



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA MICROREDES DE POTENCIA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
RAÚL CANSECO RODAL

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ, FI-UNAM

MÉXICO, D. F., NOVIEMBRE DE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio  
Secretario: Dr. Álvarez Icaza Longoria Luis A.  
1<sup>er</sup> vocal: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René  
2<sup>do</sup> vocal: Dr. Nuño Ortega Emmanuel  
3<sup>er</sup> vocal: Dr. Aranda Bricaire Eduardo

Esta tesis se realizó en el Laboratorio de Control perteneciente a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería en la UNAM.

Director de Tesis:

---

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

*Hay hombres que luchan un día y son buenos.  
Hay otros que luchan un año y son mejores.  
Hay quienes luchan muchos años, y son muy buenos.  
Pero hay los que luchan toda la vida, esos son los imprescindibles.*

(BERTOLT BRECHT)

## Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, nuestra máxima casa de estudios por todo el apoyo brindado.

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo y la beca otorgada para emprender los estudios de maestría y desarrollar este trabajo de investigación.

A mi director de tesis Dr. Gerardo Espinosa, por el trabajo invaluable en la dirección de este trabajo de tesis, por compartir conmigo muchos de sus conocimientos, por la confianza y apoyo brindados.

Agradezco a los miembros del jurado por su tiempo y su interés para revisar este trabajo de tesis, así como por sus valiosas observaciones.

A la Maestra Sofía Ávila, por el gran apoyo en la elaboración de este trabajo.

A todos mis amigos y compañeros, por todos los buenos momentos compartidos.

# Dedicatoria

Dedico este trabajo:

A mi familia por todo el apoyo que siempre me brindan, a mis padres **Saúl Canseco** y **Sofía Rodal** por estar conmigo en todos los momentos de mi vida y regalarme todo su apoyo y amor incondicionalmente, por ser un gran ejemplo y regalarme todos esos consejos que siempre me son de gran ayuda. Saben que los amo mucho, ustedes son quienes me llenan de fortaleza, amor, esperanzas y sueños. Agradezco también mis hermanos **Carlos** y **Nancy** por todos aquellos momentos tan especiales que comparten conmigo y por creer en mi.

A **Susy** por apoyarme siempre y por estar a mi lado regalándome todo su tiempo, consejos y amor incondicional, por todas las risas, abrazos y besos, por ser quien es y llenarme de felicidad cada instante de mi vida con todas sus ocurrencias y amor.

A mi maestra y gran amiga **Sofía Ávila** por todo el tiempo que me regalo al por apoyarme en la elaboración de este trabajo, por todos sus conocimientos compartidos, por ser un gran ejemplo a seguir y ser una gran persona pero sobre todo por su bonita amistad y confianza.

A **Gerardo Espinosa** por todos los años en los que me ha compartido su conocimiento, por toda la paciencia, tiempo y esfuerzo que me ha regalado así como por sus consejos y apoyo.

A **Carlos García** por su apreciada amistad que me regala día a día.

# Índice general

Índice general	v
Índice de figuras	vii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	2
1.3. Formulación del problema . . . . .	5
1.4. Contribuciones . . . . .	6
1.5. Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Notaciones . . . . .	7
2.2. Energía y variables generalizadas del sistema . . . . .	7
2.3. Almacenadores de energía . . . . .	10
2.4. Teoría de grafos . . . . .	13
2.5. Matriz de interconexión . . . . .	17
2.6. Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto . . . . .	19
2.7. Flujos de Potencia . . . . .	20
<b>3. Modelado</b>	<b>30</b>
3.1. Modelo dinámico de la red de interconexión . . . . .	30
3.2. Modelo dinámico de los convertidores de Potencia . . . . .	35
3.3. Modelo dinámico de la carga . . . . .	38
<b>4. Análisis de la microred</b>	<b>41</b>
4.1. Modelo dinámico de la microred . . . . .	42
4.1.1. Modelo Hamiltoniano de la microred con carga resistiva . . . . .	42
4.1.2. Modelo Hamiltoniano de la microred con carga RLC . . . . .	46
4.2. Diseño del control . . . . .	48
4.2.1. Trayectorias deseadas . . . . .	52

<b>5. Caso de estudio</b>	<b>57</b>
5.1. Simulaciones . . . . .	57
<b>6. Conclusiones</b>	<b>68</b>
<b>Apéndices</b>	<b>69</b>
<b>A. Propiedades de la red con topología malla</b>	<b>69</b>
<b>B. Programa para solucionar los flujos de potencia</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>



# Índice de figuras

1.1. Esquema típico de una microred . . . . .	4
2.1. Mecanismo de transferencia de energía . . . . .	8
2.2. Variable de esfuerzo (a), y variable de flujo (b) . . . . .	8
2.3. Sentidos definidos como positivos para las variables de esfuerzo y flujo . . . . .	9
2.4. Un inductor como almacenador de esfuerzo . . . . .	12
2.5. Un capacitor como almacenador de flujo . . . . .	13
2.6. Segmento de línea que puede representar a cualquier elemento del sistema. . . . .	13
2.7. Elementos del sistema representados como segmentos de línea orientados. . . . .	14
2.8. Ejemplo de grado, loopset y loop . . . . .	15
2.9. Ejemplo de cutset y ámbito . . . . .	16
2.10. Ejemplo de árbol y co-árbol . . . . .	16
2.11. Impedancia conectada del nodo $i$ al nodo $j$ . . . . .	21
2.12. Bus o nodo genérico . . . . .	22
3.1. Ejemplo de una red con topología malla, que cuenta con dos fuentes y dos cargas. . . . .	31
3.2. Convertidor de potencia DC/AC . . . . .	36
3.3. Resistores controlados por corriente en serie con inductores y resistores controlados por voltaje en paralelo con capacitores . . . . .	40
4.1. Ejemplo de una red con topología malla, que cuenta con dos fuentes y dos cargas. . . . .	43
5.1. Ejemplo de microred para el caso de estudio . . . . .	58
5.2. Amplitudes de voltajes y fases en los nodos de la microred . . . . .	64
5.3. Señales de voltaje en los buses de generación . . . . .	64
5.4. Señales de voltaje en los buses de carga . . . . .	65
5.5. Seguimiento de la señal de voltaje con el convertidor 1 . . . . .	65
5.6. Seguimiento de la señal de voltaje con el convertidor 2 . . . . .	66
5.7. Señal de control en los convertidores . . . . .	66
5.8. Potencia activa en todos los buses . . . . .	67
5.9. Potencia activa en todos los buses . . . . .	67

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Los sistemas eléctricos de potencia están evolucionando constantemente, lo que hace cada vez más compleja su estructura, tanto del lado del consumo, como por el lado de la generación. Por el lado del consumo, las cargas tienden a ser no lineales por el avance de la tecnología. Mientras que, por el lado de la generación, las unidades de generación más utilizadas en la actualidad son las conocidas fuentes verdes (eólica, geotérmica, hidroeléctrica, mareomotriz, solar, etc.), dichas fuentes de generación son altamente heterogéneas, teniendo como desventaja la generación de energía no uniforme, lo que complica el análisis del sistema eléctrico de potencia. Lo anterior lleva a la necesidad de hacer compatibles las diferentes fuentes de energía, para la transmisión, distribución y consumo energético.

Dicha evolución de los sistemas eléctricos de potencia ha llevado a la concepción de un tipo especial de redes, conocidas como microrredes definidas en Guerrero (2013). Aunque en esencia este tipo de sistemas comparten la misma estructura de las redes eléctricas de potencia clásicas, esto es, están compuestas por fuentes de generación de energía interconectadas a través de líneas de transmisión con cargas, las microrredes presentan características particulares que las hacen atractivas tanto desde el punto de vista de aplicación como desde una perspectiva de sistemas dinámicos.

Así mismo, estas microrredes ofrecen una solución atractiva para las fuentes de alimentación de energía sustentables, ya que se basan en el uso de fuentes de energía renovables (fuentes verdes), dando lugar a una red de generación distribuida semi-autónoma capaz de satisfacer la demanda de potencia de comunidades relativamente pequeñas, también son capaces de conectarse al sistema de distribución primario, o bien aislarse y funcionar de forma independiente. Por otra parte, las características antes mencionadas imponen retos teóricos tales como el análisis de propiedades de estabilidad, diseño de protocolos para el reparto de energía confiable, el logro de los estándares de calidad de energía, entre otros, como se menciona en Guerrero (2013).

Desde un punto de vista estructural, la principal complicación para diseñar, analizar y controlar una microrred, se da por la naturaleza heterogénea de las fuentes de energía como

se menciona en Hill (2006), por lo que resulta necesario incluir para cada una de ellas un convertidor de potencia, cuyo objetivo es acondicionar la energía generada y hacerla compatible con el resto del sistema eléctrico. Es a través de estos dispositivos que se deben tomar medidas para asegurar la sincronización, seguridad, balance de potencia y distribución de carga en la red como se menciona en Bullo (2013).

Esta situación impone un problema de control de dos niveles, en el primero se tiene que diseñar un control para los convertidores de potencia de forma individual, para después resolver el problema de control de la red completa.

En los últimos años, el problema de control para microredes se ha convertido en un tema de interés para la comunidad de control. Se han reportado varios trabajos para analizar las propiedades de estabilidad de este tipo de redes, como Bullo (2013) y Schiffer (2014) por citar algunos.

Como consecuencia, un amplio conocimiento acerca de las capacidades y limitaciones de estas redes se encuentra disponible. Sin embargo, por lo general se han abordado bajo dos condiciones principales que son: la dinámica de los convertidores de potencia se ha simplificado drásticamente y se ha supuesto que el sistema ya ha alcanzado una operación sinusoidal. De hecho, se considera que el modelo simplificado de los convertidores de potencia se puede controlar de forma inmediata, mediante el uso de la conocida estrategia control-droop, como se realiza en Bullo (2013) y Schiffer (2014).

No obstante la importancia de la operación sinusoidal en estado estacionario de la red no puede ser refutada, está claro que teniendo en cuenta modelos simplificados para los convertidores de potencia, se limita la posibilidad de incluir fenómenos importantes exhibidos por las microredes, como lo relacionado con los problemas de calidad de energía y perturbaciones que pueden ocurrir durante el funcionamiento de los dispositivos. Por lo que en este trabajo se aborda el problema mencionado incluyendo una dinámica más detallada para los convertidores de potencia.

## 1.2. Antecedentes

En la literatura, se tienen bases sólidas que permiten el suministro de energía eléctrica de manera eficiente, sustentable, económica y segura, a pesar de la estructura tan compleja que presentan los sistemas eléctricos de potencia, como se menciona en Kundur (1994).

Desafortunadamente, los cambios recientes que se han presentado en su estructura y operación, hacen necesaria una revisión y actualización de la práctica y teoría actual con el objetivo de enfrentar este nuevo escenario. Los métodos para análisis y las metodologías de diseño de controladores se deben ajustar para confrontar la estructura variante de las redes y para tomar en cuenta los nuevos dispositivos que ahora son parte de la red.

En este nuevo contexto, es necesario considerar la evolución de la red eléctrica convencional hacia la llamada red inteligente (Smart grid). El concepto de red inteligente se refiere a una red eléctrica que puede integrar las acciones de todos los usuarios conectados a ella (generadores, cargas, o ambos) con la finalidad de entregar un suministro de energía eléctrica

de manera eficiente, sustentable, económica y segura. En la Tabla 1.2 se muestran algunas características de la red convencional en comparación con la red inteligente.

Red convencional	Red inteligente
Unidireccional	Bidireccional
Generación centralizada	Generación distribuida
Pocos sensores	Sensores en toda la red
Control limitado	Control generalizado
Ciega	Automonitoreada

El carácter inteligente lo da la tecnología que provee la capa digital y que está superpuesta a la red convencional, lo que permite la comunicación bidireccional entre la parte de generación y la parte de consumo de energía eléctrica. La red inteligente se va conformando mediante la interconexión de pequeñas redes aisladas denominadas microrredes como se menciona en Farhangi (2010). Así pues, una microrred es una red eléctrica de media o baja tensión<sup>1</sup>, altamente heterogénea compuesta de generación distribuida que puede ser operada de modo normal (conectada a la red primaria) y en modo aislado (operación autónoma) como se muestra en Bullo (2013). En la Figura 1.1 se muestra un esquema típico de una microrred.

Debido a la capa digital se tiene de cierta manera una tecnología que permite tener mayor información de la microrred, lo que permite un gran número de aplicaciones novedosas, tanto para el consumidor como para la empresa que suministra la energía, por ejemplo, se tienen interfaces mejoradas, nuevas tecnologías de detección, medición, control y diagnóstico, que tienen como objetivos, robustecer y automatizar la microrred, mejorando su operación, informar en tiempo real costos de la energía eléctrica, utilizar fuentes de energía verdes, desarrollar esquemas de generación descentralizada, entre otros. La generación de energía altamente heterogénea de una microrred, se debe a la incorporación de fuentes de energía renovables de diferente naturaleza, como eólicas, geotérmicas, hidroeléctricas, mareomotrices, solares, etc, ya que éstas proporcionan tensiones en AC o DC según su naturaleza, por lo que son acopladas a la red a través de *convertidores de potencia*, estos son dispositivos que permiten acondicionar las señales de salida, proporcionando la posibilidad de hacer control para asegurar sincronización, seguridad, balance de potencia y el reparto energético en la red como se menciona en Bullo (2013).

Así, las cargas y las fuentes están interconectadas a través de la red, cuya topología puede cambiar en función de las necesidades y la operación que se requiera. La mayor parte de la literatura se centra en microrredes con topologías radiales, donde los convertidores de potencia están conectados a un bus de alimentación principal, como en Pecas (2006) donde se evalúan dos estrategias de control para convertidores de potencia (control de potencia activa y reactiva por un lado y control de voltaje y frecuencia por el otro). En Guerrero (2013) se estudia un esquema de control jerárquico que imita el comportamiento de una red

---

<sup>1</sup>Las redes de media tensión, manejan aproximadamente tensiones mayores a 1 [kV] y menores a 25 [kV] y las de baja tensión manejan tensiones menores a 1 [kV]



Figura 1.1: Esquema típico de una microred

convencional, así como en Pogaku (2007) donde se lleva a cabo un estudio de estabilidad de señal pequeña.

En Chandorkar (1993) y Coelho (2002), se muestra únicamente el control de los convertidores de potencia conectados en paralelo alimentando a una carga en común, el primero usando solamente retroalimentación de variables medidas localmente y el segundo llevando a cabo un análisis de señal pequeña. Otro resultado importante es el presentado en Barklund (2008) donde se modela un sistema administrador de energía que ajusta la salida de potencia de los convertidores para minimizar el consumo de combustible utilizado por las fuentes de generación. En este caso la red de estudio posee topología radial de dos buses que alimentan a las cargas.

Pocos son los trabajos sobre microredes con topología malla por la complejidad del análisis que implica. Recientemente en Bullo (2013) y Schiffer (2014) se estudian condiciones de estabilidad para una microred con topología malla. Sin embargo, en estos trabajos la dinámica de los convertidores de potencia se considera muy simplificada, ya que se supone que cada convertidor posee un control de la fase y del voltaje de manera desacoplada mediante el uso de la conocida estrategia control-droop, además de la suposición usual, que es considerar que el sistema ya ha alcanzado una operación sinusoidal.

De la misma forma, se ha incrementado el interés en las técnicas de modelado, análisis y diseño de controladores, basados en conceptos energéticos. Particularmente el uso de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto ha probado ser adecuado para múltiples aplicaciones relacionadas con los sistemas eléctricos como se menciona en Ortega (2001), Van der Schaft (2011), Jayawardhana (2007), Ortega (2002), entre otros. Esta perspectiva es útil en el estudio de sistemas complejos, puesto que para su análisis, éstos pueden descomponerse en sub-sistemas, los cuales, al interconectarse suman sus energías para determinar el comportamiento total del sistema. Así, en la última década, se ha tenido éxito en reformular los métodos de modelado de redes, como se muestra en Fiaz (2013) se provee un enfoque sis-

temático de modelado, análisis y control, permitiendo entre otras cosas el análisis del sistema a través de las propiedades de su estructura de interconexión y las relaciones constitutivas de sus elementos.

Dentro de esta perspectiva energética, un trabajo que es especialmente interesante para esta tesis es el reportado en Van der Schaft (2011), en el que los sistemas dinámicos son vistos como sistemas Hamiltonianos sobre un grafo. La idea general es asociar a la matriz de incidencia del grafo una estructura que relacione a las variables de flujo y de esfuerzo de los bordes que sea capaz de capturar las leyes de conservación del sistema. De esta forma, la estructura Hamiltoniana de una red dinámica está definida por la función Hamiltoniana, las relaciones de disipación de energía y por la interconexión.

En el mismo contexto de sistemas dinámicos, actualmente el fenómeno de sincronización y de consenso ha sido ampliamente estudiado y en este trabajo de tesis se pretende relacionarlo con el problema de microredes, lo que hace necesario definirlo. La *sincronización* consiste en el hecho de ajustar el comportamiento de ciertos procesos repetitivos por medio de interacciones como se menciona en Olfati (2004). El *consenso* es un problema de sincronización que surge cuando es necesario que un grupo de agentes dinámicos interconectados llegue a un acuerdo respecto a ciertas cantidades de interés. Tradicionalmente, el estudio de este tipo de fenómenos se realiza considerando la interconexión de agentes dinámicos, es decir, se considera una red formada por nodos (que exhiben cierta dinámica) interconectados por canales de comunicación (usualmente) estáticos como se muestra en los trabajos de Olfati (2004), Wei (2013), Arcak (2007). En este trabajo de tesis, el estudio de los circuitos eléctricos que se realiza es representando su estructura como una red en donde los bordes son los elementos dinámicos mientras que los nodos son únicamente puntos de conexión que no exhiben dinámica, mediante el uso de metodologías generales de redes como las reportadas en Wellstead (1979) donde se modela el sistema dinámico en un grafo y se establecen condiciones en la topología de la red, donde se asegure convergencia a un valor deseado de las variables de estado asociadas a ciertos bordes.

### 1.3. Formulación del problema

En esta tesis se considera el caso de una microred de potencia con topología malla equipada con fuentes de energía las cuales son modeladas como fuentes de energía constantes, conectadas a la red a través de convertidores de potencia DC/AC, que se encargan de suministrar energía a diferentes cargas. El objetivo es obtener el modelo dinámico de esta microred incluyendo las dinámicas de los convertidores y de las cargas, desde una perspectiva de sistemas hamiltonianos controlados por puerto. Así mismo, aprovechando las propiedades de los sistemas Hamiltonianos, se propone una ley de control para los convertidores de potencia que estabiliza asintóticamente a la microred en un punto de operación deseado. Finalmente, para ilustrar el análisis se provee un estudio detallado considerando una topología típica en sistemas de potencia.

El enfoque particular empleado para resolver el problema de control es el de estabilización. Para esto, se establecen condiciones de operación de potencias activa y reactiva en estado

estacionario, lo que a su vez establece trayectorias deseadas en el modelo dinámico de la microred, que son soluciones de las ecuaciones que representan a los flujos de potencia. Estas trayectorias admisibles son utilizadas para resolver el problema de seguimiento en la microred. Para ello, se explota en un nivel fundamental la estructura Hamiltoniana exhibida por los convertidores de potencia, por los circuitos de carga y por la propia red. En este sentido, todo el sistema se representa como la interconexión de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto, con lo que el diseño del controlador y el análisis de estabilidad se simplifican notablemente.

## 1.4. Contribuciones

En este trabajo, se explotan las estructuras Hamiltonianas exhibidas por los convertidores de potencia y por la propia red. En este sentido, se propone un nuevo modelo que representa a todo el sistema como la interconexión de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto, se desarrolla un esquema de control distribuido para una red con topología malla incluyendo la dinámica de los convertidores de potencia, sin asumir una operación en estado estacionario. Este resultado de estabilización se logra garantizando tanto estabilidad en voltaje como en frecuencia, mientras que el envío de potencia activa y reactiva sean los adecuados.

## 1.5. Organización de la tesis

El contenido de este trabajo de tesis se divide en seis capítulos, el Capítulo 1 presenta la introducción de este trabajo, así como una motivación que plantea el problema a resolver. En el Capítulo 2 se presentan las herramientas necesarias que se estarán usando a lo largo del trabajo, en el Capítulo 3 se presenta el modelo matemático de los diferentes sistemas que se utilizan a lo largo de la tesis y se mencionan algunas características particulares de los mismos. En el Capítulo 4 se presenta el modelo matemático de la microred completa y se hace la propuesta del controlador encargado de estabilizar a la planta así como pruebas formales del desempeño del sistema en lazo cerrado. En el Capítulo 5 se presentan simulaciones numéricas realizadas en Matlab/Simulink que permiten ver el desempeño de la microred y para finalizar se presenta un Capítulo 5 de conclusiones.

# Capítulo 2

## Preliminares

Este capítulo está dedicado a la revisión de ciertas herramientas necesarias para el análisis de los elementos que conforman al sistema principal (microred). Así como una serie de definiciones teóricas y herramientas matemáticas que son utilizadas a lo largo de este trabajo de tesis, dicha información ha sido tomada de Wellstead (1979), Kundur (1994), Kothari (2003) y Ortega (2002). También, se introduce la notación utilizada durante el resto de este trabajo, así como antecedentes teóricos del enfoque de modelado que se utiliza.

### 2.1. Notaciones

$\mathbf{B}$	Matriz de incidencia
$\mathcal{G}$	Grafo dirigido
$\mathcal{V}$	Conjunto de nodos de un grafo
$\mathcal{E}$	Conjunto de bordes de un grafo
$\mathbf{B}_b$	Matriz de loopsets básica
$H$	Submatriz de Incidencia
$col\{x_i\}$	Vector columna con entradas de $x_1$ hasta $x_i$ , con $i = 1, \dots, n$
$diag\{x_i\}$	Matriz diagonal con entradas de $x_1$ hasta $x_i$ , con $i = 1, \dots, n$
$\mathbf{1}$	Vector con todas las entradas iguales a 1
$\nabla$	Operador gradiente

### 2.2. Energía y variables generalizadas del sistema

La idea fundamental del modelado, desde la perspectiva energética abordada en esta tesis, es notar que los componentes de cada sistema suministran, almacenan o disipan energía y se interconectan para formar un sistema completo, la cuestión es determinar cómo esa energía es transmitida de un componente a otro.

En dos sistemas que se encuentran conectados el intercambio de energía se realiza a través



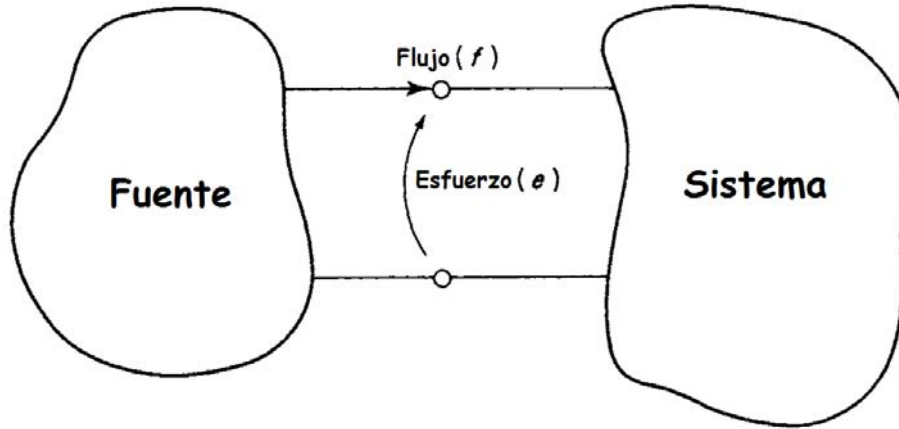


Figura 2.1: Mecanismo de transferencia de energía

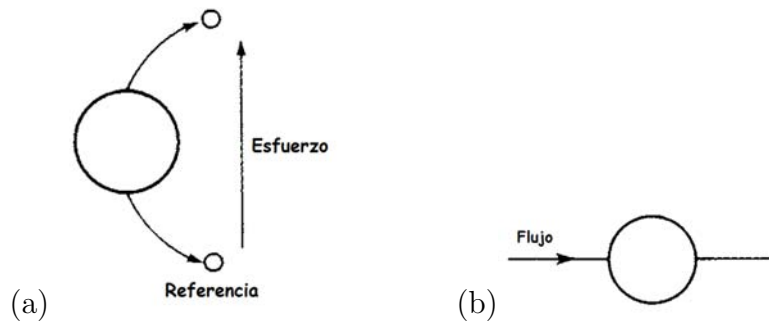


Figura 2.2: Variable de esfuerzo (a), y variable de flujo (b)

de un puerto, el cual conceptualmente está formado por dos terminales comunes a ambos sistemas (véase la Figura 2.1) La energía es intercambiada entre estos sistemas a través de dos variables generalizadas que se identifican bajo los conceptos generales de esfuerzo ( $e$ ) y flujo ( $f$ ). Estas variables, al ser generalizadas, están definidas en cualquier sistema independientemente de su naturaleza. Las variables generalizadas de esfuerzo y flujo pueden ser distinguidas a partir de la manera en que son medidas. El esfuerzo (voltaje en sistemas eléctricos) es medido utilizando un instrumento que se conecta entre ambas terminales del puerto (en inglés se usa el término *across* para describir estas variables), estas variables se miden entre dos puntos porque necesitan ser medidas respecto a un valor de referencia como se muestra en la Figura 2.2(a). El flujo (corriente en sistemas eléctricos) es medido utilizando un instrumento que se conecta a lo largo de una de las terminales del puerto (en inglés se usa el término *through* para describir estas variables). En este caso no se necesita especificar un valor de referencia sino que se mide la variable que fluye a través del sistema como se muestra en la Figura 2.2(b), como se menciona en Wellstead (1979).

