - \frac{1}{C^2}(C^\nu\partial_\nu)^2\omega + \frac{1}{C^2}C^\nu\partial^\mu\Theta_{\mu\nu} = 0. \quad (2.211)$$

La ecuación para Θ^μ surge a partir de (2.208) y está dada por

$$\left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{1}{C^2} C^\mu C^\alpha \right) (\partial^2\Theta_\alpha - \partial_\alpha\partial^\beta\Theta_\beta - \partial_\alpha(C^\beta\partial_\beta)\omega) = 0. \quad (2.212)$$

Tomando la derivada ∂_μ de la ecuación (2.212) y empleando la expresión $\partial^2\omega$ que se obtiene de (2.211), produce

$$(C^\beta \partial_\beta) \omega = -\frac{2}{C^2 M^2} [(C^\mu \partial_\mu)^2 (\partial^\beta \Theta_\beta)], \quad (2.213)$$

lo cual permite reescribir la Ecu. (2.212) únicamente en términos de Θ^μ como

$$\left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{1}{C^2} C^\mu C^\alpha \right) \left(\partial^2 \Theta_\alpha - \partial_\alpha (\partial^\beta \Theta_\beta) + \frac{2}{C^2 M^2} \partial_\alpha (C^\mu \partial_\mu)^2 (\partial^\beta \Theta_\beta) \right) = 0. \quad (2.214)$$

La correspondiente Ecu. (2.191) para los modos de Goldstone, obtenida en la subsección anterior, se recupera en este esquema tomando el límite $M \rightarrow \infty$, que corresponde a congelar el modo masivo correspondiente.

Dado que el modelo definido por el Lagrangiano (2.193) tiene un grado de libertad, es interesante determinar si corresponde al modo de Goldstone o al modo masivo (o a una combinación). Para determinar esto, empezamos a partir de la ecuación linealizada para ϕ^μ , la cual incluye ambas excitaciones ω y Θ^μ ,

$$\partial_\alpha (\partial^\alpha \phi_\nu - \partial_\nu \phi^\alpha) - \Sigma_{\nu\alpha}^{(2)} \phi^\alpha = 0. \quad (2.215)$$

Salvo una constante, tomamos $\Sigma_{\mu\nu}^{(2)} = C_\mu C_\nu$ con C^μ dado por (2.146) y buscamos soluciones de onda plana

$$[\phi_\nu] = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} e^{ik_\mu x^\mu}, \quad k_\mu = (\omega, k), \quad \partial_\mu = ik_\mu, \quad (2.216)$$

donde

$$C^\mu \phi_\mu = (aX + bY), \quad \partial^\alpha \phi_\alpha = i(\omega X - kY), \quad \partial^2 = -(\omega^2 - k^2). \quad (2.217)$$

Sustituyendo en la Ecu. (2.215) se tiene que

$$\begin{bmatrix} (k^2 - a^2) & -(\omega k + ab) \\ (\omega k + ab) & (-\omega^2 + b^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0. \quad (2.218)$$

Imponiendo que el determinante de la matriz anterior sean nulo obtenemos la única relación de dispersión

$$k = -\frac{a}{b}\omega, \quad (2.219)$$

mostrando la presencia de un único grado de libertad, el cual es

$$[\phi_\nu] = \frac{Y}{a} \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}. \quad (2.220)$$

A partir de esta solución general obtenemos que

$$\omega = C^\alpha \phi_\alpha = 0, \quad (2.221)$$

por lo que el modo masivo es cero y el único grado de libertad corresponde al modo de Goldstone. En dimensiones superiores se espera que los modos masivos sean no nulos.

La siguiente tabla resume los principales resultados de los modelos estudiados. FCC denota el número de constricciones de primera clase que contiene la teoría, SCC denota el número de constricciones de segunda clase, d.o.f. denota el número de grados de libertad obtenidos mediante el método de Dirac y GB denota el número de bosones de Goldstone.

	Término cinético	Potencial	Campos	FCC	SCC	d.o.f.	GB
Maxwell (3+1)	$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	— — —	A_μ	2	0	2	0
BF (3+1)	$-\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}\partial_\mu X_\nu$	$V(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$	$X_\mu, F_{\mu\nu}$	2	12	2	4
BF (1+1)	$-\frac{1}{2}\phi_\nu\epsilon^{\nu\mu}\partial_\mu X$	$V(\phi_\nu\phi^\nu)$	X, ϕ_ν	0	4	1	1
BF (1+1)	$-\frac{1}{2}\phi_\nu\epsilon^{\nu\mu}\partial_\mu X$	$-\frac{\lambda}{2}(\phi^2 - C^2)$	X, ϕ_ν, λ	0	6	1	1
Bumblebee (1+1)	$-\frac{1}{4}\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}$	$V(\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu})$	ϕ_0, ϕ_1	0	2	1	1

2.8. Conclusiones

Empezamos exponiendo las conclusiones referentes al caso $(3 + 1)$ -dimensional. Se realizó el estudio de un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz inducido por un valor de expectación $C_{\mu\nu}$ de la intensidad de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$. Como se comentó previamente en el texto, por abuso de lenguaje nos referimos como valor de expectación (VEV) o estado de vacío a un mínimo de la energía en la teoría, en este caso dado por un mínimo en el potencial, lo anterior lo aclaramos porque sabemos que clásicamente no tiene sentido referirnos a VEV o estados de vacío. La invariancia de norma se preserva en todo momento y por ende las excitaciones en el modelo son de masa nula. Uno de los principales puntos que se trataron fue la reinterpretación y caracterización del teorema de Goldstone. Considerando como variable inicial la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$, en lugar del potencial vectorial A_μ , hemos introducido el rompimiento espontáneo de simetría mediante un potencial $V(F_{\mu\nu})$, lo cual da origen una formulación de electrodinámica no lineal (NLED) que difiere a la tratada por Plebanski. La que aquí empleamos tiene la ventaja de que las excitaciones de los campos (\mathbf{D} y \mathbf{H} , unificadas en el objeto $P_{\mu\nu}$) están dadas directamente en función de las intensidades de campo (\mathbf{E} y \mathbf{B} , unificadas en el objeto $F_{\mu\nu}$) sin necesidad de invertir la relación no lineal $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(P_{\alpha\beta})$. Empezamos a partir de la acción incluyendo el potencial $V(F_{\mu\nu})$, el cual asumimos que surge de una teoría más fundamental y que tiene un mínimo en $F_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}$ que define el estado de mínima energía del modelo. Con este potencial se construye la acción $S(F_{\mu\nu}, X_\alpha)$ en la Ecu. (2.1), la cual incluye los multiplicadores de Lagrange X_α que dan origen a la identidad de Bianchi para el tensor de intensidad de campo electromagnético que describe la teoría final de NLED. Mediante el método de Dirac para teorías con restricciones se mostró que el modelo contiene 2 grados de libertad. Bajo las condiciones de pedir configuraciones de campos constantes que minimicen la energía, el estado de vacío del modelo está dado por el mínimo del potencial $V(F_{\mu\nu})$. Expandiendo los campos alrededor del mínimo se definen las excitaciones físicas contenidas en el objeto $f_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - C_{\mu\nu}$. Después de la eliminación de los multiplicadores de Lagrange la teoría de NLED está definida por el Lagrangiano $L(a_\mu) = -\bar{V}(f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu)/2 - J_\mu a^\mu$. La expansión de \bar{V} en potencias de $f_{\mu\nu}$ permite la introducción de las susceptibilidades generalizadas $\Sigma_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n}^{(2n)}$ de una manera similar a cuando la polarización es expandida en función de susceptibilidades en el estudio de efectos no lineales en la óptica estándar. En el límite de $C_{\mu\nu} \rightarrow 0$ el modelo aquí empleado no se reduce a la electrodinámica estándar con pequeñas correcciones, sino que reproduce correcciones a una teoría de NLED. La imposición de invariancia sobre el potencial ante transformaciones de Lorentz pasivas, junto con iteraciones sobre la condición resultante da el correspondiente teorema de Goldstone, junto con las siguientes propiedades para las susceptibilidades: (1) $\Sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = 0$, lo cual es una consecuencia de la condición de mínimo. (2) $\Sigma_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}$ tiene modos cero $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$, los cuales son los modos de Goldstone del modelo, y que son generados por transformaciones infinitesimales de Lorentz (activas) que no mantienen el vacío invariante. Esto constituye el teorema de Goldstone en nuestro caso. (3) Las susceptibilidades generalizadas $\Sigma_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n}^{(2n)}$ son tensores invariantes bajo las transformaciones que mantienen el vacío invariante. (4) Aquellas transformaciones que no mantienen el estado de

vacío invariante imponen relaciones entre las susceptibilidades de orden $2n$ y $2n + 2$. Los modos de Goldstone fueron construidos explícitamente. En el caso de la electrodinámica en cuatro dimensiones se pueden identificar dos familias de estados de mínima energía, donde los elementos dentro de una familia están conectados por medio de transformaciones de Lorentz, mientras que elementos en distintas familias no pueden ser conectados por dichas transformaciones. Eligiendo la representación $SU(2) \times SU(2)$ del grupo de Lorentz, los dos casos pueden ser tratados de manera análoga. Se verificó que para cualquier elección de los parámetros e y b , que definen el vacío $C_{\mu\nu}$, siempre existen cuatro generadores $G_{\hat{A}}$ que no mantienen el vacío invariante y que dan origen a los cuatro modos de Goldstone. Además hay dos generadores $G_{\hat{A}}$ que sí mantienen el vacío invariante. Esta partición de los generadores implica que la base para el espacio de tensores antisimétricos puede ser dividida en dos conjuntos ortogonales $\{\Theta_{\mu\nu}^{\hat{A}}\}$ y $\{\Theta_{\mu\nu}^{\hat{A}'}\}$, los cuales expanden los modos de Goldstone y aquellos que no corresponden a Goldstone, respectivamente.

Las propiedades de propagación de los grados de libertad del modelo están dictadas por $(f_L)^{\mu\nu}$, que se obtiene como una solución de las ecuaciones de movimiento linealizadas. En nuestro caso, la dinámica depende del proceso de linealización y uno tiene que tener cuidado al llevarla a cabo, lo anterior con el objeto de mantener los dos grados de libertad iniciales. Las propiedades de propagación de los modos de Goldstone se obtienen subsecuentemente proyectando $(f_L)^{\mu\nu}$ en el correspondiente subespacio.

Por último, las relaciones de dispersión se derivan siguiendo pasos análogos a los empleados en óptica no lineal, obteniendo (2.136). A partir de estas relaciones de dispersión se construyeron métricas efectivas, que pueden entenderse como una modificación del espacio-tiempo de Minkowski debido al carácter no lineal de la teoría.

Respecto a las conclusiones en el caso $(1 + 1)$ -dimensional distinguimos las siguientes diferencias: el modelo tiene un grado de libertad, no cuenta con invariancia de norma y siempre existe un único modo de Goldstone. El modelo de electrodinámica no lineal y el rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz se introducen de la misma forma que en el caso $(3 + 1)$ -dimensional. Dado que en $(1 + 1)$ -dimensiones el grupo de Lorentz cuenta con un solo generador, la identificación del modo de Goldstone es relativamente directa cuando se sigue el método empleado en el caso anterior. La simplicidad para este caso permite hacer un extenso estudio de las propiedades de propagación, encontrando que en la aproximación linealizada y fuera de las fuentes el único grado de libertad tiene como solución la onda plana $\phi_\mu = B_\mu W_1(ax - bt)$, siendo B_μ ortogonal al estado de vacío, lo cual se traduce en que el modo de Goldstone del modelo siempre coincide con el grado de libertad que se propaga.

La interpretación del teorema de Goldstone junto con las relaciones entre las susceptibilidades generalizadas no difiere sustancialmente del caso $(3 + 1)$ -dimensional.

Capítulo 3

Modelo de Nambu

La posible interpretación de partículas de norma, por ejemplo, fotones y gravitones, como bosones de Goldstone (GB) surgiendo de un rompimiento espontáneo de simetría se remonta a trabajos de E. A. Ivanov y V. I. Ogievetsky [41], Bjorken [42] y Guralnik [43]. Los primeros utilizan la construcción de espacios cociente [44] para caracterizar la ruptura, en la cual el rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz (SLSB) se realiza no linealmente en función de los GB, con los campos de materia (o que no provienen de la ruptura) transformando linealmente bajo el subgrupo que mantiene el vacío invariante. Su conclusión es que cualquier teoría de norma puede interpretarse como una teoría que surge de algún rompimiento espontáneo de simetría. Una aplicación de la construcción de espacios cociente en relatividad general se reporta en la Ref. [45].

Así mismo, en las Refs. [42, 43] se consideró el caso de SLSB donde el fotón se produce como un condensado que surge del autoacoplamiento de un modelo de cuatro fermiones (self-coupled four-fermion model) siguiendo pasos similares a los desarrollados en Ref. [46] para describir soluciones de superconductores en teorías de campo. Ideas similares han sido empleadas y extendidas al caso del gravitón Refs. [47, 48, 49].

Una aproximación alternativa fue propuesta por Nambu en la Ref. [26], la cual básicamente consistía en introducir (en QED) una restricción no lineal en la teoría inicial, de manera similar a lo que se realiza en los modelos sigma no lineales para la descripción de piones. El mencionado modelo σ -QED queda definido por el Lagrangiano de Maxwell más la restricción $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$, la cual debe introducirse en el Lagrangiano. Aquí, n_μ es un vector en el espacio de Minkowski, mientras que M es una escala asociada con el SLSB. Esta restricción puede ser motivada a partir de un valor de expectación no nulo del estado de vacío $\langle A_\mu \rangle = n_\mu M$. El objetivo de la Ref. [26] fue mostrar que, bajo ciertas condiciones, este modelo es equivalente a la electrodinámica estándar, en lugar de predecir efectos físicos debidos a la violación de la simetría de Lorentz. Esta equivalencia se determinó en cálculos a nivel árbol [26]. Posteriormente, estos cálculos fueron extendidos a procesos a un lazo, con idénticos resultados: cuando las condiciones implementadas en la Ref. [26] se satisfacen, todas las contribuciones que surgen del SLSB se cancelan, dando el resultado estándar de QED [50]. El modelo σ -QED ha sido estudiado y extendido a los casos no abeliano [51, 52, 53] y gravita-

cional [54], definiendo lo que llamaremos modelos de Nambu generalizados. Las condiciones generales de cómo se restaura la simetría de norma a partir de los modelos con SLSB se estudian en las Refs. [53, 55, 56].

Cálculos perturbativos en el caso no abeliano muestran nuevamente que, al orden considerado y con las condiciones adecuadas, todas las contribuciones a procesos físicos que provienen de un SLSB se cancelan, produciendo la equivalencia con la correspondiente teoría de Yang Mills (YM), en completa analogía con el caso abeliano. Este hecho ha sido interpretado con el enunciado de que la correspondiente restricción no lineal, la cual define el modelo de Nambu, puede ser considerada como una elección de norma en una correspondiente teoría de norma abeliana o no abeliana. Esto conduciría a la equivalencia entre el modelo de Nambu y la correspondiente teoría de norma (en una norma fija). Sin embargo, para que esto sea así se requiere aclarar algunos puntos. (i) El número de d.o.f. del modelo de Nambu es mayor que el de la correspondiente teoría de norma, lo cual se entiende porque el primero ha perdido su invariancia de norma. (ii) Fijar la norma en cualquier teoría de norma requiere la introducción de fantasmas (por ejemplo, vía el método BRST [57]) que contribuyen como partículas internas en cálculos de procesos físicos. Por lo tanto, en orden de establecer la equivalencia propuesta, uno necesitaría estudiar las contribuciones de los fantasmas en dichos procesos físicos. Un posible desacoplamiento no es evidente, especialmente debido al carácter no lineal de la fijación de norma propuesta.

El presente capítulo tiene por objetivo hacer un estudio del modelo de Nambu y sus posibles generalizaciones, tanto de manera perturbativa como analítica. Ahora bien, la hipótesis general que se tiene al momento sobre el modelo de Nambu, parafraseada de diversas maneras en distintos trabajos, es que dicho modelo es equivalente a la correspondiente teoría de norma únicamente después de que la ley de Gauss junto con la conservación de la corriente son impuestas como condiciones iniciales. En trabajos previos esto último es demostrado únicamente en esquemas perturbativos a nivel de un lazo para procesos particulares. En el trabajo aquí presentado se generalizará la demostración de la mencionada equivalencia al caso más general posible, es decir, a todo orden y en cualquier proceso físico. Para el modelo de Nambu abeliano seguiremos un esquema perturbativo, mientras que en el caso no abeliano se utilizará un esquema no perturbativo.

El primer punto (i) mencionado anteriormente ha sido considerado en trabajos previos Ref. [58] para el modelo de Nambu en su versión abeliana. El segundo punto (ii) no ha sido considerado detalladamente y será el tema de estudio en la Sección 3.1 de este Capítulo, para el caso del modelo de Nambu abeliano. En la Sección 3.2 generalizamos al caso no abeliano el análisis Hamiltoniano no perturbativo desarrollado para el modelo de Nambu abeliano en Ref. [58], lo cual tiene por objetivo mostrar una equivalencia entre el modelo de Nambu no abeliano y la correspondiente teoría de Yang Mills. En la Sección 3.3 se estudia la relación entre teorías de norma y modelos tipo Nambu siguiendo un procedimiento similar al empleado en la sección anterior.

3.1. Modelo de Nambu Abeliano (Cálculo Perturbativo)

Como se mencionó previamente, el modelo de Nambu abeliano (ANM) fue propuesto en Ref. [26] para describir a la electrodinámica en una forma similar a la construcción de interacciones entre piones en el modelo sigma no lineal, la cual se caracteriza por el rompimiento espontáneo de la simetría quiral. La interpretación de los piones como bosones de Goldstone que surgen de tal rompimiento motivó la posibilidad de interpretar a los fotones como los GB que resultan del rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz. El modelo de Nambu abeliano está definido por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu, \quad (3.1)$$

más la constricción no lineal

$$A_\mu A^\mu - n^2 M^2 = 0, \quad M > 0. \quad (3.2)$$

Las definiciones de las cantidades $F_{\mu\nu}$, A_μ y J_μ son las empleadas en el Apéndice B para el caso abeliano. El vector n^μ señala la dirección del valor de expectación del vacío $\langle A^\mu \rangle = n^\mu M$ que induce el SLSB. Usualmente, uno trata separadamente los tres casos caracterizados por la elección del vector n^μ de acuerdo a las versiones tipo tiempo ($n^2 > 0$), tipo espacio ($n^2 < 0$) o tipo luz ($n^2 = 0$). Aquí consideraremos únicamente las dos primeras opciones donde una elección natural para describir los grados de libertad independientes es la siguiente:

$$n^2 > 0: \quad A_1, A_2, A_3, \quad \rightarrow \quad A_0 = \sqrt{M^2 + A_i A_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.3)$$

$$n^2 < 0: \quad A_0, A_1, A_2, \quad \rightarrow \quad A_3 = \sqrt{M^2 + A_0 A_0 - A_a A_a}, \quad a = 1, 2. \quad (3.4)$$

En lo anterior se eligió el signo positivo para despejar por medio de la raíz cuadrada la relación $x^2 = a^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{a^2}$, sin embargo, puede mostrarse que un procedimiento análogo, con idénticos resultados, se sigue de una posible elección del signo negativo. Las soluciones de la constricción (3.2) indicadas en las Ecs. (3.3) y (3.4) dejan claramente explícito el rompimiento de simetría de $SO(1,3)$ a $SO(3)$ y de $SO(1,3)$ a $SO(2,1)$ en los casos tipo tiempo y tipo espacio, respectivamente. Cada realización del ANM se define sustituyendo la variable dependiente en la densidad Lagrangiana para la electrodinámica (3.1). El cálculo de algunos procesos particulares en teoría de perturbaciones exige una expansión adicional de los términos no lineales, en la resultante densidad Lagrangiana, en potencias de las combinaciones $(A_i A_i)/M^2$ (caso tipo tiempo) y $(A_0 A_0 - A_a A_a)/M^2$ (caso tipo espacio). Después de que las soluciones (3.3) y (3.4) de la constricción se insertan en la densidad Lagrangiana (3.1) uno encuentra un sistema regular que contiene tres d.o.f. por punto en el espacio de coordenadas, donde las ecuaciones de movimiento resultantes son diferentes a las que se obtienen en la electrodinámica estándar [26, 58].

Las condiciones generales de cómo la invariancia de norma se recupera a partir de los modelos con SLSB se discuten en las Refs. [41, 55, 56, 53]. En particular, el resultado obtenido en las

Refs. [26, 58, 59] establece que la dinámica del ANM garantiza que la ley de Gauss se preserve para todo tiempo, una vez que la conservación de la corriente junto con la ley de Gauss son impuestas como condiciones iniciales. De esta forma, después de imponer las mencionadas condiciones iniciales, el ANM se reduce a la electrodinámica estándar y la conservación de la corriente permanece válida para todo tiempo como consecuencia de haber restaurado la invariancia de norma.

En esta sección consideramos la relación entre el ANM y la QED estándar a partir de una perspectiva perturbativa, poniendo atención al procedimiento de fijar la norma que se requiere en QED.

La sección está estructurada de la siguiente manera. En la Subsección 3.1.1 revisamos algunos puntos básicos de los cálculos perturbativos presentados en la Ref. [50], donde los autores introducen una redefinición conveniente del campo $A_\mu \rightarrow a_\mu$, la cual nos permite escribir el ANM en función únicamente de los GB. Esta formulación sirve como punto de referencia para comparar el ANM con la QED. En la Subsección 3.1.2 se describe cómo el formalismo BRST fija la norma $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$ en QED, introduciendo los fantasmas de Faddeev-Popov (FPG). La densidad Lagrangiana de QED, ya con la norma fija, se escribe en función de la misma redefinición del campo $A_\mu \rightarrow a_\mu$ introducida en la Subsección 3.1.1. De esta forma, uno puede mostrar que las amplitudes de Feynman para procesos físicos, que surgen de la densidad Lagrangiana del ANM y de la densidad Lagrangiana de QED con la norma ya fija, únicamente difieren por las contribuciones que surgen de los diagramas que contienen las interacciones de los FPG. El propagador del campo fantasma, junto con las restantes reglas de Feynman, se calculan en la Subsección 3.1.3. Finalmente, en la Subsección 3.1.4 incluimos la prueba general (perturbativa) de cómo los fantasmas se desacoplan cuando la QED es formulada mediante la densidad Lagrangiana con la norma ya fija que fue encontrada en la Subsección 3.1.2. El hecho de que las densidades Lagrangianas del ANM y la QED (en la norma no lineal) solo difieran por las contribuciones de los fantasmas, y que estos últimos se desacoplen, hace que los cálculos de procesos físicos realizados en teoría de perturbaciones sean idénticos, lo cual implica la equivalencia entre los modelos previamente descritos.

3.1.1. La formulación perturbativa del ANM

En esta subsección resumimos el enfoque empleado en Ref. [50], el cual es apropiado para hacer explícita la relación entre la QED y el ANM.

El punto de partida en Ref. [50] es la densidad Lagrangiana estándar de QED

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma\partial + m) \psi - e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (3.5)$$

junto con la constricción (3.2), donde los autores introducen una parametrización útil en función de un nuevo campo a_μ , definiendo

$$A_\mu(a_\rho) = a_\mu + \frac{n_\mu}{n^2} (M^2 - n^2 a^2)^{1/2}, \quad n^2 \neq 0. \quad (3.6)$$

Esta transformación puede ser invertida dando

$$a_\mu = A_\mu - \frac{n_\mu}{2n^2} \left((n \cdot A) + \sqrt{(n \cdot A)^2 + 2(M^2 - A^2 n^2)} \right). \quad (3.7)$$

Cuando sustituimos (3.6) en (3.5) tendremos $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$, dando una teoría no lineal en términos del nuevo campo a_μ . Sin embargo, $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$ todavía es la densidad Lagrangiana para QED, escrita en una forma no convencional, la cual, no obstante, veremos que provee una interpretación conveniente del campo a_μ una vez que se define el ANM. Notemos que la invariancia de norma $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$ mantiene una invariancia del $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$ en términos de una transformación muy complicada δa_μ , la cual puede ser obtenida de la Ecu. (3.7). Una propiedad importante de la redefinición del campo (3.6) es la relación

$$(A_\mu A^\mu - n^2 M^2)^2 = 4(a \cdot n)^2 [M^2 - n^2 a^2]. \quad (3.8)$$

Ahora, los autores del trabajo en la Ref. [50] se concentran en el ANM, imponiendo la constricción no lineal (3.2) sobre la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$. En términos del nuevo campo a_ν , la condición (3.2) se realiza escogiendo

$$n \cdot a = 0, \quad (3.9)$$

como solución a la relación en (3.8). Los campos a_ν , que satisfacen (3.9), definen los tres d.o.f. que son ortogonales al estado de vacío n^μ , de tal forma que éstos describen los modos de Goldstone del modelo.

Veamos cual es otra de las ventajas de haber redefinido el campo A_ν en términos del campo a_ν . Para el caso tipo espacio $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, la solución $A_0 = \sqrt{M^2 + A_i A_i}$, junto con la elección de las variables independientes A_i , es equivalente a tomar $a_0 = 0$ y reconocer que $a_i = A_i$. Para el caso tipo espacio $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ la elección de las variables independientes A_0, A_a , junto con la definición $A_3 = \sqrt{M^2 + A_0 A_0 - A_a A_a}$, corresponde a tomar $a_3 = 0, a_0 = A_0$ y $a_a = A_a$. Por lo tanto, la sustitución A_0 o A_3 en (3.5), de acuerdo a las elecciones (3.3) o (3.4), es igual a la introducción de la redefinición (3.6) con la elección adecuada de n^μ , el cual puede ser seleccionado al final de los cálculos. Siguiendo la Ref. [50], podemos escribir la densidad Lagrangiana para los casos de interés en el ANM como

$$\mathcal{L}_{\text{ANM}}(a_\mu, \bar{\psi}, \psi) = \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi), \quad n \cdot a = 0. \quad (3.10)$$

La constricción (3.9) rompe la invariancia de norma junto con la invariancia ante transformaciones activas de Lorentz. La redefinición del campo $A_\mu(a_\rho)$ implica que tenemos que sustituir

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} + \frac{1}{n^2} (n_\nu \partial_\mu - n_\mu \partial_\nu) (M^2 - n^2 a^2)^{1/2}, \quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu, \quad (3.11)$$

para la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$ en (3.5).

El siguiente paso en Ref. [50] es realizar una expansión de $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$ en potencias de a^2/M^2 conservando términos hasta el orden $(a^2)^2/M^2$, lo cual define la densidad Lagrangiana

del ANM al orden considerado en aquella referencia. Las correspondientes reglas de Feynman están dadas en Ref. [50], y el propagador $D_{\mu\nu}^{\text{ANM}}(k)$, que requeriremos en adelante está dado por

$$D_{\mu\nu}^{\text{ANM}}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(n \cdot k)} + \frac{n^2 k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right], \quad (3.12)$$

el cual automáticamente satisface $n^\mu D_{\mu\nu}^{\text{ANM}} = 0$. Recalquemos que los autores de las Refs. [26, 50] han mostrado que las contribuciones adicionales en procesos específicos de QED (hasta un lazo), que surgen de los términos que producen la violación de Lorentz, se cancelan en los cálculos del ANM, dando los resultados estándares de QED.

A continuación mostramos que los cálculos perturbativos incorporan de manera natural las dos condiciones iniciales requeridas para establecer la equivalencia entre el ANM y QED, las cuales son la ley de Gauss junto con la conservación de la corriente [26, 58, 59]. La densidad Lagrangiana del ANM empieza con la contribución libre

$$\mathcal{L}_0(a_\mu, \bar{\psi}, \psi) = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma\partial + m) \psi, \quad n \cdot a = 0. \quad (3.13)$$

La corriente $J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es conservada, como lo es una corriente de Noether que surge de la invariancia global ante transformaciones de fase de los campos fermiónicos en la densidad Lagrangiana (3.13). A su vez, la densidad Lagrangiana (3.13) da el propagador (3.12), el cual satisface la condición de capa de masa $k^\mu D_{\mu\nu}^{\text{ANM}} = 0$, para $k^2 = 0$. Por lo tanto, la ley de Gauss ha sido implementada a la Dirac sobre los estados físicos imponiendo la condición de transversabilidad $k^\mu \epsilon_\mu(k) = 0$ sobre los modos GB externos que tienen vectores de polarización $\epsilon_\mu(k)$. Ambas condiciones juegan un papel crucial en las cancelaciones obtenidas en Ref. [50], para así obtener la equivalencia entre QED y el ANM.

3.1.2. Electrodinámica en la norma $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$

Ahora consideramos el estudio de la electrodinámica estándar en la norma $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$. El objetivo principal de esta subsección es estudiar el comportamiento de las interacciones que involucran a los fantasmas de Faddeev-Popov que aparecen en el proceso de fijar la norma. Aplicaremos el método BRST [57, 60] a la densidad Lagrangiana (3.5), la cual es invariante bajo las transformaciones de norma $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$. Iniciamos introduciendo las transformaciones fermiónicas nilpotentes $\tilde{\delta}$ (transformaciones de BRST), junto con los nuevos campos fermiónicos c , \bar{c} y el campo bosónico b , de tal manera que

$$\tilde{\delta} A_\mu = \partial_\mu c, \quad \tilde{\delta} c = 0, \quad \tilde{\delta} \bar{c} = ib, \quad \tilde{\delta} b = 0. \quad (3.14)$$

Ahora construimos la densidad Lagrangiana invariante bajo BRST

$$\mathcal{L}_{\text{BRST}} = \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) + i\tilde{\delta} \left[\bar{c} \left((A_\mu A^\mu - n^2 M^2) + \frac{b}{2\alpha} \right) \right], \quad (3.15)$$

donde α es sólo un parámetro y ya hemos introducido explícitamente la condición de norma. Realizando la variación $\tilde{\delta}$ y eliminando b a partir de su ecuación de movimiento, arribamos a la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{BRST}} = \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) - \frac{\alpha}{2} (A_\mu A^\mu - n^2 M^2)^2 - 2A^\mu i\bar{c}\partial_\mu c, \quad (3.16)$$

la cual claramente exhibe $\alpha (A_\mu A^\mu - n^2 M^2)^2 / 2$ como el término que fija la norma y que introduce los FPG c y \bar{c} , los cuales son números de Grassman independientes. En este punto es conveniente introducir la parametrización (3.6) para el campo A^μ . Recalcando que tal parametrización da el resultado exacto (3.8), la densidad Lagrangiana de QED, ya con la norma fija, es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{GFED}} = & \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi) - 2\alpha M^2 (n \cdot a)^2 + 2\alpha n^2 a^2 (n \cdot a)^2 \\ & - 2 \left(a^\mu + \frac{n^\mu}{n^2} (M^2 - n^2 a^2)^{1/2} \right) i\bar{c}\partial_\mu c, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde únicamente hemos sumado las contribuciones que surgen de la fijación de norma a la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$. Vamos a enfatizar que $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$ dada en Ecu. (3.17) es la misma densidad Lagrangiana que define el ANM en Ecu. (3.10). Notemos que parte del término que fija la norma se reduce a $2\alpha M^2 (n \cdot a)^2$, cuando se reescribe en términos del campo a_μ . Esto corresponde a la elección de una norma axial en electrodinámica, pero con interacciones tipo Yang-Mills. El campo a^μ ahora describe fotones en la norma $(n \cdot a) = 0$, en lugar de modos GB como en la subsección anterior. A partir de [61] podemos leer el propagador en la norma axial

$$D_{\mu\nu}^{\text{QED}}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu}{(n \cdot k)} + k_\mu k_\nu \frac{n^2 + \frac{k^2}{4\alpha M^2}}{(n \cdot k)^2} \right], \quad (3.18)$$

que satisface

$$k^\mu D_{\mu\nu}^{\text{QED}}(k) = 0, \quad n^\mu D_{\mu\nu}^{\text{QED}}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[\frac{k^2 k_\nu}{4M^2 (n \cdot k)} \right] \frac{1}{\alpha}. \quad (3.19)$$

Ahora elegimos la llamada norma axial pura (homogénea), definida por $\alpha \rightarrow \infty$, y vemos que el propagador (3.18) se reduce a (3.12), que es precisamente el que es empleado en los cálculos del ANM realizados en Ref. [50], el cual aquí surge por el proceso de fijar la norma. El siguiente paso es estudiar las contribuciones a procesos físicos que provienen de los dos términos que aparecen fijando la norma axial en QED, los cuales están en la primera línea de la Ecu. (3.17), que son independientes de los FPG y que no están presentes en la densidad Lagrangiana del ANM en Ecu. (3.10). El término que es proporcional a $a^2 (n \cdot a)^2$ produce el vértice de cuatro fotones $V_{\alpha\beta\mu\nu}$,

$$V_{\alpha\beta\mu\nu} \sim \alpha(\eta_{\alpha\beta} n_\mu n_\nu + \text{permutaciones}). \quad (3.20)$$

Cuando saturamos $V_{\alpha\beta\mu\nu}$ con líneas internas del fotón, vía los correspondientes propagadores, este vértice tendrá dos contracciones del tipo $n^\mu D_{\mu\rho}$, lo cual da un factor que va como $1/\alpha^2$. De esta forma, la contribución neta va como $1/\alpha$ y se cancela en el límite $\alpha \rightarrow \infty$. Por otro lado, para fotones cumpliendo la condición de capa de masa tenemos $n^\mu D_{\mu\nu}(k) = 0 = k^\mu D_{\mu\nu}(k)$, y por lo tanto sus vectores de polarización $\epsilon_\mu(k)$ deben de satisfacer $n^\mu \epsilon_\mu(k) = 0 = k^\mu \epsilon_\mu(k)$. Estas dos condiciones también implican que la contribución de fotones externos en $V_{\alpha\beta\mu\nu}$ es nula. El mismo argumento aplica para el otro término que es proporcional a $(n \cdot a)^2$. En otras palabras, los términos proporcionales a $(n \cdot a)$ sólo implican la condición de norma $(n \cdot a) = 0$. Entonces, en la norma axial pura, la densidad Lagrangiana para QED con la norma ya fija en la parametrización de Ref. [50] se lee como

$$\mathcal{L}_{\text{GFED}} = \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi) + \mathcal{L}_{\text{GHOST}}, \quad (3.21)$$

la cual deseamos comparar con la densidad Lagrangiana del ANM en Ecu. (3.10). En ambos casos el requisito $(n \cdot a) = 0$ se cumple, sin embargo es debido a diferentes razones: ésta es una definición en el ANM, mientras que en la QED surge por el hecho de fijar la norma. Recalcamos que el campo a_μ tiene el mismo propagador en ambas teorías, como podemos ver de la Ecu. (3.12) para el ANM y a partir del límite $\alpha \rightarrow \infty$ en Ecu. (3.18) para QED. De esta manera, la condición $(n \cdot a) = 0$ es implementada en la misma forma para cada uno de los modelos en términos de las reglas de Feynman para el propagador de a_μ . Este propagador impone la ley de Gauss como una condición inicial en el ANM demandando la transversabilidad de los GB on-shell. Además, ya hemos mencionado que la expansión perturbativa garantiza la conservación de la corriente como una condición inicial en el ANM. A su vez, las restantes reglas de Feynman para los campos $a_\mu, \bar{\psi}, \psi$ son las mismas en ambos casos. Por lo tanto, la única diferencia entre la expansión perturbativa del ANM y QED en una norma fija surge de las interacciones que provienen de los fantasmas

$$\mathcal{L}_{\text{GHOST}} = -2 \left(a^\mu + \frac{Mn\mu}{n^2} \left(1 - \frac{n^2 a^2}{M^2} \right)^{1/2} \right) i\bar{c}\partial_\mu c, \quad (3.22)$$

cuyas contribuciones estudiamos en las siguientes subsecciones.

3.1.3. Las reglas de Feynman para la electrodinámica en la norma $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$

En esta subsección escribimos las reglas de Feynman que surgen de los acoplamientos del fotón y los FPG para QED en la norma axial pura.

