



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**REDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA EN EL CONTEXTO
COSMOLÓGICO Y EL SURGIMIENTO DE LAS
INHOMOGENEIDADES PRIMORDIALES**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
PEDRO MARIO CAÑATE CASSERES

TUTOR PRINCIPAL:
DR. DANIEL E. SUDARSKY SAIONZ
(ICN-UNAM)

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR: **DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ**
(ICN-UNAM)

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR: **DR. JERÓNIMO A. CORTEZ QUEZADA**
(FC-UNAM)

CIUDAD UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE

MÉXICO, D.F., 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**REDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE
ONDA EN EL CONTEXTO
COSMOLÓGICO Y EL SURGIMIENTO
DE LAS INHOMOGENEIDADES
PRIMORDIALES**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

PEDRO MARIO CAÑATE CÁSSERES

TUTOR PRINCIPAL:

DR. DANIEL E. SUDARSKY SAIONZ

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL:

DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL:

DR. JERÓNIMO A. CORTEZ QUEZADA



posgrado en ciencias físicas
u n a m

CIUDAD UNIVERSITARIA

MÉXICO, D.F., 2015

Resumen

La versión estándar sobre el origen de la estructura cosmológica dada por el modelo cosmológico inflacionario, en el cual la estructura es resultado de las fluctuaciones cuánticas ocurridas durante la etapa inflacionaria, es poco satisfactoria. Si nos preguntamos; **¿Exactamente cómo el universo transita de una época homogénea e isotrópica (H&I) a una donde las incertidumbres cuánticas se convierten en fluctuaciones inhomogéneas?** En la versión estándar las predicciones del modelo inflacionario respecto a este punto no se encuentran justificadas por ningún esquema de mecánica cuántica. Por el contrario, al evolucionar unitariamente el estado vacío del campo del inflatón, de acuerdo a las reglas estándar de la mecánica cuántica en un universo en expansión, el estado permanecerá homogéneo e isotrópico en cualquier época.

Al igual que en [3], en este trabajo se propone que para entender la transición de un estado homogéneo e isotrópico a uno que no lo es, es necesario de algo como un colapso objetivo de la función de onda (esto es un colapso independiente de observadores que pudieran realizar mediciones sobre el sistema), asociado al estado cuántico homogéneo e isotrópico original, si es que queremos terminar con una situación inhomogénea y anisotrópica. Esta idea fue inspirada por trabajos de R. Penrose en los cuales la gravedad cuántica tiene un papel en el rompimiento de la evolución unitaria estándar de la mecánica cuántica. En particular, en este trabajo de tesis implementamos al problema cosmológico un modelo de colapso objetivo de la función de onda conocido como: Modelo de localización continua y espontánea (CSL) de Pearle. En este trabajo también se implementa un esquema de colapso objetivo en la “alternativa a la inflación” propuesta por S. Hollands y R. Wald [21], la cual al igual que el modelo cosmológico estándar inflacionario carece de un mecanismo que pueda explicar la transición de un **estado cuántico perfectamente homogéneo e isotrópico** a un estado cuántico que en general no posea tales simetrías.

Finalmente, realizamos un estudio riguroso sobre la emergencia del espacio-tiempo inhomogéneo y anisotrópico, calculando tanto la métrica que modela el espacio-tiempo emergente, como el estado cuántico final auto-consistente con dicha métrica a través de las ecuaciones semi-clásicas de Einstein.

Abstract

The standard inflationary version of the origin of the cosmic structure as the result of the quantum fluctuations during the inflationary stage is less than fully satisfactory: **How exactly does the universe transit from a homogeneous and isotropic (H&I) stage to one where the quantum uncertainties become actual inhomogeneous fluctuations?** In the standard version the predictions of inflationary model in this regard cannot be fully justified in any known scheme of quantum physics. On the contrary, the unitary evolution of the vacuum state of the inflaton field, according to the standard rules of quantum mechanics in an expanding universe, will remain homogeneous and isotropic at any given epoch.

According to [3], in this thesis have been proposed that to understand the transition from a homogeneous and isotropic state to one that is not, it is necessary of something like to an objective collapse theory (i.e. a quantum collapse without of observers that may make measurements over the system), associated with the original homogeneous and isotropic quantum state, if we want to finish with an inhomogeneous and anisotropic situation. This in turn was inspired by ideas of R. Penrose about the roles that quantum gravity might play in bringing about such breakdown of standard unitary evolution of quantum mechanics. In particular, in this thesis we implemented in the cosmological problem a model of objective collapse the wave function, known as continuous spontaneous localization (CSL) model. In this thesis work also have been implemented a collapse objective scheme on the “an alternative to inflation” proposed by S. Hollands and R. Wald [21], where the same manner as in inflationary standard cosmological model, it lacks of a mechanism that can to explain the transition of a **quantum state perfectly (H&I)** to other quantum state that in general does not have these symmetries.

Finally, in this thesis work we make a robust approach about the transition from a homogeneous and isotropic space-time to another one lacking such symmetries. Calculating the metrics that modeling the spaces-times between the transition, and the quantum states compatible (through of the semiclassical Einstein equations) with each metric.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a todas las personas que han confiado en mí, y que de alguna forma directa o indirecta han contribuido a que todo esto sea posible. Naturalmente, el máximo mérito se lo atribuyo al director de esta tesis doctoral, Daniel Eduardo Sudarsky. Científicamente hablando, Daniel compartió conmigo, de una manera honesta y directa, su profundo entendimiento de física teórica. Le agradezco su integridad, profesionalismo, y sobre todo, su paciencia al lidiar conmigo en este largo camino. Quiero agradecer a Luisa G. Jaime y Marcelo Salgado, quienes paralelamente a este trabajo me brindaron la oportunidad de trabajar con ellos y aprender un tema de investigación distinto al de mi tesis, el cual sin lugar duda servirá como un gran complemento a mi formación científica. Agradezco a Jerónimo Cortez; por su tiempo, comentarios. A la gente de la coordinación del PCF. Gracias a mis padres Pedro Cañate y Elisa Cásseres, a mis hermanos por su apoyo y cariño. Agradezco a Eva y P. Hacib, por su gran paciencia y tolerancia mostrada durante el recorrido de la mayor parte de este camino, por último agradezco a todas las personas especiales que han aparecido en esta vocación.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivación general y problema principal	2
2. Marco Cosmológico	7
2.1. Elementos de la Cosmología Estándar	8
2.1.1. La expansión del universo	8
2.1.2. Cronología Térmica del Universo en la Cosmología Estándar	22
2.1.3. “Problema” de las condiciones iniciales del Big Bang	29
3. Cosmología Estándar Inflacionaria	33
3.1. Elementos de la cosmología estándar inflacionaria	33
3.1.1. El campo inflacionario	33
3.2. El problema de la formación de estructuras visto desde la cosmología inflacionaria	39
3.2.1. Forma general de las ecuaciones para las perturbaciones cosmológicas	44
3.2.2. Anisotropías de la CMBR	49
3.2.3. Espectro de Harrison-Zel’dovich H&Z	57
3.2.4. Perturbación en la norma longitudinal del sistema Einstein - campo escalar	62
3.2.5. Origen de las Inhomogeneidades Primordiales según el marco Inflacionario	65
4. Tratamientos Anteriores: “Hipótesis de Colapso Auto-inducido”	73
4.1. Implementación de la hipótesis de colapso auto-inducido en el modelo cosmológico estándar inflacionario	74
5. Modelo de localización continua y espontánea (CSL) de Pearle como mecanismo para el surgimiento de las inhomogeneidades cosmológicas durante inflación	83
5.1. El modelo localización continua y espontánea (CSL) de Pearle	85
5.2. Incorporando CSL al problema cosmológico.	89
5.2.1. Teoría cuántica estándar vs modelo CSL	93

5.2.2.	Modelo CSL con $\hat{A}_{\vec{k}} = \hat{P}_{\vec{k}}$	98
5.2.3.	Modelo CSL con $\hat{A}_{\vec{k}} = \hat{X}_{\vec{k}}$	101
5.2.4.	Estimaciones	104
6.	Implementación de la hipótesis de colapso auto-inducido en el modelo “una alternativa a la inflación” de Hollands y Wald	107
6.0.5.	Sistema fluido acoplado a la gravedad	108
6.1.	Incorporando el esquema de colapso	112
6.1.1.	Análisis de la implementación	113
6.1.2.	Estimaciones	119
7.	Estudio formal de la emergencia del espacio-tiempo inhomogéneo y anisotrópico: Configuraciones semiclasicas auto-consistentes (SSC)	125
7.1.	Configuraciones semiclasicas auto-consistentes construidas hasta segundo orden en la perturbación	125
7.1.1.	Construcción de una SSC-I en un espacio-tiempo espacialmente plano, homogéneo e isotrópico de FRW	137
7.1.2.	Construcción de una SSC-II en un espacio-tiempo “levemente inhomogéneo” (“casi FRW”)	142
7.1.3.	El empalme en la hipersuperficie de colapso	191
8.	Conclusiones y trabajo futuro	205
	Apéndices	207
	A. Convenciones y unidades	207
	B. Escala temporal	209

Capítulo 1

Introducción

Recientemente¹ el telescopio espacial Planck de la Agencia Espacial Europea ha presentado el mapa más detallado hasta la fecha de la radiación del fondo cósmico de microondas (CMBR por sus siglas en inglés). Se cree que esta radiación es la luz más antigua del universo, emitida hace unos 13400 millones de años, cuando el universo primigenio estaba formado por una sopa caliente de protones, electrones y fotones. La primera luz surgió cuando la temperatura descendió lo suficiente como para que los protones y los electrones comenzaron a juntarse formando átomos de hidrógeno. A medida que el universo se continúa expandiendo, esta radiación se ha ido desplazando hacia las longitudes de onda de las microondas, el equivalente a una temperatura de 2.7 grados Kelvin.

Este fondo cósmico de microondas posee pequeñas fluctuaciones en la temperatura algunas de las cuales son consecuencias de regiones que presentaban una densidad de energía ligeramente diferente en los primeros instantes de la historia del universo: las semillas de todas las estructuras, estrellas y galaxias, que vemos hoy en día. Se cree que estas semillas de estructura tuvieron un origen cuántico, y posteriormente, fueron amplificadas por la gravedad. Por lo cual, a través del CMBR tenemos datos observacionales indirectos sobre el comportamiento de la gravedad y la mecánica cuántica, los cuales conviene que sean analizados por una teoría de gravedad cuántica, debido, entre otras cosas, a que las escalas de energía en la época en donde se cree que tuvieron origen las semillas de estructura cósmica, coinciden justamente con las escalas de energía donde la gravedad y la mecánica cuántica se encuentran relacionadas fundamentalmente. Por otro lado, no contamos con una teoría de gravedad cuántica completamente desarrollada, sin embargo un modelo fenomenológico de este problema podría arrojar pistas para la elaboración de esta nueva teoría.

El telescopio Planck fue diseñado para trazar un mapa de estas fluctuaciones a lo largo de todo el firmamento, con la mayor resolución y sensibilidad disponibles hasta la fecha. El análisis de la naturaleza y de la distribución de estas fluctuaciones de la temperatura sobre el mapa del fondo cósmico nos ayudará a determinar la composición y la evolución del universo desde su nacimiento hasta la actualidad.

¹El telescopio Planck lanzado el 14 de mayo de 2009, durante su funcionamiento fue conocido como la máquina más fría fuera de la Tierra, con tan sólo una décima de grado por encima del cero absoluto, esta excelencia tecnológica en el manejo de las temperaturas permitió apreciar variaciones de millonésimas de grado en el mismo. El telescopio aguantó hasta que sus reservas de helio se agotaron en enero de 2012. Durante ese tiempo el telescopio Planck observó el firmamento captando las mínimas variaciones de temperatura de la radiación del fondo cósmico de microondas y realizando el mapa de cómo era el universo observable cuando tenía 380000 años de antigüedad. Finalmente en Marzo de 2013, El telescopio Planck reveló sus primeros resultados.

Los datos presentados por Planck complementan y mejoran a los obtenidos por otras misiones como; el telescopio Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), BAO, ACT y SPT, las cuales también se centraron en medir el CMBR. En relación a la receta cosmica, las proporciones relativas de los ingredientes constitutivos del universo, los resultados dados por el telescopio Planck están en perfecto acuerdo con los obtenidos de manera teórica por el modelo cosmológico Λ CDM. Esto nos dice que; hoy en día un (4.87 ± 0.06) % de la densidad de energía total del universo corresponde a la materia (bariónica), un (26.5 ± 0.6) % a la materia oscura y un (69.2 ± 1.0) % a la energía oscura.

Mientras que sobre el universo en sus etapas iniciales, las observaciones realizadas por WMAP habían fortalecido la percepción positiva de los escenarios inflacionarios entre los cosmólogos, sin embargo el nuevo mapa presentado por Planck presenta características que desafían a los modelos cosmológicos inflacionarios, favoreciendo a los modelos más simples basados en la existencia del inflatón: un campo escalar ϕ con un potencial que cambia lentamente de la forma ϕ^n .

Sin embargo, la precisión de los datos de Planck es tan alta que también han revelado una serie de características inexplicables sobre la distribución de las fluctuaciones de la temperatura del CMBR. Resulta que el anterior telescopio espacial WMAP observó ciertas distribuciones de las fluctuaciones de la temperatura las cuales parecían mostrar que algunas zonas calientes y frías en el CMBR no están distribuidas al azar, como se esperaba, sino que están alineadas.

Estas agrupaciones de regiones calientes, o frías de fluctuaciones de la temperatura se les conoce como anomalías del fondo cósmico de microondas. Sobresalen dos anomalías, la primera consiste de un eje que separa una región ligeramente más cálida que otra, llamada con el curioso nombre coloquial de eje del mal y la segunda, se trata de una mancha fría en la dirección de la constelación de Eridanus, llamada punto frío de Eridanus. Muchos expertos pensaban que era un error instrumental de WMAP y que el telescopio espacial Planck no observaría las anomalías. Sin embargo, estas dos anomalías también se observan en los nuevos datos. Estas anomalías podrían ser otra indicación de algo sobre el universo a gran escala que aún no entendemos bien; para lo que será necesario desarrollar nuevas teorías físicas.

Recapitulando, creemos que el estudio de la radiación cósmica de fondo puede ser presentado como un laboratorio idóneo en el cual se abre la posibilidad de encontrar y explorar nueva física. En este trabajo de tesis expondremos diferentes modelos los cuales pretenden explicar el origen de aquellas fluctuaciones en la temperatura del CMBR que se relacionan con las semillas de estructura cósmica.

1.1. Motivación general y problema principal

Desde que el modelo del Big Bang fue aceptado como paradigma de la cosmología en 1965, ha sido expuesto a numerosas y exigentes pruebas observacionales que ha pasado con éxito. Sin embargo existen todavía una serie de problemas fundamentales sin resolver que constituyen los retos de la cosmología actual y que además trascienden el contexto puramente cosmológico. Entraremos en más detalles sobre esto cuando hagamos la discusión técnica. El primer conjunto de problemas se identificó en los años 70 y tiene que ver con que, si vamos hacia atrás en el tiempo, para que el universo aparezca como le vemos hoy en día tiene que haber empezado con unas condiciones iniciales muy especiales. Estos problemas son realmente problemas del entendimiento de las condiciones iniciales de las variables que

involucran la evolución del universo. Según el modelo de Big Bang dichas variables tuvieron que estar muy finamente ajustadas para permitir que nuestro universo evolucionara a tal punto de que los seres humanos estemos aquí preguntándonos acerca de esto. El hecho de que estas condiciones sean tan particulares y finamente ajustadas es lo que representa un problema. El modelo cosmológico estándar inflacionario, presume de poder explicar los problemas de condiciones iniciales del universo. La idea del modelo inflacionario puede describirse brevemente de la siguiente manera: En el modelo de Big Bang, en cierto modo antes de que el Big Bang empiece, se le incorpora la idea; que el universo primigenio experimento una etapa muy breve de expansión acelerada. Entonces, comenzando con condiciones relativamente arbitrarias sobre nuestro universo, la expansión acelerada lo lleva a un estado perfectamente homogéneo e isotrópico que posee las características necesarias para que su evolución posterior, la cual continuará siendo guiada por el modelo de Big Bang, conduzca al estado observado actual del universo. El modelo inflacionario, también presume dar solución a un problema para el cual no había sido diseñado, se trata que; durante la época inflacionaria las fluctuaciones cuánticas del vacío asociadas al inflatón se congelan (esto es, la amplitud de la fluctuación del inflatón permanece constante) y a partir de este instante se invita a tratar a las fluctuaciones cuánticas como clásicas. Esta transición ocurre cuando la longitud de onda física asociada a las fluctuaciones es mayor que el radio de Hubble². A las fluctuaciones del vacío, se les asocia con las perturbaciones a la densidad de energía que sobreviven después de la inflación y que se identifican con el origen de toda la estructura, estas son las semillas de estructura cósmica, observada en el universo, en particular, son las responsables de un cierto tipo de anisotropías observadas en el CMBR.

En este trabajo de tesis, al igual que en trabajos anteriores ([3], [6], [17]) se argumenta que el modelo estándar cosmológico inflacionario **no provee una explicación satisfactoria sobre la transición de un estado homogéneo e isotrópico del universo primitivo hacia un estado posterior inhomogéneo y anisotrópico**, que concuerda con los datos observacionales. Este problema está íntimamente relacionado con el problema de la medición en mecánica cuántica que hasta el momento no tiene una explicación que sea universalmente aceptada. El problema cosmológico en cuestión, puede ser analizado en función de las diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica. Este análisis es llevado a cabo con gran detalle en ([7], [13], [17]). Sin embargo, en este trabajo presentaremos, muy brevemente, este análisis en la interpretación de Copenhague.

En la **interpretación de Copenhague u Ortodoxa**, con el fin de conseguir dicha transición, se necesitaría observar o medir el estado cuántico inicial, el cual es homogéneo e isotrópico, del sistema. Como consecuencia de esta medición ocurrirá lo que se conoce como el colapso de la función de onda de tal forma que el estado cuántico del sistema se colapsará a un estado que en general no tendrá que ser homogéneo e isotrópico. Entonces, según esta interpretación solo a través de una observación del estado cuántico inicial se produciría la transición necesaria para que el estado final posea las semillas de estructura cósmica. El punto es que, no habría manera de medir u observar el estado cuántico inicial puesto que antes de esto no habría algo que pudiera desempeñar el papel de observador o aparato de

²Resulta que, a nivel cosmológico, debido a la expansión del universo un objeto ubicado a una distancia suficientemente grande del observador, se puede alejar del observador con una velocidad mayor que la de la luz, lo que implica que hay algún tipo de horizonte cosmológico. Este horizonte conocido como radio de Hubble, el cual describiremos con detalle más adelante

medición.

Lo anterior indica la ausencia en el modelo estándar cosmológico inflacionario de un ingrediente fundamental ó por lo menos a nivel conceptual, con el cual podamos entender la transición de las fluctuaciones primordiales cuánticas a clásicas.

Por otro lado, en la literatura podemos encontrar diversos trabajos en los cuales se intenta formular teorías de mecánica cuántica, llamadas **teorías de colapso objetivo**, en donde se pueda predecir la realidad sin hacer uso de mediciones las cuales, en la descripción cuántica ortodoxa, son las causantes del colapso de la función de onda y con esto evitar el problema de la medición de la mecánica cuántica.

Entre las posibles alternativas presentadas se encuentran aquellas en las que la función de onda del sistema, sufre **colapsos espontáneos** que ocurren a nivel microscópico y que tienden a suprimir superposiciones de estados macroscópicos. Mientras que entre colapsos, la evolución del sistema cuántico sigue siendo descrita por la ecuación de Schrödinger.

Existe una generalización inmediata de estos modelos, a un modelo en el cual los colapsos espontáneos ocurren todo el tiempo de tal forma que la diferencia temporal entre un colapso y otro es casi nula, estos modelos pueden ser entendidos como **modificaciones de la ecuación de Schrödinger**, con el propósito de que la nueva evolución del estado cuántico del sistema pueda **colapsar de manera dinámica**.

En este trabajo de tesis se argumenta que el eslabón faltante para entender la transición el estado cuántico inicial homogéneo e isotrópico del Universo, a un estado inhomogéneo y anisotrópico, presuntamente podría tratarse de algo del tipo de una **teoría de colapso objetivo**.

Este trabajo de tesis estará organizado de la siguiente manera:

- En los **Capítulos 2 y 3**, se presentan las bases teóricas necesarias para el desarrollo de este trabajo, concluyendo con el planteamiento del problema principal a tratar en esta tesis.
- En el **Capítulo 4**, se da un breve resumen de algunos tratamientos anteriores que confrontar este problema. En particular, los tratamientos que se presentaran son una descripción efectiva en el sentido de que no explican la transición de un estado homogéneo e isotrópico a otro que no lo es, y tampoco están basados en algún mecanismo físico conocido, simplemente se propone una parametrización general sobre dicha transición.
- En el **Capítulo 5**, se presenta la implementación al problema cosmológico de un modelo de colapso objetivo conocido como: modelo de localización continua y espontánea (**CSL**) de Pearle.
- S. Hollands y R. Wald, en el trabajo ([21]), bajo algunas hipótesis relativamente naturales y prescindiendo de la etapa inflacionaria, plantean una forma de generar el espectro de potencias, para el potencial Newtoniano, compatible con el de Harrison-Zel'dovich (H&Z). En el capítulo **Capítulo 6** se argumenta que el modelo de Hollands y Wald, al igual que en la cosmología inflacionaria, falla a la hora de explicar la transición de

un estado cuántico inicial, perfectamente homogéneo e isotrópico, del universo a un estado final con semillas de estructura cósmica. Consecuentemente en este mismo capítulo implementamos en el modelo de Hollands y Wald un mecanismo capaz de generar y explicar la transición deseada.

- En el **Capítulo 7**, se lleva cabo hasta segundo orden en la expansión el estudio formal sobre la emergencia del espacio-tiempo inhomogéneo y anisotrópico: “*configuraciones semiclásicas auto-consistentes*”, presentado en [8].
- Finalmente en el **Capítulo 8**, presentamos las conclusiones del trabajo expuesto en esta tesis.
- Apéndices.

Capítulo 2

Marco Cosmológico

Si nos concentramos en observar la luz más antigua y lejana que pueda llegar a nosotros nos encontraremos con que esta luz empata “casi” perfectamente con la radiación emitida por un cuerpo negro a $2.725 \text{ }^\circ\text{K}$. Notaremos que esta radiación nos llega de todos lados, y en su largo camino hacia nosotros los fotones que la conforman han vivido la mayoría de las fases de la evolución del universo, tropezando con multitud de objetos y fenómenos astrofísicos, incluyendo cúmulos de galaxias, galaxias individuales, nubes de polvo y gas en nuestra propia galaxia. La radiación anteriormente mencionada recibe el nombre de Radiación Cósmica de Fondo (CMBR), y fue predicha por la teoría del Big Bang, siendo esta la causa principal por la cual el Big Bang logro consolidarse, hasta la actualidad, como la teoría más aceptada sobre la formación del universo. Según el Big Bang el universo se encuentra continuamente en expansión y además era muy caliente en sus etapas iniciales. La teoría del Big Bang nos dice que la radiación cósmica de fondo fue emitida hace más de 13 mil millones de años, cuando el universo se enfrió, gracias a su expansión, hasta alcanzar una temperatura de $3000 \text{ }^\circ\text{K}$. A partir de este momento los fotones, los cuales inicialmente se encontraban acoplados a la materia, lograron desacoplarse de ella y con esto los fotones pudieron moverse libremente. Al enfriarse aun más el universo la temperatura de la radiación se fue reduciendo y en la actualidad, según el telescopio Planck, es de sólo $2.725 \text{ }^\circ\text{K}$. Ahora si refinamos nuestro aparatos de medición encontraremos que realmente la temperatura del CMBR varia entre $2.7250 \text{ }^\circ\text{K}$ y $2.7260 \text{ }^\circ\text{K}$, encontrando así fluctuaciones de la temperatura del orden de 10^{-5} . Se cree que un cierto tipo de estas fluctuaciones de la temperatura del CMBR, estarían relacionadas con las semillas de estructura cósmica las cuales darían origen a las estructuras cosmológicas que conforman nuestro universo hoy día. El paradigma inflacionario fue propuesto inicialmente para solventar los problemas de condiciones iniciales del modelo de Big Bang, aunque también presume de poder explicar los orígenes de las inhomogeneidades primordiales. Cabe señalar que existen otros modelos los cuales también argumentan poder solucionar los mismos problemas cosmológicos, pero el paradigma inflacionario, por su sencillez en comparación con los otros modelos, goza de mayor aceptación entre la comunidad científica.

En este trabajo de tesis el tema de investigación es precisamente el surgimiento de las inhomogeneidades primordiales y las discusiones girarán en torno a la idea de que en el modelo estándar cosmológico inflacionario, o en modelos alternativos a la inflación adheridos a la teoría de Big Bang (pero en los que aun los estados cuánticos evolucionan siguiendo las reglas dadas por la mecánica cuántica estándar), es necesario implementar (modificar la mecánica cuántica estándar) un mecanismo el cual permita al estado cuántico inicial del

universo, transitar de ser perfectamente homogéneo e isotrópico (no tiene inhomogeneidades primordiales), a una situación final inhomogénea y anisotrópica (con inhomogeneidades primordiales). Finalmente, presentaremos algunos modelos fenomenológicos que podrían explicar dicha transición.

2.1. Elementos de la Cosmología Estándar

Nuestro conocimiento actual del universo se fundamenta en el Modelo Estándar Cosmológico. El corazón del Modelo Estándar Cosmológico es la teoría del Big Bang, la “gran explosión caliente”. El Big Bang, es la teoría con mayor aceptación sobre el universo temprano, es consistente con 50 años de mediciones. Por otro lado, realmente la teoría del Big Bang no describe la emergencia del universo, sino que nos narra cada una de las facetas por las que ha transitado el universo iniciando momentos después de su emergencia. Esta teoría inicia la descripción del universo argumentando que el universo se encuentra permanentemente en expansión y que en sus primeras etapas era muy caliente. A temperaturas iniciales tan altas como las que el Big Bang supone, el universo podía ser entendido como un plasma muy “caliente”, de partículas con carga eléctrica positiva y negativa. En este plasma, los encuentros entre materia y antimateria producían su aniquilación emitiendo fotones, los que a su vez creaban más pares de partículas-antipartícula. Pero estos fotones entonces sólo podían viajar cortas distancias antes de ser dispersados al interaccionar de alguna manera con los constituyentes de este plasma. No fue hasta que la temperatura descendió a unos 10^9 °K, cuando se cree que el universo tenía unos 3 minutos de edad, que los protones y neutrones se unieron formando los primeros núcleos atómicos, sin embargo los electrones todavía se movían libremente. Al bajar aún más la temperatura a unos 3000 °K, los núcleos atómicos (positivos) y electrones (negativos) formaron los primeros átomos (Hidrogeno, Helio y algo de litio. En la proporción de 75 % de hidrogeno, casi 25 % de helio, y trazas de los otros elementos), de esta forma el plasma paso a ser una sopa de partículas neutras y con esto, los fotones pudieron al fin moverse libremente, lo anterior marca la superficie de última dispersión (LSS por sus siglas en inglés: Last Scattering Surface) y se cree que esto ocurrió cuando el universo tenía unos 380000 años. Los fotones que fueron emitidos en LSS se han propagado durante 13400 millones de años, y hoy se observan como fotones de baja energía (microondas), conformando la radiación conocida como CMBR (sigla en inglés de Cosmic Microwave Background Radiation, o radiación de fondo de microondas). Entonces según la teoría del Big Bang, el universo en sus primeras etapas era opaco hasta que la temperatura descendió lo suficiente para permitir la propagación de los fotones libremente consiguiendo así un universo transparente. Dicho de otro modo, esto significa que en sus principios el universo podía ser entendido como cuerpo negro ideal, generando radiación de cuerpo negro la cual finalmente se emitió en la superficie de última dispersión. Tal radiación de cuerpo negro fue finalmente detectada de manera accidental por Penzias y Wilson, para luego ser estudiada por experimentos como **COBE**, **BOOMERANG**, **WMAP**, **PLANCK**, **BICEP2**.

2.1.1. La expansión del universo

Las secciones siguientes correspondientes a este capítulo estarán basadas en las referencias bibliográficas ([37], [38],...).

El Modelo Estándar Cosmológico, se basa en la teoría de Relatividad General, limitando el conjunto de soluciones pidiendo que satisfagan el Principio Cosmológico: Homogeneidad e Isotropía a gran escala. Según la Relatividad General, el espacio-tiempo es modelado por una variedad 4-dimensional en la cual se define una métrica, con signatura Lorentziana $(-, +, +, +)$. La métrica y la distribución de materia en el espacio-tiempo se relacionan mediante las ecuaciones de Einstein;

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein (depende de la métrica) y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento (depende de la métrica y la materia).

Einstein, propuso el llamado Principio Cosmológico (PC) para encontrar una familia de soluciones a sus ecuaciones. Este principio se enuncia como;

La distribución de materia en el universo es homogénea e isotrópica a gran escala.

Dicho de otro modo, el principio cosmológico dice que, la estructura espacial del universo, promediada sobre grandes volúmenes de espacio, es: homogénea e isotrópica, por homogénea entendemos que; las propiedades físicas son invariantes ante traslaciones, esto implica que para un “instante” de tiempo dado, la visión dada desde cada punto del “espacio” debe ser muy parecida a la dada desde cualquier otro punto. Una formulación más precisa de esta idea es la siguiente (para más detalles consultar apéndice): Un espacio tiempo se dice que es espacialmente homogéneo, si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies Σ_t espacialoides foliando el espacio-tiempo parametrizadas por el tiempo coordenado t , tal que para cada t y para cualesquiera 2 puntos $x, y \in \Sigma_t$, existe una isometría de la métrica del espacio-tiempo, g_{ab} , la cual lleva x a y . Por otra parte, se dice que el espacio-tiempo es espacialmente isotrópico, si en cada punto existe una congruencia de curvas temporaloides u observadores con tangentes u^a que llenan el espacio-tiempo (para más detalles consultar apéndice), satisfaciendo que dado cualquier punto p y dos vectores tangentes unitarios s_1^a y s_2^a en p ortogonales a u^a , existe una isometría de g_{ab} que deja a p y u^a fijos pero que rota a s_1^a y s_2^a .

El universo puede ser modelado como un fluido perfecto, cuyo componente básico son las galaxias, con alguna ecuación de estado que viene dada normalmente como una relación entre la densidad de energía ρ y la presión p del fluido. Ahora, si entre el conjunto de soluciones de las ecuaciones de campo gravitatorio de Einstein, limitamos a aquellas que satisfacen el **Principio Cosmológico**., es decir, demandando homogeneidad e isotropía como simetrías presentes en las solución de las ecuaciones de Einstein, suponiendo con esto que, una buena aproximación para describir al universo real consiste en asumir que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico, pero que evoluciona con el tiempo. En relatividad general esto último equivale a suponer que el universo se puede foliar con hipersuperficies espacialoides tal que cada hipersuperficie 3-dimensional es máximamente simétrica. Consecuentemente, asumiremos que nuestro espacio-tiempo es $\mathbf{R} \times \Sigma$, donde \mathbf{R} representa la dirección de la coordenada temporal y Σ es una 3-variedad máximamente simétrica. El Principio Cosmológico, restringe los posibles elementos de línea del universo a gran escala a tres posibles las cuales serán descritas por la métrica de Robertson-Walker (RW). La métrica RW escrita en coordenadas comóviles¹ (t, r, θ, ϕ) , tiene la forma;

¹Las coordenadas comóviles son aquellas que asignan valores constantes a las coordenadas espaciales de los

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.2)$$

siendo c la velocidad de la luz en vacío, pero por simplicidad usaremos unidades en las cuales $c = 1$. El tiempo coordenado t es el tiempo cósmico y corresponde justamente al parámetro con el cual la familia uniparamétrica de hipersuperficies Σ_t espacialoides (homogéneas e isotrópicas) folían al espacio-tiempo. El factor de escala $a(t)$ es una función adimensional, definida positiva, del tiempo y se relaciona directamente con la expansión o contracción del universo. La constante K está relacionada con la curvatura del espacio y determina la topología de las secciones espaciales. Si $K = 0$, la parte espacial ($t=\text{constante}$) de la métrica de RW es plana, esto corresponde al espacio Euclideo ordinario escrito en coordenadas esféricas, donde la distancia radial está dada por $a(t)r$, y el espacio-tiempo es espacialmente plano. Sin embargo, debido a que $a(t)$ depende de t , el espacio-tiempo posee escalar de curvatura de Ricci distinta de cero.

Por otro lado, si $K > 0$, la parte espacial ($t=\text{constante}$) de la métrica de RW es cerrada, lo cual modela a un universo espacialmente cerrado o esférico. Mientras que si $K < 0$, la parte espacial ($t=\text{constante}$) de la métrica de RW es abierta lo cual modela a un universo espacialmente abierto o hiperbólico.

Podemos efectuar un cambio de coordenada radial r a través de la relación $r = f_K(\chi)$, de tal manera que la constante de curvatura espacial K , solo tome los valores 1, -1 y 0, correspondiendo a geometrías cerradas, abiertas y planas, respectivamente. Bajo este cambio de coordenada radial r , es posible expresar la métrica de RW como;

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + f_K^2(\chi) \left(d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right], \quad (2.3)$$

donde la función $f_K(\chi)$ es;

$$\begin{cases} f_K(\chi) = \sin \chi, & \text{si } K = 1 \\ f_K(\chi) = \chi, & \text{si } K = 0 \\ f_K(\chi) = \sinh \chi, & \text{si } K = -1. \end{cases}$$

Se define el tiempo conforme η , como;

$$\eta = \eta_0 + \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{a(\tau)}. \quad (2.4)$$

Una manera muy común de presentar la métrica de RW, es usando el tiempo conforme η en lugar del tiempo cósmico t . Entonces, bajo el cambio de variable (2.4) la métrica (2.2) adquiere la siguiente forma;

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.5)$$

Sin embargo, en lo que sigue continuaremos trabajando con la métrica de RW (2.2) escrita en las coordenadas (t, r, ϕ, θ) , hasta que se especifique algún cambio en el tratamiento.

observadores comóviles, los observadores comóviles son los observadores que perciben al universo homogéneo e isotrópico (consultar el apéndice para más detalles).

La métrica de RW tiene dos escalas de longitudes asociadas; la primera es el radio de curvatura $r_{curv} \sim \frac{a(t)}{\sqrt{K}}$, la segunda está dada por la escala temporal de la expansión conocida como el tiempo de Hubble $t_H \sim \frac{1}{H}$, donde $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ es el parámetro de Hubble (el tiempo de Hubble en buena medida corresponde a la edad del universo). Por simplicidad, en nuestra notación el punto denota derivada total con respecto a la coordenada temporal t , esto es; $\dot{A}(t) = \frac{d}{dt}A(t)$.

Por definición, el tiempo de Hubble multiplicado por la velocidad de la luz en el vacío (trabajamos con unidades tales que $c = 1$), es igual a la longitud o radio de Hubble,

$$d_H(t) = \frac{1}{H(t)}. \quad (2.6)$$

Ahora, sustituyendo la métrica de RW en las ecuaciones de Einstein, y modelando el contenido de materia en el universo como un fluido perfecto con ecuación de estado $p = \omega\rho$ en donde ρ y p representan la densidad de energía y presión del fluido respectivamente, encontramos las ecuaciones de Friedmann las cuales describen la evolución del factor de escala.

Calculando el tensor de Einstein $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$, a partir de la métrica de RW, se encuentra que

$$\begin{aligned} G^{00} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + K) \\ G^{11} &= G^{22} = G^{33} = -\frac{1}{a^2}(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + K). \end{aligned} \quad (2.7)$$

La materia puede se descrita por el tensor de energía-momento correspondiente a un fluido perfecto, esto es;

$$T^{ab} = (\rho + p)u^a u^b + pg^{ab}, \quad (2.8)$$

donde u_a es la cuatrivelocidad del fluido. La isotropía espacial implica que $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, entonces,

$$T_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La hipótesis de homogeneidad espacial implica que $\rho = \rho(t)$, $p = p(t)$, por tanto de las ecuaciones de Einstein $G^{ab} = 8\pi G T^{ab}$, se obtiene;

$$\begin{aligned} \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + K) &= 8\pi G\rho, \\ -\frac{1}{a^2}(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + K) &= 8\pi Gp. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De manera directa las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como;

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \quad (2.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.11), (2.12) son las conocidas ecuaciones de Friedmann.

Ahora procederemos con la ecuación de conservación de energía en Relatividad General, $\nabla_a T^{ab} = 0$, obteniendo;

$$\dot{\rho} = -3H(p + \rho) \quad (2.13)$$

Por otro lado, despejando ρ de la ecuación (2.11);

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(H^2 + \frac{K}{a^2} \right). \quad (2.14)$$

Se define por densidad crítica en un tiempo cósmico t a la cantidad; $\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$. Entonces, usando la definición de $\rho_c(t)$ en la ecuación (2.14), se obtiene;

$$\rho(t) = \rho_c(t) + \frac{3K}{8\pi G a^2(t)} \quad (2.15)$$

luego de evaluar esta ecuación en t_0 , se encuentra: $\rho(t_0) = \rho_c + \frac{3K}{8\pi G a^2(t_0)}$ en donde $\rho_c = \rho_c(t_0)$ es la densidad crítica en t_0 . Ahora, para un tiempo cósmico t , con base a la ecuación (2.15) partiendo de la diferencia entre la densidad $\rho(t)$ y la densidad crítica $\rho_c(t)$, podemos leer la curvatura espacial K .

$$\begin{cases} \rho(t) < \rho_c(t), & \text{entonces } K < 0 \\ \rho(t) = \rho_c(t), & \text{entonces } K = 0 \\ \rho(t) > \rho_c(t), & \text{entonces } K > 0 \end{cases}$$

Definiremos el parámetro de densidad $\Omega(t)$ como;

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \quad (2.16)$$

del cual nuevamente podemos leer la topología de la parte espacial del universo. Si $\Omega(t) = 1 \Rightarrow \rho(t) = \rho_c(t)$, implica un universo espacialmente plano, para $\Omega(t) < 1 \Rightarrow \rho(t) < \rho_c(t)$ tenemos un universo espacialmente abierto, y para $\Omega(t) > 1 \Rightarrow \rho(t) > \rho_c(t)$ un universo espacialmente cerrado. En términos del parámetro de densidad, la ecuación de Friedmann (2.15) puede ser escrita como;

$$\Omega(t) = 1 + \frac{K}{H^2 a^2(t)}, \quad (2.17)$$

observamos que si $K \neq 0$ y si $\Omega < 1$, ó $\Omega > 1$ entonces Ω permanecerá menor (o mayor) que uno, aún cuando $\Omega(t)$ evolucione con el tiempo. Sin embargo, si $\Omega = 1$ (esto es, $K = 0$), permanecerá constante, i.e., $\Omega(t) = \Omega_0 = 1$, en donde Ω_0 representa el valor actual del parámetro de densidad $\Omega_0 = \Omega(t_0)$. Las observaciones sugieren que la densidad actual del universo es muy cercana a la crítica $\rho(t_0) \approx \rho_c$, lo cual implica que $\Omega_0 \approx 1$.

Por otro parte, para resolver las ecuaciones de Friedmann, es necesaria la ecuación de estado $p(t) = \omega\rho(t)$, los casos más simples son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_r = \frac{1}{3}\rho_r, & \text{radiación} \\ p_m = 0, \rho_m \neq 0, & \text{materia ó polvo} \\ p_\Lambda = -\rho_\Lambda, & \text{energía oscura ó de constante cosmológica} \end{array} \right.$$

Radiación: se refiere a materia ultrarelativista (donde la energía de las partículas es mucho mayor que su masa en reposo, lo cual es siempre cierto para partículas no masivas como los fotones).

Materia ó polvo: llamada materia en cosmología y polvo en Relatividad General. Por materia nos referimos a materia no relativista (la velocidad de las partículas es $V \ll c$), para la cual $p \ll \rho$.

Energía oscura ó de constante cosmológica: en estos modelos tienen $\Lambda > 0$ (en donde Λ es la constante cosmológica).

La **densidad total de materia** en el universo, está dada por la suma de los diferentes tipos de densidades, los cuales son; densidad de materia² ρ_m , de radiación (ó materia ultrarelativista) ρ_r y de vacío (de constante cosmológica ó de energía oscura) ρ_Λ ,

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t), \quad (2.18)$$

y de igual manera para el parámetro de densidad tenemos,

$$\Omega(t) = \Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t), \quad (2.19)$$

donde $\Omega_m(t) = \frac{\rho_m(t)}{\rho_c(t)}$, $\Omega_r(t) = \frac{\rho_r(t)}{\rho_c(t)}$ y $\Omega_\Lambda(t) = \frac{\rho_\Lambda(t)}{\rho_c(t)} = \frac{\Lambda}{3H^2}$. Las cantidades; $\Omega_m(t)$, $\Omega_r(t)$, y $\Omega_\Lambda(t)$ son funciones del tiempo. En notación estándar, Ω_m , Ω_r , y Ω_Λ denotan los valores actuales de estos parámetros de densidad; escribiremos $\Omega_m(t)$, $\Omega_r(t)$, y $\Omega_\Lambda(t)$, si nos queremos referir a sus valores a otros tiempos. Por lo tanto escribimos el parámetro de densidad actual $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ como;

$$\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda. \quad (2.20)$$

El modelo cosmológico de FRW está completamente definido si se dan los valores actuales de los parámetros cosmológicos, H_0 , Ω_m , Ω_r , y Ω_Λ . El valor actual de la constante de Hubble es $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ donde h es conocida como la constante de Hubble normalizada, la cual según las observaciones esta dada por $h = 0.71 \pm 0.025$. Los últimos resultados del satélite Planck y el Sloan Digital Sky Survey (Planck Collaboration XVI, 2013) arrojan los valores $\Omega_\Lambda = 0.692 \pm 0.010$, $\Omega_B = 0.0487 \pm 0.0006$, $\Omega_{DM} = 0.265 \pm 0.006$, y $\Omega_r = (4.9 \pm 0.5) \times 10^{-5}$. Por lo tanto, la evidencia observable apunta a que el universo es espacialmente plano $\Omega_0 \approx 1$, lo cual significa $K = 0$.

Universo dominado por radiación: para un universo espacialmente plano en el cual el contenido de materia es dominado por radiación $p \approx p_r$, $\rho \approx \rho_r$ la ecuación de estado $p = \omega\rho$ podrá ser aproximada como; $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$.

Entonces la ec (2.13) implica;

²El contenido material del universo se divide fundamentalmente en materia bariónica ordinaria (B) y materia oscura (DM Dark Matter) la cual interacciona con la materia bariónica sólo a través de efectos gravitatorios. Entonces, $\Omega_m(t) = \Omega_B(t) + \Omega_{DM}(t)$.

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r = -\frac{4\dot{a}}{a}\rho_r \Rightarrow \frac{d(\rho_r a^4)}{dt} = 0 \Rightarrow \rho_r \propto a^{-4} \quad (2.21)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Friedmann encontraremos que el factor de escala evoluciona de la siguiente manera;

$$a(t) = C_1 t^{\frac{1}{2}}. \quad (2.22)$$

Será conveniente encontrar la relación exacta entre ρ_r y el factor de escala. En la ecuación (2.21) se encontró que $\rho_r \propto a^{-4}$, esto ultimo implica que para dos tiempos cósmicos (por ejemplo t cualquiera y t_0 presente), se cumple que $\rho_r(t)a^4(t) = \rho_r(t_0)a^4(t_0)$, de aquí podemos leer la relación;

$$\rho_r(t) = \frac{a^4(t_0)}{a^4(t)} \rho_r(t_0). \quad (2.23)$$

Universo dominado por polvo: para un universo espacialmente plano en el cual $p \ll \rho$, de tal manera que en la ecuación (2.13), nos podemos olvidar de la presión y poner $p = 0$ (por lo cual será valida la aproximación $p \approx p_m = 0$, $\rho \approx \rho_m$). Entonces, (2.13) tomará la forma;

$$\dot{\rho}_m = -3H\rho_m = -\frac{3\dot{a}}{a}\rho_m \Rightarrow \frac{d(\rho_m a^3)}{dt} = 0 \Rightarrow \rho_m \propto a^{-3} \quad (2.24)$$

sustituyendo la anterior relación en las ecuaciones de Friedmann encontramos el factor de escala,

$$a(t) = C_1 t^{\frac{2}{3}} = C_2 \eta^2. \quad (2.25)$$

De igual forma que para el caso anterior, se encuentra que;

$$\rho_m(t) = \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)} \rho_m(t_0) \quad (2.26)$$

Modelos de de Sitter ó de universo dominado por constante cosmológica: para un universo espacialmente plano en el cual el contenido de materia es dominado por constante cosmológica ó energía oscura, entonces la ecuación de estado puede ser aproximada como; $p \approx -\rho$. Entonces, por medio de la ecuación (2.13) se encuentra que la densidad de energía ρ no cambia con el tiempo y está uniformemente distribuida en el espacio, con un valor dado por;

$$\rho \approx \rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}. \quad (2.27)$$

Mientras que sustituyendo la anterior relación en la ecuación de Friedmann (2.11), se encuentra que;

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda \quad (2.28)$$

y su solución exacta será,

$$a(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t} \quad (2.29)$$

Parámetros Cosmológicos

La **distancia propia o distancia física** entre dos puntos es igual a la longitud de la geodesia entre ellos cuando el factor de escala está fijo. Por ejemplo, para realizar el cálculo de la distancia propia entre dos galaxias, resultará conveniente trabajar en el sistema comóvil (en el sistema comóvil las coordenadas de un punto no cambian) en el cual $r = 0$ coincide con la ubicación de una de las galaxias, mientras que la otra se encontrará a una coordenada comóvil $r \neq 0$ arbitraria, entonces en estas coordenadas a t fijo la geodésica entre estas galaxias corresponderá a una geodésica radial. De esta forma se encuentra que la distancia propia entre ambas galaxias en un instante t viene dada por;

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1 - Kx^2}} = a(t) d_p^c. \quad (2.30)$$

siendo d_p^c la distancia propia comóvil entre las dos galaxias (esta última no cambian en el tiempo, recordemos que los observadores fundamentales son comóviles, i.e. sus coordenadas x^i están fijas).

Denominaremos $V_r(t)$, como la **velocidad de recesión** de una galaxia con respecto a otra, esta velocidad se debe a la expansión del universo, y se define como;

$$V_r(t) = \dot{d}_p(t) = \frac{da(t)}{dt} \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1 - Kx^2}} = \frac{da(t)}{dt} \frac{1}{a(t)} d_p(t), \quad (2.31)$$

en donde luego de usar la definición $H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt}$, la cantidad $V_r(t)$ podrá ser escrita de la siguiente manera;

$$V_r(t) = H(t) d_p(t), \quad (2.32)$$

que es la expresión de la **ley de Hubble**, siendo $H(t)$ el **parámetro de Hubble**. Lo que llamamos **constante de Hubble** es $H_0 = H(t_0)$ para el instante presente.

Como cualquier posición en el universo es equivalente, de acuerdo al principio cosmológico, este resultado es independiente del origen $r = 0$. Por último, mencionaremos que las cantidades $d_p(t_0)$ y $V_r(t_0)$ son estimadas de manera indirecta a través de la observaciones, para luego tomar su cociente y de esta forma extraer el valor de la constante de Hubble H_0 .

Recesión superlumínica: para galaxias separadas por distancias propias tales que; $d_p(t) > \frac{1}{H(t)}$, esto corresponde a un tiempo fijo t , distancias propias mayores al radio de Hubble (2.6), vemos de la ecuación (2.32), que la velocidad de recesión para este caso será tal que $V_r(t) > 1$, aparentemente en contradicción con la teoría de relatividad especial³, pero esto es solo por la expansión del universo, porque la galaxia no es capaz de viajar más rápido que un rayo de luz que se mueva en sus proximidades. En realidad, la velocidad de una galaxia comparada con la luz que se mueve en sus inmediaciones es como mucho del orden de unos centenares de km/s (su **velocidad peculiar**). Hay que notar que la velocidad de recesión es una velocidad aparente que se debe a un cambio de la geometría del espacio (y consecuente modificación de

³se recuerda que en el sistema de unidades con el que estamos trabajando aquí $c = 1$.

distancias) y no a un movimiento de los objetos en el espacio. No es que la galaxia observada surque el espacio alejándose de nosotros, sino que el espacio mismo se la lleva al estar éste en expansión.

Ahora compararemos la evolución de la distancia propia entre dos observadores comóviles $d_p(t)$ ecuación (2.30), con la evolución del radio de Hubble $d_H(t)$ ecuación (2.6),

$$d_p(t) = a(t)d_p^c, \quad d_H(t) = \frac{1}{H(t)}. \quad (2.33)$$

Retomando la definición de **recesión superlumínica**, en donde se encuentra que el **radio de Hubble** corresponde a la distancia propia que debe de haber entre una galaxia y el observador, para que la **velocidad de recesión** (2.32) de la galaxia medida por el observador sea igual a la velocidad de la luz. En el modelo cosmológico estándar cuando el contenido de materia en el universo es dominado por un fluido con ecuación de estado $p = \omega\rho$ con $\omega \in (-1, 1]$, se encuentra a través de las ecuaciones de Friedmann que; $a \propto t^{\frac{2}{3\omega+3}}$ de modo que $d_H(t) = \frac{(3\omega+3)t}{2}$ esto significa que el radio de Hubble crecerá linealmente en el tiempo, mientras que la distancia propia entre la galaxia y el obserbador $d_p(t) \propto t^{\frac{2}{3\omega+3}} d_p^c$ crecerá de manera no lineal. Entonces, para cuando domina radiación ó polvo, $\omega \in (0, 1)$ en general se obtiene que $\frac{1}{3} < \frac{2}{3\omega+3} < \frac{2}{3}$, se encuentra que el radio de Hubble crecerá más rápido que la distancia propia entre los observadores comóviles, de tal forma que si en un tiempo cósmico inicial t_{ini} , se cumple que; $d_p(t_{ini}) > d_H(t_{ini})$, la expansión del universo, para el caso en el que el contenido de materia en el univero es dominado por radiación o polvo, producirá que a un tiempo cosmico posterior $t_{igu} > t_{ini}$ ocurra que $d_p(t_{igu}) = d_H(t_{igu})$, y a partir de ahí para todo t_{fin} posterior $d_p(t_{fin}) < d_H(t_{fin})$. Lo anterior indica que cuando el contenido de materia en el universo es dominado por radiación o polvo, si inicialmente la velocidad de recesión de un observador comóvil con respecto a otro es superlumínica, luego de un tiempo lo suficientemente largo dejará de serlo. Para el caso en el que el contenido de materia en el universo es dominado por constante cosmológica ó energía oscura (esto modela el estado actual de expansión acelerada del universo), entonces calculando $d_H(t)$ para $a(t)$ dado por la ecuación (2.29), se encuentra;

$$a(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \Rightarrow d_H(t) = \sqrt{3/\Lambda} = constante, \quad (2.34)$$

encontrando que la distancia propia entre los observadores comóviles crecerá en el tiempo cósmico de manera exponencial, mientras que el radio de Hubble será constante. Entonces, a un tiempo t_{ini} los observadores comóviles separados por distancias propias menores que el radio de Hubble, eventualmente debido a la expansión exponencial del universo, en un tiempo cósmico t_{igu} lo suficientemente largo se presentara la igualdad $d_p(t_{igu}) = d_H(t_{igu})$, y a partir de ahí para todo tiempo cósmico posterior $t_{fin} > t_{igu}$, se tendrá que $d_p(t_{fin}) > d_H(t_{fin})$, por lo cual dichos observadores comóviles se alejaran mutuamente con velocidades superlumínicas y por tanto, sucesos que ocurran ahora mismo a distancias mayores que el radio de Hubble no serán nunca observables⁴ aún en un futuro arbitrariamente lejano, siempre y cuando el universo continúe expandiéndose aceleradamente (2.34).

Corrimiento al rojo cosmológico

⁴para este caso el radio de Hubble actúa como un horizonte de eventos

La evidencia observable más directa de la expansión del universo proviene del corrimiento al rojo (redshift), denotado por z , de las líneas espectrales de galaxias distantes, el cual se define como diferencia relativa entre la longitud de onda de la luz observada λ_0 con respecto a la emitida λ_e , esto es;

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}$$

Consideremos que se emite luz con longitud de onda λ_e desde una galaxia ubicada en $r_e \neq 0$, en un tiempo t_e , y nos llega con longitud de onda λ_0 en un tiempo t_0 (estamos en $r_0 = 0$). Por definición, el tiempo que tarda en salir, del emisor, una longitud de onda completa λ_e , corresponde a $\delta t_e = \lambda_e/c$. Mientras que el tiempo que tarda el receptor en recibir una longitud de onda completa λ_0 , será $\delta t_0 = \lambda_0/c$.

Ahora, consideremos que se emiten consecutivamente dos rayos de luz en instantes t_e y $t_e + \delta t_e$, los cuales recibiremos en t_0 y $t_0 + \delta t_0$, respectivamente.

Por otro lado, para una onda de luz $d^2s = 0$ y como supusimos $\phi = 0$, $\theta = 0$, $d\phi = 0$, y $d\theta = 0$, de la ecuación (2.2), se obtiene;

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.35)$$

y entonces para uno y otro rayo de luz tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} &= \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1 - Kx^2}} \\ \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} &= \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1 - Kx^2}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dado que los términos de la derecha de las dos últimas ecuaciones son iguales, entonces restando ambas ecuaciones obtenemos;

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = 0, \quad (2.37)$$

desarrollando el primer miembro de la anterior ecuación,

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = 0 \quad (2.38)$$

y entonces,

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = 0 \quad (2.39)$$

los intervalos δt_0 y δt_e son despreciables frente a la escala temporal de la expansión del universo, por lo que $a(t)$ puede considerarse constante durante los mismos,

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} \approx \frac{\delta t_e}{a(t_e)} \Rightarrow \frac{\delta t_0}{\delta t_e} \approx \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (2.40)$$

El corrimiento al rojo es entonces:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\delta t_0 - \delta t_e}{\delta t_e} = \frac{\delta t_0}{\delta t_e} - 1 \approx \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1. \quad (2.41)$$

la ecuación (2.41) también puede ser escrita como;

$$z + 1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \approx \frac{a(t_0)}{a(t_e)}, \quad (2.42)$$

de donde se concluye que para un universo en expansión, dado que $a(t_0) > a(t_e)$ entonces el corrimiento al rojo z , crece monótonamente.

Lo cual significa que la longitud de onda crece con la escala $a(t)$, mientras que la frecuencia, momento, y energía de los fotones decrece con la escala $a(t)$.

Por tanto, el redshift de una galaxia corresponde físicamente a comparar el factor de escala cuando la luz dejó la galaxia $a(t_e)$, con el factor de escala actual $a(t_0)$.

Por otro lado, si el corrimiento al rojo no es muy alto $z \in (0, 10)$, la ecuación (2.42) indica que $a(t_e) \approx a(t_0)$, entonces se puede desarrollar por Taylor $a(t_e)$ alrededor de t_0 a segundo orden:

$$a(t_e) = a(t_0) + (t_e - t_0) \dot{a}(t_0) + \frac{1}{2}(t_e - t_0)^2 \ddot{a}(t_0) + \mathcal{O}(3). \quad (2.43)$$

Definimos entonces H_0 como el valor presente del parámetro de Hubble o constante de Hubble, esto es;

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}, \quad (2.44)$$

y el parámetro de desaceleración q_0 como;

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)H_0^2}. \quad (2.45)$$

Tanto H_0 como q_0 están relacionadas con la tasa presente de expansión del universo. H_0 mide la tasa real de expansión, mientras que $q_0 > 0$ si la expansión se frena y $q_0 < 0$ si se está acelerando. Con esto, la ecuación (2.43) queda:

$$a(t_e) \approx a(t_0) \left[1 + H_0(t_e - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 (t_e - t_0)^2 \right]. \quad (2.46)$$

Usando la Ec.(2.46) en la Ec.(2.41), y despreciando términos de tercer orden, se obtiene:

$$z \approx H_0(t_0 - t_e) + H_0^2(t_0 - t_e)^2 \left[1 + \frac{q_0}{2} \right]. \quad (2.47)$$

Análogamente:

$$t_0 - t_e \approx \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 \right], \quad (2.48)$$

Resumen: Recapitulando: Las ecuaciones (2.46), (2.47), y (2.48) son válidas solo para bajos valores de z , siendo más precisos, estas ecuaciones son aproximaciones hasta segundo orden en z . Vemos que a partir de una galaxia con $z \in (0, 10)$, a través de las anteriores ecuaciones, (2.46), (2.47), y (2.48), podemos obtener factor de escala cuando la galaxia emitió la luz, y

la diferencia entre el tiempo de emisión y recepción. Haciendo uso de las ecuaciones; (2.23), (2.26), y (2.27) junto con la relación entre los factores de escala a tiempos distintos $a(t)$ y $a(t_0)$ dada por la ecuación (2.42), podemos escribir las densidades de energía $\rho_r(t)$, $\rho_m(t)$, y $\rho_\Lambda(t)$, como funciones del corrimiento al rojo z .

$$\begin{aligned}\rho_r(z) &= (1+z)^4 \rho_r(t_0) \\ \rho_m(z) &= (1+z)^3 \rho_m(t_0) \\ \rho_\Lambda(z) &= \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} = \text{const}\end{aligned}\tag{2.49}$$

Partiendo de las ecuaciones anteriores, podemos encontrar los parámetros de densidad $\Omega_r(t)$, $\Omega_m(t)$, y $\Omega_\Lambda(t)$ como función de z .

$$\begin{aligned}\Omega_r(z) &= \frac{\rho_r(z)}{\rho_c(z)} = (1+z)^4 \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_c} \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 = (1+z)^4 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \Omega_r \\ \Omega_m(z) &= \frac{\rho_m(z)}{\rho_c(z)} = (1+z)^3 \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_c} \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 = (1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \Omega_m \\ \Omega_\Lambda(z) &= \frac{\rho_\Lambda(z)}{\rho_c(z)} = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G \rho_c(t)} = \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \Omega_\Lambda\end{aligned}\tag{2.50}$$

Ahora, sustituyendo (2.50) en la definición $\Omega(z) = \Omega_r(z) + \Omega_m(z) + \Omega_\Lambda(z)$, se encuentra que;

$$\Omega(z) = (1+z)^4 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \Omega_r + (1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \Omega_m + \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \Omega_\Lambda,\tag{2.51}$$

por otro lado, según la ecuación (2.17) se puede escribir;

$$\Omega(t) = 1 + \frac{K}{H^2 a^2(t)} = 1 + \frac{K}{H_0^2 a^2(t_0)} \frac{H_0^2 a^2(t_0)}{H^2 a^2(t)},\tag{2.52}$$

usando una vez más la relación entre los factores de escala a tiempos distintos $a(t)$ y $a(t_0)$ dada por la ecuación (2.42), la ecuación anterior tomará la forma;

$$\Omega(z) = 1 + \frac{K}{H_0^2 a^2(t_0)} \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 (1+z)^2 = 1 + (\Omega_0 - 1) \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 (1+z)^2,\tag{2.53}$$

para la segunda igualdad se utilizó la relación que se obtiene al evaluar la ecuación (2.52) en t_0 . Finalmente, igualando (2.51) con (2.53), se encuentra que;

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = (1+z)^4 \Omega_r + (1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_0)(1+z)^2,\tag{2.54}$$

la cual puede ser entendida como la ecuación de Friedmann en función de z .

Por otro parte, asumiendo que en un tiempo t_e la galaxia (\mathcal{X}), ubicada en $r_e \neq 0$, emite una señal luminosa la cual es recibida en un tiempo t_0 por la galaxia (\mathcal{Y}), ubicada en $r_0 = 0$. Entonces haciendo uso de la ecuación (2.42) podemos calcular la distancia propia, en el tiempo t_e en que la señal luminosa fue emitida, entre la galaxia (\mathcal{X}) y (\mathcal{Y}), ecuación (2.30), como;

$$d_p(t_e) = \frac{a(t_e)a(t_0)}{a(t_0)} \int_0^{r_e} \frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} = \frac{a(t_0)}{1+z} \int_0^{r_e} \frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} = \frac{d_p(t_0)}{1+z} \quad (2.55)$$

siendo $d_p(t_0)$ la distancia propia entre las galaxias en el tiempo t_0 para el cual la galaxia receptora recibió la señal luminosa.

Anteriormente se menciono que la distancia propia $d_p(t)$ no es directamente observable, pero en cambio mientras que el corrimiento al rojo z si lo es. A continuación, presentaremos una manera de determinar $d_p(t)$ a partir del conocimiento de z . Con este propósito, primero estudiemos la distancia comóvil d_c , recorrida por un fotón desde su emisión al tiempo t_e en $r = r_e$, hasta su detección en un tiempo t_0 en $r = 0$, esta cantidad corresponde a;

$$d_c = \frac{d_p(t_e)}{a(t_e)} = \frac{d_p(t_0)}{a(t_0)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}. \quad (2.56)$$

Ahora realizaremos el cambio de variable dado por: $x = \frac{a(t)}{a_0}$, para esto a través de la regla de la cadena para la derivada se obtiene la relación $dt = \frac{dt}{dx} dx = \frac{da}{\dot{a}}$, usando esta última relación para cambiar la primera integral presente en (2.56) sobre t , por una integral sobre a , esto es;

$$d_c = \int_{a(t_e)}^{a(t_0)} \frac{da}{a\dot{a}} = \frac{1}{a_0} \int_{x[a(t_e)]}^{x[a(t_0)]} \frac{dt}{dx} \frac{dx}{x}. \quad (2.57)$$

Usando la ecuación de Friedmann (2.54), junto con la relación (2.42) esto es $1+z = a_0/a$, H^2 puede ser escrito como;

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Omega_r H_0^2 + \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Omega_m H_0^2 + \Omega_\Lambda H_0^2 + (1 - \Omega_0) \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 H_0^2 \quad (2.58)$$

entonces, $(\dot{a})^2$ podrá ser escrito como;

$$(\dot{a})^2 = \left(\Omega_r \frac{a_0^2}{a^2} + \Omega_m \frac{a_0}{a} + \Omega_\Lambda \frac{a^2}{a_0^2} + 1 - \Omega_0\right) H_0^2 a_0^2, \quad (2.59)$$

el siguiente paso consiste en sustituir la anterior ecuación en $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a_0} \frac{da}{dt}$, de esta forma se encuentra;

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\Omega_r \frac{a_0^2}{a^2} + \Omega_m \frac{a_0}{a} + \Omega_\Lambda \frac{a^2}{a_0^2} + 1 - \Omega_0\right)^{1/2} H_0 \\ &= \left(\Omega_r x^{-2} + \Omega_m x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + 1 - \Omega_0\right)^{1/2} H_0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

la cual sustituyéndola en la ecuación (2.57), y recordando que $x = \frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1+z}$, se obtiene;

$$\begin{aligned} d_c &= \frac{1}{a_0 H_0} \int_{x[a(t_e)]}^{x[a(t_0)]} \frac{1}{\sqrt{\Omega_r x^{-2} + \Omega_m x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + 1 - \Omega_0}} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{a_0 H_0} \int_{\frac{1}{z+1}}^1 \frac{1}{\sqrt{\Omega_r + \Omega_m x + \Omega_\Lambda x^4 + x^2 - \Omega_0 x^2}} dx \end{aligned} \quad (2.61)$$

usando $\Omega_m = \Omega_0 - \Omega_\Lambda - \Omega_r$, ver ecuación (2.20), la ecuación (2.61) podrá ser escrita como;

$$d_c = \frac{1}{a_0 H_0} \int_{\frac{1}{z+1}}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)\Omega_r + (x^4-x)\Omega_\Lambda + x^2 - (x^2-x)\Omega_0}} dx \quad (2.62)$$

A la expresión anterior se le conoce como la relación distancia-redshift. Observamos que depende de cuatro parámetros cosmológicos independientes, los cuales son: H_0 , Ω_0 , Ω_r y Ω_Λ . Finalmente, usando (2.55), (2.56), junto con (2.62), se llega a la expresión deseada la cual nos permite conocer $d_p(t)$ en función de z y los parámetros cosmológicos H_0 , Ω_0 , Ω_r y Ω_Λ , esta ecuación es;

$$\begin{aligned} d_p(t_0) &= a(t_0)d_c, \\ d_p(t_e) &= \frac{H_0^{-1}}{1+z} \int_{\frac{1}{z+1}}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)\Omega_r + (x^4-x)\Omega_\Lambda + x^2 - (x^2-x)\Omega_0}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Si extrapolamos la validez de la relatividad general hasta el inicio del universo, hipotéticamente $a = 0$ ó $z = \infty$, una señal luminosa emitida a $z = \infty$ y que pueda viajar libremente durante todas las etapas del universo, la distancia comóvil recorrida por esta señal luminosa emitida desde el principio del universo y receptada por nuestros telescopio en la actualidad es conocida como el **horizonte comóvil de partículas**, dado que es la máxima distancia que podríamos recibir información alguna. Esta distancia corresponde a;

$$d_{hp}^c = \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)\Omega_r + (x^4-x)\Omega_\Lambda + x^2 - (x^2-x)\Omega_0}} dx. \quad (2.64)$$

De la definición de d_{hp}^c se concluye que eventos separados por distancias mayores que d_{hp}^c están causalmente desconectados, pues ninguna señal ha podido llegar de uno al otro desde el $z = \infty$ hasta hoy.

Existe otro tipo de horizonte: el **horizonte comóvil de eventos ó de sucesos**, el cual es definido como la distancia de los objetos más lejanos al observador que podrían recibir una señal del observador en un futuro lejano. Este horizonte separa a aquellos objetos que podemos observar en el futuro de aquellos que, por hallarse fuera del cono de luz futuro del observador, jamás podrán ser observados. Los modelos de universos que tienen como convergente a la integral,

$$d_{hs}^c = \int_{t_0}^{t_{max}} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.65)$$

en donde t_{max} el tiempo de expansión futuro que puede ser infinito o finito y t_0 la edad del universo en el momento de la observación, tienen un horizonte de eventos.

Por otro lado, otro concepto útil es el de **distancia angular** $d_A(t_e)$, la cual relaciona el tamaño físico (ó diámetro) D de un objeto extendido, ó región, que vemos con un desplazamiento al rojo z (se asume que la luz observada fue emitida por el objeto extendido en un tiempo cósmico t_e y dicha luz finalmente alcanza al observador contemporáneo en un tiempo cósmico t_0), con el ángulo ϑ que subtiende sobre el cielo. Esta relación entre $d_A(t_e)$, D y ϑ , viene dada por;

$$d_A(t_e) \equiv \frac{D}{\vartheta}, \quad (2.66)$$

donde D representa el diámetro actual del objeto extendido, mientras que ϑ corresponde al ángulo observado. Otra manera de calcular esta distancia, es;

$$d_A(t_e) = a(t_e) \int_{r_0}^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (2.67)$$

siendo r_e la coordenada comóvil radial del objeto extendido, mientras que r_0 representa la coordenada comóvil del observador. Entonces, para un universo con curvatura espacial nula la anterior ecuación se reduce a; $d_A(t_e) = a(t_e)r_e$, donde hemos asumido que la coordenada comóvil r_0 del observador es $r_0 = 0$. Usando la relación $1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$ encontrada en (2.42), vemos que $d_A(t_e)$ puede ser escrito como;

$$d_A(t_e) = \frac{a(t_0)}{1 + z} r_e \quad (2.68)$$

para este caso ($K = 0$), según la ecuación (2.56), r_e corresponderá a la distancia comóvil d_c recorrida por el fotón desde su emisión en (t_e, r_e) hasta su detección en (t_0, r_0) .

2.1.2. Cronología Térmica del Universo en la Cosmología Estándar

Al inicio de este capítulo se señaló que según la teoría del Big Bang la CMBR fue emitida cuando la temperatura del universo descendió a 3000 °K, mientras que en sus etapas anteriores, por encontrarse a temperaturas mayores, el universo era opaco por lo que no podemos ver más atrás en el tiempo hasta el origen del universo. Sin embargo, el espectro de cuerpo negro de la radiación cósmica de fondo, indica que los fotones y la materia estuvieron en equilibrio térmico en épocas anteriores a la emisión del CMBR (según la teoría del Big Bang, el equilibrio térmico se mantenía ya que los fotones y electrones interactuaban mediante dispersión de Thomson). De esta manera podemos emplear a la termodinámica de un gas perfecto posiblemente relativista, para estudiar la historia térmica del universo temprano.

La condición de equilibrio térmico implica que se pueden usar las estadísticas de Fermi-Dirac o de Bose-Einstein, mientras que las variables físicas (p. ejm., presión, densidad, energía interna, etc.) se obtendrán directamente como momentos de la función de distribución, la cual viene dada por;

$$f(|\vec{p}|) = \frac{1}{e^{(E-\mu)T} \pm 1}, \quad (2.69)$$

donde el signo (+) es para fermiones, mientras que el (-) es para bosones. La función de distribución anterior tiene 2 parámetros, la temperatura T y el potencial químico μ . Mientras que E representa a la energía de las partículas relacionada con el momento $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ a través de;

$$E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_0^2}, \quad (2.70)$$

con m_0 la masa en reposo de la partícula y $\gamma = \sqrt{1 - (|\vec{v}|/c)^2}$.

Si todas las especies de partículas i tienen una función de distribución del tipo (2.69) para algún μ_i y T_i , se dice que están en equilibrio cinético, y además si todas las especies están a la misma temperatura entonces el sistema se encuentra en equilibrio térmico; este

tipo de equilibrio requiere que las interacciones entre los constituyentes del sistema ocurran de manera frecuente. Si esta condición se satisface, entonces es posible describir al universo como evolucionando a través de una secuencia de estados en equilibrio térmico y utilizar las cantidades termodinámicas como la temperatura T , presión P , etc., para cada tiempo t . Si el sistema se encuentra en equilibrio químico, los potenciales químicos de las diferentes especies de partículas están relacionados de acuerdo a las formulas de reacción, $i + j \leftrightarrow k + l$, $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l$, por lo cual, todos los potenciales químicos pueden expresarse en términos de potenciales químicos de cantidades conservadas, como por ejemplo, el potencial químico bariónico. La densidad de partículas en el espacio fase es la densidad de estados multiplicada por la función de distribución $\frac{g}{(2\pi)^3} f(|\vec{p}|)$, donde g es el número de grados de libertad internos de la partícula. Es posible obtener la densidad de partículas n en el espacio ordinario integrando sobre el espacio de momentos, esto es;

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(|\vec{p}|) d^3p. \quad (2.71)$$

De manera similar, la densidad de energía ρ en el espacio de configuraciones viene dada por;

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(|\vec{p}|) E(|\vec{p}|) d^3p. \quad (2.72)$$

Para obtener la presión P , en teoría cinética se considera que la presión está dada por $P = \frac{n}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle = \frac{n}{3} \langle \frac{|\vec{p}|^2 c^2}{E} \rangle$, entonces la presión en el espacio de configuraciones, será;

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(|\vec{p}|) \frac{|\vec{p}|^2}{3E(|\vec{p}|)} d^3p. \quad (2.73)$$

donde hemos usado el hecho de que en nuestro sistema de unidades $c = 1$. En el límite ultrarelativista la temperatura es mucho mayor que la masa en reposo de la partícula $T \gg m_0$, entonces podemos aproximar $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_0^2} \approx |\vec{p}|$. Adicionalmente, si $|\mu| \ll T$, podemos aproximar, $\mu \approx 0$ y $m_0 \approx 0$, obteniendo que las ecuaciones (2.71), (2.72), y (2.73), podrán ser escritas de manera aproximada;

$$n \approx \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi |\vec{p}|^2}{e^{\frac{|\vec{p}|}{T}} \pm 1} dp. \quad (2.74)$$

$$\rho \approx \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi |\vec{p}|^3}{e^{\frac{|\vec{p}|}{T}} \pm 1} dp. \quad (2.75)$$

$$P \approx \frac{g}{3(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi |\vec{p}|^3}{e^{\frac{|\vec{p}|}{T}} \pm 1} dp = \frac{\rho}{3}. \quad (2.76)$$

Fijando el signo (+) e integrando, obtenemos n_f , ρ_f y P_f para fermiones ultra relativistas, esto es;

$$n_f = \frac{3g}{4\pi^2} \zeta(3) T^3, \quad (2.77)$$

$$\rho_f = \frac{7g\pi^2}{240} T^4, \quad (2.78)$$

$$P_f = \frac{\rho_f}{3} = 1.0505 n_f T, \quad (2.79)$$

siendo $\zeta(x)$ la función zeta de Riemann. Mientras que fijando el signo $(-)$ e integrando, obtenemos n_f , ρ_f y P_f para bosones ultra relativistas, esto es;

$$n_b = \frac{g}{\pi^2} \zeta(3) T^3, \quad (2.80)$$

$$\rho_b = \frac{g\pi^2}{30} T^4, \quad (2.81)$$

$$P_b = \frac{\rho_b}{3} = 0.9004 n_b T, \quad (2.82)$$

en donde hemos usado $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} = 1.20206$. Por otro lado, la energía promedio por partícula se define como $\langle E \rangle = \frac{\rho}{n}$, entonces para los fermiones se encuentra $\langle E_f \rangle = 3.151T$, mientras que para bosones $\langle E_b \rangle = 2.701T$. Si el potencial químico es nulo $\mu = 0$, esto quiere decir que el número de partículas es igual al de antipartículas. No obstante, si $\mu \neq 0$ encontramos que para fermiones en el límite ultra relativista $T \gg m_0$ el número neto de partículas es;

$$\begin{aligned} n - \bar{n} &= \frac{g}{2\pi^3} \int_0^{\infty} 4\pi |\vec{p}|^2 \left(\frac{1}{e^{\frac{|\vec{p} - \mu}{T}} + 1} - \frac{1}{e^{\frac{|\vec{p} + \mu}{T}} + 1} \right) dp. \\ &= \frac{gT^2 \mu}{6\pi^2} \left(\pi^2 + \frac{\mu^2}{T^2} \right), \end{aligned} \quad (2.83)$$

mientras que la densidad de energía total es;

$$\begin{aligned} \rho + \bar{\rho} &= \frac{g}{2\pi^3} \int_0^{\infty} 4\pi |\vec{p}|^3 \left(\frac{1}{e^{\frac{|\vec{p} - \mu}{T}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{|\vec{p} + \mu}{T}} + 1} \right) dp. \\ &= \frac{7g\pi^2 T^4}{120} \left(1 + \frac{30}{7\pi^2} \frac{\mu}{T} + \frac{15}{7\pi^4} \frac{\mu^4}{T^4} \right). \end{aligned} \quad (2.84)$$

En el caso del límite no relativista se cumplen las siguientes condiciones; condición **(a)** $T \ll m_0$ implicando que las energías cinéticas típicas están muy por debajo de la masa m_0 , por lo que podemos aproximar a la energía por $E = m_0 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m_0}$, y condición **(b)** $T \ll m_0 - \mu$ la cual lleva a que el sistema esté diluido, i.e. números de ocupación $\ll 1$. Ambas condiciones, **(a)** y **(b)**, permiten hacer la siguiente aproximación;

$$e^{(E-\mu)/T} \pm 1 \approx e^{(E-\mu)/T} \quad (2.85)$$

esto corresponde a la estadística de Maxwell-Boltzmann y para esta estadística no existe distinción entre la estadística de fermiones y bosones. Por lo tanto las cantidades n , ρ , P , $\langle E \rangle$ para este caso vendrán dadas por;

$$\begin{aligned}
n &= g \left(\frac{m_0 T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m_0 - \mu)/T}, \\
\rho &= \left(m_0 + \frac{3T}{2} \right) n, \\
P &= nT \ll \rho, \\
\langle E \rangle &= m_0 + \frac{3T}{2}, \\
n - \bar{n} &= 2g e^{-m_0/T} \left(\frac{m_0 T}{2\pi} \right)^{3/2} \sinh \left(\frac{\mu}{T} \right)
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Comparando los límites ultra-relativista ($T \gg m_0$) y no relativista ($T \ll m_0$), observamos que la densidad de partículas, la densidad de energía, y la presión de las partículas decae exponencialmente conforme la temperatura decae por debajo de la masa en reposo de la partícula. Físicamente, lo que sucede es que las partículas y las antipartículas se aniquilan unas a otras. A altas temperaturas dichas aniquilaciones también se llevan a cabo, pero están balanceadas por la producción de pares partícula-antipartícula. A temperaturas bajas, la energía térmica de las partículas no es suficiente para la producción de pares.

La otra cantidad termodinámica de gran importancia es la entropía $S(V, T)$. La entropía es introducida como una ecuación central a la termodinámica mediante el diferencial

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} [d(\rho(T)V) + P(T)dV], \tag{2.87}$$

expandiendo los diferenciales y factorizando V , la anterior ecuación puede ser escrita como;

$$dS(V, T) = \frac{V}{T} \left\{ d\rho(T) + \frac{\rho(T) + P(T)}{V} dV \right\}. \tag{2.88}$$

Por otro lado, usando la ecuación de continuidad (2.13) como;

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} (\rho + P) = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho + P}{a^3} \frac{da^3}{dt} = 0 \Rightarrow d\rho + \frac{\rho + P}{a^3} da^3 = 0. \tag{2.89}$$

Identificando V con $a^3(t)$ y usando la última ecuación (2.89) sobre la ecuación (2.88), obtenemos la siguiente ecuación de conservación para la entropía;

$$\frac{dS}{dt} = 0. \tag{2.90}$$

Si definimos a la densidad de entropía $s \sim S/V$, la ecuación de conservación se escribirá como;

$$\frac{d}{dt} (a^3 s) = 0, \tag{2.91}$$

Por otro lado, para las especies relativistas la densidad de entropía viene dada por;

$$s = \frac{\rho + P}{T}. \tag{2.92}$$

Ahora, usando (2.77), (2.78) y (2.79) se encuentra s_f para el caso de fermiones ultra relativistas;

$$s_f = \frac{7\pi^2 g}{180} T^3, \quad (2.93)$$

mientras que usando (2.80), (2.81) y (2.82) se encuentra s_B para el caso de bosones ultra relativistas;

$$s_b = \frac{2\pi^2 g}{45} T^3. \quad (2.94)$$

El caso no relativista no es importante, ya que la entropía de la radiación es mucho mayor que la entropía de las especies no relativistas.

La conservación de la entropía S implica que tanto para fermiones y bosones tenemos que $ga^3 T^3 = \text{const.}$, lo que nos lleva a la siguiente relación entre el factor de escala $a(t)$ y la temperatura T ;

$$a(t) \propto \frac{1}{T}, \quad (2.95)$$

la cual implica que el universo se enfría a medida que se expande. Mientras que de acuerdo con la ecuación de Friedmann, la expansión del universo está gobernada por la densidad de energía total

$$\rho(T) = \sum_i \rho_i(T), \quad (2.96)$$

donde el índice i corre sobre las diferentes especies de materia que pudieran estar presentes en el universo.

Los resultados anteriores nos permiten describir la **historia térmica del universo**, con base a ello, a continuación resumiremos las épocas más importantes en la historia térmica del universo.

Sopa primordial. La sopa primordial estaba compuesta por todas las diferentes especies de partículas elementales. La masa de estas especies cubren un amplio rango comprendido entre $m_{0,top} \sim 175$ GeV (quark top) hasta el fotón $m_{0,\nu} = 0$. La densidad de energía de las partículas ultra-relativistas, a las cuales llamaremos genéricamente **radiación**, es mayor que las de las especies no-relativistas, por lo que, en el universo primigenio (i.e. dominado por radiación) es suficiente tomar en cuenta a la radiación en el cálculo de (2.96), así, la densidad de energía es;

$$\rho(T) = \frac{\pi^2 T^4}{30} g_\star(T), \quad (2.97)$$

en donde hemos definido $g_\star(T)$, como;

$$g_\star(T) = g_b(T) + \frac{7}{8} g_f(T), \quad (2.98)$$

y $g_b = \sum_i g_{i,b}$ suma sobre bosones relativistas y $g_f = \sum_i g_{i,f}$, suma sobre fermiones relativistas. Mientras que la presión en esta época vendrá dada por; $P(T) \approx \frac{\rho(T)}{3}$.

Iniciando la descripción a **temperaturas mayores que la masa del quark top**, $T > m_{0,top} \sim 175 \text{ GeV}$, todas las partículas son relativistas, entonces sumando los grados de libertad internos de las especies a esta época nos da $g_*(T) = 106,75$ donde hemos sumando los grados de libertad internos de todos los fermiones (quarks, leptones) y bosones (gluones, fotones, W_{\pm} , Z_0 , Higgs) conocidos. Esto ocurre aproximadamente a $t \approx 10^{-12} \text{ s}$. La **transición Electro-débil (EW)**, cuya discusión queda fuera de este trabajo de tesis, ocurre cerca de $T \approx 100 \text{ GeV}$, $t \approx 20 \text{ ps}$, momento en el cual la aniquilación del quark t comenzaba a suceder. Los bosones de Higgs y los bosones de norma W_{\pm} , Z_0 se aniquilaron posteriormente.

A la **temperatura** $T \approx 10 \text{ GeV}$, tenemos $g_* = 86.25$ y es alrededor de esta etapa en que los quarks b y c se aniquilan junto con el meson τ lo que reduce los grados internos de libertad $g_* = 51.25$.

A la mitad del proceso de aniquilación del quark s , sucede una transición importante: **La transición de fase QCD** (también llamada **transición de fase quark-hadron**). Esta transición tiene lugar a $T \approx 150 \text{ MeV}$, $t \approx 20 \mu\text{s}$. La temperatura y por consiguiente la energía de los quarks decayó tanto que los quarks perdieron su llamada libertad asintótica, la cual habían tenido a altas energías. Las interacciones entre los quarks y gluones (la fuerza nuclear fuerte o la fuerza de color) comenzaron a ser considerables.

Los quarks y gluones dejaron de ser libres, por lo que el plasma quark-gluon comenzó a transformarse en un gas de hadrones. Los quarks y los gluones formaron sistemas ligados de 3 quarks, llamados bariones, y pares quarks-antiquarks, llamados mesones. En esta etapa se tiene $g_* = 17.25$.

Poco después de la transición de fase QCD, cuando la **temperatura alcanza** $T = 20 \text{ MeV}$, $g_* = 10.75$, los piones y los muones comienzan a decaer en electrones y positrones.

Cuando la edad del universo era de aproximadamente un segundo y la **temperatura** $T \approx 1 \text{ MeV}$, la materia en el universo consistía casi totalmente de neutrinos, fotones, electrones, positrones, neutrones, y protones en equilibrio térmico; la temperatura era lo suficientemente baja para que la abundancia de partículas elementales más pesadas fuera despreciable. Alrededor de esta época, las interacciones de los neutrinos se volvieron suficientemente débiles y se desacoplaron del resto de la materia. Por el resto de la historia del universo, estos neutrinos sólo sufrieron un corrimiento hacia el rojo, lo cual implica que su energía fue decayendo hasta formar un fondo **cósmico de radiación similar al CMBR** pero compuesto de neutrinos.

A $t = 3 \text{ s}$, tenemos que la **temperatura** $T \approx 0.5 \text{ MeV}$. En esta etapa los electrones y positrones comienzan a aniquilarse; la tasa de producción de pares e^-e^+ cae por debajo de la tasa de aniquilación, y poco tiempo después se aniquilan la mayor parte de los positrones, dejando una población relativamente pequeña de electrones residuales. Esencialmente toda la energía de los pares positron-electron se transfirió a los fotones, calentándolos a una temperatura ≈ 1.4 veces mayor que la temperatura de los neutrinos. Protones, neutrones y electrones residuales ya no se movían a velocidades relativistas; la densidad de energía del universo quedó fundamentalmente dominada por los fotones: fue la era de **dominio de radiación**.

Cuando el universo tenía aproximadamente entre 4 s y 3 min de edad, y su temperatura alcanza aproximadamente los 100 keV , se produjo la **nucleosíntesis primordial**. Los protones y los neutrones se habían enfriado ya lo suficiente como para que pudieran formarse sistemas ligados con base a ellos, dando lugar a la aparición de los elementos más ligeros de la tabla periódica: ^1H , ^2D , ^3He , ^4He , ^6Li , ^7Li . Las abundancias relativas de elementos

ligeros predichas por la teoría se han confirmado brillantemente por la observación. Esta predicción es impresionante ya que relaciones de las abundancias respecto a la abundancia de H cubre varios órdenes de magnitud: ${}^4He/H \approx 0.08$ hasta ${}^7Li/H \approx 10^{-10}$. Esto constituye uno de los más firmes apoyos del Modelo Estándar de Cosmología a la vez que demuestra su interconexión y perfecta concordancia con el Modelo Estándar de Física de Partículas Elementales.

El universo siguió expandiéndose y perdiendo temperatura. Cuando habían transcurrido unos 10^5 años y la **temperatura** había descendido a $T \approx 10^4$ °K, la radiación y la materia igualaron sus densidades de energía. Corresponde a un redshift de $z \approx 3.3 \times 10^4$.

Hacia aproximadamente los 3×10^5 años, y el universo se había enfriado, de tal forma que su **temperatura** era aproximadamente de 4000 °K, A esta temperatura y por debajo de ella, los electrones y protones libres se combinaron para formar hidrógeno neutro. Debido a este proceso, esta etapa se le conoce como recombinación (aunque en realidad los protones y electrones no habían estado combinados antes). Inmediatamente después, cuando la temperatura descendió a 3000 °K, las interacciones entre materia y radiación decayeron precipitosamente provocando que **los fotones se desacoplaron del plasma primordial**, por tanto, estos fotones pueden propagarse libremente sin interacción. Siendo más precisos, el **desacople de los fotones** no tiene lugar en un instante determinado, sino que se realiza a lo largo de un intervalo de tiempo $\Delta t = 118_{-2}^{+3} \times 10^3$ años en torno a $t_{desac} = 379_{-7}^{+8} \times 10^3$ años, caracterizado por una anchura

$$\Delta z = 195 \pm 2, \quad (2.99)$$

alrededor de $z_{desac} = 1089$. La región donde tuvo lugar el desacoplamiento se denomina **superficie de última dispersión (LSS)** por sus siglas en inglés), y debido a que el desacoplamiento no es un proceso instantáneo, la LSS tiene un determinado grosor $\Delta z = 195 \pm 2$. Aquellos fotones emitidos en LSS son los que darán origen a la **Radiación del Fondo Cósmico de Microondas (CMBR)**. A partir de aquí, comienza la era de dominio de materia, y esto ocurre a un redshift $z \approx 1100$.

La radiación de fondo cósmico de microondas, sustrayendo la corrección del movimiento propio del sistema solar y nuestra galaxia, es una radiación de cuerpo negro altamente isotrópica, excesivamente isotrópica pues deberían haber **inhomogeneidades** que justificaran la siembra del proceso de formación de las galaxias. El satélite COBE fue el primero en observar en 1990 unas **minúsculas anisotropías** en la distribución angular de la temperatura de la CMBR. Se cree que estas anisotropías representan **fluctuaciones intrínsecas de la propia CMBR** debidas a la presencia de **diminutas fluctuaciones de densidad en la materia** presente en el cosmos en el tiempo de la Recombinación. Estas fluctuaciones de densidad son las que más tarde colapsaron para formar todas las estructuras del universo. La distribución angular de la CMBR tiene muchísima más información física pues depende, por ejemplo, de la densidad bariónica ρ_B , la constante de Hubble H_0 y las densidades de materia oscura ρ_{DM} y de energía oscura ρ_Λ .

Continuando con la descripción, cuando habían transcurrido 10^8 años, a un redshift de $z \approx 20$, se produjo la **Reionización**, el proceso de formación de las primeras estrellas.

En un principio, durante el dominio de la materia, la densidad de energía oscura en el universo ρ_Λ era mucho menor que la densidad de energía de la materia ρ_m . Pero con la expansión, puesto que $\rho_m \sim a^{-3}$, mientras que $\rho_\Lambda \sim \text{constante}$, la densidad ρ_m iba disminuyendo, hasta que a un redshift $z \approx 0.46$ las dos densidades se igualaron. En adelante, hasta la actualidad, la evolución del universo estaría dominada por la energía oscura o contaste cosmológica.

Finalmente hoy, según los últimos resultados del satélite Planck, a $t_0 \approx 13.7 \times 10^9$ años de edad del universo, la temperatura del universo ha descendido a tal punto que la CMBR nos llega a $T = 2.7255 \pm 0.0005 \text{ }^\circ\text{K}$. Las mediciones realizadas del CMBR manifiestan su naturaleza planckiana; espectro de cuerpo negro⁵.

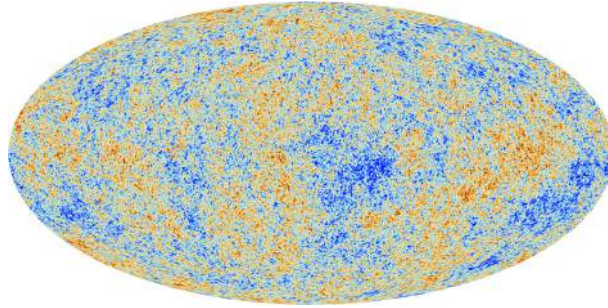


Figura 2.1: Las anisotropías en el Fondo Cósmico de Microondas observadas por el satélite Planck.

En la figura (2.1) se muestran las anisotropías en el Fondo Cósmico de Microondas observadas por el satélite Planck. Los diferentes colores representan las fluctuaciones en la temperatura, siendo las máximas diferencias $\Delta T/T \approx 10^{-5}$.

2.1.3. “Problema” de las condiciones iniciales del Big Bang

A pesar de que el modelo cosmológico estándar explica la evolución del universo desde la primera fracción de segundo hasta la edad actual de una manera bastante satisfactoria; posee deficiencias relacionadas con las condiciones iniciales del universo. A continuación veremos una reseña de los “problemas” que el modelo cosmológico estándar no puede explicar sin pedir que las condiciones iniciales del universo, hayan sido tan únicas, particulares y precisas, que la mínima variación de estas condiciones generaría un estado final muy distinto al del universo actual.

“Problema” de la chatura o planitud

Haciendo uso de la ecuación de Friedmann (2.17), esta es;

$$\Omega(t) = 1 + \frac{K}{H^2 a^2(t)} \Rightarrow (\Omega(t) - 1)H^2 a^2(t) = K = \text{constante}. \quad (2.100)$$

Para dos instantes de tiempo cósmico, t cualquiera y el presente t_0 , la anterior ecuación implica que;

$$(\Omega(t) - 1)H^2 a^2(t) = (\Omega_0 - 1)H_0^2 a^2(t_0) \Rightarrow \Omega(t) - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{H_0^2 a^2(t_0)}{H^2 a^2(t)}, \quad (2.101)$$

⁵La gran precisión con la que la CMBR se ajusta a un cuerpo negro ha sido una de las principales razones por las que la teoría de Big Bang, se ha establecido, mientras que otras teorías, como la de estado estacionario, han sido abandonados. Por ejemplo, en la llamada teoría de estado estacionario el universo ha sido eternamente igual, necesita ser infinito y plano, y tener creación continua de materia (algo así como 2 átomos de Hidrógeno por m^3 cada 10^9 años). Sin embargo, en esta descripción, la CMBR no tiene cabida; puesto que esta teoría modela un universo que es y siempre ha sido transparente, por lo que no se explica un espectro de cuerpo negro.

ahora usando la relación (2.42) esto es $a(t_0) \approx a(t)(1+z)$, junto con la ecuación (2.54); la ecuación (2.101) podrá ser escrita como,

$$\Omega(t) - 1 = \frac{\Omega_0 - 1}{(1+z)^2\Omega_r + (1+z)\Omega_m + (1-\Omega_0) + (1+z)^{-2}\Omega_\Lambda}. \quad (2.102)$$

Anteriormente se menciono que en los últimos resultados del satélite Planck fueron presentaron los valores $\Omega_\Lambda = 0.692 \pm 0.010$, $\Omega_B = 0.0487 \pm 0.0006$, $\Omega_{DM} = 0.265 \pm 0.006$, y $\Omega_r = (4.9 \pm 0.5) \times 10^{-5}$. Lo cual significa que la evidencia observable apunta a que $\Omega_0 \approx 1$. Por otro lado, a medida que nos acercamos a las primeras etapas del universo, $z \rightarrow \infty$, (por ejemplo; para desacople $z \approx 1100$, el equilibrio radiación-materia $z \approx 3.3 \times 10^4$, cuando el universo tenia 1 segundo de edad $z \approx 10^{10}$), entonces el limite,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\Omega(t) - 1) = 0. \quad (2.103)$$

Es decir, acercándonos a la emergencia del universo la densidad total $\rho(t)$ se acerca cada vez más a la crítica $\rho(t) \rightarrow \rho_c(t)$, ver ecuación (2.16), consecuentemente el universo es cada vez más plano. Este resultado es la base del llamado: **“Problema” de la chatura o planitud (“flatness problem”)**. Como parece ser el caso, $\Omega_0 \approx 1$ **“sin ser exactamente igual”**, entonces cerca de los primeros instantes de la emergencia del universo $\Omega(t)$ debió ser exageradamente cercano a 1, sin igualarlo. Si fuese exactamente igual a 1 hoy, entonces lo habría sido siempre. ¿Cómo es posible que $\Omega(t)$ estuviera tan exactamente sintonizado? Tal cercanía se dice que es un ajuste fino (**“fine tuning”**) de las condiciones iniciales del universo.