En este enfoque, en el cual los sistemas son considerados como procesadores de energía, el

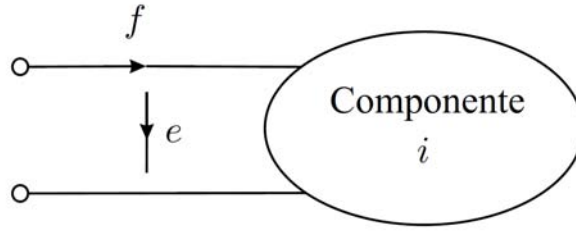


Figura 2.3: Sentidos definidos como positivos para las variables de esfuerzo y flujo

producto de las variables de esfuerzo y flujo es igual a la potencia instantánea ( $\omega$ ) intercambiada a través del puerto

$$\omega = ef$$

En cada uno de los componentes del sistema es necesario definir una convención de signos para las variables generalizadas de esfuerzo y de flujo como se muestra en la Figura 2.3. De este modo, si la potencia  $\omega$  tiene signo positivo para el componente  $i$  entonces este componente recibe energía en ese instante. Si la potencia  $\omega$  tiene signo negativo para el elemento  $i$  entonces el componente entrega energía a los otros componentes del sistema en ese instante.

La energía intercambiada ( $E$ ) en el intervalo de tiempo  $[0, t]$  está dada como la integral de la potencia instantánea

$$E = \int_0^t efdt \quad (2.1)$$

Si la energía  $E$  es positiva para el componente  $i$ , entonces  $E$  representa la energía que este componente ha recibido en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ , pero si  $E$  es negativa entonces  $E$  representa la cantidad de energía que el componente ha entregado a los otros componentes del sistema en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ .

En particular, para el caso de sistemas eléctricos, la potencia ( $\omega$ ) está dada como el producto de la corriente eléctrica  $i$  a través del circuito y el voltaje  $v$  medido entre sus terminales, mientras que la energía ( $E$ ) intercambiada (puede ser recibida o entregada dependiendo del signo de  $E$ ) en el intervalo de tiempo  $[0, t]$  se calcula como la integral de la potencia

$$\omega = iv, \quad E = \int_0^t ivdt$$

Los componentes de un sistema pueden clasificarse de la siguiente manera, de acuerdo a la acción que realizan sobre la energía  $E$  que intercambian:

- Almacenadores de energía.
- Disipadores de energía.
- Fuentes de energía.

A continuación se estudian cada una de estas propiedades.

### 2.3. Almacenadores de energía

Existen dos maneras de almacenar la energía, que son:

1. Mediante el almacenamiento de esfuerzo.
2. Mediante el almacenamiento de flujo.

Estas dos maneras de almacenar energía definen dos nuevas variables; el *esfuerzo almacenado* ( $e_a$ ) y el *flujo almacenado* ( $f_a$ ) como se menciona en Wellstead (1979)

$$e_a = \int_0^t e dt, \quad e = \frac{de_a}{dt} \quad (2.2)$$

$$f_a = \int_0^t f dt, \quad f = \frac{df_a}{dt} \quad (2.3)$$

Nótese que a partir de estas expresiones también se pueden escribir:

$$e dt = de_a, \quad f dt = df_a$$

lo cual, al ser sustituido en (2.1) se obtienen las siguientes expresiones para la energía almacenada en términos del esfuerzo almacenado

$$E = \int_0^t f de_a \quad (2.4)$$

y para la energía almacenada en términos de la acumulación de flujo

$$E = \int_0^t e df_a \quad (2.5)$$

Para poder calcular la integral en (2.4) es necesario que el flujo  $f$  se pueda escribir como función del esfuerzo almacenado  $e_a$ , es decir

$$f = \phi(e_a)$$

Por otro lado, para poder calcular la integral en (2.5) es necesario que el esfuerzo  $e$  se pueda escribir como función del flujo almacenado  $f_a$ , es decir que se pueda escribir

$$e = \varphi(f_a)$$

en cada caso, las funciones  $\phi$  y  $\varphi$  se conocen como las *funciones constitutivas* del elemento del sistema que realiza la acción de almacenamiento de esfuerzo o de flujo. A continuación se estudian los elementos que almacenan esfuerzo o flujo en sistemas eléctricos, ya que son el tipo de sistema que se utiliza a lo largo de este trabajo de tesis.

■ **Almacenadores de esfuerzo:**

En la Figura 2.4 se muestra un inductor, que en circuitos eléctricos es el correspondiente al almacenador de esfuerzo, a través del cual circula una corriente eléctrica  $i$  (variable de flujo) bajo el efecto de un voltaje  $v_{12}$  (variable de esfuerzo) aplicado entre sus terminales. Se supone que el inductor es ideal, es decir, el inductor no tiene resistencia eléctrica interna ni existe capacitancia entre sus espiras.

Faraday fue el primero en darse cuenta de que un inductor tiene propiedades análogas a las que tiene el momentum en sistemas mecánicos. Lo que Faraday llamó el momentum electrodinámico, es más conocido actualmente como el flujo acumulado  $\lambda$  y es igual al flujo magnético encerrado por el inductor. Este flujo acumulado es proporcional a la corriente  $i$  que fluye a través del inductor y a una constante positiva  $L$  que depende de la forma geométrica en que el conductor está enrollado para formar el inductor. La constante  $L$  recibe el nombre de inductancia. Por tanto, se puede escribir:

$$\lambda = Lf \tag{2.6}$$

El flujo acumulado determina el voltaje que se produce en los extremos de un inductor mediante la Ley de Faraday

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

de lo que se puede concluir que el flujo acumulado representa al esfuerzo almacenado ( $\lambda = e_a$ )

$$\lambda = \int_0^t e dt$$

por lo que, a partir de la expresión (2.6) se puede decir

$$f = \phi(\lambda) = L^{-1}\lambda, \quad (f = \phi(e_a))$$

Además es posible encontrar la energía almacenada, considerando condiciones iniciales nulas, y la consideración (2.2) tenemos

$$E = \int_0^{e_a} f de_a$$

Considerando que  $i = f$ ,  $\lambda = e_a$  e  $i = L^{-1}\lambda$  la energía almacenada se puede escribir como:

$$E = \int_0^\lambda L^{-1}\lambda d\lambda = \frac{1}{2}L^{-1}\lambda^2$$

la cual constituye la expresión de la energía almacenada por un inductor.

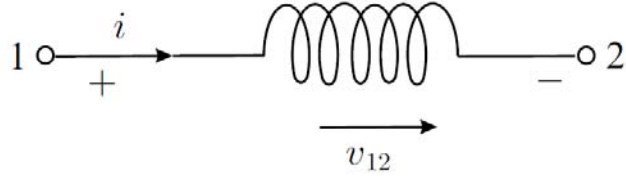


Figura 2.4: Un inductor como almacenador de esfuerzo

■ **Almacenadores de flujo:**

En la Figura (2.5) se muestra un capacitor, que en circuitos eléctricos es el correspondiente al almacenador de flujo, a través del cual circula una corriente eléctrica  $i$  (variable de flujo) bajo el efecto de un voltaje  $v_{12}$  (variable de esfuerzo) aplicado en sus terminales. Debido a la diferencia de potencial que existe entre los conductores se producirá una acumulación de carga eléctrica. Comúnmente se utiliza la letra  $q$  para representar dicha carga eléctrica. Con la finalidad de cuantificar la cantidad de carga eléctrica que puede ser almacenada, se define la capacitancia  $C$  (constante positiva) de la siguiente forma

$$q = Ce \tag{2.7}$$

La corriente eléctrica se define a partir de la carga eléctrica del siguiente modo

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Por lo tanto, la carga eléctrica representa el flujo acumulado ( $q = f_a$ )

$$q = \int_0^t f dt$$

a partir de la expresión (2.7) se concluye que

$$e = \varphi(q) = C^{-1}q, \quad e = \varphi(f_a)$$

Además es posible encontrar la energía almacenada, considerando condiciones iniciales nulas, y la consideración (2.3) tenemos

$$E = \int_0^{f_a} e df_a$$

Considerando  $v_{12} = e$ ,  $q = f_a$  y  $v_{12} = C^{-1}q$  la energía almacenada se puede escribir

$$E = \int_0^q C^{-1}q dq = \frac{1}{2}C^{-1}q^2$$

La cual constituye la expresión de la energía almacenada por un capacitor.

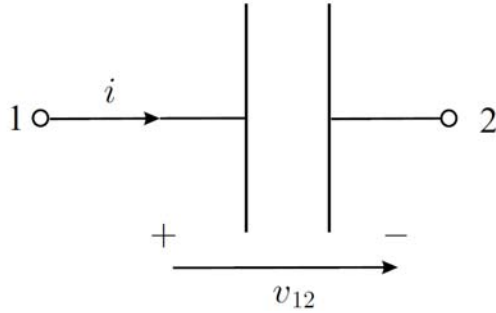


Figura 2.5: Un capacitor como almacenador de flujo

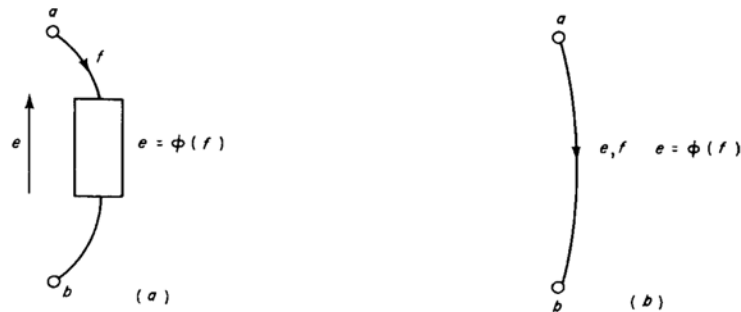


Figura 2.6: Segmento de línea que puede representar a cualquier elemento del sistema.

## 2.4. Teoría de grafos

Las restricciones de interconexión para las variables de un sistema pueden ser formalizadas de muchas formas, probablemente una de las técnicas mas generales es el análisis por medio de redes, dicha técnica nos proporciona las herramientas para representar la interacción entre los elementos o agentes en una red. Es por ello, que se presenta una recopilación de varias definiciones, tomadas de Wellstead (1979), que son utilizadas frecuentemente a lo largo de este trabajo.

Así pues, una gráfica lineal es un conjunto de líneas conectadas. Las líneas representan simbólicamente a los elementos del sistema, por lo tanto la tarea principal en la construcción de una gráfica es el seleccionar una convención adecuada para poder representar a los elementos del sistema como segmentos de línea. Además, estos segmentos se dicen estar orientados si se indica la dirección de referencia de la variable de flujo o esfuerzo del elemento, un posible convenio se muestra en la Figura 2.6.a y 2.6.b para un elemento generalizado, en este ejemplo la Figura 2.6.b establece que el esfuerzo  $e$  es positivo cuando la terminal  $a$  tiene un mayor esfuerzo que la terminal  $b$ . la variable de flujo  $f$  es positiva cuando esta en la dirección que indica la flecha.

En la Figura 2.7 se muestran ejemplos de como es que se puede representar a un elemento del sistema como un segmento de línea orientado.

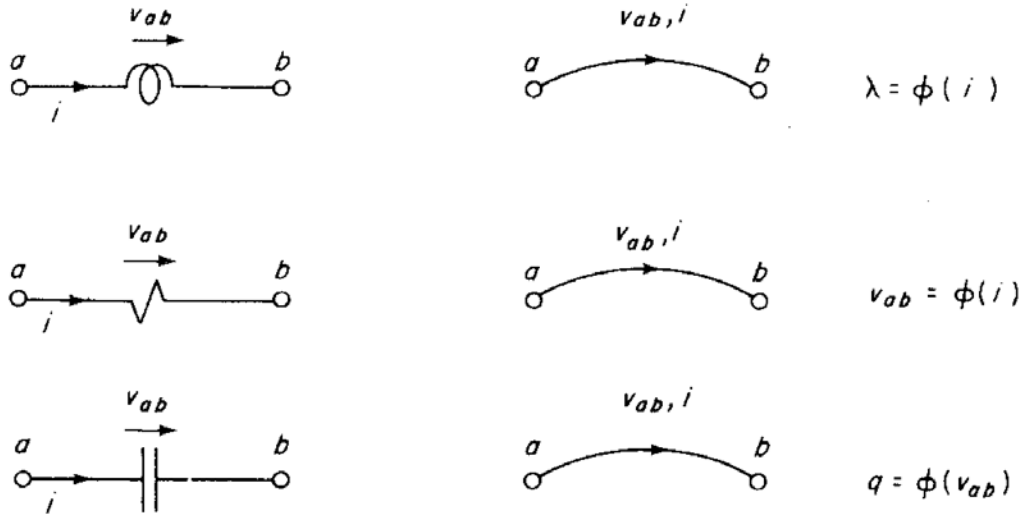


Figura 2.7: Elementos del sistema representados como segmentos de línea orientados.

Antes de encontrar las restricciones de interconexión para las redes, es necesario presentar algunas definiciones. Primero, un grafo o gráfica lineal se define como un conjunto de segmentos de línea interconectados. El término lienal se asocia a la representación de los elementos del sistema por segmentos de línea, pero esto no implica relaciones constitutivas lineales para los elementos que pertenecen al grafo. Si los segmentos de línea son orientados (dirigidos) el grafo se conoce como *grafo dirigido* o *gráfica lineal orientada*. Los segmentos de línea son conocidos como *bordes* y el final de un conjunto de bordes se conoce como *nodo*. En general un grafo consiste en un conjunto de grafos conectados y un *grafo conectado* se define como un grafo en el que se puede alcanzar cualquier nodo siguiendo una trayectoria sobre los bordes. Si suponemos un grupo de elementos están interactuando entre sí por medio de una red, y dicho grupo está formado por  $p$  elementos, entonces un *grafo dirigido*  $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  de orden  $p$  es un par  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , donde  $\mathcal{V} \triangleq \{1, \dots, p\}$  es un conjunto finito, no vacío de *nodos*, mientras que  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  es un conjunto formado por pares ordenados llamados *bordes*. El borde  $(i, j)$  en el conjunto  $\mathcal{E}$  de un grafo dirigido denota que el  $j$ -ésimo elemento puede obtener información del  $i$ -ésimo, pero no necesariamente viceversa; en este caso al nodo  $i$  se le conoce como *nodo padre* y al  $j$  como *nodo hijo*. A lo largo del desarrollo de este trabajo los auto-bordes  $(i, i)$  no son considerados. Además si un borde  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , entonces se dice que el nodo  $i$  es *vecino* del nodo  $j$ . Al conjunto de vecinos de un nodo  $i$  se le denota como  $\mathcal{N}_i$ . Un *subgrafo*  $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$  de  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , es un grafo tal que  $\mathcal{V}^s \subseteq \mathcal{V}$  y  $\mathcal{E}^s \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E} \cap (\mathcal{V}^s \times \mathcal{V}^s)$ . A continuación se presentan definiciones de elementos referentes a los grafos:

1. El *grado* de un nodo es el número de bordes conectados a tal nodo.
2. Un *loopset* es un conjunto de bordes y nodos de un grafo, tal que cada nodo tiene grado 2. Note que los grafos de sistemas físicos siempre tienen nodos de grado dos o

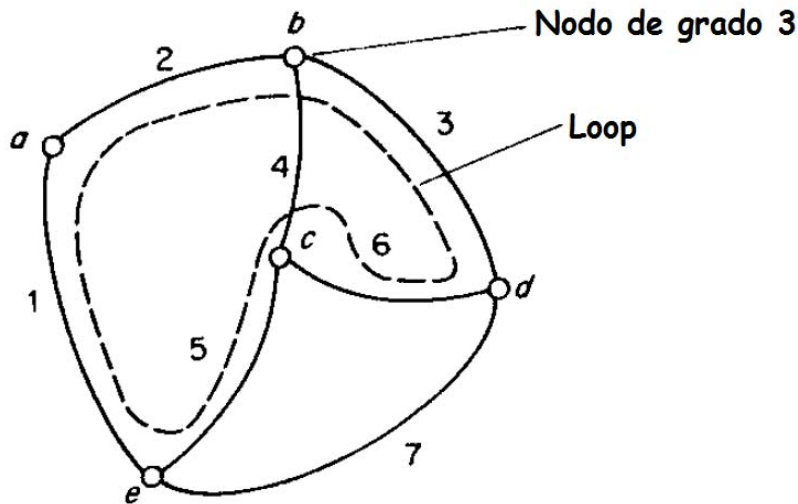


Figura 2.8: Ejemplo de grado, loopset y loop

mayor, entonces un nodo de grado uno es equivalente a una terminal desconectada.

3. Un *loop* es una trayectoria cerrada definida por un loopset.

Las primeras tres definiciones se ilustran en la Figura 2.8 tomada de Wellstead (1979) en la cual el nodo  $b$  tiene grado 3; el conjunto de bordes  $(1, 2, 3, 6, 5)$  y nodos  $(e, a, b, d, c)$  forman un loopset y la línea punteada indica el correspondiente loop.

4. Un *cutset* es un conjunto de bordes de un grafo conectado tal que al dividirlos, estos bordes separan al grafo en dos grafos conectados. Si cualquier borde de el cutset se omite el grafo debería de permanecer conectado. Si los bordes en un cutset son todos incidentes en un nodo, el nodo es llamado *cutset de nodo*.
5. Un *ámbito* es una trayectoria cerrada que intersecta a todos los bordes de un cutset. Estas definiciones se ilustran en la Figura 2.9 tomada de Wellstead (1979) en la cual los bordes  $(1, 8, 6, 5)$  forman un cutset pero los bordes  $(2, 7, 8, 6, 5)$  no lo hacen. Los bordes  $(2, 4, 3)$  forman un cutset de nodo.
6. Un *árbol* de un grafo es un sub-grafo conectado que contiene a todos los nodos del grafo, pero no forma lazos cerrados. El complemento del árbol es llamado *co-árbol*, y es la parte del grafo que se mantiene cuando se retira el árbol. Los bordes del árbol son conocidos como *ramas* y los bordes del co-árbol se conocen como *cuerdas*. Dos posibles árboles del grafo mostrado en la Figura 2.9 se muestran en la Figura 2.10,



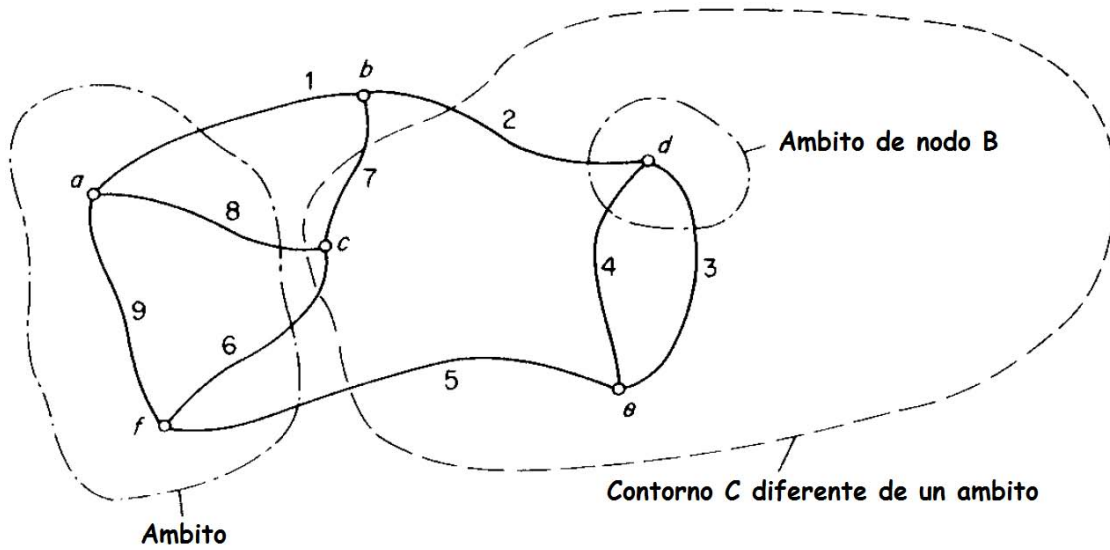


Figura 2.9: Ejemplo de cutset y ámbito

para el primer árbol el co-árbol tiene como cuerdas al conjunto de bordes  $(3, 5, 6, 7)$ , y el segundo árbol con cuerdas  $(1, 2, 4, 9)$ .

- Un *cutset básico* se define para un árbol en particular como un cutset que consta de una rama del árbol y algunas o todas las cuerdas del co-árbol. Cada cutset básico está orientado de tal manera que se asigne un signo positivo a sus ramas. Un *ámbito básico* es el ámbito correspondiente a el cutset básico.

En la Figura 2.9 y con respecto al árbol mostrado en la Figura 2.10.a, los bordes  $(2, 5)$  forman un cutset básico, al igual que los bordes  $(1, 7, 5)$  y  $(4, 3, 5)$ . Note que un cutset básico puede o no ser un cutset de nodo.

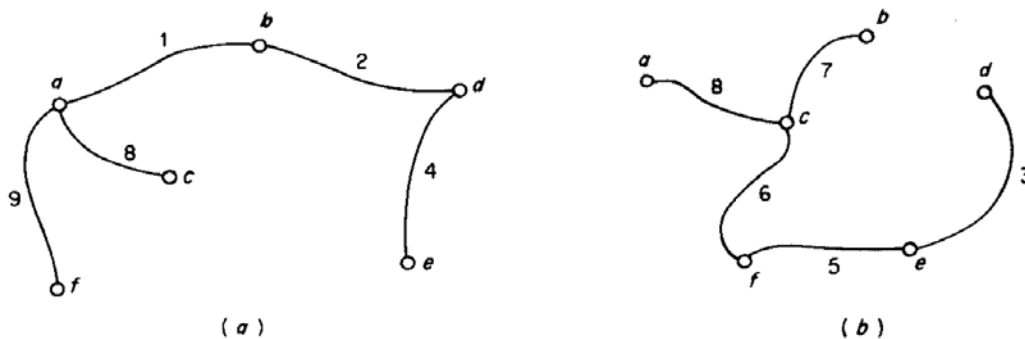


Figura 2.10: Ejemplo de árbol y co-árbol

8. Un *loopset básico* se define para un árbol en particular como un loopset que consta de una cuerda y alguna o todas las ramas del árbol. Un *loop básico* es el loop correspondiente al loopset básico. Un loop básico por lo tanto, atraviesa una trayectoria que incluye una cuerda y cualquier número de ramas.

## 2.5. Matriz de interconexión

Haciendo uso de las herramientas básicas mencionadas a lo largo de las secciones de este capítulo, se encuentra una matriz que es de vital importancia para el modelado de las redes que se utilizan, dicha matriz contiene toda la información referente a la interconexión del sistema, es conocida como matriz de incidencia y es fundamental para encontrar el modelo dinámico de la red de interconexión y de la misma microred.