Dado que \bar{c} y c son dos campos de Grassman reales e independientes, encontramos que es más conveniente introducir el doblete real

$$\begin{bmatrix} c \\ \bar{c} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi, \quad \Phi = \Phi^*, \quad (3.23)$$

en términos del cual podemos escribir

$$i\bar{c}\partial_\mu c = \frac{i}{4}\Phi\sigma^{(1)}\partial_\mu\Phi - \frac{i}{2}\partial_\mu(c\bar{c}), \quad \sigma^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (\sigma^{(1)})^T. \quad (3.24)$$

Para construir las reglas de Feynman para los fantasmas necesitamos expandir la Ecu. (3.22) en potencias de n^2a^2/M^2 , de la misma forma que fue hecho en el ANM. Esto da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{GHOST}} = & -\frac{Mn^2}{2}\Phi\sigma^{(1)}(n \cdot i\partial)\Phi - a^\mu\Phi\sigma^{(-)}i\partial_\mu\Phi + \\ & + (\Phi\sigma^{(-)}(n \cdot i\partial)\Phi) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(2m-3)!!}{2^m m!} \right) \left(\frac{((n^\mu n_\mu))^{m-1}}{M^{2m-1}} \right) (a^2)^m, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde hemos sustituido la Ecu. (3.24) y omitido una derivada total. Aquí hemos reescrito la interacción fantasma-fotón en términos del campo Φ por medio de $\sigma^{(-)} = (\sigma^{(1)} - i\sigma^{(2)})/2$, donde $\sigma^{(2)}$ es la matriz de Pauli estándar. Indicamos las reglas de Feynman para los FPG obtenidas de Ecu. (3.25) en las siguientes figuras. Las líneas discontinuas denotan a los FPG y las líneas curvadas denotan al fotón. La Figura 3.1 muestra el propagador del FPG, el cual surge del término cinético en la Ecu. (3.25). La Figura 3.2 muestra el vértice V^1 que describe la interacción fantasma-fotón. La Figura 3.3 muestra el vértice V^{2m} , $m = 1, 2, \dots$ describiendo la interacción fantasma-($2m$ fotones). La función $V_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_m\beta_m}$ es independiente de los momentos y está dada por

$$V_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_m\beta_m} = \frac{(n^2)^{m-1}(2m-3)!!}{M^{2m-1}} (\eta_{\alpha_1\beta_1}\eta_{\alpha_2\beta_2}\dots\eta_{\alpha_m\beta_m} + perm). \quad (3.26)$$

Las permutaciones en la Ecu. (3.26) no incluyen repeticiones y hay $(2m)!/(2^m m!)$ términos

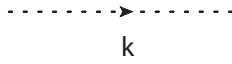


Figura 3.1: El propagador del fantasma: $s(k) = \sigma^{(1)} \frac{i}{M} \frac{n^2}{(n \cdot k)}$.

para una m dada. Suprimimos los índices tensoriales en la notación V^1 y V^{2m} , los cuales pueden ser recuperados a partir de las definiciones en las Figs. 3.2 y 3.3, junto con la Ecu. (3.26).

3.1.4. Contribuciones de los fantasmas de Faddeev-Popov a procesos físicos

Finalmente, consideramos las contribuciones a procesos físicos que surgen de las interacciones de los FPG. Dado que los FPG se acoplan únicamente al fotón, su contribución deberá ser como lazos internos cuyo diagrama general se muestra en la Figura 3.4. Este lazo tiene N vértices, los cuales pueden ser de dos tipos: vértice de un fotón $V^1(k)$ y vértice de $2m$ -fotones

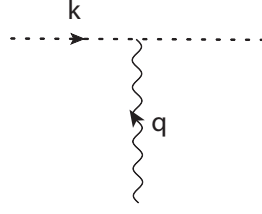


Figura 3.2: Vértice fantasma-fotón: $V^1(k^\mu) = \sigma^{(-)} \frac{i}{2} k^\mu$.

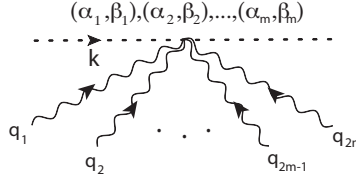


Figura 3.3: Vértice fantasma-($2m$ fotones): $V^{2m}(k^\mu) = -\sigma^{(-)} \frac{i}{2} (n \cdot k) V_{\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_m \beta_m}$.

$V^{2m}(k)$. Estos serán denotados de manera general como $V^A(k_A)$, $A = 1, 2, 4, \dots, 2m, \dots$, donde k_A indica el momento del fantasma entrante en el correspondiente vértice. Indicamos la posición de cada vértice en el lazo mediante un subíndice adicional n en $V_n^{A_n}(k_{A_n})$, donde $A_n = 1, 2, \dots, 2m, \dots$, etiqueta el tipo de vértice n y k_{A_n} el momento entrante que corresponde a los fantasmas. Cada vértice $V^A(k_A)$ también tiene un momento total entrante

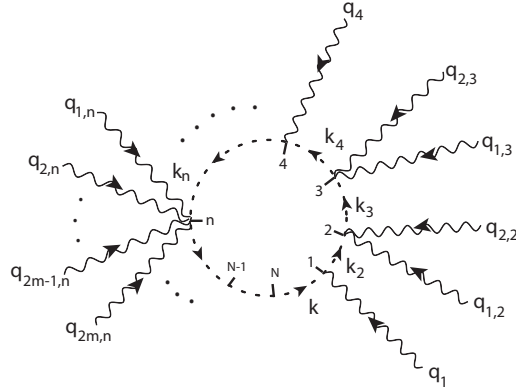


Figura 3.4: Un lazo arbitrario de fantasma con N vértices, mostrando inserciones arbitrarias del tipo V^1 y V^{2m} . Todos los fotones son entrantes. No se muestran los fotones que entran a los vértices $(N-1)$ y N .

de los fotones, denotado por Q_A . Para un vértice del tipo 1, Q_A es solo el momento del fotón entrante, mientras que para el vértice del tipo $2m$ en el lugar n tendremos que $Q_{A_n=2m} = [q_{1,n} + q_{2,n} + \dots + q_{2m,n}]$, lo cual es la suma de los momentos de $2m$ fotones entrantes. La unidad básica que forma el lazo es el producto del propagador $s_n^{A_n}(k_{A_n})$ que corresponde al fantasma que entra a cada vértice, por el correspondiente factor del vértice

$V_n^{A_n}(k_{A_n})$, lo cual resulta en $s_n^{A_n}(k_{A_n}) \times V_n^{A_n}(k_{A_n})$. Vamos a denotar $k_{A_1} = k$ el momento entrante en el primer ($n = 1$) vértice $V_1^{A_1}$, el cual servirá como variable de integración sobre el lazo. Sin escribir las conexiones externas de los fotones entrantes a cada vértice y usando regularización dimensional, encontramos que el lazo del fantasma con N vértices contribuye a una amplitud con

$$iM_L \sim \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} Tr \left([s_1^{A_1}(k_{A_1} = k)V_1^{A_1}(k_{A_1})] [s_2^{A_2}(k_{A_2})V_2^{A_2}(k_{A_2})] \right. \\ \left. \times \dots \times [s_n^{A_n}(k_{A_n})V_n^{A_n}(k_{A_n})] \dots [s_N^{A_N}(k_{A_N})V_N^{A_N}(k_{A_N})] \right). \quad (3.27)$$

Donde tenemos

$$k_{A_{(n+1)}} = Q_{A_n} + k_{A_n}, \quad k_{A_1} = k, \quad k_{A_n} = k + Q_{A_1} + \dots + Q_{A_{(n-1)}}. \quad (3.28)$$

Aquí Q_{A_n} son los momentos totales externos que entran al lazo a través del vértice n , y que satisfacen $\sum_{n=1}^N Q_{A_n} = 0$, de tal manera que el momento del fantasma después de N vértices es igual a $k = k_{A_1}$. El lazo tiene N vértices y N propagadores, cada uno contribuyendo con una matriz $\sigma^{(-)}$ y $\sigma^{(1)}$, respectivamente. De esta forma, la traza corresponde a $Tr \left((\sigma^{(-)} \sigma^{(1)})^N \right) = 1$.

Algunas simplificaciones importantes ocurren debido a la forma específica del propagador y el vértice fantasma- $(2m$ fotones). De hecho, cuando el vértice r es del tipo $2m$, la dependencia del factor $n \cdot (k_{A_r=2m})$ en el vértice se cancela con la del propagador, dando una contribución independiente del momento

$$s_r^{A_r=2m}(k_{A_r=2m})V_r^{A_r=2m}(k_{A_r=2m}) = \left(\frac{1}{2M^2} \right) V_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_m \beta_m}, \quad (3.29)$$

que puede ser sacada fuera de la integración $d^D k$ y que no escribiremos en lo sucesivo.

De esta forma, solo quedan las contribuciones del diagrama que surgen de los vértice del tipo 1, junto con los respectivos propagadores. Entonces, tenemos que

$$iM_L \sim \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} Tr \left(\prod_{a=1}^{N_1} \left[\left(\sigma^{(1)} \frac{i}{M} \frac{n^2}{(n \cdot k_a)} \right) \left(\sigma^{(-)} \frac{i}{2} k_a^{\mu_a} \right) \right] \right), \\ iM_L \sim \left(-\frac{n^2}{2M} \right)^{N_1} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_1^{\mu_1} k_2^{\mu_2} \dots k_{N_1}^{\mu_{N_1}}}{(n \cdot k_1)(n \cdot k_2) \dots (n \cdot k_{N_1})}, \quad (3.30)$$

donde $a = 1, \dots, N_1$ reetiqueta los restantes N_1 vértices del tipo 1. Vamos a denotar $k_a = k + R_a$, donde R_a es la suma de todos los momentos de los fotones externos que han entrado al lazo antes del vértice a y después del vértice 1. Usando la parametrización estándar de Feynman para los denominadores,

$$\frac{1}{[n \cdot (k + R_1)] \dots [n \cdot (k + R_{N_1})]} = \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_{N_1} \delta(\alpha_1 + \dots + \alpha_{N_1} - 1) \frac{(N_1 - 1)!}{[n \cdot (k + V(\alpha))]^{N_1}}, \quad (3.31)$$

con $V(\alpha) = \sum_{a=1}^{N_1} \alpha_a R_a$, la contribución de la Ecu. (3.30) se reduce a

$$iM_L \sim \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k + S_1(\alpha))^{\mu_1} (k + S_2(\alpha))^{\mu_2} \dots (k + S_{N_1}(\alpha))^{\mu_{N_1}} \frac{1}{(n \cdot k)^{N_1}}. \quad (3.32)$$

Aquí $S_a(\alpha) = R_a - V(\alpha)$. También, hemos hecho el corrimiento $k + V(\alpha) \rightarrow k$ en la variable de integración de la Ecu. (3.30). En la Ecu. (3.32) hemos omitido las integraciones sobre los parámetros α_a , que pueden ser factorizadas fuera de la integración del momento en el lazo. El numerador en la integral (3.32) es una combinación de productos del tipo

$$k^{\nu_1} k^{\nu_2} \dots k^{\nu_L}, \quad L = 0, 1, \dots, N_1, \quad (3.33)$$

multiplicados por M vectores constantes $S^{\rho_1} S^{\rho_2} \dots S^{\rho_M}$, de tal forma que $M + L = N_1$. El conjunto de L índices $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_L$ es escogido entre los N_1 índices $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L, \dots, \mu_{N_1}$, en todas las combinaciones posibles. Finalmente, la integral sobre el momento del fantasma contribuye con una suma de integrales de la forma

$$I^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_L} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^{\nu_1} k^{\nu_2} \dots k^{\nu_L}}{(n \cdot k)^{N_1}}, \quad L \leq N_1, \quad (3.34)$$

cada una de ellas multiplicada por un tensor independiente del momento sobre el cual se está realizando la integración. El cálculo de tales integrales en regularización dimensional ha sido previamente discutido en las Refs. [61, 62, 63]. Brevemente enunciamos los resultados de las Ecs. (2.5), (2.6) y (2.7) en la Ref. [63]. Ahí los autores escriben $I^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_L}$ como

$$I^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_L} \sim \frac{\partial}{\partial n_{\nu_1}} \frac{\partial}{\partial n_{\nu_2}} \dots \frac{\partial}{\partial n_{\nu_L}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(n \cdot k)^{(N_1-L)}}, \quad (3.35)$$

donde la integral básica es

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(n \cdot k)^r} = 0, \quad \text{para } r > 0. \quad (3.36)$$

El autor considera separadamente el caso $r = 0$, ($L = N_1$), empezando de

$$I^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{N_1}} \sim \frac{\partial}{\partial n_{\nu_1}} \frac{\partial}{\partial n_{\nu_2}} \dots \frac{\partial}{\partial n_{(N_1-1)}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^{\nu_{N_1}}}{(n \cdot k)} \quad (3.37)$$

y calcula la integral resultante asumiendo que $(n \cdot k) \rightarrow (n \cdot k) \pm i\epsilon$, obteniendo como resultado que $I^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{N_1}} = 0$.

De esta forma, usando regularización dimensional, hemos establecido que los fantasmas se desacoplan cuando escribimos la QED en la norma no lineal $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$, o equivalentemente en la norma axial $n \cdot a = 0$ junto con las interacciones no lineales. Por lo tanto, las contribuciones de los fantasmas a procesos físicos son nulas para esta elección de norma no lineal.

3.2. Modelo de Nambu no Abeliano (Cálculo Analítico)

En esta sección generalizamos al caso no abeliano el análisis Hamiltoniano no perturbativo desarrollado para el modelo de Nambu abeliano en la Ref. [58]. Como se mencionó anteriormente este análisis tiene por objetivo mostrar una equivalencia entre el modelo de Nambu no abeliano y la correspondiente teoría de Yang Mills. El modelo de Nambu no abeliano (NANM) asociado al grupo $SO(N)$ está definido por el Lagrangiano de Yang-Mills (YM)

$$\mathcal{L}(A_\mu^a) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - J^{a\mu} A_\mu^a, \quad (3.38)$$

más la restricción

$$A_\mu^a A^{a\mu} = n^2 M^2, \quad M^2 > 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad a = 1, \dots, N, \quad (3.39)$$

que resolvemos y sustituimos en el Lagrangiano de YM. Las definiciones de las cantidades $F_{\mu\nu}^a$, A_μ^a y $J^{a\mu}$ se encuentran en el Apéndice B. En lo anterior los índices μ y a denotan índices en el espacio de Minkowski y en el grupo de norma, respectivamente. El objetivo es determinar qué condiciones adicionales deben ser impuestas sobre el NANM de manera que su Hamiltoniano y su álgebra se reduzcan a aquéllas que definen la teoría de YM.

Procederemos realizando los siguientes pasos. (i) Empezamos construyendo el Hamiltoniano para el NANM, dependiendo de si n^2 caracteriza un vector tipo espacio, tipo tiempo o tipo luz, en función de sus correspondientes variables canónicas. (ii) Se probará que dicho Hamiltoniano está relacionado vía una transformación de coordenadas con un Hamiltoniano que tiene la misma forma que aquel que define la teoría de YM en sus variables estándares A_i^a, E_i^a , $i = 1, 2, 3$, con la excepción de que las leyes de Gauss $\Omega^a = 0$ no aparecen como restricciones. Además, mostraremos que la transformación preserva el álgebra canónica entre las variables A_i^a y E_i^a , cuando se hace uso del álgebra canónica que define el correspondiente NANM. (iii) Lo siguiente será probar que la dinámica del NANM preserva la evolución de las funciones Ω^a , de tal manera que se garantiza que la imposición $\Omega^a = 0$ en un tiempo inicial implica que $\Omega^a(t) = 0$ se siga cumpliendo para todo tiempo. De esta manera, si imponemos las leyes de Gauss como restricciones de primera clase sobre el Hamiltoniano del NANM a un tiempo inicial hará que dicho modelo sea equivalente a la correspondiente teoría de YM en una forma no perturbativa, y como se verá, independiente de la fijación de norma. La consistencia de la dinámica del NANM asegura que no se generarán más restricciones.

En la Subsección 3.2.1 consideramos el caso específico del NANM tipo espacio (SL-NANM) resolviendo la restricción no lineal (3.39) en función de $A_{\mu=3}^{a=1}$ y trabajamos con los restantes $4N - 1$ d.o.f. por punto en el espacio de coordenadas. Las ecuaciones de movimiento Lagrangianas se obtienen y subsecuentemente se derivan los momentos canónicos junto con el Hamiltoniano canónico. Luego se escriben las variables estándares de Yang-Mills (A_i^a y E^{bj}) en función de las variables canónicas del SL-NANM y el álgebra inducida se calcula, esta última se resume en el Apéndice C. El análisis del SL-NANM mediante el método de Dirac revela que dicho modelo contiene restricciones de segunda clase, las cuales posteriormente

tienen que ser impuestas fuertemente junto con la introducción de los paréntesis de Dirac con el objeto de obtener la dinámica y álgebra correcta. Se calcula el álgebra inducida de los paréntesis de Dirac para las variables A_i^a y E^{bj} . Finalmente se obtiene el Hamiltoniano extendido para el SL-NANM reescrito en función de las variables A_i^a y E^{bj} , y se compara con el Hamiltoniano de la teoría de YM. Se establecen las condiciones bajo las cuales ambas teorías son equivalentes, las cuales requieren del conocimiento de la evolución de las cantidades Ω^a bajo la dinámica del SL-NANM. Un análisis similar puede ser llevado a cabo para cada uno de los restantes casos del NANM (tipo tiempo, tipo luz).

En la Subsección 3.2.2 se presenta una mejoría conceptual y práctica en relación con cada uno de los cálculos individuales previos, nuevamente para estudiar la equivalencia entre el NANM y la teoría de YM. Empezaremos a partir de una parametrización que resuelve la restricción (3.39) para un valor arbitrario de n^2 , en función de los $3N$ d.o.f. Φ_A^a , $A = 1, 2, 3$. Se repite el análisis canónico poniendo atención a la relación entre las variables canónicas de YM (A_i^a, E^{bj}) y las del NANM (Φ_A^a, Π_B^b). Los cálculos se simplifican considerablemente después de que uno verifica que la transformación $(\Phi_A^a, \Pi_B^b) \rightarrow (A_i^a, E^{bj})$ es una transformación canónica. Otra propiedad útil de esta última parametrización es que exhibe el NANM como una teoría regular (es decir, no aparecen restricciones en el análisis Hamiltoniano). Esta propiedad se prueba en el Apéndice D. Finalmente se obtiene el Hamiltoniano canónico del NANM reescrito en función de las variables de YM (A_i^a, E^{bj}) y se determinan las condiciones bajo las cuales éste se reduce al Hamiltoniano de la teoría de YM. Nuevamente, este paso requiere conocer la evolución temporal de las funciones Ω^a bajo la dinámica del NANM. El Apéndice B contiene un resumen de YM estándar, que servirá como punto de referencia para establecer de manera más clara la equivalencia entre dicha teoría y el correspondiente NANM.

3.2.1. El caso tipo espacio del modelo de Nambu no abeliano (SL-NANM)

Antes de considerar el caso específico del SL-NANM, vamos a revisar algunas propiedades generales del NANM. El Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{NANM}(A_\mu^a) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu} - J^{a\mu} A_\mu^a, \quad a = 1, \dots, N, \quad (3.40)$$

más la restricción

$$A_\mu^a A^{a\mu} = n^2 M^2, \quad (3.41)$$

con la notación y convenciones introducidas en el Apéndice B. Aquí n^μ es tal que $n^2 = \pm 1, 0$. El procedimiento general bajo el cual se analiza cada uno de los casos del NANM es resolviendo la condición (3.41) y sustituyendo el resultado directamente en el Lagrangiano $\mathcal{L}_{NANM}(A_\mu^a)$, definiendo de esta manera los grados de libertad efectivos del modelo. Posteriormente, obtenemos el correspondiente Hamiltoniano y determinamos su relación con el Hamiltoniano de la teoría de YM presentado en (B.27) junto con su álgebra canónica (B.28). Como es de esperar, las ecuaciones de movimiento del NANM no corresponden a las ecuaciones de YM que surgen del Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{A}^\mu)$ en la Ecu. (B.1). Esto se mostrará de manera

explícita posteriormente. De esta forma, en el NANM la conservación de la corriente J_μ^a no se sigue como una relación de consistencia de las ecuaciones de movimiento, tal como ocurre en YM. Como mencionamos previamente, mostraremos que la estructura canónica del NANM induce la correspondiente álgebra de YM (B.28) junto con un Hamiltoniano que difiere de (B.27) por el hecho de que las leyes de Gauss no aparecen como constricciones. Sin embargo, se mostrará que la dinámica del NANM garantiza su validez para todo tiempo, una vez que se han impuesto como condiciones iniciales.

Las soluciones estándares para la condición $A_\mu^a A^{a\mu} = n^2 M^2$, que surgen de las diferentes elecciones de n^2 son

$$n^2 > 0 : A_0^1 = \sqrt{M^2 + A_i^a A_i^a - A_0^{\bar{b}} A_0^{\bar{b}}}, \quad \bar{b} = 2, 3, \dots, N, \quad (3.42)$$

$$n^2 < 0 : A_3^1 = \sqrt{M^2 + (A_0^a)^2 - (A_1^a)^2 - (A_2^a)^2 - (A_3^{\bar{b}})^2}, \quad (3.43)$$

$$n^2 = 0 : A_0^a = B^a \left(1 + \frac{A_{\bar{i}}^b A_{\bar{i}}^b}{4B^2} \right), \quad A_3^a = B^a \left(1 - \frac{A_{\bar{i}}^b A_{\bar{i}}^b}{4B^2} \right) \quad \bar{i} = 1, 2, \quad (3.44)$$

las cuales definen el NANM en sus versiones tipo tiempo (TL-NANM), tipo espacio (SL-NANM) y tipo luz (LL-NANM), respectivamente. En los casos tipo tiempo y tipo espacio se empieza con $4N - 1$ d.o.f. por punto, mientras que en el caso tipo luz dicho número es $3N$. A continuación nos concentramos en el SL-NANM.

3.2.1.1. Las ecuaciones de movimiento del SL-NANM

Empezamos a partir de la extensión al caso no abeliano de la parametrización

$$A_3 = \sqrt{M^2 + A_0^2 - A_1^2 - A_2^2}, \quad (3.45)$$

la cual es usada frecuentemente en el caso abeliano para exhibir la simetría remanente $SO(1, 2)$ después de que el rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz se lleva a cabo. La constricción Lagrangiana (3.41) se resuelve ahora para $A_{\mu=3}^{a=1}$. De esta manera tenemos los $4N - 1$ d.o.f. en el espacio de coordenadas, los cuales denotamos de la siguiente manera: $A_0^a, A_{\bar{k}}^1, A_{\bar{k}}^{\bar{a}}$, con $a = 1, 2, \dots, N$; $\bar{a} = 2, 3, \dots, N$, $k = 1, 2, 3$; $\bar{k} = 1, 2$. El número de cada uno de los correspondientes campos es $N, 2, 3(N - 1)$, respectivamente. Con esta notación, escribimos

$$A_3^1 = \sqrt{M^2 + (A_0^a)^2 - (A_{\bar{k}}^1)^2 - (A_{\bar{k}}^{\bar{a}})^2}, \quad (3.46)$$

que exhibe la simetría remanente $SO(N, 3N - 1)$. Para esclarecer un poco la notación establecemos que los superíndices etiquetan un índice del grupo, mientras que los subíndices corresponden a un índice del espacio-tiempo.

Usando la notación del Apéndice B, la densidad Lagrangiana (3.40) toma la forma

$$\mathcal{L}(A_0^a, A_{\bar{i}}^1, A_{\bar{k}}^{\bar{a}}) = \frac{1}{2} \left((E_{\bar{i}}^{\bar{a}})^2 + (E_{\bar{i}}^1)^2 + (E_3^1)^2 - B_{\bar{k}}^a B_{\bar{k}}^a \right) - J_0^a A^{a0} + J_{\bar{k}}^1 A_{\bar{k}}^1 + J_{\bar{i}}^{\bar{a}} A_{\bar{i}}^{\bar{a}} + J_3^1 A_3^1. \quad (3.47)$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\mathcal{E}^{ia} - \mathcal{E}^{31} \frac{A_i^a}{A_3^1} = 0, \quad (3.48)$$

$$\mathcal{E}^{0a} + \mathcal{E}^{31} \frac{A_0^a}{A_3^1} = 0, \quad (3.49)$$

con la notación

$$\mathcal{E}^{\nu a} = (D_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu)^a. \quad (3.50)$$

El número de ecuaciones en (3.48) es únicamente $(3N-1)$, debido a que la elección simultánea $i = 3$ con $a = 1$ no aparece porque A_3^1 es una función de las otras variables. Nuevamente, una forma de recuperar las ecuaciones de YM junto con la invariancia de norma es imponer las leyes de Gauss $\mathcal{E}^{0a} = 0$. Aplicando ésto a la Ecu. (3.49) implica que $\mathcal{E}^{31} = 0$, y haciendo uso de esta relación la Ecu. (3.48) implica el conjunto de ecuaciones $\mathcal{E}^{ia} = 0$. Todas estas últimas relaciones corresponden a las ecuaciones de YM.

Como A_3^1 es sólo una etiqueta para (3.46), se sigue que

$$\dot{A}_3^1 = \frac{A_0^a}{A_3^1} \dot{A}_0^a - \frac{A_k^1}{A_3^1} \dot{A}_k^1 - \frac{A_i^{\bar{a}}}{A_3^1} \dot{A}_i^{\bar{a}}. \quad (3.51)$$

Los campos E_3^1 y $E_i^{\bar{a}}$ están dados por

$$\begin{aligned} E_3^1 &= \dot{A}_3^1 - D_3 A_0^1 = \left(\frac{A_0^a}{A_3^1} \dot{A}_0^a - \frac{A_k^1}{A_3^1} \dot{A}_k^1 - \frac{A_i^{\bar{a}}}{A_3^1} \dot{A}_i^{\bar{a}} \right) - D_3 A_0^1, \\ E_k^1 &= \dot{A}_k^1 - D_k A_0^1, \quad E_i^{\bar{a}} = \dot{A}_i^{\bar{a}} - D_i A_0^{\bar{a}}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

lo cual, por el momento, constituye una forma compacta de identificar las velocidades \dot{A}_0^a , $\dot{A}_i^{\bar{a}}$ y \dot{A}_k^1 .

3.2.1.2. La densidad Hamiltoniana del SL-NANM

Los momentos canónicos conjugados son

$$\Pi_0^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0^a} = E_3^1 \frac{A_0^a}{A_3^1}, \quad (3.53)$$

$$\Pi^{1\bar{k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k^1} = E_k^1 - E_3^1 \frac{A_k^1}{A_3^1}, \quad (3.54)$$

$$\Pi^{\bar{a}i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i^{\bar{a}}} = E_i^{\bar{a}} - E_3^1 \frac{A_i^{\bar{a}}}{A_3^1}, \quad (3.55)$$

con los paréntesis de Poisson (PP) no nulos

$$\begin{aligned} \{A_0^a(\mathbf{x}, t), \Pi_0^b(\mathbf{y}, t)\} &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^{ab}, \quad \{A_i^1(\mathbf{x}, t), \Pi^{1\bar{k}}(\mathbf{y}, t)\} = \delta_i^{\bar{k}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{A_i^{\bar{a}}(\mathbf{x}, t), \Pi^{\bar{b}j}(\mathbf{y}, t)\} &= \delta_i^{\bar{b}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ahora resolvemos las velocidades en términos de los momentos canónicos conjugados. De las Ecs. (3.53), (3.54) y (3.55) obtenemos respectivamente

$$\left(\frac{A_0^a}{A_3^1} \dot{A}_0^a - \frac{A_{\bar{k}}^1}{A_3^1} \dot{A}_{\bar{k}}^1 - \frac{A_i^{\bar{a}}}{A_3^1} \dot{A}_i^{\bar{a}} \right) - D_3 A_0^1 = \frac{\Pi_0^1}{A_0^1} A_3^1, \quad (3.57)$$

$$\dot{A}_{\bar{k}}^1 - D_{\bar{k}} A_0^1 - \frac{\Pi_0^1}{A_0^1} A_{\bar{k}}^1 = \Pi^{1\bar{k}}, \quad (3.58)$$

$$\dot{A}_i^{\bar{a}} - D_i A_0^{\bar{a}} - \frac{\Pi_0^1}{A_0^1} A_i^{\bar{a}} = \Pi^{\bar{a}i}. \quad (3.59)$$

De las Ecs. (3.58) y (3.59) podemos resolver para

$$\dot{A}_{\bar{k}}^1 = \Pi^{1\bar{k}} + D_{\bar{k}} A_0^1 + \frac{\Pi_0^1}{A_0^1} A_{\bar{k}}^1, \quad (3.60)$$

$$\dot{A}_i^{\bar{a}} = \Pi^{\bar{a}i} + D_i A_0^{\bar{a}} + \frac{\Pi_0^1}{A_0^1} A_i^{\bar{a}}. \quad (3.61)$$

Es posible sustituir estas velocidades en la Ecu. (3.57), sin embargo, no es posible resolver la Ecu. (3.52) para todas las velocidades \dot{A}_0^a , las cuales entran en la suma $A_0^a \dot{A}_0^a$. Por lo menos se puede resolver para una velocidad, digamos \dot{A}_0^1 , en función de las restantes $(N-1)\dot{A}_0^{\bar{a}}$. Esto es consistente con el hecho de que existen $(N-1)$ constricciones primarias $\Phi_1^{\bar{a}}$ que provienen de la Ecu. (3.53), que escogemos como

$$\Phi_1^{\bar{a}} = \Pi_0^{\bar{a}} - \frac{\Pi_0^1}{A_0^1} A_0^{\bar{a}}. \quad (3.62)$$

Es conveniente resolver la velocidad \dot{A}_3^1 , la cual está incluida en la definición de E_3^1 y escribir

$$E_3^1 = \Pi_0^1 \frac{A_3^1}{A_0^1}, \quad (3.63)$$

vía la relación que resulta de (3.53) correspondiente a $a = 1$.

A partir de las Ecs. (3.53), (3.54) y (3.55) podemos expresar los campos eléctricos (3.52) en función de los momentos canónicos del NANM como

$$E_3^1 = A_3^1 \left(\frac{\Pi_0^1}{A_0^1} \right), \quad E_{\bar{i}}^1 = \Pi^{1\bar{i}} + \left(\frac{\Pi_0^1}{A_0^1} \right) A_{\bar{i}}^1, \quad E_i^{\bar{a}} = \Pi^{\bar{a}i} + \left(\frac{\Pi_0^1}{A_0^1} \right) A_i^{\bar{a}}, \quad (3.64)$$

donde hemos empleado las Ecs. (3.62).

En el Apéndice C mostramos que las definiciones anteriores de los campos eléctricos E_i^a en términos de los momentos canónicos Π^{ai} , junto con el álgebra canónica (3.57) origina el álgebra siguiente:

$$\{A_i^a(\mathbf{x}, t), A_j^b(\mathbf{y}, t)\} = 0, \quad \{E^{ai}(\mathbf{x}, t), E^{bj}(\mathbf{y}, t)\} = 0, \quad \{A_i^a(\mathbf{x}, t), E^{bj}(\mathbf{y}, t)\} = -\delta_i^j \delta^{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.65)$$

la cual reproduce el álgebra de YM (B.28).

El paso siguiente es obtener la densidad Hamiltoniana canónica

$$\mathcal{H} = \Pi_0^a \dot{A}_0^a + \Pi^{1\bar{i}} \dot{A}_i^1 + \Pi^{\bar{a}k} \dot{A}_k^{\bar{a}} - \mathcal{L}(A_0^a, A_i^{\bar{a}}), \quad (3.66)$$

donde $\mathcal{L}(A_0^a, A_i^{\bar{a}}, A_k^{\bar{a}})$ está dado por la Ecu. (3.47). El objetivo principal es reescribir esta densidad Hamiltoniana en términos de los campos E_i^a y A_j^c con el objeto de compararla con la densidad Hamiltoniana de la correspondiente teoría de YM (B.27). A partir de las Ecs. (3.53), (3.54) y (3.55), sustituimos los momentos en la ecuación anterior obteniendo

$$\mathcal{H} = E_3^1 \frac{A_0^a}{A_3^1} \dot{A}_0^a + \left(E_i^1 - E_3^1 \frac{A_i^1}{A_3^1} \right) \dot{A}_i^1 + \left(E_k^{\bar{a}} - E_3^1 \frac{A_k^{\bar{a}}}{A_3^1} \right) \dot{A}_k^{\bar{a}} - L(A_0^a, A_i^{\bar{a}}), \quad (3.67)$$

$$= E_3^1 \left(\frac{A_0^a}{A_3^1} \dot{A}_0^a - \frac{A_i^1}{A_3^1} \dot{A}_i^1 - \frac{A_k^{\bar{a}}}{A_3^1} \dot{A}_k^{\bar{a}} \right) + E_i^1 \dot{A}_i^{1\bar{i}} + E_k^{\bar{a}} \dot{A}_k^{\bar{a}k} - L(A_0^a, A_i^{\bar{a}}), \quad (3.68)$$

donde ahora debemos de reemplazar las velocidades \dot{A}_i^1 y $\dot{A}_k^{\bar{a}}$ en términos de los campos eléctricos, usando las Ecs. (3.52). Lo anterior conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= E_k^1 (E_k^1 + D_{\bar{k}} A_0^1) + E_i^{\bar{a}} (E_i^{\bar{a}} + D_i A_0^{\bar{a}}) + E_3^1 (E_3^1 + D_3 A_0^1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left((E_i^{\bar{a}})^2 + (E_i^1)^2 + (E_3^1)^2 - B_k^a B_k^a \right) + J_0^a A^{a0} - J_k^1 A_k^1 - J_i^{\bar{a}} A_i^{\bar{a}} - J_3^1 A_3^1, \end{aligned} \quad (3.69)$$

que puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} E_i^{\bar{a}} E_i^{\bar{a}} + \frac{1}{2} E_i^1 E_i^1 + \frac{1}{2} E_3^1 E_3^1 + \frac{1}{2} B_k^a B_k^a + J_0^a A^{a0} - J_k^1 A_k^1 - J_i^{\bar{a}} A_i^{\bar{a}} - J_3^1 A_3^1 \\ &\quad + E_k^1 D_{\bar{k}} A_0^1 + E_i^{\bar{a}} D_i A_0^{\bar{a}} + E_3^1 D_3 A_0^1, \\ &= \frac{1}{2} E_i^a E_i^a + \frac{1}{2} B_k^a B_k^a - J_i^a A_i^a - A_0^a (D_i E_i^a - J_0^a). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Aquí hemos integrado por partes el término $E_i^a (D_i A_0^a)$. La forma de la densidad Hamiltoniana anterior, junto con los PP en la Ecu. (3.65), son similares a sus correspondientes en la teoría de YM (B.27), con excepción de los siguientes puntos: (i) las coordenadas A_0^a en el SL-NANM son variables dinámicas y no multiplicadores de Lagrange como en el caso de la teoría de YM. (ii) Las funciones que representan las leyes de Gauss, definidas como

$$\Omega^a = (D_i E_i^a - J_0^a) = \mathcal{E}^{0a}, \quad (3.71)$$

no son constricciones en el SL-NANM y (iii) adicionalmente el SL-NANM cuenta con las constricciones primarias (3.62).