“Problema” del horizonte

Este problema surge como consecuencia de la edad finita del universo, a la cual nos hemos estado refiriendo como t_0 . Esta causa que únicamente podamos ver del universo hasta una distancia tal que su luz ha tenido tiempo de llegar hasta nosotros, ya que para regiones más lejanas, la luz tardará un tiempo $t > t_0$ en llegarnos, luego todavía no hemos recibido información de dichas regiones, i.e. están fuera de nuestro cono de luz. Como la luz finalmente pudo viajar, sin interactuar con la materia, a partir de la superficie de última dispersión y no desde el inicio del universo, esta distancia no corresponde a el horizonte comóvil de partículas d_{hp}^c definido en (2.64), en su lugar esta distancia viene dada por el horizonte comóvil visual d_{hv}^c (Ellis y Stoeger 1988), el cual es una definición similar a la de d_{hp}^c , pero esta tiene en cuenta que la luz se liberó durante el desacople de los fotones con la materia, en un tiempo no nulo t_{desac} , (a un corrimiento al rojo finito z_{desac}).

$$d_{hv}^c = \int_{t_{desac}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_{\frac{1}{1+z_{desac}}}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)\Omega_r + (x^4-x)\Omega_\Lambda + x^2 - (x^2-x)\Omega_0}}. \quad (2.104)$$

Por otro lado, calcularemos el horizonte comóvil de partículas (2.64), en el momento de la última dispersión,

$$d_{hp}^c = \int_0^{t_{desac}} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.105)$$

Durante el desacople eventos separados por una distancia comóvil mayor que (2.105) estarán desconectados causalmente.

Ahora debemos comparar ambos horizontes (2.104) y (2.105). Así, dado que d_{hp}^c de la ecuación (2.105) nos da la región del universo que estaba conectada causalmente en la superficie de última dispersión, y d_{hv}^c de la ecuación (2.104) nos da la región que observamos actualmente en el cielo, tendremos que si el d_{hp}^c es mayor que el d_{hv}^c , nuestra predicción indicaría que todo lo que observamos actualmente ha estado relacionado causalmente entre sí antes de que su luz fuese emitida durante el desacople, por lo que esperaríamos observar lo que se observa: una gran homogeneidad e isotropía.

En cambio, si $d_{hp}^c < d_{hv}^c$, la predicción del modelo indicaría que existen regiones que hoy observamos en el CMBR, que no han estado conectadas causalmente entre sí en el pasado, por lo que esperaríamos observar que distintas regiones del CMBR presentasen propiedades bien diferenciadas, puesto que no han tenido ninguna relación causal entre sí.

Sin embargo, evaluando ambos horizontes encontramos que;

$$\int_0^{t_{desac}} \frac{dt}{a(t)} \ll \int_{t_{desac}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.106)$$

es decir $d_{hp}^c \ll d_{hv}^c$. Entonces, ¿cómo es posible que el CMBR sea casi perfectamente isótropo en todo el cielo? dicho de otro modo, dejando de lado las pequeñas fluctuaciones primordiales, ¿por qué dos puntos opuestos en el cielo están a la misma temperatura, si ninguna información podía viajar de uno al otro al momento del desacoplamiento?

“Problema” de las reliquias no deseadas

Adicionalmente a los problemas del horizonte y de la planitud tenemos un problema de Reliquias no deseadas. Este problema consiste en que si el Big Bang comenzó a una temperatura muy alta, reliquias prohibidas por la observación, como los: gravitinos, monopolos magnéticos, predichas por las teorías más populares de Gran Unificación, hubiesen sobrevivido hasta el presente, pero estas reliquias son descartados por las observaciones.

Capítulo 3

Cosmología Estándar Inflacionaria

Planitud, igualdad de la temperatura, y reliquias no deseadas se podrían considerar como las condiciones iniciales del universo. Por otro lado, La teoría del Big Bang no proporciona ninguna explicación de las condiciones iniciales del universo; más bien, describe y explica su evolución general, avanzando a partir de ese momento. En la teoría del Big Bang se requiere una sintonía muy fina, de dichas condiciones, para hacer una predicción correcta sobre el universo actual a gran escala. Para evitar la necesidad de condiciones iniciales tan finamente sintonizadas, se propuso el llamado modelo inflacionario.

La teoría inflacionaria (Guth 1981; Albrecht y Steinhardt 1982; Linde 1982, 1983) no es un remplazo para el modelo del Big Bang, sino un agregado al modelo que ocurre en una época muy temprana sin modificar los logros alcanzados por el mismo. La definición de inflación es simplemente una época previa a la época dominada por radiación pero posterior a la época de Planck, durante la cual el factor de escala del universo se acelera;

$$\text{Inflación} \sim \ddot{a}(t) > 0. \quad (3.1)$$

Siendo más precisos, se cree que la inflación tuvo lugar supuestamente a las escalas de las Teorías de Gran Unificación (GUT por sus siglas en inglés), en un tiempo comprendido entre $t_{ii} \approx 10^{-36}$ s (inicio de inflación) a $t_{fi} \approx 10^{-32}$ s (final de inflación).

3.1. Elementos de la cosmología estándar inflacionaria

3.1.1. El campo inflacionario

Las ecuaciones de Friedmann (2.11), (2.12); las cuales relacionan el factor de escala con el contenido de materia en el universo. En particular, la ecuación (2.12) corresponde a,

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G a(t)}{3}(\rho + 3p), \quad (3.2)$$

de donde vemos que cuando $\rho + 3p < 0$, se consigue la condición $\ddot{a}(t) > 0$ que modela un universo que experimenta una etapa de expansión acelerada.

Entonces, según la cosmología estándar para tener un período inflacionario es necesario algún tipo de materia con presión negativa. Bajo determinadas condiciones un campo escalar $\phi(t, \vec{x})$ (que denominaremos inflatón); puede cumplir con este requerimiento.

Podemos describir la dinámica de un campo escalar $\phi(t, \vec{x})$ acoplado mínimamente a la gravedad a partir de la acción:

$$S_{Mat}[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla_b \phi g^{ab} - V[\phi] \right), \quad (3.3)$$

donde $V[\phi]$ corresponde al potencial del campo $\phi(t, \vec{x})$. La variación de la acción de materia (3.3) con respecto a la métrica nos da el tensor energía-momentun:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (3.4)$$

el cual para la densidad lagrangeana \mathcal{L}_m en cuestión, será;

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \left(\frac{1}{2} \partial_a \phi \partial_b \phi g^{ab} + V[\phi] \right) g_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Podemos comparar (2.8) con (3.5), de donde obtendremos;

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2} \partial_i \phi \partial^i \phi + V[\phi], \quad p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{6a^2} \partial_i \phi \partial^i \phi - V[\phi]. \quad (3.6)$$

La ecuación de movimiento para el campo escalar se conoce como la ecuación de Klein-Gordon, la cual resulta de la variación de la acción con respecto al campo escalar $\phi(t, \vec{x})$, y corresponde a;

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\partial}{\partial \phi} V(\phi) = 0. \quad (3.7)$$

Separaremos el campo $\phi(t, \vec{x})$ en una parte homogénea e isotrópica $\phi_0(t)$, y una parte inhomogénea y anisotrópica la cual representaremos a través de las perturbación del campo $\delta\phi(t, x)$. Mientras que la métrica será separada en la métrica de fondo g_0 , la cual vendrá dada por la métrica espacialmente homogénea e isotrópica FRW, y las perturbaciones de la métrica $\delta g(t, x)$, las cuales generaran una ligera desviación de la métrica FRW. Esta separación será escrita como;

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \phi_0(t) + \delta\phi(t, x), \\ g &= g_0 + \delta g(t, x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Considerando únicamente el **orden cero** de la perturbación, entonces cuando el contenido de materia en el universo es dominado por un campo escalar (3.3), la ecuación de Friedmann (2.12) se escribirá como;

$$\frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{8\pi}{3} G \left[\left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2 - V(\phi_0) \right], \quad (3.9)$$

según la cual un período inflacionario tendrá lugar cuando la condición $V(\phi_0) \gg \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2$ se cumpla.

Por otra parte, la ecuación (2.11) tomará la forma;

$$3H^2 = 8\pi G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2 + V(\phi_0) \right] - \frac{3K}{a^2}, \quad (3.10)$$

el término de curvatura $\frac{K}{a^2}$ presente en la anterior ecuación puede ser despreciado, puesto que el sistema se mantiene inalterado al incluirlo, dado que durante la etapa inflacionaria éste se vuelve rápidamente subdominante, de esta forma se llega a la ecuación;

$$3H^2 \approx 8\pi G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2 + V(\phi_0) \right]. \quad (3.11)$$

El resultado de la siguiente combinación de ecuaciones; ec.(3.9) $- \frac{1}{3}$ ec.(3.11), corresponde a la ecuación;

$$\frac{dH}{dt} \approx -4\pi G \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2, \quad (3.12)$$

Por último, la ecuación de Klein-Gordon (3.7) tomará la forma;

$$\frac{d^2\phi_0}{dt^2} + 3H \frac{d\phi_0}{dt} + \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} = 0, \quad (3.13)$$

esta ecuación es similar a la que modela el movimiento de una esfera rodando cuesta abajo sobre un plano inclinado y bajo la presencia de una fricción proporcional a la velocidad pero en sentido contrario: $\ddot{s} + \gamma\dot{s} + w_s = 0$; siendo s la componente del desplazamiento a lo largo del plano inclinado, γ el coeficiente de fricción, y w_s es la componente del peso de la esfera a lo largo de la dirección del movimiento. Para el caso en el que w_s es constante, la dinámica del sistema hace que \dot{s} evolucione hasta que las componentes $\gamma\dot{s}$ y w_s se equilibren, en adelante la velocidad de la esfera será constante y conocida como velocidad terminal $\dot{s}_{trm} = w_s/\gamma$.

El sistema (3.11), (3.12), y (3.13), no siempre describe una etapa de expansión acelerada, una etapa inflacionaria se presentará en el llamado régimen de **rodamiento lento (slow-roll)**, en el que el potencial $V(\phi_0)$ del campo es lo suficientemente plano (constante) y además domina sobre la energía cinética. Como durante slow-roll el potencial domina a la energía

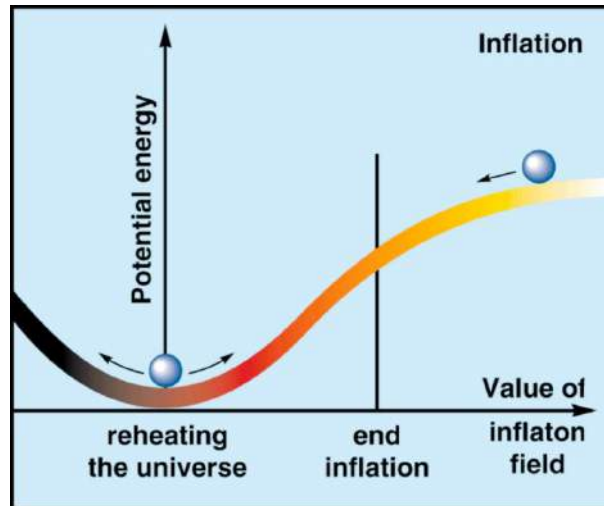


Figura 3.1: slow-roll.

cinética, entonces podemos despreciar la energía cinética $\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2$ del campo escalar en la ecuación de Friedmann (3.11). También se asume que durante slow-roll la cantidad $\left. \frac{d\phi_0}{dt} \right|_{t_{ii}}$ es tal que en (3.13) rápidamente el término de fricción $3H \frac{d\phi_0}{dt}$ se equilibra con el término $\frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0}$

por lo tanto durante este régimen $\frac{d^2\phi_0}{dt^2} \approx 0$. Entonces durante slow-roll el sistema (3.11), (3.12), y (3.13) tiende a;

$$3H^2 \approx 8\pi G V(\phi_0), \quad \frac{dH}{dt} \approx -4\pi G \left(\frac{d\phi_0}{dt}\right)^2, \quad y \quad 3H \frac{d\phi_0}{dt} + \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \approx 0. \quad (3.14)$$

Se argumenta que durante inflación con rodadura lenta (slow-roll) $V(\phi_0)$ es aproximadamente plano (constante), entonces de la primera ecuación en (3.14) concluimos que durante este periodo H es aproximadamente constante y se denotara como; H_I (constante de Hubble durante inflación). Consecuentemente, usando el resultado $H_I \approx const$ sobre la segunda ecuación, se encuentra que $\frac{d\phi_0}{dt} \approx const \approx 0$. Por último, usando estos resultados vemos que la tercera ecuación se satisface trivialmente lo cual exhibe auto-consistencia del tratamiento. Bajo estas condiciones, integrando $\frac{\dot{a}}{a} \approx H_I \approx const$, se encuentra que; $a(t) \sim e^{H_I t}$, donde H_I aproximadamente toma el valor;

$$H_I \approx \sqrt{8\pi G V(\phi_0)/3}, \quad (3.15)$$

el cual comparando con (2.29), indica que el espacio-tiempo modelado durante slow-roll es aproximadamente de Sitter, donde $8\pi G V(\phi_0)$ actúa como una **constante cosmológica efectiva**.

Para expresar las condiciones de slow-roll de manera más precisa recurriremos a la definición de dos parámetros¹ que cuantifiquen que tan plano es el potencial (este es el objetivo de ϵ_1) y su curvatura (este es el objetivo de ϵ_2). Retomando las ecuaciones (3.9) y (3.11), siendo más exactos; despejando $V(\phi_0)$ de la ecuación (3.11) y sustituyéndolo en (3.9), se logra encontrar;

$$\frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a}{dt^2} \approx -\frac{4\pi}{3} G \left[3 \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2 - \frac{3H^2}{4\pi G} \right] = H^2 \left[1 - \frac{4\pi G}{H^2} \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2 \right], \quad (3.16)$$

lo cual escribiremos como;

$$\frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a}{dt^2} = (1 - \epsilon_1) H^2, \quad (3.17)$$

en donde $\epsilon_1 = \frac{4\pi G}{H^2} \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2$, el cual es un parámetro definido positivo. Este parámetro nos enseña que un periodo de expansión acelerada tendrá lugar cuando $\epsilon_1 \ll 1$.

Por otro lado, el parámetro ϵ_2 , se definirá como;

$$\epsilon_2 = -\frac{2}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}, \quad (3.18)$$

su interpretación es directa a través de la ecuación (3.13), entonces si $|\epsilon_2| < 1$ esto significará que $\frac{d^2\phi_0}{dt^2} < 3H \frac{d\phi_0}{dt}$. Usando las relaciones (3.14), los parámetros ϵ_1 y ϵ_2 se escribirán como,

¹En la literatura, es mucho más común denotar estos parámetros como; ϵ y η , los cuales en nuestra notación corresponden a; $\epsilon_1 = \epsilon$ y $\epsilon_2 = \eta$. Nuestro cambio de notación tiene como objetivo evitar confusión con el tiempo conforme η , deninido en (2.4).

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{4\pi G}{H^2} \left(\frac{d\phi_0}{dt} \right)^2 = -\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \frac{4\pi G}{9H^4} \left(\frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \right)^2 \approx \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{1}{V(\phi_0)} \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \right)^2 \\ \epsilon_2 &= -\frac{2}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = \frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} = -\frac{1}{3H^2} \frac{\partial^2 V(\phi_0)}{\partial \phi_0^2} \approx -\frac{1}{8\pi G V(\phi_0)} \frac{\partial^2 V(\phi_0)}{\partial \phi_0^2}\end{aligned}$$

La aproximación slow-roll es válida cuando las condiciones $\epsilon_1 \ll 1$ y $|\epsilon_2| \ll 1$ se satisfacen, lo cual indica que la pendiente y la curvatura del potencial $V(\phi_0)$ respectivamente deben ser suficientemente pequeñas durante inflación.

Aunque aquí únicamente se ha considerado el campo inflacionario (por ser el contenido de materia dominante en el universo durante inflación con rodamiento lento), sin embargo, una vez que termina la inflación con rodamiento lento, el campo cae en el pozo de potencial y empieza a oscilar alrededor del mínimo del potencial. Ahora, aparte del término de fricción $3H \frac{d\phi_0}{dt}$, existe un amortiguamiento adicional por el posible **acoplamiento del inflatón con otros campos de materia** a los que va cediendo energía excitándolos. Este nuevo término es representando fenomenológicamente por $\Gamma \frac{d\phi_0}{dt}$, en donde Γ^{-1} es la rata de decaimiento de ϕ_0 en otras partículas. Entonces la ecuación dinámica para ϕ_0 durante este periodo, puede ser escrita como;

$$\left. \frac{d^2 \phi_0}{dt^2} + 3H \frac{d\phi_0}{dt} + \Gamma \frac{d\phi_0}{dt} + 2 \frac{\partial^2 V(\phi_0)}{\partial \phi_0^2} \right|_{\sigma} (\phi_0 - \sigma) \approx 0, \quad (3.19)$$

donde hemos escrito el potencial $V(\phi_0)$ como un desarrollo en serie de Taylor alrededor del mínimo del potencial σ , y truncado la serie a segundo orden en $(\phi_0 - \sigma)$.

Puede seguirse numéricamente la evolución con cierto detalle² y el resultado final será que el universo se recalienta alcanzando, tras un tiempo aproximadamente de Γ^{-1} , una temperatura final de recalentamiento $T_{rc} \approx g_*^{-1/4} \Gamma^{1/2}$ (en unidades Planck) con la que empalma con la era ordinaria de la radiación, con la condición de que el universo no se expanda demasiado durante el tiempo que le toma al campo ϕ_0 en decaer.

Entonces, durante el decaimiento hacia el mínimo se produciría una transferencia de la energía perdida hacia otros campos acoplados con éste, que crearían procesos de creación de pares de partículas. Este proceso de decaimiento del campo escalar en otras partículas es el conocido como **recalentamiento (reheating)**, y como consecuencia de ello, se obtiene un universo en donde los otros contenidos de materia empiezan a ser relevantes y el universo se encuentra a una gran temperatura en equilibrio térmico, proporcionando las condiciones iniciales esperadas para la teoría estándar del Big Bang.

La Cantidad de Inflación

Normalmente, la cantidad de inflación que ocurre es cuantificada con la razón entre el factor de escala al tiempo en que la inflación termina t_{fi} , con su valor en cierto tiempo t , comprendido entre el tiempo en que la inflación inicia t_{ii} y el tiempo t_{fi} , es decir; $t \in (t_{ii}, t_{fi})$. Como sucede que este cociente es muy grande, se toma el logaritmo natural de dicho cociente, definiendo lo que se conoce como el número de **e-foldings**; \mathcal{N} ,

²Dicho estudio se sale del tema principal de discusión en esta tesis, sin embargo el lector puede consultar la bibliografía [15], [16] en la cual esta discusión se realiza en detalle.

$$\mathcal{N}(t) = \ln \left(\frac{a(t_{fi})}{a(t)} \right) = \int_t^{t_{fi}} H(\tau) d\tau. \quad (3.20)$$

Por definición la función $\mathcal{N}(t)$ decrece en el tiempo volviéndose cero al final de inflación.

Solución a los problemas del modelo estándar cosmológico

Planitud: La respuesta dada por inflación se basa en que suponiendo que en alguna época temprana del universo, experimento una etapa de expansión acelerada (como la que sería producida por Inflación; rodamiento lento), de manera que durante este tiempo $a(t) \sim e^{H_I t}$ siendo $H_I = 0.36 \times 10^{36} \text{s}^{-1}$. Entonces la ecuación (2.17), durante el período inflacionario podrá ser escrita como;

$$\Omega(t) = 1 + \frac{K}{H_I^2 a^2(t)}, \quad (3.21)$$

la ec.(3.21) implica que $\Omega(t)$ se acerca a 1 conforme t aumenta (i.e., del pasado hacia el presente).

Partiendo de $\Omega(t)$, con una curvatura espacial cualquiera $K \neq 0$, y suponiendo que al principio de inflación $\Omega(t_{ii})$ difería de la unidad en un orden de magnitud, por ejemplo $2 < \Omega(t_{ii}) < 10$, entonces,

$$|\Omega(t_{ii}) - 1| = \frac{|K|}{H_I^2 a^2(t_{ii})} \approx \mathcal{O}(1), \quad (3.22)$$

para conseguir que al final de inflación $\Omega(t_{fi})$ difiera de la unidad en una cantidad de 10^{-52} ,

$$|\Omega(t_{fi}) - 1| = \frac{|K|}{H_I^2 a^2(t_{fi})} \approx 10^{-52}, \quad (3.23)$$

requiere incrementar $a(t)$ por un factor de 10^{26} , es decir $a(t_{fi}) \approx 10^{26} a(t_{ii})$ y por lo tanto el número de **e-foldings**, ecuación (3.20);

$$\mathcal{N}(t_{ii}) = \ln \left(\frac{a(t_{fi})}{a(t_{ii})} \right) = 26 \ln 10 \approx 60. \quad (3.24)$$

Horizontes: Si el universo experimento una época primigenia de expansión acelerada, entonces, a diferencia de (2.106), ahora se cumplirá la desigualdad;

$$\int_{t_{ii}}^{t_{desac}} \frac{dt}{a(t)} \gg \int_{t_{desac}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.25)$$

La razón, resulta de analizar la integral de lado izquierdo, la cual puede ser expandida como;

$$\int_{t_{ii}}^{t_{desac}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{ii}}^{t_{fi}} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_{fi}}^{t_{desac}} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.26)$$

sobre la primera integral de lado derecho, dado sus limites de integración, el factor de escala en su integrando corresponderá a; $a(t) \sim a_* e^{H_I t}$, entonces,

$$\int_{t_{ii}}^{t_{fi}} \frac{dt}{a(t)} \approx -\frac{1}{H_I a_*} e^{-H_I t} \Big|_{t_{ii}}^{t_{fi}} = \frac{1}{H_I a(t_{ii})} - \frac{1}{H_I a(t_{fi})}, \quad (3.27)$$

anteriormente se encontró que para solucionar planitud se requiere $a(t_{fi}) \approx 10^{26} a(t_{ii})$, por lo cual el primer sumando en (3.27) es ampliamente dominante frente al segundo. Entonces, podemos aproximar;

$$\int_{t_{ii}}^{t_{fi}} \frac{dt}{a(t)} \approx \frac{1}{H_I a(t_{ii})}, \quad (3.28)$$

por lo tanto, debido a que $a(t_{ii}) \rightarrow 0$ vemos entonces que; $\int_{t_{ii}}^{t_{fi}} \frac{dt}{a(t)} \rightarrow \infty$.

Entonces, durante la inflación una pequeña porción, causalmente conectada del universo puede crecer enormemente, dando como resultado la isotropía de la temperatura del CMBR que observamos.

Reliquias no deseadas: El problema de reliquias no deseadas se resuelve si la expansión acelerada del universo diluye rápidamente dichas reliquias, lo cual es factible debido a que la densidad de energía durante la inflación, $\rho_I \sim \text{constante}$, decae más lentamente que la densidad de partículas de las reliquias $\rho_m \sim 1/a^3$. La solución dada por la inflación a este problema es posible sólo si, después de la inflación, la densidad de energía del universo se convierte en materia convencional sin crear reliquias no deseadas. De hecho, si nos aseguramos que durante el recalentamiento, la temperatura no aumente demasiado (aproximadamente 10^{14} GeV) es muy factible que no haya recreación de reliquias; de esta manera el recalentamiento sólo produciría partículas observadas.

3.2. El problema de la formación de estructuras visto desde la cosmología inflacionaria

Origen de las anisotropías de la CMBR: Hasta este punto hemos analizado al universo en términos de un modelo isotrópico y homogéneo, al cual nos referiremos en lo que resta de esta tesis como el universo no perturbado o de fondo. Claramente el universo actual es bastante inhomogéneo, manifestando una estructura heterogénea a escalas menores que 100 Mpc; al estudio del origen de dicha inhomogeneidad se le denomina **origen de estructura**.

La estructura se manifiesta en diversas formas, por ejemplo, en la existencia de galaxias y su distribución irregular (i.e., las galaxias se organizan en cúmulos de galaxias). Actualmente entendemos que la estructura se formó por la amplificación gravitacional de pequeñas inhomogeneidades primordiales ó semillas de estructura cósmica.

Por construcción el espacio-tiempo de RW, espacialmente es perfectamente homogéneo e isótropo, por ende no es útil para modelar las inhomogeneidades primordiales, pero en su lugar, se piensa que la métrica que describe un universo el cual, espacialmente a gran escala, es “casi perfectamente” homogéneo e isotrópico, corresponde a una pequeña desviación de la métrica de RW (siendo estas desviaciones la herramienta con

la que se modelaran las débiles semillas de estructura cósmica). Dicho de otro modo, se cree que la métrica que modela nuestro universo a gran escala, podría ser entendida como una métrica resultante de perturbar la métrica de RW (en lo que resta trabajaremos con la métrica de RW escrita de la forma (2.5), en donde η es usada como coordenada temporal).

De esta forma en el problema cosmológico correspondiente al **origen de estructura**, surge la necesidad de hacer un tratamiento de teoría de perturbaciones en relatividad general, pero para hacer esta clase de tratamientos en relatividad general es necesario lidiar con ciertos problemas los cuales mencionaremos a continuación;

La Norma: Cuando se usa teoría de perturbaciones en relatividad general, se está trabajando con dos variedades, una física \mathcal{M} (la solución que intentaremos describir con perturbaciones), y otra de fondo \mathcal{M}_0 que es una variedad ficticia, preparada por nosotros para desarrollar el análisis perturbativo (la solución exacta que conocemos). Al espacio-tiempo físico lo denotaremos de manera general por (\mathcal{M}, g_{ab}) , y al espacio-tiempo de fondo por $(\mathcal{M}_0, {}^{(0)}g_{ab})$. Además, denotaremos a los campos tensoriales que estén sobre \mathcal{M} mediante \mathcal{Q} y los definidos sobre \mathcal{M}_0 por \mathcal{Q}_0 , si estos campos poseen igual dimensionalidad, entonces cuando escribamos ecuaciones del tipo;

$$\mathcal{Q}(\bar{q}) = \mathcal{Q}_0(q) + \delta\mathcal{Q}_0(q), \quad (3.29)$$

en donde $\bar{q} \in \mathcal{M}$ mientras que $q \in \mathcal{M}_0$ (lo cual implica que $\mathcal{Q}(\bar{q}) : T_{\bar{q}}(\mathcal{M}) \otimes T_{\bar{q}}(\mathcal{M}) \otimes T_{\bar{q}}(\mathcal{M}) \otimes \dots T_{\bar{q}}^*(\mathcal{M}) \otimes T_{\bar{q}}^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ mientras que $\mathcal{Q}_0(q), \delta\mathcal{Q}_0(q) : T_q(\mathcal{M}_0) \otimes T_q(\mathcal{M}_0) \otimes T_q(\mathcal{M}_0) \otimes \dots T_q^*(\mathcal{M}_0) \otimes T_q^*(\mathcal{M}_0) \rightarrow \mathbb{R}$), estaremos relacionando variables definidas en dos variedades diferentes, y para lograrlo implícitamente hemos identificado los puntos en estas dos variedades. Es decir, asumimos que existe un mapeo χ , definido como $\exists \chi : q \in \mathcal{M}_0 \rightarrow \bar{q} \in \mathcal{M}$, el cual da una regla que permite identificar los puntos de la variedad de fondo \mathcal{M}_0 con los de la variedad física \mathcal{M} . El anterior mapeo no es único y se le nombra como **grado de libertad de norma**, esta libertad siempre existe en teorías a las cuales se les imponga el principio de covariancia general (p. ej. la teoría de relatividad general).

Este grado de libertad no es físico, no trae información relevante al fenómeno estudiado. Lo anterior constituye un problema que surge cuando se hace teoría de perturbaciones en relatividad general. Por lo tanto, un enfoque correcto en la teoría perturbativa en relatividad general debe eliminar estos grados de libertad ficticios. Existen dos opciones para lidiar con el problema de norma de forma genérica: (a) **trabajar con cantidades invariantes de norma**, ó (b) **escoger una norma**. A continuación describiremos brevemente el funcionamiento de ambos enfoques.

Iniciaremos con la descripción escribiendo los tensores $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$, y $G_{\mu\nu}$ como los siguien-

tes desarrollos en potencias del parámetro ε (con ε tal que $\varepsilon \approx 0$),

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \varepsilon\delta^{(1)}g_{\mu\nu} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\delta^{(2)}g_{\mu\nu} + \mathcal{O}(3) \\ T_{\mu\nu} &= {}^{(0)}T_{\mu\nu} + \varepsilon\delta^{(1)}T_{\mu\nu} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\delta^{(2)}T_{\mu\nu} + \mathcal{O}(3) \\ G_{\mu\nu} &= {}^{(0)}G_{\mu\nu} + \varepsilon\delta^{(1)}G_{\mu\nu} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\delta^{(2)}G_{\mu\nu} + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$ son las componentes de la métrica de fondo³ la cual en este estudio corresponde a la métrica RW, mientras que ε es el parámetro que controla la perturbación, por lo cual $\varepsilon\delta^{(1)}g_{\mu\nu}$ corresponde al primer orden de la perturbación de la métrica, $\frac{\varepsilon^2}{2!}\delta^{(2)}g_{\mu\nu}$ segundo orden, $\frac{\varepsilon^3}{3!}\delta^{(3)}g_{\mu\nu}$ tercero, y así sucesivamente (de igual forma para $T_{\mu\nu}$ y $G_{\mu\nu}$).

Para el caso en estudio, las perturbaciones métricas pueden ser clasificadas, dependiendo de sus propiedades de transformación sobre hipersuperficies espaciales $t = \text{constante}$, en tres categorías; escalares, vectoriales y tensoriales. Entonces, introduciendo cuatro cantidades escalares: A , B , ψ , E , dos vectores S_i , F_i y un tensor simétrico h_{ij} (las cuales son funciones de t y x^i), la métrica RW perturbada hasta primer orden $ds^2 = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \varepsilon\delta^{(1)}g_{\mu\nu}$ en su forma más general, (escribiremos la métrica de fondo (2.4) como; ${}^{(0)}g = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j)$, los índices latinos i, j son índices espaciales los cuales corren de 1 a 3, siendo $x^1 = r$, $x^2 = \phi$ y $x^3 = \theta$, por lo cual las componentes no nulas de γ_{ij} son; $\gamma_{11} = \frac{1}{1-Kr^2}$, $\gamma_{22} = r^2 \sin^2 \theta$, y $\gamma_{33} = r^2$), puede ser escrita como⁴;

$$\begin{aligned} ds^2 = a^2(\eta) \left\{ - (1 + 2A)d\eta^2 + 2(\nabla_i B - S_i)d\eta dx^i + \left[(1 - 2\psi)\gamma_{ij} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\nabla_{ij} E + 2\nabla_{(i} F_{j)} + h_{ij} \right] dx^i dx^j \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sin pérdida de generalidad, hemos incluido el parámetro ε en las funciones A , B , ψ , E , S_i , F_i y h_{ij} . Por otro lado ∇_i representa derivadas covariantes respecto de la 3-métrica ${}^{(0)}g_\Sigma = \gamma_{ij}dx^i dx^j$, mientras que $\nabla_{ij} = \nabla_i \nabla_j$. Los paréntesis en la derivada covariante de F_i denotan simetrización, $\nabla_{(i} F_{j)} = \nabla_i F_j + \nabla_j F_i$.

Un problema que surge aquí es que a través de una elección inadecuada de las coordenadas es posible hacer que la métrica (2.4), adquiera una forma similar a la métrica (3.31). Para este caso se dice que la métrica escrita en las coordenadas inadecuadas posee inhomogeneidades coordenadas, las cuales no tienen ninguna relevancia física. Es importante poder distinguir entre inhomogeneidades físicas (geométricas) e inhomogeneidades coordenadas.

Consideremos una transformación coordenada infinitesimal de la forma;

³Anteriormente en (3.8), a la métrica de fondo la habíamos denotado como; g_0 , mientras que al campo escalar homogéneo e isótropo con; $\phi_0(t)$. La notación (3.30) se adapta de mejor forma al tratamiento perturbativo.

⁴consultar apéndice para mas detalles

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu), \quad (3.32)$$

donde los índices griegos corren de 0 a 3, siendo $x^0 = \eta$. La anterior transformación induce un cambio en las perturbaciones de una cantidad genérica $Q(x^\mu)$, descrito de la siguiente forma;

$$\Delta Q = \delta\tilde{Q} - \delta Q = -\mathcal{L}_\xi Q, \quad (3.33)$$

donde \mathcal{L}_ξ es la derivada de *Lie* en la dirección del cuadrivector ξ , definido como $\xi = (\xi^0, \vec{\xi})$. Por otro lado, sabemos que cualquier vector en tres dimensiones $\vec{\xi}$, puede ser descompuesto de tal forma que su i -ésima componente sea escrita como;

$$\xi^i = \xi_T^i + \gamma^{ij} \nabla_j \xi_L, \quad (3.34)$$

donde la parte longitudinal ξ_L es solución de la ecuación $\nabla_i (\gamma^{ij} \nabla_j \xi_L) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$, mientras que la parte transversal ξ_T^i satisface que $\nabla_i \xi_T^i = 0$, en conclusión las componentes ξ^α del cuadrivector ξ , serán; $\xi^0, \xi_T^i + \gamma^{ij} \nabla_j \xi_L$.

Entonces, con base a (3.33) la transformación infinitesimal de coordenadas (3.32) induce un cambio en la perturbación métrica $\delta g_{\alpha\beta}$,

$$\delta g_{\alpha\beta} \rightarrow \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} - \mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta}, \quad (3.35)$$

el cual puede reescribirse en términos de las transformaciones de las funciones; A, ψ, B, E, S_i, F_i , y h_{ij} , que definen la métrica perturbada a orden lineal (3.31). Las nuevas funciones $\tilde{A}, \tilde{\psi}, \tilde{B}, \tilde{E}, \tilde{S}_i, \tilde{F}_i$, y \tilde{h}_{ij} , estarán dadas por;

$$A \rightarrow \tilde{A} = A - \frac{a'}{a} \xi^0 - (\xi^0)', \quad B \rightarrow \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi_L', \quad (3.36)$$

$$E \rightarrow \tilde{E} = E - \xi_L, \quad \psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a} \xi^0, \quad (3.37)$$

$$S_i \rightarrow \tilde{S}_i = S_i - \gamma_{ij} (\xi_T^j)', \quad F_i \rightarrow \tilde{F}_i = F_i - \gamma_{ij} \xi_T^j, \quad h_{ij} \rightarrow \tilde{h}_{ij} = h_{ij}. \quad (3.38)$$

De la tercera ecuación en (3.38), concluimos que a orden lineal en las perturbaciones, la componente tensorial de una perturbación métrica h_{ij} es **invariante bajo transformaciones coordenadas infinitesimales** (3.32). Del anterior conjunto de ecuaciones también se encuentra que las componentes ξ_T^j solo contribuye a la perturbaciones vectoriales de la métrica, mientras que las funciones ξ^0 y ξ_L únicamente contribuyen a las componentes escalares de la perturbación de la métrica.

Sobre la opción **(a) cantidades invariantes de norma**, notamos que; tomando combinaciones de las funciones $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{E}, \tilde{\psi}, S_i$, y F_i podemos construir cantidades invariantes de norma, esto es, cantidades que se mantengan **invariantes en forma** bajo las transformaciones (3.32). En particular, podemos construir las funciones escalares $\tilde{\Phi}_{(gi)}, \tilde{\Psi}_{(gi)}$ y el campo vectorial $\tilde{W}_i^{(gi)}$ como;

$$\tilde{\Phi}_{(gi)} = \tilde{A} + \frac{1}{a} [a \cdot (\tilde{B} - \tilde{E}')] \quad (3.39)$$

$$\tilde{\Psi}_{(gi)} = \tilde{\psi} - \frac{a'}{a}(\tilde{B} - \tilde{E}'), \quad (3.40)$$

$$\tilde{W}_i^{(gi)} = \tilde{S}_i - \tilde{F}'_i \quad (3.41)$$

de modo que si realizamos sobre las anteriores ecuaciones los cambios de variable dados por (3.36), (3.37), (3.38), encontraremos que; $\tilde{\Phi}_{(gi)} = \Phi_{(gi)}$, $\tilde{\Psi}_{(gi)} = \Psi_{(gi)}$ y $\tilde{W}_i^{(gi)} = W_i^{(gi)}$, lo cual significa que las funciones definidas en (3.39), (3.40) y (3.41), son **invariantes de norma**. Estas funciones fueron introducidas en 1980 por James Bardeen, ver referencia [25], quien fue el primero en notar el problema de las libertades de norma en el estudio de las perturbaciones cosmológicas.

Nota: Si analizamos una situación en la cual a través de una elección inadecuada de las coordenadas se logra hacer que la métrica de RW tome una forma similar a (3.31). Entonces, dado que en las coordenadas usuales de RW, las funciones A , B , ψ , E , S_i , F_i , y h_{ij} son idénticamente nulas, implicando que $\Phi_{(gi)} = \Psi_{(gi)} = W_i^{(gi)} = h_{ij} = 0$. De igual forma en las coordenadas inadecuadas, por la invarianza de norma, las funciones $\tilde{\Phi}_{gi}$, $\tilde{\Psi}_{gi}$, $\tilde{W}_i^{(gi)}$, y, \tilde{h}_{ij} también serán idénticamente nulas, a pesar de que en general las funciones A , \tilde{B} , $\tilde{\psi}$, E , \tilde{S}_i , y, \tilde{F}_i sean distintas de cero.

Naturalmente, una combinación lineal de cantidades invariantes de norma da como resultado otra cantidad invariante de norma, entonces, en principio podríamos construir infinitas cantidades invariantes de norma. Otro ejemplo útil sobre la construcción de estas cantidades, resulta de considerar la cantidad escalar; $Q(\eta, \vec{x})$ definida sobre la variedad física \mathcal{M} . Entonces, al igual que en (3.29) la cantidad $Q(\eta, \vec{x})$ puede ser separada en una parte de fondo ${}^{(0)}Q(\eta)$ y su perturbación $\delta^{(1)}Q(\eta, \vec{x})$, esto es;

$$Q(\eta, \vec{x}) = {}^{(0)}Q(\eta) + \delta^{(1)}Q(\eta, \vec{x}), \quad (3.42)$$

donde el parámetro ε que controla el orden lineal de la perturbación ha sido incluido en la cantidad $\delta^{(1)}Q(\eta, \vec{x})$. Se encuentra que en general $\delta^{(1)}Q$ no es invariante de norma, su cambio bajo una transformación de coordenadas infinitesimal (3.32) esta dado por;

$$\delta^{(1)}\tilde{Q}(\eta, \vec{x}) = \delta^{(1)}Q(\eta, \vec{x}) - {}^{(0)}Q'(\eta)\xi^0(\eta, \vec{x}), \quad (3.43)$$

encontramos que solo si ${}^{(0)}Q$ es independiente de η , entonces $\delta^{(1)}\tilde{Q}$ es invariante de norma. Por otro lado, la siguiente combinación entre $\delta^{(1)}Q$ y las perturbaciones escalares de la métrica;

$$\delta^{(1)}Q_{(gi)} \equiv \delta^{(1)}Q + (B - E') {}^{(0)}Q' \quad (3.44)$$

es una cantidad invariante de norma. Por otro lado, la cantidad vectorial $V_i(\eta, \vec{x})$ (con $i=1,2,3$) puede ser separada en una parte de fondo ${}^{(0)}V_i(\eta)$ y su perturbación $\delta^{(1)}V_i(\eta, \vec{x})$, de la siguiente forma;

$$V_i(\eta, \vec{x}) = {}^{(0)}V_i(\eta) + \delta^{(1)}V_i(\eta, \vec{x}), \quad (3.45)$$

el parámetro ε que controla el orden lineal de la perturbación ha sido incluido en la cantidad $\delta^{(1)}V_i(\eta, \vec{x})$. Por otro lado $\delta^{(1)}V_i(\eta, \vec{x})$ no es una cantidad invariante de norma, su cambio bajo una transformación de coordenadas infinitesimal (3.32) está dado por: $\delta^{(1)}\tilde{V}_i(\eta, \vec{x}) = \delta^{(1)}V_i(\eta, \vec{x}) - a(\eta)\partial_i\xi^0(\eta, \vec{x})$. No obstante podemos definir la cantidad $\delta^{(1)}V_i^{(g^i)}$ como;

$$\delta^{(1)}V_i^{(g^i)} = \delta^{(1)}V_i + a(\eta)\partial_i(B - E') \quad (3.46)$$

la cual es invariante de norma.

A primer orden en la perturbación, las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales evolucionan independientemente de tal forma que pueden ser estudiadas de manera separada. Sin embargo dado que a primer orden las perturbaciones vectoriales y tensoriales no producen perturbaciones en la densidad de energía, entonces este tipo de perturbaciones son despreciables para la formación de estructuras.

En lo siguiente solo se consideraran perturbaciones escalares dado que hasta primer orden en la perturbación son las únicas que generan perturbaciones en la densidad de energía, ver ecuación (5.27) de la referencia [54].

3.2.1. Forma general de las ecuaciones para las perturbaciones cosmológicas

A continuación derivaremos las ecuaciones que describen la dinámica de las perturbaciones cosmológicas. Para esto, haremos uso de las ecuaciones de Einstein (2.1),

$$G_\mu{}^\nu = 8\pi G T_\mu{}^\nu. \quad (3.47)$$

Para la métrica de fondo (2.5), con curvatura espacial $K = 0$, se encuentra que las únicas componentes no nulas ${}^{(0)}G_\mu{}^\nu$ son;

$${}^{(0)}G_\eta{}^\eta = -\frac{3}{a^2}(\mathcal{H}^2), \quad {}^{(0)}G_i{}^j = -\frac{1}{a^2}\delta_i^j(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2), \quad (3.48)$$

en donde $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$. Entonces las ecuaciones para el fondo, serán;

$${}^{(0)}G_\mu{}^\nu = 8\pi G {}^{(0)}T_\mu{}^\nu, \quad (3.49)$$

en donde ${}^{(0)}T_\mu{}^\nu$ es el tensor de energía-momento para el fondo, el cual deberá satisfacer las siguientes condiciones ${}^{(0)}T_\eta{}^j = {}^{(0)}T_j{}^\eta = 0$, y ${}^{(0)}T_i{}^j \propto \delta_i^j$, como requerimiento para que (3.49) se satisfaga.

Mientras que según (3.30) para la métrica perturbada, el tensor de Einstein puede ser escrito como;

$$G_\mu{}^\nu = {}^{(0)}G_\mu{}^\nu + \delta^{(1)}G_\mu{}^\nu + \dots \quad (3.50)$$

y el tensor de energía-momento puede ser escrito de una manera similar. Entonces igualando orden con orden, se encuentra que la ecuación de movimiento para las perturbaciones lineales vendrá dada por;

$$\delta^{(1)}G_{\mu}{}^{\nu} = 8\pi G \delta^{(1)}T_{\mu}{}^{\nu}, \quad (3.51)$$

Las componentes no nulas del tensor de Einstein a primer orden en la perturbación, escritas en términos de las cantidades $\Psi_{(gi)}$, $\Phi_{(gi)}$, B y E , serán;

$$\delta^{(1)}G_{\eta}{}^{\eta} = \frac{2}{a^2} \left[3\mathcal{H}\Psi'_{(gi)} - \Delta\Psi_{(gi)} + 3\mathcal{H}^2\Phi_{(gi)} - 3\mathcal{H}(-\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)(B - E') \right], \quad (3.52)$$

$$\delta^{(1)}G_i{}^{\eta} = -\frac{2}{a^2} \left[\partial_i\Psi'_{(gi)} + \mathcal{H}\partial_i\Phi_{(gi)} + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\partial_i(B - E') \right], \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}G_i{}^j &= \frac{1}{a^2} \left[\partial_i\partial^j(\Psi_{(gi)} - \Phi_{(gi)}) + (-\Delta\Psi_{(gi)} + 2\Psi''_{(gi)} + 4\mathcal{H}\Psi'_{(gi)} + \right. \\ &\quad + 2\mathcal{H}\Phi'_{(gi)} + 4\mathcal{H}'\Phi_{(gi)} + 2\mathcal{H}^2\Phi_{(gi)} + \Delta\Phi_{(gi)})\delta_i^j + 2(\mathcal{H}'' + \\ &\quad \left. - \mathcal{H}\mathcal{H}' - \mathcal{H}^3)(B - E')\delta_i^j \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

en donde $\Delta = \nabla^2$.

Las cantidades (3.52), (3.53) y (3.54) no son invariantes de norma, sin embargo podemos construir las cantidades invariantes de norma $\delta^{(1)}G_{\eta}{}^{\eta}_{(gi)}$, $\delta^{(1)}G_i{}^j_{(gi)}$, y $\delta^{(1)}G_j{}^{\eta}_{(gi)}$, definidas como;

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}G_{\eta}{}^{\eta}_{(gi)} &= \delta^{(1)}G_{\eta}{}^{\eta} + ({}^{(0)}G_{\eta}{}^{\eta})'(B - E'), \quad \delta^{(1)}G_j{}^i_{(gi)} = \delta^{(1)}G_j{}^i + ({}^{(0)}G_j{}^i)'(B - E'), \\ \delta^{(1)}G_j{}^{\eta}_{(gi)} &= \delta^{(1)}G_j{}^{\eta} + ({}^{(0)}G_{\eta}{}^{\eta} - {}^{(0)}G_l{}^l/3)\partial_j(B - E') \end{aligned} \quad (3.55)$$

y de forma análoga para $\delta^{(1)}T_{\mu}{}^{\nu}_{(gi)}$, se construyen;

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}T_{\eta}{}^{\eta}_{(gi)} &= \delta^{(1)}T_{\eta}{}^{\eta} + ({}^{(0)}T_{\eta}{}^{\eta})'(B - E'), \quad \delta^{(1)}T_j{}^i_{(gi)} = \delta^{(1)}T_j{}^i + ({}^{(0)}T_j{}^i)'(B - E'), \\ \delta^{(1)}T_j{}^{\eta}_{(gi)} &= \delta^{(1)}T_j{}^{\eta} + ({}^{(0)}T_{\eta}{}^{\eta} - {}^{(0)}T_l{}^l/3)\partial_j(B - E'). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Entonces, usando (3.49) junto con (3.51) se encuentra que;

$$\delta^{(1)}G_{\mu}{}^{\nu}_{(gi)} = 8\pi G \delta^{(1)}T_{\mu}{}^{\nu}_{(gi)}, \quad (3.57)$$

$$\frac{2}{a^2} \left(3\mathcal{H}\Psi'_{(gi)} - \Delta\Psi_{(gi)} + 3\mathcal{H}^2\Phi_{(gi)} \right) = 8\pi G \delta^{(1)}T_{\eta}{}^{\eta}_{(gi)}, \quad (3.58)$$

$$-\frac{2}{a^2} \left[\partial_i\Psi'_{(gi)} + \mathcal{H}\partial_i\Phi_{(gi)} \right] = 8\pi G \delta^{(1)}T_i{}^{\eta}_{(gi)}, \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \left[\partial_i\partial^j(\Psi_{(gi)} - \Phi_{(gi)}) + (-\Delta\Psi_{(gi)} + 2\Psi''_{(gi)} + 4\mathcal{H}\Psi'_{(gi)} + 2\mathcal{H}\Phi'_{(gi)} + \right. \\ \left. + 4\mathcal{H}'\Phi_{(gi)} + 2\mathcal{H}^2\Phi_{(gi)} + \Delta\Phi_{(gi)})\delta_i^j \right] = 8\pi G \delta^{(1)}T_i{}^j_{(gi)}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

Perturbaciones de la Materia: Restringiéndonos a perturbaciones escalares, la perturbación del tensor de energía-momento (2.8), correspondiente a un fluido perfecto el cual puede ser descrito por las funciones; densidad de energía ρ , presión p , y cuadrivelocidad del fluido u^j . A primer orden en la perturbación, en su forma más general puede ser escrito en términos de tres funciones escalares denominadas como; perturbación de la densidad de energía $\delta^{(1)}\rho$, perturbación de la presión $\delta^{(1)}p$, y la perturbación de la tres velocidad del fluido $\delta^{(1)}u^i$,

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}T_\eta^\eta &= -\delta^{(1)}\rho, & \delta^{(1)}T_i^\eta &= -({}^{(0)}\rho + {}^{(0)}p)\delta^{(1)}u_i, \\ \delta^{(1)}T_i^j &= \delta_i^j\delta^{(1)}p.\end{aligned}\tag{3.61}$$

En general p no solo es función de ρ , también puede ser función de la entropía \mathcal{S} . Entonces, $p = p(\rho, \mathcal{S})$, por lo que $\delta^{(1)}p$, podrá ser expresado en términos de $\delta^{(1)}\rho$, y $\delta^{(1)}\mathcal{S}$, de la siguiente manera;

$$\delta^{(1)}p = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\mathcal{S}}\delta^{(1)}\rho + \left.\frac{\partial p}{\partial \mathcal{S}}\right|_{\rho}\delta^{(1)}\mathcal{S} = c_s^2\delta^{(1)}\rho + \tau\delta^{(1)}\mathcal{S},\tag{3.62}$$

donde $c_s^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\mathcal{S}}$, $\tau = \left.\frac{\partial p}{\partial \mathcal{S}}\right|_{\rho}$, mientras que $\delta^{(1)}\mathcal{S}$ es una cantidad adimensional que llamaremos perturbación de entropía (primer orden de la perturbación). La perturbación de presión será adiabática, $\delta^{(1)}\mathcal{S} \approx 0$, si podemos definir una ecuación de estado para la cual la presión solo dependa de la densidad; $p = p(\rho)$. De una manera aproximada esto corresponde al caso cuando la dinámica del universo es dominada por un único fluido, como lo es (en el modelo cosmológico estándar inflacionario) durante el periodo inflacionario, ó durante el dominio de radiación ó de materia.

Por otro lado, con base a (3.44) y (3.46) se pueden construir las cantidades invariantes de norma $\delta^{(1)}\rho^{(gi)}$, $\delta^{(1)}p^{(gi)}$ y $\delta^{(1)}u_i^{(gi)}$, encontrando;

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}\rho^{(gi)} &= \delta^{(1)}\rho + ({}^{(0)}\rho)'(B - E'), & \delta^{(1)}p^{(gi)} &= \delta^{(1)}p + ({}^{(0)}p)'(B - E'), \\ \delta^{(1)}u_i^{(gi)} &= \delta^{(1)}u_i + a(\eta)\partial_i(B - E').\end{aligned}\tag{3.63}$$

Ahora, usando las relaciones anteriores junto con (3.56) y (3.61), se encuentran las componentes invariantes de norma $\delta^{(1)}T_\mu^\nu{}^{(gi)}$, para las perturbaciones del fluido perfecto;

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}T_\eta^\eta{}^{(gi)} &= -\delta^{(1)}\rho^{(gi)}, & \delta^{(1)}T_i^\eta{}^{(gi)} &= -({}^{(0)}\rho + {}^{(0)}p)\delta^{(1)}u_i^{(gi)}, \\ \delta^{(1)}T_i^j{}^{(gi)} &= \delta_i^j\delta^{(1)}p^{(gi)}.\end{aligned}\tag{3.64}$$

Sobre la opción **(b) escoger una norma**, procedimiento conocido en inglés como gauge fixing, esto significa simplemente que se escogerá una foliación particular espacial

del espacio-tiempo RW. Una elección muy usada es la **norma síncrona** definida por las condiciones $A_{snc} = B_{snc} = 0$. La norma síncrona es muy popular para los estudios numéricos y es la norma usada en **CMBFAST**.

Por otra parte, en la **norma longitudinal ó Newtoniana conforme**, las únicas perturbaciones escalares distintas de cero son; A_{lon} y ψ_{lon} , lo cual permite que las coordenadas queden completamente definidas. La condición $E_{lon} = 0$, impuesta sobre la primera ecuación en (3.37) fija ξ_L de una manera única y con esto junto con la condición $B_{lon} = 0$, impuesta sobre la segunda ecuación en (3.36) determina ξ^0 . Entonces, iniciando con el sistema coordenado $(\tilde{\eta}, \tilde{x}^i)$, en el cual las funciones \tilde{A} , \tilde{B} , $\tilde{\psi}$ y \tilde{E} en general son distintas de cero. A través del cambio de coordenadas infinitesimal dado por;

$$\eta_{lon} = \tilde{\eta} - (\tilde{B} - \tilde{E}'), \quad x_{lon}^i = \tilde{x}^i + \gamma^{ij} \partial_j \tilde{E}, \quad (3.65)$$

se llega a la condición de norma longitudinal, esto es $A_{lon}(\eta_{lon}, x_{lon}) \neq 0$, $\psi_{lon}(\eta_{lon}, x_{lon}) \neq 0$, y $B_{lon}(\eta_{lon}, x_{lon}) = E_{lon}(\eta_{lon}, x_{lon}) = 0$.

Perturbaciones escalares en la norma longitudinal: En la norma longitudinal la métrica (3.31), para el caso de curvatura espacial nula y considerando solo perturbaciones escalares, toma la forma:

$$ds^2 = -a^2(\eta)(1 + 2A)d\eta^2 + a^2(\eta)(1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.66)$$

en donde x^i ó x^j con $i, j = 1, 2, 3$ denotan las coordenadas espaciales: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Aquí y en adelante omitiremos la etiqueta *lon*, con la cual nos referíamos al haber escogido la norma longitudinal.

Por otro lado, partiendo de las ecuaciones (3.39) y (3.40), se encuentra que en la norma longitudinal las funciones; $A(\eta, \vec{x})$, $\psi(\eta, \vec{x})$ respectivamente coinciden con las variables invariantes de norma; $\Phi_{(gi)}(\eta, \vec{x})$, $\Psi_{(gi)}(\eta, \vec{x})$, (esto es $A(\eta, \vec{x}) = \Phi_{(gi)}(\eta, \vec{x})$ y $\psi(\eta, \vec{x}) = \Psi_{(gi)}(\eta, \vec{x})$). Lo anterior motiva a renombrar las funciones que representan las perturbaciones escalares en la norma longitudinal, como; $A(\eta, \vec{x}) = \Phi(\eta, \vec{x})$, y $\psi(\eta, \vec{x}) = \Psi(\eta, \vec{x})$.

En adelante utilizaremos la métrica (3.66), escrita en términos de $\Phi(\eta, \vec{x})$ y $\Psi(\eta, \vec{x})$, esto es;

$$ds^2 = -a^2(\eta)(1 + 2\Phi)d\eta^2 + a^2(\eta)(1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.67)$$

Se encuentra que escogiendo la norma longitudinal, para las perturbaciones de una cantidad escalar (3.44) se obtiene; $\delta^{(1)}Q_{(gi)} = \delta^{(1)}Q$. De forma análoga las componentes; (3.52), (3.53) y (3.54), una vez fijada la norma longitudinal, se reducirán a;

$$\delta^{(1)}G_{\eta}^{\eta} = \frac{2}{a^2} \left[3\mathcal{H}\Psi' - \Delta\Psi + 3\mathcal{H}^2\Phi \right], \quad (3.68)$$

$$\delta^{(1)}G_i^{\eta} = -\frac{2}{a^2} \left[\partial_i\Psi' + \mathcal{H}\partial_i\Phi \right], \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}G_i^j &= \frac{1}{a^2} \left[\partial_i \partial^j (\Psi - \Phi) + (-\Delta\Psi + 2\Psi'' + 4\mathcal{H}\Psi' + \right. \\ &\quad \left. + 2\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{H}'\Phi + 2\mathcal{H}^2\Phi + \Delta\Phi) \delta_i^j \right], \end{aligned} \quad (3.70)$$

mientras que las ecuaciones (3.55) y (3.56), se reducen respectivamente a;

$$\delta^{(1)}G_\mu^\nu{}_{(gi)} = \delta^{(1)}G_\mu^\nu, \quad \delta^{(1)}T_\mu^\nu{}_{(gi)} = \delta^{(1)}T_\mu^\nu, \quad (3.71)$$

por lo que la ecuación (3.57), se reescribirá como;

$$\delta^{(1)}G_\mu^\nu = 8\pi G \delta^{(1)}T_\mu^\nu, \quad (3.72)$$

con el objetivo de expandir (3.72), usaremos las componentes $\delta^{(1)}G_\mu^\nu$ presentadas a través de las ecuaciones (3.68), (3.69), y (3.70), por lo cual se obtiene;

$$\frac{2}{a^2} \left(3\mathcal{H}\Psi' - \Delta\Psi + 3\mathcal{H}^2\Phi \right) = 8\pi G \delta^{(1)}T_\eta{}^\eta, \quad (3.73)$$

$$-\frac{2}{a^2} \left[\partial_i \Psi' + \mathcal{H} \partial_i \Phi \right] = 8\pi G \delta^{(1)}T_i{}^\eta, \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \left[\partial_i \partial^j (\Psi - \Phi) + (-\Delta\Psi + 2\Psi'' + 4\mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi' + \right. \\ \left. + 4\mathcal{H}'\Phi + 2\mathcal{H}^2\Phi + \Delta\Phi) \delta_i^j \right] = 8\pi G \delta^{(1)}T_i{}^j. \end{aligned} \quad (3.75)$$

A través de las relaciones mostradas en (3.63), podemos notar que las perturbaciones $\delta^{(1)}\rho^{(gi)}$, $\delta^{(1)}p^{(gi)}$, y $\delta^{(1)}u_i^{(gi)}$ coinciden en la norma longitudinal con las perturbaciones de la densidad de energía $\delta^{(1)}\rho$, presión $\delta^{(1)}p$, y la 3-velocidad $\delta^{(1)}u_i$ del fluido respectivamente.

Las ecuaciones (3.61), (3.62), (3.73), y (3.75), pueden combinarse para obtener la ecuación de movimiento para Ψ . Básicamente sumando las ecuaciones (3.73), (3.75), y teniendo en cuenta las definiciones (3.61), (3.62) se obtiene;

$$\Psi'' - c_s^2 \nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Psi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s)]\Psi = 4\pi G \tau \delta^{(1)}\mathcal{S}. \quad (3.76)$$

Finalizaremos esta sección introduciendo la variable ξ , definida como;

$$\xi = \frac{2}{3(\omega + 1)} \frac{d}{da} (a\Psi) + \Psi = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1}\Psi' + \Psi}{\omega + 1} + \Psi. \quad (3.77)$$

Calculando la derivada de ξ con respecto al tiempo conforme, se obtiene;

$$\xi' = \frac{2}{3(\omega + 1)\mathcal{H}} \left[\Psi'' + \left(\frac{3(\omega + 1)\mathcal{H}}{2} - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} - \frac{\omega'}{\omega + 1} + \mathcal{H} \right) \Psi' - \mathcal{H} \frac{\omega'}{\omega + 1} \Psi \right], \quad (3.78)$$

Si utilizamos la definición $c_s^2 = \frac{P'}{\rho'}$ junto con la ecuación de continuidad $\rho' = -3(\rho + P)\mathcal{H}$, y la ecuación de estado $P = \omega(\rho, \mathcal{S})\rho$, es posible relacionar c_s^2 con ω y ω' de la siguiente manera,

$$c_s^2 = \frac{-3\omega'}{3(1+\omega)\mathcal{H}} + \omega, \quad (3.79)$$

la expresión anterior, junto con las ecuaciones de Friedmann (2.10) escritas en función del tiempo conforme η , y con curvatura espacial nula $K = 0$, permite escribir (3.78) como;

$$\xi' = \frac{2}{3(\omega+1)\mathcal{H}} \left(\Psi'' + 3(1+c_s^2)\mathcal{H}\Psi' + [2\mathcal{H}' + (1+3c_s^2)\mathcal{H}^2]\Psi \right), \quad (3.80)$$

la ecuación (3.80) es válida para cualquier era cosmológica.

Suponiendo que en un rango de tiempo $\eta_1 \ll \eta \ll \eta_2$ tal que ω llegará a cambiar significativamente de tal forma que ocurriera un cambio de era cosmológica (esto es ω transita de ω_1 para la era 1, a ω_2 para la era 2), las escalas angulares que se mantienen mayores que el radio de Hubble durante este rango de tiempo implican que $k^2 \ll \mathcal{H}^2$, y como $0 < c_s < 1$, entonces, durante el mismo periodo de tiempo, también se cumplirá que $k^2 c_s^2 \ll \mathcal{H}^2$. Ahora, trabajando con el término $\mathcal{H}^2 \Psi - c_s^2 \nabla^2 \Psi$ presente en la ecuación (3.76), la contribución del modo \vec{k} a este término será $(\mathcal{H}^2 - c_s^2 k^2) \Psi_k$ entonces para las escalas angulares mayores que el radio de Hubble durante el periodo $\eta_1 \ll \eta \ll \eta_2$ se cumplirá que $(\mathcal{H}^2 - c_s^2 k^2) \Psi_k \approx \mathcal{H}^2 \Psi_k$, razón por la cual para estas escalas (3.76) podrá ser aproximada como;

$$\Psi'' + 3(1+c_s^2)\mathcal{H}\Psi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1+3c_s)]\Psi \approx 4\pi G\tau\delta^{(1)}\mathcal{S}. \quad (3.81)$$

Ahora durante el dominio de cada una de estas eras se tendrá que $P \approx P_i = \omega_i(\rho_i)\rho_i$, (en donde i etiqueta a la era dominante $i = 1, 2$), por lo cual $\delta\mathcal{S} \approx 0$ durante el dominio de cada una de estas eras. Entonces, la ecuación (3.81) tomará la siguiente forma asintótica;

$$\Psi''_{era.i} + 3(1+c_{s,i}^2)\mathcal{H}_{era.i}\Psi'_{era.i} + [2\mathcal{H}'_{era.i} + (1+3c_{s,era.i}^2)\mathcal{H}_{era.i}^2]\Psi_{era.i} \approx 0,$$

por lo que de (3.80) se obtiene que para esta situación $\xi' \approx 0$ esto significa que ξ será una cantidad conservada;

$$\frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}_{era.1}^{-1} \Psi'_{era.1} + \Psi_{era.1}}{\omega_{era.1} + 1} + \Psi_{era.1} \approx \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}_{era.2}^{-1} \Psi'_{era.2} + \Psi_{era.2}}{\omega_{era.2} + 1} + \Psi_{era.2}, \quad (3.82)$$

3.2.2. Anisotropías de la CMBR

Como se ha indicado, las perturbaciones de la densidad en la LSS generaron fluctuaciones en la radiación emergente. Este tipo de variaciones en la temperatura del CMBR, de origen primordial, se denomina **anisotropías primarias**. Además, en el trayecto de los fotones desde LSS hasta el observador, intervinieron diversos procesos físicos,

de carácter gravitatorio o bien dispersivo, que generan otro tipo de fluctuaciones denominadas **anisotropías secundarias**. En lo siguiente expondremos los principales mecanismos que generan tanto anisotropías primarias como secundarias.

Anisotropías primarias

1. Las anisotropías primarias, pueden dividirse, en función de los mecanismos que las generen. Para entender esos mecanismos conviene separarlos en dos grupos de acuerdo a la escala angular de las anisotropías. A escalas angulares menores que un grado⁵ se observan los efectos producidos por la interacción de los fotones con el plasma de electrones y protones al momento en el pasado cuando los fotones de la CMBR estaban atrapados dentro de ese plasma primordial. En contraste, las manchas de tamaños angulares superiores a un grado se deben al cambio en la frecuencia de los fotones inducido por el potencial gravitacional presente cuando los fotones se liberaron.

El cálculo del efecto de las fluctuaciones de densidad sobre la radiación del CMBR requiere la realización de una integral a lo largo del grosor⁶ de la LSS. La variación relativa de la temperatura observada en la actualidad en la dirección de un vector unitario \hat{n} está dada por la expresión;

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = \frac{1}{4} \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} - \hat{n} \cdot \vec{v} + \frac{1}{3} \Phi(\eta_{ls}, \vec{x}_{ls}) \quad (3.83)$$

aquí, $\hat{n} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ es el vector unitario a lo largo de la línea de visión, mientras que $\vec{x}_{ls} = -x_{ls} \hat{n}$ (siendo x_{ls} la distancia comóvil d_c recorrida por el fotón desde su emisión en la LSS hasta su detección por los observadores contemporáneos) da la posición del punto de partida del fotón viniendo de la dirección $-\hat{n}$, correspondiendo la posición del observador con el origen del vector \vec{x}_{ls} . El vector \vec{v} corresponde a la velocidad peculiar del observador respecto a LSS. n_γ es la densidad numérica de fotones y Φ es la perturbación del potencial gravitatorio. Cada uno de los tres términos del lado derecho de la ecuación (3.83) representa un mecanismo independiente de generación de anisotropías primarias. Describiremos a continuación estos mecanismos, guardando el orden dado por los términos según aparecen en la ecuación (3.83).

En esta ecuación, el primer término es denominado **anisotropía intrínseca** debida al fluido de fotones, con diferentes temperaturas, en la recombinación (la diferencia de temperatura es debido a que regiones de alta densidad presentan

⁵Es preciso recurrir a una breve explicación. Según la ecuación (2.66), el radio de Hubble sobre la superficie de última dispersión abarca un ángulo de $\vartheta_{H-des} = d_H(t_{ls})/d_A(t_{ls})$. Evaluando (2.6) en t_{ls} se encuentra;

$$d_H(t_{ls}) = \frac{1}{H(z_{ls})} = 0.2 Mpc,$$

mientras que la distancia angular entre el observador y la superficie de última dispersión puede ser calculada a través de la ecuación (2.68), sustituyendo $z_{ls} = 1100$, junto con r_e el cual asumiendo que la curvatura espacial del universo es nula, corresponderá a la distancia comóvil d_c recorrida por el fotón desde su emisión en (t_{ls}, r_{ls}) hasta su detección en (t_0, r_0) . Entonces $r_e = d_c = 14000 Mpc$ por lo cual; $d_A(t_{ls}) = 14000 Mpc / (1 + 1110) \approx 13 Mpc$, así que $\vartheta_{H-des} \approx 0.2/13 \approx 1^\circ$.

⁶ver ecuación (2.99)

un exceso de temperatura). Tras la recombinación los bariones y la radiación se desacoplan produciendo que los fotones viajen libremente. De esta manera, las oscilaciones acústicas que se produjeron dentro de LSS quedan codificadas en esta radiación, y son proyectadas en el cielo en forma de una serie de picos acústicos que son detectables en el espectro de potencias de la CMBR. Padmanabhan (ver referencia [26]) demuestra que para este tipo de anisotropías, la dependencia de las fluctuaciones de temperatura con su escala angular ϑ y el índice espectral n_s , el cual da información sobre la variación de las perturbaciones con k , está dada por;

$$\left(\frac{\Delta T}{T}(\hat{n})\right)_{Int} = \frac{1}{4} \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} \propto \begin{cases} \vartheta^{(1-n_s)/2}, & \vartheta < \vartheta_{H-des} \\ \vartheta^{-(1+n_s)/2}, & \vartheta > \vartheta_{H-des} \end{cases}$$

Las observaciones indican que; ($n_s \approx 1$) por lo que a través de la relación anterior se encuentra que las anisotropías intrínsecas son apreciables en escalas angulares menores que el ángulo subtendido por el horizonte en la LSS $\vartheta_{H-des} \approx 1^\circ$.

El segundo término da cuenta del **desplazamiento Doppler** y se debe al movimiento relativo entre el emisor y el observador. Las oscilaciones en la densidad del fluido en la LSS causan variaciones del potencial gravitatorio que a su vez provocan un movimiento de materia, se genera entonces un campo de velocidades. Compresiones y las expansiones corresponden a valores nulos de la velocidad, mientras que en los puntos intermedios en los que se equilibran el potencial gravitatorio y la presión de radiación la velocidad alcanza un valor máximo. Este movimiento del fluido provoca un desplazamiento Doppler que se manifiesta como una anisotropía en la temperatura. El efecto Doppler tiene una dependencia direccional $\hat{n} \cdot \vec{v}$, debido a que sólo interviene la componente de la velocidad \vec{v} proyectada sobre una línea en dirección \hat{n} (línea de visión)., se trata formalmente de una **anisotropía dipolar**. Padmanabhan (ver referencia [26]) demuestra que para este tipo de anisotropías, la dependencia de las fluctuaciones de temperatura con ϑ y n_s , está dada por;

$$\left(\frac{\Delta T}{T}(\hat{z})\right)_{Dopp} = -\hat{n} \cdot \vec{v} \propto \begin{cases} \vartheta^{(3-n_s)/2}, & \vartheta < \vartheta_{H-des} \\ \vartheta^{-(1+n_s)/2}, & \vartheta > \vartheta_{H-des} \end{cases}$$

Según las observaciones $n_s \approx 1$, entonces las fluctuaciones de temperatura que provoca este efecto aumentan con la escala angular hasta $\vartheta_{H-des} \approx 1^\circ$, y disminuyen por encima de ese valor.

Mientras que el último término se debe a la **gravedad**. Dicho efecto consiste en el hecho de que los fotones pueden ganar o perder energía en presencia de pozos de potencial gravitacional en la superficie de última dispersión, y por ello abandonan la LSS con una diferencia en su potencial gravitatorio $\Phi(\eta_{ls}, \vec{x}_{ls})$ respecto al observador. En consecuencia sufren un desplazamiento al rojo gravitatorio, que depende de la magnitud de Φ (Sachs & Wolfe, 1967). Padmanabhan (ver referencia [26]) demuestra que para este tipo de anisotropías, la dependencia de las fluctuaciones de temperatura con ϑ y n_s , está dada por;

$$\left(\frac{\Delta T}{T}(\hat{z})\right)_{SW} = -\frac{1}{3}\Phi(\eta_{ls}, \vec{x}_{ls}) \propto \begin{cases} \vartheta^{(5-n_s)/2}, & \vartheta < \vartheta_{H-des} \\ \vartheta^{(1-n_s)/2}, & \vartheta > \vartheta_{H-des} \end{cases}$$

Según las observaciones $n_s \approx 1$, por lo cual haciendo uso de la anterior relación, se encuentra que el efecto SW es despreciable para escalas angulares pequeñas (esto es escalas angulares menor que un grado), y domina con un valor constante en escalas angulares mayores que el tamaño del horizonte. Las fluctuaciones mayores que el horizonte de partículas durante el desacople, aún en la actualidad no han evolucionado significativamente, y por ello las fluctuaciones de temperatura en esta escala reflejan las fluctuaciones primordiales.

Anisotropías secundarias

2. Las anisotropías secundarias son las generadas en el camino recorrido desde el desacoplamiento de los fotones hasta hoy. Son varios los mecanismos que pueden dar lugar a las mismas (ver por ej. Refregier 1999):

- Efecto Sachs-Wolfe Integrado corresponde a las anisotropías generadas debido a la evolución temporal del potencial gravitatorio a lo largo del camino de los fotones entre la LSS y el observador. Cuando los fotones atraviesan pozos de potencial variables con el tiempo, los fotones experimentan un desplazamiento al azul (ganan energía) cuando entran en un pozo de potencial, y un desplazamiento al rojo (pierden energía) al abandonarlo. En estructuras estáticas estos dos efectos se cancelan mutuamente, pero en caso de una variación temporal, si el potencial decrece se produce una ganancia neta de energía. Este efecto origina un aumento de la temperatura proporcional a la integral a lo largo de la línea de visión de la derivada temporal del potencial $\Phi(t, \vec{r})$,

$$\left(\frac{\Delta T}{T}(\hat{n})\right)_{SWI} = 2 \int_{\eta_{desac}}^{\eta_0} \frac{\partial \Phi(\eta, r\hat{n})}{\partial \eta} d\eta \quad (3.84)$$

la integral recorre la trayectoria del fotón de modo que $dr^2 = d\eta^2$, obteniendo para la trayectoria de un fotón desde su emisión hasta llegar al observador; $r(\eta) = \eta_0 - \eta$.

Existe un efecto SWI que se produce justo después de la recombinación, en estructuras próximas a la LSS, y otro más tardío, originado en estructuras con bajo desplazamiento al rojo. Este último se manifiesta en escalas angulares grandes y es significativo sólo en caso de que exista una constante cosmológica con una contribución importante.

Por otro lado, el efecto Rees-Sciama (RS; Rees & Sciama (1968)), es análogo al ISW que se presenta en el régimen no lineal, por lo tanto es menos significativo que los anteriores fenómenos generadores de anisotropías. En el efecto RS la evolución del potencial gravitatorio con el tiempo **es causada por el crecimiento no lineal de estructura y del movimiento de halos que se unen, dando lugar a anisotropías.**

- Efecto lente gravitatoria (Cayon et al. 1993): Por último, efectos de lente gravitatoria generados en estructuras masivas de gran escala podrían afectar las trayectorias de los fotones del CMBR (Blanchard & Schneider, 1987). Este mecanismo no podría generar anisotropías de manera independiente, sino modificar las previamente creadas, de manera que se trata de un efecto de segundo orden.

Análisis multipolar de las anisotropías. Puesto que la temperatura de la CMBR es una función definida sobre la superficie de una esfera, entonces es natural usar los armónicos esféricos para su representación $Y_{lm}(\theta, \phi)$,

$$T(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sigma_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (3.85)$$

en donde $T(\theta, \phi)$ es la distribución angular de la temperatura de la CMBR en la esfera celeste, y l es el llamado multipolo, mientras que σ_{lm} son los coeficientes multipolares.

Como el espectro de CMBR es muy cercano al de un cuerpo negro a una temperatura T_0 , las fluctuaciones de la temperatura de la CMBR se expresan de la forma $\frac{\Delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0}$ el cual también podrá ser escrito como una suma en armónicos esféricos,

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (3.86)$$

En (3.86) no se ha incluido el monopolo ($l = 0$), el cual simplemente corresponde al valor de la temperatura promediado sobre todo el cielo, esto da una temperatura constante (sin fluctuaciones) de $T_0 = 2.7250$ °K, ni el dipolo ($l = 1$), el cual corresponde a la variación de temperaturas entre dos direcciones opuestas, es decir, un hemisferio ligeramente más caliente que el otro. Esta anisotropía dipolar es de unos $\frac{\Delta T}{T_0}(\vec{x}_{ls}) \approx 0,003$ °K y es un efecto del movimiento de nuestra galaxia con respecto al CMBR. En general, el resto de las fluctuaciones angulares (o anisotropías) de la CMBR tienen su origen en diversos procesos físicos, anteriormente mencionados, que ocurrieron en la LSS (que producen las llamadas anisotropías primarias) o entre la LSS y los observadores contemporáneos (que producen las anisotropías secundarias).

A fin de describir el campo de fluctuaciones en términos de estructuras a una escala de tamaño dada, se descompone las fluctuaciones de la temperatura $\frac{\Delta T}{T_0}(\vec{x}_{ls})$ en modos de Fourier $\frac{\Delta T}{T_0}(\vec{k})$ que están caracterizados por el vector de onda⁷ \vec{k}

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\vec{x}_{ls}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_{ls}} \frac{\Delta T}{T_0}(\vec{k}), \quad (3.87)$$

donde $\vec{x}_{ls} = x_{ls} \hat{n}$, con $\hat{n} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ un vector unitario normal a la esfera celeste, mientras que x_{ls} corresponde a la distancia comóvil d_c recorrida por el fotón desde su emisión en la superficie de última dispersión al tiempo t_{ls} , hasta su detección, por los observadores contemporáneos, en un tiempo t_0 , $x_{ls} = \int_{t_{ls}}^{t_0} d\tau / a(\tau) \approx 6000h^{-1}$ Mpc.

Por otro lado, los armónicos esféricos forman un conjunto completo y ortonormal de funciones sobre la esfera, por lo que multiplicando de ambos lados de la ec.(3.86) por $Y_{lm}^*(\theta, \phi)$, usando la ortogonalidad de los $Y_{lm}(\theta, \phi)$ e integrando, podemos encontrar los coeficientes multipolares a_{lm} ;

⁷En realidad, sería más apropiado llamar a k el número de ondas, pues lo que nos da es 2π veces el número de ondas (o ciclos) completos que caben en la unidad de longitud L . Es decir, k es una frecuencia espacial, análoga a la bien conocida frecuencia temporal ω , $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(a, b, c)$ siendo a, b, c números enteros

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) \frac{\Delta T}{T_0}(\theta, \phi). \quad (3.88)$$

Ahora, insertando (3.87) en la última ecuación encontramos,

$$a_{lm} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega \int d^3k Y_{lm}^*(\theta, \phi) \frac{\Delta T}{T_0}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_{ls}}, \quad (3.89)$$

usando el desarrollo de la onda plana en armónicos esféricos

$$a_{lm} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega \int d^3k Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sum_{l'} \sum_{m'} i^{l'} j_{l'}(kx_{ls}) Y_{l'm'}^*(\vec{k}) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \frac{\Delta T}{T_0}(\vec{k}) \quad (3.90)$$

donde $j_l(x)$ son las funciones esféricas de Bessel, $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$, y $J_l(x)$ son las funciones de Bessel de primera clase. Entonces, haciendo uso de la ortogonalidad de los armónicos esféricos, la anterior ecuación tomará la forma,

$$a_{lm} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} i^l \int d^3k Y_{lm}^*(\vec{k}) j_l(kx_{ls}) \frac{\Delta T}{T_0}(\vec{k}). \quad (3.91)$$

Modelaremos a $\frac{\Delta T}{T_0}(\vec{x}_{ls})$ como un campo aleatorio⁸, lo que significa que su valor en cada punto del CMBR es una variable aleatoria⁹. Observaciones indican que las anisotropías se pueden modelar como un campo aleatorio gaussiano (para más detalles consultar referencia [27]), i.e., las variables aleatorias del campo aleatorio tienen una distribución de probabilidad gaussiana. Entonces, asumiendo que las fluctuaciones de temperatura son gaussianas, se deduce que los coeficientes a_{lm} son variables aleatorias e independientes.

El promedio sobre un ensamble (teórico) de universos¹⁰ de la cantidad $|a_{lm}|^2$ definida para cada uno de los elementos del ensamble, será denotado como; $\overline{|a_{lm}|^2}$ en donde la

⁸Es una generalización de un proceso estocástico (dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, un proceso estocástico (o proceso aleatorio) en el espacio de estados X es una colección de variables aleatorias X -valuadas indexadas por el conjunto T (tiempo). Esto es, un proceso estocástico \mathcal{F} es la colección $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$.) en el cual el parámetro t no es un simple número real, sino que puede ser un campo vectorial multidimensional o inclusive una variedad.

⁹De manera formal una variable aleatoria se puede definir como sigue: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad (el triplete del espacio de probabilidad es Ω es el espacio de muestra, \mathcal{F} es el σ -álgebra de subconjuntos de Ω y \mathcal{P} la medida en (Ω, \mathcal{F})) y (\mathcal{Y}, Σ) un espacio de medida. Entonces la variable aleatoria X es la función de medida $X : \Sigma \rightarrow \mathcal{Y}$. Las preimágenes de los subconjuntos $\mathcal{Y}(\in \Sigma)$ son eventos ($\in \mathcal{F}$) y tienen asignada una probabilidad P . Se puede ver que el nombre de variable es incorrecto ya que en realidad es una función.

¹⁰Para que la afirmación anterior tenga sentido es necesario considerar un ensamble de universos, i.e., el campo $\delta(\vec{x})$ en cada punto del espacio tendrá un valor diferente para cada uno de los universos miembros del ensamble, con un $\overline{(\delta(\vec{x}))^2}$ sobre todos los miembros del ensamble. La homogeneidad estadística del campo $\delta(\vec{x})$ significa que $\overline{(\delta(\vec{x}))^2}$ es independiente de la posición. Obviamente el campo que estamos estudiando es un miembro de este ensamble i.e., una realización del proceso estadístico. Si sólo tenemos acceso a un miembro (nuestro universo) de este ensamble de universos (suponiendo que el ensamble existe) ¿Cómo podemos medir $\overline{(\delta(\vec{x}))^2}$? La mejor respuesta a este dilema es realizar mediciones en partes muy separadas del espacio, estas diferentes partes se supone que están **causalmente desconectadas**. En otras palabras, se está haciendo la identificación: promedio sobre el **volumen** = promedio sobre el **ensamble**.

barra superior indica promedio sobre el ensamble. La cantidad $\overline{|a_{lm}|^2}$ para ($l > 1$) define al espectro de potencias angular C_l , como; $C_l = \overline{|a_{lm}|^2}$ la cual por la homogeneidad e isotropía solo es función¹¹ de l y no de m , entonces la siguiente igualdad será válida,

$$C_l = \overline{|a_{lm}|^2} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{|a_{lm}|^2}, \text{ para } l > 1, \quad (3.92)$$

y además las variables aleatorias independientes a_{lm} , están correlacionadas¹² de forma que;

$$C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} = \overline{a_{lm} a_{l'm'}^*}, \quad (3.93)$$

Por otro lado, calculando el promedio sobre el ensamble del cuadrado de (3.86), se puede encontrar una relación entre $\left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}\right)^2$ y los C_l . Entonces, según se indica este párrafo, partiremos de;

$$\overline{\left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}\right)^2} = \overline{\left(\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \sum_{l'=2}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} a_{l'm'}^* Y_{l'm'}^*(\theta, \phi)\right)}, \quad (3.94)$$

del lado derecho de la anterior ecuación solo los a_{lm} varían sobre los diferentes elementos del ensamble, entonces podemos escribir;

$$\overline{\left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}\right)^2} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{l'=2}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) \overline{a_{lm} a_{l'm'}^*}, \quad (3.95)$$

usando (3.93) sobre la anterior ecuación, se obtiene;

$$\overline{\left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}\right)^2} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 C_l, \quad (3.96)$$

finalmente usando la identidad $\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$, sobre la anterior ecuación, se encuentra;

$$\overline{\left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}\right)^2} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) C_l. \quad (3.97)$$

La teoría predice los valores $\overline{|a_{lm}|^2}$ de los procesos aleatorios responsables de las anisotropías del CMBR, pero solo podemos observar una realización de estos procesos aleatorios, el conjunto $\{a_{lm}\}$ de nuestro CMBR (nuestro universo). Por lo que se define el espectro angular de potencias observado \check{C}_l , como la suma de los valores a_{lm} observados;

¹¹De una manera intuitiva l se refiere al tamaño angular de la anisotropía, mientras que m está relacionado con la orientación.

¹²La correlación estadística determina la relación o dependencia que existe entre las dos variables que intervienen en una distribución bidimensional.

$$\check{C}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2, \quad (3.98)$$

los cuales se relacionan con el promedio de $\left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}\right)^2$ sobre la esfera celeste;

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}\right)^2 d\Omega &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \sum_{l'=2}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} a_{l'm'}^* Y_{l'm'}^*(\theta, \phi), \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{l'=2}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} a_{lm} a_{l'm'}^* \int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega, \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) \check{C}_l \end{aligned} \quad (3.99)$$

en donde para calcular la integral de los armónicos esféricos sobre la superficie de la esfera, se usó; $\int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$.

En contraste con la ecuación (3.97) la cual da el promedio sobre el ensamble de realizaciones (ensamble de universos) de la cantidad $\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}$, en una localización arbitraria en el cielo. Mientras que (3.99) da el promedio sobre nuestra esfera celeste de la cantidad $\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}$. Por construcción, el promedio de \check{C}_l sobre el ensamble de realizaciones es igual a \bar{C}_l , i.e.,

$$\overline{\check{C}_l} = C_l \Rightarrow \overline{\check{C}_l - C_l} = 0 \quad (3.100)$$

Pero el cuadrado de la diferencia entre \check{C}_l y C_l , promediado sobre el ensamble de realizaciones, en general es distinto de cero y se conoce como varianza cósmica,

$$\overline{(\check{C}_l - C_l)^2} \neq 0 \quad (3.101)$$

Esta variable es una medida de las limitaciones respecto a la información que podemos obtener y confiar. Como únicamente tenemos a nuestro alcance una copia de el universo, a saber, nuestro propio universo, al calcular \check{C}_l solo tenemos para cada l , un número de $2l+1$ muestras a_{lm} . Para $l=100$, por ejemplo, se tienen $201 a_{100,m}$ coeficientes, se miden entonces 201 coeficientes con el fin de calcular la varianza \check{C}_{100} , sin embargo para el cuadrupolo $l=2$ solo se tienen $5 a_{2,m}$ coeficientes, y con la mediciones de cada uno de estos coeficientes se deberá calcular \check{C}_2 (esto es para encontrar \check{C}_2 , solo contaremos con cinco datos), es decir, existe una incertidumbre fundamental sobre lo que podemos entender de las \check{C}_l , y que sera mayor a l pequeñas. Por eso el conocimiento de $\overline{(\check{C}_l - C_l)^2}$ sufre de una limitación intrínseca, la cual se estima a través de;

$$\sqrt{\overline{(C_l - \check{C}_l)^2}} = 2C_l / \sqrt{l+2}, \quad (3.102)$$

y es conocida como varianza cósmica. Esta limitación vale un 63% para $l=2$, un 30% a $l=10$, y baja hasta un 3% para $l=1000$.

Para finalizar esta parte, generalizaremos (3.94) a través de la **función de correlación angular de dos puntos**,

$$C(\alpha) = \frac{\overline{\Delta T(\hat{n}_2) \Delta T(\hat{n}_1)}}{T_0}, \quad \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = \cos \alpha, \quad (3.103)$$

donde nuevamente la barra superior indica promedio sobre un ensamble (teórico) de universos, en este caso (según el argumento) del producto de dos fluctuaciones en la temperatura en dos direcciones \hat{n}_1 y \hat{n}_2 distintas normales a la dos esfera celeste, las cuales forman entre sí un ángulo α . La función de correlación angular entonces se puede interpretar como la probabilidad de encontrar a un píxel (**j**) a temperatura T_j , a una distancia angular α de otro píxel (**i**) a temperatura T_i . Sustituyendo (3.86) en (3.103) y usando el teorema de adición de los los armónicos esféricos, podemos escribir la función de correlación angular de dos puntos como;

$$C(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \alpha) \quad (3.104)$$

donde P_l representa el polinomio de Legendre de orden l . De la anterior ecuación vemos que el $C(\alpha)$ correspondiente a $\alpha = 0^\circ$, para este caso $P_l(1) = 1$, entonces $C(\alpha)$ se reduce a la cantidad $\left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}\right)^2$ encontrada en(3.97).

3.2.3. Espectro de Harrison-Zel'dovich H&Z

La gráfica del armónico esférico $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sobre la superficie de una esfera obedece cierto patrón, de modo que para el multipolo l , el armónico esférico $Y_{lm}(\theta, \phi)$ genera l longitudes de onda alrededor de un círculo ecuatorial completo definido sobre la esfera.

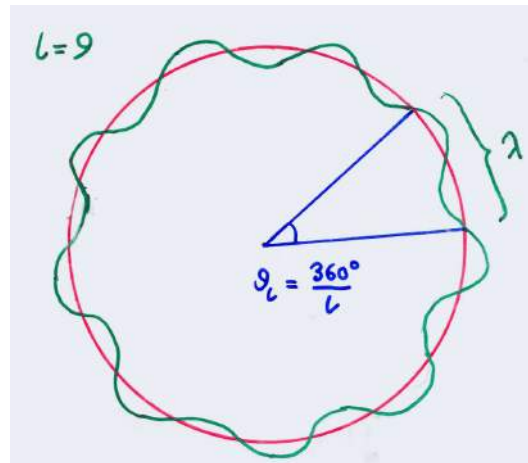


Figura 3.2: Grafica de $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sobre la superficie de una esfera.

Entonces el ángulo que subtiende una longitud de onda sobre la esfera vendrá dado por;

$$\vartheta_l = \frac{2\pi}{l} = \frac{360^\circ}{l} \quad (3.105)$$

inmediatamente vemos que el ángulo que subtiende media longitud de onda, i.e., la separación entre un máximo y un mínimo vecinos, será $\vartheta_{res} = \vartheta_\lambda/2$. De lo anterior se concluye que la resolución angular de nuestros detectores de microondas deberá por lo menos coincidir con el ángulo ϑ_{res} si es que deseamos resolver el espectro de potencia angular hasta este multipolo l .

Por ejemplo, COBE tiene una resolución de 7° lo cual nos permite medir hasta $l = 180/7 = 26$, WMAP tiene una resolución de 0.23° lo que nos permite ver hasta $l = 180/0.23 = 783$, mientras que el satélite Planck tiene una resolución de $0^\circ 5'$ lo que nos permite ver C_l hasta $l = 2160.3$

Por otro lado, usando la ecuación (2.66) para calcular el ángulo subtendido por una longitud de onda sobre la superficie de última dispersión

$$d_A(t_{ls}) = \frac{\lambda_{fis}(t)}{\vartheta_l} \quad (3.106)$$

dividiendo de ambos lados de la ecuación anterior entre $a(t_{ls})$, encontramos la relación entre las cantidades comóviles; $d_A^c = \frac{\lambda_c}{\vartheta_l}$, de donde despejaremos ϑ_l y lo sustituiremos en la ecuación (3.105), de esta forma se obtiene;

$$\vartheta_l = \frac{\lambda_c}{d_A^c} = \frac{2\pi}{l}. \quad (3.107)$$

Ahora escribiendo la longitud de onda comóvil λ_c en función del número de onda comóvil¹³ k , esto es; $\lambda_c = \frac{2\pi}{k}$, y remplazándolo en la anterior ecuación, se encuentra;

$$\vartheta_l = \frac{2\pi}{k d_A^c} = \frac{2\pi}{l}. \quad (3.108)$$

y de esta forma encontramos la relación entre el multipolo l , y el número de onda k ,

$$k = \frac{l}{d_A^c}. \quad (3.109)$$

Continuaremos la discusión enfocándonos únicamente en las anisotropías primarias a escalas angulares grandes $\vartheta > 1^\circ$, hemos mencionado que el mecanismo responsable de la generación de estas anisotropías es el efecto Sachs-Wolfe. Entonces, para estas anisotropías los a_{lm} (involucrados) que intervienen en el cálculo de los promedios sobre el cielo $\overline{a_{lm} a_{lm}^*}$, se calculan por medio de la relación dada por la ecuación (3.91) y del efecto Sachs-Wolfe (tercer sumando de lado derecho de la ecuación (3.83)) el cual corresponde a;

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0}(\eta_{ls}, \vec{x}_{ls}) \right)_{SW} = \frac{1}{3} \Phi(\eta_{ls}, \vec{x}_{ls}). \quad (3.110)$$

¹³También frecuentemente llamado modo k .

es conveniente escribir el potencial Newtoniano como una transformada de Fourier¹⁴

$$\Phi(\eta_{ls}, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Phi_{\vec{k}}(\eta_{ls}), \quad (3.111)$$

en donde la función exponencial puede ser escrita en términos de polinomios de Legendre de la siguiente manera,

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_l (2l+1) i^l P_l(\hat{k} \cdot \hat{x}) j_l(kx), \quad (3.112)$$

entonces el efecto Sachs-Wolfe escrito en modos de Fourier se obtiene de sustituir en la ecuación en (3.110) lo que resulte de sustituir (3.112) en (3.111), obteniendo;

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0}(\eta_{ls}, \vec{x}_{ls}) \right)_{SW} = \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l \int d^3k \Phi_{\vec{k}}(\eta_{ls}) j_l(kx_{ls}) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}). \quad (3.113)$$

Nuevamente, calculando el promedio del producto de dos fluctuaciones de la temperatura en dos direcciones diferentes \hat{n} y \hat{n}' normales a la esfera celeste,

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}) \frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}') \right)_{SW}} &= \overline{\left(\frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}) \frac{\Delta T^*}{T_0}(\hat{n}') \right)_{SW}} = \\ &= \sum_{l,l'} \frac{(2l+1)(2l'+1) i^l (-i)^{l'} \iint d^3k d^3k' \overline{\Phi_{\vec{k}}(\eta_{ls}) \Phi_{\vec{k}'}^*(\eta_{ls})} j_l(kx_{ls}) j_{l'}(k'x'_{ls}) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}) P_{l'}(\hat{k}' \cdot \hat{n}')}{9(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Asumiendo que la distribución de probabilidad de $\Phi_{\vec{k}}(\eta_{ls})$ es invariante ante rotaciones y traslaciones espaciales, lo anterior implica que;

$$\overline{\Phi_{\vec{k}}(\eta_{ls}) \Phi_{\vec{k}'}^*(\eta_{ls})} = \mathcal{P}_{\Phi}(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.114)$$

donde $\mathcal{P}_{\Phi}(k)$ depende solo de la magnitud del vector modo \vec{k} , y es una función positiva. A esta función se le denomina **espectro de potencias del potencial Newtoniano**. La función $\mathcal{P}_{\Phi}(k)$, se relaciona con el anteriormente mencionado **índice espectral** $n_s(k)$, a través de;

¹⁴Dado que las hipersuperficies del background son homogéneas e isotrópicas, es razonable desarrollar un análisis armónico: un campo tensorial (en la hipersuperficie) puede descomponerse en componentes que transforman irreduciblemente bajo rotaciones y traslaciones. En el caso $K = 0$ la descomposición en armónicos corresponde a la descomposición de Fourier. Para una función genérica $f(t, \vec{x})$ la integral de Fourier es dada por: $f(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k$. donde $\vec{k} \cdot \vec{x}$ denota el producto interior entre los vectores \vec{k} (vector de onda comóvil) y \vec{x} (posición comóvil). En general, se impone la condición de gaussianidad a la teoría de perturbaciones cosmológicas, la cual establece que cada modo de Fourier k evoluciona independientemente, es decir, los diferentes modos de Fourier no están correlacionados entre sí. La descomposición en componentes irreducibles de una simetría de traslación corresponde a un análisis armónico, es decir, la descomposición en funciones propias del laplaciano: $\nabla^2 f(t, \vec{x}) = -k^2 f(t, \vec{x})$, donde k es la magnitud del vector de onda \vec{x} . Para $K \neq 0$ también se puede desarrollar un análisis armónico aunque la descomposición es diferente

$$n_s(k) - 1 = \frac{d \ln(k^3 \mathcal{P}_\Phi)}{d \ln k}. \quad (3.115)$$

Ahora, usando (3.114) sobre la anterior sumatoria, se encuentra;

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}) \frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}') \right)_{SW}} &= \overline{\left(\frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}) \frac{\Delta T^*}{T_0}(\hat{n}') \right)_{SW}} \\ &= \sum_{l, l'} \frac{(2l+1)(2l'+1)i^l(-i)^{l'}}{9(2\pi)^3} \int d^3k \mathcal{P}_\Phi(k) j_l^2(kx_{ls}) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}) P_{l'}(\hat{k} \cdot \hat{n}') \\ &= \sum_{l, l'} \frac{(2l+1)(2l'+1)i^l(-i)^{l'}}{9(2\pi)^3} \left[\int k^2 \mathcal{P}_\Phi(k) j_l^2(kx_{ls}) dk \right] \left[\int P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}) P_{l'}(\hat{k} \cdot \hat{n}') d\Omega_k \right], \end{aligned} \quad (3.116)$$

posteriormente usaremos sobre la anterior relación la identidad;

$$\int P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}) P_{l'}(\hat{k} \cdot \hat{n}') d\Omega_k = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}')$$

lo cual permite escribir (3.116), como;

$$\overline{\left(\frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}) \frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}') \right)_{SW}} = \frac{1}{18\pi^2} \sum_l (2l+1) P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') \int_0^\infty k^2 \mathcal{P}_\Phi(k) j_l^2(kx_{ls}) dk. \quad (3.117)$$

La comparación de la anterior ecuación con la ecuación resultante de igualar (3.103) y (3.104), conduce a;

$$C_{l,SW} = \frac{2}{9\pi} \int_0^\infty k^2 \mathcal{P}_\Phi(k) j_l^2(kx_{ls}) dk. \quad (3.118)$$

Por otro lado, si la función $n_s(k)$ es aproximadamente constante, entonces a través de la integración de la ecuación (3.115) se encuentra que una suposición adecuada para la forma de $\mathcal{P}_\Phi(k)$ es;

$$\mathcal{P}_\Phi(k) = N_\Phi^2 k^{n_s-4}, \quad (3.119)$$

siendo N_Φ^2 una constante real positiva.