Se menciono todos los componentes del sistema son vistos como *procesadores de energía* que interactúan con entradas y salidas por medio de puertos. El acoplamiento energético de estos sub-sistemas puede representarse por un par de variables cuyo producto es la potencia instantánea transmitida por el puerto, de esta forma, la entrega de energía está asociada a una variable generalizada de *flujo* y otra de *esfuerzo* que representan el mecanismo de transferencia de energía, como se menciona al inicio de este capítulo. El modelado se logra interconectando los sub-sistemas para formar uno completo. Por lo que bajo esta premisa, un sistema es la interconexión de elementos ideales, vistos como almacenadores de flujo y de esfuerzo, elementos disipadores y fuentes. Para el caso particular de circuitos eléctricos la corriente y el voltaje son las variables de flujo y esfuerzo, respectivamente, con el inductor el elemento almacenador de flujo y el capacitor el de esfuerzo. De manera que el sistema queda definido al agregar *relaciones constitutivas* y añadir las *restricciones* impuestas por la interconexión.

En general, la relación de almacenamiento de energía entre las variables de flujo  $f$  y las de esfuerzo  $e$ , depende de la naturaleza del elemento (capacitor o inductor) como lo menciona Van der Schaft (2011), y es de la forma

$$\dot{f}_a = f; \quad e = \frac{\partial V(f_a)}{\partial f_a} \quad (2.8)$$

o de manera dual

$$\dot{e}_a = e; \quad f = \frac{\partial V(e_a)}{\partial e_a} \quad (2.9)$$

donde  $f_a$  y  $e_a$  son vectores de flujo y esfuerzo almacenado de la misma dimensión de  $f$  y  $e$ , mientras que  $V(\cdot)$  es una función que representa la energía almacenada en el sistema.

Ya que un circuito eléctrico puede ser visto como un grafo dirigido  $\mathcal{G}$ , que consiste en conjunto finito de nodos  $\mathcal{V}$ , con  $n$  elementos, y un conjunto finito de bordes  $\mathcal{E}$  con  $b$  elementos, junto con un mapeo de  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{V}$ , tal que a cada borde  $\epsilon \in \mathcal{E}$  le corresponde una pareja ordenada  $(v, w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , con  $v \neq w$ . El borde  $(v, w)$  denota que el elemento  $w$  puede acceder a la información del elemento  $v$ , pero no necesariamente viceversa. Se dice que un grafo dirigido está conectado si se tiene al menos un nodo con trayectorias dirigidas a todos los demás

nodos. El mapeo del espacio de bordes al de nodos tiene como representación a la matriz de incidencia  $B$ , que es de  $n \times b$ , con  $(i, j)^{th}$  elemento igual a 1 si el  $j^{th}$  borde entra al nodo  $i$ , -1 si sale del nodo y 0 de cualquier otra forma. En este sentido también puede construirse la matriz  $B_0$  de loopset completa cuyo  $(i, j)^{th}$  elemento igual a 1 si el  $j^{th}$  borde está en el  $i^{th}$  lazo y ambos tienen la misma orientación,  $(i, j)^{th}$  igual a -1 si el  $j^{th}$  borde está en el  $i^{th}$  lazo y tienen orientación opuesta y 0 de cualquier otra forma.

En este sentido, un *árbol*, definido en Wellstead (1979), es un subgrafo conectado con todos los nodos del grafo que no forma ninguna trayectoria cerrada, a sus bordes se les llama ramas; al complemento del árbol se le llama *co-árbol* y sus bordes se conocen como cuerdas. Así, pueden expresarse leyes de interconexión, o de conservación de energía, como la Ley de corrientes y la Ley de voltajes de Kirchhoff

$$Bf = 0 \quad (LCK)$$

$$B_0e = 0 \quad (LVK)$$

con  $f, e \in \mathbb{R}^m$  un vector de flujos y de esfuerzos de borde, respectivamente. Es posible demostrar que existen  $n - 1$  restricciones de flujo linealmente independientes en un grafo conectado con  $n$  nodos, por lo que el rango de su matriz de incidencia  $B$  es  $n - 1$ , lo que permite obtener una *matriz de incidencia reducida*  $C_b \in \mathbb{R}^{n-1 \times b}$  eliminando un renglón de  $B$ , de manera que si  $f$  se ordena tal que el flujo de las ramas entra primero y el orden de los renglones de  $C_b$  corresponde a las ramas en  $f$ , entonces la *LCK* es

$$C_b f = [ I \quad H ] \begin{bmatrix} f_t \\ f_c \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow f_t = -H f_c \quad (2.10)$$

donde  $f_t$  y  $f_c$  son los flujos en el árbol y en el co-árbol, respectivamente,  $I$  es la matriz identidad de orden  $n - 1$  y  $H \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (b-n+1)}$  es la *submatriz de incidencia*. De igual forma, la matriz de loopsets completa  $B_0$  tiene  $b - n + 1$  restricciones de esfuerzo linealmente independientes, por lo que también es posible reducirla y obtener una matriz de loopsets básica  $B_b$ , de tal forma que la *LVK* se puede reordenar como

$$B_b e = [ -H^T \quad I ] \begin{bmatrix} e_t \\ e_c \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow e_c = H^T e_t \quad (2.11)$$

con  $H^T \in \mathbb{R}^{(b-n+1) \times (n-1)}$ ,  $I$  la matriz identidad de orden  $b - n + 1$ ,  $e_t$  son los vectores de esfuerzo en los bordes del árbol y  $e_c$  son los esfuerzos en los bordes del co-árbol. Siendo entonces la matriz  $H \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (b-n+1)}$  la encargada de que capture la topología del circuito conocida como submatriz de incidencia, ya que determinan cómo los flujos del árbol y los esfuerzos del co-árbol se pueden generar como una combinación lineal de los flujos del co-árbol y los esfuerzos del árbol, respectivamente, via las siguientes expresiones (2.10) y (2.11). Note que estructuralmente, cada fila en la matriz  $H$  señala cuál de los elementos del co-árbol son incidentes al mismo cutset básico de cada una de las ramas. Y en correspondencia, cada columna muestra cuál de los elementos del árbol pertenece al mismo loopset básico de cada una de las cuerdas.

Por último, otra propiedad demostrada en Wellstead (1979) es la que (2.10) y (2.11) equivalen a restricciones impuestas por las estructuras de Dirac y que son analizadas en Van der Schaft (2011) como relaciones que preservan potencia. Así, mientras las ecuaciones (2.10) y (2.11) definen la *topología* de la interconexión, mientras que (2.8) y (2.9) establecen la dinámica, una relación disipativa entre el vector de flujos y el de esfuerzos puede ser dada por cualquier relación estática de la forma

$$R(f, e) = 0$$

Finalmente, el grafo asociado al sistema es el que representa la interconexión de los elementos que lo conforman.

## 2.6. Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto

En este trabajo de tesis se sigue una técnica de control que involucra la estructura física de los sistemas, lo que ha demostrado ser una alternativa altamente utilizada en sistemas eléctricos como se menciona en Ortega (2002). Dicho método de diseño es conocido como *Control Basado en Pasividad por Asignación de Interconexión y Amortiguamiento*, por sus siglas en inglés **IDA-PBC**. Para poder aplicar la técnica *IDA-PBC* se requiere que el sistema en lazo cerrado se pueda representar mediante una estructura Hamiltoniana, la cual consiste en tener una matriz antisimétrica que representa la interconexión del sistema, una matriz positiva definida correspondiente a los elementos de amortiguamiento y una función escalar que contenga la energía almacenada de todo el sistema.

Un sistema Hamiltoniano se entiende como un sistema dinámico posiblemente no lineal que cumple con la estructura

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [\mathcal{J}(x) - \mathcal{B}(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u \\ y &= g(x)^T \frac{\partial H(x)}{\partial x}\end{aligned}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  son las variables que almacenan energía,  $H(x) : (\mathbb{R})^n \rightarrow (\mathbb{R})$  es una función escalar definida positiva que representa la energía total almacenada por el sistema,  $u, y \in \mathbb{R}^m$  son las variables de puerto de energía (entradas y salidas).

La matriz  $\mathcal{J}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz antisimétrica  $\mathcal{J}(x) = -\mathcal{J}(x)^T$  que captura la interconexión del sistema, mientras que  $\mathcal{B}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica positiva semidefinida  $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x)^T \geq 0$  que contiene a los elementos de disipación de la red y finalmente el vector  $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  se encarga de modelar los puertos del sistema.

Una característica importante de los sistemas Hamiltonianos es que los puntos de equilibrio del sistema al que representan, coinciden con los puntos críticos de la función de energía del sistema, esto es

$$\mathcal{E} = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n \mid \left[ \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right]_{x=x^*} = 0 \right\}$$

lo que permite hacer uso de teoría, como estabilidad en el sentido de Lyapunov mencionada en Khalil (2002), esto es, se define la función de almacenamiento de energía como función candidata de Lyapunov, pidiendo que el argumento mínimo de la función sea igual al punto de equilibrio que se desea estabilizar, se encuentra la derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema esto es

$$\begin{aligned}
 \dot{H} &= \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} \dot{x} \\
 &= \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} \left[ \mathcal{J}(x) - \mathcal{B}(x) \right] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u \\
 &= \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} \mathcal{J}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} - \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} \mathcal{B}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} g(x)u \\
 &= -\frac{\partial H(x)^T}{\partial x} \mathcal{B}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + u^T y
 \end{aligned}$$

con lo que haciendo uso del Teorema 4.1 de Khalil (2002), se puede asegurar que el punto de equilibrio será al menos estable si  $x^* = \operatorname{argmin} H(x)$  por que

$$\dot{H} \leq 0$$

Lo que es una gran ventaja al trabajar con esta clase de sistemas, ya que facilitan la prueba de estabilidad.

## 2.7. Flujos de Potencia

Uno de los procedimientos usados comúnmente para el análisis de los sistemas de potencia es el cálculo de los flujos de potencia. La operación y diseño de sistemas eléctricos de potencia requiere de tal cálculo para analizar el rendimiento en estado estacionario del sistema de potencia.

Lo que se logra hacer al solucionar los flujos de potencia es que dada una cantidad de potencia consumida en todos los nodos<sup>1</sup> de una configuración conocida y la potencia producida por cada fuente, se requiere encontrar la potencia en cada una de las líneas de la red, la magnitud del voltaje y el ángulo de fase en cada nodo Kundur (1994).

El cálculo de los flujos de potencia determina el estado del sistema de potencia para una carga dada y una distribución de generación, esto representa una condición en estado estacionario. En la realidad, el voltaje en los nodos de la línea cambia constantemente debido a que las cargas cambian.

Existen muchos métodos iterativos que son capaces de solucionar las ecuaciones de flujos de potencia, pero cabe mencionar que la mayoría de los métodos son variaciones de la técnica

---

<sup>1</sup>Es la conexión de dos o mas dispositivos que pertenecen al sistema eléctrico de potencia, en la literatura de sistemas eléctricos de potencia son conocidos como barras, note que cualquier barra puede ser vista como un nodo, pero no necesariamente viceversa.

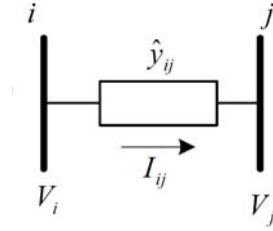


Figura 2.11: Impedancia conectada del nodo  $i$  al nodo  $j$

de Newton-Raphson y que todas las técnicas reportadas en la literatura requieren de la matriz de admitancias para poder solucionar las ecuaciones de flujos de potencia, por lo que se dedicará una parte de esta sección del trabajo a describir cómo se calcula dicha matriz. Además de requerir parámetros primordiales como la  $P$  potencia activa,  $Q$  potencia reactiva,  $V$  Magnitud del voltaje y  $\delta$  fase del voltaje, donde es necesario especificar dos de las cuatro cantidades, en cada nodo.

En la literatura de sistemas eléctricos de potencia como Kundur (1994) y Kothari (2003) se mencionan diferentes tipos de nodos, para la especificación de algunas de las cantidades antes mencionadas, que son:

- Nodo de Generación
- Nodos de carga
- Nodo tipo slack o nodo de referencia

▪ **Construcción de la matriz de admitancia:**

El análisis nodal consiste en establecer ecuaciones de corriente para cada bus (para este trabajo cada bus es visto como un nodo), considerando positivas las corrientes que llegan al nodo y negativas las que salen. Suponga que el sistema tiene  $n$  nodos conectados entre sí. Además, los nodos adyacentes entre sí se denotan por  $i$  y  $j$ , se interconectan por una impedancia  $\hat{y}_{ij}$  por donde fluye una corriente  $I_{ij}$ , de el nodo  $i$  al nodo  $j$  como se muestra en la Figura 2.11 por lo que la ecuación de corriente entre dichos nodos es

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{\hat{z}_{ij}} = \hat{y}_{ij}(V_i - V_j) \quad (2.12)$$

suponiendo un  $k$ -ésimo nodo genérico, como se muestra en la Figura 2.12 entonces

$$\begin{aligned} I_{k0} &= \hat{y}_{k0}V_k \\ I_{k1} &= \hat{y}_{k1}(V_k - V_1) \\ I_{k2} &= \hat{y}_{k2}(V_k - V_2) \\ &\vdots \\ I_{kn} &= \hat{y}_{kn}(V_k - V_n) \end{aligned}$$

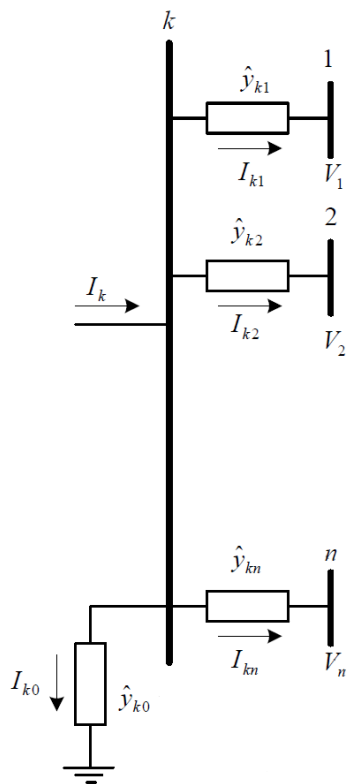


Figura 2.12: Bus o nodo genérico

siendo las  $I_{kn}$  las corrientes que salen del nodo  $k$  hacia algún  $n$ -ésimo nodo. Si suponemos que la corriente que entra al nodo  $k$  es  $I_k$ , entonces se puede encontrar la siguiente ecuación en el nodo  $k$

$$I_k = I_{k0} + I_{k1} + I_{k2} + \dots + I_{kn}$$

tomando en cuenta la ecuación (2.12) se puede escribir

$$I_k = \hat{y}_{k0} + \hat{y}_{k1}(V_k - V_1) + \hat{y}_{k2}(V_k - V_2) + \dots + \hat{y}_{kn}(V_k - V_n)$$

finalmente esta ecuación puede ser escrita de manera más compacta como

$$I_k = V_k \sum_{j=0}^n \hat{y}_{kj} - \sum_{j=1}^n \hat{y}_{kj} V_j$$

Notese que los términos

- $\sum_{j=0}^n \hat{y}_{kj} = Y_{kk}$ : Representa la sumatoria de todas las admitancias conectadas al nodo  $k$ .
- $-\hat{y}_{kj} = Y_{kj}$ : Representa la admitancia mutua entre los nodos  $k$  y  $j$ .

Por lo que, la ecuación de corriente en el nodo  $k$  es

$$I_k = \sum_{j=1}^n Y_{kj} V_j$$

Para generalizar el estudio, para el sistema con  $n$  nodos, las ecuaciones se pueden ver como

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots & Y_{2N} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & Y_{N3} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Esto es

$$I = YV$$

donde

$N$  es el número de nodos

$Y_{ii}$  es la admitancia propia del  $i$ -ésimo nodo, o bien la suma de las admitancia conectadas en el nodo  $i$

$Y_{ij}$  es la admitancia mutua entre los nodos  $i$  y  $j$  o bien el negativo de la suma de todas las admitancias entre los nodos  $i$  y  $j$



$V_i$  es el fasor del  $i$ -ésimo voltaje

$I_i$  es el fasor de la  $i$ -ésima corriente

la matriz de admitancia de nodo  $Y_{bus}$  cumple las siguientes propiedades

- Es una matriz cuadrada de  $N \times N$ , con  $N$  igual al número de nodos
- Es simétrica, es decir  $Y_{ij} = Y_{ji}$
- Los elementos de la diagonal principal son negativos, mientras que los elementos fuera de la diagonal son positivos.

Además la admitancia  $Y = G + jB$  donde la parte real ( $G$ ) se conoce como la conductancia y la parte imaginaria ( $B$ ) es la susceptancia, mientras que la inversa de la admitancia se le conoce como impedancia  $Z$  esto es

$$Y = Z^{-1}$$

■ **Ecuaciones de flujo de potencia:**

Siguiendo el análisis echo en Kundur (1994) para plantear las ecuaciones de flujo de potencia suponemos que la corriente en el nodo  $k$  puede ser escrita como

$$I_k = \sum_{j=1}^n Y_{kj} V_j$$

y por tanto la potencia aparente inyectada al nodo es

$$S_k^* = V_k^* I_k$$

lo que implica

$$S_k^* = V_k^* \left[ \sum_{j=1}^n Y_{kj} V_j \right] = P_k - jQ_k$$

donde la  $P_k$  representa a la potencia activa y  $Q_k$  es la potencia reactiva, y pueden ser escritas como

$$P_k = \mathbf{Re} \left\{ V_k^* \sum_{j=1}^n Y_{kj} V_j \right\}; \quad Q_k = -\mathbf{Im} \left\{ V_k^* \sum_{j=1}^n Y_{kj} V_j \right\}$$

además los voltajes se pueden escribir como

$$V_k = |V_k| \angle \delta_k \quad V_j = |V_j| \angle \delta_j$$

y que la admitancia compleja es de la forma  $Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik} \in \mathbb{C}$ , donde  $G_{ik} \in \mathbb{R}$  es la *conductancia* y  $B_{ik} \in \mathbb{R}$  es la *suceptancia*, cuando no existe conexión entre los nodos el elemento  $Y_{ik} = 0$ , entonces los flujos de potencia entre cada pareja de nodos están dados por las ecuaciones

$$P_{ik} = G_{ii}V_i^2 - V_iV_k[G_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) + B_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k)] \quad (2.14)$$

$$Q_{ik} = B_{ii}V_i^2 - V_iV_k[G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) + B_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k)] \quad (2.15)$$

que determinan las condiciones de operación en estado estable del sistema como se muestra en Elgerd (1981).

Las potencias activas y reactivas para el  $i$ -ésimo nodo pueden ser escritas como

$$P_i = G_{ii}V_i^2 - \sum_{k \in \mathcal{N}_i} V_iV_k[G_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) + B_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k)] \quad (2.16)$$

$$Q_i = -B_{ii}V_i^2 \sum_{k \in \mathcal{N}_i} V_iV_k[G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) - B_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k)] \quad (2.17)$$

En las ecuaciones (2.16) el primer término corresponde a los elementos conectados únicamente en el  $i$ -ésimo nodo, es decir  $G_{ii} = \hat{G}_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} G_{ik}$  y  $B_{ii} = \hat{B}_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} B_{ik}$ , el segundo término está relacionado con la interconexión de los nodos vecinos, con  $\mathcal{N}_i$  el conjunto de todos los nodos vecinos al nodo en cuestión.

### ■ Solución a las ecuaciones de flujos de Potencia:

En la literatura existen muchos métodos numéricos que se pueden aplicar para la solución de los flujos de potencia como se menciona en Kundur (1994), Milano (2010) por citar algunos autores, un método muy conocido es el de *Newton-Raphson*, este método es una técnica iterativa para solucionar un conjunto de ecuaciones no lineales. Para esto, considera el siguiente conjunto de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_n \end{aligned} \quad (2.18)$$

Las iteraciones inician con un valor inicial estimado de  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  para las  $n$  incógnitas y si  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  son los términos de corrección necesarios para la estimación de modo que las ecuaciones se satisfagan de manera exacta, tenemos

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) &= b_1 \\ f_2(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ f_n(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) &= b_n \end{aligned} \quad (2.19)$$

Cada una de las ecuaciones anteriores puede ser expandida usando series de Taylor. La expansión por series de Taylor para la  $i$ -ésima ecuación es

$$f_i(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n + T.A.O = b_i$$

los términos de alto orden (T.A.O) pueden ser despreciados, si la solución estimada inicial tiende a la solución real, lo que resulta en un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, que en forma matricial se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} b_1 - f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ b_2 - f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ b_n - f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

o lo que es igual

$$\Delta f = \mathbf{J} \Delta x \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se conoce como el *Jacobiano*. Si los estimados  $x_1^0, \dots, x_n^0$  son exactos, entonces  $\Delta f$  y  $\delta x$  tienden a cero. Sin embargo, como  $x_1^0, \dots, x_n^0$  son sólo valores estimados, los errores  $\Delta f$  son finitos. La ecuación (2.20) proporciona una relación lineal entre los errores  $\Delta f$  y los términos de corrección  $\Delta x$  a través del Jacobiano de las ecuaciones simultáneas. Una solución para  $\Delta x$  puede ser obtenida al aplicar cualquier método adecuado para la solución de un conjunto de ecuaciones lineales. Los valores actualizados de  $x$  son calculados de

$$x_i^1 = x_i^0 + \Delta x_i$$

El proceso es repetido hasta que los errores  $\Delta f_i$  lleguen a ser iguales a una tolerancia especificada. Las iteraciones tienen una convergencia cuadrática y el Jacobiano tiene que ser recalculado en cada paso. Para aplicar el método de *Newton-Raphson*, cada ecuación compleja representada por

$$\frac{P_k - jQ_k}{\tilde{V}_k^*} = \sum_{i=1} Y_{ki} \tilde{V}_i \quad (2.21)$$

tiene que ser reescrita como dos ecuaciones sólo con parte real, en términos de dos variables reales en lugar de una variable compleja. Esto por que la ecuación (2.21) no es una función analítica de los voltajes complejos junto con el término conjugado  $\tilde{V}_k^*$  y como una consecuencia las derivadas complejas no existen.

Para facilidad de la programación del método numérico, se pasan las ecuaciones de flujo de potencia a coordenadas polares. Por lo que para cada  $k$ -ésimo nodo, tenemos

$$\tilde{S}_k = P_k + jQ_k = \tilde{V}_k \tilde{I}_k^*$$

de la ecuación (2.13) tenemos

$$\tilde{I}_k = \sum_{m=1}^n \tilde{Y}_{km} \tilde{V}_m$$

al combinar éstas dos últimas ecuaciones se puede escribir

$$P_k + jQ_k = \tilde{V}_k \sum_{m=1}^n (G_{km} - jB_{km}) \tilde{V}_m^*$$

el producto de los fasores  $\tilde{V}_k$  y  $\tilde{V}_m$  puede ser expresado como

$$\tilde{V}_k \tilde{V}_m^* = (V_k \exp^{j\theta_k})(V_m \exp^{-j\theta_m}) = V_k V_m \exp^{j(\delta_k - \delta_m)} = V_k V_m (\cos \delta_{km} + j \sin \delta_{km})$$

donde  $\delta_{km} = \delta_k - \delta_m$ , como se menciono antes, las ecuaciones de flujo de potencia  $P_i$  y  $Q_i$  pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} P_k &= V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \\ Q_k &= V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde las conductancias y las suceptancias mutuas entre los nodos  $m$  y  $k$  son

$$\begin{aligned} G_{km} &= G_{mk} \\ B_{km} &= B_{mk} \end{aligned}$$

siendo  $G_{kk}$  y  $B_{kk}$  las conductancias y suceptancias del  $k$ -ésimo nodo respectivamente.

Note que las ecuaciones (2.16) son exactamente las mismas ecuaciones que (2.22), sólo que en éstas últimas el voltaje  $V_k$  se encuentra factorizado. Entonces  $P$  y  $Q$  de cada uno de los nodos (o buses) son funciones de la magnitud del voltaje  $V$  y el ángulo de fase  $\delta$  de todos los nodos.

