UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COMBINATORIA INFINITA Y TEOREMAS TIPO RAMSEY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

JARETH ZULEYCA TORRES REYES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. OSVALDO ALFONSO TÉLLEZ NIETO
2015

Ciudad Universitaria, D. F.

Datos del alumno
Torres
Reyes
Jareth Zuleyca
5533146441
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
307285807

Datos del Tutor
Dr.
Osvaldo Alfonso
Téllez
Nieto

Datos del Sinodal 1
Dr.
David José
Fernández
Bretón

Datos del Sinodal 2
Dr.
Rodrigo Jesús
Hernández
Gutiérrez

Datos del Sinodal 3
M. en C.
Rafael
Rojas
Barbachano

Datos del Sinodal 4
M. en C.
Manuel Alejandro
Lara
Mary

Datos del trabajo escrito
Combinatoria Infinita y Teoremas tipo Ramsey
85p.
2015

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Osvaldo Alfonso Téllez Nieto por su dedicación en la dirección de este trabajo, por brindarme su confianza, paciencia y libertad en todo momento. Por sus enseñanzas dentro de las aulas de clase y reafirmar mi pasión por la Teoría de Conjuntos. Por todo, muchas gracias. Quiero agradecer a los sinodales por cada una de sus importantes aportaciones. Particularmente, al Dr. David José Fernández Bretón por su comprensión, interés y bonitas explicaciones. Al Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez por formar parte de este trabajo desde un comienzo y su disposición para ayudarme siempre. Al M. en C. Rafael Rojas Barbachano por el tiempo que me dedicó y brindarme toda su amabilidad y paciencia. Finalmente, al M. en C. Manuel Alejandro Lara Mary por sus pláticas, siempre interesantes.

Gracias a todos los Profesores con los que tuve el gusto de tomar clase, a lo largo de estos años impulsaron mi deseo y gusto por aprender cosas nuevas. Así como la inquietud de compartir sus enseñanzas. Especialmente agradezco al Dr. José Alfredo Amor por acercarme a tan bella rama de la Matemática, La Teoría de Conjuntos, por siempre mostrar pasión y entusiasmo frente a la clase. Al M. en C. Alejandro Bravo por sus enseñanzas y su alegría. A la Dra. Diana Avella y al M. en C. José Cruz por su interés en que los alumnos aprendamos, por su paciencia. Al Dr. Carlos Gerardo Paniagua por extenderme su confianza, su apoyo en todo tiempo y permitirme trabajar a su lado. A Alejandra Bravo, Javier Hernández y Julia Ramos por mostrarme el camino que quería

seguir. A José Frías, Alfredo Nolasco y Jorge López porque desde pequeña confiaron en mí.

A las personas con las que he tenido la oportunidad de compartir un poco de lo que soy y me han permitido formar parte de sus vidas, muchas gracias.

A Omar Jesús Franca, a Erick Rodríguez por brindarme su apoyo más allá del aula de clase. A Ricardo por compartir conmigo siempre una sonrisa y ser un gran apoyo para una de las personas más importantes de mi vida. A Janet Galicia por todas esas risas compartidas. A Mónica Hernández porque a pesar de los años me sigue brindando un lugar en su vida. A Pedro Juárez por su entusiasmo, por escuchar y buscar siempre hacerme reír. A Enrique Fermat por todas las discusiones y alegrías que pasamos juntos. A Victor Donjuán por ser una persona tan entrañable en mi vida, por brindarme su ayuda y su confianza. A Dany González por comprenderme tan bien y darme mis mejores recuerdos de la secundaria, por ser un excelente amigo.

A Hector Saavedra, gracias por compartirme sus sueños, por abrirme las puertas de su hogar, por alegrar mis días en momentos tan difíciles, por ser tan importante en mi vida.

Por todas sus enseñanzas, por dejarme entrar en su vida de una manera tan especial, por aquel abrazo, por preocuparse, por creer en mí, por todos los momentos vividos. Gracias al M. en C. Rubén Molina.

Agradezco a Montserrat Vite por haber hecho este recorrido conmigo, es imposible imaginarme sin ella, sin nuestras locuras y todas nuestras aventuras. Gracias por ser tan buena compañera de trabajo, por siempre esperarme, por impulsarme y creer en mí. Pero sobre todas las cosas, gracias por ser más que mi amiga, por ser mi hermana, por compartir tu vida conmigo y estar presente en todo momento.

A Xavier Jimaréz, con quién aprendí que una persona puede llegar a ser indispensable sin que te des cuenta. Por enseñarme que una sonrisa puede ser suficiente para confiar plenamente. Por prestar atención cuando me tocaba pasar lista, por recordarme que una de las más grandes alegrías consiste en dar vueltas por la vida, por las pláticas interminables. Por hacerme parte de su familia. Por esforzarse en comprenderme. Por su entrega, su espera y su dedicación. Por hacerme desear que las cosas sean para siempre.

A mis primos por formar parte de mis más grandes alegrías. A mi tía Luz Reyes por cuidar de mi madre. A mi tío René Ramírez por hacer mi infancia tan divertida. A mis tíos Oscar Sánchez y Yolanda Reyes por ser un ejemplo para mí. A mi tío Pancho por esos días en que nos visitaba y nos llenaba de felicidad a mi hermano y a mí. A mi tía Rosa, por ser un apoyo en todo momento y confiar en mí, a José por quererme tanto.

A mis abuelitos, José Reyes e Hilaria Pineda, por todo su esfuerzo a lo largo de la vida, por brindarnos un hogar.

A mis abuelitos, Casildo Torres y Adelina Nava, por enseñarme a soñar y luchar por un futuro mejor. Por ser un ejemplo de integridad, de bondad y de entrega. Por preocuparse y ocuparse de todos nosotros.

A mi Maximiliano, por ser un compañero tan leal y brindarme todo su cariño. A Micky por ser un gatito encantador y llenarme de cariños cuando me siento triste. A Tommy por su amor desenfrenado y alegrarme con sus travesuras. A Mitsu por ser tan cariñosa. Y a Cucu por sus cantos y ser paciente con los gatos.

Gracias a mis hermanos; Josué, porque sin él mi niñez no tendría sentido, gracias por ser mi compañero en tan duros momentos, por esperarme en aquellas carreras y darme la mano para que no me quedara atrás, por mostrarme lo más hermoso de su persona. A América, por ser la alegría de la casa, sin ella no estábamos completos, su llegada le dio dirección a nuestras vidas.

A las personas cuya vida han dedicado a mis hermanos y a mí, a quienes no han reparado en esfuerzos y sacrificios para brindarnos lo mejor, a mis Padres: Martin Torres a quien crecí viendo dar lo mejor de sí cada día, quién me enseño que el esfuerzo es la clave para alcanzar lo que uno desea. Que no importa lo que se presente, siempre se puede ser más fuerte y salir adelante. Quién, desde muy pequeña, me hizo saber que la educación era el mayor tesoro que él podía brindarme. Elia Reyes, cuyo ejemplo de entrega y dedicación por lo que se ama parece inalcanzable. Cuyo esfuerzo parece inagotable. Quien me enseñó a creer y confiar. A ustedes toda mi admiración, son mi más grande orgullo.

Finalmente, por cada uno de ustedes y por este trabajo, agradezco a Dios.

Introducción

Frank P. Ramsey demostró que para cualquier coloración[1] finita de los subconjuntos de cardinalidad n del conjunto de los números naturales, podemos encontrar un subconjunto infinito de ω homogéneo[2] para la coloración [F.P]. Este teorema, publicado en 1930, es conocido como el teorema de Ramsey y tiene una gran relevancia pues el estudio de algunas de sus variaciones dieron lugar a una importante rama de la teoría combinatoria, la Teoría de particiones, también llamada Cálculo de Particiones o Teoría de Ramsey, la cual presenta interesantes resultados, referentes a particiones de conjuntos finitos e infinitos. En este trabajo mostraremos principal interés a aquellos que consideran particiones de conjuntos infinitos. Las técnicas usadas para cada uno de estos dos casos tienden a ser totalmente diferentes, por lo que esta teoría se encuentra dividida en dos campos. Para conjuntos finitos se usan técnicas clásicas de combinatoria aunque también, hay una variedad de problemas abiertos que tienen que ver con computabilidad y eficiencia de algoritmos para hacer cálculos. Mientras que para particiones de conjuntos infinitos, al entrar en consideración la cardinalidad del conjunto para el cual se toma la partición, los resultados se ven relacionados con los problemas indecidibles en la Teoría de Conjuntos.

[1] F es una coloración de A si y sólo si F es una función cuyo dominio es A y su imagen es un cardinal. Si la imagen de F es un cardinal finito (infinito) decimos que F es una coloración finita(infinita).

[2] Sea F una coloración de los subconjuntos de cardinalidad κ de un conjunto X. $H \subseteq X$ es un conjunto homogéneo para F, si es constante bajo F.

Las generalizaciones del teorema de Ramsey que estudiaremos, buscan establecer si es posible encontrar para cualquier coloración de los subconjuntos de cierta cardinalidad de un conjunto X, un subconjunto H de X con alguna cardinalidad específica que sea homogéneo para la coloración o bien, bajo qué condiciones podemos lograr esto. En uno de los primeros intentos de generalizar el teorema de Ramsey, Sierpinski demostró en 1933, que si consideramos un conjunto X de cardinalidad $2^{\aleph_0}$, podemos encontrar F, una $2-$coloración de los subconjuntos de cardinalidad 2 de X, $[X]^2$, para la cual no existe $H \subseteq X$ de cardinalidad $\aleph_1$ homogéneo para la coloración, es decir, $F''[H]^2$ no es constante para ningún $H \subseteq X$ de cardinalidad $\aleph_1$. Siendo éste uno de los primeros casos para los cuales podríamos hablar negativamente de una generalización del teorema de Ramsey.

En 1943, Paul Erdös, quien es considerado uno de los principales exponentes de la Teoría de Particiones, con la colaboración de Tarski demostró que la existencia de un conjunto X con cardinalidad κ, donde κ es un cardinal no numerable, tal que para cualquier $2-$coloración de los subconjuntos de cardinalidad 2 de X existe $H \subseteq X$ de cardinalidad κ homogéneo para la coloración, implica que κ es un cardinal fuertemente inaccesible, es decir, que la existencia de dicho X no puede ser demostrada en ZFE.

En 1956, Erdös y Richard Rado, presentaron el artículo "*A partition calculus in set theory*" [E.R], el cual es considerado como la primera obra que plantea un estudio de la teoría de Particiones y también, en este mismo año introdujeron la notación "flecha" que sería adoptada para simplificar las generalizaciones del teorema de Ramsey, la cual establece: dados κ, λ, ν y μ cardinales, la relación $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{\nu}_{\mu}$ se cumple si y sólo si para cualquier $\mu-$coloración de los subconjuntos de cardinalidad ν de κ, existe $H \subseteq \kappa$ de cardinalidad λ homogéneo para la coloración. Erdös y Tarski vuelven a presentar, en 1961, una caracterización de los cardinales que cumplen la relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$, la cual afirma que κ cumple dicha relación si y sólo si κ es fuertemente inaccesible y tiene la *propiedad de árbol*.

La Teoría de Ramsey ha cobrado mayor interés en las últimas décadas por sus múltiples aplicaciones a otras ramas de las matemáticas como la Topología, la Teoría Descriptiva de Conjuntos, Espacios de Banach, entre otras.

El objetivo de este trabajo es presentar un panorama de la Teoría de Ramsey, mostrar el desarrollo de los teoremas clásicos de ésta, así como algunos de los resultados que nos permiten observar cómo ha interactuado con algunas de las ramas mencionadas anteriormente.

En el capítulo 1, introducimos la herramienta de la Teoría de Conjuntos que necesitamos para los capítulos restantes, así como las nociones básicas sobre la Teoría de Particiones que serán de utilidad. En el capítulo 2, presentamos el desarrollo de los teoremas clásicos de la Teoría de Particiones que fueron establecidos por Erdös, Hajnal, Rado y Sierpinski.

En el capítulo 3, estudiamos varios tipos de ultrafiltros sobre el conjunto de los números naturales que tienen relación con el teorema de Ramsey. Comenzamos por los ultrafiltros de Ramsey, los cuales fueron estudiados entre 1970 y 1971. Frederick William Galvin demostró que, bajo la hipótesis del continuo, dichos ultrafiltros existen y se demuestra que los ultrafiltros se pueden caracterizar mediante el teorema de Ramsey. Además presentamos el teorema de Hindman tanto en su versión clásica así como la versión conjuntista, que en cierta forma muestra una aplicación de los teorema tipos Ramsey, al buscar conjuntos homogéneos con cierta propiedad para particiones finitas de ω y de los subconjuntos finitos de ω. Finalmente introducimos los ultrafiltros $\sigma-$completos y $\kappa-$completos que tienen una estrecha relación con los cardinales medibles, los cuales estudiamos en el capítulo 4, pues todo cardinal medible resulta ser un cardinal de Ramsey, es decir, los cardinales que cumplen con la relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^{<\omega}$, que fueron estudiados en 1962 por Erdös y Hajnal y pueden ser acotados superiormente por los cardinales de Rowbottom los cuales también cumplen cierta relación de particiones.

Finalmente en capítulo 5, estudiamos la relación $\omega \longrightarrow (\omega)_2^\omega$, que bajo el axioma de elección es falsa. En este capítulo nos dedicamos a proporcionar condiciones para que dicha relación sea verdadera, para ello dotamos al conjunto de los subconjuntos infinitos de ω con una topología que proporciona importantes propiedades a dicho conjunto como espacio topológico, que nos permiten encontrar conjuntos que serán de utilidad para nuestro propósito, los conjuntos Ramsey y completamente Ramsey. Estas nociones aunadas con los conceptos de aceptar y rechazar, estudiadas por Galvin y Prikry, enriquecen el capítulo.

Índice general

1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a mencionar, a *grosso modo*, parte de la herramienta de la teoría de conjuntos que será necesaria para el desarrollo de este trabajo, así, como introducir notación referente a la teoría combinatoria y al estudio de las relaciones de particiones.

1.1. Teoría de Conjuntos

La axiomatización de Zermelo-Fraenkel (ZF) está constituida por los axiomas del conjunto vacío, extensionalidad, conjunto del par, de unión, conjunto potencia, esquema de separación, de infinito, esquema de reemplazo y de buena fundación, esto puede ser revisado en [Hern] y [ACM].

Dados dos conjuntos, X y Y, se define $X \times Y$ como el conjunto de pares ordenados (x, y), tales que $x \in X$ y $y \in Y$. Si r es un subconjunto de $X \times Y$ decimos que r es una relación de X en Y. Al conjunto de los $x \in X$ para los cuales existe algún $y \in Y$ tal que el par $(x, y) \in r$ lo llamamos dominio de r y lo denotamos por $Dom(r)$. La imagen de r será el conjunto de los $y \in Y$ para los cuales existe algún $x \in X$ tal que el par $(x, y) \in r$ y la denotamos por $Im(r)$.

Una función f, es una relación tal que para todo $x \in Dom(f)$, existe un único y tal que (x, y) pertenece a la relación f, escribimos $f(x) = y$ para indicar que x está relacionado con y bajo f. Si el dominio de f es el conjunto X y la imagen es un subconjunto del conjunto Y, entonces escribimos $f : X \longrightarrow Y$ para denotar que f es una función de X en Y. Si la imagen de f es Y, decimos que f es suprayectiva y si para cualesquiera $x, y \in Dom(f)$ distintos, $f(x)$ es distinto de $f(y)$, llamamos a f inyectiva. Dado $Y' \subseteq Y$, definimos la imagen inversa de Y' como el conjunto de los $x \in X$ tales que $f(x) \in Y'$ y la denotamos por $f^{-1}[Y']$. Por otro lado, si $X' \subseteq X$, definimos la imagen de X' bajo f como el conjunto de los $y \in Y$ tales que existe algún $x \in X'$ para el cual $f(x) = y$ y denotamos a este conjunto por $f[X']$.

Si X y Y son dos conjuntos, decimos que X está dominado por Y si y sólo si hay una función inyectiva de X en Y.

También estaremos interesados en cierta clase de relaciones binarias de un conjunto en sí mismo, es decir, en relaciones que son subconjuntos de $X \times X$, para algún conjunto X.

Sea X un conjunto y r una relación sobre X.

- X es un *conjunto parcialmente ordenado* con respecto a r, si la relación cumple ser antirreflexiva, es decir, para todo $x \in X$, $(x, x) \notin r$, y además r es transitiva, esto es, para cualesquiera $x, y, z \in X$, si $(x, y) \in r$ y $(y, z) \in r$, entonces $(x, z) \in r$. En cuyo caso llamamos a $\langle X, r\rangle$ orden parcial.

- Si para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $(x, y) \in r$ o $(y, x) \in r$ o $x = y$ y sólo una, decimos que X es un *conjunto con tricotomía*.

- Si X es un conjunto parcialmente ordenado y además es un conjunto con tricotomía decimos que X es un *conjunto totalmente ordenado* y que $\langle X, r\rangle$ es un orden total.

- X es un *conjunto bien ordenado* si es parcialmente ordenado y cualquier $X' \subseteq X$ no vacío tiene elemento mínimo, es decir, existe $x \in X'$ tal que para todo $y \in X'$ se tiene que $(x, y) \in r$ o $x = y$. En este caso llamamos a $\langle X, r\rangle$ un buen orden.

Si $\langle X, r\rangle$ es un orden total definimos lo siguiente.

- X es un conjunto sin extremo derecho si y sólo si para todo $x \in X$ existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in r$. Definimos análogamente que X sea un conjunto sin extremo izquierdo. Decimos que X es sin extremos si y sólo si X carece de ambos extremos.

- Si $Y \subseteq X$, decimos que Y es acotado superiormente si existe $x \in X$ tal que para todo $y \in Y$, $(y, x) \in r$ o bien $x = y$. Llamamos a x cota superior. Y es acotado inferiormente si existe $x \in X$ tal que para todo $y \in Y$, $(x, y) \in r$ o bien $x = y$ y llamamos a x cota inferior. Y es acotado si y sólo si tiene cota superior e inferior.

- Si $Y \subseteq X$, diremos que Y tiene un elemento máximo si existe $y' \in Y$ tal que para todo $y \in Y$, $(y, y') \in r$ o bien $y = y'$, llamamos a y' r-máximo. Análogamente podemos definir r-mínimo.

Sean $\langle X, r\rangle$ y $\langle Y, r'\rangle$ dos órdenes totales. Llamamos a $f : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo si es una función biyectiva tal que para cualesquiera x, $y \in X$, $(x, y) \in r$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in r'$. Escribimos $\langle X, r\rangle \approx \langle Y, r'\rangle$ para indicar que existe un isomorfismo entre ellos y decimos que los órdenes son isomorfos.

Si $\langle X, r\rangle$ y $\langle Y, r'\rangle$ son dos órdenes totales, diremos que tienen el mismo tipo de orden si existe un isomorfismo entre ellos. Notemos que no definimos el tipo de orden para un orden total, sin embargo posteriormente definiremos el tipo de orden para buenos órdenes.

Dado un conjunto X, llamamos a $f : X \longrightarrow \bigcup X$, una función de elección si para todo $x \in X$ no vacío, $f(x) \in x$. El axioma de elección (AE), afirma que para todo conjunto de conjuntos no vacíos existe una función de elección. Dos versiones equivalentes de este axioma son las siguientes.

- *Lema de Zorn (ZORN).*

  Para cada $\langle X, r\rangle$, orden parcial no vacío, tal que todo subconjunto totalmente ordenado está acotado superiormente, existe un elemento $r-$maximal, es decir, existe $x \in X$ tal que para todo $y \in X$, (x, y) no es un elemento de la relación.

- *Teorema del Buen Orden (TBO).*

  Para cada conjunto X existe $r \subseteq X \times X$ tal que $\langle X, r\rangle$ es un buen orden.

Si a la axiomatización ZF le agregamos el axioma de elección escribimos ZFE.

Decimos que X es un conjunto transitivo si para todo $x \in X$ se cumple que $x \subseteq X$.

Un conjunto es un número natural si y sólo si es un conjunto transitivo, bien ordenado por la pertencia y además todo subconjunto no vacío tiene un elemento máximo. A los números naturales los denotamos con las letras k, m, n y al conjunto de los números naturales con ω.

La definición de los números naturales surge como una necesidad de formalizar el concepto de contar conjuntos con elementos finitos y en este proceso está involucrado el poder ordenar a los elementos de dicho conjunto. Podríamos preguntarnos si esto es posible para cualquier conjunto infinito, sin importar qué tan grande sea. La respuesta es afirmativa y es a través de los números ordinales y del teorema del buen orden que podemos llevar a cabo una generalización de un número natural que nos ayudará a ordenar y contar los elementos de un conjunto infinito.

Definición 1.1. *Un ordinal es un conjunto transitivo bien ordenado por la relación de pertenencia.*

Dados α y β dos ordinales diremos que $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$.

De la definición tenemos que todo número natural es un ordinal. También se puede ver que la relación de pertenencia brinda un orden parcial a la clase de ordinales. De hecho, se puede demostrar que la clase de los ordinales está bien ordenada por la pertenencia.

Decimos que α es un ordinal sucesor si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. En cuyo caso decimos que α es el sucesor de β y lo denotamos por $\beta + 1$, así $\beta + 1 = \alpha$. En cambio, si α es un ordinal distinto del conjunto vacío y no es sucesor decimos que α es un ordinal límite. Se puede demostrar que α es un ordinal límite si y sólo si $\alpha = \bigcup \alpha$.

Dos resultados muy importantes en la teoría de conjuntos son el teorema del mínimo ordinal y el teorema de enumeración. El primero afirma que cualquier clase no vacía de ordinales tiene un elemento mínimo y el segundo que todo buen orden es isomorfo a un único ordinal. Estos teoremas son de gran utilidad para dar una definición formal de lo que llamamos un cardinal.

El teorema de enumeración, permite definir el tipo de orden de un buen orden como el único ordinal al cual es isomorfo.

Podremos extender tanto el principio de inducción como el teorema de recursión de los números naturales a un principio de inducción ordinal y a un teorema de recursión transfinita, lo cual no es de extrañarse pues los ordinales son objetos que resultan de la generalización de estos números. A continuación enunciamos las versiones más usadas en el trabajo.

- *Principio de inducción ordinal.*

  Sea ϕ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con n variables libres. Si para todo α ordinal, se cumple que si β satisface ϕ para todo $\beta < \alpha$, entonces α cumple ϕ. Entonces, todo ordinal satisface ϕ.

- *Teorema de recursión transfinita.*

  Sean G y H funcionales[1] del universo y X un conjunto. Entonces podemos definir un único funcional, F, tal que el dominio de F es la clase de los ordinales, $F(0) = X$, $F(s(\alpha)) = G(F(\alpha))$ y $F(\gamma) = H(F[\gamma])$ con γ un ordinal límite.

Decimos que X y Y tienen el mismo cardinal si existe una función biyectiva entre ellos. Sin embargo esta definición sólo nos habla de cuando dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos, no nos dice qué es un cardinal. Si X es un conjunto finito, es biyectable con un número natural y cualquier otro conjunto con la misma cantidad de elementos será biyectable con ese mismo natural. Entonces para los conjuntos finitos podemos definir el cardinal de X como el número natural al que es biyectable. Por otro lado, si X es infinito, por el teorema del buen orden, sabemos que X es bien ordenable. El teorema de enumeración garantiza que existe un único ordinal al que es isomorfo este buen orden. Sin embargo, al ser X infinito podemos dar diferentes buenos órdenes que no tienen por qué ser isomorfos al primer orden que dimos. Pero, al considerar la clase de todos los ordinales biyectables a X, existe un mínimo ordinal y podemos definir a éste, como el cardinal de X. Así, el cardinal de X será el mínimo ordinal biyectable con X.

Definición 1.2. *Un cardinal es un ordinal que no es biyectable con ningún ordinal menor que él.*

La clase de los cardinales es también una clase bien ordenada con la pertenencia.

Se puede demostrar que todo cardinal es un ordinal límite.

Cantor demostró que la cardinalidad del conjunto de los números naturales es estrictamente menor a la del conjunto de los reales y se puede demostrar que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Cantor conjeturó además que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. A esta afirmación se le conoce como la hipótesis del continuo y la denotamos por $H.C.$

[1] Un funcional es una clase que se comporta como función.

Kurt Gödel probó que la hipótesis del continuo no puede ser refutada asumiendo la axiomática de Zermelo - Fraenkel, con el axioma de elección, (ZFE). Por otro lado, Paul Cohen probó que la hipótesis del continuo no puede ser demostrada asumiendo los axiomas de ZFE. Es decir, la hipótesis del continuo es independiente. En la búsqueda de una respuesta a si era válida o no esta hipótesis se investigó cuándo dos ordinales terminaban del mismo modo, este concepto es el de cofinalidad.

Definición 1.3.

- *Dado X e Y conjuntos tales que $\langle X \cup Y, < \rangle$ es un orden total, decimos que X y Y son $<-$ confinales si y sólo si para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $x \leq y$ y para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y \leq x$.*

- *Si $\langle X, < \rangle$ es un orden total y $Y \subseteq X$, decimos que Y es $<-$confinal con X si y sólo si para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $x \leq y$.*

- *Sean α y β ordinales. α es cofinal en β si y sólo si existe una función $f : \alpha \longrightarrow \beta$ tal que $f[\alpha]$ es $\in$-confinal con β. En este caso decimos que f es una función cofinal de α en β.*

Definimos la cofinalidad de β, un ordinal, como el mínimo ordinal α, tal que α es cofinal en β y la denotamos por $cf(\beta)$. Diremos que β es regular si es igual a su cofinalidad y si no es así decimos que es singular. Se puede demostrar que si κ es un cardinal infinito, su cofinalidad es el mínimo cardinal λ, tal que κ se puede escribir como una unión de λ subconjuntos de κ, cada uno de cardinalidad menor que κ. De esto se sigue que κ es regular si no puede ser escrito como una unión de menos que κ subconjuntos con cardinalidad menor que κ.

Se puede demostrar que para cualquier β ordinal existe una función $f : cf(\beta) \longrightarrow \beta$ tal que f es cofinal y estrictamente creciente. Además, dados α, β ordinales con β un ordinal límite y $f : \alpha \longrightarrow \beta$. Entonces $f[\alpha]$ es no acotado en β si y sólo si $f[\alpha]$ es $\in$-confinal con β.

Si κ es un cardinal tal que para todo $\lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$, decimos que κ es un cardinal fuerte. κ es un cardinal fuertemente inaccesible[2] si κ es un cardinal fuerte y regular. Una equivalencia de estos cardinales afirma que κ es fuertemente inaccesible si y sólo si para cualesquiera $\mu, \lambda < \kappa$, $\mu^\lambda < \kappa$.