Entonces, con la finalidad de calcular $C_{l,SW}$ sustuiremos (3.119) en (3.118), también usaremos la formula estándar para la integral de funciones esféricas de Bessel;

$$\int_0^\infty \chi^{n_s-2} j_l^2(\chi) d\chi = \frac{2^{n_s-4} \pi \Gamma(3-n_s) \Gamma(l + \frac{n_s-1}{2})}{\Gamma^2(\frac{4-n_s}{2} \Gamma(l+2 - \frac{n_s-1}{2}))}. \quad (3.120)$$

y nos limitaremos a las escalas angulares ϑ_{res} tales que el mecanismo más importante de generación de las anisotropías en el CMBR sea el efecto Sachs-Wolf. Anteriormente

se encontró que estas escalas angulares son; $\vartheta_{res} > 1^\circ$, y dado que $\vartheta_{res} = 180^\circ/l$, entonces lo mencionado al inicio de este párrafo equivale a limitarnos a los multipolos l tales que $l < 180$, estos valores del multipolo l pueden ser mapeados a valores del número de onda k (ó modo k) a través de la ecuación (3.109), para el cual se necesita calcular $d_A^c = d_A(t_{ls})/a(t_{ls})$ siendo $a(t_{ls}) \approx 0.001$, y usaremos una vez más el resultado encontrado anteriormente $d_A(t_{ls}) \approx 13\text{Mpc}$, encontrando que $d_A^c \approx 13000 \text{ Mpc}$. Entonces el conjunto $l < 180$ es mapeado a;

$$k < \frac{180}{13000\text{Mpc}} \approx 0.01\text{Mpc}^{-1} \quad (3.121)$$

a dichos modos k los denominaremos de ahora en adelante como **los modos de interés físico a nivel cosmológico**.

Luego de realizar las anteriores consideraciones $C_{l,SW}$ tomará la siguiente forma aproximada;

$$C_{l,SW} \approx \frac{2^{n_s-3}\Gamma(3-n_s)x_{ls}^{1-n_s}N_\Phi^2\Gamma(l+\frac{n_s-1}{2})}{9\Gamma^2(\frac{4-n_s}{2})\Gamma(l+2-\frac{n_s-1}{2})}. \quad (3.122)$$

Según las observaciones $n_s \approx 1$, entonces se puede considerar $n_s = 1$ como caso limite para el cual la anterior ecuación se reducirá a;

$$C_{l,SW} \approx \frac{N_\Phi^2}{9\pi l(l+1)} \Rightarrow l(l+1)C_{l,SW} \approx \text{constante}. \quad (3.123)$$

Mientras que el espectro de potencias $\mathcal{P}_\Phi(k)$, presentado en la ecuación (3.119), tomará la forma;

$$\mathcal{P}_\Phi(k) = \frac{N_\Phi^2}{k^3}, \quad (3.124)$$

lo cual recibe el nombre de; **espectro invariante de escala ó espectro de Harrison-Zel'dovich (H&Z)**.

Sin embargo, siendo más estrictos, los datos observacionales indican que;

$$\frac{l(l+1)}{2\pi}\tilde{C}_{l,SW} \approx 10^{-10} \quad (3.125)$$

lo cual nos permite fijar la amplitud,

$$N_\Phi^2 \approx 18\pi^2 \times 10^{-10} \Rightarrow N_\Phi \approx 13.3 \times 10^{-5}. \quad (3.126)$$

Mientras que sobre el índice escalar espectral $n_s(k)$, las observaciones actuales indican que;

$$n_s(k_{piv}) = 0.9619 \pm 0.0073, \quad (3.127)$$

siendo k_{piv} una referencia arbitraria conocida como pivote de escala, que suele tomar valores de $k_{piv} = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$, ó $k_{piv} = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$.

El resultado (3.127) significa que $n_s \approx 1$, pero no exactamente igual a uno, lo cual excluye al espectro perfectamente invariante de escala H&Z en más de 5σ de nivel de confianza!!

3.2.4. Perturbación en la norma longitudinal del sistema Einstein - campo escalar

Como una aplicación del sistema de ecuaciones (3.73), (3.74), y (3.75) encontrado en la sección 3.2.1, construiremos las ecuaciones de Einstein a orden lineal en la perturbación (fijando la norma longitudinal) para el caso en que el contenido de materia en el universo es dominado por un campo escalar.

Antes de proceder con la aplicación mencionaremos que las componentes que representan el primer orden de la perturbación del tensor de Einstein en la norma longitudinal, presentadas a través de las ecuaciones (3.68), (3.69) y (3.70), también pueden ser encontradas a partir de la métrica (3.67), directamente de calcular el tensor de Einstein hasta orden lineal en Φ y Ψ , y posteriormente separar los órdenes cero y lineal en las perturbaciones de la métrica. Así, las componentes no nulas del tensor de Einstein a orden cero en la perturbación de la métrica son;

$${}^{(0)}G_\eta{}^\eta = -\frac{3}{a^2}\mathcal{H}^2, \quad {}^{(0)}G_i{}^j = -\frac{1}{a^2}\delta_i^j(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2). \quad (3.128)$$

se recuerda que $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ siendo $' = \frac{d}{d\eta}$. Mientras que el primer orden de la perturbación del tensor de Einstein en la norma longitudinal viene representado por las componentes;

$$\delta^{(1)}G_\eta{}^\eta = \frac{2}{a^2}(3\mathcal{H}\Psi' - \Delta\Psi + 3\mathcal{H}^2\Phi), \quad (3.129)$$

$$\delta^{(1)}G_i{}^\eta = -\frac{2}{a^2}(\partial_i\Psi' + \mathcal{H}\partial_i\Phi), \quad (3.130)$$

$$\delta^{(1)}G_\eta{}^i = \frac{2}{a^2}(\partial^i\Psi' + \mathcal{H}\partial^i\Phi), \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}G_i{}^j &= \frac{1}{a^2} \left[\partial_i\partial^j(\Psi - \Phi) + (-\nabla^2\Psi + 2\Psi'' + 4\mathcal{H}\Psi' + \right. \\ &\quad \left. + 2\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{H}'\Phi + 2\mathcal{H}^2\Phi + \nabla^2\Phi)\delta_i^j \right]. \end{aligned} \quad (3.132)$$

El siguiente paso consiste en calcular el tensor de energía-momento perturbado, hasta el orden lineal en la perturbación, fijando la norma longitudinal. Entonces, el tensor de energía momento para el campo escalar viene dado por la ecuación (3.5),

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu\phi\partial^\nu\phi - \left(\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial_b\phi g^{ab} + V[\phi] \right) \delta_\mu{}^\nu \quad (3.133)$$

Ahora luego de separar el campo $\phi(\eta, \vec{x})$, como; $\phi(\eta, \vec{x}) = \phi_0(\eta) + \delta\phi(\eta, \vec{x})$ (parte homogénea e isotrópica y parte lineal en la perturbacion del campo escalar respectivamente), para luego

sustituirlo en la anterior ecuación, y posteriormente identificar el orden cero y lineal en las perturbaciones Ψ , Φ , y $\delta\phi$, se encuentra que las componentes no nulas del tensor de energía-momento para el campo escalar, a orden cero en la perturbación, son;

$${}^{(0)}T_\eta{}^\eta = -\left(\frac{1}{2a^2}(\phi'_0)^2 + V(\phi_0)\right), \quad {}^{(0)}T_i{}^j = \left(\frac{1}{2a^2}(\phi'_0)^2 - V(\phi_0)\right)\delta_i{}^j. \quad (3.134)$$

Mientras que el orden lineal en las perturbaciones, trabajando en la norma longitudinal, las componentes del tensor de energía-momento pueden ser escritas como;

$$\delta^{(1)}T_\eta{}^\eta = \frac{1}{a^2}(\phi'^2_0\Phi - \phi'_0\delta\phi' - a^2\delta\phi\partial_\phi V), \quad \delta^{(1)}T_i{}^\eta = -\frac{\phi'_0}{a^2}\partial_i(\delta\phi), \quad (3.135)$$

$$\delta^{(1)}T_i{}^j = \frac{1}{a^2}(\phi'_0\delta\phi' - \phi'^2_0\Phi - a^2\delta\phi\partial_\phi V)\delta_i{}^j. \quad (3.136)$$

Vemos que las ecuaciones de Einstein a orden cero en la perturbación¹⁵

${}^{(0)}G_\eta{}^\eta = 8\pi G {}^{(0)}T_\eta{}^\eta$, ${}^{(0)}G_i{}^j = 8\pi G {}^{(0)}T_i{}^j$, son respectivamente;

$$3\mathcal{H}^2 = 8\pi G\left(\frac{1}{2}(\phi'_0)^2 + a^2V(\phi_0)\right), \quad (3.137)$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -8\pi G\left(\frac{1}{2}(\phi'_0)^2 - a^2V(\phi_0)\right), \quad (3.138)$$

luego de tomar la diferencia entre estas dos ecuaciones, encontramos;

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = 4\pi G(\phi'_0)^2. \quad (3.139)$$

Mientras que a orden lineal en la perturbación, las ecuaciones de Einstein, en la norma longitudinal, correspondientes a; $\delta^{(1)}G_\eta{}^\eta = 8\pi G\delta^{(1)}T_\eta{}^\eta$, $\delta^{(1)}G_i{}^\eta = 8\pi G\delta^{(1)}T_i{}^\eta$, y $\delta^{(1)}G_i{}^j = 8\pi G\delta^{(1)}T_i{}^j$ (o lo que es lo mismo (3.73), (3.74), y (3.75) encontradas en la sección 3.2.1), serán respectivamente;

$$\nabla^2\Psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = 4\pi G(-\phi'^2_0\Phi + \phi'_0\delta\phi' + a^2\delta\phi\partial_\phi V), \quad (3.140)$$

$$\partial_i(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = 4\pi G\phi'_0\partial_i(\delta\phi), \quad (3.141)$$

$$\begin{aligned} [\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi)]\delta_i{}^j - \frac{1}{2}\partial_i\partial^j(\Phi - \Psi) \\ = 4\pi G(-\phi'^2_0\Phi + \phi'_0\delta\phi' - a^2\delta\phi\partial_\phi V)\delta_i{}^j. \end{aligned} \quad (3.142)$$

La ecuación (3.142) para $i \neq j$, se reduce a $\partial_i\partial^j(\Phi - \Psi) = 0$, resolviendo dicha ecuación bajo las condiciones de borde apropiadas, lo cual es más fácil de observar haciendo una transformada de Fourier, se obtiene que $\Phi = \Psi$. Mientras que trabajando con (3.140) y (3.142), encontramos la ecuación de movimiento para Ψ ,

¹⁵Estas son las mismas ecuaciones encontradas en (3.12), y (3.11) solo que ahora estarán escritas en tiempo conforme. En particular (3.12) corresponderá a (3.139), mientras que (3.11) a (3.137).

$$\Psi'' - \nabla^2 \Psi + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\phi_0''}{\phi_0'}\right)\Psi' + 2\left(\mathcal{H}' - \frac{\mathcal{H}\phi_0''}{\phi_0'}\right)\Psi = 0 \quad (3.143)$$

la cual es conocida como la ecuación maestra para la perturbación de la métrica.

Por otro lado, usando la ecuación de movimiento para el campo escalar homogéneo (3.13), pero escrita en función del tiempo conforme, las ecuaciones de Einstein (3.140) y (3.141) pueden ser escritas respectivamente como;

$$\nabla^2 \Psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi + \Psi') = 4\pi G (\phi_0')^2 \left[\left(\frac{\delta\phi}{\phi_0'}\right)' - \Psi - 2\mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\phi_0'} \right], \quad (3.144)$$

$$\mathcal{H}\Psi + \Psi' = 4\pi G \phi_0' \delta\phi, \quad (3.145)$$

Combinando (3.145) y (3.139), se encuentra que;

$$\left(a^2 \frac{\Psi}{\mathcal{H}}\right)' = 4\pi G a^2 \frac{(\phi_0')^2}{\mathcal{H}^2} \left(\mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\phi_0'} + \Psi\right). \quad (3.146)$$

Mientras que las expresiones (3.144), junto con (3.137), (3.138), (3.139) y (3.145), nos conducen a la ecuación;

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \frac{(\phi_0')^2}{\mathcal{H}} \left(\mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\phi_0'} + \Psi\right)'. \quad (3.147)$$

resultará útil escribir (3.146) y (3.147), en función de la variable w definida como¹⁶;

$$w = \frac{a\Psi}{4\pi G \phi_0'} \quad (3.148)$$

y de una nueva variable v denominada como la variable de Mukhanov-Sasaki;

$$v \equiv a(\eta) \left(\delta\phi + \frac{\phi_0'}{\mathcal{H}}\Psi\right), \quad (3.149)$$

por lo que (3.146) y (3.147), podrán ser escritas, respectivamente como;

$$\nabla^2 w = z \left(\frac{v}{z}\right)', \quad v = \theta \left(\frac{w}{\theta}\right)', \quad (3.150)$$

con $z = \theta^{-1} = a(\eta)\phi_0'\mathcal{H}^{-1}$.

A orden lineal en la perturbación, las ecuaciones de evolución para las variables $\Phi(\eta, \vec{x}) = A(\eta, \vec{x})$ y $\Psi(\eta, \vec{x}) = \psi(\eta, \vec{x})$ definidas en la norma longitudinal, son idénticas a las que se encuentran para las variables $\Phi_{(gi)}$ y $\Psi_{(gi)}$, puesto que evaluando las ecuaciones (3.39) y (3.40) para la norma longitudinal, se encuentra que; $\Phi = \Phi_{(gi)}$ y $\Psi = \Psi_{(gi)}$. Por otro lado, de la ecuación (3.63) una vez fijada la norma longitudinal, se concluye que; $\delta u_i^{(gi)} = \delta u_i$, mientras que a partir de la ecuación (3.44) podemos construir la cantidad $\delta\phi_{(gi)}$, como;

$$\delta\phi_{(gi)} \equiv \delta\phi + (B - E')\phi_0' \quad (3.151)$$

la cual en la norma longitudinal se reduce a; $\delta\phi_{(gi)} = \delta\phi$. Por último, de (3.148) y (3.149), podemos concluir que las variables w y v también son invariantes de norma.

¹⁶En algunos otros trabajos esta variable se denomina u , aquí la denominaremos w para evitar confusión con la cuadri-velocidad del fluido $u = u^\alpha \partial_\alpha$.

3.2.5. Origen de las Inhomogeneidades Primordiales según el marco Inflacionario

El modelo inflacionario propone un mecanismo para el origen de las fluctuaciones primordiales: Se argumenta que las perturbaciones primordiales del campo ϕ son generadas por las fluctuaciones cuánticas del campo dentro del radio de Hubble siendo así un “mecanismo causal” durante el periodo inflacionario.

Matemáticamente se modela estas fluctuaciones cuánticas promoviendo a la perturbación $\delta\phi$ a un campo cuántico $\delta\hat{\phi}$. El proceso de cuantización parte de la acción del sistema Einstein-inflatón;

$$\mathcal{S}[\phi, g_{ab}] = \mathcal{S}_{grav} + \mathcal{S}_{Mat} = \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla_b \phi g^{ab} - V[\phi] \right) \quad (3.152)$$

Como buscamos las ecuaciones de movimiento para las variables que representan el primer orden en la perturbación de la métrica y el campo escalar, necesitamos la acción a segundo orden en las perturbaciones de la métrica (Ψ, Φ) y del campo $\delta\phi$;

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} \mathcal{S}_{Mat} = & \int \left[\frac{a^2}{2} \left((\delta\phi')^2 - 4\delta\phi' \Phi \phi'_0 + 4\Phi^2 (\phi'_0)^2 - \delta\phi_{,i} \delta\phi_{,i} + 2\delta\phi' \Phi \phi'_0 + \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} (\phi'_0)^2 \Phi^2 - 3(\phi'_0)^2 \Psi^2 - 6\delta\phi' \Psi \phi'_0 - 3(\phi'_0)^2 \Psi \Phi + \frac{3}{2} (\phi'_0)^2 \Psi^2 \left. \right) + \\ & - \frac{a^4}{2} \delta\phi^2 V_{\phi_0\phi_0} - a^4 \delta\phi \Phi V + \frac{a^4}{2} \Phi^2 V + 3a^4 \delta\phi \Psi V_{\phi_0} + 3a^4 \Phi \Psi V + \\ & \left. - \frac{3a^4}{2} \Psi^2 V \right] d^4x. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Aplicando las constricciones $\Phi = \Psi$, (3.144) y (3.145), se puede eliminar dos de las tres variables Φ , Ψ y $\delta\phi$, en la acción a segundo orden en la perturbación $\delta^{(2)} \mathcal{S}_{grav+Mat}$. Ahora si usamos una vez más las ecuaciones de la métrica de fondo, al final obtendremos la acción para un sólo grado de libertad, la llamada variable de Mukhanov-Sasaki v definida en (3.149), de esta forma $\delta^{(2)} \mathcal{S}_{grav+Mat}$ podrá ser escrita como;

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} \mathcal{S}_{grav+Mat} &= \delta^{(2)} \mathcal{S}_v \equiv \int d\eta d^3x \delta^{(2)} \mathcal{L}_v \\ &= \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left(v'^2 + v \nabla^2 v + \frac{z''}{z} v^2 \right), \end{aligned} \quad (3.154)$$

en donde la variable z es definida como $z = \frac{a\phi'_0}{\mathcal{H}}$. Por otra parte, usando la definición del parámetro de rodadura lenta ϵ_1 dada por la ecuación (3.17), esto es; $\epsilon_1 = \frac{4\pi G}{H^2} (\dot{\phi}_0)^2 = \frac{4\pi G}{\mathcal{H}^2} (\phi'_0)^2$, se encuentra que $z(\eta) \propto \sqrt{\epsilon_1(\eta)} a(\eta)$. Ahora, realizando un desarrollo en series de Taylor de la función $\epsilon_1(\eta)$ entorno al tiempo conforme η_* para el cual la escala pivote¹⁷ $k_{piv} = k_*$ cruza el radio de Hubble esto es; $k_* = \mathcal{H}(\eta_*)$,

¹⁷Esta escala se introdujo en (3.127)

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &\approx \epsilon_{1*} + \frac{d\epsilon_1}{d\mathcal{N}} \Big|_{\mathcal{N}_*} (\mathcal{N} - \mathcal{N}_*) \approx \epsilon_{1*} + \epsilon_{1*}\epsilon_{2*} \ln\left(\frac{a}{a_{2*}}\right) \\
&\approx \epsilon_{1*} - \epsilon_{1*}\epsilon_{2*}(1 + \epsilon_{1*}) \ln\left(\frac{\eta}{\eta_*}\right) \approx \epsilon_{1*} \left[1 - \epsilon_{2*} \ln\left(\frac{\eta}{\eta_*}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Usando la anterior ecuación junto con $a(\eta) \approx -\frac{1}{H_*\eta} \left[1 + \epsilon_{1*} - \epsilon_{1*} \ln\left(\frac{\eta}{\eta_*}\right)\right]$, se calcula $\frac{z''}{z}$ hasta primer orden en los parámetros ϵ_{1*} y ϵ_{2*} , encontrando;

$$\frac{z''}{z} = \frac{(\sqrt{\epsilon_1}a)''}{\sqrt{\epsilon_1}a} \approx \frac{2}{\eta^2} \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon_{1*} + \frac{3}{4}\epsilon_{2*}\right). \tag{3.156}$$

La cantidad $\delta^{(2)}\mathcal{L}_v$ que aparece en la primera ecuación de (3.154), corresponde al segundo orden de la perturbación de la densidad lagrangeana de la teoría, esto es;

$$\delta^{(2)}\mathcal{L}_v = \left(v'^2 + v\nabla^2v + \frac{z''}{z}v^2\right). \tag{3.157}$$

Por otro lado, la variación de la acción (3.154) con respecto a la variable v , conduce a la ecuación de movimiento para v ;

$$v'' - \nabla^2v - \frac{z''}{z}v = 0, \tag{3.158}$$

la cual tiene la forma de la ecuación de un oscilador armónico con masa variable $m_v = z''/z$.

La cuantización de la teoría definida por la acción (3.154) prosigue de manera estándar, primero calculamos el momento canónico conjugado π de la variable v de la teoría, por definición $\pi = \frac{\partial}{\partial v'}\delta^{(2)}\mathcal{L}_v$, por lo cual evaluando para la densidad lagrangeana (3.157) se encuentra que el momento conjugado π asociado a la variable v es $\pi = v'$. Ahora contamos con los elementos necesarios para construir la densidad hamiltoniana definida como; $\delta^{(2)}\mathcal{H}_v = v'\pi - \delta^{(2)}\mathcal{L}$. El paso siguiente en el proceso de cuantización es promover a las variables v y π a los campos cuánticos \hat{v} y $\hat{\pi}$. Habiendo cuantizado v y π , la cuantización de $\delta^{(2)}\mathcal{H}_v$ se da de manera automática; $\delta^{(2)}\mathcal{H}_v \rightarrow \delta^{(2)}\hat{\mathcal{H}}_v$, esto significa que la densidad hamiltoniana también a sido promovida a un operador cuántico. El siguiente paso en la cuantización de v y π es imponer que a tiempos iguales los campos cuánticos \hat{v} y $\hat{\pi}$ satisfagan las relaciones de conmutación canónicas;

$$[\hat{v}(\eta, \vec{x}), \hat{v}(\eta, \vec{y})] = [\hat{\pi}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{v}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.159}$$

Por otro lado, en el marco de Heisenberg, las ecuaciones de movimiento son obtenidas de;

$$\hat{v}' = i[\hat{v}, \delta^{(2)}\hat{\mathcal{H}}_v], \quad \hat{\pi}' = i[\hat{\pi}, \delta^{(2)}\hat{\mathcal{H}}_v]. \tag{3.160}$$

Como es usual, expandiremos los campos cuánticos en sus respectivos modos de Fourier,

$$\hat{v}(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [v_k(\eta)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{k}} + v_k^*(\eta)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger], \tag{3.161}$$

$$\hat{\pi}(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} [v'_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{a}_{\vec{k}} + v'^*_k(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger], \quad (3.162)$$

donde el superíndice * denota el complejo conjugado de la función modo $v_k(\eta)$, mientras que \hat{a}_k^\dagger y \hat{a}_k son los operadores de creación y aniquilación respectivamente, los cuales satisfacen las relaciones de conmutación estándar

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta(k - k'). \quad (3.163)$$

Para que las relaciones de conmutación (3.159) y (3.163) sean consistentes entre si, se requiere que las funciones modo v_k y v'_k , satisfagan la relación de normalización;

$$v_k(\eta) v'^*_k(\eta) - v'^*_k(\eta) v_k(\eta) = i. \quad (3.164)$$

Por otro lado, sustituyendo (3.161) y (3.162) en (3.160), encontramos que las funciones complejas $v_k(\eta)$ satisfacen las ecuaciones:

$$v''_k + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_k = 0, \quad (3.165)$$

Las soluciones de la ecuación anterior presentan el siguiente comportamiento asintótico; Para los modos k tales que cuando la longitud de onda propia $\lambda_{fis}(t) = a(t)\lambda^c = a(t)\frac{2\pi}{k}$, sea mucho menor que el radio de Hubble $d_H(t) = 1/H(t) = a(\eta)/\mathcal{H}(\eta)$, esto significa: $k \gg \mathcal{H}(\eta)$, la función $v_k(\eta)$ se aproxima¹⁸ a las ondas planas de frecuencia positiva ó negativa del espacio-tiempo de Minkowski, esto es;

$$\lim_{k \gg \mathcal{H}(\eta)} v_k(\eta) \propto e^{\pm ik\eta}. \quad (3.167)$$

Mientras que para el caso de modos k tales que cuando la longitud de onda propia asociada sea mucho mayor que el radio de Hubble $k \ll \mathcal{H}(\eta)$, se obtiene¹⁹

$$\lim_{k \ll \mathcal{H}(\eta)} v_k(\eta) \propto z. \quad (3.169)$$

A modo de resumen se puede decir que las soluciones de (3.165), presentan el siguiente comportamiento asintótico;

$$\begin{cases} v_k(\eta) \propto \frac{e^{\pm ik\eta}}{\sqrt{2k}}, & \text{si } k \gg \mathcal{H}, \\ v_k(\eta) \propto z, & \text{si } k \ll \mathcal{H}. \end{cases}$$

¹⁸Dado que durante inflación rodadura lenta el desarrollo de ϵ_1 en series de potencias, presentado en (3.155), puede ser truncado hasta primer orden en ϵ_{1*} , por lo cual $z''/z \approx a''/a$, y además $a(\eta) \approx -1/(H_I \eta)$ entonces $\mathcal{H} = a'/a \approx -1/\eta$, mientras que $a''/a \approx 1/\eta^2$, así que $a''/a \approx \mathcal{H}^2 \approx z''/z$. Entonces $k \gg \mathcal{H}(\eta)$ implica $k^2 \gg z''/z$, por lo cual la ecuación (3.165) tomara la siguiente forma asintótica;

$$v''_k + k^2 v_k \approx 0, \quad (3.166)$$

y las soluciones particulares de esta ecuación tienen la forma; $v_k(\eta) \propto e^{\pm ik\eta}$.

¹⁹Para este caso, se puede despreciar el término que va como k^2 en (3.165), encontrando que la ecuación de movimiento para v_k tomará la siguiente forma asintótica;

$$\frac{v''_k}{v_k} \approx \frac{z''}{z}, \quad (3.168)$$

y luego de integrar la anterior ecuación se encuentra que $v_k(\eta) \propto z$.

Continuando con la cuantización, debemos determinar el estado vacío $|0\rangle$, el cual se define como aquel estado tal que para todo modo k se cumpla que; $\hat{a}_k|0\rangle = 0$. Dicha elección para nuestro caso en estudio, y al igual que en cualquier espacio-tiempo no estacionario, no es única puesto que cualquier solución particular $v_k(\eta)$ de la ecuación (3.165) corresponde a una elección del estado vacío $|0\rangle$. Entonces, por el teorema de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales y homogéneas, como lo es la ecuación (3.165), se concluye que como último paso de la cuantización de \hat{v} se deben de fijar las constantes de normalización de los modos $v_k(\eta)$ (esto es para un η_i dado, elegir los valores; $v_k(\eta_i)$, y $v'_k(\eta_i)$, los cuales además de satisfacer la condición (3.164), corresponderán las condiciones iniciales de la ecuación (3.165) y así se determina una única solución particular de la ecuación de movimiento para las funciones modos). La siguiente condición inicial en η_i , donde η_i representa el inicio de inflación, corresponderá a el límite $k\eta_i \rightarrow -\infty$, entonces

$$\lim_{\eta_i \rightarrow \infty} v_k(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta_i}, \quad \lim_{\eta_i \rightarrow \infty} v'_k(\eta_i) = -i\sqrt{\frac{k}{2}} e^{-ik\eta_i}, \quad (3.170)$$

esto es; se comportan como las soluciones de frecuencia positiva estándar en el espacio-tiempo de Minkowski.

La solución queremos expresarla en función de variables que nos permitan discriminar entre diferentes modelos inflacionarios, estos son los parámetros de rodadura lenta²⁰ ϵ_{1*} , y ϵ_{2*} , introducidos en (3.155).

Estos parámetros, se relacionan con la cantidad z''/z a través de la aproximación (3.156), la cual también puede ser escrita como;

$$\frac{z''}{z} \approx \frac{1}{\eta^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right), \quad \text{con } \nu \approx \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{3}\epsilon_{1*} + \frac{2}{3}\epsilon_{2*}} \approx \frac{3}{2} + \epsilon_{1*} + \frac{\epsilon_{2*}}{2}. \quad (3.171)$$

Expresada de esta manera, podemos escribir la solución particular de (3.165), que satisface las constantes de normalización, como;

$$v_k(\eta) \approx \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} e^{i[\nu+(1/2)](\pi/2)} H_\nu^{(1)}(-k\eta), \quad (3.172)$$

$H_\nu^{(1)}$ corresponde a las funciones de Hankel de primer tipo y de orden ν .

El estado de vacío elegido a través de (3.172) constituye nuestra elección del vacío de la teoría, y es conocido como vacío de Bunch-Davies (B&D). Como vimos, este vacío requiere que la solución $v_k(\eta)$ se comporte como el vacío de Minkowski para escalas k más pequeñas que el radio de Hubble durante inflación $k \gg \mathcal{H}$.

Cabe señalar que para el problema en estudio, cualquier selección de un estado vacío será un estado del campo espacialmente homogéneo e isotrópico, lo cual se puede comprobar aplicando directamente los operadores de rotación o traslación (asociados con las hipersuperficies $\eta = \text{constante}$, del espacio-tiempo de fondo) al estado vacío.

²⁰Los parámetros $\epsilon_1 = \frac{4\pi G}{H^2} (\dot{\phi}_0)^2$ y $\epsilon_2 = -\frac{2}{H} \frac{\ddot{\phi}_0}{\dot{\phi}_0}$ pueden ser escritos en función del tiempo conforme η , dando como resultado; $\epsilon_1 = \frac{4\pi G}{\mathcal{H}^2} (\phi'_0)^2$, y $\frac{\epsilon_2}{2} = 1 - \frac{\phi''_0}{\mathcal{H}\phi'_0}$

De (3.148), (3.149) y (3.150) notamos que la cuantización de la variable v , induce la cuantización de las perturbaciones del campo escalar $\delta\phi$ y de la métrica Ψ .

Ahora para establecer contacto con las observaciones, surge la siguiente pregunta; ¿Cómo obtenemos un *campo c-número* de Ψ de un campo cuántico escalar $\hat{\Psi}$, para a través de (3.111) utilizarlo en (3.114) consiguiendo el espectro de potencias del potencial gravitacional (o lo que es lo mismo cómo extraemos v de \hat{v})? La respuesta dada por el modelo cosmológico estándar inflacionario consiste en calcular la función de correlación de dos puntos e interpretarla como el espectro de potencias del potencial gravitacional. En otras palabras, el análisis que sigue está basado en la identificación;

$$\langle 0 | \hat{\Psi}(\eta, \vec{x}) \hat{\Psi}(\eta, \vec{y}) | 0 \rangle = \overline{\Psi(\eta, \vec{x}) \Psi(\eta, \vec{y})}. \quad (3.173)$$

En el modelo cosmológico estándar inflacionario, el anterior paso se justifica diciendo que al salir del radio de Hubble, las amplitudes de las perturbaciones $\frac{v_k(\eta)}{z(\eta)}$ se “congelan”, esto es;

$$\frac{v_k(\eta)}{z(\eta)} \approx \text{constante}, \text{ para } k \ll \mathcal{H}(\eta), \quad (3.174)$$

y se **argumenta** que esto marca su **transición a lo clásico** (ver referencia [41] sección: **III. QUANTUM-TO-CLASSICAL TRANSITION: THE PRAGMATIC VIEW**, y para una discusión mucho más amplia consultar la referencia [49] sección: **VI. A CONCRETE EXAMPLE**).

Completemos aquí los pasos, según el modelo cosmológico estándar inflacionario, para la obtención del espectro de potencias cuántico usando para esto la cantidad $\xi = v/z$. Entonces debido a la cuantización de v , la cuantización de ξ fue realizada automáticamente. Ahora, para la variable ξ las ecuaciones análogas a (3.114) y (3.173), serán respectivamente;

$$\begin{aligned} \overline{\xi_{\vec{k}}(\eta_{ls}) \xi_{\vec{k}'}^*(\eta_{ls})} &= \mathcal{P}_\xi(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle 0 | \hat{\xi}(\eta, \vec{x}) \hat{\xi}(\eta, \vec{y}) | 0 \rangle &= \overline{\xi(\eta, \vec{x}) \xi(\eta, \vec{y})}, \end{aligned} \quad (3.175)$$

por lo cual, en el tratamiento dado por la cosmología estándar inflacionaria el espectro de potencias $\mathcal{P}_\xi(k)$ está definido mediante el valor de expectación de $\hat{\xi}(\eta, \vec{x}) \hat{\xi}(\eta, \vec{y})$ en el estado $|0\rangle$, esto es;

$$\langle 0 | \hat{\xi}(\eta, \vec{x}) \hat{\xi}(\eta, \vec{y}) | 0 \rangle = \int \frac{dk}{k} 2\pi |\xi_k(\eta)|^2 k^3 \frac{\sin kr}{kr}, \quad (3.176)$$

en donde $r = |\vec{x} - \vec{y}|$. Tomando en cuenta la definición del espectro de potencias para un campo gaussiano, esto es;

$$\overline{\xi(\eta, \vec{x}) \xi(\eta, \vec{y})} = \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\xi(k, \eta) k^3 \frac{\sin kr}{kr}, \quad (3.177)$$

y valiéndonos de la identificación dada por la segunda ecuación (3.175), para lograr comparar (3.176) con (3.177), encontramos;

$$\mathcal{P}_\xi(k, \eta) = 2\pi |\xi_k(\eta)|^2 = \frac{2\pi}{z^2} |v_k(\eta)|^2. \quad (3.178)$$

Ahora evaluaremos la anterior ecuación en el tiempo conforme correspondiente al final de inflación y para los modos k de interés físico encontrados en (3.121). Para estos modos k sus correspondientes longitudes de onda propia $\lambda(\eta) = a(\eta)\frac{2\pi}{k}$ comparadas con el radio de Hubble $R_H = a(\eta)/\mathcal{H}(\eta)$ son tales que al final de inflación (usaremos η_r para denotar el tiempo conforme al final de inflación) se cumple que $\lambda(\eta_r) \gg R_H(\eta_r)$. Realizando las sustituciones para λ y R_H sobre la anterior desigualdad, se encuentra que los modos k de interés físico satisfacen; $k \ll \mathcal{H}(\eta_r) \Rightarrow k\eta_r \rightarrow -0$. Por tal razón para estudiar el comportamiento de (3.178) usaremos la forma asintótica de la función $H_\nu^{(1)}(x)$ para argumentos pequeños $|x| \ll 1$, esto es $H_\nu^{(1)}(x) \approx \frac{-i}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{-x}{2}\right)^\nu$. Entonces, para $\eta \approx \eta_r$ junto con los modos k en cuestión la cantidad $|v_k(\eta)|^2$, encontrada en la ecuación (3.172), podrá ser aproximada como;

$$|v_k(\eta)|^2 = \frac{-\pi\eta}{4} |H_\nu^{(1)}(-k\eta)|^2 \approx \frac{-\eta\Gamma^2(\nu)}{4\pi} \left(\frac{-k\eta}{2}\right)^{-2\nu}, \quad (3.179)$$

entonces el espectro de potencias para ξ , será;

$$\mathcal{P}_\xi(k, \eta) \approx \frac{-\eta\Gamma^2(\nu)}{2} \left(\frac{-k\eta}{2}\right)^{-2\nu} \left(\frac{\mathcal{H}(\eta)}{a(\eta)\phi_0'}\right)^2, \quad (3.180)$$

usando sobre la anterior ecuación, la aproximación para ν encontrada en (3.171), esto es; $\nu \approx \frac{3}{2} + \epsilon_{1*} + \frac{\epsilon_{2*}}{2}$, entonces durante inflación rodadura lenta $0 < \epsilon_1 \ll 1$ y $|\epsilon_2| \ll 1$, por lo que a orden más bajo en los parámetros: ϵ_1 y ϵ_2 , se obtiene $\nu \approx 3/2$. Además sustituiremos $\frac{4\pi G}{\epsilon_1} = \left(\frac{\mathcal{H}}{\phi_0'}\right)^2$ ver ecuación (3.17), junto con $a(\eta) \approx -\frac{1}{H_I\eta}$ (factor de escala durante inflación rodadura lenta) y usaremos el valor de la constante de Hubble durante inflación $H_I \approx \sqrt{8\pi G V(\phi_0)}/3$, ver ecuación (3.15). Luego de realizar sobre (3.180) las sustituciones previamente mencionadas se encuentra que $\mathcal{P}_\xi(k, \eta)$ se aproxima a la siguiente expresión;

$$\mathcal{P}_\xi(k, \eta) \approx \frac{\Gamma^2(\frac{3}{2})}{k^3} \frac{16\pi G H_I^2}{\epsilon_1} \approx \frac{32\pi^3 G^2 V(\phi_0)}{3\epsilon_1 k^3}. \quad (3.181)$$

Por otro lado, partiendo de la ecuación de evolución para la fluctuación del campo $\delta\phi(\eta, \vec{x})$ obtenida de la acción (3.3), y utilizando la aproximación de rodadura lenta (slow-roll) para despreciar términos proporcionales a $\partial_{\phi_0\phi_0}^2 V[\phi]$, se encuentra que durante inflación $\delta\phi(\eta, \vec{x})$ satisface la ecuación;

$$\delta\phi'' - \nabla^2\delta\phi + 2\mathcal{H}\delta\phi' = 0, \quad (3.182)$$

ahora escribiendo $\delta\phi(\eta, \vec{x})$ como un desarrollo en modos de fourier $\delta\phi(\eta, \vec{x}) = \Sigma_k \delta\phi_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, la ecuación anterior en términos de $\delta\phi_k$ tendrá la siguiente forma;

$$(a\delta\phi_k)'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)(a\delta\phi_k) = 0. \quad (3.183)$$

Ahora, dado que durante inflación rodadura lenta $a(\eta) \approx -1/(H_I\eta)$, entonces por calculo directo vemos que durante este régimen $\frac{a''}{a} \approx 2\mathcal{H}^2$, ahora los modos k que en algún momento de inflación son tales que $k \ll \mathcal{H}(\eta)$, (como lo sería el caso de los modos k de interés físico durante el final de inflación $\eta \approx \eta_r$), para estos mismos modos k y valores de tiempo conforme también se cumplirá que; $k^2 \ll \frac{a''(\eta)}{a(\eta)}$, razón por la que la ecuación (3.183), para los valores considerados de k y η , tomará la siguiente forma asintótica;

$$(a\delta\phi_k)'' - \frac{a''}{a}(a\delta\phi_k) \approx 0 \Rightarrow \frac{(a\delta\phi_k)''}{a\delta\phi_k} \approx \frac{a''}{a}, \quad (3.184)$$

de donde se concluye que $a(\eta)\delta\phi_k(\eta) \approx a(\eta)$. Entonces para los modos k tales que en algún momento del periodo inflacionario satisfacen $k \ll \mathcal{H}(\eta)$, se encuentra que la amplitud de $\delta\phi_k(\eta)$, en este mismo periodo de tiempo, será aproximadamente constante. Por otro lado, para estos valores de k y η según el resultado (3.174) se encuentra $\frac{v_k(\eta)}{z(\eta)} \approx const$, entonces combinando los resultados: $\left(\delta\phi_k(\eta) \approx const, \text{ y } \frac{v_k(\eta)}{z(\eta)} \approx const, \text{ siempre que } k \ll \mathcal{H}(\eta) \text{ durante inflación}\right)$, y teniendo en cuenta la definición de v dada por (3.149) junto con el hecho de que durante el periodo inflacionario; $\frac{1}{H_I} \frac{d\phi_0}{dt} = \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\phi_0}{d\eta} \approx const$, conclusión obtenida de (3.14), se encuentra que los modos k tales que en algún momento de inflación satisfacen $k \ll \mathcal{H}(\eta)$ el potencial $\Psi_k(\eta)$ también será aproximadamente constante.

Por otro lado, las variables $(\xi, \Psi = \Phi)$, pueden ser relacionadas a través de (3.77). No obstante, dado que cerca del final inflación rodadura lenta ($\eta \approx \eta_r$) los modos de interés satisfacen $k \ll \mathcal{H}(\eta)$, y en el párrafo anterior hemos encontrado que para este caso $\Psi_k(\eta) \approx const$. Entonces, para estos modos k y en el periodo de tiempo en cuestión, la derivada con respecto al tiempo conforme del potencial Newtoniano será: $\Psi'_k \approx 0$, así que (3.77) podrá ser escrita de manera aproximada como;

$$\xi_{inf} \approx \frac{2}{3} \frac{\Phi_{inf}}{(\omega_{inf} + 1)} + \Phi_{inf}, \quad (3.185)$$

Estos modos k que en algún momento de inflación su longitud de onda propia es mucho mayor que el radio de Hubble vimos que satisfacen la relación $k \ll \mathcal{H}(\eta)$ la cual, dado que durante inflación se tiene que $\mathcal{H} \approx -\frac{1}{\eta}$ con $\eta \in (-\infty, 0^-)$, se mantendrá durante el resto del periodo inflacionario. Sin embargo, cuando se presente el cambio de era cosmológica (posterior a inflación la era dominante será radiación y después materia), por lo cual un cambio en el factor de escala (el factor de escala tendrá la forma $a(\eta) \propto \eta^{\frac{2}{3\omega+1}}$ con $\omega \in (0, 1)$ siendo $\omega = 1/3$ para dominio de radiación, mientras que $\omega = 0$ para dominio de materia) entonces para las eras posteriores a la inflacionaria se tendrá que $\mathcal{H} = \frac{2}{(3\omega+1)\eta}$, con $\eta > 0$ creciendo monótonamente, de tal forma que eventualmente en alguna de estas eras posteriores a la inflacionaria la desigualdad $k \ll \mathcal{H}(\eta)$ dejará de sostenerse. Cuando ocurra $k = \mathcal{H}(\eta_*)$ se dirá que el modo k , en el tiempo $\eta = \eta_*$, cruzó el radio de Hubble y a partir de ahí, según la dinámica impuesta por $a(\eta) \propto \eta^{\frac{2}{3\omega+1}}$, las longitudes de onda propia correspondientes a los modos k de interés físico serán menores que el radio de Hubble implicando que $k > \mathcal{H}(\eta)$.

A pesar de ello, para los modos k tales que en algún momento de inflación satisfacen que $k \ll \mathcal{H}(\eta)$ y que además llegan a la era de materia con longitudes de onda propia respectivas mayores que el radio de Hubble, implicando que $k \ll \mathcal{H}(\eta)$, entonces para estos modos el comportamiento de ξ_{mat} al igual que para la era inflacionaria, ver ecuación 3.185, se tendrá para la era de dominio de materia, que;

$$\xi_{mat} \approx \frac{2}{3} \frac{\Phi_{mat}}{(\omega_{mat} + 1)} + \Phi_{mat}, \text{ siempre y cuando: } k \ll \mathcal{H}(\eta). \quad (3.186)$$

Ahora podemos hacer uso del resultado encontrado en (3.82), junto con el hecho de que ($\omega_{mat} = 0$), de esta forma las variables ξ_{inf} y Φ_{mat} pueden ser relacionadas a través de;

$$\xi_{inf} \approx \frac{2}{3} \frac{\Phi_{mat}}{(\omega_{mat} + 1)} + \Phi_{mat} \approx \frac{5}{3} \Phi_{mat} \Rightarrow \Phi_{mat} \approx \frac{3}{5} \xi_{inf}. \quad (3.187)$$

Finalmente, con ayuda de la anterior ecuación el espectro de potencias encontrado al final de inflación (3.181), únicamente para los modos k que aun en algún momento de la era dominada por materia satisfacen $k \ll \mathcal{H}(\eta)$, puede ser propagado al tiempo en que se presento la superficie de última dispersión (la cual se dio durante el dominio de materia), encontrando;

$$\mathcal{P}_{\Phi_{mat}}(\eta_{ls}, k) \approx \frac{9}{25} \mathcal{P}_{\xi_{inf}}(\eta_r, k), \text{ para; } k \ll \mathcal{H}(\eta), \text{ con } \eta \in (\eta_r, \eta_{ls}). \quad (3.188)$$

Entonces sustituyendo $\mathcal{P}_{\xi_{inf}}(\eta_r, k)$ de (3.181) en la anterior ecuación, se encuentra $\mathcal{P}_{\Phi}(k, \eta_{ls})$ aproximado, esto es;

$$\mathcal{P}_{\Phi}(k, \eta_{ls}) \approx \frac{96\pi^3 G^2 V(\phi_0)}{25\epsilon_1 k^3}, \quad (3.189)$$

esto es: **se obtiene un espectro de potencias aproximadamente invariante de escala**, por lo cual el espectro encontrado es casi exactamente compatible con el espectro plano de **Harrison-Zel'dovich**.

Capítulo 4

Tratamientos Anteriores: “Hipótesis de Colapso Auto-inducido”

La explicación previa dada para el origen de las perturbaciones cosmológicas depende de un paso confuso: **no hay una justificación a priori para la identificación de las correlaciones cuánticas de dos puntos con el espectro de potencias clásico**, ecuación (3.173). Analizando más detalladamente tropezamos con un problema conceptualmente aún más profundo, este problema se trata de que según el modelo cosmológico inflacionario el universo, como resultado de la dinámica inflacionaria, fue llevado a un estado originalmente simétrico (homogéneo e isotrópico), junto con un campo escalar (el inflatón) cuyo estado vacío también es homogéneo e isotrópico, y finalmente llegamos a una situación no simétrica (inhomogéneo y anisotrópico) que concuerda satisfactoriamente con los datos observacionales.

Este comportamiento no encuentra su justificación en la mecánica cuántica estándar ya que la dinámica del sistema preserva las simetrías iniciales, y por lo tanto tal comportamiento es englobado en el **problema de la medición de la mecánica cuántica**. Estos problemas han sido señalados por algunos miembros de la comunidad cosmológica ([50], [51], [52], [53]) y se han planteado algunas soluciones basadas en las diferentes propuestas para la solución del problema de la medición en mecánica cuántica. La principal propuesta (si tomamos como indicador su popularidad en la literatura científica) es la basada en **Decoherencia** ([41], [42], [43], [44]), aunque hay que mencionar que existen otras propuestas con menos adherentes, pero aún significativas como las basadas en **Mundos Múltiples**. Estos intentos de solución comparten un mismo problema: intentan justificar el primer cuestionamiento (**igualar correlaciones de dos puntos cuánticas con espectros de potencias clásicos**) dejando intacto el segundo (**la evolución de mecánica cuántica es unitaria y en el caso inflacionario, esta evolución preserva las simetrías del estado inicial**).

Nos referiremos a ambos problemas como el **problema de la transición cuántica a clásica de las fluctuaciones cuánticas durante la inflación**, y a continuación será presentada una manera de eludirlo.

4.1. Implementación de la hipótesis de colapso auto-inducido en el modelo cosmológico estándar inflacionario

Originalmente en el artículo [3], se introdujo la hipótesis del colapso auto-inducido aplicada al universo inflacionario, como una forma de solucionar el problema de la transición cuántica a clásica de las fluctuaciones cuánticas durante la inflación, y ha dado lugar a resultados concretos en ([37], [38], [40], [45]). También existen trabajos relacionados con esta propuesta que discuten aspectos más específicos del esquema del colapso; ([47], [45], [48]). A continuación presentaremos el funcionamiento básico de dicha propuesta.

En este tratamiento a diferencia del tratamiento estándar en el cual se cuantiza la variable de Mukhanov-Sasaki (3.149), las perturbaciones a primer orden de la materia y la métrica vendrán relacionadas a través de las **ecuaciones semiclásicas de Enisten** $\delta^{(1)}G_{ab} = 8\pi G\langle\delta^{(1)}T_{ab}\rangle$. Lo anterior significa que solo trataremos de manera cuántica a las perturbaciones de la materia mientras que las perturbaciones de la métrica serán consideradas como campos clásicos. La otra diferencia entre estos dos tratamientos será precisamente que en el tratamiento presentado en [3] se le incorpora a la cosmología estándar inflacionaria la **hipótesis de colapso auto-inducido**, la cual plantea que el estado cuántico inicial del universo $|0\rangle_{sim}$, el cual es H&I, sufre un colapso similar al colapso que experimenta el estado cuántico de un sistema cuántico cuando sobre este se realiza una medición $|0\rangle_{sim} \rightarrow |\Theta\rangle_{antsim}$.

Continuando con la descripción, en el artículo [3] se hacen las siguientes suposiciones sobre el colapso:

*(a) Los modos k son independientes y además (b) se requiere que el estado inicial del campo no esté enredado (entangled) respecto a esta descomposición, i.e., el estado de vacío $|0\rangle_{sim}$ se puede escribir como el producto directo de estados para los operadores de modo $|0\rangle_{sim} = |0_{k_0}\rangle \otimes |0_{k_1}\rangle \otimes |0_{k_2}\rangle \otimes |0_{k_3}\rangle, \dots \otimes |0_{k_n}\rangle$. De esta manera, el colapso actúa a nivel del modo k y debido a las suposiciones tiene sentido hablar de un colapso individual por modo, por lo que, hipótesis del colapso se debe de leer como **hipótesis del colapso por modo**; $|0_{k_m}\rangle \rightarrow |\Theta_{k_m}\rangle$.*

A orden cero en la perturbación el tratamiento sigue siendo idéntico al dado por la cosmología estándar inflacionaria, esto significa que las ecuaciones que relacionan el factor de escala de la métrica de RW con el campo escalar $\phi_0(\eta)$ continuará siendo las ecuaciones de Friedmann.

Por último en este tratamiento se trabaja en la norma longitudinal para realizar todas las descripciones físicas, a diferencia del tratamiento estándar en el cual se trabajan con cantidades invariantes de norma.

Por otro lado, aun sin pasar al tratamiento de gravedad semi-clásica, las ecuaciones $\delta^{(1)}G_{ij} = 8\pi G\delta^{(1)}T_{ij}$, con $i, j : 1, 2, 3, i \neq j$ conducen a; $\Psi = \Phi$. Mientras que las ecuaciones $\delta^{(1)}G_{\eta i} = 8\pi G\delta^{(1)}T_{\eta i}$, se reducen a;

$$\Psi' + \mathcal{H}\Psi = 4\pi G\phi_0'\delta\phi, \quad (4.1)$$

sustituyendo la anterior ecuación en el lado izquierdo de la ecuación (3.140) y notando que $4\pi G(\phi'_0)^2\Psi = 4\pi G a^2(\rho + P)\Psi = (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Psi$ encontramos;

$$\nabla^2\Psi + \tilde{\epsilon}_1\Psi = 4\pi G(\tilde{\epsilon}_2\delta\phi + \phi'_0\delta\phi'), \quad (4.2)$$

siendo $\tilde{\epsilon}_1 \equiv \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = (\dot{a})^2\epsilon_1$, y $\tilde{\epsilon}_2 \equiv 3\mathcal{H}\phi'_0 + a^2\partial_{\phi_0}V$. Al utilizar la expresión para $\partial_{\phi_0}V$ que viene de (3.13), escrita en tiempo conforme, obtenemos $\tilde{\epsilon}_2 = \mathcal{H}\phi'_0 - \phi''_0 = \frac{\dot{\phi}_0(\dot{a})^2}{2}\epsilon_2$. La aproximación rodadura lenta (slow-roll) está dada por $\epsilon_2 \approx 0$ lo cual implica $\tilde{\epsilon}_2 \approx 0$, entonces la ecuación (4.2) durante el régimen inflacionario tendrá la forma;

$$\nabla^2\Psi + \tilde{\epsilon}_1\Psi = 4\pi G\phi'_0\delta\phi'. \quad (4.3)$$

Por otra parte, la ecuación de evolución para la fluctuación del campo, obtenida de la acción (3.3) y utilizando la aproximación slow-roll para el potencial del campo, será;

$$\delta\phi'' - \nabla^2\delta\phi + 2\mathcal{H}\delta\phi' = 0, \quad (4.4)$$

en donde por la aproximación slow-roll hemos despreciado términos proporcionales a $\partial_{\phi_0\phi_0}^2 V[\phi]$. Es conveniente trabajar con el campo auxiliar $y = a\delta\phi$, entonces la ecuación anterior tomará la forma;

$$y'' - \left(\nabla^2 + \frac{a''}{a}\right)y = 0. \quad (4.5)$$

El siguiente paso involucra la cuantización de las fluctuaciones del campo el cual hemos escrito como $\phi(\eta, \vec{x}) = \phi_0(\eta) + \delta\phi(\eta, \vec{x})$, siendo $\phi_0(\eta)$ el campo de fondo el cual será descrito de una manera clásica, mientras que sus fluctuaciones $\delta\phi(\eta, \vec{x})$ serán cuantizadas. Después de la cuantización el campo reescalado $y = a\delta\phi$ y su momento canónico conjugado $\pi = y' - (ya'/a)$ son promovidos a operadores cuánticos $\hat{y} = a\delta\hat{\phi}$, y $\hat{\pi} = a \cdot (\delta\hat{\phi})'$.

En lo que resta trabajaremos en el marco de Heisenberg, en dicha representación la dependencia temporal estará contenida en los operadores, mientras que los estados serán independientes del tiempo.

Con la finalidad de evitar divergencias en el infrarrojo, consideraremos al sistema dentro una caja de lado L con condiciones de borde periódicas. De esta forma el campo y su momento serán;

$$\hat{y}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{y}_{\vec{k}}(\eta), \quad \hat{\pi}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta), \quad (4.6)$$

en donde los vectores de onda satisfacen; $k_i L = 2\pi n_i$ con $i = 1, 2, 3$ y $\hat{y}_{\vec{k}}(\eta) \equiv y_{\vec{k}}(\eta)\hat{a}_{\vec{k}} + y_{\vec{k}}^*(\eta)\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger$, y $\hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta) \equiv g_{\vec{k}}(\eta)\hat{a}_{\vec{k}} + g_{\vec{k}}^*(\eta)\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger$. Las funciones $y_{\vec{k}}(\eta)$ y $g_{\vec{k}}(\eta)$ se relacionan a través de: $g_{\vec{k}}(\eta) = y'_{\vec{k}} - y_{\vec{k}}a'/a$, siendo $y_{\vec{k}}$ soluciones de la ecuación;

$$y_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)y_{\vec{k}} = 0. \quad (4.7)$$

Ahora denominemos por $y_{\vec{k}}^+(\eta)$ y $y_{\vec{k}}^-(\eta)$ dos soluciones linealmente independientes de la anterior, las cuales vendrán dadas respectivamente por;

$$y_{\vec{k}}^\pm(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 \pm \frac{i}{\eta k}\right) \exp(\pm ik\eta) \Rightarrow g_{\vec{k}}^\pm(\eta) = \pm i\sqrt{\frac{k}{2}} \exp(\pm ik\eta). \quad (4.8)$$

La elección de una función específica $y_k(\eta)$ corresponde a una prescripción particular del vacío físico $|0\rangle$ definido por $\hat{a}_k|0\rangle = 0$, una elección diferente de $y_k(\eta)$ está asociada a una descomposición diferente de modos de creación/anihilación y por lo tanto a un vacío diferente.

Por otro lado, debido a que el **colapso auto-inducido** actúa como una especie de “medición”, pero sin aparatos u observadores que puedan realizar mediciones sobre el sistema, entonces deberá ser descrito en términos de operadores hermíticos. Según (4.6) dado que $\hat{y}(\eta, \vec{x})$ y $\hat{\pi}(\eta, \vec{x})$ son operadores hermiticos, entonces los “operadores de modo” \hat{y}_k y $\hat{\pi}_k$ no lo son, pero se pueden descomponer en partes real e imaginaria las cuales son completamente hermíticas,

$$\hat{y}_k(\eta) = \hat{y}_k^R(\eta) + i\hat{y}_k^I(\eta), \quad \hat{\pi}_k(\eta) = \hat{\pi}_k^R(\eta) + i\hat{\pi}_k^I(\eta), \quad (4.9)$$

resolviendo para $\hat{y}_k^{R,I}$, $\hat{\pi}_k^{R,I}$ encontramos los desarrollos;

$$\hat{y}_k^{R,I}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(y_k(\eta) \hat{a}_k^{R,I} + y_k^*(\eta) \hat{a}_k^{\dagger R,I} \right), \quad \hat{\pi}_k^{R,I}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(g_k(\eta) \hat{a}_k^{R,I} + g_k^*(\eta) \hat{a}_k^{\dagger R,I} \right), \quad (4.10)$$

donde \hat{a}_k^R y \hat{a}_k^I vienen dados respectivamente por; $\hat{a}_k^R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k + \hat{a}_{-k})$ y $\hat{a}_k^I \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_{-k})$. Las relaciones de conmutación no nulas entre los operadores \hat{a}_k^R y \hat{a}_k^I , son;

$$[\hat{a}_k^R, \hat{a}_{k'}^{R\dagger}] = L^3(\delta_{k,k'} + \delta_{k,-k'}), \quad [\hat{a}_k^I, \hat{a}_{k'}^{I\dagger}] = L^3(\delta_{k,k'} - \delta_{k,-k'}). \quad (4.11)$$

Ahora, para cualquier estado $|\Xi\rangle$ en el espacio de Fock de \hat{y} , definiremos las siguientes cantidades: $d_k^{R,I} = \langle \hat{a}_k^{R,I} \rangle_{\Xi}$, de tal forma que los valores de expectación de los operadores campo reescalado y momento conjugado del campo, se escribirán como;

$$\langle \hat{y}_k^{R,I} \rangle_{\Xi} = \sqrt{2} \text{Re}(y_k d_k^{R,I}), \quad \langle \hat{\pi}_k^{R,I} \rangle_{\Xi} = \sqrt{2} \text{Re}(g_k d_k^{R,I}). \quad (4.12)$$

Para el estado vacío $|0\rangle$ se encuentra que $d_k^{R,I} = 0$, de esta forma $\langle \hat{y}_k^{R,I} \rangle_0 = 0$, $\langle \hat{\pi}_k^{R,I} \rangle_0 = 0$. Mientras que sus incertidumbres en el estado vacío son: $(\Delta \hat{y}_k^{R,I})_0^2 = (1/2)|y_k|^2 L^3$, $(\Delta \hat{\pi}_k^{R,I})_0^2 = (1/2)|g_k|^2 L^3$. La descripción o hipótesis del colapso auto-inducido, nos dice que en un cierto tiempo η_k^c la parte del estado $|0_k\rangle$ que corresponde a el modo k salta a un nuevo estado $|\Xi_k\rangle$ que no es homogéneo e isotrópico y en general $\langle \Xi_k | \hat{y}_k^{R,I}(\eta) | \Xi_k \rangle$, $\langle \Xi_k | \hat{\pi}_k^{R,I}(\eta) | \Xi_k \rangle$ serán diferente de cero.

De esta manera, la explicación propuesta por el esquema de colapso, para resolver el problema de la transición cuántica a clásica de las fluctuaciones cuánticas durante la inflación, consiste en: El estado cuántico simétrico, correspondiente al universo temprano, evoluciona unitariamente hasta que un aspecto intrínseco al sistema, provoca el colapso de la función de onda original, dando lugar a un estado inhomogéneo compatible con las observaciones actuales. Lo que resta es especificar ciertos detalles sobre el colapso de los modos, para esto necesitamos especificar el estado post-colapso al cual denotaremos como; $|\Theta\rangle$.

Según nuestra notación será suficiente con especificar $d_k^{R,I} = \langle \Theta | \hat{a}_k^{R,I} | \Theta \rangle$, lo cual equivale a especificar: $\langle \hat{y}_k^{R,I}(\eta_k^c) \rangle_{\Theta}$ y $\langle \hat{\pi}_k^{R,I}(\eta_k^c) \rangle_{\Theta}$ siendo esto último a lo que denominaremos **esquemas de colapso cuántico**. No existe una manera única, ni siquiera un criterio que nos permita discernir un esquema de colapso, de ahí el carácter de hipótesis de colapso. Sin embargo en [3] se estudian dos esquemas de colapso, los llamados esquema colapso independiente y esquema de colapso Newtoniano, posteriormente en [6] es presentado el esquema de colapso

a la Wigner. A continuación describiremos brevemente estos esquemas.

Esquema de colapso independiente. En este esquema de colapso, tanto el valor de expectación del campo $\hat{y}_k^{R,I}$ como el valor de expectación del momento conjugado $\hat{\pi}_k^{R,I}$ en el estado post-colapso $|\Theta\rangle$ están distribuidos aleatoriamente en los respectivos rangos de las incertidumbres del estado de vacío $|0\rangle$ y no se encuentran correlacionados estadísticamente. Esto se puede expresar de la siguiente manera,

$|0_k\rangle \rightarrow |\Theta_k\rangle$ tal que:

$$\langle\Theta|\hat{y}_k^{R,I}(\eta_k^c)|\Theta\rangle = x_{1,k}^{R,I} \sqrt{(\Delta\hat{y}_k^{R,I}(\eta_k^c))_0^2},$$

$$\langle\Theta|\hat{\pi}_k^{R,I}(\eta_k^c)|\Theta\rangle = x_{2,k}^{R,I} \sqrt{(\Delta\hat{\pi}_k^{R,I}(\eta_k^c))_0^2},$$

en este esquema en general $x_{1,k}^{R,I} \neq 0$, y $x_{2,k}^{R,I} \neq 0$.

donde $x_{1,2}^{R,I}$ son variables aleatorias gaussianas centradas en cero y con dispersión uno. El hecho de que el colapso no correlacione los valores de expectación post-colapso del campo y su momento conjugado se encuentra en que los valores de las variables $x_1^{R,I}$ y $x_2^{R,I}$ son independientes.

Esquema de colapso Newtoniano. Este esquema de colapso está inspirado en que a primer orden en la norma longitudinal y durante el slow-roll de la época inflacionaria, existe una ecuación de constricción la cual relaciona el potencial Newtoniano con el valor de expectación del momento conjugado al campo $\langle\hat{\pi}(\eta)\rangle$, i.e., únicamente el momento canónico conjugado del campo inflatónico aparece como fuente de la perturbación de la métrica. Esto motiva a proponer un esquema en el que durante el colapso solo el valor de expectación del momento canónico conjugado es diferente de cero, mientras que el del campo sigue siendo nulo.

$|0_k\rangle \rightarrow |\Theta_k\rangle$ tal que:

$$\langle\Theta|\hat{y}_k^{R,I}(\eta_k^c)|\Theta\rangle = 0,$$

$$\langle\Theta|\hat{\pi}_k^{R,I}(\eta_k^c)|\Theta\rangle = x_{2,k}^{R,I} \sqrt{(\Delta\hat{\pi}_k^{R,I})_0^2},$$

en este esquema $x_{1,k}^{R,I} = 0$, mientras que en general $x_{2,k}^{R,I} \neq 0$.

Esquema de colapso la Wigner. En los dos esquemas de colapso mencionados anteriormente se asume que los valores medios de $\hat{y}_k^{R,I}$ y $\hat{\pi}_k^{R,I}$, en el estado posterior al colapso adquieran valores aleatorios independientes. El esquema de colapso a la Wigner si toma en cuenta la correlación entre las variables $(\hat{y}_k^{R,I}, \hat{\pi}_k^{R,I})$ y este se basa en la función de distribución de Wigner,

$|0_k\rangle \rightarrow |\Theta_k\rangle$ tal que:

$$\langle\Theta|\hat{y}_k^{R,I}(\eta_k^c)|\Theta\rangle = x_k^{R,I} \Lambda_k \cos\theta,$$

$$\langle\Theta|\hat{\pi}_k^{R,I}(\eta_k^c)|\Theta\rangle = x_k^{R,I} k \Lambda_k \sin\theta.$$

en este esquema $x_{1,k}^{R,I} = x_{2,k}^{R,I} = x_k^{R,I}$, y en general $x_k^{R,I} \neq 0$.

Es decir, colapsarán a un valor dado por $x_k^{R,I}$ -la cual es una variable aleatoria gaussiana normalizada centrada en cero y con una dispersión Λ_k dada por,

$$\Lambda_k = \frac{4\eta_k^c \sqrt{L^3 k}}{\sqrt{1 + 5(k\eta_k^c)^2 - \sqrt{1 + 10(k\eta_k^c)^2 + 9(k\eta_k^c)^4}}}.$$

La dispersión es elegida basándose en el hecho de que la distribución de Wigner del estado vacío de un oscilador armónico es una función gaussiana bidimensional, entonces, Λ_k está dada por el semi-eje mayor de la elipse definida por la función gaussiana bidimensional. Esta elipse corresponde a la frontera de la región en el espacio de fase donde la función de Wigner tiene una magnitud de $1/2$. De esta manera, este esquema de colapso toma en cuenta las correlaciones entre las variables canónicas que estaban presentes en el estado anterior del colapso (i.e., el estado de vacío y en todos los estados), ya que esta información está integrada en la función de distribución de Wigner.

De esta forma dado el esquema de colapso, esto es los datos iniciales $\langle \Theta | \hat{y}_k^{R,I}(\eta_k^c) | \Theta \rangle$ y $\langle \Theta | \hat{\pi}_k^{R,I}(\eta_k^c) | \Theta \rangle$, se evalúa las ecuaciones (4.12) en $\eta = \eta_k^c$, obteniendo;

$$\langle \hat{y}_k^{R,I}(\eta_k^c) \rangle_{\Theta} = \sqrt{2} \text{Re}(y_k(\eta_k^c) d_k^{R,I}), \quad \langle \hat{\pi}_k^{R,I}(\eta_k^c) \rangle_{\Theta} = \sqrt{2} \text{Re}(g_k(\eta_k^c) d_k^{R,I}), \quad (4.13)$$

lo cual puede ser entendido como un sistema de dos ecuaciones lineales algebraicas con dos incógnitas $d_k^{R,I}$. Entonces, según (4.12) una vez encontrados los números $d_k^{R,I}$, para el esquema de colapso en cuestión, los valores de expectación $\langle \hat{y}_k^{R,I}(\eta) \rangle_{\Theta}$ y $\langle \hat{\pi}_k^{R,I}(\eta) \rangle_{\Theta}$, calculados en el estado post-colapso y para todo tiempo conforme η tal que $\eta > \eta_k^c$, quedarán completamente determinados.

Al inicio de esta sección es mencionado que en este enfoque se realiza un tratamiento semi-clásico de las perturbaciones de la gravedad acoplada a las perturbaciones de un campo, en términos de las ecuaciones semi-clásicas Einstein $\delta^{(1)}G_{ab} = 8\pi G \langle \delta^{(1)}\hat{T}_{ab} \rangle$. Entonces, trabajando con las con componentes $\delta^{(1)}G_{00} = 8\pi G \langle \delta^{(1)}T_{00} \rangle$ y $\delta^{(1)}G_{i0} = 8\pi G \langle \delta^{(1)}T_{i0} \rangle$, de las ecuaciones semi-clásicas de Einstein en el estado post-colapso $|\Theta_k\rangle$ del modo k , a primer orden en la perturbación descompuestas en modos de Fourier, se obtiene;

$$\Psi'_k(\eta) + \mathcal{H}\Psi_k(\eta) = 4\pi G \frac{\phi'_0}{a} \langle \hat{y}_k(\eta) \rangle_{\Theta}, \quad (4.14)$$

$$-k^2\Psi_k(\eta) + \tilde{\epsilon}_1\Psi_k(\eta) = 4\pi G \frac{\phi'_0}{a} \langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle_{\Theta}, \quad (4.15)$$

donde (4.9), implica $\langle \hat{y}_k(\eta) \rangle_{\Theta} = \langle \hat{y}_k^R(\eta) \rangle_{\Theta} + i\langle \hat{y}_k^I(\eta) \rangle_{\Theta}$, y $\langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle_{\Theta} = \langle \hat{\pi}_k^R(\eta) \rangle_{\Theta} + i\langle \hat{\pi}_k^I(\eta) \rangle_{\Theta}$.

Con base a las dos ecuaciones anteriores es fácil ver que antes de que el colapso del modo k ocurra, esto es para todo $\eta < \eta_k^c$, los valores de expectación que aparecen de lado derecho de estas ecuaciones en lugar de estar calculados en $|\Theta_k\rangle$ estarían calculados en el estado pre-colapso $|0_k\rangle$, razón por la cual por tratarse de $|0_k\rangle$ (un estado perfectamente **H&I**) los valores de expectación $\langle \hat{y}_k(\eta) \rangle_0$, $\langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle_0$ serían nulos implicando que el potencial Newtoniano $\Psi_k(\eta)$ sea tal que: $\Psi_k(\eta) = 0$, y con esto antes del colapso el espacio-tiempo modelado sería espacialmente perfectamente **H&I**.

Ahora denotando por η_i al tiempo conforme en que el periodo inflacionario inicia y por η_r al tiempo conforme en que el periodo inflacionario termina (mismo en el cual da inicio al dominio de radiación). Entonces, considerando la ecuación (4.15) sujeta al periodo temporal $\eta \in (\eta_k^c, \eta_r)$ (en este rango de tiempo por tratarse del periodo inflacionario se cumplirá que $\tilde{\epsilon}_1 \approx 0$) y limitada a las escalas angulares (los modos k de interés), para las cuales el mecanismo principal para la generación de anisotropías es el efecto **S&W**, los cuales corresponden a $k \in (10^{-4}, 10^{-2})Mpc^{-1}$, lo cual implica que $k^2 \gg \tilde{\epsilon}_1$, entonces la ecuación (4.15) escrita en modos de Fourier tomará la siguiente forma asintótica:

$$\Psi_k(\eta) \approx -\frac{4\pi G\phi'_0(\eta)}{a(\eta)k^2} \langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle_{\Theta}. \quad (4.16)$$

Recapitulando, la anterior ecuación será válida durante el periodo inflacionario y para los modos de interés físico $k \in (10^{-4}, 10^{-2})Mpc^{-1}$.

Conexión con las cantidades observacionales

Retomaremos nuevamente la ecuación (3.86). Entonces, limitandonos únicamente a las anisotropías producto del efecto Sachs Wolfe (3.110), vemos que el potencial Newtoniano sobre la superficie de última dispersión: $\Psi(\eta_{ls}, \vec{x}_{ls})$, se relaciona con los coeficientes α_{lm} , a través de;

$$\alpha_{lm} = \int d^2\Omega \frac{1}{3} \Psi(\eta_{ls}, \vec{x}_{ls}) Y_{lm}^*(\theta, \varphi), \quad (4.17)$$

siendo $\vec{x}_{ls} = x_{ls}(\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, \cos\theta)$ con $\hat{n} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$ un vector unitario normal a la dos esfera celeste y x_{ls} corresponde a la distancia comóvil recorrida por el fotón desde su emisión en la superficie de última dispersión al tiempo η_{ls} , hasta su detección por los observadores contemporáneos en un tiempo η_0 . Antes de evaluar el valor de expectación del potencial Newtoniano primero realizaremos una descomposición en modos de Fourier:

$$\Psi(\eta, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L^{3/2}} \Psi_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (4.18)$$

Como se necesita el valor del potencial Newtoniano evaluado sobre la intersección de nuestro pasado causal con la hipersuperficie $\eta = \eta_{ls}$, haremos uso del siguiente ansatz para el potencial Newtoniano, $\Psi(\eta, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L^{3/2}} \mathcal{T}(k) \Psi_k^{inf}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, donde hemos introducido el factor $\mathcal{T}(k)$ para representar los efectos de los diversos mecanismos físicos presentes entre el recalentamiento (reheating) y desacople, son conocidos como las funciones de transferencia. Entonces, bajo estas suposiciones se encuentra para a_{lm} teórico;

$$a_{lm} = \frac{1}{L^{3/2}} \int d\Omega \sum_{\vec{k}} Y_{lm}^*(\theta, \phi) \mathcal{T}(k) \Psi_k^{inf}(\eta_r) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_D}, \quad (4.19)$$

ahora substituiremos la relación de constricción dada por la ecuación (4.16), la cual solo es válida durante inflación y en el estado post-colapso $|\Theta_k\rangle$ del modo k ,

$$\Psi_k^{inf}(\eta) = -\frac{s}{a(\eta)k^2} \langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle, \quad (4.20)$$

donde $s \equiv 4\pi G\phi'_0$. A partir de las dos últimas ecuaciones y luego de un poco de álgebra, obtenemos para α_{lm} ,

$$\alpha_{lm} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \left(-\frac{s}{a(\eta_r)k^2} \langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle \right) 4\pi i^l j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{k}) \mathcal{T}(k), \quad (4.21)$$

siendo $j_l(x)$ las funciones esféricas de Bessel de primera clase y donde \hat{k} indica la dirección del vector \vec{k} . La cantidad α_{lm} no es predecible puesto que $\langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle$ depende de las variables aleatorias $x_i^{R,I}$. Por otra parte, el cuadrado de (4.21) y bajo el límite ($L \rightarrow \infty$), se encuentra dado por;

$$\alpha_{lm} \alpha_{l'm'}^* = \frac{16\pi^2 s^2 i^l (-i)^{l'}}{9(2\pi)^3} \iint d^3k d^3k' \frac{\langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle \langle \hat{\pi}_{k'}^\dagger(\eta_r) \rangle}{k^2 a(\eta_r) k'^2 a(\eta_r)} \mathcal{T}(k) \mathcal{T}(k') j_l(kR_D) Y_{lm}(\hat{k}) j_{l'}(k'R_D) Y_{l'm'}(\hat{k}').$$

En lo que resta usaremos por simplicidad $\mathcal{T}(k) = \mathcal{T}_0 = \text{constante}$, lo cual significa que ignoraremos la física que da a lugar los picos acústicos. Por último calculamos el valor más probable para la anterior cantidad. Esto se hace calculando el promedio sobre un ensamble imaginario de universos, cabe decir que cada pareja de números aleatorios $(x_{1,k}^{R,I}, x_{2,k}^{R,I})$ los cuales especifican el esquema de colapso representa un universo. Ahora, teniendo en cuenta la ecuación de constricción (4.20), junto con la definición del potencias del potencial Newtoniano (3.114), se consigue la siguiente igualdad¹,

$$\frac{s^2}{a^2(\eta_r)k^4} \overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle \langle \hat{\pi}_{k'}^\dagger(\eta_r) \rangle} = \mathcal{P}_\Psi(k) \delta_{kk'}, \quad (4.22)$$

entonces el valor más probable de la cantidad $\alpha_{lm} \alpha_{l'm'}^*$, será escrito como;

$$\begin{aligned} \overline{(\alpha_{lm} \alpha_{l'm'}^*)} &= \frac{16\pi^2}{9(2\pi)^3} \int d^3k \mathcal{P}_\Psi(k) j_l(kR_D) Y_{lm}(\hat{k}) j_{l'}(kR_D) Y_{l'm'}(\hat{k}) \\ &= \frac{2}{9\pi} \left[\int k^2 \mathcal{P}_\Psi(k) j_l(kR_D) j_{l'}(kR_D) dk \right] \left[\int Y_{lm}(\hat{k}) Y_{l'm'}(\hat{k}) d\Omega_k \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Usando la identidad $\int Y_{lm}(\hat{k}) Y_{l'm'}(\hat{k}) d\Omega_k = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$, se encuentra que;

$$\overline{|\alpha_{lm}|^2} = \frac{2}{9\pi} \int_0^\infty k^2 \mathcal{P}_\Psi(k) j_l^2(kR_D) dk, \quad (4.24)$$

podemos ver que (3.118) es equivalente a (4.24) la única diferencia radica en como se calculo el promedio de ensamble del cuadrado de la norma de los coeficientes α_{lm} ²

Entonces de (4.22) observamos que $\mathcal{P}_\Psi(k)$ tendrá la dependencia en k compatible con el espectro invariante de escala de H&Z, siempre y cuando;

¹Lo cual se puede obtener de manera directa con la simple sustitución de (4.20) en la definición dada por la ecuación (3.114) bajo la consideración de que las anisotropías son producidas durante inflación $\Psi_k(\eta_D) \sim \Psi_k^{inf}(\eta_r)$.

²Esto demuestra que $\overline{|\alpha_{lm}|^2}$ no depende de m , como se menciona en la ecuación 3.92

$$\overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta_r) \rangle} \equiv \text{constante} \times k. \quad (4.25)$$

Lo que resta sera calcular, para un esquema de colapso en particular, la cantidad; $\overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle \langle \hat{\pi}_{k'}^\dagger(\eta_r) \rangle}$, lo cual para un η cualquiera puede ser escrito de la siguiente forma;

$$\begin{aligned} \overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta) \rangle} &= \overline{\langle \hat{\pi}_k^R(\eta) + i\hat{\pi}_k^I(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_k^{R\dagger}(\eta) - i\hat{\pi}_k^{I\dagger}(\eta) \rangle} \\ &= \overline{\langle \hat{\pi}_k^R(\eta) \rangle^2} + \overline{\langle \hat{\pi}_k^I(\eta) \rangle^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

las contribuciones de $\overline{\langle \hat{\pi}_k^R(\eta) \rangle^2}$ y $\overline{\langle \hat{\pi}_k^I(\eta) \rangle^2}$ son iguales puesto que,

$$[\hat{a}_{\vec{k}}^R, \hat{a}_{\vec{k}'}^{R\dagger}] = L^3(\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} + \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}) \Rightarrow \overline{x_{\vec{k}}^R x_{\vec{k}'}^R} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} + \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \quad (4.27)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}^I, \hat{a}_{\vec{k}'}^{I\dagger}] = L^3(\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} - \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}) \Rightarrow \overline{x_{\vec{k}}^I x_{\vec{k}'}^I} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} - \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}, \quad (4.28)$$

lo cual si $\vec{k} = \vec{k}'$ nos conduce a;

$$\overline{x_{\vec{k}}^R x_{\vec{k}}^R} = \overline{x_{\vec{k}}^I x_{\vec{k}}^I} = 1, \quad (4.29)$$

entonces el resultado (4.26) podrá ser escrito como:

$$\overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta) \rangle} = 2\overline{\langle \hat{\pi}_k^R(\eta) \rangle^2} = 2\overline{\langle \hat{\pi}_k^I(\eta) \rangle^2}. \quad (4.30)$$

Finalmente, para los esquemas de colapso mencionados anteriormente se encuentra,

$$\overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta_r) \rangle}_{independiente} = \frac{\hbar L^3 k}{4a^2(\eta_r)} \left[1 + \frac{2}{z_k^2} \text{sen}^2(\Delta_k) + \frac{1}{z_k} \text{sen}(2\Delta_k) \right], \quad (4.31)$$

$$\overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta_r) \rangle}_{Newtoniano} = \frac{\hbar L^3 k}{4a^2(\eta_r)} \left[1 + \frac{2}{z_k^2} \text{sen}^2(\Delta_k) \left(1 - \frac{1}{z_k} \right) - \frac{1}{z_k} \text{sen}(2\Delta_k) \right], \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta_r) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta_r) \rangle}_{Wigner} &= \frac{\hbar L^3 k}{4a^2(\eta_r)} \left\{ \frac{32z_k^2}{\sqrt{1+10z_k^2+9z_k^4}} \frac{1}{1+5z_k^2 - \sqrt{1+10z_k^2+9z_k^4}} \right. \\ &\quad \left(\sqrt{1+10z_k^2+9z_k^4} - 1 + 3z_k^2 \right) \left(\cos \Delta_k - \frac{\text{sen} \Delta_k}{z_k} \right)^2 + \\ &\quad \left. + \text{sen}^2 \Delta_k \left(\sqrt{1+10z_k^2+9z_k^4} - 3z_k^2 - 7 \right) + 8z_k \cos \Delta_k \text{sen} \Delta_k \right\}, \end{aligned}$$

en donde $z_k = k\eta_k^c$, y $\Delta_k = (\eta_r - \eta_k^c)k$. Se encuentra que los tres esquemas de colapso mencionados son compatibles con el espectro teórico de H&Z **si asumimos** que cada modo k de interés físico colapsa en un tiempo particular η_k^c el cual es dependiente de k , y es tal que $|\eta_k^c k| = \text{constante} \gg |\eta_r k|$, implicando que $|\eta_k^c| \gg |\eta_r|$, condicionando a que los modos de interés colapsen al principio de la etapa inflacionaria.

Capítulo 5

Modelo de localización continua y espontánea (CSL) de Pearle como mecanismo para el surgimiento de las inhomogeneidades cosmológicas durante inflación

Según la mecánica cuántica estándar la descripción de la evolución de un sistema cuántico obedece un par de procesos los cuales en la nomenclatura de Penrose son;

Proceso U: Cuando no se realiza medición u observación alguna, la evolución del estado cuántico del sistema vendrá gobernada por la ecuación de Schrödinger.

$$\hat{H}|\Psi, t\rangle = i\frac{d}{dt}|\Psi, t\rangle, \quad (5.1)$$

en donde \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema.

Proceso R: Ahora dada una observable (A), a la cual en el tratamiento cuántico puede ser representada como un operador hermítico \hat{A} , cuyos eigenvalores y eigenestados vienen representados respectivamente por: $\{a_m\}$ y $\{|a_m\rangle\}$, en particular el conjunto de eigenestados forma una base con la cual podemos representar cualquier estado del espacio de Hilbert como una combinación lineal de los elementos de la base, $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$. El proceso R, enuncia que si sobre el sistema cuántico se realiza la medición de la observable (A), el estado cuántico del sistema se colapsara a uno de las eigenestados de la observable (A).

$$\text{Antes de medir } (A): |\Psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle, \text{ después de medir } (A): |\Psi\rangle = |a_m\rangle. \quad (5.2)$$

Lo anterior es conocido como el *colapso de la función de onda*, y sin este la mecánica cuántica estándar no podría explicar lo que se observaba en los experimentos.

De esta forma la mecánica cuántica de Schrödinger plantea que antes que un observador mire o mida algo (no aplica proceso R), el mundo físico solo existe como una superposición de todos sus posibles estados simultáneamente (si aplica proceso U), lo cual conduce a famosas paradojas como la del **Gato de Schrödinger** donde el gato puede estar **vivo-muerto al mismo tiempo**, y solo a través del proceso R el gato tomará uno de estos dos estados. El hecho de que en la teoría cuántica de Schrödinger solo emerja la realidad si se realiza una medición sobre el sistema, es lo que se conoce como; **problema de la medición en mecánica cuántica**.

Un enfoque para atacar este problema es modificar la ley de evolución de la teoría de manera que el proceso R también ocurra de una manera dinámica, pero independiente de que sobre el sistema se realice medición u observación alguna. Esta alternativa da como resultado lo que se conoce como teorías de colapso objetivo o modelos de colapso. Las teorías de colapso objetivo o modelos de colapso, explican el colapso de la función de onda de una superposición de estados en el problema de la medida en la mecánica cuántica suponiendo que se produce un colapso de la función de onda, un colapso real e independiente de observadores (de ahí el término objetivo) provocado por causas físicas, al estado observado.

Con base a lo previamente mencionado, la situación sobre el surgimiento de las inhomogeneidades primordiales, la cual se ha venido tratando en los capítulos anteriores, podría entenderse como una manifestación, a nivel cosmológico, del problema de la medición en mecánica cuántica. Hasta este punto, si aceptamos que las fluctuaciones cuánticas del estado vacío del inflatón dieron origen a las semillas primordiales de estructura cósmica, y que el estado inicial es vacío de B&D (es un estado perfectamente homogéneo e isotrópico y en particular no posee inhomogeneidades) el cual puede ser escrito como una superposición de estados inhomogeneos, lo que entendemos por universo no sería más que una superposición de estos estados inhomogeneos, siendo nuestra realidad uno de estos estados, pero según la teoría cuántica de Schrödinger esta realidad quedaría determinada una vez que algún ente externo al sistema realizará una observación o medición del sistema. Lo cual resulta una tarea imposible para nosotros ya que no podemos pensar que el universo era perfectamente homogéneo e isotrópico hasta antes de que los primeros satélites comenzaran a recolectar datos del CMBR, puesto que las condiciones de nuestra existencia se deben a la evolución de dichas inhomogeneidades primordiales. Es por tal razón que el paradigma estándar inflacionario no podría explicar el origen de las inhomogeneidades, pero vimos que remplazando la mecánica cuántica de Schrödinger por un esquema de colapso objetivo, como los anteriormente mencionados, sería posible dar cuenta del surgimiento de dichas inhomogeneidades primordiales.

La siguiente parte de este trabajo consiste en implementar, para lidiar con el problema de la medición, una teoría de colapso objetivo en el problema del surgimiento de las inhomogeneidades primordiales. El modelo a estudiar será el conocido como **el modelo de localización continua y espontánea (CSL) de Pearle**, y el como implementarlo al problema cosmológico es lo que describiremos en lo que resta de este capítulo.

5.1. El modelo localización continua y espontánea (CSL) de Pearle

Según el modelo CSL (consultar referencias [10], [11], [9]) la evolución de un estado cuántico viene dada por;

$$|\psi, t\rangle_w = \mathcal{T} e^{-\int_0^t dt' \{i\hat{H} + \frac{1}{4\gamma} [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2\}} |\psi, 0\rangle, \quad (5.3)$$

siendo \mathcal{T} el operador de orden temporal, $w(t)$ una función estocástica dependiente del tiempo la cual conduce a que la evolución dada por CSL no sea determinista para el estado $|\psi, t\rangle_w$, el número γ es un parámetro fundamental de la teoría, mientras que \hat{A} es un operador hermítico (con valores propios a_m no degenerados). La evolución (5.3) es tal que $|\psi, t\rangle_w$ tienda asintóticamente a un eigenestado de \hat{A} , y la rapidez de dicha evolución (esto significa que tan rápido $|\psi, t\rangle_w$ tiende a $|a_m\rangle$ eigenestado de \hat{A}) vendrá controlada por el número γ . Por otro lado, la cantidad $e^{-\int_0^t dt' \{ \frac{1}{4\gamma} [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2 \}}$ en (5.3) produce que la evolución CSL no sea unitaria. Entonces, según (5.3) partiendo de un estado inicial normalizado $\langle \psi, 0 | \psi, 0 \rangle = 1$, la no unitariedad de la evolución (5.3) implicará que; ${}_w \langle \psi, t | \psi, t \rangle_w \neq 1$. De esta forma en el modelo CSL, dado un estado inicial $|\psi, 0\rangle$, la evolución (5.3) nos dará un estado final $|\psi, t\rangle_w$ para cada función $w(t)$ en donde la probabilidad asociada a $|\psi, t\rangle_w$, estará dada por la regla de probabilidad;

$$P_w Dw(t) = {}_w \langle \psi, t | \psi, t \rangle_w Dw(t), \quad (5.4)$$

donde $Dw(t)$ ha sido definido como;

$$Dw(t) \equiv \frac{dw(0)}{\sqrt{2\pi\gamma/(\Delta t)}} \frac{dw(\Delta t)}{\sqrt{2\pi\gamma/(\Delta t)}} \frac{dw(2\Delta t)}{\sqrt{2\pi\gamma/(\Delta t)}} \dots \frac{dw(t)}{\sqrt{2\pi\gamma/(\Delta t)}} = \prod_{t_i=0}^t \frac{dw(t_i)}{\sqrt{2\pi\gamma/(\Delta t)}}. \quad (5.5)$$

Notamos que como los estados $|\psi, t\rangle_w$ no tienen norma uno, de (5.4) concluimos que los estados con mayor norma serán más probables.

La motivación de (5.4) como probabilidad está justificada por el hecho de que la suma de todas las probabilidades es uno, esto se ve de $\int P_w Dw(t) = 1$. Para desarrollar esta integral primero notemos que la evolución de el estado puede ser expresada como;

$$\begin{aligned} |\psi, t\rangle_w &= \mathcal{T} e^{-\int_0^t dt' \{i\hat{H} + \frac{1}{4\gamma} [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2\}} |\psi, 0\rangle \\ &= \mathcal{T} e^{-\int_0^{\Delta t} dt' \{i\hat{H} + \frac{1}{4\gamma} [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2\}} e^{-\int_{\Delta t}^t dt' \{i\hat{H} + \frac{1}{4\gamma} [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2\}} |\psi, 0\rangle \\ &= \mathcal{T} e^{-\int_0^{\Delta t} dt' \{i\hat{H} + \frac{1}{4\gamma} [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2\}} |\psi, t - \Delta t\rangle_w, \end{aligned} \quad (5.6)$$

de modo que sustituyendo en (5.4) e integrando sobre todos los w ,

$$\int Dw(t - \Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \psi, t - \Delta t | e^{-\int_0^{\Delta t} dt' \left[-i\hat{H} + \frac{[w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2}{4\gamma} \right]} e^{-\int_0^{\Delta t} dt' \left[i\hat{H} + \frac{[w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2}{4\gamma} \right]} |\psi, t - \Delta t\rangle_w}{\sqrt{2\pi\gamma/(\Delta t)}} dw(\Delta t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int Dw(t - \Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw(\Delta t)}{\sqrt{2\pi\gamma/(\Delta t)}} \langle \psi, t - \Delta t | e^{-\Delta t \frac{[w(\Delta t) - 2\gamma\hat{A}]^2}{2\gamma}} | \psi, t - \Delta t \rangle \\
 &= \int Dw(t - \Delta t) \langle \psi, t - \Delta t | \psi, t - \Delta t \rangle = \dots = \langle \psi, 0 | \psi, 0 \rangle = 1.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ahora con la finalidad de ver el funcionamiento de CSL, nos concentraremos solo en la parte de CSL que modifica la evolución de Schrödinger, es decir en (5.3) asumiremos que $\hat{H} = 0$. Escribiremos $|\psi, 0\rangle$ como una combinación lineal de los eigenestados $|a_n\rangle$ del operador \hat{A} , esto es $|\psi, 0\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |a_n\rangle$ entonces, según la ecuación (5.3),

$$\begin{aligned}
 |\psi, t\rangle_w &= e^{-\frac{1}{4\gamma} \int_0^t dt' [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2} |\psi, 0\rangle \\
 &= \sum_{n=1}^N c_n |a_n\rangle e^{-\frac{1}{4\gamma} \int_0^t dt' [w(t') - 2\gamma a_n]^2}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

y la probabilidad,

$$P_w = {}_w\langle \psi, t | \psi, t \rangle_w = \sum_{n=1}^N |c_n|^2 e^{-\frac{1}{2\gamma} \int_0^t dt' [w(t') - 2\gamma a_n]^2} \tag{5.9}$$

Como primer caso, consideremos la clase de funciones aleatorias $w(t)$ con el siguiente comportamiento asintótico;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma t} \int_0^t dt' w(t') \rightarrow a, \tag{5.10}$$

entonces a este conjunto particular de funciones las renombraremos $w(t)$ como $w_a(t)$, y sin pérdida de generalidad escribiremos,

$$w_a(t) = w_0(t) + 2\gamma a, \tag{5.11}$$

donde ahora $w_0(t)$ es una función estocástica a partir de la cual se define la función¹ $\epsilon(t)$, mientras que a es una constante real.

$$\frac{1}{2\gamma t} \int_0^t dt' w_0(t') \equiv \epsilon(t), \tag{5.12}$$

y esta es tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) \rightarrow 0$ para que la condición (5.10) sea cumplida.

A continuación sustituiremos (5.11) en (5.8), obteniendo así;

$$\begin{aligned}
 |\psi, t\rangle_{w_a} &= \sum_{n=1}^N c_n |a_n\rangle e^{-\frac{1}{4\gamma} \int_0^t dt' [w_0(t') + 2\gamma(a - a_n)]^2} \\
 &= \sum_{n=1}^N c_n |a_n\rangle e^{-\frac{1}{4\gamma} \int_0^t dt' [w_0^2(t') + 4w_0(t')\gamma(a - a_n) + 4\gamma^2(a - a_n)^2]} \\
 &= e^{-\frac{1}{4\gamma} \int_0^t dt' w_0^2(t')} \left\{ \sum_{n=1}^N c_n |a_n\rangle e^{-\gamma t(a - a_n)[2\epsilon(t) + (a - a_n)]} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

¹no confundir con el parámetro de slow-roll ϵ_1

Para el calculo de $P_w \equiv {}_w\langle \psi, t | \psi, t \rangle_w$, usaremos (5.13) junto con la ortogonalidad de los eigenestados $|a_m\rangle$

$$P_w = e^{-\frac{1}{2\gamma} \int_0^t dt' w_0^2(t')} \left\{ \sum_{n=1}^N |c_n|^2 e^{-2\gamma t(a-a_n)[2\epsilon(t)+(a-a_n)]} \right\}, \quad (5.14)$$

si $a \neq a_n$ para todo n , la densidad de probabilidad (5.14) en el limite de $t \rightarrow \infty$ es nula. En este mismo caso, el estado asintótico $|\psi, t\rangle_{w_a}$ correspondiente a w_a dado por (5.13) en general no es proporcional a un eigenestado del operador \hat{A} , pero anteriormente en (5.14) encontramos de que la probabilidad asintótica de que se de este estado es nula.