Para solucionar los flujos a través de un método iterativo se requiere de las conocidas ecuaciones de ajuste, que se encargan de proporcionar una medición de la diferencia de potencias, entre los valores de potencia calculados como funciones de voltajes y ángulos de fase y el valor actual de las potencias inyectadas al  $k$ -ésimo nodo, dichas ecuaciones de ajuste son

$$0 = \Delta P_k = P_k^{inj} - V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \quad (2.23)$$

$$0 = \Delta Q_k = Q_k^{inj} - V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) \quad (2.24)$$

El método de Newton-Raphson organiza las variables del sistema eléctrico por los ángulos de fase, seguidos por las magnitudes de los voltajes de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_1 \\ \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \vdots \\ \Delta\delta_{N_{bus}} \\ \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \vdots \\ \Delta V_{N_{bus}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \vdots \\ \Delta P_{N_{bus}} \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \vdots \\ \Delta Q_{N_{bus}} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta\delta_i &= \delta_i^{k+1} - \delta_i^k \\ \Delta V_i &= V_i^{k+1} - V_i^k \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son resueltas utilizando factorización LU con sustitución forward/backward. El Jacobiano típicamente se divide en cuatro submatrices, donde

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \Delta \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial \Delta V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \Delta \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial \Delta V} \end{bmatrix}$$

Cada submatriz representa las derivadas parciales de cada una de las ecuaciones de ajuste con respecto de cada una de las incógnitas. Se tienen ocho tipos diferentes de derivadas parciales, dos tipos de derivadas parciales por cada ecuación de ajuste, las derivadas se pueden resumir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_k}{\partial \delta_k} &= V_k \sum_{m=1}^n V_m Y_{km} \sin(\delta_{km}) + V_k^2 Y_{kk} \\ \frac{\partial P_k}{\partial \delta_m} &= -V_k V_m Y_{ij} \sin(\delta_{km}) \\ \frac{\partial P_k}{\partial V_k} &= -V_k \sum_{m=1}^n V_m Y_{km} \cos(\delta_{km}) - 2V_k Y_{kk} \\ \frac{\partial P_k}{\partial V_m} &= -V_k Y_{km} \cos(\delta_{km}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_k} &= -V_k \sum_{m=1}^n V_m Y_{km} \cos(\delta_{km}) - V_k^2 Y_{kk} \\ \frac{\partial P_k}{\partial \delta_m} &= V_k V_m Y_{ij} \cos(\delta_{km}) \\ \frac{\partial P_k}{\partial V_k} &= V_k \sum_{m=1}^n V_m Y_{km} \sin(\delta_{km}) + 2V_k Y_{kk} \\ \frac{\partial P_k}{\partial V_m} &= V_k Y_{km} \sin(\delta_{km}) \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Modelado

En este capítulo se muestra el modelado de cada uno de los sub-sistemas que conforman a la microred por separado, así como, se muestra que cada uno de estos posee una estructura Hamiltoniana, más adelante se utilizan todos estos elementos para interconectarlos y encontrar el modelo dinámico de la microred completa. Es importante notar que los sub-sistemas presentados poseen puertos que en este contexto se conocen como *puertos de interconexión*, se utilizan para interconectar todos los sub-sistemas y así conservar la estructura Hamiltoniana exhibida por cada uno de los sub-sistemas por separado.

Para realizar los modelos matemáticos utilizados en este trabajo, se hace uso de las técnicas y conceptos descritos en el capítulo 2, bajo la premisa, un sistema es la interconexión de elementos ideales, vistos como almacenadores de flujo y de esfuerzo, elementos disipadores y fuentes.

### 3.1. Modelo dinámico de la red de interconexión

Bajo el principio presentado en el capítulo 2 anterior, se encontrarán los modelos dinámicos para diferentes circuitos eléctricos denominados redes a lo largo del trabajo, se asumirá que la red es sin pérdidas o de manera equivalente, que las resistencias asociadas a los inductores son despreciables, lo que se puede justificar ya que las líneas de transmisión son predominantemente inductivas y por ahora son las más utilizadas en este tipo de escenarios.

Aunque en este trabajo se considera un circuito con topología malla, también es posible considerar otro tipo de topologías como las estructuras radiales mencionadas en Kundur (1994). Las características de las redes con topología malla son las siguientes:

- F.1.** Todas las fuentes están conectadas con todas las cargas.
- F.2.** Las cargas están conectadas en paralelo con un capacitor.
- F.3.** Cada línea de transmisión se compone sólo por un inductor.

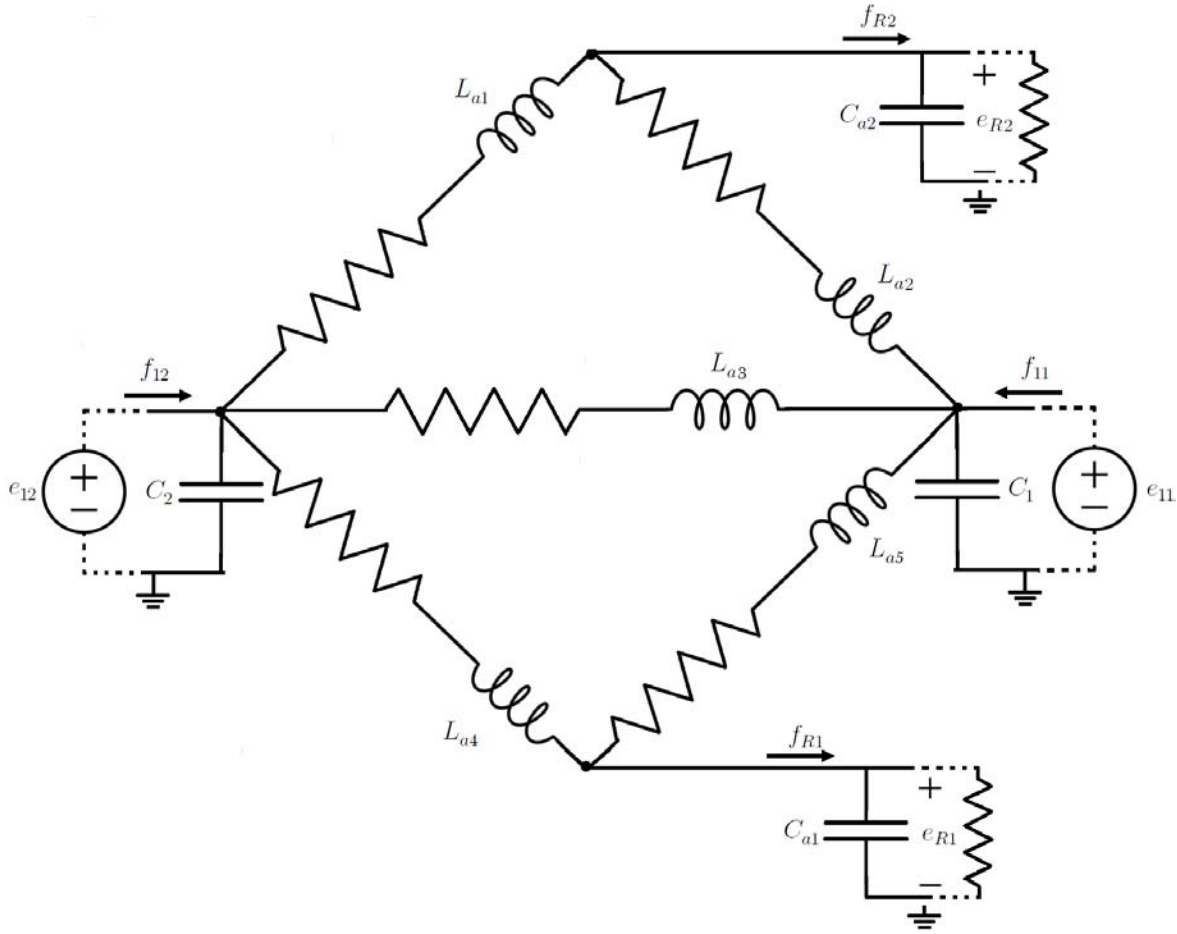


Figura 3.1: Ejemplo de una red con topología malla, que cuenta con dos fuentes y dos cargas.

**F.4.** Existen líneas de transmisión que conectan a una fuente con otra fuente.

En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo ilustrativo con dos fuentes y dos cargas que cumple con tener una topología malla, es importante notar que en los puertos correspondientes de carga se colocó un resistor, pero también es posible interconectar cualquier tipo de carga lineal, lo mismo por el lado de las fuentes, como se demostrará a lo largo de esta sección lo importante es identificar los puertos de interconexión de la red, tanto por el lado de cargas como por el lado de fuentes.

Estas características serán consideradas en el procedimiento de modelado que se desarrolla bajo un enfoque de teoría de grafos (Brayton-Moser (1964) y Wellstead (1979)). De hecho, los resultados presentados en esta sección siguen de cerca a lo presentado en Avila (2015).

Considere que la red está compuesta por  $n$  nodos y  $b$  bordes, entonces existen  $n - 1$  restricciones de corriente independientes y  $b - (n - 1)$  restricciones de voltaje independientes, establecidas por la aplicación de las leyes de Kirchhoff como se menciona en Brayton-Moser (1964). Por otra parte, para un árbol y su correspondiente co-árbol, estas limitaciones se



pueden obtener al considerar los cutsets y loopsets básicos de la gráfica, lo que nos lleva a la expresión

$$\begin{bmatrix} I & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_t \\ f_c \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

para las restricciones de corriente, mientras que las restricciones de voltaje se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} -H^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t \\ e_c \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

donde  $f_t \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $e_t \in \mathbb{R}^{n-1}$ , son las corrientes y voltajes, respectivamente, de las ramas (bordes asociados con el árbol) y  $f_c \in \mathbb{R}^{b-(n-1)}$ ,  $e_c \in \mathbb{R}^{b-(n-1)}$  son las corrientes y los voltajes, respectivamente, de las cuerdas (bordes asociados con el co-árbol). La matriz  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz identidad, mientras que  $H \in \mathbb{R}^{(n-1) \times b-(n-1)}$  es la submatriz de incidencia, de manera que

$$\begin{aligned} f_t &= -Hf_c \\ e_c &= H^T e_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

Asúmase que la red está compuesta por  $n_1$  fuentes<sup>1</sup>. Entonces, considerando **F.1**, se tendrán  $n_1$  capacitores, esto es el número de fuentes será igual al número de capacitores de la red y debido a **F.2**, el número de cargas será el mismo que el número de capacitores. Resumiendo el número de cargas, fuentes y capacitores será  $n_1$ . El número de inductores se denota por  $n_2$ .

Por simplicidad se considera que las relaciones constitutivas para los elementos pasivos están dadas por funciones lineales. Como una consecuencia, la energía almacenada total por la red toma la forma

$$H_a(x_3, x_4) = \frac{1}{2}x_3^T C_a^{-1} x_3 + \frac{1}{2}x_4^T L_a^{-1} x_4 \quad (3.4)$$

donde  $x_3 = \text{col}\{x_{3i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ , es el vector de cargas en los capacitores,  $x_4 = \text{col}\{x_{4i}\} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $i = 1, \dots, n_2$ , es el vector de flujos en los inductores,  $C_a = \text{diag}\{C_{ai}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  es la matriz de capacitancias (constantes) y  $L_a = \text{diag}\{L_{ai}\} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  es la matriz de inductancias (constantes).

En las definiciones proporcionadas en el capítulo 2, se define que las variables de puerto en los capacitores e inductores pueden ser escritas como

$$\dot{x}_{3i} = f_{Ci}; \quad e_{Ci} = \frac{\partial H_a(x_3, x_4)}{\partial x_{3i}} \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_{4i} = e_{Li}; \quad f_{Li} = \frac{\partial H_a(x_3, x_4)}{\partial x_{4i}} \quad (3.6)$$

donde  $f_{Ci}$ ,  $e_{Ci}$  es la corriente y el voltaje de el  $i$ -ésimo capacitor,  $i = 1, \dots, n_1$ , and  $f_{Li}$ ,  $e_{Li}$  corresponden a las variables de puerto de el  $i$ -ésimo inductor,  $i = 1, \dots, n_2$ .

---

<sup>1</sup>Se mostrará a lo largo de este trabajo que las fuentes están dadas por los  $n_1$  convertidores de potencia que se conecten a la red.

En cuanto la relación constitutiva para las cargas quedará determinada según la carga que se conecte, por lo tanto las variables de puerto correspondientes se dejarán sólo indicadas por el momento como  $f_{Ri}$ ,  $e_{Ri}$ .

Antes de proceder con la formulación del modelo de la red, se representan las variables de los elementos pasivos en forma vectorial. Por lo tanto, todas las variables de la misma naturaleza se apilan en un único vector para obtener que  $f_C = \text{col}\{f_{Ci}\} = \text{col}\{\dot{x}_{3i}\} = \dot{x}_3 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $e_C = \text{col}\{e_{Ci}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $f_L = \text{col}\{f_{Li}\} \in \mathbb{R}^{n_2}$  y  $e_L = \text{col}\{e_{Li}\} = \text{col}\{\dot{x}_{4i}\} = \dot{x}_4 \in \mathbb{R}^{n_2}$ .

Ya que la topología de la red eléctrica está completamente caracterizada por la matriz de sub-incidencia básica  $H$  y las restricciones (3.3). Para poder encontrar el modelo matemático es necesario sustituir las relaciones constitutivas de cada uno de los elementos, esto es: fuentes dadas por los convertidores de potencia, almacenadores de energía (Capacitores e inductores) y Disipadores (Resistencias).

Bajo la notación presentada, al modelar la red se hacen las suposiciones estándar y se consideran elementos del árbol a todas las fuentes y todos los capacitores, mientras que en el co-árbol están todos los inductores y cargas, mientras que las resistencias de la línea se deprecian ya que se consideran líneas sin pérdidas. De tal manera que las relaciones en (3.3) toman la forma para los flujos y esfuerzos del árbol:

$$f_t = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_C \end{bmatrix}, \quad e_t = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_C \end{bmatrix},$$

mientras que para los flujos y esfuerzos del co-árbol son de la forma

$$f_c = \begin{bmatrix} f_R \\ f_L \end{bmatrix}, \quad e_c = \begin{bmatrix} e_R \\ e_L \end{bmatrix}$$

que nos lleva a particionar a la matriz  $H$  como

$$H = \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} \\ H_{CR} & H_{CL} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La manera de particionar a la matriz de sub-incidencia resulta de recordar que dicha matriz representa un mapeo lineal de las variables de co-árbol a las variables de árbol, por lo que los renglones de la matriz se asocian con los elementos del árbol y las columnas con los elementos del co-árbol, esto es, las columnas de la primer partición se asocian con cargas y las de la segunda partición con inductores, que son los elementos del co-árbol. Por otro lado, los renglones de la primer partición se asocian con fuentes y los de la segunda partición con capacitores, que corresponden a los elementos del co-árbol. Cada sub-matriz representa las interconexiones entre los diferentes elementos del árbol y del co-árbol y los primeros subíndices representan a los elementos del árbol mientras que los segundos a los elementos co-árbol, entonces

$H_{1R} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  indica cuáles de las cargas (posiblemente resistores) del co-árbol inciden en cada uno de los cutsets básicos de cada fuente del árbol.

$H_{1L} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  indica cuáles de los inductores del co-árbol inciden en cada uno de los cutsets básicos de cada fuente del árbol.

$H_{CR} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  indica cuáles de las cargas (posiblemente resistores) del co-árbol inciden en cada uno de los cutsets básicos de cada capacitor del árbol.

$H_{CL} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  indica cuáles de los inductores del co-árbol inciden en cada uno de los cutsets básicos de cada capacitor del árbol.

Tomando en cuenta la matriz  $H$  junto con (3.3) es posible escribir

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} \\ H_{CR} & H_{CL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_R \\ f_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_R \\ e_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1R}^T & H_{CR}^T \\ H_{1L}^T & H_{CL}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_C \end{bmatrix}$$

donde note que  $f_C = \dot{x}_3$ ,  $f_L = L_a^{-1}x_4$ ,  $e_L = \dot{x}_4$  y finalmente  $e_C = C_a^{-1}x_3$  con lo que se puede escribir

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} \\ H_{CR} & H_{CL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_R \\ L_a^{-1}x_4 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} e_R \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1R}^T & H_{CR}^T \\ H_{1L}^T & H_{CL}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1 \\ C_a^{-1}x_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

de las ecuaciones (3.8) y (3.9), el modelo dinámico de la red se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -H_{CR}f_R - H_{CL}L_a^{-1}x_4 \\ \dot{x}_4 &= H_{1L}^T e_1 + H_{CL}^T C_a^{-1}x_3 \\ f_1 &= -H_{1R}f_R - H_{1L}L_a^{-1}x_4 \\ e_R &= H_{1R}^T e_1 + H_{CR}^T C_a^{-1}x_3 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que la topología considerada es tipo malla se esta considerando una red con topología malla, y dado que cada línea de transmisión se compone sólo por un inductor se cumple que  $H_{1R} = 0$  mientras que bajo la premisa de que las cargas están conectadas en paralelo con un capacitor se tiene que  $H_{CR} = I$  como se demuestra en el apéndice A.

Bajo estas condiciones, el comportamiento de la dinámica de la red con topología malla se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -If_R - H_{CL}L_a^{-1}x_4 \\ \dot{x}_4 &= H_{1L}^T e_1 + H_{CL}^T C_a^{-1}x_3 \\ e_R &= C_a^{-1}x_3 \\ f_1 &= -H_{1L}L_a^{-1}x_4 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Considerando la función de almacenamiento de energía de la red (3.4) podemos escribir al sistema (3.10), con una estructura que permita ver de forma más clara los puertos de interconexión para cargas y fuentes de la red, esto es:

$$\dot{x}_{34} = \mathbb{J}_{34} \nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4) + \begin{bmatrix} -I f_R \\ H_{1L}^T e_1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

sujetas a las restricciones

$$e_R = \frac{\partial H_a(x_3, x_4)}{\partial x_3}$$

$$f_1 = -H_{1L} \frac{\partial H_a(x_3, x_4)}{\partial x_4}$$

donde  $x_{34} = [x_3 \ x_4]^T \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  mientras que

$$\mathbb{J}_{34} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} = -\mathbb{J}_{34}^T \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$$

$$\nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_a(x_3, x_4)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H_a(x_3, x_4)}{\partial x_4} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$$

donde  $\mathbf{0}_{n_1} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  y  $n_1 \times n_1$ ,  $\mathbf{0}_{n_2} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  son matrices cuadradas con todas sus entradas iguales a cero.

Es de vital importancia para este trabajo, identificar claramente cuales serán los puertos de la red que servirán para interconectar fuentes y cargas, nótese que en el sistema (3.11), se han dejado libres cuatro puertos de interconexión, dos de ellos correspondientes a las variables de puerto de las cargas ( $e_R$  y  $f_R$ ) y los otros dos correspondientes a las fuentes ( $e_1$  y  $f_1$ ) de manera ilustrativa esto se puede ver claramente con el ejemplo mostrado en la Figura 4.1. Este resultado es muy importante ya que se habilita la posibilidad de interconectar cualquier fuente con estructura compatible (estructura Hamiltoniana) a cualquier carga con la misma estructura, lo que hace bastante general este resultado y permitirá el estudio de sistemas eléctricos de potencia de manera sistemática como se muestra en los capítulos posteriores.

## 3.2. Modelo dinámico de los convertidores de Potencia

El modelo presentado para los convertidores de potencia conocidos en la literatura relacionada como *modelo promedio*, estos son modelos cuya base es la consideración de dispositivos que conmutan a alta frecuencia, por ejemplo bajo una política de modulación por ancho de pulso. La estructura considerada para el convertidor de potencia es una de las más simples

que cumple con tener una estructura Hamiltoniana. Sin embargo, se puede demostrar que las topologías habituales implementadas en la práctica para este tipo de dispositivos pueden ser escritas también en forma Hamiltoniana, sin importar la estructura del dispositivo de conmutación y si los elementos pasivos son lineales o no lineales.

En la Figura 3.2 se presenta la topología considerada para el  $i$ -ésimo convertidor de potencia. Este se compone por una fuente de voltaje, con una tensión estrictamente positiva  $V_i > 0$ , un dispositivo de conmutación, cuyo efecto es modular el voltaje  $V_i$ , y un filtro LC de segundo orden.

Si, para cada convertidor, se denota la corriente en el inductor por  $i_i \in \mathbb{R}$ , el voltaje en el

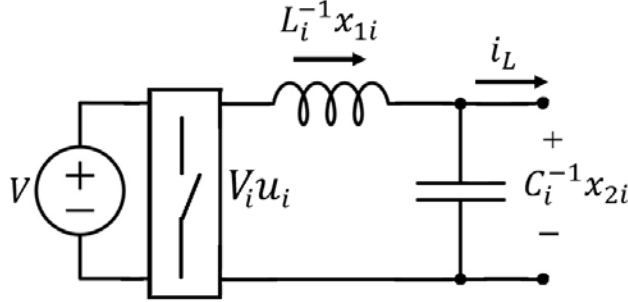


Figura 3.2: Convertidor de potencia DC/AC

capacitor por  $V_{ci} \in \mathbb{R}$ , y la señal de modulación del dispositivo de conmutación por  $u_i \in \mathbb{R}$ , aplicando las leyes Kirchhoff tenemos

$$\begin{aligned} L_i \frac{di_i}{dt} + V_{ci} &= V_i u_i \\ i_{Li} + C_i \frac{dV_{ci}}{dt} - i_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ahora, para poder ver de forma más clara la estructura Hamiltoniana exhibida por los convertidores de potencia, se cambia la notación a flujos en los inductores y cargas en los capacitores, recordando que la carga en los capacitores es igual a la capacitancia por el voltaje en el capacitor ( $q_i = C_i V_{ci}$ ) y el flujo en los inductores es igual a la inductancia por la corriente ( $\lambda_i = L_i i_i$ ), el flujo inductor se denota por  $x_{1i} \in \mathbb{R}$  y la carga del capacitor por  $x_{2i} \in \mathbb{R}$ , con lo que el modelo (3.12) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= -C_i^{-1} x_{2i} + V_i u_i \\ \dot{x}_{2i} &= L_i^{-1} x_{1i} - i_{Li} \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde se ha supuesto una relación constitutiva lineal tanto para los inductores como para los capacitores, determinadas para cada convertidor por la inductancia  $L_i$  y la capacitancia  $C_i$ . Considerando la función de energía almacenada

$$H_{ci}(x_{1i}, x_{2i}) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{2} L_i^{-1} x_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{2} C_i^{-1} x_{2i}^2 \quad (3.14)$$

el modelo (3.13) se puede reescribir como un sistema Hamiltoniano controlado por puerto de la siguiente forma

$$\dot{x}_{12i} = \mathbb{J}_{12i} \nabla_{x_{12i}} H_{ci}(x_{1i}, x_{2i}) + G_{12i} u_i - \begin{bmatrix} 0 \\ i_{Li} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde  $x_{12i} = [x_{1i} \ x_{2i}]^T \in \mathbb{R}^2$  mientras que

$$\mathbb{J}_{12i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{J}_{12i}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; \quad G_{12i} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla_{x_{12i}} H_{ci}(x_{1i}, x_{2i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{ci}(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{1i}} \\ \frac{\partial H_{ci}(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{2i}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Si se consideran  $n_1$  convertidores de potencia, cada uno tendrá un modelo dinámico como (3.13), apilados en forma vectorial se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -C^{-1}x_2 + Vu \\ \dot{x}_2 &= L^{-1}x_1 - i_L \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{col}\{x_{1i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}; & i_L &= \text{col}\{i_{Li}\} \in \mathbb{R}^{n_1} \\ x_2 &= \text{col}\{x_{2i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}; & V &= \text{diag}\{V_i\}^T \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \\ C^{-1} &= \text{diag}\{C_i^{-1}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}; & u &= \text{col}\{u_i\} \in \mathbb{R}^{n_1} \\ L^{-1} &= \text{diag}\{L_i^{-1}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}; \end{aligned}$$

Entonces, la función de energía almacenada se puede escribir como

$$H_c(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^T L^{-1}x_1 + \frac{1}{2}x_2^T C^{-1}x_2 \quad (3.17)$$

De la misma manera que para el  $i$ -ésimo inversor (3.13), el comportamiento dinámico (3.16) de los convertidores de potencia se puede escribir en forma Hamiltoniana como

$$\dot{x}_{12} = \mathbb{J}_{12} \nabla_{x_{12}} H_c(x_1, x_2) + G_{12} u - \begin{bmatrix} 0 \\ i_L \end{bmatrix}$$

donde  $x_{12} = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^{2n_1}$   $\mathbb{J}_{12} = \text{diag}\{\mathbb{J}_{12i}\} = -\mathbb{J}_{12}^T$  y  $G_{12} = \text{diag}\{G_{12i}\}$  mientras que

$$\mathbb{J}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{J}_{12}^T \in \mathbb{R}^{2n_1 \times 2n_1}; \quad G_{12} = \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0}_{n_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_1 \times n_1}$$

$$\nabla_{x_{12}} H_c(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_c(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_c(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_1}$$

donde  $\mathbf{0}_{n_1} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  es una matriz cuadrada con todas sus entradas iguales a cero, que sirve para hacer compatible el producto  $G_{12}u$ .