La existencia de cardinales fuertemente inaccesibles, fue sugerida por Zermelo en 1930. En 1938, Tarski formula el Axioma de Inaccesibles, que asegura la existencia de dichos cardinales. Gödel

[2] A los cardinales fuertemente inaccesibles con frecuencia se les llama cardinales inaccesibles.

sostenía que la implementación de este axioma mostraba que el sistema de axiomas usado hasta entonces, para la Teoría de Conjuntos, era incompleto. Asumiendo el modelo $ZFE+$ *Axioma de Inaccesibles*, Solovay muestra que existen modelos donde todos los subconjuntos o bien muchos subconjuntos de $\mathbb{R}$, son Lebesgue medibles. Estas condiciones serían refutadas sólo si se pudiera refutar la existencia de los cardinales inaccesibles. Se demuestra que bajo ZFE no se puede demostrar que existan cardinales inaccesibles.[Kune]

Asumir la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles se puede defender por medio de la uniformidad y potenciabilidad.[P.M]

1.2. Relaciones de particiones

Sea λ un cardinal. Una λ-coloración será una función suprayectiva F, que tiene como imagen a λ. Si λ es un cardinal finito, diremos que F es una coloración finita y si λ es infinito, hablaremos de coloraciones infinitas. Si F es una λ-coloración, ésta determina una partición de su dominio en λ conjuntos, para esto basta tomar la imagen inversa de cada elemento de λ. Inversamente, si tenemos una partición de un conjunto en λ conjuntos podemos asignar a ésta una λ coloración. Pasaremos indistintamente entre estos dos conceptos.

Dado un conjunto A escribiremos $[A]^\kappa$ para denotar a la familia de subconjuntos de A que tienen cardinalidad κ.

Dado un conjunto A y F una λ-coloración de $[A]^\kappa$, diremos que $H \subseteq A$ es un conjunto homogéneo para F, si existe $\alpha \in \lambda$ tal que $F[[H]^\kappa] = \{\alpha\}$.

Observemos que la notación usada para referirnos a la imagen de $[H]^\kappa$ bajo F resulta un tanto engorrosa, por ello, de ahora en adelante, cuando hablemos de la imagen de un conjunto del estilo $[A]^\kappa$, usaremos $F''[A]^\kappa$ para referirnos a su imagen. Sin embargo, si nos referimos a un conjunto A usaremos la notación dada con anterioridad.

Podemos dar el concepto de homogeneidad para particiones. Si $\mathcal{P}$ es una partición en λ conjuntos de $[A]^\kappa$, $H \subseteq A$, es un conjunto homogéneo para $\mathcal{P}$, si existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $[H]^\kappa \subseteq P$.

A lo largo de este trabajo, nuestro principal interés será tomar coloraciones, finitas o infinitas, que tengan como dominio a la familia de subconjuntos de cierta cardinalidad de un conjunto A y ver cuándo es posible encontrar un subconjunto de A, de alguna cardinalidad específica que sea homogéneo. Haremos uso de una notación que resultará de utilidad para simplificar esta situación.

Dados $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ cardinales, diremos que la relación

$$\kappa \longrightarrow (\lambda)^{\nu}_{\mu}$$

es válida si y sólo si para toda F, $\mu-$coloración de $[A]^{\nu}$, donde A es un conjunto con cardinalidad κ, existen $\alpha \in \mu$ y H subconjunto de A de cardinalidad λ, tales que, $F''[H]^{\nu} = \{\alpha\}$, es decir, existe $H \subseteq A$ de cardinalidad λ homogéneo para F.

En general, evitaremos tomar al conjunto A y tomaremos directamente al cardinal κ, pues al ser A un conjunto de cardinalidad κ, A es biyectable con κ y una coloración para uno determina una para el otro. Entonces, en nuestras notaciones referentes a relaciones de particiones trabajaremos con cardinales $\kappa, \lambda, \ldots$, a menos que se especifique lo contrario.

En los teoremas que estudiaremos para establecer la veracidad de relaciones de este tipo frecuentemente recurriremos al uso de árboles, por ello daremos algunos resultados sobre ellos.

Definición 1.4.

1. *Un árbol es un conjunto T parcialmente ordenado con respecto a una relación $<_T$ tal que para cualquier $t \in T$ el conjunto de predecesores de t, $\{x \in T : x <_T t\}$, es un conjunto bien ordenado.*

2. *Definimos el α-ésimo nivel de T como el conjunto de los elementos en el árbol cuyo conjunto de predecesores tiene tipo de orden α. Denotamos por N_α al nivel α-ésimo.*

3. *La altura de T es el menor ordinal α, para el que $N_\alpha = \emptyset$.*

4. *Una cadena en T es un subconjunto totalmente ordenado de T.*

5. *Una rama en T será una cadena maximal de T.*

A continuación demostraremos el Teorema de König para árboles infinitos numerables.

Teorema 1.5 (König). *Si $\langle T, <_T \rangle$ es un árbol tal que $|T| = \omega$ y todos sus niveles son finitos, entonces existe una rama infinita en T.*

Demostración. Supongamos que $T = \omega$.

Sea $\langle T, <_T \rangle$ un árbol como en la hipótesis. Veremos que podemos hallar una rama infinita en T de manera recursiva.

Sea $a_0 \in N_0$ tal que a_0 tiene una cantidad infinita de sucesores en T. a_0 existe, pues N_0 es finito y T infinito. Entre los sucesores inmediatos de a_0, es decir, los sucesores que están en N_1 debe existir al menos un elemento de T que tenga una cantidad infinita de sucesores en T, pues los sucesores inmediatos de a_0 son finitos por hipótesis. Sea $B_{a_0} = \{b \in N_1 : a_0 <_T b \wedge b \text{ tiene infinitos sucesores en } T\}$. Tomemos $a_1 = min(B_{a_0})$. Supongamos definidos para $n \in \omega$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tal que a_n tiene infinitos sucesores en T, entonces dado que a_n tiene una cantidad finita de sucesores inmediatos, existe algún $a_{n+1} = min\{b \in N_{n+1} : a_n <_T b \wedge b \text{ tiene infinitos sucesores en } T\}$ sucesor inmediato con infinitos sucesores en T. De esta forma construimos una sucesión infinita de elementos en T. Si $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ resulta ser maximal, hemos encontrado la rama que buscábamos, si no es así, podemos extender la sucesión a un conjunto totalmente ordenado, maximal, que resulta ser infinito por contener a la sucesión. Así, hallamos una rama infinita en T.

Si $T \neq \omega$, al ser biyectable ω con T, podemos elegir los términos a_n en términos de los elementos elementos de ω y la biyección.

□

Veremos que este teorema será de gran utilidad para establecer la existencia de conjuntos homogéneos de cardinalidad numerable para ciertas coloraciones.

2

Sobre el Teorema de Ramsey

El propósito de este capítulo es presentar lo que se conoce como el teorema de Ramsey, así como algunos resultados que surgen como consecuencia de la generalización de este teorema.

El Principio del Casillero establece que para cualquier partición finita de un conjunto infinito, necesariamente existirá un elemento en la partición que es infinito, es decir, si A es un conjunto infinito y F es una k-coloración de A, entonces existen $H \subseteq A$ infinito e $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tales que $F[H] = \{i\}$. Si $|A| = \omega$, podemos concluir que existe un conjunto homogéneo infinito numerable para cualquier k-coloración de $[A]^1$, es decir, la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^1_k$ es válida.

El teorema de Ramsey surge como una generalización de este principio, pues en el no sólo se consideran subconjuntos de un elemento de un conjunto infinito, sino de cualquier cardinalidad finita. Existe también una versión finitista de dicho teorema, el cual demostraremos como un corolario del teorema de Ramsey.

2.1. Teorema de Ramsey

La demostración del teorema de Ramsey resulta ser un tanto larga, por ello presentaremos una parte de ésta como un lema.

Lema 2.1. *Para cualquier $n \in \omega$, la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^n_2$ se cumple. Es decir, para toda F, 2-coloración de $[\omega]^n$ existe $H \subseteq \omega$ infinito y homogéneo para F.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n.

Si $n = 1$, una 2-coloración de $[\omega]^1$ determina una partición de $[\omega]^1$ en dos conjuntos. El Principio del Casillero nos asegura que al menos uno de los conjuntos debe ser infinito, por lo tanto, existe $H \subseteq \omega$ homogéneo infinito para la coloración dada.

Supondremos que para $n \in \omega$ la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^n_2$ se cumple. Demostraremos que para $n+1$ la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^{n+1}_k$ también es válida.

Sea F una 2-coloración de $[\omega]^{n+1}$. Sabemos por el teorema de König que en un árbol infinito cuyos niveles son todos finitos existe una rama infinita. Buscaremos hacer uso de este teorema construyendo un árbol infinito cuyos nodos estén en ω y que satisfaga las condiciones del teorema para finalmente extraer un conjunto homogéneo de alguna rama infinita. Denotaremos por N_α al nivel α-ésimo del árbol que iremos contruyendo.

Para cada $i < n$, definimos $N_i = \{i\}$. Así, $N_{n-1} = \{n-1\}$. Diremos que $\omega \setminus n = \{j \in \omega : j \geq n\}$ es el conjunto de sucesores potenciales de $n-1$. Dividiremos a este conjunto en dos partes; $B_0 = \{j \geq n : F(\{0, 1, \ldots, n-1, j\}) = 0\}$ y $B_1 = \{j \geq n : F(\{0, 1, \ldots, n-1, j\}) = 1\}$. Tomemos $j_0 \in B_0$ tal que si $j \in B_0$, entonces $j_0 \leq j$ y $j_1 \in B_1$ tal que si $j \in B_1$, entonces $j_1 \leq j$. Definimos $N_n = \{j_0, j_1\}$, por lo tanto, $n-1$ tiene a lo más dos sucesores inmediatos en el árbol. $B_0 \setminus \{j_0\}$ será el conjunto de sucesores potenciales de j_0 y $B_1 \setminus \{j_1\}$ el conjunto de sucesores potenciales de j_1. Ya que B_0 o B_1 es infinito, alguno de los conjuntos de sucesores potenciales también es infinito.

Supongamos definidos para $m > n$, el nivel m-ésimo con cardinalidad finita y para cada $t \in N_m$ el conjunto de sucesores potenciales de t, digamos B_t. Definiremos el nivel $m+1$ indicando cuáles son los sucesores inmediatos de cada elemento en el nivel m.

Sea $t \in N_m$, denotaremos por C_t al conjunto de predecesores de t en el orden del árbol y dividiremos a B_t de la siguiente forma: para cualesquiera $i, j \in B_t$ definimos $i \sim j$ si y sólo si $F(x \cup \{i\}) = F(x \cup \{j\})$ para todo $x \in [C_t]^n$.

Veamos que $\sim$ define una relación de equivalencia:

i) $i \sim i$, ya que $F(x \cup \{i\}) = F(x \cup \{i\})$ para todo $x \in [C_t]^n$ por ser F una función.

ii) si $i \sim j$ por definición tenemos que $F(x \cup \{i\}) = F(x \cup \{j\})$ y por la simetría de la igualdad se sigue que $F(x \cup \{j\}) = F(x \cup \{i\})$, por lo tanto, $j \sim i$.

iii) si $i \sim j$ y $j \sim l$ tenemos que $F(x \cup \{i\}) = F(x \cup \{j\})$ y $F(x \cup \{j\}) = F(x \cup \{l\})$, de la transitividad de la igualdad se sigue que $F(x \cup \{i\}) = F(x \cup \{l\})$, por lo tanto, $i \sim l$.

Por definición, $|C_t| = m$, entonces $|[C_t]^n| = \binom{m}{n}$ y dado que para cada $x \in [C_t]^n$ cumple que $F(x \cup \{t\}) = 0$ o bien $F(x \cup \{t\}) = 1$, existen a lo más $2^{\binom{m}{n}}$ clases de equivalencia. Denotaremos por $[T_i]$ a la clase de equivalencia de $T_i \in B_t$ con $i \leq 2^{\binom{m}{n}}$.

Para cada $i \leq 2^{\binom{m}{n}}$, sea t_i el menor elemento de $[T_i]$. Definimos $\{t_i : i \leq 2^{\binom{m}{n}}\}$ como el conjunto de sucesores de t en el nivel N_{m+1}. Así, t tiene a lo sumo $2^{\binom{m}{n}}$ sucesores inmediatos. Para cada t_i con $i \leq 2^{\binom{m}{n}}$, sucesor inmediato de t, $[T_i] \setminus \{t_i\}$ será el conjunto de sucesores potenciales de t_i.

De esta manera, cada $t \in N_m$ tiene una cantidad finita de sucesores inmediatos, por lo tanto, el nivel $m + 1$ es finito. Además, por construcción, existe $t^* \in N_m$, tal que B_{t^*} es infinito. Así, alguna de las clases de equivalencia inducidas por $\sim$ en B_{t^*} resulta ser infinita, entonces al menos un sucesor en inmediato de t^* tendrá un conjunto infinito de sucesores potenciales.

Hemos construido un árbol infinito cuyos niveles son todos finitos. El Teorema de König nos garantiza que existe una rama infinita R en el árbol. Además R satisface que: dado $x \in [R]^n$, $F(x \cup \{j\})$ toma el mismo valor para todo j que se encuentre en la rama por encima de x, esto por construcción. Diremos para cada $x \in [R]^n$ que x es de tipo 0 si $F(x \cup \{j\}) = 0$ y de tipo 1 si $F(x \cup \{j\}) = 1$. Esto divide a $[R]^n$ en dos clases, por la hipótesis de inducción, existe $H \subseteq R$ infinito tal que todos los elementos de $[H]^n$ son del mismo tipo. Es decir, para cualquier $x \in [H]^n$, $F(x \cup \{j\}) = \{i\}$ con $i \in \{0, 1\}$, para todo $j \in R$ que está por encima de x en el árbol, en particular para los elementos de H que cumplen esa propiedad. Así, $F''[H]^{n+1} = \{i\}$. Por lo tanto, H es homogéneo para F.

Hemos probado que la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^n_2$ se cumple. $\square$

Teorema 2.2 (Ramsey)**.** *Para cualesquiera $n, k \in \omega$ se cumple la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^n_k$.*

Demostración. Procederemos mediante una doble inducción, sobre el tamaño de la coloración y sobre la cardinalidad de los subconjuntos de ω para demostrar que efectivamente la relación se satisface.

Si $k = 1$. No hay nada que hacer. Pues al tener una 1-coloración de $[\omega]^n$, basta considerar $H = \omega$ para encontrar el conjunto homogéneo que satisfaga la relación.

Consideremos $k = 2$. El lema anterior garantiza que para todo $n \in \omega$ la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^n_2$ se cumple.

Supondremos ahora que para cualquier $l \leq k$ se cumple la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^n_l$.

Consideremos $F : [\omega]^n \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k\}$ y definimos G una 2-coloración de $[\omega]^n$ como sigue:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) = k \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por la hipótesis de inducción, existe $H \subseteq \omega$ infinito y homogéneo para G. Si $G''[H]^n = \{0\}$, H será un conjunto homogéneo infinito para F. Sin embargo, si $G''[H]^n = \{1\}$, entonces $F \restriction [H]^n$ es una k-coloración y por hipótesis existe $H^* \subseteq H$ tal que H^* es infinito y homogéneo, es decir, existe $i \in k$ tal que $F''[H^*]^n = \{i\}$. Por lo tanto existe un conjunto homogéneo infinito para F. $\square$

Corolario 2.3 (Ramsey finito)**.** *Para cualesquiera k, r, m números naturales existe $n \in \omega$ tal que $n \longrightarrow (m)^r_k$*[1].

Demostración. Supongamos que el enunciado no es válido. Entonces existen $k, r, m \in \omega$ tales que para todo $n \in \omega$ tal que $r < n$, existe $F_n : [n]^r \longrightarrow k$ para la cual no hay conjunto homogéneo de cardinalidad m.

Definiremos un árbol infinito sobre $A = \{F_n \restriction_{[j]^r} : j \leq n < \omega\}$ con niveles finitos de la siguiente manera. Sea $N_0 = \{F_n \restriction_{[j]^r} : j < r < n \in \omega\}$, $N_1 = \{F_n \restriction_{[r]^r} : r < n \in \omega\}$ y para $i > 1$ $N_i = \{F_n \restriction_{[j]^r} : j \leq n < \omega \wedge j = r + (i-1)\}$. El orden para A está dado por $\subsetneq$, es decir, dadas $f, g \in A$, $f <_A g$ si y sólo si $f \subsetneq g$. Ya que para cada $j \in \omega$ las funciones de $[j]^r$ en k son finitas, los niveles del árbol también lo son. Así, por el teorema de König existe una rama R que es infinita. Considerando $\bigcup R$ tenemos una función $F : [\omega]^r \longrightarrow k$, esto pues R es una cadena de elementos en A. Por el teorema de Ramsey sabemos existe $H \in [\omega]^\omega$ homogéneo para F. Sea $H' \subseteq H$ tal que

[1] Al tipo de prueba que damos a este corolario se le conoce como argumentos "de compacidad."

$|H'| = m$ y g una función de R tal que $dom(g) = [j]^r$ y $H' \subseteq j$, entonces $g = F_n \restriction_{[j]^r}$ para algún $j \leq n$, y H' es un conjunto homogéneo para F_n, pero para F_n no existía conjunto homogéneo de dicha cardinalidad. Por tanto, existe $n \in \omega$ tal que $n \longrightarrow (m)^r_k$. □

2.2. Grandes Cardinales y el teorema de Ramsey

Hemos estudiado la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^n_k$ donde consideramos k-coloraciones para $[\omega]^n$ en las cuales vimos es posible extraer conjuntos homogéneos infinitos. Tomemos ahora un conjunto A infinito no numerable y consideremos k-coloraciones de $[A]^n$, preguntémonos si es posible extraer conjuntos homogéneos infinitos no numerables para dichas coloraciones. El Teorema de Ramsey nos garantiza la existencia de $H \subseteq A$ numerable y homogéneo, pues si F es una k-coloración de los subconjuntos de cardinalidad n de A podemos considerar la restricción de F, a un conjunto $A^* \subseteq A$ numerable y hacer uso del teorema de Ramsey para encontrar un conjunto H homogéneo para dicha restricción que a su vez será un conjunto homogéneo para F de cardinalidad numerable. Sin embargo, con respecto a nuestra pregunta, nada sabemos hasta ahora que nos garantice la existencia de dichos conjuntos homogéneos no numerables.

Esta búsqueda de conjuntos homogéneos no numerables nos llevará a encontrar cardinales para los cuales la relación $\kappa \longrightarrow (\lambda)^\nu_\mu$ no se satisface.

Antes de ver dichos resultados, estableceremos de manera formal un hecho ya mencionado.

Lema 2.4. *Si $\kappa \longrightarrow (\lambda)^\nu_\mu$ y $\kappa' > \kappa$, entonces $\kappa' \longrightarrow (\lambda)^\nu_\mu$.*

Demostración. Sea $F : [\kappa']^\nu \longrightarrow \mu$ una coloración de $[\kappa']^\nu$. Consideramos la restricción de F a $[\kappa]^\nu$. Por hipótesis, existirá un conjunto homogéneo de cardinalidad λ para $F \restriction_{[\kappa]^\nu}$ que resulta ser homogéneo para F. □

Teorema 2.5 (Sierpinski,1933)**.** *La relación $2^{\aleph_0} \to (\aleph_1)^2_2$ no se cumple.*

Demostración. Demostraremos que existe una 2-coloración de $[2^{\aleph_0}]^2$ para la cual no existe $H \subseteq 2^{\aleph_0}$ de cardinalidad $\aleph_1$ que sea homogéneo.

Identificaremos a los elementos de $2^{\aleph_0}$ con las sucesiones numerables de ceros y unos. Así, si $\alpha \in 2^{\aleph_0}$ denotaremos por f_α a la sucesión que le corresponde en ${}^{\omega}2$. Además, dados $\alpha, \beta \in 2^{\aleph_0}$ y sus respectivas sucesiones correspondientes f_α, f_β, escribimos $f_\alpha \ll f_\beta$ para indicar que f_α es menor que f_β en el orden lexicográfico, esto es, para el primer $n \in \omega$ tal que f_α y f_β difieren tenemos que $f_\alpha(n) = 0$ y $f_\beta(n) = 1$.

Definiremos $F : [2^{\aleph_0}]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$ como sigue:

$$F(\{\alpha, \beta\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\alpha < \beta \text{ si y sólo si } f_\alpha \ll f_\beta) \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Para demostrar que F no tiene conjuntos homogéneos de la cardinalidad requerida bastará comprobar que en el orden lexicográfico de las ω-sucesiones de ceros y unos no hay cadenas ascendentes con tipo de orden $\aleph_1$ ni cadenas descendientes con tipo de orden $\aleph_1$ invertido, pues de existir $H \subseteq 2^{\aleph_0}$, con $|H| = \aleph_1$ e $i \in \{0, 1\}$ tal que $F''[H]^2 = \{i\}$, nos llevaría a encontrar dichas cadenas. Por ejemplo si $i = 0$, para todo $\alpha, \beta \in H$, $F(\{\alpha, \beta\}) = 0$, entonces $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$ sería una cadena ascendente con tipo de orden $\aleph_1$. Análogamente, si suponemos que $F''[H]^2 = \{1\}$ encontraríamos una cadena descendiente con tipo de orden $\aleph_1$ invertido.

Supongamos lo contrario, sea $\mathcal{C} = \{f_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ una cadena con tipo de orden $\aleph_1$ en el orden lexicográfico de las ω-sucesiones de ceros y unos, es decir, si $\alpha < \beta < \aleph_1$, entonces $f_\alpha \ll f_\beta$. Para cada $\alpha < \aleph_1$ tomemos n_α el primer lugar en el que f_α y $f_{\alpha+1}$ difieren. Así, $f_\alpha(n_\alpha) = 0$, $f_{\alpha+1}(n_\alpha) = 1$ y $f_\alpha(i) = f_{\alpha+1}(i)$ para todo $i < n_\alpha$. Como $\aleph_1$ es regular podemos afirmar que existe $n \in \omega$ y $D \subseteq \mathcal{C}$ tal que D tiene cardinalidad $\aleph_1$ y para toda $f_\alpha \in D$ se tiene que $f_\alpha(n) = 0$, $f_{\alpha+1}(n) = 1$ y $f_\alpha(i) = f_{\alpha+1}(i)$ para todo $i < n$. Pero si $\alpha < \beta$ y $f_\alpha, f_\beta \in D$ tenemos que $f_\alpha \restriction_{n+1} \neq f_\beta \restriction_{n+1}$ pues si no fuera así tendríamos que $f_\beta \ll f_{\alpha+1}$ lo cual no es posible. Obtuvimos, entonces una colección de $\aleph_1$ sucesiones distintas de ceros y unos de longitud $n + 1$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe tal cadena.

Análogamente podemos ver que no existen cadenas descendientes de tipo de orden $\aleph_1$ invertido.

Por lo tanto, $2^{\aleph_0} \longrightarrow (\aleph_1)^2_2$ no se satisface. $\square$

Corolario 2.6. *La relación* $\aleph_1 \longrightarrow (\aleph_1)^2_2$ *no se cumple.*

Demostración. Es consecuencia del Lema 2.4 y el teorema 2.5.

□

Centraremos ahora nuestra atención en las relaciones de tipo $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ con $\kappa > \omega$. Veremos que el suponer que existe un cardinal que satisface dicha relación es bastante fuerte.

Teorema 2.7 (Erdös-Tarski, 1943). *Si* $\kappa > \omega$ *y* $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$, *entonces* κ *es fuertemente inaccesible.*

Demostración. i) Veamos que κ es regular.

Consideremos $g : cf(\kappa) \longrightarrow \kappa$ una función monótona cuya imagen es no acotada en κ. Definiremos una coloración de $[\kappa]^2$ como sigue, para $\alpha, \beta \in \kappa$

$$F(\{\alpha,\beta\}) = \begin{cases} 0 & \text{si existe } \xi < cf(\kappa) \text{ tal que } \alpha < g(\xi) < \beta \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Tomemos $H \subseteq \kappa$ homogéneo para F con cardinalidad κ. Demostraremos que $F''[H]^2 = \{0\}$. Sea $\alpha \in H$. Dado que la imagen de g es no acotada en κ, existe $\xi < cf(\kappa)$ tal que $\alpha < g(\xi)$. Además, H es no acotado en κ, de lo contrario, existiría $\gamma \in \kappa$ tal que $H \preceq \gamma$ y por tanto, $|H| \neq \kappa$. Al ser H no acotado en κ, existe $\beta \in H$ tal que $g(\xi) < \beta$. Por lo tanto, $F(\{\alpha,\beta\}) = 0$ y dado que H es homogéneo, F toma valor 0 en cualquier otro par de elementos de H.

Definamos ahora $f : H \longrightarrow cf(\kappa)$ tal que para cada $\alpha \in H$, $f(\alpha) = \xi_\alpha$ donde $\xi_\alpha = min\{\xi < cf(\kappa) : \alpha < g(\xi)\}$. Dado que $F''[H]^2 = \{0\}$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in H$ tal que $\alpha < \beta$ se tiene que $\alpha < g(\xi_\alpha) < \beta$. Así, $g(\xi_\alpha) \neq g(\xi_\beta)$. Por lo tanto, f es inyectiva. Entonces $\kappa \leq cf(\kappa)$ y dado que $cf(\kappa) \leq \kappa$, concluimos que κ es regular.

ii) Veamos ahora que κ es fuerte.

Supongamos lo contrario. Sea $\lambda < \kappa$ el menor cardinal tal que $2^\lambda \geq \kappa$. Fijaremos para cada $\alpha < \kappa$ una función $f_\alpha : \lambda \longrightarrow \{0,1\}$ de modo que $\alpha \longrightarrow f_\alpha$ sea inyectiva y definimos

$$F(\{\alpha,\beta\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\alpha < \beta \text{ si y sólo si } f_\alpha \ll f_\beta) \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Tomemos $H \subseteq \kappa$ homogéneo para F de cardinalidad κ. Mostraremos que para cada $\xi < \lambda$ existe $\alpha_\xi < \kappa$ tal que para cualesquiera $\beta, \gamma \in H \setminus \alpha_\xi$, $f_\beta \restriction_\xi = f_\gamma \restriction_\xi$. Es decir, $\{f_\beta \restriction_\xi : \beta \in H \wedge \beta > \alpha_\xi\}$ tiene un solo elemento.

Sea $\xi < \lambda$. Dado que $2^\xi < \kappa$, existe un conjunto $H^* \subseteq H$ de cardinalidad κ tal que $\{f_\beta \restriction_\xi : \beta \in H^*\}$ tiene un solo elemento. Veamos que, si β_1 y β_2 son elementos de H^* tales que $\beta_1 < \beta_2$, entonces para cada $\beta \in H$ tal que $\beta_1 < \beta < \beta_2$ se cumple que $f_\beta \restriction_\xi = f_{\beta_1} \restriction_\xi$. Dado que H es homogéneo se tiene que $F(\{\beta_1, \beta\}) = F(\{\beta, \beta_2\}) = \{i\}$. Así, si $i = 0$, entonces $f_{\beta_1} \ll f_\beta \ll f_{\beta_2}$. Supongamos que existe $\gamma < \xi$ tal que $f_{\beta_1}(\gamma) \neq f_\beta(\gamma)$. Si $f_\beta(\gamma) < f_{\beta_1}(\gamma)$, entonces $f_\beta \ll f_{\beta_1}$ y por lo tanto $F(\{\beta_1, \beta\}) = 1$, contradiciendo la homogeneidad de H. Por tanto, $f_{\beta_1}(\gamma) < f_\beta(\gamma)$ y dado que $f_{\beta_2}(\gamma) = f_{\beta_1}(\gamma)$, $f_{\beta_2} \ll f_\beta$, entonces $F(\{\beta, \beta_2\}) = 1$, contradiciendo nuevamente la homogeneidad de H. Por lo tanto, $f_{\beta_1} \restriction_\xi = f_\beta \restriction_\xi$. De manera análoga, si $i = 1$, $f_{\beta_2} \ll f_\beta \ll f_{\beta_1}$, por lo tanto, $f_{\beta_1} \restriction_\xi = f_\beta \restriction_\xi$. Considerando a α_ξ como el primer elemento de H^*, terminamos de probar lo que deseabamos.