El caso $a = a_m$ genera los siguientes comportamientos asintóticos;

$$|\psi, t\rangle_{w_{a_m}} = e^{-\frac{1}{4\gamma} \int_0^t dt' w_0^2(t')} \left\{ c_m |a_m\rangle + \sum_{n \neq m} c_n |a_n\rangle e^{-\gamma t(a_m - a_n)[2\epsilon(t) + (a_m - a_n)]} \right\} \quad (5.15)$$

esto implica que el estado asintótico para cuando $(t \rightarrow \infty)$ será proporcional a un eigenestado del operador \hat{A} ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi, t\rangle_{w_{a_m}} \rightarrow e^{-\frac{1}{4\gamma} \int_0^t dt' w_0^2(t')} c_m |a_m\rangle, \quad (5.16)$$

la densidad de probabilidad asintótica para este estado será,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{w_{a_m}} \rightarrow |c_m|^2 e^{-\frac{1}{2\gamma} \int_0^t dt' w_0^2(t')}. \quad (5.17)$$

De igual modo que para la realización $w_{a_m}(t) = w_0(t) + 2\gamma a_m$ en la que se encontró que el estado final dado por la evolución CSL tiene la forma (5.16) con probabilidad (5.17), la realización $w_{a_m}^*(t) = w_0^*(t) + 2\gamma a_m$, con $w_0(t) \neq w_0^*(t)$, en donde $w_0^*(t)$ al igual que $w_0(t)$ en (5.12) satisface que: $\frac{1}{2\gamma t} \int_0^t dt' w_0^*(t') \equiv \epsilon^*(t)$, con $\epsilon^*(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon^*(t) \rightarrow 0$, y puesto que la realización $w_{a_m}^*(t)$ está caracterizada por el eigenvalor a_m , siendo este el mismo eigenvalor involucrado en la realización $w_{a_m}(t)$, entonces la realización $w_{a_m}^*(t)$ produce los mismos resultados asintóticos (5.16) y (5.17) producidos por la realización $w_{a_m}(t)$. Entonces diremos que las realizaciones $w_{a_m}(t)$ y $w_{a_m}^*(t)$ son equivalentes, y de esta forma podemos definir una clase de equivalencia $[w_{a_m,p}(t)]$ como el conjunto de realizaciones $w_{a_m,p}(t)$, etiquetadas por $p \in \mathbb{N}$, tales que,

$$\left\{ w_{a_m,p}(t) = w_{0,p}(t) + 2\gamma a_m \right\}_{p \in \mathbb{N}}, \quad (5.18)$$

en donde en general $w_{0,p}(t) \neq w_{0,q}(t)$ si $p \neq q$. Si integramos (5.17) sobre el conjunto de realizaciones (5.18), encontramos que el limite asintótico la probabilidad total asociada será;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}_{w_{a_m}} \rightarrow |c_m|^2 \quad (5.19)$$

donde el símbolo tilde significa que se ha promediado sobre el conjunto de las realizaciones $\{w(t) : w(t) \sim w_{a_m}(t)\}$.

Si ahora promediamos (5.19) sobre el conjunto $\{w_{a_m}(t)\}_{m=1}^N$, encontraremos que;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{P}_{w_{am}} \rightarrow \sum_{m=1}^N |c_m|^2 = 1. \quad (5.20)$$

Existen otra clase de realizaciones que corresponden a funciones $w(t)$ para las cuales cuando $t \rightarrow \infty$ la cantidad $\frac{1}{2\gamma t} \int_0^t dt' w(t')$ no tiene un limite asintótico, sin embargo para estas realizaciones la probabilidad dada por (5.9) será nula puesto que la integral en el exponente de (5.9) diverge,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma} \int_0^t dt' [w(t') - 2\gamma a_n]^2 \rightarrow \infty, \quad (5.21)$$

concluimos que las anteriores realizaciones no contribuyen y de esta forma la barra en (5.20) indica promediar sobre todas las realizaciones $\{w(t)\}$.

Podemos enfatizar que cuando $\hat{H} \neq 0$ la dinámica del Hamiltoniano interfiere con la dinámica CSL de tal forma que en función del Hamiltoniano del sistema varios comportamientos pueden presentarse. En algunos casos el colapso toma lugar de igual forma como cuando se ignora el Hamiltoniano, sin embargo también existen casos en los que ambas dinámicas compiten de cierto modo que para un rango de tiempo lo suficientemente grande el estado cuántico $|\psi, t\rangle_w$ asintóticamente no tienda a un eigenestado del operador \hat{A} .

Para finalizar esta sección, a través de (5.3) podemos definir la matriz de densidad la cual describe el ensamble de todas las realizaciones $w(t)$, esto es;

$$\begin{aligned} \rho_{csl}(t) &= \int PDw(t) \frac{|\psi, t\rangle\langle\psi, t|}{\langle\psi, t|\psi, t\rangle} = \int Dw(t) |\psi, t\rangle\langle\psi, t| \\ &= \int Dw(t) \mathcal{T} e^{-\int_0^t dt' \{i\hat{H} + \frac{1}{4\gamma} [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2\}} |\psi, 0\rangle\langle\psi, 0| e^{-\int_0^t dt' [-i\hat{H} + \frac{1}{4\gamma} [w(t') - 2\gamma\hat{A}]^2]} \\ &= \mathcal{T} e^{-\int_0^t dt' [i(\hat{H}_L - \hat{H}_R) + \frac{\gamma}{2} [\hat{A}_L - \hat{A}_R]^2]} \rho(0), \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde los subíndices L y R significa que los operadores actúan a la izquierda o derecha de la cantidad $\rho(0)$.

La matriz de densidad satisface una ecuación de Lindblad²,

$$\frac{d}{dt} \rho_{csl}(t) = -i[\hat{H}, \rho_{csl}(t)] - \frac{\gamma}{2} [\hat{A}, [\hat{A}, \rho_{csl}(t)]], \quad (5.23)$$

de donde se sigue que el ensamble del valor de expectación del operador $\overline{\langle\hat{O}\rangle} = \text{Tr}\hat{O}\rho(t)$ satisface,

$$\frac{d}{dt} \overline{\langle\hat{O}\rangle} = -i[\overline{\langle\hat{O}, \hat{H}\rangle} - \frac{\gamma}{2} \overline{\langle[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{O}]]\rangle}. \quad (5.24)$$

El segundo sumando del lado derecho de la ecuación (5.23) y de la ecuación (5.24), representa la modificación impuesta por CSL a la teoría cuántica estándar. Por otro lado, si sólo

²Para detalles sobre la ecuación de Lindblad consultar referencias [28], [29] y [30].

tuviéramos el primer término del lado derecho de las ecuaciones (5.23) y (5.24), la ecuación resultante equivaldría a una ecuación de Liouville-von Neumann³, correspondiente a la evolución unitaria del operador de densidad.

Por último con la finalidad de visualizar el funcionamiento de la matriz de densidad modificada por CSL, construyamos esta matriz de densidad a partir de (5.13), esto es;

$$\begin{aligned}\rho_{csl}(t) &= \int Dw(t) |\psi, t\rangle \langle \psi, t| = \sum_{n,m=1}^N c_n c_m^* |a_n\rangle \langle a_m| e^{-\frac{\gamma t}{2}(a_n - a_m)^2} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{csl}(t) &\rightarrow \sum_{n=1}^N |c_n|^2 |a_n\rangle \langle a_n|\end{aligned}\quad (5.25)$$

de donde observamos que los elementos fuera de la diagonal (estos elementos se caracterizan por tener $a_n \neq a_m$) decaen en el límite $t \rightarrow \infty$.

5.2. Incorporando CSL al problema cosmológico.

Iniciaremos considerando las fluctuaciones clásicas del campo inflacionario, $\delta\phi(\vec{x}, \eta)$, y escribiremos la acción de materia perturbada hasta segundo orden en las fluctuaciones del campo escalar escrito en términos del campo auxiliar $y(\vec{x}, \eta) \equiv a(\eta)\delta\phi(\vec{x}, \eta)$, (esto es ecuación (4.11) de [38]),

$$\delta S_M^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left(y'^2 - (\nabla y)^2 + \mathcal{H}^2 y^2 - 2\mathcal{H}y y' \right). \quad (5.26)$$

La densidad Lagrangiana será entonces,

$$\delta \mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(y'^2 - (\nabla y)^2 + \mathcal{H}^2 y^2 - 2\mathcal{H}y y' \right). \quad (5.27)$$

Por otro lado, el momento canónico π conjugado a y es $\pi \equiv \frac{\partial \delta \mathcal{L}^{(2)}}{\partial y'} = y' - \mathcal{H}y$. Notemos que $\delta\phi' = (y/a)' = \pi/a$, en donde el factor de escala durante el periodo inflacionario tiene la forma $a(\eta) = (-\frac{1}{H_I \eta})^{1+\epsilon_1}$, entonces la cantidad $\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}$ durante inflación rodadura lenta $\epsilon_1 \approx 0$ tomará la forma: $\mathcal{H} \approx -\frac{1}{\eta}$.

Para las variables clásicas (y, π) , los corchetes de Poisson no nulos a tiempos iguales, y el Hamiltoniano están dados respectivamente por:

$$\{y(\vec{x}, \eta), \pi(\vec{q}, \eta)\} = \delta(\vec{x} - \vec{q}), \quad \delta \mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\pi^2(\vec{x}, \eta) - \frac{2}{\eta} \pi(\vec{x}, \eta) y(\vec{x}, \eta) + (\nabla y(\vec{x}, \eta))^2 \right]. \quad (5.28)$$

El siguiente paso será enfocarnos en los modos de Fourier del campo:

$$y(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k y_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \pi(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \pi_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (5.29)$$

³Para detalles sobre esta ecuación consultar referencias [31] y [32].

en términos de las funciones modo $y_{\vec{k}}(\eta)$ y $\pi_{\vec{k}}(\eta)$, las cuales dado que las funciones $y(\vec{x}, \eta)$ y $\pi(\vec{x}, \eta)$ tienen imágenes sobre el conjunto de los números reales y debido a las expresiones (5.29), entonces las imágenes de las funciones $y_{\vec{k}}(\eta)$, $\pi_{\vec{k}}(\eta)$ no pertenecerán al conjunto de los números reales. Los corchetes de Poisson escritos en función de las variables $y_{\vec{k}}(\eta)$ y $\pi_{\vec{k}}(\eta)$ tomará la forma;

$$\{y_{\vec{k}}(\eta), \pi_{\vec{k}'}(\eta)\} = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (5.30)$$

$$\delta H^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2} \int d^3k \left[\pi_{\vec{k}} \pi_{\vec{k}}^* - \frac{1}{\eta} (\pi_{\vec{k}}^* y_{\vec{k}} + \pi_{\vec{k}} y_{\vec{k}}^*) + k^2 y_{\vec{k}} y_{\vec{k}}^* \right]. \quad (5.31)$$

La transición de la descripción clásica a la cuántica se efectúa remplazando las variables clásicas reales α por operadores hermíticos $\hat{\alpha}$, y remplazar los corchetes de Poisson por $i^{-1} \times$ (conmutadores). Trabajaremos en el marco equivalente al de Schrödinger, de esta forma los operadores serán independientes del tiempo y el estado evoluciona de acuerdo al modelo CSL. Entonces, como $\hat{y}^\dagger(\vec{x}) = \hat{y}(\vec{x})$, por lo tanto $\hat{y}_{\vec{k}}^\dagger = \hat{y}_{-\vec{k}}$. Similarmente, $\hat{\pi}^\dagger(\vec{x}) = \hat{\pi}(\vec{x})$, por lo que $\hat{\pi}_{\vec{k}}^\dagger = \hat{\pi}_{-\vec{k}}$. Dicho de otro modo, como las variables clásicas $y_{\vec{k}}$ y $\pi_{\vec{k}}$, que describen a las funciones modo no son reales, entonces los operadores $\hat{y}_{\vec{k}}$ y $\hat{\pi}_{\vec{k}}$ no serán hermíticos. Ahora, con la finalidad de trabajar con operadores hermíticos, realizaremos una descripción en términos de campos simétricos y antisimétricos.

Campos simétricos y antisimétricos

Partiendo de la descripción clásica, separaremos los campos $y(\vec{x}, \eta)$ y $\pi(\vec{x}, \eta)$ en parte simétrica y antisimétrica, esto es;

$$y(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{2}[y(\vec{x}, \eta) + y(-\vec{x}, \eta)] + \frac{1}{2}[y(\vec{x}, \eta) - y(-\vec{x}, \eta)] \equiv y_S(\vec{x}, \eta) + y_A(\vec{x}, \eta), \quad (5.32)$$

donde $y_S(\vec{x}, \eta)$ y $y_A(\vec{x}, \eta)$ respectivamente representan la parte simétrica y antisimétrica de $y(\vec{x}, \eta)$, procediendo de manera análoga para $\pi(\vec{x}, \eta)$. Ahora, sustituyendo (5.32) en (5.28), y usando $\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c d^3x f_S(\vec{x}) g_A(\vec{x}) = 0$, la ecuación (5.28) tomará la forma;

$$\delta H^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\pi_S^2 - \frac{2}{\eta} \pi_S y_S + (\nabla y_S)^2 \right] + \frac{1}{2} \int d^3x \left[\pi_A^2 - \frac{2}{\eta} \pi_A y_A + (\nabla y_A)^2 \right] \quad (5.33)$$

i.e., $\delta H^{(2)} = \delta H_S^{(2)} + \delta H_A^{(2)}$.

Los corchetes de Poisson a tiempos iguales de los campos simétricos y antisimétricos se obtienen de sustituir en (5.28):

$$\{y_S(\vec{x}, \eta), \pi_S(\vec{q}, \eta)\} = \frac{1}{2}[\delta(\vec{x} - \vec{q}) + \delta(\vec{x} + \vec{q})], \quad \{y_A(\vec{x}, \eta), \pi_A(\vec{q}, \eta)\} = \frac{1}{2}[\delta(\vec{x} - \vec{q}) - \delta(\vec{x} + \vec{q})],$$

mientras que los demás corchetes de Poisson;

$$\{y_S(\vec{x}, \eta), \pi_A(\vec{q}, \eta)\} = \{y_A(\vec{x}, \eta), \pi_S(\vec{q}, \eta)\} = 0. \quad (5.34)$$

Modos, caso simétrico

Ahora consideraremos los modos de Fourier del campo,

$$y_S(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} y_{\vec{k},S}(\eta), \quad \pi_S(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \pi_{\vec{k},S}(\eta). \quad (5.35)$$

Entonces, puesto que $y_S(\vec{x}, \eta), \pi_S(\vec{x}, \eta)$ son simétricos, se cumplirá que: $y_{-\vec{k},S}(\eta) = y_{\vec{k},S}(\eta)$, $\pi_{-\vec{k},S}(\eta) = \pi_{\vec{k},S}(\eta)$. Mientras que debido a que $y_S(\vec{x}, \eta), \pi_S(\vec{x}, \eta)$ son reales entonces $y_{\vec{k},S}^*(\eta) = y_{-\vec{k},S}(\eta)$, $\pi_{\vec{k},S}^*(\eta) = \pi_{-\vec{k},S}(\eta)$. Combinando ambos resultados, encontramos $y_{\vec{k},S}^*(\eta) = y_{\vec{k},S}(\eta)$, $\pi_{\vec{k},S}^*(\eta) = \pi_{\vec{k},S}(\eta)$: se concluye que las variables clásicas $y_{\vec{k},S}(\eta)$ y $\pi_{\vec{k},S}(\eta)$ el conjunto de sus imágenes también está definido sobre el conjunto de los números reales. Por otro lado, los corchetes de Poisson no nulos para los modos de Fourier de los campos simétricos $y_{\vec{k},S}(\eta)$ y $\pi_{\vec{k},S}(\eta)$ se conseguirá usando (5.34), esto es;

$$\begin{aligned} \{y_{\vec{k},S}(\eta), \pi_{\vec{k}',S}(\eta)\} &= \{y_{\vec{k},S}(\eta), \pi_{\vec{k}',S}^*(\eta)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3q e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{q}} \{y_S(\vec{x}, \eta), \pi_S(\vec{q}, \eta)\} \\ &= \frac{1}{2} [\delta(\vec{k} - \vec{k}') + \delta(\vec{k} + \vec{k}')]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Ahora deseamos escribir el Hamiltoniano en modos de Fourier, entonces evaluando (5.35) en la parte simétrica del Hamiltoniano escrita en (5.33), el primer término será,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \pi_S^2(\vec{x}, \eta) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \pi_S(\vec{x}, \eta) \pi_S^*(\vec{x}, \eta) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{\mathbb{R}^3} d^3k' e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \pi_{\vec{k},S}(\eta) \pi_{\vec{k}',S}(\eta) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \pi_{\vec{k},S}^2(\eta) = \int_{+} d^3k \pi_{\vec{k},S}^2(\eta). \end{aligned} \quad (5.37)$$

En el último paso, la integral sobre todos los vectores \vec{k} tales que $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, esto es $\vec{k} = (k, \theta, \phi)$ definidas como $k \in [0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, es convertida en la integral sobre el semi-plano positivo + definido por los vectores $\vec{k} = (k, \theta, \phi)$ tales que $k \in [0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi/2)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, debido a que el integrando es simétrico sobre la región de integración. Se realizan pasos idénticos con los demás términos del Hamiltoniano, el cual finalmente tomará la forma;

$$\delta H_S^{(2)} = \int_{+} d^3k \left[\pi_{\vec{k},S}^2(\eta) - \frac{2}{\eta} \pi_{\vec{k},S}(\eta) y_{\vec{k},S}(\eta) + k^2 y_{\vec{k},S}^2(\eta) \right]. \quad (5.38)$$

Finalmente, limitándonos al semi-plano positivo $k \in [0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi/2)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, el término $\delta(\vec{k} + \vec{k}')$ en los corchetes de Poisson, no contribuye en el calculo de las ecuaciones de movimiento, entonces los corchetes de Poisson serán solo el primer término en (5.36). Sin embargo, existe un factor de 1/2 en los corchetes de Poisson, lo cual causa que los corchetes de Poisson no sean los canónicos. Para conseguir los canónicos realizaremos el siguiente cambio de variables

$$X_{\vec{k},S}(\eta) \equiv \sqrt{2} y_{\vec{k},S}(\eta), \quad P_{\vec{k},S}(\eta) \equiv \sqrt{2} \pi_{\vec{k},S}(\eta). \quad (5.39)$$

En términos de estas variables los corchetes de Poisson no nulos a tiempos iguales y el Hamiltoniano serán;

$$\begin{aligned} \{X_{\vec{k},S}(\eta), P_{\vec{k}',S}(\eta)\} &= \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \\ \delta H_S^{(2)} &= \frac{1}{2} \int_+ d\mathbf{k} \left[P_{\vec{k},S}^2(\eta) - \frac{2}{\eta} P_{\vec{k},S}(\eta) X_{\vec{k},S}(\eta) + k^2 X_{\vec{k},S}^2(\eta) \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Modos, caso antisimétrico

Procederemos de manera análoga al planteamiento realizado en el caso simétrico. Iniciaremos con,

$$y_A(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} i y_{\vec{k},A}(\eta), \quad \pi_A(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} i \pi_{\vec{k},A}(\eta). \quad (5.41)$$

Por otro lado, puesto que las variables $y_A(\vec{x}, \eta), \pi_A(\vec{x}, \eta)$ son antisimétricas, se obtiene $y_{-\vec{k},A}(\eta) = -y_{\vec{k},A}(\eta), \pi_{-\vec{k},A}(\eta) = -\pi_{\vec{k},A}(\eta)$. Dado que $y_A(\vec{x}, \eta), \pi_A(\vec{x}, \eta)$ son reales, implica que $y_{\vec{k},A}^*(\eta) = -y_{-\vec{k},A}(\eta), \pi_{\vec{k},A}^*(\eta) = -\pi_{-\vec{k},A}(\eta)$. Entonces, $y_{\vec{k},A}^*(\eta) = y_{\vec{k},A}(\eta), \pi_{\vec{k},A}^*(\eta) = \pi_{\vec{k},A}(\eta)$: los i -factores en la definición de $y_{\vec{k},A}(\eta), \pi_{\vec{k},A}(\eta)$ fueron puestos para hacer estas variables reales y entonces los correspondientes operadores en la descripción clásica sean hermíticos. Entonces, aunque $\pi_{\vec{k}}(\eta)$ no es real, hemos logrado escribirlo como la suma de términos reales

$$\pi_{\vec{k}}(\eta) = \pi_{\vec{k},S}(\eta) + i\pi_{\vec{k},A}(\eta). \quad (5.42)$$

Los corchetes de Poisson no nulos a tiempos iguales, se obtienen usando (5.34):

$$\begin{aligned} [y_{\vec{k},A}(\eta), \pi_{\vec{k}',A}(\eta)] &= [y_{\vec{k},A}(\eta), \pi_{\vec{k}',A}^*(\eta)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3q e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{q}} [y_A(\vec{x}, \eta), \pi_A(\vec{q}, \eta)] \\ &= \frac{1}{2} [\delta(\vec{k} - \vec{k}') - \delta(\vec{k} + \vec{k}')]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Los argumentos restantes son idénticos a los utilizados en el caso simétrico, la única diferencia es que el signo de $\delta(\vec{k} + \vec{k}')$ es positivo para el caso simétrico, ver (5.36), pero negativo para el caso antisimétrico, ecuación (5.43). Sin embargo, cuando nos limitamos al semi-plano positivo, $\delta(\vec{k} + \vec{k}')$ no juega ningún papel.

En términos de las variables antisimétricas, los corchetes de Poisson no nulos a tiempos iguales y el Hamiltoniano serán,

$$\begin{aligned} \{X_{\vec{k},A}(\eta), P_{\vec{k}',A}(\eta)\} &= \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \\ \delta H_A^{(2)} &= \frac{1}{2} \int_+ d\mathbf{k} \left[P_{\vec{k},A}^2(\eta) - \frac{2}{\eta} P_{\vec{k},A}(\eta) X_{\vec{k},A}(\eta) + k^2 X_{\vec{k},A}^2(\eta) \right]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Cuantización

Por último, procederemos a realizar la cuantización de la teoría. Entonces, las descripciones cuánticas de las ecuaciones (5.40) y (5.44), serán respectivamente;

$$\begin{aligned} [\hat{X}_{\vec{k},S}, \hat{P}_{\vec{k}',S}] &= i\delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \delta\hat{H}_S^{(2)} = \frac{1}{2} \int_+ d\mathbf{k} \left[\hat{P}_{\vec{k},S}^2 - \frac{1}{\eta} [\hat{P}_{\vec{k},S} \hat{X}_{\vec{k},S} + \hat{X}_{\vec{k},S} \hat{P}_{\vec{k},S}] + k^2 \hat{X}_{\vec{k},S}^2 \right], \\ [\hat{X}_{\vec{k},A}, \hat{P}_{\vec{k}',A}] &= i\delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \delta\hat{H}_A^{(2)} = \frac{1}{2} \int_+ d\mathbf{k} \left[\hat{P}_{\vec{k},A}^2 - \frac{1}{\eta} [\hat{P}_{\vec{k},A} \hat{X}_{\vec{k},A} + \hat{X}_{\vec{k},A} \hat{P}_{\vec{k},A}] + k^2 \hat{X}_{\vec{k},A}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Nuevamente, enfatizaremos que, mientras las variables clásicas son funciones del tiempo conforme η , trabajaremos en un marco en el cual los operadores son independientes del tiempo conforme η (con la excepción del Hamiltoniano el cual depende de η) mientras que los estados si dependen del tiempo conforme y evolucionan de acuerdo a el modelo CSL.

De esta manera, el campo llega a ser una simple colección de osciladores armónicos con masa variable, en la cual cada modo evoluciona de manera independiente. Si definimos,

$$\hat{X}_{\vec{k}} \equiv \sqrt{d^3k} \hat{X}_{\vec{k},\alpha}(\eta) \quad \text{y} \quad \hat{P}_{\vec{k}} \equiv \sqrt{d^3k} \hat{P}_{\vec{k},\alpha}(\eta), \quad (5.46)$$

con los índice $\alpha = S, A$ suprimidos, el Hamiltoniano y las relaciones de conmutación no nulas a tiempos iguales entre los operadores $\hat{X}_{\vec{k}}$ y $\hat{P}_{\vec{k}}$, para el modo \vec{k} serán respectivamente:

$$\hat{H}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left[\hat{P}_{\vec{k}}^2 - \frac{1}{\eta} (\hat{P}_{\vec{k}} \hat{X}_{\vec{k}} + \hat{X}_{\vec{k}} \hat{P}_{\vec{k}}) + k^2 \hat{X}_{\vec{k}}^2 \right], \quad \text{y} \quad [\hat{X}_{\vec{k}}, \hat{P}_{\vec{k}}] = i. \quad (5.47)$$

5.2.1. Teoría cuántica estándar vs modelo CSL

Enfatizaremos que en nuestro tratamiento el Hamiltoniano \hat{H}_k no es la único causante de la dinámica, también debe de incluirse la modificación de la teoría cuántica estándar inducida por CSL. No obstante, resultará interesante, con el objeto de comparar los resultados obtenidos por CSL con los que se obtendrían al apagar la dinámica producida por CSL, calcular los valores de expectación debidos a una dinámica dada únicamente por la evolución de Schrödinger caracterizada por \hat{H}_k .

Según la teoría cuántica estándar, el valor de expectación de cualquier operador \hat{A} , esto es $\langle \psi, t | \hat{A} | \psi, t \rangle$, satisface la siguiente ecuación dada por las relaciones de Ehrenfest;

$$\frac{d}{d\eta} \langle \psi, \eta | \hat{A} | \psi, \eta \rangle = -i \langle \psi, \eta | [\hat{A}, \hat{H}_k] | \psi, \eta \rangle. \quad (5.48)$$

Por otro lado, escoger el vacío de Bunch Davies como estado inicial, es equivalente a escoger al estado inicial como el estado base del oscilador armónico sobre la hipersuperficie $\eta_i = -\mathcal{T}$ (tiempo conforme correspondiente al inicio de inflación) con Hamiltoniano dado por la ecuación (5.47) congelado a tiempo $\eta_i = -\mathcal{T}$. Entonces la función de onda a tiempo inicial, puede ser escrita en la representación de momentos o bien en la de coordenadas, como;

$$\langle p_k | \psi, -\mathcal{T} \rangle = \frac{1}{(\pi k)^{1/4}} e^{-p_k^2/2k}, \quad \langle x_k | \psi, -\mathcal{T} \rangle = (\pi/k)^{1/4} e^{-x_k^2 k/2}. \quad (5.49)$$

Escribiendo $\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \psi, \eta | \hat{A} | \psi, \eta \rangle$, las ecuaciones (5.48) conducen a;

$$\frac{d}{d\eta}\langle\hat{X}_k\rangle = \langle\hat{P}_k\rangle - \frac{\langle\hat{X}_k\rangle}{\eta}, \quad \frac{d}{d\eta}\langle\hat{P}_k\rangle = -k^2\langle\hat{X}_k\rangle + \frac{\langle\hat{P}_k\rangle}{\eta} \quad (5.50)$$

las cuales tomando su derivada y combinándolas pueden ser desacopladas, obteniendo;

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\langle\hat{X}_k\rangle = -\left[k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right]\langle\hat{X}_k\rangle, \quad \frac{d^2}{d\eta^2}\langle\hat{P}_k\rangle = -k^2\langle\hat{P}_k\rangle, \quad (5.51)$$

cuya solución será;

$$\langle\hat{X}_k\rangle = \frac{-iC_1}{k}e^{ik\eta}\left[1 + \frac{i}{k\eta}\right] + \frac{iC_2}{k}e^{-ik\eta}\left[1 - \frac{i}{k\eta}\right], \quad (5.52)$$

$$\langle\hat{P}_k\rangle = C_1e^{ik\eta} + C_2e^{-ik\eta}. \quad (5.53)$$

(Llama la atención que la solución para $\langle\hat{P}_k\rangle$ es la solución usual para un oscilador armónico, aunque el Hamiltoniano no es el usual para un oscilador armónico.) Por otra parte, la condición inicial (5.49), implica que $\langle\hat{X}_k\rangle$ y $\langle\hat{P}_k\rangle$ son nulos en $\eta_i = -\mathcal{T}$, entonces de (5.52), (5.53) la solución particular que satisface estas condiciones es tal que $C_1 = C_2 = 0$, por lo tanto para todo η se cumplirá que,

$$\langle\hat{X}_k\rangle = \langle\hat{P}_k\rangle = 0. \quad (5.54)$$

Las ecuaciones para las cantidades $Q \equiv \langle\hat{X}_k^2\rangle$, $R \equiv \langle\hat{P}_k^2\rangle$, $S \equiv \langle[\widehat{X}_k\widehat{P}_k + \widehat{P}_k\widehat{X}_k]\rangle$, son

$$\frac{d}{d\eta}Q = S - \frac{2Q}{\eta}, \quad \frac{d}{d\eta}R = -k^2S + \frac{2R}{\eta}, \quad \frac{d}{d\eta}S = 2[R - k^2Q]. \quad (5.55)$$

Dado que el álgebra de los conmutadores es idéntica a la de los corchetes de Poisson, y para las variables clásicas el producto de dos soluciones es la solución para el producto, lo mismo sera verdadero para la solución de las ecuaciones (5.55). Ellas son el producto de las soluciones de las ecuaciones (5.53):

$$Q = -\frac{\tilde{C}_1}{k^2}e^{2ik\eta}\left[1 + \frac{i}{k\eta}\right]^2 - \frac{\tilde{C}_2}{k^2}e^{-2ik\eta}\left[1 - \frac{i}{k\eta}\right]^2 + \frac{\tilde{C}_3}{k^2}\left[1 + \frac{1}{(k\eta)^2}\right], \quad (5.56a)$$

$$R = \tilde{C}_1e^{2ik\eta} + \tilde{C}_2e^{-2ik\eta} + \tilde{C}_3, \quad (5.56b)$$

$$S = -2i\tilde{C}_1\frac{1}{k}e^{2ik\eta}\left[1 + \frac{i}{k\eta}\right] + 2i\tilde{C}_2\frac{1}{k}e^{-2ik\eta}\left[1 - \frac{i}{k\eta}\right] + \tilde{C}_3\frac{2}{k^2\eta}. \quad (5.56c)$$

Usando (5.49) encontramos que las condiciones iniciales serán:

$$Q(-\mathcal{T}) = 1/2k, \quad R(-\mathcal{T}) = k/2, \quad S(-\mathcal{T}) = 0. \quad (5.57)$$

para los modos k de **interés físico** $|k\eta_i| \equiv k\mathcal{T} \gg 1$, obteniendo $C_1 = -C_2 = 0$, $C_3 = k/2$ y entonces;

$$Q = \langle\hat{X}_k^2\rangle = \frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{(k\eta)^2}\right], \quad R = \langle\hat{P}_k^2\rangle = \frac{k}{2}, \quad S = \langle[\widehat{X}_k\widehat{P}_k + \widehat{P}_k\widehat{X}_k]\rangle = \frac{1}{k\eta}. \quad (5.58)$$

Sobre la relación entre las perturbaciones de la métrica $\Psi(\eta, \vec{x})$ y las de la materia $\delta\phi(\eta, \vec{x})$, al igual que en capítulo anterior asumiremos que estas perturbaciones se encuentran relacionadas a través de las ecuaciones semi-clásicas de Einstein a primer orden en la perturbación. Entonces, para un estado cuántico $|\Xi\rangle$ las perturbaciones a primer orden de la gravedad y la materia, se relacionan a través de;

$$\delta^{(1)}G_{ab} = 8\pi G \langle \Xi | \delta^{(1)}\hat{T}_{ab} | \Xi \rangle. \quad (5.59)$$

Anteriormente vimos que durante inflación rodadura lenta la ecuación anterior conduce a (4.20),

$$-k^2\Psi_{\vec{k}}(\eta) = 4\pi G\phi'_0(\eta)\langle\delta\hat{\phi}'_{\vec{k}}(\eta)\rangle = \frac{4\pi G\phi'_0(\eta)}{a}\langle\hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta)\rangle, \quad (5.60)$$

siendo $\langle\hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta)\rangle \equiv \langle\psi, \eta|\hat{\pi}_{\vec{k}}|\psi, \eta\rangle$. Entonces, cuando la inflación inicia en $\eta_i = -\mathcal{T}$, hemos asumido que el estado es descrito por el vacío de Bunch-Davies $|\psi, \eta_i\rangle = |0, -\mathcal{T}\rangle$, entonces $\langle 0, -\mathcal{T}|\hat{\pi}_{\vec{k}}|0, -\mathcal{T}\rangle = 0$, lo cual implica que el espacio-tiempo es homogéneo e isotrópico $\Psi_{\vec{k}}(\eta) = 0$. Mientras que esta simetría puede permanecer en el caso de que los estados evolucionen a través de la evolución de Schrödinger, **la modificación a la evolución impuesta por CSL** producirá que $\langle\hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta)\rangle \neq 0$. Hemos visto que en el modelo CSL, depende de una función clásica estocástica del tiempo $w(t)$ (aplicado al problema cosmológico, usaremos una $w_k(t)$ para la evolución de cada modo k). Entonces, cada conjunto $\{w_k(t)\}$ dará un posible universo genéricamente inhomogéneo y anisotrópico.

Incorporación del modelo CSL

Aplicaremos el modelo CSL al sistema cuántico comprendido por una colección de osciladores armónicos independientes (5.47). El estado cuántico de este sistema, a un tiempo conforme η , podrá ser escrito como: $|\Xi, \eta\rangle_{CSL} = |k_1, \eta\rangle_{w_{k_1}} \otimes |k_2, \eta\rangle_{w_{k_2}} \otimes |k_3, \eta\rangle_{w_{k_3}} \otimes \dots \otimes |k_n, \eta\rangle_{w_{k_n}}$ y como los modos \vec{k} son independientes asumiremos que el estado correspondiente al modo \vec{k} evolucionará de manera desacoplada con respecto a los demás modos \vec{k}' , y su evolución vendrá dada por (5.3), esto es;

$$|k, \eta\rangle_{w_k} = \mathcal{T} e^{-\int_0^\eta d\eta' \{i\hat{H}_k + \frac{1}{4\gamma}[w_k(\eta') - 2\gamma\hat{A}_k]^2\}} |0_k, \eta_i\rangle. \quad (5.61)$$

La regla para la evolución anterior quedará determinada una vez que elijamos el operador de colapso \hat{A}_k del modelo. Cabe decir que por cada elección que realicemos para \hat{A}_k tendremos un modelo CSL distinto. En esta tesis se estudian dos modelos CSL los cuales corresponden a los casos $\hat{A}_k = \hat{P}_{\vec{k}}$ para el **modelo (1)**, y $\hat{A}_k = \hat{X}_{\vec{k}}$ para el **modelo (2)**.

En este tratamiento, de igual forma que en el tratamiento desarrollado en el capítulo anterior, asumiremos que las inhomogeneidades primordiales fueron producidas durante inflación, por tal razón al igual que en (4.25) concluiremos que el espectro de H&Z será recuperado si se cumple que:

$$\overline{\langle\hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta_r)\rangle\langle\hat{\pi}_{\vec{k}}^\dagger(\eta_r)\rangle} \equiv \text{constante} \times k. \quad (5.62)$$

Por otro lado, dado que la descomposición realizada en (5.42) del operador $\hat{\pi}_{\vec{k}}$ en parte simétrica $\hat{\pi}_{\vec{k},S}$ y antisimétrica $\hat{\pi}_{\vec{k},A}$, es completamente equivalente a la descomposición realizada en el capítulo anterior para $\hat{\pi}_{\vec{k}}$ (obtenido después de cuantizar, promoviendo las variables clásicas π_k , π_k^R , y π_k^I a operadores, entonces la relación (4.9) también será satisfecha por los

operadores $\hat{\pi}_k$, $\hat{\pi}_k^R$, y $\hat{\pi}_k^I$) en parte real $\hat{\pi}_k^R$ e imaginaria $\hat{\pi}_k^I$, por lo cual siguiendo pasos análogos a los desarrollados entre (4.26)-(4.30), y teniendo en cuenta las redefiniciones (5.39) y (5.46), se encuentra;

$$\begin{aligned}
 \overline{\langle \hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_{\vec{k}'}(\eta) \rangle^*} &= \overline{\langle (\hat{\pi}_{\vec{k},S}(\eta) + i\hat{\pi}_{\vec{k},A}(\eta)) \langle (\hat{\pi}_{\vec{k}',S}(\eta) - i\hat{\pi}_{\vec{k}',A}(\eta)) \rangle} \\
 &= \overline{\hat{\pi}_{\vec{k},S}(\eta) \langle \hat{\pi}_{\vec{k}',S}(\eta) \rangle + \langle \hat{\pi}_{\vec{k},A}(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_{\vec{k}',A}(\eta) \rangle} \\
 &= 2 \overline{\langle \frac{\hat{P}_{\vec{k}}(\eta)}{\sqrt{2d\mathbf{k}}} \rangle^2} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}(\eta) \rangle^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{5.63}
 \end{aligned}$$

concluimos que lo que se requiere calcular es el promedio sobre ensamble de realizaciones de la cantidad $\langle \hat{P}_{\vec{k}}(\eta) \rangle^2$ y denotado por: $\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}(\eta) \rangle^2}$.

Por otro lado, de manera análoga a como se mostró en la sección 5.2.1 para el caso en que la evolución viene dada por la teoría cuántica estándar, usando la ecuación (5.24) podemos obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales acoplados para el promedio de ensamble del valor de expectación de cualquier serie de operadores. Sin embargo, como la cantidad $\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}(\eta) \rangle^2}$ no corresponde a el promedio de ensamble del valor de expectación de un operador, entonces esta cantidad no podrá ser obtenida de esta manera. No obstante, la cantidad $\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}(\eta) \rangle^2}$ puede ser expandida como;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}(\eta) \rangle^2} \equiv \int PDw(\eta) \frac{w \langle \psi, \eta | \hat{P}_{\vec{k}} | \psi, \eta \rangle_w^2}{w \langle \psi, \eta | \psi, \eta \rangle_w^2} = \int Dw(\eta) \frac{w \langle \psi, \eta | \hat{P}_{\vec{k}} | \psi, \eta \rangle_w^2}{w \langle \psi, \eta | \psi, \eta \rangle_w}, \tag{5.64}$$

el problema será que la integral en (5.64) no es fácil de calcular directamente. Aún así para este problema existe una relación la cual nos permite escribir $\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}(\eta) \rangle^2}$ en función de $\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle$, permitiéndonos de esta forma calcular (5.64) de manera indirecta.

Como el estado inicial es tal que la función de onda en la representación de momentos, ó de coordenadas, es una gaussiana y el operador Hamiltoniano es cuadrático en $\hat{X}_{\vec{k}}$, $\hat{P}_{\vec{k}}$, un ansatz para la función de onda, a un tiempo conforme η , en la representación de momentos puede ser escrito como;

$$\langle p_k | k, \eta \rangle_w = e^{-A(\eta)p_k^2 + B(\eta)p_k + C(\eta)}, \tag{5.65}$$

bajo las siguiente condición inicial sobre las funciones que determinan a (5.65); $A(-\mathcal{T}) = 1/2k$, $B(-\mathcal{T}) = C(-\mathcal{T}) = 0$ (escribiendo la ecuación de evolución CSL, para este ansatz, eventualmente encontramos que $A(\eta)$ es independiente de $w(\eta)$, $B(\eta)$ depende linealmente $w(\eta)$ and $C(\eta)$ es cuadrático en $w(\eta)$).

Por otro lado, calculando el valor de expectación del operador momento,

$$\begin{aligned}
 {}_w \langle k, \eta | \hat{P}_{\vec{k}} | k, \eta \rangle_w &= \int dp_k p_k e^{-(A+A^*)p_k^2 + (B+B^*)p_k + (C+C^*)} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{(A+A^*)}} \frac{(B+B^*)}{(A+A^*)} e^{\frac{(B+B^*)^2}{4(A+A^*)}} e^{(C+C^*)}. \tag{5.66}
 \end{aligned}$$

Mientras que el cuadrado de la norma del estado $|k, \eta\rangle_w$,

$${}_w\langle k, \eta | k, \eta \rangle_w = \int dp_k e^{-(A+A^*)p_k^2 + (B+B^*)p_k + (C+C^*)} = \frac{1}{\sqrt{(A+A^*)}} e^{\frac{(B+B^*)^2}{4(A+A^*)}} e^{(C+C^*)}. \quad (5.67)$$

Entonces, usando (5.66) y (5.67) para evaluar la ecuación (5.64), se encuentra;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle} = \int Dw(\eta) \frac{1}{\sqrt{(A+A^*)}} \left[\frac{(B+B^*)}{2(A+A^*)} \right]^2 e^{\frac{(B+B^*)^2}{4(A+A^*)}} e^{(C+C^*)}. \quad (5.68)$$

Por otra parte, $\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle}$ puede ser escrito como;

$$\begin{aligned} \overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle} &= \int Dw \langle \psi, \eta | \hat{P}_{\vec{k}}^2 | \psi, \eta \rangle \\ &= \int Dw \int dp_k p_k^2 e^{-(A+A^*)p_k^2 + (B+B^*)p_k + (C+C^*)} \\ &= \int Dw \frac{1}{\sqrt{(A+A^*)}} \left\{ \frac{1}{2(A+A^*)} + \left[\frac{(B+B^*)}{2(A+A^*)} \right]^2 \right\} e^{\frac{(B+B^*)^2}{4(A+A^*)}} e^{(C+C^*)} \\ &= \frac{1}{2(A+A^*)} \int Dw \frac{1}{\sqrt{(A+A^*)}} e^{\frac{(B+B^*)^2}{4(A+A^*)}} e^{(C+C^*)} \\ &+ \int Dw \frac{1}{\sqrt{(A+A^*)}} \left[\frac{(B+B^*)}{2(A+A^*)} \right]^2 e^{\frac{(B+B^*)^2}{4(A+A^*)}} e^{(C+C^*)}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

según (5.67) la primera integral de lado derecho corresponde a: $\int Dw {}_w\langle k, \eta | k, \eta \rangle_w$ la cual en (5.7) se demostró que es igual a la unidad, mientras que según (5.68) la segunda integral corresponde a: $\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle}$. De esta forma se llega a la identidad: $\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle} = \frac{1}{2(A+A^*)} + \overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle}$, la cual nos permitirá calcular la cantidad de interés $\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle}$, ecuación (5.63), de manera indirecta, esto es eludiendo la integral (5.64) a través de;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle} = \overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle} - \frac{1}{2(A+A^*)}. \quad (5.70)$$

Alternativamente, si trabajamos en la representación de coordenadas, entonces un ansatz para la función de onda en esta representación, será;

$$\langle x_k | k, \eta \rangle_w = e^{-\tilde{A}(\eta)x_k^2 + \tilde{B}(\eta)x_k + \tilde{C}(\eta)}, \quad (5.71)$$

en donde las funciones $\tilde{A}(\eta)$, $\tilde{B}(\eta)$ y $\tilde{C}(\eta)$, estarán relacionadas con las funciones $A(\eta)$, $B(\eta)$ y $C(\eta)$, que caracterizan el ansatz en la representación de momentos (5.65). En particular se cumplirá que $\tilde{A}(\eta) = \frac{1}{4A(\eta)}$, y entonces en función de \tilde{A} la ecuación (5.70) podrá ser escrita como;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle} = \overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2(\eta) \rangle} - \frac{|\tilde{A}|^2}{\text{Re}(\tilde{A})}. \quad (5.72)$$

5.2.2. Modelo CSL con $\hat{A}_k = \hat{P}_k$

Uso de la ecuación de Schrödinger modificada: Para este modelo la ecuación de Schrödinger modificada por CSL corresponde a la derivada temporal de la ecuación (5.3) y habiendo elegido $\hat{A}_k = \hat{P}_k$. En la representación de momentos y para el Hamiltoniano en cuestión (5.47) esta ecuación concierne a;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \langle p_k | \psi, \eta \rangle_w &= -\frac{i}{2} \left[p_k^2 - \frac{i}{\eta} \left(p_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{\partial}{\partial p_k} p_k \right) - k^2 \frac{\partial^2}{\partial p_k^2} \right] \langle p_k | \psi, \eta \rangle_w \\ &- \left[\frac{1}{4\gamma} w^2(\eta) - w(\eta) p_k + \gamma p_k^2 \right] \langle p_k | \psi, \eta \rangle_w. \end{aligned} \quad (5.73)$$

realizando un análisis dimensional de la anterior ecuación se encuentra que γ es un número adimensional. Por otro lado, sustituyendo el ansatz (5.65) en la anterior ecuación, se encuentra que esta puede ser escrita como una combinación lineal de potencias de p_k (en realidad solo tres potencias de p_k , las cuales son p_k^0 , p_k^1 , y p_k^2), agrupando las potencias de p_k entonces por independencia lineal los coeficientes de p_k^0 , p_k^1 , y p_k^2 serán idénticamente nulos, encontrando así un conjunto de tres ecuaciones diferenciales, en general acoplado, para las funciones $A(\eta)$, $B(\eta)$ y $C(\eta)$. La ecuación para $A(\eta)$ es;

$$\frac{d}{d\eta} A = \left(\frac{i}{2} + \gamma \right) A - 2ik^2 A^2 \quad (5.74)$$

la cual es una ecuación de Ricatti, y puede ser resuelta a través del cambio de variable $A \equiv Z'/(2ik^2 Z)$, de tal forma que la ecuación (5.74) en función de la variable Z adoptará la forma;

$$\eta Z'' = 2ik^2 \left(\frac{i}{2} + \gamma \right) \eta Z - 2Z' \quad (5.75)$$

definiendo $\alpha \equiv k\sqrt{1 - 2i\gamma}$, entonces dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (5.75) son;

$$Z_1 = \frac{1}{\eta} \cos \alpha \eta, \text{ y } Z_2 = \frac{1}{\eta} \sin \alpha \eta. \quad (5.76)$$

De esta forma, la solución para $A(\eta)$ será;

$$A(\eta) = \frac{1}{2ik^2 \eta} \left[\frac{-\cos \alpha \eta - \alpha \eta \sin \alpha \eta + C(\alpha \eta \cos \alpha \eta - \sin \alpha \eta)}{\cos \alpha \eta + C \sin \alpha \eta} \right]. \quad (5.77)$$

donde la constante C se determina a través de la condición inicial $A(-\mathcal{T}) = 1/2k$;

$$C = \frac{(1 - ik\mathcal{T}) \cos \alpha \mathcal{T} + \alpha \mathcal{T} \sin \alpha \mathcal{T}}{(1 - ik\mathcal{T}) \sin \alpha \mathcal{T} - \alpha \mathcal{T} \cos \alpha \mathcal{T}}, \quad (5.78)$$

entonces, luego de sustituir C en la ecuación (5.77), llegamos a;

$$A(\eta) = \frac{i}{2k^2\eta} + \frac{\alpha}{2ik^2} \left[\frac{(1 - ik\mathcal{T}) \cos \alpha(\eta + \mathcal{T}) + \alpha\mathcal{T} \sin \alpha(\eta + \mathcal{T})}{(1 - ik\mathcal{T}) \sin \alpha(\eta + \mathcal{T}) - \alpha\mathcal{T} \cos \alpha(\eta + \mathcal{T})} \right] \approx \frac{i}{2k^2\eta} + \frac{\alpha}{2k^2}, \quad (5.79)$$

en donde en el último paso se utilizaron las aproximaciones inducidas por los valores numéricos de los modos k de interés (3.121) junto con los de los demás parámetros en los cuales nos interesa evaluar la anterior cantidad, $k\mathcal{T} \gg 1$, $|\eta| \ll \mathcal{T}$, $\alpha \approx k - i\gamma k$ para $\gamma \ll 1$, pero aún $\gamma k\mathcal{T} \gg 1$ (será justificado en la subsección estimaciones) entonces $\cos \alpha(\eta + \mathcal{T}) \approx i \sin \alpha(\eta + \mathcal{T})$. De esta forma se obtiene el resultado para $A(\eta)$ el cual puede ser evaluado en $\eta = \eta_r = -\tau$ (siendo η_r tiempo conforme para el final de inflación), para finalmente calcular la cantidad;

$$\frac{1}{2(A + A^*)} = \frac{k^2}{\alpha + \alpha^*} = \frac{k}{\sqrt{1 - 2i\gamma} + \sqrt{1 + 2i\gamma}} = \frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2}}}. \quad (5.80)$$

Uso de la ecuación de Ehrenfest modificada: Para este modelo la ecuación (5.24) tomará la forma;

$$\frac{d}{d\eta} \overline{\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{csl}} = -i \overline{\langle [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}_{\vec{k}}] \rangle_{csl}} - \frac{\gamma}{2} \overline{\langle [\hat{P}_{\vec{k}}, [\hat{P}_{\vec{k}}, \hat{\mathcal{O}}]] \rangle_{csl}}. \quad (5.81)$$

Ahora, calculando cada una de las ecuaciones (5.81), para el conjunto $Q \equiv \overline{\langle \hat{X}_{\vec{k}}^2 \rangle}$, $R \equiv \overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2 \rangle}$, $S \equiv \overline{\langle \hat{X}_{\vec{k}} \hat{P}_{\vec{k}} + \hat{P}_{\vec{k}} \hat{X}_{\vec{k}} \rangle}$, obtenemos un sistema de ecuaciones paralelo al sistema expuesto en (5.55), pero ahora el sistema exhibirá la modificación a la dinámica impuesta por CSL,

$$\dot{Q} = S - \frac{2Q}{\eta} + \gamma, \quad \dot{R} = -k^2 S + \frac{2R}{\eta}, \quad \dot{S} = 2[R - k^2 Q]. \quad (5.82)$$

El sistema de ecuaciones sigue siendo lineal, pero ahora no es homogéneo, entonces la solución general del sistema será la suma de la solución general del sistema homogéneo (5.56), más una solución particular del sistema inhomogéneo, la cual podría ser;

$$Q = \gamma\eta/2, \quad R = \gamma\eta k^2/2, \quad S = \gamma/2. \quad (5.83)$$

Por lo tanto, la solución general para $R(\eta)$, será una modificación de la solución mostrada en la ecuación (5.56b), esta es;

$$R = C_1 e^{2ik\eta} + C_2 e^{-2ik\eta} + C_3 + \frac{\gamma k^2 \eta}{2}. \quad (5.84)$$

Las constantes de integración serán determinadas por las condiciones iniciales impuestas en $\eta_i = -\mathcal{T}$, las cuales son $Q(\eta_i) = 1/2k$, $R(\eta_i) = k/2$, $S(\eta_i) = 0$. Asumiendo $k\mathcal{T} \gg 1$ (esta condición la satisfacen los modos de interés físico), sobre las modificaciones impuestas por CSL a las ecuaciones (5.56), obtenemos un sistema algebraico de ecuaciones que nos permite encontrar las constantes de integración,

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{2} &= C_1 + C_2 + C_3 - \frac{\gamma k^2 \mathcal{T}}{2} \\
 \frac{1}{2k} &= -\frac{C_1}{k^2} - \frac{C_2}{k^2} + \frac{C_3}{k^2} - \frac{\gamma \mathcal{T}}{2} \\
 0 &= -2i \frac{C_1}{k} + 2i \frac{C_2}{k} + \frac{\gamma}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

cuya solución es;

$$C_1 = -\frac{i\gamma}{8k} = -C_2, \quad C_3 = \frac{k}{2} + \frac{\gamma k^2 \mathcal{T}}{2}. \tag{5.86}$$

Sustituyendo las constantes (5.86) en (5.84), fijando $\eta = -\tau$ y asumiendo $k\tau \ll 1$, $k\mathcal{T} \gg 1$ se obtiene;

$$R = \frac{\gamma k^2 \mathcal{T}}{2} + \frac{k}{2}. \tag{5.87}$$

En la anterior ecuación cuando $\gamma k\mathcal{T} \gg 1$ se obtiene que el primer término de su lado derecho es el término dominante, pero incluimos el segundo para recuperar el resultado correcto cuando deseemos apagar la dinámica CSL (esto corresponde al caso $\gamma \equiv 0$). Finalmente, usando los resultados encontrados en (5.80) y (5.87), sobre la ecuación (5.70), se encuentra la cantidad de interés;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}} \rangle^2} = \frac{\gamma k^2 \mathcal{T}}{2} + \frac{k}{2} - \frac{k}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2}}}. \tag{5.88}$$

Naturalmente, si hacemos $\gamma = 0$ (apagar CSL), se recupera el resultado dado por la teoría cuántica estándar $\langle \hat{P}_{\vec{k}} \rangle^2 = 0$ ya que en este caso el estado $|\Xi\rangle$ continuará siendo H&I, y para este estado se tiene que $\langle \Xi | \hat{P}_{\vec{k}} | \Xi \rangle = \langle 0 | \hat{P}_{\vec{k}} | 0 \rangle = 0$.

Por otro lado, de (5.88) vemos que el espectro encontrado no es semejante al de H&Z, ni siquiera se trata de una ligera desviación del espectro H&Z. Esto es debido a que el término dominante no es lineal en k . Sin embargo, notamos que para lograr un espectro cercano al H&Z, modulo correcciones, será necesario asumir que;

$$\gamma = \tilde{\gamma}/k, \tag{5.89}$$

implicando que el primer término en (5.88) sea lineal en k y que además continúe siendo el término dominante.

Este cambio, reemplaza el parámetro adimensional γ por un parámetro $\tilde{\gamma}$ con unidades de tiempo⁻¹. Para este caso la cantidad de interés, será;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}} \rangle^2} = \frac{\tilde{\gamma} k \mathcal{T}}{2} + \frac{k}{2} - \frac{k}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4(\tilde{\gamma}/k)^2}}}. \tag{5.90}$$

Recapitulando: La cantidad dada por (5.90) es el promedio sobre el ensamble de realizaciones. Sin embargo, como una medida de estimar la desviación típica entre una

realización y el valor promedio sobre el ensamble de realizaciones, para $\tilde{\gamma} \ll 1$ pero aun $\tilde{\gamma}\mathcal{T} \gg 1$, la dispersión respecto al valor promedio puede calculada a través de;

$$\frac{\overline{\langle [\hat{P}_{\vec{k}} - \langle \hat{P}_{\vec{k}} \rangle] \rangle^2}}{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2 \rangle} \sim \frac{1}{\tilde{\gamma}\mathcal{T}} \ll 1, \quad (5.91)$$

esto nos dice para el caso en cuestión, que los universos que conforman el ensamble teórico no se desvían mucho del valor promedio sobre el ensamble.

5.2.3. Modelo CSL con $\hat{A}_{\vec{k}} = \hat{X}_{\vec{k}}$

A continuación se procederá de manera análoga a la subsección 5.2.2 en la cual se implemento al problema cosmológico el modelo CSL el con $\hat{A}_k = \hat{P}_{\vec{k}}$.

Uso de la ecuación de Schrödinger modificada: Entonces, para este modelo la ecuación de Schrödinger modificada por CSL corresponderá a la derivada temporal de la ecuación (5.3) y habiendo elegido $\hat{A}_k = \hat{X}_{\vec{k}}$. Ahora, a diferencia de la subsección 5.2.2 por simplicidad conviene trabajar en la representación de coordenadas, entonces en la representación de coordenadas y para el Hamiltoniano en cuestión (5.47) la ecuación de Schrödinger modificada por CSL tendrá la forma;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \langle x_k | k, \eta \rangle_w &= \frac{-i}{2} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{i}{\eta} (x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} x_k) + k^2 x_k^2 \right] \langle x_k | k, \eta \rangle_w \\ &- \left[\frac{1}{4\gamma} w^2(\eta) - w(\eta) x_k + \gamma x_k^2 \right] \langle x_k | k, \eta \rangle_w, \end{aligned} \quad (5.92)$$

realizando un análisis dimensional de la anterior ecuación encontramos que ahora γ deberá tener unidades de tiempo⁻². El siguiente pasos consistirá en usar el ansatz (5.71) de la función de onda en la representación de coordenadas,

$$\langle x_k | k, \eta \rangle_w = e^{-\tilde{A}(\eta)x_k^2 + \tilde{B}(\eta)x_k + \tilde{C}(\eta)}. \quad (5.93)$$

Es importante señalar que la relación $\tilde{A}(\eta) = \frac{1}{4A(\eta)}$ sólo vale para el cambio de representación y bajo el mismo modelo de colapso. Aquí estamos violando la segunda condición, pues en el caso desarrollado en la subsección anterior se calculo la función $A(\eta)$ habiendo elegido al operador $\hat{A}_{\vec{k}} = \hat{P}_{\vec{k}}$, mientras que ahora calcularemos $\tilde{A}(\eta)$ eligiendo $\hat{A}_{\vec{k}} = \hat{X}_{\vec{k}}$ (esto es otro modelo CSL diferente al implementado previamente), es por eso que en realidad la función $A(\eta)$ que se encontró en (5.79) y la función $\tilde{A}(\eta)$ la cual calcularemos a continuación, realmente no se encuentran relacionadas a través de $\tilde{A} = \frac{1}{4A}$.

Sustituyendo el ansatz (5.93) en la ecuación (5.92), luego de separar las potencias de x_k , llegamos a un sistema de tres ecuaciones diferenciales para las funciones $\tilde{A}(\eta)$, $\tilde{B}(\eta)$ y $\tilde{C}(\eta)$. En particular la ecuación para $\tilde{A}(\eta)$, será;

$$\frac{d}{d\eta} \tilde{A} = \left(\frac{ik^2}{2} + \gamma \right) + \frac{2}{\eta} \tilde{A} - 2i\tilde{A}^2, \quad (5.94)$$

la cual es una ecuación de Ricatti y puede ser transformada a una ecuación diferencial de segundo orden y lineal, a través del cambio de variable $\tilde{A} = Z'/[2iZ]$. Sustituyendo el cambio de variable sobre (5.94) se consigue;

$$\eta Z'' = -\beta^2 \eta Z + 2Z'. \quad (5.95)$$

En donde definió $\beta = \sqrt{k^2 - 2i\gamma}$. Dos soluciones linealmente independientes de (5.95) son;

$$Z_{\pm} = e^{\pm i\beta\eta}[1 \mp i\beta\eta], \quad (5.96)$$

por lo tanto la solución general de la ecuación (5.95) será $Z = c_1 e^{i\beta\eta}[1 - i\beta\eta] + c_2 e^{-i\beta\eta}[1 + i\beta\eta]$, lo cual nos conduce a;

$$\tilde{A}(\eta) = \frac{\beta^2 \eta}{2i} \left[\frac{e^{2i\beta\eta} + C}{e^{2i\beta\eta}(1 - i\beta\eta) + (1 + i\beta\eta)C} \right]. \quad (5.97)$$

en donde $C = \frac{c_2}{c_1}$, y esta constante es determinada por la condición inicial $\tilde{A}(-\mathcal{T}) = k/2$:

$$C = -e^{-2i\beta\mathcal{T}} \frac{\beta^2 \mathcal{T} - k\beta\mathcal{T} + ik}{\beta^2 \mathcal{T} + k\beta\mathcal{T} + ik}. \quad (5.98)$$

Sustituyendo C en la ecuación(5.97) se llega a la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\eta) &= \frac{\beta^2 \eta}{2i} \left[\frac{e^{2i\beta(\mathcal{T}+\eta)}[\beta^2 \mathcal{T} + k\beta\mathcal{T} + ik] - [\beta^2 \mathcal{T} - k\beta\mathcal{T} + ik]}{e^{2i\beta(\mathcal{T}+\eta)}[\beta^2 \mathcal{T} + k\beta\mathcal{T} + ik](1 - i\beta\eta) - [\beta^2 \mathcal{T} - k\beta\mathcal{T} + ik](1 + i\beta\eta)} \right] \\ &\approx \frac{\beta^2 \eta}{2(i + \beta\eta)}, \end{aligned} \quad (5.99)$$

donde en el último paso se utilizó $k\mathcal{T} \gg 1$, y $\exp\{2(-\text{Im}\beta)\mathcal{T}\} \gg 1$.

Usando $A = 1/4\tilde{A}$, se encuentra,

$$\frac{1}{2(A + A^*)} = \frac{|\tilde{A}|^2}{\text{Re}(\tilde{A})} = (k/2) \frac{1 + 4(\gamma/k^2)^2}{F(\gamma/k^2) + 2(\gamma/k^2)^2 F^{-1}(\gamma/k^2) - 2(\gamma/k^2)(k\eta)^{-1}}. \quad (5.100)$$

donde $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4x^2}}$.

Uso de la ecuación de Ehrenfest modificada: Para el caso en estudio la ecuación (5.24) se convierte en,

$$\frac{d}{d\eta} \overline{\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle}_{csl} = -i \overline{\langle [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}_{\vec{k}}] \rangle}_{csl} - \frac{\gamma}{2} \overline{\langle [\hat{X}_{\vec{k}}, [\hat{X}_{\vec{k}}, \hat{\mathcal{O}}]] \rangle}_{csl}. \quad (5.101)$$

Las ecuaciones (5.101) para $Q \equiv \overline{\langle \hat{X}_{\vec{k}}^2 \rangle}$, $R \equiv \overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2 \rangle}$, $S \equiv \overline{\langle \hat{X}_{\vec{k}} \hat{P}_{\vec{k}} + \hat{P}_{\vec{k}} \hat{X}_{\vec{k}} \rangle}$ corresponden a;

$$Q' = S - \frac{2Q}{\eta}, \quad R' = -k^2 S + \frac{2R}{\eta} + \gamma, \quad S' = 2[R - k^2 Q]. \quad (5.102)$$

La solución general de este sistema, es la suma de la solución general del sistema homogéneo (5.56), más una solución particular del sistema inhomogéneo (5.102), la cual podría ser;

$$Q = \gamma\eta/2k^2, \quad R = \gamma\eta/2, \quad S = 3\gamma/2k^2. \quad (5.103)$$

Entonces, para el caso en cuestión la ecuación para $R(\eta)$ que reemplaza a la ecuación (5.56b) es,

$$R = C_1 e^{2ik\eta} + C_2 e^{-2ik\eta} + C_3 + \frac{\gamma\eta}{2}, \quad (5.104)$$

donde las constantes son determinadas por la condición inicial en $\eta = -\mathcal{T}$, las cuales son $Q = 1/2k$, $R = k/2$, $S = 0$. Entonces, dado que para los modos k de interés físico $k\mathcal{T} \gg 1$, y evaluando las modificaciones de (5.56) en $\eta = -\mathcal{T}$, obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} &= C_1 + C_2 + C_3 - \frac{\gamma\mathcal{T}}{2} \\ \frac{1}{2k} &= -\frac{C_1}{k^2} - \frac{C_2}{k^2} + \frac{C_3}{k^2} - \frac{\gamma\mathcal{T}}{2k^2} \\ 0 &= -2i\frac{C_1}{k} + 2i\frac{C_2}{k} + 3\frac{\gamma}{2k^2}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

y su solución será;

$$C_1 = -\frac{3i\gamma}{8k} = -C_2, \quad C_3 = \frac{k}{2} + \frac{\gamma\mathcal{T}}{2}. \quad (5.106)$$

Sustituyendo los valores de las constantes dados por (5.106) en la ecuación (5.104), posteriormente evaluando al final de inflación $\eta = -\tau$, y dado que para los modos k de interés físico se cumple que: $k\tau \ll 1$, $\gamma\mathcal{T} \gg k$ se consigue:

$$R = \frac{\gamma\mathcal{T}}{2} + \frac{k}{2}. \quad (5.107)$$

Finalmente sustituyendo los resultados mostrados en las ecuaciones (5.100) y (5.107) en la ecuación (5.72), se obtiene;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}}^2 \rangle} = \frac{\gamma\mathcal{T}}{2} + \frac{k}{2} - \frac{\frac{k}{2}(1 + 4(\gamma/k^2)^2)}{F(\frac{\gamma}{k^2}) + 2(\frac{\gamma}{k^2})^2 F^{-1}(\frac{\gamma}{k^2}) - 2(\frac{\gamma}{k^2})(k\eta)^{-1}}, \quad (5.108)$$

una vez más, como caso limite podemos ver que si apagamos CSL, la ecuación anterior se reduce a; $\overline{\langle \hat{P}_k \rangle^2} = 0$.

Sin embargo, aun activando CSL el espectro conseguido en (5.108) no es semejante al espectro plano de H&Z, ni siquiera una ligera desviación de el, puesto que el primer término de lado derecho es el término dominante y este término no es lineal en k . Pero, se encuentra que para recuperar un espectro cercano, modulo correcciones, al de H&Z, será necesario pedir que el parámetro γ posea el siguiente comportamiento,

$$\gamma = \tilde{\gamma}k. \quad (5.109)$$

Entonces, dado que γ tiene unidades de tiempo⁻², entonces el parámetro $\tilde{\gamma}$, al igual que $\tilde{\gamma}$ introducido en (5.89), tendrá unidades de tiempo⁻¹. Para este caso, la cantidad de interés será;

$$\overline{\langle \hat{P}_k \rangle^2} = \frac{\tilde{\gamma}k\mathcal{T}}{2} + \frac{k}{2} \left(1 - \frac{1 + 4(\frac{\tilde{\gamma}}{k})^2}{F(\frac{\tilde{\gamma}}{k}) + 2(\frac{\tilde{\gamma}}{k})^2 F^{-1}(\frac{\tilde{\gamma}}{k}) - 2(\frac{\tilde{\gamma}}{k})(k\eta)^{-1}} \right). \quad (5.110)$$

Encontramos que bajo la anterior suposición, el término dominante en (5.110) tiene la dependencia correcta en k , necesaria para reproducir el espectro invariante de escala de H&Z, junto con correcciones que hacen que el espectro encontrado no sea exactamente el de H&Z.

Por último, calculando la cantidad $\frac{\overline{\langle [\hat{P}_k - \langle \hat{P}_k \rangle] \rangle^2}}{\overline{\langle \hat{P}_k^2 \rangle}}$ se consigue;

$$\frac{\overline{\langle [\hat{P}_k - \langle \hat{P}_k \rangle] \rangle^2}}{\overline{\langle \hat{P}_k^2 \rangle}} \sim \frac{k\tau}{\tilde{\gamma}^2\mathcal{T}} \ll 1, \quad (5.111)$$

lo cual indica que los universos que conforman el ensamble teórico no se desvían mucho del valor promedio sobre el ensamble.

5.2.4. Estimaciones

CSL plantea la existencia de un nuevo parámetro fundamental, el cual puede ser interpretado como la **velocidad** con la cual se **reduce el estado**. Hemos encontrado que dicho parámetro en el contexto cosmológico se manifestaría como $\tilde{\gamma}$. Por otro lado la cosmología estándar inflacionaria, con el objetivo de solucionar los problemas de condiciones iniciales del teoría del Big Bang, estima los valores del tiempo conforme al principio y al final de inflación, estos valores los hemos estado denotando por; $\eta_i = -\mathcal{T}$ y $\eta_r = -\tau$, como también estima los valores de el potencial $V[\phi_0]$ y el parámetro ϵ_1 durante inflación rodadura lenta.

Cerraremos este capitulo estimando el valor de $\tilde{\gamma}$ que daría resultados numéricos compatibles a los determinados de manera observacional. La cantidad clave para realizar esta estimación será precisamente las fluctuaciones en la temperatura de la CMBR: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3}\Psi \sim 10^{-5}$. Por simplicidad consideraremos el término dominante en (5.90), ó (5.110);

$$\overline{\langle \hat{P}_k \rangle^2} \approx \frac{\tilde{\gamma}k\mathcal{T}}{2}. \quad (5.112)$$

haciendo uso de las relaciones (5.63), (4.22), se encuentra para $\mathcal{P}_\Psi(k)$,

$$\mathcal{P}_\Psi(k) \approx \left(\frac{4\pi G \phi'_0}{a(\eta_r)} \right)^2 \frac{\tilde{\gamma} \mathcal{T}}{2k^3}, \quad (5.113)$$

identificando con (3.119) logramos encontrar que $N_\Psi^2 \approx \left(\frac{4\pi G \phi'_0}{a(\eta_r)} \right)^2 \frac{\tilde{\gamma} \mathcal{T}}{2}$. Factorizando \mathcal{H}^2 de (3.139), encontramos;

$$1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = 4\pi G \frac{(\phi'_0)^2}{\mathcal{H}^2}, \quad (5.114)$$

ahora, usando la definicion de el parámetro $\epsilon_1 \equiv 1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2$ y de \mathcal{H}^2 que se obtuvo de la ecuación (3.137), se encuentra que;

$$\epsilon_1 = \frac{3(\phi'_0)^2}{(\phi'_0)^2 + a^2 V[\phi_0]} \approx \frac{3(\phi'_0)^2}{(a^2 V[\phi_0])}, \quad (5.115)$$

donde en el último paso hemos usado la condición de que durante inflación el potencial del campo es mucho mayor que la parte cinética del campo, entonces bajo este requerimiento podemos escribir de manera aproximada; $(\phi'_0)^2 \approx \epsilon_1 a^2 V/3$.

Usando el anterior resultado junto con $G = M_{Pl}^{-2}$, podemos escribir la cantidad $\left(\frac{4\pi G \phi'_0(\eta_r)}{a(\eta_r)} \right)^2$ que aparece en (5.113), como;

$$\left(\frac{4\pi G \phi'_0(\eta_r)}{a(\eta_r)} \right)^2 = \frac{(4\pi G)^2}{3} \epsilon_1 V \approx \epsilon_1 \frac{V}{M_{Pl}^4}. \quad (5.116)$$

De esta forma la ecuación (5.113), podrá ser escrita como; $\mathcal{P}_\Psi(k) \approx \epsilon_1 \frac{V}{M_{Pl}^4} \frac{\tilde{\gamma} \mathcal{T}}{2k^3}$. Entonces nuestro modelo hace la siguiente predicción teórica para N_Ψ^2 definido en la ecuación (3.119), esto es; $N_\Psi^2 = \epsilon_1 \frac{V}{M_{Pl}^4} \frac{\tilde{\gamma} \mathcal{T}}{2}$. Por otro lado, en (3.126) vimos que $N_\Psi^2 \sim 10^{-8}$, mientras que la cosmología estándar inflacionaria sugiere que $\epsilon_1 \approx 10^{-2}$, con $V^{1/4}$ dado por la escala GUT como; $\approx 10^{15} \text{ GeV} \approx 10^{-4} M_{Pl}$, lo cual indica que,

$$\tilde{\gamma} \mathcal{T} \text{ es del orden } 10^{10} \gg 1, \quad (5.117)$$

con lo anterior, queda justificada la aproximación $\gamma k \mathcal{T} = \tilde{\gamma} \mathcal{T} \gg 1$, usada en la sección (5.2.2), como también quedará justificada la aproximación $\gamma \mathcal{T} = \tilde{\gamma} k \mathcal{T} \gg k$ usada en la sección (5.2.3). Finalmente, dado que según el modelo cosmologico estandar inflacionario \mathcal{T} es del orden de $10^{12} \text{ Mpc} = 10^{26} \text{ s}$, esto implica que;

$$\tilde{\gamma} \approx 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1} \approx 10^{-16} \text{ s}^{-1}. \quad (5.118)$$

Curiosamente, esta cantidad es del mismo orden de magnitud del valor $\tilde{\gamma} \approx 10^{-16} \text{ s}^{-1}$ sugerido por GRW en su teoría de instantaneous collapses on position, y adoc-tado por CSL theory of continuous dynamical collapse on mass-density.

De esta forma para los modos de interés físico, se tiene que; $\tilde{\gamma}/k$ se encuentra en el rango 10^2 a 1. Lo anterior nos permite estimar la magnitud del término que desvía nuestra predicción del espectro H&Z.

Para el modelo CSL con $\hat{A}_{\vec{k}} = \hat{P}_{\vec{k}}$, desarrollado en [5.2.2], se encontró;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}} \rangle^2} = \frac{\tilde{\gamma}k\mathcal{T}}{2} \left[1 + \frac{1}{\tilde{\gamma}\mathcal{T}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4(\tilde{\gamma}/k)^2}}} \right) \right], \quad (5.119)$$

mientras que para el modelo CSL con $\hat{A}_{\vec{k}} = \hat{X}_{\vec{k}}$, desarrollado [5.2.3], se encontró;

$$\overline{\langle \hat{P}_{\vec{k}} \rangle^2} = \frac{\tilde{\gamma}k\mathcal{T}}{2} \left[1 + \frac{1}{\tilde{\gamma}\mathcal{T}} \left(1 - \frac{1 + 4(\frac{\tilde{\gamma}}{k})^2}{F(\frac{\tilde{\gamma}}{k}) + 2(\frac{\tilde{\gamma}}{k})^2 F^{-1}(\frac{\tilde{\gamma}}{k}) - 2(\frac{\tilde{\gamma}}{k})(k\eta)^{-1}} \right) \right], \quad (5.120)$$

Los segundos sumandos de las ecuaciones (5.119) y (5.120) corresponden a las correcciones del espectro plano de H&Z encontradas respectivamente para cada modelo CSL. Ahora, usando los valores de k , \mathcal{T} y (5.118) para evaluar las dos ecuaciones anteriores, se encuentra que estas correcciones son mucho menor que la unidad.

Los modelos presentados en las subsecciones [5.2.2] y [5.2.3], predicen un espectro de potencias el cual puede ser entendido como el espectro de H&Z **modulo correcciones**, por lo tanto el índice espectral n_s **no será exactamente igual a la unidad**. En realidad el n_s predicho aquí es una función de k y esto lo vemos fácilmente haciendo uso de la definición de n_s , y la aproximación (4.22) para $\mathcal{P}_{\Psi}(k)$. Se encuentra para el $k_{piv} = 0.002\text{Mpc}^{-1}$, que ambos modelos predicen un índice espectral de,

$$n_s(k) - 1 = \frac{d \ln(k^3 \mathcal{P}_{\Psi})}{d \ln k} \Rightarrow n_s(k_{piv}) = 0.9999. \quad (5.121)$$

el cual se encuentra fuera de las cotas observacionales.

Sería interesante relajar, en lo posible, algunas de las tantas aproximaciones realizadas aquí y explorar si el resultado corregido de (5.121) pueda encajar dentro de las cotas⁴ $n_s(k_{piv}) = 0.9619 \pm 0.0073$ determinadas observacionalmente.

⁴ver ecuación (3.127).

Capítulo 6

Implementación de la hipótesis de colapso auto-inducido en el modelo “una alternativa a la inflación” de Hollands y Wald

Reanudando la discusión presentada en el capítulo 3, habitualmente la Inflación cósmica es considerada como una parte fundamental en el entendimiento de la evolución cosmológica. Los modelos inflacionarios generalmente reciben el crédito de explicar la planitud y la homogeneidad & isotropía de nuestro universo, así como bien de dar cuenta sobre el origen de las semillas de estructura cósmica. Según la cosmología estándar inflacionaria, todas las estructuras en nuestro universo emergen de una situación completamente uniforme descrita por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), con una expansión casi exponencial gobernada por el potencial de un campo escalar, y argumentando el surgimiento de las semillas de estructura cósmica como una consecuencia de las fluctuaciones cuánticas del campo caracterizadas por el vacío de B&D.

Hemos visto que en los modelos inflacionarios se asume que los modos k , relevantes para las perturbaciones cosmológicas, nacen en su estado base (estado base de un oscilador armónico) en el tiempo en que su longitud de onda propia es mucho menor que el radio de Hubble. Lo cual significa que el estado cuántico del campo, que caracteriza las semillas de estructura, es determinado por el vacío instantáneo correspondiente al universo estático que puede ser obtenido congelando la evolución cosmológica en una época muy temprana (un estudio preciso de la construcción de tal estado, para un espacio tiempo arbitrario, puede encontrarse en [2]).

En el marco de Heisenberg, el estado del campo no evoluciona en el tiempo, entonces la evolución de los operadores se codifica en la evolución de los modos. De tales consideraciones seguidas de un paso **sin justificación** (3.173), vimos que se obtiene un espectro de potencias (3.189) el cual es compatible con el predicho por Harrison Zeldovich (H&Z), y después de incorporar los efectos de la física de plasma los cuales toman lugar antes de desacople, uno obtiene predicciones que ajustan muy bien con los datos del CMBR, aunque en este tratamiento no es posible explicar como las **fluctuaciones cuánticas** del campo inflacionario **transitan** a **fluctuaciones clásicas**.

En un trabajo reciente [21], Hollands y Wald proponen un modelo alternativo al inflacio-

nario, involucrando un simple fluido hidrodinámico, y utilizando algunas hipótesis más o menos naturales que lleva a reproducir, al igual que en el tratamiento estándar, el espectro invariante de escala de H&Z. De esta forma no es necesario asumir que el universo sostuvo una etapa temprana de expansión acelerada y con esto se evita postular una nueva escala fundamental asociada al campo inflacionario.

La hipótesis mencionada previamente, se refiere al tiempo de nacimiento y el estado inicial de los modos k relevantes. Hollands y Wald argumentan que la solución al problema de planitud y homogeneidad, dada por la cosmología estándar inflacionaria, no es satisfactoria y que sólo se podrá dar solución a estos problemas a través de una comprensión mucho más profunda de las condiciones que determinan el estado inicial del universo.

El modelo de Hollands y Wald, asume que la física semi-clásica es aplicable a fenómenos sobre **escalas espaciales mayores** que alguna longitud fundamental l_0 , la cual presumiblemente es del orden de la longitud de Planck l_p , o de la escala de gran unificación. En particular ellos proponen que en el momento en que los modos relevantes nacen, su longitud de onda propia, o física, es igual a la longitud fundamental l_0 . Consecuentemente, los modos emergen de manera continua a lo largo de la evolución cósmica y asumiendo que el estado cuántico inicial del modo k emergente, corresponde el estado base de un oscilador armónico (tal estado es homogéneo e isotrópico). Posteriormente, luego de seguir pasos análogos a los que se realiza en el tratamiento estándar, ellos obtienen una predicción para el espectro de potencias compatible con las observaciones, pero en este tratamiento también quedaría sin justificar como el estado cuántico inicial (homogéneo e isotrópico) del modo k transita a un estado cuántico (inhomogéneo y anisotrópico) consistente con el universo actual.

6.0.5. Sistema fluido acoplado a la gravedad

El trabajo original [21] inicia la descripción asumiendo que para escalas espaciales mayores o cercanas a l_0 el universo temprano es dominado por un fluido con presión p y densidad de energía ρ , variables que se relacionan a través de la ecuación de estado $p = \omega\rho$, donde ω es una constante tal que $\omega \in (0, 1)$. También se asume que el fondo es descrito por la métrica plana de FRW, y sus perturbaciones estarán relacionadas con las semillas de estructura cósmica. Entonces, fijando la norma longitudinal y considerando únicamente perturbaciones escalares, la métrica perturbada puede ser escrita como;

$$ds^2 = -a(\eta)^2(1 + 2\Psi)d\eta^2 + a(\eta)^2(1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (6.1)$$

donde $\Psi = \Psi(\eta, \vec{x})$ caracteriza las desviaciones de la homogeneidad e isotropía en el espacio-tiempo.

La distribución de materia-energía del fondo está completamente descrita por el valor de ω a través de la ecuación de estado. Por otro lado, solucionando las ecuaciones de Friedmann junto con la ecuación de conservación del tensor de energía-momento se encuentra el factor de escala durante el dominio del fluido considerado, esto es; $a(\eta) = \mathcal{C}\eta^{\frac{2}{3\omega+1}}$, (donde la constante \mathcal{C} puede ser fijada asumiendo que el valor del factor de escala hoy es uno, $a(\eta_{hoy}) = 1$) y la densidad del fluido es $\rho \propto a^{-3(\omega+1)}$.

El siguiente paso en el análisis de este modelo consiste en la cuantización de las perturbaciones del fluido mínimamente acoplado a la gravedad.

Nos basaremos en el tratamiento del problema desarrollado en la referencia [21] el cual usa en el tratamiento general formulado en los **capítulos 10 y 11** de la referencia [20].

En ese trabajo la variable a cuantizar es v y fue definida en la ecuación (10.43a,b) de la referencia [20], la cual se encuentra relacionada con las perturbaciones a primer orden de la materia hidrodinámica, y puede ser representada como una combinación lineal del potencial de velocidad del fluido $\varphi_v(\eta, \vec{x})$ y el potencial métrico $\Psi(\eta, \vec{x})$,

$$v \equiv \frac{1}{\sqrt{6} l_p} (\varphi_v - 2 z \Psi), \quad (6.2)$$

donde $\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}$ es el ya conocido parámetro de Hubble conforme, mientras que $z \equiv -\frac{a\sqrt{\beta}}{\mathcal{H}c_s}$, con $\beta \equiv \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'$, y $c_s = \sqrt{\omega}$ es la velocidad del sonido en el fluido.

La acción a segundo orden en la perturbación de la materia hidrodinámica, ecuación (10.62) de [20], se escribe como,

$$\delta^2 S = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left[v'^2 - c_s^2 (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right], \quad (6.3)$$

donde la prima denota derivada parcial con respecto al tiempo conforme η . Por otro lado, la densidad Lagrangiana correspondiente a la anterior acción será;

$$\delta^2 \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[v'^2 - c_s^2 (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right], \quad (6.4)$$

consecuentemente, el momento canonico a v será $\pi \equiv \partial \delta^2 \mathcal{L} / \partial v' = v'$, y de esta forma el Hamiltoniano podrá ser escrito como,

$$\delta^2 \mathcal{H}(\eta) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left[\pi^2 + c_s^2 (\nabla v)^2 - \frac{z''}{z} v^2 \right]. \quad (6.5)$$

Como es usual, el proceso de cuantización del campo v y su momento conjugado π consiste en promover las anteriores variables clásicas a operadores cuánticos, \hat{v} y $\hat{\pi}$ respectivamente, actuando sobre el espacio de Hilbert, pidiendo que estos operadores satisfagan las relaciones de conmutación,

$$\begin{aligned} [\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\eta, \mathbf{x}')] &= i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\hat{\pi}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\eta, \mathbf{x}')] &= 0 = [\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{v}(\eta, \mathbf{x}')] \end{aligned} \quad (6.6)$$

En el marco de Heisenberg, las ecuaciones de movimiento son obtenidas de,

$$i\hat{v}' = [\hat{v}, \hat{H}], \quad i\hat{\pi}' = [\hat{\pi}, \hat{H}] \quad (6.7)$$

Las cuales forman un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales, que desacoplado para \hat{v} da;

$$\hat{v}'' + \left(c_s^2 \nabla^2 - \frac{z''}{z} \right) \hat{v} = 0. \quad (6.8)$$

Siguiendo el procedimiento estándar, el cual consiste en escribir la solución general de esta ecuación, descomponiendo \hat{v} en términos de operadores de creación y aniquilación independientes del tiempo. Por razones practicas, trabajaremos con condiciones de frontera periódicas sobre una caja de lado L , donde $k_i L = 2\pi n_i$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces, escribimos

$$\hat{v}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (6.9)$$

con $\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) = \hat{a}_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(\eta) + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*(\eta)$, y los modos normales $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ satisfacen;

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 c_s^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.10)$$

La normalización de los modos $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ es escogida de tal manera que,

$$v_{\mathbf{k}}(\eta) v_{\mathbf{k}}'^*(\eta) - v_{\mathbf{k}}'(\eta) v_{\mathbf{k}}^*(\eta) = 2i, \quad (6.11)$$

las cuales conducen a las relaciones de conmutación estándar para los operadores de creación y aniquilación

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] &= 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] \end{aligned} \quad (6.12)$$

y el espacio de Fock puede ser construido de la manera estándar, iniciando con el estado de vacío, i.e., el estado definido por la condición $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ para todo \mathbf{k} . La elección de las funciones $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ corresponderá a la selección de un estado de vacío para el campo cuántico en un fondo curvo.

Siguiendo la propuesta en [21], se escoge como estado inicial el vacío correspondiente a las funciones modo $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ las cuales son especificadas por la ecuación de evolución y la condición inicial en el tiempo conforme $\eta_0^{(k)}$ (correspondiente a el llamado “tiempo de nacimiento del modo” k). La idea es encontrar la solución de (6.10) que satisfaga las condiciones iniciales;

$$v_{\mathbf{k}}(\eta_0^{(k)}) = \frac{1}{\sqrt{k c_s}} e^{-i k c_s \eta_0^{(k)}} \quad \text{y} \quad v_{\mathbf{k}}'(\eta_0^{(k)}) = -i \sqrt{k c_s} e^{-i k c_s \eta_0^{(k)}}, \quad (6.13)$$

Lo que significa que los modos son fijados en el estado de **vacío instantáneo** correspondiente al específico “**tiempo de nacimiento del modo**”.

Usando $\frac{z''}{z} = \frac{a''}{a}$ y definiendo $A = \frac{2(1-3\omega)}{(3\omega+1)^2}$, la ecuación (6.10) puede ser reescrita como,

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 c_s^2 - \frac{A}{\eta^2} \right) v_{\mathbf{k}} = 0 \quad (6.14)$$

que tiene como solución general:

$$v_{\mathbf{k}}(\eta) = \sqrt{\eta} \left[C_1 J_n(k c_s \eta) + C_2 Y_n(k c_s \eta) \right] \quad (6.15)$$

donde J_n y Y_n son funciones de Bessel de primera y segunda clase respectivamente y $n = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4A}$. Por otra parte, las constantes C_1 y C_2 son obtenidas de la condición inicial en el tiempo $\eta_0^{(k)}$ de acuerdo a (6.13). Evaluando estas constantes, encontramos;

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi}{4\sqrt{c_s k \eta_0^{(k)}}} \left[(2n + 1 + 2 i c_s k \eta_0^{(k)}) Y_n(c_s k \eta_0^{(k)}) + \right. \\
&\quad \left. - 2 c_s k \eta_0^{(k)} Y_{n+1}(c_s k \eta_0^{(k)}) \right] e^{-i c_s k \eta_0^{(k)}} \\
C_2 &= -\frac{\pi}{4\sqrt{c_s k \eta_0^{(k)}}} \left[(2n + 1 + 2 i c_s k \eta_0^{(k)}) J_n(c_s k \eta_0^{(k)}) + \right. \\
&\quad \left. - 2 c_s k \eta_0^{(k)} J_{n+1}(c_s k \eta_0^{(k)}) \right] e^{-i c_s k \eta_0^{(k)}}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Con el objetivo de hacer una conexión con las observaciones, debemos relacionar la variable cuántica \hat{v} (que caracteriza la perturbación del sistema gravedad-fluido en términos del campo v) con el potencial gravitacional promovido a operador $\hat{\Psi}$ (sabemos que a primer orden en la perturbación $\Psi = \Phi$, y según (3.110), Ψ está relacionado con las anisotropías de la temperatura a través del efecto Sachs-Wolfe). Vincular \hat{v} con $\hat{\Psi}$ se logra usando la versión cuántica de la ecuación (12.8) de [20], esto es;

$$\nabla^2 \hat{\Psi} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{l_p \beta}{\mathcal{H} c_s^2} \left(\frac{\hat{v}}{z} \right)' \tag{6.17}$$

La *hipótesis final* concerniente al “nacimiento de los modos” (como se describió anteriormente), el modo k nace cuando el factor de escala es tal que;

$$a(\eta_0^{(k)}) = k l_0. \tag{6.18}$$

Entonces, al igual que en el tratamiento estándar, Hollands y Wald consideran que el espectro de potencias es caracterizado por la función de correlación de dos puntos del campo \hat{v} en el estado de “vacío” $|0\rangle$ asociado con la anterior especificación de las funciones modo, esto significa que también se asume una identificación análoga a (3.173). Finalmente, para los modos con longitud de onda (propia o física) mayor que el radio de Hubble en el tiempo de desacople se encuentra un espectro de potencia libre de escala compatible con el de H&Z, correspondiente a;

$$\mathcal{P}_\Psi(k) \sim \frac{l_p^2}{l_0^2} \frac{3\omega^{1/2}(6\omega + 5)}{4(3\omega + 5)^2} \frac{1}{k^3}. \tag{6.19}$$

Recapitulando: En el trabajo [21] se logra encontrar una expresión para el espectro de potencias del potencial Newtoniano, gracias a la misma identificación usada en el modelo cosmológico estándar inflacionario (3.173), esta es;

$$\langle 0 | \hat{\Psi}(\eta, \vec{x}) \hat{\Psi}(\eta, \vec{y}) | 0 \rangle = \overline{\Psi(\eta, \vec{x}) \Psi(\eta, \vec{y})}, \tag{6.20}$$

la cual hemos argumentado en capítulos anteriores que no se encuentra bien fundamentada (i.e., en (6.20) de lado izquierdo corresponde a un promedio cuántico mientras que de lado derecho a un promedio clásico tomado sobre un ensamble teórico de universos).

El resultado (6.19) solo es valido para modos k con longitud de onda (propia) mayor que el radio de Hubble en el tiempo de desacople, modos k encontrados en (3.121) que a su vez corresponden a los modos de interés físico. Dicho resultado presenta la dependencia en k acertada para recuperar el espectro invariante de escala H&Z. Mientras que la amplitud

correcta puede ser conseguida ajustando el valor de l_0 , de tal forma que l_0 , ($l_p/l_0 \sim 10^{-5}$). Sin embargo, como fue mencionado en la introducción, es relativamente fácil ver que el estado $|0\rangle$ es perfectamente homogéneo e isotrópico (i.e., es aniquilado por los generadores cuánticos de rotaciones y translaciones). Al igual que en el tratamiento estándar, como la evolución del estado cuántico dada por la teoría cuántica estándar preserva tales simetrías (H&I), el estado del sistema permanecerá siendo homogéneo e isotrópico para todo tiempo. Nosotros argumentamos que el modelo de Hollands y Wald comparte la misma deficiencia del modelo cosmológica estándar inflacionario, al no poder dar razón de como partiendo de un estado perfectamente homogéneo e isotrópico, y una dinámica que preserva estas simetrías, surgieron las semillas de estructura cósmica en el universo.

En la siguiente sección, estudiaremos la incorporación de la hipótesis de colapso auto-inducido en el modelo de Hollands y Wald. Esta modificación al modelo podría hacer frente a la dificultad conceptual anteriormente mencionada.

6.1. Incorporando el esquema de colapso

Previamente, mostramos que en el tratamiento de Hollands y Wald se cuantiza la variable v presentada en (6.2), por tal razón tanto la perturbación Ψ de la métrica, como el potencial de velocidad del fluido φ_v (materia) son tratados de manera cuántica.

Nos enfocaremos en la perturbación escalar de la métrica Ψ ya que es el principal enlace con las observaciones representando las anisotropías del CMBR. Entonces, necesitamos encontrar una expresión que represente las perturbaciones de la métrica Ψ relevantes para el problema cosmológico.

Asumiremos que los estados cuánticos relevantes serán estados cuánticos altamente coherentes para los cuales se cumple la siguiente relación; $\Psi^\chi(x) \equiv \langle \chi | \hat{\Psi}(x) | \chi \rangle \equiv \langle \hat{\Psi}(x) \rangle_\chi$, siendo $|\chi\rangle$ el correspondiente estado del campo cuántico.

En este tratamiento se trabajará en el marco de Heisenberg, y además consideraremos que la historia del sistema cuántico vendrá descrita por únicamente dos estados: un estado pre-colapso $|0\rangle =, ..|0_{\vec{k}_2}\rangle \otimes |0_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |0_{\vec{k}_0}\rangle \otimes |0_{-\vec{k}_1}\rangle \otimes |0_{-\vec{k}_2}\rangle, ..$ el cual corresponde al estado de vacío (H&I), y un estado post-colapso $|\Xi\rangle =, ..|\Xi_{\vec{k}_2}\rangle \otimes |\Xi_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |\Xi_{\vec{k}_0}\rangle \otimes |\Xi_{-\vec{k}_1}\rangle \otimes |\Xi_{-\vec{k}_2}\rangle, ..$ del campo $\hat{v}(x)$, caracterizando conjuntamente las perturbaciones de la métrica y las del fluido. Una vez cuantizada la teoría, tomando lado a lado de la ecuación (6.17) el valor de expectativa en el estado $|\chi\rangle$, se encuentra una ecuación análoga a (6.17) en la que se ha cambiado $\hat{\Psi}(\eta, \vec{x})$ por $\langle \chi | \hat{\Psi}(\eta, \vec{x}) | \chi \rangle$ y $\hat{v}(\eta, \vec{x})$ por $\langle \chi | \hat{v}(\eta, \vec{x}) | \chi \rangle$. Realizando sobre la ecuación en cuestión un desarrollo en modos de Fourier y tomando $|\chi\rangle$ como el estado vacío $|0\rangle$, se encuentra;

$$\langle 0 | \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) | 0 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{l_p \beta}{\mathcal{H} c_s^2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{\langle 0 | \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) | 0 \rangle}{z} \right)'. \quad (6.21)$$

Por otro lado, dado que $\langle 0 | \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta_i) | 0 \rangle = 0$, y restringiéndonos a la evolución unitaria dada por la mecánica cuántica estándar se consigue que $\langle 0 | \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) | 0 \rangle = 0$ para todo tiempo, implicando a través de (6.21) que; $\langle 0 | \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) | 0 \rangle = 0$. Esto exhibe el problema aludido anteriormente, que las simetrías del estado inicial no son compatibles con las perturbaciones de la métrica. Para lidiar con este problema, al igual como se procedió en el **capítulo 4**, introduciremos la *hipótesis de colapso auto-inducido*.

Cuando el modo k nace en el tiempo $\eta_0^{(k)}$, el estado $|0, k\rangle$ es perfectamente homogéneo e isotrópico. Posteriormente ocurre un colapso en algún tiempo η_k^c , lo cual genera una transición $|0\rangle \rightarrow |\Xi\rangle$ a un nuevo estado $|\Xi\rangle$ el cual no tiene las simetrías del estado inicial, entonces en general $\langle \Xi | \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) | \Xi \rangle \neq 0$ para todo $\eta \geq \eta_k^c$, y de esta manera el proceso de colapso permite explicar el surgimiento de las semillas de estructura cósmica.

En esta trabajo, se considerara un simple caso en el cual solo ocurre un colapso por modo \mathbf{k} . Específicamente se asumirá que en un tiempo η_k^c , el modo \mathbf{k} experimenta un colapso $|0_{\mathbf{k}}\rangle \rightarrow |\Xi_{\mathbf{k}}\rangle$. Se supondrá que este colapso tiene lugar de acuerdo a ciertas reglas específicas las cuales han sido descritas con detalle en capítulos anteriores y como bien vimos estas reglas dependen en particular del *esquema de colapso* considerado. El punto importante aquí es que; después del colapso del modo \mathbf{k} en general el universo ya no será más homogéneo e isotrópico.