Por lo tanto, necesitamos aplicar el método de Dirac para continuar con el análisis Hamiltoniano. Tomando la densidad Hamiltoniana extendida

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2} E_i^a E_i^a + \frac{1}{2} B_k^a B_k^a - J_i^a A_i^a - A_0^a \Omega^a + \mu^{\bar{a}} \left(\Pi_0^{\bar{a}} - \frac{\Pi_0^1}{A_0^1} A_0^{\bar{a}} \right), \quad (3.72)$$

la evolución de las constricciones primarias lleva a

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1^{\bar{a}} &= \left\{ \Phi_1^{\bar{a}}, \int d^3y \left(+\frac{1}{2}E_k^b E_k^b + \frac{1}{2}B_k^a B_k^a - J_i^a A_i^a - A_0^a (D_i E_i^a - J_0^a) + \mu^{\bar{b}} \Phi_1^{\bar{b}} \right) \right\}, \\ \dot{\Phi}_1^{\bar{a}} &= \left\{ \Phi_1^{\bar{a}}, \int d^3y \left(-A_0^1 \Omega^1 - A_0^{\bar{b}} \Omega^{\bar{b}} \right) \right\},\end{aligned}\quad (3.73)$$

cuando se emplean los siguientes PP obtenidos en el Apéndice C

$$\begin{aligned}\{\Phi_1^{\bar{a}}, A_k^a\} &= 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, E_k^b\} = 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, B_k^b\} = 0, \\ \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_0^1\} &= \frac{A_0^{\bar{a}}}{A_0^1}, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_0^{\bar{b}}\} = -\delta^{\bar{a}\bar{b}}, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, \Phi_1^{\bar{b}}\} = 0.\end{aligned}\quad (3.74)$$

De esta forma, la única contribución surge de los términos que son proporcionales a A_0^a . El resultado

$$\dot{\Phi}_1^{\bar{a}} = -\frac{A_0^{\bar{a}}}{A_0^1} \Omega^1 + \delta^{\bar{a}\bar{b}} \Omega^{\bar{b}},\quad (3.75)$$

produce constricciones secundarias, las cuales escribimos como

$$\Phi_2^{\bar{a}} = A_0^{\bar{a}} - \frac{A_0^1}{\Omega^1} \Omega^{\bar{a}}.\quad (3.76)$$

Ahora calculamos la evolución temporal de $\Phi_2^{\bar{a}}$ usando las relaciones

$$\{\Omega^{\bar{a}}, \Phi_1^{\bar{c}}\} = 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_0^{\bar{b}}\} = -\delta^{\bar{a}\bar{b}}, \quad \left\{ \frac{A_0^1}{\Omega^1} \Omega^{\bar{a}}, \Phi_1^{\bar{c}} \right\} = -\frac{\Omega^{\bar{a}} A_0^{\bar{c}}}{\Omega^1 A_0^1},\quad (3.77)$$

las cuales también se incluyen en el Apéndice C. De esto obtenemos

$$\dot{\Phi}_2^{\bar{a}} = W^{\bar{a}} + \mu^{\bar{a}} + \frac{A_0^{\bar{a}} A_0^{\bar{c}}}{(A_0^1)^2} \mu^{\bar{c}},\quad (3.78)$$

donde $W^{\bar{a}} = \{\Phi_2^{\bar{a}}, \mathcal{H}\}$ con \mathcal{H} dado por Ecu. (3.70). De hecho podemos resolver

$$\left(\delta^{\bar{a}\bar{c}} + \frac{A_0^{\bar{a}} A_0^{\bar{c}}}{(A_0^1)^2} \right) \mu^{\bar{c}} = -W^{\bar{a}},\quad (3.79)$$

para las funciones arbitrarias $\mu^{\bar{a}}$, concluyendo que

$$\mu^{\bar{a}} = -\left(\delta^{\bar{a}\bar{c}} - \frac{1}{(A_0^1 A_0^{\bar{b}})} A_0^{\bar{a}} A_0^{\bar{c}} \right) W^{\bar{c}}.\quad (3.80)$$

De esta manera el método de Dirac se detiene con las $2(N-1)$ constricciones,

$$\Phi_1^{\bar{a}} = \Pi_0^{\bar{a}} - \frac{\Pi_0^1}{A_0^1} A_0^{\bar{a}}, \quad \Phi_2^{\bar{a}} = A_0^{\bar{a}} - \frac{A_0^1}{\Omega^1} \Omega^{\bar{a}},\quad (3.81)$$

que son de segunda clase, lo cual se sigue de las Ecs. (3.76) y (3.77) notando que $\{\Phi_1^{\bar{a}}, \Phi_2^{\bar{b}}\} \neq 0$. Por lo tanto, el número de d.o.f. del SL-NANM es

$$\#\text{d.o.f.} = \frac{1}{2}(2(4N - 1) - 2(N - 1)) = 3N, \quad (3.82)$$

lo cual no corresponde con el número de d.o.f. de la teoría de YM.

El próximo paso es hacer las constricciones (3.81) fuertemente igual a cero para eliminar las variables $A_0^{\bar{a}}$ y $\Pi_0^{\bar{a}}$, y subsecuentemente introducir los correspondientes paréntesis de Dirac entre las variables restantes. Para realizar esto, requerimos de la matriz construida con los PP de las constricciones,

$$M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{\bar{a}\bar{b}} \\ -T^{\bar{b}\bar{a}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T^{\bar{a}\bar{b}} \\ S^{\bar{a}\bar{b}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ -T^T & S \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

donde

$$R^{\bar{a}\bar{b}} = \{\Phi_1^{\bar{a}}, \Phi_1^{\bar{b}}\}, \quad T^{\bar{a}\bar{b}} = \{\Phi_1^{\bar{a}}, \Phi_2^{\bar{b}}\}, \quad S^{\bar{a}\bar{b}} = \{\Phi_2^{\bar{a}}, \Phi_2^{\bar{b}}\}. \quad (3.84)$$

De acuerdo a los resultados en el Apéndice C, los cálculos producen

$$\begin{aligned} R^{\bar{a}\bar{b}} &= 0, & T^{\bar{a}\bar{b}} &= \{\Phi_1^{\bar{a}}, \Phi_2^{\bar{b}}\} = -\left(\delta^{\bar{a}\bar{b}} + \frac{A_0^{\bar{a}} A_0^{\bar{b}}}{A_0^1 A_0^1}\right) = T^{\bar{b}\bar{a}}, \\ S^{\bar{a}\bar{b}} &= \left(\frac{A_0^1}{\Omega^1}\right)^2 \left(C^{\bar{a}\bar{b}m} + C^{1\bar{a}m} \frac{\Omega^{\bar{b}}}{\Omega^1} - C^{1\bar{b}m} \frac{\Omega^{\bar{a}}}{\Omega^1}\right) (D_i E_i^m). \end{aligned} \quad (3.85)$$

La matriz T es invertible, dando

$$(T^{-1})^{\bar{a}\bar{b}} = -\left(\delta^{\bar{a}\bar{b}} - \frac{A_0^{\bar{a}} A_0^{\bar{b}}}{A_0^m A_0^m}\right), \quad (3.86)$$

de tal forma que

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} S T^{-1} & -T^{-1} \\ T^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

El paréntesis de Dirac

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\}^* &= \{A(x), B(y)\} - \{A, \Phi_1^{\bar{a}}\} (T^{-1} S T^{-1})^{\bar{a}\bar{b}} \{\Phi_1^{\bar{b}}, B\} \\ &\quad + \{A, \Phi_1^{\bar{a}}\} (T^{-1})^{\bar{a}\bar{b}} \{\Phi_2^{\bar{b}}, B\} - \{A, \Phi_2^{\bar{a}}\} (T^{-1})^{\bar{a}\bar{b}} \{\Phi_1^{\bar{b}}, B\}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

conduce al resultado

$$\{A(x), B(y)\}^* = \{A(x), B(y)\}, \quad (3.89)$$

para las variables de Yang-Mills $A_i^{\bar{a}}$ y E^{bj} . Lo anterior se deriva del hecho de que las contribuciones adicionales a los PP en la Ecu. (3.88) contienen el término $\phi_1^{\bar{a}}$, el cual tiene PP cero

con las variables A_i^a y E^{bj} , de acuerdo a las Ecs. (C.11). En otras palabras, se recupera el álgebra

$$\{A_i^a(\mathbf{x}, t), A_j^b(\mathbf{y}, t)\}^* = 0 = \{E^{ai}(\mathbf{x}, t), E^{bj}(\mathbf{y}, t)\}^*, \quad \{A_i^a(\mathbf{x}, t), E^{bj}(\mathbf{y}, t)\}^* = -\delta_i^j \delta^{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.90)$$

que corresponde al álgebra de YM dada en Ecu. (B.28) del Apéndice B. Habiendo tomado fuertemente igual a cero las constricciones (3.81), la densidad Hamiltoniana extendida (3.72) se reduce ahora a

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2} E_i^a E_i^a + \frac{1}{2} B_k^a B_k^a - J_i^a A_i^a - A_0^a \Omega^a. \quad (3.91)$$

donde las leyes de Gauss $\Omega^a = 0$ no están incluidas porque en la expresión anterior los campos A_0^a son variables dinámicas y no multiplicadores de Lagrange.

3.2.1.3. Evolución de las funciones Ω^a en el SL-NANM

Ahora estudiamos la evolución de las funciones Ω^a , que denominamos funciones de Gauss en el SL-NANM. Calculando el conmutador de Ω^a con la densidad Hamiltoniana (3.70) y haciendo uso de (B.28) obtenemos

$$\dot{\Omega}^a = -g C^{abc} A_0^b \Omega^c - D_\mu J^{\mu a} - \int d^3 y \{ \Omega^a(x), A_0^b(y) \} \Omega^b(y). \quad (3.92)$$

donde hacemos el reemplazo $\Omega^a(x) \rightarrow (\delta^{ac} \partial_{kx} + g C^{abc} A_k^b) E_k^c$ dentro de los PP, debido a que J^{0a} ha sido considerada como una corriente externa. Dado que $\{A_0^b, A_k^b\} = 0$, solo debemos considerar los paréntesis $\{E_k^c(x), A_0^b(y)\}$ en la expresión anterior. Usando la Ecu. (C.9), obtenemos

$$\dot{\Omega}^a = -g C^{abc} A_0^b \Omega^c - D_\mu J^{\mu a} + D_k \left(\left(\frac{A_k^a}{A_0^1} \right) \Omega^1 \right). \quad (3.93)$$

Las ecuaciones anteriores garantizan que: (i) imponiendo la conservación de la corriente $D_\mu J^{\mu a} = 0$ en un tiempo inicial $t = 0$ y (ii) demandando que las leyes de Gauss $\Omega^a = 0$ se satisfagan también en $t = 0$, obtenemos que $\partial_0 \Omega^a = 0$ ($a = 1, 2, \dots, N$) en $t = 0$. Esto es suficiente para probar que bajo estas dos condiciones iniciales, las leyes de Gauss se van a satisfacer para todo tiempo. De esta manera, podemos recuperar la teoría de YM imponiendo las leyes de Gauss como constricciones Hamiltonianas, vía funciones arbitrarias N^a sumando la cantidad $-N^a \Omega^a$ a la densidad Hamiltoniana \mathcal{H}_E en la Ecu. (3.91), para después redefinir $A_0^a + N^a = \Theta^a$. Esto nos da como resultado

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \Theta^a \Omega^a + J_i^a A^{ia}, \quad (3.94)$$

donde Θ^a son ahora funciones arbitrarias, obteniendo la densidad Hamiltoniana de YM (B.27). El subsecuente surgimiento de la teoría de YM garantiza la conservación de la corriente para todo tiempo como una consecuencia de las ecuaciones de movimiento.

Desde de la perspectiva de los modos GB, la situación en el SL-NANM es la siguiente. Hemos empezado de una teoría invariante bajo $SO(N, 3N)$ definida por las Ecs. (3.38) y

(3.39). Resolviendo la restricción (3.39) en función de A_3^1 significa que hemos asumido un valor de expectación no nulo del estado de vacío $\langle A_3^1 \rangle = M$, el cual rompe la simetría a $SO(N, 3N - 1)$, con la aparición de $(4N(4N - 1)/2 - (4N - 1)(4N - 2)/2) = 4N - 1$ GB. Sin embargo, el espacio fase del SL-NANM aún contiene $2(N - 1)$ restricciones de segunda clase (3.81), las cuales tienen que ser impuestas fuertemente, dando el espacio fase reducido con $\frac{1}{2}(2(4N - 1) - 2(N - 1)) = 3N$ coordenadas por punto. Un análisis similar da el mismo número de GB independientes para cada caso del NANM (tipo tiempo y tipo luz). Para recuperar el número $2N$ de d.o.f. de la teoría de YM debemos imponer las N leyes de Gauss $\Omega^a = 0$ como restricciones de primera clase. De esta manera quedarán finalmente $\frac{1}{2}(6N - 2N) = 2N$ coordenadas por punto.

Resumiendo, la obtención de la teoría de YM a partir del SL-NANM puede ser establecida únicamente después de imponer como condiciones iniciales la conservación de la corriente junto con las leyes de Gauss.

3.2.2. Descripción unificada del modelo de Nambu no abeliano

Un procedimiento similar al presentado en la sección previa para el caso SL-NANM puede ser repetido para los casos TL-NANM y LL-NANM, obteniendo resultados idénticos. Las variables estándares A_i^a y E_j^b de la teoría de YM pueden ser expresadas en función de las variables canónicas de cada uno de los casos del NANM, con el álgebra inducida en la Ecu. (B.28). Estas transformaciones también permiten expresar la densidad Hamiltoniana canónica del NANM en función de A_i^a y E_j^b , dando como resultado una densidad Hamiltoniana de la forma (B.27). Sin embargo, hay una diferencia entre ambas densidades Hamiltonianas, y es que las leyes de Gauss $\Omega^a = 0$ no aparecen como restricciones en el NANM, dado que A_0^a no son multiplicadores de Lagrange, sino son funciones de los respectivos d.o.f.. Sin embargo, hemos visto que es posible incluir las relaciones $\Omega^a = 0$ una vez que hemos probado su conservación vía la dinámica del NANM.

Los resultados anteriores motivaron la búsqueda de una discusión unificada de los distintos casos del NANM. Para realizar esto, encontramos conveniente generalizar la parametrización (3.44), para incluir todos los casos, en la forma

$$A_0^a = B^a \left(1 + \frac{N}{4B^2} \right), \quad A_3^a = B^a \left(1 - \frac{N}{4B^2} \right), \quad N = (A_i^b A_i^b + n^2 M^2), \quad 4B^2 \pm N \neq 0, \quad (3.95)$$

la cual ciertamente satisface la condición (3.41) y está escrita en función de los $3N$ GB independientes B^a, A_i^b .

3.2.2.1. Las ecuaciones de movimiento

Después de la sustitución de las Ecs. (3.95) en la densidad Lagrangiana (3.40), la variación de la correspondiente acción respecto a los campos A_ν^a produce

$$0 = \int d^4x (D_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu)^a \delta A_\nu^a, \quad (3.96)$$

donde las cantidades δA_ν^a no son independientes entre ellas. En nuestro caso, las Ecs. (3.95) nos dicen que

$$\delta A_0^a = \left[\left(1 + \frac{N}{4B^2} \right) \delta^{ab} - \frac{N}{4B^2} \frac{2B^a B^b}{B^2} \right] \delta B^b + \frac{B^a}{2B^2} A_i^b \delta A_i^b, \quad (3.97)$$

$$\delta A_3^a = \left[\left(1 - \frac{N}{4B^2} \right) \delta^{ab} + \frac{N}{4B^2} \frac{2B^a B^b}{B^2} \right] \delta B^b - \frac{B^a}{2B^2} A_i^b \delta A_i^b, \quad (3.98)$$

están en términos de las variaciones independientes δA_i^b y δB^a . De esta forma las ecuaciones de movimiento son

$$\delta A_i^a : \quad \mathcal{E}^{\bar{i}a} + \frac{B^b}{2B^2} [\mathcal{E}^{0b} - \mathcal{E}^{3b}] A_i^a = 0, \quad (3.99)$$

$$\delta B^a : \quad 0 = \left(\left(1 + \frac{N}{4B^2} \right) \delta^{ab} - \frac{N}{4B^2} \frac{2B^b B^a}{B^2} \right) \mathcal{E}^{0b} + \left(\left(1 - \frac{N}{4B^2} \right) \delta^{ab} + \frac{N}{4B^2} \frac{2B^b B^a}{B^2} \right) \mathcal{E}^{3b}, \quad (3.100)$$

usando la notación en la Ecu. (3.50).

Debemos de recalcar que en el caso de la teoría de YM las ecuaciones de movimiento están dadas simplemente por $\mathcal{E}^{\nu a} = 0$. A su vez, las ecuaciones (3.99) y (3.100) no implican la conservación de la corriente $D_\nu J^{\nu a} = 0$. Una forma de recuperar las ecuaciones de YM junto con la invariancia de norma es imponer las leyes de Gauss $\mathcal{E}^{0a} = 0$. De esta manera, bajo la condición $4B^2 \pm N \neq 0$, la Ecu. (3.100) da como solución $\mathcal{E}^{3b} = 0$. Estos dos resultados sustituidos en la Ecu. (3.99) implican el conjunto final de ecuaciones $\mathcal{E}^{\bar{i}a} = 0$.

3.2.2.2. La densidad Hamiltoniana

Con el objeto de unificar la notación cuando pasemos a la formulación Hamiltoniana, introducimos los $3N$ d.o.f. Φ_A^a , $A = 1, 2, 3$, con $a = 1, 2, \dots, N$

$$\Phi_1^a = A_1^a, \quad \Phi_2^a = A_2^a, \quad \Phi_3^a = B^a, \quad (3.101)$$

donde la transformación de coordenadas

$$A_i^a = A_i^a(\Phi_A^b), \quad (3.102)$$

que surge de la Ecu. (3.95), es invertible. De hecho, las inversas son

$$\Phi_1^a = A_1^a, \quad \Phi_2^a = A_2^a, \quad \Phi_3^a = \frac{A_3^a}{2\sqrt{A_3^b A_3^b}} \left(\sqrt{A_3^b A_3^b} + \sqrt{A_i^b A_i^b + n^2 M^2} \right). \quad (3.103)$$

A su vez tenemos que

$$A_0^a = A_0^a(\Phi_A^b), \quad (3.104)$$

de acuerdo a la Ecu. (3.102) y a la primera relación en la Ecu. (3.95). La propiedad relevante de la transformación en Ecu. (3.102) es que

$$\dot{A}_i^a = \frac{\partial A_i^a}{\partial \Phi_B^b} \dot{\Phi}_B^b, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \dot{A}_i^a}{\partial \dot{\Phi}_B^b} = \frac{\partial A_i^a}{\partial \Phi_B^b}, \quad (3.105)$$

junto con el hecho de la invertibilidad de las velocidades

$$\dot{\Phi}_A^a = \frac{\partial \Phi_A^a}{\partial A_i^b} \dot{A}_i^b. \quad (3.106)$$

Como veremos en el desarrollo siguiente, en realidad no se requiere la forma explícita de las transformaciones (3.95) y (3.103), sólo su forma genérica (3.102), junto con la propiedad de que esta transformación puede ser invertida.

Ahora procedemos a calcular la densidad Hamiltoniana del NANM en función de las variables canónicamente conjugadas Φ_A^b y Π_A^b , empleando un procedimiento que nos permitirá hacer un contacto directo con la densidad Hamiltoniana (B.27) y álgebra canónica (B.28) de la teoría de YM. Después de sustituir (3.102) y (3.104), la densidad Lagrangiana (3.40) puede ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{\text{NANM}}(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{1}{2} E_i^a E_i^a - \frac{1}{2} B_i^a B_i^a - J^{a\mu} A_\mu^a, \quad (3.107)$$

donde

$$E_i^a = \dot{A}_i^a - D_i A_0^a, \quad B_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a, \quad (3.108)$$

con $E_i^a = E_i^a(\Phi, \dot{\Phi})$ y $B_i^a = B_i^a(\Phi)$. Los momentos canónicos conjugados se calculan mediante

$$\Pi_A^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NANM}}(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial \dot{\Phi}_A^a} = E_i^b \frac{\partial \dot{A}_i^b}{\partial \dot{\Phi}_A^a} = E_i^b \frac{\partial A_i^b}{\partial \Phi_A^a}, \quad (3.109)$$

donde hemos empleado Ecu. (3.105). La inversa de la Ecu. (3.102) nos permite escribir los campos eléctricos E_i^a en función de los momentos Π_A^a del NANM,

$$E_i^b(\Phi, \Pi) = \frac{\partial \Phi_A^a}{\partial A_i^b} \Pi_A^a. \quad (3.110)$$

El Wronskiano del sistema es

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{NANM}}(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial \dot{\Phi}_A^a \partial \dot{\Phi}_B^b} \right) = \det \left(\frac{\partial \Pi_A^a}{\partial \dot{\Phi}_B^b} \right) = \det \left(\frac{\partial \dot{A}_i^c}{\partial \dot{\Phi}_B^b} \frac{\partial A_i^c}{\partial \Phi_A^a} \right) = \det \left(\frac{\partial A_i^c}{\partial \Phi_B^b} \frac{\partial A_i^c}{\partial \Phi_A^a} \right) \neq 0, \quad (3.111)$$

como se muestra en el Apéndice D. De esta forma, cuando se usa la parametrización (3.95), se exhibe el NANM como un sistema regular, es decir, que no contiene constricciones.

La densidad Hamiltoniana del NANM es

$$\mathcal{H}_{\text{NANM}} = \Pi_A^a \dot{\Phi}_A^a - \left(\frac{1}{2} E_i^a E_i^a - \frac{1}{2} B_i^a B_i^a - J^{a\mu} A_\mu^a \right), \quad (3.112)$$

la cual, en sucesivos pasos, reescribimos como

$$\mathcal{H}_{\text{NANM}}(\Phi, \Pi) = \Pi_A^a \frac{\partial \Phi_A^a}{\partial A_i^b} \dot{A}_i^b - \left(\frac{1}{2} E_i^a E_i^a - \frac{1}{2} B_i^a B_i^a - J^{a\mu} A_\mu^a \right), \quad (3.113)$$

$$= E_i^b \dot{A}_i^b - \left(\frac{1}{2} E_i^a E_i^a - \frac{1}{2} B_i^a B_i^a - J^{a\mu} A_\mu^a \right), \quad (3.114)$$

$$= E_i^b (E_i^b + D_i A_0^b) - \left(\frac{1}{2} E_i^a E_i^a - \frac{1}{2} B_i^a B_i^a - J^{a\mu} A_\mu^a \right), \quad (3.115)$$

$$= \frac{1}{2} E_i^a E_i^a + \frac{1}{2} B_i^a B_i^a - (D_i E_i^b - J^{b0}) A_0^b + J^{ai} A_i^a, \quad (3.116)$$

donde hemos usado las Ecs. (3.106), (3.108) y (3.110), junto con una integración por partes en el término que contiene la derivada covariante. La dependencia de $\mathcal{H}_{\text{NANM}}$ en función de la variables canónicas Φ y Π se establece mediante el cambio de variables (3.102), (3.104) y (3.110). Las variables canónicas del NANM satisfacen los PP no nulos,

$$\{\Phi_A^a(\mathbf{x}), \Phi_B^b(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\Pi_A^a(\mathbf{x}), \Pi_B^b(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\Phi_A^a(\mathbf{x}), \Pi_B^b(\mathbf{y})\} = \delta^{ab} \delta_{AB} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.117)$$

Ahora consideramos la densidad Hamiltoniana del NANM (3.116) desde la perspectiva de los campos A_i^a y E_i^a . La relación

$$\int d^4x \Pi_A^a \dot{\Phi}_A^a = \int d^4x E_i^a \dot{A}_i^a = \int d^4x (-E^{ai}) \dot{A}_i^a, \quad (3.118)$$

que surge del término que depende de la velocidad en la acción Hamiltoniana del NANM y que fue usada previamente para obtener la Ecu. (3.114), establece a $(-E^{ai})$ como el momento canónico conjugado de A_i^a . De esta manera, la Ecu. (3.116) puede ser vista como una densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}(A, E)$ que se deriva de $\mathcal{H}_{\text{NANM}}(\Phi, \Pi)$ mediante la transformación del espacio fase

$$(\Phi, \Pi) \rightarrow (A, E), \quad (3.119)$$

la cual se obtiene de las inversas de las Ecs. (3.102) y (3.110) junto con la relación (3.104), que se lee como

$$A_0^a = \frac{A_3^a}{\sqrt{A_3^b A_3^b}} \left(\sqrt{A_i^b A_i^b + n^2 M^2} \right), \quad (3.120)$$

en función de estas nuevas variables. Enfatizamos que las transformaciones (3.110) se generan por el cambio de variables (3.102) en el espacio de coordenadas. Como sabemos de la mecánica clásica, dichas transformaciones inducen una transformación canónica en el espacio fase completo. De esta forma automáticamente recuperamos los PP

$$\{A_i^a(\mathbf{x}), A_j^b(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{E^{ai}(\mathbf{x}), E^{bj}(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{A_i^a(\mathbf{x}), E^{bj}(\mathbf{y})\} = -\delta^{ab} \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.121)$$

a partir de la Ecu. (3.117). Resumiendo, para cada caso del NANM, definido por los diferentes valores de n^2 , podemos recuperar (vía una transformación canónica) la densidad Hamiltoniana (3.116) junto con el álgebra canónica (B.28). La densidad Hamiltoniana (3.116) difiere de la densidad Hamiltoniana de YM (B.27) únicamente por el hecho de que las leyes de Gauss $\Omega^b = (D_i E_i^b - J^{b0}) = 0$ no aparecen como constricciones de primera clase porque A_0^a no son multiplicadores de Lagrange, sino que son funciones de las coordenadas, como lo muestra la Ecu. (3.120).

3.2.2.3. Evolución temporal de las funciones de Gauss Ω^a

El cálculo se sigue de los mismos pasos llevados a cabo en Ecu. (3.92) para el caso SL-NANM. En la parametrización (3.95), el resultado es

$$\dot{\Omega}^a = -g C^{abc} A_0^b \Omega^c - D_\mu J^{\mu a} + D_3 \left(\frac{A_0^1}{A_3^1} \Omega^a \right) - D_3 \left(\frac{A_3^a}{A_3^c A_3^c} A_0^b \Omega^b \right) + D_i \left(\frac{A_i^a}{N} A_0^b \Omega^b \right), \quad (3.122)$$

donde A_0^b está dado por la Ecu. (3.120). La ecuación anterior conduce a las mismas conclusiones respecto a la equivalencia de la teoría de YM con el NANM, las cuales se establecieron a continuación de la Ecu. (3.93) para el caso del SL-NANM.

3.3. Teorías de norma surgiendo a partir de modelos tipo Nambu

Motivados por el trabajo pasado y continuando en esta línea de investigación, es natural preguntarse si cualquier teoría de norma es equivalente a un modelo de Nambu. En este contexto, lo anterior puede ser parafraseado con el enunciado de si cualquier teoría de norma puede ser interpretada como una teoría que proviene de un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz [44].

El objetivo de esta sección es establecer los criterios bajo los cuales una teoría de norma puede ser reproducida a partir de un modelo tipo Nambu (TTNM). Hemos nombrado así a dichos modelos porque los definiremos de una manera análoga a como el modelo de Nambu original está definido, es decir, mediante una densidad Lagrangiana que describe una teoría invariante de norma más una restricción, donde esta última hace que la invariancia de norma se pierda. También consideraremos como una teoría de norma a aquella donde existen constricciones de primera clase, las cuales son los generadores de la simetría de norma. Es bien conocido que existen casos particulares [64, 65] donde las constricciones de primera clase no son generadores de una simetría de norma, sin embargo, aún en estos casos el método que emplearemos aquí permitirá establecer una equivalencia entre el TTNM y la teoría con constricciones de primera clase.

Para realizar esto generalizamos el análisis Hamiltoniano no perturbativo desarrollado en las Refs. [58, 59]. Las condiciones que se requieren para establecer la equivalencia hace que nos restrinjamos a ciertas teorías de norma, sin embargo, como será mostrado, teorías físicas

de gran importancia están dentro de la aplicabilidad del método, por ejemplo, Yang-Mills y Gravitación de Einstein.

El modelo de Nambu hace referencia explícita al estado de vacío mediante la restricción que lo define, por ejemplo, n^μ en la relación $A_\mu A^\mu = n^2 M^2$. Es a través de este estado de vacío que podemos definir los bosones de Goldstone, cada uno de ellos surgiendo de los generadores que no lo dejan invariante. Aquí hemos definido los TTNM usando restricciones sin hacer referencia a ningún estado de vacío. En el Apéndice E mostraremos que las restricciones empleadas para definir el modelo de Nambu original están incluidas en las que son usadas para definir los correspondientes TTNM. Dado que no hacemos referencia a algún estado de vacío particular es conveniente no introducir la noción de bosones de Goldstone, ya que para tratar con esta cuestión en detalle es necesario fijar un vacío particular y establecer explícitamente la densidad Lagrangiana que define la teoría, lo cual no haremos en el desarrollo del método general.

En la Subsección 3.3.1 presentamos los criterios que definen las teorías de norma con las cuales vamos a trabajar. Debido a la presencia de restricciones de primera clase empleamos el método de Dirac [36] para realizar el análisis Hamiltoniano. El objetivo será escribir la densidad Hamiltoniana y el álgebra canónica que define la dinámica de cada uno de estos modelos. Estos servirán como punto de referencia para establecer la equivalencia con los TTNM. En la Subsección 3.3.2 presentamos el TTNM, el cual es básicamente la densidad Lagrangiana introducida en la Subsección 3.3.1 más una restricción entre las coordenadas. Dicha restricción lleva a una teoría sin invariancia de norma, lo cual se ve reflejado en el hecho de que el modelo incluye sólo restricciones de segunda clase. Siguiendo los criterios descritos en la Subsección 3.3.1 se lleva a cabo el análisis Hamiltoniano para los TTNM. Posteriormente se muestra que mediante una transformación del espacio fase es posible expresar la densidad Hamiltoniana del TTNM en una forma similar a la que define la teoría de norma, y donde dicha transformación también reproduce el álgebra canónica de esta misma teoría de norma. En resumen, la densidad Hamiltoniana y el álgebra canónica del TTNM van a reproducir a aquellos que definen la teoría de norma correspondiente.

En la Subsección 3.3.3 presentamos algunos ejemplos de teorías de norma donde se cumplen los criterios de la Subsección 3.3.1. Como consecuencia, la equivalencia entre estas teorías de norma y los correspondientes TTNM puede ser establecida. Entre los ejemplos que mostramos están las teorías de Yang-Mills y la Gravitación de Einstein.

En el Apéndice E se muestra que la transformación entre las variables de la teoría de norma y los TTNM preserva el álgebra canónica. Así mismo, se evalúa el álgebra entre las restricciones del TTNM.

3.3.1. Teorías de norma

En esta subsección definimos los criterios que determinan las teorías de norma con las cuales vamos a trabajar. Mostraremos que estos criterios son suficientes para establecer una equivalencia con un correspondiente TTNM. Esta prueba será por construcción. Para ilustrar el procedimiento trataremos de mantener a Yang-Mills como referencia básica.

La densidad Lagrangiana de la teoría está definida por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_l, \lambda_m, \dot{x}_l), \quad l = 1, \dots, n. \quad m = 1, \dots, k. \quad (3.123)$$

donde x_l y λ_m son variables independientes. Notemos que no hay dependencia de las velocidades $\dot{\lambda}_m$ en la densidad Lagrangiana. En el caso de Yang-Mills identificamos $x_i \rightarrow A_i^m$ y $\lambda_m \rightarrow A_0^m$, donde m y $(0, i)$ son índices del grupo de norma y espacio-temporales, respectivamente. Como es usual, los momentos canónicos están dados por

$$\Pi_l^x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_l}, \quad \Pi_m^\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_m}. \quad (3.124)$$

con el álgebra canónica dada por los paréntesis de Poisson

$$\begin{aligned} \{x_l, \Pi_k^x\} &= \delta_{lk}, & \{\lambda_m, \Pi_n^\lambda\} &= \delta_{mn}, \\ \{x_l, \Pi_m^\lambda\} &= \{\lambda_m, \Pi_k^x\} = 0, \\ \{x_l, x_k\} &= \{x_l, \lambda_m\} = \{\lambda_n, \lambda_m\} = 0, \\ \{\Pi_l^x, \Pi_k^x\} &= \{\Pi_l^x, \Pi_m^\lambda\} = \{\Pi_n^\lambda, \Pi_m^\lambda\} = 0. \end{aligned} \quad (3.125)$$

En lo sucesivo, cualquier paréntesis que no tenga algún subíndice o superíndice extra indicará que se trata de un paréntesis de Poisson (posteriormente se introducirán los paréntesis de Dirac). La densidad Hamiltoniana canónica está definida por

$$\mathcal{H}_c = \dot{x}_l \Pi_l^x - \mathcal{L}. \quad (3.126)$$

Dado que las velocidades $\dot{\lambda}_m$ no están presentes en la densidad Lagrangiana, la teoría incluye constricciones primarias $\Phi_m^1 = \Pi_m^\lambda = 0$, por lo tanto, el método de Dirac es requerido para realizar el análisis Hamiltoniano correcto. A partir de ahora nos restringimos a teorías de norma que satisfagan las siguientes tres condiciones:

1. La densidad Hamiltoniana canónica puede ser escrita como

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_F(x_i, \Pi_i^x) + \lambda_m G_m(x_i, \Pi_i^x). \quad (3.127)$$

2. Existen únicamente

$$\Pi_m^\lambda = 0, \quad (3.128)$$

como constricciones primarias.

3. Una vez obtenidas todas las constricciones del problema las condiciones

$$\{G_m, \mathcal{H}_F\} \approx 0, \quad \{G_m, G_n\} \approx 0, \quad (3.129)$$

se cumplen. Aquí el símbolo \approx denota débilmente igual a cero.

Se demostrará que los criterios (3.127), (3.128) y (3.129) son suficientes para asegurar que existe un TTNM capaz de reproducir esta teoría de norma.

Siguiendo el método de Dirac, la densidad Hamiltoniana extendida es

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_F + \lambda_m G_m + \beta_m \Pi_m^\lambda, \quad (3.130)$$

donde β_m son funciones arbitrarias. La condición de evolución temporal de las constricciones primarias $\Phi_m^1 = \Pi_m^\lambda$ conduce a

$$\dot{\Phi}_m^1(\mathbf{x}) = \{\Pi_m^\lambda(\mathbf{x}), \int d^3y \mathcal{H}_E(\mathbf{y})\} = \int d^3y \{\Pi_m^\lambda(\mathbf{x}), \lambda_n(\mathbf{y})\} G_n(\mathbf{y}) = -G_m(\mathbf{x}), \quad (3.131)$$

las constricciones secundarias $\Phi_m^2 = G_m$. Dado que $G_m = G_m(x_i, \Pi_i^x)$, se sigue que $\{\lambda_l, G_m\} = 0$ y $\{\Pi_l^\lambda, G_m\} = 0$. Considerando (3.129), se puede derivar que la evolución de las constricciones secundarias $\dot{\Phi}_m^2 = \{G_m, \mathcal{H}_E\}$ es débilmente igual a cero, por lo tanto, no hay más constricciones en la teoría y el método de Dirac se detiene en este paso. Los paréntesis de Poisson entre las cantidades (Π_m^λ, G_m) son cero o débilmente igual a cero, lo cual implica que éstas son constricciones de primera clase. La presencia de estas últimas implica que estamos tratando con una teoría de norma. Notemos que la condición $\dot{\Phi}_m^2 = \dot{G}_m = \{G_m, \mathcal{H}_E\} \approx 0$ se cumple si y sólo si

$$\dot{G}_m = \tilde{C}_{ml} G_l + J \quad (3.132)$$

donde J puede surgir a partir de una cantidad conservada. En Yang-Mills reconocemos $J \rightarrow D_\mu J^\mu$, $\Pi_l^\lambda \rightarrow \Pi_l^0$, $\tilde{C}_{ml} \rightarrow C_{mlp} A_0^p$, donde C_{mlp} son las constantes de estructura del grupo de norma, y finalmente, $G_m \rightarrow (D_i E_i - J^0)_m$ como las leyes de Gauss. Los grados de libertad son

$$\text{d.o.f.} = \frac{1}{2} \left(2(n+k) - 2(2k) \right) = n - k \quad (3.133)$$

Para Yang-Mills con N generadores del grupo de norma, tenemos $n = 3N$ y $k = N$, por lo tanto, como es bien conocido, el número de d.o.f. son $2N$.