Note que las variables de puerto para el modelo dinámico de los convertidores de potencia están dadas por el voltaje en el capacitor  $C^{-1}x_2 \in \mathbb{R}$  y por la salida de corriente  $i_L \in \mathbb{R}$ , para cada convertidor de potencia; mas adelante se mostrará que estas variables de puerto son las que se utilizan para interconectar a los convertidores de potencia con la red.

### 3.3. Modelo dinámico de la carga

Siguiendo el enfoque de modelado utilizado a lo largo de este trabajo y tomando de referencia el trabajo Jayawardhana (2007), se encuentra el modelo dinámico para las cargas que se interconectarán con la red, para dichas cargas se consideran circuitos RLC que consisten en la interconexión de elementos pasivos ( $n_L$  inductores y  $n_C$  capacitores) y elementos estáticos ( $n_R$  resistores,  $n_{vs}$  fuentes de voltaje).

Si consideramos que  $v_L, x_5, i_L \in \mathbb{R}^{n_L}$  son el voltaje, flujo y corriente a través de los inductores, respectivamente, mientras que,  $i_C, x_6, v_C \in \mathbb{R}^{n_C}$  son la corriente, la carga y el voltaje en el capacitor, respectivamente. Además  $x_5 = \text{col}\{x_{5i}\} \in \mathbb{R}^{n_L}$  con  $i = 1, \dots, n_L$  y  $x_6 = \text{col}\{x_{6j}\} \in \mathbb{R}^{n_C}$  con  $j = 1, \dots, n_C$ , entonces, para los circuitos que serán considerados como carga, se puede definir una función de energía almacenada

$$H_l(x_5, x_6) = \frac{1}{2}x_5^T L_R^{-1}x_5 + \frac{1}{2}x_6^T C_R^{-1}x_6 \quad (3.18)$$

donde  $L_R = \text{diag}\{L_{Ri}\} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$  y  $L_C = \text{diag}\{L_{Ci}\} \in \mathbb{R}^{n_C \times n_C}$ .

Se sabe de las ecuaciones (2.8) y (2.9) que las variables de puerto para los capacitores e inductores están definidas por las relaciones constitutivas

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 &= v_L; & i_L &= \frac{\partial H_l(x_5, x_6)}{\partial x_5} \\ \dot{x}_6 &= i_C; & v_C &= \frac{\partial H_l(x_5, x_6)}{\partial x_6} \end{aligned} \quad (3.19)$$

por lo tanto con base a los argumentos proporcionados en el capítulo 2, podemos escribir el modelo dinámico de la carga de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 &= -\Gamma C_R^{-1}x_6 - V_{R_L} + Bv_{vs} \\ \dot{x}_6 &= -\Gamma^T L_R^{-1}x_5 - i_{R_C} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sin pérdida de generalidad como se menciona en Jayawardhana (2007), se puede considerar que todas las resistencias controladas por corriente están en serie con los inductores y todas las resistencias controladas por voltaje están en paralelo con los capacitores como se muestra

en la Figura 3.3, entonces se puede escribir  $V_{R_{Li}} = \hat{v}_{R_{Li}}(i_{Li})$  para los resistores controlados por corriente y  $i_{R_{Ci}} = \hat{i}_{R_{Ci}}(V_{Ci})$  además, si se consideran resistencias lineales y considerando las relaciones constitutivas 3.19, tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{v}_{R_{Li}}(i_{Li}) &= R_{Li} \frac{\partial H_l(x_5, x_6)}{\partial x_5} = R_{Li} L_R^{-1} x_5 \\ \hat{i}_{R_{Ci}}(V_{Ci}) &= R_{Ci}^{-1} \frac{\partial H_l(x_5, x_6)}{\partial x_6} = R_{Ci}^{-1} C_R^{-1} x_6\end{aligned}$$

Bajo estas condiciones la dinámica del circuito correspondiente a la carga escrito de forma Hamiltoniana es

$$\dot{x}_{56} = [\mathbb{J}_{56} - R_{56}] \nabla_{x_{56}} H_R(x_5, x_6) + g v_s \quad (3.21)$$

con

$$\mathbb{J}_{56} = \begin{bmatrix} 0 & -\Gamma \\ \Gamma^T & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -B \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde el vector de estados es  $x_{56} = [x_5 \ x_6]^T \in \mathbb{R}^{n_L+n_C}$  con  $v_s$  entradas de voltaje (que se encuentran en serie con los inductores de la carga),  $B \in \mathbb{R}^{n_L \times n_{vs}}$  la matriz de entradas de rango completo con  $n_L \geq n_{vs}$  y  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n_L \times n_C}$ , la matriz que determina la topología del circuito. La dinámica esta sujeta a la restricción

$$i_{vs} = -B^T \frac{\partial H_l(x_5, x_6)}{\partial x_5} \quad (3.22)$$

Note que para que este circuito sea válido es necesario que los inductores, capacitores y resistores sean pasivos y tengan una función de energía continuamente diferenciable.

Es importante que se tenga en cuenta que  $i_{vs}$  y  $v_s$  son las variables de puerto que interconectarán a la red con las cargas, de esta forma las  $n_{vs}$  entradas a las cargas son los esfuerzos y flujos proporcionados por la red (3.10). El modelo obtenido para los circuitos que se usan como carga, son también redes y poseen una estructura muy parecida a las redes que se utilizarán para transmisión presentadas en la Sección 3.1.



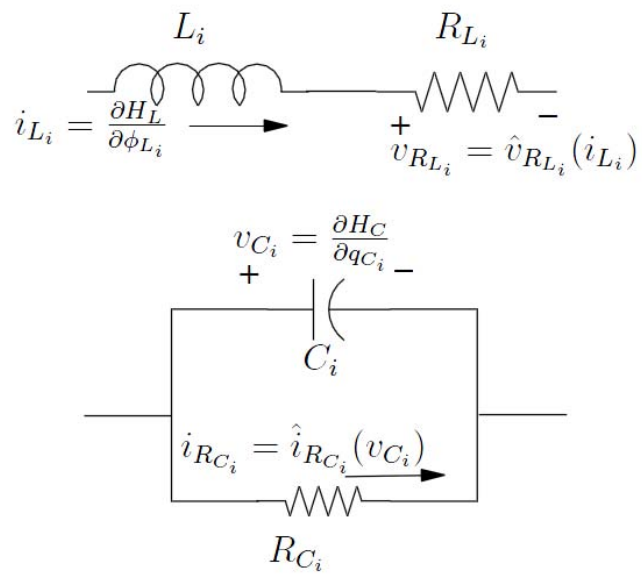


Figura 3.3: Resistores controlados por corriente en serie con inductores y resistores controlados por voltaje en paralelo con capacitores

# Capítulo 4

## Análisis de la microred

En este capítulo se muestra el modelo dinámico de la microred completa, que estará compuesta por tres partes, la red de interconexión, los inversores y las cargas que como se mostró en el capítulo 3 cada uno de estos posee una estructura Hamiltoniana, más adelante se verá a detalle que toda la microred conserva la estructura, exhibida por cada uno de los componentes de la misma. También se presenta el diseño de la ley de control a través de la técnica IDA-PBC.

Como se menciona en el capítulo 1 una microred es una red eléctrica de media o baja tensión, altamente heterogénea compuesta de generación distribuida que puede ser operada de modo normal (conectada a la red primaria) y en modo aislado (operación autónoma). Para formar la microred se requiere de generación, distribución y consumo, como en una red convencional, el capítulo 3 se enfoca en proporcionar los elementos de la microred por separado. La parte de *generación* se realiza mediante fuentes de energía no convencionales, renovables y limpias, conocidas actualmente como fuentes verdes (paneles solares, turbinas de viento, etc). Dichas fuentes se acoplan al sistema de distribución (líneas de transmisión) a través de dispositivos de electrónica de potencia conocidos como convertidores de potencia, y es con estos dispositivos que se logra ajustar la potencia de generación para satisfacer la demanda de potencia en la carga, donde se entenderá por carga a cualquier dispositivo conectado en los puertos de salida del sistema de distribución que sea capaz de demandar potencia a las fuentes. Como se mostró en el capítulo 3 todos los elementos que se utilizan para formar a la microred poseen una estructura Hamiltoniana, para la parte del sistema de **distribución** se elige una red con topología malla, ya que las redes típicas más utilizadas son las redes con topología radial<sup>1</sup>, anillo<sup>2</sup> y malla<sup>3</sup> como se menciona en Avila (2015). Dado que la red malla es la más confiable por que es una combinación de la red radial y anillo, proporciona

---

<sup>1</sup>La red radial tiene como característica la existencia de una sola trayectoria desde la fuente hasta el consumidor.

<sup>2</sup>La red anillo consiste en una configuración más confiable que la radial, ya que la carga tendrá dos trayectorias de alimentación. Por lo que, si hay una falla en el alimentador primario, el otro alimentador continuará con el suministro de energía.

<sup>3</sup>La red malla es la más complicada y confiable por que es una combinación entre la red radial y anillo. La red se puede ver como una red radial con lazos cerrados entre las cargas, donde cada carga tiene un mínimo de dos trayectorias a la fuente y la red es generalmente usada para altas densidades de cargas.

razones suficientes que hacen atractivo el estudio de la misma para el desarrollo de nuevas técnicas que se adapten a la reciente evolución de los sistemas eléctricos de potencia.

También es importante recordar que la red con topología malla, tiene una estructura Hamiltoniana que permite la interconexión con otros sistemas Hamiltonianos de manera natural como se mostró en el capítulo 3 las características particulares que posee esta topología son las mencionadas en los incisos (**F.1-F.4**), siendo estas propiedades naturales de la topología de la red, ya que la red se puede ver como una red que cuenta con una sola trayectoria desde la fuente hasta la carga además de formar lazos cerrados entre las cargas, donde cada carga tiene un mínimo de dos trayectorias a la fuente.

Y finalmente para la parte de **consumo** se utilizan dos tipos de cargas primeramente se presenta una microred con una carga puramente resistiva que facilita de visualización de los resultados, para después pasar a un escenario más realista donde se utiliza cualquier circuito RLC que actuará como carga.

## 4.1. Modelo dinámico de la microred

En esta sección se presenta el modelo de la microred, que es el resultado de interconectar las tres partes de una red eléctrica clásica (generación, distribución y consumo), esto es, se interconectan fuentes y cargas a través de la red con topología malla (3.11), las fuentes se acoplan a la red a través de los convertidores de potencia (3.16), en la Figura 4.1 se muestra el ejemplo de una microred sin pérdidas compuesta por dos convertidores de potencia y por consecuencia dos cargas, debido a la topología utilizada, en la figura es claro que en sus puertos correspondientes ya se han conectado los sistemas que serán considerados cargas y fuentes acopladas a través de los convertidores de potencia. Es importante mencionar que, como se verá a continuación, se puede recuperar una estructura Hamiltoniana para la microred.

### 4.1.1. Modelo Hamiltoniano de la microred con carga resistiva

Por simplicidad de presentación de los resultados, primeramente se presenta el modelo de la microred interconectada con cargas resistivas y se muestra que dicha microred conserva la estructura Hamiltoniana. Para después llevar el modelo de la microred a un escenario más realista al considerar como cargas circuitos RLC.

Dado el modelo dinámico (3.11) y considerando una carga lineal, con relación constitutiva

$$f_{Ri} = R_i^{-1}e_{Ri}; \quad i = 1, \dots, n_1$$

con  $f_{Ri}$ ,  $e_{Ri}$  corriente y voltaje de el  $i$ -ésimo resistor, respectivamente, y apilando cada uno en vectores, tenemos  $f_R = col\{f_{Ri}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $e_R = col\{e_{Ri}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$  y con  $R = diag\{R_i\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ , tenemos que la relación constitutiva para todas las cargas resistivas es

$$f_R = R^{-1}e_R \tag{4.1}$$

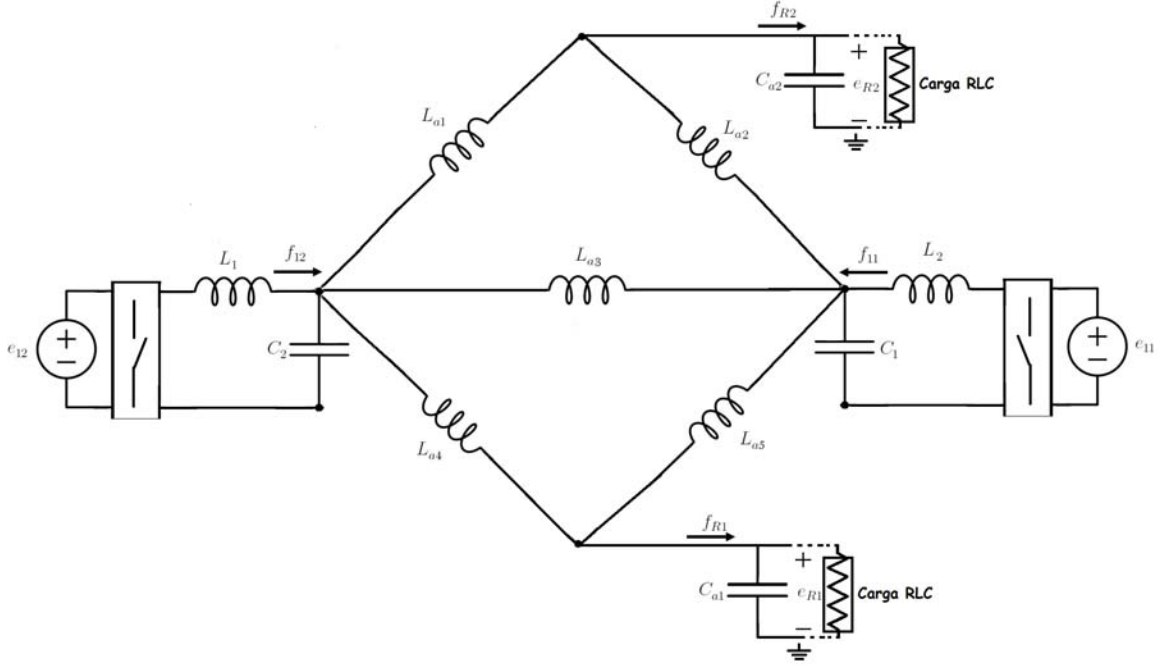


Figura 4.1: Ejemplo de una red con topología malla, que cuenta con dos fuentes y dos cargas.

Para encontrar el modelo dinámico de la microred, es necesario considerar todos los elementos mostrados en el capítulo 3 con excepción de la carga, ya que para este primer modelo de la microred se considera una carga de la forma (4.1).

El modelo del *convertidor* como se menciona en el capítulo 3 está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -C^{-1}x_2 + Vu \\ \dot{x}_2 &= L^{-1}x_1 - i_L \end{aligned} \quad (4.2)$$

que se puede escribir con una estructura Hamiltoniana como en (3.15), esto es

$$\dot{x}_{12} = \mathbb{J}_{12} \nabla_{x_{12}} H_c(x_1, x_2) + G_{12}u - \begin{bmatrix} 0 \\ i_L \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbb{J}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{J}_{12}^T \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}; \quad G_{12} = \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0}_{n_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_1 \times n_1}$$

El modelo de la *red* con topología malla, como también se menciona en el capítulo 3 se representa por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -If_R - H_{CL}L_a^{-1}x_4 \\ \dot{x}_4 &= H_{1L}^T e_1 + H_{CL}^T C_a^{-1}x_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

sujetas a la restricción:

$$\begin{aligned} e_R &= C_a^{-1} x_3 \\ f_1 &= -H_{1L} L_a^{-1} x_4 \end{aligned} \quad (4.4)$$

este sistema se puede escribir con una estructura Hamiltoniana como en (3.11), esto es

$$\dot{x}_{34} = \mathbb{J}_{34} \nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4) + \begin{bmatrix} -I f_R \\ H_{1L}^T e_1 \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbb{J}_{34} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} = -\mathbb{J}_{34}^T \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$$

Y finalmente la *carga* se describe por la siguiente relación lineal

$$f_R = R^{-1} e_R \quad (4.5)$$

Resulta evidente que los puertos de las cargas ( $f_R$  y  $e_R$ ) se pueden interconectar con la red tomando en cuenta la restricción algebraica de la carga resistiva (4.5), por lo que tenemos

$$f_R = R^{-1} C_a^{-1} x_3$$

el modelo dinámico de la red colocando una carga puramente resistiva en sus correspondientes puertos de interconexión se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -R^{-1} C_a^{-1} x_3 - H_{CL} L_a^{-1} x_4 \\ \dot{x}_4 &= H_{1L}^T e_1 + H_{CL}^T C_a^{-1} x_3 \end{aligned}$$

lo anterior se da el lado de las cargas, por el lado de las fuentes se considera el modelo dinámico de los convertidores de potencia (3.16), donde los puertos de interconexión son  $i_L$  para el flujo (corriente de salida en el inversor) y  $C^{-1} x_2$  para el esfuerzo (voltaje en el capacitor del inversor), con lo que se puede escribir

$$\begin{aligned} e_1 &= C^{-1} x_2 \\ i_L = f_1 &= -H_{1L} L_a^{-1} x_4 \end{aligned} \quad (4.6)$$

con el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de los convertidores (3.16), el comportamiento de la red (4.3) y con las restricciones algebraicas (4.6), se obtiene como resultado el *modelo dinámico para la microred con una carga resistiva* que se puede representar a través del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -C^{-1} x_2 + V u \\ \dot{x}_2 &= L^{-1} x_1 - H_{1L} L_a^{-1} x_4 \\ \dot{x}_3 &= -R^{-1} C_a^{-1} x_3 - H_{CL} L_a^{-1} x_4 \\ \dot{x}_4 &= H_{1L}^T C^{-1} x_2 + H_{CL}^T C_a^{-1} x_3 \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $x_1 = \text{col}\{x_{1i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 = \text{col}\{x_{2i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $C^{-1} = \text{diag}\{C_i^{-1}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $L^{-1} = \text{diag}\{L_i^{-1}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $i_L = \text{col}\{i_{Li}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $u = \text{col}\{u_i\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $V = \text{diag}\{V_i\}^T \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $R = \text{diag}\{R_i\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $x_3 = \text{col}\{x_{3i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_4 = \text{col}\{x_{4i}\} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $C_a = \text{diag}\{C_{ai}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  y finalmente  $L_a = \text{diag}\{L_{ai}\} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ .

Evidentemente, las ecuaciones (4.7) pueden ser descritas en forma matricial para obtener la estructura puerto Hamiltoniano

$$\dot{x} = [\mathbb{J}_{T_1} - \mathbb{R}_{T_1}] \nabla_x H_{T_1}(x) + G_{T_1} u \quad (4.8)$$

donde los estados de la microred son

$$x = [x_1^T \quad x_2^T \quad x_3^T \quad x_4^T]^T \in \mathbb{R}^{(3n_1+n_2)}$$

donde  $x_1$  corresponde al flujo en los inductores de los inversores,  $x_2$  es la carga en los capacitores de los inversores,  $x_3$  la carga en los capacitores de la red y finalmente  $x_4$  es el flujo en los inductores de la red. Las matrices del modelo (4.8) son,

$$\mathbb{J}_{T_1} = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -H_{1L} \\ 0 & 0 & 0 & -H_{CL} \\ 0 & H_{1L}^T & H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{J}_{T_1}^T; \quad G_{T_1} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}_{T_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}_{T_1}^T \geq 0$$

Aprovechando la ventajas de los sistemas Hamiltonianos, se sabe que la función de almacenamiento de energía total es la suma de las funciones de almacenamiento de energía de cada uno de los subsistemas Hamiltonianos descritas por las funciones escalares (3.4) y (3.17), entonces, la función de energía almacenada total para el sistema con carga resistiva es

$$H_{T_1}(x) = H_c(x_1, x_2) + H_a(x_3, x_4)$$

esto es

$$H_{T_1}(x) = \frac{1}{2} x_1^T L^{-1} x_1 + \frac{1}{2} x_2^T C^{-1} x_2 + \frac{1}{2} x_3^T C_a^{-1} x_3 + \frac{1}{2} x_4^T L_a^{-1} x_4$$

Una característica importante del modelo (4.8) es que su entrada está en función de la salida de voltaje de los convertidores de potencia  $C^{-1}x_2$ , y la restricciones (4.6), en términos de la salida de corriente de los convertidores de potencia  $i_L$  (puertos de interconexión por el lado de los generadores), estas interconexiones son las que permiten representar todo el comportamiento dinámico de la microred por medio de un sistema Hamiltoniano controlado por puerto, por el lado de la generación, además, las cargas en este caso tienen puertos que permiten interconexión y se dan por la restricción lienal (4.5).

### 4.1.2. Modelo Hamiltoniano de la microred con carga RLC

Ya que se mostró en la sección anterior que se puede obtener una dinámica con estructura Hamiltoniana que describe el comportamiento de una microred con carga puramente resistiva, en esta sección se pretende mostrar que el modelo dinámico de la microred interconectada con otro sistema dinámico como (3.20) que es considerado la carga del sistema, también puede ser escrito de forma Hamiltoniana, lo que nos lleva a un resultado más general.

Al igual que en el caso de la microred con carga resistiva, es necesario considerar todos los elementos mostrados en el capítulo 3, esta vez incluyendo la dinámica de la carga descrita por el conjunto de ecuaciones diferenciales con estructura Hamiltoniana (3.20).

Nuevamente se requiere de el modelo dinámico que describe el comportamiento de los convertidores de potencia dado por el conjunto de ecuaciones diferenciales (4.2), y el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico de la red con topología malla (4.3), además de ahora necesitar el modelo dinámico de el circuito que será considerado la *carga* de la microred, que como se mencionó en el capítulo 3 está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}_5 &= -\Gamma C_R^{-1}x_6 - R_L L_R^{-1}x_5 + Bv_{vs} \\ \dot{x}_6 &= -\Gamma^T L_R^{-1}x_5 - R_C^{-1}C_R^{-1}x_6\end{aligned}$$

sujetas a la restricción

$$i_{vs} = -B^T L_R^{-1}x_5 \quad (4.9)$$

se puede escribir con una estructura Hamiltoniana como en (4.10), esto es

$$\dot{x}_{56} = [\mathbb{J}_{56} - R_{56}] \nabla_{x_{56}} H_R(x_5, x_6) + gv_s \quad (4.10)$$

donde

$$\mathbb{J}_{56} = \begin{bmatrix} 0 & -\Gamma \\ \Gamma^T & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -B \\ 0 \end{bmatrix},$$

Para continuar con el modelado de la microred, de la misma manera que en el caso anterior se identifican los puertos de interconexión por el lado de la generación

$$\begin{aligned}e_1 &= C^{-1}x_2 \\ i_L = f_1 &= -H_{1L} L_a^{-1}x_4\end{aligned} \quad (4.11)$$

mientras que por el lado de las cargas, ya que están siendo alimentadas por medio del voltaje de salida de la red, esto es, el voltaje  $C_a^{-1}x_3$  entonces los puertos de interconexión para los circuitos de carga son

$$\begin{aligned}v_{vs} = e_R &= C_a^{-1}x_3 \\ i_{vs} = f_R &= -B^T L_R^{-1}x_5\end{aligned} \quad (4.12)$$

con lo anterior, el comportamiento dinámico de la microred completa se describe por el conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -C^{-1}x_2 + Vu \\
\dot{x}_2 &= L^{-1}x_1 - H_{1L}L_a^{-1}x_4 \\
\dot{x}_3 &= -B^T L_R^{-1}x_5 - H_{CL}L_a^{-1}x_4 \\
\dot{x}_4 &= H_{1L}^T C^{-1}x_2 + H_{CL}^T C_a^{-1}x_3 \\
\dot{x}_5 &= -\Gamma C_R^{-1}x_6 - R_L L_R^{-1}x_5 + B C_a^{-1}x_3 \\
\dot{x}_6 &= -\Gamma^T L_R^{-1}x_5 - R_C^{-1}C_R^{-1}x_6
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde  $x_1 = \text{col}\{x_{1i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 = \text{col}\{x_{2i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $C^{-1} = \text{diag}\{C_i^{-1}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $L^{-1} = \text{diag}\{L_i^{-1}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $i_L = \text{col}\{i_{Li}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $u = \text{col}\{u_i\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $V = \text{diag}\{V_i\}^T \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $R = \text{diag}\{R_i\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $x_3 = \text{col}\{x_{3i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_4 = \text{col}\{x_{4i}\} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $C_a = \text{diag}\{C_{ai}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  y finalmente  $L_a = \text{diag}\{L_{ai}\} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ,  $L_R = \text{diag}\{L_{Ri}\} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$ ,  $x_5 = \text{col}\{x_{5i}\} \in \mathbb{R}^{n_L}$ , y  $x_6 = \text{col}\{x_{6j}\} \in \mathbb{R}^{n_C}$ .