Así, la ecuación para la perturbación Ψ , durante $\eta \geq \eta_k^c$, (en el espacio de Fourier) será;

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta) &\equiv \langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} \equiv \langle \Xi | \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) | \Xi \rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{l_p \beta}{\mathcal{H} c_s^2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi}}{z} \right)' \end{aligned} \quad (6.22)$$

Este es el momento donde debemos establecer contacto con las observaciones, para esto retomaremos el análisis realizado en la sección 3.2.3, y exactamente nos enfocaremos en calcular la cantidad señalada en la ecuación (3.114) la cual contiene la información con respecto a la predicción teórica del espectro primordial.

Entonces, deseamos calcular para los modos relevantes a nivel cosmológico, la cantidad $\overline{\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta) \Psi_{\mathbf{k}'}^{\Xi*}(\eta)}$, donde la barra indica promedio sobre un ensamble teórico de universos. De esta forma, el espectro de potencias para el potencial Newtoniano vendrá dado por;

$$\mathcal{P}_{\Psi}(k) = \overline{\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta) \Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi*}(\eta)}. \quad (6.23)$$

Nuestro objetivo será considerar las modificaciones generadas al incorporar la hipótesis de colapso auto-inducido en el modelo de Hollands y Wald, y con esto exploraremos bajo que condiciones o circunstancias, se puede obtener una predicción del espectro de potencias cercano al “espectro invariante de escala” pero con correcciones que presumiblemente nos indiquen que n_s no es exactamente igual la unidad para el caso de los modos k relevantes, ver (3.121), que como recordamos son aquellos que tienen longitud de onda (propia) mayor que el radio de Hubble en el tiempo de desacople.

6.1.1. Análisis de la implementación

Iniciaremos, en analogía con los dos capítulos anteriores, descomponiendo los operadores $\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta)$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta)$ en su parte real e imaginaria,

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) &= \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R}}(\eta) + i \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{I}}(\eta) \\ \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) &= \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{R}}(\eta) + i \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{I}}(\eta) \end{aligned}$$

con $\hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}} v_k(\eta) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}\dagger} v_k^*(\eta) \right)$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}} \pi_k(\eta) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}\dagger} \pi_k^*(\eta) \right)$, donde $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}})$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{I}} = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{-\mathbf{k}})$, donde la relación clásica $\pi(\eta) = v'(\eta)$ implica

$\pi_k(\eta) = v'_k(\eta)$. La descomposición realizada es tal que $\hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta)$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta)$ son operadores Hermíticos, pero las relaciones de conmutación, no nulas y a tiempos iguales, entre estos operadores no serán las relaciones de conmutación estándar, estas son;

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{R}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\text{R}\dagger}] &= (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{I}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\text{I}\dagger}] &= (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

De igual forma como fue implementado en el **capítulo 4** se asume, en analogía con la mecánica cuántica estándar, que el colapso es análogo a una medición imprecisa de los operadores Hermíticos $\hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}$ and $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}$.

La propuesta de esquema de colapso, establece que en un cierto tiempo η_k^c que en general depende del modo \vec{k} , el estado base $|0_k\rangle$ correspondiente al modo \vec{k} sufre un cambio instantáneo (o colapso) de tal forma que el valor de expectación de los operadores de campo y momento conjugado en el estado post-colapso $|\Xi_k\rangle$ serán;

$$\begin{aligned} \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} &= x_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}} \sqrt{\langle (\Delta \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta_k^c))^2 \rangle_0} \\ &= \frac{x_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}}{\sqrt{2}} |v_k(\eta_k^c)| \equiv s_{(k)} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = 0, \quad (6.25)$$

donde $\langle (\Delta \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta_k^c))^2 \rangle_0$ es la incertidumbre cuántica del operador $\hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}$ en el estado de vacío $|0\rangle$, y además los números $x_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}$ son una colección de cantidades aleatorias independientes y a través de (6.22) serán parte de $\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta)$. Si la distribución de los números $x_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}$ es tal que el valor medio coincide con el más probable, entonces se conseguirá que: $|a_{lm}|_{\text{ML}}^2 \simeq \overline{|a_{lm}|^2}$.

Teniendo esto en mente, de igual forma como se asumió inicialmente en el contexto inflacionario, supondremos que los $x_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}$ son un conjunto de números aleatorios independientes de una distribución gaussiana centrada en cero y con ancho igual a uno. Entonces, de manera análoga a como se encontró (4.27) y (4.28), acá también se obtiene;

$$\overline{x_{\mathbf{k}}^{\text{R}} x_{\mathbf{k}'}^{\text{R}}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \quad (6.26)$$

$$\overline{x_{\mathbf{k}}^{\text{I}} x_{\mathbf{k}'}^{\text{I}}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \quad (6.27)$$

Al igual que en el **capítulo 4** podemos enfatizar que nuestro universo corresponde a una realización de estas variables aleatorias.

Por otro lado, según (6.22) para evaluar $\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta)$, necesitamos conocer la cantidad $\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi}$ para todo $\eta \geq \eta_k^c$, con esta finalidad haremos uso de las siguientes relaciones de Ehrenfest,

$$\frac{d}{d\eta} \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} = \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} \quad (6.28)$$

$$\frac{d}{d\eta} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} = -\left(c_s^2 k^2 - \frac{A}{\eta^2}\right) \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} \quad (6.29)$$

Derivando (6.28) con respecto a η y usando (6.29) para desacoplar el sistema, se encuentra;

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} = - \left(c_s^2 k^2 - \frac{A}{\eta^2} \right) \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} \quad (6.30)$$

la cual tiene como solución general;

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} = \alpha_1^{\text{R,I}} f(\eta) + \alpha_2^{\text{R,I}} h(\eta), \quad (6.31)$$

en donde hemos definido;

$$f(\eta) \equiv \sqrt{\eta} J_n(c_s k \eta) \quad (6.32)$$

$$h(\eta) \equiv \sqrt{\eta} Y_n(c_s k \eta), \quad (6.33)$$

por otra parte, debido a la relación clásica $\pi = v'$, entonces a nivel cuántico se satisface;

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} = \frac{d}{d\eta} \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} = \alpha_1^{\text{R,I}} f'(\eta) + \alpha_2^{\text{R,I}} h'(\eta). \quad (6.34)$$

Evaluando (6.31) y (6.34) en η_k^c , y haciendo uso del esquema de colapso (6.24)-(6.25), las constantes $\alpha_1^{\text{R,I}}$ y $\alpha_2^{\text{R,I}}$ (las cuales según $s_{(k)}$ definido en la ecuación (6.24), están relacionadas con η_k^c , $x_{\mathbf{k}}^{\text{R}}$ y $x_{\mathbf{k}}^{\text{I}}$) podrán ser escritas como;

$$\alpha_1^{\text{R,I}} = \frac{\pi s_{(k)} h'(\eta_k^{(k)})}{2} \quad (6.35)$$

$$\alpha_2^{\text{R,I}} = -\frac{\pi s_{(k)} f'(\eta_k^{(k)})}{2}, \quad (6.36)$$

y de esta forma, sustituyendo lo anterior en (6.31) se encuentra;

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} = \frac{\pi s_{(k)}}{2} \left[h'(\eta_k^c) f(\eta) - f'(\eta_k^c) h(\eta) \right]. \quad (6.37)$$

Nos restringiremos al caso para el cual el tiempo de nacimiento $\eta_0^{(k)}$, el tiempo de colapso η_k^c para cada modo k relevante y el tiempo de evaluación η (el cual estrictamente hablando deberá ser el tiempo de desacople), satisfacen $\eta_0^{(k)} < \eta_k^c < \eta$. Además, debemos usar el hecho que los modos k de interés o relevantes para las observaciones satisfacen $k\eta \ll 1$, correspondiendo a modos con longitud de onda (propia) mayor que el radio de Hubble en el tiempo de desacople. De esta forma, se justifica que podamos hacer uso de las formas asintóticas para pequeños argumentos de las funciones de Bessel sobre las funciones $h'(\eta_k^c)$, $f'(\eta_k^c)$, $f(\eta)$ y $h(\eta)$.

De esta forma el resultado (6.37) puede ser aproximado por;

$$\begin{aligned} \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} \simeq & \frac{\pi s_{(k)}}{2} \left[\frac{\sqrt{2}\Gamma(n)(n - \frac{1}{2})}{\pi \sqrt{k c_s \eta_k^c}} \left(\frac{2}{k c_s \eta_k^c} \right)^{n - \frac{1}{2}} f(\eta) + \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{k c_s} (n + \frac{1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(n + 1)} \left(\frac{k c_s \eta_k^c}{2} \right)^{n - \frac{1}{2}} h(\eta) \right]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Nota: Hemos llevado a cabo un análisis numérico en el cual se evalúan, por separado, las cantidades exactas (6.37) y aproximadas (6.38), para luego compararlas y se encuentra que

el resultado es prácticamente **indistinguible** en los rangos de validez de las aproximaciones.

Podemos ver que para los modos de interés físico se puede aproximar $|v_k(\eta)|$ de (6.15) por la expresión;

$$|v_k(\eta)| \simeq \frac{1}{4n\sqrt{c_s k}} \left[(2n-1) \left(\frac{\eta}{\eta_0^{(k)}} \right)^{n+\frac{1}{2}} + (1+2n) \left(\frac{\eta_0^{(k)}}{\eta} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right]. \quad (6.39)$$

Ahora, la hipótesis de Hollands y Wald, es decir; el factor de escala $a(\eta)$ evaluado en el tiempo $\eta_0^{(k)}$, en que el modo k nace, toma el siguiente valor: $a(\eta_0^{(k)}) = \mathcal{C}(\eta_0^{(k)})^{\frac{2}{3\omega+1}} \simeq kl_0$, usando esta relación y teniendo en cuenta que para $\omega \in (0, 1)$ se cumple que $\frac{2}{3\omega+1} \equiv n + \frac{1}{2}$, entonces la ecuación (6.39) puede ser escrita como;

$$|v_k(\eta)| \simeq \frac{a(\eta)}{4nl_0 c_s^{1/2} k^{3/2}} \left[(2n-1) + (2n+1) \left(\frac{kl_0}{a(\eta)} \right)^{\frac{4n}{2n+1}} \right], \quad (6.40)$$

donde vemos, como caso límite, que si $\eta = \eta_0^{(k)}$ entonces (6.40) se reduce a; $|v_k(\eta_0^{(k)})| = \frac{1}{\sqrt{c_s k}}$. Otro caso límite se consigue para el ω correspondiente a radiación, esto es $\omega = \frac{1}{3}$ (ó en términos de n , $n = \frac{1}{2}$). Para este caso (6.40) se reduce a; $|v_k(\eta)| = \frac{1}{\sqrt{c_s k}}$.

Ahora, con ayuda de (6.24), evaluamos la incertidumbre cuántica de $\hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta_k^c)$ para el estado $|0\rangle$. La expresión aproximada para $\langle (\Delta \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta))^2 \rangle_0$, evaluado en η_k^c será;

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta_k^c))^2 \rangle_0 &\simeq \frac{a^2(\eta_k^c)}{32n^2 l_0^2 c_s k^3} \left[(2n-1) \right. \\ &\quad \left. + (1+2n) \left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)} \right)^{\frac{4n}{2n+1}} \right]^2, \end{aligned} \quad (6.41)$$

de la anterior expresión junto con (6.24), se obtiene;

$$s_{(k)} \simeq \frac{a(\eta_k^c)}{4n\sqrt{2c_s l_0} k^{3/2}} \left[2n-1 + (1+2n) \left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)} \right)^{\frac{4n}{2n+1}} \right] x_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}} \quad (6.42)$$

Por otra parte, dado que $z = \xi \eta^{\frac{2}{3\omega+1}}$, con $\xi = \frac{-\sqrt{3\omega+3}}{\sqrt{2} c_s} \eta_{\text{hoy}}^{\frac{-2}{3\omega+1}}$, la expresión (6.22) puede ser escrita como;

$$\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{l_p \beta}{\xi \mathcal{H} c_s^2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi}}{\eta^{\frac{2}{3\omega+1}}} \right)'. \quad (6.43)$$

Sustituyendo (6.42) en (6.38), para luego sustituir dicho resultado en (6.43) y por último calcular el promedio: $\overline{\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta) \Psi_{\mathbf{k}'}^{\Xi*}(\eta)}$. Ahora, usando el hecho de que las variables aleatorias $x_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}$ satisfacen (6.26), (6.27), finalmente encontramos la cantidad de interés,

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta) \Psi_{\mathbf{k}'}^{\Xi*}(\eta)} &= 2 \overline{\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi} \langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}'}^{\text{R,I}}(\eta) \rangle_{\Xi}} \\ &\simeq \frac{3 l_p^2 \beta^2 a^2(\eta_c)}{256 n^2 \mathcal{H}^2 c_s^5 l_0^2 \xi^2 k^3} \left[2n-1 + (1+2n) \left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)} \right)^{\frac{4n}{2n+1}} \right]^2 \left[\delta_1 + \frac{\delta_2}{k^2} \right]^2 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

donde las funciones $\delta_1(\eta)$ y $\delta_2(\eta)$ se definen como;

$$\begin{aligned}\delta_1 &\equiv \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c_s^2 \eta}{n(n+1)2^{n+1}} \left(\frac{2}{\eta_k^c}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\ \delta_2 &\equiv \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2^{n+1}}{\eta^{2n+1}} \left(\frac{\eta_k^c}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (6.45)$$

Usando $a(\eta_k^c) = \mathcal{C}(\eta_k^c)^{n+\frac{1}{2}}$ se logra hacer que el lado derecho de (6.44) adquiera la siguiente forma;

$$\begin{aligned}\overline{\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta)\Psi_{\mathbf{k}'}^{\Xi*}(\eta)} &\simeq \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{3}{2048k^3} \left\{ \frac{\mathcal{C}l_p\beta\eta}{(n+1)n^2\sqrt{c_s}\mathcal{H}l_0\xi} \left[2n-1 \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1+2n)\left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)}\right)^{\frac{4n}{2n+1}} \right] \left[2n-1 \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{4n(2n^2+3n+1)(\eta_k^c)^{2n}}{c_s^2\eta^{2n+2}k^2} \right] \right\}^2.\end{aligned}\quad (6.46)$$

Notamos que cuando $|2n-1| \gg (1+2n)\left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)}\right)^{\frac{4n}{2n+1}}$ y $|2n-1| \gg \frac{4n(2n^2+3n+1)(\eta_k^c)^{2n}}{c_s^2k^2\eta^{2n+2}}$, la parte dominante de (6.46) es compatible con la predicción del espectro invariante de escala de H&Z, es decir se obtiene; $\overline{\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta_D)\Psi_{\mathbf{k}'}^{\Xi*}(\eta_D)} \propto \frac{1}{k^3}$, y este valor resulta ser independiente, salvo correcciones, del tiempo de colapso η_k^c del modo \vec{k} .

Sin embargo, es claro que este no es el caso $n = 1/2$ correspondiente a radiación $\omega = 1/3$, (recordemos que para $0 < \omega < 1$ se cumple que $\frac{2}{3\omega+1} \equiv n + \frac{1}{2}$, implicando $0 < n < \frac{3}{2}$).

Ahora, consideraremos las correcciones que modifican el espectro invariante de escala de H&Z. Para esto nos enfocaremos en las dos desigualdades mencionadas previamente.

Para $n \in (0, 2/3)$, se cumple que $|2n-1| < (1+2n)$, entonces para satisfacer la desigualdad:

$|2n-1| \gg (1+2n)\left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)}\right)^{\frac{4n}{2n+1}}$ será necesario que: $\left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)}\right)^{\frac{4n}{2n+1}} \ll 1$, ahora conociendo el dominio de ω y su relación con n , resulta fácil concluir que el exponente de la cantidad del lado derecho de esta desigualdad, comprende los valores: $0 < \frac{4n}{2n+1} < \frac{3}{2}$. Por otro lado, como los modos colapsan después de que nacen la siguiente desigualdad será correcta $kl_0 = a(\eta_0^{(k)}) < a(\eta_k^c)$. Entonces $\left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)}\right)^{\frac{4n}{2n+1}} \ll 1$ se verificara siempre y cuando el colapso ocurra lo suficientemente después del nacimiento del modo, de forma que los dos factores de escala $a(\eta_0^{(k)})$ y $a(\eta_k^c)$ difieran en por lo menos dos ordenes de magnitud y que el parámetro n , que caracteriza el fluido, no sea tan cercano a cero.

En resumen, podemos concluir que la desigualdad: $|2n-1| \gg (1+2n)\left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)}\right)^{\frac{4n}{2n+1}}$ será valida siempre que $0 \ll n < \frac{3}{2}$ y el colapso ocurra de modo que $a(\eta_0^{(k)})$ y $a(\eta_k^c)$ difieran en por lo menos dos ordenes de magnitud.

Ahora nos enfocaremos en la desigualdad: $|2n-1| \gg \frac{4n(2n^2+3n+1)(\eta_k^c)^{2n}}{c_s^2k^2\eta^{2n+2}}$. En el denominador del lado derecho de esta desigualdad se encuentra la cantidad c_s , definida como $c_s = \sqrt{w}$, por lo tanto c_s va a cero cuando ω va a cero, o equivalentemente cuando n se acerca a $\frac{3}{2}$. Por otra parte, el término $(\eta_k^c/\eta)^{2n}$ es pequeño (significa que es mayor que cero y menor a

uno) simplemente porque estamos interesados en la cantidad (6.46) evaluada en un tiempo η posterior al tiempo de colapso η_k^c para cada modo relevante, seguido de que para el dominio de ω se tiene que $n > 0$. Entonces, que tan pequeño sea este cociente dependerá de que tan separados estén el tiempo de colapso η_k^c y el de evaluación η . Además, este término es modulado por el factor $4n(2n^2 + 3n + 1)$ el cual, dado que $0 < \omega < 1$, se encuentra en el rango $(0, 60)$. Entonces, la segunda desigualdad será satisfecha si; $0 \ll c_s < 1$ (esto significa que $0 < n \ll \frac{3}{2}$), junto con la condición de que el colapso no ocurra en un tiempo cercano al de evaluación.

De esta forma, para el caso de fluidos tales que $0 \ll n \ll \frac{3}{2}$, junto con $|2n - 1| \gg 0$, (o en términos de ω , $0 \ll \omega \ll 1$, y $|3\omega - 1| \gg 0$) y que el colapso ocurra lo suficientemente temprano, se encuentra que la expresión (6.46) para el espectro de potencias es bien aproximada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Psi^\Delta(k) = \overline{\Psi_{\mathbf{k}}^\Xi(\eta_D)\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi*}(\eta_D)} &\simeq \frac{3}{2048k^3} \left\{ \frac{\mathcal{C}l_p\beta\eta(2n-1)^2}{(n+1)n^2\sqrt{c_s}\mathcal{H}l_0\xi} \left[1 + \right. \right. \\ &+ \frac{(1+2n)}{(2n-1)} \left(\frac{kl_0}{a(\eta_k^c)} \right)^{\frac{4n}{2n+1}} \\ &\left. \left. + \frac{4n(2n^2+3n+1)(\eta_k^c)^{2n}}{c_s^2\eta^{2n+2}(2n-1)k^2} \right] \right\}^2 \Bigg|_{\eta=\eta_D}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

para la cual el término dominante corresponde al espectro invariante de escala de H&Z, y los demás términos nos dan las correcciones a este espectro. Fácilmente podemos ver que el término dominante en (6.47) no depende del tiempo de colapso de los modos relevantes. En (6.47) únicamente las correcciones al espectro invariante de escala dependen del tiempo de colapso η_k^c .

Esto es muy similar a lo ocurrido en el tratamiento dado en la cosmología estándar inflacionaria con hipótesis de colapso. Por ejemplo para el caso dado por el esquemas de colapso independiente consideremos el resultado para la cantidad de interés presentado en la ecuación (4.31), esto es;

$$\overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta) \rangle}_{independiente} = \frac{\hbar L^3 k}{4a^2(\eta)} \left[1 + \frac{2}{z_k^2} \text{sen}^2(\Delta_k) + \frac{1}{z_k} \text{sen}(2\Delta_k) \right] \quad (6.48)$$

se definió: $\Delta_k = k\eta - k\eta_k^c$, en donde η corresponde al tiempo de evaluación el cual para este tratamiento coincide con el tiempo conforme que indica el final de inflación, mientras que η_k^c es el tiempo en el que el modo k colapsa. Como se discutió en el **capítulo 4**, únicamente si la cantidad $\overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta) \rangle}$ es lineal en k (para los modos \vec{k} de interés físico, estos son (3.121), y evaluada al final de inflación) el espectro invariante de escala de H&Z es recuperado. Ahora, consideraremos sólo los modos \vec{k} de interés y tendremos en cuenta que para el final de inflación $k\eta \approx 0$, entonces, siempre que $0 < |k\eta_k^c| \ll 1$ (esto pasa si los modos \vec{k} de interés físico, se colapsan más o menos cerca del final de inflación, pero no tan cerca como para que se cumpla $k\eta \approx k\eta_k^c$) esto implica que $\Delta_k \rightarrow -k\eta_k^c$, entonces sustituyendo esto en (6.48), y usando el desarrollo en series de potencias para la función seno, se llega a;

$$\overline{\langle \hat{\pi}_k(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_k^\dagger(\eta) \rangle}_{independiente} = \frac{\hbar L^3 k}{4a^2(\eta)} \left\{ 1 + \left[\frac{2(k\eta_k^c)^2}{3} + O(3) \right] \right\}, \quad (6.49)$$

por lo tanto, siempre y cuando para los modos relevantes se cumpla que $k\eta_k^c \ll 1$, el término dominante, de la ecuación anterior, conducirá al espectro invariante de escala de H&Z.

Vemos que para este caso la cantidad de interés (6.49) presenta el mismo comportamiento que el obtenido para la cantidad de interés en una de las situación consideradas de los resultados de este capítulo, nos referimos al resultado presentado en (6.47), puesto que al igual que en (6.47) la parte dominante de (6.49) es independiente del valor del tiempo de colapso η_k^c del modo \vec{k} .

Para finalizar este capítulo consideraremos el caso con mayor interés físico. Este es el caso en el cual el fluido dominante es tipo radiación y para esto $\omega = \frac{1}{3}$. En la propuesta original, citada [21], se encuentra que para el caso de pura radiación no es posible recuperar el espectro invariante de escala. Naturalmente, se pondría pensar que al incluir la hipótesis de colapso auto-inducido, y con ella un nuevo parámetro η_k^c , se podría modificar esta conclusión. Esta posibilidad puede ser explorada fijando $w = 1/3$, o lo que es lo mismo ($n = 1/2$), en la ecuación (6.46), habiendo realizado esto encontramos;

$$\mathcal{P}_\Psi^{w=1/3}(k) \simeq \frac{3 l_p^2 \beta^2}{2\mathcal{H}^2 c_s^5 \xi^2 \eta^4 k^5} \Bigg|_{\eta=\eta_D} \quad (6.50)$$

el cual claramente difiere de la dependencia correcta en k , esto es $\mathcal{P}_\Psi(k) \sim \frac{1}{k^3}$, que define al espectro compatible con el espectro plano invariante de escala de H&Z. Además, para este caso también se encuentra que el resultado para el espectro de potencias, no es función del tiempo de colapso, eliminando con esto la posibilidad de ajustar la dependencias de η_k^c con k , motivados en recuperar el espectro invariante de escala. Otro dato notable, es que el resultado anterior tampoco depende del parámetro l_0 el cual caracteriza el “tiempo de nacimiento” de los modos relevantes.

6.1.2. Estimaciones

Recapitulando, según el modelo de Hollands y Wald, el modo $\vec{k}^{(k)}$ emerge en un tiempo $\eta_0^{(k)}$ en el cual su longitud de onda propia (o física) es igual a una longitud fundamental denotada por l_0 la cual presumiblemente es del orden de la longitud de Planck $l_p \approx 10^{-57}$ Mpc.

Ahora, con el objetivo de estimar el valor de l_0 , razonaremos de manera paralela a la realizada en la subsección 5.2.4. Debemos concentrarnos en el caso particular para el cual la parte dominante de (6.47) posee la dependencia en k compatible con el espectro invariante de escala de H&Z. Enfocados en este caso, el modelo de Hollands y Wald con hipótesis de colapsos auto-inducido predice la siguiente forma para N_Ψ ;

$$N_\Psi^2 = \frac{3}{2048} \left\{ \frac{\mathcal{C} l_p \beta \eta (2n-1)^2}{(n+1)n^2 \sqrt{c_s} \mathcal{H} l_0 \xi} \right\}^2 \Bigg|_{\eta=\eta_D} \quad (6.51)$$

Enfatizaremos que lo anterior es valido bajo las siguientes consideraciones; $0 \ll n \ll \frac{3}{2}$, junto con $|2n-1| \gg 0$, y que el colapso ocurra lo suficientemente temprano. Mientras que las demás cantidades que aparecen en (6.51) fueron definidas como;

$$\xi = \frac{-\sqrt{3\omega+3}}{\sqrt{2} c_s} \eta_{\text{hoy}}^{\frac{-2}{3\omega+1}}, \quad \mathcal{C} = \eta_{\text{hoy}}^{\frac{-2}{3\omega+1}}, \quad c_s = \sqrt{\omega}, \quad \mathcal{H} = \frac{2}{(3\omega+1)\eta}, \quad \beta = \frac{6(\omega+1)}{(3\omega+1)^2 \eta^2}, \quad n = \frac{3-3\omega}{2(3\omega+1)}, \quad \eta_D = (a_D/\mathcal{C})^{\frac{3\omega+1}{2}}, \quad l_p \approx 10^{-57} \text{Mpc}, \quad a_D = 10^{-3}.$$

Para proceder necesitaremos estimar el valor de η_{hoy} y para esto haremos uso del valor de la constante de Hubble H_0 . Calcularemos $H_0 = \left. \frac{\mathcal{H}(\eta)}{a(\eta)} \right|_{\eta=\eta_{\text{hoy}}}$ a través de $a(\eta) = \mathcal{C}\eta^{\frac{2}{3\omega+1}}$ se encuentra que;

$$\eta_{\text{hoy}} = \frac{2}{(3\omega + 1)H_0}. \quad (6.52)$$

Según las observaciones $H_0 = 67.3 \text{ Km}/(\text{s Mpc})$, que en unidades de longitud es equivalente a; $H_0 = 7.3 \times 10^{-27}/\text{m} = 2.2 \times 10^{-4}/\text{Mpc}$, ($1 \text{ Mpc} = 3.085 \times 10^{22} \text{ m}$), así que encontramos,

$$\eta_{\text{hoy}} = \frac{9.09 \times 10^3}{3\omega + 1} \text{Mpc}. \quad (6.53)$$

Sustituyendo los datos anteriores en (6.51) y recordando que las observaciones indican que $N_{\Psi}^2 \approx 18\pi^2 \times 10^{-10}$, se encuentra que;

$$l_0^2 \approx \frac{\sqrt{\omega} (3\omega - 1)^4 (\omega + 1)}{1.62\pi^2 (\omega - 1)^4 (5 + 3\omega)^2} \times 10^{-106} \text{Mpc}^2. \quad (6.54)$$

Evaluando para los valores de ω tales que la cantidad de interés \mathcal{P}_{Ψ} se reduce a (6.47), estos son $0 \ll \omega \ll 1$ y $|3\omega - 1| \gg 0$, obtenemos $l_0(\omega) \in (10^{-57}, 10^{-52}) \text{ Mpc}$, mostrando consistencia con el planteamiento, puesto que se encuentra que l_0 en función del fluido ω puede ser igual o cercano por la derecha al orden de magnitud de la longitud de Planck $l_p \approx 10^{-57} \text{Mpc}$.

Finalizaremos esta sección calculando¹ $n_s(k_{piv})$ para este modelo. A partir del espectro de potencias definido a través de (6.47), se encuentra que $n_s(k_{piv})$, definido como;

$$n_s(k_{piv}) = 1 + \left. \frac{d \ln(k^3 \mathcal{P}_{\Psi})}{d \ln k} \right|_{k=k_{piv}} \quad (6.55)$$

en función del ω que caracteriza al fluido y de las variables $\tilde{l}_0 = l_0/\text{Mpc}$, $\tilde{\eta}_k^c = \eta_k^c/\text{Mpc}$ y $\tilde{\eta}_D = \eta_D/\text{Mpc}$, presenta el comportamiento ilustrado el cuadro (6.1).

En la primera columna (de lado izquierdo) se enumeran algunos valores de ω comprendidos en el intervalo $(0, 1)$. Por otro lado, a través de la ecuación (6.54) para cada ω se determina el valor de l_0 (listados en la segunda columna) requerido por el modelo para conseguir la amplitud observada de las fluctuaciones de la temperatura $\frac{\delta T}{T} \approx 10^{-5}$. La siguiente columna es para los η_k^c los cuales son elegidos para que el $n_s(k_{piv})$ teórico quede dentro del rango de validez del $n_s(k_{piv})$, ecuación 3.127, determinado por las observaciones. En la cuarta columna, a través de $\eta_D = (a_D/\mathcal{C})^{\frac{3\omega+1}{2}}$ junto con $a_D = a(\eta_D) = 10^{-3}$, se determinan y listan los tiempos conformes de desacople η_D correspondientes a cada ω . Posteriormente, calculando de el tiempo conforme en que el modo k_{piv} nace; $\eta_0^{(k_{piv})} = (k_{piv} l_0/\mathcal{C})^{\frac{3\omega+1}{2}}$, junto con las columnas para $\eta_{k_{piv}}^c$ y η_D , podemos visualizar que tan temprano o tarde ocurre el colapso del modo k . En la quinta columna se presentan los resultados para $n_s(k_{piv})$ obtenidos para distintos valores de ω , mientras que en las dos últimas columnas se presentan las evaluaciones de $\mathcal{P}_{\Psi}^{\Delta}(k_{piv})$ y $\mathcal{P}_{\Psi}(k_{piv})$, ecuaciones (6.47) y (6.46) respectivamente, lo cual nos permite apreciar que tan buena es la aproximación (6.47) con respecto al resultado analítico “casi exacto”

¹ver ecuación (3.127).

ω	\tilde{l}_0	ajuste $\tilde{\eta}_{k_{piv}}^c$	$\tilde{\eta}_D$	$n_s(k_{piv})$	$\mathcal{P}_\Psi^\Delta(k_{piv})$	$\mathcal{P}_\Psi(k_{piv})$
0.01	1.516×10^{-55}	1.9909	251.60	0.960	2.2652	2.2652
0.1	1.683×10^{-55}	0.1014	78.45	0.960	2.2646	2.2646
0.15	1.282×10^{-55}	0.0094	41.89	0.964	2.2603	2.2603
0.2	8.178×10^{-56}	0.0006	22.61	0.960	2.2648	2.2648
0.25	3.820×10^{-56}	0.00002	12.31	0.960	2.2649	2.2649
0.3	7.299×10^{-57}	3.1×10^{-7}	6.75	0.960	2.2648	2.2648
0.33	8.129×10^{-59}	2.8×10^{-9}	4.72	0.960	2.2652	2.2652
0.333	8.218×10^{-61}	2.1×10^{-10}	4.56	0.960	2.2646	2.2646
,...	,...	,...	,...	,...	,...	,...
0.333333333	8.228×10^{-73}	2.0×10^{-16}	4.54	0.960	2.2653	2.2653
1/3	indiferente	indiferente	4.54	-1	0	1×10^{-96}
0.35	2.185×10^{-57}	1.3×10^{-18}	3.73	1	2.2206	2.2206
0.5	3.96×10^{-55}	8.5×10^{-29}	0.64	0.999	2.2206	2.2206
0.7	5.64×10^{-54}	6.5×10^{-64}	0.06	0.999	2.2206	2.2206
0.99	indiferente	indiferente	0.002	$ n_s \gg 0.96$	$[10^{16}, 10^{17}]$	$[10^{12}, 10^{17}]$

Cuadro 6.1: Índice espectral n_s evaluado en el k_{piv} . Este valor es función de ω , l_0 , $\eta_{k_{piv}}^c$, η_D .

$$\mathcal{P}_\Psi(k) = \overline{\Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi}(\eta_D) \Psi_{\mathbf{k}}^{\Xi*}(\eta_D)}$$
 para todo $\omega \in (0, 1)$ obtenido en (6.46).

Análisis de los resultados, los datos en color negro son aceptables puesto que respaldan la auto-consistencia de las suposiciones e hipótesis del tratamiento, los datos de color verde corresponden a los de mayor relevancia física o bien los que se encuentran mejor respaldados por las observaciones, los de color azul presentan cierta inconsistencia con algunas de las suposiciones del tratamiento, mientras que los datos en color rojo son resultados incompatibles con las observaciones. Como una manera de enfatizar lo anteriormente mencionado, en la segunda columna, por ejemplo para $\omega = 0.33$ el valor de l_0 correspondiente es mucho menor el de la longitud de Planck, lo cual va en contra de la hipótesis inicial la cual establece que la longitud l_0 es presumiblemente del orden, o mayor, al de la longitud l_p . En la quinta columna también tenemos algunos resultados en azul, por ejemplo para $\omega = 0.7$ se encuentra que $n_s(k_{piv})$ es una desviación leve de lo que correspondería al espectro plano invariante de escala, pero no lo suficiente como para ingresar al rango de validez compatible con las observaciones. Sin embargo, en esta misma columna también aparecen algunos resultado en verde, como lo es para el caso $\omega = 0.3$, en este caso se encuentra un l_0 consistente con las suposiciones e hipótesis del tratamiento, también se observa que (6.47) es una buena aproximación, y como un perfecto complemento, para este caso se consigue un $n_s(k_{piv})$ dentro del rango observacional. Por otro lado, a lo que podría considerarse como el caso de mayor relevancia física, esto es $\omega = 1/3$ correspondiente a radiación, resulta que no hay manera de ajustar l_0 , y $\eta_{k_{piv}}^c$ de modo que el valor $n_s(k_{piv})$ quede dentro del resultado observacional, puesto que el comportamiento encontrado ni siquiera es una leve desviación de el correspondiente al espectro plano invariante de escala. Algo similar ocurre para el caso $\omega = 0.99$. Para ambos casos, $\omega = 1/3$, y $\omega = 0.99$ el espectro de potencias vendrá dado por (6.46) puesto que para estos valores de ω la cantidad encontrada en (6.47) no es una buena aproximación para el espectro de potencias.

Para lo anterior sólo nos enfocamos en colapso del modo k_{piv} , para el cual \vec{k}_{piv} es un vector de ondas fiducial o pivote en torno al que se desarrolla el índice espectral, de igual manera debemos especificar el tiempo de colapso de los demás modos k de interés físico. Podríamos asumir que para un fluido ω en específico todos los modos se colapsan al mismo tiempo. Por ejemplo para $\omega = 0.3$ se podría plantear que todos los modos se colapsan al mismo tiempo conforme dado por; 3.1×10^{-7} Mpc (ver tabla 1). Naturalmente, por construcción se obtendría para este caso, que $n_s(k_{piv}) = 0.960$, que sería precisamente compatible con las observaciones, pero para otro modo k igual relevante para las observaciones, como lo es $k_* = 0.0008/\text{Mpc}$, se encuentra que $n_s(k_*) = 0.767$, lo cual se aleja demasiado de lo que correspondería al espectro plano invariante de escala.

Por otro lado, la siguiente regla sobre el colapso de los modos k , basada en asumir que el modo k se colapsa cuando su longitud propia es igual a la longitud característica l_c , la cual por consistencia del modelo, deberá ser mayor l_0 . Esta regla implica que para el tiempo conforme η_k^c en el cual el modo k se colapsa, se tiene que; $\lambda = a(\eta_k^c)\lambda_{com} = a(\eta_k^c)\frac{2\pi}{k} = l_c$, implicando que cuando el modo k se colapsa el factor de escala toma el valor $a(\eta_k^c) \approx kl_c$. Consecuentemente, incorporando esta suposición en nuestro tratamiento, el resultado (6.47), se convertirá en;

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Psi^\Delta(k) &\simeq \frac{3}{2048k^3} \left\{ \frac{Cl_p\beta\eta(2n-1)^2}{(n+1)n^2\sqrt{c_s}\mathcal{H}l_0\xi} \left[1 + \right. \right. \\ &+ \frac{(1+2n)}{(2n-1)} \left(\frac{l_0}{l_c} \right)^{\frac{4n}{2n+1}} \\ &+ \left. \left. \frac{4n(2n^2+3n+1)k^{-\frac{2}{2n+1}}}{c_s^2\eta^{2n+2}(2n-1)} \left(\frac{l_c}{C} \right)^{\frac{4n}{2n+1}} \right] \right\}^2 \Bigg|_{\eta=\eta_D} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Calculando n_s , para diferentes fluidos ω y ajustando l_c apropiadamente, se encuentra que $n_s(k_{piv})$, presenta un comportamiento, semejante al encontrado en la tabla anterior, el cual será presentado el cuadro 6.2;

ω	l_0	mejor ajuste l_c	$n_s(k_{piv})$	$\mathcal{P}_\Psi^\Delta(k_{piv})$	$\mathcal{P}_\Psi(k_{piv})$
0.01	1.516×10^{-55} Mpc	1.0×10^{-4} Mpc	0.960	2.4026	2.4026
0.1	1.683×10^{-55} Mpc	4×10^{-5} Mpc	0.963	2.3510	2.3510
0.15	1.282×10^{-55} Mpc	1.1×10^{-5} Mpc	0.962	2.3389	2.3389
0.2	8.178×10^{-56} Mpc	2.3×10^{-6} Mpc	0.960	2.3342	2.3342
0.25	3.820×10^{-56} Mpc	3×10^{-7} Mpc	0.961	2.3207	2.3207
0.3	7.299×10^{-57} Mpc	2×10^{-8} Mpc	0.960	2.3166	2.3166
0.33	8.129×10^{-59} Mpc	5.5×10^{-10} Mpc	0.960	2.3123	2.3123
0.333	8.218×10^{-61} Mpc	4.7×10^{-11} Mpc	0.960	2.3109	2.3109
,...	,...	,...	,...	,...	,...
0.3333333333	8.228×10^{-73} Mpc	4.6×10^{-17} Mpc	0.960	2.3105	2.3105
1/3	indiferente	indiferente	-1	0	1.14×10^{-96}
0.35	2.185×10^{-57} Mpc	1×10^{-17} Mpc	1	2.2206	2.2206
0.5	3.96×10^{-55} Mpc	1×10^{-23} Mpc	1	2.2206	2.2206
0.7	5.64×10^{-54} Mpc	1×10^{-40} Mpc	0.999	2.2206	2.2206
0.99	indiferente	indiferente	$ n_s \gg 0.96$	$[10^{16}, 10^{17}]$	$[10^{15}, 10^{17}]$

Cuadro 6.2: El modo k colapsa cuando $a(\eta_k^c) \approx kl_c$. A diferencia con respecto al esquema anterior, en el que para un fluido ω todos los modos colapsan al mismo tiempo, ahora tomando nuevamente como ejemplo el fluido con $\omega = 0.3$, para el modo $k_* = 0.0008 \text{Mpc}^{-1}$, se encuentra que $n_s(k_*) = 0.907$, lo cual es más cercano al espectro plano invariante de escala que el número correspondiente arrojado por el esquema 1. Una comparación más clara, para el caso $\omega = 0.3$, calculando $n_s(k)$ para los modos de interés físico $k \in (10^{-4}, 10^{-2}) \text{Mpc}^{-1}$, entre el esquema en que todos los modos colapsan al mismo tiempo (esquema 1) y el esquema en que los modos se colapsan cuando su longitud propia es igual la longitud l_c (esquema 2), será presentada en la siguiente cuadro.

k	$n_s(k)$ según esquema 1	$n_s(k)$ según esquema 2
0.0001Mpc^{-1}	-2.1929	0.4888
0.0008Mpc^{-1}	0.7671	0.9077
0.001Mpc^{-1}	0.8477	0.9246
0.002Mpc^{-1}	0.9608	0.9602
0.02Mpc^{-1}	0.9996	0.9954
0.01Mpc^{-1}	0.9984	0.9912

Cuadro 6.3: Comparación entre esquema 1 y esquema 2. Aquí a través de un análisis modo a modo se muestra que el valor obtenido para $n_s(k)$ en el el esquema 2 se acerca mucho más a 0.96 que el obtenido por el esquema 1. Lo cual podría representar un criterio que nos permite calificar de más adecuado al esquema 2 con respecto al esquema 1, vale recordar que la única diferencia entre estos dos esquemas es la regla sobre el tiempo en el cual se colapsan los modos.

Capítulo 7

Estudio formal de la emergencia del espacio-tiempo inhomogéneo y anisotrópico: Configuraciones semiclásicas auto-consistentes (SSC)

7.1. Configuraciones semiclásicas auto-consistentes construidas hasta segundo orden en la perturbación

Consideraremos que el universo a gran escala puede ser modelado por lo que denominaremos **configuración semiclásica auto-consistente (SSC)**, la cual definiremos como: un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ caracterizado por la variedad \mathcal{M} y la métrica \mathcal{G} , junto con una teoría cuántica de campos $(\hat{\phi}, \hat{\pi}, H)$, convenientemente escrita en la representación de Heisenberg, construida sobre el espacio-tiempo y dotada de un estado particular $|\xi\rangle$, perteneciente al espacio de Hilbert H , para el cual las ecuaciones semi-clásicas de Einstein se satisfacen. En otras palabras, diremos que el conjunto $\{\mathcal{G}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x}), |\xi\rangle \in H\}$ representa una SSC si y sólo si $\hat{\phi}(\mathbf{x})$, $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ y H corresponden a una teoría cuántica de campo construida sobre el espacio-tiempo con métrica $\mathcal{G}(\mathbf{x})$, mientras que el estado $|\xi\rangle \in H$ es tal que;

$$G_{\mu}{}^{\nu} = 8\pi G \langle \xi | \hat{T}_{\mu}{}^{\nu}[\mathcal{G}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x})] | \xi \rangle. \quad (7.1)$$

Una vez más, al igual que en las secciones pasadas estaremos trabajando con teoría de perturbaciones cosmológicas por lo cual asumiremos que la métrica de fondo \mathcal{G} puede ser entendida como una desviación del espacio tiempo de FRW, caracterizada por perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales. Vimos que a primer orden en la perturbación y a lo que se refiere el problema de los orígenes cuánticos de las inhomogeneidades primordiales, sólo las perturbaciones escalares $\Phi(\mathbf{x})$, $\Psi(\mathbf{x})$ son relevantes para el problema cosmológico, ahora como estaremos interesados en ordenes más altos en la perturbación, mostraremos que hasta segundo orden en la perturbación solo se podrá construir una **SSC** si y solo si también se incluyen las perturbaciones tensoriales $h_{ij}(\mathbf{x})$ de la métrica, entonces podemos escribir la métrica trabajando en la norma longitudinal generalizada (ver referencias [34], [35], [36]), como;

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2(\eta)\left\{-\left(1+2\Phi(\mathbf{x})\right)d\eta^2+\left(1-2\Psi(\mathbf{x})\right)\delta_{ij}dx^i dx^j+h_{ij}(\mathbf{x})dx^i dx^j\right\},\end{aligned}\tag{7.2}$$

en donde los potenciales métricos $\Phi(\mathbf{x})$, $\Psi(\mathbf{x})$, y $h_{ij}(\mathbf{x})$ serán escritos como desarrollos en series de potencias del parámetro ε el cual será usado para controlar el orden de la perturbación.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon\Phi^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Phi^{(2)}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),\tag{7.3}$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Psi^{(2)}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),\tag{7.4}$$

$$h_{ij}(\mathbf{x}) = h_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon h_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2}h_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).\tag{7.5}$$

Trabajando hasta orden cero en la perturbación (a orden cero en ε) la métrica (7.2) debe reducirse a la métrica de FRW, esto implica que $\Phi^{(0)}(\mathbf{x}) = \Psi^{(0)}(\mathbf{x}) = h_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$, y dado que a primer orden solo son relevantes las perturbaciones escalares, entonces; $\Phi^{(1)}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) \neq 0$ y $h_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) = 0$.

Por otra parte, variando la acción de materia con respecto al campo escalar $\phi(\mathbf{x})$ se encuentra la ecuación de movimiento para el campo escalar y es conocida como la ecuación de Klein-Gordon, esta ecuación es;

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - m^2\phi = 0,\tag{7.6}$$

donde ∇_μ corresponde a la derivada covariante con respecto a la métrica (7.2).

En este mismo orden de ideas, partiendo de dos soluciones $\phi_1(\mathbf{x})$ y $\phi_2(\mathbf{x})$ de la anterior ecuación, se define el producto simpléctico entre ellas, como;

$$(\phi_1, \phi_2)_{simpl} \equiv -i \int_\Sigma [\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1] d\Sigma^\mu,\tag{7.7}$$

siendo Σ una hipersuperficie de Cauchy, $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$ con $d\Sigma = \sqrt{\mathcal{G}_\Sigma} d^3x$ el elemento de volumen sobre Σ , mientras que n^μ es un vector temporal unitario y normal a Σ . En términos del momento conjugado π asociado al campo escalar ϕ , esto es; $\pi = \sqrt{\mathcal{G}_\Sigma} n^\mu \partial_\mu \phi$ el producto simpléctico puede ser escrito como;

$$((\phi_1, \pi_1), (\phi_2, \pi_2))_{simpl} \equiv -i \int_\Sigma [\phi_1 \pi_2^* - \phi_2^* \pi_1] d^3x.\tag{7.8}$$

Una propiedad crucial de este producto, es que no depende de Σ , lo cual se puede demostrar como sigue a continuación:

Tomemos la diferencia entre dos productos (7.8) calculados en dos hipersuperficies de Cauchy diferentes denotadas por Σ_1 y Σ_2 . Denominando por V el tetra-volumen limitado por las hipersuperficies Σ_1 y Σ_2 , mientras que ∂V la frontera de V , entonces la diferencia entre los dos productos simplécticos podrá ser desarrollada como;

$$\begin{aligned}
 (\phi_1, \phi_2)_{\text{simpl}\Sigma_1} - (\phi_1, \phi_2)_{\text{simpl}\Sigma_2} &= -i \int_{\Sigma_1} [\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1] d\Sigma^\mu \\
 + i \int_{\Sigma_2} [\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1] d\Sigma^\mu &= -i \oint_{\partial V} [\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1] d\tilde{\Sigma}^\mu \\
 = -i \int_V [\nabla^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^*) - \nabla^\mu (\phi_2^* \partial_\mu \phi_1)] dV, & \tag{7.9}
 \end{aligned}$$

en donde para obtener la última integral se uso la versión tetra-dimensional de la ley de Gauss. Por otro lado para cualquier campo escalar $f(\eta, \vec{x})$, se cumple que $\nabla^\mu f(\eta, \vec{x}) = \partial^\mu f(\eta, \vec{x})$, entonces, por aplicación directa se encuentra la siguiente identidad;

$$\nabla^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^*) = (\partial^\mu \phi_1) \partial_\mu \phi_2^* + \phi_1 \nabla^\mu \nabla_\mu \phi_2^* \tag{7.10}$$

aplicando la anterior identidad sobre el argumento de la integral (7.9), se encuentra que esta adquiere la forma;

$$(\phi_1, \phi_2)_{\text{simpl}\Sigma_1} - (\phi_1, \phi_2)_{\text{simpl}\Sigma_2} = -i \int_V [\phi_1 \nabla^\mu \nabla_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \nabla^\mu \nabla_\mu \phi_1] dV, \tag{7.11}$$

por último usando (7.6) sobre la anterior ecuación, se obtiene;

$$\begin{aligned}
 (\phi_1, \phi_2)_{\text{simpl}\Sigma_1} - (\phi_1, \phi_2)_{\text{simpl}\Sigma_2} &= -i \int_V [m^2 \phi_1 \phi_2^* - m^2 \phi_2^* \phi_1] dV = 0 \\
 \Rightarrow (\phi_1, \phi_2)_{\text{simpl}\Sigma_1} &= (\phi_1, \phi_2)_{\text{simpl}\Sigma_2}. \tag{7.12}
 \end{aligned}$$

Referente a la cuantización, a nivel cuántico el campo escalar ϕ y su momento conjugado π son promovidos a operadores cuánticos $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ actuando sobre los elementos del espacio de Hilbert H , y como parte de la cuantización se impone que $\hat{\phi}$ junto con $\hat{\pi}$, a tiempos iguales satisfagan las relaciones de conmutación estándar,

$$[\hat{\phi}(\eta, \vec{x}), \hat{\phi}(\eta, \vec{y})] = [\hat{\pi}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{\phi}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \tag{7.13}$$

Ahora descomponemos a los operadores $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ en términos de los operadores de creación y aniquilación independientes del tiempo, y por simplicidad denotaremos (η, \vec{x}) como \mathbf{x} , se encuentra;

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \sum_{\vec{k}} [u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \hat{a}_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(\mathbf{x}) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger], \tag{7.14}$$

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) = \sum_{\vec{k}} [q_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \hat{a}_{\vec{k}} + q_{\vec{k}}^*(\mathbf{x}) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger], \quad \text{siendo } q_{\vec{k}}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathcal{G}_\Sigma} n^\mu \partial_\mu u_{\vec{k}}(\mathbf{x}). \tag{7.15}$$

Las sumas son sobre los vectores \vec{k} , con componentes en coordenadas cartesianas $k_n = 2\pi j_n/L$, siendo $j_n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \in \mathbb{Z}$ mientras que $n = x, y, z$. Lo anterior, al igual que

en capítulos pasados, significa que cuantizaremos sobre un cubo de longitud L . Por otro lado, las funciones $u_{\vec{k}}(\eta, \vec{x})$ deberán formar un conjunto completo de funciones modo ortonormales con respecto al producto simpléctico,

$$\left(g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - m^2\right)u_{\vec{k}}(\eta, \vec{x}) = 0, \tag{7.16}$$

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'})_{\text{simpl}} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \tag{7.17}$$

con $\delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$ definido como $\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} = 0$ si $\vec{k} \neq \vec{k}'$, mientras que $\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} = 1$ si $\vec{k} = \vec{k}'$.

Las formulas¹ (7.14) y (7.15) no hacen referencia a operadores $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ definidos en cada punto $\mathbf{x} = (\eta, \vec{x})$ del espacio-tiempo. En general las contribuciones de los modos $\|\vec{k}\|$ no disminuyen con $\|\vec{k}\|$ lo suficientemente rápido como para que las sumas involucradas en (7.14) y (7.15) converjan. Sin embargo estas contribuciones se encuentran variando muy rápidamente en el espacio-tiempo, entonces si de una manera apropiada promediamos los lados derechos de las ecuaciones (7.14) y (7.15) sobre una región del espacio-tiempo la sumas convergerán. Dicho de una manera más precisa, las ecuaciones (7.14) y (7.15) definen a $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ como operadores evaluados sobre una distribución, i.e., para cualquier función de prueba $f(\mathbf{x})$, suave y de soporte compacto, la cantidad;

$$\hat{\phi}[f] = \int f(\eta, \vec{x})\hat{\phi}(\eta, \vec{x})d^3x \tag{7.20}$$

está bien definida por la ecuación (7.14) si la integral se realiza antes de la sumatoria.

Usando (7.16) y (7.17), las relaciones de conmutación (7.13) se trasladan a;

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}] = [\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{\dagger}] = 0, \quad [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \tag{7.21}$$

1

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} [u_{\vec{k}}(\mathbf{x})\hat{a}_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(\mathbf{x})\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}] = \sum_{\vec{k} \in +} [u_{\vec{k}}(\mathbf{x})\hat{a}_{\vec{k}} + u_{-\vec{k}}^*(\mathbf{x})\hat{a}_{-\vec{k}}^{\dagger}] + \sum_{\vec{k} \in +} [u_{-\vec{k}}(\mathbf{x})\hat{a}_{-\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(\mathbf{x})\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}], \tag{7.18}$$

entonces, definiendo para todo 3-vector \vec{k} tal que $\vec{k} \in +$, en donde la región $+$, esto es el semi-plano positivo usado anteriormente en (5.37), ha sido definida como $+= \{\vec{q} = (q, \theta, \phi)/q \in [0, \infty), \theta \in [0, \pi/2), \phi \in [0, 2\pi)\}$. Por otro lado, definiendo los operadores $\hat{\phi}_{\vec{k}}(\mathbf{x})$ y $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{\dagger}(\mathbf{x})$, como; $\hat{\phi}_{\vec{k}}(\mathbf{x}) = u_{\vec{k}}(\mathbf{x})\hat{a}_{\vec{k}} + u_{-\vec{k}}^*(\mathbf{x})\hat{a}_{-\vec{k}}^{\dagger}$ y $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{\dagger}(\mathbf{x}) = u_{-\vec{k}}(\mathbf{x})\hat{a}_{-\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(\mathbf{x})\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}$, la ecuación (7.18) podrá ser escrita como;

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \sum_{\vec{k} \in +} [\hat{\phi}_{\vec{k}}(\mathbf{x}) + \hat{\phi}_{\vec{k}}^{\dagger}(\mathbf{x})]. \tag{7.19}$$

Procediendo de manera análoga para $\hat{\pi}(\mathbf{x})$, se encuentra;

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) = \sum_{\vec{k} \in +} [\hat{\pi}_{\vec{k}}(\mathbf{x}) + \hat{\pi}_{\vec{k}}^{\dagger}(\eta, \vec{x})], \text{ en donde se ha definido } \hat{\pi}_{\vec{k}}(\mathbf{x}) = q_{\vec{k}}(\mathbf{x})\hat{a}_{\vec{k}} + q_{-\vec{k}}^*(\mathbf{x})\hat{a}_{-\vec{k}}^{\dagger},$$

junto con $\hat{\pi}_{\vec{k}}^{\dagger}(\mathbf{x}) = q_{-\vec{k}}(\mathbf{x})\hat{a}_{-\vec{k}} + q_{\vec{k}}^*(\mathbf{x})\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}$, para todo vector \vec{k} tal que $\vec{k} \in +$.

Entonces, al igual que en los problemas desarrollados en secciones pasadas el sistema cuántico en estudio puede ser entendido como un conjunto de osciladores armónicos con frecuencia dependiente del tiempo η . Entonces el estado base del modo \vec{k} lo denotaremos por $|0_{\vec{k}}\rangle$ y corresponderá al estado base del oscilador armónico correspondiente al modo \vec{k} . Mientras que el estado vacío del sistema conformado por el conjunto de todos los modos \vec{k} lo denotaremos por;

$$\begin{aligned} |0\rangle = & \dots |0_{-\vec{k}_2}\rangle \otimes \dots |0_{-2\vec{k}_1}\rangle \otimes |0_{-\vec{k}_1}\rangle \otimes \dots |0_{-2\vec{k}_0}\rangle \otimes |0_{-\vec{k}_0}\rangle \otimes |0_0\rangle \\ & \otimes |0_{\vec{k}_0}\rangle \otimes |0_{2\vec{k}_0}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |0_{2\vec{k}_1}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_2}\rangle \otimes \dots \end{aligned} \quad (7.22)$$

y se definirá como el estado tal que para todo modo \vec{k} se cumpla que $\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0$.

Cualquier conjunto completo de soluciones u_α , de (7.16) y (7.17), determinará una elección del estado vacío $|0\rangle$. Mientras que el espacio de Hilbert H puede ser construido a la Fock a través de una aplicación sucesiva del operador de creación $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ sobre el estado vacío $|0\rangle$. Ahora procederemos a escribir la ecuación (7.16) como una serie de potencia de ε , y este problema se enfocará en trabajar hasta segundo orden en ε . Entonces, según (7.16);

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) - m^2 u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (7.23)$$

en donde para expandir el lado izquierdo de la anterior ecuación usaremos la identidad;

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu A(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A(\mathbf{x}) \right), \quad (7.24)$$

siendo $g = \det\{g_{\mu\nu}\}$ el cual para la métrica (7.2), corresponde a;

$$\begin{aligned} g = & -a^8 (1 + 2\Phi) \left\{ [1 - 2\Psi + h_{xx}] \left([1 - 2\Psi + h_{yy}] [1 - 2\Psi + h_{zz}] \right. \right. \\ & - \left. \left. h_{yy} h_{zz} \right) - h_{xy} \left(h_{yx} [1 - 2\Psi + h_{zz}] - h_{zx} h_{yz} \right) + h_{xz} \left(h_{yx} h_{zy} \right. \right. \\ & \left. \left. - h_{zx} [1 - 2\Psi + h_{yy}] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Ahora por simplicidad, y sin perdida de generalidad, consideraremos que las perturbaciones tensoriales describen una **onda gravitacional** con modos longitudinal $h_L(\mathbf{x})$ y transversal $h_T(\mathbf{x})$ que se **propaga a lo largo del eje z** . Esto implica que el vector de onda \vec{k}_1 asociado las perturbaciones tensoriales satisface la condición;

$$\frac{\vec{k}_1}{\|\vec{k}_1\|} = \hat{z}, \quad (7.26)$$

mientras que las componentes no nulas h_{ij} son: $h_{xy} = h_{yx} = h_T$, $h_{xx} = h_{yy} = -\frac{1}{2} h_{zz} = h_L$, por lo cual las componentes $g_{\mu\nu}$ de (7.2) presentadas como un arreglo matricial, tomarán la siguiente forma;

$$\{g_{\mu\nu}\} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -(1 + 2\Phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - 2\Psi + h_L) & h_T & 0 \\ 0 & h_T & (1 - 2\Psi + h_L) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2\Psi - 2h_L) \end{pmatrix}$$

Por otra parte, las componentes de la métrica inversa,

$$\{g^{\mu\nu}\} = a^{-2}(\eta) \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(1-2\Psi+h_L)}{-(1-2\Psi+h_L)^2+h_T^2} & \frac{h_T}{-(1-2\Psi+h_L)^2+h_T^2} & 0 \\ 0 & \frac{h_T}{-(1-2\Psi+h_L)^2+h_T^2} & \frac{-(1-2\Psi+h_L)}{-(1-2\Psi+h_L)^2+h_T^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-2\Psi-2h_L} \end{pmatrix}$$

Notamos que las componentes $g^{\mu\nu}$ no son lineales en las perturbaciones Φ , Ψ , h_T y h_L , ahora como estamos interesados en trabajar hasta segundo orden en la perturbación, y dado que según (7.3) el orden más bajo para el cual los coeficientes $\Phi^{(n)}$, $\Psi^{(n)}$ no son nulos es $n = 1$, mientras que para $h_L^{(n)}$ y $h_T^{(n)}$ es $n = 2$. Lo anterior implica que trabajando hasta segundo orden en la perturbación, sólo por simplicidad, podemos eliminar de nuestras ecuaciones términos de la forma; Ψh_T , Ψh_L , Φh_T , Φh_L , $\Psi\Psi^2$, $\Psi\Phi^2$, $\Phi\Psi^2$, $\Phi\Phi^2$, $h_T h_L$, y h_L^2 , h_T^2 , en adelante.

Notación: utilizaremos $^{[n]}A(\mathbf{x})$ para referirnos a que solo estaremos interesados en trabajar con el desarrollo en serie de potencias de ε de la función $A(\mathbf{x})$ y truncar dicha serie a orden n en ε . Mientras que por $^{(n)}A(\mathbf{x})$ nos estamos refiriendo a el orden n -ésimo de la expansión. De manera que $g^{\mu\nu}$ hasta segundo orden en ε lo denotaremos por $^{[2]}g^{\mu\nu}$, y vendrá dado por;

$$\{^{[2]}g^{\mu\nu}\} = a^{-2}(\eta) \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2\Psi+h_L} & -h_T & 0 \\ 0 & -h_T & \frac{1}{1-2\Psi+h_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-2\Psi-2h_L} \end{pmatrix}$$

mientras que (7.25) se reducirá a;

$$\begin{aligned} ^{[2]}g &= -a^8(1+2\Phi)(1-2\Psi+h_L)^2(1-2\Psi-2h_L) \\ &= -a^8(1+2\Phi)(1-2\Psi)^3. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Ahora nos enfocaremos en la ecuación (7.23), esta es;

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \right) - m^2 u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (7.28)$$

para expandirla hasta el orden en el cual estamos interesados se requiere que calculemos las cantidades $\sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{\eta\eta}$, $\sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{xy}$ y $\sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{ll}$, (con $l : x, y, z$). El resultado es;

$$\begin{aligned} \sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{\eta\eta} &= -a^2 \frac{(1-2\Psi+h_L)(1-2\Psi-2h_L)^{1/2}}{(1+2\Phi)^{1/2}}, \quad \sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{xy} = -a^2 h_T \\ \sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{xx} &= \sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{yy} = a^2 (1+2\Phi)^{1/2} (1-2\Psi-2h_L)^{1/2} \\ \sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{zz} &= \frac{a^2 (1+2\Phi)^{1/2} (1-2\Psi+h_L)}{(1-2\Psi-2h_L)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

expandiendo (7.28), tendremos entonces;

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{-g} g^{\eta\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{-g} g^{xy} \frac{\partial}{\partial y} u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{-g} g^{yx} \frac{\partial}{\partial x} u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{-g} g^{ll} \frac{\partial}{\partial x^l} u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \right) \right\} - \sqrt{-g} \ m^2 \ u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Habiendo elegido la dirección del vector de onda \vec{k}_1 como paralela al eje z , para la teoría cuántica de campos $\{\hat{\phi}, \hat{\pi}, \mathbf{H}, |\xi\rangle \in \mathbf{H}\}$ construida sobre el espacio tiempo (7.2), y bajo algunos requerimientos entre los cuales que los potenciales métricos sólo dependan de las coordenadas (η, z) , esto es $^{[2]}\Phi(\eta, z)$, $^{[2]}\Psi(\eta, z)$, $^{[2]}h_L(\eta, z)$ y $^{[2]}h_T(\eta, z)$, más adelante se logrará encontrar una solución de las ecuaciones (7.1). En este caso la ecuación (7.30) tomará la forma;

$$\left\{ g^{\eta\eta} u_{\vec{k}}''(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\eta (\sqrt{-g} g^{\eta\eta}) u_{\vec{k}}'(\mathbf{x}) + 2g^{xy} \partial_{xy}^2 u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) + g^{ll} \partial_{ll}^2 u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) + g^{zz} \partial_{zz}^2 u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz}) \partial_z u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \right\} - m^2 u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.31)$$

Las derivadas $\partial_\eta(\sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{\eta\eta})$, y $\partial_z(\sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{zz})$, dan:

$$\begin{aligned} \partial_\eta(\sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{\eta\eta}) &= -2aa' \frac{(1-2\Psi)^{3/2}}{(1+2\Phi)^{1/2}} + 3a^2 \frac{(1-2\Psi)^{1/2}}{(1+2\Phi)^{1/2}} \Psi' + a^2 \frac{(1-2\Psi)^{3/2}}{(1+2\Phi)^{3/2}} \Phi' \\ \partial_z(\sqrt{-^{[2]}g} \ ^{[2]}g^{zz}) &= a^2 \frac{(1-2\Psi)^{1/2}}{(1+2\Phi)^{1/2}} \partial_z \Phi - a^2 \frac{(1+2\Phi)^{1/2}}{(1-2\Psi)^{1/2}} \partial_z \Psi + 2a^2 \partial_z h_L. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Sustituyendo lo anterior en (7.31) y descartando términos de mayor contribución al segundo orden en ε , se encuentra que la ecuación diferencial que han de satisfacer las funciones modo $u_{\vec{k}}$ es;

$$\begin{aligned} (1+2\Phi-4\Psi-8\Phi\Psi+4\Psi^2) \left\{ u_{\vec{k}}'' + 2\frac{a'}{a} u_{\vec{k}}' \right\} - (1+4\Phi-2\Psi+4\Phi^2-8\Phi\Psi-h_L) \nabla^2 u_{\vec{k}} \\ + 3h_L \partial_z^2 u_{\vec{k}} - \left\{ (1+2\Phi-2\Psi) \partial_z \Phi - (1+4\Phi) \partial_z \Psi + 2\partial_z h_L \right\} \partial_z u_{\vec{k}} - \left\{ 3(1-2\Psi+2\Phi) \Psi' \right. \\ \left. + (1-4\Psi) \Phi' \right\} u_{\vec{k}}' + 2h_T \partial_{xy}^2 u_{\vec{k}} + a^2 m^2 (1+4\Phi-4\Psi+4\Phi^2+4\Psi^2-16\Phi\Psi) u_{\vec{k}} = 0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Ahora trabajaremos con la condición de ortonormalización inducida por el producto simpléctico (7.17), esta es;

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'})_{\text{simpl}} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \quad (7.34)$$

Entonces, usando la definición de producto simpléctico (7.7),

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}})_{\text{simpl}} \equiv -i \int_{\Sigma} [u_{\vec{k}} \partial_\mu u_{\vec{k}}^* - u_{\vec{k}}^* \partial_\mu u_{\vec{k}}] n^\mu d\Sigma, \quad (7.35)$$

donde la hipersuperficie de Cauchy Σ será definida como; $\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} / \eta = \eta_c\}$. Mientras que la métrica inducida sobre Σ será;

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{(\Sigma)} &= \ ^{(\Sigma)}g_{ij} dx^i dx^j \\ &= a^2(\eta) \left\{ (1-2\Psi(\mathbf{x})) \delta_{ij} dx^i dx^j + h_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j \right\}, \end{aligned} \quad (7.36)$$

por lo cual el elemento de volumen $d\Sigma = \sqrt{g_{(\Sigma)}} d^3x$, siendo $g_{(\Sigma)} = \det\{^{(\Sigma)}g_{ij}\}$, y considerando únicamente contribuciones hasta segundo orden en ε , por lo que $\sqrt{^{[2]}g_{(\Sigma)}} = a^3(1-2\Psi)^{3/2}$,

entonces $^{[2]}d\Sigma$ será escrito como $^{[2]}d\Sigma = a^3(1 - 2\Psi)^{3/2}d^3x$.

Sobre el vector \mathbf{n} unitario y normal a la hipersuperficie Σ , lo escribiremos como $\mathbf{n} = n^\mu \partial_\mu$, el cual a su vez puede ser expresado como una combinación lineal de una parte b_\parallel^i paralela a Σ y una perpendicular b_\perp , esto es $\mathbf{n} = b_\perp(\mathbf{x})\partial_\eta + b_\parallel^i(\mathbf{x})\partial_i$, pero por el requisito de que \mathbf{n} es normal a Σ se concluye que $b_\parallel^i(\mathbf{x}) = 0$, entonces $\mathbf{n} = b_\perp(\mathbf{x})\partial_\eta$. Por otro lado, dado que \mathbf{n} es un vector unitario y temporal, significa que; $\mathcal{G}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$, de donde se obtiene;

$$b_\perp = \frac{1}{a(\eta)\sqrt{1 + 2\Phi(\mathbf{x})}} \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{1}{a(\eta)\sqrt{1 + 2\Phi(\mathbf{x})}}\partial_\eta, \quad (7.37)$$

de manera que la condición de ortonormalización de las funciones modo es:

$$\begin{aligned} ^{[2]}(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}})_{simpl} &= -ia^2(\eta) \int_\Sigma (u_{\vec{k}}\partial_\eta u_{\vec{k}'}^* - u_{\vec{k}'}^*\partial_\eta u_{\vec{k}}) \frac{(1 - 2\Psi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + 2\Phi)^{\frac{1}{2}}} d^3x \Bigg|_{\eta=\eta_c} \\ &= \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Expandiendo hasta segundo orden en ε el lado derecho de la primera igualdad presente en la anterior ecuación, se encuentra;

$$\int_\Sigma (u_{\vec{k}}\partial_\eta u_{\vec{k}'}^* - u_{\vec{k}'}^*\partial_\eta u_{\vec{k}}) \left(1 - 3\Psi - \Phi + \frac{3}{2}\Psi^2 + 3\Psi\Phi + \frac{3}{2}\Phi^2\right) d^3x = \frac{i}{a^2(\eta_c)} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \quad (7.39)$$

Nota: vale mencionar que el lado derecho de la anterior ecuación es un término definido únicamente a orden cero en ε , por lo cual las contribución de la integral (lado izquierdo) a ordenes superiores a ε^0 será nula.

Sobre la cantidad $\hat{T}_{\mu\nu}[\mathcal{G}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x})]$ y el estado $|\xi\rangle \in \mathbb{H}$, para los cuales se satisface la ecuación (7.1), dada por;

$$G_\mu{}^\nu[\mathcal{G}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi | \hat{T}_\mu{}^\nu[\mathcal{G}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x})] | \xi \rangle, \quad (7.40)$$

entonces, como a nivel clásico se trata de un campo escalar ϕ mínimamente acoplado a la gravedad el tensor de energía-momento $T_\mu{}^\nu$ viene dado por (3.5), ahora una vez promovidos el campo clásico ϕ y su momento conjugado π a operadores de manera directa $T_\mu{}^\nu$ es promovido a $\hat{T}_\mu{}^\nu$ el cual puede ser expresado como;

$$\hat{T}_\mu{}^\nu = g^{\alpha\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\alpha \hat{\phi} - \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \hat{\phi} \partial_b \hat{\phi} + V[\hat{\phi}] \right) g_\mu{}^\nu, \text{ y usaremos: } V[\hat{\phi}] = \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2.$$

La **estructura** que desglosaremos en lo que resta de este capítulo estará basada en el siguiente organigrama:

hipersuperficie de Cauchy $\Sigma_0 = \{x \in \mathcal{M} / \eta = \eta_0\}$

(1) Def: $\{\mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x), |\xi^{(I)}\rangle \in \mathbb{H}^{(I)}\} \Rightarrow$ **SSC-I**

$\mathcal{G}^{(I)}(x) = -a^2(\eta)d\eta^2 + a^2(\eta)\delta_{ij}dx^i dx^j$

(2)
$$\begin{cases} \hat{\phi}^{(I)}(x) = \sum_{\vec{k}} [u_{\vec{k}}^{(I)}(x)\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)} + u_{\vec{k}}^{(I)*}(x)\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)\dagger}] \\ \hat{\pi}^{(I)}(x) = \sum_{\vec{k}} [q_{\vec{k}}^{(I)}(x)\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)} + q_{\vec{k}}^{(I)*}(x)\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)\dagger}], \text{ siendo } q_{\vec{k}}^{(I)}(x) = \sqrt{\mathcal{G}_{\Sigma}^{(I)}} n^\mu \partial_\mu u_{\vec{k}}^{(I)}(x) \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} (u_{\vec{k}}^{(I)}, u_{\vec{k}'}^{(I)})_{\text{simpt}} = -i \int_{\Sigma} [u_{\vec{k}}^{(I)} \partial_\mu u_{\vec{k}'}^{(I)*} - u_{\vec{k}'}^{(I)*} \partial_\mu u_{\vec{k}}^{(I)}] n^\mu d\Sigma^{(I)} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \\ (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - m^2) u_{\vec{k}}^{(I)}(\eta, \vec{x}) = 0 \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} G_{\mu}{}^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(x)] = 8\pi G \langle \xi^{(I)} | \hat{T}_{\mu}{}^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x)] | \xi^{(I)} \rangle \\ \hat{T}_{\mu}{}^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x)] = g^{(I)\alpha\nu} \partial_\mu \hat{\phi}^{(I)} \partial_\alpha \hat{\phi}^{(I)} - \left(\frac{1}{2} g^{(I)ab} \partial_a \hat{\phi}^{(I)} \partial_b \hat{\phi}^{(I)} + V[\hat{\phi}^{(I)}] \right) g_{\mu}^{(I)\nu}, \\ \text{y usaremos: } V[\hat{\phi}^{(I)}] = \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^{(I)2} \end{cases}$$

(5) Estado cuántico:
$$\begin{aligned} |\xi^{(I)}\rangle &= \dots |0_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |0_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes \left\{ \left[1 + \xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger} + \frac{1}{2} (\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger})^2 + \dots \right] |0_0^{(I)}\rangle \right\} \otimes |0_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots \\ &= \mathcal{F}(\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger}) |0^{(I)}\rangle \\ &\text{siendo } \mathcal{F}(X) \propto e^X \end{aligned}$$

hipersuperficie de Cauchy Σ_c

$\Sigma_c = \{x \in \mathcal{M} / \eta = \eta_c\}$

$\Sigma_c = \{x \in \mathcal{M} / \eta = \eta_c\}$

$\{\mathcal{M}, \mathcal{G}^{(II)}\}$

(1) Def: $\{\mathcal{G}^{(II)}(x), \hat{\phi}^{(II)}(x), \hat{\pi}^{(II)}(x), |\xi^{(II)}\rangle \in \mathbb{H}^{(II)}\} \Rightarrow$ **SSC-II**

$\mathcal{G}^{(II)} = a^2(\eta) \left\{ - \left(1 + 2\Phi(x) \right) d\eta^2 + \left(1 - 2\Psi(x) \right) \delta_{ij} dx^i dx^j + h_{ij}(x) dx^i dx^j \right\}$

$\begin{aligned} \Phi(x) &= -\varepsilon^2 a_{(2)}(\eta) + [(\varepsilon P_{(1)}(\eta) + \varepsilon^2 F_{(2)}(\eta) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c.] + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \Psi(x) &= \varepsilon^2 a_{(2)}(\eta) + [(\varepsilon P_{(1)}(\eta) + \varepsilon^2 F_{(2)}(\eta) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c.] + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ h_{ij}(x) &= \varepsilon^2 h_{ij}^{(2)}(\eta) + (\varepsilon^2 H_{ij}^{(2)}(\eta) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + c.c.) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$

(2)
$$\begin{cases} \hat{\phi}^{(II)}(x) = \sum_{\vec{k}} [u_{\vec{k}}^{(II)}(x)\hat{a}_{\vec{k}}^{(II)} + u_{\vec{k}}^{(II)*}(x)\hat{a}_{\vec{k}}^{(II)\dagger}], \\ \hat{\pi}^{(II)}(x) = \sum_{\vec{k}} [q_{\vec{k}}^{(II)}(x)\hat{a}_{\vec{k}}^{(II)} + q_{\vec{k}}^{(II)*}(x)\hat{a}_{\vec{k}}^{(II)\dagger}], \text{ siendo } q_{\vec{k}}^{(II)}(x) = \sqrt{\mathcal{G}_{\Sigma}^{(II)}} n^\mu \partial_\mu u_{\vec{k}}^{(II)}(x) \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - m^2) u_{\vec{k}}^{(II)}(\eta, \vec{x}) = 0 \\ (u_{\vec{k}}^{(II)}, u_{\vec{k}'}^{(II)})_{\text{simpt}} = -i \int_{\Sigma} [u_{\vec{k}}^{(II)} \partial_\mu u_{\vec{k}'}^{(II)*} - u_{\vec{k}'}^{(II)*} \partial_\mu u_{\vec{k}}^{(II)}] n^\mu d\Sigma^{(II)} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} G_{\mu}{}^\nu [\mathcal{G}^{(II)}(x)] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \hat{T}_{\mu}{}^\nu [\mathcal{G}^{(II)}(x), \hat{\phi}^{(II)}(x), \hat{\pi}^{(II)}(x)] | \xi^{(II)} \rangle \\ \hat{T}_{\mu}{}^\nu [\mathcal{G}^{(II)}(x), \hat{\phi}^{(II)}(x), \hat{\pi}^{(II)}(x)] = g^{(II)\alpha\nu} \partial_\mu \hat{\phi}^{(II)} \partial_\alpha \hat{\phi}^{(II)} - \left(\frac{1}{2} g^{(II)ab} \partial_a \hat{\phi}^{(II)} \partial_b \hat{\phi}^{(II)} + V[\hat{\phi}^{(II)}] \right) g_{\mu}^{(II)\nu}, \\ \text{y usaremos: } V[\hat{\phi}^{(II)}] = \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^{(II)2} \end{cases}$$

(5) : Estado cuántico:
$$\begin{aligned} |\xi^{(II)}\rangle &= \dots \mathcal{F}(\xi_{\mp q\vec{k}_1 - p\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{\mp q\vec{k}_1 - p\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \dots \mathcal{F}(\xi_{-2\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{-2\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \mathcal{F}(\xi_{-\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{-\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \dots \mathcal{F}(\xi_{-2\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{-2\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \times \\ &\quad \mathcal{F}(\xi_{-\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{-\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \mathcal{F}(\xi_0^{(II)} \hat{a}_0^{(II)\dagger}) \mathcal{F}(\xi_{\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \mathcal{F}(\xi_{2\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{2\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \dots \mathcal{F}(\xi_{\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \times \\ &\quad \mathcal{F}(\xi_{2\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{2\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \dots \mathcal{F}(\xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \dots |0^{(II)}\rangle, \quad \text{siendo } \mathcal{F}(X) \propto e^X. \end{aligned}$$

Separadamente realizaremos la construcción de las SSC-I y SSC-II. Para la SSC-I el espacio-tiempo, es espacialmente plano y perfectamente H&I, con métrica; $\mathcal{G}^{(I)} = a^2(\eta)\{-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\}$, mientras que para la SSC-II el espacio-tiempo, espacialmente es casi perfectamente H&I, con métrica; $\mathcal{G}^{(I)} = a^2(\eta)\left\{-\left(1+2\Phi(\mathbf{x})\right)d\eta^2 + \left(1-2\Psi(\mathbf{x})\right)\delta_{ij}dx^i dx^j + h_{ij}(\mathbf{x})dx^i dx^j\right\}$. Los potenciales métricos serán escritos como desarrollos en series de potencias en ε . De esta forma el problema podrá ser realizado orden a orden en ε . Sin embargo en este trabajo se realizará la construcción de la SSC-II hasta segundo orden en ε .

- **Paso (1):** Definición formal de la SSC.
- **Paso (2):** Se escriben los operadores de campo: $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ y momento conjugado al campo: $\hat{\pi}(\mathbf{x})$, como combinaciones lineales de los productos $u_{\vec{k}}(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}$ y $u_{\vec{k}}^*(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$.
- **Paso (3):** Se determinan las funciones $u_{\vec{k}}(\eta)$. Esto se consigue solucionando las ecuaciones dinámicas;

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\vec{\nabla}_\nu u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) - m^2 u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (7.41)$$

cuyas condiciones iniciales $u_{\vec{k}}(\eta_0, \vec{x})$ y $u'_{\vec{k}}(\eta_0, \vec{x})$ deberán satisfacer la condición de normalización impuesta por el producto simpléctico;

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}})_{\text{simpl}} \Big|_{\eta=\eta_0} \equiv -i \int_{\Sigma_0} [u_{\vec{k}}\partial_\mu u_{\vec{k}}^* - u_{\vec{k}}^*\partial_\mu u_{\vec{k}}] n^\mu d\Sigma \quad (7.42)$$

- **Paso (4):** Se especifica la relación entre la métrica \mathcal{G} y el estado cuántico $|\xi\rangle$ establecida por las ecuaciones semi-clásicas de Einstein;

$$G_{\mu}{}^\nu[\mathcal{G}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi | \hat{T}_{\mu}{}^\nu[\mathcal{G}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x})] | \xi \rangle, \quad (7.43)$$

- Por último en el **paso (5)** se construye el estado cuántico $|\xi\rangle$ consistente con las simetrías de la métrica $\mathcal{G}(\mathbf{x})$,

$$|\xi\rangle = \left(\prod_{\vec{k}_i \in \mathbb{R}^3} \otimes \mathcal{F}(\xi_{\vec{k}_i}^{(I)} \hat{a}_{\vec{k}_i}^{(I)\dagger}) \right) |0^{(I)}\rangle. \quad (7.44)$$

El estado cuántico $|\xi\rangle$ deberá ser tal que las ecuaciones dinámicas y de restricción para las funciones métricas, derivadas de las ecuaciones semi-clásicas (7.43), formen un sistema de ecuaciones compatibles. Para esto será necesario que el estado cuántico $|\xi\rangle$ y la métrica $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ tengan los mismos modos \vec{k} excitados.

El siguiente organigrama tiene como objeto ilustrar los pasos a seguir para modelar la fenomenología de la transición de una SSC-I (espacialmente H&I) a una SSC-II (espacialmente casi H&I).

hipersuperficie de Cauchy $\Sigma_0 = \{x \in \mathcal{M} / \eta = \eta_0\}$

(1) Colapso auto-inducido: $|\xi^{(I)}\rangle \rightarrow |\zeta_{guia}^{(I)}\rangle$

$$|\xi^{(I)}\rangle = \mathcal{F}(\xi_0^{(I)} a_0^{(I)\dagger}) |0^{(I)}\rangle \rightarrow |\zeta_{guia}^{(I)}\rangle = \dots |0_{-\vec{k}_m}^{(I)}\rangle \otimes \dots |\zeta_{-2\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |\zeta_{-3\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{-2\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_0^{(I)}\rangle$$

$$\otimes |\zeta_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{2\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes \dots |\zeta_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{2\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_m}^{(I)}\rangle \dots$$

siendo $|\zeta_{\vec{k}}^{(I)}\rangle = \mathcal{F}(\zeta_{\vec{k}}^{(I)} a_{\vec{k}}^{(I)\dagger}) |0_{\vec{k}}^{(I)}\rangle$

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\xi}^{(I)}(x) \equiv \langle \xi^{(I)} | \hat{\phi}^{(I)}(x) | \xi^{(I)} \rangle = \xi_0^{(I)} v_0^{(I)}(\eta) / L^{3/2} + c.c. = \phi_{\xi,0}^{(I)}(\eta) \quad : \text{En el estado pre-colapso} \\ \phi_{\zeta_g}^{(I)}(x) \equiv \langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{\phi}^{(I)}(x) | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle \quad : \text{En el estado post-colapso} \\ = \phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta) + \left\{ \left[\phi_{\zeta_g,\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \phi_{\zeta_g,\vec{k}_1}^{(I)}(\eta) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + \dots \right] + c.c. \right\}, \quad \Rightarrow \text{Por H\&I: } \phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta) = \phi_{\xi,0}^{(I)}(\eta) \end{array} \right.$

Por colapso A-I: $\phi_{\zeta_g,\vec{k}}^{(I)}(\eta) = x_{\vec{k}} \sqrt{\langle 0^{(I)} | |\Delta \hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta_c)|^2 | 0^{(I)} \rangle}$
 con: $\|\vec{k}\| = 1$; $x_{n\vec{k}} = x_{n\vec{k}}^R + i x_{n\vec{k}}^I = \varepsilon^n x_{n\vec{k}}^{(n)} + \varepsilon^{n+1} x_{n\vec{k}}^{(n+1)} + \dots$

(3) $\left\{ \begin{array}{l} \langle \xi^{(I)} | \hat{T}_{\mu\nu} | \mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x) | \xi^{(I)} \rangle \neq \langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{T}_{\mu\nu} | \mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x) | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle \\ \text{Entonces, dado que: } G_{\mu\nu} | \mathcal{G}^{(I)}(x) \rangle = 8\pi G \langle \xi^{(I)} | \hat{T}_{\mu\nu} | \mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x) | \xi^{(I)} \rangle \\ \text{Se concluye que: } G_{\mu\nu} | \mathcal{G}^{(I)} \rangle \neq 8\pi G \langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{T}_{\mu\nu} | \mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x) | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle \\ \{ \mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x), |\zeta_{guia}^{(I)}\rangle \in H^{(I)} \} \text{ no representa una SSC-I} \end{array} \right.$

(4) Dado que: $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle \in H^{(I)}$ y $|\xi^{(II)}\rangle \in H^{(II)}$ tienen los mismos modos \vec{k} excitados

$$\langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{T}_{\mu\nu} | \mathcal{G}^{(I)}(x), \hat{\phi}^{(I)}(x), \hat{\pi}^{(I)}(x) | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle_{\eta=\eta_c} = \langle \xi^{(II)} | \hat{T}_{\mu\nu} | \mathcal{G}^{(II)}(x), \hat{\phi}^{(II)}(x), \hat{\pi}^{(II)}(x) | \xi^{(II)} \rangle_{\eta=\eta_c}$$

Igualdad denominada como condición de empalme C.E.



(5) Imponiendo: $\Phi_{[2]}(\eta_c, \vec{x}) = \Psi_{[2]}(\eta_c, \vec{x}) = 0$ y usando la C.E. conduce a:

$$\Phi'_{[2]}(\eta_c, \vec{x}) \neq 0 \quad \vee \quad \Psi'_{[2]}(\eta_c, \vec{x}) \neq 0$$

Por el colapso A-I:

$$\begin{cases} [2] \phi_{\zeta_g,\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c) = [2] \phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) \neq 0 \\ [2] \phi'_{\zeta_g,\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c) = [2] \phi'_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) \neq 0 \end{cases}$$

Conduce a dos sistemas 2X2:

$$\begin{cases} (1) \phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = x_{\vec{k}_0}^{[1]} \sqrt{\langle \xi^{(I)} | |\Delta \hat{\phi}_{\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c)|^2 | \xi^{(I)} \rangle} \\ (1) \phi'_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = \mathcal{A} [x_{\vec{k}_0}^{[1]}, \Psi_{[1]}, \Phi_{[1]}, \phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}] \end{cases}$$

sistema 2X2, solución para: $\xi_{(1),\vec{k}_0}^{(II)}$ y $\xi_{(1),-\vec{k}_0}^{(II)*}$

$$\begin{cases} (2) \phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = x_{\vec{k}_0}^{[2]} \sqrt{\langle \xi^{(I)} | |\Delta \hat{\phi}_{\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c)|^2 | \xi^{(I)} \rangle} \\ (2) \phi'_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = \mathcal{B} [x_{\vec{k}_0}^{[2]}, \Psi_{[2]}, \Phi_{[2]}, \phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}] \end{cases}$$

sistema 2X2, solución para: $\xi_{(2),\vec{k}_0}^{(II)}$ y $\xi_{(2),-\vec{k}_0}^{(II)*}$

(6) Ecuación maestra para $\Psi_{(1)}(x)$:

$$\Psi''_{(1)}(x) - \nabla^2 \Psi_{(1)}(x) + 2 \left(\mathcal{H}^{(II)}(\eta) - \frac{(0) \phi''_{\xi,0}^{(II)}(\eta)}{(0) \phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta)} \right) \Psi'_{(1)}(x) + 2 \left(\mathcal{H}^{(II)}(\eta) - \frac{\mathcal{H}(\eta) (0) \phi''_{\xi,0}^{(II)}(\eta)}{(0) \phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta)} \right) \Psi_{(1)}(x) = 0$$

Ecuación maestra para $\Psi_{(2)}(x)$:

$$\Psi''_{(2)}(x) - \nabla^2 \Psi_{(2)}(x) + 2 \left(\mathcal{H}^{(II)}(\eta) - \frac{(0) \phi''_{\xi,0}^{(II)}(\eta)}{(0) \phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta)} \right) \Psi'_{(2)}(x) + 2 \left(\mathcal{H}^{(II)}(\eta) - \frac{\mathcal{H}(\eta) (0) \phi''_{\xi,0}^{(II)}(\eta)}{(0) \phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta)} \right) \Psi_{(2)}(x) = F_{\text{fuente}} [\Psi_{(1)}, \phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}]$$

$\Sigma_f = \{x \in \mathcal{M} / \eta = \eta_c\}$

- **Paso (1):** El estado $|\xi^{(I)}\rangle \in H^{(I)}$ (con únicamente el modo $\vec{k} = 0$ excitado) experimenta un **colapso auto-inducido** de modo que el estado post-colapso $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle \in H^{(I)}$ en general tienen más modos \vec{k} excitados.
- **Paso (2):** Se calculan los valores de expectación del operador campo $\hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x})$, tanto en el estado pre-colapso $|\xi^{(I)}\rangle$ como en el post-colapso $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle$;

$$\begin{aligned}\phi_{\xi}^{(I)}(\mathbf{x}) &= \langle \xi^{(I)} | \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}) | \xi^{(I)} \rangle = \xi_0^{(I)} v_0^{(I)}(\eta) / L^{3/2} + c.c, \text{ (no depende de } \vec{x} \text{)} \\ \phi_{\zeta_g}^{(I)}(\mathbf{x}) &= \langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}) | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle = \phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta) + \sum_{\vec{k} \neq 0} \phi_{\zeta_g, \vec{k}}^{(I)}(\eta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \text{ (depende de } \vec{x} \text{)}\end{aligned}$$

manifestando que el **colapso** induce un **rompimiento** de la homogeneidad e isotropía H&I del estado cuántico inicial $|\xi^{(I)}\rangle$.

- **Paso (3):** Se muestra que debido a que los estados cuánticos $|\xi^{(I)}\rangle$ y $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle$ no comparten las mismas simetrías, entonces el conjunto $\{\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x}), |\zeta_{guia}^{(I)}\rangle \in H^{(I)}\}$ no es una SSC-I.
- **Paso (4):** para el caso en que los estados cuánticos $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle \in H^{(I)}$ y $|\xi^{(II)}\rangle \in H^{(II)}$ compartan los mismos modos \vec{k} excitados (y por ende las mismas simetrías), se impondrá la condición de empalme, en la hipersuperficie de colapso Σ_c , entre la SSC-I y la SSC-II;

$$\langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{T}_\mu^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x})] | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle |_{\eta=\eta_c} = \langle \xi^{(II)} | \hat{T}_\mu^\nu [\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle |_{\eta=\eta_c}$$

- **Paso (5):** Imponiendo que las contribuciones hasta segundo orden en ε a los potenciales Newtonianos son nulas sobre la hipersuperficie de colapso Σ_c , esto es; $\Psi_{(1)}(\eta_c, \vec{x}) = \Phi_{(1)}(\eta_c, \vec{x}) = \Psi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) = \Phi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) = 0$, además teniendo en cuenta la condición de normalización impuesta por el producto simpléctico, la condición de empalme y las restricciones impuestas por las ecuaciones semi-clásicas de Einstein, es posible determinar de manera auto-consistente las condiciones iniciales de las variables involucradas en este problema junto con los números $\xi_{(0),0}^{(II)}$, $\xi_{(2),0}^{(II)}$, $\xi_{(1),\pm\vec{k}_0}^{(II)}$, $\xi_{(2),\pm 2\vec{k}_0}^{(II)}$, $\xi_{(2),\pm\vec{k}_1}^{(II)}$, etc,.. los cuales hasta segundo orden en ε determinan el estado cuántico $|\xi^{(II)}\rangle \in H^{(II)}$.
- **Paso (6):** Para finalizar, dado que contamos con el método para obtener los valores iniciales (en η_c) para las variables involucradas en el problema, faltaría dar las ecuaciones que gobiernan la dinámica de la contribuciones, hasta segundo orden en ε , de los potenciales métricos. Estas ecuaciones serán obtenidas de trabajar hasta segundo orden en ε con las componentes $G_l^l[\mathcal{G}^{(I)}] = 8\pi G \langle \xi^{(I)} | \hat{T}_l^l[\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x})] | \xi^{(I)} \rangle$ y se trabajara con las restricciones $G_\mu^\eta[\mathcal{G}^{(I)}] = 8\pi G \langle \xi^{(I)} | \hat{T}_\mu^\eta[\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x})] | \xi^{(I)} \rangle$ para escribir los valores de expectación del campo y su momento conjugado en términos de los potenciales métricos. Estas restricciones serán sustituidas en las ecuaciones de movimiento de los potenciales métricos y de esta forma se lograra escribir las ecuaciones dinámicas como ecuaciones diferenciales de segundo orden en donde las únicas incógnitas serán los potenciales métricos. La solución de estas ecuaciones determinará la métrica $\mathcal{G}^{(II)}$ (escrita hasta segundo orden en ε).

7.1.1. Construcción de una SSC-I en un espacio-tiempo espacialmente plano, homogéneo e isotrópico de FRW

Iniciaremos con la construcción asumiendo que un tiempo correspondiente a unos pocos e-folding después del inicio de inflación rodadura lenta (slow roll) el universo puede ser modelado por una **SSC** homogénea e isotrópica la cual denominaremos **SSC-I**.

Para esta situación todos los potenciales métricos serán idénticamente nulos,

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) = h_{ij}(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.45)$$

La desviación entre el periodo de expansión acelerada, conocido como inflación rodadura lenta, y la expansión de Sitter se encuentra parametrizada a través del parámetro de rodadura lenta $\epsilon^{(I)} = 1 - \mathcal{H}'^{(I)}/\mathcal{H}^{2(I)}$. Para tal periodo se tiene que $0 < \epsilon^{(I)} \ll 1$. Por razones practicas y para todos las situaciones que analizaremos en este capitulo, el factor de escala será escrito como; $a^{(I)}(\eta) = \left(-\frac{1}{H_0^{(I)}\eta}\right)^{1+\epsilon^{(I)}}$ por lo cual a primer orden en el parámetro de rodadura lenta se encuentra que; $\mathcal{H} = -(1 + \epsilon^{(I)})/\eta$. Vale recordar que durante inflación con rodadura lenta el tiempo conforme η toma valores $-\infty < \eta < 0$.