La presencia de constricciones de primera clase implica que tenemos grados de libertad extra y estos deben ser removidos. Siguiendo el método de Dirac, esto significa que debemos imponer tantas constricciones de norma como constricciones de primera clase presentes en el modelo; éstas deben ser admisibles y deben de convertir las constricciones de primera clase en constricciones de segunda clase. Entonces, podemos introducir los paréntesis de Dirac para determinar de manera correcta el álgebra de los restantes d.o.f.. Normalmente uno toma la restricción $\Phi_m^3 = \Theta_m + \lambda_m \approx 0$, lo cual es equivalente a fijar $\lambda_m \approx \Theta_m$, siendo Θ_m funciones arbitrarias que se determinan después de fijar las restantes constricciones G_m . Las constricciones Φ_m^3 y Φ_m^1 se convierten en constricciones de segunda clase; es decir, la matriz $Q_{mn} = \{\Phi_m^1, \Phi_n^3\}$ puede ser invertida. Fijando fuertemente Φ_m^1 y Φ_m^3 podemos eliminar las variables λ_m y Π_m^λ . Posteriormente introducimos los paréntesis de Dirac. La densidad Hamiltoniana final es

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_F + \Theta_m G_m, \quad (3.134)$$

Para calcular los correspondientes paréntesis de Dirac $\{A, B\}^*$, requerimos las matrices construidas mediante los paréntesis de Poisson de las constricciones

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q^T & R \end{pmatrix}, \quad (3.135)$$

donde $Q = [Q_{ab}]$, $R = [R_{ab}]$ con $Q_{ab} = \{\Phi_a^1, \Phi_b^3\}$, $R_{ab} = \{\Phi_a^3, \Phi_b^3\}$, y donde hemos empleado el hecho de que $\{\Phi_a^1, \Phi_b^1\} = 0$. La matriz inversa está dada por

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (Q^T)^{-1}RQ^{-1} & -(Q^T)^{-1} \\ Q^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.136)$$

Los paréntesis de Dirac están definidos como

$$\{A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\}^* = \{A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\} - \int d^3u d^3v \{A(\mathbf{x}), \chi_i(\mathbf{u})\} (M^{-1})^{ij} \{\chi_j(\mathbf{v}), B(\mathbf{y})\}. \quad (3.137)$$

Usando M^{-1} dada por (3.136), junto con el hecho de que $\{\Phi_m^1, x_j\} = \{\Phi_m^1, \Pi_j^x\} = 0$ obtenemos el álgebra canónica para las restantes variables x_i y Π_j^x

$$\{x_i, x_j\}^* = 0, \quad \{\Pi_i^x, \Pi_j^x\}^* = 0, \quad \{x_i, \Pi_j^x\}^* = \delta_{ij}. \quad (3.138)$$

Todavía resta fijar las constricciones G_m , sin embargo, en este punto la dinámica de la teoría de norma está determinada por la densidad Hamiltoniana (3.134) junto con el álgebra canónica (3.138). El objetivo en la siguiente subsección es determinar qué condiciones adicionales deben de ser impuestas sobre el TTNM para que su densidad Hamiltoniana y álgebra canónica se reduzcan a (3.134) y (3.138), respectivamente.

3.3.2. Teorías tipo modelo de Nambu (TTNM)

El TTNM está dado por el mismo Lagrangiano en la Ecu. (3.123)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_l, \lambda_m, \dot{x}_l), \quad l = 1, \dots, n. \quad m = 1, \dots, k., \quad (3.139)$$

más una restricción adicional

$$F(x_l, \lambda_m) = 0. \quad (3.140)$$

En el caso del modelo de Nambu abeliano, $F = A_\mu A^\mu - n^2 M^2 = 0$. Por ahora, trataremos con el caso donde $F(x_i, \lambda_m) = 0$ incluye todas las variables λ_m . Dicho lo anterior, la función $F(x_i, \lambda_m)$ no es arbitraria y se deben de satisfacer algunas condiciones, como se muestra en el Apéndice E. El procedimiento general con el cual analizamos el TTNM es resolviendo explícitamente la restricción (3.140) y sustituyéndola en el Lagrangiano (3.139). Existe una infinidad de maneras de satisfacer (3.140). Aquí presentamos dos de ellas y mostramos que son equivalentes.

3.3.2.1. Resolviendo para una variable x_l

En este caso asumimos que podemos resolver la constricción (3.140) como

$$x_1 = f(x_{\bar{l}}, \lambda_m), \quad \bar{l} = 2, \dots, n. \quad (3.141)$$

Cada índice con barra \bar{l} tendrá la misma convención. Las variables independientes en este caso serán $x_{\bar{l}}$ y λ_m .

1.1 La densidad Hamiltoniana y álgebra canónica

A continuación mostramos que la densidad Hamiltoniana canónica del TTNM toma la misma forma funcional que aquella que es obtenida en la sección anterior para la teoría de norma. A partir de (3.141) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_{\bar{l}}} \dot{x}_{\bar{l}} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_m} \dot{\lambda}_m, \\ &= f_{x_{\bar{l}}} \dot{x}_{\bar{l}} + f_{\lambda_m} \dot{\lambda}_m, \end{aligned} \quad (3.142)$$

donde se tiene una suma sobre índices repetidos \bar{l}, m . Sustituyendo directamente la relación (3.142) en la densidad Lagrangiana (3.139), obtenemos

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(x_1, x_{\bar{l}}, \lambda_m, \dot{x}_1, \dot{x}_{\bar{l}}), \quad x_1 = f(x_{\bar{l}}, \lambda_m), \quad \dot{x}_1 = f_{x_{\bar{l}}} \dot{x}_{\bar{l}} + f_{\lambda_m} \dot{\lambda}_m. \quad (3.143)$$

Para entender de una manera más clara el procedimiento que se realizará más adelante, explicamos a detalle lo que se está realizando en la ecuación anterior. El Lagrangiano $\bar{\mathcal{L}}$ se obtiene haciendo la sustitución $x_1 = f(x_{\bar{l}}, \lambda_m)$ en el Lagrangiano \mathcal{L} en la Ecu. (3.139), el cual recordemos es el que define a la teoría de norma de la subsección anterior (sin la constricción adicional). Una vez hecho esto, la forma funcional y dependencia de $\bar{\mathcal{L}}$ claramente es distinta a la de \mathcal{L} , por ejemplo, las cantidades $\dot{\lambda}_m$ aparecen en $\bar{\mathcal{L}}$ por medio de la sustitución de la velocidad \dot{x}_1 , con lo cual los momentos canónicos asociados a λ_m no son cero en el TTNM. Ahora, pensando que $\bar{\mathcal{L}}$ es el Lagrangiano de partida, podemos invertir el razonamiento, es decir, generar \mathcal{L} a partir de $\bar{\mathcal{L}}$. Lo anterior se logra definiendo en $\bar{\mathcal{L}}$ las combinaciones $f(x_{\bar{l}}, \lambda_m) \rightarrow x_1$ y $f_{x_{\bar{l}}} \dot{x}_{\bar{l}} + f_{\lambda_m} \dot{\lambda}_m \rightarrow \dot{x}_1$. En otras palabras y repitiendo lo anterior, cada vez que en el Lagrangiano $\bar{\mathcal{L}}$ aparezca $f(x_{\bar{l}}, \lambda_m)$ y $f_{x_{\bar{l}}} \dot{x}_{\bar{l}} + f_{\lambda_m} \dot{\lambda}_m$ los llamaremos x_1 y \dot{x}_1 . En el TTNM x_1 y \dot{x}_1 no es una variable y su correspondiente velocidad asociada, simplemente son etiquetas que definen una combinación particular de las variables del TTNM.

Dicho lo anterior, es directo que podemos hacer una equivalencia entre la forma que tienen los Lagrangianos \mathcal{L} y $\bar{\mathcal{L}}$. Es decir, podemos escribir $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$, donde estamos en el entendido de que en el Lagrangiano $\bar{\mathcal{L}}$ hemos usado las definiciones de las etiquetas x_1 y \dot{x}_1 . Enfatizamos que esta equivalencia solo es en la forma que tienen los Lagrangianos, no es una equivalencia en la dependencia funcional, la cual es distinta en ambos modelos.

Los momentos canónicos conjugados en el TTNM están dados por

$$\bar{\Pi}_{\bar{l}}^x = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_{\bar{l}}} + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_1} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{x}_{\bar{l}}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_{\bar{l}}} + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_1} f_{x_{\bar{l}}}, \quad \bar{\Pi}_m^\lambda = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\lambda}_m} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_1} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{\lambda}_m} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_1} f_{\lambda_m}, \quad (3.144)$$

donde hemos hecho uso de la Ecu. (3.142) para obtener $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{x}_i}$ y $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{\lambda}_m}$. También en lo anterior utilizamos el hecho de que $\bar{\mathcal{L}}$ puede ser reescrito del tal forma que podemos derivar primero respecto a la etiqueta x_1 . Considerando a $\bar{\mathcal{L}}$ en función de esta etiqueta x_1 es claro que podemos definir

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \equiv \Pi_i^x, \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \equiv \Pi_1^x. \quad (3.145)$$

A este punto Π_1^x y Π_i^x son sólo etiquetas que usamos para reescribir una combinación particular de las variables del TTNM, sin embargo, tal combinación de coordenadas (x_i, λ_m) y velocidades (\dot{x}_i) con $i = 2, 3, \dots, n$ y etiquetas (x_1, \dot{x}_1) debe de tener la misma forma funcional que en los momentos canónicos de la teoría de norma donde la relación (3.141) no existe. Lo anterior se sigue por el hecho de que ambos están definidos de la misma manera.

Podemos escribir los momentos canónicos (3.144) como

$$\bar{\Pi}_i^x = \Pi_i^x + \Pi_1^x f_{x_i}, \quad \bar{\Pi}_m^\lambda = \Pi_1^x f_{\lambda_m}. \quad (3.146)$$

En el TTNM las coordenadas y momentos $(x_i, \lambda_m, \bar{\Pi}_i^x, \bar{\Pi}_m^\lambda)$ satisfacen los paréntesis de Poisson no nulos

$$\{x_i, \bar{\Pi}_j^x\} = \delta_{ij}, \quad \{\lambda_m, \bar{\Pi}_n^\lambda\} = \delta_{mn}. \quad (3.147)$$

A partir de (3.146) expresamos las etiquetas Π_1^x y Π_i^x en función de los momentos canónicos $\bar{\Pi}_i^x$ y $\bar{\Pi}_m^\lambda$ como

$$\Pi_i^x = \bar{\Pi}_i^x - \Pi_1^x f_{x_i}, \quad \Pi_1^x = \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}}, \quad (3.148)$$

En el Apéndice E mostramos que las definiciones anteriores de las etiquetas Π_1^x y Π_i^x en función de las variables canónicas del TTNM $(x_i, \bar{\Pi}_i^x, \lambda_m, \bar{\Pi}_m^\lambda)$, junto con el álgebra canónica (3.147) implican la siguiente álgebra

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad \{\Pi_i^x, \Pi_j^x\} = 0, \quad \{x_i, \Pi_j^x\} = \delta_{ij}. \quad (3.149)$$

El cálculo de la densidad Hamiltoniana \mathcal{H}_c^{NM} del TTNM produce

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^{NM} &= \dot{\lambda}_m \bar{\Pi}_m^\lambda + \dot{x}_i \bar{\Pi}_i^x - \bar{\mathcal{L}}, \\ &= \dot{\lambda}_m \Pi_1^x f_{\lambda_m} + \dot{x}_i (\Pi_i^x + \Pi_1^x f_{x_i}) - \bar{\mathcal{L}}, \\ &= \Pi_1^x (f_{\lambda_m} \dot{\lambda}_m) + \dot{x}_i (\Pi_i^x + \Pi_1^x f_{x_i}) - \bar{\mathcal{L}}, \\ &= \Pi_1^x (\dot{x}_1 - f_{x_i} \dot{x}_i) + \dot{x}_i (\Pi_i^x + \Pi_1^x f_{x_i}) - \bar{\mathcal{L}}, \\ &= \dot{x}_1 \Pi_1^x + \dot{x}_i \Pi_i^x - \bar{\mathcal{L}}, \\ &= \dot{x}_k \Pi_k^x - \bar{\mathcal{L}}, \quad (k = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (3.150)$$

donde a partir de las Ecs. (3.143) y (3.146) hemos obtenido $f_{\lambda_m} \dot{\lambda}_m$ y $(\bar{\Pi}_i^x, \bar{\Pi}_m^\lambda)$, respectivamente. Dado que Π_k^x tiene la misma forma funcional que la que se deriva en la teoría de norma, la densidad Hamiltoniana anterior debe ser la misma densidad \mathcal{H}_c que aparece en la Ecu. (3.127) cuando tomamos $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$.

A partir de (3.146) se sigue que tenemos $(k-1)$ constricciones primarias, las cuales escogemos como

$$\phi_{\bar{m}}^1 = \bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}}} \approx 0. \quad (3.151)$$

La densidad Hamiltoniana extendida está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E^{NM} &= \mathcal{H}_c^{NM} + \mu_{\bar{m}} \phi_{\bar{m}}^1, \\ &= \mathcal{H}_F + \lambda_m G_m + \mu_{\bar{m}} \left(\bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}}} \right), \end{aligned} \quad (3.152)$$

donde hemos empleado que \mathcal{H}_c^{NM} está dada (funcionalmente) por \mathcal{H}_c en la Ecu. (3.127). Aquí $\mu_{\bar{m}}$ son funciones arbitrarias. En el Apéndice E mostramos que $\{\phi_{\bar{m}}^1, x_l\} = 0$, $\{\phi_{\bar{m}}^1, \Pi_l^x\} = 0$ y $\{\phi_{\bar{m}}^1, \phi_{\bar{n}}^1\} = 0$. Usando los resultados previos, la evolución de las constricciones primarias produce

$$\dot{\phi}_{\bar{m}}^1 = \{\phi_{\bar{m}}^1, \mathcal{H}_E^{NM}\} = \{\phi_{\bar{m}}^1, \lambda_n\} G_n = \left(G_{\bar{m}} - G_1 \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} \right), \quad (3.153)$$

las constricciones secundarias

$$\phi_{\bar{m}}^2 = f_{\lambda_{\bar{m}}} - G_{\bar{m}} \frac{f_{\lambda_1}}{G_1} \approx 0. \quad (3.154)$$

El próximo paso es calcular la evolución temporal de $\phi_{\bar{m}}^2$, el resultado es

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{\bar{m}}^2 &= \{\phi_{\bar{m}}^2, \mathcal{H}_E^{NM}\}, \\ &= \{\phi_{\bar{m}}^2, \mathcal{H}_c^{NM}\} + \mu_{\bar{n}} \{\phi_{\bar{m}}^2, \phi_{\bar{n}}^1\}, \\ &= A_{\bar{m}} - \mu_{\bar{n}} T_{\bar{n}\bar{m}} \approx 0, \end{aligned} \quad (3.155)$$

donde $A_{\bar{m}} = \{\phi_{\bar{m}}^2, \mathcal{H}_c^{NM}\}$ y $T_{\bar{n}\bar{m}} = \{\phi_{\bar{n}}^1, \phi_{\bar{m}}^2\}$. En el Apéndice E mostramos que es posible escoger una familia de funciones $f(x_{\bar{l}}, \lambda_m)$ tales que la matriz $T_{\bar{n}\bar{m}}$ es invertible, esto significa que $\phi_{\bar{n}}^1$ y $\phi_{\bar{m}}^2$ son constricciones de segunda clase. Los multiplicadores de Lagrange $\mu_{\bar{n}}$ se fijan como

$$\mu_{\bar{n}} = (T^{-1})_{\bar{m}\bar{n}} A_{\bar{m}}. \quad (3.156)$$

El método de Dirac se detiene en este momento y el TTNM únicamente tendrá las constricciones de segunda clase

$$\phi_{\bar{m}}^1 = \bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}}}, \quad \phi_{\bar{m}}^2 = f_{\lambda_{\bar{m}}} - f_{\lambda_1} \frac{G_{\bar{m}}}{G_1}, \quad (3.157)$$

reflejando el hecho de que la teoría no tiene invariancia de norma.

Por lo tanto, el número de d.o.f. del TTNM es

$$\text{d.o.f.} = \frac{1}{2}[2(n-1+k) - 2(k-1)] = n. \quad (3.158)$$

El siguiente paso es tomar fuertemente igual a cero las constricciones (3.157), para posteriormente introducir los paréntesis de Dirac. Para realizar esto requerimos la matriz construida mediante los PP de las constricciones

$$M = \begin{bmatrix} [R_{\bar{a}\bar{b}}] & [T_{\bar{a}\bar{b}}] \\ -[T_{\bar{b}\bar{a}}] & [S_{\bar{a}\bar{b}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ -T^T & S \end{bmatrix}, \quad (3.159)$$

donde

$$R_{\bar{a}\bar{b}} = \{\phi_{\bar{a}}^1, \phi_{\bar{b}}^1\}, \quad T_{\bar{a}\bar{b}} = \{\phi_{\bar{a}}^1, \phi_{\bar{b}}^2\}, \quad S_{\bar{a}\bar{b}} = \{\phi_{\bar{a}}^2, \phi_{\bar{b}}^2\}. \quad (3.160)$$

En el Apéndice E mostramos que $R_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Con lo cual, la matriz inversa está dada por

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1}ST^{-1} & -T^{-1} \\ T^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.161)$$

Los paréntesis de Dirac son

$$\begin{aligned} \{A, B\}^* &= \{A, B\} - \{A, \phi_{\bar{a}}^1\}(T^{-1}ST^{-1})_{\bar{a}\bar{b}}\{\phi_{\bar{b}}^1, B\} \\ &\quad + \{A, \phi_{\bar{a}}^1\}(T^{-1})_{\bar{a}\bar{b}}\{\phi_{\bar{b}}^2, B\} - \{A, \phi_{\bar{a}}^2\}(T^{-1})_{\bar{a}\bar{b}}\{\phi_{\bar{b}}^1, B\}, \end{aligned} \quad (3.162)$$

lo cual implica el resultado

$$\{A(x), B(y)\}^* = \{A(x), B(y)\}, \quad (3.163)$$

para las etiquetas x_j y Π_j^x . El resultado anterior surge por el hecho de que cada PP adicional en la Ecu. (3.162) incluye una contribución con el término $\phi_{\bar{a}}^1$, el cual tiene PP nulo con las etiquetas x_j y Π_j^x , de acuerdo a lo expuesto en el Apéndice E. En otras palabras, recuperamos el álgebra canónica (3.138) que determina la teoría de norma de la sección anterior. Una vez que se fijan los multiplicadores de Lagrange $\mu_{\bar{n}}$ y se imponen fuertemente las constricciones $\phi_{\bar{a}}^1$ y $\phi_{\bar{a}}^2$, la densidad Hamiltoniana del TTNM está dada por

$$\mathcal{H}_E^{NM} = \mathcal{H}_F + \lambda_m G_m. \quad (3.164)$$

1.2 Conservación de las cantidades G_m bajo la dinámica del TTNM

A este punto únicamente hemos demostrado dos enunciados: (i) el álgebra canónica para las etiquetas x_j y Π_j^x en el TTNM y de las variables canónicas de la teoría de norma es la misma. (ii) Las densidades Hamiltonianas de ambas teorías pueden ser escritas en la misma forma funcional. Ahora, estamos interesados en investigar la posibilidad de que la teoría de norma pueda ser reproducida por el TTNM. Para lo anterior primero tenemos que tratar con las siguientes diferencias que se presentan en ambos modelos: a) las cantidades λ_m en la densidad Hamiltoniana extendida (3.164) no son funciones arbitrarias en el TTNM, mientras que en la teoría de norma sí lo son. b) Las funciones G_m no son constricciones en el TTNM, mientras que en la teoría de norma estas cantidades, que son constricciones de primera clase, son los generadores de la simetría de norma. c) El número de grados de libertad es distinto en ambas teorías.

Para tratar con estas cuestiones debemos estudiar la evolución temporal de las cantidades G_m dentro del TTNM haciendo uso de la dinámica que la determina. Calculando su evolución temporal tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{G}_m &= \{G_m, \mathcal{H}_E^{NM}\}, \\ &= \{G_m, \mathcal{H}_F + \lambda_m G_m\}, \\ &= \{G_m, \mathcal{H}_F\} + \lambda_n \{G_m, G_n\} + \{G_m, \lambda_n\} G_n.\end{aligned}\tag{3.165}$$

La diferencia respecto a la teoría de norma surge debido al hecho de que hemos impuesto fuertemente las constricciones (3.157), y por lo tanto, λ_n son funciones de las restantes variables dinámicas: $\lambda_n = \lambda_n(x_i, \Pi_i^x)$. Hemos probado la equivalencia entre las álgebras canónicas, y por ende podemos ocupar esto para calcular los primeros dos términos en la ecuación anterior. Siguiendo esta simplificación (3.132), tenemos que

$$\dot{G}_m = \tilde{C}_{ml} G_l + J + \{G_m, \lambda_n\} G_n,\tag{3.166}$$

donde J no es una cantidad conservada en el TTNM. Esta ecuación muestra que (i) imponiendo $J = 0$ a un tiempo inicial $t = 0$ y (ii) demandando que $G_m = 0$ se satisfaga en $t = 0$, obtenemos que $\dot{G}_m = 0$ también en $t = 0$. Esto es suficiente para probar que, bajo estas dos condiciones iniciales, la relación $G_m = 0$ se va satisfacer para todo tiempo.

De esta forma podemos recuperar la teoría de norma imponiendo las cantidades G_m como constricciones Hamiltonianas, mediante funciones arbitrarias N_m , sumando el término $N_m G_m$ a la densidad Hamiltoniana (3.164) y redefiniendo $\lambda_m + N_m = \Theta_m$, dando como resultado

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_F + \Theta_m G_m,\tag{3.167}$$

donde ahora Θ_m son funciones arbitrarias. Por lo tanto, hemos recobrado completamente la densidad Hamiltoniana (3.134) junto con el álgebra canónica (3.138), lo cual determina la teoría de norma de la sección anterior. Resumiendo, la equivalencia entre la teoría de norma y el TTNM puede ser establecida únicamente después de imponer $J = 0$ y $G_m = 0$ como condiciones iniciales. Algo que debemos mencionar es que el subsecuente surgimiento de la teoría de norma va asegurar que la corriente J se conserve para todo tiempo.

Notemos que el número de d.o.f. del TTNM es n . Cuando las k condiciones G_m son impuestas como constricciones de primera clase en la densidad Hamiltoniana la teoría contendrá $n - k$ d.o.f., el cual es el mismo número de d.o.f. de la teoría de norma.

3.3.2.2. Resolviendo para una variable λ_m

Un análisis similar puede ser realizado para este caso. Resolvemos la constricción como

$$\lambda_1 = g(x_i, \lambda_{\bar{b}}) \quad \bar{b} = 2, 3, \dots, k.\tag{3.168}$$

2.1 La densidad Hamiltoniana y álgebra canónica

Dado que inicialmente $\dot{\lambda}_1$ no aparece en la densidad Lagrangiana que define la teoría de norma, los cálculos de los momentos permanecen inalterados respecto a esta última. Por lo tanto, tenemos

$$\bar{\Pi}_i^x = \Pi_i^x, \quad \bar{\Pi}_i^\lambda = \Pi_i^\lambda = 0, \quad (3.169)$$

satisfaciendo la misma álgebra canónica (3.125). Aquí λ_1 y Π_1^λ no son variables de la teoría. El cálculo de la densidad Hamiltoniana canónica igualmente permanece inalterado. De esta manera, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^{NM} &= \mathcal{H}_c, \\ &= \mathcal{H}_F + \lambda_1 G_1 + \lambda_{\bar{b}} G_{\bar{b}}, \\ &= \mathcal{H}_F + g(x_m, \lambda_{\bar{b}}) G_1 + \lambda_{\bar{b}} G_{\bar{b}}. \end{aligned} \quad (3.170)$$

La teoría contiene $(k-1)$ constricciones primarias $\phi_{\bar{b}}^1 = \bar{\Pi}_{\bar{b}}^\lambda \approx 0$, $\bar{b} = 2, 3, \dots, k$. La densidad Hamiltoniana extendida estará dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E^{NM} &= \mathcal{H}_c^{NM} + \mu_{\bar{b}} \bar{\Pi}_{\bar{b}}^\lambda, \\ &= \mathcal{H}_F + g(x_m, \lambda_{\bar{b}}) G_1 + \lambda_{\bar{b}} G_{\bar{b}} + \mu_{\bar{b}} \bar{\Pi}_{\bar{b}}^\lambda, \end{aligned} \quad (3.171)$$

donde $\mu_{\bar{b}}$ son multiplicadores de Lagrange. La condición de evolución temporal de las constricciones primarias produce

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{\bar{b}}^1 &= \{\phi_{\bar{b}}^1, \mathcal{H}_E^{NM}\}, \\ &= \{\Pi_{\bar{b}}^\lambda, \mathcal{H}_E^{NM}\}, \\ &= -(g_{\lambda_{\bar{b}}} G_1 + G_{\bar{b}}) \approx 0, \end{aligned} \quad (3.172)$$

constricciones secundarias, las cuales reescribimos como

$$\phi_{\bar{b}}^2 = g_{\lambda_{\bar{b}}} + \frac{G_{\bar{b}}}{G_1} \approx 0. \quad (3.173)$$

A partir de la evolución temporal de estas constricciones secundarias veremos que podemos fijar los multiplicadores $\mu_{\bar{b}}$. Calculando esta última tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{\bar{b}}^2 &= \{\phi_{\bar{b}}^2, \mathcal{H}_E^{NM}\}, \\ &= \{\phi_{\bar{b}}^2, \mathcal{H}_c^{NM}\} + \mu_{\bar{a}} \{\phi_{\bar{b}}^2, \phi_{\bar{a}}^1\}, \\ &= A_{\bar{b}} - \mu_{\bar{a}} T_{\bar{b}\bar{a}} \approx 0, \end{aligned} \quad (3.174)$$

donde $A_{\bar{b}} = \{\phi_{\bar{b}}^2, \mathcal{H}_c^{NM}\}$ y $T_{\bar{a}\bar{b}} = \{\phi_{\bar{a}}^1, \phi_{\bar{b}}^2\}$. Nuevamente en el Apéndice E mostramos que existen funciones particulares $g(x_m, \lambda_{\bar{b}})$ tal que la matriz $T_{\bar{a}\bar{b}}$ es invertible, y por lo tanto, los multiplicadores $\mu_{\bar{b}}$ se fijan como

$$\mu_{\bar{b}} = (T^{-1})_{\bar{b}\bar{c}} A_{\bar{c}}. \quad (3.175)$$

La existencia de $(T^{-1})_{\bar{b}\bar{c}}$ garantiza que $\phi_{\bar{b}}^1$ y $\phi_{\bar{b}}^2$ son constricciones de segunda clase. El número de d.o.f. es

$$\text{d.o.f.} = \frac{1}{2}[2(n+k-1) - 2(k-1)] = n. \quad (3.176)$$

Como es usual, hacemos fuertemente igual a cero las constricciones $\phi_{\bar{b}}^1$ y $\phi_{\bar{b}}^2$ e introducimos los paréntesis de Dirac. Para esto volvemos a requerir de la matriz construida con los PP de las constricciones

$$M = \begin{bmatrix} [R_{\bar{a}\bar{b}}] & [T_{\bar{a}\bar{b}}] \\ -[T_{\bar{b}\bar{a}}] & [S_{\bar{a}\bar{b}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ -T^T & S \end{bmatrix}, \quad (3.177)$$

donde

$$R_{\bar{a}\bar{b}} = \{\phi_{\bar{a}}^1, \phi_{\bar{b}}^1\}, \quad T_{\bar{a}\bar{b}} = \{\phi_{\bar{a}}^1, \phi_{\bar{b}}^2\}, \quad S_{\bar{a}\bar{b}} = \{\phi_{\bar{a}}^2, \phi_{\bar{b}}^2\}. \quad (3.178)$$

Nuevamente, en el Apéndice E mostramos que $R_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. La matriz inversa está dada por

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1}ST^{-1} & -T^{-1} \\ T^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.179)$$

Los paréntesis de Dirac son

$$\begin{aligned} \{A, B\}^* &= \{A, B\} - \{A, \phi_{\bar{a}}^1\}(T^{-1}ST^{-1})_{\bar{a}\bar{b}}\{\phi_{\bar{b}}^1, B\} \\ &\quad + \{A, \phi_{\bar{a}}^1\}(T^{-1})_{\bar{a}\bar{b}}\{\phi_{\bar{b}}^2, B\} - \{A, \phi_{\bar{a}}^2\}(T^{-1})_{\bar{a}\bar{b}}\{\phi_{\bar{b}}^1, B\}, \end{aligned} \quad (3.180)$$

los cuales llevan al resultado

$$\{A(x), B(y)\}^* = \{A(x), B(y)\}, \quad (3.181)$$

para las etiquetas x_j y Π_j^x . Lo anterior es debido al hecho de que cada paréntesis adicional en (3.180) incluye una contribución con $\phi_{\bar{a}}^1$, la cual tiene paréntesis de Poisson nulo con las correspondientes variables, como es mostrado en el Apéndice E. Nuevamente hemos recuperado el álgebra canónica que define la teoría de norma junto con la densidad Hamiltoniana extendida

$$\mathcal{H}_E^{NG} = \mathcal{H}_F + \lambda_m G_m. \quad (3.182)$$

2.2 Conservación de las cantidades G_m bajo la dinámica del TTNM

Al igual que en la sección anterior, tenemos que tratar con las cuestiones de no contar con las constricciones $G_m = 0$ y que las cantidades λ_m no aparecen como funciones arbitrarias en la densidad Hamiltoniana (3.182). Sin embargo, se puede seguir el método previamente empleado y obtener el mismo resultado. La conservación de las cantidades G_m se demuestra de la misma forma que en el caso anterior. La evolución temporal de las cantidades G_m usando la dinámica del TTNM está dada por

$$\begin{aligned} \dot{G}_m &= \{G_m, \mathcal{H}_F\} + \lambda_n \{G_m, G_n\} + \{G_m, \lambda_n\} G_n, \\ &= \tilde{C}_{ml} G_l + J + \{G_m, \lambda_n\} G_n, \end{aligned} \quad (3.183)$$

donde hemos ocupado la equivalencia entre las álgebras de la teoría de norma y el TTNM para calcular los primeros dos términos en (3.183). Una vez más, con el objetivo de recuperar la teoría de norma a partir del TTNM basta imponer $J = 0$ y $G_m = 0$ como condiciones iniciales. La dinámica del TTNM, vía la Ecu. (3.183), garantiza que $G_m = 0$ se cumple para todo tiempo. Por lo tanto, podemos incluir las cantidades G_m como constricciones en la densidad Hamiltoniana extendida (3.182) a través de funciones arbitrarias N_m sumando $N_m G_m$ y haciendo la redefinición $\lambda_m + N_m = \Theta_m$, obteniendo

$$H_E = H_F + \Theta_m G_m, \quad (3.184)$$

donde ahora Θ_m son funciones arbitrarias, por lo tanto hemos recuperado la densidad Hamiltoniana extendida (3.134) junto con el álgebra canónica (3.138), siendo estos dos últimos resultados los que definen la dinámica de la teoría de norma. La cuestión sobre la comparación entre el número de d.o.f. del TTNM y de la teoría de norma tiene el mismo argumento expuesto en el caso anterior. La equivalencia entre el TTNM y la teoría de norma se lleva a cabo mediante el mismo argumento del caso previo.

3.3.3. Ejemplos

En esta subsección presentamos algunos ejemplos donde se pueden aplicar las ideas anteriores. Escribiremos una breve descripción de las teorías de norma, mostrando que las condiciones (3.127), (3.128) y (3.129) enunciadas en la Sección 3.3.1 se cumplen. Estos requerimientos son suficientes para establecer que existe una equivalencia con un TTNM. En otras palabras, podemos empezar definiendo un TTNM usando los siguientes Lagrangianos y agregando una restricción adicional $F(x_l, \lambda_m) = 0$. Esto llevará a una teoría sin invariancia de norma y con una dinámica en general diferente a la que define el Lagrangiano sin la restricción adicional. Sin embargo, después de imponer las condiciones iniciales adecuadas en el TTNM podemos recuperar la equivalencia entre la teoría de norma y éste.

3.3.3.1. Modelo en mecánica clásica

Como primer ejemplo mostramos un modelo definido por la Lagrangiana [66]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \lambda(xy - y\dot{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2(x^2 + y^2) - V(x^2 + y^2). \quad (3.185)$$

Un cálculo directo muestra que la densidad Hamiltoniana canónica está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \frac{\Pi_x^2}{2} + \frac{\Pi_y^2}{2} + V(x^2 + y^2) + \lambda(x\Pi_y - y\Pi_x), \\ &= \mathcal{H}_F(x, y, \Pi_x, \Pi_y) + \lambda(x\Pi_y - y\Pi_x), \end{aligned} \quad (3.186)$$

donde

$$\mathcal{H}_F(x, y, \Pi_x, \Pi_y) = \frac{\Pi_x^2}{2} + \frac{\Pi_y^2}{2} + V(x^2 + y^2), \quad \Pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}, \quad a = x, y. \quad (3.187)$$

El modelo únicamente contiene la constricción primaria $\Phi_1 = \Pi_\lambda = 0$, la cual implica la constricción secundaria $\Phi_2 = x\Pi_y - y\Pi_x = 0$. Notemos que $\Phi_2 = \Phi_2(x, y, \Pi_x, \Pi_y)$, es decir, es independiente de λ . Siguiendo la Sección 3.3.1 identificamos $\lambda \rightarrow \lambda$ y $G_m \rightarrow \Phi_2$. Las condiciones $\{\Phi_2, H_F\} = 0$ y $\{\Phi_2, \Phi_2\} = 0$ se cumplen, por lo tanto, no hay más constricciones en la teoría. Las condiciones (3.127), (3.128) y (3.129) pedidas en la Subsección 3.3.1 se cumplen.

3.3.3.2. Teorías de Yang-Mills

Este caso fue estudiado en la sección anterior, donde el modelo de Nambu no abeliano es definido por la constricción $A_\mu^a A^{a\mu} = n^2 M^2$, siendo μ y a índices espacio temporales y del grupo de norma, respectivamente; $n^2 = 0, \pm 1$ y M^2 una constante. La versión tipo espacio presentada previamente es un ejemplo particular de lo que hemos presentado aquí. El resumen de Yang-Mills es

$$\mathcal{L}(A_\mu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - A_\mu^a J^{a\mu}, \quad (3.188)$$

lo cual produce la densidad Hamiltoniana canónica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - A_0^m (\partial_i E_i - J_0)^m + A_i^a J^{ai}, \\ &= \mathcal{H}_F(A_i, E_i) - A_0^m (\partial_i E_i - J_0)^m, \end{aligned} \quad (3.189)$$

con las constricciones primarias $\Pi_0^m = 0$, las cuales originan las constricciones secundarias $G^m = (\partial_i E_i - J_0)^m = G_m(A_i^a, E_i^a)$. Siguiendo la Subsección 3.3.1, identificamos $A_0^m \rightarrow \lambda_m$ y $G_m \rightarrow G_m$. Es bien conocido que $\{G_m, H_F\} = 0$ junto con el hecho de que $\{G_m, G_n\} \approx 0$, por lo tanto, no hay más constricciones en la teoría. Las condiciones (3.127), (3.128) y (3.129) son nuevamente satisfechas.