Sea $\delta = \bigcup\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\}$. Dado que $\lambda < \kappa$ y κ es regular, se cumple que $\delta < \kappa$. Entonces para cada α, β mayores que δ tenemos que para todo $\xi < \lambda$, $f_\alpha \restriction_\xi = f_\beta \restriction_\xi$, por lo tanto, $f_\alpha = f_\beta$. Lo cual contradice que la aplicación $\alpha \longrightarrow f_\alpha$ es inyectiva. Concluimos que κ efectivamente es fuerte.

Por lo tanto, κ es fuertemente inaccesible. □

Corolario 2.8. *En ZFC no puede ser demostrada la existencia de un cardinal no numerable κ, tal que $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$.*

Demostración. Recordemos que en ZFC, suponiendo que es consistente, no puede demostrarse la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles, de este hecho se sigue el resultado. □

Estudiaremos ahora una forma de caracterizar la relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ con propiedades de árboles.

Definición 2.9. *Sea κ un cardinal infinito. Un* κ-árbol *es un árbol de tamaño κ cuyos niveles son todos de cardinalidad menor que κ.*

Diremos que κ tiene la propiedad de árbol *si todo κ-árbol tiene una rama de cardinalidad κ.*

Recordemos que el teorema de König afirma que *un árbol infinito numerable cuyos niveles son finitos tiene una rama infinita*, de lo cual podemos concluir que ω tiene la propiedad de árbol.

Lema 2.10. *Si κ es fuertemente inaccesible y tiene la propiedad de árbol, entonces para todo $n \in \omega$ y todo $\lambda < \kappa$ se cumple $\kappa \longrightarrow (\kappa)^n_\lambda$*

Demostración. La prueba será similar a la del lema 2.1. Dada una λ-coloración de $[\kappa]^n$, construiremos un κ-árbol sobre κ, la inaccesibilidad de κ será usada para definir los niveles del árbol que son límites.

Procederemos por inducción sobre n.

Si $n = 1$ por la regularidad de κ se satisface el resultado.

Supongamos que el resultado es válido para $n \in \omega$ y sea F una λ-coloración de $[\kappa]^{n+1}$ con $\lambda < \kappa$.

Construiremos recursivamente un κ-árbol sobre κ, como antes, denotaremos por N_α al nivel α-ésimo. Para cada $i < n$ definimos $N_i = \{i\}$ y sea $B_{(n-1)} = \kappa \setminus n$ el conjunto de sucesores potenciales de $n-1$. Como en la prueba del lema 2.1, cada que pongamos algún nodo t en el árbol diremos quién es el conjunto B_t y definiremos los sucesores inmediatos de t partiendo a B_t en las clases de equivalencia inducidas por la relación $\sim$, definida como: dados $\alpha, \beta \in B_t$, $\alpha \sim \beta$ si y sólo si para todo $x \in [C_t]^n$ tenemos que $F(x \cup \{\alpha\}) = F(x \cup \{\beta\})$ donde C_t, nuevamente, es el conjunto de predecesores de t en el árbol junto con t. Pondremos como sucesores inmediatos de t a el menor elemento de cada una de las clases de equivalencia. Por lo tanto, t tendrá a lo sumo tantos sucesores inmediatos como funciones de $[C_t]^n \longrightarrow \lambda$, es decir, $|{}^{[C_x]^n}\lambda|$. Dado que $|[C_x]^n| < \kappa$ y $\lambda < \kappa$ y κ es fuerte, $|{}^{[C_x]^n}\lambda| < \kappa$.

Por lo tanto, si el nivel α ha sido definido con menos que κ elementos, el nivel $\alpha + 1$ también tendrá menos que κ elementos.

Ahora, si α es un ordinal límite, supongamos que hemos definido el nivel δ-ésimo para todo $\delta < \alpha$. Dado un conjunto $\mathcal{L}$ totalmente ordenado que contenga exactamente un nodo de cada nivel menor que α, al cual llamaremos camino de longitud α, consideraremos $\bigcap\{B_x : x \in \mathcal{L}\}$, si esta intersección es vacía, los elementos de $\mathcal{L}$ no tendrán sucesores en el nivel α-ésimo, de lo contrario ponemos al menor elemento y de la intersección como el único sucesor de los elementos de $\mathcal{L}$ en el nivel α y $B_y = \bigcap\{B_x : x \in \mathcal{L}\} \setminus \{y\}$ será el conjunto de sucesores potenciales de y. El nivel α-ésimo así construido tiene a lo sumo tantos elementos como caminos de longitud α tiene el árbol formado por los nodos de los niveles menores que α, es decir a lo más $\prod_{\delta<\alpha} |N(\delta)|$. Dado que para cada $\delta < \lambda$, $|N_\delta| < \kappa$, $\prod_{\delta<\alpha} |N(\delta)| \leq \prod_{\delta<\alpha} \kappa = \kappa^\lambda$ y κ es fuerte, $\prod_{\delta<\alpha} |N(\delta)| < \kappa$. Entonces la cardinalidad de $N_\alpha < \kappa$.

Hemos terminado la construcción del árbol, el cual es un κ-árbol y por hipótesis existe una rama R de cardinalidad κ, de la cual extraeremos el conjunto homogéneo.

Dado $x \in [R]^n$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in R$ que estén por arriba de x tenemos que $F(x \cup \{\alpha\}) = F(x \cup \{\beta\})$. Así, $[R]^n$ queda dividido en λ partes y como $|R| = \kappa$, existe $\xi < \lambda$ y $H \subseteq R$ con $|H| = \kappa$ tal que dado $x \in [H]^n$ y para todo $\alpha \in R$ mayor que x, se cumple que $F(x \cup \{\alpha\}) = \xi$. Por lo que H es homogéneo para F. $\square$

Teorema 2.11 (Erdös- Tarski, 1961). *Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Entonces $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ si y sólo si κ tienen la propiedad de árbol.*

Demostración. Supongamos que se cumple $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$, veamos que κ tiene la propiedad de árbol. Sea $(A, <_A)$ un κ-árbol, podemos suponer que $\kappa = A$, así los nodos de A serán los ordinales menores que κ relacionados por el orden parcial $<_A$. Definamos una extensión de dicho orden a un orden total $<^*$ como sigue: $\alpha <^* \beta$ si y sólo si $\alpha <_A \beta$ o en el primer nivel del árbol donde α y β tienen predecesores distintos, digamos α' y β' respectivamente se tiene que $\alpha' < \beta'$.

Definamos ahora $F : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$ como sigue,

$$F(\{\alpha, \beta\}) = \begin{cases} 0 \text{ si } (\alpha < \beta \text{ si y sólo si } \alpha <^* \beta) \\ 1 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Sea H subconjunto homogéneo para F tal que $|H| = \kappa$.

Consideremos el siguiente conjunto:

$R = \{\alpha \in \kappa : \alpha$ tiene κ sucesores en el árbol pertenecientes a $H\}$.

Dado que cada nivel en A tiene cardinalidad menor que κ y la altura del árbol es κ, R tiene al menos un elemento en cada nivel del árbol. Por lo que $|R| = \kappa$. Demostraremos que cualesquiera dos elementos en R son comparables respecto a $<_A$ y de ello se seguirá que R es la rama que buscamos. Sean $\alpha, \beta \in R$ incomparables. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha <^* \beta$, entonces hay un primer nivel donde α, β tienen predecesores diferentes α' y β' respectivamente. Como α' y β' tienen κ sucesores en H podemos hallar $\gamma < \delta < \eta$ elementos de H tales que $\alpha' <_A \gamma$, $\alpha' <_A \eta$ y $\beta' <_A \delta$. Entonces $\gamma <^* \delta$ y $\eta <^* \delta$, por lo que $F(\{\gamma, \delta\}) = 0$ pues $\gamma < \delta$ y $\gamma <^* \delta$ y $F(\{\eta, \delta\}) = 1$ pues $\delta < \eta$ y $\eta <^* \delta$, lo cual contradice la homogeneidad de H. Por lo tanto, todo los elementos en R son comprables respecto a A. Así, R es una rama en κ de cardinalidad κ, por lo tanto, $(A, <_A)$ tiene la propiedad de árbol.

Con esto damos por terminada la prueba del teorema. $\square$

Corolario 2.12. *Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *La relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ se satisface.*
2. *κ tiene la propiedad de árbol.*
3. *La relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)^n_\lambda$ es válida para todo $n \in \omega$ y $\lambda < \kappa$.*

A los cardinales que satisfacen alguna de estas condiciones se les conoce como cardinales débilmente compactos.

3

Ultrafiltros y teoremas tipo Ramsey

El estudio de los ultrafiltros ha venido a formar una herramienta importante para ciertas ramas de la matemática y la Teoría de Ramsey no es la excepción. Nuestro interés en este capítulo será el dar una visión de cómo los ultrafiltros sobre ω se han visto relacionados con los teoremas de particiones. Mostraremos cómo cierta clase de estos objetos pueden caracterizarse mediante el teorema de Ramsey y estudiaremos también un importante teorema de la Teoría Combinatoria, el teorema de Hindman, el cual nos brinda una aplicación de los teoremas de coloración. Finalizaremos el capítulo introduciendo otro tipo de ultrafiltros que serán de utilidad más adelante.

3.1. Ultrafiltros

Dado X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X, decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X si:

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $\mathcal{F}$ es cerrado bajo supraconjuntos, es decir, si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, es decir, si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Si el conjunto vacío pertenece al filtro, entonces $\mathcal{F}$ tendría que ser la potencia de X. A este filtro le llamamos el *filtro trivial*[1] y en general buscaremos estudiar filtros no triviales. Si $A \subseteq X$, entonces la familia de los subconjuntos de X que contienen a A es un filtro sobre X, a este *filtro se le conoce como el filtro generado por* A o *filtro principal*.

Si $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X y existe un único filtro que contiene propiamente a $\mathcal{F}$ y éste es el filtro trivial, decimos que $\mathcal{F}$ es un *ultrafiltro* sobre X. De la definición se sigue que un ultrafiltro no puede ser el filtro trivial.

Lema 3.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{U}$ un filtro no trivial sobre X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

1. *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.*

2. *Si $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.*

3. *Para cualquier $A \subseteq X$ se cumple que $A \in \mathcal{U}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{U}$.*

Demostración. $1 \Longrightarrow 2$) Supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \mathcal{U}$ pero $A \notin \mathcal{U}$ y $B \notin \mathcal{U}$. Mostraremos que existe un filtro no trivial sobre X que contiene propiamente a $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{F} = \{C \subseteq X : A \cup C \in \mathcal{U}\}$. Afirmamos que $\mathcal{F}$ es el filtro deseado. $X \in \mathcal{F}$ pues $X \cup A \in \mathcal{U}$. Sean $C_1, C_2 \subseteq X$ tales que $C_1 \in \mathcal{F}$ y $C_1 \subseteq C_2$. Dado que $C_1 \in \mathcal{F}$, $A \cup C_1 \in \mathcal{U}$, entonces $A \cup C_2 \in \mathcal{U}$, pues $A \cup C_1 \subseteq A \cup C_2$ y $\mathcal{U}$ es un filtro. Por lo tanto, $C_2 \in \mathcal{F}$. Supongamos que $C_1, C_2 \subseteq X$ tales que $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup C_1 \in \mathcal{U}$ y $A \cup C_2 \in \mathcal{U}$. Dado que $\mathcal{U}$ es un filtro sobre X, $(A \cup C_1) \cap (A \cup C_2) = A \cup (C_1 \cap C_2) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$. Concluimos que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ pues $A \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es un filtro no trivial. Además, si $C \in \mathcal{U}$, $A \cup C \in \mathcal{U}$ pues $\mathcal{U}$ es un filtro, así $C \in \mathcal{F}$ y por hipótesis $B \notin \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{F}$. Así $\mathcal{F}$ es un filtro no trivial sobre X que contiene propiamente a $\mathcal{U}$, contradiciendo que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X. Por lo tanto $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.

$2 \Longrightarrow 3$) Supongamos que $\mathcal{U}$ es un filtro no trivial sobre X tal que para cualesquiera $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$. Sea $A \subseteq X$. Dado que $\mathcal{U}$ es filtro, $X \in \mathcal{U}$ y $X = A \cup (X \setminus A)$. Entonces, por hipótesis $A \in \mathcal{U}$ o $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

[1]En algunos textos al filtro trivial también se le conoce como filtro impropio.

$3 \implies 1$) Sea $\mathcal{U}$ un filtro no trivial sobre X, como en la hipótesis. Supongamos que $\mathcal{U}$ no es ultrafiltro, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ no trivial sobre X que contiene propiamente a $\mathcal{U}$. Sea $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$. $X \setminus A \notin \mathcal{U}$, de lo contrario, como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, $X \setminus A \in \mathcal{F}$ y esto implicaría que $\mathcal{F}$ es el filtro trivial, contradiciendo nuestra hipótesis. Entonces, por hipótesis, $A \in \mathcal{U}$ y por tanto $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. $\square$

Se sigue por inducción, usando la equivalencia de los enunciados 1 y 2, que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X y A es una unión finita de subconjuntos de X que pertenece a $\mathcal{U}$, al menos uno de sus uniendos, también será elemento de $\mathcal{U}$.

Sea X un conjunto. Consideremos $\mathcal{U} = \{A \subseteq X : x \in A\}$ con $x \in X$, el filtro generado por $\{x\}$. Dado que para cualquier $A \subseteq X$, $x \in A$ o $x \in X \setminus A$, se cumple que $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X. Notemos que si $\mathcal{F}$ es un filtro principal sobre X generado por $A \subseteq X$ y $|A| > 2$, entonces $\mathcal{F}$ no puede ser un ultrafiltro sobre X. De lo contrario, podríamos considerar $B_1, B_2 \subsetneq A$ tales que $A = B_1 \cup B_2$ y al ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro $B_1 \in \mathcal{F}$ o $B_2 \in \mathcal{F}$, lo cual no es posible, ya que $\mathcal{F}$ está generado por A. Por lo tanto, los únicos filtros principales sobre X que son ultrafiltros son los que están generados por un conjunto unitario. A estos ultrafiltros se les conoce como ultrafiltros principales.

Consideremos X un conjunto finito. Si $\mathcal{F} = \{X_i : i \leq 2^{|X|}\}$ es un filtro sobre X, entonces $\bigcap\limits_{i \leq 2^{|X|}} X_i \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F}$ resulta ser el filtro generado por $\bigcap\limits_{i \leq 2^{|X|}} X_i$. Por tanto, todos los filtros que existen sobre un conjunto finito son filtros principales. Más aún si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X, $\mathcal{U}$ es un filtro generado por un subconjunto unitario de X. Pues $X = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\}$ y al ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X uno de los uniendos pertenece a $\mathcal{U}$. Por lo tanto, si X es un conjunto finito, todos los ultrafiltros sobre X son principales.

Si X es un conjunto infinito, podemos preguntarnos si todos los ultrafiltros sobre X también resultan ser principales. La respuesta es negativa; vamos a poder demostrar la existencia de ultrafiltros nos principales para conjuntos infinitos, haciendo uso del axioma de elección.

Teorema 3.2 (Teorema del Ultrafiltro)**.** *Sea X un conjunto infinito. Si $\mathcal{F}$ es un filtro no trivial sobre X existe un ultrafiltro que lo contiene.*

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro se cumple el enunciado. De lo contrario, haremos uso del

Lema de Zorn, por lo que definiremos un orden parcial sobre cierta familia de filtros tal que todo subconjunto totalmente ordenado esté acotado superiormente. De este modo tendremos garantizada la existencia de un elemento maximal en la familia y este elemento será el ultrafiltro buscado.

Sea $\mathcal{P} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}$ es un filtro no trivial que contiene a $\mathcal{F}$ propiamente $\}$. Dados $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ filtros en $\mathcal{P}$ diremos que $\mathcal{G}_1 < \mathcal{G}_2$ si $\mathcal{G}_1 \subsetneq \mathcal{G}_2$.Veamos que $\mathcal{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado por $<$. Para cualquier $\mathcal{G} \in \mathcal{P}$, $\mathcal{G}$ no está contenido propiamente en sí mismo. Por lo tanto la relación $<$ es antirreflexiva. Dados $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ en $\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{G}_1 < \mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_2 < \mathcal{G}_3$ tendremos, usando la transitividad de la contención, que $\mathcal{G}_1 < \mathcal{G}_3$.

Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ un conjunto totalmente ordenado. $X \in \bigcup \mathcal{C}$, pues X es un elemento de cada uno de los uniendos. Sean A, $B \subseteq X$ tales que $A \in \bigcup \mathcal{C}$ y $A \subseteq B$. Como $A \in \bigcup \mathcal{C}$, existe $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{G}$, entonces $B \in \mathcal{G}$. Por lo tanto, $B \in \bigcup \mathcal{C}$. Por otro lado, si A, $B \subseteq X$, tales que $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existen $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ filtros en $\mathcal{C}$ tales que $A \in \mathcal{G}_1$ y $B \in \mathcal{G}_2$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, $\mathcal{G}_1 < \mathcal{G}_2$ o $\mathcal{G}_2 < \mathcal{G}_1$ o bien $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$. En cualquier caso alguno de los filtros debe tener tanto A como a B como elementos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{G}_1$ es dicho filtro, por tanto, $A \cap B \in \mathcal{G}_1$. Así, $A \cap B \in \bigcup \mathcal{C}$. Hemos demostrado que $\bigcup \mathcal{C}$ es nuevamente un filtro. Además $\bigcup \mathcal{C}$ pertenece a la familia $\mathcal{P}$, pues todos los filtros que se encuentran en $\mathcal{C}$ contienen a $\mathcal{F}$ y son no triviales.

Finalmente notemos que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$. Hemos demostrado que se cumplen las hipótesis del lema de Zorn y por tanto existe un filtro maximal en $\mathcal{P}$ que contiene a $\mathcal{F}$. Y este resulta ser el ultrafiltro buscado. $\square$

Sea X un conjunto infinito. Consideremos $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\}$. X es un elemento de $\mathcal{F}$, pues $X \setminus X$ es el conjunto vacío. Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$. $X \setminus B$ está contenido en $X \setminus A$, por lo que, $X \setminus B$ es finito. Por lo tanto, B es un elemento de $\mathcal{F}$. Si A, $B \subseteq X$ tales que $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, tendremos que la intersección de A y B también tendrá complemento finito, pues $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, el cual es llamado el filtro de Fréchet.

Por el lema anterior, existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$. Dicho ultrafiltro es no principal. De lo contrario, $\mathcal{U}$ estaría generado por $\{x\}$ con x algún elemento de X. Entonces

$\{x\} \in \mathcal{U}$ y como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, entonces $X \setminus \{x\} \in \mathcal{U}$, pero esto implica que $\emptyset = \{x\} \cap (X \setminus \{x\}) \in \mathcal{U}$, lo cual es una contradicción a que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Por tanto el ultrafiltro es no principal. Así, hemos demostrado la existencia de ultrafiltros no principales para conjuntos infinitos. Dichos ultrafiltros serán de mucho interés.

Corolario 3.3. *Existen los ultrafiltros no principales.*

3.2. Ultrafiltros de Ramsey

En esta sección consideraremos sólo ultrafiltros no principales sobre el conjunto de los números naturales.

Definición 3.4. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre ω. Si para cada partición $\{X_n : n \in \omega\}$, del conjunto de los números naturales tal que $X_n \notin \mathcal{U}$ para toda $n \in \omega$, existe un conjunto en $\mathcal{U}$ que intersecta a X_n para toda $n \in \omega$ exactamente en un punto decimos que $\mathcal{U}$ es un* ultrafiltro de Ramsey[2].

Demostraremos que *H.C.* garantiza la existencia de los ultrafiltros de Ramsey. Antes, introduciremos algunos conceptos que serán de utilidad para la demostración.

Sean $A, B \subseteq \omega$. Escribimos $A \subseteq^* B$ para denotar que $A \setminus B$ es finito. En cuyo caso decimos que A está casi contenido en B. Esta relación resulta ser transitiva.

Definición 3.5. *Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$. $Y \in [\omega]^\omega$ es una pseudointersección de S si y sólo si para cualquier $X \in S$ se tiene que $Y \subseteq^* X$.*

Lema 3.6. *Sea $S = \{X_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ tal que $X_j \subseteq^* X_i$ para cada $i < j \in \omega$. Entonces existe $Y \in [\omega]^\omega$ una pseudointersección de S.*

Demostración. Sea $y_0 \in X_0$. Supongamos definidos $\{y_m : m \leq n\}$ tales que $y_i < y_j$ para cualesquiera $i < j \leq n$ e $y_m \in X_0 \cap \cdots \cap X_m$. Ya que $X_{n+1} \setminus X_i$ es finito para cada $i \leq n$, podemos tomar $y_{n+1} \in X_0 \cap \cdots \cap X_{n+1}$ tal que $y_n < y_{n+1}$. Así, si $Y = \{y_n : n \in \omega\}$, Y es una pseudointersección de S. $\square$

[2]A los ultrafiltros de Ramsey también se les conoce como ultrafiltros selectivos.

Teorema 3.7. *Bajo H.C. existen los ultrafiltros de Ramsey.*

Demostración. Construiremos un ultrafiltro que cumpla la definición de ultrafiltro de Ramsey. Para ello, consideraremos una enumeración de las particiones de ω. Sea $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ dicha enumeración y supondremos además que $\mathcal{A}_0 = \{\omega\}$.

Definiremos por recursión, una ω_1-sucesión de subconjuntos infinitos de ω, tales que para cualesquiera X_α, X_β con $\alpha < \beta$, $X_\beta \subseteq^* X_\alpha$ y para cualquier $\alpha \in \omega_1$, $X_\alpha \subseteq A$ para algún $A \in \mathcal{A}_\alpha$ o bien $|X_\alpha \cap A| \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{A}_\alpha$.

Si $\alpha = 0$ sea $X_0 = \omega$. Supongamos definido X_α infinito para $\alpha < \omega_1$ tal que para algún $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $X_\alpha \subseteq A$, o bien para todo $A \in \mathcal{A}_\alpha$ se tiene que $|X_\alpha \cap A| \leq 1$. Si existe $A \in \mathcal{A}_{\alpha+1}$ tal que $|X_\alpha \cap A| = \omega$ definimos $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cap A$. Si no existe tal conjunto, entonces para todo $A \in \mathcal{A}_{\alpha+1}$ tenemos que $|X_\alpha \cap A| < \omega$ y por tanto la partición es infinita. Tomamos $x_A \in X_\alpha \cap A$ para cada $A \in \mathcal{A}_{\alpha+1}$ y definimos $X_{\alpha+1} = \{x_A : A \in \mathcal{A}_{\alpha+1}\}$ el cual es infinito pues X_α lo es. $X_{\alpha+1}$ así definido, es subconjunto de algún elemento de $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ o bien para todo A en esta partición se tiene que $|X_{\alpha+1} \cap A| \leq 1$. Además $X_{\alpha+1} \subseteq^* X_\alpha$, pues $X_{\alpha+1} \subseteq X_\alpha$. Sea $\alpha < \omega_1$ un ordinal límite. Supongamos definido X_β infinito para todo $\beta < \alpha$ tal que $X_{\beta_2} \subseteq^* X_{\beta_1}$ para todo $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$ y $X_\beta \subseteq A$ para algún $A \in \mathcal{A}_\beta$ o bien para cualquier $A \in \mathcal{A}_\beta$, $|X_\beta \cap A| \leq 1$. Sea $Y \in [\omega]^\omega$ una pseudointersección de $\{X_\beta : \beta < \alpha\}$, la cual existe por el Lema 3.6. Si existe $\{A_i : i < n\} \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ tal que $Y \subseteq \bigcup_{i \in n} A_i$, $Y \cap A_i$ es infinita para algún A_i. En cuyo caso tomamos $X_\alpha = Y \cap A_i$. Así, $X_\alpha \subseteq A$ para algún $A_i \in \mathcal{A}_\alpha$ y $X_\alpha \subseteq^* X_\beta$ para todo $\beta < \alpha$, pues $Y \cap A_i \subseteq Y \subseteq^* X_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Si no existe $\{A_i : i < n\} \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ tal que $Y \subseteq \bigcup_{i \in n} A_i$, entonces existe $\{A_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ tal que Y se queda contenida en su unión. Sea $x_A \in Y \cap A$ con $A \in \mathcal{A}_\alpha$. Definimos $X_\alpha = \{x_A : A \in \mathcal{A}_\alpha\}$. X_α satisface que $|X_\alpha \cap A| \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{A}_\alpha$ y $X_\alpha \subseteq^* X_\beta$ para toda $\beta < \alpha$, pues $X_\alpha \subseteq Y$. $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es la ω_1-sucesión que buscábamos.

Tomemos $\mathcal{U} = \{X \subseteq \omega : \exists \alpha < \omega_1 (X_\alpha \subseteq^* X)\}$. Probaremos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro de Ramsey.

$\omega \in \mathcal{U}$ pues $X_0 = \omega$. Si $X \in \mathcal{U}$, existe α tal que $X_\alpha \subseteq^* X$. Por tanto, si $X \subseteq Y$, $X_\alpha \subseteq^* Y$, pues $X_\alpha \setminus Y \subseteq X_\alpha \setminus X$. Entonces $Y \in \mathcal{U}$. Si Y_1 y Y_2 son elementos de $\mathcal{U}$, existen $\alpha \leq \beta$ tales que $X_\alpha \subseteq^* Y_1$ y $X_\beta \subseteq^* Y_2$. Dado que $\alpha \leq \beta$ tenemos que $X_\beta \subseteq^* X_\alpha$ y por tanto, $X_\beta \subseteq^* Y_1$ y $X_\beta \subseteq^* Y_2$. $X_\beta \setminus (Y_1 \cap Y_2) = (X_\beta \setminus Y_1) \cup (X_\beta \setminus Y_2)$. Entonces $X_\beta \subseteq^* Y_1 \cap Y_2$, pues $(X_\beta \setminus Y_1)$ y $(X_\beta \setminus Y_2)$ son finitos. Por lo tanto, $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{U}$. Concluimos que $\mathcal{U}$ es un filtro.