Necesitamos encontrar un conjunto completo de modos normales $u_{\vec{k}}^{(I)}(\mathbf{x})$, del campo escalar, para la configuración homogénea e isotrópica. Dada las simetrías del espacio-tiempo de fondo se propone el siguiente ansatz:

$$u_{\vec{k}}^{(I)}(\mathbf{x}) = v_{\vec{k}}^{(I)}(\eta)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}/L^{3/2}, \quad (7.46)$$

sustituyendo (7.45) y el ansatz anterior en (7.33), se encuentra;

$$v_{\vec{k}}''^{(I)} + 2\mathcal{H}^{(I)}v_{\vec{k}}'^{(I)} + (k^2 + a^{2(I)}m^2)v_{\vec{k}}^{(I)} = 0, \quad (7.47)$$

mientras que sustituyendo en (7.39),

$$\left(v_{\vec{k}}^{(I)}\partial_{\eta}v_{\vec{k}'}^{(I)*} - v_{\vec{k}'}^{(I)*}\partial_{\eta}v_{\vec{k}}^{(I)}\right) \int_{\Sigma} \frac{e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{L^3} d^3x \Bigg|_{\eta=\eta_c} = \frac{i}{a^2(\eta_c)}\delta_{\vec{k},\vec{k}'} \quad (7.48)$$

dado que $\int_{\Sigma} \frac{e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{L^3} d^3x = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$, entonces;

$$\left(v_{\vec{k}}^{(I)}\partial_{\eta}v_{\vec{k}}^{(I)*} - v_{\vec{k}}^{(I)*}\partial_{\eta}v_{\vec{k}}^{(I)}\right) \Bigg|_{\eta=\eta_c} = \frac{i}{a^2(I)(\eta_c)}. \quad (7.49)$$

Para los modos $\vec{k} \neq 0$ la solución general de la ecuación (7.47) hasta primer orden en el parámetro de rodadura lenta viene dada por;

$$v_{\vec{k}}^{(I)}(\eta) \approx \eta^{3/2+\epsilon^{(I)}} \{c_1 H_{\nu}^{(1)}(-k\eta) + c_2 H_{\nu}^{(2)}(-k\eta)\}, \quad (7.50)$$

siendo c_1 y c_2 constantes de integración, mientras que $H_{\nu}^{(1)}$ y $H_{\nu}^{(2)}$ son las funciones de Hankel de primera y segunda clase respectivamente, con $\nu = 3/2 + \epsilon^{(I)} - m^2/(3H_0^{2(I)})$.

Al fijar c_1 y c_2 también se fija el vacío de la teoría, entonces al igual como vimos en capítulos pasados por cada elección de c_1 y c_2 tendremos una elección de vacío distinta. Siguiendo la literatura estándar se elige el vacío de Bunch-Davis, el cual a orden más bajo en el parámetro de rodadura lenta $\epsilon^{(I)}$, esto implica $\nu = 3/2$, la función modo toma la forma asintótica;

$$v_{\vec{k}}^{(I)}(\eta) \approx \sqrt{\frac{1}{2k}} \left(-H_0^{(I)}\eta \right) \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta}, \text{ para } \vec{k} \neq 0. \quad (7.51)$$

Mientras que para $\vec{k} = 0$ la solución general de la ecuación (7.47) viene dada por;

$$v_0^{(I)}(\eta) = c_3 \eta^{3/2+\epsilon^{(I)}-\nu} + c_4 \eta^{3/2+\epsilon^{(I)}+\nu}. \quad (7.52)$$

La elección de solución particular $v_0^{(I)}$ es arbitraria, siempre que tenga norma simpléctica positiva. Por conveniencia se toma;

$$v_0^{(I)}(\eta) = \sqrt{\frac{1}{H_0^{(I)}}} \left[1 - \frac{i}{6} \left(-H_0^{(I)}\eta \right)^3 \right] \left(-H_0^{(I)}\eta \right)^{m^2/(3H_0^{2(I)})}, \quad (7.53)$$

la cual ha sido normalizada usando la condición (7.49).

Necesitamos determinar el estado $|\xi^{(I)}\rangle \in H^{(I)}$, {con el cual se calcula el lado derecho de la ecuación (7.40)}, tal que para la métrica $\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x})$, {con la que se calcula el lado izquierdo de la ecuación (7.40)}, tienda asintóticamente a una métrica que describe un modelo de Sitter con el que se modela un universo homogéneo e isotrópico en expansión acelerada (inflación con rodadura lenta) y además que las ecuaciones semi-clasicas de Einstein (7.40) se satisfagan.

Por las simetrías señaladas (homogeneidad e isotropía) el estado $|\xi^{(I)}\rangle$ deberá ser tal que los valores de expectación de los operadores $\hat{\phi}^{(I)}$ y $\hat{\pi}^{(I)}$ sólo dependa de la coordenada temporal η , y no de las coordenadas espaciales (x, y, z) , por lo tanto de (7.46) junto con (7.14) y (7.15) se concluye que el único modo \vec{k} que contribuye de esta manera es $\vec{k} = 0$. Entonces el estado en cuestión sólo podrá tener el modo $\vec{k} = 0$ excitado, mientras que los modos restantes $\vec{k} \neq 0$ deberán encontrarse en sus correspondientes estados base $|0_{\vec{k}}^{(I)}\rangle$. Cabe decir que el estado vacío correspondiente al sistema conformado por todos los modos \vec{k} incluido el modo $\vec{k} = 0$ en la **SSC-I**, según (7.22) será escrito como;

$$\begin{aligned} |0^{(I)}\rangle &= \dots |0_{-\vec{k}_2}^{(I)}\rangle \otimes \dots |0_{-2\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes |0_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |0_{-2\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |0_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |0_0^{(I)}\rangle \\ &\otimes |0_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |0_{2\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes |0_{2\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_2}^{(I)}\rangle \otimes \dots \end{aligned} \quad (7.54)$$

Entonces, el estado $|\xi^{(I)}\rangle$ puede ser expresado como;

$$|\xi^{(I)}\rangle = \mathcal{F}(\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger}) |0^{(I)}\rangle, \quad (7.55)$$

donde $\mathcal{F}(\hat{X})$ representa en principio una función genérica de los operadores \hat{X} . Para este problema se usará la función $\mathcal{F}(\hat{X})$ asociada con los **estados coherentes**: $\mathcal{F}(\hat{X}) \propto e^{\hat{X}}$.

Ahora calcularemos: $\hat{a}_0^{(I)} |\xi^{(I)}\rangle = \hat{a}_0^{(I)} \mathcal{F}(\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger}) |0^{(I)}\rangle$, y para esto primero expandiremos el lado derecho de (7.55). Entonces, usando (7.54) sobre la anterior ecuación se encuentra;

$$\begin{aligned}
 |\xi^{(I)}\rangle &= \mathcal{F}(\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger}) |0^{(I)}\rangle = e^{\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger}} |0^{(I)}\rangle = \left[1 + \xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger} + \frac{1}{2} (\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger})^2 + \dots \right] |0^{(I)}\rangle \\
 &= \left[1 + \xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger} + \frac{1}{2} (\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger})^2 + \dots \right] \left[\dots |0_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |0_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |0_0^{(I)}\rangle \otimes |0_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots \right]
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

teniendo en cuenta que el operador $\hat{a}_0^{(I)\dagger}$ sólo actúa sobre $|0_0^{(I)}\rangle$, entonces de lo anterior se obtiene:

$$|\xi^{(I)}\rangle = \dots |0_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |0_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes \left\{ \left[1 + \xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger} + \frac{1}{2} (\xi_0^{(I)} \hat{a}_0^{(I)\dagger})^2 + \dots \right] |0_0^{(I)}\rangle \right\} \otimes |0_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots \tag{7.57}$$

usando $\hat{a}_0^{(I)\dagger} |n_0^{(I)}\rangle = \sqrt{n_0 + 1} |n_0 + 1_0^{(I)}\rangle$, sobre la anterior ecuación, se encuentra;

$$\begin{aligned}
 |\xi^{(I)}\rangle &= \dots |0_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |0_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes \left\{ |0_0^{(I)}\rangle + \xi_0^{(I)} |1_0^{(I)}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_0^{(I)})^2 |2_0^{(I)}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{6}} (\xi_0^{(I)})^3 |3_0^{(I)}\rangle + \dots \right\} \otimes |0_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots
 \end{aligned} \tag{7.58}$$

entonces la cantidad $\hat{a}_0^{(I)} |\xi^{(I)}\rangle$, se calcula como;

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_0^{(I)} |\xi^{(I)}\rangle &= \dots |0_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes \hat{a}_0^{(I)} \left\{ |0_0^{(I)}\rangle + \xi_0^{(I)} |1_0^{(I)}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_0^{(I)})^2 |2_0^{(I)}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} (\xi_0^{(I)})^3 |3_0^{(I)}\rangle + \dots \right\} \otimes |0_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots
 \end{aligned} \tag{7.59}$$

Ahora, usando $\hat{a}_0^{(I)} |n_0^{(I)}\rangle = \sqrt{n_0} |n_0 - 1_0^{(I)}\rangle$, sobre la anterior ecuación, se obtiene;

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_0^{(I)} |\xi^{(I)}\rangle &= \dots |0_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |0_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes \left[\xi_0^{(I)} |0_0^{(I)}\rangle + (\xi_0^{(I)})^2 |1_0^{(I)}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_0^{(I)})^3 |2_0^{(I)}\rangle + \dots \right] \otimes |0_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots \\
 &= \xi_0^{(I)} \left\{ \dots |0_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |0_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes \left[|0_0^{(I)}\rangle + \xi_0^{(I)} |1_0^{(I)}\rangle \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_0^{(I)})^2 |2_0^{(I)}\rangle + \dots \right] \otimes |0_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots \right\}
 \end{aligned} \tag{7.60}$$

podemos ver que la cantidad entre corchetes angulares es exactamente igual al lado derecho de (7.58), por lo tanto la anterior ecuación puede ser escrita de manera resumida como;

$$\hat{a}_0^{(I)}|\xi^{(I)}\rangle = \xi_0^{(I)}|\xi^{(I)}\rangle \Rightarrow \xi_0^{(I)} = \langle \xi^{(I)}|\hat{a}_0^{(I)}|\xi^{(I)}\rangle. \quad (7.61)$$

Finalmente, haciendo uso de la anterior ecuación junto con (7.14) y (7.46), podemos calcular el valor de expectación del campo $\hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x})$, encontrando;

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}^{(I)}(\mathbf{x}) &= \langle \xi^{(I)}|\hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x})|\xi^{(I)}\rangle = \xi_0^{(I)}v_0^{(I)}(\eta)/L^{3/2} + c.c, \\ &\text{lo cual puede ser escrito como:} \\ &= \phi_{\xi,0}^{(I)}(\eta) + \sum_{\vec{k} \neq 0} \phi_{\xi,\vec{k}}^{(I)}(\eta)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \text{ en donde se ha definido,} \\ \phi_{\xi,0}^{(I)}(\eta) &= \xi_0^{(I)}v_0^{(I)}(\eta)/L^{3/2} + c.c, \text{ mientras que } \forall \vec{k} \neq 0 \text{ se cumple } \phi_{\xi,\vec{k}}^{(I)}(\eta) = 0. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Para el estado $|\xi^{(I)}\rangle$ en el cual el único modo \vec{k} excitado es el modo $\vec{k} = 0$, las ecuaciones semi-clásicas de Einstein no nulas corresponden a las componentes $\eta\eta$, $i = j$, las cuales se simplifican a;

$$3\mathcal{H}^{2(I)} = 4\pi G \left((\phi'^{2(I)})_{\xi,0} + a^{2(I)}m^2(\phi^{2(I)})_{\xi,0} \right), \quad (7.63)$$

$$\mathcal{H}^{2(I)} + 2\mathcal{H}'^{(I)} = -4\pi G \left((\phi'^{2(I)})_{\xi,0} - a^{2(I)}m^2(\phi^{2(I)})_{\xi,0} \right). \quad (7.64)$$

Aquí $(\phi'^{2(I)})_{\xi,0} = \langle \xi^{(I)}|(\partial_\eta \hat{\phi}^{(I)})^2|\xi^{(I)}\rangle$, y $(\phi^{2(I)})_{\xi,0} = \langle \xi^{(I)}|(\hat{\phi}^{(I)})^2|\xi^{(I)}\rangle$, son funciones de η . Las ecuaciones (7.63) y (7.64), son análogas (pero no exactamente iguales) a las ecuaciones (3.137) y (3.138), obtenidas en el contexto de teoría clásica de campos. La razón es que a pesar de que las relaciones de Ehrenfest nos proporcionan las ecuaciones de movimiento para los valores de expectación del campo inflatón, en general las relaciones;

$$(\phi'^{2(I)})_{\xi,0} = (\phi'_{\xi,0}^{(I)})^2, \quad y \quad (\phi^{2(I)})_{\xi,0} = (\phi_{\xi,0}^{(I)})^2, \quad (7.65)$$

las cuales se satisfacen a nivel clásico, pero a nivel cuántico en general no lo hacen puesto que $\langle \xi^{(I)}|\hat{a}_0^{(I)}|\xi^{(I)}\rangle = \xi_0^{(I)}$ no necesariamente implica que $\langle \xi^{(I)}|\hat{a}_0^{2(I)}|\xi^{(I)}\rangle = \xi_0^{2(I)}$. Sin embargo, para el estado $|\xi^{(I)}\rangle$ definido en (7.55) ó (7.56) el cual se trata de un estado coherente, fuertemente localizado alrededor de la configuración clásica $\phi_{\xi,0}^{(I)}$, $\pi_{\xi,0}^{(I)}$, y con únicamente el modo $\vec{k} = 0$ excitado (i.e. $\hat{a}_0^{(I)}|\xi^{(I)}\rangle = \xi_0^{(I)}|\xi^{(I)}\rangle$, siendo $\xi_0^{(I)} \in \mathbb{C}$), las relaciones clásicas (7.65) se satisfacen. Para este caso las ecuaciones (7.64) se reducen a las ecuaciones de Friedmann del tratamiento estándar. Entonces, usando (7.64), vemos que durante inflación rodadura lenta la ecuación $\epsilon^{(I)} = 1 - \mathcal{H}'^{(I)}/\mathcal{H}^{2(I)}$ puede ser escrita como;

$$\epsilon^{(I)}\mathcal{H}^{2(I)} = 4\pi G (\phi'_{\xi,0}^{(I)})^2, \quad (7.66)$$

despejando $\mathcal{H}^{2(I)}$ de la anterior ecuación, para luego sustituirlo en la ecuación (7.63), se encuentra;

$$(3 - \epsilon^{(I)})(\phi'_{\xi,0}^{(I)})^2 = \epsilon^{(I)}a^{2(I)}m^2(\phi_{\xi,0}^{(I)})^2, \quad (7.67)$$

y dado que durante inflación rodadura lenta $0 < \epsilon \ll 1$, entonces la anterior ecuación tomará la siguiente forma aproximada;

$$3(\phi'_{\xi,0})^2 \approx \epsilon^{(I)} a^{2(I)} m^2 (\phi_{\xi,0})^2, \quad (7.68)$$

ahora substituiremos $a^{(I)} = \left(-\frac{1}{H_0^{(I)}\eta}\right)^{1+\epsilon^{(I)}} \approx -\frac{1}{H_0^{(I)}\eta}$ en la anterior ecuación, donde se usa el factor de escala a orden mas bajo en $\epsilon^{(I)}$ puesto que el lado derecho de (7.68) ya es de primer orden en $\epsilon^{(I)}$. Luego de hacer lo anterior, se encuentra;

$$3(\phi'_{\xi,0})^2 \approx \frac{\epsilon^{(I)} m^2}{H_0^{2(I)} \eta^2} (\phi_{\xi,0})^2 \Rightarrow \frac{\phi'_{\xi,0}}{\phi_{\xi,0}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon^{(I)}}{3}} \frac{m}{H_0^{(I)} |\eta|}, \quad (7.69)$$

su primera integral con respecto al tiempo conforme indica que;

$$\phi_{\xi,0}^{(I)}(\eta) \propto |\eta|^{\sqrt{\frac{\epsilon^{(I)}}{3}} \frac{m}{H_0^{(I)}}}. \quad (7.70)$$

Por otro lado, asumiendo que el parámetro $\xi_0^{(I)} \in \mathbb{R}$, y usando (7.53) sobre la ecuación (7.62), se obtiene;

$$\phi_{\xi,0}^{(I)}(\eta) = \frac{2\xi_0^{(I)}}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{H_0^{(I)}}} \left(-H_0^{(I)}\eta\right)^{m^2/(3H_0^{2(I)})}. \quad (7.71)$$

Ahora pidiendo compatibilidad entre las ecuaciones (7.70) y (7.71), recordando que durante inflación $-\infty < \eta < 0$ por lo que $-\eta = |\eta|$, se encuentra;

$$\epsilon^{(I)} = \frac{m^2}{3H_0^{2(I)}}. \quad (7.72)$$

Por último, para calcular la constante de proporcionalidad faltante en (7.70) procederemos de la siguiente manera. Despejaremos $\epsilon^{(I)}$ de la ecuación (7.66) y lo substituiremos en (7.68),

$$\epsilon^{(I)} = 4\pi G \left(\frac{\phi'_{\xi,0}}{\mathcal{H}^{(I)}}\right)^2 \approx \frac{3}{a^{2(I)} m^2} \left(\frac{\phi'_{\xi,0}}{\phi_{\xi,0}}\right)^2 \Rightarrow \frac{4\pi G m^2}{3} \left(\frac{a^{(I)}}{\mathcal{H}^{(I)}}\right)^2 \approx \left(\frac{1}{\phi_{\xi,0}^{(I)}}\right)^2, \quad (7.73)$$

entonces se obtiene $\phi_{\xi,0}^{(I)} \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \frac{H_0^{(I)}}{m}$. Ahora usaremos $a^{(I)} = \left(-\frac{1}{H_0^{(I)}\eta}\right)^{1+\epsilon^{(I)}}$ para calcular $H^{(I)} = \frac{\mathcal{H}^{(I)}}{a^{(I)}}$, obteniendo $a^{(I)} = \frac{1}{H_0^{(I)}\eta^2} \cdot \left(-\frac{1}{H_0^{(I)}\eta}\right)^{\epsilon^{(I)}}$, por lo cual $H^{(I)} = (-H_0^{(I)}\eta)^{\epsilon^{(I)}} \cdot H_0^{(I)}$, entonces $\phi_{\xi,0}^{(I)}$ podrá ser escrito como:

$$\phi_{\xi,0}^{(I)} \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \frac{H_0^{(I)}}{m} \cdot (-H_0^{(I)}\eta)^{\epsilon^{(I)}}, \quad (7.74)$$

nuevamente por compatibilidad entre las ecuaciones (7.71) y (7.74), llegamos a;

$$\frac{2\xi_0^{(I)}}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{H_0^{(I)}}} \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \frac{H_0^{(I)}}{m} = \sqrt{\frac{1}{4\pi G \epsilon^{(I)}}} \quad (7.75)$$

de donde se encuentra que;

$$\xi_0^{(I)} \approx \sqrt{\frac{L^3 H_0^{(I)}}{16\pi G \epsilon^{(I)}}} = \sqrt{\frac{L^3 H_0^{(I)}}{2\epsilon^{(I)} t_p^2}}, \quad (7.76)$$

siendo $t_p = \sqrt{8\pi G}$ el tiempo de Planck.

De esta forma habiendo encontrado $\xi_0^{(I)}$, entonces sustituyéndolo en (7.55) ó (7.58), el estado $|\xi^{(I)}\rangle$ quedará **completamente** determinado.

7.1.2. Construcción de una SSC-II en un espacio-tiempo “levemente inhomogéneo” (“casi FRW”)

Ahora realizaremos la construcción de una **SSC-II**, correspondiente a un espacio-tiempo de FRW perturbado en donde, a diferencia del trabajo presentado en [8] el cual es realizado a orden lineal en la perturbación, truncaremos los desarrollos en series de potencias de las perturbaciones hasta segundo orden en ϵ , orden hasta el cual asumiremos que es relevante la excitación de los potenciales métricos caracterizados por los modos $\vec{k} = 0, \pm\vec{k}_0, \pm 2\vec{k}_0$, y $\pm\vec{k}_1$. Entonces, dado que ahora contribuyen los modos no nulos \vec{k}_0 y \vec{k}_1 en general no proporcionales, exploraremos dos situaciones particulares; **situación (1)**, la cual corresponderá al caso en que los vectores \vec{k}_0 y \vec{k}_1 son paralelos. Para esta situación estos vectores estarán relacionados mediante $\vec{k}_1 = \alpha\vec{k}_0$ siendo α una constante que pertenece al conjunto de los números² \mathbb{Z} . Mientras que la **situación (2)**, corresponderá al caso en el que estos vectores son ortogonales, entonces $\vec{k}_0 \cdot \vec{k}_1 = 0$. Ahora, dado que inicialmente hemos fijado \vec{k}_1 como un vector paralelo al eje z , entonces para la **situación (2)**, sin pérdida de generalidad asumiremos que el vector \vec{k}_0 tiene dirección paralela al eje x . Sin embargo para ambas situaciones asumiremos que los potenciales métricos escritos como desarrollos en series de potencias de ϵ tienen la forma;

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\epsilon^2 a_{(2)}(\eta) + [(\epsilon P_{(1)}(\eta) + \epsilon^2 F_{(2)}(\eta) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c.] + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (7.77)$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \epsilon^2 a_{(2)}(\eta) + [(\epsilon P_{(1)}(\eta) + \epsilon^2 P_{(2)}(\eta) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c.] + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (7.78)$$

$$h_{ij}(\mathbf{x}) = \epsilon^2 h_{ij}^{(2)}(\eta) + (\epsilon^2 H_{ij}^{(2)}(\eta) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + c.c.) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (7.79)$$

En general asumiremos que las funciones $a_{(2)}(\eta), h_{ij}^{(2)}(\eta), P_{(1)}(\eta) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mientras que las funciones $P_{(2)}(\eta), F_{(2)}(\eta), H_{ij}^{(2)}(\eta) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

De (7.79) vemos que el modo \vec{k}_1 inicia su intervención a partir del orden ϵ^2 , razón por la cual las diferencias entre **situación (1)** y **situación (2)** se presentarán a partir del segundo orden en ϵ en adelante.

²Dado que las componentes de los modos \vec{k} en coordenadas cartesianas tienen la forma $k_n = 2\pi j_n/L$, siendo $j_n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \in \mathbb{Z}$ con $n = x, y, z$. Como consecuencia, si los modos \vec{k}_0 y \vec{k}_1 se relacionan mediante $\vec{k}_1 = \alpha\vec{k}_0$ entonces para que k_{n_0} (componentes cartesianas de \vec{k}_0) definidas como: $k_{n_0} = 2\pi j_{n_0}/L$, siendo $j_{n_0} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ y $n_0 = x, y, z$, a través de $k_{n_1} = \alpha k_{n_0}$ implique k_{n_1} (componentes cartesianas de \vec{k}_1) tengan la forma $k_{n_1} = 2\pi j_{n_1}/L$, siendo $j_{n_1} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ y $n_1 = x, y, z$, será necesario y suficiente con que $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Ahora, como primer paso en la construcción de la **SSC-II** realizaremos la teoría cuántica de campos sobre la nueva configuración de espacio-tiempo con la métrica (7.2), caracterizada por los potenciales métricos dados por (7.77), (7.78) y (7.79).

Con base a (7.77), (7.78) y (7.79) se propone el siguiente ansatz para las funciones modo;

$$u_{\vec{k}}^{(II)}(\mathbf{x}) L^{\frac{3}{2}} = \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \varepsilon^2 \sum_{ij} \delta^{(2)} w_{ij}^{(II)}(\eta, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \varepsilon \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta) e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \varepsilon^2 \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta) e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \varepsilon^2 \sum_{ij} \delta^{(2)} W_{ij}^{(II)\pm}(\eta, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1)\cdot\vec{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (7.80)$$

Por simplicidad renombraremos $\theta_{\vec{k}}^{(II)} = \sum_{ij} \delta^{(2)} w_{ij}^{(II)}(\eta, \vec{k})$, y $\beta_{\vec{k}}^{(II)\pm} = \sum_{ij} \delta^{(2)} W_{ij}^{(II)\pm}(\eta, \vec{k})$, por lo cual $u_{\vec{k}}^{(II)}(\eta, \vec{x})$ podrá ser escrito como;

$$u_{\vec{k}}^{(II)}(\mathbf{x}) L^{3/2} = (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta) + \varepsilon^2 \theta_{\vec{k}}^{(II)}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \varepsilon \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta) e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \varepsilon^2 \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta) e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \varepsilon^2 \beta_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1)\cdot\vec{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (7.81)$$

Ahora introduciendo (7.77), (7.78), (7.79), (7.81) en (7.33), y trabajando orden a orden en el parámetro ε , se encuentra que a orden cero en ε la ecuación de movimiento para las funciones modo $\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}$ será;

$$\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)''} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)'} + (k^2 + a^{2(II)} m^2) \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} = 0, \quad (7.82)$$

donde por tratarse de un orden en el cual las perturbaciones no contribuyen, la anterior ecuación tiene una forma análoga a la ecuación (7.47).

Mientras que realizando las mismas sustituciones en (7.39), se obtiene la condición de normalización para las funciones $\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}$, de donde luego de seguir pasos análogos a (7.48) y (7.49) se obtiene;

$$\left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)*'} - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)'} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)*} \right) \Big|_{\eta=\eta_c} = \frac{i}{a^{2(I)}(\eta_c)}. \quad (7.83)$$

Una solución particular de la ecuación (7.82) normalizada con base a (7.83), para modos tales que $\vec{k} \neq 0$ es;

$$\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta) \approx \sqrt{\frac{1}{2k}} \left(-H_0^{(II)} \eta \right) \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta}, \quad \text{para } \vec{k} \neq 0, \quad (7.84)$$

mientras que para modos $\vec{k} = 0$ es;

$$\delta^{(0)} v_0^{(II)} = \sqrt{\frac{1}{H_0^{(II)}}} \left[1 - \frac{i}{6} \left(-H_0^{(II)} \eta \right)^3 \right] \left(-H_0^{(II)} \eta \right)^{m^2/(3H_0^{2(II)})}, \quad \text{para } \vec{k} = 0, \quad (7.85)$$

Ahora estudiaremos las contribuciones dadas por el **primer orden en la perturbación**, esto significa a primer orden en ε .

Sustituyendo los ansatz (7.77), (7.78), (7.79), (7.81) en (7.33), entonces, como resultado de agrupar y separar el primer orden en ε de la ecuación (7.33), se obtiene;

$$\begin{aligned}
& \left(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}''^{(II)\pm} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)\pm} \right) e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} - \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} \right) \left(2P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \right. \\
& \left. + c.c \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \|\vec{k} \pm \vec{k}_0\|^2 \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \left(2P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) \|\vec{k}_0\|^2 \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\
& - 4 \left(2P'_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^2 m^2 \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} = 0,
\end{aligned} \tag{7.86}$$

la anterior ecuación corresponde a una combinación lineal de la forma;

$$\mathcal{C}_+(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0) e^{i(\vec{k}+\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \mathcal{C}_-(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0) e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} = 0. \tag{7.87}$$

Ahora dado que las funciones $e^{i(\vec{k}+\vec{k}_0)\cdot\vec{x}}$ y $e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{x}}$ son linealmente independientes implica que $\mathcal{C}_+(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0) = \mathcal{C}_-(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0) = 0$. De esta forma se encuentran las ecuaciones de movimiento para $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}$;

$$\begin{aligned}
& \delta^{(1)} v_{\vec{k}}''^{(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)+} + \left\{ a^2 m^2 + \|\vec{k} + \vec{k}_0\|^2 \right\} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} + 2\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \\
& - 2 \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} \right) P_{(1)} - 4P'_{(1)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} = 0,
\end{aligned} \tag{7.88}$$

mientras que la ecuación de movimiento para $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}$ será;

$$\begin{aligned}
& \delta^{(1)} v_{\vec{k}}''^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)-} + \left\{ a^2 m^2 + \|\vec{k} - \vec{k}_0\|^2 \right\} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} + 2\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^* \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \\
& - 2 \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} \right) P_{(1)}^* - 4P'_{(1)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} = 0.
\end{aligned} \tag{7.89}$$

Vemos que en general $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}$ y $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}$ satisfacen ecuaciones de movimiento diferentes. Sin embargo dado que $P_{(1)}(\eta) \in \mathbb{R}$ entonces $P'_{(1)}(\eta) \in \mathbb{R}$, por lo cual únicamente para el modo $\vec{k} = 0$ las ecuaciones de movimiento anteriores se reducen a;

$$\begin{aligned}
& \delta^{(1)} v_0''^{(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_0'^{(II)+} + \left\{ a^2 m^2 + \|\vec{k}_0\|^2 \right\} \delta^{(1)} v_0^{(II)+} + 2\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)} \delta^{(0)} v_0^{(II)} \\
& - 2 \left(\delta^{(0)} v_0''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_0'^{(II)} \right) P_{(1)} - 4P'_{(1)} \delta^{(0)} v_0'^{(II)} = 0,
\end{aligned} \tag{7.90}$$

$$\begin{aligned}
& \delta^{(1)} v_0''^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_0'^{(II)-} + \left\{ a^2 m^2 + \|\vec{k}_0\|^2 \right\} \delta^{(1)} v_0^{(II)-} + 2\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)} \delta^{(0)} v_0^{(II)} \\
& - 2 \left(\delta^{(0)} v_0''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_0'^{(II)} \right) P_{(1)} - 4P'_{(1)} \delta^{(0)} v_0'^{(II)} = 0.
\end{aligned} \tag{7.91}$$

Encontrando que en particular para el modo $\vec{k} = 0$, se tiene que $\delta^{(1)} v_0^{(II)+}$ y $\delta^{(1)} v_0^{(II)-}$ satisfacen la misma ecuación de movimiento.

Por otro lado, trabajando con (7.39) hasta primer orden en ε se obtiene la condición de normalización de las funciones $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}$,

$$\int_{\Sigma} d^3x \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* e^{i\{\vec{k} - (\vec{k}' \pm \vec{k}_0)\} \cdot \vec{x}} + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)})^* e^{i\{\vec{k} \pm \vec{k}_0 - \vec{k}'\} \cdot \vec{x}} - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* e^{i\{\vec{k} - (\vec{k}' \pm \vec{k}_0)\} \cdot \vec{x}} - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)})^* e^{i\{\vec{k} \pm \vec{k}_0 - \vec{k}'\} \cdot \vec{x}} - 4(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)*} - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)*}) (P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c) e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right\} = 0. \quad (7.92)$$

Ahora usaremos una vez más el resultado para los vectores \vec{A} y \vec{B} de la forma $\vec{V} = V_x \hat{e}_x + V_y \hat{e}_y + V_z \hat{e}_z$, con $V_u = \frac{2\pi n_u}{L}$, con $u : x, y, z$ y $n_u \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{1}{L^3} \int_{\Sigma} d^3x e^{i(\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{x}} = \frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L d^3x e^{i(\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{x}} = \delta_{\vec{A}, \vec{B}} \quad (7.93)$$

Haciendo uso de este resultado se encuentra de las integrales que aparecen en (7.92) las únicas no triviales se presentan para cuando $\vec{k} - \vec{k}' = \pm \vec{k}_0$, lo cual nos da dos casos.

Caso 1: $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{k}_0$.

Evalutando $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{k}_0$ sobre la ecuación (7.92) se encuentra;

$$\int_{\Sigma} d^3x \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)\pm})^* e^{-i(\vec{k}_0 \pm \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)})^* e^{i(\pm \vec{k}_0 - \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)\pm})^* e^{-i(\vec{k}_0 \pm \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)})^* e^{i(\pm \vec{k}_0 - \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} - 4(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)*} - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)*}) (P_{(1)} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} + P_{(1)}^* e^{-i(\vec{k}_0 + \vec{k}_0) \cdot \vec{x}}) \right\} = 0. \quad (7.94)$$

Ahora luego de calcular las integrales correspondientes, se obtiene;

$$\left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)-})^* + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)-})^* + \right. \\ \left. - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)})^* - 4 \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)*} - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k} + \vec{k}_0}^{(II)*} \right) P_{(1)} \right\} \Big|_{\eta = \eta_c} = 0. \quad (7.95)$$

Vemos que una simple elección de $(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^*$, $(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^*$, $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)$, y $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)$, la cual satisface la anterior ecuación será;

$$\begin{aligned} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^* &= \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) = 0, & \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) &= 4\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) P_{(1)}(\eta_c), \\ (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^* &= 4\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)*}(\eta_c) P_{(1)}(\eta_c). \end{aligned} \quad (7.96)$$

Caso 2: $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{k}_0$

Evaluando $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{k}_0$ sobre la ecuación (7.92) se encuentra;

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} d^3x \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{\prime(II)\pm})^* e^{-i(-\vec{k}_0 \pm \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{\prime(II)})^* e^{i(\pm \vec{k}_0 + \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} \right. \\ & \quad \left. - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{(II)\pm})^* e^{-i(-\vec{k}_0 \pm \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{(II)})^* e^{i(\pm \vec{k}_0 + \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} \right. \\ & \quad \left. - 4(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{\prime(II)*} - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{(II)*}) (P_{(1)} e^{i(\vec{k}_0 + \vec{k}_0) \cdot \vec{x}} + P_{(1)}^* e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_0) \cdot \vec{x}}) \right\} = 0. \quad (7.97) \end{aligned}$$

luego de calcular las integrales correspondientes, se obtiene;

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{\prime(II)+})^* + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{\prime(II)})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} \cdot (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{(II)+})^* + \right. \\ & \quad \left. - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-} \cdot (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{(II)})^* - 4 \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{\prime(II)*} - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} \cdot \delta^{(0)} v_{\vec{k}-\vec{k}_0}^{(II)*} \right) P_{(1)}^* \right\} \Bigg|_{\eta=\eta_c} = 0. \quad (7.98) \end{aligned}$$

Una simple elección de $(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\eta_c))^*$, $(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^*$, $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta_c)$, y $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)$, que satisface la anterior ecuación, es;

$$\begin{aligned} & (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\eta_c))^* = \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta_c) = 0, \quad \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) = 4\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) P_{(1)}^*(\eta_c), \\ & (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^* = 4\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)*}(\eta_c) P_{(1)}^*(\eta_c). \quad (7.99) \end{aligned}$$

Agrupando (7.96) junto con (7.99) y teniendo en cuenta que $P_{(1)} \in \mathbb{R}$, entonces podemos escribir de manera resumida;

$$\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm}(\eta_c) = 0, \quad \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c) = 4\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) P_{(1)}(\eta_c). \quad (7.100)$$

Anteriormente se encontró en (7.90) y (7.91) que la ecuación de movimiento para la variable $\delta^{(1)} v_0^{(II)+}(\eta)$ es idéntica a la de la variable $\delta^{(1)} v_0^{\prime(II)-}(\eta)$, mientras que (7.100) representa una condición inicial, compatible con la condición de normalización (7.92), tal que; $\delta^{(1)} v_0^{(II)+}(\eta_c) = \delta^{(1)} v_0^{(II)-}(\eta_c)$, y $\delta^{(1)} v_0^{\prime(II)+}(\eta_c) = \delta^{(1)} v_0^{\prime(II)-}(\eta_c)$. Entonces, por el teorema de existencia y unicidad se concluye que la solución del sistema (7.90) y (7.91), que satisface las condiciones (7.100), es tal que; $\delta^{(1)} v_0^{(II)+}(\eta) = \delta^{(1)} v_0^{(II)-}(\eta)$.

No obstante, para las funciones $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}$ restantes, una vez dado $P_{(1)}(\eta)$ se sustituye en (7.88) y (7.89), construyendo así las ecuaciones de movimiento para $\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}$, las condiciones iniciales de estas ecuaciones se conseguirán evaluando $P_{(1)}(\eta)$ en η_c para luego ser sustituido en (7.100).

Ahora estudiaremos el **segundo orden en la perturbación**, esto significa trabajar con el segundo orden en ε . Entonces, el orden ε^2 de la ecuación (7.33), corresponde a;

$$\begin{aligned}
& \left(\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} \right) e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \left(\beta_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} + 2\mathcal{H}^{(II)} \beta_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} \right) e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1)\cdot\vec{x}} + \left(\theta_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} \right. \\
& \left. + 2\mathcal{H}^{(II)} \theta_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \left(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} \right) \left(2P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \left\{ [(F_{(2)} \right. \\
& \left. - 2P_{(2)}) e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c] - 4(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c)^2 - 3a_{(2)} \right\} \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\
& + \|\vec{k} \pm 2\vec{k}_0\|^2 \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \|\vec{k} \pm \vec{k}_1\|^2 \beta_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1)\cdot\vec{x}} + 2\|\vec{k} \pm \vec{k}_0\|^2 (P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \\
& + c.c) \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \|\vec{k}\|^2 \theta_{\vec{k}}^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \left\{ [(2F_{(2)} - P_{(2)}) e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c] - 4(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c)^2 \right. \\
& \left. - 3a_{(2)} - 0.5h_L^{(2)} - 0.5(H_L^{(2)} e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}} + c.c) \right\} \|\vec{k}\|^2 \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - 1.5 \left[h_L^{(2)} + (H_L^{(2)} e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}} \right. \\
& \left. + c.c) \right] \|\vec{k}_z\|^2 \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \left\{ (\vec{k}_0)_z [i(F_{(2)} - P_{(2)}) e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c] - 4(\vec{k}_0)_z (P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \right. \\
& \left. + c.c) (iP_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c) + (\vec{k}_1)_z (iH_L^{(2)} e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}} + c.c) \right\} i(\vec{k})_z \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - 4(P'_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \\
& + c.c) \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} - \left\{ a'_{(2)} + 0.5[(3P'_{(2)} + F'_{(2)}) e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c] - 4(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \right. \\
& \left. + c.c) (P'_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c) \right\} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - (\vec{k})_x (\vec{k})_y \left\{ h_T^{(2)} + (H_T^{(2)} e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}} + c.c) \right\} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\
& + a^{2(II)} m^2 \left\{ \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \theta_{\vec{k}}^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \beta_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1)\cdot\vec{x}} \right\} + a^{2(II)} m^2 \left\{ 2[(F_{(2)} - P_{(2)}) e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \right. \\
& \left. + c.c] - 8(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c)^2 - 4a_{(2)} \right\} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0
\end{aligned}$$

la cual puede ser escrita como una combinación lineal de la forma;

$$\begin{aligned}
& \mathcal{C}_{2+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) e^{i(\vec{k}+2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \mathcal{C}_{1+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1) e^{i(\vec{k}+\vec{k}_1)\cdot\vec{x}} + \mathcal{C}_0(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\
& + \mathcal{C}_{2-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) e^{i(\vec{k}-2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} + \mathcal{C}_{1-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1) e^{i(\vec{k}-\vec{k}_1)\cdot\vec{x}} = 0, \tag{7.101}
\end{aligned}$$

Nota: Previamente mencionamos que la ecuación (7.33), consecuencia de (7.31), fue construida asumiendo que los potenciales métricos $^{[2]}\Phi$, $^{[2]}\Psi$, $^{[2]}h_L$ y $^{[2]}h_T$ sólo dependen de las coordenadas (η, z) , de modo que según (7.77), (7.78) y (7.79) vemos que esto equivale a la **situación** en la que $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_0 \parallel \hat{z}$, a la cual hemos denominado como **situación (1)**. Por el mismo motivo, las ecuaciones (7.33) no son útiles para el estudio de la **situación (2)** en donde los potenciales métricos poseen la siguiente dependencia; $^{[2]}\Phi$, $^{[2]}\Psi$, sólo es función de (η, x) mientras que $^{[2]}h_L$ y $^{[2]}h_T$ únicamente dependen de (η, z) .

Entonces, concentrados exclusivamente en la **situación (1)**, caso en el que $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ donde $s \in \mathbb{Z}$, con la finalidad de poder identificar las funciones linealmente independientes que dependen de las coordenadas espaciales, en (7.101) separaremos la **situación (1)** en dos sub-casos. Cuando nos estemos refiriendo a la **situación (1) subcaso (A)** se estará asumiendo que el número s es tal que $s \in \mathbb{Z} - \{-2, 2\}$, mientras que cuando nos estemos refiriendo a la **situación (1) subcaso (B)** se estará asumiendo que $s = -2$ ó 2 . Entonces para **situación (1) subcaso (A)** por independencia lineal de las funciones $\{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}}, e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1)\cdot\vec{x}}\}$ de (7.101) obtenemos:

$$\text{Ecuación } \mathcal{C}_{2+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) = 0$$

De $\mathcal{C}_{2+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) = 0$, se encuentra que la ecuación de movimiento para $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+}$, es;

$$\begin{aligned} & \delta^{(2)}v_{\vec{k}}''^{(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(2)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)+} + \left(\|\vec{k} + 2\vec{k}_0\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+} \\ & - 2P_{(1)}\left(\delta^{(1)}v_{\vec{k}}''^{(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(1)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)+}\right) + \left\{F_{(2)} - 2P_{(2)} - 4P_{(1)}^2\right\}(\delta^{(0)}v_{\vec{k}}''^{(II)+} \\ & + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)+}) + 2\|\vec{k} + \vec{k}_0\|^2P_{(1)}\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+} + \left\{(2F_{(2)} - P_{(2)}) \right. \\ & \left. - 4P_{(1)}^2\right\}\|\vec{k}\|^2\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} + \left\{F_{(2)} - P_{(2)} - 4P_{(1)}^2\right\}(\vec{k}_0 \cdot \vec{k})\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} - 4P_{(1)}'\delta^{(1)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)+} \\ & - \left\{0.5(3P_{(2)}' + F_{(2)}') - 4P_{(1)}P_{(1)}'\right\}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)} + a^{2(II)}m^2\left\{2(F_{(2)} - P_{(2)}) - 8P_{(1)}^2\right\}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} \\ & = 0 \end{aligned} \tag{7.102}$$

$$\text{Ecuación } \mathcal{C}_{2-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) = 0$$

De $\mathcal{C}_{2-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) = 0$, se encuentra que la ecuación de movimiento para $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-}$, es;

$$\begin{aligned} & \delta^{(2)}v_{\vec{k}}''^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(2)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)-} + \left(\|\vec{k} - 2\vec{k}_0\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-} \\ & - 2P_{(1)}^*\left(\delta^{(1)}v_{\vec{k}}''^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(1)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)-}\right) + \left\{F_{(2)}^* - 2P_{(2)}^* - 4P_{(1)}^{*2}\right\}(\delta^{(0)}v_{\vec{k}}''^{(II)-} \\ & + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)-}) + 2\|\vec{k} - \vec{k}_0\|^2P_{(1)}^*\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-} + \left\{(2F_{(2)}^* - P_{(2)}^*) \right. \\ & \left. - 4P_{(1)}^{*2}\right\}\|\vec{k}\|^2\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} + \left\{F_{(2)}^* - P_{(2)}^* - 4P_{(1)}^{*2}\right\}(\vec{k}_0 \cdot \vec{k})\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} - 4P_{(1)}^*\delta^{(1)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)-} \\ & - \left\{0.5(3P_{(2)}^{*'} + F_{(2)}^{*'}) - 4P_{(1)}^*P_{(1)}^{*'}\right\}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}'{}^{(II)} + a^{2(II)}m^2\left\{2(F_{(2)}^* - P_{(2)}^*) - 8P_{(1)}^{*2}\right\}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} \\ & = 0 \end{aligned} \tag{7.103}$$

Nota: a pesar de que las ecuaciones dinámicas para las variables $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+}$ y $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-}$ ecuaciones (7.102) y (7.103) respectivamente, no guardan ninguna relación entre ellas, aquí al igual que en (7.90) y (7.91) vemos que las variables $\delta^{(2)}v_0^{(II)+}$ y $\delta^{(2)}v_0^{(II)-}$ satisfacen la misma ecuación dinámica.

$$\text{Ecuación } \mathcal{C}_{1+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1) = 0$$

De $\mathcal{C}_{1+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1) = 0$, se encuentra que la ecuación de movimiento para $\beta_{\vec{k}}^{(II)+}$, es;

$$\begin{aligned} & \beta_{\vec{k}}''^{(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)}\beta_{\vec{k}}'{}^{(II)+} + \left(\|\vec{k} + \vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\beta_{\vec{k}}^{(II)+} + \\ & + \left[\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{k} - 0.5\|\vec{k}\|^2 - 1.5\|(\vec{k})_z\|^2\right)H_L^{(2)} - \|(\vec{k})_x\| \cdot \|(\vec{k})_y\|H_T^{(2)}\right]\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} = 0 \end{aligned} \tag{7.104}$$

$$\text{Ecuación } \mathcal{C}_{1-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1) = 0$$

De $\mathcal{C}_{1-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1) = 0$, se encuentra que la ecuación de movimiento para $\beta_{\vec{k}}^{(II)-}$, es;

$$\begin{aligned} & \beta_{\vec{k}}^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)}\beta_{\vec{k}}^{\prime(II)-} + \left(\|\vec{k} - \vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\beta_{\vec{k}}^{(II)-} + \\ & + \left[\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{k} - 0.5\|\vec{k}\|^2 - 1.5\|(\vec{k})_z\|^2\right)H_L^{(2)*} - \|(\vec{k})_x\| \cdot \|(\vec{k})_y\|H_T^{(2)*}\right]\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} = 0. \end{aligned} \quad (7.105)$$

Por otra parte, en relación a la **situación (1) subcaso (B)**, el conjunto $\{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}}, e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1)\cdot\vec{x}}\}$ no corresponde a un conjunto de funciones linealmente independientes. En su lugar, por ejemplo para la **situación (1) subcaso (B)** con $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$ el conjunto $\{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, e^{i(\vec{k}+2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} = e^{i(\vec{k}+\vec{k}_1)\cdot\vec{x}}, e^{i(\vec{k}-2\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} = e^{i(\vec{k}-\vec{k}_1)\cdot\vec{x}}\}$, será un conjunto de funciones linealmente independientes. Entonces, ahora los coeficientes $\mathcal{C}_{2\pm}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0)$ y $\mathcal{C}_{1\pm}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1)$ se combinan de tal forma que las ecuaciones (7.102), (7.103), (7.104) y (7.105) no tienen porque satisfacerse, pero en su lugar se satisfacen las siguientes ecuaciones;

$$\mathcal{C}_{2+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) + \mathcal{C}_{1+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1) = 0, \quad (7.106)$$

$$\mathcal{C}_{2-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) + \mathcal{C}_{1-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_1) = 0, \quad (7.107)$$

las cuales respectivamente corresponderán a las ecuaciones de movimiento de las nuevas variables $\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+}$ y $\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-}$ definidas como;

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+} &= \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+} + \beta_{\vec{k}}^{(II)+} \\ \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-} &= \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-} + \beta_{\vec{k}}^{(II)-}. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Entonces, la ecuación $\mathcal{C}_{2+}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) + \mathcal{C}_{1+}(\eta, \vec{k}, 2\vec{k}_0) = 0$, corresponderá a;

$$\begin{aligned} & \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{\prime(II)+} + \left(\|\vec{k} + 2\vec{k}_0\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+} \\ & - 2P_{(1)}\left(\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}\right) + \left\{F_{(2)} - 2P_{(2)} - 4P_{(1)}^2\right\}\left(\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}\right. \\ & + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}\left.) + 2\|\vec{k} + \vec{k}_0\|^2P_{(1)}\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+} + \left\{(2F_{(2)} - P_{(2)})\right. \right. \\ & \left. \left. - 4P_{(1)}^2\right\}\|\vec{k}\|^2\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} + \left\{F_{(2)} - P_{(2)} - 4P_{(1)}^2\right\}(\vec{k}_0 \cdot \vec{k})\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} - 4P_{(1)}'\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}\right. \\ & \left. - \left\{0.5(3P_{(2)}' + F_{(2)}') - 4P_{(1)}P_{(1)}'\right\}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)} + a^{2(II)}m^2\left\{2(F_{(2)} - P_{(2)}) - 8P_{(1)}^2\right\}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}\right. \\ & \left. + \left[\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{k} - 0.5\|\vec{k}\|^2 - 1.5\|(\vec{k})_z\|^2\right)H_L^{(2)} - \|(\vec{k})_x\| \cdot \|(\vec{k})_y\|H_T^{(2)}\right]\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} = 0. \end{aligned} \quad (7.109)$$

Mientras que la ecuación $\mathcal{C}_{2-}(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0, 2\vec{k}_0) + \mathcal{C}_{1-}(\eta, \vec{k}, 2\vec{k}_0) = 0$, corresponde a;

$$\begin{aligned}
& \delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}''^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}'^{(II)-} + \left(\|\vec{k} - 2\vec{k}_0\|^2 + a^{2(II)} m^2 \right) \delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-} \\
& - 2P_{(1)}^* \left(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}''^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)-} \right) + \left\{ F_{(2)}^* - 2P_{(2)}^* - 4P_{(1)}^{*2} \right\} \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}''^{(II)} \right. \\
& + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} \left. \right) + 2\|\vec{k} - \vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^* \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} + \left\{ (2F_{(2)}^* - P_{(2)}^*) \right. \\
& \left. - 4P_{(1)}^{*2} \right\} \|\vec{k}\|^2 \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} + \left\{ F_{(2)}^* - P_{(2)}^* - 4P_{(1)}^{*2} \right\} (\vec{k}_0 \cdot \vec{k}) \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} - 4P_{(1)}'^* \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)-} \\
& - \left\{ 0.5(3P_{(2)}^* + F_{(2)}^*) - 4P_{(1)}^* P_{(1)}'^* \right\} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} + a^{2(II)} m^2 \left\{ 2(F_{(2)}^* - P_{(2)}^*) - 8P_{(1)}^{*2} \right\} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \\
& + \left[\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{k} - 0.5\|\vec{k}\|^2 - 1.5\|(\vec{k})_z\|^2 \right) H_L^{(2)*} - \|(\vec{k})_x\| \cdot \|(\vec{k})_y\| H_T^{(2)*} \right] \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} = 0.
\end{aligned} \tag{7.110}$$

$$\text{Ecuación } \mathcal{C}_0(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0) = 0$$

Según la ecuación (7.101) el coeficiente $\mathcal{C}_0(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0)$ de $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, dado que $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ no depende de \vec{k}_1 , entonces a diferencia de las ecuaciones mencionadas anteriormente la ecuación $\mathcal{C}_0(\eta, \vec{k}, \vec{k}_0) = 0$ consecuencia de (7.101), deberá satisfacerse sin importar si el número $s \in \mathbb{N}$ pertenece o no al conjunto $\{-2, 2\}$. Esta ecuación corresponde a;

$$\begin{aligned}
& \theta_{\vec{k}}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \theta_{\vec{k}}'^{(II)} + \left(\|\vec{k}\|^2 + a^{2(II)} m^2 \right) \theta_{\vec{k}}^{(II)} - 2 \left(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}''^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)-} \right) P_{(1)} \\
& - 2 \left(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}''^{(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)+} \right) P_{(1)}^* - 8|P_{(1)}|^2 \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'^{(II)} \right) + \\
& + 2\|\vec{k} - \vec{k}_0\|^2 P_{(1)} \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} + 2\|\vec{k} + \vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^* \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} - \left\{ (8|P_{(1)}|^2 + h_L^{(2)}) \|\vec{k}\|^2 + \right. \\
& + 3\|(\vec{k})_z\|^2 h_L^{(2)} + 2\|(\vec{k})_x\| \cdot \|(\vec{k})_y\| \cdot h_T^{(2)} + a^{2(II)} m^2 \left(4a_{(2)} + 16\|P_{(1)}\|^2 \right) \left. \right\} \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} + \\
& - 4P_{(1)}' \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)-} - 4P_{(1)}'^* \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'^{(II)+} = 0
\end{aligned} \tag{7.111}$$

El siguiente paso consiste en expandir hasta segundo orden en ε la condición de normalización (7.39), para posteriormente separar y trabajar con el segundo orden en la perturbación (a diferencia de (7.31) para encontrar (7.39) no fue necesario tener en cuenta la orientación de los vectores \vec{k}_0 y \vec{k}_1 es por eso que hasta orden ε^2 el resultado (7.39) puede ser utilizado tanto como para la **situación (1)** como para la **situación (2)**). Realizado esto se obtiene la **condición de normalización** de las funciones $\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm}$, $\beta_{\vec{k}}^{(II)}$ y $\theta_{\vec{k}}^{(II)}$, esto es;

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \left[\theta_{\vec{k}'}^{(II)*} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + (\delta^{(2)} v_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* e^{i(\vec{k}-(\vec{k}'\pm 2\vec{k}_0))\cdot\vec{x}} + (\beta_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* e^{i(\vec{k}-(\vec{k}'\pm\vec{k}_1))\cdot\vec{x}} \right] + \right. \\
& + \left(\theta_{\vec{k}}^{(II)} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \beta_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right) (\delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)})^* + \\
& - \left[\theta_{\vec{k}}^{(II)} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm 2\vec{k}_0-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \beta_{\vec{k}}^{(II)\pm} e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_1-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right] (\delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)})^* + \\
& - (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}) \left[\theta_{\vec{k}'}^{(II)*} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + (\delta^{(2)} v_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* e^{i(\vec{k}-(\vec{k}'\pm 2\vec{k}_0))\cdot\vec{x}} + (\beta_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* e^{i(\vec{k}-(\vec{k}'\pm\vec{k}_1))\cdot\vec{x}} \right] \\
& + \left[\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* \right] e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}_0-(\vec{k}'\pm\vec{k}_0))\cdot\vec{x}} + \\
& + \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}'}^{(II)\pm})^* \right] \left(-4P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) e^{i(\vec{k}-(\vec{k}'\pm\vec{k}_0))\cdot\vec{x}} \\
& + \left[\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)})^* - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)\pm} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)})^* \right] \left(-4P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) e^{i(\vec{k}-\vec{k}'\pm\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} \\
& + \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}'}^{(II)})^* \right] \left(6[P_{(1)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c]^2 - 2a_{(2)} + \right. \\
& \left. - 0.5[(3P_{(2)} + F_{(2)}) e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c] \right) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \Big\} d^3x = 0. \tag{7.112}
\end{aligned}$$

Las integrales involucradas en la anterior ecuación tomarán valores no triviales únicamente para los siguientes casos, $\vec{k}' = \vec{k}$, $\vec{k}' = \vec{k} \pm 2\vec{k}_0$, y $\vec{k}' = \vec{k} \pm \vec{k}_1$.

Caso 1: $\vec{k}' = \vec{k}$.

Para este caso la integral (7.112) da como resultado;

$$\begin{aligned}
& \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} \theta_{\vec{k}}^{(II)*} + \theta_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)})^* - \theta_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)})^* - (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}) \theta_{\vec{k}}^{(II)*} + \right. \\
& + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+})^* - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+})^* + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-})^* + \\
& - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-})^* - 4 \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+})^* \right) P_{(1)} \\
& - 4 \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-})^* \right) P_{(1)} - 4 \left(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)})^* + \right. \\
& \left. - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)})^* \right) P_{(1)}^* - 4 \left(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)})^* - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)})^* \right) P_{(1)} \\
& \left. + \left(\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)})^* \right) \left(12|P_{(1)}|^2 - 2a_{(2)} \right) \right\} \Big|_{\eta=\eta_c} = 0. \tag{7.113}
\end{aligned}$$

Usando (7.100) sobre la ecuación anterior, podemos ver que **una condición inicial** $\theta_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)$ y $\theta_{\vec{k}}^{(II)'}(\eta_c)$ compatible con la condición (7.113) es;

$$\begin{aligned}
\theta_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) P_{(1)}^*(\eta_c) + 4\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) P_{(1)}(\eta_c) + \\
&+ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) [2a_{(2)}(\eta_c) - 12|P_{(1)}(\eta_c)|^2], \\
\theta_{\vec{k}}^{(II)'}(\eta_c) &= 0. \tag{7.114}
\end{aligned}$$

Caso 2: $\vec{k}' = \vec{k} + 2\vec{k}_0$, con $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$

Para este caso la integral (7.112) da como resultado;

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(2)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{\prime(II)-})^* + \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{\prime(II)})^* + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{\prime(II)-})^* + \right. \\ & - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} (\delta^{(2)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{(II)-})^* - \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)+} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{(II)})^* - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)+} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{(II)-})^* + \\ & - 4 \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{\prime(II)-})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{(II)-})^* \right] P_{(1)} - 4 \left[\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{\prime(II)})^* + \right. \\ & - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)+} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{(II)})^* \left. \right] P_{(1)} + \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{\prime(II)})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}^{(II)})^* \right] \left[6P_{(1)}^2 \right. \\ & \left. \left. - 0.5(3P_{(2)} + F_{(2)}) \right] \right\} \Bigg|_{\eta=\eta_c} = 0. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Usando (7.100) sobre la ecuación anterior, podemos ver que **una condición inicial** $\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)$, $(\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^*$, $\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\eta_c)$, y $(\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta_c))^*$ compatible con la condición (7.115) es;

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\eta_c) &= (\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta_c))^* = 0 \\ \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) [0.5(3P_{(2)}(\eta_c) + F_{(2)}(\eta_c)) - 6P_{(1)}^2(\eta_c)], \\ (\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^* &= 4(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^* P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)*}(\eta_c) [1.5P_{(2)}(\eta_c) + 0.5F_{(2)}(\eta_c) - 6P_{(1)}^2(\eta_c)] \end{aligned} \quad (7.116)$$

Caso 3: $\vec{k}' = \vec{k} - 2\vec{k}_0$, con $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$

Nuevamente fuera de los subcasos particulares $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$, y bajo el requerimiento $\vec{k}' = \vec{k} - 2\vec{k}_0$, se encuentra que la integral (7.112) da como resultado;

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(2)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{\prime(II)+})^* + \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{\prime(II)})^* + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{\prime(II)+})^* + \right. \\ & - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} (\delta^{(2)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{(II)+})^* - \delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{(II)})^* - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{(II)+})^* + \\ & - 4 \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{\prime(II)+})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{(II)+})^* \right] P_{(1)}^* - 4 \left[\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{\prime(II)})^* + \right. \\ & - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{(II)})^* \left. \right] P_{(1)}^* + \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{\prime(II)})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}^{(II)})^* \right] \left[6P_{(1)}^{*2} \right. \\ & \left. \left. - 0.5(3P_{(2)}^* + F_{(2)}^*) \right] \right\} \Bigg|_{\eta=\eta_c} = 0. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Usando (7.100) sobre la ecuación anterior, podemos ver que **una condición inicial** $(\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^*$, $\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)$, $(\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\eta_c))^*$, y $\delta^{(2)} v_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta_c)$ compatible con la condición (7.117) es;

$$\begin{aligned}
 (\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^* &= \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta_c) = 0 \\
 (\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^* &= 4(\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^*P_{(1)}^*(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)*}(\eta_c)[1.5P_{(2)}^*(\eta_c) + 0.5F_{(2)}^*(\eta_c) - 6P_{(1)}^{*2}(\eta_c)] \\
 \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)P_{(1)}^*(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[1.5P_{(2)}^*(\eta_c) + 0.5F_{(2)}^*(\eta_c) - 6P_{(1)}^{*2}(\eta_c)]
 \end{aligned} \tag{7.118}$$

Caso 4: $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{k}_1$, con $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$

Nuevamente fuera de los subcasos particulares $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$, y bajo el requerimiento $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{k}_1$, luego de integrar (7.112) obtenemos:

$$\left\{ \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\beta_{\vec{k}+\vec{k}_1}^{\prime(II)-})^* + \beta_{\vec{k}}^{(II)+}(\delta^{(0)}v_{\vec{k}+\vec{k}_1}^{\prime(II)})^* - \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)}(\beta_{\vec{k}+\vec{k}_1}^{(II)-})^* - \beta_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\delta^{(0)}v_{\vec{k}+\vec{k}_1}^{(II)})^* \right\} \Big|_{\eta=\eta_c} = 0 \tag{7.119}$$

La siguiente condición inicial en η_c satisface la condición (7.119),

$$\beta_0^{(II)+}(\eta_c) = -(\beta_0^{(II)-}(\eta_c))^* \in \mathbb{R}, \quad \beta_0^{\prime(II)+}(\eta_c) = -(\beta_0^{\prime(II)-}(\eta_c))^* \in \mathbb{R}, \tag{7.120}$$

$$\beta_{\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c) = -\beta_{-\vec{k}_1}^{(II)+}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_0^{\prime(II)*}(\eta_c)}\beta_0^{\prime(II)-}(\eta_c), \tag{7.121}$$

$$\beta_{\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c) = -\beta_{-\vec{k}_1}^{\prime(II)+}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_0^{(II)*}(\eta_c)}\beta_0^{(II)-}(\eta_c), \tag{7.122}$$

para $p \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que;

$$\beta_{p\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{p\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{(p-1)\vec{k}_1}^{\prime(II)*}(\eta_c)}\beta_{(p-1)\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c), \quad \beta_{p\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{p\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{(p-1)\vec{k}_1}^{(II)*}(\eta_c)}\beta_{(p-1)\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c),$$

$$\beta_{-p\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{-p\vec{k}_1}^{(II)*}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{-(p-1)\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)}\beta_{-(p-1)\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c), \quad \beta_{-p\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{-p\vec{k}_1}^{\prime(II)*}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{-(p-1)\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c)}\beta_{(p-1)\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c),$$

para $q \in \mathbb{Z}$, se tiene que;

$$\beta_{q\vec{k}_1}^{(II)+}(\eta_c) = -(\beta_{q\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c))^*, \quad \beta_{q\vec{k}_1}^{\prime(II)+}(\eta_c) = -(\beta_{q\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c))^*. \tag{7.123}$$

Mientras que para los modos \vec{k} restantes,

$$\begin{aligned}
 \beta_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) &= i\beta_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) = -\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c), & \beta_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\eta_c) &= i\beta_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta_c) = i\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)}(\eta_c), \\
 &\text{con } \vec{k} \neq 0, \text{ y } \vec{k} \neq p\vec{k}_1, \text{ siendo } p \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \tag{7.124}$$

Podemos mencionar **otras condiciones iniciales** para $\beta_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c)$, $\beta'_{\vec{k}}{}^{(II)\pm}(\eta_c)$ que satisfacen la condición de normalización (7.119) y por lo tanto cualquiera de estas podría remplazar las condiciones (7.120), (7.121), (7.122), (7.123) y (7.124). Por ejemplo, una condición para $\beta_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c)$ y $\beta'_{\vec{k}}{}^{(II)\pm}(\eta_c)$, distinta a la anterior, definida para cualquier modo \vec{k} y que satisfacen la condición de normalización (7.119), corresponde a;

$$\beta_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) = -\beta_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) = \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c), \quad \beta'_{\vec{k}}{}^{(II)+}(\eta_c) = -\beta'_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\eta_c) = \delta^{(0)}v'_{\vec{k}}{}^{(II)}(\eta_c). \quad (7.125)$$

Otro ejemplo de condiciones iniciales para $\beta_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c)$ y $\beta'_{\vec{k}}{}^{(II)\pm}(\eta_c)$ que satisfacen la condición de normalización (7.119), distinto a los dos anteriores, corresponde a;

$$\beta_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) = \beta_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) = i\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c), \quad \beta'_{\vec{k}}{}^{(II)+}(\eta_c) = \beta'_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\eta_c) = i\delta^{(0)}v'_{\vec{k}}{}^{(II)}(\eta_c). \quad (7.126)$$

Sin embargo, por razones de **auto-consistencia** de la configuración en estudio (las cuales veremos más adelante), elegiremos (7.120), (7.121), (7.122) junto con (7.123), y (7.124).

Por último examinaremos el siguiente caso.

Caso 5: $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{k}_1$, con $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$

Fuera de los subcasos particulares $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$, y bajo el requerimiento $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{k}_1$, luego de integrar (7.112) obtenemos:

$$\left\{ \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\beta'_{\vec{k}-\vec{k}_1}{}^{(II)+})^* + \beta_{\vec{k}}^{(II)-}(\delta^{(0)}v'_{\vec{k}-\vec{k}_1}{}^{(II)})^* - \delta^{(0)}v'_{\vec{k}}{}^{(II)}(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_1}^{(II)+})^* - \beta'_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\delta^{(0)}v_{\vec{k}-\vec{k}_1}^{(II)})^* \right\} \Big|_{\eta=\eta_c} = 0, \quad (7.127)$$

vemos que (7.120), (7.121), (7.122) junto con (7.123) y (7.124), también satisfacen (7.127).

Resumando, las ecuaciones anteriores, desde (7.112) hasta (7.127), son validas para la **situación (1) subcaso (A)**.

Por otro lado, a lo que corresponde la **situación (1) subcaso (B)**, definida por los subcasos; $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$ ó $\vec{k}_1 = -2\vec{k}_0$, los cuales son completamente análogos de tal forma que será suficiente con que presentemos como se procede con uno de estos. **Entonces, inclinándonos por el subcaso:** $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$, por lo que debemos aplicar las redefiniciones (7.108), entonces luego de calcular la integral (7.112) para $\vec{k}' = \vec{k} + 2\vec{k}_0$, se encuentra;

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)-})^* + \delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(0)} v'_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(1)} v'_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)-})^* + \right. \\
 & - \delta^{(0)} v'_{\vec{k}}{}^{(II)} (\delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)-})^* - \delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)+} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'{}^{(II)+} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)-})^* + \\
 & - 4 \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v'_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)-})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'{}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)-})^* \right] P_{(1)} - 4 \left[\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+} (\delta^{(0)} v'_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* + \right. \\
 & \left. - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'{}^{(II)+} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* \right] P_{(1)} + \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v'_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'{}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}+2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* \right] \left[6P_{(1)}^2 \right. \\
 & \left. \left. - 0.5(3P_{(2)} + F_{(2)}) \right] \right\} \Big|_{\eta=\eta_c} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.128}$$

Usando (7.100) sobre la ecuación anterior, podemos ver que **una condición inicial** $\delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)$, $(\delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^*$, $\delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)+}(\eta_c)$, y $(\delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\eta_c))^*$ compatible con la condición de normalización (7.128) es;

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)+}(\eta_c) &= (\delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\eta_c))^* = 0 \\
 \delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) [0.5(3P_{(2)}(\eta_c) + F_{(2)}(\eta_c)) - 6P_{(1)}^2(\eta_c)], \\
 (\delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^* &= 4(\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^* P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)*}(\eta_c) [1.5P_{(2)}(\eta_c) + 0.5F_{(2)}(\eta_c) - 6P_{(1)}^2(\eta_c)].
 \end{aligned} \tag{7.129}$$

Mientras que para $\vec{k}' = \vec{k} - 2\vec{k}_0$ **en el subcaso:** $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$, aplicando las redefiniciones (7.108) sobre (7.112) se encuentra;

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)+})^* + \delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(0)} v'_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* + \delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(1)} v'_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)+})^* + \right. \\
 & - \delta^{(0)} v'_{\vec{k}}{}^{(II)} (\delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)+})^* - \delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)-} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'{}^{(II)-} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)+})^* + \\
 & - 4 \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(1)} v'_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)+})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'{}^{(II)} (\delta^{(1)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)+})^* \right] P_{(1)}^* - 4 \left[\delta^{(1)} v_{\vec{k}}^{(II)-} (\delta^{(0)} v'_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* + \right. \\
 & \left. - \delta^{(1)} v_{\vec{k}}'{}^{(II)-} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* \right] P_{(1)}^* + \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}}^{(II)} (\delta^{(0)} v'_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* - \delta^{(0)} v_{\vec{k}}'{}^{(II)} (\delta^{(0)} v_{\vec{k}-2\vec{k}_0}{}^{(II)})^* \right] \left[6P_{(1)}^{*2} \right. \\
 & \left. \left. - 0.5(3P_{(2)}^* + F_{(2)}^*) \right] \right\} \Big|_{\eta=\eta_c} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.130}$$

Usando (7.100) sobre la ecuación anterior, podemos ver que **una condición inicial** $(\delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^*$, $\delta^{(2)} \tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)$, $(\delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)+}(\eta_c))^*$, y $\delta^{(2)} \tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\eta_c)$ compatible con la condición de normalización (7.130) es;

$$\begin{aligned}
(\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}'^{(II)+}(\eta_c))^* &= \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}'^{(II)-}(\eta_c) = 0 \\
(\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^* &= 4(\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c))^*P_{(1)}^*(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)*}(\eta_c)[1.5P_{(2)}^*(\eta_c) + 0.5F_{(2)}^*(\eta_c) - 6P_{(1)}^{*2}(\eta_c)] \\
\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)P_{(1)}^*(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[1.5P_{(2)}^*(\eta_c) + 0.5F_{(2)}^*(\eta_c) - 6P_{(1)}^{*2}(\eta_c)]
\end{aligned} \tag{7.131}$$

A modo de resumen: para la **situación (1)** con la excepción de los subcasos $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$, **una condición inicial** en $\eta = \eta_c$ para las variables $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)\pm}$, $\beta_{\vec{k}}^{(II)}$, y $\theta_{\vec{k}}^{(II)}$, las cuales corresponden al segundo orden en la perturbación de las funciones modo (7.81), compatible con la **condición de normalización (7.112)**, consiste en el sistema dado por; (7.114), (7.116), (7.118), (7.120), (7.121), (7.122) junto con (7.123), y (7.124), esto es;

$$\begin{aligned}
\theta_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)P_{(1)}^*(\eta_c) + 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)P_{(1)}(\eta_c) \\
&\quad + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[2a_{(2)}(\eta_c) - 12|P_{(1)}(\eta_c)|^2], \\
\theta_{\vec{k}}'^{(II)}(\eta_c) &= 0.
\end{aligned} \tag{7.132}$$

$$\begin{aligned}
\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[1.5P_{(2)}(\eta_c) + 0.5F_{(2)}(\eta_c) - 6P_{(1)}^2(\eta_c)], \\
\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)P_{(1)}^*(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[1.5P_{(2)}^*(\eta_c) + 0.5F_{(2)}^*(\eta_c) - 6P_{(1)}^{*2}(\eta_c)], \\
\delta^{(2)}v_{\vec{k}}'^{(II)\pm}(\eta_c) &= 0.
\end{aligned} \tag{7.133}$$

$$\beta_0^{(II)+}(\eta_c) = -(\beta_0^{(II)-}(\eta_c))^* \in \mathbb{R}, \quad \beta_0^{\prime(II)+}(\eta_c) = -(\beta_0^{\prime(II)-}(\eta_c))^* \in \mathbb{R}, \quad (7.134)$$

$$\beta_{\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c) = -\beta_{-\vec{k}_1}^{(II)+}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_0^{\prime(II)*}(\eta_c)}\beta_0^{(II)-}(\eta_c), \quad (7.135)$$

$$\beta_{\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c) = -\beta_{-\vec{k}_1}^{\prime(II)+}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_0^{(II)*}(\eta_c)}\beta_0^{(II)-}(\eta_c), \quad (7.136)$$

para $p \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que;

$$\beta_{p\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{p\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{(p-1)\vec{k}_1}^{\prime(II)*}(\eta_c)}\beta_{(p-1)\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c), \quad \beta_{p\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{p\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{(p-1)\vec{k}_1}^{(II)*}(\eta_c)}\beta_{(p-1)\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c),$$

$$\beta_{-p\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{-p\vec{k}_1}^{(II)*}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{-(p-1)\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)}\beta_{-(p-1)\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c), \quad \beta_{-p\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c) = \frac{\delta^{(0)}v_{-p\vec{k}_1}^{\prime(II)*}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{-(p-1)\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c)}\beta_{-(p-1)\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c),$$

para $q \in \mathbb{Z}$, se tiene que;

$$\beta_{q\vec{k}_1}^{(II)+}(\eta_c) = -(\beta_{q\vec{k}_1}^{(II)-}(\eta_c))^*, \quad \beta_{q\vec{k}_1}^{\prime(II)+}(\eta_c) = -(\beta_{q\vec{k}_1}^{\prime(II)-}(\eta_c))^*. \quad (7.137)$$

Mientras que para los modos \vec{k} restantes,

$$\beta_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) = i\beta_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) = -\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c), \quad \beta_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\eta_c) = i\beta_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta_c) = i\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)}(\eta_c),$$

con $\vec{k} \neq 0$, y $\vec{k} \neq p\vec{k}_1$, siendo $p \in \mathbb{Z}$.

$$(7.138)$$

Por otra parte, para la **situación (1) subcaso (B)** con $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$, **una condición inicial** en $\eta = \eta_c$ para las variables $\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)\pm}$ y $\theta_{\vec{k}}^{(II)}$, compatible con la **condición de normalización (7.112)**, consiste en el sistema (7.114), (7.129), (7.131), esto es;

$$\begin{aligned} \theta_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)P_{(1)}^*(\eta_c) + 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)P_{(1)}(\eta_c) + \\ &+ \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[2a_{(2)}(\eta_c) - 12|P_{(1)}(\eta_c)|^2], \\ \theta_{\vec{k}}^{\prime(II)}(\eta_c) &= 0. \end{aligned} \quad (7.139)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[1.5P_{(2)}(\eta_c) + 0.5F_{(2)}(\eta_c) - 6P_{(1)}^2(\eta_c)], \\ \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c)P_{(1)}^*(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[1.5P_{(2)}^*(\eta_c) + 0.5F_{(2)}^*(\eta_c) - 6P_{(1)}^{*2}(\eta_c)], \\ \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm}(\eta_c) &= 0. \end{aligned} \quad (7.140)$$

Nota: se ha venido mencionando que los subcasos $\vec{k}_1 = -2\vec{k}_0$ y $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$ son análogos, la única diferencia será que para el subcaso $\vec{k}_1 = -2\vec{k}_0$ en lugar de $\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+}$ y $\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-}$ definidos en (7.108) para $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$, ahora serán definidos como;

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+} &= \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+} + \beta_{\vec{k}}^{(II)-} \\ \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-} &= \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-} + \beta_{\vec{k}}^{(II)+}\end{aligned}\tag{7.141}$$

Para la **situación (2)**, identificada por $\vec{k}_1 \perp \vec{k}_0$, tal configuración resultará ser **inconsistente** y la razón será presentada más adelante. Sin embargo para la **situación (2)** también se puede construir las ecuaciones correspondientes a las que se han derivado hasta aquí para la **situación (1)** pero eludiremos escribirlas.

Determinación del estado $|\xi^{(II)}\rangle \in H^{(II)}$

Para finalizar con la construcción de la **SSC-II**, encontraremos el estado $|\xi^{(II)}\rangle \in H^{(II)}$ tal que;

$$G_{\mu}{}^{\nu}[\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G\langle \xi^{(II)} | \hat{T}_{\mu}{}^{\nu}[\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle,\tag{7.142}$$

en donde la métrica $\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})$ esta dada por (7.2), y es caracterizada por los potenciales métricos $\Phi^{(II)}(\mathbf{x})$, $\Psi^{(II)}(\mathbf{x})$ y $h_{ij}^{(II)}(\mathbf{x})$ los cuales hemos escrito en (7.77), (7.78) y (7.79) como desarrollos en series de potencias de ε . Dicho de otro modo queremos encontrar el estado $|\xi^{(II)}\rangle \in H^{(II)}$ tal que,

$$\begin{aligned}\delta^{(0)}G_{\mu}{}^{\nu} [{}^{[0]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] &= 8\pi G\langle \xi^{(II)} | \delta^{(0)}\hat{T}_{\mu}{}^{\nu} [{}^{[0]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[0]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[0]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle, \\ \delta^{(1)}G_{\mu}{}^{\nu} [{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] &= 8\pi G\langle \xi^{(II)} | \delta^{(1)}\hat{T}_{\mu}{}^{\nu} [{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle, \\ \delta^{(2)}G_{\mu}{}^{\nu} [{}^{[2]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] &= 8\pi G\langle \xi^{(II)} | \delta^{(2)}\hat{T}_{\mu}{}^{\nu} [{}^{[2]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[2]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[2]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle, \\ & \dots = \dots \\ & \dots = \dots \\ \delta^{(n)}G_{\mu}{}^{\nu} [{}^{[n]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] &= 8\pi G\langle \xi^{(II)} | \delta^{(n)}\hat{T}_{\mu}{}^{\nu} [{}^{[n]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[n]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[n]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle.\end{aligned}\tag{7.143}$$

Lo anterior significa que separaremos y resolveremos el problema en sus diferentes ordenes de ε . Según los ansatz (7.77), (7.78) y (7.79) a orden cero en ε únicamente contribuye el modo $\vec{k} = 0$, a primer orden en ε contribuyen los modos $\vec{k} = 0$ y $\pm\vec{k}_0$, mientras que a segundo orden en ε contribuyen $\vec{k} = 0$, $\pm\vec{k}_0$, $\pm 2\vec{k}_0$, y $\pm\vec{k}_1$. Ahora, incluso si para los siguientes ordenes en ε no aparecen contribuciones de nuevos modos \vec{k}_n tales que $\vec{k}_n \neq 0$, $p\vec{k}_0$, $q\vec{k}_1$, $(p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1)$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ por la no linealidad de los siguientes ordenes en la perturbación (a medida que estudiemos mayores ordenes en ε aparecerán cada vez más productos, entre las perturbaciones, del tipo: escalares \times escalares, escalares \times tensoriales y tensoriales \times tensoriales) notaremos que irán apareciendo contribuciones de nuevos modos \vec{k} los cuales pueden ser entendidos como combinaciones lineales de los modos $\pm\vec{k}_0$ y $\pm\vec{k}_1$, p. ej. a tercer orden en ε , se hará apreciable las contribución de los modos $\pm 3\vec{k}_0$, $\pm(\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1)$, mientras que a cuarto orden en ε se apreciará las contribuciones de los modos $\pm 4\vec{k}_0$, $\pm(2\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1)$, y $\pm 2\vec{k}_1$, a quinto se tendrá $\pm 5\vec{k}_0$,

$\pm(\vec{k}_0 \pm 2\vec{k}_1)$, a sexto $\pm 6\vec{k}_0$, $\pm(4\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1)$, y $\pm 3\vec{k}_1$, y así sucesivamente.

Por tal razón trabajando hasta el n -ésimo orden en ε , puede suponerse que la forma general del estado $|\xi^{(II)}\rangle$ es tal que sólo los modos $\vec{k} = 0, p\vec{k}_0, q\vec{k}_1, \pm(p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1)$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, se encuentran excitados, mientras que los demás modos \vec{k} se encuentran en sus correspondientes estados base. Los modos $\vec{k} = p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1$ serán más interesantes cuando $\vec{k}_1 \perp \vec{k}_0$ (para la **situación (2)**), de lo contrario (esto es para la **situación (1)** $\equiv \vec{k}_1 = s\vec{k}_0$, siendo $s \in \mathbb{Z}$) sólo serán modos que pueden ser entendidos como proporcionales al modo \vec{k}_0 . Lo anterior motiva a proponer el siguiente ansatz para la forma del estado $|\xi^{(II)}\rangle$;

$$\begin{aligned} |\xi^{(II)}\rangle = & \dots |0_{-n\vec{k}_m}^{(II)}\rangle \dots |0_{-n\vec{k}_2}^{(II)}\rangle \otimes \dots |0_{-\vec{k}_2}^{(II)}\rangle \otimes \dots |\xi_{-(p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1)}^{(II)}\rangle \dots \otimes |\xi_{-n\vec{k}_1}^{(II)}\rangle \otimes \dots |\xi_{-2\vec{k}_1}^{(II)}\rangle \\ & \otimes |\xi_{-\vec{k}_1}^{(II)}\rangle \dots \otimes |\xi_{-2\vec{k}_0}^{(II)}\rangle \otimes |\xi_{-\vec{k}_0}^{(II)}\rangle \otimes |\xi_0^{(II)}\rangle \otimes |\xi_{\vec{k}_0}^{(II)}\rangle \otimes |\xi_{2\vec{k}_0}^{(II)}\rangle \dots \otimes |\xi_{-n\vec{k}_0}^{(II)}\rangle \\ & \dots \otimes |\xi_{\vec{k}_1}^{(II)}\rangle \otimes |\xi_{2\vec{k}_1}^{(II)}\rangle \dots \otimes |\xi_{(p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1)}^{(II)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_2}^{(II)}\rangle \dots \otimes |0_{n\vec{k}_2}^{(II)}\rangle \dots \otimes |0_{n\vec{k}_m}^{(II)}\rangle, \dots \end{aligned} \quad (7.144)$$

Asumiendo que dicho estado $|\xi^{(II)}\rangle$ es altamente coherente, entonces este podrá ser escrito como;

$$\begin{aligned} |\xi^{(II)}\rangle = & \dots \mathcal{F}(\xi_{\mp q\vec{k}_1 - p\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{\mp q\vec{k}_1 - p\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \dots \mathcal{F}(\xi_{-2\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{-2\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \mathcal{F}(\xi_{-\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{-\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \dots \mathcal{F}(\xi_{-2\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{-2\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \times \\ & \mathcal{F}(\xi_{-\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{-\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \mathcal{F}(\xi_0^{(II)} \hat{a}_0^{(II)\dagger}) \mathcal{F}(\xi_{\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \mathcal{F}(\xi_{2\vec{k}_0}^{(II)} \hat{a}_{2\vec{k}_0}^{(II)\dagger}) \dots \mathcal{F}(\xi_{\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \times \\ & \mathcal{F}(\xi_{2\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{2\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \dots \mathcal{F}(\xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} \hat{a}_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)\dagger}) \dots |0^{(II)}\rangle, \\ & \text{siendo } \mathcal{F}(\hat{X}) \propto e^{\hat{X}}. \end{aligned} \quad (7.145)$$

De esta forma el estado $|\xi^{(II)}\rangle$ quedará determinado una vez que se especifiquen los números $\left\{ \xi_0^{(II)}, \xi_{p\vec{k}_0}^{(II)}, \xi_{q\vec{k}_1}^{(II)}, \xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} \right\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$. Por otro lado, de igual manera como se encontró (7.61) partiendo de (7.56), usando (7.145) se encuentra que los números $\left\{ \xi_0^{(II)}, \xi_{p\vec{k}_0}^{(II)}, \xi_{q\vec{k}_1}^{(II)}, \xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} \right\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ satisfacen: $\xi_0^{(II)} = \langle \xi^{(II)} | \hat{a}_0^{(II)} | \xi^{(II)} \rangle$, $\xi_{n\vec{k}_0}^{(II)} = \langle \xi^{(II)} | \hat{a}_{n\vec{k}_0}^{(II)} | \xi^{(II)} \rangle$, $\xi_{n\vec{k}_1}^{(II)} = \langle \xi^{(II)} | \hat{a}_{n\vec{k}_1}^{(II)} | \xi^{(II)} \rangle$, y $\xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} = \langle \xi^{(II)} | \hat{a}_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} | \xi^{(II)} \rangle$.

Además de eso, dado que según los ansatz (7.77), (7.78), (7.79) y (7.81), seguido de que a orden cero en la perturbación el único modo \vec{k} que contribuye es $\vec{k} = 0$, entonces a este orden no intervienen las desviaciones del espacio-tiempo espacialmente “casi” perfectamente homogéneo e isótropo, razón por la cual a orden cero en ε el problema es completamente equivalente a la construcción de la **SSC-I**. Entonces, realizando pasos equivalentes a los realizados para encontrar (7.76) se puede obtener el resultado para ${}^{(0)}(\xi_0^{(II)})$, esto es;

$${}^{(0)}(\xi_0^{(II)}) \approx \sqrt{\frac{L^3 H_0^{(II)}}{16\pi G \epsilon^{(II)}}} = \sqrt{\frac{L^3 H_0^{(II)}}{2\epsilon^{(II)} t_p^2}}, \quad (7.146)$$

mientras que ${}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta)$, será análogo a $\phi_{\xi,0}^{(I)}(\eta)$ encontrado en (7.71), pero con la etiqueta $^{(II)}$ en lugar de $^{(I)}$, esto es;

$${}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta) = \frac{2^{(0)}(\xi_0^{(II)})}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{H_0^{(II)}}} \left(-H_0^{(II)}\eta \right)^{m^2/(3H_0^{2(II)})}. \quad (7.147)$$

Ahora, para determinar hasta segundo orden en ε el resto de números $\xi_{p\vec{k}_0}^{(II)}$, $\xi_{q\vec{k}_1}^{(II)}$, $\xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)}$ (con $\xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)}$ nuevo número si \vec{k}_1 no es proporcional a \vec{k}_0), siendo $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, continuaremos con la construcción del estado $|\xi^{(II)}\rangle$ a **ordenes superiores** en ε .

Entonces, calculando $\langle \xi^{(II)} | \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}) | \xi^{(II)} \rangle$, se encuentra que a ordenes superiores ε^n (siendo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$) se manifiesta la desviación del espacio-tiempo espacialmente homogéneo e isotrópico, obteniendo que; $\phi_{\xi}^{(II)}(\mathbf{x}) \equiv \langle \xi^{(II)} | \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}) | \xi^{(II)} \rangle$, esto es valor de expectación de (7.14) en el estado $|\xi^{(II)}\rangle$, puede ser escrito como;

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}^{(II)}(\mathbf{x}) &= \langle \xi^{(II)} | \sum_{\vec{k}} \left[u_{\vec{k}}(\mathbf{x}) \hat{a}_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}^*(\mathbf{x}) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right] | \xi^{(II)} \rangle, \text{ dado que: } \xi_0^{(II)} = \langle \xi^{(II)} | \hat{a}_0^{(II)} | \xi^{(II)} \rangle, \\ \xi_{n\vec{k}_0}^{(II)} &= \langle \xi^{(II)} | \hat{a}_{n\vec{k}_0}^{(II)} | \xi^{(II)} \rangle, \quad \xi_{n\vec{k}_1}^{(II)} = \langle \xi^{(II)} | \hat{a}_{n\vec{k}_1}^{(II)} | \xi^{(II)} \rangle, \\ \xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} &= \langle \xi^{(II)} | \hat{a}_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} | \xi^{(II)} \rangle, \text{ y puesto que el resto de modos } \vec{k} \\ &\text{tales que } \vec{k} \neq 0, p\vec{k}_0, q\vec{k}_1, p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1, \text{ con } p, q \in \mathbb{Z}, \text{ se encuentran} \\ &\text{en sus respectivos estados base, obtenemos;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}^{(II)}(\mathbf{x}) &= \left[u_0(\mathbf{x}) \xi_0^{(II)} + c.c \right] + \left[u_{\vec{k}_0}(\mathbf{x}) \xi_{\vec{k}_0}^{(II)} + c.c \right] + \left[u_{2\vec{k}_0}(\mathbf{x}) \xi_{2\vec{k}_0}^{(II)} + c.c \right] + \dots \\ &+ \left[u_{\vec{k}_1}(\mathbf{x}) \xi_{\vec{k}_1}^{(II)} + c.c \right] + \left[u_{2\vec{k}_1}(\mathbf{x}) \xi_{2\vec{k}_1}^{(II)} + c.c \right] + \left[u_{3\vec{k}_1}(\mathbf{x}) \xi_{3\vec{k}_1}^{(II)} + c.c \right] + \dots \\ &+ \left[u_{-\vec{k}_0}(\mathbf{x}) \xi_{-\vec{k}_0}^{(II)} + c.c \right] + \left[u_{-2\vec{k}_0}(\mathbf{x}) \xi_{-2\vec{k}_0}^{(II)} + c.c \right] + \left[u_{-3\vec{k}_0}(\mathbf{x}) \xi_{-3\vec{k}_0}^{(II)} + c.c \right] + \dots \\ &+ \left[u_{-\vec{k}_1}(\mathbf{x}) \xi_{-\vec{k}_1}^{(II)} + c.c \right] + \left[u_{-2\vec{k}_1}(\mathbf{x}) \xi_{-2\vec{k}_1}^{(II)} + c.c \right] + \left[u_{-3\vec{k}_1}(\mathbf{x}) \xi_{-3\vec{k}_1}^{(II)} + c.c \right] + \dots \\ &+ \left[u_{\pm 2\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1}(\mathbf{x}) \xi_{\pm 2\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1}^{(II)} + c.c \right] + \dots \left[u_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}(\mathbf{x}) \xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} + c.c \right] + \dots \end{aligned} \quad (7.148)$$

sustituyendo en la anterior ecuación $u_{\vec{k}}(\mathbf{x})$ de (7.81) y agrupando las funciones coeficientes de $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$, se encuentra;

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}^{(II)}(\mathbf{x}) &= \phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta) + \left\{ \left[\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, \dots + \phi_{\xi,\vec{k}_1}^{(II)}(\eta) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \right. \right. \\ &\left. \left. + \phi_{\xi,p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)}(\eta) e^{i(p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1) \cdot \vec{x}}, \dots \right] + c.c \right\}, \end{aligned} \quad (7.149)$$

en donde las funciones auxiliares $\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta)$, $\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$, $\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$, \dots , $\phi_{\xi,n\vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$, \dots , $\phi_{\xi,\vec{k}_1}^{(II)}(\eta)$, $\phi_{\xi,2\vec{k}_1}^{(II)}(\eta)$, \dots , $\phi_{\xi,n\vec{k}_1}^{(II)}(\eta)$, \dots , $\phi_{\xi,p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)}(\eta)$, \dots para la **situación (1) subcaso (A)** de igualmente valido para la **situación (2)** vendrán dadas respectivamente por;

$$\begin{aligned}
L^{3/2}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta) &= \left[\left(\delta^{(0)}v_0^{(II)} + \varepsilon^2\theta_0^{(II)} \right) \xi_0^{(II)} + \varepsilon \left(\delta^{(1)}v_{\vec{k}_0}^{(II)-} \xi_{\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(1)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)+} \xi_{-\vec{k}_0}^{(II)} \right) +, \dots \right] + c.c \\
L^{3/2}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)} \xi_{\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)*} \xi_{-\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_0^{(II)+} \xi_0^{(II)} + (\delta^{(1)}v_0^{(II)-})^* \xi_0^{(II)*} \right] +, \dots \\
L^{3/2}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0}^{(II)} \xi_{2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-2\vec{k}_0}^{(II)*} \xi_{-2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_{\vec{k}_0}^{(II)+} \xi_{\vec{k}_0}^{(II)} + (\delta^{(1)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)-})^* \xi_{-\vec{k}_0}^{(II)*} \right] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}v_0^{(II)+} \xi_0^{(II)} + (\delta^{(2)}v_0^{(II)-})^* \xi_0^{(II)*} \right] +, \dots \\
&\quad , \dots = , \dots \\
&\quad , \dots \\
L^{3/2}\phi_{\xi,n\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{n\vec{k}_0}^{(II)} \xi_{n\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-n\vec{k}_0}^{(II)*} \xi_{-n\vec{k}_0}^{(II)*} +, \dots \\
&\quad , \dots = , \dots \\
L^{3/2}\phi_{\xi,\vec{k}_1}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{(II)} \xi_{\vec{k}_1}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{(II)*} \xi_{-\vec{k}_1}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\beta_0^{(II)+} \xi_0^{(II)} + (\beta_0^{(II)-})^* \xi_0^{(II)*} \right] +, \dots \\
&\quad , \dots = , \dots \\
&\quad , \dots \\
L^{3/2}\phi_{\xi,n\vec{k}_1}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{n\vec{k}_1}^{(II)} \xi_{n\vec{k}_1}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-n\vec{k}_1}^{(II)*} \xi_{-n\vec{k}_1}^{(II)*} +, \dots \\
&\quad , \dots = , \dots \\
&\quad , \dots \\
L^{3/2}\phi_{\xi,2\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1}^{(II)} \xi_{2\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-(2\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1)}^{(II)*} \xi_{-(2\vec{k}_0 \pm \vec{k}_1)}^{(II)*} +, \dots \\
&\quad , \dots = , \dots \\
&\quad , \dots \\
L^{3/2}\phi_{\xi,p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} \xi_{p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-(p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1)}^{(II)*} \xi_{-(p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1)}^{(II)*} +, \dots \\
&\quad , \dots = , \dots \\
&\quad , \dots
\end{aligned} \tag{7.150}$$

Mientras que para la **situación (1) subcaso (B)**

$$\begin{aligned}
L^{3/2}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta) &= \left[\left(\delta^{(0)}v_0^{(II)} + \varepsilon^2\theta_0^{(II)} \right) \xi_0^{(II)} + \varepsilon \left(\delta^{(1)}v_{\vec{k}_0}^{(II)-} \xi_{\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(1)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)+} \xi_{-\vec{k}_0}^{(II)} \right) +, \dots \right] + c.c \\
L^{3/2}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)} \xi_{\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)*} \xi_{-\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_0^{(II)+} \xi_0^{(II)} + (\delta^{(1)}v_0^{(II)-})^* \xi_0^{(II)*} \right] +, \dots \\
L^{3/2}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0}^{(II)} \xi_{2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-2\vec{k}_0}^{(II)*} \xi_{-2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_{\vec{k}_0}^{(II)+} \xi_{\vec{k}_0}^{(II)} + (\delta^{(1)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)-})^* \xi_{-\vec{k}_0}^{(II)*} \right] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}\tilde{v}_0^{(II)+} \xi_0^{(II)} + (\delta^{(2)}\tilde{v}_0^{(II)-})^* \xi_0^{(II)*} \right] +, \dots \\
&\quad , \dots = , \dots \\
&\quad , \dots \\
L^{3/2}\phi_{\xi,n\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{n\vec{k}_0}^{(II)} \xi_{n\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-n\vec{k}_0}^{(II)*} \xi_{-n\vec{k}_0}^{(II)*} +, \dots \\
&\quad , \dots = , \dots \\
&\quad , \dots
\end{aligned} \tag{7.151}$$

Como requerimiento para que efectivamente a orden cero en ε únicamente contribuya el modo $\vec{k} = 0$, a primer orden en ε solo contribuyan los modos $\vec{k} = 0$ y \vec{k}_0 , y que a segundo orden en ε sólo contribuya $\vec{k} = 0$, \vec{k}_0 , $2\vec{k}_0$, y \vec{k}_1 , {cuando $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ con $s \in \mathbb{Z}$, esto es **situación (1)}**

para $n, a, b \in \mathbb{N}$ impondremos que; $\xi_{\pm\vec{k}_0}^{(II)} = \varepsilon\xi_{(1),\pm\vec{k}_0}^{(II)} + \varepsilon^3\xi_{(3),\pm\vec{k}_0}^{(II)} + \dots$ mientras que $\xi_{\pm 2\vec{k}_0}^{(II)} = \varepsilon^2\xi_{(2),\pm 2\vec{k}_0}^{(II)} + \varepsilon^4\xi_{(4),\pm 2\vec{k}_0}^{(II)} + \dots$ y en general $\xi_{\pm n\vec{k}_0} = \varepsilon^n\xi_{(n),\pm n\vec{k}_0}^{(II)} + \varepsilon^{n+2}\xi_{(n+2),\pm n\vec{k}_0}^{(II)} + \dots$. No obstante si $\vec{k}_1 \neq s\vec{k}_0$ con $s \in \mathbb{Z}$, **situación (2)**, impondremos que; $\xi_{\pm\vec{k}_1} = \varepsilon^2\xi_{(2),\pm\vec{k}_1}^{(II)} + \varepsilon^4\xi_{(4),\pm\vec{k}_1}^{(II)} + \dots$ y en general para $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\xi_{\pm m\vec{k}_1}^{(II)} = \varepsilon^{m+1}\xi_{(m+1),\pm m\vec{k}_1}^{(II)} + \varepsilon^{m+3}\xi_{(m+3),\pm m\vec{k}_1}^{(II)} + \dots$. Para la **situación (2)** en que los modos $\{\vec{k}_0, \vec{k}_1\}$ no son proporcionales, entonces dado que \vec{k}_0, \vec{k}_1 y $a\vec{k}_0 \pm b\vec{k}_1$ no son vectores colineales, los modos $(a\vec{k}_0 \pm b\vec{k}_1)$ serán mucho más interesantes para la **situación (2)** que para la **situación (1)**, e impondremos para $\tilde{a} \in \mathbb{N}$ y $\tilde{b} \in \mathbb{N} - \{0\}$ que $\xi_{(\tilde{a}\vec{k}_0 \pm \tilde{b}\vec{k}_1)}^{(II)} = \varepsilon^{\tilde{a}+\tilde{b}+1}\xi_{(\tilde{a}+\tilde{b}+1),(\tilde{a}\vec{k}_0 \pm \tilde{b}\vec{k}_1)}^{(II)} + \varepsilon^{\tilde{a}+\tilde{b}+3}\xi_{(\tilde{a}+\tilde{b}+3),(\tilde{a}\vec{k}_0 \pm \tilde{b}\vec{k}_1)}^{(II)} + \dots$

Desarrollo a primer orden en ε

Las ecuaciones:

$$\delta^{(1)}G_l^\eta [{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(1)}\hat{T}_l^\eta [{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle,$$

$$\delta^{(1)}G_\eta^l [{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(1)}\hat{T}_\eta^l [{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle,$$

$$\text{con } l = x, y, z. \tag{7.152}$$

Se reducen a la versión semi-clásica de la ecuación (32) de la referencia [55], donde se deberá intercambiar $\delta^{(1)}\varphi(\mathbf{x})$ (se refiere al primer orden en la perturbación del campo escalar φ) por ${}^{(1)}\phi_\xi^{(II)}(\mathbf{x})$ (se refiere a la contribución al primer orden en ε del valor de expectación del campo $\hat{\phi}$ en el estado $|\xi^{(II)}\rangle$), esta ecuación es;

$$2\partial_t\Psi'_{(1)} + 2\mathcal{H}\partial_t\Phi_{(1)} = 8\pi G \partial_\eta [{}^{[1]}\phi_\xi^{(II)}(\mathbf{x}) \cdot \partial_l [{}^{[1]}\phi_\xi^{(II)}(\mathbf{x})]. \tag{7.153}$$

Usando (7.149) para calcular el lado derecho de la ecuación anterior, y teniendo presente el hecho de que hasta primer orden en la perturbación, las **situaciones (1)** y **(2)** son completamente equivalentes, difiriendo a segundo orden en ε , orden a partir del cual surgen las contribuciones del modo \vec{k}_1 , siendo su orientación con respecto al modo \vec{k}_0 la causa de las diferencias entre las **situaciones (1)** y **(2)**, (recordemos que definimos el caso $\vec{k}_0 \parallel \vec{k}_1$ como la **situación (1)**, mientras que el caso $\vec{k}_0 \perp \vec{k}_1$ como **situación (2)**). Entonces de manera general asumiremos que el vector \vec{k}_0 tiene dirección unitaria \vec{u} la cual es ó paralela al eje x , ó al z .

$$\begin{aligned} \partial_\eta [{}^{[1]}\phi_\xi^{(II)}(\mathbf{x})] &= [{}^{[1]}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta)] + \left\{ \left([{}^{[1]}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)] e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + [{}^{[1]}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)] e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + [{}^{[1]}\phi'_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta)] e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \right) + c.c \right\}, \\ \partial_l [{}^{[1]}\phi_\xi^{(II)}(\mathbf{x})] &= \delta_{lu} \cdot \partial_u [{}^{[1]}\phi_\xi^{(II)}(\mathbf{x})], \text{ con } u = x, y, z. \\ \partial_u [{}^{[1]}\phi_\xi^{(II)}(\mathbf{x})] &= i \left[(k_0)_u [{}^{[1]}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)] e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + 2(k_0)_u [{}^{[1]}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)] e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + (k_1)_u [{}^{[1]}\phi'_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta)] e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \right] + c.c, \end{aligned} \tag{7.154}$$

mientras que usando (7.77), (7.78) y (7.79) para expandir el lado izquierdo, finalmente se encuentra que la ecuación (7.153), puede ser escrita como;

$$\left[i \left(P'_{(1)} + \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)} \right) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right] = 4\pi G \text{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta) \left[i \text{}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right]. \quad (7.155)$$

Usando la independencia lineal de las funciones $e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ y $e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ sobre la anterior ecuación encontramos el conjunto de ecuaciones;

$$\begin{aligned} P'_{(1)} + \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)} &= 4\pi G \text{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta) \text{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}, \\ P'_{(1)} + \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)} &= 4\pi G \text{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta) \text{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)*}, \end{aligned} \quad (7.156)$$

dado que $\text{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta), P_{(1)} \in \mathbb{R}$ de la anterior ecuación se concluye que $\text{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} \in \mathbb{R}$.