3.3.3.3. Gravitación de Einstein

El ejemplo más importante que deseamos presentar en este trabajo es sobre la equivalencia entre gravitación y un TTNM. Usando la descomposición ADM podemos escribir la acción de Einstein-Hilbert como

$$\int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x N^\perp (g)^{\frac{1}{2}} (K_{ij} K^{ij} - K^2 + R), \quad (3.190)$$

donde $K = K_i^i = g_{ij} K^{ij}$ y R es el escalar de Ricci sobre la superficie 3-dimensional. La variable de lapso N^\perp representa variaciones arbitrarias normales a la superficie 3-dimensional sobre la cual el estado del sistema está definido. A su vez, las variables de corrimiento N^i representan variaciones a lo largo de dicha superficie. Éstas se encuentran definidas como

$$N^j = g^{ij} g_{0i}, \quad N^\perp = (-g^{00})^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.191)$$

y la cantidad K_{ij} por

$$K_{ij} = \frac{1}{2N^\perp} (-\dot{g}_{ij} + N_{i|j} + N_{j|i}), \quad (3.192)$$

donde $|$ indica la derivada covariante sobre la superficie 3-dimensional. Uno puede escribir directamente las constricciones primarias

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^\mu} = 0, \quad N^\mu = (N^\perp, N^i). \quad (3.193)$$

Los momentos no nulos están dados por

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{g}_{ij}} = -(g)^{\frac{1}{2}}(K^{ij} - K g^{ij}). \quad (3.194)$$

Lo anterior implica que la densidad Hamiltoniana canónica es

$$\mathcal{H}_c = N^\perp \mathcal{H}_\perp + N^i \mathcal{H}_i, \quad (3.195)$$

donde

$$\mathcal{H}_\perp = g^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi_{ij} \Pi^{ij} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) - (g)^{\frac{1}{2}} R, \quad (3.196)$$

$$\mathcal{H}_i = -2 \Pi_i^j |_{|j}. \quad (3.197)$$

La evolución temporal de las constricciones primarias $\Omega^\mu = \Pi^\mu = 0$ genera las constricciones secundarias $\Omega^4 = \mathcal{H}_\perp$ y $\Omega^{4+i} = \mathcal{H}_i$. Se puede demostrar [67] que $\{\Omega^4, \Omega^{4+i}\} = \{\Omega^{4+i}, \Omega^{4+j}\} \approx 0$. Lo anterior junto con las Ecs. (3.193) y (3.195) son las condiciones (3.127), (3.128) y (3.129) pedidas en la Subsección 3.3.1. Siguiendo la notación de aquella sección identificamos $\lambda_m \rightarrow N^\mu$ y $G_m \rightarrow \mathcal{H}_\perp, \mathcal{H}_i$.

3.4. Conclusiones

Modelo de Nambu abeliano (ANM)

Hemos probado que después de imponer la ley de Gauss junto con la conservación de la corriente como condiciones iniciales en el ANM, la teoría resultante es equivalente a la QED en la norma no lineal $A_\mu A^\mu - M^2 = 0$, a todo orden en teoría de perturbaciones. La estrategia es escribir ambas teorías en términos de los campos que describen los mismos grados de libertad, los cuales surgen de la misma densidad Lagrangiana, dando resultados idénticos para las reglas de Feynman. De esta manera, los cálculos perturbativos en cualquier proceso físico en ambos modelos son indistinguibles.

El punto de inicio en el ANM es la Ref. [50], donde los autores introducen una parametrización conveniente del campo A_μ en función de las variables a_μ , la cual está definida en (3.6). En estas variables, la restricción $A_\mu A^\mu - M^2 = 0$ que define el modelo de Nambu toma la forma más simple $n \cdot a = 0$. Esta condición exhibe al campo a_μ como un modo de Goldstone (GB) del modelo, el cual es ortogonal a la dirección del vacío n_μ que induce el correspondiente rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz (SLSB). En este punto, el ANM se define por la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{ANM}}(a_\mu, \bar{\psi}, \psi) = \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$ junto con la condición $n \cdot a = 0$. Esta condición es una manera conveniente de reemplazar la restricción no lineal porque uno puede hacer explícita la correspondiente sustitución $a_0 = 0$ o $a_3 = 0$ al final de los cálculos, permitiendo una construcción unificada del ANM de los casos tipo tiempo y tipo espacio, respectivamente. El requisito $n \cdot a = 0$ se incorpora en los cálculos a través del propagador $D_{\mu\nu}^{\text{ANM}}(k)$ dado en la Ecu. (3.12) y que satisface $n^\mu D_{\mu\nu}^{\text{ANM}} = 0$ junto con $k^\mu D_{\mu\nu}^{\text{ANM}} = 0$ para los GB que satisfacen la condición sobre la capa de masa. Dado que el esquema perturbativo se lleva a cabo en el cuadro de interacción, los campos se cuantizan a partir de la densidad Lagrangiana libre dada en la Ecu. (3.13), que en particular da origen al propagador $D_{\mu\nu}^{\text{ANM}}(k)$. Como se enfatizó en la Ref. [26], la propiedad de transversabilidad sobre la capa de masa del propagador $D_{\mu\nu}^{\text{ANM}}(k)$ garantiza que la ley de Gauss es impuesta à la Dirac, sobre los estados físicos. Más aún, la corriente fermiónica se conserva, dado que es la corriente de Noether que surge de la invariancia de fase global del sector fermiónico. De esta manera, el esquema perturbativo asegura que los requerimientos adicionales que deben ser impuestos como condiciones iniciales sobre el ANM para restaurar la invariancia de norma se satisfacen. Las reglas de Feynman restantes se obtienen a partir de la expansión de la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{ANM}}(a_\mu, \bar{\psi}, \psi) = \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu(a_\nu), \bar{\psi}, \psi)$ en potencias de a^2/M^2 .

Posteriormente procedemos a estudiar la QED y construimos la densidad Lagrangiana en una norma fija usando el método BRST, el cual introduce los fantasmas de Faddeev-Popov (FPG) \bar{c}, c . Partimos de $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)$ escogiendo la norma $A_\mu A^\mu - M^2 = 0$, y reescribimos dicha densidad Lagrangiana en función de la misma parametrización (3.6) usada en el ANM. Observamos ahora que los campos a_μ describen fotones en lugar de GB. La condición que fija la norma $\alpha(A_\mu A^\mu - M^2)^2$ se convierte en $4M^2\alpha(n \cdot a)^2$, la cual emerge como la elección de una norma axial que además incorpora interacciones tipo Yang-Mills. Tomando la condición de norma axial pura (homogénea), $\alpha \rightarrow \infty$, obtenemos el propagador del fotón $D_{\mu\nu}^{\text{QED}}$ en la

Ecu. (3.18), el cual es idéntico al propagador del ANM $D_{\mu\nu}^{\text{ANM}}$ dado en la Ecu. (3.12). En este punto, la relación entre ambas teorías, escrita en términos de las mismas variables y teniendo las mismas reglas de Feynman para los campos $a_\mu, \bar{\psi}, \psi$, se resume en que las densidades Lagrangianas del ANM $\mathcal{L}_{\text{ANM}}(a_\mu, \bar{\psi}, \psi)$ y de la QED en la norma ya fija $\mathcal{L}_{\text{GFED}}(a_\mu, \bar{\psi}, \psi)$ difieren únicamente por la contribución de los fantasmas $\mathcal{L}_{\text{GHOST}}$. De esta forma, el último paso para probar la equivalencia entre ambas teorías es mostrar que los fantasmas se desacoplan a todo orden en teoría de perturbaciones. Siguiendo un método similar al empleado en las teorías de Yang-Mills, en la Subsección 3.1.4 demostramos que los FPG efectivamente se desacoplan. En este cálculo usamos regularización dimensional y consideramos las interacciones fantasma-fotón que surgen de la densidad Lagrangiana para QED en la norma ya fija para mostrar que la inserción más general de los FPG en la amplitud correspondiente para un diagrama arbitrario es cero.

Recapitulando, dado que los fantasmas se desacoplan, hemos mostrado que el ANM, complementado con las condiciones iniciales de la conservación de corriente y la ley de Gauss, junto con la QED expresada en la norma no lineal $A_\mu A^\mu - M^2 = 0$, son descritos por la misma densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\nu(a_\mu), \bar{\psi}, \psi)$. De este modo se obtienen las mismas reglas de Feynman para los propagadores y las interacciones de los campos $a_\mu, \bar{\psi}, \psi$, haciendo que ambos modelos sean indistinguibles en teoría de perturbaciones. Los cálculos perturbativos en la Ref. [50] constituyen un ejemplo detallado de esta equivalencia. Nuestros resultados generales están de acuerdo con el esquema Hamiltoniano discutido en las Refs. [58, 59]. Como se enfatiza en tales referencias, para probar la equivalencia, deben imponerse algunos requisitos adicionales sobre el ANM mediante condiciones iniciales. Sin embargo, estas condiciones permanecen válidas debido a la dinámica del ANM. Dichas condiciones son la conservación de la corriente y la ley de Gauss. Y como previamente se explicó en el texto, éstas se satisfacen en el cálculo perturbativo.

Modelo de Nambu no abeliano

La posible interpretación de partículas de norma (por ejemplo fotones y gravitones) como GB que surgen de un rompimiento espontáneo de simetría es una hipótesis interesante que daría un marco dinámico para el principio de norma.

En este capítulo hemos partido de la propuesta de Nambu, donde el SLSB se incorpora de una manera efectiva por medio de una constricción no lineal. Estos modelos pueden ser entendidos como generalizaciones del modelo sigma no lineal, el cual describe interacciones entre piones. El objetivo en este capítulo fue determinar bajo qué condiciones la violación de la simetría de Lorentz (introducida por la constricción no lineal) es físicamente inobservable, de tal manera que los bosones de Goldstone que aparecen puedan interpretarse como las partículas de norma de una teoría invariante de norma. En otras palabras, determinamos las condiciones bajo las cuales el correspondiente modelo de Nambu es equivalente a una teoría de norma. Tales condiciones también han sido estudiadas usando métodos perturbativos, a nivel de árbol o un lazo, para la electrodinámica y las teorías de Yang-Mills, por ejemplo

en las Refs. [26, 50, 51, 52, 53]. El resultado principal es que, al orden considerado, después de imponer la ley de Gauss junto con la conservación de la corriente, las violaciones a la simetría de Lorentz no son observables, de tal forma que el modelo de Nambu reproduce la correspondiente teoría de norma, con los bosones de norma interpretados como bosones de Goldstone.

En este capítulo se generaliza al caso no abeliano el análisis Hamiltoniano no perturbativo desarrollado para el caso del modelo de Nambu abeliano en la Ref. [58]. Así mismo, presentamos una mejora tanto práctica como conceptual en el método desarrollado en el caso abeliano, que permite establecer la relación entre el NANM y la teoría de YM de una manera más clara y directa.

En la Subsección 3.2.1 consideramos el caso específico de la versión tipo espacio del modelo de Nambu no abeliano (SL-NANM) resolviendo la restricción no lineal (3.39) para $A_{\mu=3}^{a=1}$ en términos de los $4N - 1$ d.o.f. por punto en el espacio de coordenadas. Se derivan las ecuaciones de movimiento Lagrangianas, las cuales difieren a las ecuaciones que se obtienen en la teoría de YM. Posteriormente, se obtiene el Hamiltoniano y los momentos canónicos. A partir de estos últimos se encuentra que la teoría contiene $2(N - 1)$ restricciones de segunda clase. Las variables estándares de la teoría de Yang-Mills A_i^a y E^{bj} se reescriben en función de las variables canónicas del SL-NANM y se calcula el álgebra inducida por los paréntesis de Poisson de dichas variables en el SL-NANM, mostrando que resulta el álgebra canónica de la teoría de YM. El Apéndice C incluye un resumen que demuestra el enunciado anterior. Las restricciones secundarias se imponen fuertemente igual a cero junto con la introducción de los paréntesis de Dirac, cuyos valores para las variables A_i^a y E^{bj} resultan ser los mismos que los PP previamente calculados. El método de Dirac para sistemas con restricciones nos dice que el modelo cuenta con $\frac{1}{2}(2(4N - 1) - 2(N - 1)) = 3N$ d.o.f.. El Hamiltoniano extendido final para el SL-NANM, reescrito en función de las variables A_i^a y E^{bj} , tiene la misma forma que el Hamiltoniano estándar de la teoría de YM, excepto que las leyes de Gauss $\Omega^a = 0$ no aparecen como restricciones de primera clase. Sin embargo, el cálculo de la evolución temporal de estas funciones Ω^a muestra que, después de imponer como condiciones iniciales la conservación de corriente junto con las leyes de Gauss, se obtiene que $\Omega^a(t) = 0$ para todo tiempo. Así mismo, el álgebra entre las funciones Ω^a en el SL-NANM es la misma álgebra que se satisface en la teoría de YM, lo anterior es debido a lo siguiente: (i) mediante una transformación las funciones Ω^a pueden ser reescritas en términos de las variables canónicas de la teoría de YM y (ii) dicha transformación preserva el álgebra canónica. Después de imponer las N leyes de Gauss como restricciones de primera clase sobre el Hamiltoniano extendido, mediante las adecuadas condiciones iniciales, la teoría cuenta con $\frac{1}{2}(6N - 2N) = 2N$ d.o.f., lo cual corresponde con los d.o.f. de la teoría de YM. Debemos de enfatizar que se puede realizar un análisis similar para cada uno de los restantes casos tipo tiempo y tipo luz del NANM.

En la Subsección 3.2.2 se presenta una importante mejora tanto práctica como conceptual en relación con los cálculos previos donde se han considerado por separado los diferentes casos del NANM. Partiendo de la parametrización alternativa (3.95) que resuelve la restricción no lineal (3.39) para cualquier valor de n^2 en función de $3N$ d.o.f. Φ_A^a , $A = 1, 2, 3$, se muestra

que el cálculo de los momentos canónicos Π_A^a del NANM puede ser escrito de tal forma que la parametrización elegida induce una relación directa entre las variables A_i^a y E^{bj} de la teoría de YM y las variables canónicas del NANM. Dado que las transformaciones en el espacio fase son inducidas por una transformación únicamente de las coordenadas (para la parametrización elegida), sabemos de mecánica clásica que la transformación $(\Phi_A^a, \Pi_B^b) \rightarrow (A_i^a, E^{bj})$ es una transformación canónica, una vez que las variables E^{bj} se identifican como los momentos canónicos conjugados de las variables A_i^a mediante la parte cinética de la acción Hamiltoniana en el NANM. De esta forma, uno puede concluir directamente que el álgebra de (A_i^a, E^{bj}) tiene que ser también canónica, sin la necesidad de llevar a cabo los cálculos tediosos realizados para el caso SL-NANM. De este modo se recupera directamente el álgebra canónica que describe la teoría de YM. Es interesante observar que la identificación de la transformación canónica es independiente de la estructura de la parametrización elegida, siempre que las propiedades de invertibilidad en el cambio de coordenadas $\Phi_A^a = \Phi_A^a(A_i^a)$ se satisfagan. Otra propiedad útil de esta parametrización es que exhibe al NANM como una teoría regular (es decir, sin constricciones). El Hamiltoniano canónico del NANM reescrito en función de las variables de la teoría de YM (A_i^a, E^{bj}) tiene nuevamente la misma forma que el Hamiltoniano de la teoría de YM, excepto que las leyes de Gauss no aparecen como constricciones de primera clase. También se evaluó la evolución temporal de las funciones Ω^a , dando un resultado similar al obtenido en el caso SL-NANM.

Resumiendo, se ha establecido una equivalencia no perturbativa entre la teoría Yang-Mills y el modelo de Nambu no abeliano, una vez que la conservación de la corriente junto con las leyes de Gauss son impuestas como condiciones iniciales. De hecho, las leyes de Gauss (válidas ahora para todo tiempo) se adicionan como constricciones Hamiltonianas $-N^a \Omega^a$ a la Ecu. (3.116), mediante las funciones arbitrarias N^a . La posterior redefinición $A_0^a + N^a = \Theta^a$ lleva al Hamiltoniano final de la teoría de YM

$$\mathcal{H}_{\text{YM}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \Theta^a \Omega^a + J_i^a A^{ia}, \quad (3.198)$$

donde ahora Θ^a son funciones arbitrarias. En otras palabras, las leyes de Gauss son impuestas *à la Dirac* sobre los estados físicos $|\Psi\rangle_{\text{phys}}$ demandando que $\Omega^a |\Psi\rangle_{\text{phys}} = 0$. También el subsecuente surgimiento de la teoría de Yang-Mills garantiza la conservación de la corriente para todo tiempo, como una consecuencia de las ecuaciones de movimiento. La equivalencia establecida es independiente de cualquier fijación de norma y apoya la idea de que las partículas de norma pueden surgir como los bosones de Goldstone de un modelo que exhibe un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz, donde este último no es físicamente observable.

Teorías de norma surgiendo a partir de modelos tipo Nambu

En esta sección se ha generalizado el análisis Hamiltoniano no perturbativo desarrollado para el modelo de Nambu en la Ref. [58]. El objetivo principal fue establecer los criterios bajo los

cuales podemos asegurar que una teoría de norma puede ser recuperada a partir de una teoría tipo modelo de Nambu (TTNM). La prueba es por construcción siguiendo un análisis Hamiltoniano no perturbativo. Para establecer dicha equivalencia se tienen que considerar las siguientes cuestiones: (i) el TTNM es una teoría que no es invariante de norma y (ii) el número de grados de libertad del TTNM es mayor que el de la teoría de norma. Hemos demostrado que después de imponer condiciones iniciales apropiadas en el TTNM es posible hacer que se recupere la invariancia de norma y que los grados de libertad sean los mismos que en una teoría de norma estándar. Estas condiciones constituyen un paso esencial en la prueba de la equivalencia que se desea realizar.

En la Subsección 3.3.1 se presentaron los criterios que definen la clase de teorías de norma que deseamos recuperar a partir de un TTNM. Se empleó el método de Dirac para calcular la densidad Hamiltoniana y álgebra canónica que determinan la dinámica de estos modelos. En la Subsección 3.3.2 se definió el TTNM mediante la densidad Lagrangiana que define la teoría de norma introducida en la Subsección 3.3.1 junto con una restricción adicional entre las coordenadas. Dicha restricción (3.140) fue resuelta haciendo uso de dos distintas parametrizaciones e introducida directamente en la densidad Lagrangiana. Posteriormente, se construyeron los momentos canónicos junto con la densidad Hamiltoniana, con la aparición de restricciones de segunda clase. Este hecho refleja que el TTNM no tiene invariancia de norma. El conteo de los grados de libertad mediante el método de Dirac revela que el TTNM cuenta con n d.o.f.. Usando las variables canónicas del TTNM se expresan las variables canónicas de la teoría de norma definida en la Subsección 3.3.1 y se demuestra que el álgebra canónica se preserva ante esta transformación. El Apéndice E contiene los cálculos que prueban esta afirmación. Posteriormente, las restricciones de segunda clase se impusieron fuertemente igual a cero con el objeto de introducir los paréntesis de Dirac, cuyos valores para las variables estándares de la teoría de norma son los mismos que los PP previamente calculados. La densidad Hamiltoniana del TTNM se reescribe en función de las variables de la teoría de norma, encontrando que tiene la misma forma funcional que en la teoría de norma, excepto por el hecho de que las cantidades G_m no aparecen como restricciones de primera clase. Usando la dinámica del TTNM se demuestra que, imponiendo las condiciones iniciales adecuadas descritas en el texto ($J(t=0) = 0$ y $G_m(t=0) = 0$), las relaciones $G_m(t) = 0$ se preservan para todo tiempo. Esto nos permite incluir las cantidades G_m como restricciones sobre la densidad Hamiltoniana extendida mediante la introducción de funciones arbitrarias N_m , sumando la cantidad $N_m G_m$ directamente a dicha densidad Hamiltoniana. De esta manera la densidad Hamiltoniana y álgebra canónica que determinan el TTNM y la teoría de norma son las mismas. Es importante mencionar que la imposición de las cantidades $G_m = 0$ en el TTNM es equivalente a generar la invariancia de norma en el modelo, dado que, siendo estas cantidades restricciones de primera clase en la teoría de norma, son los generadores de la correspondiente simetría. En otras palabras, la invariancia de norma emerge dinámicamente en el TTNM al imponer las condiciones iniciales adecuadas. Una vez que las k condiciones G_m se imponen como restricciones de primera clase en la densidad Hamiltoniana la teoría contendrá $n - k$ d.o.f., el cual es el mismo número de d.o.f. de la teoría de norma.

Resumiendo, se ha probado la equivalencia entre una teoría de norma y el TTNM mostrando que, después de imponer las condiciones iniciales adecuadas, las densidades Hamiltonianas y las álgebras canónicas que describen ambas teorías son las mismas.

En la Subsección 3.3.3 se presentan ejemplos de teorías de norma donde se puede aplicar el método descrito anteriormente, siendo las teorías de Yang-Mills y la Gravitación los ejemplos de mayor relevancia.

Hemos desarrollado el análisis previo teniendo en mente las teorías de Yang-Mills y la Gravitación, donde estas teorías satisfacen los criterios (3.127), (3.128) y (3.129) que se necesitan para realizar la equivalencia propuesta. Sería de gran interés desarrollar un método que pueda ser extendido más allá de los criterios antes mencionados. El enunciado de que cualquier teoría de norma es una teoría que proviene de un rompimiento espontáneo de simetría es una idea interesante que merece un estudio más detallado [44].

Capítulo 4

Estudio a temperatura finita dentro del Modelo Estándar Extendido

Convencionalmente la teoría cuántica de campos es un esquema formalizado a temperatura cero. Las predicciones teóricas bajo este enfoque, por ejemplo secciones eficaces para colisiones de partículas en aceleradores, empatan con los datos experimentales de una manera bastante adecuada. Sin embargo, ciertamente el mundo real no es a temperatura cero, y es natural preguntarse cuándo las contribuciones que surgen por este hecho empiezan a ser relevantes, o bien, qué fenómenos ausentes a temperatura cero pueden surgir al considerar un espacio de fondo térmico.

Estudios sobre etapas tempranas del universo, transiciones de fase, objetos astrofísicos tales como “white dwarfs” y estrellas de neutrones, constituyen ejemplos donde la temperatura desempeña un papel fundamental. La teoría de campos a temperatura finita es indispensable para el entendimiento de dichos fenómenos. Cosmología y astrofísica son excelentes escenarios donde estudios y cálculos teóricos pueden ser contrastados con la observación.

La función de partición $Z = Tr[e^{-\beta H}]$ es una cantidad que juega un rol central en el estudio de la teoría cuántica de campos a temperatura finita [68, 69, 70]. Todas las cantidades termodinámicas, por ejemplo, presión, número de partículas, entropía, pueden ser generadas a partir de este objeto [68, 69, 70].

En teoría cuántica de campos el formalismo de la integral funcional ha permitido obtener funciones de partición para teorías de norma, tales como QCD y QED, y de esta manera derivar las correspondientes propiedades termodinámicas. Este esquema presenta varias virtudes, entre las cuales destaca el formalismo perturbativo en presencia de interacciones.

En este capítulo se estudia el comportamiento a temperatura finita de un modelo que incorpora el concepto de un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz, usando el formalismo de la integral funcional para el cálculo de la correspondiente función de partición. El modelo que usamos para introducir el rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz es el denominado sector puro del fotón del SME, el cual incluye el Lagrangiano de Maxwell, más la presencia de un término CPT-impar ($\frac{1}{2}(k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}$), algunas veces llamado término Carroll-Field-Jackiw [71], junto con otro término CPT-par $-\frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$. Am-

bos términos han sido estudiados extensivamente en la literatura [72], y existen constricciones experimentales para los coeficientes que se acoplan al campo de Maxwell [73]. La búsqueda de nuevos efectos debidos a estos términos que introducen violación de Lorentz, junto con una mejora en la magnitud de las cotas de estos coeficientes constituyen dos de las principales líneas de estudio. El estudio de la radiación de fondo de microondas (CMB) ofrece una oportunidad de verificar el sector puro del fotón en el SME a temperatura finita [74], dado que la propagación de la luz podría estar afectada, por modificaciones en las relaciones de dispersión, en el comportamiento de la polarización y en la aparición de propiedades birrefringentes, entre otros efectos [72, 73, 75]. Como es de esperar, las propiedades termodinámicas y distribución espectral pueden sufrir también modificaciones. En Ref. [76], se calculó la función de partición en el formalismo de la integral funcional con el objeto de estudiar el comportamiento a temperatura finita del término Carroll-Field-Jackiw, para el caso de un espacio de fondo puramente espacial. En Ref. [77] el estudio se extendió al término CPT-par solo para configuraciones particulares de los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, con el objeto de simplificar los cálculos. En ambos casos, se encontraron correcciones a la radiación de fondo y anisotropía en la distribución para la densidad de energía debidas a la violación de Lorentz. Sin embargo, permanece la cuestión si no existe pérdida de información por considerar únicamente un pequeño número de configuraciones particulares. El objetivo de este capítulo es estudiar las propiedades a temperatura finita del sector CPT-par del fotón en el SME en el caso más general, siguiendo un esquema similar al empleado en las Refs. [76, 77]. El esquema a seguir es el siguiente: en la Sección 4.1 se introduce el Lagrangiano asociado al sector CPT-par del fotón en el SME y se presentan algunas propiedades de éste. Siguiendo el método de Dirac para sistemas con constricciones, se realiza el análisis Hamiltoniano y se lleva a cabo la cuantización canónica. En la Sección 4.2 se evalúa la función de partición en el formalismo de la integral funcional y se derivan algunas propiedades termodinámicas. Se reporta una mejora sustancial respecto a cálculos previos considerando configuraciones arbitrarias para los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. El resultado se compara con el que se obtiene siguiendo un esquema termodinámico clásico.

4.1. El Modelo

Nos concentramos en el sector puro del fotón, particularmente en los términos CPT-par dentro del SME. La densidad Lagrangiana está dada por

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

donde el primer término corresponde a la electrodinámica estándar, siendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor de campo electromagnético. El segundo término introduce el rompimiento de la simetría de Lorentz, el cual es controlado por las constantes no dinámicas $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. Estos coeficientes tienen las simetrías del tensor de Riemann y una doble traza nula, lo cual implica un total de 19 componentes independientes. El tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ puede ser alternativamente

parametrizado en función de cuatro matrices de 3×3 [72], $\kappa_{DE}, \kappa_{HB}, \kappa_{DB}, \kappa_{HE}$, definidas por

$$(\kappa_{DE})^{jk} = -2(k_F)^{0j0k}, \quad (\kappa_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon^{jppq}\epsilon^{klm}(k_F)^{pqlm}, \quad (\kappa_{DB})^{jk} = -(\kappa_{HE})^{kj} = \epsilon^{kppq}(k_F)^{0jpp}. \quad (4.2)$$

Las matrices κ_{DE} y κ_{HB} contienen 11 componentes independientes, mientras que κ_{DB} y κ_{HE} poseen las restantes 8 componentes, lo cual suma los 19 elementos independientes del tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. Otra parametrización alternativa, que permite derivar cotas experimentales más fácilmente, consiste en escribir $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ en función de cuatro matrices sin traza y un escalar [72],

$$(\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})^{jk}, \quad (4.3)$$

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} - \kappa_{HB})^{jk} - \frac{1}{3}\delta^{jk}\text{Tr}(\kappa_{DE}), \quad \tilde{\kappa}_{\text{tr}} = \frac{1}{3}\text{Tr}(\kappa_{DE}). \quad (4.4)$$

La matriz $\tilde{\kappa}_{o+}$ es antisimétrica, mientras que las restantes matrices son simétricas. En la Sección 4.2 usaremos esta segunda parametrización para expresar los resultados principales. Como previamente mencionamos, los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ pueden ser motivados por un rompimiento espontáneo de simetría [25], evitando cuestiones de incompatibilidad en Relatividad General que se presentan cuando se introduce un rompimiento explícito de la simetría de Lorentz [78]. La transformación $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda$ mantiene el Lagrangiano en la Ecu. (4.1) invariante, y por lo tanto, la simetría de norma se preserva como en el caso de la electrodinámica estándar.

En esta primera Sección empleamos la convención: índices griegos $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, índices latinos $i, j = 1, 2, 3$ y la métrica $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange que surgen del Lagrangiano (4.1) corresponden a

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} + (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu F^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.5)$$

Las restantes ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.6)$$

continúan siendo válidas como una consecuencia de haber definido $F^{\mu\nu}$ a través del potencial A_μ . Como se dijo previamente, la propagación de la luz se modifica debido a la presencia de los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. En este caso, la relación de dispersión para el Lagrangiano en la Ecu. (4.1) se dedujo en la Ref. [72] y está dada por

$$p_\pm^0 = (1 + \rho \pm \sigma)|\vec{p}|, \quad \rho = -\frac{1}{2}\tilde{k}_\alpha^\alpha, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}(\tilde{k}_{\alpha\beta})^2 - \rho^2, \quad (4.7)$$

al orden más bajo en $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, con

$$\tilde{k}^{\alpha\beta} = (k_F)^{\alpha\mu\beta\nu}\hat{p}_\mu\hat{p}_\nu, \quad \hat{p}^\mu = \frac{p^\mu}{|\vec{p}|}. \quad (4.8)$$

Consideremos el análisis de las constricciones *à la* Dirac [36], junto con la cuantización canónica del modelo. Esto nos permitirá determinar el número de grados de libertad del modelo y establecer algunas diferencias entre la electrodinámica estándar y el sector CPT-par del fotón en el SME . Los momentos canónicos conjugados están dados por

$$\begin{aligned}\pi^i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = F^{i0} + (k_F)^{i0\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= F^{j0}(\delta^i_j + 2(k_F)^{i0}_{j0}) + (k_F)^{i0lm} F_{lm} \\ &= M^i_j F^{j0} + N^i,\end{aligned}\tag{4.9}$$

donde hemos definido $M^i_j \equiv \delta^i_j + 2(k_F)^{i0}_{j0}$ y $N^i \equiv (k_F)^{i0lm} F_{lm}$. El momento canónico asociado a A_0 es nulo, $\pi^0 = 0$, tal como ocurre en electrodinámica estándar. Aproximando todas las cantidades a primer orden en los coeficientes con violación de Lorentz, encontramos que la matriz M^i_j tiene la inversa $B^i_j \equiv (M^{-1})^i_j = \delta^i_j - 2(k_F)^{i0}_{j0}$, lo cual nos permite reescribir la Ecu. (4.9) como

$$F^{k0} = B^k_i \pi^i - N^k,\tag{4.10}$$

expresión de la cual es posible despejar las velocidades \dot{A}^k . Usando lo anterior es directo obtener la densidad Hamiltoniana canónica

$$\begin{aligned}H_c &= \pi^i \dot{A}_i - L \\ &= -\frac{1}{2} B^i_j \pi^j \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - (k_F)^{0ilm} \pi_i F_{lm} + \frac{1}{4} (k_F)^{ijlm} F_{ij} F_{lm} - A_0 \partial^k \pi_k,\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde hemos realizado una integración por partes y omitido los términos en la frontera. Los paréntesis de Poisson (PP) no nulos están dados por

$$\{A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{y}, t)\}_P = \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\tag{4.12}$$

En lo que sigue asumiremos que todos los PP se calculan a tiempos iguales y omitiremos la etiqueta t . Empleamos el método de Dirac para construir la teoría canónica debido al hecho de que la restricción primaria

$$\phi_1 = \pi^0 \simeq 0,\tag{4.13}$$

está presente (aquí el símbolo \simeq denota débilmente igual a cero). La densidad Hamiltoniana extendida está definida como

$$H_E = H_c + \lambda \phi_1,\tag{4.14}$$

donde λ es una función arbitraria. La condición de evolución temporal de la restricción primaria en la Ecu. (4.13),

$$\dot{\phi}_1(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}), \int d^3y H_E(\mathbf{y})\}_P \simeq 0,\tag{4.15}$$

da el análogo de la ley de Gauss para esta teoría

$$\phi_2 = \partial_i \pi^i \simeq 0.\tag{4.16}$$

No es difícil probar que las constricciones definidas en las ecuaciones (4.13) y (4.16) son las únicas constricciones presentes en el modelo ($\{\partial_i \pi^i, F_{lm}\} = 0$), y que a su vez constituyen un conjunto de primera clase ($\{\phi_1, \phi_2\} = 0$). Como en electrodinámica estándar, el modelo posee dos grados de libertad (d.o.f.). Siguiendo el esquema de Dirac: d.o.f. = $\frac{1}{2}$ [variables en el espacio fase-constricciones de segunda clase - $2 \times$ constricciones de primera clase] = $\frac{1}{2}[8 - 0 - 2 \times 2] = 2$. Si escribimos la Ecu. (4.16) en función del tensor de campo electromagnético usando la definición de los momentos canónicos en la Ecu. (4.9), obtenemos

$$\partial_i \pi^i = \partial_i F^{i0} + (k_F)^{i0\alpha\beta} \partial_i F_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.17)$$

Reconocemos la última ecuación como la ecuación Lagrangiana (4.5) para la componente $\mu = 0$, sin embargo, en el formalismo Hamiltoniano ésta aparece como una restricción y no como una ecuación de movimiento. La ley de Gauss (4.16) es diferente de su forma estándar, siendo esto más evidente cuando se reescribe en términos de los campos eléctricos y magnéticos en lugar de los momentos canónicos ($\pi^i = F^{i0} + (k_F)^{i0\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$). Para construir una teoría cuántica vía la cuantización canónica ($\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]$), debemos remover los grados de libertad extra. Esto significa que debemos imponer tantas constricciones de norma como constricciones de primera clase presentes en el modelo. Estas constricciones de norma deben de ser admisibles y deben de convertir las constricciones de primera clase en constricciones de segunda clase. Entonces, podemos introducir los paréntesis de Dirac para llevar a cabo la cuantización. Elegimos la norma de Coulomb ($\Phi_1 = \partial_i A^i \simeq 0$) y $\Phi_2 = A_0 \simeq 0$ para fijar la norma. Los paréntesis de Dirac se definen como

$$\{A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\}_D = \{A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\}_P - \int d^3u d^3v \{A(\mathbf{x}), \chi_i(\mathbf{u})\}_P (Q^{-1})^{ij} \{\chi_j(\mathbf{v}), B(\mathbf{y})\}_P, \quad (4.18)$$

donde χ_i es una de las constricciones ($\phi_1, \phi_2, \Phi_1, \Phi_2$) y $Q^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\chi_i(\mathbf{x}), \chi_j(\mathbf{y})\}_P$,

$$Q^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (4.19)$$

$$(Q^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

El resultado es

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), A^j(\mathbf{y}, t)\}_D &= 0, \\ \{\pi_i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)\}_D &= 0, \\ \{A_i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)\}_D &= \delta_i^j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \partial_i \partial^j \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \equiv \delta_{1i}^3{}^j(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

y tienen la misma forma que en el caso de electrodinámica estándar cuando se usan los momentos canónicos. Sin embargo, reescribiéndolos en función de los campos eléctricos y magnéticos con la Ecu. (4.10), la diferencia se manifiesta,

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), A^j(\mathbf{y}, t)\}_D &= 0, \\ \{E_i(\mathbf{x}, t), E^j(\mathbf{y}, t)\}_D &= 2[(k_F)^{i0lj} \partial_{xl} - (k_F)^{j0li} \partial_{yl}] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{A_i(\mathbf{x}, t), E^j(\mathbf{y}, t)\}_D &= -\delta_{\perp i}^3 \cdot^j(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + 2(k_F)^{j0} \cdot_{s0} \delta_{\perp i}^3 \cdot^s(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Una vez que los paréntesis de Dirac han sido determinados, la dinámica de la teoría será generada por el Hamiltoniano en la Ecu. (4.12) sin el término $A_0 \partial_i \pi^i$, el cual es proporcional a la restricción ϕ_2 que ya ha sido fijada en el proceso de introducir los paréntesis de Dirac. La cuantización canónica puede ser llevada a cabo usando el Hamiltoniano (4.12) y los paréntesis dados por (4.21).

Siendo $U(1)$ el grupo de simetría de norma de la teoría, existen otras posibilidades para fijar la norma, como la norma de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$), la cual es manifiestamente covariante; sin embargo, no es posible tratar dicha norma con el formalismo de cuantización que hemos empleado aquí. Básicamente esto es debido al hecho de que la norma de Lorentz incluye la derivada temporal de A_0 . Existen formalismos bien conocidos que son capaces de tratar con tales restricciones relativistas, entre ellos la cuantización BRST [60], el método de Faddeev-Popov [79] dentro de la integral de trayectoria [80]. En el marco del formalismo Hamiltoniano encontramos métodos adicionales, como por ejemplo el descrito en la Ref. [81]. Sin embargo, tales esquemas no están dentro del objetivo del presente trabajo.