Sea A un subconjunto de ω y $\alpha < \omega_1$ tal que $\{A, \omega \setminus A\} = \mathcal{A}_\alpha$, entonces existe X_α infinito tal que X_α se queda contenido en algún elemento de la partición o bien su intersección es finita para cada conjunto en $\mathcal{A}_\alpha$. El segundo caso no ocurre, ya que $\mathcal{A}_\alpha$ es un partición y X_α es infinito. Por tanto, X_α está contenido en alguno de los conjuntos y sólo uno, pues $\mathcal{A}_\alpha$ es una partición. Así, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

Si $\mathcal{A}$ es una partición de cardinalidad ω del conjunto de los números naturales, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha$. Supongamos que ningún elemento de la partición pertenece a $\mathcal{U}$. Sabemos, existe $X_\alpha \subseteq \omega$ infinito, tal que X_α es un subconjunto de algún elemento de $\mathcal{A}_\alpha$ o bien para todo $A \in \mathcal{A}_\alpha$ se cumple que $|X_\alpha \cap A| \leq 1$. Si el primer caso ocurre, entonces $A \in \mathcal{U}$ lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, ocurre el otro caso. Si X_α ya intersecta a cada A en un punto, entonces X_α es el conjunto que sirve para la definición de ultrafiltro de Ramsey. Si esto no ocurre, podemos extender este conjunto a un conjunto X, que intersecte a cada A en un solo punto, el cual estará en $\mathcal{U}$ pues $X_\alpha \subseteq X$. Hemos demostrado que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro de Ramsey. $\square$

Cabe mencionar que, 1975, Kunen demostró que es consistente la no existencia de ultrafiltros Ramsey.[U.R]

Los ultrafiltros de Ramsey tienen una estrecha relación con el teorema de Ramsey. Demostraremos un lema que resulta de utilidad para mostrar dicha relación.

Lema 3.8. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro de Ramsey. Si $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$, tal que para cualesquiera $m < n$, $X_n \subsetneq X_m$, entonces existe $\{a_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$ tal que $a_m < a_n$ si $m < n$, $a_0 \in X_0$ y $a_{n+1} \in X_{a_n}$ para toda $n \in \omega$.*

Demostración. Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ como en la hipótesis. Supondremos además que $X_0 \neq \omega$. Notemos que esta familia determina una partición del conjunto de los naturales de cardinalidad ω de la siguiente manera. Sea $\mathbb{P} = \{X_n \setminus X_{n+1} : n \in \omega\} \cup \{\{z \in \omega : z \notin \bigcup_{n\in\omega} X_n \setminus X_{n+1}\}\}$. Los conjuntos pertenecientes a $\{X_n \setminus X_{n+1} : n \in \omega\}$ son no vacíos, pues $X_n \neq \emptyset$ y $X_{n+1} \subsetneq X_n$ para todo $n \in \omega$. El conjunto $\{z \in \omega : z \notin \bigcup_{n\in\omega} X_n \setminus X_{n+1}\}$ es no vacío, pues los elementos del complemento de X_0 pertenecen a dicho conjunto. Por lo tanto ningún elemento de $\mathbb{P}$ es el conjunto vacío. Si x es un número natural que no se encuentra en ningún $X_n \setminus X_{n+1}$, con $n \in \omega$, entonces $x \in \{z \in \omega : z \notin \bigcup_{n\in\omega} X_n \setminus X_{n+1}\}$. Por tanto, la unión de $\mathbb{P}$ es ω. Finalmente, si $Y_1, Y_2 \in \mathbb{P}$, entonces

$Y_1 = X_m \setminus X_{m+1}$ y $Y_2 = X_n \setminus X_{n+1}$, para ciertos $m, n \in \omega$ tales que $m < n$ o bien alguno es el conjunto $\{z \in \omega : z \notin \bigcup_{n\in\omega} X_n \setminus X_{n+1}\}$. En el primer caso, tenemos que $X_{n+1} \subsetneq X_n \subseteq X_{m+1} \subsetneq X_m$, esto, por como está dada la sucesión de conjuntos X_n. Y dado que $Y_1 \subseteq X_m$ y $Y_2 \subseteq X_n$ su intersección tiene que ser vacía. En el otro caso es claro que la intersección de Y_1 y Y_2 es vacía. Hemos demostrado que $\mathbb{P}$ es una partición de ω. La cardinalidad de $\mathbb{P}$ se sigue de que hay tantos elementos como conjuntos en la sucesión dada.

Sea $X \in \mathbb{P}$. Si $X = X_n \setminus X_{n+1}$ para algún $n \in \omega$, $X \notin \mathcal{U}$, de lo contrario $X \cap X_{n+1} \in \mathcal{U}$, lo que contradice que $\mathcal{U}$ sea ultrafiltro. Si $X = \{z \in \omega : z \notin \bigcup_{n\in\omega} X_n \setminus X_{n+1}\}$, $y \in X$ si y sólo si, para toda $n \in \omega$, $y \notin X_n \setminus X_{n+1}$ si y sólo si para toda $n \in \omega$, $y \notin X_n$ o $y \in X_n + 1$, si y sólo si para toda $n \in \omega$, $y \in \omega \setminus X_n$ o $y \in X_{n+1}$ si y sólo si $y \in (\bigcap_{n\in\omega}(\omega \setminus X_n) \cup (\bigcap_{n\in\omega} X_n))$. Así, $y \in ((\omega \setminus X_0) \cup (\bigcap_{n\in\omega} X_n))$. $\omega \setminus X_0 \notin \mathcal{U}$, de lo contrario $X_0 \cap (\omega \setminus X_0) \in \mathcal{U}$. Si $\bigcap_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{U}$, podemos tomar $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} X_n$ tal que $x_j < x_i$ para cualesquiera $i < j$ y ésta satisface las hipótesis deseadas, por lo que habremos acabado la demostración del lema. Por otro lado, si $\bigcap_{n\in\omega} X_n \notin \mathcal{U}$, entonces $X \notin \mathcal{U}$, por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ es una partición de ω tal que ninguno de sus elementos pertenecen a $\mathcal{U}$ y procedemos de la siguiente manera.

Dado que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro de Ramsey, existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $|Y \cap (X_n \setminus X_{n+1})| = 1$, para cada $n \in \omega$. Definimos, ahora, un sucesión en Y como sigue:

y_0 es el menor elemento en Y tal que $\{y \in Y : y > y_0\} \subseteq X_0$. En general, y_{n+1} será el menor elemento en Y tal que $y_{n+1} > y_n$ y $\{y \in Y : y > y_{n+1}\} \subseteq X_{y_n}$, con $n \in \omega$.

Por definición, la sucesión es creciente en Y. Definimos para cada $n \in \omega$, $A_n = \{y \in \omega : y_n < y \leq y_{n+1}\}$. Estos conjuntos inducen nuevamente una partición de ω de cardinalidad ω. Basta consider a la familia de los conjuntos A_n y el conjunto $\{y \in \omega : 0 \leq y \leq y_0\}$. Además ningún elemento de la partición puede ser elemento del ultrafiltro, pues todos son conjuntos finitos. Como $\mathcal{U}$ es de Ramsey, existe $\{z_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$ tal que $(\{z_n : n \in \omega\}) \cap A_n = \{z_n\}$.

Dado que $z_{n+2} \in A_{n+2}$, tenemos que $z_{n+2} > y_{n+2}$, entonces $z_{n+2} \in X_{y_{n+1}}$ y dado que $z_n \in A_n$ tenemos que $z_n \leq y_{n+1}$, entonces $X_{y_{n+1}} \subset X_{z_n}$. Por lo tanto, $z_{n+2} \in X_{z_n}$, para cualquier n. Finalmente, si tomamos $a_n = z_{2n}$ y $b_n = z_{2n+1}$ para cada $n \in \omega$, tendremos que $\{a_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$ o bien $\{b_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$, pues $\{z_n : n \in \omega\} = \{a_n : n \in \omega\} \cup \{b_n : n \in \omega\}$ y $\{z_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$ y cualquiera de las dos satisface lo deseado.

□

Teorema 3.9. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre ω. $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro de Ramsey si y sólo si para cualesquiera $n, k \in \omega$ se cumple que para toda F, k-coloración de $[\omega]^n$ existe $H \subseteq \omega$ tal que es homogéneo y $H \in \mathcal{U}$.* [1]

Demostración. $\Longleftarrow$) Para cualesquiera $n, k \in \omega$, supondremos que toda k-coloración de $[\omega]^n$ tiene un conjunto homogéneo en $\mathcal{U}$.

Consideremos $\mathbb{P} = \{P_i : i \in \omega\}$ una partición infinita de ω tal que $P_i \notin \mathcal{U}$ para cualquier $i \in \omega$. Sea F una 2-coloración de $[\omega]^2$ definida como sigue:

$$F(\{x,y\}) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ y } y \text{ pertenecen a elementos diferentes de } \mathbb{P}. \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Por hipótesis existe $H \in \mathcal{U}$ homogéneo para F, entonces $F''[H]^2 = \{i\}$ con $i \in \{0,1\}$. Si $i = 0$, entonces todos los elementos de H pertenecen a un mismo elemento de la partición, es decir $H \subseteq P_i$, para algún $P_i \in \mathbb{P}$. Entonces $P_i \in \mathcal{U}$, pues $H \in \mathcal{U}$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, si $H \in \mathcal{U}$ y es homogéneo para F, $F''[H]^2 = \{1\}$. H intersecta a cada elemento de la partición en a lo más en un punto. Si $|H \cap P_i| = 1$ para todo $P_i \in P$, entonces H es el conjunto que buscamos en la definición de ultrafiltro de Ramsey. Por el contrario, si existe $P_i \in \mathbb{P}$ tal que $H \cap P_i = \emptyset$; sea $D = \{y_i \in P_i : y_i = min(P_i) \wedge H \cap P_i = \emptyset\}$. Consideremos $H' = H \cup D$. Por construcción $|H' \cap P_i| = 1$ para todo $P_i \in \mathbb{P}$ y dado que $H \in \mathcal{U}$, $H' \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, existe $H' \in \mathcal{U}$ tal que $|H' \cap P_i| = 1$ para todo $P_i \in \mathbb{P}$. Así, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro de Ramsey.

$\Longrightarrow$) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro de Ramsey.

Procederemos por inducción sobre n. Sea k un natural. Si $n = 1$ el resultado se sigue del principio del casillero. Supongamos que dado $n \in \omega$, se satisface la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^n_k$ y un conjunto homogéneo para cada k-coloración pertenece a $\mathcal{U}$. Sea $F : [\omega]^{n+1} \longrightarrow \{0, 1 \ldots, k-1\}$. Para cada $a \in \omega$, definimos $F_a : [\omega \setminus \{a\}]^n \longrightarrow \{0, 1 \ldots, k-1\}$ dada por $F_a(x) = F(x \cup \{a\})$. Por hipótesis para cada F_a existe H_a conjunto homogéneo en $\mathcal{U}$.

[1] Notemos que $|H| = \omega$, pues al ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre ω ninguno de sus elementos es finito.

Consideremos $h : \omega \longrightarrow \{0, \ldots, k-1\}$, tal que para cada $a \in \omega$, $h(a) = \bigcup(F''_a[H_a]^n)$. Dado que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, existe $X \in \mathcal{U}$ e $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tal que para todo $a \in X$ y todo H_a se tiene que $F''[H_a]^n = \{i\}$.

Construiremos una familia de subconjuntos infinitos de ω que satisfaga las condiciones del Lema 3.8. Sea $X_0 = X \cap H_0$. Si $X \cap H_0 \cap H_1 \subsetneq X_0$, definimos $X_1 = X \cap H_0 \cap H_1$. De lo contrario, tomemos x_0 el menor elemento X_0 y definimos $X_1 = X_0 \setminus \{x_0\}$. Supongamos definidos para $i < n$, X_i tal que para cualesquiera $i, j < n$ tal que $i < j$, $X_j \subsetneq X_i$. Consideremos $X \cap H_0 \cap \cdots \cap H_n$. Si $(X \cap H_0 \cap \cdots \cap H_n) \subsetneq X_{n-1}$, $X_n = X \cap H_0 \cap \cdots \cap H_n$. De lo contrario, sea x_n el menor elemento de X_{n-1} y definimos $X_n = X_{n-1} \setminus \{x_n\}$. $\{X_n : n \in \omega\}$ cumple las hipótesis deseadas.

Entonces existe $\{a_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$ tal que $a_i < a_j$ si $i < j$, $a_0 \in X_0$ y $a_{n+1} \in X_{a_n}$ para cada n. Sea $H = \{a_n : n \in \omega\}$. Para cada $i \in \omega$ tenemos que $a_i \in X$ y $\{a_m : i < m\} \subseteq H_{a_i}$. Por lo tanto, $F_{a_i}(x) = i$ para todo $x \in [\{a_m : i < m\}]^n$. Así, concluimos que F es constante en $[H]^{n+1}$.

Hemos terminado la prueba. $\square$

3.3. Teorema de Hindman

Pasaremos al estudio de un teorema combinatorio que nos brinda, en cierta forma, una aplicación de los teoremas tipo Ramsey, en este se busca que para toda partición finita de ω exista un conjunto infinito que cumpla cierta propiedad y esté contenido en algún elemento de la partición.

Consideremos un subconjunto $X \subseteq \omega$ y sea $m \in \omega$. Denotaremos por $X - m$ al conjunto de todos los naturales, n, tales que $m + n \in X$, es decir, $X - m = \{n : m + n \in X\}$. Definiremos la operación $+$ para $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ultrafiltros sobre ω como $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{X \subseteq \omega : \{m \in \omega : X - m \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\}$, el cual vuelve a ser un ultrafiltro.

Definición 3.10. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro tal que $\mathcal{U}+\mathcal{U} = \mathcal{U}$, entonces decimos que $\mathcal{U}$ es un* ultrafiltro idempotente.

Asumiremos la existencia de ultrafiltros idempotentes no principales sobre ω, hecho que puede obtenerse como un resultado de semigrupos topológicos.[D.Pr] Estos ultrafiltros serán de utilidad para demostrar el teorema de Hindman, el cual presentamos a continuación.

Teorema 3.11 (Hindman)**.** *Si $\mathbb{P}$ es una partición finita de ω, entonces existen $A \in \mathbb{P}$ y $H \in [A]^\omega$ tales que para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in H$ distintos, $a_1 + \cdots + a_n \in A$.*

Demostración. Construiremos a H por recursión.

Sea $\mathbb{P}$ una partición finita de ω y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro idempotente sobre ω. Entonces existe $A_0 \in \mathbb{P}$ tal que $A_0 \in \mathcal{U}$. Además, como $\mathcal{U}$ es idempotente, $\{m \in \omega : A_0 - m \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$, entonces $(\{m \in \omega : A_0 - m \in \mathcal{U}\}) \cap A_0 \in \mathcal{U}$. Así, existe $a_0 \in A_0$ tal que $A_0 - a_0 \in \mathcal{U}$. Supongamos definidos $\{A_i \in \mathcal{U} : i \leq k\}$ tal que $A_j \subsetneq A_i$ si $i < j \leq k$ y $\{a_i \in A_i : i < k\}$ tal que $a_i < a_j$ si $i < j$. Nuevamente, al ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro idempotente $\{m \in \omega : A_k - m \in U\} \in U$ y $A_k \cap (\{m \in \omega : A_k - m \in U\}) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, existe $a_k \in A_k$ tal que $a_i < a_k$ y $(A_k - a_k) \in \mathcal{U}$. Sea $A_{k+1} = A_k \cap (A_k - a_k)$. Así, $A_n \subseteq A_m$ y $a_m < a_n$ si $m < n$.

Definimos $H = \{a_k : k \in \omega\}$. Por construcción, $H \subseteq A_0$ y es infinito. Afirmamos que el conjunto de sumas finitas de elementos distintos en H es un subconjunto de A_0.

Sean $a_i, a_j \in H$ con $i < j$. Dado que $\{A_k : k \in \omega\}$ es una sucesión decreciente, $a_j \in A_{i+1}$. Por definición $A_{i+1} = A_i \cap (A_i - a_i)$, así, $a_i + a_j \in A_i$. Por lo tanto $a_i + a_j \in A_0$. Si $\{a_{k_i} : i \leq n\} \subseteq H$ tal que $k_j < k_i$ si $i < j \leq n$, $a_{k_0} + a_{k_1} \in A_{k_1}$. Entonces $a_{k_0} + a_{k_1} \in A_{k_2+1}$. Por definición $A_{k_2+1} = A_{k_2} \cap (A_{k_2} - a_{k_2})$. Se sigue que $a_{k_0} + a_{k_1} + a_{k_2} \in A_{k_2}$. Iterando este proceso, concluimos que $a_{k_1} + \cdots + a_{k_n} \in A_{k_n}$. Por lo tanto $a_{k_1} + \cdots + a_{k_n} \in A_0$.

Demostramos que H satisface la propiedad y con ello damos por terminada la prueba del teorema. □

James Baumgartner presenta una prueba del Teorema de Hindman en una versión conjuntista, la cual es equivalente al Teorema de Hindman.[J.B].

Teorema 3.12 (Hindman, versión conjuntista)**.** *Si $\mathbb{P}$ es una partición finita de $[\omega]^{<\omega}$, entonces existen $A \in \mathbb{P}$ y H una familia de conjuntos finitos ajenos dos a dos tal que para cualesquiera $x_0, \ldots, x_n \in H$, $x_0 \cup \cdots \cup x_n \in A$.*

Aunque los teoremas 3.11 y 3.12 son equivalentes, nos parece importante presentar la prueba de ambos, pues esto nos permitirá apreciar que si bien es necesario introducir nuevos conceptos para la demostración del Teorema 3.12, la herramienta que usaremos en ella resulta ser más sencilla que el implementar ultrafiltros idempotentes, como en el Teorema 3.11. Por lo que esta demostración resulta ser además de corta, sencilla.

Definición 3.13. *1. Sean $x, y \in [\omega]^{<\omega}$. Escribimos $x < y$ para indicar que $max(x) < min(y)$.*

2. Si $B \subseteq [\omega]^{<\omega}$ diremos que B es una sucesión básica si para cualesquiera $x, y \in B$, $x < y$ o $y < x$.

Si $B = \langle x_i : i \in I \rangle \subseteq [\omega]^{<\omega}$ denotaremos por $[B]$ al conjunto de uniones finitas de B, excluyendo a la unión vacía, es decir, $[B] = \{\bigcup_{i \in F} x_i : x_i \in B \text{ y } F \in [I]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$.

Definición 3.14. *Sea $B \subseteq [\omega]^{<\omega}$ una sucesión básica infinita. Diremos que $X \subseteq [\omega]^{<\omega}$* es grande para B*, si para cada sucesión básica infinita B', que está contenida en $[B]$ se tiene que $X \cap [B'] \neq \emptyset$.*

Veamos algunas propiedades de esta definición.

Lema 3.15. *Sea $B \subseteq [\omega]^{<\omega}$ una sucesión básica infinita y $X \subseteq [\omega]^{<\omega}$. Entonces los siguientes enunciados se cumplen.*

1. Si X es grande para B y $B' \subseteq [B]$, entonces X es grande para B'.

2. $[B]$ es grande para B.

3. Si X es grande para B y $X \subseteq X'$, entonces X' es grande para B.

4. X es grande para B si y sólo si $X \cap [B]$ es grande para B.

5. Si X es grande para B y $X = Y \cup Z$, entonces Y o Z es grande para algún $B' \subseteq [B]$.

Demostración. 1. Si $B' \subseteq [B]$ se tiene que $[B'] \subseteq [B]$, pues cada elemento en $[B']$ se ve como una unión finita de elementos de B', los cuales por hipótesis son uniones finitas de elementos en B. Y si B'' es una sucesión básica de $[B']$ también es una sucesión básica de $[B]$ y dado que X es grande para B concluimos que $X \cap [B'']$ es no vacía. Por lo tanto, X es grande para B'.

2. Dada $B' \subseteq [B]$, una sucesión básica infinita, tenemos que $[B'] \subseteq [B]$, por lo que $[B'] \cap [B]$ es no vacía y, por lo tanto, $[B]$ es grande para B.

   Observemos que de esta propiedad se sigue que $[\omega]^{<\omega}$ es grande para $[\omega]^1$.

3. Se sigue de que para toda sucesión básica infinita B', de $[B]$, se cumple que $[B'] \cap X$ es no vacía y $[B'] \cap X \subseteq [B'] \cap X'$.

4. $\Longleftarrow$) Ya que $X \cap [B] \subset X$, tenemos por el inciso anterior que X es grande para B.

   $\Longrightarrow$) Dada B' una sucesión básica infinita de $[B]$ nos gustaría que $[B'] \cap (X \cap [B])$ fuera no vacía. Por hipótesis X es grande para B, por lo que $[B'] \cap X \neq \emptyset$. Por otro lado, $[B'] \subseteq [B]$, por lo tanto, $(X \cap [B]) \cap [B'] \neq \emptyset$. Así $X \cap [B]$ es grande para B.

5. Si Y es grande para algún $B' \subseteq [B]$, entonces se cumple la propiedad. Si Y no es grande para ningún $B' \subseteq [B]$, entonces para todo $B' \subseteq [B]$, existe $B'' \subseteq [B']$ sucesión básica infinita tal que $Y \cap [B''] = \emptyset$. Por hopótesis, X es grande para B, entonces $Z \cap [B''] \neq \emptyset$. Afirmamos que Z es grande para B''. Sea $B^* \subseteq [B'']$ una sucesión básica infinita, se cumple que $Z \cap [B^*] \neq \emptyset$. De lo contrario $[B^*]$ intersectaría a Y lo cual sería una contradicción a que Y no intersecta a $[B'']$. Así, Z es grande para $B'' \subseteq [B]$.

   Se sigue por inducción que si $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ y X es grande para B, entonces existe algún X_i que es grande para algún $B' \subseteq [B]$.

$\square$

Demostraremos algunos lemas que nos serán de utilidad para probar la versión conjuntista del teorema de Hindman.

Lema 3.16. *Sea $B \subseteq [\omega]^{<\omega}$ una sucesión básica y $X \subseteq [\omega]^{<\omega}$.*

Si X es grande para B, entonces existe $F \subseteq [B]$ finito tal que para cada $x \in [B]$ que cumple con ser mayor a todo elemento de F existe un $b \in F$ tal que $b \cup x \in X$.

Demostración. La demostración será por contrapuesta.

Sea $B = \{b_0, b_1, \dots\}$ una sucesión básica tal que $b_i < b_{i+1}$ para toda $i \in \omega$. Supongamos que no existe F con las condiciones pedidas. Entonces para todo conjunto finito, $F \subseteq [B]$ existe $x \in [B]$ tal que $b < x$ y $b \cup x \notin X$, para todo $b \in F$.

Construiremos una sucesión $B' = \{x_0, x_1, \dots\}$ tal que $b \cup x_{n+1} \notin X$ para todo $b \in [\{x_0, x_1, \dots, x_n\}]$. Tomemos $x_0 = b_0$, sea $x_1 \in [B]$ tal que $x_0 < x_1$ y $x_0 \cup x_1 \notin X$. Supongamos que hemos definido los primeros x_n, elementos de B' y consideremos $F = [\{x_0, x_1, \dots, x_n\}]$ por hipótesis podemos encontrar $x_{n+1} \in [B]$ tal que $x_n < x_{n+1}$ y para todo $b \in F$, $b \cup x_{n+1} \notin X$.

Por construcción, B' es una sucesión básica de $[B]$ y $X \cap [B'] = \emptyset$. Por lo tanto, X no es grande para B. $\square$

Dado $b \in [B]$, con $B \subseteq [\omega]^{<\omega}$ y $X \subseteq [\omega]^{<\omega}$ denotaremos por X_b al conjunto de los $x \in X$ tales que son mayores que b y cumplen que su unión con b se queda en X, es decir, $X_b = \{x \in X : b < x \wedge b \cup x \in X\}$.

Lema 3.17. *Sea $B \subseteq [\omega]^{<\omega}$ una sucesión básica infinita y $X \subseteq [\omega]^{<\omega}$.*

Si X grande para B, entonces existe $b \in [B]$ tal que X_b es grande para algún $B' \subseteq [B]$.

Demostración. Como X es grande para B sabemos que existe F tal que para todo $x \in [B]$ que sea mayor a todo elemento de F existe $b \in F$ tal que $x \cup b \in X$.

Consideremos $B' = \{x \in B : \forall b \in F(b < x)\}$. Veamos que $X \cap [B'] \subseteq \bigcup_{b \in F} X_b$. Sea $x \in X \cap [B']$, por la definición de B', $b < x$ para todo $b \in F$. Además, por la elección de F, existe $c \in F$ tal que $x \cup c \in X$. Así, $x \in X_c$ y, por lo tanto, $x \in \bigcup_{b \in F} X_b$.

Por otro lado, $B' \subseteq B$ y $B \subseteq [B]$. Dado que X es grande para B, por la propiedad 1 del lema 3.13, X es grande para B' y esto pasa si y sólo si $X \cap [B']$ es grande para B', por la propiedad 4 del lema 3.13. Ya que $X \cap [B'] \subseteq \bigcup_{b \in F} X_b$, $\bigcup_{b \in F} X_b$ es grande para B', por la propiedad 3 del lema 3.13. Finalmente, usando la propiedad 5 del lema 3.13, tenemos que existe $b \in F \subseteq [B]$ tal que X_b es grande para algún $B'' \subseteq [B']$. $\square$

Lema 3.18. *Sea $B \subseteq [\omega]^{<\omega}$ una sucesión básica infinita y $X \subseteq [\omega]^{<\omega}$.*

Si X es grande para B, entonces existe un $B' \subseteq [B]$ tal que $[B'] \subseteq X$.

Demostración. Haremos uso del lema anterior de la siguiente forma:

Consideremos $X_0 = X$ y $B_0 = B$. Por el lema anterior, existe $b_0 \in [B_0]$ tal que $X_1 = X_{b_0}$ es grande para algún $B_1 \subseteq [B_0]$. Siguiendo con este proceso encontraremos $b_n \in [B_n]$ tal que $b_{n-1} < b_n$ tal que $X_{n+1} = (X_n)_{b_n}$ es grande para algún $B_{n+1} \subseteq [B_n]$.

Hemos construido sucesiones $\{b_n : n \in \omega\}$, $\{X_n : n \in \omega\}$, $\{B_n : n \in \omega\}$ tales que:

1. $B_0 = B_1$, $X_0 = X$, $X_{n+1} \subseteq X_n$ y $B_{n+1} \subseteq [B_n]$ para todo $n \in \omega$,
2. $b_n \in [B_n]$,
3. X_n es grande para B_n ,
4. $\{b_n : n \in \omega\}$ es una sucesión básica,
5. $b_n \cup x \in X_n$ para todo $x \in X_{n+1}$.

Construiremos ahora una sucesión básica $B' = \{x_n : n \in \omega\}$ tal que $B' \subseteq [\{b_n : n \in \omega\}]$ y $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \omega$, como sigue: tomemos $x_0 \in [\{b_n : n \in \omega\}] \cap X$. Supongamos que hemos definido $x_0, \ldots, x_{n-1}$ y sea $k_n = max\{k : b_k \subseteq x_0 \cup \cdots \cup x_{n-1}\}$. Tomemos $x_n \in X_{k_n+1} \cap [\{b_i : k_n < i\}]$.