Consideremos ahora las componentes jl de las ecuaciones semiclasicas de Einstein:

$$\delta^{(1)}G_j{}^l[{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(1)}\hat{T}_j{}^l[{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle, \text{ con } j \neq l.$$

se reducen a la versión semi-clásica de la ecuación (34) de la referencia [55], esto es;

$$\partial_j \partial^l (\Psi_{(1)} - \Phi_{(1)}) = 0, \quad (7.157)$$

Ahora, puesto que los potenciales métricos: $\Psi_{(1)}$ y $\Phi_{(1)}$ únicamente dependen de (η, u) , siendo u la coordenada espacial z para el caso de la **situación (1)**, mientras que para la **situación (2)** la variable u corresponderá a la coordenada espacial x . Se concluye que la anterior ecuación se satisface de manera trivial ya que puede ser entendida como una derivada parcial (en las coordenadas espaciales) mixta de las contribuciones a primer orden de los potenciales métricos. Entonces, independientemente las derivadas parciales (en las coordenadas espaciales) mixtas: $\partial_j \partial_l \Psi_{(1)}$ y $\partial_j \partial_l \Phi_{(1)}$ serán idénticamente nulas; $\partial_j \partial_l \Psi_{(1)} = \partial_j \partial_l \Phi_{(1)} = 0$, para $j \neq l$ con $j, l = x, y, z$.

Consideremos las componentes $\eta\eta$ de las ecuaciones semiclasicas de Einstein

$$\delta^{(1)}G_\eta{}^\eta[{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(1)}\hat{T}_\eta{}^\eta[{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle, \quad (7.158)$$

nos lleva a la versión semi-clásica de la ecuación (30) de la referencia [55];

$$\begin{aligned} 2\nabla^2 \Psi_{(1)} - 6\mathcal{H}^{(II)} \Psi'_{(1)} &= 8\pi G \left\{ \text{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta) \left[\text{}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right] + \right. \\ &\left. + a^{2(II)} m^2 \text{}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{2(II)}(\eta) \Phi_{(1)} + a^{2(II)} m^2 \text{}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta) \left(\text{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.159)$$

usando (7.77), (7.78) y (7.79) para expandir el lado izquierdo,

$$\begin{aligned} -||\vec{k}_0||^2 \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) - 3\mathcal{H}^{(II)} \left(P'_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) &= 8\pi G \left\{ \text{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \left[\text{}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right] + \right. \\ &\left. + a^{2(II)} m^2 \text{}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{2(II)} \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) + a^{2(II)} m^2 \text{}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} \left(\text{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.160)$$

Agrupando los coeficientes de las funciones: $\{e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}\}$, y teniendo en cuenta que las funciones $e^{\pm i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ son linealmente independientes, entonces se obtiene respectivamente que los coeficientes de $e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ y $e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ implican que;

$$\begin{aligned} 3\mathcal{H}^{(II)} P'_{(1)} + |\vec{k}_0|^2 P_{(1)} &= -4\pi G \left[{}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} + a^{2(II)} m^2 \left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{2(II)} P_{(1)} \right. \right. \\ &+ \left. \left. {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} \right) \right], \\ 3\mathcal{H}^{(II)} P'^*_{(1)} + |\vec{k}_0|^2 P^*_{(1)} &= -4\pi G \left[{}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^* + a^{2(II)} m^2 \left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{2(II)} P^*_{(1)} \right. \right. \\ &+ \left. \left. {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)*} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.161)$$

donde podemos ver que en realidad estás ecuaciones son mutuamente una el complejo conjugado de la otra, por lo tanto corresponden a la misma ecuación.

La ecuación dinámica para la función $P_{(1)}(\eta)$

Consideremos las componentes ll de las ecuaciones semiclasicas de Einstein,

$$\delta^{(1)} G_l^l [{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(1)} \hat{T}_l^l [{}^{[1]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[1]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle, \quad (7.162)$$

A pesar de que las simetrías del problema son tales que los potenciales métricos $\Phi_{(1)}$ y $\Psi_{(1)}$ sólo son funciones de (η, u) , siendo u la coordenada espacial z para el caso dado por la **situación (1)**, mientras que $u = x$ para la **situación (2)**, las componentes xx , yy , zz de la ecuación (7.162) son idénticas y se reducen a la versión semi-clásica de la ecuación (34) de la referencia [55], esto es;

$$\begin{aligned} 2\Psi''_{(1)} + 2 \left(2 \frac{a''^{(II)}}{a^{(II)}} - \mathcal{H}^2 \right) (\Psi_{(1)} + \Phi_{(1)}) + 2\mathcal{H}(2\Psi'_{(1)} + \Phi'_{(1)}) \\ = 8\pi G \left[- {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{2(II)} \Phi_{(1)} + {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) + \right. \\ \left. - \left({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{2(II)} - a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{2(II)} \right) \Psi_{(1)} - a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.163)$$

luego de sustituir (7.77), (7.78) y (7.79) en la anterior ecuación, y expandiendo hasta primer orden en ε se encuentra;

$$\begin{aligned} \left[P''_{(1)} + 3\mathcal{H}P'_{(1)} + 2 \left(2 \frac{a''^{(II)}}{a^{(II)}} - \mathcal{H}^2 \right) P_{(1)} \right] e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \\ = 4\pi G \left[- {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{2(II)} \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) + {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) + \right. \\ \left. - \left({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{2(II)} - a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{2(II)} \right) \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) + \right. \\ \left. - a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.164)$$

Usando la independencia lineal de las funciones $e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ y $e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$, se obtienen las siguientes ecuaciones las cuales son mutuamente una el complejo conjugado de la otra;

Coefficiente de $e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$

Agrupando los coeficientes de $e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ de la ecuación anterior, se encuentra;

$$P''_{(1)} + 3\mathcal{H}P'_{(1)} + 2\left(2\frac{a''^{(II)}}{a^{(II)}} - \mathcal{H}^2\right)P_{(1)} = 4\pi G \left[- {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}'^{2(II)}P_{(1)} + {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} + \right. \\ \left. - \left({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}'^{2(II)} - a^{2(II)}m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}'^{2(II)} \right)P_{(1)} + \right. \\ \left. - a^{2(II)}m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} \right]. \quad (7.165)$$

Usando la definición $\mathcal{H}^{(II)} = \frac{a'^{(II)}}{a^{(II)}}$, podemos ver que $2\mathcal{H}'^{(II)} + \mathcal{H}^{2(II)} = 2\frac{a''^{(II)}}{a^{(II)}} - \mathcal{H}^2$, con esto la anterior ecuación podrá ser escrita como;

$$P''_{(1)} + 3\mathcal{H}P'_{(1)} + 2(2\mathcal{H}'^{(II)} + \mathcal{H}^{2(II)})P_{(1)} = 4\pi G \left[- 2 {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}'^{2(II)}P_{(1)} + {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} + \right. \\ \left. + \left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(1)}P_{(1)} - {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} \right) a^{2(II)}m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} \right] \quad (7.166)$$

Coefficiente de $e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$

Procediendo de manera análoga al caso anterior, trabajando con el coeficiente de $e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ se encuentra;

$$P''_{(1)^*} + 3\mathcal{H}P'_{(1)^*} + 2(2\mathcal{H}'^{(II)} + \mathcal{H}^{2(II)})P_{(1)^*} = 4\pi G \left[- 2 {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}'^{2(II)}P_{(1)^*} + {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)*} + \right. \\ \left. + \left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(1)}P_{(1)^*} - {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)*} \right) a^{2(II)}m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} \right], \quad (7.167)$$

la cual es el complejo conjugado de la ecuación (7.166).

Nota: A pesar de que la pareja ecuaciones que conforman el sistema (7.156) son ecuaciones mutuamente una el complejo conjugado de la otra, al igual que las parejas: la que conforma el sistema (7.161) y la pareja (7.166)-(7.167), sus soluciones son funciones con imágenes sobre el conjunto de los reales puesto que $P_{(1)}(\eta)$, ${}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta)$, y ${}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)$ son funciones definidas sobre los reales.

Sobre el requerimiento ${}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta) \in \mathbb{R}$

Durante el desarrollo de este problema hemos construido a ${}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta)$ como una función

con imagen real, ver la primera ecuación del sistema (7.150), mientras que la condición $(1)\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta) \in \mathbb{R}$ surge como un requerimiento para que cada pareja de ecuaciones que conforman los sistemas; el par (7.156), el par (7.161) y el sistema (7.166)-(7.167), sean consistentes. Ahora debemos corroborar que nuestra construcción de $(1)\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$, ver segunda ecuación en (7.150), admite que esta función sea real. Entonces, trabajando con la definición de $(1)\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}$;

$$L^{3/2} (1)\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} = \delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)}\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)*}\xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_0^{(II)+}\xi_{(0), 0}^{(II)} + (\delta^{(1)}v_0^{(II)-})^*\xi_{(0), 0}^{(II)*} \right], \quad (7.168)$$

se observa que en principio esta variable tiene imagen compleja. Sin embargo, el segundo sumando en (7.168) puede ser analizado de la siguiente forma. Anteriormente se encontró en (7.90) y (7.91) que las ecuaciones de movimiento para las cantidades $\delta^{(1)}v_0^{(II)+}(\eta)$ y $\delta^{(1)}v_0^{(II)-}(\eta)$ son idénticas, mientras que en (7.100) se presentó una condición inicial en $\eta = \eta_c$ para $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta)$, $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)+}(\eta)$, $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta)$ y $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)-}(\eta)$, compatible con la contribución al primer orden en ε de la condición de normalización inducida por el producto simpléctico. Usando (7.100) para el modo $\vec{k} = 0$ se encuentra; $\delta^{(1)}v_0^{(II)+}(\eta_c) = \delta^{(1)}v_0^{(II)-}(\eta_c) = 4\delta^{(0)}v_0^{(II)}(\eta_c)P_{(1)}(\eta_c)$, junto con $\delta^{(1)}v_0^{\prime(II)+}(\eta_c) = \delta^{(1)}v_0^{\prime(II)-}(\eta_c) = 0$, como consecuencia la solución $\{ \delta^{(1)}v_0^{(II)+}(\eta), \delta^{(1)}v_0^{(II)-}(\eta) \}$ del sistema (7.90) y (7.91) que satisface las anteriores condiciones iniciales, por el teorema de existencia y unicidad, se encuentra que $\delta^{(1)}v_0^{(II)+}(\eta) = \delta^{(1)}v_0^{(II)-}(\eta)$. Entonces el segundo sumando en (7.168) puede ser escrito como;

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}v_0^{(II)+}\xi_0 + (\delta^{(1)}v_0^{(II)-})^*\xi_0^* &= \delta^{(1)}v_0^{(II)+}\xi_0 + (\delta^{(1)}v_0^{(II)+}\xi_0)^* \\ &= 2\mathcal{R}e[\delta^{(1)}v_0^{(II)+}\xi_0] = 2\mathcal{R}e[(\delta^{(1)}v_0^{(II)-})^*\xi_0^*] \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (7.169)$$

Mientras que sobre el primer sumando, la función $\delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)}$ presentada en (7.84) es;

$$\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta) \approx \sqrt{\frac{1}{2k}} \left(-H_0^{(II)}\eta \right) \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta}, \quad \text{para } k \neq 0, \quad (7.170)$$

podemos ver que la anterior función ante el cambio $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$, corresponde a;

$$\delta^{(0)}v_{-\vec{k}}^{(II)}(\eta) \approx \sqrt{\frac{1}{2k}} \left(-H_0^{(II)}\eta \right) \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta} \Rightarrow \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta) = \delta^{(0)}v_{-\vec{k}}^{(II)}(\eta), \quad (7.171)$$

esto es; como $\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta)$ sólo depende del modulo del vector \vec{k} , entonces es invariante ante el cambio de \vec{k} por $-\vec{k}$. Ahora **imponiendo que:** $\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)} = \xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)}$, se obtiene que el primer sumando en (7.168) también es real,

$$\begin{aligned} \delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)}\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)*}\xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)*} &= \delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)}\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)} + (\delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)}\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)})^* \\ &= 2\mathcal{R}e[\delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)}\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)}] = 2\mathcal{R}e[\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)*}\xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)*}] \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.172)$$

Finalmente juntando los resultados (7.169) y (7.172) podemos ver que ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$ presentada en (7.168) puede ser entendida como la suma de cantidades definidas sobre los números reales, por lo tanto ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta) \in \mathbb{R}$.

En resumen el sistema de ecuaciones que gobierna la evolución de la variable $P_{(1)}$ viene dado por (7.156), (7.161) y (7.166), esto es;

$$P'_{(1)} + \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)} = 4\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta) {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}, \quad (7.173)$$

$$3\mathcal{H}^{(II)} P'_{(1)} + \|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)} = -4\pi G \left[{}^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)} {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} + a^{2(II)} m^2 \left({}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{2(II)} P_{(1)} + {}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{(II)} {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} \right) \right], \quad (7.174)$$

$$P''_{(1)} + 3\mathcal{H} P'_{(1)} + 2(2\mathcal{H}'^{(II)} + \mathcal{H}^{2(II)}) P_{(1)} = 4\pi G \left[-2 {}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{\prime 2(II)} P_{(1)} + {}^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)} {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} + \left({}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{(II)} P_{(1)} - {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} \right) a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{(II)} \right]. \quad (7.175)$$

Las ecuaciones (7.173) y (7.174) son restricciones de la teoría para las cantidades $P_{(1)}$, ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}$ y sus primeras derivadas con respecto al tiempo conforme. Mientras que (7.175) es la ecuación dinámica para la cantidad $P_{(1)}$. Las restricciones (7.173), (7.174) pueden ser usadas para escribir ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}$ y ${}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}$ como función de $P_{(1)}$ y $P'_{(1)}$, las cuales luego serán sustituidas en la ecuación (7.175), y de esta forma la ecuación dinámica para $P_{(1)}$ puede ser escrita en forma de ecuación homogénea;

$$P''_{(1)} + 2 \left[3\mathcal{H}^{(II)} + \frac{a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}}{{}^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}} \right] P'_{(1)} + \left[\|\vec{k}_0\|^2 + 4\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)} + 8\pi G {}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{\prime 2(II)} \right. \\ \left. + \frac{2a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}}{{}^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}} \mathcal{H}^{(II)} \right] P_{(1)} = 0. \quad (7.176)$$

El sistema de ecuaciones anteriores es valido para $\eta > \eta_c$. Sin embargo partiendo de (7.173) y (7.174) evaluadas en $\eta = \eta_c$, obtenemos un sistema de dos ecuaciones algebraicas lineales con dos incógnitas $P_{(1)}(\eta_c)$ y $P'_{(1)}(\eta_c)$, la solución de tal sistema nos da $P_{(1)}(\eta_c)$ y $P'_{(1)}(\eta_c)$ en función de los datos iniciales ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, esto es;

$$P_{(1)}(\eta_c) = P_{(1)}({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c), {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)) \quad (7.177)$$

$$P'_{(1)}(\eta_c) = P'_{(1)}({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c), {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)). \quad (7.178)$$

Las condiciones (7.177) y (7.178) determinan una única solución particular de la ecuación (7.176). Ahora, referente a los números $\xi_{(1), \pm \vec{k}_0}^{(II)}$, los cuales a orden lineal en ε determinan el

estado $|\xi^{(II)}\rangle$, pueden ser fijados a través del siguiente algoritmo;

Paso (1): Conociendo los datos iniciales ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, entonces a través de (7.177) y (7.178) se generan los datos iniciales $P_{(1)}(\eta_c)$ y $P'_{(1)}(\eta_c)$ para la ecuación (7.176). De esta forma determinamos una única función $P_{(1)}(\eta)$.

Paso (2): Calculando $P_{(1)}(\eta_c)$ (a partir de la solución $P_{(1)}(\eta)$ encontrada en el **Paso (1)**) el sistema (7.100) permite determinar: $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c)$ y $\delta^{(1)}v'_{\vec{k}}{}^{(II)\pm}(\eta_c)$, esto es;

$$\delta^{(1)}v'_{\vec{k}}{}^{(II)\pm}(\eta_c) = 0, \quad \delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c) = 4\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)P_{(1)}(\eta_c). \quad (7.179)$$

Las cuales nos dan las condiciones iniciales necesarias y suficientes para encontrar las soluciones únicas; $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta)$ de (7.88), y $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta)$ de (7.89).

Paso (3): Finalmente con $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta)$ calculamos ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$, ecuación (7.168) y su primera derivada temporal ${}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)$, con las cuales evaluando ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$ y ${}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)$ en η_c obtenemos un sistema de dos ecuaciones algebraicas lineales con dos incógnitas: $\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)}$ y $\xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)*}$. Este sistema es;

$$L^{3/2} {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = \delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}^{(II)}\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)*}\xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_0^{(II)+}\xi_{(0), 0}^{(II)} + (\delta^{(1)}v_0^{(II)-})^*\xi_{(0), 0}^{(II)*} \right] \Bigg|_{\eta=\eta_c} \quad (7.180)$$

$$L^{3/2} {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) = \delta^{(0)}v'_{\vec{k}_0}{}^{(II)}\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v'_{-\vec{k}_0}{}^{(II)*}\xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_0'{}^{(II)+}\xi_{(0), 0}^{(II)} + (\delta^{(1)}v_0'{}^{(II)-})^*\xi_{(0), 0}^{(II)*} \right] \Bigg|_{\eta=\eta_c} \quad (7.181)$$

Solucionando el anterior sistema encontramos $\xi_{(1), \pm\vec{k}_0}^{(II)}$ en función de los datos iniciales ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ y de cantidades que fueron determinadas a orden cero en ε .

Desarrollo a segundo orden en ε

Ahora continuaremos con la descripción a segundo orden en la perturbación.

Las ecuaciones $\delta^{(2)}G_\eta \ l [{}^{[2]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(1)}\hat{T}_\eta \ l [{}^{[2]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[2]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[2]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle$ y $\delta^{(2)}G_l \ \eta [{}^{[2]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(1)}\hat{T}_l \ \eta [{}^{[2]}\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[2]}\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), {}^{[2]}\hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle$, con $l = x, y, z$ se reducen a la versión semi-clásica de la ecuación (6.49) de la referencia [54], esto es;

$$\begin{aligned}
& 2\partial_l \Psi'_{(2)}(\eta, \vec{x}) + 2\mathcal{H}\partial_l \Phi_{(2)}(\eta, \vec{x}) - 8\pi G^{(0)} \phi'_\xi{}^{(II)}(\eta) \partial_l {}^{(2)}\phi_\xi{}^{(II)}(\eta, \vec{x}) \\
& = -8\Psi_{(1)}(\eta, \vec{x})\partial_l \Psi'_{(1)}(\eta, \vec{x}) + 8\mathcal{H}^{(II)}\Psi_{(1)}(\eta, \vec{x})\partial_l \Psi_{(1)}(\eta, \vec{x}) \\
& - 4\Psi'_{(1)}(\eta, \vec{x})\partial_l \Psi_{(1)}(\eta, \vec{x}) + 16\pi G^{(1)} \phi'_\xi{}^{(II)}(\eta, \vec{x}) \partial_l {}^{(1)}\phi_\xi{}^{(II)}(\eta, \vec{x})
\end{aligned} \tag{7.182}$$

usando $\phi_\xi^{(II)}(\eta, \vec{x})$ dado por (7.149) para expandir hasta segundo orden en ε la parte correspondiente a la materia, obtenemos;

$$\begin{aligned}
& 2\partial_l \Psi'_{(2)} + 2\mathcal{H}\partial_l \Phi_{(2)} + 8\Psi_{(1)}\partial_l \Psi'_{(1)} - 8\mathcal{H}^{(II)}\Psi_{(1)}\partial_l \Psi_{(1)} + 4\Psi'_{(1)}\partial_l \Psi_{(1)} \\
& = 8\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \left[i \left(k_{1l} {}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + 2k_{0l} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} \right) + c.c. \right] + \right. \\
& \left. + 2 \left[{}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right] \left[ik_{0l} {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right] \right\},
\end{aligned} \tag{7.183}$$

donde k_{0l} , k_{1l} son respectivamente las componentes l -ésima de los vectores \vec{k}_0 y \vec{k}_1 . Usando (7.77), (7.78) y (7.79) para expandir hasta segundo orden en ε el lado izquierdo de la anterior ecuación, se encuentra que;

$$\begin{aligned}
& \left[4ik_{0l} \left(P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)} F_{(2)} \right) e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right] + 4 \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right) \left(ik_{0l} P'_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right) + \\
& - 4\mathcal{H}^{(II)} \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right) \left(ik_{0l} P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right) + 2 \left(P'_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right) \left(ik_{0l} P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right) \\
& = 4\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \left[i \left(k_{1l} {}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + 2k_{0l} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} \right) + c.c. \right] + \right. \\
& \left. + 2 \left[{}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right] \left[ik_{0l} {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c. \right] \right\},
\end{aligned} \tag{7.184}$$

sobre la anterior ecuación luego de agrupar coeficientes de $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ se encuentra que esta tiene la forma;

$$C_{-2\vec{k}_0} e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + C_{-\vec{k}_1} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + C_0 + C_{2\vec{k}_0} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + C_{\vec{k}_1} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} = 0, \tag{7.185}$$

donde en general $C_{\pm 2\vec{k}_0}$, $C_{\pm \vec{k}_1}$ y C_0 son funciones de η , \vec{k}_0 y \vec{k}_1 .

Este es el punto donde realmente los resultados de **situación (1)** y **(2)** se bifurcan. Para la **situación (1)**, se tiene que $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ con $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Por otro lado, según (7.26) la dirección del vector \vec{k}_1 es paralela al eje z , entonces $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ implica que \vec{k}_0 también será paralelo al eje z , razón por la cual la única componente no nula k_{0l} y k_{1l} se obtienen cuando $l = z$. Lo anterior implica que la única ecuación (7.184) no trivial se consigue para $l = z$. Sustituyendo $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ en (7.185), se obtiene;

$$C_{-2\vec{k}_0} e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + C_{-s\vec{k}_0} e^{-si\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + C_0 + C_{2\vec{k}_0} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + C_{s\vec{k}_0} e^{si\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = 0 \tag{7.186}$$

Esta ecuación, en función del entero s puede ser restringida a la anteriormente mencionada **situación (1) subcaso (A)** en la cual $s \neq \pm 2$, o a la **situación (1) subcaso (B)** en la cual $s = -2$ ó 2 .

Antes de enfocarnos en uno de estos subcasos, cabe mencionar que también estaremos considerando la **situación (2)** en la que $\vec{k}_1 \perp \vec{k}_0$. Con base en lo anterior se puede concluir que la **situación (1) subcaso (A)** caligráficamente comparte cierta similitud con la **situación (2)**, dicha similitud se trata de que para ambas situaciones la ecuación (7.185) implica que $C_{\pm 2\vec{k}_0} = C_{\pm \vec{k}_1} = C_0 = 0$. Tal similitud en algunas ocasiones permitirá extraer los resultados para la **situación (2)** partiendo de los resultados encontrados para la **situación (1) subcaso (A)**. Entonces, basados en lo anterior se procederá de la siguiente manera: el análisis iniciará enfocado en la **situación (1) subcaso (A)** y terminará realizando las modificaciones requeridas para mapear los resultados encontrados a los resultados de la **situación (2)**. Fuera de esto se realizará el análisis de la **situación (1) subcaso (B)**.

Situación (1) subcaso (A)

Entonces, dado que la **situación (1) subcaso (A)** se caracteriza por $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ con $s \neq \pm 2$, entonces las funciones $\{e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, e^{\pm i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}, 1\}$ son linealmente independientes, por lo tanto la ecuación (7.185) implica que $C_{\pm 2\vec{k}_0} = C_{\pm \vec{k}_1} = C_0 = 0$. Por otra parte dado que para la **situación (2)** se tiene que $\vec{k}_1 \perp \vec{k}_0$ entonces se cumplirá que $\vec{k}_1 \neq s\vec{k}_0$ razón por la que en ella también se obtiene que las funciones $\{e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, e^{\pm i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}, 1\}$ son linealmente independientes y entonces como un requerimiento necesario y suficiente para que se satisfaga la ecuación (7.185) deberá ocurrir que $C_{\pm 2\vec{k}_0} = C_{\pm \vec{k}_1} = C_0 = 0$. Por último para completar el mapeo de los resultados de la **situación (1) subcaso (A)** a los de la **situación (2)** se deberá tener en cuenta que para la **situación (1)** se tiene que $\vec{k}_0 = (0, 0, k_{0z})$ y $\vec{k}_1 = (0, 0, k_{1z})$, mientras que para la **situación (2)** se tiene que $\vec{k}_0 = (k_{0x}, 0, 0)$ y $\vec{k}_1 = (0, 0, k_{1z})$.

Entonces, para la **situación (1) subcaso (A)** $s \neq \pm 2$, por independencia lineal de las funciones $\{e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, e^{\pm i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}, 1\}$, aplicada sobre la ecuación (7.186) se concluye que el coeficiente $C_{2\vec{k}_0}$ de $e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$, define la ecuación: $C_{2\vec{k}_0} = 0$, la cual corresponde a;

$$\begin{aligned} & 2\left(P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)} F_{(2)}\right) \vec{k}_0 \cdot \hat{u} + 2P_{(1)} P'_{(1)} \vec{k}_0 \cdot \hat{u} - 2\mathcal{H}^{(II)} P_{(1)}^2 \vec{k}_0 \cdot \hat{u} + P'_{(1)} P_{(1)} \vec{k}_0 \cdot \hat{u} \\ & = 4\pi G \left\{ \vec{k}_0 \cdot \hat{u} {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)} + \vec{k}_0 \cdot \hat{u} {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} \right\}, \end{aligned} \quad (7.187)$$

dicha ecuación cuando $\vec{k}_0 \cdot \hat{u} \neq 0$ (para esta situación esto se consigue cuando $u = z$) puede ser simplificada a su expresión no trivial dada por;

$$\begin{aligned} & P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)} F_{(2)} + \frac{3}{2} P_{(1)} P'_{(1)} - \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)}^2 \\ & = 2\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)} + {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} \right\}. \end{aligned} \quad (7.188)$$

Procediendo de manera análoga como se hizo para la deducción de la ecuación anterior, trabajando con el coeficiente $C_{-2\vec{k}_0}$ de $e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$ de la ecuación (7.186) se obtiene;

$$\begin{aligned} P'_{(2)*} + \mathcal{H}^{(II)} F_{(2)*} + \frac{3}{2} P_{(1)*} P'_{(1)*} - \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)*}^2 \\ = 2\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \quad {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)*} + {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)*} \quad {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)*} \right\}, \end{aligned} \quad (7.189)$$

vemos que las ecuaciones (7.188) y (7.189) están relacionadas por medio de conjugación compleja.

Por último trabajando con el coeficiente $C_{\vec{k}_1}$ de $e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}$ se obtiene la ecuación:

$$0 = 4\pi G \left\{ i\vec{k}_1 \cdot \hat{u} \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \quad {}^{(2)}\phi_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)} \right\} = 4\pi G \left\{ i\vec{k}_1 \cdot \hat{u} \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \quad {}^{(2)}\phi_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)*} \right\} \quad (7.190)$$

y cuando $\vec{k}_1 \cdot \hat{u} \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta) \neq 0$ (para la situación en estudio esta condición se consigue cuando $u = z$) la ecuación anterior implica que ${}^{(2)}\phi_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) = {}^{(2)}\phi_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)*}(\eta) = 0$.

Bajo este requerimiento el segundo orden en ε de la quinta ecuación (7.150), junto con la solución no trivial de (7.190) lleva a la siguiente restricción;

$$\begin{aligned} \frac{L^{3/2}}{2} \quad {}^{(2)}\phi_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) \quad {}^{(2)}(\xi_{\vec{k}_1}{}^{(II)}) + \delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}(\eta) \quad {}^{(2)}(\xi_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}) \\ &+ \varepsilon^2 \left[\beta_0^{(II)+}(\eta) \xi_{(0),0}{}^{(II)} + (\beta_0^{(II)-}(\eta))^* \xi_{(0),0}{}^{(II)*} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.191)$$

Ahora, dado que para esta situación hemos impuesto que $\xi_{\pm\vec{k}_1}{}^{(II)} = \xi_{\pm s\vec{k}_0}{}^{(II)} = \varepsilon^s \xi_{(s),\vec{k}_0}{}^{(II)} + \varepsilon^{s+2} \xi_{(s+2),\vec{k}_0}{}^{(II)} + \dots$, y como para el subcaso en estudio $s \in \mathbb{N} - \{0, 2\}$ esto implica que las contribución al segundo orden en ε producida por los dos primeros sumandos del lado derecho de (7.191) es nula. Por lo tanto, para esta situación a lo que corresponde al segundo orden en la perturbación de (7.191) debemos prescindir de sus dos primeros sumandos (términos del lado derecho de la parte superior). Luego de esto se obtiene;

$$\begin{aligned} \frac{L^{3/2}}{2} \quad {}^{(2)}\phi_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) &= \varepsilon^2 \left[\beta_0^{(II)+}(\eta) \xi_{(0),0}{}^{(II)} + (\beta_0^{(II)-}(\eta))^* \xi_{(0),0}{}^{(II)*} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.192)$$

Por otra parte, en (7.146) se encontró que $\xi_{(0),0}{}^{(II)}$ corresponde a un número real distinto de cero, entonces para que (7.192) se satisfaga se requiere que;

$$\beta_0^{(II)+}(\eta) = -(\beta_0^{(II)-}(\eta))^*, \quad \forall \eta. \quad (7.193)$$

Las condiciones iniciales (7.134), (7.135), (7.136) junto con (7.137) y (7.138) son compatibles con la a anterior restricción, esta es la razón por la cual anteriormente se eligió $\beta_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c)$, $\beta'_{\vec{k}}{}^{(II)\pm}(\eta_c)$ dadas por (7.120), (7.121), (7.122), (7.123), y (7.124), en lugar de (7.125) ó (7.126).

Ahora, nos enfocaremos en el mismo sistema de ecuaciones dado por (7.185) pero analizado desde la **situación (2)**.

Para la **situación (2)** se cumple que $\vec{k}_1 \neq \pm s\vec{k}_0$, entonces la independencia lineal de las funciones $\{e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, e^{\pm i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}, 1\}$ aplicada sobre (7.185) nos conduce a las mismas ecuaciones (7.188),

(7.189) y (7.190) encontradas para la **situación (1) subcaso (A)**. La diferencia será que las ecuaciones no triviales (7.188), (7.189), junto con la solución no trivial de (7.190) se conseguirán para $u = x$ (en lugar de $u = z$ como se consiguió para **situación (1) subcaso (A)**).

Por otro lado, en esta situación el segundo orden en ε de la quinta ecuación (7.150), junto con la solución no trivial de (7.190) aporta la siguiente restricción;

$$\begin{aligned} \frac{L^{3/2}}{2} {}^{(2)}\phi'_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) {}^{(2)}(\xi_{\vec{k}_1}{}^{(II)}) + \delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}(\eta) {}^{(2)}(\xi_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}) \\ &+ \varepsilon^2 \left[\beta_0^{(II)+}(\eta) \xi_{(0,0)}^{(II)} + (\beta_0^{(II)-}(\eta))^* \xi_{(0,0)}^{(II)*} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.194)$$

En otro orden de ideas, dado que para la situación en estudio hemos impuesto que $\xi_{\pm w \vec{k}_1}^{(II)} = \varepsilon^{w+1} \xi_{(w+1) \pm w \vec{k}_1}^{(II)} + \varepsilon^{w+3} \xi_{(w+3) \pm w \vec{k}_1}^{(II)} + \dots$ con $w \in \mathbb{N} - \{0\}$, entonces a diferencia de la **situación (1) subcaso (A)**, todos los sumandos que intervienen en (7.194) contribuyen significativamente al segundo orden en ε .

Ahora, tomando la derivada de (7.194) con respecto al tiempo conforme, se encontrará;

$$\begin{aligned} \frac{L^{3/2}}{2} {}^{(2)}\phi'_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)} v'_{\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) \xi_{(2), \vec{k}_1}^{(II)} + \delta^{(0)} v'_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}(\eta) \xi_{(2), -\vec{k}_1}^{(II)*} \\ &+ \varepsilon^2 \left[\beta_0'^{(II)+}(\eta) \xi_{(0,0)}^{(II)} + (\beta_0'^{(II)-}(\eta))^* \xi_{(0,0)}^{(II)*} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.195)$$

posteriormente para determinar los números $\xi_{(2), \pm \vec{k}_1}^{(II)}$ procederemos de la siguiente manera. Calcularemos $\xi_{(2), \pm \vec{k}_1}^{(II)}$ a través del sistema de ecuaciones algebraico formado por la ecuaciones (7.194) y (7.195) evaluadas en $\eta = \eta_c$, esto es;

$$\begin{aligned} \frac{L^{3/2}}{2} {}^{(2)}\phi'_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta_c) &= \delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta_c) \xi_{(2), \vec{k}_1}^{(II)} + \delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}(\eta_c) \xi_{(2), -\vec{k}_1}^{(II)*} \\ &+ \varepsilon^2 \left[\beta_0^{(II)+}(\eta_c) \xi_{(0,0)}^{(II)} + (\beta_0^{(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0,0)}^{(II)*} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.196)$$

$$\begin{aligned} \frac{L^{3/2}}{2} {}^{(2)}\phi'_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta_c) &= \delta^{(0)} v'_{\vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta_c) \xi_{(2), \vec{k}_1}^{(II)} + \delta^{(0)} v'_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}(\eta_c) \xi_{(2), -\vec{k}_1}^{(II)*} \\ &+ \varepsilon^2 \left[\beta_0'^{(II)+}(\eta_c) \xi_{(0,0)}^{(II)} + (\beta_0'^{(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0,0)}^{(II)*} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.197)$$

cuya solución para $\xi_{(2), \pm \vec{k}_1}^{(II)}$ será;

$$\begin{aligned} \xi_{(2), \vec{k}_1}^{(II)} &= \varepsilon^2 \frac{-\delta^{(0)} v'_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*} \left[\beta_0^{(II)+} \xi_{(0,0)}^{(II)} + (\beta_0^{(II)-})^* \xi_{(0,0)}^{(II)*} \right] + \delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*} \left[\beta_0'^{(II)+} \xi_{(0,0)}^{(II)} + (\beta_0'^{(II)-})^* \xi_{(0,0)}^{(II)*} \right]}{\delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}{}^{(II)} \delta^{(0)} v'_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*} - \delta^{(0)} v'_{\vec{k}_1}{}^{(II)} \delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}} \Bigg|_{\eta=\eta_c}, \\ \xi_{(2), -\vec{k}_1}^{(II)*} &= \varepsilon^2 \frac{-\delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}{}^{(II)} \left[\beta_0'^{(II)+} \xi_{(0,0)}^{(II)} + (\beta_0'^{(II)-})^* \xi_{(0,0)}^{(II)*} \right] + \delta^{(0)} v'_{\vec{k}_1}{}^{(II)} \left[\beta_0^{(II)+} \xi_{(0,0)}^{(II)} + (\beta_0^{(II)-})^* \xi_{(0,0)}^{(II)*} \right]}{\delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}{}^{(II)} \delta^{(0)} v'_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*} - \delta^{(0)} v'_{\vec{k}_1}{}^{(II)} \delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}{}^{(II)*}} \Bigg|_{\eta=\eta_c}. \end{aligned} \quad (7.198)$$

Elijiendo $\beta_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c)$ y $\beta_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm}(\eta_c)$ dadas³ por (7.125), se encuentra para $\beta_0^{(II)\pm}(\eta_c)$ y $\beta_0^{\prime(II)\pm}(\eta_c)$;

$$\beta_0^{(II)+}(\eta_c) = -\beta_0^{(II)-}(\eta_c) = \delta^{(0)}v_0^{(II)}(\eta_c), \quad \beta_0^{\prime(II)+}(\eta_c) = -\beta_0^{\prime(II)-}(\eta_c) = \delta^{(0)}v_0^{\prime(II)}(\eta_c), \quad (7.199)$$

por lo cual $\beta_0^{(II)+}\xi_{(0),0}^{(II)} + (\beta_0^{(II)-})^*\xi_{(0),0}^{(II)*} = 2i\mathcal{I}m\{\delta^{(0)}v_0^{(II)}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)}\}$ mientras que $\beta_0^{\prime(II)+}\xi_{(0),0}^{(II)} + (\beta_0^{\prime(II)-})^*\xi_{(0),0}^{(II)*} = 2i\mathcal{I}m\{\delta^{(0)}v_0^{\prime(II)}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)}\}$, entonces los resultados (7.198) pueden ser simplificados de tal forma que los $\xi_{(2),\pm\vec{k}_1}^{(II)}$ quedarán expresados en función de cantidades determinadas a orden cero en ε , esto es;

$$\begin{aligned} \xi_{(2),\vec{k}_1}^{(II)} &= 2i\varepsilon^2 \frac{-\mathcal{I}m\{\delta^{(0)}v_0^{(II)}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)}\}\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{\prime(II)*}(\eta_c) + \mathcal{I}m\{\delta^{(0)}v_0^{\prime(II)}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)}\}\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{(II)*}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c)\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{\prime(II)*}(\eta_c) - \delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{(II)*}(\eta_c)}, \\ (\xi_{(2),-\vec{k}_1}^{(II)})^* &= 2i\varepsilon^2 \frac{-\mathcal{I}m\{\delta^{(0)}v_0^{\prime(II)}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)}\}\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c) + \mathcal{I}m\{\delta^{(0)}v_0^{(II)}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)}\}\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)}{\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c)\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{\prime(II)*}(\eta_c) - \delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{\prime(II)}(\eta_c)\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{(II)*}(\eta_c)}. \end{aligned} \quad (7.200)$$

La restricción ${}^{(2)}\phi_{\xi,\vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c) = 0$, tanto para la **situación (1) subcaso (A)** ver ecuación (7.192), como para la **situación (2)** ver ecuación (7.194), deberá sostenerse para todo tiempo conforme $\eta \geq \eta_c$. Para ambos casos, (a pesar de que las contribuciones al segundo orden en ε de los números ${}^{(2)}(\xi_{\vec{k}_1}^{(II)})$ es nula para el caso de la **situación (1) subcaso (A)**, ver deducción de (7.192)), esto puede corroborarse haciendo uso de las ecuaciones de movimiento para las cantidades $\beta_0^{(II)+}(\eta)$ y $\beta_0^{(II)-}(\eta)$, las cuales respectivamente vienen dadas por (7.104) y (7.105) evaluadas en $\vec{k} = 0$,

$$\beta_0^{\prime\prime(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)}\beta_0^{\prime(II)+} + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\beta_0^{(II)+} = 0, \quad (7.201)$$

$$\beta_0^{\prime\prime(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)}\beta_0^{\prime(II)-} + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\beta_0^{(II)-} = 0, \quad (7.202)$$

junto con las ecuaciones para $\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{(II)}$ y $\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{(II)}$, las cuales por tratarse de las contribuciones al orden cero en ε de las funciones modo, serán equivalentes a las ecuaciones (7.47), pero con las etiquetas correspondientes a la SSC-II,

$$\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{\prime\prime(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{\prime(II)} + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\delta^{(0)}v_{\vec{k}_1}^{(II)} = 0, \quad (7.203)$$

$$\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{\prime\prime(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{\prime(II)} + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2\right)\delta^{(0)}v_{-\vec{k}_1}^{(II)} = 0. \quad (7.204)$$

³A pesar de que en la sección anterior (en la cual se construyó la teoría cuántica de campos sobre la métrica escrita hasta segundo orden en ε) únicamente nos enfocamos en la **situación (1)**, las condición de normalización dada por el producto simpléctico, ver ecuación (7.35), en (7.39) encontramos que hasta segundo orden en ε no surgen dependencias con las perturbaciones tensoriales y dado que en estas perturbaciones es donde interviene el modo \vec{k}_1 , entonces las formulas para las contribuciones al segundo orden en ε de la condición de normalización encontradas para la **situación (1) subcaso (A)** serán completamente análogas para la **situación (2)**, por esa razón los resultados derivados de (7.112) para la **situación (1) subcaso (A)** también serán validos para la **situación (2)**.

Nuevamente trabajando con ${}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}^{(II)}(\eta)$ lo cual representa el segundo orden en ε de la quinta ecuación (7.150), del cual despejamos $\beta_0^{(II)+}$ para luego sustituirlo en (7.201) se encuentra la ecuación⁴;

$$\begin{aligned} & \frac{L^{3/2}}{2\varepsilon^2} \left[{}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}^{(II)}(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}\phi'_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2 \right) {}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}^{(II)}(\eta) \right] \\ & - \left\{ \xi_{(0),0}^{(II)} \left[\beta_0^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)} \beta_0'^{(II)-} + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2 \right) \beta_0^{(II)-} \right] \right. \\ & + \frac{\xi_{(2), \vec{k}_1}^{(II)}}{\varepsilon^2} \left[\delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}'^{(II)} + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2 \right) \delta^{(0)} v_{\vec{k}_1}^{(II)} \right] \\ & \left. + \frac{\xi_{(2), -\vec{k}_1}^{(II)*}}{\varepsilon^2} \left[\delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}''^{(II)*} + 2\mathcal{H}^{(II)} \delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}'^{(II)*} + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2 \right) \delta^{(0)} v_{-\vec{k}_1}^{(II)*} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.206)$$

Ahora, sustituyendo (7.202), (7.203) y (7.204) sobre la anterior ecuación, se encuentra;

$${}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}''^{(II)}(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}\phi'_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2 \right) {}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}^{(II)}(\eta) = 0, \quad (7.207)$$

cuya solución⁵ para todo tiempo conforme η , que satisface las condiciones iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}^{(II)}(\eta_c) = 0$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta_c) = 0$, impuestas por la restricción (7.190) es: ${}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}^{(II)}(\eta) = 0$.

Concluimos que tanto como para la **situación (1)** como para la **situación (2)** el modo \vec{k}_1 que caracteriza las perturbaciones tensoriales, cuando $\vec{k}_1 \neq 0, \pm\vec{k}_0, \pm 2\vec{k}_0$ no intervendrá en (7.148) escrito hasta segundo orden en ε , razón por lo cual (7.149) hasta segundo orden en ε podrá ser escrito como;

$$\begin{aligned} [2]\phi_{\xi}^{(II)}(\mathbf{x}) & \equiv \langle \xi^{(II)} | [2]\hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}) | \xi^{(II)} \rangle \\ & = [2]\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta) + \left\{ \left([2]\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + [2]\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} \right) + c.c \right\}. \end{aligned} \quad (7.210)$$

Ecuación $C_0 = 0$

⁴valida para la **situación (2)** mientras que para la **situación (1) subcaso (A)** será

$$\begin{aligned} & \frac{L^{3/2}}{2\varepsilon^2} \left[{}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}''^{(II)}(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}\phi'_{\xi, \vec{k}_1}{}^{(II)}(\eta) + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2 \right) {}^{(2)}\phi_{\xi, \vec{k}_1}^{(II)}(\eta) \right] \\ & - \xi_{(0),0}^{(II)} \left[\beta_0^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)} \beta_0'^{(II)-} + \left(\|\vec{k}_1\|^2 + a^{2(II)}m^2 \right) \beta_0^{(II)-} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.205)$$

⁵De manera análoga para las ecuaciones de movimiento de ${}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta)$, ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$, se encuentra;

$${}^{(2)}\phi_{\xi,0}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} + a^{2(II)}m^2 {}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{(II)} = {}^{(2)}\mathcal{F}_{(0)}, \quad (7.208)$$

$${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)} + \left(4\|\vec{k}_0\|^2 + a^{2(II)}m^2 \right) {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)} = {}^{(2)}\mathcal{F}_{2\vec{k}_0}, \quad (7.209)$$

Posteriormente, trabajando con la ecuación (7.185) para $C_0 = 0$, se encuentra;

$$i\vec{k}_0 \cdot \hat{u} \left\{ -4P_{(1)}P'_{(1)*} + 4P'_{(1)*}P_{(1)} + 4\mathcal{H}^{(II)}P_{(1)}P'_{(1)*} - 4\mathcal{H}^{(II)}P'_{(1)*}P_{(1)} - 2P'_{(1)}P_{(1)*} + 2P'_{(1)*}P_{(1)} + 4\pi G \left(2 \binom{(1)}{\phi'_{\xi, \vec{k}_0}} \binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}}^{(II)*} - 2 \binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}} \binom{(1)}{\phi'_{\xi, \vec{k}_0}}^{(II)*} \right) \right\} = 0, \quad (7.211)$$

con $\hat{k}_0 \parallel \hat{z}$ para la **situación (1) subcaso (A)**, y $\hat{k}_0 \parallel \hat{x}$ para la **situación (2)**. Podemos ver que en la relación anterior sólo aparecen las cantidades; $P_{(1)}(\eta)$, $P'_{(1)}(\eta)$, $\binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}}^{(II)*}(\eta)$, y $\binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}}^{\prime(II)*}(\eta)$ las cuales fueron determinadas a primer orden en ε . Sin embargo, dado que $P_{(1)}(\eta)$, $P'_{(1)}(\eta)$, $\binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}}^{(II)*}(\eta)$, $\binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}}^{\prime(II)*}(\eta) \in \mathbb{R}$, se encuentra que (7.211) **se satisface trivialmente**.

Situación (1) subcaso (B); $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$ (completamente análoga a $\vec{k}_1 = -2\vec{k}_0$)

Retomaremos la ecuación (7.185), pero ahora consideraremos el caso $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$, en el cual los coeficientes $C_{\pm 2\vec{k}_0}$, y $C_{\pm \vec{k}_1}$ en (7.185), no tendrán por que ser idénticamente nulos. Dado que se cumplen las siguientes igualdades $e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}$, y $e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}$.

Sin embargo, ahora resultará conveniente escribir la expansión (7.185) de la siguiente forma;

$$(C_{-2\vec{k}_0} + C_{-\vec{k}_1})e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + C_0 + (C_{2\vec{k}_0} + C_{\vec{k}_1})e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = 0. \quad (7.212)$$

Observamos que la ecuación correspondiente a $C_0 = 0$, continuará siendo (7.211), y aquí también se **satisface de manera trivial** ya que $P_{(1)}$, $P'_{(1)}$, $\binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}}^{(II)}$ y $\binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}}^{\prime(II)}$ para los subcasos $\vec{k}_1 = \pm 2\vec{k}_0$ también, al igual que para la **situación (1) subcaso (A)**, corresponden a funciones con imágenes definidas sobre el conjunto de los números reales.

Las otras dos ecuaciones serán mutuamente una el complejo conjugado de la otra puesto que $(C_{2\vec{k}_0} + C_{\vec{k}_1}) = (C_{-2\vec{k}_0} + C_{-\vec{k}_1})^*$, entonces de $C_{2\vec{k}_0} + C_{\vec{k}_1} = 0$, se encuentra;

$$P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)}F_{(2)} + \frac{3}{2}P_{(1)}P'_{(1)} - \mathcal{H}^{(II)}P_{(1)}^2 = 2\pi G \left\{ \binom{(0)}{\phi'_{\xi, 0}} \binom{(2)}{\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}}^{(II)} + \binom{(1)}{\phi'_{\xi, \vec{k}_0}} \binom{(1)}{\phi_{\xi, \vec{k}_0}}^{(II)} \right\}. \quad (7.213)$$

En resumen para la **{situación (1) subcaso (A)}** análogamente para la **situación (2)}** y la **{situación (1) subcaso (B)}** las ecuaciones (7.188) y (7.213) respectivamente corresponden a restricciones de la teoría impuestas sobre las funciones $P_{(2)}(\eta)$, $P'_{(2)}(\eta)$, $\binom{(2)}{\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}}^{(II)}(\eta)$ y $\binom{(2)}{\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}}^{\prime(II)}(\eta)$. Hemos encontrado que la ecuación (7.185), resultado de expandir (7.183), no conduce a restricciones sobre $a_{(2)}(\eta)$, $a'_{(2)}(\eta)$, $\binom{(2)}{\phi_{\xi, 0}}^{(II)}(\eta)$ y $\binom{(2)}{\phi_{\xi, 0}}^{\prime(II)}(\eta)$, no obstante una restricción de este estilo, valida tanto para la **situación (1)** como para la **situación (2)**, vendrá de trabajar directamente con la parte escalar (*P.E*) de (7.182), dicho de otro modo: vendrá de trabajar con la versión semi-clásica de (6.51) de la referencia [54]. Podemos ver que la parte escalar del lado izquierdo de (7.182) es nula, esto se observa de:

$$\begin{aligned}
& P.E \left\{ -8\Psi_{(1)}(\eta, \vec{x})\partial_t\Psi'_{(1)}(\eta, \vec{x}) + 8\mathcal{H}^{(II)}\Psi_{(1)}(\eta, \vec{x})\partial_t\Psi_{(1)}(\eta, \vec{x}) \right. \\
& \left. -4\Psi'_{(1)}(\eta, \vec{x})\partial_t\Psi_{(1)}(\eta, \vec{x}) + 16\pi G^{(1)}\phi'_{\xi}{}^{(II)}(\eta, \vec{x})\partial_t{}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta, \vec{x}) \right\} \\
& = P.E \left\{ -8 \left[P_{(1)}(\eta)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \left[ik_{0l}P'_{(1)}(\eta)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \right. \\
& + 8\mathcal{H}^{(II)} \left[P_{(1)}(\eta)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \left[ik_{0l}P_{(1)}(\eta)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \\
& - 4 \left[P'_{(1)}(\eta)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \left[ik_{0l}P_{(1)}(\eta)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \\
& \left. + 16\pi G \left[{}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \left[ik_{0l}{}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \right\}, \quad (7.214)
\end{aligned}$$

lo cual es igual a cero puesto que: $P_{(1)}(\eta)$, $P'_{(1)}(\eta)$, ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)$ y ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta) \in \mathbb{R}$. Consecuentemente el lado derecho de (7.182) implica que;

$$P.E \left\{ 2\partial_t\Psi'_{(2)}(\eta, \vec{x}) + 2\mathcal{H}\partial_t\Phi_{(2)}(\eta, \vec{x}) - 8\pi G^{(0)}\phi'_{\xi}{}^{(II)}(\eta)\partial_t{}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta, \vec{x}) \right\} = 0 \quad (7.215)$$

una solución no trivial de tomar la operación inversa de ∂_t a la anterior ecuación, será;

$$P.E \left\{ \Psi'_{(2)}(\eta, \vec{x}) + \mathcal{H}\Phi_{(2)}(\eta, \vec{x}) - 4\pi G^{(0)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta){}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta, \vec{x}) \right\} = 0 \quad (7.216)$$

la cual usando (7.77) y (7.78) para expandir hasta segundo orden en ε se encuentra;

$$a'_{(2)}(\eta) - \mathcal{H}a_{(2)}(\eta) = 2\pi G^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta){}^{(2)}\phi_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta), \quad (7.217)$$

de esta forma se encuentra una ecuación de restricción para $a_{(2)}(\eta)$, $a'_{(2)}(\eta)$ y ${}^{(2)}\phi_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta)$, valida tanto para la **situación (1)** como para la **situación (2)**.

Las demás restricciones de la teoría vienen de la contribución a segundo orden en ε de la componente $\eta\eta$ de las ecuaciones semi-clásicas de Einstein;

Por ejemplo, de la ecuación;

$$\delta^{(2)}G_{\eta}{}^{\eta}[\mathcal{G}(\mathbf{x})] = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(2)}\hat{T}_{\eta}{}^{\eta}[\mathcal{G}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle,$$

la cual de manera general sin restringir el problema a la **situación (1)** ó **situación (2)**, se reduce a la versión semi-clásica de (6.53) de la referencia [54];

$$\begin{aligned}
& -3\mathcal{H}^{(II)}\Psi'_{(2)} + \nabla^2\Psi_{(2)} - \mathcal{H}'^{(II)}\Phi_{(2)} - 2\mathcal{H}^{2(II)}\Phi_{(2)} + 2\Phi_{(1)}\Phi''_{(1)} + 3\Phi_{(1)}'^2 + 3(\vec{\nabla}\Phi_{(1)})^2 + \\
& + 10\Phi_{(1)}\nabla^2\Phi_{(1)} + 4(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2})\Phi_{(1)}^2 = 4\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)} \left[{}^{(2)}\phi_{\xi, 0}{}^{(II)} + \left({}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) \right] \right. \\
& + \left({}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 + a^{2(II)}m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi, 0}{}^{(II)}{}^{(2)}\phi_{\xi, 0}{}^{(II)} + {}^{(0)}\phi_{\xi, 0}{}^{(II)} \left({}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) + \right. \\
& \left. \left. + \left({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 \right] + \left(i\vec{k}_0{}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 \right\}. \quad (7.218)
\end{aligned}$$

Usando (7.77) y (7.78) para expandir hasta segundo orden en ε el lado izquierdo de la anterior ecuación, se encuentra;

$$\begin{aligned}
 & -6\mathcal{H}^{(II)} \left[a'_{(2)} + \left(P'_{(2)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right] - 8 \left(\|\vec{k}_0\| P_{(2)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) - 2 \left(\mathcal{H}'^{(II)} + \right. \\
 & + 2\mathcal{H}^{2(II)} \left. \right) \left[-a_{(2)} + \left(F_{(2)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right] + 2 \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \left(P''_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \\
 & + 3 \left(P'_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 + 3 \left(i\vec{k}_0 P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 - 10 \|\vec{k}_0\|^2 \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 + \\
 & 4 \left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)} \right) \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 = 4\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi'_{\xi,0} + \left({}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right\} \\
 & + \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 + a^{2(II)} m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,0} + {}^{(0)}\phi_{\xi,0} \left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) + \right. \\
 & \left. + \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 \right] + \left(i\vec{k}_0 {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 \left. \right\}, \tag{7.219}
 \end{aligned}$$

luego de agrupar coeficientes de las funciones $\{e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, 1\}$ se encuentra que la anterior ecuación tiene la forma;

$$\mathbf{C}_{-2\vec{k}_0} e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_{2\vec{k}_0} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = 0. \tag{7.220}$$

Nuevamente haciendo uso de la independencia lineal de las funciones $\{e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, 1\}$ se concluye que $\mathbf{C}_{\pm 2\vec{k}_0} = \mathbf{C}_0 = 0$.

Nota: Hasta el momento se ha trabajado de manera general con la ecuación semi-clásica $\delta^{(2)}G_\eta \eta = 8\pi G \langle \xi^{(II)} | \delta^{(2)}\hat{T}_\eta \eta | \xi^{(II)} \rangle$ sin restringirla a **situación (1)** ó **situación (2)**, sin embargo las ecuaciones derivadas no dependen del vector \vec{k}_1 , solo dependen de la norma del vector \vec{k}_0 esto ocasiona que las ecuaciones que se obtengan de (7.220) serán indiferentes ante las orientaciones: $\vec{k}_0 \parallel \vec{k}_1$ ó $\vec{k}_0 \perp \vec{k}_1$, razón por la cual los resultados generados por esta ecuación serán validos tanto como para la **situación (1)** como para la **situación (2)**.

Ecuación $\mathbf{C}_{2\vec{k}_0} = 0$

$$\begin{aligned}
 & -6\mathcal{H}^{(II)} P'_{(2)} - 8 \|\vec{k}_0\|^2 P_{(2)} - 2 \left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)} \right) F_{(2)} + 2P_{(1)} P''_{(1)} + 3(P'_{(1)})^2 \\
 & - 13 \|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^2 + 4 \left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)} \right) P_{(1)}^2 = 4\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0} + \right. \\
 & \left. + \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 + a^{2(II)} m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0} + \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 \right] - \|\vec{k}_0\|^2 \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 \right\}, \tag{7.221}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, procediendo de manera análoga se encuentra que la ecuación $\mathbf{C}_{-2\vec{k}_0} = 0$ corresponde al complejo conjugado de la ecuación anterior.

Ecuación $\mathbf{C}_0 = 0$

$$\begin{aligned}
& -6\mathcal{H}^{(II)}a'_{(2)} + 2\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right)a_{(2)} + 2(P_{(1)}P_{(1)}''^* + P_{(1)}^*P_{(1)}'') + 6|P_{(1)}'|^2 \\
& -14\|\vec{k}_0\|^2|P_{(1)}|^2 + 8\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right)|P_{(1)}|^2 = 4\pi G\left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(2)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} + \right. \\
& \left. 2|{}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}|^2 + a^{2(II)}m^2\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}{}^{(2)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} + 2|{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}|^2\right) + 2\|\vec{k}_0\|^2|{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}|^2\right\}. \quad (7.222)
\end{aligned}$$

Se encuentra que la ecuación $\mathbf{C}_{2\vec{k}_0} = 0$ corresponde a una restricción a las funciones $P_{(2)}(\eta)$, ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)$ y sus derivadas temporales. Mientras que la ecuación $\mathbf{C}_0 = 0$ aporta una restricción a las funciones $a_{(2)}(\eta)$, ${}^{(2)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta)$ y sus derivadas temporales.

Las ecuaciones dinámicas para las contribuciones al segundo orden en ε de los potenciales métricos provienen de las ecuaciones $\delta^{(2)}G_l{}^j[\mathcal{G}(\mathbf{x})] = 8\pi G\langle\xi^{(II)}|\delta^{(1)}\hat{T}_l{}^j[\mathcal{G}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})]|\xi^{(II)}\rangle$, con $l, j : x, y, z$. Estas pueden ser entendidas como la versión semi-clásica de la ecuación (6.55) de la referencia [54], lo cual escribiremos como:

$$\begin{aligned}
& \partial_l\partial_j(\Psi_{(2)} - \Phi_{(2)}) + \left\{ -\nabla^2\Psi_{(2)} + 2\Psi_{(2)}'' + 4\mathcal{H}^{(II)}\Psi_{(2)}' + 2\mathcal{H}^{(II)}\Phi_{(2)}' + (2\mathcal{H}'^{(II)} + 4\mathcal{H}^{(II)2})\Phi_{(2)} \right. \\
& \left. + \nabla^2\Phi_{(2)}\right\}\delta_{lj} + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}^{(II)}\partial_\eta - \nabla^2){}^{(2)}h_{lj} + 4(\partial_l\Phi_{(1)})(\partial_j\Phi_{(1)}) + 8\Phi_{(1)}\partial_l\partial_j\Phi_{(1)} - 2\left\{\Phi_{(1)}'^2 + \right. \\
& \left. 8\mathcal{H}^{(II)}\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}' - 2\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}'' + 3(\vec{\nabla}\Phi_{(1)})^2 + 2\Phi_{(1)}\nabla^2\Phi_{(1)} + 4(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2})(\Phi_{(1)})^2\right\}\delta_{lj} \\
& = 8\pi G\left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}\left[{}^{(2)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} + \left({}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)\right] + \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)^2 + \right. \\
& \left. - \left(i\vec{k}_0{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)^2 - a^{2(II)}m^2\left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}{}^{(2)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} + {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}\left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)^2\right]\right\}\delta_{lj} + 16\pi G\left(i\vec{k}_0{}_l{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)\left(i\vec{k}_0{}_j{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right). \quad (7.223)
\end{aligned}$$

Para examinar estas ecuaciones consideraremos varios casos. Iniciaremos con las componentes lj tales que $l \neq j$. Dada la simetría del problema la única componente $l \neq j$ de (7.223) no trivial corresponde a; $\delta^{(2)}G_x{}^y[\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})] = 8\pi G\langle\xi^{(II)}|\delta^{(1)}\hat{T}_x{}^y[\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})]|\xi^{(II)}\rangle$ la cual al igual que; $\delta^{(2)}G_y{}^x[\mathcal{G}(\mathbf{x})] = 8\pi G\langle\xi^{(II)}|\delta^{(1)}\hat{T}_y{}^x[\mathcal{G}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})]|\xi^{(II)}\rangle$ se reduce a;

$${}^{(2)}h''_{xy}(\eta, z) + 2\mathcal{H}^{(II)}{}^{(2)}h'_{xy}(\eta, z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}{}^{(2)}h_{xy}(\eta, z). \quad (7.224)$$

Recordando las consideraciones realizadas al principio de este problema para las perturbaciones tensoriales, esto es: ${}^{(2)}h_{xy}(\eta, z) = {}^{(2)}h_{yx}(\eta, z) = {}^{(2)}h_T(\eta, z)$, (modo transversal de la onda gravitacional), y usando (7.79) para expandir hasta segundo orden en ε la anterior ecuación, se encuentra;

$$\begin{aligned}
& \left({}^{(2)}h''_T(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)}{}^{(2)}h'_T(\eta)\right) + \left[\left({}^{(2)}H''_T(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)}{}^{(2)}H'_T(\eta)\right)e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}} + c.c\right] \\
& = \frac{\partial^2}{\partial z^2}{}^{(2)}h_T(\eta) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}{}^{(2)}H_T(\eta)e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{x}} + c.c\right), \quad (7.225)
\end{aligned}$$

la cual haciendo uso de la independencia lineal de las funciones $\{e^{\pm i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}, 1\}$, encontramos que las funciones ${}^{(2)}h_T(\eta)$, ${}^{(2)}H_T(\eta)$ satisfacen las ecuaciones dinámicas;

$${}^{(2)}h_T''(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}h_T'(\eta) = 0, \quad (7.226)$$

$${}^{(2)}H_T''(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}H_T'(\eta) = -(\vec{k}_1 \cdot \hat{z})^2 {}^{(2)}H_T(\eta). \quad (7.227)$$

El par de ecuaciones anteriores corresponde a las ecuaciones dinámicas para las funciones ${}^{(2)}h_T(\eta)$ y ${}^{(2)}H_T(\eta)$ las cuales a través de la ecuación (7.79) contribuyen al segundo orden en ε del modo transversal de las perturbaciones tensoriales. Cabe mencionar que el anterior par de ecuaciones es valido tanto para la **situación (1)** como para la **situación (2)**.

Sin embargo el resto de ecuaciones (7.223) dependerá de que situación estemos estudiando, por tal razón nos enfocaremos por separado en cada una de estas situaciones.

Entonces, enfocados en la **situación (1)** esto es $\vec{k}_0 \parallel \vec{k}_1 \parallel \hat{z}$, la ecuación (7.223) para $l = j = x$, al igual que para $l = j = y$, teniendo en cuenta que para esta situación se tiene que: $\Phi_{(1)}(\eta, z)$, $\Psi_{(1)}(\eta, z)$, $\Phi_{(2)}(\eta, z)$, $\Psi_{(2)}(\eta, z)$, ${}^{(2)}h_{xx}(\eta, z) = {}^{(2)}h_{yy}(\eta, z) = -\frac{1}{2}{}^{(2)}h_{zz}(\eta, z) = {}^{(2)}h_L(\eta, z)$ (representando h_L el modo longitudinal de la onda gravitacional), se reduce a;

$$\begin{aligned} & -\nabla^2 \Psi_{(2)} + 2\Psi_{(2)}'' + 4\mathcal{H}^{(II)} \Psi_{(2)}' + 2\mathcal{H}^{(II)} \Phi_{(2)}' + (2\mathcal{H}'^{(II)} + 4\mathcal{H}^{(II)2})\Phi_{(2)} + \nabla^2 \Phi_{(2)} \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}^{(II)}\partial_\eta - \nabla^2) {}^{(2)}h_L - 2\left\{ \Phi_{(1)}'^2 + 8\mathcal{H}^{(II)}\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}' - 2\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}'' + 3(\vec{\nabla}\Phi_{(1)})^2 + \right. \\ & \left. + 2\Phi_{(1)}\nabla^2\Phi_{(1)} + 4(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2})(\Phi_{(1)})^2 \right\} \\ & = 8\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi_{\xi,0}'^{(II)} \left[{}^{(2)}\phi_{\xi,0}'^{(II)} + \left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}'^{(II)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right] + \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}'^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 + \right. \\ & \left. - \left(i\vec{k}_0 {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 - a^{2(II)} m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} {}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{(II)} + {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} \left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 \right] \right\}. \quad (7.228) \end{aligned}$$

Por otra parte, trabajando con la ecuación (7.228) junto con la componente $l = j = z$ del sistema de ecuaciones (7.223), se encuentra;

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}^{(II)}\partial_\eta - \nabla^2) {}^{(2)}h_L & = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Psi_{(2)} - \Phi_{(2)}) + 4 \left(\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{(1)} \right)^2 + 8\Phi_{(1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_{(1)} \\ & - 16\pi G \left(ik_{0z} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2. \quad (7.229) \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo (7.229) en (7.228), se obtiene;

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}\partial_z^2(\Psi_{(2)} - \Phi_{(2)}) + 2\Psi''_{(2)} + 2\mathcal{H}^{(II)}(2\Psi'_{(2)} + \Phi'_{(2)}) + (2\mathcal{H}'^{(II)} + 4\mathcal{H}^{(II)2})\Phi_{(2)} - \frac{14}{3}\left(\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{(1)}\right)^2 + \\
& -\frac{4}{3}\Phi_{(1)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_{(1)} - 16\mathcal{H}^{(II)}\Phi_{(1)}\Phi'_{(1)} + 4\Phi_{(1)}\Phi''_{(1)} - 2(\Phi'_{(1)})^2 - 8(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2})(\Phi_{(1)})^2 \\
& = 8\pi G\left\{ \begin{aligned} & (0)\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}\left[(2)\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} + \left((2)\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) \right] + \left((1)\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 + \\ & - \left(i\vec{k}_0 (1)\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 - a^{2(II)}m^2\left[(0)\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(2)\phi_{\xi,0}{}^{(II)} + (0)\phi_{\xi,0}{}^{(II)}\left((2)\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) \right. \\ & \left. + \left((1)\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 \right] \right\} + \frac{16\pi G}{3}\left(ik_{0z} (1)\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2. \tag{7.230}
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

Usando (7.77) y (7.78) para expandir hasta segundo orden en ε el lado izquierdo de la anterior ecuación, llegamos a;

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}\left[-8\|\vec{k}_0\|^2(P_{(2)} - F_{(2)})e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] + 4a''_{(2)} + 4\left(P''_{(2)}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right) + \\
& + 4\mathcal{H}^{(II)}\left\{ a'_{(2)} + \left[(2P'_{(2)} + F'_{(2)})e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right] \right\} + 4\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}\right)\left(F_{(2)}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right) \\
& -\frac{14}{3}\left(i\vec{k}_0P_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)^2 + \frac{4}{3}\left(P_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)\left(\|\vec{k}_0\|^2P_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right) \\
& -16\mathcal{H}^{(II)}\left(P_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)\left(P'_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right) + 4\left(P_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)\left(P''_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right) + \\
& -2\left(P'_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)^2 - 8\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}\right)\left(P_{(1)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)^2 \\
& = 8\pi G\left\{ \begin{aligned} & (0)\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}\left[(2)\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} + \left((2)\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) \right] + \left((1)\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 + \\ & - \left(i\vec{k}_0 (1)\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 - a^{2(II)}m^2\left[(0)\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(2)\phi_{\xi,0}{}^{(II)} + (0)\phi_{\xi,0}{}^{(II)}\left((2)\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right) \right. \\ & \left. + \left((1)\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c \right)^2 \right] \right\} + \frac{16\pi G}{3}\left(i\|\vec{k}_0\| (1)\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + c.c\right)^2, \tag{7.231}
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

la cual puede ser escrita como;

$$\mathcal{C}_{-2\vec{k}_0}e^{-2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_{2\vec{k}_0}e^{2i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} = 0. \tag{7.232}$$

Dado que la anterior ecuación no depen del modo $\vec{k}_1 = \pm s\vec{k}_0$, entonces los resultados que se deriven de ella serán validos tanto para la **situación (1) subcaso (A)** (en la cual $s \neq \pm 2$) como para la **situación (1) subcaso (B)** (en la cual $s = 2$ ó -2).

Ecuación $\mathcal{C}_{2\vec{k}_0} = 0$

$$\begin{aligned}
& 4P''_{(2)} + \frac{16}{3}\|\vec{k}_0\|^2(P_{(2)} - F_{(2)}) + 4\mathcal{H}^{(II)}(2P'_{(2)} + F'_{(2)}) + 4\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}\right)F_{(2)} \\
& + 6\|\vec{k}_0\|^2P_{(1)}^2 - 16\mathcal{H}^{(II)}P_{(1)}P'_{(1)} + 4P_{(1)}P''_{(1)} - 2(P'_{(1)})^2 - 8\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}\right)P_{(1)}^2 \\
& = 8\pi G\left\{ \begin{aligned} & (0)\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(2)\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)} + \left((1)\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} \right)^2 + \frac{1}{3}\|\vec{k}_0\|^2\left((1)\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} \right)^2 \\ & - a^{2(II)}m^2\left[(0)\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(2)\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)} + \left((1)\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\}. \tag{7.233}
\end{aligned}$$

Por otra parte, la ecuación que se obtiene de $\mathcal{C}_{-2\vec{k}_0} = 0$ corresponde al complejo conjugado de la ecuación (7.233).

Ecuación $\mathcal{C}_0 = 0$

$$\begin{aligned}
 & 4a''_{(2)} + 4\mathcal{H}^{(II)}a'_{(2)} - \frac{20}{3}||\vec{k}_0||^2|P_{(1)}|^2 - 16\mathcal{H}^{(II)}\left(P_{(1)}P'_{(1)*} + P_{(1)*}P'_{(1)}\right) + 4\left(P_{(1)}P''_{(1)*} + P_{(1)*}P''_{(1)}\right) + \\
 & -4|P'_{(1)}|^2 - 16(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2})|P_{(1)}|^2 \\
 & = 8\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi'_{\xi,0} + 2|{}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}|^2 - \frac{2}{3}||\vec{k}_0||^2|{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}|^2 - a^{2(II)}m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,0} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2|{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}|^2 \right] \right\}, \tag{7.234}
 \end{aligned}$$

la cual con ayuda de (7.217) y (7.222) podrá ser escrita como;

$$\begin{aligned}
 & 2a''_{(2)} + 8\mathcal{H}^{(II)}a'_{(2)} - 2\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right)a_{(2)} + \frac{a^{2(II)}m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}}{{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \left(a'_{(2)} - \mathcal{H}^{(II)}a_{(2)}\right) \\
 & = 8\mathcal{H}^{(II)}\left(P_{(1)}P'_{(1)*} + P_{(1)*}P'_{(1)}\right) + 16\left(\frac{2}{3}||\vec{k}_0||^2 + \mathcal{H}'^{(II)} + \mathcal{H}^{(II)2}\right)|P_{(1)}|^2 + 8|P'_{(1)}|^2 \\
 & - 16\pi G \left(\frac{2}{3}||\vec{k}_0||^2 + a^{2(II)}m^2\right) |{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}|^2. \tag{7.235}
 \end{aligned}$$

Por último la ecuación dinámica para las funciones ${}^{(2)}h_L(\eta)$, ${}^{(2)}H_L(\eta)$ vendrán de sustituir (7.79) en la ecuación (7.229) y expandir hasta segundo orden en ε ,

$$\begin{aligned}
 & 3\left({}^{(2)}h''_L(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)}{}^{(2)}h'_L(\eta)\right) + 3\left[\left({}^{(2)}H''_L(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)}{}^{(2)}H'_L(\eta)\right)e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + c.c.\right] \\
 & - 3\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} {}^{(2)}H_L(\eta)e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + c.c.\right) = -8||\vec{k}_0||^2 \left[(P_{(2)} - F_{(2)})e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c.\right] \\
 & + 4||\vec{k}_0||^2 \left(iP_{(1)}e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c.\right)^2 - 8||\vec{k}_0||^2 \left(P_{(1)}e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c.\right)^2 \\
 & - 16\pi G \left(ik_{0z} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c.\right)^2, \tag{7.236}
 \end{aligned}$$

la cual tiene la forma;

$$\mathcal{C}_{-\vec{k}_1} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + \mathcal{C}_{-2\vec{k}_0} e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_{2\vec{k}_0} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \mathcal{C}_{\vec{k}_1} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} = 0. \tag{7.237}$$

Dado que la anterior ecuación, a diferencia de (7.232), si depende del modo $\vec{k}_1 = \pm s\vec{k}_0$, por tal razón los resultados que deriven de ella dependerán del **subcaso (A)** ($s \neq \pm 2$), ó del **subcaso (B)** ($s = 2$ ó $s = -2$), que se este analizando.

Para la situación (1) $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_0$, subcaso (A) $\vec{k}_1 \neq \pm 2\vec{k}_0$, las funciones $\{1, e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}, e^{\pm i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}\}$ forman un conjunto de funciones linealmente independientes razón por la cual de (7.237) se concluye que $\mathcal{C}_{\pm\vec{k}_1} = \mathcal{C}_{\pm 2\vec{k}_0} = \mathcal{C}_0 = 0$.

Ecuación $\mathcal{C}_0 = 0$

$${}^{(2)}h_L''(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}h_L'(\eta) = -\frac{16}{3} \|\vec{k}_0\|^2 \left(|P_{(1)}|^2 - 4\pi G |{}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}|^2 \right), \quad (7.238)$$

la anterior ecuación gobierna la dinámica de ${}^{(2)}h_L(\eta)$.

Ecuación $\mathcal{C}_{\vec{k}_1} = \mathcal{C}_{-\vec{k}_1}^* = 0$

$${}^{(2)}H_L''(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}H_L'(\eta) + \|\vec{k}_1\|^2 {}^{(2)}H_L(\eta) = 0, \quad (7.239)$$

la anterior ecuación gobierna la dinámica de ${}^{(2)}H_L(\eta)$.

Ecuación $\mathcal{C}_{2\vec{k}_0} = \mathcal{C}_{-2\vec{k}_0}^* = 0$

$$P_{(2)} - F_{(2)} = -\frac{3}{2} P_{(1)}^2 + 2\pi G ({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)})^2, \quad (7.240)$$

la anterior no es una ecuación de movimiento, es una nueva restricción sobre $P_{(2)}(\eta)$ y $F_{(2)}(\eta)$, la cual permite escribir una de estas funciones auxiliares en términos de la otra.

Para la situación (1) $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_0$, subcaso (B) $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$, completamente análogo a $\vec{k}_1 = -2\vec{k}_0$,

las funciones $\{ 1, e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}, e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \}$ serán linealmente independientes.

Para este subcaso (7.236) tomará la forma;

$$(\mathcal{C}_{-2\vec{k}_0} + \mathcal{C}_{-\vec{k}_1})e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \mathcal{C}_0 + (\mathcal{C}_{2\vec{k}_0} + \mathcal{C}_{\vec{k}_1})e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = 0. \quad (7.241)$$

Usando, sobre la anterior ecuación, el hecho de que las funciones $\{ 1, e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}, e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \}$ forman un conjunto de funciones linealmente independientes, obtenemos las siguientes ecuaciones: Ecuación $\mathcal{C}_0 = 0$, está ecuación continuará siendo (7.238).

Ecuación $\mathcal{C}_{2\vec{k}_0} + \mathcal{C}_{\vec{k}_1} = (\mathcal{C}_{-2\vec{k}_0} + \mathcal{C}_{-\vec{k}_1})^* = 0$

$$\begin{aligned} {}^{(2)}H_L''(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)} {}^{(2)}H_L'(\eta) + 4\|\vec{k}_0\|^2 {}^{(2)}H_L(\eta) &= -\frac{8}{3} \|\vec{k}_0\|^2 (P_{(2)} - F_{(2)}) \\ -4\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^2 + 4\pi G \|\vec{k}_0\|^2 ({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)})^2, & \end{aligned} \quad (7.242)$$

obteniendo la ecuación dinámica para la función ${}^{(2)}H_L(\eta)$, la cual es una ecuación inhomogénea a diferencia de la ecuación homogénea encontrada en (7.239) para el **subcaso (A)**.

Por último, para la **situación (2)**, esto es: $\vec{k}_0 \perp \vec{k}_1$ (por simplicidad $\vec{k}_0 \parallel \hat{x}$, y $\vec{k}_1 \parallel \hat{z}$). Teniendo en cuenta que trabajando hasta segundo orden en ε se tiene que ${}^{(2)}h_{xx}(\eta, z) = {}^{(2)}h_{yy}(\eta, z) =$

$-\frac{1}{2}{}^{(2)}h_{zz}(\eta, z) = {}^{(2)}h_L(\eta, z)$, mientras que $\Phi_{[2]}, \Psi_{[2]}$ solo dependen del tiempo conforme y de la coordenada espacial x , esto es; $\Phi_{[2]} = \Phi_{[2]}(\eta, x)$, $\Psi_{[2]} = \Psi_{[2]}(\eta, x)$, entonces la ecuación (7.223) para $l = j = x$, se reduce a;

$$\begin{aligned} & \partial_x^2(\Psi_{(2)} - \Phi_{(2)}) + \left\{ -\nabla^2\Psi_{(2)} + 2\Psi''_{(2)} + 4\mathcal{H}^{(II)}\Psi'_{(2)} + 2\mathcal{H}^{(II)}\Phi'_{(2)} + (2\mathcal{H}'^{(II)} + 4\mathcal{H}^{(II)2})\Phi_{(2)} \right. \\ & \left. + \nabla^2\Phi_{(2)} \right\} + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}^{(II)}\partial_\eta - \nabla^2){}^{(2)}h_L + 4(\partial_x\Phi_{(1)})(\partial_x\Phi_{(1)}) + 8\Phi_{(1)}\partial_x^2\Phi_{(1)} - 2\left\{ \Phi_{(1)}'^2 + \right. \\ & \left. 8\mathcal{H}^{(II)}\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}' - 2\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}'' + 3(\vec{\nabla}\Phi_{(1)})^2 + 2\Phi_{(1)}\nabla^2\Phi_{(1)} + 4(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2})(\Phi_{(1)})^2 \right\} \\ & = 8\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \left[{}^{(2)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} + \left({}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right] + \frac{1}{2} \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 + \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(i\vec{k}_0 {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 - a^{2(II)}m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} {}^{(2)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} + {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} \left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 \right] \right\} + 16\pi G \left(ik_{0x} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2, \end{aligned} \quad (7.243)$$

mientras que la ecuación (7.223) para $l = j = y$, se reduce a;

$$\begin{aligned} & \left\{ -\nabla^2\Psi_{(2)} + 2\Psi''_{(2)} + 4\mathcal{H}^{(II)}\Psi'_{(2)} + 2\mathcal{H}^{(II)}\Phi'_{(2)} + (2\mathcal{H}'^{(II)} + 4\mathcal{H}^{(II)2})\Phi_{(2)} \right. \\ & \left. + \nabla^2\Phi_{(2)} \right\} + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}^{(II)}\partial_\eta - \nabla^2){}^{(2)}h_L - 2\left\{ \Phi_{(1)}'^2 + \right. \\ & \left. 8\mathcal{H}^{(II)}\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}' - 2\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}'' + 3(\vec{\nabla}\Phi_{(1)})^2 + 2\Phi_{(1)}\nabla^2\Phi_{(1)} + 4(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2})(\Phi_{(1)})^2 \right\} \\ & = 8\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} \left[{}^{(2)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)} + \left({}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right] + \frac{1}{2} \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 + \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(i\vec{k}_0 {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 - a^{2(II)}m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} {}^{(2)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} + {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)} \left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.244)$$

Tomando la diferencia entre las ecuaciones (7.243) y (7.244), se encuentra;

$$\partial_x^2(\Psi_{(2)} - \Phi_{(2)}) + 4(\partial_x\Phi_{(1)})(\partial_x\Phi_{(1)}) + 8\Phi_{(1)}\partial_x^2\Phi_{(1)} = 16\pi G \left(ik_{0x} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2. \quad (7.245)$$

Luego de sustituir (7.77) y (7.78) en la anterior ecuación y expandir hasta segundo orden en ε se obtiene;

$$\begin{aligned} & -8 \left[(P_{(2)} - F_{(2)}) e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right] + 4 \left(iP_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 - 8 \left(P_{(1)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2 \\ & = 16\pi G \left(ik_{0x} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right)^2, \end{aligned} \quad (7.246)$$

la cual tiene la forma; $\mathbf{c}_{-2\vec{k}_0} e^{-2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_{2\vec{k}_0} e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} = 0$.

Se encuentra que la ecuación $\mathbf{c}_0 = 0$ tiene la forma: $8|P_{(1)}(\eta)|^2 + 32\pi G ||k_{0x}||^2 |{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}|^2 = 0$,

lo cual implica que: $P_{(1)}(\eta) = {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta) = 0$ para todo η , representando una **inconsistencia** que **elimina** por completo el tratamiento a **primer orden** en la perturbación.

Con lo anterior se demuestra que la **situación (2)**, la cual se define por la condición $\vec{k}_0 \perp \vec{k}_1$, es **inconsistente para la construcción de una SSC-II**.

Determinación de las cantidades $\xi_{(2), \pm 2\vec{k}_0}^{(II)}$ para la situación (1) subcaso (A)

Primero limitándonos a la **situación (1) subcaso (A)** resumiremos las ecuaciones de restricción y de movimiento que involucran los números $\xi_{(2), \pm 2\vec{k}_0}^{(II)}$. Estas ecuaciones fueron encontradas en (7.188) \equiv (7.189), (7.221), (7.233) y (7.240), las cuales corresponden a;

$$P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)} F_{(2)} + \frac{3}{2} P_{(1)} P'_{(1)} - \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)}^2 = 2\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi, 0} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)} + {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0} {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} \right\}, \quad (7.247)$$

$$\begin{aligned} & -6\mathcal{H}^{(II)} P'_{(2)} - 8\|\vec{k}_0\|^2 P_{(2)} - 2\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right) F_{(2)} + 2P_{(1)} P''_{(1)} + 3(P'_{(1)})^2 \\ & -13\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^2 + 4\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right) P_{(1)}^2 = 4\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi, 0} {}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0} {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} + \right. \\ & \left. + \left({}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0} \right)^2 + a^{2(II)} m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi, 0} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)} + \left({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} \right)^2 \right] - \|\vec{k}_0\|^2 \left({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (7.248)$$

$$\begin{aligned} & 4P''_{(2)} + \frac{16}{3} \|\vec{k}_0\|^2 (P_{(2)} - F_{(2)}) + 4\mathcal{H}^{(II)} (2P'_{(2)} + F'_{(2)}) + 4\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}\right) F_{(2)} \\ & + 6\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^2 - 16\mathcal{H}^{(II)} P_{(1)} P'_{(1)} + 4P_{(1)} P''_{(1)} - 2(P'_{(1)})^2 - 8\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}\right) P_{(1)}^2 \\ & = 8\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi, 0} {}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0} + \left({}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \|\vec{k}_0\|^2 \left({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} \right)^2 \right. \\ & \left. - a^{2(II)} m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi, 0} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)} + \left({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.249)$$

$$P_{(2)} - F_{(2)} = -\frac{3}{2} P_{(1)}^2 + 2\pi G \left({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)} \right)^2. \quad (7.250)$$

Las dos primeras ecuaciones junto con la última son restricciones de la teoría, en particular la última ecuación puede ser usada para escribir $F_{(2)}$ en función de $P_{(2)}$, $P_{(1)}^2$ y ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}$. Mientras que las dos primeras restricciones pueden ser usadas para escribir ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}$ como funciones de $P_{(2)}$, $P'_{(2)}$ y de cantidades que fueron determinadas a orden cero y primero en ε . Sustituyendo $F_{(2)}$, ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}$ sobre la ecuación de movimiento para $P_{(2)}$ se logra hacer que la ecuación dinámica para $P_{(2)}$, esto es (7.249), únicamente dependa de $P_{(2)}$, $P'_{(2)}$, $P''_{(2)}$ y de cantidades que se determinadas a orden cero y primero en ε . Para realizar el procedimiento mencionado conviene escribir la ecuación (7.247), como:

$$P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)} P_{(2)} + Q_{(1)}^2 = 2\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi, 0} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}, \quad (7.251)$$

donde $Q_{(1)}^2 = \frac{3}{2}P_{(1)}P'_{(1)} + \frac{1}{2}\mathcal{H}^{(II)}P_{(1)}^2 - 2\pi G\mathcal{H}^{(II)}\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}\right)^2 - 2\pi G^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{\prime(II)}\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}\right)$, mientras que la ecuación (7.248) será escrita como:

$$\begin{aligned} & -6\mathcal{H}^{(II)}P'_{(2)} - 8\|\vec{k}_0\|^2P_{(2)} - 2\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right)P_{(2)} + S_{(1)}^2 \\ & = 4\pi G\left\{{}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}\left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{\prime(II)} + a^{2(II)}m^2\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}\right)\left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (7.252)$$

donde $S_{(1)}^2 = \left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right)\left[4\pi G\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}\right)^2 - 3P_{(1)}^2\right] + 2P_{(1)}P''_{(1)} + 3(P'_{(1)})^2 - 13\|\vec{k}_0\|^2P_{(1)}^2 + 4\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right)P_{(1)}^2 - 4\pi G\left\{\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{\prime(II)}\right)^2 + a^{2(II)}m^2\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}\right)^2 - \|\vec{k}_0\|^2\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}\right)^2\right\}$.

Entonces, solucionando (7.251) y (7.252) para ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}$ y ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{\prime(II)}$, se encuentra;

$${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)} = \frac{P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)}P_{(2)} + Q_{(1)}^2}{2\pi G^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}}, \quad (7.253)$$

$${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{\prime(II)} = l_{(0)}P'_{(2)} + q_{(0)}P_{(2)} + W_{(1)}^2, \quad (7.254)$$

donde $l_{(0)} = -\frac{1}{4\pi G^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}}\left(6\mathcal{H}^{(II)} + \frac{2a^{2(II)}m^2\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}\right)}{\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}\right)}\right)$, $q_{(0)} = -\frac{1}{4\pi G^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}}\left(8\|\vec{k}_0\|^2 + 2\mathcal{H}'^{(II)} + 4\mathcal{H}^{2(II)} + \frac{2a^{2(II)}m^2\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}\right)\mathcal{H}^{(II)}}{\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}\right)}\right)$, y $W_{(1)}^2 = \frac{1}{4\pi G^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}}\left(S_{(1)}^2 - \frac{2a^{2(II)}m^2\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}\right)Q_{(1)}^2}{\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}\right)}\right)$. Por último sustituyendo (7.253) y (7.254) en (7.249) se encuentra;

$$\begin{aligned} & P''_{(2)} + \left[3\mathcal{H}^{(II)} - 2\pi G^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}l_{(0)} + \frac{a^{2(II)}m^2\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}\right)}{\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}\right)}\right]P'_{(2)} + \left[\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}\right. \\ & \left.- 2\pi G^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}q_{(0)} + \frac{a^{2(II)}m^2\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}\right)\mathcal{H}^{(II)}}{\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}\right)}\right]P_{(2)} = 2\pi G^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}W_{(1)}^2 \\ & - \frac{a^{2(II)}m^2\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}\right)Q_{(1)}^2}{\left({}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}\right)} - Z_{(1)}^2. \end{aligned} \quad (7.255)$$

donde $Z_{(1)}$ ha sido definido como;

$$\begin{aligned} Z_{(1)}^2 & = -\frac{1}{2}\|\vec{k}_0\|^2P_{(1)}^2 - \mathcal{H}^{(II)}P_{(1)}P'_{(1)} + P_{(1)}P''_{(1)} - \frac{1}{2}(P'_{(1)})^2 - \frac{1}{2}\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}\right)P_{(1)}^2 \\ & - 2\pi G\left\{\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{\prime(II)}\right)^2 - \|\vec{k}_0\|^2\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}\right)^2 - a^{2(II)}m^2\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}\right)^2\right. \\ & \left.+ 2\mathcal{H}^{(II)}\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}\right)\left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{\prime(II)}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (7.256)$$

Nota: De todas las cantidades que se determinan a segundo orden en ε , en (7.255) sólo intervienen $P_{(2)}$ junto con su primera y segunda derivada, las demás cantidades que conforman

esta ecuación son cantidades que se determinaron a orden cero y primero en ε .

Evaluando (7.253) y (7.254) en $\eta = \eta_c$ y solucionando para $P_{(2)}(\eta_c)$ y $P'_{(2)}(\eta_c)$ se encuentra;

$$P_{(2)}(\eta_c) = \frac{l_{(0)}(\eta_c)[2\pi G^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}{}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) - Q_{(1)}^2(\eta_c)] - {}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) + W_{(1)}^2(\eta_c)}{l_{(0)}(\eta_c)\mathcal{H}^{(II)}(\eta_c) - q_{(0)}(\eta_c)}, \quad (7.257)$$

$$P'_{(2)}(\eta_c) = \frac{\mathcal{H}^{(II)}(\eta_c)[{}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) - W_{(1)}^2(\eta_c)] - q_{(0)}(\eta_c)[2\pi G^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}{}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) - Q_{(1)}^2(\eta_c)]}{l_{(0)}(\eta_c)\mathcal{H}^{(II)}(\eta_c) - q_{(0)}(\eta_c)}. \quad (7.258)$$

Entonces dado los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, y ${}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, se calcula $P_{(2)}(\eta_c)$ y $P'_{(2)}(\eta_c)$ a través de las ecuaciones (7.257) y (7.258), con las cuales se determinará una solución única $P_{(2)}(\eta)$ de (7.255).