Reescribiendo el Hamiltoniano (4.12) en términos de los campo eléctricos y magnéticos encontramos

$$H = \frac{1}{2}(\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2) - (k_F)^{0j0k} E^j E^k + \frac{1}{4}(k_F)^{jklm} \epsilon^{jkp} \epsilon^{lmq} B^p B^q, \quad (4.23)$$

donde $\mathbb{E}^2 = E_i E_i$, $B_i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk}$, y por lo tanto $\mathbb{B}^2 = \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}$. El mismo resultado se obtuvo en la Ref. [3] siguiendo un procedimiento diferente. Ahí se mostró que si los elementos de $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ son mucho menores que 1, el Hamiltoniano en la Ecu. (4.23) es no negativo. Esto es debido al hecho de que dicho Hamiltoniano puede ser visto como una forma bilineal $x^T M x$ con $x^T \equiv (\mathbb{E}, \mathbb{B})$, donde bajo una diagonalización, la matriz M tiene entradas $\frac{1}{2} - O(k_F) > 0$ tanto para las contribuciones del campo eléctrico como del campo magnético.

4.2. Función de Partición y Termodinámica

Ahora derivamos algunas propiedades termodinámicas del Lagrangiano (4.1). El principal objetivo es obtener la densidad de energía del campo electromagnético a temperatura finita. Siguiendo un esquema de teoría cuántica de campos calculamos la función de partición $Z = Tr[e^{-\beta H}]$, la cual en el límite continuo y en el formalismo de la integral funcional puede ser escrita como [68]

$$Z = \int_{\text{periodic}} [dA^\mu] \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x L_E\right), \quad (4.24)$$

donde se ha realizado una rotación de Wick al hacer el cambio de variable a un tiempo imaginario $\tau = it$, L_E denota el Lagrangiano reescrito en esta prescripción euclidiana y $\beta = 1/k_B T$.

En la sección anterior empleamos la norma de Coulomb para eliminar los grados de libertad redundantes, a partir de ahora cambiaremos a una norma covariante. La forma más simple de realizar esto es a través del método de Faddeev-Popov [79], del cual presentamos un resumen en el Apéndice F. Este método es equivalente a la introducción de las constricciones para fijar la norma en el método de Dirac, tal como se realizó en la Sección 4.1. Ambos métodos nos permiten trabajar con los grados de libertad efectivos. Tomando la norma de Lorentz podemos escribir la función de partición como

$$Z = \int [dA^\mu] \det(-\partial^2) \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x L_{\text{eff}}\right), \quad (4.25)$$

donde $\det(-\partial^2)$ es el determinante de Faddeev-Popov, que se obtuvo en la Ecu. (F.4) del Apéndice F. El Lagrangiano efectivo está dado por

$$L_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\rho} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (4.26)$$

Haciendo las sustituciones para temperatura finita $t \rightarrow -i\tau$, $A_0 \rightarrow iA_\tau$ y $(k_F)^{0\mu\nu\alpha} \rightarrow i(k_F)^{\tau\mu\nu\alpha}$ (convenciones similares para los restantes índices en $(k_F)^{\mu\nu\alpha\beta}$), tras una integración por partes, el Lagrangiano efectivo puede ser escrito en notación euclideana, con $\mu, \nu, \alpha, \beta = \tau, 1, 2, 3$, como

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} A_\nu \left[\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \partial_\mu \partial_\nu + 2(k_F)_{\beta\nu\alpha\mu} \partial_\beta \partial_\alpha \right] A_\mu \quad (\rho \rightarrow 1) \quad (4.27) \\ &= \frac{1}{2} A_\nu \left[\delta_{\mu\nu} \partial^2 + 2(k_F)_{\beta\nu\alpha\mu} \partial_\beta \partial_\alpha \right] A_\mu \\ &= \frac{1}{2} A_\nu D_{\mu\nu} A_\mu. \end{aligned}$$

En la primera línea hemos escogido la norma de Feynman ($\rho = 1$) y posteriormente hemos definido $D_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \partial^2 + 2(k_F)_{\beta\nu\alpha\mu} \partial_\beta \partial_\alpha$.

En la Ecu. (F.14) del Apéndice F se muestra que es posible reescribir el determinante de Faddeev-Popov como una integral gaussiana haciendo uso de campos fantasmas C y \bar{C} de la siguiente manera

$$\det(-\partial^2) = \int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\int d\tau \int d^3x (\partial_\mu \bar{C})(\partial^\mu C)\right), \quad (4.28)$$

con lo cual

$$Z = \int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\int d\tau \int d^3x (\partial_\mu \bar{C})(\partial^\mu C)\right) \int [dA^\mu] \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x L_{\text{eff}}\right), \quad (4.29)$$

donde hemos ocupado el hecho de que en esta norma el determinante de Faddeev-Popov es independiente de A_μ .

Los campos admiten una expansión en Fourier de la forma:

$$A_\mu(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n, \mathbf{p}} e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_\mu(n, \mathbf{p}), \quad (4.30)$$

$$C(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n, \mathbf{p}} e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{C}(n, \mathbf{p}), \quad (4.31)$$

donde $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ son las frecuencias de Matsubara con $n \in \mathbb{Z}$, y el campo $A_\mu(\tau, \mathbf{x})$ satisface las condiciones de periodicidad $A_\mu(\beta, \mathbf{x}) = A_\mu(0, \mathbf{x})$ para todo \mathbf{x} , con condiciones similares para los campos C y \bar{C} . La normalización en (4.30) y (4.31) es tomada de tal forma que las amplitudes son adimensionales.

La evaluación de la Ecu. (4.29) se realiza explícitamente en el Apéndice G, dando como resultado (Ecu. (G.17))

$$\ln Z = \text{Tr} \ln[\beta^2(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)] - \frac{1}{2} \ln[\text{Det}(D)], \quad (4.32)$$

donde ahora

$$D = \beta^2 \begin{pmatrix} \omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + \Lambda_{\tau\tau} & \Lambda_{\tau x} & \Lambda_{\tau y} & \Lambda_{\tau z} \\ \Lambda_{\tau x} & \omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} & \Lambda_{xz} \\ \Lambda_{\tau y} & \Lambda_{xy} & \omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + \Lambda_{yy} & \Lambda_{yz} \\ \Lambda_{\tau z} & \Lambda_{xz} & \Lambda_{yz} & \omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + \Lambda_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

y $\Lambda_{\mu\nu} = 2(k_F)_{\mu\alpha\nu\beta} p_\alpha p_\beta$, ($p_\tau \equiv \omega_n$). Calculando el determinante a segundo orden en k_F obtenemos

$$\det(D) = \prod_{n, \mathbf{p}} \beta^8 [(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^4] \left(1 + \text{Tr}(\tilde{\Lambda}) + \frac{1}{2}(\text{Tr}(\tilde{\Lambda}))^2 - \frac{1}{2}\text{Tr}(\tilde{\Lambda}^2)\right), \quad (4.34)$$

donde hemos definido $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = 2(k_F)_{\mu\alpha\nu\beta} p_\alpha p_\beta / (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)$ y la relación

$$\det(1 + M) = 1 + \text{Tr}(M) + \frac{1}{2}(\text{Tr}(M))^2 - \frac{1}{2}\text{Tr}(M^2) + O(M^3), \quad (M \ll 1) \quad (4.35)$$

ha sido empleada. Por lo tanto, la función de partición total se convierte en

$$\begin{aligned} \ln Z &= - \sum_{n, \mathbf{p}} \ln[\beta^2(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{p}} \ln\left(1 + \text{Tr}(\tilde{\Lambda}) + \frac{1}{2}(\text{Tr}(\tilde{\Lambda}))^2 - \frac{1}{2}\text{Tr}(\tilde{\Lambda}^2) + \dots\right) \\ &\equiv \ln Z_0 + \ln Z_{LV}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Reconocemos el primer término como el resultado usual para la electrodinámica estándar, el cual corresponde a bosones sin masa con espín y dos grados de libertad en equilibrio térmico. En otras palabras, recuperamos la descripción de la radiación de cuerpo negro. La función de partición de electrodinámica estándar es bien conocida [68]; omitiendo las contribuciones del vacío es

$$\ln Z_0 = -2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) = \frac{\pi^2}{45\beta^3} V. \quad (4.37)$$

Todas las modificaciones debidas a la violación de Lorentz provienen del segundo término en (4.36), el cual evaluamos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \ln Z_{LV} &= -\frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \ln \left(1 + \text{Tr}(\tilde{\Lambda}) + \frac{1}{2} (\text{Tr}(\tilde{\Lambda}))^2 - \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\Lambda}^2) \right) \\ &\approx -\frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \left(\text{Tr}(\tilde{\Lambda}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\Lambda}^2) \right) \\ &\equiv -\sum_{n,\mathbf{p}} (\bar{Z}_{LV_1} + \bar{Z}_{LV_2}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aquí hemos definido \bar{Z}_{LV_1} y \bar{Z}_{LV_2} como las contribuciones debidas a la violación de Lorentz a primer y segundo orden en los parámetros $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, respectivamente, y hemos empleado la aproximación $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ para $x \ll 1$. Empezamos calculando las contribuciones a primer orden como sigue:

$$\begin{aligned} -\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_1} &= -\frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \text{Tr}(\tilde{\Lambda}) \\ &= -\sum_{n,\mathbf{p}} \frac{(k_F)_{\alpha\mu\alpha\nu} p_\mu p_\nu}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)} \quad (p_\tau = \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}) \\ &= -\sum_{n,\mathbf{p}} \frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)} \left[(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} \omega_n^2 + 2(k_F)_{\alpha i \alpha \tau} \omega_n p_i + (k_F)_{\alpha i \alpha j} p_i p_j \right] \\ &= -\sum_{n,\mathbf{p}} \frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)} \left[(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} \omega_n^2 + (k_F)_{\alpha i \alpha j} p_i p_j \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde en la tercer línea hemos empleado que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{n^2+a^2} = 0$. Sumando y restando el término $(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} \mathbf{p}^2$ dentro de los paréntesis en (4.39), arribamos a la expresión equivalente

$$-\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_1} = -\sum_{n,\mathbf{p}} \left[(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} + \frac{-(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} \mathbf{p}^2 + (k_F)_{\alpha i \alpha j} \hat{p}_i \hat{p}_j \mathbf{p}^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)} \right], \quad (4.40)$$

con $\hat{p}_i = p_i/|\vec{p}|$. Haciendo uso de la identidad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2} = \frac{\beta}{2\mathbf{p}} \coth\left(\frac{\beta\mathbf{p}}{2}\right) = \frac{\beta}{2\mathbf{p}} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\mathbf{p}} - 1} \right), \quad (4.41)$$

junto con $\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$, encontramos que la contribución debida a la violación de Lorentz a primer orden puede ser escrita como

$$-\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_1} = -V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [-(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} + (k_F)_{\alpha i \alpha j} \hat{p}_i \hat{p}_j] \mathbf{p}^2 \left(\frac{\beta}{2\mathbf{p}} \right) \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\mathbf{p}} - 1} \right), \quad (4.42)$$

donde hemos omitido los términos independientes de la temperatura, es decir, el primer término dentro de los paréntesis en la Ecu. (4.40). Es bien conocido que cualquier cantidad física en teoría de temperatura finita queda definida después de la sustracción de su contraparte en $T = 0$ y, por lo tanto, los términos independientes de la temperatura en la función de partición, finitos o infinitos, carecen de importancia [69]. Tomando el sistema usual de coordenadas esféricas y $|\mathbf{p}| = \omega$ la Ecu. (4.42) se convierte en

$$-\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_1} = -\frac{V}{(2\pi)^3} \int d\omega d\Omega [-(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} + (k_F)_{\alpha i \alpha j} \hat{p}_i \hat{p}_j] \left(\frac{\beta\omega^3}{2} \right) \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1} \right), \quad (4.43)$$

donde $\hat{p}_1 = \sin\theta \cos\phi$, $\hat{p}_2 = \sin\theta \sin\phi$ y $\hat{p}_3 = \cos\theta$. Realizando la integral sobre el ángulo sólido encontramos

$$-\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_1} = -4\pi \frac{V}{(2\pi)^3} [-(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} + \frac{1}{3}(k_F)_{\alpha i \alpha i}] \int d\omega \left(\frac{\beta\omega^3}{2} \right) \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1} \right). \quad (4.44)$$

Ahora hacemos uso de que el objeto $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ tiene doble traza nula, lo cual en el espacio Euclídeo implica

$$(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 2(k_F)^{0i}{}_{0i} + (k_F)^{ij}{}_{ij} = -2(k_F)_{0i0i} + (k_F)_{ijij} \xrightarrow{-i\tau} 2(k_F)_{\tau i \tau i} + (k_F)_{ijij} = 0. \quad (4.45)$$

Usando lo anterior, (4.44) se convierte en

$$-\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_1} = \frac{16\pi}{3} \frac{V}{(2\pi)^3} (k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} \int d\omega \left(\frac{\beta\omega^3}{2} \right) \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1} \right) = 2 \frac{\pi^2 V}{45\beta^3} (k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} = 3 \frac{\pi^2 V}{45\beta^3} \tilde{k}_{\text{tr}}, \quad (4.46)$$

donde hemos omitido las contribuciones del vacío para realizar la integral. Lo anterior implica que la modificación a la densidad de energía a primer orden debida a la violación de Lorentz tendrá la misma dependencia en la temperatura como en el caso estándar, es decir, $U \sim T^4$. La contribución a segundo orden puede ser evaluada en una manera similar,

$$\begin{aligned} -\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_2} &= \frac{1}{4} \sum_{n,\mathbf{p}} \text{Tr}(\tilde{\Lambda}^2) = \frac{1}{4} \sum_{n,\mathbf{p}} \text{Tr}(\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n,\mathbf{p}} \frac{4}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2} [(k_F)_{\mu\alpha\nu\beta} p_\alpha p_\beta] [(k_F)_{\mu\pi\nu\delta} p_\pi p_\delta] \\ &= \sum_{n,\mathbf{p}} A_1 \frac{\omega_n^4}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2} + A_2 \frac{\mathbf{p}^2 \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2} + A_3 \frac{\mathbf{p}^4}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde se ha empleado que los términos que contienen un número impar de potencias de $p_\tau = \omega_n$ en el numerador son cero al realizar la sumatoria sobre n . Los coeficientes dependientes del momento $A_{1,2,3}$ están definidos como

$$\begin{aligned} A_1 &= (k_F)_{\mu\tau\nu\tau}(k_F)_{\mu\tau\nu\tau}, \\ A_2 &= \left(2(k_F)_{\mu\tau\nu\tau}(k_F)_{\mu\nu\nu j} + [(k_F)_{\mu\tau\nu i} + (k_F)_{\mu\nu\tau i}][(k_F)_{\mu\tau\nu j} + (k_F)_{\mu j\nu\tau}]\right)\hat{p}_i\hat{p}_j, \\ A_3 &= (k_F)_{\mu\nu\nu j}(k_F)_{\mu\nu\nu m}\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}_l\hat{p}_m. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Haciendo uso de las identidades

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2} = \frac{\beta^2}{8\mathbf{p}^2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{|\mathbf{p}|\beta}{2}\right) + \frac{\beta}{4|\mathbf{p}|^3} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta|\mathbf{p}} - 1}\right), \quad (4.49)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2} = -\frac{\beta^2}{8} \operatorname{csch}^2\left(\frac{|\mathbf{p}|\beta}{2}\right) + \frac{\beta}{4|\mathbf{p}|} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta|\mathbf{p}} - 1}\right), \quad (4.50)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_n^4}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2} = \sum_n \left(1 - \frac{2\omega_n^2\mathbf{p}^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2} - \frac{\mathbf{p}^4}{(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)^2}\right), \quad (4.51)$$

evaluamos las sumas sobre n . Empleando el mismo sistema esférico de coordenadas como en (4.43) encontramos

$$\begin{aligned} -\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_2} &= \quad (4.52) \\ &= V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[(A_1 - A_2 + A_3) \frac{\mathbf{p}^2\beta^2}{8} \operatorname{csch}^2\left(\frac{|\mathbf{p}|\beta}{2}\right) + (-3A_1 + A_2 + A_3) \frac{|\mathbf{p}|\beta}{4} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta|\mathbf{p}} - 1}\right) \right] \\ &= V \int \frac{d\Omega d\omega}{(2\pi)^3} \left[(A_1 - A_2 + A_3) \frac{\omega^4\beta^2}{8} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) + (-3A_1 + A_2 + A_3) \frac{\omega^3\beta}{4} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1}\right) \right] \\ &= V \int \frac{d\omega}{2\pi^2} \left[(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) \frac{\omega^4\beta^2}{8} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) + (-3\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) \frac{\omega^3\beta}{4} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta\omega} - 1}\right) \right], \end{aligned}$$

donde ahora los coeficientes \tilde{A} , independientes del momento, corresponden a

$$\tilde{A}_1 = A_1 = \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(\kappa_{DE}^2), \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2 &= \frac{2}{3} \left((k_F)_{\mu\tau\nu\tau}(k_F)_{\mu\nu\nu i} + (k_F)_{\mu\tau\nu i}(k_F)_{\mu\tau\nu i} + (k_F)_{\mu\tau\nu i}(k_F)_{\mu\nu\tau} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left[\operatorname{Tr}(\kappa_{DE}^2) - \operatorname{Tr}(\kappa_{DE} \cdot \kappa_{HB}) - 3\operatorname{Tr}(\kappa_{DB} \cdot \kappa_{HE}) - \operatorname{Tr}(\kappa_{DE})^2 \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_3 &= \frac{1}{15} \left((k_F)_{\mu\nu\nu i}(k_F)_{\mu j\nu j} + (k_F)_{\mu\nu\nu j}(k_F)_{\mu\nu\nu j} + (k_F)_{\mu\nu\nu j}(k_F)_{\mu j\nu i} \right) \\ &= \frac{1}{30} \left[\operatorname{Tr}(\kappa_{DE} \cdot \kappa_{DE}) - \operatorname{Tr}(\kappa_{DB} \cdot \kappa_{DB}) - 4\operatorname{Tr}(\kappa_{DB} \cdot \kappa_{HE}) + \frac{7}{2}\operatorname{Tr}(\kappa_{HB} \cdot \kappa_{HB}) + \operatorname{Tr}(\kappa_{DE})^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Aquí hemos expresado las componentes de $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ en términos de la parametrización (4.2) haciendo uso de Mathematica. La integral sobre ω puede ser calculada omitiendo las contribuciones del vacío, las cuales surgen del segundo término en la última línea de la Ecu. (4.52) y tienen la misma forma que en el caso a primer orden en k_F . El resultado está dado por

$$\begin{aligned} -\sum_{n,\mathbf{p}} \bar{Z}_{LV_2} &= V \left((\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) \frac{\beta^2}{16\pi^2} \left(\frac{16\pi^4}{15\beta^5} \right) + (-3\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) \frac{\beta}{8\pi^2} \left(\frac{2\pi^4}{15\beta^4} \right) \right) \\ &= \bar{K} \left(\frac{\pi^2}{45\beta^3} \right) V, \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \bar{K} &\equiv \frac{3}{4}(\tilde{A}_1 - 3\tilde{A}_2 + 5\tilde{A}_3) \\ &= \frac{1}{16} \left[8\text{Tr}(\kappa_{DE})^2 - 2\text{Tr}(\kappa_{DB} \cdot \kappa_{DB}) + 10\text{Tr}(\kappa_{DB} \cdot \kappa_{HE}) - \text{Tr}(\kappa_{DE} \cdot \kappa_{DE}) \right. \\ &\quad \left. + 6\text{Tr}(\kappa_{DE} \cdot \kappa_{HB}) + 7\text{Tr}(\kappa_{HB} \cdot \kappa_{HB}) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[2\text{Tr}(\tilde{\kappa}_{o+} \cdot \tilde{\kappa}_{o+}) - 3\text{Tr}(\tilde{\kappa}_{o-} \cdot \tilde{\kappa}_{o-}) - \text{Tr}(\tilde{\kappa}_{o+} \cdot \tilde{\kappa}_{o-}) + 3\text{Tr}(\tilde{\kappa}_{e+} \cdot \tilde{\kappa}_{e+}) \right. \\ &\quad \left. - 4\text{Tr}(\tilde{\kappa}_{e+} \cdot \tilde{\kappa}_{e-}) - 4(\tilde{\kappa}_{\text{tr}})\text{Tr}(\tilde{\kappa}_{o-}) + 18(\tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2 \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

A partir de los resultados Ecu. (4.37), Ecu. (4.46) y Ecu. (4.56) finalmente obtenemos la función de partición total

$$\ln Z = \ln Z_0 + \ln Z_{LV} = (1 + 2(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} + \bar{K}) \frac{\pi^2}{45\beta^3} V. \quad (4.58)$$

Con el objeto de comparar este resultado con aquellos que se encuentran en la literatura, consideramos el caso particular que surge de la contribución isotrópica del sector con paridad par, el cual corresponde al límite $\text{Tr}(\tilde{\kappa}_{o-}) = \text{Tr}(\tilde{\kappa}_{o+}) = \text{Tr}(\tilde{\kappa}_{e+}) = \text{Tr}(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0$, $\tilde{\kappa}_{\text{tr}} \neq 0$. En este caso (4.58) se reduce a

$$\ln Z = \left(1 + 3(\tilde{\kappa}_{\text{tr}}) + \frac{9}{2}(\tilde{\kappa}_{\text{tr}})^2 \right) \frac{\pi^2}{45\beta^3} V. \quad (4.59)$$

A segundo orden este es el mismo resultado reportado en [77].

Considerando (4.46), (4.52) y (4.37), la densidad de energía del campo electromagnético puede ser calculada a partir de las relaciones usuales en física estadística,

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} & (4.60) \\
&= \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} - \frac{2(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau}}{3\pi^2} \int_0^\infty d\omega \left[\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} - \frac{\beta\omega^4 e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega} - 1)^2} \right] \\
&\quad + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) \int_0^\infty \frac{d\omega}{16\pi^2} \beta\omega^4 \left(\beta\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) - 2 \right) \operatorname{csch}^2\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \\
&\quad - (-3\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) \int_0^\infty \frac{d\omega}{4\pi^2} \left[\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} - \frac{\beta\omega^4 e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega} - 1)^2} \right]. & (4.61)
\end{aligned}$$

Esto implica una modificación a la distribución de Planck, donde ahora la dependencia de la densidad de energía en la frecuencia está dada por

$$\begin{aligned}
u(\omega) &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{3}(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} + \frac{1}{4}(-3\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) \right) \left[\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} - \frac{\beta\omega^4 e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega} - 1)^2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{16\pi^2} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3) \beta\omega^4 \left(\beta\omega \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) - 2 \right) \operatorname{csch}^2\left(\frac{\beta\omega}{2}\right). & (4.62)
\end{aligned}$$

En la Fig. 4.1 se muestra el comportamiento para la densidad de energía respecto a la frecuencia para valores particulares de los coeficientes k_F . Si bien es cierto que hay un incremento en la densidad, éste debe ser pequeño dado que los valores actuales para las cotas de k_F son de alrededor de $10^{-7} - 10^{-18}$ dependiendo del tipo de experimento que se lleve a cabo [82]. Estas cantidades están muy por abajo de los valores empleados en la gráfica, la cual se muestra para indicar que la desviación con respecto al caso estándar no es significativa. La densidad de energía total es obtenida integrando la ecuación anterior o derivando directamente (4.58)

$$u(T) = (1 + 2(k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} + \bar{K}) \frac{\pi^2}{15} T^4. \quad (4.63)$$

Las relaciones termodinámicas

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z, \quad P = T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z, \quad (4.64)$$

junto con (4.58), implican que la ecuación de estado permanece sin cambios,

$$PV = \frac{U}{3}. \quad (4.65)$$

El esquema funcional que hemos usado para derivar la densidad de energía del fotón no es la única prescripción disponible. Es posible reproducir los resultados previos siguiendo un esquema de termodinámica clásica, como a continuación mostramos. Dado que este cálculo no es el principal objetivo de este estudio, únicamente calculamos la densidad de energía a

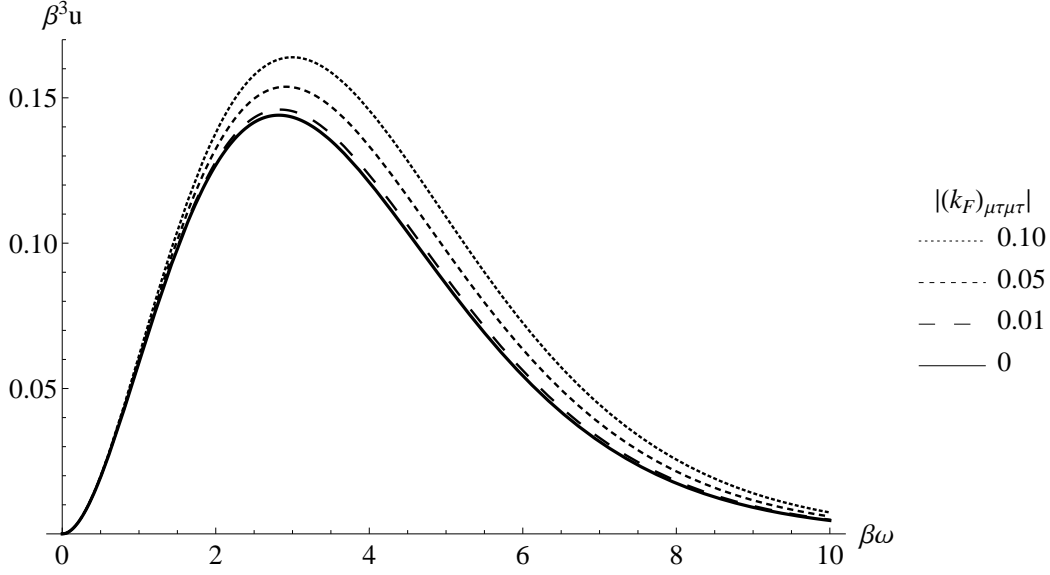


Figura 4.1: Dependencia en la frecuencia de la densidad de energía del fotón para términos con violación de Lorentz no nulos, a primer orden en k_F .

primer orden en k_F . Seguimos un tratamiento similar al empleado en [70]. Adoptando una distribución térmica para los fotones y la relación de dispersión (4.7), la densidad de energía espectral por unidad de frecuencia (y para cada polarización) en el espacio fase semiclásico está dada por

$$u(\omega_{\pm})d\omega_{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_{\pm}}{e^{\hbar\omega_{\pm}/k_B T} - 1} k^2 dk d\Omega. \quad (4.66)$$

A partir de la Ecu. (4.7), tenemos $\omega_{\pm} = (1 + \delta_{\pm})|\vec{p}|$, donde $\delta_{\pm} = \rho \pm \sigma$. Para frecuencias isotrópicas, uno puede inmediatamente sustituir $\int d\Omega \rightarrow 4\pi$, sin embargo, ahora tenemos una dependencia angular en la frecuencia, $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(\theta, \phi)$, debida a la contribución de ρ y σ en la Ecu. (4.7). A primer orden en $\delta_{\pm} \ll 1$ y usando que $|k| = \omega$, encontramos

$$u(\omega_{\pm}) d\omega_{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) d\omega d\Omega + \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} - \frac{\hbar^2}{k_B T} \frac{\omega^4 e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2} \right) \delta_{\pm} d\omega d\Omega. \quad (4.67)$$

Si sumamos sobre ambos modos asumiendo que cada uno contribuye de igual manera, tenemos que la contribución con violación de Lorentz a la densidad de energía está dada por

$$[u(\omega_+)d\omega_+]_{LV} + [u(\omega_-)d\omega_-]_{LV} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} - \frac{\hbar^2}{k_B T} \frac{\omega^4 e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2} \right) (\delta_+ + \delta_-) d\omega d\Omega. \quad (4.68)$$

Dado que $\delta_+ + \delta_- = 2\rho = -\tilde{k}_{\alpha}{}^{\alpha}$ y

$$\tilde{k}_{\alpha}{}^{\alpha} \xrightarrow{-i\tau} (k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} - 2i(k_F)_{j\tau j i} p_i - (k_F)_{\alpha i \alpha j} \hat{p}_i \hat{p}_j, \quad (4.69)$$

donde $\alpha = \tau, 1, 2, 3$, con la integración de (4.68) sobre el ángulo sólido $d\Omega$ arribamos finalmente a

$$\begin{aligned}
[u(\omega)d\omega]_{LV} &= [u(\omega_+)d\omega_+]_{LV} + [u(\omega_-)d\omega_-]_{LV} \quad (4.70) \\
&= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3}((k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau} - \frac{1}{3}(k_F)_{\alpha i\alpha i}) \left(\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} - \frac{\hbar^2}{k_B T} \frac{\omega^4 e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2} \right) d\omega \\
&= -\frac{2}{3\pi^2}((k_F)_{\alpha\tau\alpha\tau}) \left(\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} - \frac{\hbar^2}{k_B T} \frac{\omega^4 e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2} \right) d\omega,
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea hemos usado la condición de doble traza nula en el tiempo imaginario (4.45). Tomando $\hbar = 1$ y $\beta = 1/k_B T$, encontramos que el resultado está de acuerdo con lo previamente calculado en (4.62).

Como comentario final a este capítulo, debemos mencionar que a primer orden una redefinición de las coordenadas $x'^{\mu} = x^{\mu} - \frac{1}{2}(k_F)^{\alpha\mu}{}_{\alpha\nu}$ lleva al modelo a ser descrito por una métrica $\eta'^{\mu\nu}$, tal que la densidad Lagrangiana se puede escribir como

$$L = -\frac{1}{4}\eta'^{\mu\alpha}\eta'^{\nu\beta}F'_{\alpha\beta}F'_{\mu\nu}, \quad (4.71)$$

donde los efectos debidos a la violación de Lorentz son inobservables. Dado que los cálculos realizados en este trabajo se llevaron hasta segundo orden, aquí no optamos por seguir tal redefinición de las coordenadas, más aún, estábamos interesados en investigar cómo realizar dichos cálculos en esta clase de teorías, lo anterior con el objetivo de estudiar posibles generalizaciones donde no es posible hacer este tipo de redefiniciones.

4.3. Conclusiones

Hemos presentado un estudio del formalismo Hamiltoniano y de la cuantización canónica, vía método de Dirac, del sector CPT-par para el fotón dentro del Modelo Estándar Extendido. Se encuentra que la libertad de norma se mantiene tal como en el caso de la electrodinámica estándar. Adicionalmente, en analogía con el caso estándar, el modelo posee constricciones de primera clase que restringen el espacio fase; sin embargo, la forma de estas constricciones es diferente de su contraparte en el caso estándar cuando son reescritas en función de los campos eléctricos y magnéticos. El proceso de fijación de norma en el sector CPT-par del fotón en el SME no difiere significativamente del caso de la electrodinámica estándar.

Se calculó explícitamente la función de partición a primer y segundo orden en los parámetros que inducen la violación de Lorentz en el sector CPT-par del fotón dentro del SME, para una configuración arbitraria de los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. Hemos presentado nuestros resultados tanto en términos de los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ como en función de las dos parametrizaciones alternativas (4.2) y (4.3-4.4). Haciendo uso de las relaciones usuales en termodinámica encontramos correcciones a la ley de radiación del cuerpo negro. Estas incluyen correcciones con la misma dependencia funcional en la frecuencia, así como correcciones con una dependencia funcional diferente. Del cálculo resulta que, todas las modificaciones a la función de

partición que surgen a partir de la violación de Lorentz a primer orden son proporcionales a los coeficientes $(k_F)_{\alpha 0 \alpha 0}$. Es decir, no hay contribuciones del sector $(k_F)_{0 i \alpha \beta}$. Como se ve de la Ecu. (4.62), la densidad de energía total se ajusta mediante una constante global de proporcionalidad que contiene contribuciones a la violación de Lorentz. Sin embargo, la ecuación de estado mantiene su forma usual respecto al caso de la electrodinámica estándar. El resultado en la Ecu. (4.62) se verificó empleando un esquema de termodinámica clásica. También hemos comparado nuestro resultado general con un caso particular previamente obtenido en la Ref. [77] para la contribución isotrópica del sector con paridad par, el cual está codificado en el coeficiente $(k_F)_{i 0 i 0} \approx \tilde{\kappa}_{\text{tr}}$, encontrando un completo acuerdo entre ambos resultados. Adicionalmente, siguiendo el esquema empleado aquí, es posible obtener las contribuciones que surgen de los acoplamientos de los distintos sectores del modelo CPT-par del fotón dentro del SME, como explícitamente mostramos en Ecu. (4.57).

Conclusiones Generales

En el presente trabajo se realizó un estudio de diversos esquemas que involucran el concepto de un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz (SLSB). Trabajamos con diferentes modelos que incorporan el SLBS y analizamos cuales son las consecuencias que se derivan en cada uno de ellos. En algunos casos encontramos que la introducción de un SLBS tiene implicaciones físicas diferentes a los resultados estándares. Mientras que en otros casos no es así.

En el Capítulo 1 presentamos un marco teórico donde se introducen los conceptos fundamentales relacionados con la violación a la invariancia de Lorentz y con el rompimiento espontáneo de simetría. También resumimos diferentes enfoques que se han desarrollado recientemente para abordar dichas ideas.

En el Capítulo 2 estudiamos el rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz inducido por un valor de mínima energía no nulo para la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$. Este trabajo difiere de la gran mayoría de los trabajos reportados en la literatura por el hecho de considerar como variable básica la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$, en lugar del potencial vectorial A_μ . Para determinar el valor de la energía mínima del sistema en términos de esta variable se requiere de la introducción de un potencial $V(F_{\mu\nu})$, lo cual nos lleva a considerar un modelo de electrodinámica no lineal. Los términos cinéticos empleados en los modelos que estudiamos son similares a los que describen las teorías BF. Realizando el conteo de los grados de libertad para estos modelos, obtenemos que para el caso $(1 + 1)$ -dimensional existe 1 grado de libertad, mientras que en el caso $(3 + 1)$ -dimensional hay 2 grados de libertad. Dado que trabajamos con modelos donde los campos no tienen masa, debido a que la invariancia de norma se preserva desde un inicio, es necesario llevar a cabo una reinterpretación del teorema de Goldstone. Los modos de Goldstone fueron identificados como aquellos tensores que surgen de la acción de un generador de la simetría de Lorentz que no deja el estado de vacío invariante y, a diferencia del caso estándar donde se relacionan con los vectores nulos de una matriz de masa, aquí corresponden a tensores nulos de lo que denominamos susceptibilidad generalizada $\Sigma_{\mu\nu\alpha\beta}^{(4)} = \partial^2 V(F_{\mu\nu}) / \partial F_{\mu\nu} \partial F_{\alpha\beta}$, la cual no está asociada a la masa de las partículas y motiva a la introducción de susceptibilidades generalizadas de orden superior. Encontramos que el número de modos de Goldstone en estos modelos es 1 y 4 en los casos $(1 + 1)$ -dimensional y $(3 + 1)$ -dimensional, respectivamente. Aunado a esto, tras iterar la forma en la cual deducimos el teorema de Goldstone, obtenemos relaciones que deben de satisfacerse en estas teorías. Estas relaciones se cumplen entre los objetos que denominamos como susceptibilidades generalizadas de orden superior, las cuales son llamadas así por la semejanza a como se describe la polarización y la magnetización en teorías de electrodinámica no lineal. Así mismo, se estudió la dinámica de estos modelos utilizando diferentes métodos de linealización dependiendo de la dimensionalidad del espacio-tiempo considerado. En el caso $(1 + 1)$ -dimensional se logra identificar que el grado de libertad de la teoría corresponde con el único modo de Goldstone que aparece, mientras que en el caso $(3 + 1)$ -dimensional los 2 grados de libertad bien pueden corresponder a los modos de Goldstone o no.

La generalización al trabajo de este capítulo es continuar con el estudio de esta misma clase de modelos en espacios curvos, donde la aparición de difeomorfismos puede dar lugar a un mayor número de bosones de Goldstone.

El Capítulo 3 está dividido en tres secciones. En las primeras dos secciones realizamos un estudio del modelo de Nambu en su versión abeliana y no abeliana. Estos modelos están descritos por los Lagrangianos de la Electrodinámica estándar y de la teoría de Yang Mills, respectivamente, más una restricción adicional que se motiva por un SLSB. Hemos mostrado que después de imponer como condiciones iniciales la conservación de la corriente junto con la ley de Gauss (leyes de Gauss en el caso no abeliano), estas teorías son equivalentes con la Electrodinámica estándar y la teoría de Yang Mills, respectivamente.