Demostraremos a continuación que $[B'] \subseteq X$. Sea $x \in [B']$, entonces x es la unión finita de elementos en B', digamos $x = x_{i_1} \cup \cdots \cup x_{i_n} \cup x_l$ con $i_1 < \cdots < i_n < l$ a su vez, como cada $x_{i_n} \in X_{k_{i_n}+1} \cap [\{b_i : k_{i_n} < i\}]$, podemos reescribir la unión de los primeros x_{i_n} en la unión de x como sigue $x_{i_1} \cup \cdots \cup x_{i_n} = b_{j_1} \cup \cdots \cup b_{j_m}$ con $j_i < \cdots < j_m$.

Por construcción $j_m \leq k_l$ y dado que $x_l \in X_{k_l+1}$ y la sucesión de los conjuntos X_n es decreciente, se tiene que $x_l \in X_{j_m+1}$ mientras que la propiedad 5 implica que $b_{j_m} \cup x_l \in X_{j_m}$. Además, como $j_{m-1} < j_m$, $j_{m-1}+1 \leq j_m$, entonces $b_{j_m} \cup x_l \in X_{j_{m-1}+1}$ y nuevamente por la propiedad 5, se cumple que $b_{j_{m-1}} \cup b_{j_m} \cup x_l \subseteq X_{j_{m-1}}$ siguiendo con este proceso obtenemos que $b_{j_1} \cup \cdots \cup b_{j_m} \cup x_l \in X_{j_1}$, el cual es subconjunto de X y por tanto $[B'] \subseteq X$.

□

Finalmente demostraremos la versión conjuntista del teorema de Hindman. Recordemos que éste afirma lo siguiente.

Teorema 3.12 : *Si $\mathbb{P}$ es una partición finita de $[\omega]^{<\omega}$, entonces existen $A \in \mathbb{P}$ y H una familia de conjuntos finitos ajenos dos a dos tal que para cualesquiera $x_0, \ldots, x_n \in H$, $x_0 \cup \cdots \cup x_n \in A$.*

Demostración. Sea $\mathbb{P} = \{A_i : i \in n\}$ una partición finita de $[\omega]^{<\omega}$.

Sabemos que $[\omega]^{<\omega}$ es grande para $[\omega]^1$. Dado que $[\omega]^{<\omega} = \bigcup_{i \in n} A_i$, por la propiedad 5 del lema 3.13, que existe $A_i \in \mathbb{P}$ tal que A_i es grande para algún subconjunto B de las uniones finitas de $[\omega]^1$. Finalmente, por el lema anterior existe $B' \subseteq [B]$ tal que el conjunto de las uniones finitas de B' se queda contenido en A_i. $\square$

3.4. Ultrafiltros σ-completos y κ-completos

Los ultrafiltros σ y κ completos forman parte de nuestro interés pues tienen relación con los cardinales medibles, los cuales, veremos en el siguiente capítulo, satisfacen cierta relación de partición.

Definición 3.19. *Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Decimos que $\mathcal{U}$ es un* ultrafiltro σ-completo*, si es cerrado bajo intersecciones numerables, esto es, si $\{X_n : n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos de X, tal que cada $X_n \in \mathcal{U}$, entonces $\bigcap_{n \in \omega} X_n \in \mathcal{U}$*

El siguiente teorema caracteriza a los ultrafiltros $\sigma-$completos.

Teorema 3.20. *Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. $\mathcal{U}$ es σ-completo si y sólo si para toda $\mathbb{P} = \{X_n : n \in \omega\}$, partición de X, existe un único $\in \mathbb{P}$ tal que $A \in \mathcal{U}$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X $\sigma-$completo y sea $\mathbb{P} = \{X_n : n \in \omega\}$ una partición de X de cardinalidad numerable. Supongamos que para cualquier $n \in \omega$, $X_n \notin \mathcal{U}$. Dado que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, $X \setminus X_n \in \mathcal{U}$ y por ser $\mathcal{U}$ σ-completo, $\bigcap_{n \in \omega} X \setminus X_n \in \mathcal{U}$. Esto implica que $\emptyset \in \mathcal{U}$, pues, $\bigcap_{n \in \omega} (X \setminus X_n) = X \setminus \bigcup_{n \in \omega} X_n$ y $\mathbb{P}$ es partición, lo cual contradice que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Por lo tanto, algún elemento de $\mathbb{P}$ es elemento de $\mathcal{U}$.

Si existieran dos elementos de la partición que también estuvieran en $\mathcal{U}$, entonces $\emptyset \in \mathcal{U}$, lo cual nuevamente es una contradicción. Por lo tanto, el elemento que existe es único.

$\Longleftarrow$) Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de subconjuntos de X tales que $X_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$, demostraremos que $\bigcap_{n \in \omega} X_n \in \mathcal{U}$.

Consideremos $Y = X \setminus (\bigcap_{n\in\omega} X_n)$. Definimos para $n = 0$, $Y_0 = \{x \in Y : x \notin X_0\}$ y para cada $n \in \omega$ tal que $n > 0$, $Y_n = \{x \in Y : \forall m < n(x \in X_m) \wedge (x \notin X_n)\}$. Si $x \in Y$, existe $n \in \omega$ tal que $x \notin X_n$, así $x \in Y_i$ para algún $i \leq n$ y sólo a él. Así, la familia $\{Y_n : n \in \omega \wedge Y_n \neq \emptyset\}$ es una partición para Y. Por lo tanto, $\{Y_n : n \in \omega \wedge Y_n \neq \emptyset\} \cup \{\bigcap_{n\in\omega} X_n\}$ es una partición de X. Por hipótesis, existe un único elemento en dicha partición que pertenece a $\mathcal{U}$. Si $Y_n \in \mathcal{U}$ para algún $n \in \omega$, entonces $\emptyset \in \mathcal{U}$ pues $Y_n \cap X_n$ es vacía. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{U}$ y así concluimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro σ-completo. $\square$

Probaremos otra caracterización de los ultrafiltros σ-completos.

Teorema 3.21. *Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro σ-completo sobre X si y sólo si para cualquier $\{X_n : n \in \omega\}$ familia de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{U}$, existe $n \in \omega$ tal que $X_n \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Demostraremos que, existe $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{U}$ y para todo $n \in \omega$, $X_n \notin \mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{U}$ no es un ultrafiltro σ-completo.

Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de subconjuntos de X. Se cumple que, $\bigcup_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{U}$ y $X_n \notin \mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$ si y sólo si $X \setminus (\bigcup_{n\in\omega} X_n) \notin \mathcal{U}$ y $X \setminus X_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$ si y sólo si $X \setminus X_n \in \mathcal{U}$ y $\bigcap_{n\in\omega} (X \setminus X_n) \notin \mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{U}$ no es σ-completo. $\square$

Si κ es un cardinal infinito. Se puede definir un ultrafiltro *κ-completo* de la siguiente manera.

Definición 3.22. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Llamamos a $\mathcal{U}$ un ultrafiltro κ-completo si es cerrado bajo intersecciones de menos de κ conjuntos, es decir, si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ con $\lambda < \kappa$ es una familia de subconjuntos de X tal que $X_\alpha \in \mathcal{U}$, entonces $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathcal{U}$.*

Se sigue de la definición que: si X es un conjunto y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X. Entonces $\mathcal{U}$ es σ-completo si y sólo si $\mathcal{U}$ es ω_1-completo.

Podremos caracterizar a estos ultrafiltros de manera análoga a los ultrafiltros σ-completos.

Teorema 3.23. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. $\mathcal{U}$ es κ-completo si y sólo si para cualquier partición con cardinalidad menor a κ existe un elemento de la partición que pertenece al ultrafiltro.*

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del Teorema 3.20 □

La otra caracterización de ultrafiltros σ-completos será también aplicable a los ultrafiltros κ-completos, no mencionaremos ya el teorema, pero resulta de mucha utilidad considerarla.

Corolario 3.24. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal κ-completo sobre X, todo conjunto en $\mathcal{U}$ tiene cardinalidad al menos κ*

Demostración. Supongamos que existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $|Y| < \kappa$. $Y = \bigcup_{x \in Y} \{x\}$, entonces $\{x\} \in \mathcal{U}$ para algún $x \in Y$. Lo cual contradice que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal. □

Corolario 3.25. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ. Entonces κ es un cardinal regular.*

Demostración. Supongamos que κ es singular. Entonces κ puede ser descrito como la unión de menos que κ conjuntos, todos con cardinalidad menor a κ. Por lo tanto, alguno de estos elementos en la unión tendría que estar en $\mathcal{U}$. Pero esto, como vimos en el corolario anterior, es una contradicción.

□

Finalizaremos el capítulo dando una definición más de otra clase de ultrafiltros.

3.5. Ultrafiltros normales

Sea κ un cardinal infinito y $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una sucesión de subconjuntos de κ. Definimos la *intersección diagonal de* $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ como sigue,

$$\mathop{\Delta}_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\xi < \kappa : \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha\}$$

Definición 3.26. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre κ. Decimos que $\mathcal{U}$ es normal si es cerrado bajo intersecciones diagonales, es decir, si $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una sucesión de subconjuntos de κ tal que cada $X_\alpha \in \mathcal{U}$, entonces $\mathop{\Delta}_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ también es un elemento de $\mathcal{U}$.*

Si además pedimos que en $\mathcal{U}$ un ultrafiltro normal no haya conjuntos de cardinalidad menor a κ podremos demostrar que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ completo.

Teorema 3.27. *Si $\mathcal{U}$ es normal sobre κ y cada uno de sus elementos es de cardinalidad κ, entonces $\mathcal{U}$ es κ-completo.*

Demostración. Sea $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ con $\lambda < \kappa$ una familia de elementos en $\mathcal{U}$, queremos demostrar que la intersección de la familia también es un elemento de $\mathcal{U}$.

Definiremos una sucesión de subconjuntos de κ como sigue, $Y_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha < \lambda$ y $Y_\alpha = \kappa$ si $\alpha \geq \lambda$.

Dado que $\mathcal{U}$ es normal la intersección diagonal de $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es elemento de $\mathcal{U}$. Además, puesto que todos los elementos en $\mathcal{U}$ tienen cardinalidad κ, $\{\xi : \lambda < \xi < \kappa\} \in \mathcal{U}$. Entonces $(\Delta_{\alpha<\kappa} Y_\alpha) \cap \{\xi : \lambda < \xi < \kappa\} \in \mathcal{U}$. Para terminar basta mostrar que $\Delta_{\alpha<\kappa} Y_\alpha \cap \{\xi : \lambda < \xi < \kappa\} \subseteq \bigcap_{i<\lambda} X_\alpha$.

Sea $\beta \in \Delta_{\alpha<\kappa} Y_\alpha \cap \{\xi : \lambda < \xi < \kappa\}$, entonces $\lambda < \beta$. Si $\alpha < \lambda$, entonces $\alpha < \beta$ y por definición de intersección diagonal se cumple que $\beta \in X_\alpha$ para toda $\alpha < \lambda$ y por tanto $\beta \in \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$.

Concluimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo. $\square$

Podemos preguntarnos sobre la función que tendrán estos últimos ultrafiltros, con los teoremas de particiones que hemos estudiado. Al igual que los ultrafiltros σ y κ completos, volveremos a retomarlos en el siguiente capítulo en el cual estudiamos una nueva relación de particiones, donde estos ultrafiltros son importantes.

4

Sobre la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_{\nu}^{<\omega}$

Este capítulo está dedicado, principalmente, al estudio de la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_{\nu}^{<\omega}$, que fue estudiada en gran parte por Erdös y Hajnal. Dicha relación tiene una importante aportación en la teoría de Ramsey, pues presenta los medios para dar una clasificación de los cardinales en torno a ella.

Comenzaremos dando una breve introducción sobre los cardinales medibles.

4.1. Cardinales medibles

Definición 4.1. *Sea X un conjunto infinito. Diremos que μ es una* medida *sobre X, si μ es una función de la potencia de X en el intervalo real $[0,1]$ que cumple las siguientes condiciones.*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(X) = 1$.*

2. *Si $X_1 \subseteq X_2$, entonces $\mu(X_1) \leq \mu(X_2)$.*

3. *Es no trivial, es decir, para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.*

4. *μ es aditiva, es decir para cualesquiera $X_1, X_2 \subseteq X$ tal que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ se cumple que $\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2)$.*

Y, si además la medida satisface que:

5. *Dada $\{X_n : n \in \omega\}$, una familia de subconjuntos de X ajenos dos a dos, entonces* $\mu(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n)$[1]

   decimos que la medida es σ-aditiva.

Si μ es una medida sobre X, tal que $\mu(Y) = 0$ o $\mu(Y) = 1$ para cualquier $Y \subseteq X$, entonces decimos que la medida es 2-valuada.

Sea μ una medida σ-aditiva y 2-valuada sobre X. Consideremos $\mathcal{U} = \{Y \subseteq X : \mu(Y) = 1\}$. Dado que μ es una medida sobre X, $\mu(X) = 1$. Por lo tanto, $X \in \mathcal{U}$. Si X_1,$X_2 \subseteq X$ tales que $X_1 \subseteq X_2$. Por la propiedad 2, $\mu(X_1) \leq \mu(X_2)$. Así, si $X_1 \in \mathcal{U}$, entonces $X_2 \in \mathcal{U}$. Supongamos que X_1,$X_2 \subseteq X$ tales que X_1,$X_2 \in \mathcal{U}$. Entonces $\mu(X_1) = \mu((X_1 \setminus X_2) \cup (X_1 \cap X_2)) = 1$ y $\mu(X_2) = \mu((X_2 \setminus X_1) \cup (X_1 \cap X_2)) = 1$. Dado que $(X_1 \setminus X_2) \cap (X_1 \cap X_2) = \emptyset$ y $(X_2 \setminus X_1) \cap (X_1 \cap X_2) = \emptyset$, se cumple que $1 = \mu(X_1) = \mu((X_1 \setminus X_2) \cup (X_1 \cap X_2)) = \mu(X_1 \setminus X_2) + \mu(X_1 \cap X_2)$ y $1 = \mu(X_2) = \mu((X_2 \setminus X_1) \cup (X_1 \cap X_2)) = \mu(X_2 \setminus X_1) + \mu(X_1 \cap X_2)$. Por lo tanto, alguno de los sumandos es cero. Supongamos que $\mu(X_1 \cap X_2) = 0$, entonces tanto $(X_1 \setminus X_2)$ como $(X_2 \setminus X_1)$ tienen medida 1. Así, $(X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \setminus X_1)$ tendría medida 2, lo cual contradice que μ es una medida. Por lo tanto, $\mu(X_1 \cap X_2) = 1$. Así, $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{U}$.

Demostramos que $\mathcal{U}$ es un filtro sobre X.

Dado que $\mu(\emptyset) = 0$, $\emptyset \notin \mathcal{U}$, por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un filtro no trivial.

Además, dado $Y \subseteq X$, su medida es 0 o 1 pues μ es 2-valuada: si $\mu(Y) = 0$, entonces $\mu(X \setminus Y) = 1$ pues $\mu(X) = 1$, por lo tanto, $X \setminus Y \in \mathcal{U}$. Concluimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X.

Dado que para todo $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$, $\{x\} \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal.

Finalmente, si $\{X_n : n \in \omega\}$ es una partición de X, alguno de los subconjuntos tiene medida 1, pues $\mu(X) = \mu(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n)$ y como μ es una medida 2-valuada, existe $n \in \omega$ tal que X_n tiene medida 1. Por lo tanto $X_n \in \mathcal{U}$ para algún $n \in \omega$

Concluimos que si μ es una medida σ-aditiva y 2-valuada, ésta define un ultrafiltro $\sigma-$completo no principal sobre X.

[1]Si $\{x_i : i \in I\}$ es una colección de números reales no negativos, definimos la $\sum_{i\in I} x_i = sup\{\sum_{i\in F} x_i : F \in [I]^{<\omega}\}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal, σ-completo sobre X. Consideremos la siguiente función de los subconjuntos de X.

$$\mu(Y) = \begin{cases} 1 \text{ si } Y \in \mathcal{U} \\ 0 \text{ si } Y \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Demostraremos que μ es una medida σ-aditiva y 2-valuada en X.

1. Dado que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no trivial, $\emptyset \notin \mathcal{U}$ y $X \in \mathcal{U}$, por lo tanto, $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(X) = 1$

2. Sean X_1,$X_2 \subseteq X$ tales que $X_1 \subseteq X_2$. Si $X_1 \in \mathcal{U}$, $X_2 \in \mathcal{U}$ y por la definición de μ, $\mu(X_1) = 1 = \mu(X_2)$. Por otro lado, si $X_1 \notin \mathcal{U}$ y $X_2 \notin \mathcal{U}$, entonces $\mu(X_1) = 0 = \mu(X_2)$. Finalmente si $X_1 \notin \mathcal{U}$ y $X_2 \in \mathcal{U}$, entonces $\mu(X_1) = 0 < 1 = \mu(X_2)$. En cualquier caso se cumple que $\mu(X_1) \leq \mu(X_2)$.

3. Si $x \in X$, $\{x\} \notin \mathcal{U}$, pues $\mathcal{U}$ es ultrafiltro no principal, por lo tanto, $\mu(\{x\}) = 0$

4. Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos de X ajenos dos a dos. Si $X_k \in \mathcal{U}$ para algún $k \in \omega$, entonces para todo $m \in \omega$ tal que $m \neq k$, $X_m \notin \mathcal{U}$. De lo contrario, $X_k \cap X_m = \emptyset \in \mathcal{U}$ y esto contradice la hipótesis de que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Además, dado que $X_k \subseteq \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$, tenemos que $\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mu(X_k) = 1$, $\mu(X_m) = 0$ para todo $m \in \omega$ tal que $m \neq k$ y $1 = \mu(\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n) = \sum\limits_{n\in\omega} \mu(X_n)$. Por otro lado, si $X_n \notin \mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$, la unión de todos ellos tampoco sería elemento de $\mathcal{U}$, si lo fuera, al ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro σ-completo, algún X_n debería estarlo, lo cual contradiría la hipótesis, entonces $0 = \mu(\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n) = \sum\limits_{n\in\omega} \mu(X_n)$.

Hemos demostrado lo siguiente:

Proposición 4.2. *Sea X un conjunto infinito. Los siguientes son equivalentes.*

1. *Existe μ, una medida σ-aditiva, 2-valuada sobre X*

2. *Existe $\mathcal{U}$, un ultrafiltro no principal σ-completo sobre X.*

Si μ es una función de X en el intervalo $[0,1]$ que satisface las condiciones $1-4$ de la definición 4.1 y además, para cualquier familia $\{X_\alpha \subseteq X : \alpha < \lambda\}$ con $\lambda < \kappa$, de subconjuntos ajenos dos a dos se cumple que $\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(X_\alpha)$, decimos que μ es una medida κ-aditiva.

Al igual que con los ultrafiltros σ-completos y medidas σ-aditivas, 2-valudas sobre un conjunto X, podemos demostrar que:

Proposición 4.3. *Sea X un conjunto infinito. Los siguientes son equivalentes.*

1. *Existe μ, una medida 2-valuada κ-aditiva sobre X*

2. *Existe $\mathcal{U}$, un ultrafiltro no principal κ-completo sobre X.*

Estamos listos para dar la definición de cardinal medible.

Definición 4.4. *Sea $\kappa > \omega$ un cardinal. Decimos que κ es* medible *si existe un ultrafiltro no principal κ-completo en κ.*

De las observaciones anteriores podemos decir que κ es medible si existe una medida 2-valuada κ-aditiva, como una definición alternativa.

En seguida mostraremos que los cardinales medibles son grandes.

Teorema 4.5. *Sea $\kappa > \omega$. Si κ es medible, entonces κ es un cardinal fuertemente inaccesible.*

Demostración. Al ser κ medible, existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ.

Sabemos, por el corolario 3.25, que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal κ-completo definido sobre κ, entonces κ debe ser regular. Demostraremos que κ también es fuerte.

Supongamos que existe λ tal que $2^\lambda \geq \kappa$. Sea $X \subseteq 2^\lambda$ tal que $|X| = \kappa$ y $\mathcal{U}'$ el ultrafiltro no principal κ-completo, inducido por U sobre X.

Para cada $\alpha < \lambda$ consideremos los siguientes conjuntos, $\{f \in X : f(\alpha) = 0\}$ y $\{f \in X : f(\alpha) = 1\}$. Estos conjuntos son una partición de X, entonces alguno de ellos, y sólo uno, es elemento de $\mathcal{U}'$. Supongamos que X_α es dicho conjunto. Además, dado que $\mathcal{U}'$ es κ-completo, $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathcal{U}'$. Pero, si f,$g \in \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha$, f,$g \in X_\alpha$ para cada α, entonces $f(\alpha) = g(\alpha)$ para cada α. Así, la cadinalidad de $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ es 1 y, por lo tanto, $\mathcal{U}'$ es principal , lo cual contradice nuestra hipótesis. Entonces dicho λ no existe y así concluimos que κ es un cardinal inaccesible. □

Como consecuencia de este teorema tenemos que en ZFE no puede ser demostrada la existencia de un cardinal medible, pues en ZFE no puede ser demostrada la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles.

Asumiremos que, si κ es un cardinal medible podemos definir un ultrafiltro normal sobre κ que también es un ultrafiltro κ-completo. Este resultado se debe a Scott, Keisler y Tarski y puede ser revisado en [Jech], pp 134-135.

4.2. Cardinales de Erdös y de Ramsey.

Consideremos la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$, donde κ es un cardinal y α un ordinal. Según lo que hemos estudiado hasta ahora, lo natural sería decir que dicha relación se satisface si y sólo para toda F, 2-coloración de $[\kappa]^{<\omega}$, existen $i \in \{0, 1\}$ y $H \subseteq \kappa$ tal que H tiene la misma cardinalidad que α y $F''[H]^{<\omega} = \{i\}$, es decir, $F{\restriction}_{[H]^n} = \{i\}$ para toda $n \in \omega$. Pero, si consideramos a F, una 2-coloración de $[\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $s \in [\kappa]^{<\omega}$:

$$F(s) = \begin{cases} 0 \text{ si para algún } n \in \omega |s| = 2n \\ 1 \text{ si para algún } n \in \omega |s| = 2n + 1 \end{cases}$$

Podemos observar que, si $H \subseteq \kappa$ tal que $|H| \geq 2$, entonces H no puede ser un conjunto homogéneo. Pues si $F''[H]^n = \{i\}$ para toda n con $i \in \{0, 1\}$ significaría que todos los subconjuntos de H tienen o bien cardinalidad par o impar, lo cual no es posible. Por lo tanto, para cualesquiera κ y α, la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ no sería válida.

Por ello, estableceremos una definición de validez para la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$, un tanto diferente a lo establecido en otros capítulos que además involucra al tipo de orden de α.

Definición 4.6. *Sea κ un cardinal y α un ordinal. La relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ se satisface si y sólo si para cualquier F, 2-coloración de $[\kappa]^{<\omega}$ existe $H \subseteq \kappa$ tal que H tiene tipo de orden α y para* *cualquier* $n \in \omega$ *existe* $i \in \{0,1\}$ *tal que* $F\restriction_{[H]^n} = \{i\}$. *Es decir,* H *es homogéneo para cada* $F\restriction_{[H]^n}$ *con* $n \in \omega$.

Por conveniencia llamaremos a H *conjunto homogéneo para* F.

Estaremos interesados en ciertos cardinales que satisfacen esta relación.

Definición 4.7. *Sea* $\alpha \geq \omega$ *y* $\omega \leq \kappa$. *Decimos que* κ *es el* cardinal de Erdös de α *si* κ *es el menor cardinal que satisface la relación* $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$.

Dichos cardinales serán denotados por $\kappa(\alpha)$.

En la definición de estos cardinales, asumimos que existe algún cardinal que satisface la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$, sin embargo, no puede demostrarse en ZFE que esto se cumple, pues el cardinal de Erdös de $\alpha \geq \omega$, es un cardinal inaccesible, puede consultarse en [Kana], pag.83.

Probaremos algunas propiedades de los cardinales de Erdös.

Teorema 4.8. *Si* $\omega \leq \alpha < \beta$, *entonces* $\kappa(\alpha) < \kappa(\beta)$.

Demostración. Demostraremos que existe una 2-coloración de los subconjuntos finitos de $\kappa(\alpha)$ tal que cualquier conjunto homogéneo tiene tipo de orden menor o igual que α.

Por definición para cada $\lambda < \kappa(\alpha)$ la relación $\lambda \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ no se cumple , entonces para cada $\lambda < \kappa(\alpha)$, consideremos f_λ una 2-coloración de los subconjuntos finitos de λ para la cual no exista conjunto homogéneo con tipo de orden α.

Definamos $F : [\kappa(\alpha)]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$ como $F(s) = f_\lambda(s \setminus \{\lambda\})$ donde λ es el supremo de s, con $s \in [\kappa(\alpha)]^{<\omega}$.

Sea H un conjunto homogéneo para F, el cual existe por hipótesis. Sea $\lambda \in H$. Veamos que $H \cap \lambda$ es un conjunto homogéneo para f_λ. Sean s_1,$s_2 \in [H \cap \lambda]^{<\omega}$, tales que $|s_1| = |s_2|$. Por definición, $F(s_1 \cup \{\lambda\}) = f_\lambda(s_1)$ y $F(s_2 \cup \{\lambda\}) = f_\lambda(s_2)$ y dado que tanto $s_1 \cup \{\lambda\}$ como $s_2 \cup \{\lambda\}$ son subconjuntos finitos de H tales que $|s_1 \cup \{\lambda\}| = |s_2 \cup \{\lambda\}|$ se cumple que $F(s_1 \cup \{\lambda\}) = F(s_2 \cup \{\lambda\})$ lo cual implica que $f_\lambda(s_1) = f_\lambda(s_2)$. Entonces, efectivamente, $H \cap \lambda$ es homogéneo para f_λ, por hipótesis, el tipo de orden de $H \cap \lambda$ es menor que α. Esto se tiene para cada elemento de H, por lo tanto, H tiene tipo de orden menor o igual que α. Concluimos que $\kappa(\alpha) \longrightarrow (\beta)_2^{<\omega}$ no se cumple y con ello $\kappa(\alpha) < \kappa(\beta)$. $\square$

Teorema 4.9. *Sea $\alpha \geq \omega$. El cardinal de Erdös de α es regular.*

Demostración. Supongamos que $\kappa(\alpha)$ es singular. Sea $h : \kappa(\alpha) \longrightarrow \lambda$, con $\lambda < \kappa(\alpha)$, no decreciente tal que para cada $\gamma < \lambda$, $|h^{-1}(\gamma)| < \kappa(\alpha)$.

Consideremos f una 2-coloración de los subconjuntos finitos de λ y para cada $\gamma < \lambda$, $f_\gamma : [h^{-1}(\{\gamma\})]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$ para las cuales no existe conjunto homogéneo con tipo de orden α.

Para cada $s = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in [\kappa(\alpha)]^{<\omega}$, tal que $\xi_i < \xi_j$ si $i < j$, definimos

$$F(\{\xi_1, \dots, \xi_n\}) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2 \text{ y } h(\xi_1) = h(\xi_2) \\ 1 \text{ si } n = 2 \text{ y } h(\xi_1) < h(\xi_2) \\ f_\gamma(\{\xi_3, \dots, \xi_n\}) \text{ si } n > 2 \text{ y } h(\xi_1) = \dots = h(\xi_n) = \gamma \\ f(\{h(\xi_3), \dots, h(\xi_n)\}) \text{ si } n > 2 \text{ y } h(\xi_1) < \dots < h(\xi_n) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Por hipótesis, existe H' subconjunto de $\kappa(\alpha)$ con tipo de orden α homogéneo para F. Sean ξ_1 y ξ_2 los dos primeros elementos de H' y sea $H = H' \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$, el cual, también, tiene tipo de orden α.