Las ecuaciones anteriores pueden reescribirse como el sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = [\mathbb{J}_{T_2} - \mathbb{R}_{T_2}] \nabla_x H_{T_2}(x) + G_{T_2} u \tag{4.14}$$

donde los estados de la microred son

$$x = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T \ x_4^T \ x_5^T \ x_6^T]^T \in \mathbb{R}^{3n_1+n_2+n_L+n_C}$$

donde  $x_1$  corresponde al flujo en los inductores de los inversores,  $x_2$  es la carga en los capacitores de los inversores,  $x_3$  la carga en los capacitores de la red,  $x_4$  es el flujo en los inductores de la red,  $x_5$  es el flujo en los inductores del circuito carga y finalmente  $x_6$  es la carga en los capacitores del circuito carga.

Y nuevamente aprovechando las ventajas de los sistemas Hamiltonianos, sabemos que la función de almacenamiento de energía total para la microred completa, es la suma de las funciones escales de almacenamiento de energía de cada uno de los subsistemas que conforman la microred (3.17), (3.18) y (3.4), entonces se puede escribir la función de energía almacenada total

$$H_{T_2}(x) = H_c(x_1, x_2) + H_a(x_3, x_4) + H_l(x_5, x_6)$$

esto es

$$H_{T_2}(x) = \frac{1}{2}x_1^T L^{-1}x_1 + \frac{1}{2}x_2^T C^{-1}x_2 + \frac{1}{2}x_3^T C_a^{-1}x_3 + \frac{1}{2}x_4^T L_a^{-1}x_4 + \frac{1}{2}x_5^T L_R^{-1}x_5 + \frac{1}{2}x_6^T C_R^{-1}x_6$$

mientras que las matrices corespondientes al sistema (4.14) que representa al sistema completo interconectado con una carga RLC cualquiera, son

$$\mathbb{J}_{T_2} = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -H_{1L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H_{CL} & B^T & 0 \\ 0 & H_{1L}^T & H_{CL}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & -\Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma^T & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{J}_{T_2}^T; \quad G_T = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbb{R}_{T_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_C^{-1} \end{bmatrix} = \mathbb{R}_T^T \geq 0$$

Al igual que en el caso anterior la entrada del sistema (4.14), esta en función de la salida de los convertidores de potencia y las restricciones (4.11-4.12), en términos de la salida de corriente de los convertidores de potencia, pero ahora también la salida de voltaje de la red  $Ca^{-1}x_3$  será la entrada al circuito que representa una carga RLC y de manera similar esta sujeto a la restricción (3.22), que está en términos de la corriente que ingresa a la carga RLC, lo que permite que el comportamiento dinámico de la microred completa se pueda representar por medio de un sistema Hamiltoniano controlado por puerto.

## 4.2. Diseño del control

Como se menciona en la Sección 3.2, la forma de garantizar estabilidad de voltaje y de frecuencia en la microred así como un adecuado reparto de potencia activa y reactiva, es gracias a los convertidores de potencia, entonces los únicos canales en los que se tendrá control son los correspondientes a los estados de los convertidores, en esta Sección se diseña una ley de control que es capaz de realizar seguimiento de un voltaje deseado en la salida de los convertidores de potencia, la técnica que se utiliza para dicho diseño es IDA-PBC<sup>4</sup>. El diseño se realiza usando el modelo completo de la microred con carga RLC descrito por la estructura Hamiltoniana (4.14), el diseño del controlador también podría realizarse utilizando el modelo con el circuito de carga resistiva (3.11).

Los canales en donde se tiene control son sólo los correspondientes a los estados de los inversores, lo que nos habilita la posibilidad de tener un grado de libertad en alguno de estos (corriente o voltaje), para este trabajo se utiliza el voltaje  $C^{-1}x_2$  de esta manera el usuario podrá solicitar un valor deseado de voltaje y la demanda de corriente será ajustada según la relación que tenga con el voltaje.

El subíndice que se utiliza para denotar a las matrices necesarias para el diseño del controlador se simplifica con una  $T$ , entendiendo que se podrían utilizar las matrices de (3.11) o bien las de (4.14) sin que esto represente algún cambio en el diseño del controlador.

Para el diseño del controlador, es necesario definir las *trayectorias admisibles*, que para el sistema (4.14) que son las soluciones del sistema deseado, dado por

$$\dot{x}^* = [\mathbb{J}_T - \mathbb{R}_T] \nabla_{x^*} H_T^* + G_T u^* \quad (4.15)$$

para poder encontrar la dinámica del error, se define la variable de error como  $\tilde{x} = x - x^*$ , y se encuentra la derivada con respecto al tiempo

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}^* \quad (4.16)$$

---

<sup>4</sup>IDA-PBC se refiere a la técnica de Control Basado en Pasividad por Interconexión y Asignación de Amortiguamiento

Sustituyendo las dinámica del sistema (4.14) y la dinámica del sistema deseado (4.15) en la dinámica del error (4.16) se obtiene

$$\dot{\tilde{x}} = [\mathbb{J}_T - \mathbb{R}_T] \nabla_x H_T(x) + G_T u - ([\mathbb{J}_T - \mathbb{R}_T] \nabla_{x^*} H_T^* + G_T u^*)$$

dando como resultado la dinámica del error

$$\dot{\tilde{x}} = [\mathbb{J}_T - \mathbb{R}_T] \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T + G_T \tilde{u} \quad (4.17)$$

donde

$$\tilde{H}_T = H_T - H_T^*, \quad \tilde{u} = u - u^*$$

En este caso, la función tipo energía toma la forma

$$\tilde{H}_T(\tilde{x}) = \tilde{H}_c(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \tilde{H}_a(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4) + \tilde{H}_l(\tilde{x}_5, \tilde{x}_6) \quad (4.18)$$

con

$$\tilde{H}_l(\tilde{x}_5, \tilde{x}_6) = \frac{1}{2} \tilde{x}_5^T L_R^{-1} \tilde{x}_5 + \frac{1}{2} \tilde{x}_6^T C_R^{-1} \tilde{x}_6$$

$$\tilde{H}_a(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4) = \frac{1}{2} \tilde{x}_3^T C_a^{-1} \tilde{x}_3 + \frac{1}{2} \tilde{x}_4^T L_a^{-1} \tilde{x}_4$$

y

$$\tilde{H}_c(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{1}{2} \tilde{x}_1^T L^{-1} \tilde{x}_1 + \frac{1}{2} \tilde{x}_2^T C^{-1} \tilde{x}_2$$

siguiendo la metodología IDA-PBC es posible definir

$$G_T \tilde{u} = -\mathbb{K}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T$$

con  $\mathbb{K}_T = \text{diag}\{K_1, K_2, 0, 0\} \in \mathbb{R}^{(3n_1+n_2) \times (3n_1+n_2)}$  de manera equivalente

$$G_T \tilde{u} = G_T u - G_T u^* \Rightarrow -\mathbb{K}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T = G_T u - G_T u^* \Rightarrow G_T u = -\mathbb{K}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T + G_T u^*$$

al considerar la dinámica del sistema deseado (4.15) se puede escribir

$$G_T u = -\mathbb{K}_T \nabla \tilde{H}_T + \dot{x}^* - [\mathbb{J}_T - \mathbb{R}_T] \nabla_x \tilde{H}_T^* \quad (4.19)$$

Para facilitar la visualización de los canales en los que se tiene control, se escribe la ecuación (4.19) sustituyendo las matrices correspondientes a cada caso, esto es

$$\begin{bmatrix} Vu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{-1} \tilde{x}_1 \\ C^{-1} \tilde{x}_2 \\ C_a^{-1} \tilde{x}_3 \\ L_a^{-1} \tilde{x}_4 \\ L_R^{-1} \tilde{x}_5 \\ C_R^{-1} \tilde{x}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \\ \dot{x}_3^* \\ \dot{x}_4^* \\ \dot{x}_5^* \\ \dot{x}_6^* \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -H_{1L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H_{CL} & B^T & 0 \\ 0 & H_{1L}^T & H_{CL}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & R_L & -\Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma^T & R_C^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{-1}x_1^* \\ C^{-1}x_2^* \\ C_a^{-1}x_3^* \\ L_a^{-1}x_4^* \\ L_R^{-1}x_5^* \\ C_R^{-1}x_6^* \end{bmatrix}$$

Lo anterior hace posible formular el principal resultado de estabilización de este trabajo de tesis, esto es, controladores distribuidos capaces de estabilizar a la microred completa.

### Proposición:

Considere una microred de la forma (4.14), asuma que cada  $i$ -ésimo convertidor de potencia DC/AC es de la forma (3.16) y considérese que

- A.1** El estado  $x_{12i}$  se puede medir.
- A.2** Los parámetros  $L_i$  y  $C_i$  son conocidos.
- A.3** La corriente de salida  $i_{Li}$  es medible.
- A.4** Los parámetros  $L_a$  y  $C_a$  son conocidos.

Bajo estas condiciones, la ley de control es

$$u = V^{-1}[\dot{x}_1^* + C^{-1}x_2^* - K_1 L^{-1}\tilde{x}_1] \quad (4.20)$$

con  $K_1 = \text{diag}\{K_{1i}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  sujeta a la restricción

$$\dot{x}_2^* - L^{-1}x_1^* + H_{1L}L_a^{-1}x_4 - K_2 C^{-1}\tilde{x}_2 = 0 \quad (4.21)$$

donde  $K_2 = \text{diag}\{K_{2i}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ , garantiza para el sistema con carga resistiva (3.11) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = 0$$

con  $\tilde{x}_4$  acotado.

Y para el sistema que describe a la microred (4.14) con cualquier circuito de carga RLC, con la misma la ley de control (4.20) es posible garantizar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \end{bmatrix} = 0$$

con  $\tilde{x}_3$  y  $\tilde{x}_4$  acotados.

La importancia del resultado presentado se encuentra en el hecho de que el controlador (4.20-4.21) garantiza que, para cualquier trayectoria admisible, el error entre el valor actual de los voltajes en los capacitores que están en la salida de cada uno de los  $i$ -ésimos convertidores tienden al valor deseado  $C^{-1}x_2^*$  lo que garantiza que cada uno tiende a una función sinusoidal con una amplitud y frecuencia deseadas, mientras que para el caso en el que se trabaja con una carga resistiva el voltaje de la carga será el mismo que el del capacitor que tiene conectado en paralelo ( $C_a^{-1}x_3^*$ ) y dicho voltaje tiende a una función sinusoidal con una amplitud que depende directamente de el mapeo que existe entre el voltaje que se encuentra en la salida de los convertidores de potencia  $C^{-1}x_2^*$  y el voltaje de salida de la red  $C_a^{-1}x_3^*$ . En la próxima sección se darán los detalles referentes a este mapeo.

Mientras que para el caso en el que se considera una carga RLC cualquiera, se puede garantizar nuevamente que para cualquier trayectoria admisible el valor deseado  $C_R^{-1}x_6^*$  corresponderá a una función prescrita anteriormente, con lo que se asegura que se lograra tanto estabilidad en voltaje como en frecuencia. Note que esta afirmación tendrá coherencia ya que para la dinámica de la carga RLC, el estado  $C_R^{-1}x_6$  representa un voltaje, que será igual a  $C^{-1}x_3$ , debido a la conexión en paralelo.

### Prueba de estabilidad

Para el caso de la microred con carga resistiva. Las ecuaciones (4.20) y (4.21) pueden ser escritas de manera equivalente como

$$G_T \tilde{u} = -\mathbb{K}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T$$

con  $\mathbb{K}_T = \text{diag}\{K_1, K_2, 0, 0\} \in \mathbb{R}^{(3n_1+n_2) \times (3n_1+n_2)}$ . Utilizando esta expresión, el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\dot{\tilde{x}} = [\mathbb{J}_T - (\mathbb{R}_T + \mathbb{K}_T)] \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T \quad (4.22)$$

Considerando que (4.18) se puede reescribir como  $\tilde{H}(\tilde{x})_T = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P \tilde{x}$ , y se considera como función candidata de Lyapunov, entonces su derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (4.22) está dada por

$$\dot{\tilde{H}}_T(\tilde{x}) = \left( \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T \right)^T \dot{\tilde{x}} \Rightarrow \dot{\tilde{H}}_T(\tilde{x}) = \left( \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T \right)^T [\mathbb{J}_T - (\mathbb{R}_T + \mathbb{K}_T)] \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T$$

reescribiendo tenemos

$$\dot{\tilde{H}}_T(\tilde{x}) = \left( \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T \right)^T \mathbb{J}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T - \left( \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T \right)^T (\mathbb{R}_T + \mathbb{K}_T) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T$$

como se sabe de las propiedades del sistema Hamiltoniano  $\mathbb{J}_T = -\mathbb{J}_T^T$  lo que resulta en

$$\dot{\tilde{H}}_T(\tilde{x}) = - \left( \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T \right)^T (\mathbb{R}_T + \mathbb{K}_T) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T \leq 0$$

con base en el Teorema 4.2 presentado en Khalil (2002) se puede asegurar estabilidad en el sentido de Lyapunov para las trayectorias del sistema y que los estados están acotados.

Nótese que, para el sistema (3.11) (sistema que se interconecta con una carga lineal) debido a la estructura de  $(\mathbb{R}_T + \mathbb{K}_T)$ , el conjunto máximo invariante donde  $\dot{\tilde{H}} = 0$  esta dado por  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 0$  y la solución de

$$\begin{bmatrix} H_{1L} \\ H_{CL} \end{bmatrix} \tilde{x}_4 = 0$$

Y ahora nótese que, para el sistema 4.14 (sistema que se interconecta con una carga cualquiera RLC) debido a la estructura de  $(\mathbb{R}_T + \mathbb{K}_T)$ , el conjunto máximo invariante donde  $\dot{\tilde{H}} = 0$  esta dado por  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 0$  y la solución de

$$\begin{bmatrix} H_{1L} \\ H_{CL} \end{bmatrix} \tilde{x}_4 = 0; \quad [ H_{CL}^T ] \tilde{x}_3 = 0$$

▽▽▽

### 4.2.1. Trayectorias deseadas

En esta parte del trabajo de tesis se da la definición de trayectorias deseadas, y se define la trayectoria deseada para el sistema con carga lineal (3.11) y la trayectoria deseada para la microred con carga RLC representado por (4.14).

La etapa final en el procedimiento de estabilización de la microred (3.11) y (4.14) es determinar el estado estacionario deseado dado por  $x^* \in \mathbb{R}^{3n_1+n_2+n_L+n_R}$ . Esto implica los siguientes requisitos fundamentales para el correcto funcionamiento del sistema: Se debe de garantizar estabilidad en frecuencia y voltaje así como un despacho adecuado de potencia activa y reactiva como se menciona en Kundur (1994).

Con la finalidad de satisfacer las condiciones mencionadas previamente, es importante reconocer que la estabilidad de voltaje y frecuencia están directamente relacionadas con el comportamiento del voltaje de los capacitores que están conectados en paralelo con las cargas, ya sea la carga puramente resistiva o la carga RLC, esto es, el estado  $x_3 \in \mathbb{R}^{n_1}$  de los modelos (3.11-4.14) que representa el voltaje de salida de la microred, encargado de alimentar a la carga que se le interconecte. El propósito es lograr un comportamiento sinusoidal para estas variables, de tal manera que sus amplitudes alcancen un valor deseado y sus frecuencias lleguen a ser iguales (Schiffer (2014)-Bullo (2013)).

En el contexto del sistema abordado en este trabajo, el lograr alcanzar un voltaje y una frecuencia deseada, depende de las soluciones del sistema deseado (4.15). En particular, debe ser de interés el mapeo que existe entre los voltajes de los convertidores de potencia de salida  $C^{-1}x_2^*$  y los voltajes de los capacitores conectados en paralelo con las cargas  $C_a^{-1}x_3^*$ , dicho mapeo esta caracterizado por las ecuaciones dinámicas de los estados  $x_3$  y  $x_4$  en los sistemas

(4.8) o (4.14) y puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_3^* \\ \dot{x}_4^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_a^{-1}x_3^* \\ L_a^{-1}x_4^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ H_{1L}^T \end{bmatrix} C^{-1}x_2^* \\ y &= [ I \ 0 ] \begin{bmatrix} C_a^{-1}x_3^* \\ L_a^{-1}x_4^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Note que este mapeo está dado por cargas en los capacitores y flujos en los inductores, para facilitar el manejo de estas ecuaciones, se aplica el siguiente cambio de variables

$$C^{-1}x_2^* = v_1^*; \quad C_a^{-1}x_3^* = v_c^*; \quad L_a^{-1}x_4^* = i_l^*$$

donde  $v_c^* \in \mathbb{R}^{n_1}$  representa el voltaje en los capacitores que se encuentran en paralelo con la carga (Cargas),  $v_1^* \in \mathbb{R}^{n_1}$  representa el voltaje en los capacitores de salida de los inversores que alimentan a toda la microrred (Fuentes), así como  $i_l^* \in \mathbb{R}^{n_2}$  es la corriente que fluye por los inductores de la microrred (Líneas de transmisión).

Al aplicar el cambio de variables al mapeo, se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_c^* \\ \dot{i}_l^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -C_a^{-1}H_{CL} \\ L_a^{-1}H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c^* \\ i_l^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ L_a^{-1}H_{1L}^T \end{bmatrix} v_1^* \\ y &= [ I \ 0 ] \begin{bmatrix} v_c^* \\ i_l^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

ya que se tiene un sistema lineal MIMO<sup>5</sup>, se puede hacer uso de herramientas como la transformada de Laplace para encontrar la función de transferencia, de esta forma conocer la respuesta del sistema o dicho de otra forma conocer el comportamiento de  $v_c^*$  considerando como entrada  $v_1^*$ , por tanto la matriz de transferencia del sistema es

$$v_c^*(s) = - [s^2I + C_a^{-1}H_{CL}L_a^{-1}H_{CL}^T]^{-1} C_a^{-1}H_{CL}L_a^{-1}H_{1L}^T v_1^*(s) \quad (4.25)$$

Para ver de manera más clara el comportamiento de  $v_c^*$  se requiere utilizar las características exhibidas por la red, mencionadas en el capítulo 3, que se relacionan con  $H_{CL}$  y  $H_{1L}$ .

La estructura de las matrices  $H_{CL}$  y  $H_{1L}$  nos lleva a dos propiedades muy interesantes descritas en el Apéndice A, que son:

$$H_{CL}H_{CL}^T = I \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$$

con  $I$  una matriz identidad y

$$H_{CL}H_{1L}^T = \mathbf{1}\mathbf{1}^T \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$$

---

<sup>5</sup>Por sus siglas en inglés Multiple Multiple Input Multiple Output

donde  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n_1}$  es un vector con todas las entradas iguales a 1.

Con lo anterior muestra que se cumplen las siguientes afirmaciones

$$H_{CL}L_a^{-1}H_{CL}^T = \text{diag}\{\mathbf{1}_r^T L_{a_j}^{-1} \mathbf{1}_r\} \quad \forall j = 1, \dots, n_2 \quad (4.26)$$

$$H_{CL}L_a^{-1}H_{1L}^T = \text{col}\{\mathbf{1}_r^T L_{a_j}^{-1}\} \quad \forall j = 1, \dots, n_2 \quad (4.27)$$

además, si las propiedades (A.1) y (4.27) se toman en cuenta, se obtiene que la relación entrada salida entre  $v_c^*$  y  $v_1^*$  esta dada por

$$v_c^* = -[s^2 I + \text{diag}\{s^2 + C_{a_j}^{-1} \mathbf{1}_r^T L_{a_j}^{-1} \mathbf{1}_r\}]^{-1} C_{a_j}^{-1} \text{col}\{\mathbf{1}_r^T L_{a_j}^{-1}\} v_1^*$$

que se puede reescribir como

$$v_c^* = -\text{diag}\{s^2 + C_{a_j}^{-1} \mathbf{1}_r^T L_{a_j}^{-1} \mathbf{1}_r\}^{-1} \text{col}\{C_{a_j}^{-1} \mathbf{1}_r^T L_{a_j}^{-1}\} v_1^* \quad (4.28)$$

donde  $\text{col}\{C_{a_j}^{-1} \mathbf{1}_r^T L_{a_j}^{-1}\}$  representa un vector columna de la forma  $[C_{a_1}^{-1} \mathbf{1}_r^T L_{a_1}^{-1}, \dots, C_{a_{n_2}}^{-1} \mathbf{1}_r^T L_{a_{n_2}}^{-1}]^T$  dado como el resultado en estado estacionario, el comportamiento  $v_c^*$  para cada entrada se puede escribir como

$$v_c^* = - \left[ \frac{1}{s^2 + C_{a_j}^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} L_{a_j}^{-1}} \right] C_{a_j}^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} L_{a_j i}^{-1} v_{1i}^* \quad (4.29)$$

Bajo este escenario, es claro que el comportamiento del estado estacionario de  $v_1$  determinará el comportamiento de  $v_c$  y por lo tanto una elección adecuada para  $v_1$  está dado por

$$v_{1i}^* = A_i \sin(\omega_s t + \delta_i) \quad (4.30)$$

entonces podemos garantizar que el comportamiento de  $v_c^*$  será el mismo que el comportamiento de  $v_1^*$  con la diferencia que su amplitud y su fase se verán afectadas por el mapeo lineal (4.29), donde  $\omega_s$  tomará el mismo valor para todos los convertidores, lo que garantiza estabilidad en frecuencia, mientras que  $A_i$  y  $\delta_i$  debe ser determinadas de manera adecuada con el fin de satisfacer un despacho de energía deseado, la manera de elegir las se explicará más adelante.

Además con ayuda de identidades trigonométricas es fácil demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n_1} L_{a_j i}^{-1} v_{1i} = A_i \sin(\omega t + \delta_i)$$

de tal manera que la suma de  $n_1$  señales senoidales dan como resultado otra señal senoidal de la forma  $A \sin(\omega_s t + \delta)$  con amplitud

$$A = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^{n_1} L_{a_j i}^{-1} A_i \cos(\delta_i) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{n_1} L_{a_j i}^{-1} A_i \sin(\delta_i) \right)^2} \quad (4.31)$$

y fase

$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^{n_1} L_{aji}^{-1} A_i \sin(\delta_i)}{\sum_{i=1}^{n_1} L_{aji}^{-1} A_i \cos(\delta_i)} \right) \quad (4.32)$$

El último detalle en el estudio del comportamiento de estado estacionario se refiere a la repartición de potencia. Sin embargo, esta restricción se satisface con las ecuaciones de flujo de potencia

$$P_i = \sum_{k=1}^{r_i} |B_{ik}| A_i A_k \sin(\delta_i - \delta_k) \quad (4.33)$$

$$Q_i = |B_{ii}| A_i^2 - \sum_{k=1}^{r_i} |B_{ik}| A_i A_k \cos(\delta_i - \delta_k) \quad (4.34)$$

con  $B_{ii}$  susceptancia correspondiente al  $i$ -ésimo nodo y  $B_{ik}$  son las susceptancias de la línea.