Específicamente, para el caso entre el modelo de Nambu abeliano y la Electrodinámica estándar se llevó a cabo un esquema perturbativo que muestra que, usando una parametrización conveniente, las reglas de Feynman para los propagadores y las interacciones son las mismas en ambos modelos, con lo cual en teoría de perturbaciones el modelo de Nambu abeliano y la Electrodinámica estándar se hacen indistinguibles, o en otras palabras equivalentes. Un punto esencial para la realización de la equivalencia fue mostrar que en el caso de la Electrodinámica estándar en la norma no lineal $A_\mu A^\mu - M^2 = 0$ los fantasmas de Faddeev-Popov se desacoplan.

Para el caso entre el modelo de Nambu no abeliano y la teoría de Yang Mills empleamos un esquema Hamiltoniano no perturbativo, en el cual, bajo las condiciones iniciales descritas previamente, es posible reescribir el Hamiltoniano del modelo de Nambu no abeliano en la misma forma que aquel que corresponde a la teoría de Yang Mills y donde el álgebra canónica de ambas teorías es la misma, lo cual prueba la equivalencia entre ambos modelos. Un punto a destacar es que se realizó una simplificación del método, que permitió una mejora tanto práctica como conceptual, mediante la incorporación de una nueva parametrización que resuelve la restricción que define el modelo de Nambu no abeliano.

A partir de las anteriores equivalencias podemos concluir dos puntos: (i) en el modelo de Nambu los fotones o campos de norma pueden ser interpretados como bosones de Goldstone que surgen de un rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz. (ii) No existen consecuencias físicas observables del SLSB cuando este último se introduce mediante estos modelos, ya sea en su forma abeliana o no abeliana.

Trabajos previos sobre el modelo de Nambu en sus versiones abeliana y no abeliana los encontramos en las Refs. [26, 51, 52, 53, 54, 55, 56], donde se busca mostrar la equivalencia entre dichos modelos de Nambu con la Electrodinámica estándar y Yang Mills, respectivamente. En estos trabajos, dicha equivalencia es probada de manera perturbativa, en cálculos hasta un lazo y sólo para algunos procesos particulares, dejando el caso general como una hipótesis. Los resultados de esta Tesis demuestran que efectivamente el modelo de Nambu abeliano (no abeliano) es equivalente a la Electrodinámica estándar (Yang Mills) a todo orden en teoría de perturbaciones (de manera analítica) para cualquier proceso físico, esto cuando las apropiadas condiciones iniciales se satisfacen.

Como fue explicado previamente, aquí hemos considerado un acoplamiento con una corriente

externa, con lo cual una posible generalización es investigar cuando esta corriente representa un campo de materia, por ejemplo, un campo escalar o fermiónico.

La tercera sección de este capítulo generaliza el esquema Hamiltoniano no perturbativo empleado previamente en la Sección 2 y establece los criterios bajo los cuales una teoría de norma puede ser equivalente a una teoría tipo modelo de Nambu. Con el objeto de llevar a cabo dicha equivalencia, se requieren condiciones iniciales análogas a las encontradas en los casos anteriores para la conservación de la corriente y a la validez de las leyes de Gauss.

Esta tercera sección es un tanto novedosa, se muestra un nuevo procedimiento bajo el cual una teoría de norma puede ser entendida como una teoría que surge a partir de un rompimiento espontáneo de simetría.

La posible generalización a este trabajo constituye considerar teorías de norma que incluyan no sólo constricciones de primera clase, como fue hecho aquí, sino que incluyan constricciones de segunda clase también. Dicha generalización ampliaría la clase de teorías de norma para las cuales la idea que desarrollamos aquí puede aplicarse.

En el Capítulo 4 se estudió el comportamiento a temperatura finita del sector CPT-par del fotón en el Modelo Estándar Extendido. Siguiendo el esquema Hamiltoniano se derivaron las constricciones y grados de libertad que contiene la teoría. Posteriormente, se procedió a realizar la cuantización canónica mediante la obtención de los paréntesis de Dirac. Así mismo, se calculó explícitamente la función de partición para una configuración arbitraria de los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ que producen el rompimiento espontáneo de simetría. A través de esta función de partición, derivamos algunas propiedades termodinámicas. Encontramos que hay correcciones a la ley de radiación de Planck pero no a la ecuación de estado. Verificamos nuestro resultado, a primer orden, siguiendo un esquema termodinámico clásico. En la literatura se encuentran estudios particulares para este modelo en las Ref. [77] . Sin embargo, nuestro trabajo tiene la ventaja de que, como se mencionó previamente, se consideran configuraciones arbitrarias de los coeficientes $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. Los resultados generales obtenidos se comparan con algunos de los resultados particulares en la literatura y encontramos un completo acuerdo. Este estudio constituye un paso más en la construcción del SME, el cual está en continuo progreso. La siguiente generalización al presente trabajo, que es de mayor interés, constituye incorporar distintos sectores del SME en el cálculo, particularmente el sector que comprende a la materia.

Apéndice A

Convenciones

Hacemos uso de la siguiente convención: índices griegos denotan índices espacio-temporales ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), índices latinos denotan índices puramente espaciales ($i, j = 1, 2, 3$). Trabajamos en un espacio plano, definido por la métrica de Minkowski con la signatura dada por $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Índices repetidos indican suma $a_i b_i = \sum_i a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Vectores espaciales son denotados con letra negrita $\mathbf{A} = \vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Las cantidades ϵ^{ijk} y $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ corresponden a los tensores completamente antisimétricos en tres y cuatro dimensiones, respectivamente, con la convención: $\epsilon^{123} = +1$ y $\epsilon^{0123} = +1$, también respectivamente.

$$\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_k = \epsilon_{klm} \partial_l A_m$$

$$n!! = n(n-2)(n-4)(n-6) \dots$$

Apéndice B

Yang-Mills

Presentamos un breve resumen de la formulación Hamiltoniana de la teoría de Yang-Mills estándar. La principal motivación, además de establecer la notación, es revisar las propiedades básicas de la teoría de YM que tienen que ser recuperadas para establecer la equivalencia con las distintas versiones del NANM.

La densidad Lagrangiana de Yang-Mills está dada por

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} - \mathbf{J}^\mu \mathbf{A}_\mu \right], \quad (\text{B.1})$$

donde cantidades en letra negrita denotan matrices en el álgebra de Lie del grupo de simetría interna $SO(N)$ con $N(N-1)/2$ generadores t^a ; es decir, $\mathbf{M} = M^a t^a$ y \mathbf{J} denota una corriente que por el momento asumimos es externa. El álgebra del grupo es generada por $[t^a, t^b] = C^{abc} t^c$, donde las constantes de estructura C^{abc} son completamente antisimétricas. La intensidad de campo es

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu], \quad (\text{B.2})$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$D_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{J}^\nu, \quad (\text{B.3})$$

las cuales implican la conservación de la corriente $D_\nu \mathbf{J}^\nu = 0$. La derivada covariante está definida como

$$D_\mu \mathbf{M} = \partial_\mu \mathbf{M} + g [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{M}]. \quad (\text{B.4})$$

A partir de las definiciones anteriores obtenemos

$$[D_\mu, D_\nu] \mathbf{M} = [\mathbf{M}, \mathbf{F}_{\mu\nu}]. \quad (\text{B.5})$$

En función de las componentes de los campos las Ecs. (B.2) y (B.4) son

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (\text{B.6})$$

$$(D_\mu M)^a \equiv D_\mu M^a = \partial_\mu M^a + g C^{abc} A_\mu^b M^c. \quad (\text{B.7})$$

La identidad de Jacobi, $[D_\mu, [D_\nu, D_\sigma]] + [D_\sigma, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\sigma, D_\mu]] = 0$, en términos de las constantes de estructura se escribe como

$$C^{arb}C^{cdr} + C^{crb}C^{dar} + C^{drb}C^{acr} = 0, \quad (\text{B.8})$$

Los índices del grupo $a = 1, 2, \dots, N$ son subidos (bajados) por la métrica δ^{ab} (δ_{ab}) y su posición como superíndices o subíndices es solo una manera conveniente de escribir las correspondientes expresiones.

Ahora resumimos la versión Hamiltoniana de YM. Los momentos canónicos están dados por

$$\Pi^{a\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\dot{A}_\mu^a)}. \quad (\text{B.9})$$

Por lo tanto, considerando

$$\frac{\partial(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu})}{\partial(\dot{A}_\alpha^a)} = 4F_a^{0\alpha},$$

encontramos que

$$\Pi_0^a = 0, \quad \Pi_i^a = F_{i0}^a \equiv -E_i^a. \quad (\text{B.10})$$

Las coordenadas A_μ^a y los momentos canónicos $\Pi^{a\mu}$ satisfacen los PP no nulos

$$\{A_0^a(\mathbf{x}, t), \Pi_0^b(\mathbf{y}, t)\} = \delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{A_i^a(\mathbf{x}, t), \Pi^{bj}(\mathbf{y}, t)\} = \delta_i^j \delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{B.11})$$

En adelante asumimos que todos los PP se calculan a tiempos iguales y suprimimos la etiqueta t en las siguientes expresiones. A partir de la Ecu. (B.6) obtenemos que, las velocidades \dot{A}_i^a están dados por

$$\dot{A}_i^a = E_i^a + \partial_i A_0^a + gC^{abc} A_i^b A_0^c = E_i^a + D_i A_0^a. \quad (\text{B.12})$$

También hemos introducido

$$B_k^a = \frac{1}{2}\epsilon^{ij}{}_k F_{ij}^a. \quad (\text{B.13})$$

La propiedad

$$D_\mu(N^a M^a) = (D_\mu N^a) M^a + N^a (D_\mu M^a) = \partial_\mu(N^a M^a), \quad a = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{B.14})$$

nos permite realizar integraciones por partes dentro de la acción, encontrando que la densidad Hamiltoniana canónica es

$$\mathcal{H} = \Pi_a^i \dot{A}_i^a - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - A_0^a (D_i E_i - J^0)^a - J_i^a A_i^a, \quad (\text{B.15})$$

donde

$$\mathbf{E}^2 = tr(\mathbf{F}_{0i}\mathbf{F}_{0i}), \quad \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2}tr(\mathbf{F}_{ij}\mathbf{F}^{ij}). \quad (\text{B.16})$$

Empleamos el método de Dirac para construir la teoría canónica debido al hecho de que las constricciones primarias

$$\Sigma^a = \Pi_0^a \simeq 0, \quad (\text{B.17})$$

están presentes. La densidad Hamiltoniana extendida está dada por

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - A_0^a(D_i E_i - J^0)_a + J_i^a A_a^i + \lambda^a \Sigma_a, \quad (\text{B.18})$$

donde λ^a son funciones arbitrarias. La condición de evolución temporal de las constricciones primarias

$$\dot{\Sigma}^a(\mathbf{x}) = \{\Sigma^a(\mathbf{x}), \int d^3y H_E(\mathbf{y})\} \simeq 0, \quad (\text{B.19})$$

produce las leyes de Gauss

$$\Omega^a = (D_i E_i - J^0)^a \simeq 0. \quad (\text{B.20})$$

No es difícil probar que (B.17) y (B.20) son las únicas constricciones presentes y que constituyen un conjunto de primera clase. De hecho, calculando la evolución temporal de las cantidades Ω^a obtenemos que

$$\dot{\Omega}^a(\mathbf{x}) = \left\{ \Omega^a(\mathbf{x}), \int d^3y \mathcal{H}_E(\mathbf{y}) \right\} = \left\{ \Omega^a(\mathbf{x}), \int d^3y \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - A_0^b \Omega^b + J_i^a A_a^i \right) \right\} - \partial_0 J_0^a. \quad (\text{B.21})$$

A partir de los PP (B.11) obtenemos

$$\int d^3y \{ \Omega^a(\mathbf{x}), \mathbf{B}^2(\mathbf{y}) \} = 0. \quad (\text{B.22})$$

Los PP de las constricciones (B.20) producen

$$\left\{ D_i E_i^a(\mathbf{x}), \int dy D_j E_j^b(\mathbf{y}) \right\} = +C^{abc} D_k E_k^c(\mathbf{x}), \quad (\text{B.23})$$

lo cual lleva a

$$\int d^3y \{ \Omega^a(\mathbf{x}), \Omega^b(\mathbf{y}) \} M^b(\mathbf{y}) = C^{abc} M^b [\Omega^c + J_0^c](\mathbf{x}). \quad (\text{B.24})$$

De esta forma

$$\dot{\Omega}^a = -\partial_0 J_0^a - C^{abc} A_0^b J_0^c - C^{abc} A_0^b \Omega^c - D_k J^{ak} = -C^{abc} A_0^b \Omega^c - D_\mu J^{a\mu}, \quad (\text{B.25})$$

es igual a cero, modulo las constricciones y usando la conservación de la corriente. Normalmente uno fija

$$\Pi_0^a = 0, \quad A_0^a = \Theta^a, \quad (\text{B.26})$$

lo que produce la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \Theta^a(D_i E_i - J^0)_a + J_i^a A_a^i. \quad (\text{B.27})$$

Una vez que Π_0^a y A_0^a han sido fijadas fuertemente, los paréntesis de Dirac de las variables restantes son

$$\{A_i^a(\mathbf{x}), A_j^b(\mathbf{y})\}^* = 0, \quad \{E^{ai}(\mathbf{x}), E^{bj}(\mathbf{y})\}^* = 0, \quad \{A_i^a(\mathbf{x}), E^{bj}(\mathbf{y})\}^* = -\delta_i^j \delta^{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{B.28})$$

El conteo final de los grados de libertad por punto en el espacio de coordenadas es

$$\#\text{d.o.f.} = \frac{1}{2}(2 \times 4N - 2 \times 2N) = 2N. \quad (\text{B.29})$$

Las funciones Θ^a en la Ecu. (B.27) son arbitrarias y pueden ser determinadas después de que las restantes constricciones de primera clase Ω^a se fijan, con lo que se obtiene entonces el espacio fase reducido en términos de los paréntesis de Dirac.

Apéndice C

El álgebra del SL-NANM

En este caso las variables canónicas son A_0^a , A_i^1 , $A_i^{\bar{a}}$, Π_0^a , $\Pi^{1\bar{k}}$, $\Pi^{\bar{a}i}$ donde $a = 1, 2, \dots, N$; $\bar{a} = 2, 3, \dots, N$; $i = 1, 2, 3$ y $\bar{i} = 1, 2$. Los PP no nulos son

$$\begin{aligned} \{A_0^a(\mathbf{x}, t), \Pi_0^b(\mathbf{y}, t)\} &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta^{ab}, & \{A_i^1(\mathbf{x}, t), \Pi^{1\bar{k}}(\mathbf{y}, t)\} &= \delta_i^{\bar{k}}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \\ \{A_i^{\bar{a}}(\mathbf{x}, t), \Pi^{\bar{b}k}(\mathbf{y}, t)\} &= \delta_i^k\delta^{\bar{a}\bar{b}}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Las variables canónicas de YM (A_i^a, E_j^b) están dadas por

$$\begin{aligned} A_3^1 &= \sqrt{M^2 + (A_0^a)^2 - (A_i^1)^2 - (A_k^{\bar{a}})^2}, & A_i^1, & A_i^{\bar{a}}, \\ E_3^1 &= A_3^1 \left(\frac{\Pi_0^1}{A_0^1} \right), & E_i^1 &= \Pi^{1\bar{i}} + \left(\frac{\Pi_0^1}{A_0^1} \right) A_i^1, & E_i^{\bar{a}} &= \Pi^{\bar{a}i} + \left(\frac{\Pi_0^1}{A_0^1} \right) A_i^{\bar{a}}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

en función de las correspondientes variables canónicas del SL-NANM.

En lo siguiente no especificaremos la dependencia de las coordenadas en cada término de los PP y adoptaremos la convención

$$\{P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{y})\} = \{P, Q\}. \quad (\text{C.3})$$

A su vez, también omitimos $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Los detalles de la derivación completa no se presentan y únicamente incluimos los resultados finales.

Nuestro primer objetivo es calcular el álgebra entre las variables de Yang-Mills A_i^a y E^{bj} , definidas en la Ecu. (C.2), en función del álgebra canónica (C.1) del SL-NANM. Para llevar esto a cabo primero necesitamos considerar los PP entre A_3^1 y los momentos canónicos del SL-NANM. Los resultados son

$$\{\Pi^{\bar{a}k}, A_3^1\} = \frac{A_k^{\bar{a}}}{A_3^1}, \quad \{\Pi_0^a, A_3^1\} = -\frac{A_0^a}{A_3^1}, \quad \{\Pi^{1\bar{k}}, A_3^1\} = \frac{A_k^1}{A_3^1}. \quad (\text{C.4})$$

El sector A – A

El álgebra entre las coordenadas canónicas $(A_i^1, A_k^{\bar{a}})$ y A_3^1 es trivial porque esta última es función de las mismas coordenadas canónicas $A_3^1 = A_3^1(A_i^1, A_k^{\bar{a}})$, las cuales conmutan entre ellas. Por lo tanto tenemos que $\{A_i^a, A_j^b\} = 0$.

El sector A – E

Obtenemos

$$\{A_3^1, E_3^1\} = 1, \quad \{A_3^1, E_k^1\} = 0, \quad \{A_3^1, E_i^{\bar{a}}\} = 0, \quad \{A_i^1, E_3^1\} = 0, \quad (C.5)$$

$$\{A_i^1, E_k^1\} = \delta_i^{\bar{k}}, \quad \{A_i^1, E_k^{\bar{a}}\} = 0, \quad \{A_i^{\bar{a}}, E_3^1\} = 0, \quad \{A_i^{\bar{a}}, E_k^1\} = 0, \quad \{A_i^{\bar{b}}, E_j^{\bar{a}}\} = \delta^{\bar{a}\bar{b}}\delta_i^j. \quad (C.6)$$

Las relaciones anteriores pueden ser resumidas como

$$\{A_k^a, E_l^b\} = \delta^{ab}\delta_k^l. \quad (C.7)$$

El sector E – E

Aquí tenemos

$$\{E_3^1, E_i^1\} = 0, \quad \{E_3^1, E_i^{\bar{a}}\} = 0, \quad \{E_i^1, E_k^1\} = 0, \quad \{E_i^1, E_k^{\bar{a}}\} = 0, \quad \{E_k^{\bar{a}}, E_l^{\bar{b}}\} = 0. \quad (C.8)$$

Resumiendo, el álgebra canónica de las variables de la teoría de YM, calculada a partir del álgebra canónica del SL-NANM reproduce el álgebra canónica de YM (B.28).

El sector $(A_0^a, \Pi_0^a) - (A_i^a, E_k^b)$

Aquí se requieren los PP entre A_0^a, Π_0^a y las variables de YM. Los resultados son

$$\{A_0^a, A_i^b\} = 0, \quad \{A_0^a, E_j^b\} = \frac{A_j^b}{A_0^1}\delta^{1a}, \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} \{\Pi_0^a, A_i^b\} &= -\delta^{1b}\delta_i^3\frac{A_0^a}{A_3^1}, & \{\Pi_0^a, E_3^1\} &= \frac{E_3^1}{A_0^1}\left[\delta^{a1} - \frac{A_0^a A_0^1}{(A_3^1)^2}\right], \\ \{\Pi_0^a, E_i^1\} &= \frac{E_3^1}{A_3^1}\frac{A_i^1}{A_0^1}\delta^{a1}, & \{\Pi_0^a, E_i^{\bar{b}}\} &= \frac{E_3^1}{A_3^1}\frac{A_i^{\bar{b}}}{A_0^1}\delta^{a1}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

El sector $\Phi_1^{\bar{a}} - (A_i^a, A_0^a, E_i^a)$

La igualdad de los paréntesis de Dirac y los PP derivada en la Ecu. (3.181) es una consecuencia directa de los PP entre las constricciones $\Phi_1^{\bar{a}} = \Pi_0^{\bar{a}} - \Pi_0^1 A_0^{\bar{a}}/A_0^1$ y las variables de YM, los cuales son

$$\begin{aligned} \{\Phi_1^{\bar{a}}, E_3^1\} &= 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, E_i^1\} = 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, E_k^{\bar{b}}\} = 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, E_k^b\} = 0, \\ \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_0^1\} &= \frac{A_0^{\bar{a}}}{A_0^1}, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_0^{\bar{b}}\} = -\delta^{\bar{a}\bar{b}}, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_3^1\} = 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_i^1\} = 0, \\ \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_k^{\bar{b}}\} &= 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, A_k^a\} = 0, \quad \{\Phi_1^{\bar{a}}, B_k^b\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

El sector de las constricciones

A continuación se presentan los resultados del cálculo de los PP entre las constricciones $\Phi_1^{\bar{a}}$ y $\Phi_2^{\bar{b}}$.

$$\{\Phi_1^{\bar{a}}, \Phi_1^{\bar{b}}\} = 0. \quad (\text{C.12})$$

El cálculo de $\{\Phi_1^{\bar{a}}, \Phi_2^{\bar{b}}\}$ requiere

$$\{\Phi_1^{\bar{a}}, \Omega^b\} = 0, \quad (\text{C.13})$$

que se cumple en virtud de la relación $\{\Phi_1^{\bar{a}}, E_k^b\} = 0$ calculada en la Ecu. (C.11). El resultado final es

$$\{\Phi_1^{\bar{a}}, \Phi_2^{\bar{b}}\} = - \left(\delta^{\bar{a}\bar{b}} + \frac{A_0^{\bar{a}} A_0^{\bar{b}}}{A_0^1 A_0^1} \right), \quad (\text{C.14})$$

donde hemos hecho uso de la restricción $\Omega^1 A_0^{\bar{a}} = A_0^1 \Omega^{\bar{a}}$, de acuerdo a la Ecu. (3.81).

Usando los resultados

$$\{A_0^1, \Omega^b(y)\} = 0, \quad \{A_0^{\bar{a}}, \Omega^b(y)\} = 0, \quad (\text{C.15})$$

calculamos

$$\{\Phi_2^{\bar{a}}, \Phi_2^{\bar{b}}\} = (A_0^1)^2 \left\{ \frac{\Omega^{\bar{a}}}{\Omega^1}, \frac{\Omega^{\bar{b}}}{\Omega^1} \right\}. \quad (\text{C.16})$$

El último PP es

$$\left\{ \frac{\Omega^{\bar{a}}}{\Omega^1}, \frac{\Omega^{\bar{b}}}{\Omega^1} \right\} = \frac{1}{(\Omega^1)^2} \left(C^{\bar{a}\bar{b}m} + C^{1\bar{a}m} \frac{\Omega^{\bar{b}}}{\Omega^1} - C^{1\bar{b}m} \frac{\Omega^{\bar{a}}}{\Omega^1} \right) D_i E_i^m, \quad (\text{C.17})$$

donde se ha empleado la relación

$$\{\Omega^a, \Omega^b\} = C^{abc} D_i E_i^c, \quad (\text{C.18})$$

El resultado final es

$$\left\{ \Phi_2^{\bar{a}}, \Phi_2^{\bar{b}} \right\} = \left(\frac{A_0^1}{\Omega^1} \right)^2 \left(C^{\bar{a}\bar{b}m} + C^{1\bar{a}m} \frac{\Omega^{\bar{b}}}{\Omega^1} - C^{1\bar{b}m} \frac{\Omega^{\bar{a}}}{\Omega^1} \right) (D_i E_i^m). \quad (\text{C.19})$$

Apéndice D

El Wronskiano

En la formulación del NANM presentada en la Subsección 3.2.2, el Wronskiano que surge del Lagrangiano es

$$W_{\text{NANM}} = \det \left(\frac{\partial A_i^c}{\partial \Phi_B^b} \frac{\partial A_i^c}{\partial \Phi_A^a} \right), \quad i, A = 1, 2, 3, \quad a = 1, \dots, N, \quad (\text{D.1})$$

donde la transformación de coordenadas $A_i^a = A_i^a(\Phi_B^b)$ es invertible, de tal forma que

$$\det \left(\frac{\partial A_i^a}{\partial \Phi_B^b} \right) \neq 0. \quad (\text{D.2})$$

Ahora mostraremos que la propiedad (D.2) garantiza que W_{NANM} es distinto de cero. Para realizar esto, es más simple si reetiquetamos la transformación de coordenadas de $3N$ A_i^a a $3N$ Φ_B^b como

$$A_R = A_R(\Phi_S), \quad \det \left(\frac{\partial A_R}{\partial \Phi_S} \right) \neq 0, \quad R, S = 1, 2, 3, \dots, 3N. \quad (\text{D.3})$$

El Wronskiano requerido es

$$W_{\text{NANM}} = \det \left(\frac{\partial A_R}{\partial \Phi_S} \frac{\partial A_R}{\partial \Phi_T} \right). \quad (\text{D.4})$$

En términos del símbolo de épsilon $3N$ -dimensional $\epsilon^{T_1 T_2, \dots, T_{3N}}$, lo anterior puede ser escrito como

$$\begin{aligned} W_{\text{NANM}} &= \epsilon^{T_1 T_2, \dots, T_{3N}} \left(\frac{\partial A_{R_1}}{\partial \Phi_1} \frac{\partial A_{R_1}}{\partial \Phi_{T_1}} \right) \left(\frac{\partial A_{R_2}}{\partial \Phi_2} \frac{\partial A_{R_2}}{\partial \Phi_{T_2}} \right) \dots \left(\frac{\partial A_{R_{3N}}}{\partial \Phi_{3N}} \frac{\partial A_{R_{3N}}}{\partial \Phi_{T_{3N}}} \right). \\ W_{\text{NANM}} &= \left(\frac{\partial A_{R_1}}{\partial \Phi_1} \frac{\partial A_{R_2}}{\partial \Phi_2} \dots \frac{\partial A_{R_{3N}}}{\partial \Phi_{3N}} \right) \left(\epsilon^{T_1 T_2, \dots, T_{3N}} \frac{\partial A_{R_1}}{\partial \Phi_{T_1}} \frac{\partial A_{R_2}}{\partial \Phi_{T_2}} \dots \frac{\partial A_{R_{3N}}}{\partial \Phi_{T_{3N}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Pero

$$\left(\epsilon^{T_1 T_2, \dots, T_{3N}} \frac{\partial A_{R_1}}{\partial \Phi_{T_1}} \frac{\partial A_{R_2}}{\partial \Phi_{T_2}} \dots \frac{\partial A_{R_{3N}}}{\partial \Phi_{T_{3N}}} \right) = \epsilon^{R_1 R_2, \dots, R_{3N}} \det \left(\frac{\partial A_R}{\partial \Phi_T} \right), \quad (\text{D.6})$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
 W_{\text{NANM}} &= \left(\frac{\partial A_{R_1}}{\partial \Phi_1} \frac{\partial A_{R_2}}{\partial \Phi_2} \dots \frac{\partial A_{R_{3N}}}{\partial \Phi_{3N}} \right) \epsilon^{R_1 R_2 \dots R_{3N}} \det \left(\frac{\partial A_R}{\partial \Phi_T} \right), \\
 W_{\text{NANM}} &= \left[\det \left(\frac{\partial A_R}{\partial \Phi_T} \right) \right]^2 \neq 0,
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

de acuerdo a la Ecu. (D.3).

Apéndice E

Álgebra de los modelos tipo Nambu

Aquí mostramos que el álgebra para las variables canónicas x_i y Π_j^x de la teoría de norma, dada en la Ecu. (3.125), se recupera a partir del álgebra canónica de las correspondientes variables del TTNM.

Álgebra resultante cuando se resuelve para una variable x_l

Las variables canónicas del TTNM $(x_{\bar{l}}, \lambda_m, \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x, \bar{\Pi}_m^\lambda)$ satisfacen los PP no nulos

$$\{x_{\bar{i}}, \bar{\Pi}_{\bar{j}}^x\} = \delta_{\bar{i}\bar{j}}, \quad \{\lambda_m, \bar{\Pi}_n^\lambda\} = \delta_{mn}. \quad (\bar{i}, \bar{j} = 2, 3, \dots, n). \quad (\text{E.1})$$

Las transformaciones que llevan de las variables canónicas del TTNM a las variables canónicas de la teoría de norma está dada por

$$x_1 = f(x_{\bar{l}}, \lambda_m), \quad x_{\bar{l}} = x_{\bar{l}}, \quad \Pi_1^x = \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}}, \quad \Pi_{\bar{l}}^x = \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{x_{\bar{l}}}, \quad (\bar{l} = 2, 3, \dots, n). \quad (\text{E.2})$$

El objetivo es calcular el álgebra entre las variables x_i y Π_j de la teoría de norma haciendo uso del álgebra canónica (E.1) del TTNM junto con la transformación en Ecu. (E.2).

El sector $x_i - x_j$

$$\{x_1, x_1\} = \{f(x_{\bar{i}}, \lambda_m), f(x_{\bar{j}}, \lambda_m)\} = 0. \quad (\text{E.3})$$

$$\{x_1, x_l\} = \{f(x_{\bar{n}}, \lambda_m), x_{\bar{l}}\} = 0. \quad (\text{E.4})$$

$$\{x_{\bar{l}}, x_{\bar{m}}\} = 0. \quad (\text{E.5})$$

El sector $\Pi_i^x - \Pi_j^x$

$$\begin{aligned} \{\Pi_1^x, \Pi_1^x\} &= \left\{ \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}}, \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \right\}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} \{\Pi_1^x, \Pi_{\bar{l}}^x\} &= \left\{ \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}}, \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{x_{\bar{l}}} \right\} = \left\{ \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}}, \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x \right\} - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \left\{ \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}}, f_{x_{\bar{l}}} \right\}, \\ &= \bar{\Pi}_1^\lambda \left\{ \frac{1}{f_{\lambda_1}}, \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x \right\} - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1} f_{\lambda_1}} \left\{ \bar{\Pi}_1^\lambda, f_{x_{\bar{l}}} \right\}, \\ &= -\frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}^2} f_{\lambda_1 x_{\bar{l}}} + \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}^2} f_{x_{\bar{l}} \lambda_1} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} \{\Pi_{\bar{l}}^x, \Pi_{\bar{m}}^x\} &= \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{x_{\bar{l}}}, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^x - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{x_{\bar{m}}} \right\}, \\ &= -\left\{ \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x, \frac{f_{x_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} \right\} \bar{\Pi}_1^\lambda + \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{m}}^x, \frac{f_{x_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} \right\} \bar{\Pi}_1^\lambda, \\ &\quad + \left\{ \bar{\Pi}_1^\lambda, \frac{f_{x_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} \right\} \bar{\Pi}_1^\lambda \frac{f_{x_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} - \left\{ \bar{\Pi}_1^\lambda, \frac{f_{x_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} \right\} \bar{\Pi}_1^\lambda \frac{f_{x_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}}, \\ &= \left(\frac{f_{x_{\bar{m}} x_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{x_{\bar{m}}} f_{\lambda_1 x_{\bar{l}}}}{(f_{\lambda_1})^2} \right) \bar{\Pi}_1^\lambda - \left(\frac{f_{x_{\bar{l}} x_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{x_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 x_{\bar{m}}}}{(f_{\lambda_1})^2} \right) \bar{\Pi}_1^\lambda \\ &\quad - \left(\frac{f_{x_{\bar{m}} \lambda_1}}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{x_{\bar{m}}} f_{\lambda_1 \lambda_1}}{(f_{\lambda_1})^2} \right) \bar{\Pi}_1^\lambda \frac{f_{x_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} + \left(\frac{f_{x_{\bar{l}} \lambda_1}}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{x_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 \lambda_1}}{(f_{\lambda_1})^2} \right) \bar{\Pi}_1^\lambda \frac{f_{x_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}}, \\ &= -\left(\frac{f_{x_{\bar{m}}} f_{\lambda_1 x_{\bar{l}}}}{(f_{\lambda_1})^2} \right) \bar{\Pi}_1^\lambda + \left(\frac{f_{x_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 x_{\bar{m}}}}{(f_{\lambda_1})^2} \right) \bar{\Pi}_1^\lambda \\ &\quad - \left(\frac{f_{x_{\bar{m}} \lambda_1}}{f_{\lambda_1}} \right) \bar{\Pi}_1^\lambda \frac{f_{x_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} + \left(\frac{f_{x_{\bar{l}} \lambda_1}}{f_{\lambda_1}} \right) \bar{\Pi}_1^\lambda \frac{f_{x_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

El sector $x_i - \Pi_j^x$

$$\{x_1, \Pi_1^x\} = \left\{ f(x_{\bar{l}}, \lambda_m), \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \right\} = \frac{f_{\lambda_1}}{f_{\lambda_1}} = 1. \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned}
\{x_1, \Pi_{\bar{l}}^x\} &= \{x_1, \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x - \Pi_1^x f_{x_{\bar{l}}}\}, \\
&= \{x_1, \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x\} - \{x_1, \Pi_1^x f_{x_{\bar{l}}}\}, \\
&= \{f(x_{\bar{l}}, \lambda_m), \bar{\Pi}_{\bar{l}}^x\} - \{f(x_{\bar{l}}, \lambda_m), \Pi_1^x\} f_{x_{\bar{l}}}, \\
&= f_{x_{\bar{l}}} - f_{x_{\bar{l}}} = 0.
\end{aligned} \tag{E.10}$$

$$\{x_{\bar{l}}, \Pi_1^x\} = \left\{x_{\bar{l}}, \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}}\right\} = 0. \tag{E.11}$$

$$\{x_{\bar{l}}, \Pi_{\bar{m}}^x\} = \{x_{\bar{l}}, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^x - \Pi_1^x f_{x_{\bar{m}}}\} = \{x_{\bar{l}}, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^x\} = \delta_{\bar{l}\bar{m}}. \tag{E.12}$$

Lo anterior puede ser resumido en los paréntesis

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad \{\Pi_i, \Pi_j\} = 0, \quad \{x_i, \Pi_j\} = \delta_{ij}. \tag{E.13}$$

Los cálculos previos muestran que el álgebra canónica (3.125) para las variables x_i y Π_j de la teoría de norma se recupera a partir del álgebra canónica del TTNM. La transformación entre las variables está dada por (E.2).