Si $F''[H']^2 = \{0\}$, entonces $h[H'] = \{\gamma\}$ para algún $\gamma \in \lambda$. Veamos que H es homogéneo para f_γ. Sean $n \in \omega$ y $s_1, s_2 \in [H]^n$ tales que $s_1 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, s_2 = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ y $\varphi_i < \varphi_j$ y $\tau_i < \tau_j$ si $i < j$. Dado que H' es homogéneo para F, $F(\{\xi_1, \xi_2\} \cup s_1) = F(\{\xi_1, \xi_2\} \cup s_2)$. Se sigue de la tercera condición de F que $f_\gamma(s_1) = f_\gamma(s_2)$. Por lo tanto, H es un conjunto homogéneo con tipo de orden α para f_γ, lo cual contradice la hipótesis.

Si $F''[H']^2 = \{1\}$, entonces el tipo de orden de $h[H']$ es α. Sean $n \in \omega$ y $s_1, s_2 \in [H]^n$ tales que $s_1 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, s_2 = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ y $\varphi_i < \varphi_j$ y $\tau_i < \tau_j$ si $i < j$. Al ser H' homogéneo para F, $F(\{\xi_1, \xi_2\} \cup s_1) = F(\{\xi_1, \xi_2\} \cup s_2)$, entonces por la cuarta condición de F, $f(\{h(\varphi_3), \dots, h(\varphi_n)\}) = f(\{h(\tau_3), \dots, h(\tau_n)\})$. Por lo tanto H es un conjunto homogéneo con tipo de orden α para f, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\kappa(\alpha)$ es regular.

□

En la definición de cardinal de Erdös está implicita una clase de los ordinales infinitos, tal que a cada $\alpha \geq \omega$ asignamos el menor cardinal que hace cierta la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$. Pondremos especial atención a los cardinales que quedan fijos bajo dicha asignación. A continuación definimos este tipo de cardinales.

Definición 4.10. *Sea κ un cardinal. Decimos que κ es un cardinal de Ramsey si y sólo si se cumple la relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^{<\omega}$*

Consideremos $\kappa = \omega$, veremos que existe una 2-coloración de los subconjuntos finitos de ω para la cual no existe conjunto homogéneo de cardinalidad infinita.

Dado s un subconjunto finito de ω tal que $|s| = n$. Definimos F como sigue:

$$F(s) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in s \\ 1 \text{ si } n \notin s \end{cases}$$

Supongamos que existe $H \subseteq \omega$ infinito homogéneo para F, es decir, para cada $n \in \omega$ existe $i \in \{0,1\}$ tal que $F''[H]^n = \{i\}$. Si para algún $n \in \omega$, $F''[H]^n = \{0\}$, se tiene que para todo $s \in [H]^n$, $n \in \omega$. Sin embargo, para cualquier $s \in [H \setminus \{n\}]^n$, $F(s) = 1$, lo cual contradice la homogeneidad de H. Por lo tanto, $F''[H]^n = \{1\}$ para todo $n \in \omega$. Veamos que para cualquier $n \in \omega$ tal que $n > 1$, $n \notin H$. Si $n > 1$ y $n \in H$, para cualquier $s' \in [H]^{n-1}$ tendremos que $s = s' \cup \{n\} \in [H]^n$ tal que $n \in s$ y por tanto $F(s) = 0$, lo cual contradice la homogeneidad de H. Así, H no puede ser infinito.

Por lo tanto, tal H no existe.

Hemos probado el siguiente lema.

Lema 4.11. *ω no es un cardinal de Ramsey*

Los cardinales de Ramsey pueden ser caracterizados con la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_\lambda^{<\omega}$. La cual se define de manera análoga a la definición 4.6.

Definición 4.12. *Sean κ, λ cardinales y α un ordinal. Decimos que la relación $\kappa \longrightarrow (\alpha)_\lambda^{<\omega}$ es válida si para cualquier F, λ-coloración de los subconjuntos finitos de κ existe $H \subseteq \kappa$ con tipo de orden α, homogéneo para cada $F\restriction_{[H]^n}$ para todo $n \in \omega$.*

Teorema 4.13. *κ es un cardinal de Ramsey si y sólo si para cada $\lambda < \kappa$ se cumple la relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_{\lambda}$.*

Demostración. $\Longleftarrow$) Si para cada $\lambda < \kappa$ se cumple la relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_{\lambda}$ en particular se satisface $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_{2}$, por lo tanto, κ es un cardinal de Ramsey.

$\Longrightarrow$) Dado $\lambda < \kappa$ consideremos f una λ-coloración de los subconjuntos finitos de κ y tomaremos F una 2-coloración de $[\kappa]^{<\omega}$ como sigue:

Para cada $s = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\xi_1 < \cdots < \xi_n$, definimos

$$F(\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2m \text{ para algún } m \in \omega \text{ y } f(\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}) = f(\{\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n\}) \\ 1 \textit{ en otro caso} \end{cases}$$

Sea H un conjunto homogéneo para F de cardinalidad κ, el cual existe por hipótesis. Tomemos $n \in \omega$ tal que $n = 2m$ para algún $m \in \omega$.

Como $\lambda < \kappa$, $f \restriction_{[H]^m}$ no es inyectiva. Por lo tanto, existen s_1, $s_2 \in [H]^m$ tales que $s_1 < s_2$[2] y $f(s_1) = f(s_2)$, entonces $F(s_1 \cup s_2) = 0$. Por la homogeneidad de H, $F''[H]^n = \{0\}$. Entonces para cualesquiera s_1,$s_2 \in [H]^m$, si s es, también, un elemento de $[H]^m$ tal que $s_1, s_2 < s$ tendremos que $f(s_1) = f(s)$ y $f(s_2) = f(s)$, por tanto, $f(s_1) = f(s_2)$, así H es homogéneo también para f. Por lo tanto, se cumple la relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_{\lambda}$. □

En particular, como no es demostrable la existencia de un cardinal de Erdös en ZFE, tampoco podremos hacerlo para un cardinal de Ramsey.

Probaremos un teorema que nos permitirá establecer una relación entre los cardinales medibles y los cardinales de Ramsey.

Teorema 4.14 (Rowbottom). *Si κ es un cardinal medible y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro normal y κ-completo sobre κ, entonces para cualquier λ-coloración de $[\kappa]^{<\omega}$, con $\lambda < \kappa$ existe un conjunto homogéneo de cardinalidad κ en $\mathcal{U}$.*

[2]Recordemos que dados $s, t \in [\omega]^{<\omega}$, escribimos $s < t$ para denotar que $max(s) < min(t)$.

Demostración. Sea $\lambda < \kappa$ y consideremos $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \lambda$.

Si para cada $n \in \omega$ podemos encontrar $X_n \in \mathcal{U}$ homogéneo para $F \restriction_{[\kappa]^n}$, entonces la intersección de los X_n también será elemento de $\mathcal{U}$, pues $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo y éste sería un conjunto homogéneo para F.

Por lo tanto, para demostrar el teorema es suficiente probar que para todo natural n y para toda f, λ-coloración de $[\kappa]^n$ existe un conjunto homogéneo de cardinalidad κ en $\mathcal{U}$. Demostraremos esto por inducción.

Si $n = 1$ tenemos que f es una λ-coloración de los subconjuntos de cardinalidad 1, la cual determina una partición de κ y al ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro κ-completo, algún elemento de la partición pertenece a $\mathcal{U}$ y dicho conjunto resulta homogéneo para f.

Supongamos que para $n \geq 1$ se cumple el enunciado y sea $f : [\kappa]^{n+1} \longrightarrow \lambda$. Para cada $s \in [\kappa]^n$ definimos la función $f_s : \kappa \longrightarrow \lambda$ como sigue,

$$f_s(\beta) = \begin{cases} f(s \cup \{\beta\}) \text{ si } max(s) < \beta \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Si $s \in [\kappa]^n$, f_s determina una partición de κ de cardinalidad λ. Entonces, al ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro κ-completo, para cualquier $s \in [\kappa]^n$, existe $H_s \in \mathcal{U}$ y $\delta_s < \lambda$ tal que $f_s[H_s] = \{\delta_s\}$.

Por otro lado, la asignación $s \longrightarrow \delta_s$ induce una partición de κ con cardinalidad menor que κ. Entonces existe $S = \{s_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [\kappa]^n$ y $\delta < \lambda$ tal que $f_{s_\alpha}[H_{s_\alpha}] = \{\delta\}$ para todo $s_\alpha \in S$. Sea $Z' \subseteq \{H_{s_\alpha} : s_\alpha \in S\}$ tal que $|Z'| < \kappa$, nuevamente, al ser $\mathcal{U}$ κ-completo, $Z = \bigcap Z' \in \mathcal{U}$ y cumple que para $s \in [Z]^n$, $\delta_s = \delta$.

Consideremos para cada $\alpha < \kappa$ el conjunto $Z_\alpha = \bigcap\{H_s : max(s) \leq \alpha\}$. Como para cada $s \in [\kappa]^n$, $H_s \in \mathcal{U}$ se cumple que Z_α también es un elemento en $\mathcal{U}$ para cada $\alpha < \kappa$. Usando la normalidad de $\mathcal{U}$ tenemos que $\underset{\alpha<\kappa}{\Delta} Z_\alpha \in \mathcal{U}$, por lo tanto, $Z \cap \underset{\alpha<\kappa}{\Delta} Z_\alpha \in \mathcal{U}$.

Afirmamos que $H = Z \cap \underset{\alpha<\kappa}{\Delta} Z_\alpha \in \mathcal{U}$ es un conjunto homogéneo para f. Consideremos t un elemento en los subconjuntos de cardinalidad $n+1$ de H y escribimos $t = s \cup \{\beta\}$ para algún s y β tal que $max(s) < \beta$. Entonces $f(t) = f_s(\beta) = \delta_s = \delta$. Por lo tanto, $f''[H]^{n+1} = \{\delta\}$.

Así, hemos encontrado $H \subseteq \mathcal{U}$ homogéneo para f.

Y para terminar la demostración, observemos que la cardinalidad del conjunto homogéneo es una consecuencia de que $\mathcal{U}$ sea un ultrafiltro κ-completo. $\square$

Corolario 4.15. *Todo cardinal medible es un cardinal de Ramsey.*

4.3. Cardinales de Rowbottom.

Rowbottom estudió una forma de relacionar la Teoría de Modelos con las relaciones de particiones a través de un concepto para estructuras con lenguajes de primer orden con un predicado unario distinguido y la relación de particiones de corchetes cerrados.[Kana]pp.85-88.

En esta última sección mencionaremos algunos hechos sobre este estudio de nuestro principal interés.

Definición 4.16. *Entenderemos que la relación $\kappa \longrightarrow [\lambda]^{\mu}_{\nu}$ es cierta si para cada F, ν-coloración de los subconjuntos de cardinalidad μ de κ, existe $H \subseteq \kappa$ con cardinalidad λ tal que $F''[H]^{\mu} \neq \nu$.*

En cambio, diremos que la relación $\kappa \longrightarrow [\lambda]^{\mu}_{\nu',<\nu}$ es válida si para cada F, ν'-coloración de los subconjuntos de cardinalidad μ de κ, existe $H \subseteq \kappa$ con cardinalidad λ tal que el cardinal de $F''[H]^{\mu}$ es menor a ν.

Definición 4.17. *Dados $\omega < \nu < \kappa$ diremos que κ es ν-Rowbottom si y sólo si la relación $\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\lambda,<\nu}$ es cierta para cada $\lambda < \kappa$.*

Y κ es Rowbottom si y sólo si κ es ω_1-Rowbottom.

Finalmente, recordemos que un cardinal de Ramsey es aquel que cumple con la relación $\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{2}$ y κ satisface esta relación si y sólo si para cualquiera $\gamma < \kappa$ la relación $\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\gamma}$ es cierta. Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.18. *Todo cardinal de Ramsey es un cardinal de Rowbottom*

Hemos visto que los cardinales de Ramsey están acotados inferiormente por los cardinales medibles y superiormente por los cardinales de Rowbottom.

5

Sobre la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$

En los anteriores capítulos consideramos coloraciones de $[\kappa]^n$ para algún $n \in \omega$ o bien de $[\kappa]^{<\omega}$, con κ un cardinal. En este capítulo consideraremos 2-coloraciones de los subconjuntos infinitos de ω y pretendemos establecer si la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ es válida. Es decir, si para cada F, 2-coloración de $[\omega]^{\omega}$, podemos hallar $H \subseteq \omega$ infinito y homogéneo para F.

Esto nos llevará al estudio de $[\omega]^{\omega}$ como espacio topológico, por lo que daremos un pequeño repaso de espacios topológicos. Para consultar con detalle los resultados establecidos en esta sección puede revisarse[C.T] .

Si X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X tal que $\emptyset$, $X \in \tau$ y además τ es cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas, decimos que τ es una topología para X. A los elementos de τ les llamamos conjuntos abiertos y a los complementos de éstos, conjuntos cerrados.

Un espacio topológico es un par (X, τ), donde X es un conjunto y τ una topología en X. Con frecuencia omitimos (X, τ) y sólo decimos que X es un espacio topológico.

Si $Y \subseteq X$ y X es un espacio topológico, podemos dar una topología para Y, donde $\tau_y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$, a esta topología se le conoce como la topología relativa y al espacio (Y, τ_y) le llamamos subespacio de (X, τ).

Dado (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$, decimos que $\mathcal{B}$ es una *base* para la topología si todo elemento de τ puede verse como la unión de elementos en $\mathcal{B}$, es decir, si para todo $Y \in \tau$, existe $B \subseteq \mathcal{B}$ tal que $Y = \bigcup B$. Si existe una base numerable para (X, τ), decimos que el espacio es segundo numerable.

Se puede demostrar que si X es un conjunto y $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X, tal que, $X = \bigcup \mathcal{B}$ y para cualesquiera B_1,$B_2 \in \mathcal{B}$, si $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para alguna topología en X.

Sea X es un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Se define el interior de Y en X, como la unión de todos los abiertos que están contenidos en Y y lo denotamos por $int(Y)$. Así, $int(Y) = \bigcup\{U \subseteq X : U \in \tau \wedge U \subseteq Y\}$. A los elementos que pertenecen al interior de Y les llamamos puntos interiores. Se puede demostrar que Y es un conjunto abierto si y sólo si es igual a su interior. Definimos la cerradura de Y, la cual denotamos por $\overline{Y}$, como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a Y, es decir, $\overline{Y} = \bigcap\{C \subseteq X : C \text{ es cerrado} \wedge Y \subseteq C\}$. Se cumple que $x \in \overline{Y}$ si y sólo si para todo $U \in \tau$ tal que $x \in \tau$, $U \cap Y \neq \emptyset$. Además, al igual que con el interior, se puede demostrar que Y es cerrado si y sólo si coincide con su cerradura. Denotamos por $Fr(Y)$ a la frontera de Y, la cual se define como $Fr(Y) = \overline{Y} \cap (\overline{X \setminus Y})$. Por definición, la frontera de Y es un conjunto cerrado. A los elementos de la frontera de Y, les llamamos puntos frontera y se tiene que, $x \in Fr(Y)$ si y sólo si para cualquier $U \in \tau$ tal que $x \in U$, $U \cap Y \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$.

Decimos que (X, τ) es separable si existe $D \subseteq X$ numerable, tal que todo abierto lo intersecta. En general, si $D \subseteq X$ intersecta a cada abierto en X, llamamos a D un conjunto denso. Si D es un conjunto tal que $int(\overline{D})$ es vacío, decimos que D es un conjunto nunca denso. Una caracterización de estos conjuntos afirma que D es nunca denso si y sólo si para todo $U \subseteq X$ abierto no vacío, existe $U' \subseteq U$ abierto no vacío tal que $U' \cap D = \emptyset$.

Si (X, τ) y (Y, τ') son dos espacios topológicos y f es una función de X en Y, decimos que f es continua en $x \in X$, si para cualquier $V \subseteq Y$ abierto tal que $f(x) \in V$, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. f será continua si es continua en x para todo $x \in X$. Se puede demostrar que f es continua si y sólo si la imagen inversa de conjuntos abiertos en Y son conjuntos abiertos en X. Análogamente para conjuntos cerrados. Esta caracterización de la noción de continuidad resulta muy útil. Notemos que para garantizar que f es continua, podemos restringirnos a una base para el espacio Y y verificar que la imagen inversa de cada conjunto básico es abierto en X, pues todo abierto en Y es unión de conjuntos básicos.

Dados (X, τ) y (Y, τ') espacios topológicos, escribimos $X \simeq Y$ para denotar que existe una función $f : X \longrightarrow Y$ biyectiva, continua, con inversa continua. A tal f le llamamos homeomorfismo y decimos que el espacio (X, τ) es homeomorfo al espacio (Y, τ').

Si f es una función de X en Y, con X y Y espacios topológicos, tal que para cada $U \subseteq X$ abierto, $f(U)$ es un conjunto abierto en Y decimos que f es una función abierta.

Notemos que si $f : X \longrightarrow Y$ es una función biyectiva, *f^{-1} es continua si y sólo si f es abierta*, pues si $U \subseteq X$ abierto, al ser f^{-1} una función continua tenemos que $(f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en Y y dado que $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$, $f(U)$ es abierto, por lo tanto, f es abierta. Por otro lado si f es abierta, para cualquier $U \subseteq X$ abierto, $f(U)$ es abierto entonces, f^{-1} es una función continua, pues $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$.

Como consecuencia tenemos que f es un homeomorfismo si y sólo si f es biyectiva, continua y abierta.

Si X es un conjunto y d una función tal que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumplen las condiciones

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$

2. $d(x, y) = d(y, x)$

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

decimos que (X, d) es un espacio métrico. A la función d le llamamos *métrica.*

Notemos que a todo conjunto X, podemos darle estructura de espacio métrico, definiendo para cada x,$y \in X$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x, y) = 0$ en caso contrario. A la función d la llamamos métrica discreta.

Sea (X, d) un espacio métrico y $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de elementos en X. $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que si $m, n \geq N$, $d(x_m, x_n) < \epsilon$. $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión convergente si existe $l \in X$ tal que para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que si $n > N$, $d(x_n, l) < \epsilon$. Diremos que (X, d) es un espacio completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge. En cuyo caso llamamos a d una métrica completa para X.

A todo espacio métrico podemos darle una estructura de espacio topológico. Para ello se considera a la familia de los conjuntos $B_\epsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \epsilon\}$ con $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. A la topología generada por esta familia le llamamos topología asociada a d o inducida por d y la denotamos por τ_d.

Por otro lado, si (X, τ) es un espacio topológico para el cual existe una métrica tal que la topología inducida por ésta es τ, llamaremos a (X, τ) un espacio metrizable y decimos que d es compatible con τ. Si además la métrica resulta ser completa, decimos que (X, τ) es un espacio completamente metrizable.

Pasaremos a introducir una clase de espacios que serán de gran importancia.

5.1. Espacios Polacos

Definición 5.1. *Sea X un espacio topológico. (X, τ) es un* espacio polaco *si es un espacio separable, completamente metrizable.*

Mostraremos que la propiedad de ser un espacio polaco se preserva bajo homeomerfismos. Una propiedad que es preservada bajo homeomorfismos es llamada una propiedad topológica. En otras palabras, demostraremos que ser un espacio polaco es una propiedad topológica.

Teorema 5.2. *Si (X, τ_X) es un espacio polaco y (Y, τ_Y) es un espacio homeomorfo a (X, τ_X), entonces (Y, τ_Y) también es un espacio polaco.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo.

Sea D un conjunto denso numerable en X, el cual existe pues X es un espacio polaco. Afirmamos que $f(D)$ es un conjunto denso numerable en Y. Sea $V \subseteq Y$ abierto, entonces $f(D) \cap V \neq \emptyset$ ya que $f^{-1}(f(D) \cap V) = f^{-1}f(D) \cap f^{-1}(V) = D \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, pues D es un conjunto denso y f una función continua. La numerabilidad se sigue de que f es biyectiva.

Veamos que la métrica compatible que existe en X induce una métrica sobre Y que también es compatible con su topología.

Definimos $d_Y : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$.

Sean $y_1, y_2 \in Y$. Supongamos que $d_Y(y_1, y_2) = 0$. Se sigue de la definición que $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = 0$ y dado que d_X es métrica, $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$. Por la inyectividad, $y_1 = y_2$. Por lo tanto, $d_Y(y_1, y_2) = 0$ si y sólo si $y_1 = y_2$. Además, por definición y dado que d_X es una métrica, $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = d_X(f^{-1}(y_2), f^{-1}(y_1)) = d_Y(y_2, y_1)$, por lo tanto, $d_Y(y_1, y_2) = d_Y(y_2, y_1)$. Finalmente, $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$ y dado que para todo $x \in X$, $x = f^{-1}(y)$ para un único $y \in Y$, tenemos que $d_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) \leq d_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y)) + d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y_2))$. Entonces $d_Y(y_1, y_2) \leq d_Y(y_1, y) + d_Y(y, y_2)$. Concluimos que d_Y es una métrica para Y.

Ahora, consideremos $U \subseteq Y$ abierto y sea $y \in U$. $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X y $f^{-1}(y) \in f^{-1}(U)$. Dado que X es metrizable, existe $B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y)) \subseteq f^{-1}(U)$, entonces $B_{\epsilon_{d_Y}}(y) \subseteq U$. Pues si $y' \in B_{\epsilon_{d_Y}}(y)$, por definición, $d_Y(y', y) = d_X(f^{-1}(y'), f^{-1}(y)) < \epsilon$. Entonces $f^{-1}(y') \in B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y))$ y dado que $B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y)) \subseteq f^{-1}(U)$, $f^{-1}(y') \in f^{-1}(U)$ por lo tanto, $y' \in U$. Entonces para cada elemento de U, un conjunto abierto en Y, podemos encontrar un abierto básico de la topologia inducida por la métrica d_y que se queda contenido en U.

Por otro lado, consideremos a V, un subconjunto abierto en la topología inducida por d_Y e $y' \in V$. Ya que V se puede ver como la unión de conjuntos básicos, existe $B_{\epsilon_{d_Y}}(y)$ tal que $y' \in B_{\epsilon_{d_Y}}(y)$ y $B_{\epsilon_{d_Y}}(y) \subseteq V$. Dado que $y' \in B_{\epsilon_{d_Y}}(y)$ tenemos que $d_Y(y', y) = d_X(f^{-1}(y'), f^{-1}(y)) < \epsilon$, por tanto, $f^{-1}(y') \in B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y))$. Ya que X metrizable, $B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y))$ es un abierto en X , entonces $y' \in f(B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y)))$ y además este conjunto es un abierto en la topología de Y. Notemos que $f(B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y))) \subseteq B_{\epsilon_{d_Y}}(y)$, pues si $z \in f(B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y)))$, entonces $f^{-1}(z) \in B_{\epsilon_{d_X}}(f^{-1}(y)))$, por lo que $d_X(f^{-1}(z), f^{-1}(y)) = d_Y(z, y) < \epsilon$, por lo tanto, $z \in B_{\epsilon_{d_Y}}(y)$. Encontramos un abierto en Y que se queda contenido en V para cada punto en él.

Hemos demostrado que la topología inducida por la métrica es compatible con la topología de Y. Por lo tanto Y es un espacio metrizable.

d_Y es una métrica completa pues d_X lo es. Si $\{y_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de Cauchy, $\{f^{-1}(y_n) : n \in \omega\}$ es una sucesión de Cauchy en X y esta converge a un punto $x = f^{-1}(y)$ en X y por la definición de d_Y tendremos que $\{y_n : n \in \omega\}$ converge a y.

Concluimos que Y es un espacio separable, completamente metrizable y por tanto un espacio polaco.

$\square$

Daremos algunos ejemplos de estos espacios.

- Sea X, un conjunto numerable.

  La potencia de X es una topología en X, la cual se conoce como topología discreta y a X con esta topología le llamamos espacio discreto. Al ser X un conjunto numerable e intersectar a todos sus subconjuntos tenemos que X es un conjunto denso, en sí mismo, numerable. Por tanto un espacio discreto numerable es un espacio separable.

  Por otro lado, si consideremos la métrica discreta para X, para todo $x \in X$ y para cualquier ϵ, tal que $0 < \epsilon < 1$, se tiene que $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\} = \{x\}$, entonces los conjuntos unitarios están en la topología inducida por d y por tanto esta topología coincide con la discreta, por lo que un espacio discreto numerable es metrizable.

  Finalmente, si $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de Cauchy en X, existe $k \in \omega$ tal que para cada $n \geq k$, $x_k = x_n$ por lo que ésta sucesión converge. Por lo tanto el espacio es completo.

  Concluimos que todo espacio discreto numerable es un espacio separable, completamente metrizable y por lo tanto un espacio polaco.

- Denotaremos por $\mathcal{N}$ al conjunto de sucesiones infinitas de $\omega \setminus \{0\}$ y al conjunto de sucesiones finitas de $\omega \setminus \{0\}$, por $\omega^{*<\omega}$.

  Para cada $s \in \omega^{*<\omega}$, definimos el conjunto $\mathcal{O}_s$, como $\mathcal{O}_s = \{f \in \mathcal{N} : s \subseteq f\}$. Así, si $s = \langle y_i : i < n \rangle$, $\mathcal{O}_s = \{\langle x_i : i \in \omega \rangle : \forall i < n, x_i = y_i\}$.

  La familia de los conjuntos $\mathcal{O}_s$ es una base para una topología en $\mathcal{N}$. Esto pues, para cada $f \in \mathcal{N}$, podemos considerar los primeros n términos de f y definir $s \in \omega^{*<\omega}$, como $s = \langle x_i = f(i) : i < n \rangle$ y por tanto, $f \in \mathcal{O}_s$. Y si $\mathcal{O}_{s_1}$ y $\mathcal{O}_{s_2}$ son dos conjuntos en la familia y $f \in \mathcal{O}_{s_1} \cap \mathcal{O}_{s_2}$, $s_1 \subseteq f$ y $s_2 \subseteq f$, entonces $s_1 \subseteq s_2$ o bien $s_2 \subseteq s_1$. En el primer caso se cumple que $\mathcal{O}_{s_2} \subseteq \mathcal{O}_{s_1} \cap \mathcal{O}_{s_2}$, mientras que en el segundo, $\mathcal{O}_{s_1} \subseteq \mathcal{O}_{s_1} \cap \mathcal{O}_{s_2}$.

  Al espacio $\mathcal{N}$, con la topología dada por los conjuntos $\mathcal{O}_s$, se le conoce como el espacio de Baire.

Ahora, consideremos U, el conjunto de sucesiones en $\mathcal{N}$ que son casi constantes, es decir, $\{f \in \mathcal{N} : \exists k \in \omega \forall n \in \omega (n \geq k \to x_k = x_n)\}$. Este conjunto tiene cardinalidad ω y además, dado $\mathcal{O}_s$, un conjunto básico, tenemos que, los elementos en él son sucesiones infinitas que empiezan con s, en particular, están las sucesiones infinitas que empiezan con s y son casi constantes, por lo tanto U intersecta a $\mathcal{O}_s$. Entonces U es un conjunto denso numerable en $\mathcal{N}$ y por lo tanto el espacio de Baire es un espacio separable.