Lo anterior garantiza que las señales de voltaje a la salida de los convertidores de potencia ( $C^{-1}x_2$ ) llegan a un valor deseado en amplitud y frecuencia, pero no garantiza que los voltajes a la salida de la microred ( $C_a^{-1}x_3$ ) lleguen a un valor deseado. La relación entre estos voltajes está dada por el mapeo lineal (4.28) y por las ecuaciones de flujo de potencia (4.33-4.34). Al resolver las ecuaciones de flujo de potencia es posible calcular las amplitudes y fases de los voltajes que se tienen que pedir a los convertidores de potencia para que la amplitud del voltaje de salida de la red  $C^{-1}x_3$  alcance a un valor deseado.

Lo anterior se logra a través de métodos numéricos como el que se mostro en el capítulo 2. Ya que las ecuaciones de flujo de potencia se pueden ver como un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales, es posible encontrar una solución que las satisfaga al tener algunos de los parámetros conocidos y aplicar métodos de solución tales como el método de *Newton-Raphson* que se explica de manera detallada en el capítulo 2.

Resulta necesario identificar los nodos en los que se tiene conectada una carga (nodos de carga), de los nodos en los que se tendrán conectados los convertidores de potencia (nodos de generación), esta diferencia nos lleva a separar a los nodos en dos conjuntos, sea  $\mathcal{V}_I \in \mathbb{R}$  el conjunto de nodos que conectan convertidores de potencia y  $\mathcal{V}_L \in \mathbb{R}$  el conjunto de nodos que conectan a las cargas.

Lo que se desea es que el voltaje de salida de los convertidores de potencia y el voltaje de salida en la microred, sea de la forma (4.30), independientemente si es un nodo de carga o un nodo de generación, cada uno los nodos tendrá involucradas las siguientes variables:

- Potencia activa.
- Potencia reactiva.
- Amplitud de voltaje.
- Fase del voltaje.



Si se trabaja con un nodo de generación, la potencia activa relacionada a ese nodo será positiva y si se tiene un nodo de carga la potencia activa tiene que ser negativa, además, cada nodo contribuye con dos ecuaciones de flujo de potencia, por lo que se tienen  $4n_1$  ecuaciones algebraicas no lineales para toda la microred, esto por que existen  $n_i \in \mathcal{V}_I$  y  $n_j \in \mathcal{V}_L$  por lo tanto se tienen  $2n_i$  ecuaciones de flujo de potencia para los nodos de generación y  $2n_j$  ecuaciones de flujo de potencia para los nodos de carga, pero ya que la red es de topología malla se tiene que el número de nodos de generación es igual al número de nodos de carga, esto es  $n_j = n_i = n_1$  por lo tanto como se menciono se tienen  $4n_1$  ecuaciones algebraicas no lineales que describen los flujos de potencia.

En otras palabras con las ecuaciones de flujo de potencia se pretende encontrar la potencia que tiene que enviar la fuente para satisfacer la demanda de la carga y por consecuencia mantener la amplitud de voltaje en los puertos de la carga a un valor deseado. Para encontrar la solución a los flujos de potencia se consideran conocidas las amplitudes, potencias activas y potencias reactivas de todos los nodos de carga y como incógnitas nos quedan la potencia activa, la potencia reactiva y la amplitud de voltaje de los nodos de generación, esto se da por que en los nodos de carga es donde se quiere llegar a una amplitud de voltaje deseado, además, que se tiene que tomar un ángulo de fase como referencia en los nodos de generación, lo que nos proporciona una variable conocida adicional, con esto es posible hacer uso de métodos numéricos como los reportados en Kundur (1994) y encontrar las amplitudes, potencias activas y potencias reactivas a las cuales tienen que tender las fuentes para que se satisfaga la demanda de potencia en la red.

# Capítulo 5

## Caso de estudio

Los resultados de este trabajo son ejemplificados por una microred que cumple con las características mencionadas a lo largo del trabajo de tesis, esto con el fin de mostrar la aplicación de la metodología propuesta así como la validación de la ley de control por medio de simulaciones numéricas.

Se muestra el funcionamiento de una microred trabajando de manera aislada de la red principal de distribución, conectada a fuentes de generación ideales y constantes, acopladas a la microred a través de los convertidores de potencia que satisface la demanda de potencia activa y reactiva de las cargas.

### 5.1. Simulaciones

Para el caso de estudio se considera una microred como la que se muestra en la Figura 5.1 que cuenta con cuatro nodos o buses, de los cuales los buses 1 y 2 son buses de generación y los buses 3 y 4 son buses de carga, esto por que tienen conectados fuentes y cargas respectivamente; se tienen cinco líneas de transmisión sin pérdidas modeladas mediante inductancias lineales dadas por  $L_{a1}$ ,  $L_{a2}$ ,  $L_{a3}$ ,  $L_{a4}$ ,  $L_{a5}$ , dada la topología de la red tipo malla se tienen dos cargas representadas por las resistencias lineales  $R_1$  y  $R_2$  que se encuentran en paralelo con capacitores cuya capacitancia está dada por  $C_{a1}$  y  $C_{a2}$  y de acuerdo con la sección 3.1 la condición de que todas las fuentes están conectadas con todas las cargas se satisface a través de las inductancias  $L_{a2}$ ,  $L_{a3}$  que conectan la fuente uno con las cargas y  $L_{a1}$ ,  $L_{a4}$  que conectan la fuente dos con las cargas. Además se tienen líneas sin pérdidas por lo que las resistencias de la línea se desprecian y finalmente la última condición es que existen líneas de transmisión que conectan a una fuente con otra fuente lo que se satisface gracias a la inductancia  $L_{a3}$ .

Como se menciona en el capítulo 3 en el árbol se incluyen los capacitores ( $C_{a1}$  y  $C_{a2}$ ) así como los voltajes de salida proporcionados por los convertidores de potencia ( $V_1$  y  $V_2$ ), y finalmente los inductores ( $L_{a1}$ ,  $L_{a2}$ ,  $L_{a3}$ ,  $L_{a4}$ ,  $L_{a5}$ ) y las cargas ( $R_1$  y  $R_2$ ) se colocan en el co-árbol.

De acuerdo con lo mencionado en el capítulo 3 la matriz de sub-incidencia  $H \in \mathbb{R}^{n-1 \times b-n+1}$

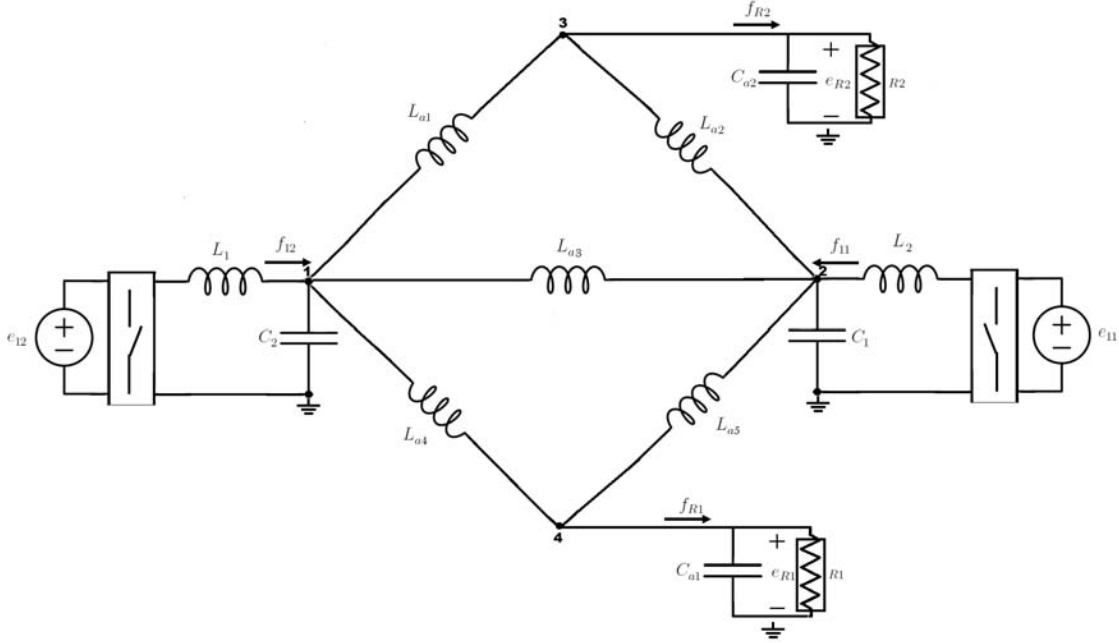


Figura 5.1: Ejemplo de microred para el caso de estudio

con  $n = 5$   $b = 11$  (considerando la tierra como otro nodo de la gráfica) tenemos

$$H = \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 7}$$

La matriz  $H$  puede ser particiona como se muestra en la ecuación (3.7), donde  $n_1 = 2$  y  $n_2 = 5$ , lo que nos lleva a las siguientes igualdades

$$H_{1R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; \quad H_{1L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$$

$$H_{CR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; \quad H_{2L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$$

lo que comprueba que si cada línea de transmisión se compone sólo por un inductor se cumple  $H_{1R} = 0$  y como las cargas están conectadas en paralelo con un capacitor se cumple  $H_{CR} = I$ , el modelo dinámico de ésta microred esta dado por (4.7).

Se necesita que los voltajes a la salida de los convertidores de potencia tengan un comportamiento sinusoidal con la amplitud y fase adecuadas para que la demanda de potencia activa y reactiva en las cargas se satisfaga, todo esto a una frecuencia de 60 [Hertz], entonces, los voltajes deseados a la salida de los convertidores son

$$C_1^{-1} x_{21}^* = A_1 \sin(60t + \delta_1)$$

$$C_2^{-1}x_{22}^* = A_2 \sin(60t + \delta_2)$$

con lo anterior es evidente que las amplitudes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  se pueden considerar incógnitas del sistema de potencia, ya que las amplitudes para las cargas son las deseadas (por lo que son conocidas), en este punto es donde se hace de vital importancia hacer uso de las ecuaciones de flujo de potencia (4.33 - 4.34), para plantear un sistema de ecuaciones no lineales que permita encontrar la solución que satisfaga la demanda de potencia activa y reactiva por el lado de las cargas, al saber cuál amplitud es la que el controlador (4.20) debe de pedir a las fuentes a través de los convertidores de potencia.

Entonces para efectos de la simulación los parámetros de la microred son

$$\begin{aligned} C_1 &= 900 [\mu\text{F}], & L_{a1} &= 10 [\text{mH}], \\ C_2 &= 700 [\mu\text{F}], & L_{a2} &= 20 [\text{mH}], \\ L_1 &= 500 [\mu\text{H}], & L_{a3} &= 30 [\text{mH}], \\ L_2 &= 100 [\mu\text{H}], & L_{a4} &= 40 [\text{mH}], \\ R_1 &= 50 [\Omega], & L_{a5} &= 50 [\text{mH}], \\ R_2 &= 16 [\Omega]. & V_1 &= 150 [\text{V}] \\ C_{a1} &= 100 [\mu\text{F}], & V_2 &= 200 [\text{V}] \\ C_{a2} &= 600 [\mu\text{F}], & \omega &= 60[\text{Hertz}] \end{aligned}$$

las ganancias para el controlador (4.20) son  $K_{11} = 1000$   $K_{12} = 25$ ,  $K_{21} = 1000$  y  $K_{22} = 25$ , para realizar el cálculo de las trayectorias admisibles del sistema se utilizan las ecuaciones de flujo de potencia (4.33 - 4.34) descritas en el capítulo 2, donde se usa el método de Newton-Raphson descrito en el mismo capítulo.

Para lo cual se requiere encontrar la matriz de admitancia  $Y_{bus}$ , en esta matriz se encuentran los valores de las conductancias ( $G$ ) y de las susceptancias ( $B$ ) de acuerdo con la siguiente relación  $Y = G + jB$ , las líneas de transmisión se componen sólo por un inductor su impedancia esta dada por la siguiente relación

$$Z_{ij} = j\omega L_{ij}$$

con lo que las impedancias correspondientes a la microred son

$$\begin{aligned} Z_{12} &= j(60)0,03 \\ Z_{13} &= j(60)0,01 \\ Z_{14} &= j(60)0,04 \\ Z_{23} &= j(60)0,02 \\ Z_{24} &= j(60)0,05 \end{aligned}$$

y sus correspondientes impedancias son

$$\begin{aligned} Y_{12} &= \frac{1}{Z_{12}} \\ Y_{13} &= \frac{1}{Z_{13}} \\ Y_{14} &= \frac{1}{Z_{14}} \\ Y_{23} &= \frac{1}{Z_{23}} \\ Y_{24} &= \frac{1}{Z_{24}} \end{aligned}$$

con lo que la matriz de impedancias  $Y_{bus}$  es

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} 0 + j2,6389 & 0 - j0,5556 & 0 - j1,6667 & 0 - j0,4167 \\ 0 - j0,5556 & 0 + j1,7222 & 0 - j0,8333 & 0 - j0,3333 \\ 0 - j1,6667 & 0 - j0,8333 & 0 + j2,4940 & 0 + j0 \\ 0 - j0,4167 & 0 - j0,3333 & 0 + j0 & 0 + j0,7140 \end{bmatrix}$$

note que  $G = real\{Y_{bus}\}$  y  $B = img\{Y_{bus}\}$  pero ya que se tiene una microred sin pérdidas  $G = 0$  como se ve claramente en la matriz  $Y_{bus}$ .

Una vez calculada la matriz de admitancias de bus para la microred (5.1), continuamos con el procedimiento para solucionar los flujos de potencia a través del método de Newton-Raphson para lo que se necesita

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_1 \\ \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \Delta\delta_4 \\ \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \end{bmatrix}$$

donde las variables que conocidas son la potencia activa y reactiva en el nodo de generación dos ( $P_2, Q_2$ ), la potencia activa en el nodo de carga tres ( $P_3$ ), la potencia activa en el nodo de carga cuatro ( $P_4$ ) y las incógnitas son: la amplitud del voltaje en el nodo de generación dos  $V_2$  y las fases del nodo de generación dos y de los nodos de carga tres y cuatro ( $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ ) y tomando al nodo uno como nodo de referencia las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \Delta\delta_4 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix}$$

de acuerdo con el Capitulo 2 la matriz Jacobiana ( $J \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ) que se muestra subdividida por cuatro matrices, para nuestro caso son

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_4} \\ \frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_4} \\ \frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_4} \end{bmatrix}; \quad J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_2} \\ \frac{\partial \Delta P_3}{\partial V_2} \\ \frac{\partial \Delta P_4}{\partial V_2} \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_4} \end{bmatrix}; \quad J_4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_2} \end{bmatrix}$$

al analizar la microrred (5.1) se hace evidente que las ecuaciones de flujo de potencia necesarias para encontrar el Jacobiano están dadas por

$$P_2 = -G_{22}V_2^2 - [G_{23}V_2V_3 \cos(\delta_{23}) + G_{21}V_2V_1 \cos(\delta_{21}) + G_{24}V_2V_4 \cos(\delta_{24}) + B_{23}V_2V_3 \sin(\delta_{23}) + B_{21}V_2V_1 \sin(\delta_{21}) + B_{24}V_2V_4 \sin(\delta_{24})]$$

$$P_3 = -G_{33}V_3^2 - [G_{31}V_3V_1 \cos(\delta_{31}) + G_{32}V_3V_2 \cos(\delta_{32}) + B_{31}V_3V_1 \sin(\delta_{31}) + B_{32}V_3V_2 \sin(\delta_{32})]$$

$$P_4 = -G_{44}V_4^2 - [G_{41}V_4V_1 \cos(\delta_{41}) + G_{42}V_4V_2 \cos(\delta_{42}) + B_{41}V_4V_1 \sin(\delta_{41}) + B_{42}V_4V_2 \sin(\delta_{42})]$$

$$Q_2 = B_{22}V_2^2 - [B_{23}V_2V_3 \cos(\delta_{23}) + B_{21}V_2V_1 \cos(\delta_{21}) + B_{24}V_2V_4 \cos(\delta_{24}) - G_{23}V_2V_3 \sin(\delta_{23}) - G_{21}V_2V_1 \sin(\delta_{21}) - G_{24}V_2V_4 \cos(\delta_{24})]$$

donde recuérdese que  $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$  y los cambios en las potencias ( $\Delta P_i$  y  $\Delta Q_i$ ) están dados por

$$\Delta P_2 = P_2^{inj} - P_2$$

$$\Delta P_3 = P_3^{inj} - P_3$$

$$\Delta P_4 = P_4^{inj} - P_4$$

$$\Delta Q_2 = Q_2^{inj} - Q_2$$

donde las potencias reactivas y activas inyectadas en en i-ésimo nodo ( $P_i^{inj}$  y  $Q_i^{inj}$ ) se consideran constantes, las derivadas parciales correspondientes al Jacobiano se pueden escribir

como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_2} &= [-G_{23}V_2V_3 \sin(\delta_{23}) - G_{21}V_2V_1 \sin(\delta_{21}) - G_{24}V_2V_4 \sin(\delta_{24}) \\
&\quad B_{23}V_2V_3 \cos(\delta_{23}) + B_{21}V_2V_1 \cos(\delta_{21}) + B_{24}V_2V_4 \cos(\delta_{24})] \\
\frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_3} &= G_{23}V_2V_3 \sin(\delta_{23}) - B_{23}V_2V_3 \cos(\delta_{23}) \\
\frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_4} &= G_{24}V_2V_4 \sin(\delta_{24}) - B_{24}V_2V_4 \cos(\delta_{24}) \\
\frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_2} &= 2G_{22}V_2 + G_{23}V_3 \cos(\delta_{23}) + G_{21}V_1 \cos(\delta_{21}) + G_{24}V_4 \cos(\delta_{24}) \\
&\quad B_{23}V_3 \sin(\delta_{23}) + B_{21}V_1 \sin(\delta_{21}) + B_{24}V_4 \sin(\delta_{24}) \\
\frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_2} &= G_{23}V_2V_3 \sin(\delta_{32}) - B_{32}V_3V_2 \cos(\delta_{32}) \\
\frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_3} &= -G_{31}V_3V_1 \sin(\delta_{31}) - G_{32}V_3V_2 \sin(\delta_{32}) + B_{31}V_3V_1 \cos(\delta_{31}) + B_{32}V_3V_2 \cos(\delta_{32}) \\
\frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_4} &= 0 \\
\frac{\partial \Delta P_3}{\partial V_2} &= G_{32}V_3 \cos(\delta_{32}) + B_{32}V_3 \sin(\delta_{32}) \\
\frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_2} &= G_{42}V_4V_2 \sin(\delta_{42}) - B_{42}V_4V_2 \cos(\delta_{42}) \\
\frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_3} &= 0 \\
\frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_4} &= -G_{41}V_4V_1 \sin(\delta_{41}) - G_{42}V_4V_2 \sin(\delta_{42}) - B_{41}V_4V_1 \cos(\delta_{41}) + B_{42}V_4V_2 \cos(\delta_{42}) \\
\frac{\partial \Delta P_4}{\partial V_2} &= G_{42}V_4 \cos(\delta_{42}) + B_{42}V_4 \sin(\delta_{42}) \\
\frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_2} &= -B_{23}V_2V_3 \sin(\delta_{23}) - B_{21}V_2V_1 \sin(\delta_{21}) - B_{24}V_2V_4 \sin(\delta_{24}) \\
&\quad -G_{23}V_2V_3 \cos(\delta_{23}) - G_{21}V_2V_1 \cos(\delta_{21}) - G_{24}V_2V_4 \cos(\delta_{24}) \\
\frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_3} &= B_{23}V_2V_3 \sin(\delta_{23}) + G_{23}V_2V_3 \cos(\delta_{23}) \\
\frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_4} &= B_{24}V_2V_4 \sin(\delta_{24}) + G_{24}V_2V_4 \cos(\delta_{24}) \\
\frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_2} &= -2B_{22}V_2 + B_{23}V_3 \cos(\delta_{23}) + B_{21}V_1 \cos(\delta_{21}) + B_{24}V_4 \cos(\delta_{24}) \\
&\quad -G_{23}V_3 \sin(\delta_{23}) - G_{21}V_1 \sin(\delta_{21}) - G_{24}V_4 \sin(\delta_{24})
\end{aligned}$$

con todo lo anterior se pueden conocer los valores de las incógnitas  $V_2$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  y  $\delta_4$  al aplicar el método de Newton-Raphson, dado que este es un método iterativo se tendrán diferentes aproximaciones de Jacobianos así como diferentes  $\Delta P_2$ ,  $\Delta P_3$ ,  $\Delta P_4$  y  $\Delta Q_2$ , para lo cual se

usa el algoritmo mostrado en el Apéndice B, al aplicar este algoritmo con una tolerancia de 0,0001, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 5.1

N° de Bus	V [ <i>pu</i> ]	Ángulo [rad]	P. Activa	P. Reactiva
1	1.0000	0.0000	0.501	0.891
2	1.1166	0.5418	1.100	1.399
3	0.9500	-0.3348	-1.200	0.191
4	0.9800	-2.3195	-0.400	1.314

Tabla 5.1: Parámetros del modelo

NOTA: Todos los resultados se muestran en *pu* tomando como cantidades base  $V_{base} = 127[V]$  y  $S_{base} = 50[kVA]$ .

Con los resultados anteriores ahora ya se sabe que valores de voltaje y fase se deben de pedir a los convertidores de potencia que están conectados en los nodos de generación, para que se satisfaga la demanda de potencia en las cargas y de esta manera comprobar el funcionamiento adecuado de toda la microred. Para la simulación numérica de la microred se utilizó **Matlab/Simulink**. En la Figura 5.2, se muestra que los valores de las amplitudes del voltaje se aproximan mucho a los valores que se muestran en la Tabla 5.1, así como las fases en cada uno de los nodos, es importante resaltar que los nodos en los que se tiene control, esto es, los nodos de generación llegan exactamente a los valores deseados, en la Figura 5.3 se puede ver el comportamiento completo de las señales de voltaje a la salida de los convertidores de potencia y la Figura 5.4 muestra el comportamiento completo de las señales de voltaje en los puertos de interconexión de la carga, en donde se nota claramente que ambas señales están a la misma frecuencia deseada ( $\omega = 60$  [Hertz]),

Para notar claramente que el controlador (4.20) diseñado a través de la técnica IDA-PBC, consigue hacer el seguimiento de la señal de referencia se muestran las Figuras 5.5 y 5.6, y todo esto se logra con la señal de control mostrada en la Figura 5.7.

Para mostrar que los flujos de potencia se satisfacen en la red, para las cargas dadas, se muestran la Figura 5.8 para las potencias activas, donde note que en los buses de carga (4 y 3) tienen potencia activa negativa, y los buses de generación una potencia activa positiva, ya que los primeros demandan potencia y los segundos la generan. Finalmente en la Figura 5.9 se muestra la potencia reactiva, donde ambas potencias se aproximan a los valores que se encontraron a través de la solución de los flujos de potencia mostrados en la Tabla 5.1.