El sector $\phi_{\bar{m}}^1 - (x_j, \Pi_j^x)$

Las constricciones primarias son

$$\phi_{\bar{m}}^1 = \bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}}}. \tag{E.14}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\{\phi_{\bar{m}}^1, x_1\} &= \{\phi_{\bar{m}}^1, f(x_{\bar{l}}, \lambda_m)\}, \\
&= \{\bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda, f(x_{\bar{l}}, \lambda_m)\} - \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} \left\{ \bar{\Pi}_1^\lambda, f(x_{\bar{l}}, \lambda_m) \right\}, \\
&= -f_{\lambda_{\bar{m}}} + \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_1}, \\
&= -f_{\lambda_{\bar{m}}} + f_{\lambda_{\bar{m}}}, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{E.15}$$

$$\{\phi_{\bar{m}}^1, x_{\bar{l}}\} = \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}}}, x_{\bar{l}} \right\} = 0. \tag{E.16}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi_{\bar{m}}^1, \Pi_1^x\} &= \left\{ \phi_{\bar{m}}^1, \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \right\}, \\
&= \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda, \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \right\} - \left\{ \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}}}, \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \right\}, \\
&= \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda, \frac{1}{f_{\lambda_1}} \right\} \bar{\Pi}_1^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \left\{ f_{\lambda_{\bar{m}}}, \bar{\Pi}_1^\lambda \right\} \frac{1}{f_{\lambda_1}}, \\
&= \frac{f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{m}}}}{(f_{\lambda_1})^2} \bar{\Pi}_1^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{(f_{\lambda_1})^2} f_{\lambda_{\bar{m}} \lambda_1}, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{E.17}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi_{\bar{l}}^1, \Pi_{\bar{m}}^x\} &= \{\phi_{\bar{l}}^1, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^x - \Pi_1^x f_{x_{\bar{m}}}\}, \\
&= \{\phi_{\bar{l}}^1, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^x\} - \{\phi_{\bar{l}}^1, f_{x_{\bar{m}}}\} \Pi_1^x, \\
&= \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{l}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{l}}}, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^x \right\} - \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{l}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{l}}}, f_{x_{\bar{m}}} \right\} \Pi_1^x, \\
&= -\bar{\Pi}_1^\lambda \left\{ \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}}, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^x \right\} - \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{l}}^\lambda, f_{x_{\bar{m}}} \right\} \Pi_1^x + \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} \left\{ \bar{\Pi}_1^\lambda, f_{x_{\bar{m}}} \right\} \Pi_1^x, \\
&= -\bar{\Pi}_1^\lambda \left(\frac{f_{\lambda_{\bar{l}} x_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 x_{\bar{m}}}}{(f_{\lambda_1})^2} \right) + f_{x_{\bar{m}} \lambda_{\bar{l}}} \Pi_1^x - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} f_{x_{\bar{m}} \lambda_1} \Pi_1^x, \\
&= -\bar{\Pi}_1^x f_{\lambda_{\bar{l}} x_{\bar{m}}} + \bar{\Pi}_1^x \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 x_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} + f_{x_{\bar{m}} \lambda_{\bar{l}}} \Pi_1^x - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} f_{x_{\bar{m}} \lambda_1} \Pi_1^x, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Lo anterior se resume en

$$\{\phi_{\bar{l}}^1, x_i\} = 0 = \{\phi_{\bar{l}}^1, \Pi_j^x\}. \tag{E.19}$$

El sector $\phi_{\bar{m}}^1 - \phi_{\bar{m}}^1$

$$\begin{aligned}
\{\phi_{\bar{l}}^1, \phi_{\bar{m}}^1\} &= \left\{ \bar{\Pi}_{\bar{l}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{l}}}, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}}} \right\}, \\
&= -\left\{ \bar{\Pi}_{\bar{l}}^\lambda, \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} \right\} \bar{\Pi}_1^\lambda - \bar{\Pi}_1^\lambda \left\{ \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}}, \bar{\Pi}_{\bar{m}}^\lambda \right\} + \left\{ \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{l}}}, \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}}} \right\}, \\
&= \frac{f_{\lambda_{\bar{m}} \lambda_{\bar{l}}} \bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}} f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{l}}} \bar{\Pi}_1^\lambda}{(f_{\lambda_1})^2} - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}} \lambda_{\bar{m}}} \bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} + \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{m}}} \bar{\Pi}_1^\lambda}{(f_{\lambda_1})^2} \\
&\quad + \bar{\Pi}_1^\lambda \left\{ \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}}, \bar{\Pi}_1^\lambda \right\} \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} + \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} \left\{ \bar{\Pi}_1^\lambda, \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} \right\} \bar{\Pi}_1^\lambda, \\
&= -\frac{f_{\lambda_{\bar{m}}} f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{l}}} \bar{\Pi}_1^\lambda}{(f_{\lambda_1})^2} + \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{m}}} \bar{\Pi}_1^\lambda}{(f_{\lambda_1})^2} \\
&\quad + \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \left(\frac{f_{\lambda_{\bar{m}}} f_{\lambda_{\bar{l}} \lambda_1}}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}} f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 \lambda_1}}{(f_{\lambda_1})^2} \right) - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \left(\frac{f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_{\bar{m}} \lambda_1}}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_{\bar{m}}} f_{\lambda_1 \lambda_1}}{(f_{\lambda_1})^2} \right), \\
&= -\frac{f_{\lambda_{\bar{m}}} f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{l}}} \bar{\Pi}_1^\lambda}{(f_{\lambda_1})^2} + \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{m}}} \bar{\Pi}_1^\lambda}{(f_{\lambda_1})^2} \\
&\quad + \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} \left(\frac{f_{\lambda_{\bar{m}}} f_{\lambda_{\bar{l}} \lambda_1}}{f_{\lambda_1}} - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}} f_{\lambda_{\bar{m}} \lambda_1}}{f_{\lambda_1}} \right), \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{E.20}$$

El sector $\phi_{\bar{m}}^1 - \phi_{\bar{m}}^2$

$$\phi_{\bar{l}}^1 = \bar{\Pi}_{\bar{l}}^\lambda - \frac{\bar{\Pi}_1^\lambda}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{l}}}, \quad \phi_{\bar{m}}^2 = f_{\lambda_{\bar{m}}} - \frac{f_{\lambda_1}}{G_1} G_{\bar{m}}. \tag{E.21}$$

$$\{\phi_{\bar{l}}^1, \phi_{\bar{m}}^2\} = \{\phi_{\bar{l}}^1, f_{\lambda_{\bar{m}}}\} - \frac{G_{\bar{m}}}{G_1} \{\phi_{\bar{l}}^1, f_{\lambda_1}\}. \tag{E.22}$$

donde hemos usado que $\{\phi_{\bar{l}}^1, G_m(x_l, \Pi_m^x)\} = 0$. Lo anterior es porque ya se ha demostrado que $\{\phi_{\bar{l}}^1, x_l\} = \{\phi_{\bar{l}}^1, \Pi_m^x\} = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\{\phi_{\bar{l}}^1, \phi_{\bar{m}}^2\} &= \{\bar{\Pi}_{\bar{l}}^\lambda, f_{\lambda_{\bar{m}}}\} - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} \left\{ \bar{\Pi}_1^\lambda, f_{\lambda_{\bar{m}}} \right\} - \frac{G_{\bar{m}}}{G_1} \left(\{\bar{\Pi}_{\bar{l}}^\lambda, f_{\lambda_1}\} - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} \left\{ \bar{\Pi}_1^\lambda, f_{\lambda_1} \right\} \right), \\
&= -f_{\lambda_{\bar{m}} \lambda_{\bar{l}}} + \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}} \lambda_1} - \frac{G_{\bar{m}}}{G_1} \left(f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{l}}} - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_1 \lambda_1} \right), \\
&= -f_{\lambda_{\bar{m}} \lambda_{\bar{l}}} + \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_{\bar{m}} \lambda_1} - \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}} \left(f_{\lambda_1 \lambda_{\bar{l}}} - \frac{f_{\lambda_{\bar{l}}}}{f_{\lambda_1}} f_{\lambda_1 \lambda_1} \right),
\end{aligned} \tag{E.23}$$

donde en la última línea hemos empleado la restricción $\phi_{\bar{m}}^2 = 0$ para obtener

$$\frac{G_{\bar{m}}}{G_1} = \frac{f_{\lambda_{\bar{m}}}}{f_{\lambda_1}}. \quad (\text{E.24})$$

La existencia de la matriz inversa de $T_{\bar{m}} = \{\phi_{\bar{l}}^1, \phi_{\bar{m}}^2\}$ depende de la función $f = f(x_{\bar{l}}, \lambda_m)$. Un cálculo directo muestra que si tomamos

$$f = f(\Psi), \quad \Psi = \sum_i \frac{\tilde{X}_i^2}{2}, \quad (\text{E.25})$$

con f una función arbitraria y donde \tilde{X}_i denota todas las variables $x_{\bar{l}}$ y λ_m , entonces la matriz $T_{\bar{m}} = \{\phi_{\bar{l}}^1, \phi_{\bar{m}}^2\}$ estará dada por

$$T_{\bar{m}} = \{\phi_{\bar{l}}^1, \phi_{\bar{m}}^2\} = f' \times \left(\delta_{\bar{l}\bar{m}} + \frac{\lambda_{\bar{m}}\lambda_{\bar{l}}}{\lambda_1^2} \right), \quad (\text{E.26})$$

cuya inversa es

$$(T^{-1})_{\bar{m}} = \frac{1}{f'} \times \left(\delta_{\bar{l}\bar{m}} - \frac{\lambda_{\bar{m}}\lambda_{\bar{l}}}{\lambda_c^2} \right), \quad c = 1, 2, \dots, k. \quad (\text{E.27})$$

Notemos que la función (E.25) es una generalización de las restricciones usadas para definir el modelo de Nambu, lo cual corresponde a

$$f = \sqrt{\sum_i \tilde{X}_i^2}, \quad (\text{E.28})$$

en dicho caso.

Álgebra resultante cuando se resuelve para una variable λ_m

En esta situación el cálculo del álgebra entre el TTNM y la teoría de norma es directo porque las variables canónicas coinciden.

El sector $\phi_{\bar{m}}^1 - (x_i, \Pi_i^x)$

En este caso $\phi_b^1 = \Pi_b^\lambda$ y el álgebra canónica del TTNM da

$$\{\phi_b^1, x_i\} = \{\phi_b^1, \Pi_i^x\} = 0. \quad (\text{E.29})$$

El sector $\phi_{\bar{m}}^1 - \phi_{\bar{m}}^1$

$$\{\phi_{\bar{a}}^1, \phi_{\bar{b}}^1\} = \{\Pi_{\bar{a}}^\lambda, \Pi_{\bar{b}}^\lambda\} = 0. \quad (\text{E.30})$$

El sector $\phi_{\bar{m}}^1 - \phi_{\bar{m}}^2$

$$\phi_{\bar{b}}^1 = \Pi_{\bar{b}}^\lambda, \quad \phi_{\bar{b}}^2 = g_{\lambda_{\bar{b}}} + \frac{G_{\bar{b}}}{G_1}. \quad (\text{E.31})$$

$$T_{\bar{a}\bar{b}} = \{\phi_{\bar{a}}^1, \phi_{\bar{b}}^2\} = \left\{ \Pi_{\bar{a}}^\lambda, g_{\lambda_{\bar{b}}} + \frac{G_{\bar{b}}}{G_1} \right\} = g_{\lambda_{\bar{b}}\lambda_{\bar{a}}}. \quad (\text{E.32})$$

Nuevamente tomamos como ejemplo

$$g = g(\Psi), \quad \Psi = \sum_i \frac{\tilde{X}_i^2}{2}, \quad (\text{E.33})$$

con g una función arbitraria y donde \tilde{X}_i denota todas las variables x_l y $\lambda_{\bar{m}}$. La matriz $T_{\bar{l}\bar{m}} = \{\phi_{\bar{l}}^1, \phi_{\bar{m}}^2\}$ se convierte en

$$T_{\bar{l}\bar{m}} = \{\phi_{\bar{l}}^1, \phi_{\bar{m}}^2\} = f' \times \left(\delta_{\bar{l}\bar{m}} + \frac{\lambda_{\bar{m}}\lambda_{\bar{l}}}{f'} f'' \right), \quad (\text{E.34})$$

cuya inversa es

$$(T^{-1})_{\bar{l}\bar{m}} = \frac{1}{f'} \times \left(\delta_{\bar{l}\bar{m}} - \frac{f''}{(f' + \lambda_{\bar{c}}\lambda_{\bar{c}}f'')} \lambda_{\bar{m}}\lambda_{\bar{l}} \right). \quad (\text{E.35})$$

Nuevamente la función (E.33) es una generalización de las constricciones usadas para definir el modelo de Nambu.

Apéndice F

Método de Faddeev-Popov

A continuación escribimos un resumen sobre el método de Faddeev-Popov siguiendo a detalle la Ref. [83].

En una teoría de norma la integral funcional por sí sola diverge por el hecho de contabilizar un mismo estado físico infinitas veces, todos ellos conectados por una transformación de norma. Por ejemplo, en el caso con grupo de simetría $U(1)$, la conexión entre estados físicos equivalentes se lee como $A_\mu^\Theta(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\Theta(x)$, para cualquier función arbitraria $\Theta(x)$. Para resolver este problema es necesario imponer condiciones de norma, de tal manera que contemos cada configuración física solamente una vez. Esto puede lograrse utilizando el método de Faddeev-Popov, el cual consiste en insertar en la integral funcional una unidad o un factor de 1 de una manera muy conveniente

$$1 = \int DN(A^\Theta(x))\delta^{(\infty)}[N(A^\Theta)] = \int D\Theta(x)\delta^{(\infty)}(N(A^\Theta))\det\left(\frac{\delta N(A^\Theta)}{\delta\Theta}\right), \quad (\text{F.1})$$

donde $\delta^{(\infty)}[N(A^\Theta)]$ es una delta de Dirac funcional que impone la condición $N(A^\Theta(x)) = 0$ en cada punto x . Más adelante veremos que es conveniente usar la condición $N_\omega = \partial_\mu A^\mu - \omega = 0$, con $\omega(x)$ una función arbitraria. Para este caso tendremos que

$$N_\omega(A^\Theta) = \partial_\mu(A^\Theta)^\mu - \omega = \partial_\mu A^\mu(x) - \partial^2\Theta(x) - \omega(x), \quad (\text{F.2})$$

y por lo tanto

$$\frac{\delta N_\omega(A^\Theta)(x)}{\delta\Theta(y)} = -\partial^2\delta^{(4)}(x-y). \quad (\text{F.3})$$

siendo esta cantidad invariante de norma e independiente de A_μ y $\Theta(x)$ podemos reescribir la Ecu. (F.1) como

$$\Delta_{FP} \equiv \left[\int D\Theta(x)\delta^{(\infty)}[N(A^\Theta)] \right]^{-1} = \det\left(\frac{\delta N(A^\Theta)}{\delta\Theta}\right) = \det(-\partial^2), \quad (\text{F.4})$$

donde se ha definido el determinante de Faddeev-Popov Δ_{FP} . Insertando la Ecu. (F.4) en Ecu. (F.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int DA_\mu(x)e^{iS[A]} &= \int DA_\mu e^{iS[A]} \Delta_{FP} \int D\Theta \delta^{(\infty)}[N(A^\Theta)], \\
&= \int D\Theta \int DA_\mu \delta^{(\infty)}[N(A^\Theta)] \Delta_{FP} e^{iS[A]}.
\end{aligned} \tag{F.5}$$

Ahora hacemos el cambio de variable

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^\Theta(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Theta(x), \tag{F.6}$$

en cada x (y para cada elección específica de Θ), lo cual corresponde a añadir una constante respecto a la variable de integración, de modo que $DA_\mu(x) = DA_\mu^\Theta(x)$. Además, la invariancia de norma implica que $S[A] = S[A^\Theta]$ y usando el hecho de que el determinante de Faddeev-Popov es también invariante de norma podemos escribir la integral funcional como

$$\int DA_\mu(x)e^{iS[A]} = \int D\Theta \int DA_\mu^\Theta \delta^{(\infty)}[N(A^\Theta)] \Delta_{FP} e^{iS[A^\Theta]}. \tag{F.7}$$

Llegados a este punto, podemos ahora renombrar a la variable de integración $A_\mu^\Theta(x) \rightarrow A_\mu(x)$, y así obtener

$$\int DA_\mu(x)e^{iS[A]} = \int D\Theta \int DA_\mu \delta^{(\infty)}[N(A)] \Delta_{FP} e^{iS[A]}. \tag{F.8}$$

Este último paso corresponde a realizar un cambio en la variable de integración y no a una transformación de norma. Nada depende ya del parámetro de norma $\Theta(x)$, así que la integración $\int D\Theta$ simplemente da el volumen del grupo de norma, que es justamente infinito debido a la redundancia que se quiere eliminar. Omitiendo este factor, vemos que para fijar la norma $N(A) = 0$, debemos trabajar no con $\int DA_\mu(x)e^{iS[A]}$ sino con

$$\int DA_\mu \delta^{(\infty)}[N(A)] \Delta_{FP} e^{iS[A]}. \tag{F.9}$$

La delta de Dirac en esta expresión cumple la función de restringir la integral sobre A_μ de tal manera que cada configuración física se incluye solamente una vez, y el determinante de Faddeev-Popov Δ_{FP} nos da la medida apropiada para esta integral restringida. Lo siguiente es elegir una norma particular, como por ejemplo la norma de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Sin embargo, en este caso resulta difícil eliminar la delta $\delta^{(\infty)}[N(A)]$. En lugar de tomar dicha norma es más conveniente considerar la norma de Lorentz modificada $N_\omega[A] \equiv \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)$ y escribir

$$\int DA_\mu(x)e^{iS[A]} = \int D\Theta \int DA_\mu \delta^{(\infty)}[\partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)] \Delta_{FP} e^{iS[A]}. \tag{F.10}$$

Esta fórmula es válida para cualquier función $\omega(x)$, así que podemos incluso integrar sobre $\omega(x)$ en ambos lados. Para obtener un resultado finito, conviene hacer esto con un peso gaussiano, con ancho ξ arbitrario

$$\begin{aligned}
& \int D\omega e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2(x)}{2\xi}} \int DA_\mu(x) e^{iS[A]} \\
&= \int D\omega e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2(x)}{2\xi}} \int D\Theta \int DA_\mu \delta^{(\infty)}[\partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)] \Delta_{FP} e^{iS[A]}, \\
&= \int D\Theta \int DA_\mu \Delta_{FP} e^{iS[A] - i \int d^4x \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi}}.
\end{aligned} \tag{F.11}$$

La integral gaussiana del lado izquierdo es simplemente una constante (que depende del parámetro ξ), y en el caso abeliano también lo es de Δ_{FP} . Definiendo

$$N_\xi = \left(\int D\omega e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2(x)}{2\xi}} \right)^{-1}, \quad Vol(U(1)) = \int D\Theta(x), \tag{F.12}$$

tenemos que

$$\int \frac{DA_\mu(x)}{Vol(U(1))} e^{iS[A]} = N_\xi \int DA_\mu \Delta_{FP} e^{iS[A] - i \int d^4x \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi}}. \tag{F.13}$$

Es decir, el efecto neto de eliminar la redundancia en el formalismo de la integral funcional es agregar a la densidad Lagrangiana el término que fija la norma $-(\partial_\mu A^\mu)^2/2\xi$ junto con el determinante de Faddeev-Popov Δ_{FP} .

F.1. Determinante de Faddeev-Popov

La evaluación del determinante de Faddeev-Popov puede ser obtenida mediante la representación integral de un determinante como una integral Gaussiana sobre variables que anticonmutan (variables de Grassmann), la cual fue introducida por F. Berezin en 1966 [84]. En el caso de una matriz dimensionalmente finita A_{mn} , $m, n = 1, \dots, N$, uno encuentra la expresión

$$\det A = \int e^{\bar{C}_m A_{mn} C_n} \Pi_n d\bar{C}_n dC_n, \tag{F.14}$$

donde (\bar{C}_n, C_n) es un conjunto de generadores del álgebra de Grassmann que satisfacen las reglas de anticonmutación

$$C_n C_m + C_m C_n = 0, \quad \bar{C}_n \bar{C}_m + \bar{C}_m \bar{C}_n = 0, \quad \bar{C}_n C_m + C_m \bar{C}_n = 0. \tag{F.15}$$

La integral de Berezin satisface las siguientes propiedades

$$\int C_n dC_n = 1, \quad \int dC_n = 0, \tag{F.16}$$

con relaciones similares para los generadores \bar{C}_n . La integral del lado derecho de la Ecu. (F.14) es igual al coeficiente del término $\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_n C_1 \cdots C_n$, que para el integrando $e^{\bar{C}_m A_{mn} C_n}$ puede demostrarse resulta precisamente igual a $\det A$.

En el caso que nos interesa tenemos que

$$\Delta_{FP} = \det(-\partial^2) = \int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\int d\tau \int d^3x (\partial_\mu \bar{C})(\partial^\mu C) \right), \quad (\text{F.17})$$

donde C y \bar{C} corresponden a los fantasmas de Faddeev-Popov.

Apéndice G

Evaluación de la función de partición

En este Apéndice se muestra el cálculo explícito de la función de partición a temperatura finita en el caso euclideo

$$Z = \int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\int d\tau \int d^3x (\partial_\mu \bar{C})(\partial^\mu C)\right) \int [dA^\mu] \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x L_{\text{eff}}\right). \quad (\text{G.1})$$

Dado que estamos interesados en el logaritmo de la expresión anterior, podemos dividir el cálculo en dos partes, una que involucra los fantasmas y otra donde no están incluidos. Empezamos calculando la segunda de estas cantidades

$$\int [dA^\mu] \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x L_{\text{eff}}\right) = \int [dA^\mu] \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2} A^T D A\right), \quad (\text{G.2})$$

donde $D_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \partial^2 + 2(k_F)_{\beta\nu\alpha\mu} \partial_\beta \partial_\alpha$. Como se mencionó anteriormente, los campos pueden ser escritos mediante una expansión de Fourier de la forma

$$A_\mu(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,p} e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_\mu(n, \mathbf{p}), \quad (\text{G.3})$$

donde $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ son las frecuencias de Matsubara, y el campo $A_\mu(\tau, \mathbf{x})$ satisface las condiciones de periodicidad $A_\mu(\beta, \mathbf{x}) = A_\mu(0, \mathbf{x})$. Sustituyendo esto en la acción euclidiana tenemos

$$\begin{aligned}
S_E &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2} A^T D A, \tag{G.4} \\
&= -\frac{\beta}{V} \sum_{n,p} \sum_{m,p'} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2} \tilde{A}^i(n, \mathbf{p}) D_{ij}^{(m, \mathbf{p}')} \tilde{A}^j(m, \mathbf{p}') e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} e^{i(\omega_m \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}')}, \\
&= -\frac{\beta}{V} \sum_{n,p} \sum_{m,p'} \frac{1}{2} \tilde{A}^i(n, \mathbf{p}) D_{ij}^{(m, \mathbf{p}')} \tilde{A}^j(m, \mathbf{p}') \int_0^\beta d\tau \int d^3x e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} e^{i(\omega_m \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}')}, \\
&= -\frac{\beta}{V} \sum_{n,p} \sum_{m,p'} \frac{1}{2} \tilde{A}^i(n, \mathbf{p}) D_{ij}^{(m, \mathbf{p}')} \tilde{A}^j(m, \mathbf{p}') \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_m + \omega_n)\tau} \int d^3x e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}},
\end{aligned}$$

donde $D_{ij}^{(m, \mathbf{p}')} = (\omega_m^2 + \mathbf{p}'^2) \delta_{ij} + 2(k_F)_{limj} p_l p'_m$, con $p'_\tau = \omega_m$ y $i, j, l, m = \tau, 1, 2, 3$. A su vez tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_m + \omega_n)\tau} &= \int_0^\beta d\tau e^{i\frac{2\pi}{\beta}(m+n)\tau} \quad (\phi = \frac{2\pi}{\beta}\tau), \tag{G.5} \\
&= \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m+n)\phi}, \\
&= \frac{\beta}{2\pi} \delta_{m, -n},
\end{aligned}$$

donde se ha ocupado la representación de la delta

$$\delta_{m, n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\phi} d\phi. \tag{G.6}$$

La segunda integral es la representación integral de la delta de Dirac

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}. \tag{G.7}$$

Tomando el límite

$$\sum_p \rightarrow V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \tag{G.8}$$

podemos escribir la acción euclidiana como

$$\begin{aligned}
S_E &= -\frac{\beta}{V} \sum_{p'} \sum_{n, m} V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \tilde{A}^i(n, \mathbf{p}) D_{ij}^{(m, \mathbf{p}')} \tilde{A}^j(m, \mathbf{p}') \beta \delta_{n, -m} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - (-\mathbf{p}')), \tag{G.9} \\
&= -\beta^2 \sum_{m, p'} \frac{1}{2} \tilde{A}^i(-m, -\mathbf{p}') D_{ij}^{(m, \mathbf{p}')} \tilde{A}^j(m, \mathbf{p}').
\end{aligned}$$

La condición de que A_μ sea real impone que $\tilde{A}^i(-m, -\mathbf{p}') = \tilde{A}^i(m, \mathbf{p}')$, con lo cual finalmente tenemos que

$$S_E = -\frac{\beta^2}{2} \sum_{n,p} \tilde{A}^i(n, \mathbf{p}) D_{ij}^{(n,\mathbf{p})} \tilde{A}^j(n, \mathbf{p}). \quad (\text{G.10})$$

Una vez obtenido lo anterior regresamos al cálculo

$$\begin{aligned} \int [dA^\mu] \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2} A^T D A\right) &= \int [dA^\mu] \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \sum_{n,p} \tilde{A}^i(n, \mathbf{p}) D_{ij}^{(n,\mathbf{p})} \tilde{A}^j(n, \mathbf{p})\right), \\ &= \prod_{n,p} \int [dA^\mu] \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \tilde{A}^i(n, \mathbf{p}) D_{ij}^{(n,\mathbf{p})} \tilde{A}^j(n, \mathbf{p})\right), \\ &= N \prod_{n,p} [\det(\beta^2 \cdot D^{(n,\mathbf{p})})]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

donde en la última línea se utilizó la integral de una función Gaussiana n-dimensional

$$\int \exp\left(-\frac{1}{2} x^T A x\right) d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}, \quad (\text{G.12})$$

y N es una constante de integración que puede ser omitida dado que es independiente de la temperatura.

La expresión que involucra los fantasmas

$$\int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\int d\tau \int d^3x (\partial_\mu \bar{C})(\partial^\mu C)\right), \quad (\text{G.13})$$

se calcula de manera similar asumiendo una expansión de Fourier de la forma

$$C(\mathbf{x}, \tau) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,p} e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{C}(n, \mathbf{p}). \quad (\text{G.14})$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\int d\tau \int d^3x (\partial_\mu \bar{C})(\partial^\mu C)\right) &= \int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\beta^2 \sum_{n,p} \bar{C}_{(n,\mathbf{p})} (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2) C_{(n,\mathbf{p})}\right), \\ &= \prod_{n,p} \int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\beta^2 \bar{C}_{(n,\mathbf{p})} (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2) C_{(n,\mathbf{p})}\right), \\ &= \prod_{n,p} \beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2), \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

donde a diferencia del caso anterior ahora se hizo uso de la integral gaussiana para variables fermiónicas

$$\int d\bar{C}dC e^{C^T A C} = \det A, \quad (\text{G.16})$$

de acuerdo a la Ecu. (F.14) del Apéndice F. De los resultados en las Ecs. (G.11) y (G.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln \int [d\bar{C}][dC] \exp\left(\int d\tau \int d^3x (\partial_\mu \bar{C})(\partial^\mu C)\right) + \ln \int [dA^\mu] \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x L_{\text{eff}}\right), \\ &= \text{Tr} \ln[\beta^2(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)] - \frac{1}{2} \ln[\text{Det}(\beta^2 D)], \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

que es el resultado que se presenta en la Ecu. (4.32) del texto.

Bibliografía

- [1] G. Amelino-Camelia et al., Nature (London), **393** 763 (1998).
- [2] V.A. Kostelecky, Proceedings of the Meeting on CPT and Lorentz Symmetry (World Scientific, 1999).
- [3] D. Colladay y V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55** 6760 (1997); Phys. Rev. D **58** 116002 (1998).
- [4] A. Abdo et al. (The Fermi LAT and Fermi GBM Collaboration), Science **323** 1688 (2009).
- [5] A. Abdo et al. (The Fermi LAT and Fermi GBM Collaboration), Nature **462** 331 (2009).
- [6] F. Aharonian et al. (The HESS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **101** 170402 (2008).
- [7] J. Albert et al. (The MAGIC Collaboration), Ap, J. **669** 862 (2007).
- [8] J. Albert et al. (The MAGIC Collaboration), Phys. Lett. B **669** 253 (2007).
- [9] D. Mattingly, Living Rev. Rel. **8** 5 (2005).
- [10] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, Annals of Phys. (N.Y.) **321** 150 (2006).
- [11] H.A. Morales-Técotl y L.F. Urrutia, AIP Conference Proceedings **857**, American Institute of Physics, 2006, editado por M.A. Pérez, L.F. Urrutia y L. Villaseñor.
- [12] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 4 (1961), S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 21 (1967).
- [13] O.W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
- [14] S. Weinberg, “*The Quantum Theory of Fields, Volumes I, II: Modern Application*”, Cambridge University Press, (1995) and (1996).
- [15] M. Srednicki, “*Quantum Field Theory*”, Cambridge University Press, (2006).
- [16] M. Peskin and D. Schroeder, “*An Introduction to Quantum Field Theory*”, Perseus Books L.L.C. Press, (1995).

- [17] M. Kaku, “*Quantum Field Theory - A Modern Introduction*”, Oxford University Press, (1993).
- [18] R. Lehnert, Phys. Rev. D **68**, 085003 (2003).
- [19] G. Amelino-Camelia, J.R. Ellis, N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos and S. Sarkar Nature 393 (1998); J.R. Ellis, N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos, A.S. Sakharov and E.K. Sarkisyan, Astropart. Phys. 25 402 (2006).
- [20] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. B **510** 255 (2001); J. Magueijo and L. Smolin, Phys. Rev. D **67**, 044017 (2003).
- [21] A. Connes and D. Kreimer, Commun. Math. Phys. **199** 203 (1998).
- [22] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909 032 (1999); S.N. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecky, C.D. Lane and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).
- [23] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, JHEP 0002, 020 (2000).
- [24] P. Schupp and J. You, JHEP **0808**, 107 (2008).
- [25] V.A. Kostelecký and S. Samuel, Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989).
- [26] Y. Nambu, Prog. Theor. Phys. Suppl. Extra, 190 (1968).
- [27] M. Carroll, H. Tam and I.K. Wehus, Phys. Rev. D **80**, 025020 (2009).
- [28] R. Bluhm and V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **71**, 065008 (2005).
- [29] M. Born and L. Infeld, Proc. R. Soc. (London) A144, 425 (1934).
- [30] J. Plebanski, “*Lecture on Non-Linear Electrodynamics*”, Nordita, Copenhagen, (1970).
- [31] J. Alfaro and L.F. Urrutia, Phys. Rev. D **81**, 025007 (2010).
- [32] J.D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, John Wiley and Sons, Inc., USA (1999).
- [33] J. Schwinger, “*Particles, Sources and Fields: Vol. 1*”, Perseus Books, Reading, Massachusetts, (1998).
- [34] C. Escobar and L. F. Urrutia, J. Math. Phys. **55**, 032902 (2014).
- [35] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, G. Thompson, “*Topological field theory*”, Phys. Rep. **209**, 129-340 (1991).
- [36] P.A.M. Dirac, “*Lectures on Quantum Mechanics*”, Yeshiva University Press (1964).
- [37] B. Altschul, Q. Bailey, and V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **81**, 065028 (2010).

- [38] Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland Publishing, N.Y., (1977); ver también, J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Ed. Hermann, Paris, (1903).
- [39] V. A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello and J. M. Salim Phys. Lett. B **482** 134-140 (2000).
- [40] C. Barcelo, S. Liberati and M. Visser, Class. Quant. Grav. **18** : 3595-3610 (2001).
- [41] E. A. Ivanov and V. I. Ogievetsky, Lett. Math. Phys. **1**, 309 (1976).
- [42] J.D. Bjorken, Ann. Phys. (N.Y.) **24**, 174 (1963); *ibid.*, Proceedings of the Fifth Meeting on CPT and Lorentz Symmetry (CPT'10), edited by V. A. Kostelecký, World Scientific, Singapore, 2011, p. 1.
- [43] G. S. Guralnik, Phys. Rev. **136B** 1404 (1964); G.S. Guralnik, Phys.Rev. Lett. **13**, 295 (1964).
- [44] C. G. Callan, S. R. Coleman, and B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2247 (1969); S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969); D. V. Volkov, Sov. J. Part. Nucl. **4**, 3 (1973).
- [45] E. T. Tomboulis, Phys. Rev. D **84**, 084018 (2011).
- [46] Y. Nambu and Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961).
- [47] P.R. Phillips, Phys. Rev. **146**, 966 (1966).
- [48] H.C. Ohanian, Phys. Rev. **184**, 1305 (1969).
- [49] P. Krauss and E.T. Tomboulis, Phys. Rev. D **66**, 045015 (2002).
- [50] A.T. Azatov and J.L. Chkareuli, Phys. Rev. D **73** 065026 (2006).
- [51] J. L. Chkareuli and Z. R. Kephuladze, Phys. Lett. B **644**, 212 (2007).
- [52] J. L. Chkareuli and J. G. Jejelava, Phys. Lett. B **659**, 754 (2008).
- [53] J. L. Chkareuli, C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. B **821**, 65 (2009).
- [54] J. L. Chkareuli, J. G. Jejelava and G. Tatishvili, Phys. Lett. B **696**, 124 (2011).
- [55] J. L. Chkareuli, C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Phys. Rev. Lett. **87**, 091601 (2001).
- [56] J. L. Chkareuli, C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. B **796**, 211 (2008).
- [57] T. Kugo and S. Uehara, Nucl. Phys. B **197**, 378 (1982); D. Nemeschansky, C. Preitschopf and M. Weinstein, Ann. Phys (NY) **183**, 226 (1988).

- [58] O.J. Franca, R. Montemayor and L.F. Urrutia, Phys. Rev. D **85**, 085008 (2012).
- [59] C. A. Escobar and L. F. Urrutia, Phys. Rev. D **92** , 025013 (2015).
- [60] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, Phys. Lett. B **102**, 27 (1981); I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, Phys. Lett. B **120**, 166 (1983); I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, Phys. Rev. D **28**, 2567 (1983).
- [61] G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **4**, 1067 (1987).
- [62] J. Frenkel, Phys. Rev. D **13**, 2325 (1976).
- [63] T. Matsuki, Phys. Rev. D **19**, 2879 (1979).
- [64] R. Cawley, Phys. Rev. Lett. **42**, 413 (1979); Phys. Rev. D **21**, 2988 (1980).
- [65] A. Frenkel, Phys. Rev. D **21**, 2986 (1980).
- [66] Ö. F. Dayi, Phys. Lett. B **228** 3 (1989).
- [67] P. Mukherjee and A. Saha, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 4305-4315 (2009).
- [68] J. I. Kapusta and C. Gale, “*Finite Temperature Field Theory Principles and Applications*”, Cambridge Univ. Press, 2006.
- [69] J. I. Kapusta, “*Finite Temperature Field Theory*”, Cambridge Univ. Press, 1989; M. Le Bellac, “*Thermal Field Theory*”, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [70] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “*Statistical Physics*”, 3rd ed., Pergamon Press, 1980; K. Huang, “*Statistical Mechanics*”, 2nd ed., Wiley, 1987.
- [71] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [72] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. D **66** 056005 (2002).
- [73] P. Wolf, S. Bize, A. Clairon, G. Santarelli, M.E. Tobar, and A.N. Luiten, Phys. Rev. D **70**, 051902(R) (2004); P.L Stanwix, M.E. Tobar, P. Wolf, C.R. Locke, and E.N. Ivanov, Phys. Rev. D **74** 081101(R) (2006); V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); V.A. Kostelecký and N. Russell, Rev. Mod. Phys. **83** 11-31 (2011).
- [74] V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **99**, 011601 (2007).
- [75] Don Colladay and V.A. Kostelecký, Phys. Lett. B **511**, 209-217 (2001); M. Perez, JHEP **0104** 32 (2001); V.A. Kostelecký C.D. Lane, and A.G. Pickering, Phys. Rev. D **65**, 056006 (2002); M. Cambiaso, R. Lehnert, and R. Potting, Phys. Rev. D **90**, 065003 (2014); M. Cambiaso, R. Lehnert, and R. Potting, Phys. Rev. D **85**, 085023 (2012); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); M. Schreck, Phys. Rev. D **86**, 065038 (2012); M. Schreck, Phys.

- Rev. D **89**, 085013 (2014); F.R. Klinkhamer and M. Schreck, Nucl. Phys. B **848** 90-107 (2011); R. Casana, M.M. Ferreira Jr., A.R. Gomes, and P.R. Pinheiro, Eur. Phys. J. C **62**, 573 (2009); F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008); F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 117901(A) (2008); A. Kobakhidze and B.H.J. McKellar, Phys. Rev. D **76**, 093004 (2007).
- [76] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., and J.S. Rodrigues, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008).
- [77] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., J.S. Rodrigues, and Madson R.O. Silva, Phys. Rev. D **80**, 085026 (2009); R. Casana, M.M. Ferreira Jr., and Madson R.O. Silva, Phys. Rev. D **81**, 105015 (2010).
- [78] V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004).
- [79] L.D. Faddeev and V.N. Popov, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967); L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, “*Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory*”, 2nd edition (Benjamin, Reading, 1990).
- [80] A. Das, “*Field Theory: a Path Integral Approach*”, 2nd edition (World Scientific Pub. Co.,Singapore, 2006).
- [81] S.A. Gogilidze, A.M. Khvedelidze, and V.N. Pervushin, Phys. Lett. B **363**, 76 (1995).
- [82] V.A. Kostelecký and N. Russell, Rev. Mod. Phys. **83**, 11-31 (2011).
- [83] A. Guijosa, Notas del curso Teoría Cuántica de Campos I, II (2011) <http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/indice.html>.
- [84] F. A. Berezin, “*The method of second quantization*”, Pure and Applied Physics, vol. 24, Academic Press, New York (1966).