Dadas f,$g \in \mathcal{N}$, definimos la función d como sigue,

$$d(f,g) = \begin{cases} 0 \text{ si } f = g \\ \dfrac{1}{n+1} \text{ con } n \text{ el menor natural para el que } f(n) \neq g(n) \end{cases}$$

Sean f, g,$h \in \mathcal{N}$. Por definición, $d(f,g) = 0$ si y sólo si $f = g$. Si n es el menor natural k tal que $f(k) \neq g(k)$, éste también es el menor natural k para el cual $g(k) \neq f(k)$ y por tanto, $d(f,g) = d(g,f)$. Notemos que si n es el menor natural k para el cual $f(k) \neq g(k)$ y m es el menor natural k para el cual $f(k) \neq h(k)$, entonces $n < m$ o $m \leq n$. En el primer caso, tenemos que, para todo $i < n$, $f(i) = g(i)$ y para todo $i < m$, $f(i) = h(i)$ por tanto, el menor natural k para el cual $g(k) \neq h(k)$ es n y dado que $0 < \dfrac{1}{n+1}$ para toda n, concluimos que $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$, y para el segundo caso procedemos análogamente. Por lo tanto d resulta ser una métrica.

Esta métrica resulta ser compatible con la topología dada a $\mathcal{N}$ y además completa, por lo que el espacio de Baire es un espacio separable, completamente metrizable. Y por lo tanto, un espacio polaco. Este espacio es de suma importancia en la teoría descriptiva pues ayuda a caracterizar a los demás espacios polacos. Por ejemplo, se puede demostrar que todo espacio polaco es la imagen continua de este espacio.

- Consideremos a $\mathcal{N}'$ como el subconjunto de sucesiones crecientes de $\mathcal{N}$, daremos a este conjunto la topología de subespacio. Así, $\mathcal{B} = \{\mathcal{N}' \cap \mathcal{O}_s : s \in \omega^{*<\omega}\}$, es una base para $\mathcal{N}'$.

Daremos una función F, de los espacios $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$, que resulta ser un homeomorfismo.

Para cada $f = \langle x_n : n \in \omega \rangle \in \mathcal{N}$, definimos $y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$, así, F asigna a f, la sucesión $f^{\uparrow} = \langle y_n : n \in \omega \rangle$, la cual es creciente por definición. Esta función es biyectiva, pues si

f,$g \in \mathcal{N}$ y $f \neq g$, podemos tomar n, el primer natural en que difieren f y g, entoces los sumandos antes de este n son iguales y para el término n-ésimo difieren las sucesiones correspondientes a f y g bajo la función. Por otro lado, si $f^{\uparrow} = \langle y_n : n \in \omega \rangle \in \mathcal{N}'$, podemos tomar $x_0 = y_0$. Dado que para cada $n \in \omega$, $y_n < y_{n+1}$, existe x_n tal que $y_n + x_n = y_{n+1}$. Entonces $f = \langle x_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión en $\mathcal{N}$ tal que $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i = y_n$, por lo que la función es suprayectiva.

Tomemos un conjunto básico de $\mathcal{N}'$, entonces éste es de la forma $\mathcal{N}' \cap \mathcal{O}_s$, con $s \in \omega^{*<\omega}$. Pongamos $s = \langle s_k : k < N \rangle$, así, $F^{-1}(\mathcal{N}' \cap \mathcal{O}_s) = F^{-1}(\mathcal{N}') \cap F^{-1}(\mathcal{O}_s) = \{\langle x_n : n \in \omega \rangle \in \mathcal{N} : \sum\limits_{i=0}^{k} x_i = s_k\} = \mathcal{O}_{s^*}$, con $s^* = \langle x_i : i < N \rangle$ tal que $s_k = \sum\limits_{i<N} x_i$, el cual es un abierto básico en $\mathcal{N}$. Por lo tanto la función es continua.

Para concluir que F es homeomorfismo basta mostrar que la función es abierta. Sea $\mathcal{O}_s$ un conjunto básico de $\mathcal{N}$, con $s = \langle s_i : i < N \rangle$. Si $f = \langle x_n : n \in \omega \rangle \in \mathcal{O}_s$, $F(f) = f^{\uparrow} = \langle y_n : n \in \omega \rangle$, donde cada $y_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i$. Dado que $s \subseteq f$, $y_k = \sum\limits_{i=0}^{k} s_i$ para toda $k < N$ y $s_i \in s$, entonces $f^{\uparrow} \in \mathcal{N}'$ y $f^{\uparrow} \in \mathcal{O}_{s^*}$, con $s^* = \langle y_k = \sum\limits_{i=0}^{k} s_i : s_i \in s \rangle$. Por lo tanto $f^{\uparrow} \in \mathcal{N}' \cap \mathcal{O}_{s^*}$, entonces F es abierta.

Así, concluimos que F es un homeomorfismo y entonces $\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}'$. Por lo tanto $\mathcal{N}'$ es un espacio polaco.

Aunque omitiremos la demostración, cabe mencionar que $\mathcal{N}$ es homeomorfo al espacio de los irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, visto como subespacio de $\mathbb{R}$, por lo que dicho espacio también resulta ser un espacio polaco.[C.I]

5.2. Una topología para $[\omega]^{\omega}$

Dados $s, A \subseteq \omega$, $s \sqsubset A$ denotará que $s \subseteq A$ y si $x, y \in A$, con $x < y$ e $y \in s$, entonces $x \in s$. En otras palabras, $s \sqsubset A$ significa que s es segmento inicial de A.

Para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$, denotaremos por $[s]$ a la familia de conjuntos infinitos de ω que tienen a s como segmento inicial, es decir, $[s] = \{B \in [\omega]^{\omega} : s \sqsubset B\}$.

Mostraremos que la familia $\{[s] : s \in [\omega]^{<\omega}\}$ conforma una base para una topología en $[\omega]^\omega$. Notemos que dado $A \in [\omega]^\omega$, podemos tomar $b \in A$ y fijarmos en el conjunto $s = \{x \in A | x < b\}$, el cual es finito. Por la elección de s se cumple que $s \subseteq A$. Además, dados $x, y \in A$ tales que $x < y$ e $y \in s$, $x \in s$, pues si $y \in s$ tenemos que $y < b$, así, $x < b$, por lo que $x \in s$ y $A \in [s]$. Por lo tanto, para todo $A \in [\omega]^\omega$ existe $[s]$ tal que $A \in [s]$. Consideremos ahora $[s_1]$ y $[s_2]$, sea $B \in [s_1] \cap [s_2]$, con $B \in [\omega]^\omega$. Dado que $s_1, s_2 \in [\omega]^{<\omega}$ tanto s_1 como s_2 tienen elemento máximo, sean y_1 y y_2 máximos de s_1 y s_2 respectivamente. Sin pérdida de generalidad supongamos que $y_1 < y_2$, entonces $y_1 \in s_2$, pues $s_2 \sqsubset B$. Así para todo $x \in s_1$, $x < y_1 < y_2$ se tiene que $x \in s_2$. Entonces $s_1 \sqsubset s_2$, esto implica que $[s_2] \subseteq [s_1]$. Por lo tanto, para $B \in [s_1] \cap [s_2]$, $B \in [s_2] = [s_1] \cap [s_2]$. Así, $\{[s] : s \in [\omega]^{<\omega}\}$ es una base para una topología en $[\omega]^\omega$.

En lo que sigue trabajaremos con $[\omega]^\omega$ como el espacio topológico dotado con la topología generada por esa familia.

Teorema 5.3. *$[\omega]^\omega$ es un espacio polaco.*

Demostración. Consideremos $h : \omega \setminus \{0\} \longrightarrow \omega$, tal que para cada $m \in \omega \setminus \{0\}$ definimos $h(m) = m - 1$. Dicha función resulta ser biyectiva y monótona.

Sea $F : \mathcal{N}' \longrightarrow [\omega]^\omega$, tal que, para cada $f^\uparrow = \langle x_n : n \in \omega \rangle$, sucesión de elementos en $\mathcal{N}'$, definimos $F(f^\uparrow) = h[\{x_n : n \in \omega\}]$[1].

Veremos que F resulta ser un homeomorfismo.

Sean $f_1^\uparrow, f_2^\uparrow \in \mathcal{N}'$, tales que $f_1^\uparrow \neq f_2^\uparrow$. Demostraremos que F es inyectiva. Sea $k_0 \in \omega$ tal que para todo $k < k_0$, $f_1^\uparrow(k) = f_2^\uparrow(k)$ y $f_1^\uparrow(k_0) \neq f_2^\uparrow(k_0)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f_1^\uparrow(k_0) < f_2^\uparrow(k_0)$. Dado que h es una función monótona, $h(f_1^\uparrow(k_0)) < h(f_2^\uparrow(k_0))$. Afirmamos que no existe $f_2^\uparrow(l)$ tal que $h(f_1^\uparrow(k_0)) = h(f_2^\uparrow(l))$ con $l \in \omega$. De lo contrario, al ser h biyectiva se cumple que, $f_1^\uparrow(k_0) = f_2^\uparrow(l)$. Entonces, si $l < k_0$, por la elección de k_0 tendríamos que $f_1^\uparrow(k_0) = f_1^\uparrow(l)$, pero $f_1^\uparrow$ es creciente. Por otro lado, si $k_0 < l$, al ser $f_2^\uparrow$ creciente, $f_2^\uparrow(k_0) < f_2^\uparrow(l)$, entonces $h(f_2^\uparrow(k_0)) < h(f_2^\uparrow(l))$, pero, por hipótesis $h(f_1^\uparrow(k_0)) = h(f_2^\uparrow(l))$. Y dado que en ambos casos llegamos a una contradicción, $F(f_1^\uparrow) \neq F(f_2^\uparrow)$.

[1]Con $\{x_n : n \in \omega\}$ denotamos a la imagen de la sucesión.

Ahora, si $A \in [\omega]^\omega$, $h^{-1}(A)$ resulta ser un conjunto infinito en $\omega \setminus \{0\}$, considerando su enumeración creciente tenemos una sucesión en $\mathcal{N}'$, que bajo h resulta ser el conjunto A del que partimos, por lo tanto, la función es sobreyectiva. Así F es biyectiva.

Por otro lado, consideremos $[s]$ un conjunto básico de $[\omega]^\omega$, $F^{-1}([s]) = \{\langle x_i : i \in \omega\rangle \in \mathcal{N}' : h(\{x_i : i \in \omega\}) \in [s]\} = \{\langle x_i : i \in \omega\rangle \in \mathcal{N}' : s' \sqsubset \{x_i : i \in \omega\}\}$ donde $s' = \{x_n + 1 : x_n \in s\}$, por lo que $F^{-1}([s]) = \mathcal{O}_{s'} \cap \mathcal{N}'$. Así, F resulta ser continua.

Veamos que la función es abierta, sea $\mathcal{O}_s \cap \mathcal{N}'$ un conjunto básico de $\mathcal{N}'$, entonces $F[\mathcal{O}_s \cap \mathcal{N}'] = \{h(\{x_i : i \in \omega\}) : \langle x_i : i \in \omega\rangle \in \mathcal{O}_s \cap \mathcal{N}'\} = \{A \in [\omega]^\omega : h[s] \sqsubset A\} = [h[s]]$, por lo tanto la función es abierta.

Podemos concluir que F es homeomorfismo y por lo tanto, $[\omega]^\omega$ es un espacio polaco.

$\square$

La importancia de este resultado radica en que en los espacios polacos se definen conjuntos especiales, que en el caso del espacio $[\omega]^\omega$ podemos relacionarlos con $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega_2$. Esto lo estudiaremos más adelante.

Haciendo uso del axioma de elección podemos construir un conjunto X en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no numerable que nos permitirá encontrar una 2-coloración de $[\omega]^\omega$ para la cual no existen conjuntos homogéneos.

Definición 5.4. *Sea $X \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no numerable. Si para todo $C \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cerrado no numerable, se tiene que $X \cap C$ es no vacía y $C \nsubseteq X$, llamamos a X un conjunto de Bernstein.*

Construiremos un conjunto de Bernstein usando recursión transfinita. Consideremos $\{C_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados no numerables de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supongamos definidos x_β e y_β, para cada $\beta < \alpha$ tales que: $x_\beta, y_\beta \in C_\beta$ y para todo $\gamma < \beta$, $x_\beta \neq x_\gamma$, $y_\beta \neq y_\gamma$ y $x_\beta \neq y_\gamma$. Para definir x_α e y_α basta considerar $C_\alpha \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\})$, el cual sabemos es distinto del vacío pues cada cerrado C_α es no numerable. Entonces podemos tomar x_α e y_α como en las hipótesis. Afirmamos que $X = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es un conjunto de Bernstein en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sea C un conjunto cerrado no numerable, así $C = C_\alpha$ para algún $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces $x_\alpha \in C_\alpha \cap X$, $y_\alpha \in C_\alpha$ y $y_\alpha \notin X$, con lo cual concluimos que X es un conjunto de Bernstein.

Estamos listos para probar el siguiente teorema.

Teorema 5.5 (A.E)**.** *La relación $\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ no se satisface.*

Demostración. Consideraremos $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \longrightarrow [\omega]^{\omega}$ un homeomorfismo, el cual puede tomarse pues mencionamos antes que el espacio de los irracionales es homeomorfo al espacio de Baire y probamos que este espacio es homeomorfo a $[\omega]^{\omega}$. Sea X un conjunto de Bernstein en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definimos $F : [\omega]^{\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$ como sigue:

$$F(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } f^{-1}(A) \in X \\ 1 \text{ si } f^{-1}(A) \notin X \end{cases}$$

Afirmamos que para cada $A \in [\omega]^{\omega}$, $[A]^{\omega}$ contiene la imagen de un conjunto cerrado no numerable; es decir, existe $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cerrado no numerable tal que $f[\mathcal{C}] \subseteq [A]^{\omega}$.

Sea $s \in [\omega]^{<\omega}$ tal que A tiene como segmento incial a s. Definimos $C = \{A' \in [\omega]^{\omega} : A' \subseteq A \text{ y } s \not\subset A'\}$. $C \subseteq [A]^{\omega}$, por definición de C. Mostraremos que C es un conjunto cerrado en $[\omega]^{\omega}$.

Sea B un elemento en el complemento de C, entonces tenemos dos casos para B:

1. B tiene como segmento inicial a s, en cuyo caso basta considerar el conjunto básico $[s]$ y dado que ningún elemento en él pertenece a C tenemos que $B \in [s] \subseteq [\omega]^{\omega} \setminus C$.

2. B no tiene a s como segmento inicial. Entonces B no puede estar contenido en A, de lo contrario B sería elemento de C. Tomemos $x \in B \setminus A$ tal que si $y \in B$ con $y < x$, entonces $y \in A$. Sea $t = \{y \in B : y \leq x\}$. $B \in [t]$ y además, si $B' \in [t]$, $t \sqsubset B'$, entonces $B' \nsubseteq A$. Por lo tanto $B' \notin C$. Así, $B \in [t] \subseteq [\omega]^{\omega} \setminus C$.

   Concluimos que $[\omega]^{\omega} \setminus C$ es abierto y por tanto C es un conjunto cerrado no numerable.

Dado que f es continua, se cumple que $f^{-1}[C]$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $f[f^{-1}[C]] \subseteq C$. Por tanto $[A]^{\omega}$ contiene la imagen de un cerrado no numerable.

Finalmente veremos que esto garantiza que no existan conjuntos homogéneos para F.

Supongamos que existe $H \subseteq \omega$ infinito y homogéneo para F.

Si $F''[H]^{\omega} = \{0\}$, por definición $f^{-1}[[H]^{\omega}] \subseteq X$. Además sabemos que para algún C, cerrado de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f[C] \subseteq [H]^{\omega}$. Por lo tanto, $C \subseteq f^{-1}[[H]^{\omega}]$ lo cual contradice que X es un conjunto de Bernstein.

Por otro lado, si $F''[H]^\omega = \{1\}$, dado que existe C cerrado tal que $f[C] \subseteq [H]^\omega$ tenemos que el conjunto de Bernstein intersecta a $f^{-1}[[H]^\omega]$. Por lo tanto, los elementos de $X \cap f^{-1}[[H]^\omega]$ deberían tomar el valor 0, lo cual contradice la homogeneidad de H.

Por lo tanto no existen conjuntos homogéneos para F de cardinalidad ω.

$\square$

En lo que sigue tendremos como propósito el buscar coloraciones para las cuales esta relación sea válida.

Presentaremos dos conceptos de la teoría de Ramsey que tienen relación con las coloraciones de $[\omega]^\omega$ que poseen conjuntos homogéneos de cardinalidad ω.

5.3. Conjuntos Ramsey y completamente Ramsey.

Dados $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$, escribimos $[s, A]$ para denotar a $\{B \in [\omega]^\omega : s \sqsubset B \subseteq s \cup A\}$.

Definición 5.6. *Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$. Diremos que S es un conjunto Ramsey si existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que $[A]^\omega \subseteq S$ o bien $[A]^\omega \cap S = \emptyset$.*

Y si para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$ existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[s, B] \subseteq S$ o $[s, B] \cap S = \emptyset$, decimos que S es completamente Ramsey.

De las definiciones se siguen las siguientes propiedades:

Lema 5.7. *1. Un conjunto completamente Ramsey es Ramsey.*

2. El complemento de un conjunto completamente Ramsey es un conjunto completamente Ramsey. Y por lo tanto el complemento de un conjunto Ramsey es Ramsey.

Demostración. 1. Para ello basta tomar a $s = \emptyset$, $A = \omega$ y de la hipótesis se sigue el resultado.

2. Dados $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$, existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[s, B] \subseteq S$ o $[s, B] \cap S = \emptyset$. En el primer caso tenemos que $[s, B] \cap (\omega \setminus S) = \emptyset$ y en el segundo $[s, B] \subseteq \omega \setminus S$, por lo tanto, $\omega \setminus S$ es completamente Ramsey.

$\square$

Observemos que dada F, una 2-coloración de $[\omega]^\omega$, podremos garantizar que existe $H \subseteq \omega$ infinito, homogéneo para F, si bajo la partición asociada a la coloración alguno de los elementos de la partición es un conjunto Ramsey. Si $F^{-1}(\{i\})$ es un conjunto Ramsey para algún i, con $i \in \{0, 1\}$, tendremos, por la propiedad 2 del Lema 5.7, que su complemento también es un conjunto Ramsey. Entonces existe $H \in [\omega]^\omega$ tal que $[H]^\omega \subseteq F^{-1}(\{i\})$ para algún $i \in \{0, 1\}$, por lo tanto, $F''[H]^\omega = \{i\}$. Así, H es un conjunto homogéneo infinito para F. Este hecho nos da un primer acercamiento al resultado que deseamos obtener, pues al restringirnos a coloraciones tales que en la partición asociadas a ellas hay un conjunto Ramsey, resultará existir un conjunto homogéneo de la cardinalidad requerida. Sin embargo esto es bastante vago, por ello trataremos de detallar aún más dichas coloraciones y para ello resultará de utilidad de ver que tipos de conjuntos Ramsey podemos encontrar en $[\omega]^\omega$.

Daremos algunos conceptos que nos pertimitirán establer que ciertos conjuntos, en la topología que hemos dado a $[\omega]^\omega$, resultan ser Ramsey o completamente Ramsey.

Definición 5.8. *Sean $S \subseteq [\omega]^\omega$, $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$. Decimos que*

1. *A acepta s respecto a S, si $[s, A] \subseteq S$.*

2. *A rechaza s respecto a S, si ningún $B \in [A]^\omega$ acepta s.*

3. *A decide s respecto a S, si A acepta o rechaza s.*

En general omitiremos decir que A acepta, rechaza o decide respecto a S y sólo decimos que A acepta, rechaza o decide.

Veamos algunas propiedades.

Lema 5.9. *Sean $S \subseteq [\omega]^\omega$, $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$.*

1. *Si A acepta s y $B \subseteq A$ infinito, entonces B acepta s.*

2. *Si A rechaza s y $B \subseteq A$ infinito, entonces B rechaza s.*

3. *Existe $B \in [A]^\omega$ que decide s.*

Demostración. 1. Supongamos que A acepta s. Queremos demostrar que $[s, B] \subseteq S$. Sea $B' \in [s, B]$, entonces $s \sqsubset B' \subseteq s \cup B$, pero $s \cup B \subseteq s \cup A$, entonces $B' \in [s, A]$. Por hipótesis $[s, A] \subseteq S$, por lo que $B' \in S$ y $[s, B] \subseteq S$. Por lo tanto, B acepta s.

2. Supongamos que A rechaza s. Entonces no existe $B' \in [A]^\omega$ que acepte s, es decir, para cualquier $B' \in [A]^\omega$, $[s, B'] \nsubseteq S$. En particular, B no puede aceptar s y tampoco ninguno de sus subconjuntos infinitos puede aceptar s, pues son subconjuntos de A, por lo tanto B rechaza s.

3. Sea $B \in [A]^\omega$.

   Si B rechaza s, entonces existe $B \in [A]^\omega$ que decide s.

   Si B no rechaza s, por definición existe $B' \in [B]^\omega$ tal que $[s, B'] \subseteq S$. Y por lo tanto, existe $B' \in [A]^\omega$ que decide s.

□

Teorema 5.10 (Galvin-Prikry). *Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$. Existe un conjunto en $[\omega]^\omega$ que decide a todos sus subconjuntos finitos.*

Demostración. Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$.

Sean $n_0 \in \omega$ y $A_0 = \omega \setminus (n_0 + 1)$. Por la propiedad 3 del Lema 5.9, existe $A_1' \in [A_0]^\omega$ que decide $\{n_0\}$, $A_1 = A_1' \setminus \{n_0\}$ también decide $\{n_0\}$, por la propiedad 1 del mismo Lema. Sea $n_1 \in A_1$ tal que $n_0 < n_1$.

Usando el mismo argumento podemos hallar $A_2 \subseteq A_1$ que decida a todos los subconjuntos de $\{n_0, n_1\}$. Esto, pues existe $A_2''' \in [A_1]^\omega$ que decide $\{n_0, n_1\}$. Entonces $A_2'' = A_2''' \setminus \{n_0, n_1\}$ también lo decide y ya que $A_2'' \subseteq A_1$, pues $A_2'' \subseteq A_2''' \subseteq \{n_0, n_1\} \cup A_1$ y $n_0, n_1 \notin A_2''$, $A_2'' \subseteq A_1$, A_2'' también decide $\{n_0\}$. Existe $A_2' \in [A_2'']^\omega$ que decide $\{n_1\}$, entonces $A_2 = A_2' \setminus \{n_1\}$ decide $\{n_1\}$ y dado que

$A_2 \subseteq A_2''$, pues $A_2 \subseteq A_2' \subseteq \{n_1\} \cup A_2''$ pero $n_1 \notin A_2$, A_2 decide $\{n_0\}$, $\{n_1\}$ y $\{n_0, n_1\}$, por lo tanto A_2 es el conjunto buscado. Sea $n_2 \in A_2$ tal que $n_1 < n_2$. De esta manera podemos construir una sucesión, $\langle A_i : i \in \omega \rangle$, decreciente de subconjuntos infinitos de ω y una sucesión, $\langle n_i : i \in \omega \rangle$, creciente de naturales tales que $n_i \in A_i$ y A_i decide a cualquier subconjunto de $\{n_k : k < i\}$.

Afirmamos que $A = \{n_i : i \in \omega\}$ decide a todos sus subconjuntos finitos.

Sea $s \in [A]^{<\omega}$ y sea $n_k = max(s)$, entonces $n_k \in A_k$ y A_{k+1} decide a s. Si A_{k+1} acepta s, entonces $[s, A_{k+1}] \subseteq S$. Veamos que $[s, A] \subseteq S$. Si $B \in [s, A]$, $B \in [s, A_{k+1}]$, esto pues, $B \subseteq s \cup (A \setminus n_k)$. Por tanto, A acepta s. Por otro lado, si A_{k+1} rechaza s, afirmamos que A rechaza s, pues si existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[s, B] \subseteq S$, entonces para cada $B' \in [s, B]$, $B' \subseteq s \cup (B \setminus n_k)$ y $B \setminus n_k$ resulta ser un subconjunto de A_{k+1}, contradiciendo que A_{k+1} rechaza s. Por tanto, A rechaza s y finalmente obtenemos que A decide a sus subconjuntos finitos. $\square$

Lema 5.11. *Sean $S \subseteq [\omega]^\omega$, $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$.*

1. *Si A acepta s, entonces A acepta $s \cup \{n\}$ para cada $n \in A$ tal que $s < \{n\}$.*

2. *Si A rechaza s, entonces hay a lo sumo una cantidad finita de $n \in A$ con $s < \{n\}$ tales que A acepta $s \cup \{n\}$.*

Demostración. 1. Sea $n \in A$ tal que $s < \{n\}$.

Dado $B \in [s \cup \{n\}, A]$, se tiene que, $s \cup \{n\} \sqsubset B \subseteq s \cup \{n\} \cup A$, y dado que, $s \sqsubset s \cup \{n\}$ y $s \cup \{n\} \cup A = s \cup A$, $B \in [s, A]$. Entonces $B \in S$, pues A acepta s. Así, $[s \cup \{n\}, A] \subseteq S$.

2. Supongamos que existe una cantidad infinita de n's tales que A acepta $s \cup \{n\}$, llamemos B al conjunto de dichos elementos.

Afirmamos que B acepta s. Sea $B' \in [s, B]$, entonces $s \sqsubset B' \subseteq s \cup B$. Si $n = min(B' \setminus s)$, $s \cup \{n\} \sqsubset B' \subseteq (s \cup \{n\}) \cup B$. Dado que $B \subseteq A$, $B' \in [s \cup \{n\}, A]$, por lo que $B' \in S$. Por lo tanto A no rechaza s. Así, la cardinalidad de B es finito.

$\square$

Teorema 5.12. *Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$. Si A es un conjunto que decide a todos sus subconjuntos finitos y rechaza al conjunto vacío, entonces existe $B \in [A]^\omega$ que rechaza a todos sus subconjuntos finitos.*

Demostración. Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$.

Por la propiedad 2 del Lema 5.11, sabemos existe una cantidad finita de $n \in A$ tales que A acepta $\{n\}$. Dado que A decide a todos sus subconjuntos finitos, podemos escoger $n_0 \in A$, tal que para cualquier $n \in A$ con $n_0 \leq n$, A rechace $\{n\}$. Nuevamente, por la propiedad 2 del Lema 5.11 y dado que A rechaza $\{n_0\}$ existe una cantidad finita de $n \in A \setminus n_0$ tales que A acepta $\{n_0, n\}$. Además, como A decide a todos sus subconjuntos finitos, podemos hallar $n_1 \in A$ tal que $n_0 < n_1$ y A rechaza $\{n\}$ y $\{n_0, n\}$ para todo $n \in A$, con $n_1 \leq n$. De esta forma construimos una sucesión, $\langle n_i : i \in \omega \rangle$, de elementos en A tal que A rechaza $s \cup \{n\}$ para cualquier $s \subseteq \{n_k : k < i\}$ y $n_i \leq n$.