Posteriormente evaluando (7.116) en η_c se encuentra;

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}v_{\vec{k}}{}^{(II)+}(\eta_c) &= (\delta^{(2)}v_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\eta_c))^* = 0 \\ \delta^{(2)}v_{\vec{k}}{}^{(II)+}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}{}^{(II)+}(\eta_c)P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}{}^{(II)}(\eta_c)[0.5(3P_{(2)}(\eta_c) + F_{(2)}(\eta_c)) \\ &\quad - 6P_{(1)}^2(\eta_c)], \\ (\delta^{(2)}v_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\eta_c))^* &= 4(\delta^{(1)}v_{\vec{k}}{}^{(II)-}(\eta_c))^*P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}{}^{(II)*}(\eta_c)[1.5P_{(2)}(\eta_c) + 0.5F_{(2)}(\eta_c) \\ &\quad - 6P_{(1)}^2(\eta_c)] \end{aligned} \quad (7.259)$$

donde se deberá sustituir $P_{(2)}(\eta_c)$ de (7.257), junto con $P'_{(2)}(\eta_c)$ de (7.258), y para $F_{(2)}(\eta_c)$ se usará (7.250) evaluada en η_c . De esta forma se obtiene $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}{}^{(II)\pm}(\eta_c)$ y $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}{}{'(II)\pm}(\eta_c)$ como función de los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$.

Lo que faltaría por hacer es trabajar con la tercera ecuación (7.150) y su derivada con respecto al tiempo conforme,

$$\begin{aligned} L^{3/2} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0}{}^{(II)}\xi_{(2),2\vec{k}_0}{}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-2\vec{k}_0}{}^{(II)*}\xi_{(2),-2\vec{k}_0}{}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}v_0{}^{(II)+}\xi_{(0),0}{}^{(II)} \right. \\ &\quad \left. + (\delta^{(2)}v_0{}^{(II)-})^*\xi_{(0),0}{}^{(II)*} \right], \end{aligned} \quad (7.260)$$

$$\begin{aligned} L^{3/2} {}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta) &= \delta^{(0)}v'_{2\vec{k}_0}{}^{(II)}\xi_{(2),2\vec{k}_0}{}^{(II)} + \delta^{(0)}v'_{-2\vec{k}_0}{}^{(II)*}\xi_{(2),-2\vec{k}_0}{}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}v_0{}{'(II)+}\xi_{(0),0}{}^{(II)} \right. \\ &\quad \left. + (\delta^{(2)}v_0{}{'(II)-})^*\xi_{(0),0}{}^{(II)*} \right], \end{aligned} \quad (7.261)$$

evaluando las dos últimas ecuaciones en $\eta = \eta_c$, y sustituyendo los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, junto con los resultados encontrados en (7.259) para $\delta^{(2)}v_0{}^{(II)+}(\eta_c)$, $\delta^{(2)}v_0{}^{(II)-}(\eta_c)$,

$\delta^{(2)}v_0'^{(II)+}(\eta_c)$, y $\delta^{(2)}v_0'^{(II)-}(\eta_c)$, llegamos a un sistema de dos ecuaciones lineales algebraicas con dos incógnitas $\xi_{2\vec{k}_0}^{(II)}$ y $\xi_{-2\vec{k}_0}^{(II)*}$, dado por;

$$L^{3/2(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-2\vec{k}_0}^{(II)*}(\eta_c)\xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}v_0^{(II)+}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)} + (\delta^{(2)}v_0^{(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0),0}^{(II)*} \right], \quad (7.262)$$

$$L^{3/2(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c) = \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c)\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-2\vec{k}_0}'^{(II)*}(\eta_c)\xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}v_0'^{(II)+}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)} + (\delta^{(2)}v_0'^{(II)-})^*(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)*} \right], \quad (7.263)$$

de donde podemos despejar las incógnitas $\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)}$ y $\xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*}$, como función de los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c)$, esto es;

$$\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)} = \xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)} \left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c), {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c) \right), \quad \xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*} = \xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*} \left({}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c), {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c) \right).$$

Por último, en relación a los números $\xi_{(s),\vec{k}_1}^{(II)}$, $\xi_{(s),-\vec{k}_1}^{(II)}$ siendo $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ con $s \in \mathbb{Z} - \{-2, 0, 2\}$, dado que $\xi_{\pm\vec{k}_1}^{(II)} = \xi_{\pm s\vec{k}_0}^{(II)} = \alpha \varepsilon^s \xi_{(s),\pm s\vec{k}_0}^{(II)} + \varepsilon^{s+2} \xi_{(s+2),\pm s\vec{k}_0}^{(II)} + \dots$ entonces para $s > 2$ los números $\xi_{(s),\vec{k}_1}^{(II)}$, $\xi_{(s),-\vec{k}_1}^{(II)}$ se determinarán a ordenes superiores al segundo orden en ε , mientras que para $s < 2$ estos números ya habrían sido determinados a primer orden en ε .

Determinación de las cantidades $\xi_{(2),\pm 2\vec{k}_0}^{(II)}$ para la situación (1) subcaso (B)

El conjunto $\left\{ \xi_{(2),\vec{k}_1}^{(II)}, \xi_{(2),-\vec{k}_1}^{(II)}, \xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)}, \xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)} \right\}$, para el subcaso $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$ (completamente análogo al subcaso $\vec{k}_1 = -2\vec{k}_0$) se reduce al conjunto $\left\{ \xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)}, \xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)} \right\}$, y sus elementos se determinan en función de los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c)$ de la manera que expondremos a continuación.

Al igual que para la **situación (1) subcaso (A)** se encuentra que hasta segundo orden en ε los números $\xi_{(2),\pm 2\vec{k}_0}^{(II)}$ únicamente intervienen en las ecuaciones para las variables $P_{(2)}$, y $F_{(2)}$. No obstante, ahora existe una diferencia algebraica entre estas dos situaciones, se trata de que para la **situación (1) subcaso (B)** hasta segundo orden en ε no hay una relación lineal entre las funciones $P_{(2)}$ y $F_{(2)}$ del tipo (7.250). Sin embargo, estudiaremos los casos para los cuales bajo ciertas consideraciones a **ordenes superiores** al segundo orden en ε existe una relación entre las funciones $P_{(2)}$ y $F_{(2)}$ de la forma;

$$F_{(2)}(\eta) = \mathcal{A}(\eta)P_{(2)}(\eta) + \mathcal{B}(\eta) \quad (7.264)$$

con $\mathcal{A}(\eta)$ y $\mathcal{B}(\eta)$ funciones conocidas⁶ y determinadas a ordenes inferiores al segundo orden en ε .

⁶p. ej. podría ocurrir que a tercer orden en ε bajo ciertas consideraciones exista una restricción de la forma:

Por otro lado, para la **situación (1) subcaso (B)** con $\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0$, las ecuaciones en las que intervienen directamente los números $\xi_{\pm 2\vec{k}_0}^{(II)}$ fueron encontradas en (7.213), (7.221) y (7.233), las cuales corresponden a;

$$P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)} F_{(2)} + \frac{3}{2} P_{(1)} P'_{(1)} - \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)}^2 = 2\pi G \left\{ \begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)} \\ & + {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} \end{aligned} \right\}, \quad (7.267)$$

$$\begin{aligned} & -6\mathcal{H}^{(II)} P'_{(2)} - 8\|\vec{k}_0\|^2 P_{(2)} - 2\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right) F_{(2)} + 2P_{(1)} P''_{(1)} + 3(P'_{(1)})^2 \\ & - 13\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^2 + 4\left(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}\right) P_{(1)}^2 = 4\pi G \left\{ \begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} + \\ & + \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 + a^{2(II)} m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)} + \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} \right)^2 \right] - \|\vec{k}_0\|^2 \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)} \right)^2 \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (7.268)$$

$$\begin{aligned} & [a(\eta)P_{(1)} + b(\eta)P'_{(1)}]F_{(2)} + [\tilde{a}(\eta)P_{(1)} + \tilde{b}(\eta)P'_{(1)}]P_{(2)} + c(\eta)P_{(1)}^2 P'_{(1)} + d(\eta)P_{(1)}(P'_{(1)})^2 + e(\eta)P_{(1)}^3 + f(\eta)(P'_{(1)})^3 \\ & = K_{(3)}({}^{[1]}\phi_{\xi,0}^{(II)}, {}^{[1]}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}, {}^{[1]}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}, {}^{[1]}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}, {}^{[1]}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}, {}^{[1]}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}, {}^{[1]}\phi_{\xi,\vec{k}_1}^{(II)}, {}^{[1]}\phi'_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)}) \end{aligned} \quad (7.265)$$

definiendo $\mathcal{A}(\eta)$ y $\mathcal{B}(\eta)$ como;

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\eta) &= -\frac{\tilde{a}(\eta)P_{(1)} + \tilde{b}(\eta)P'_{(1)}}{a(\eta)P_{(1)} + b(\eta)P'_{(1)}}, \\ \mathcal{B}(\eta) &= \frac{1}{a(\eta)P_{(1)} + b(\eta)P'_{(1)}} \left\{ K_{(3)}({}^{[1]}\phi_{\xi,0}^{(II)}, {}^{[1]}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}, {}^{[1]}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}, {}^{[1]}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}, {}^{[1]}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}, {}^{[1]}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}, {}^{[1]}\phi_{\xi,\vec{k}_1}^{(II)}, {}^{[1]}\phi'_{\xi,\vec{k}_1}{}^{(II)}) \right. \\ & \quad \left. - c(\eta)P_{(1)}^2 P'_{(1)} - d(\eta)P_{(1)}(P'_{(1)})^2 - e(\eta)P_{(1)}^3 - f(\eta)(P'_{(1)})^3 \right\}, \end{aligned} \quad (7.266)$$

la ecuación (7.265) tomará la forma (7.264).

Para la **situación (1) subcaso (A)** a orden ε^3 se deberán evitar configuraciones que generen ecuaciones del tipo (7.265), en caso de que a este orden no haya configuración alguna que evite este tipo de ecuaciones se deberá asegurar que estas ecuaciones se satisfagan trivialmente usando únicamente los resultados encontrados a ordenes inferiores, de lo contrario esto indicaría una inconsistencia en el tratamiento. Ahora debido a que bajo la **situación (1) subcaso (B)** por lo menos se podría tratar una de estas ecuaciones, este hecho pone en manifiesto que para el problema cosmológico en cuestión la **situación (1) el subcaso (B)** es **más adecuada** que el **subcaso (A)**.

$$\begin{aligned}
& 4P''_{(2)} + \frac{16}{3} \|\vec{k}_0\|^2 (P_{(2)} - F_{(2)}) + 4\mathcal{H}^{(II)} (2P'_{(2)} + F'_{(2)}) + 4(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}) F_{(2)} \\
& + 6\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^2 - 16\mathcal{H}^{(II)} P_{(1)} P'_{(1)} + 4P_{(1)} P''_{(1)} - 2(P'_{(1)})^2 - 8(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}) P_{(1)}^2 \\
& = 8\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0} + \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 + \frac{\|\vec{k}_0\|^2}{3} \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 \right. \\
& \left. - a^{2(II)} m^2 \left[{}^{(0)}\phi_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0} + \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 \right] \right\}. \tag{7.269}
\end{aligned}$$

Usando (7.264) las ecuaciones (7.267) y (7.268) respectivamente pueden ser escritas como;

$$P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)} \mathcal{A} P_{(2)} + \tilde{Q}_{(1)}^2 = 2\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}, \tag{7.270}$$

$$\begin{aligned}
& -6\mathcal{H}^{(II)} P'_{(2)} - 8\|\vec{k}_0\|^2 P_{(2)} - 2(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}) \mathcal{A} P_{(2)} + \tilde{S}_{(1)}^2 \\
& = 4\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} {}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0} + a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0} \right\}, \tag{7.271}
\end{aligned}$$

siendo $\tilde{Q}_{(1)}^2 = \frac{3}{2} P_{(1)} P'_{(1)} + \mathcal{H}^{(II)} \mathcal{B} - \mathcal{H}^{(II)} P_{(1)}^2 - 2\pi G {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}$, mientras que $\tilde{S}_{(1)}^2 = -2(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}) \mathcal{B} + 2P_{(1)} P''_{(1)} + 3(P'_{(1)})^2 - 13\|\vec{k}_0\|^2 P_{(1)}^2 + 4(\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{2(II)}) P_{(1)}^2 - 4\pi G \left\{ \left({}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 + a^{2(II)} m^2 \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 - \|\vec{k}_0\|^2 \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0} \right)^2 \right\}$. Entonces, solucionando (7.270) y (7.271) para ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}$, se encuentra;

$${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)} = \frac{P'_{(2)} + \mathcal{H}^{(II)} \mathcal{A} P_{(2)} + \tilde{Q}_{(1)}^2}{2\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}}, \tag{7.272}$$

$${}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)} = l_{(0)} P'_{(2)} + \tilde{q}_{(0)} P_{(2)} + \tilde{W}_{(1)}^2, \tag{7.273}$$

siendo $l_{(0)} = -\frac{1}{4\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \left(6\mathcal{H}^{(II)} + \frac{2a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}}{{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \right)$, $\tilde{q}_{(0)} = -\frac{1}{4\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \left(8\|\vec{k}_0\|^2 + 2\mathcal{H}'^{(II)} \mathcal{A} + 4\mathcal{H}^{2(II)} \mathcal{A} + \frac{2a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} \mathcal{H}^{(II)} \mathcal{A}}{{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \right)$ y $\tilde{W}_{(1)}^2 = \frac{1}{4\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \left(\tilde{S}_{(1)}^2 - \frac{2a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} \tilde{Q}_{(1)}^2}{{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \right)$.

Por último sustituyendo (7.272) y (7.273) en (7.269) se encuentra;

$$\begin{aligned}
& P''_{(2)} + \left[(2 + \mathcal{A}) \mathcal{H}^{(II)} - 2\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} l_{(0)} + \frac{a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)}}{{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \right] P'_{(2)} \\
& + \left[\frac{4}{3} \|\vec{k}_0\|^2 (1 - \mathcal{A}) + \mathcal{H}^{(II)} \mathcal{A}' + (\mathcal{H}'^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)2}) \mathcal{A} - 2\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} \tilde{q}_{(0)} \right. \\
& \left. + \frac{a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} \mathcal{H}^{(II)} \mathcal{A}}{{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} \right] P_{(2)} = 2\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0} \tilde{W}_{(1)}^2 - \frac{a^{2(II)} m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}^{(II)} \tilde{Q}_{(1)}^2}{{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}} - \tilde{Z}_{(1)}^2, \tag{7.274}
\end{aligned}$$

en donde $\tilde{Z}_{(1)}^2$ ha sido definido como;

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{(1)}^2 = & \|\vec{k}_0\|^2 \left(-\frac{4}{3}\mathcal{B} + \frac{3}{2}P_{(1)}^2 \right) + \mathcal{H}^{(II)}\mathcal{B}' - 4\mathcal{H}^{(II)}P_{(1)}P'_{(1)} + P_{(1)}P''_{(1)} - \frac{1}{2}(P'_{(1)})^2 + \left(\mathcal{H}'^{(II)} \right. \\ & + 2\mathcal{H}^{(II)2} \left. \right) (-2P_{(1)}^2 + \mathcal{B}) - 2\pi G \left\{ \left({}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0} \right)^2 + \|\vec{k}_0\|^2 \left({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0} \right)^2 \right. \\ & \left. - a^{2(II)}m^2 \left({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.275)$$

Nota: Al igual que en (7.255), de todas las cantidades que se determinan a segundo orden en ε , en (7.274) solo intervienen $P_{(2)}$ junto con su primera y segunda derivada, las demás cantidades que conforman esta ecuación son cantidades que se determinaron a orden cero y lineal en ε .

Evaluando (7.272) y (7.273) en $\eta = \eta_c$ y solucionando para $P_{(2)}(\eta_c)$ y $P'_{(2)}(\eta_c)$ se encuentra;

$$P_{(2)}(\eta_c) = \frac{l_{(0)}(\eta_c)[2\pi G^{(0)}\phi'_{\xi, 0} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) - \tilde{Q}_{(1)}^2(\eta_c)] - {}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) + \tilde{W}_{(1)}^2(\eta_c)}{l_{(0)}(\eta_c)\mathcal{H}^{(II)}(\eta_c)\mathcal{A}(\eta_c) - \tilde{q}_{(0)}(\eta_c)}, \quad (7.276)$$

$$P'_{(2)}(\eta_c) = \frac{\mathcal{H}^{(II)}(\eta_c)\mathcal{A}(\eta_c)[{}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) - \tilde{W}_{(1)}^2(\eta_c)] - \tilde{q}_{(0)}(\eta_c)[2\pi G^{(0)}\phi'_{\xi, 0} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) - \tilde{Q}_{(1)}^2(\eta_c)]}{l_{(0)}(\eta_c)\mathcal{H}^{(II)}(\eta_c)\mathcal{A}(\eta_c) - \tilde{q}_{(0)}(\eta_c)}. \quad (7.277)$$

Entonces dado los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, se calculan las condiciones iniciales $P_{(2)}(\eta_c)$ y $P'_{(2)}(\eta_c)$ a través de las ecuaciones (7.276) y (7.277), con las cuales se determinará una solución única de (7.274).

Posteriormente evaluando (7.116) en η_c se encuentra;

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}v_{\vec{k}}'^{(II)+}(\eta_c) &= (\delta^{(2)}v_{\vec{k}}'^{(II)-}(\eta_c))^* = 0, \\ \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) &= 4\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c)P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)[0.5(3P_{(2)}(\eta_c) + F_{(2)}(\eta_c)) \\ &\quad - 6P_{(1)}^2(\eta_c)], \\ (\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^* &= 4(\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c))^*P_{(1)}(\eta_c) + \delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)*}(\eta_c)[1.5P_{(2)}(\eta_c) + 0.5F_{(2)}(\eta_c) \\ &\quad - 6P_{(1)}^2(\eta_c)], \end{aligned} \quad (7.278)$$

donde sustituyendo $P_{(2)}(\eta_c)$ de (7.276), $P'_{(2)}(\eta_c)$ de (7.277), y para $F_{(2)}(\eta_c)$ se usará (7.264) evaluada en η_c , se obtiene $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c)$ y $\delta^{(2)}v_{\vec{k}}'^{(II)\pm}(\eta_c)$ en función de los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$. Ahora trabajaremos con la tercera ecuación (7.150) y su derivada con respecto al tiempo conforme,

$$L^{3/2} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta) = \delta^{(0)} v_{2\vec{k}_0}^{(II)} \xi_{(2), 2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)} v_{-2\vec{k}_0}^{(II)*} \xi_{(2), -2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)} v_0^{(II)+} \xi_{(0), 0}^{(II)} + (\delta^{(2)} v_0^{(II)-})^* \xi_{(0), 0}^{(II)*} \right], \quad (7.279)$$

$$L^{3/2} {}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta) = \delta^{(0)} v'_{2\vec{k}_0}{}^{(II)} \xi_{(2), 2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)} v'_{-2\vec{k}_0}{}^{(II)*} \xi_{(2), -2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)} v_0'^{(II)+} \xi_{(0), 0}^{(II)} + (\delta^{(2)} v_0'^{(II)-})^* \xi_{(0), 0}^{(II)*} \right], \quad (7.280)$$

evaluando las dos últimas ecuaciones en $\eta = \eta_c$, y sustituyendo los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, junto con los resultados encontrados en (7.278) para $\delta^{(2)} v_0^{(II)+}(\eta_c)$, $\delta^{(2)} v_0^{(II)-}(\eta_c)$, $\delta^{(2)} v_0'^{(II)+}(\eta_c)$ y $\delta^{(2)} v_0'^{(II)-}(\eta_c)$, finalmente se encuentra un sistema de dos ecuaciones lineales algebraicas con dos incógnitas $\xi_{(2), 2\vec{k}_0}^{(II)}$ y $\xi_{(2), -2\vec{k}_0}^{(II)*}$, dado por;

$$L^{3/2} {}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = \delta^{(0)} v_{2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) \xi_{(2), 2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)} v_{-2\vec{k}_0}^{(II)*}(\eta_c) \xi_{(2), -2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)} v_0^{(II)+}(\eta_c) \xi_{(0), 0}^{(II)} + (\delta^{(2)} v_0^{(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0), 0}^{(II)*} \right], \quad (7.281)$$

$$L^{3/2} {}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) = \delta^{(0)} v'_{2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) \xi_{(2), 2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)} v'_{-2\vec{k}_0}{}^{(II)*}(\eta_c) \xi_{(2), -2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)} v_0'^{(II)+}(\eta_c) \xi_{(0), 0}^{(II)} + (\delta^{(2)} v_0'^{(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0), 0}^{(II)*} \right], \quad (7.282)$$

de donde podemos despejar $\xi_{(2), 2\vec{k}_0}^{(II)}$ y $\xi_{(2), -2\vec{k}_0}^{(II)*}$, como función de los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, esto es;

$$\xi_{(2), 2\vec{k}_0}^{(II)} = \xi_{(2), 2\vec{k}_0}^{(II)}({}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c), {}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)), \quad \xi_{(2), -2\vec{k}_0}^{(II)*} = \xi_{(2), -2\vec{k}_0}^{(II)*}({}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c), {}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)).$$

7.1.3. El empalme en la hipersuperficie de colapso

Suponiendo que en cierta hipersuperficie de Cauchy $\eta = \eta_c$ el estado $|\xi^{(I)}\rangle \in \mathbb{H}^{(I)}$, para el cual el único modo \vec{k} excitado es el modo $\vec{k} = 0$, con todos los demás modos $\vec{k} \neq 0$ en sus correspondientes estados base (estados base de un oscilador armónico), experimenta un **colapso auto-inducido** de tal forma que en general el estado post-colapso podría tener los modos $\vec{k} \neq 0$ al igual que los modos $\vec{k} = 0$ excitados.

Para lo que sigue definiremos el estado $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle \in \mathbb{H}^{(I)}$ como el estado post-colapso al estado $|\xi^{(I)}\rangle \in \mathbb{H}^{(I)}$. Desde capítulos previos (**capítulos 4 y 6**) la transición de $|\xi^{(I)}\rangle$ a $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle$ la hemos venido denotando como;

$$|\xi^{(I)}\rangle \rightarrow |\zeta_{guia}^{(I)}\rangle, \quad (7.283)$$

cabe señalar que en general el conjunto $\{\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x}), |\zeta_{guia}^{(I)}\rangle \in \mathbb{H}^{(I)}\}$, a diferencia del conjunto $\{\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x}), |\xi^{(I)}\rangle \in \mathbb{H}^{(I)}\}$, no representa una **SSC-I**. Dado que el estado $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle$ tiene más modos excitados que $|\xi^{(I)}\rangle$ en general se cumple que;

$$\langle \xi^{(I)} | \hat{T}_\mu^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x})] | \xi^{(I)} \rangle \neq \langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{T}_\mu^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x})] | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle,$$

y puesto que: $G_\mu^\nu[\mathcal{G}^{(I)}] = 8\pi G \langle \xi^{(I)} | \hat{T}_\mu^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x})] | \xi^{(I)} \rangle$ se concluye;

$$G_\mu^\nu[\mathcal{G}^{(I)}] \neq 8\pi G \langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{T}_\mu^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x})] | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle. \quad (7.284)$$

Sin embargo, para el caso en que el estado post-colapso $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle \in H^{(I)}$, al igual que el estado $|\xi^{(II)}\rangle \in H^{(II)}$, sólo tenga los modos $\{0, n\vec{k}_0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ excitados, entonces en la hipersuperficie de colapso $\eta = \eta_c$ relacionaremos $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle$ con $|\xi^{(II)}\rangle$ a través de;

$$\begin{aligned} \langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{T}_\mu^\nu [\mathcal{G}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(I)}(\mathbf{x})] | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle |_{\eta=\eta_c} \\ = \\ \langle \xi^{(II)} | \hat{T}_\mu^\nu [\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\phi}^{(II)}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{(II)}(\mathbf{x})] | \xi^{(II)} \rangle |_{\eta=\eta_c}, \end{aligned} \quad (7.285)$$

a la cual denominaremos **condición de juntura** o de **empalme**.

Por otro lado, con base a lo mencionado sobre el estado post-colapso escribiremos,

$$\begin{aligned} |\zeta_{guia}^{(I)}\rangle &= \dots |0_{-\vec{k}_m}^{(I)}\rangle \otimes \dots |\zeta_{-2\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{-\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes \dots |\zeta_{-3\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{-2\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{-\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_0^{(I)}\rangle \\ &\otimes |\zeta_{\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{2\vec{k}_0}^{(I)}\rangle \otimes \dots |\zeta_{\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \otimes |\zeta_{2\vec{k}_1}^{(I)}\rangle \dots \otimes |0_{\vec{k}_m}^{(I)}\rangle \dots \\ &\text{siendo } |\zeta_{\vec{k}}^{(I)}\rangle = \mathcal{F}(\zeta_{\vec{k}}^{(I)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(II)\dagger}) |0_{\vec{k}}^{(II)}\rangle, \end{aligned} \quad (7.286)$$

con todos los demás modos \vec{k} distintos de $n\vec{k}_0$ y $n\vec{k}_1$ con $n \in \mathbb{Z}$, en sus correspondientes estados base.

Nota : Dado que hemos mostrado que las configuraciones en estudio, con únicamente los modos excitados $\vec{k} \in \{0, p\vec{k}_0, q\vec{k}_1, (p\vec{k}_0 \pm q\vec{k}_1)\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$, sólo son consistentes cuando $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ con $s \in \mathbb{Z}$. Entonces, en (7.286) hemos caído en una redundancia al escribir los modos $n\vec{k}_1$. Sin embargo lo seguiremos escribiendo debido a que \vec{k}_1 caracteriza las perturbaciones tensoriales (7.79) las cuales se manifiestan, o contribuyen, a partir del segundo orden en ε . Además, porque en general $\vec{k}_1 = s\vec{k}_0$ es un modo distinto a los modos $\{0, \pm\vec{k}_0, \pm 2\vec{k}_0\}$ que hasta segundo orden en ε caracterizan las perturbaciones escalares.

Por otro lado, al igual⁷ como se encontró (7.149) se calcula $\langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}) | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle$, para lo cual se encuentra;

⁷El procedimiento es análogo pero en lugar de usar $u_{\vec{k}}^{(II)}(\mathbf{x})$ dado por (7.81) se usará $u_{\vec{k}}^{(I)}(\mathbf{x})$ dado por (7.46).

$$\begin{aligned}
 \phi_{\zeta_g}^{(I)}(\mathbf{x}) &\equiv \langle \zeta_{guia}^{(I)} | \hat{\phi}^{(I)}(\mathbf{x}) | \zeta_{guia}^{(I)} \rangle \\
 &= \phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta) + \left\{ \left[\phi_{\zeta_g,\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \phi_{\zeta_g,\vec{k}_1}^{(I)}(\eta) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + \dots \right] + c.c \right\},
 \end{aligned} \tag{7.287}$$

en donde las funciones auxiliares $\phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta)$, $\phi_{\zeta_g,\vec{k}_0}^{(I)}(\eta)$, $\phi_{\zeta_g,n\vec{k}_0}^{(I)}(\eta)$, ... corresponden a;

$$\begin{aligned}
 L^{3/2} \phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta) &= v_0^{(I)}(\eta) \zeta_0^{(I)} + c.c \\
 L^{3/2} \phi_{\zeta_g,\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) &= v_{\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) \zeta_{\vec{k}_0}^{(I)} + v_{-\vec{k}_0}^{(I)*}(\eta) \zeta_{-\vec{k}_0}^{(I)*} \\
 L^{3/2} \phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) &= v_{2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) \zeta_{2\vec{k}_0}^{(I)} + v_{-2\vec{k}_0}^{(I)*}(\eta) \zeta_{-2\vec{k}_0}^{(I)*} \\
 &\quad , \dots = , \dots \\
 &\quad , \dots \\
 L^{3/2} \phi_{\zeta_g,n\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) &= v_{n\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) \zeta_{n\vec{k}_0}^{(I)} + v_{-n\vec{k}_0}^{(I)*}(\eta) \zeta_{-n\vec{k}_0}^{(I)*} \\
 &\quad , \dots = , \dots \\
 L^{3/2} \phi_{\zeta_g,\vec{k}_1}^{(I)}(\eta) &= v_{\vec{k}_1}^{(I)}(\eta) \zeta_{\vec{k}_1}^{(I)} + v_{-\vec{k}_1}^{(I)*}(\eta) \zeta_{-\vec{k}_1}^{(I)*}(\eta) \\
 L^{3/2} \phi_{\zeta_g,2\vec{k}_1}^{(I)}(\eta) &= v_{2\vec{k}_1}^{(I)}(\eta) \zeta_{2\vec{k}_1}^{(I)} + v_{-2\vec{k}_1}^{(I)*}(\eta) \zeta_{-2\vec{k}_1}^{(I)*}(\eta) \\
 &\quad , \dots = , \dots \\
 &\quad , \dots \\
 L^{3/2} \phi_{\zeta_g,n\vec{k}_1}^{(I)}(\eta) &= v_{n\vec{k}_1}^{(I)}(\eta) \zeta_{n\vec{k}_1}^{(I)} + v_{-n\vec{k}_1}^{(I)*}(\eta) \zeta_{-n\vec{k}_1}^{(I)*}.
 \end{aligned} \tag{7.288}$$

Ahora, al igual que para los números $\{\xi_{n\vec{k}_0}^{(II)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, asumiremos que los números $\{\zeta_{n\vec{k}_0}^{(I)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ pueden ser escritos como series de potencias en ε de la forma; $\zeta_{n\vec{k}_0}^{(I)} = \varepsilon^n \zeta_{(n),n\vec{k}_0}^{(I)} + \varepsilon^{n+2} \zeta_{(n+2),n\vec{k}_0}^{(I)} + \varepsilon^{n+4} \zeta_{(n+4),n\vec{k}_0}^{(I)} + \dots$ (por lo cual $\zeta_0^{(I)} = \zeta_{(0),0}^{(I)} + \varepsilon^2 \zeta_{(2),0}^{(I)} + \varepsilon^4 \zeta_{(4),0}^{(I)} + \dots$). Entonces, hasta **orden cero** en ε las únicas ecuaciones no nulas que se derivan de la condición de juntura (7.285) son; $\langle (\delta^{(0)} \hat{T}_\eta^\eta(\eta_c))^{(I)} \rangle_{\zeta_g} = \langle (\delta^{(0)} \hat{T}_\eta^\eta(\eta_c))^{(II)} \rangle_\xi$, y $\langle (\delta^{(0)} \hat{T}_l^l(\eta_c))^{(I)} \rangle_{\zeta_g} = \langle (\delta^{(0)} \hat{T}_l^l(\eta_c))^{(II)} \rangle_\xi$, las cuales respectivamente se reducen a;

$$\left[({}^{(0)} \phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)})^2 + a^{(I)2} m^2 ({}^{(0)} \phi_{\zeta_g,0}^{(I)})^2 \right] \Big|_{\eta_c} = \left[({}^{(0)} \phi'_{\xi,0}{}^{(II)})^2 + a^{(II)2} m^2 ({}^{(0)} \phi_{\xi,0}^{(II)})^2 \right] \Big|_{\eta_c}, \tag{7.289}$$

$$\left[({}^{(0)} \phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)})^2 - a^{(I)2} m^2 ({}^{(0)} \phi_{\zeta_g,0}^{(I)})^2 \right] \Big|_{\eta_c} = \left[({}^{(0)} \phi'_{\xi,0}{}^{(II)})^2 - a^{(II)2} m^2 ({}^{(0)} \phi_{\xi,0}^{(II)})^2 \right] \Big|_{\eta_c}. \tag{7.290}$$

El sistema de ecuaciones anterior tiene como solución; $({}^{(0)} \phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c))^2 = ({}^{(0)} \phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c))^2$, y $a^{(I)2}(\eta_c) ({}^{(0)} \phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta_c))^2 = a^{(II)2}(\eta_c) ({}^{(0)} \phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta_c))^2$. Ahora, asumiendo que el factor de escala no presenta ningún salto en la hipersuperficie de colapso: $a^{(I)}(\eta_c) = a^{(II)}(\eta_c)$, como tampoco

en los signos respectivos de los valores de expectación, entonces bajo tales requerimientos se obtiene que;

$${}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c), \text{ y } {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c). \quad (7.291)$$

Ahora procederemos a discutir el empalme en $\eta = \eta_c$ a **primer orden** en ε . A este orden las únicas ecuaciones no nulas que se derivan de la condición de juntura (7.285) son; $\langle(\delta^{(1)}\hat{T}_\eta{}^\eta(\eta_c, \vec{x}))^{(I)}\rangle_{\zeta_g} = \langle(\delta^{(1)}\hat{T}_\eta{}^\eta(\eta_c, \vec{x}))^{(II)}\rangle_\xi$, $\langle(\delta^{(1)}\hat{T}_\eta{}^l(\eta_c, \vec{x}))^{(I)}\rangle_{\zeta_g} = \langle(\delta^{(1)}\hat{T}_\eta{}^l(\eta_c, \vec{x}))^{(II)}\rangle_\xi$, $\langle(\delta^{(1)}\hat{T}_l{}^\eta(\eta_c, \vec{x}))^{(I)}\rangle_{\zeta_g} = \langle(\delta^{(1)}\hat{T}_l{}^\eta(\eta_c, \vec{x}))^{(II)}\rangle_\xi$, y $\langle(\delta^{(1)}\hat{T}_l{}^l(\eta_c, \vec{x}))^{(I)}\rangle_{\zeta_g} = \langle(\delta^{(1)}\hat{T}_l{}^l(\eta_c, \vec{x}))^{(II)}\rangle_\xi$, dichas ecuaciones se reducen respectivamente a;

$$\begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) + a^{(I)2}(\eta_c)m^2 \quad {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) \\ & = \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) - [{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)]^2 P_{(1)}(\eta_c) + a^{(II)2}(\eta_c)m^2 \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c), \end{aligned} \quad (7.292)$$

$${}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c), \quad (7.293)$$

$$\begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) - a^{(I)2}(\eta_c)m^2 \quad {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) \\ & = \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) - [{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)]^2 P_{(1)}(\eta_c) - a^{(II)2}(\eta_c)m^2 \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c). \end{aligned} \quad (7.294)$$

Haciendo uso de la ecuación (7.293) junto con el resultado (7.291), se encuentra que,

$${}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c). \quad (7.295)$$

El siguiente paso consiste en sumar las ecuaciones (7.292) y (7.294), de lo cual se obtiene;

$${}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) \quad {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) - [{}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)]^2 P_{(1)}(\eta_c), \quad (7.296)$$

usando nuevamente el resultado (7.291) sobre la anterior ecuación, encontramos que puede ser simplificada hasta obtener;

$${}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) - {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = \quad {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) P_{(1)}(\eta_c). \quad (7.297)$$

Ahora, imponiendo que en la hipersuperficie de colapso $\eta = \eta_c$ los potenciales Newtonianos $\Phi^{(1)}(\eta_c, \vec{x})$, $\Psi^{(1)}(\eta_c, \vec{x})$ son nulos, se obtiene;

$$P_{(1)}(\eta_c) = 0, \quad (7.298)$$

lo cual aplicado sobre (7.297), permite encontrar;

$${}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = \quad {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c). \quad (7.299)$$

Por último, evaluando (7.173) ó (7.174) en η_c y despejando para $P'_{(1)}(\eta_c)$, llegamos a;

$$P'_{(1)}(\eta_c) = 4\pi G {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) \neq 0. \quad (7.300)$$

Manifestando que $P'_{(1)}(\eta)$ a diferencia de $P_{(1)}(\eta)$ no es nulo sobre la hipersuperficie de colapso $\eta = \eta_c$. De haber sido así: (esto es **si** $P'_{(1)}(\eta_c) = 0$) la solución única de la ecuación (7.176) que satisface las condiciones iniciales $P_{(1)}(\eta_c) = P'_{(1)}(\eta_c) = 0$ sería $P_{(1)}(\eta) = 0$, y entonces hasta primer orden en ε la métrica en la **SSC-II**, al igual que la métrica en la **SSC-I**, describiría un universo espacialmente homogéneo e isotrópico antítesis de lo que deseamos describir.

Para finalizar, consideraremos el empalme en $\eta = \eta_c$ a **segundo orden** en ε . A este orden las únicas ecuaciones no nulas que se derivan de la condición de juntura (7.285) son; $\langle(\delta^{(2)}\hat{T}_\eta{}^\eta(\eta_c, \vec{x}))^{(I)}\rangle_{\zeta_g} = \langle(\delta^{(2)}\hat{T}_\eta{}^\eta(\eta_c, \vec{x}))^{(II)}\rangle_\xi$, $\langle(\delta^{(2)}\hat{T}_\eta{}^l(\eta_c, \vec{x}))^{(I)}\rangle_{\zeta_g} = \langle(\delta^{(2)}\hat{T}_\eta{}^l(\eta_c, \vec{x}))^{(II)}\rangle_\xi$, $\langle(\delta^{(2)}\hat{T}_l{}^\eta(\eta_c, \vec{x}))^{(I)}\rangle_{\zeta_g} = \langle(\delta^{(2)}\hat{T}_l{}^\eta(\eta_c, \vec{x}))^{(II)}\rangle_\xi$ y $\langle(\delta^{(2)}\hat{T}_l{}^l(\eta_c, \vec{x}))^{(I)}\rangle_{\zeta_g} = \langle(\delta^{(2)}\hat{T}_l{}^l(\eta_c, \vec{x}))^{(II)}\rangle_\xi$, las cuales conducen respectivamente a;

$$\begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) + ({}^{(1)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}))^2 + \partial_i {}^{(1)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x})\partial^i {}^{(1)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & + a^{2(I)}(\eta_c)m^2 {}^{(0)}\phi_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) + a^{2(I)}(\eta_c)m^2 ({}^{(1)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}))^2 \\ & = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) - 4 {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)\Phi_{(1)}(\eta_c, \vec{x}) {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & + 4 ({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c))^2 (\Phi_{(1)}(\eta_c, \vec{x}))^2 - ({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c))^2 \Phi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) + ({}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}))^2 \\ & + \partial_i {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x})\partial^i {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) + a^{2(II)}(\eta_c)m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & + a^{2(II)}(\eta_c)m^2 ({}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}))^2, \end{aligned} \quad (7.301)$$

$$\begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c)\partial_l {}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) + 2 {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x})\partial_l {}^{(1)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)\partial_l {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) + 2 {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x})\partial_l {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & + 4 {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)\Psi_{(1)}(\eta_c)\partial_l {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}), \end{aligned} \quad (7.302)$$

$$\begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c)\partial_l {}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) + 2 {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x})\partial_l {}^{(1)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)\partial_l {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) + 2 {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x})\partial_l {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & - 4 {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)\Phi_{(1)}(\eta_c)\partial_l {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}), \end{aligned} \quad (7.303)$$

$$\begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) + ({}^{(1)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}))^2 - \partial_i {}^{(1)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x})\partial^i {}^{(1)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & - a^{2(I)}(\eta_c)m^2 {}^{(0)}\phi_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) - a^{2(I)}(\eta_c)m^2 ({}^{(1)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}))^2 \\ & = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) - 4 {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)\Phi_{(1)}(\eta_c, \vec{x}) {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & + 4 ({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c))^2 (\Phi_{(1)}(\eta_c, \vec{x}))^2 - ({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c))^2 \Phi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) + ({}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}))^2 \\ & - \partial_i {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x})\partial^i {}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) - a^{2(II)}(\eta_c)m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & - a^{2(II)}(\eta_c)m^2 ({}^{(1)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}))^2. \end{aligned} \quad (7.304)$$

Usando los resultados (7.295), (7.298) y (7.299), sobre el anterior sistema de ecuaciones se encuentra;

$$\begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) + a^{2(I)}(\eta_c)m^2 {}^{(0)}\phi_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) \\ &= {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi'_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) - ({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c))^2 \Phi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & \quad + a^{2(II)}(\eta_c)m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}), \end{aligned} \quad (7.305)$$

$${}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) \partial_l {}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) \partial_l {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}), \quad (7.306)$$

$$\begin{aligned} & {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) - a^{2(I)}(\eta_c)m^2 {}^{(0)}\phi_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) \\ &= {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi'_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) - ({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c))^2 \Phi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) \\ & \quad - a^{2(II)}(\eta_c)m^2 {}^{(0)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}). \end{aligned} \quad (7.307)$$

Utilizando (7.291) sobre la ecuación (7.306) se consigue;

$$\partial_l {}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) = \partial_l {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}), \quad (7.308)$$

mientras que tomando la diferencia entre las ecuaciones (7.305) y (7.307), sobre la cual luego de usar $a^{2(I)}(\eta_c) = a^{2(II)}(\eta_c)$ junto con (7.291) se encuentra;

$${}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}) = {}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}). \quad (7.309)$$

Por otra parte, dada la forma de las funciones auxiliares ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x})$ y ${}^{(2)}\phi_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x})$, las cuales vienen dadas respectivamente por (7.287) y (7.149), podemos ver que la condición (7.309) es mucho más restrictiva que (7.308). Ahora usaremos (7.149) junto con (7.287) para expandir (7.309) procedimiento del cual se encuentra la ecuación;

$${}^{(2)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) + \left[{}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right] = {}^{(2)}\phi_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) + \left[{}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) e^{2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + c.c \right]. \quad (7.310)$$

Usando sobre la anterior ecuación el hecho de que las funciones $\{1, e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}\}$ son linealmente independientes, se encuentra que;

$${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c), \quad {}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c). \quad (7.311)$$

Por otro lado, tomando la suma entre las ecuaciones (7.305) y (7.307), se obtiene;

$$({}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c))^2 \Phi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) = {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi'_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) - {}^{(0)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}), \quad (7.312)$$

usando (7.291) sobre la anterior ecuación, se obtiene;

$${}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)\Phi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) = {}^{(2)}\phi'_{\xi}{}^{(II)}(\eta_c, \vec{x}) - {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g}{}^{(I)}(\eta_c, \vec{x}). \quad (7.313)$$

Assumiendo que el potencial $\Phi_{(2)}(\eta, \vec{x})$ es nulo sobre la hipersuperficie $\eta = \eta_c$, esto es;

$$\Phi_{(2)}(\eta_c, \vec{x}) = 0 \quad \text{el cual segun (7.77) implica que:} \quad a_{(2)}(\eta_c) = F_{(2)}(\eta_c) = 0. \quad (7.314)$$

Ahora de igual forma como se procedió con (7.309), usaremos (7.149) junto con (7.287) para expandir (7.313), lo cual luego de usar la independencia lineal de las funciones $\{1, e^{\pm 2i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}\}$ se encuentra;

$${}^{(2)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c), \quad (7.315)$$

$${}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g,2\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c). \quad (7.316)$$

Por otro lado, partiendo de la condición $F_{(2)}(\eta_c) = 0$ extraeremos las condiciones $P_{(2)}(\eta_c)$ y $P'_{(2)}(\eta_c)$, en función de ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, con las que se determinará la solución única de la ecuación de movimiento para $P_{(2)}(\eta)$.

No obstante, dado a que anteriormente en (7.255) y (7.274) se encontraron respectivamente las ecuaciones de movimiento de $P_{(2)}(\eta)$ para la **situación (1) subcaso (A)** y **subcaso (B)**, deberemos trabajar por separado cada uno de estos subcasos. Entonces para la **situación (1) subcaso (A)** según (7.250) se tiene que $P_{(2)}(\eta) - F_{(2)}(\eta) = -\frac{3}{2}P_{(1)}^2(\eta) + 2\pi G \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) \right)^2$, la cual una vez evaluada en $\eta = \eta_c$ y teniendo en cuenta que $F_{(2)}(\eta_c) = 0$ junto con $P_{(1)}(\eta_c) = 0$ de (7.298), se encuentra que,

$$P_{(2)}(\eta_c) = 2\pi G \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) \right)^2. \quad (7.317)$$

Ahora, sustituyendo los anteriores resultados en la condición que se obtiene al evaluar (7.247) en $\eta = \eta_c$ se consigue;

$$P'_{(2)}(\eta_c) = 2\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) + {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) \right\}. \quad (7.318)$$

Entonces, una vez que ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ haya sido especificado, las condiciones iniciales (7.317) y (7.318), con las que se determinará una solución particular $P_{(2)}(\eta)$ de (7.255), quedarán especificadas.

De forma análoga, a lo que corresponde a la **situación (1) subcaso (B)** según (7.264) se tiene que, $F_{(2)}(\eta) = \mathcal{A}(\eta)P_{(2)}(\eta) + \mathcal{B}(\eta)$, luego de evaluar la anterior ecuación en $\eta = \eta_c$ y considerando (7.314), se encuentra,

$$P_{(2)}(\eta_c) = -\frac{\mathcal{B}(\eta_c)}{\mathcal{A}(\eta_c)}. \quad (7.319)$$

Finalmente evaluando (7.267) en $\eta = \eta_c$ y teniendo en cuenta los resultados $P_{(1)}(\eta_c) = F_{(2)}(\eta_c) = 0$, se encuentra que;

$$P'_{(2)}(\eta_c) = 2\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) + {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) \right\}. \quad (7.320)$$

Entonces, una vez se haya especificado ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ las condiciones iniciales (7.319) y (7.320), con las que se determinara una solución particular $P_{(2)}(\eta)$ de (7.274), quedaran especificadas.

Por último, tanto como para la **situación (1) subcaso (A)** como para la **situación (1) subcaso (B)**, las ecuaciones de movimiento de las funciones auxiliares ${}^{(2)}h_T(\eta)$, ${}^{(2)}H_T(\eta)$, ${}^{(2)}h_L(\eta)$ y ${}^{(2)}H_L(\eta)$ o bien corresponden a ecuaciones de movimiento sin fuentes {p. ej. las ecuaciones (7.226), (7.227) y (7.239)}, ó con fuentes {p. ej. (7.238) y (7.242)} en donde las fuentes corresponden a combinaciones lineales de $P_{(2)}(\eta)$, $F_{(2)}(\eta)$ y $P_{(1)}^2(\eta)$. Entonces una vez encontradas las soluciones particulares para $P_{(1)}(\eta)$, $P_{(2)}(\eta)$ y $F_{(2)}(\eta)$ que se ajustan a las condiciones en $\eta = \eta_c$, se procederá a realizar las sustituciones correspondientes en las ecuaciones de movimiento de las funciones ${}^{(2)}h_T(\eta)$, ${}^{(2)}H_T(\eta)$, ${}^{(2)}h_L(\eta)$ y ${}^{(2)}H_L(\eta)$ y con esto conseguir escribirlas como ecuaciones dinámicas no acopladas para ${}^{(2)}h_T(\eta)$, ${}^{(2)}H_T(\eta)$, ${}^{(2)}h_L(\eta)$ y ${}^{(2)}H_L(\eta)$. Sin embargo, como se mostró anteriormente, hasta segundo orden ε no aparecen ecuaciones de restricción que puedan servir para imponer condiciones en $\eta = \eta_c$ a las funciones ${}^{(2)}h_T(\eta)$, ${}^{(2)}H_T(\eta)$, ${}^{(2)}h_L(\eta)$ y ${}^{(2)}H_L(\eta)$ y sus primeras derivadas con respecto a η . De esta forma hasta este orden en la perturbación sólo se podrá calcular las soluciones generales para las funciones ${}^{(2)}h_T(\eta)$, ${}^{(2)}H_T(\eta)$, ${}^{(2)}h_L(\eta)$ y ${}^{(2)}H_L(\eta)$.

No obstante, independientemente de que subcaso se este analizando, según (7.298), (7.300), (7.315), (7.316), (7.317), (7.318), (7.319) y (7.320), para finalizar el problema hasta segundo orden en la perturbación faltaría dar los valores iniciales ${}^{(1)}\phi_{\zeta_g,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(1)}\phi'_{\zeta_g,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(2)}\phi'_{\zeta_g,0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi'_{\xi,0}{}^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$.

A primer orden en ε surgen las ecuaciones (7.298) y (7.300), en la cual intervienen los datos iniciales: ${}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ y ${}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$, los cuales se relacionan con los datos ${}^{(1)}\phi_{\zeta_g,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c)$ y ${}^{(1)}\phi'_{\zeta_g,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c)$ a través de las relaciones ${}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi_{\zeta_g,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c)$ y ${}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi'_{\zeta_g,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c)$ impuestas por la condición de empalme (7.285) a primer orden en la perturbación. De (7.62) podemos ver que los valores ${}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c)$ y ${}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c)$ calculados en el estado pre-colapso $|\xi^{(I)}\rangle$, por homogeneidad e isotropia son idénticamente nulos: ${}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi'_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = 0$.

Por otra parte, usando la segunda ecuación (7.150) para encontrar ${}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)$, obtenemos; $L^{3/2}{}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta) = \delta^{(0)}v_{\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta)\xi_{(1),\vec{k}_0}{}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-\vec{k}_0}{}^{(II)*}(\eta)\xi_{(1),-\vec{k}_0}{}^{(II)*} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_0{}^{(II)+}(\eta)\xi_{(0),0}{}^{(II)} + (\delta^{(1)}v_0{}^{(II)-}(\eta))^*\xi_{(0),0}{}^{(II)*} \right]$, el cual combinado con las ecuaciones (7.82), (7.90) y (7.91), las cuales vienen dadas por;

$$\delta^{(0)}v_{\vec{k}}''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}'^{(II)} + (k^2 + a^{2(II)}m^2)\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)} = 0, \quad (7.321)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}v_0''^{(II)+} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(1)}v_0'^{(II)+} + (k_0^2 + a^{2(II)}m^2)\delta^{(1)}v_0^{(II)+} - 2\left(\delta^{(0)}v_0''^{(II)}\right. \\ \left.+ 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_0'^{(II)}\right)P_{(1)} + 2k_0^2P_{(1)}\delta^{(0)}v_0^{(II)} - 4P_{(1)}'\delta^{(0)}v_0'^{(II)} = 0, \end{aligned} \quad (7.322)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}v_0''^{(II)-} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(1)}v_0'^{(II)-} + (k_0^2 + a^{2(II)}m^2)\delta^{(1)}v_0^{(II)-} - 2\left(\delta^{(0)}v_0''^{(II)}\right. \\ \left.+ 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_0'^{(II)}\right)P_{(1)} + 2k_0^2P_{(1)}\delta^{(0)}v_0^{(II)} - 4P_{(1)}'\delta^{(0)}v_0'^{(II)} = 0. \end{aligned} \quad (7.323)$$

se encuentra que ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta)$ satisface la siguiente ecuación de movimiento;

$${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}''^{(II)}(\eta) + 2\mathcal{H}^{(II)}{}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}'^{(II)}(\eta) + (k_0^2 + a^{2(II)}m^2){}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta) = {}^{(1)}\mathcal{F}_{\vec{k}_0}(\eta), \quad (7.324)$$

en donde la función ${}^{(1)}\mathcal{F}_{\vec{k}_0}(\eta)$ se encuentra definida como;

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\mathcal{F}_{\vec{k}_0} = & \varepsilon\xi_{(0),0}^{(II)} \left[2\left(\delta^{(0)}v_0''^{(II)} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_0'^{(II)}\right)P_{(1)} - 2k_0^2\delta^{(0)}v_0^{(II)}P_{(1)} \right. \\ & \left. + 4\delta^{(0)}v_0'^{(II)}P_{(1)}' \right] + \varepsilon\xi_{(0),0}^{(II)*} \left[2\left(\delta^{(0)}v_0''^{(II)*} + 2\mathcal{H}^{(II)}\delta^{(0)}v_0'^{(II)*}\right)P_{(1)} \right. \\ & \left. - 2k_0^2\delta^{(0)}v_0^{(II)*}P_{(1)} + 4\delta^{(0)}v_0'^{(II)*}P_{(1)}' \right], \end{aligned} \quad (7.325)$$

Cabe notar, que a pesar de que la ecuación de movimiento (7.324) es una ecuación no homogénea, entonces suponiendo que los datos iniciales son: ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c) = 0$, de (7.298) y (7.300) se obtendría que $P_{(1)}(\eta_c) = P_{(1)}'(\eta_c) = 0$. Ahora, dado que para la **situación (1) subcaso (A)** como para la **situación (1) subcaso (B)** la ecuación de movimiento de $P_{(1)}(\eta)$ es homogénea, entonces bajo las condiciones iniciales señaladas aquí se obtiene para ambos **subcasos (A) y (B)** que $P_{(1)}(\eta) = 0$ implicando ${}^{(1)}\mathcal{F}_{\vec{k}_0}(\eta) = 0$, y entonces la solución de (7.324) sería ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta) = 0$. Para esta suposición se concluiría que hasta primer orden en la perturbación el espacio-tiempo de fondo descrito en la **SSC-II** es espacialmente homogéneo e ispotrópico.

Consecuentemente, como se pretende que $\mathcal{G}^{(II)}(\mathbf{x})$ represente una métrica que describa a un espacio-tiempo espacialmente inhomogéneo, se requiere que el estado post-colapso $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle$ sea tal que: ${}^{(1)}\phi_{\zeta_g, \vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) \neq 0$, ó ${}^{(1)}\phi_{\zeta_g, \vec{k}_0}'^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c) \neq 0$.

Para lo que resta, prescindiendo de la física que permita describir (**el colapso auto-inducido**) la transición del estado $|\xi^{(I)}\rangle$ al $|\zeta_{guia}^{(I)}\rangle$, asumiremos que el estado post-colapso es elegido estocásticamente, guiado por las incertidumbres cuánticas de los operadores $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta_c)$ tomadas en el estado pre-colapso $|\xi^{(I)}\rangle$.

Entonces al igual que en capítulos previos, asumiremos que el **colapso auto-inducido** es

en cierto modo análogo a una medición imprecisa de los operadores⁸ $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta)$, y dado que se tratan de operadores no hermíticos el primer paso será escribirlos como una combinación lineal de operadores hermíticos. Entonces partiendo de la definición,

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta) = v_{\vec{k}}^{(I)}(\eta)\hat{a}_{\vec{k}} + v_{-\vec{k}}^{(I)*}(\eta)\hat{a}_{-\vec{k}}^{\dagger} \quad (7.326)$$

definiendo⁹ $\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)R} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)} + \hat{a}_{-\vec{k}}^{(I)})$, $\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)I} \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)} - \hat{a}_{-\vec{k}}^{(I)})$ junto con;

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)R,I}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[v_{\vec{k}}^{(I)}(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)R,I} + v_{\vec{k}}^{(I)*}(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger(I)R,I} \right], \quad (7.328)$$

la ecuación (7.326) podrá ser escrita como,

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta) = \hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)R}(\eta) + i\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)I}(\eta). \quad (7.329)$$

De (7.328) vemos que los operadores $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)R,I}(\eta)$ son hermíticos ya que,

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}^{\dagger(I)R,I}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[v_{\vec{k}}^{(I)*}(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger(I)R,I} + v_{\vec{k}}^{(I)}(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)R,I} \right] \Rightarrow \hat{\phi}_{\vec{k}}^{\dagger(I)R,I}(\eta) = \hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)R,I}(\eta).$$

Nota: antes del colapso auto-inducido del estado cuántico correspondiente al modo \vec{k}_0 se tiene que: ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(I)R,I}(\eta) = \langle \xi^{(I)} | \hat{\phi}_{\vec{k}}^{\dagger(I)R,I}(\eta) | \xi^{(I)} \rangle = 0$, (valido para $\eta < \eta_c$).

Ahora, introduciremos la **hipótesis de colapso auto-inducido**, la cual establece que en la hipersuperficie de colapso $\eta = \eta_c$ el estado $|\xi^{(I)}\rangle$ se colapsa al estado $|\zeta_g^{(I)}\rangle$ siendo el estado el estado post-colapso $|\zeta_g^{(I)}\rangle$ tal que;

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\phi_{\zeta_g, \vec{k}_0}^{(I)R,I}(\eta_c) &\equiv \langle \zeta_g^{(I)} | \hat{\phi}_{\vec{k}_0}^{(I)R,I}(\eta_c) | \zeta_g^{(I)} \rangle = x_{\vec{k}_0}^{R,I} \sqrt{\langle \xi^{(I)} | [\Delta \hat{\phi}_{\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c)]^2 | \xi^{(I)} \rangle} \\ &= x_{\vec{k}_0}^{R,I} \sqrt{\frac{1}{2}} |v_{\vec{k}_0}(\eta_c)|. \end{aligned} \quad (7.330)$$

Entonces conociendo ${}^{(1)}\phi_{\zeta_g, \vec{k}_0}^{(I)R,I}(\eta_c)$, el número ${}^{(1)}\phi_{\zeta_g, \vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ puede ser encontrado con ayuda de (7.329), de la siguiente forma;

$${}^{(1)}\phi_{\zeta_g, \vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi_{\zeta_g, \vec{k}_0}^{(I)R}(\eta_c) + i {}^{(1)}\phi_{\zeta_g, \vec{k}_0}^{(I)I}(\eta_c) = (x_{\vec{k}_0}^R + ix_{\vec{k}_0}^I) \sqrt{\frac{1}{2}} |v_{\vec{k}_0}(\eta_c)|, \quad (7.331)$$

mientras que ${}^{(1)}\phi'_{\zeta_g, \vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ será determinado a través de la primera ecuación (7.178) junto con (7.298), esto significa solucionar la ecuación;

⁸Partiendo de los operadores $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta, \vec{x})$, $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)\dagger}(\eta, \vec{x})$ definidos en (7.19), se define $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta)$, $\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)\dagger}(\eta)$ como;

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)}(\eta)}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)\dagger}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\hat{\phi}_{\vec{k}}^{(I)\dagger}(\eta)}{L^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

⁹Las relaciones de conmutación no nulas entre los operadores $\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)R}$ y $\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)I}$, son;

$$[\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)R}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{(I)R\dagger}] = (\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} + \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}), \quad [\hat{a}_{\vec{k}}^{(I)I}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{(I)I\dagger}] = (\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} - \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}), \quad (7.327)$$

distintas a las relaciones de conmutación estándar.

$$P_{(1)}({}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c), {}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)) = 0.$$

De lo anterior finalmente se obtiene ${}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)$ como función de ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ dado por (7.331). Con esto completamos los datos iniciales requeridos para la construcción hasta primer orden en la perturbación de la **SSC-II** y su empalme con la **SSC-I**.

A segundo orden en ε se presentan las ecuaciones (7.217), (7.222), (7.317), (7.318), (7.319) y (7.320), en las cuales intervienen ${}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 0}^{(I)}(\eta_c)$, ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g, 0}{}^{(I)}(\eta_c)$, ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi'_{\zeta_g, 2\vec{k}_0}{}^{(I)}(\eta_c)$.

Los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 0}^{(I)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi'_{\zeta_g, 0}{}^{(I)}(\eta_c)$, pueden ser expresados con ayuda de la primera relación presente en (7.288). Se trata de la ecuación,

$$L^{3/2}\phi_{\zeta_g, 0}^{(I)}(\eta) = v_0^{(I)}(\eta)\zeta_0^{(I)} + c.c.,$$

la cual dado que $\zeta_0^{(I)} = \zeta_{(0), 0}^{(I)} + \varepsilon^2\zeta_{(2), 0}^{(I)} + \varepsilon^4\zeta_{(4), 0}^{(I)} + \dots$ se concluye que;

$$L^{3/2}{}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 0}^{(I)}(\eta) = \left(v_0^{(I)}(\eta)\zeta_{(2), 0}^{(I)} + c.c.\right), \quad (7.332)$$

$$L^{3/2}{}^{(2)}\phi'_{\zeta_g, 0}{}^{(I)}(\eta) = \left(v_0'^{(I)}(\eta)\zeta_{(2), 0}^{(I)} + c.c.\right). \quad (7.333)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la condición ${}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 0}^{(I)}(\eta_c)$ derivada de la condición de junta vemos que ${}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c)$ quedará determinado una vez que se haya determinado ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 0}^{(I)}(\eta_c)$. Posteriormente trabajando con (7.217) evaluada en $\eta = \eta_c$, teniendo en cuenta que $a_{(2)}(\eta_c) = 0$, podemos determinar $a'_{(2)}(\eta_c)$ a partir de ${}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c)$, esto es;

$$a'_{(2)}(\eta_c) = 2\pi G^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta_c){}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c). \quad (7.334)$$

Mientras que sustituyendo en (7.222) evaluada en $\eta = \eta_c$, podemos encontrar ${}^{(2)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta_c)$

$$\begin{aligned} & -12\pi G\mathcal{H}^{(II)}(\eta_c){}^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta_c){}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c) + 6|P'_{(1)}(\eta_c)|^2 = 4\pi G \left\{ {}^{(0)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta_c){}^{(2)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta_c) \right. \\ & + 2|{}^{(1)}\phi'_{\xi, \vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)|^2 + a^{2(II)}(\eta_c)m^2 \left({}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}{}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)} + 2|{}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)|^2 \right) \\ & \left. + 2|\vec{k}_0|^2 |{}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.335)$$

Ahora trabajaremos con la primera ecuación de (7.150) y su derivada con respecto al tiempo conforme, ambas ecuaciones evaluadas en $\eta = \eta_c$. De lo anterior se encuentra;

$$\begin{aligned} L^{3/2}{}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c) & = \left\{ v_0^{(II)}(\eta)\xi_{(2), 0}^{(II)} + \varepsilon^2\theta_0^{(II)}(\eta_c)\xi_{(2), 0}^{(II)} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_{\vec{k}_0}^{(II)-}(\eta_c)\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta^{(1)}v_{-\vec{k}_0}^{(II)+}(\eta_c)\xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)} \right] \right\} + c.c., \end{aligned} \quad (7.336)$$

$$\begin{aligned} L^{3/2}{}^{(2)}\phi'_{\xi, 0}{}^{(II)}(\eta_c) & = \left\{ v_0'^{(II)}(\eta)\xi_{(2), 0}^{(II)} + \varepsilon^2\theta_0'^{(II)}(\eta_c)\xi_{(2), 0}^{(II)} + \varepsilon \left[\delta^{(1)}v_{\vec{k}_0}^{\prime(II)-}(\eta_c)\xi_{(1), \vec{k}_0}^{(II)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta^{(1)}v_{-\vec{k}_0}^{\prime(II)+}(\eta_c)\xi_{(1), -\vec{k}_0}^{(II)} \right] \right\} + c.c. \end{aligned} \quad (7.337)$$

Las condiciones en $\eta = \eta_c$ dadas por (7.100), (7.132) \equiv (7.139), combinándolas con las condiciones $P_{(1)}(\eta_c) = 0$ de la ecuación (7.298), y $a_{(2)}(\eta_c) = 0$ de la ecuación (7.314), conducen a: $\delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c) = \delta^{(1)}v_{\vec{k}}^{(II)\pm}(\eta_c) = \theta_0^{(II)}(\eta_c) = \theta_0^{\prime(II)}(\eta_c) = 0$, dicho resultado permiten reducir las condiciones (7.336) y (7.337) a las expresiones;

$$L^{3/2} {}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta_c) = v_0^{(II)}(\eta)\xi_{(2),0}^{(II)} + c.c., \quad (7.338)$$

$$L^{3/2} {}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}(\eta_c) = v_0^{\prime(II)}(\eta)\xi_{(2),0}^{(II)} + c.c. \quad (7.339)$$

Cualquiera de estas dos condiciones (7.338) ó (7.339) puede ser usada como ecuación algebraica de donde encontraremos $\xi_{(2),0}^{(II)}$ como función del dato inicial ${}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta_c)$ en caso de usar la ecuación (7.338), o como función de ${}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{\prime(II)}(\eta_c)$ en caso de usar la ecuación (7.339). Cabe mencionar que por continuidad de las funciones: ${}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta_c)$ y $v_0^{(II)}(\eta)$, las ecuaciones (7.338) y (7.339) darán resultados compatibles para $\xi_{(2),0}^{(II)}$. Entonces, de manera análoga como se procedió a primer orden en la perturbación asumiremos que,

$${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,0}^{(I)R,I}(\eta_c) \equiv {}^{(2)}\left(\langle \zeta_g^{(I)} | \hat{\phi}_0^{(I)R,I}(\eta) | \zeta_g^{(I)} \rangle\right) = x_0^{R,I} \sqrt{\langle 0^{(I)} | [\Delta \hat{\phi}_0^{(I)}(\eta_c)]^2 | 0^{(I)} \rangle}. \quad (7.340)$$

Por lo cual la condición inicial ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\xi,0}^{(II)}(\eta_c)$ vendrá dada por;

$${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,0}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\zeta_g,0}^{(I)R}(\eta_c) + i {}^{(2)}\phi_{\zeta_g,0}^{(I)I}(\eta_c) = (x_0^R + ix_0^I) \sqrt{\langle 0^{(I)} | [\Delta \hat{\phi}_0^{(I)}(\eta_c)]^2 | 0^{(I)} \rangle}. \quad (7.341)$$

Ahora, únicamente faltaría por determinar los datos iniciales ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c)$ y ${}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{\prime(II)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{\prime(I)}(\eta_c)$, los cuales intervienen en (7.320).

Según la tercera ecuación (7.288), la cantidad ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta)$ viene dada por;

$$L^{3/2} {}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta) = v_{2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta)\zeta_{(2),2\vec{k}_0}^{(I)} + v_{-2\vec{k}_0}^{(I)*}(\eta)\zeta_{(2),-2\vec{k}_0}^{(I)*}$$

Dicha cantidad quedará determinada una vez sean dados los números $\zeta_{(2),2\vec{k}_0}^{(I)}$ y $\zeta_{(2),-2\vec{k}_0}^{(I)*}$, los cuales surgen a segundo orden en ε .

Por otro lado, según los resultados ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$, y ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{\prime(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{\prime(II)}(\eta_c)$ derivados de la condición de juntura a orden ε^2 , se debe calcular la contribución a segundo orden de la tercera ecuación (7.150) evaluada en $\eta = \eta_c$, e igual para su primera derivada con respecto al tiempo conforme, estos números son respectivamente: Para la **situación (1) subcaso (A)**,

$$\begin{aligned} L^{3/2} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) &= \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-2\vec{k}_0}^{(II)*}(\eta_c)\xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*} \\ &+ \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}v_0^{(II)+}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)} + (\delta^{(2)}v_0^{(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0),0}^{(II)*} \right] \end{aligned} \quad (7.342)$$

$$\begin{aligned} L^{3/2} {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{\prime(II)}(\eta_c) &= \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0}^{\prime(II)}(\eta_c)\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-2\vec{k}_0}^{\prime(II)*}(\eta_c)\xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*} \\ &+ \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}v_0^{\prime(II)+}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)} + (\delta^{(2)}v_0^{\prime(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0),0}^{(II)*} \right]. \end{aligned} \quad (7.343)$$

Mientras que para la **situación (1) subcaso (B)**,

$$L^{3/2(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) = \delta^{(0)}v_{2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v_{-2\vec{k}_0}^{(II)*}(\eta_c)\xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}\tilde{v}_0^{(II)+}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)} + (\delta^{(2)}\tilde{v}_0^{(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0),0}^{(II)*} \right] \quad (7.344)$$

$$L^{3/2(2)}\phi'_{\xi,2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c) = \delta^{(0)}v'_{2\vec{k}_0}{}^{(II)}(\eta_c)\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)} + \delta^{(0)}v'_{-2\vec{k}_0}{}^{(II)*}(\eta_c)\xi_{(2),-2\vec{k}_0}^{(II)*} + \varepsilon^2 \left[\delta^{(2)}\tilde{v}'_0{}^{(II)+}(\eta_c)\xi_{(0),0}^{(II)} + (\delta^{(2)}\tilde{v}'_0{}^{(II)-}(\eta_c))^* \xi_{(0),0}^{(II)*} \right]. \quad (7.345)$$

Vemos que acá intervienen las contribuciones a segundo orden $\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)}$, $\xi_{(2),2\vec{k}_0}^{(II)*}$, $\{\delta^{(2)}v_0^{(II)+}(\eta_c)$ y $\delta^{(2)}v_0^{(II)-}(\eta_c)$ para la **situación (1) subcaso (A) }, mientras que $\{\delta^{(2)}\tilde{v}_0^{(II)+}(\eta_c)$ y $\delta^{(2)}\tilde{v}_0^{(II)-}(\eta_c)$ para la **situación (1) subcaso (B) }.****

Los números $\delta^{(2)}v_0^{(II)+}(\eta_c)$ y $\delta^{(2)}v_0^{(II)-}(\eta_c)$ se consiguen evaluando en $\eta = \eta_c$ (7.133) para la **situación (1) subcaso (A)**, mientras que para la **situación (1) subcaso (B)** evaluando (7.140), y para ambos casos teniendo en cuenta las condiciones (7.298) y (7.314) se obtiene;

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) &= \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)+}(\eta_c) = \frac{3}{2}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)P_{(2)}(\eta_c), \\ \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) &= \delta^{(2)}\tilde{v}_{\vec{k}}^{(II)-}(\eta_c) = \frac{3}{2}\delta^{(0)}v_{\vec{k}}^{(II)}(\eta_c)P_{(2)}^*(\eta_c), \\ \delta^{(2)}v_{\vec{k}}^{\prime(II)\pm}(\eta_c) &= \delta^{(2)}\tilde{v}'_{\vec{k}}{}^{(II)\pm}(\eta_c) = 0. \end{aligned} \quad (7.346)$$

En este punto debemos separar **situación (1) subcaso (A)**, de la **situación (1) subcaso (B)**. Entonces para la **situación (1) subcaso (A)** según (7.317) se tiene que $P_{(2)}(\eta_c) = 2\pi G \left({}^{(1)}\phi_{\xi,\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c) \right)^2$, mientras que para la **situación (1) subcaso (B)** de (7.319) se tiene, $P_{(2)}(\eta_c) = -\frac{B(\eta_c)}{A(\eta_c)}$. Por lo tanto se concluye que para ambas situaciones los números (7.346) están completamente determinados.

Continuando con la construcción hasta segundo orden en la perturbación faltaría por especificar los números $\zeta_{(2),2\vec{k}_0}^{(I)}$ y $\zeta_{(2),-2\vec{k}_0}^{(I)*}$ los cuales determinan el estado post-colapso $|\zeta^{(I)}\rangle$ hasta segundo orden en ε .

Entonces, de manera análoga como se procedió a primer orden en la perturbación, asumiremos que;

$${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)R,I}(\eta_c) \equiv {}^{(2)}\left(\langle \zeta_g^{(I)} | \hat{\phi}_{2\vec{k}_0}^{(I)R,I}(\eta) | \zeta_g^{(I)} \rangle \right) = x_{2\vec{k}_0}^{R,I} \sqrt{\langle 0^{(I)} | [\Delta \hat{\phi}_{2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c)]^2 | 0^{(I)} \rangle} = x_{2\vec{k}_0}^{R,I} \sqrt{\frac{1}{2}} |v_{2\vec{k}_0}(\eta_c)| \quad (7.347)$$

La diferencia con respecto a (7.330) es que (7.347) contribuye a partir del segundo orden en la perturbación.

Entonces, una vez conocido ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)R,I}(\eta_c)$, según (7.329), el número ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g,2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\xi,2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$ vendrá dado por;

$${}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c) = {}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 2\vec{k}_0}^{(I)R}(\eta_c) + i {}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 2\vec{k}_0}^{(I)I}(\eta_c) = (x_{2\vec{k}_0}^R + ix_{2\vec{k}_0}^I) \sqrt{\frac{1}{2}} |v_{2\vec{k}_0}(\eta_c)|. \quad (7.348)$$

Por último, solucionando el sistema (7.257)-(7.317) cuando se trate de la **situación (1) subcaso (A)**, o el sistema (7.276)-(7.319) cuando se trate de la **situación (1) subcaso (B)**, entonces en ambos casos respectivamente podemos despejar ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c)$, en función de ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$, lo cual con ayuda de la condición de junta (7.311) y (7.315), puede ser traducido a ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 2\vec{k}_0}'^{(I)}(\eta_c)$ como función de ${}^{(2)}\phi_{\zeta_g, 2\vec{k}_0}^{(I)}(\eta_c)$.

Entonces habiendo dado los datos, ${}^{(0)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(0)}\phi_{\xi, 0}'^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(1)}\phi_{\xi, \vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(2)}\phi_{\xi, 0}^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(2)}\phi_{\xi, 0}'^{(II)}(\eta_c)$, ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}^{(II)}(\eta_c)$, y ${}^{(2)}\phi_{\xi, 2\vec{k}_0}'^{(II)}(\eta_c)$, junto con las condiciones (7.291), (7.295), (7.299), (7.311) y (7.315), completamos los datos iniciales requeridos para la construcción hasta segundo orden en ε de la **SSC-II** y su junta o empalme con la **SSC-I**.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de tesis se realizó un estudio sobre la emergencia de las inhomogeneidades cosmológicas primordiales, las cuales se cree dieron origen a la estructura cosmológica que observamos hoy día.

La explicación estándar es que las fluctuaciones cuánticas del inflatón siguiendo la evolución del sistema Einstein-Inflatón cruzan el radio de Hubble y en ese momento injustificadamente el investigador iguala las incertidumbres cuánticas con fluctuaciones estadísticas, siguiendo las ideas de Decoherencia. En la literatura esto se conoce como la transición cuántico-clásica, y es un problema que está relacionado con el **problema de la medición en mecánica cuántica** también conocido como problema de la **macro-objetificación**.

A diferencia del enfoque basado en Decoherencia, en este trabajo de tesis se estudiaron como implementar en el problema cosmológico algunas modificaciones o alternativas a la mecánica cuántica estándar conocidas como **modelos de colapso objetivo**, las cuales **eluden** el problema de la medición en mecánica cuántica. En general encontramos que gracias a la reducción dinámica de la función de onda impuesta por los modelos de colapso objetivo el estado cuántico inicial el cual parte de ser perfectamente homogéneo e isotrópico (H&I) transita a un estado cuántico inhomogéneo y con esto se generan en el campo gravitatorio las inhomogeneidades primordiales que veremos reflejada en el CMB, esto se logra ya que el colapso objetivo (o reducción dinámica de la función de onda) rompe la simetría del estado vacío.

Expresado de manera distinta, en el análisis estándar se intenta justificar la identificación de las correlaciones cuánticas de dos puntos con correlaciones estadísticas clásicas, sin romper la unitariedad de la evolución del sistema Einstein-Inflatón. La evolución unitaria en este caso preserva las simetrías originales del estado de vacío (homogeneidad e isotropía), lo cual permite que uno se pregunte entonces ¿Cómo se terminó en un estado inhomogéneo y anisotrópico? Es aquí donde los modelos de colapso objetivo muestran sus ventajas sobre el enfoque tradicional: no sólo intenta explicar la aparición de una estadística clásica, sino que además explica el origen de la inhomogeneidad (el estado post-colapso no tiene por qué ser homogéneo e isotrópico).

Trabajo futuro

- **Implementar** al problema cosmológico una teoría de colapso objetivo relativista como sería el caso de **Relativistic state reduction dynamics** de **Daniel Bedingham**, referencia [33].
- **Implementar** el modelo CSL de Pearle en la “alternativa a la inflación” propuesta por S. Hollands y R. Wald, con el objeto de generar y explicar la transición del estado cuántico inicial del universo (H&I) al estado cuántico final del universo inhomogéneo.
- Dando continuidad al tratamiento desarrollado en el **capítulo 7** hasta orden ε^2 , resultará interesante **realizar** la construcción correspondiente hasta orden ε^n . Esto implica construir, orden a orden en ε , una solución exacta de las ecuaciones semi-clásicas de Einstein, la cual usaremos para definir la **SSC-II** que modela un universo inhomogéneo.

Apéndice A

Convenciones y unidades

Como sucede en prácticamente todas las ramas de la física, las unidades y convenciones se establecen de acuerdo al problema que se va analizar. En este Apéndice mencionaremos las convenciones y unidades que emplearemos en esta tesis. La signatura que emplearemos para la métrica, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, será $(- + + +)$. Para el tensor de Riemann utilizaremos la convención de signos de Wald, esto es, el tensor de Riemann $R_{bcd}{}^a$ se define de manera libre de coordenadas mediante;

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)V^c = -R_{abd}{}^c V^d \quad (\text{A.1})$$

en donde ∇_a es la derivada covariante compatible con la métrica ds^2 , esto significa; $\nabla_a g_{bc} = 0$, mientras que $V = V^c \partial_c$ es un vector definido en el espacio tangente T_p a un punto p en la variedad \mathcal{M} .

El punto (ó puntos) sobre las funciones $\dot{f}(t)$ representa derivada de $f(t)$ respecto al tiempo cósmico t , mientras que la prima (ó primas) sobre funciones $f'(\eta)$ representa derivada respecto al tiempo conforme η . Respecto a las unidades, emplearemos las llamadas unidades naturales, las cuales consisten en tomar $c = k_B = \hbar = 1$, con k_B la constante de Boltzmann, pero mantendremos la constante gravitacional G . Por tanto, todas las dimensiones pueden expresarse en unidades de energía. La unidad de energía que adoptaremos será el $GeV = 109eV$, así;

$$[\text{Energía}] = [\text{Masa}] = [\text{Temperatura}] = [\text{Longitud}]^{-1} = [\text{Tiempo}]^{-1} \quad (\text{A.2})$$

La constante gravitacional G en unidades naturales es $G = 6.7186 \times 10^{-39} GeV^{-2}$. En términos de la Masa de Planck reducida M_P , la constante gravitacional viene dada por $G = 1/(8\pi M_P^2)$, donde $M_P = 2.436 \times 10^{18} GeV$.

A continuación enlistamos algunos factores de conversión que serán de gran utilidad

$$\begin{aligned} 1GeV &= 1.60 \times 10^{-3} erg \text{ (Energía)} \\ 1GeV &= 1.16 \times 10^{13} \text{ }^\circ K \text{ (Temperatura)} \\ 1GeV &= 1.78 \times 10^{-24} g \text{ (Masa)} \\ 1GeV^{-1} &= 1.97 \times 10^{-14} cm \text{ (Longitud)} \\ 1GeV^{-1} &= 6.58 \times 10^{-25} s \text{ (Tiempo)} \end{aligned}$$

En ocasiones, adoptaremos unidades empleadas en astronomía tales como el parsec. Un parsec se define como la distancia a la que una unidad astronómica¹ subtende un ángulo de un segundo de arco. En otras palabras, una estrella dista un parsec si su paralaje es igual a 1 segundo de arco; $1 pc = 3.26$ años luz. Las distancias típicas entre galaxias son del orden de megaparsecs $1 Mpc = 3.085 \times 10^{22} m$.

¹1 *u.a.* = distancia media entre la Tierra y el Sol.

Apéndice B

Escala temporal

En este apéndice encontraremos los valores numéricos para las diferentes cantidades que describen la evolución del universo en cada una de las épocas cosmológicas relevantes¹. Hemos considerado tres etapas principales dentro de la historia del universo: 1) época inflacionaria 2) época dominada por radiación y 3) época dominada por materia. El factor de escala se obtiene de resolver las ecuaciones de Friedmann y, en coordenadas de tiempo conforme, toma la forma;

$$\begin{aligned} a(\eta) &= -\frac{1}{(1-\epsilon)H_I\eta}, \text{ durante el periodo inflacionario, } -\infty < \eta \leq \eta_r \\ a(\eta) &= C_{rad} \cdot (\eta - \eta_r) + a(\eta_r), \text{ durante el dominio de radiación, } \eta_r < \eta \leq \eta_{eq} \\ a(\eta) &= \left[\frac{1}{2}C_{mat} \cdot (\eta - \eta_{eq}) + \sqrt{a(\eta_{eq})} \right]^2, \text{ durante el dominio de materia, } \eta_{eq} < \eta. \end{aligned}$$

donde $\epsilon \ll 1$ y las constantes $a(\eta_r)$, η_r , $a(\eta_{eq})$ y η_{eq} se obtienen imponiendo continuidad en el factor de escala. Nuestra normalización del factor de escala será;

$$a(\eta_0) = 1 \tag{B.1}$$

siendo η_0 el valor presente del tiempo conforme. Asumiendo que la ecuación $Ta(\eta) = const$, es válida durante la inflación, podemos calcular el factor de escala al final del régimen inflacionario $a(\eta_r) = a_r$,

$$a(\eta_r) = \frac{T_0}{T_r} \tag{B.2}$$

De los datos observacionales sabemos que $T_0 = 2.4 \times 10^{-13} GeV$; por lo que asumiendo $T_r \approx 10^{15} GeV$, encontramos que $a_r \approx 2.4 \times 10^{-28}$. Si usamos la expresión para el factor de escala durante inflación podemos encontrar $\eta_r \approx -\frac{1}{a_r H_I}$, donde H_I es el valor del factor de Hubble durante la inflación. Dicho valor se supone esencialmente constante, su valor puede calcularse de la ecuación de Friedmann (en la aproximación slow-roll),

$$H_I \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi). \tag{B.3}$$

Suponiendo que la escala energética al final del periodo inflacionario es T_P entonces $V(\phi) \approx T_P^4$. De esta manera $H_I \approx 2.370 \times 10^{11} GeV = 3.6 \times 10^{49} Mpc^{-1}$. Por tanto $\eta_r = -1.157 \times$

¹Trabajaremos en coordenadas de tiempo conforme.

$10^{-20} Mpc$. Asumiendo que el régimen inflacionario dura aproximadamente 80 *e-folds* (60 es el mínimo para resolver los problemas de planitud y horizonte) es posible calcular el valor numérico del factor de escala al inicio de inflación $a(\eta_{ii}) = a_{ii}$,

$$\frac{a_r}{a_{ii}} \approx e^{80} \Rightarrow a_{ii} = 4.3 \times 10^{-63}, \quad (\text{B.4})$$

mientras que η_{ii} ,

$$\eta_{ii} \approx -\frac{1}{a_{ii} H_I} = -6.4 \times 10^{12} Mpc. \quad (\text{B.5})$$

Las constantes C_{rad} y C_{mat} están satisfacen las relaciones;

$$C_{rad} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad}(\eta) a^4(\eta), \quad C_{mat} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{mat}(\eta) a^3(\eta) \quad (\text{B.6})$$

donde ρ_{rad} y ρ_{mat} denotan las densidades de energía de radiación y materia respectivamente. Una vez definida la ecuación de estado, la ecuación de continuidad para ρ implica la conservación de $\rho_{rad}(\eta) a^4(\eta)$ y $\rho_{mat}(\eta) a^3(\eta)$. Debido a que C_{rad} y C_{mat} son constantes, es posible expresarlas en términos de los parámetros cosmológicos actuales (recordemos que $a_0 = 1$), esto es;

$$C_{rad} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad}(\eta_0) = H^2(\eta_0) \Omega_{rad}(\eta_0), \quad C_{mat} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{mat}(\eta_0) = H^2(\eta_0) \Omega_{mat}(\eta_0), \quad (\text{B.7})$$

donde H_0 es el factor de Hubble actual; $\rho_{rad}(\eta_0)$ y $\rho_{mat}(\eta_0)$ son los parámetros de densidad actuales tanto de radiación y materia respectivamente. Cuando el factor de escala toma el valor a_{eq} se cumple que $\rho_{rad}(\eta_{eq}) = \rho_{mat}(\eta_{eq})$, por lo que para el cociente C_{rad}^2/C_{mat}^2 encontramos;

$$\frac{C_{rad}^2}{C_{mat}^2} = \frac{\frac{8\pi G}{3} \rho_{mat}(\eta_{eq}) a^3(\eta_{eq})}{\frac{8\pi G}{3} \rho_{mat}(\eta_{eq}) a^3(\eta_{eq})} = a_{eq}, \quad (\text{B.8})$$

las ecuaciones (B.7) y (B.8) implican que;

$$\frac{C_{rad}^2}{C_{mat}^2} = \frac{\frac{8\pi G}{3} \rho_{rad}(\eta_{eq}) a^4(\eta_{eq})}{\frac{8\pi G}{3} \rho_{mat}(\eta_{eq}) a^3(\eta_{eq})} = a_{eq} = \frac{\Omega_{rad}(\eta_{eq})}{\Omega_{mat}(\eta_{eq})} = 1.9296 \times 10^{-4}. \quad (\text{B.9})$$

Por otro lado, según las observaciones $\Omega_{rad}(\eta_0) = 2.47 \times 10^{-5} h^2$ y $\Omega_{mat}(\eta_0) = 0.128 h^2$, con los cuales se encuentra que $C_{rad} = 1.61 \times 10^{-6} Mpc^{-1}$ y $C_{mat} = 1.1 \times 10^{-5} Mpc^{-1}$. Imponiendo continuidad en el factor de escala, se encuentra;

$$\eta_{eq} = \frac{a_{eq} - a_r}{C_{rad}} + \eta_r = 119.85 Mpc. \quad (\text{B.10})$$

Bibliography

Bibliografía

- [1] R. Penrose, On gravity's role in quantum state reduction, *Gen. Relativ. Gravit.* 28, 581 (1996)
- [2] R. M. Wald, Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics, 1992 (University of Chicago Press, Chicago, USA).
- [3] A. Perez, H. Sahlmann, D. Sudarsky, On the quantum origin of the seeds of cosmic structure, *Class. Quantum Grav.* 23, 2317 (2006)
- [4] Pedro Cañate, Philip Pearle, and Daniel Sudarsky. Continuous spontaneous localization wave function collapse model as a mechanism for the emergence of cosmological asymmetries in inflation, *Phys. Rev. D* 87, 104024.
- [5] Gabriel R. Bengochea, Pedro Cañate, and Daniel Sudarsky. Inhomogeneities from quantum collapse scheme without inflation, *Phys. Lett. B* 743 (2015) 484.
- [6] A. de Unánue, D. Sudarsky, Phenomenological analysis of quantum collapse as source of the seeds of cosmic structure, *Phys. Rev. D* 16, 043510 (2008)
- [7] G. León and D. Sudarsky, *Classical and Quantum Gravity* 27, 225017 (2010), 1003.5950.
- [8] Alberto Diez-Tejedor, Daniel Sudarsky, Towards a formal description of the collapse approach to the inflationary origin of the seeds of cosmic structure, *JCAP* 07(2012)045.
- [9] P. Pearle, *Phys. Rev. A* 39, 2277, (1989);
- [10] P. Pearle, How Stands Collapse I. arXiv:quant-ph/0611211, (2006).
- [11] P. Pearle, How Stands Collapse II. arXiv:quant-ph/0611212, (2007).
- [12] G. C. Ghirardi, P. Pearle and A. Rimini, *Phys. Rev. A* 42, 78 (1990)
- [13] The Seeds Of Cosmic Structure as a Door To New Physics, proceedings of the conference Recent Developments in Gravity NEB XII, Napflio Greece, June 2006. *J. Phys. Conf. Ser.* **68**, 012029, (2007). e-Print: gr-qc/0612005; ".A path towards quantum gravity phenomenology", proceedings of the conference ERE 2006, Palmas de Mallorca España, Sep 2006. *J.Phys.Conf.Ser.* **66**, 012037, (2007); A signature of Quantum Gravity at the Source of the Seeds Of Cosmic Structure, proceedings of the conference DICE 2006, Piombino, Italy, Sep 2006. *J. Phys. Conf. Ser.* **67**, 012054, (2007) e-Print: gr-qc/0701071; The Seeds Of Cosmic Structure as a door to Quantum Gravity Phenomena, proceedings of the conference From Quantum to emergent Gravity:Theory and Phenomenology, SISSA, Trieste, Italy, June 2007. e-Print: gr-qc/0712.2795.

- [14] C. Kiefer & D. Polarski, “*Why do cosmological perturbations look classical to us?*”, [arXiv: astro-ph/0810.0087].
- [15] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky. Reheating after inflation. *Phys. Rev. Lett.*, 73(24):3195, 1994.
- [16] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky. Towards the theory of reheating after inflation. *Phys. Rev. D*, 56:3258, 1997.
- [17] D. Sudarsky, *Shortcomings in the Understanding of Why Cosmological Perturbations Look Classical*, [arXiv: gr-qc/0906.0315v1].
- [18] S. Weinberg, *Cosmology*, (Oxford University Press, 2008).
- [19] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, (Cambridge University Press, 2005).
- [20] V. Mukhanov, H. Feldman, R. Brandenberger. *Theory of cosmological perturbations*, PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters) 215, Nos.5 & 6 (1992) 203-333. North-Holland.
- [21] Stefan Hollands, Robert M. Wald, *An Alternative to Inflation* *Gen.Rel.Grav.* 34 (2002) 2043-2055
- [22] R. Penrose, *The Emperor’s New Mind* (Oxford University Press 1989).
- [23] C. Callender, *Physics meets philosophy at the Planck Scale*, pages 290-304 (Cambridge University Press 2001).
- [24] Feldman, H. A.; Kamenshchik, A. Y. y Zelnikov ElÑnikov, A. I.: Decoherence effects of gravitons in quantum cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 1992, 9, pp. L1–L6. doi: 10.1088/0264-9381/9/1/001.
- [25] James M. Bardeen, Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, 22:8, 1980.
- [26] Padmanabhan, T. 1993, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [27] NOLTA, M. R.; DUNKLEY, J.; HILL, R. S.; HINSHAW, G.; KOMATSU, E.; LARSON, D.; PAGE, L.; SPERGEL, D. N.; BENNETT, C. L.; GOLD, B.; JAROSIK, N.; ODEGARD, N.; WEILAND, J. L.; WOLLACK, E.; HALPERN, M.; KOGUT, A.; LIMON, M.; MEYER, S. S.; TUCKER, G. S.; y WRIGHT, E. L.: Five-year wilkinson microwave anisotropy probe observations: angular power spectra. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2009, 180(2), pp. 296–305. <http://stacks.iop.org/0067-0049/180/296>
- [28] Stephen L. Adler, Derivation of the Lindblad generator structure by use of the *Itô* stochastic calculus, *Phys. Lett. A* 265, 58 (2000).
- [29] Stephen L. Adler, Corrigendum to: Derivation of the Lindblad generator structure by use of the *Itô* stochastic calculus, *Phys. Lett. A* 267, 212 (2000).
- [30] *Göran Lindblad*, On the Generators of Quantum dynamical semigroups, *Commun. Math. Phys.* 48, 119 (1976).

- [31] Michael Berman and Ronnie Kosloff, Time-dependent solution of the Liouville-von Neumann equation: non-dissipative evolution. *Computer Physics Communications* 63 (1991) 1—20.
- [32] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1955).
- [33] D. Bedingham: Relativistic state reduction dynamics. *Found. Phys.*41 : 686–704 (2011). arXiv:1003.2774
- [34] V. Acquaviva, N. Bartolo, S. Matarrese, A. Riotto, Second-Order Cosmological Perturbations from Inflation, *Nucl.Phys. B*667 (2003) 119-148.
- [35] Kouji Nakamura, Second-order Gauge-invariant Cosmological Perturbation Theory: Current Status, *Advances in Astronomy* vol. 2010 (2010), 576273.
- [36] Kouji Nakamura, Consistency of Equations for the Single Scalar Field Case in Second-order Gauge-invariant Cosmological Perturbation Theory.
- [37] A. De Unánue. The quantum origins of the cosmological asymmetry. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2010.
- [38] G. Leon. NOMBRE TESIS. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2012.
- [39] N. Deruelle and V. Mukhanov. On matching conditions for cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, 52:5549, 1995.
- [40] Gabriel Leon, Daniel Sudarsky. Origin of Structure: Primordial Bispectrum without non-Gaussianities. arXiv:1312.7590.
- [41] Claus Kiefer, D. Polarski. Why do cosmological perturbations look classical to us? e-Print: 0810.0087 [astro-ph].
- [42] Kiefer, Claus: Origin of classical structure from inflation. *Nucl.Phys.Proc.Suppl*, 2000, 88, pp. 255–258.
- [43] Kiefer, Claus y Joos, Erich: Decoherence: Concepts and Examples, 1998. arXiv.org:quant-ph/9803052
- [44] Kiefer, Claus; Lesgourgues, Julien; Polarski, David y Starobinsky, Alexei A.: The Coherence of Primordial Fluctuations Produced During Inflation, 1998. arXiv.org:gr-qc/9806066
- [45] Susana Landau, Gabriel León, Daniel Sudarsky. Quantum Origin of the Primordial Fluctuation Spectrum and its Statistics. *Phys.Rev. D*88 (2013) 2, 023526
- [46] Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood. *Astron.Astrophys.* 571 (2014) A15
- [47] Gabriel León, Adolfo De Unánue, Daniel Sudarsky. Multiple quantum collapse of the inflaton field and its implications on the birth of cosmic structure. *Class. Quantum Grav.* 28 155010, 2011.

-
- [48] Alberto Diez, Gabriel León, Daniel Sudarsky. The collapse of the wave function in the joint metric-matter quantization for inflation. *General Relativity and Gravitation*, 44 (2012) 2965-2988.
- [49] Daniel Sudarsky. Shortcomings in the Understanding of Why Cosmological Perturbations Look Classical. *Int.J.Mod.Phys.D20*:509-552, 2011.
- [50] Liddle, Andrew R. y Lyth, David H.: *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [51] Mukhanov, V.: *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [52] *Cosmology and Astrophysics - Through Problems*. Cambridge University Press, 1996.
- [53] Advanced topics in cosmology: A pedagogical introduction. *AIP Conf. Proc.*, 2006, 843, pp. 111–166. doi: 10.1063/1.2219327.
- [54] Kouji Nakamura: Second-order Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory: Einstein equations in terms of gauge invariant variables. *Prog. Theor. Phys.*117: 17-74, 2007.
- [55] V. Acquaviva, N. Bartolo, S. Matarrese, A. Riotto: Second-Order Cosmological Perturbations from Inflation. *Nucl.Phys. B* 667 (2003) 119-148.