Afirmamos que $B = \langle n_i : i \in \omega \rangle$ rechaza a todos sus subconjuntos finitos.

Sea $s \in [B]^{<\omega}$ y $n_i = max(s)$. Así, $s = \{n_k : k < i\} \cup \{n_i\}$. Entonces A rechaza s y como $B \subseteq A$, B rechaza s . Por lo tanto, B rechaza a todos sus subconjuntos finitos. □

Teorema 5.13. *Todo conjunto abierto en $[\omega]^\omega$ es un conjunto Ramsey.*

Demostración. Sea $U \subseteq [\omega]^\omega$ un conjunto abierto. Consideremos $A \in [\omega]^\omega$ tal que decide a todos sus subconjuntos finitos, el cual sabemos existe por el Lema 5.10 y tomemos al conjunto vacío. Dado que A decide a todos sus subconjuntos finitos, tenemos dos casos:

1. A acepta al conjunto vacío, entonces por definición, $[\emptyset, A] = [A]^\omega \subseteq U$, por lo tanto U es un conjunto Ramsey.

2. A rechaza al conjunto vacío. Como U es abierto, entonces para cada $B \in U$, existe $s \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $B \in [s] \subseteq U$. Entonces, podemos decir que ω acepta s respecto a U y por la propiedad 1 del Lema 5.9 todo subconjunto infinito de ω también acepta s. Por lo tanto, ningún $B \in U$ está en $[A]^\omega$ ya que, por hipótesis, existe un subconjunto de A que rechaza a todos sus subconjuntos finitos.

□

De este resultado conclúimos que considerando 2-coloraciones tales que haya un conjunto abierto en la partición asociada a la coloración la relacion $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega$ se satisface.

Se puede demostrar que los conjuntos abiertos también son conjuntos completamente Ramsey, sin embargo, no demostraremos este hecho, pues la topología dada a $[\omega]^\omega$ es poco accesible para esta prueba. Este resultado es demostrado en [Kech], pp,134,135, para una topología en $[\omega]^\omega$, que tiene como base a la familia de los conjuntos $[s, A]$, llamada la topología de Ellentuck y que resulta ser más fina que la dimos en este capítulo. Usando esto, se sigue que todo abierto de nuestra topología es un abierto de la topología de Ellentuck y dado que en dicha topología los abiertos son completamente Ramsey, en particular se cumple esto para los abiertos con lo que trabajamos.

Teorema 5.14. *Todo conjunto abierto en $[\omega]^\omega$ es un conjunto completamente Ramsey.*[Kech]

Teorema 5.15. *Si para cada $n \in \omega$, S_n es un conjunto completamente Ramsey, entonces $\bigcup_{n\in\omega} S_n$ es también completamente Ramsey.*

Demostración. Queremos demostrar que para todo $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$, podemos encontrar $B \in [A]^\omega$, tal que $[s, B] \subseteq \bigcup_{n\in\omega} S_n$ o bien $[s, B] \cap (\bigcup_{n\in\omega} S_n) = \emptyset$.

Sea $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$.

Construiremos sucesiones, $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ y $\langle a_n : n \in \omega\rangle$, tales que para cualesquiera $m < n \in \omega$, $a_n \in B_n$, $B_n \subseteq B_m$ y $a_m < a_n$. Y que además para cada $i < n$ y $q \subseteq \{a_0, \ldots, a_i\}$, $[s \cup q, B_i] \subseteq S_i$ o $[s \cup q, B_i] \cap S_i = \emptyset$.

Dado que S_0 es completamente Ramsey, existe $B_0 \in [A]^\omega$ tal que $[s, B_0] \subseteq S_0$ o bien $[s, B_0] \cap S_0 = \emptyset$. Sea $a_0 = min(B_0 \setminus (max(s))$.

Al ser S_1 completamente Ramsey, existe $B_1' \in [B_0 \setminus a_0]^\omega$ tal que $[s, B_1'] \subseteq S_1$ o bien $[s, B_1'] \cap S_1 = \emptyset$. Nuevamente, existe $B_1 \in [B_1']^\omega$ tal que $[s \cup \{a_0\}, B_1] \subseteq S_1$ o $[s \cup \{a_0\}, B_1] \cap S_1 = \emptyset$. Sea $a_1 = min(B_1)$.

Notemos que $[s, B_0] \subseteq S_0$ o $[s, B_0] \cap S_0 = \emptyset$, por elección. Además, $[s \cup \{a_0\}, B_0] \subseteq S_0$ o $[s \cup \{a_0\}, B_0] \cap S_0 = \emptyset$, pues $[s \cup \{a_0\}, B_0] \subseteq [s, B_0]$.

Como S_2 es un conjunto completamente Ramsey, existe $B_2''' \in [B_1 \setminus a_1]^\omega$ tal que $[s, B_2'''] \subseteq S_2$ o $[s, B_2'''] \cap S_2 = \emptyset$. Nuevamente, existe $B_2'' \in [B_2''']^\omega$ tal que $[s \cup \{a_0\}, B_2''] \subseteq S_2$ o $[s \cup \{a_0\}, B_2''] \cap S_2 = \emptyset$. Existe $B_2' \in [B_2'']^\omega$ tal que $[s \cup \{a_1\}, B_2'] \subseteq S_2$ o $[s \cup \{a_1\}, B_2'] \cap S_2 = \emptyset$. Finalmente, existe $B_2 \in [B_2']^\omega$ tal que $[s \cup \{a_0, a_1\}, B_2] \subseteq S_2$ o $[s \cup \{a_0, a_1\}, B_2] \cap S_2 = \emptyset$. Sea $a_2 = min(B_2)$.

Afirmamos que para todo $q \subseteq \{a_0, a_1\}$, $[s \cup q, B_i] \subseteq S_i$ o $[s \cup q, B_i] \cap S_i = \emptyset$ para todo $i < 2$. Si $q = \emptyset$. Sabemos que $[s, B_0] \subseteq S_0$ o $[s, B_0] \cap S_0 = \emptyset$ y $[s, B_1] \subseteq S_1$ o $[s, B_1] \cap S_1 = \emptyset$, pues $B_1 \subseteq B_1'$. Si $q = \{a_0\}$. Sabemos que $[s \cup \{a_0\}, B_0] \subseteq S_0$ o $[s \cup \{a_0\}, B_0] \cap S_0 = \emptyset$ y $[s \cup \{a_0\}, B_1] \subseteq S_1$ o $[s \cup \{a_0\}, B_1] \cap S_1 = \emptyset$, por elección. Supongamos que $q = \{a_1\}$. $[s \cup \{a_1\}, B_0] \subseteq S_0$ o $[s \cup \{a_1\}, B_0] \cap S_0 = \emptyset$, pues $[s \cup \{a_1\}, B_0] \subseteq [s, B_0]$ y $[s \cup \{a_1\}, B_1] \subseteq S_1$ o $[s \cup \{a_1\}, B_1] \cap S_1 = \emptyset$, pues $[s \cup \{a_1\}, B_1] \subseteq [s, B_1]$. Finalmente si $q = \{a_0, a_1\}$. $[s \cup \{a_0, a_1\}, B_0] \subseteq S_0$ o $[s \cup \{a_0, a_1\}, B_0] \cap S_0 = \emptyset$, pues $[s \cup \{a_0, a_1\}, B_0] \subseteq [s, B_0]$. Y $[s \cup \{a_0, a_1\}, B_1] \subseteq S_1$ o $[s \cup \{a_0, a_1\}, B_1] \cap S_1 = \emptyset$ ya que $[s \cup \{a_0, a_1\}, B_1] \subseteq [s \cup \{a_0\}, B_1]$.

Así, las sucesiones $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ y $\langle a_n : n \in \omega \rangle$, construidas de esta manera satisfacen lo que deseamos. Sea $B = \{a_n : n \in \omega\}$.

Demostraremos que, para todo $n \in \omega$, $S_n \cap [s, B]$ es un conjunto abierto en la topología relativa de $[s, B]$.

Sea $n = 0$. Si $A \in [s, B]$, $A \in [s, B_0]$ pues $B \subseteq B_0$. Sabemos que $[s, B_0] \subseteq S_0$ o $[s, B_0] \cap S_0 = \emptyset$. En el primer caso tendremos que $A \in [s, B] \cap S_0$ y en el segundo $[s, B] \cap S_0 = \emptyset$. Por lo tanto, $[s, B] \cap S_0 = [s, B]$ o $[s, B] \cap S_0 = \emptyset$. Sea $n \geq 1$. Supongamos que $A \in S_n \cap [s, B]$. Entonces $A \in S_n$ y $s \sqsubset A \subseteq s \cup B$. Sea $q = \{a_i \in A \setminus s : a_i \leq a_n\}$. $A \setminus (s \cup q) = \{a_j \in A : a_n < a_j\}$. Para cada $j > n$, $a_j \in B_j$ y $B_j \subseteq B_n$. Por lo tanto, $A \in [s \cup q, B_n]$ y por construcción $[s \cup q, B_n] \subseteq S_n$ o $[s \cup q, B_n] \cap S_n = \emptyset$. Por lo tanto, $A \in (\bigcup\{[s \cup q] : q \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}, [s \cup q, B_n] \subseteq S_n\}) \cap [s, B]$. Inversamente, sea $n \geq 1$. Supongamos que $A \in (\bigcup\{[s \cup q] : q \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}, [s \cup q, B_n] \subseteq S_n\}) \cap [s, B]$. Entonces $A \in [s \cup q]$ para algún $q \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}$ y $A \in [s, B]$. Sea $q' = \{a_j \in A \setminus (s \cup q) : a_j \leq a_n\}$. Entonces $A \in [s \cup q \cup q', B \setminus (q \cup q')]$. Dado que $B \setminus (q \cup q') \subseteq B_n$ y $[s \cup q \cup q', B_n] \subseteq S_n$, $A \in S_n \cap [s, B]$. Por lo tanto, $S_n \cap [s, B] = (\bigcup\{[s \cup q] : q \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}, [s \cup q, B_n] \subseteq S_n\}) \cap [s, B]$.

Así, para cada $n \in \omega$, $S_n \cap [s, B]$ es un conjunto abierto en la topología relativa de $[s, B]$. Por lo tanto, $(\bigcup_{n \in \omega} S_n) \cap [s, B]$ es abierto en $[s, B]$. Entonces, existe $U \in [\omega]^\omega$ abierto tal que $(\bigcup_{n \in \omega} S_n) \cap [s, B] = U \cap [s, B]$. Dado que U es un conjunto abierto y por tanto un conjunto completamente Ramsey, existe $B^* \in [B]^\omega$ tal que $[s, B^*] \subseteq U$ o bien $[s, B^*] \cap U = \emptyset$. Por lo tanto $[s, B^*] \subseteq \bigcup_{n \in \omega} S_n$ o $[s, B^*] \cap (\bigcup_{n \in \omega} S_n) = \emptyset$. Concluimos que $\bigcup_{n \in \omega} S_n$ es un conjunto completamente Ramsey.

$\square$

Corolario 5.16. *La unión numerable de conjuntos Ramsey es un conjunto Ramsey*

Las propiedades que cumplen los conjuntos completamente Ramsey y por ende los conjuntos Ramsey determinan una estructura que será de utilidad en nuestro estudio.

Definición 5.17. *(σ-álgebra.) Dado un conjunto X y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ decimos que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra sobre X si cumple*

i) $X \in \mathcal{F}$.

ii) $\mathcal{F}$ es cerrado bajo complementos, es decir, si $A \in \mathcal{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

iii) F es cerrado bajo uniones numerables, es decir, si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \omega$, entonces $\bigcup_{i\in\omega} A_i \in \mathcal{F}$.

De las propiedades vistas concluimos que la familia de conjuntos completamente Ramsey es una σ-álgebra, al igual que la familia de conjuntos Ramsey.

Definición 5.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico. A la menor σ-álgebra que tiene como elementos a los conjuntos abiertos de τ se le conoce como σ-álgebra de Borel.*

A los elementos de esta σ-álgebra se les llama conjuntos de Borel o conjuntos borelianos.

Sea X un espacio polaco. Definimos $\sum_1^0 = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto}\}$ y $\prod_1^0 = \{C \subseteq X : C \text{ es cerrado}\}$. Para cada $1 < \alpha < \omega_1$, sea $\sum_\alpha^0 = \{Y \subseteq X : Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n, Y_n \in \prod_\beta^0 \text{ para algún } \beta < \alpha\}$ y $\prod_\alpha^0 = \{Y \subseteq X : Y = X \setminus Y', Y' \in \sum_\alpha^0\}$. Por construcción $\bigcup_{\alpha\in\omega_1} \sum_\alpha^0$ es una σ-álgebra. Por lo tanto si $\mathbb{A}$ es la σ-álgebra de Borel en X, se tiene que $\mathbb{A} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \sum_\alpha^0$. Así, todo conjunto Boreliano pertenece a $\sum_\alpha^0$ para algún $\alpha \in \omega_1$.

Al haber dotado a $[\omega]^\omega$ de una topología podemos, hablar de la σ-álgebra de Borel sobre $[\omega]^\omega$ lo cual nos permite considerar a sus conjuntos Borelianos. Estos conjuntos son importantes para las coloraciones que deseamos.

Teorema 5.19. *Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$. Si S es un conjunto Boreliano, entonces S es completamente Ramsey.*

Demostración. Del Lema 5.7 y los Teoremas 5.13 y 5.15, se sigue que los elementos de $\sum_\alpha^0$ son conjuntos completamente Ramsey, para todo $\alpha \in \omega_1$. Así, si S es un conjunto Boreliano, S es completamente Ramsey. $\square$

Definición 5.20. *Definimos una 2-coloración Boreliana, como una coloración $F : A \longrightarrow \{0,1\}$ tal que la partición que determina está formada por conjuntos Borelianos.*

Denotaremos por $Borel(\omega)_2^\omega$ a las 2-coloraciones de $[\omega]^\omega$ que son Borelianas.

Corolario 5.21. *La relación $\omega \longrightarrow Borel(\omega)_2^\omega$ se satisface.*

Estudiaremos ahora conjuntos de $[\omega]^\omega$ que son estudiados principalmente en la Teoría Descriptiva de Conjuntos, estos conjuntos nuevamente, resultan ser conjuntos Ramsey y nos permiten definir otras coloraciones para las cuales la relación será verdadera. Este resultado es interesante, pues muestra cómo la Teoría de Ramsey interactúa con la Teoría Descriptiva de Conjuntos.

Siguiendo este fin, necesitaremos ahondar más en la topología de $[\omega]^\omega$.

Lema 5.22. *Si S es un conjunto nunca denso en $[\omega]^\omega$, entonces para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$ existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[s,B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus S$*

Demostración. Sea S un conjunto nunca denso. Sabemos que un conjunto abierto en $[\omega]^\omega$ es completamente Ramsey y el complemento de un conjunto completamente Ramsey también lo es, entonces todo conjunto cerrado es completamente Ramsey. Por lo tanto, $\overline{S}$ es completamente Ramsey. De la definición se tiene que para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$, existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[s,B] \subseteq \overline{S}$ o bien $[s,B] \cap \overline{S} = \emptyset$, lo cual implica que $[s,B] \subseteq \overline{S}$ o $[s,B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus \overline{S}$. Como $[\omega]^\omega \setminus \overline{S} \subseteq [\omega]^\omega \setminus S$, o bien se cumple que $[s,B] \subseteq \overline{S}$ o $[s,B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus S$. Supongamos que $[s,B] \subseteq \overline{S}$. Al ser S un conjunto nunca denso, $\overline{S}$ es un conjunto nunca denso. Entonces para todo $U \subseteq [\omega]^\omega$ abierto no vacío, existe $U' \subseteq U$ abierto no vacío tal que $U' \cap \overline{S} = \emptyset$. Sin embargo, si $n_0 = min(s)$, $U = [\{n_0\}]$ y $B' = B \setminus (max(s))$, tenemos que $s \cup B' \in U$ y $s \cup B' \in [s,B]$, por lo tanto $U \cap \overline{S} \neq \emptyset$. Así, $\overline{S}$ no es nunca denso, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se cumple que $[s,B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus S$.

□

De este lema se sigue que todo conjunto nunca denso es un conjunto completamente Ramsey.

Definición 5.23. *Dado M un subconjunto de un espacio topológico, decimos que es un conjunto magro si existe una sucesión de conjuntos nunca densos tales que su unión es M.*

Lema 5.24. *Si M es un conjunto magro en $[\omega]^\omega$, entonces para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$ existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[s, B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus M$.*

Demostración. Sea M un conjunto magro y sea $\langle S_i : i \in \omega \rangle$ una sucesión de conjuntos nunca densos tal que $M = \bigcup_{i\in\omega} S_i$.

Por el teorema 5.15, $\bigcup_{i\in\omega} S_i$ es completamente Ramsey.

Para verificar que para cualesquiera $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$ existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[s, B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus M$, podemos construir, como en la prueba del teorema 5.15 y usando el lema 5.22, sucesiones $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ y $\langle a_n : n \in \omega \rangle$, tales que para cualesquiera $m < n \in \omega$, $a_n \in B_n$, $B_n \subseteq B_m$ y $a_m < a_n$ y que para cada $i < n$ y $q \subseteq \{a_0, \ldots, a_i\}$, $[s \cup q, B_i] \subseteq [\omega]^\omega \setminus S_i$. Así, si $B = \{a_n : n \in \omega\}$, $[s, B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus M$.

□

Corolario 5.25. *Todo conjunto magro es un conjunto completamente Ramsey.*

Definición 5.26. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $S \subseteq X$. Decimos que S tiene la propiedad de Baire si existen conjuntos U y M tales que U es abierto, M es magro y $S = U \triangle M$.*

Teorema 5.27. *Todo conjunto con la propiedad de Baire en $[\omega]^\omega$ es un conjunto completamente Ramsey.*

Demostración. Sean S un conjunto con la propiedad de Baire, $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$. Dado que S tiene la propiedad de Baire existen $U \in [\omega]^\omega$ abierto y $M \in [\omega]^\omega$ magro tal que $S = U \triangle M$.

Por el lema anterior existe $B \in [A]^\omega$ tal que $[s, B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus M$ y dado que U es un conjunto completamente Ramsey, por ser abierto, existe $B^* \in [B]^\omega$ tal que $[s, B^*] \subseteq U$ o bien $[s, B^*] \cap U = \emptyset$.

Supongamos se cumple $[s, B^*] \subseteq U$. Entonces para cada $C \in [s, B^*]$ tenemos que $C \in U$ y $s \sqsubset C \subseteq s \cup B^* \subseteq s \cup B$ y por tanto, $C \in [s, B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus M$. Así, $C \in S$. Por lo tanto, $[s, B^*] \subseteq S$.

Por otro lado, si $[s, B^*] \cap U = \emptyset$. Dado que $[s, B^*] \subseteq [s, B] \subseteq [\omega]^\omega \setminus M$ tenemos $[s, B^*] \cap S = \emptyset$. Concluimos que S es un conjunto completamente Ramsey.

□

Definición 5.28. *Sea X un espacio polaco.*

1. *Un sistema de Souslin de X es una clase de conjuntos $\{S_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ tal que S_s es un conjunto cerrado para cada $s \in \omega^{<\omega}$.*

2. *$S \subseteq X$ es un conjunto de Souslin si y sólo si existe $\{S_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ un sistema de Souslin tal que $S = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} S_{f\restriction_n}$*

Si $\{S_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ es un sistema de Souslin, entonces $\bigcup_{f\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} S_{f\restriction_n}$ es llamada la operación de Souslin de $\{S_s : s \in \omega^{<\omega}\}$. Resulta una propiedad importante que esta operación preserva la propiedad de ser un conjunto de Baire. Daremos por hecho este resultado. [Bart]

Definición 5.29. *Sean X un espacio polaco y $S \subseteq X$. S es un conjunto* analítico *si y sólo si existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ continua, tal que $f(\mathcal{N}) = S$.*

Sean X, Y espacios polacos. Si $B \subseteq X \times Y$, la proyección de B (sobre X) se define como el conjunto $\{x \in X : \exists y \in Y (x, y) \in B\}$. Una definición equivalente de conjunto analítico que resultará de utilidad, establece que; $S \subseteq X$ es un conjunto analítico si y sólo si S se puede ver como la proyección de un conjunto Boreliano en $X \times Y$ (sobre X) para algún Y espacio polaco. [Jech]

Teorema 5.30. *Sean X un espacio polaco y $S \subseteq X$. S es un conjunto analítico si y sólo si S es un conjunto de Souslin.*

Demostración. $\Longleftarrow$) Sea $\{S_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ es un sistema de Souslin. Probaremos que $S = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} S_{f\restriction_n}$ es un conjunto analítico.

Para cada $n \in \omega$, sea $B_n = \{(x, f) : x \in S_{f\restriction_n}\}$. Podemos descomponer a $B_n = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} S_{f\restriction_n} \times \{f\}$. Dado que S_s y $\{f\}$ son conjuntos cerrados para cada $s \in \omega^{<\omega}$ y $f \in \mathcal{N}$, $S_{f\restriction_n} \times \{f\}$ es un conjunto cerrado para toda $f \in \omega^\omega$. Por lo tanto B_n es un conjunto Boreliano, pues es la unión numerable de conjuntos cerrados.

$(x, f^*) \in \bigcap_{n\in\omega} B_n$ si y sólo si para todo $n \in \omega$, $x \in S_{f^*\restriction_n}$ si y sólo si $x \in \bigcup_{f\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} S_{f\restriction_n}$.

Por lo tanto, S es la proyección de un conjunto Boreliano en $X \times \mathcal{N}$. Por lo tanto, S es analítico.

$\Longrightarrow$) Sea $S \subseteq X$ un conjunto analítico, entonces existe $F : \mathcal{N} \longrightarrow X$ continua tal que $F[\mathcal{N}] = S$.

Demostraremos que para cada $f \in \mathcal{N}$, $\bigcap_{n\in\omega} \overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})} = \{F(f)\}$.

Sea $f \in \mathcal{N}$. $f \in \mathcal{O}_{f\restriction n}$ para todo $n \in \omega$, entonces $F(f) \in F(\mathcal{O}_{f\restriction n})$ para todo $n \in \omega$. Dado que $F(\mathcal{O}_{f\restriction n}) \subseteq \overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})}$ para todo $n \in \omega$, $F(f) \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})}$. Por lo tanto, $\{F(f)\} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})}$.

Supongamos que existe $y \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})}$ tal que $y \neq F(f)$. Para cada $n \in \omega$, $y \in \overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})}$. Entonces para cada $n \in \omega$, existe $\langle y_k : k \in \omega\rangle \subseteq F(\mathcal{O}_{f\restriction n})$ que converge a y. Para cada $k \in \omega$, $y_k \in F(\mathcal{O}_{f\restriction n})$, por lo tanto, $y_k = F(g_k)$ para alguna $g_k \in \mathcal{O}_{f\restriction n}$. La sucesión $\langle g_k : k \in \omega\rangle$ converge a f y por la continuidad de F, tenemos que $\langle F(g_k) : k \in \omega\rangle$ converge a $F(f)$, pero $\langle F(g_k) : k \in \omega\rangle$ converge a y. Por lo tanto, para cada $n \in \omega$, $\overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})} = \{F(f)\}$. Así, $\bigcap_{n\in\omega} \overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})} = \{F(f)\}$.

Por lo tanto, $S = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} \overline{F(\mathcal{O}_{f\restriction n})}$. Concluimos que S es un conjunto de Souslin.

□

Lema 5.31. *Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$. Si S es un conjunto de Souslin, entonces S es un conjunto completamente Ramsey.*

Demostración. Como S es un conjunto de Souslin, existe $\{S_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ tal que S_s es un conjunto cerrado en $[\omega]^\omega$ para cada $s \in \omega^{<\omega}$ y $S = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} S_{f\restriction n}$.

Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $S_s = int(S_s) \triangle Fr(S_s)$, $Fr(S_s)$ es un conjunto magro y $int(S_s)$ es abierto. Por lo tanto, S_s tiene la propiedad de Baire para toda $s \in \omega^{<\omega}$. Dado que la operación de Souslin preserva la propiedad de Baire, $S = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} S_{f\restriction n}$ tiene la propiedad de Baire. Así, por el Teorema 5.27, S es un conjunto completamente Ramsey.

□

Hemos demostrado que la relación $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega_2$ se satisface, si restringimos nuestras coloraciones a aquellas en las que alguno de los conjuntos en la partición asociada a la coloración es analítico. Llamamos estas coloraciones, coloraciones analíticas.

Corolario 5.32. *La relación $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega_2$ se cumple si tomamos coloraciones analíticas.*

Bibliografía

[D.Pr] Carlos Augusto Di Prisco, *Combinatoria: Teoría de Ramsey*, Preprint, 2005.

[Jech] Thomas Jech, *Set Theory*, Springer, 2002.

[Kana] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite, Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings,* Springer, 2009.

[Ell] Erik Ellentuck, *A New Proof that Analytic Sets are Ramsey,* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 39, No. 1 (Mar., 1974), pp. 163-165.

[Kech] Alexander S.Kechris, *Classical Descriptive Set Theory,* Springer-Verlag, 1995.

[D.P] Carlos Augusto Di Prisco, *Desarrollos Recientes en la Teoría de Particiones*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. VI, No. 1, 1999.

[FHMT] A.Flores Ferrer, F.Hernández Hernández, C.Matínez Lázaro, L.A.Martínez Pérez, A.Torres Ayala. *Conjuntos especiales de números reales,* 2005.

[Bart] Tomek Bartoszyński y Haim Judah, *Set theory on the Structure of the Real Line.* A K Peters/CRC Press; 1 edition, 1995.

[C.I] Carlos Ivorra Castillo, *Teoría Descrptiva de Conjuntos.*

[Kune] K.Kunen. *Set theory, an introduction to independence proofs.* North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1992.

[Hern] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[ACM] José Alfredo Amor y Montaño; Gabriela Campero Arena; Favio Ezequiel Miranda Perea. *Teoría de Conjuntos, curso intermedio.*Las Prensas de Ciencias, 2011.

[F.P] F.P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math Soc. 30: 264-296,1930.

[E.R] P. Erdös and R. Rado, *A partition calculus in the set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 427-489.

[J.B] J. E. Baumgartner, *A short proof of Hindman's theorem*, S. Comb. Theory Series A. 17 issue 3(1974), 384-386.

[Hal] Lorenz J. Halbeisen, *Combinatorial Set Theory, with a gentle introduction to forcing*, Springer, 2011.

[Drak] Frank R. Drake, *Set Theory an introduction to large cardinals*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1974.

[ERH] Paul Erdös, András Hajnal, Attila Máté, Richard Rado, *Combinatorial Set theory: Partition Relations for Cardinals*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1984.

[C.T] Fidel Casarrubias Segura, Ángel Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología de Conjuntos,* 2011

[P.M] Penelope Maddy, *Believing the axioms. I,* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 53, No. 2. (Jun., 1988), pp. 481-511.

[U.R] K.Kunen, *Some points in* $\beta\mathbb{N}$*,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 80, 1976, pp. 385-398.