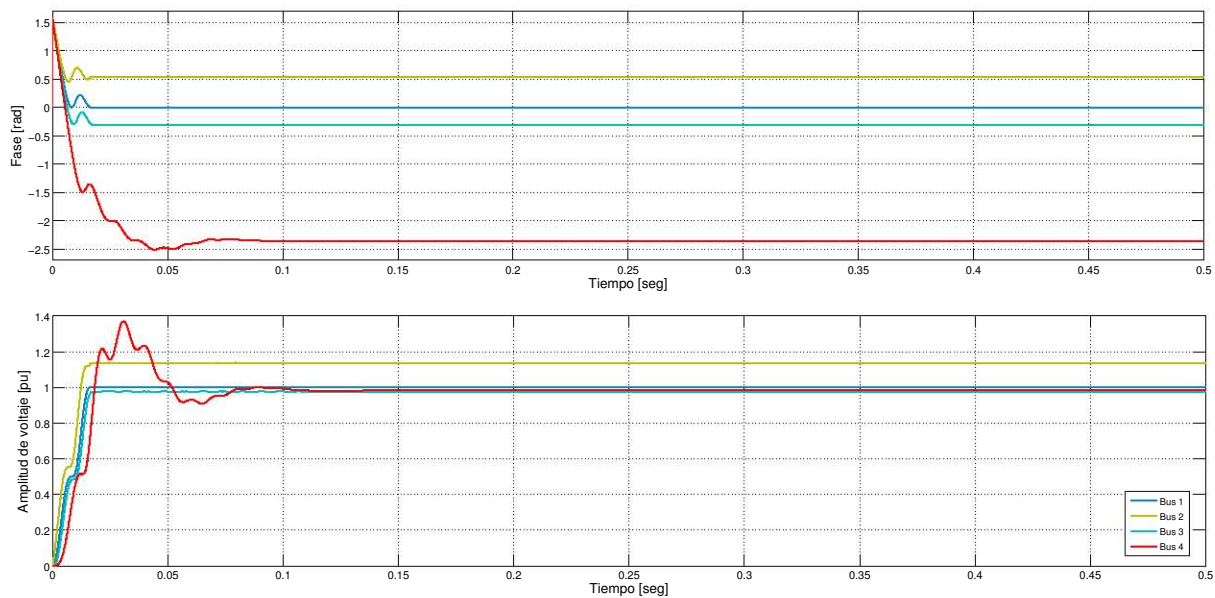


Figura 5.2: Amplitudes de voltajes y fases en los nodos de la microred

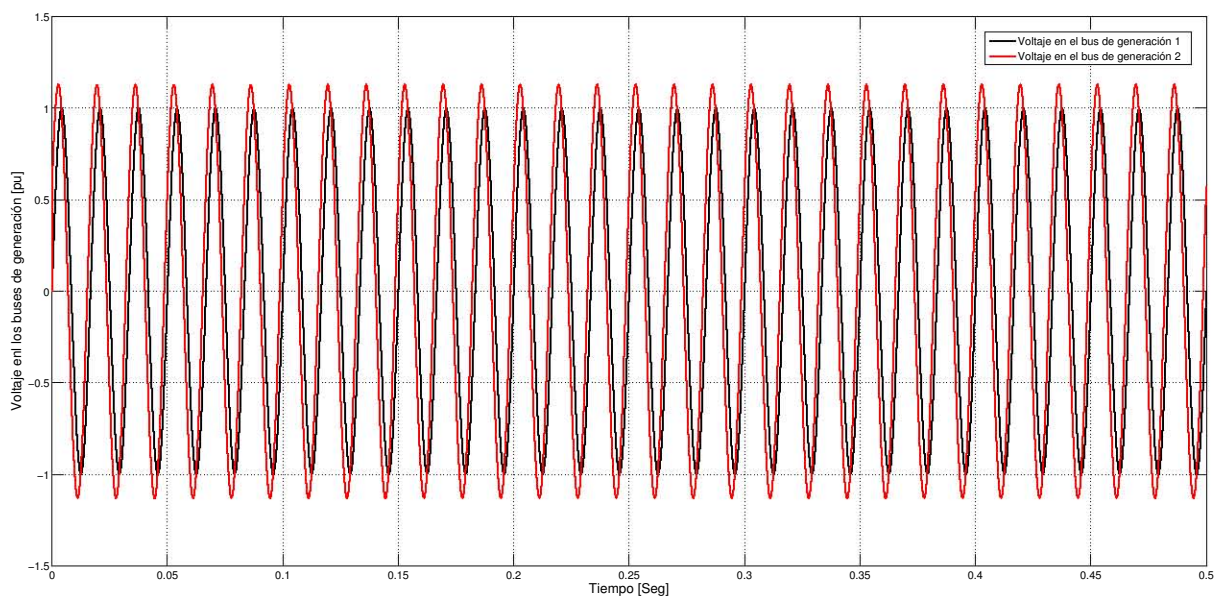


Figura 5.3: Señales de voltaje en los buses de generación

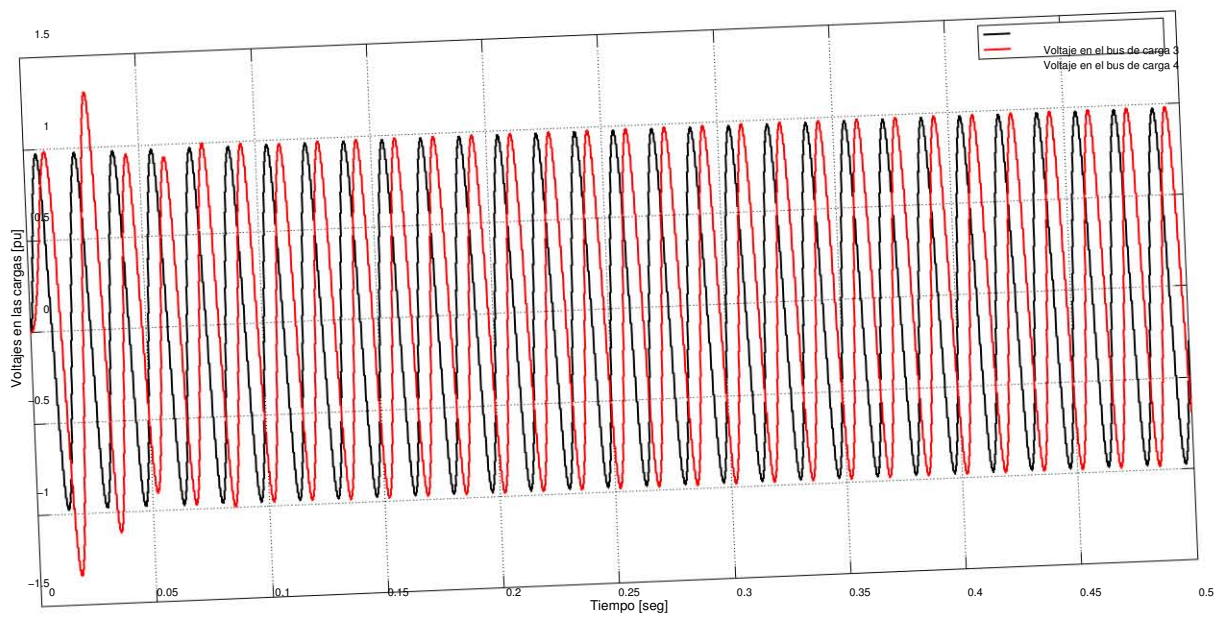


Figura 5.4: Señales de voltaje en los buses de carga

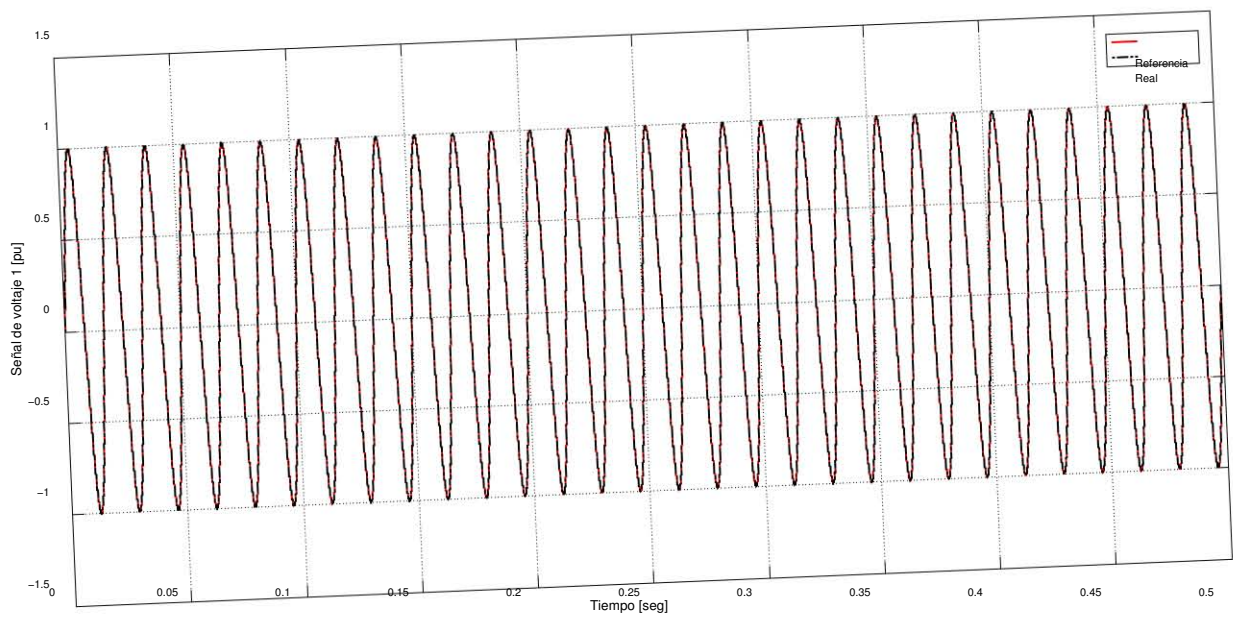


Figura 5.5: Seguimiento de la señal de voltaje con el convertidor 1

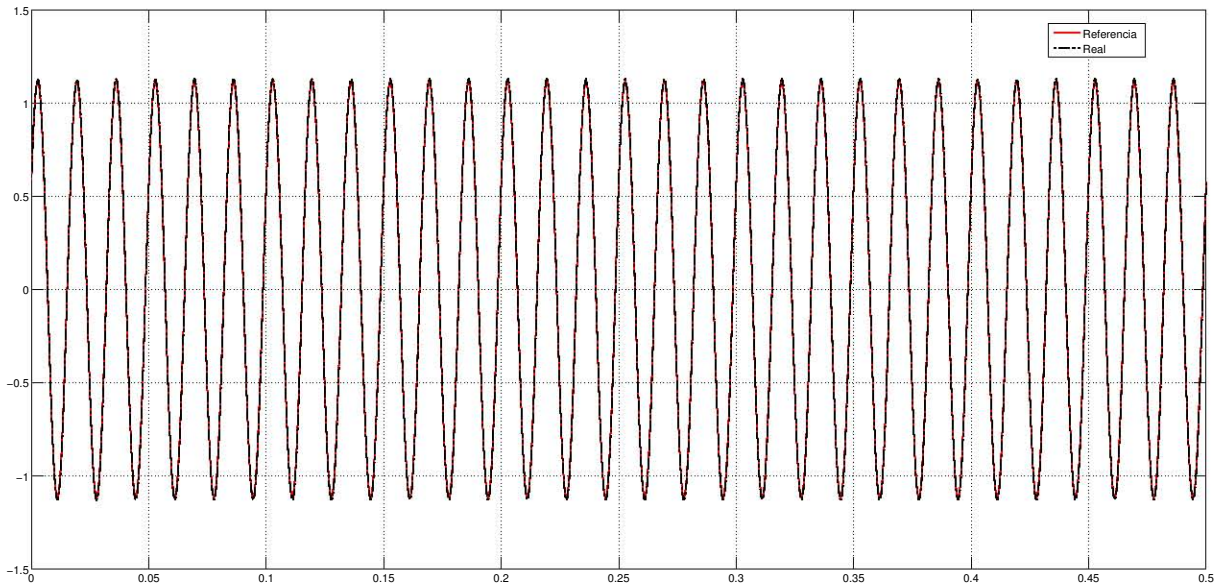


Figura 5.6: Seguimiento de la señal de voltaje con el convertidor 2

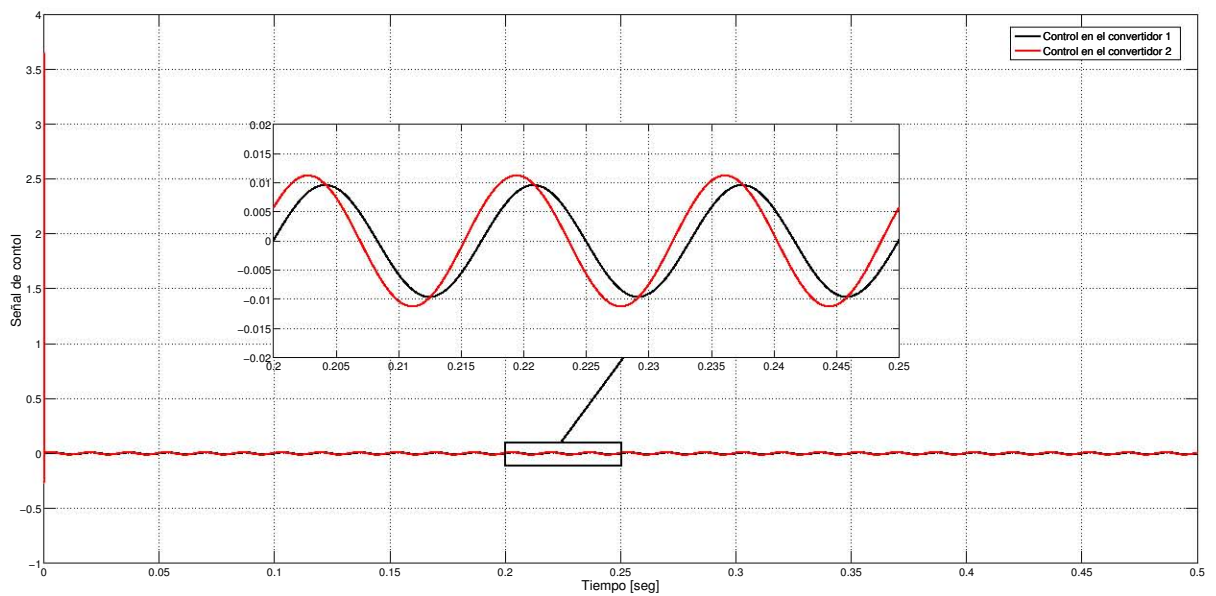


Figura 5.7: Señal de control en los convertidores

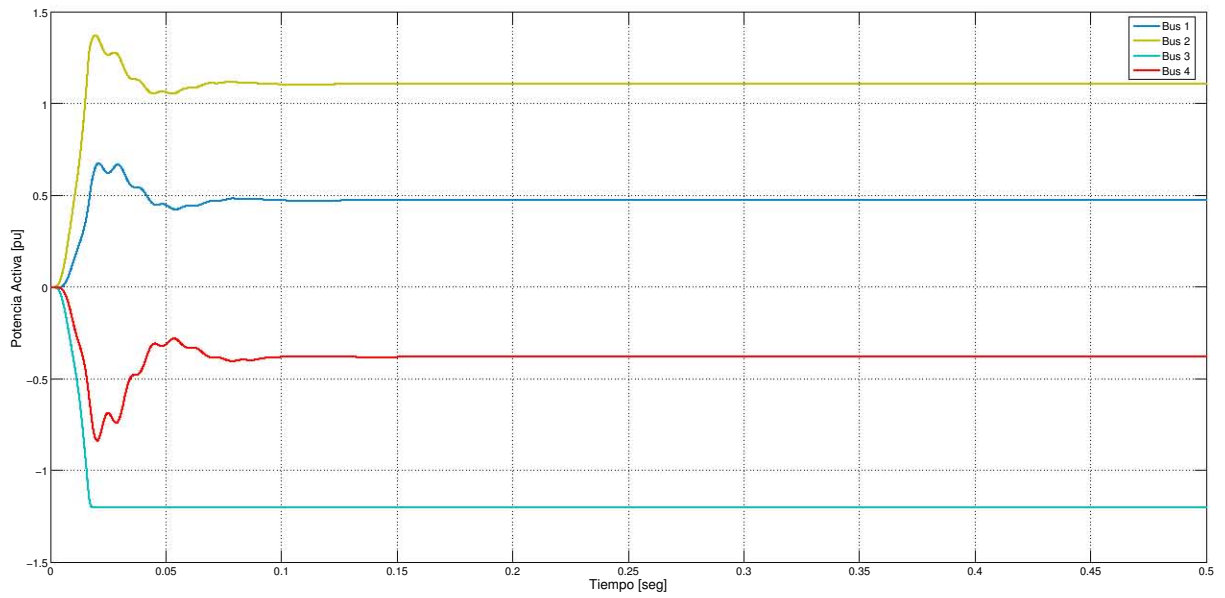


Figura 5.8: Potencia activa en todos los buses

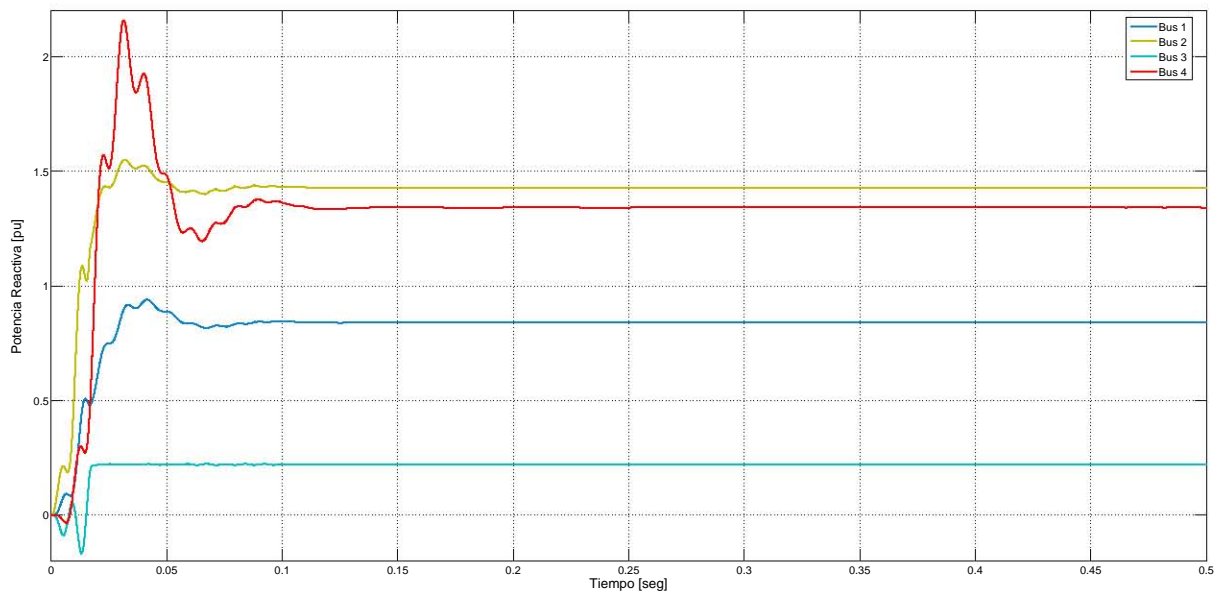


Figura 5.9: Potencia activa en todos los buses

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se plantea una nueva filosofía de análisis para sistemas eléctricos de potencia que permite interpretar resultados conocidos para circuitos eléctricos a partir de las características topológicas de la red, particularmente propiedades de la matriz de interconexión, haciendo uso de características de los sistemas Hamiltonianos que permiten el diseño de una ley de control así como un análisis de estabilidad sistemático. Con lo que el problema de estabilización de una microred con topología malla ha sido abordado incluyendo la dinámica de los convertidores de potencia así como modelos dinámicos para circuitos de carga, se logró demostrar que una ley de control distribuida, desarrollada para cada convertidor de potencia conserva sus propiedades de estabilización a pesar de la interconexión, completa del sistema al considerar una red con topología malla. Logrando garantizar estabilidad en voltaje y en frecuencia al mismo tiempo. Siempre que se satisfagan las ecuaciones de flujo de potencia, que son las encargadas de proporcionar la amplitud de los voltajes y potencias que se necesitan extraer de las fuentes para que se satisfaga la demanda de potencia activa y reactiva por el lado de las cargas, además habilitan la posibilidad de tener información del equilibrio energético de la microred.

Para llegar a los resultados presentados ha sido fundamental el uso de estructuras hamiltonianas exhibidas por los diferentes dispositivos que conforman la microred, como son, convertidores de potencia, cargas y la misma red.

Un desafío que debe ser considerado para futuras investigaciones se relaciona con las fuentes de voltaje constantes incluidas en el modelo del convertidor de potencia, en un escenario más realista estas tensiones son las entregadas por las fuentes verdes y pueden asociarse a otro sistema dinámico. La investigación actual se lleva a cabo con el objetivo de considerar en un futuro estas fuentes como otros sistemas Hamiltonianos, para poder interconectarlos con el sistema completo. Así como también se debe considerar que el análisis de los flujos de potencia se hace fuera de línea, por lo que, este trabajo deja abierto el tema de considerar que los flujos de potencia se puedan satisfacer de manera automática, así como el echo de poder considerar líneas de transmisión con pérdidas, para lo cual se tiene la certeza que el sistema completo también se podrá describir mediante una estructura Hamiltoniana he incluso se podría estabilizar con la misma ley de control.

# Apéndice A

## Propiedades de la red con topología malla

En esta sub-sección se presentan las propiedades importantes de la matriz de sub-incidencia  $H$  que están dadas por la topología de la red y son elementales para obtener el modelo dinámico de la misma, estas propiedades son particulares de la topología de la red con la que se está trabajando, ya dependen del tipo de interconexión, como lo presentan en Avila (2015), dichas propiedades son las que permiten la obtención del modelo Hamiltoniano para la red. Para las redes con topología malla se mencionan varias proposiciones particulares, esto es, las cargas están conectadas en paralelo con un capacitor, lo que implica que el número de capacitores sea igual al número de cargas. Note que las columnas de  $H_{CR}$  corresponden a los loopsets de resistor de co-árbol asociados con los capacitores. Esto implica que dada la interconexión mencionada entre ambos elementos, en el loopset correspondiente aparecerá un 1 en cada columna de  $H_{CR}$  mientras que los otros elementos son cero, esto deja claro que  $H_{CR} = I$ .

Para que sea clara la demostración se dividen en tres grupos a los inductores:

1.  $r$ -inductores que conectan una fuente con un capacitor.
2.  $s$ -inductores que conectan una fuente con otra fuente.
3.  $p$ -inductores que conectan un capacitor con otro capacitor.

y sabiendo que cada capacitor puede compartir cutset con cada inductor, se tiene que

$$-H_{CL} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r_1}^T & 0 & \dots & 0 & 0_{1 \times s} & N_1 \\ 0 & \mathbf{1}_{r_2}^T & \dots & 0 & 0_{1 \times s} & N_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1}_{r_{n_2}}^T & 0_{1 \times s} & N_{n_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

con  $\mathbf{1}_{r_i}^T \in \mathbb{R}^{1 \times r_i}$ , un vector con todas las entradas igual a 1,  $N_i \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ ,  $\sum_{i=1}^{n_1} r_i = r$  tal que  $r + s + p = n_2$ ; y cada columna en la matriz  $N = \text{col}(N_1, \dots, N_{n_1})$  tiene sólo un 1 y un -1,

cumpliendo que  $\mathbf{1}^T N = 0$ . La matriz  $H_{1L}^T$  es de la forma

$$H_{1L}^T = \begin{bmatrix} M_{r_1} \\ M_{r_2} \\ \vdots \\ M_{r_{n_1}} \\ M_s \\ 0_{p \times n_1} \end{bmatrix}; \quad M_{r_i} \in \mathbb{R}^{r_i \times n_1}, \quad M_s \in \mathbb{R}^{s \times n_1}$$

con  $M_{r_i}$  matrices en las cuales en cada fila tiene sólo una entrada diferente de cero y ésta entrada aparece en una columna diferente con respecto a las otras filas; y la matriz  $M_s$  satisface  $M_s \mathbf{1}_{n_1} = 0$ . Y ya que cada capacitor puede compartir cutset con cada inductor cada una de las  $n_1$  columnas de  $H_{1L}^T$  tiene  $m_i$  entradas diferentes de cero. Para caracterizar a la matriz  $H_{CL}$  se propone la siguiente división

$$H_{CL} = [\Delta | N] \quad (\text{A.2})$$

con  $\Delta \in \mathbb{R}^{n_1 \times r}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{n_1 \times p}$ . Note que todos los cutsets básicos son cutsets de nodo, para la red con topología malla el número de inductores conectados a la carga siempre será igual o mayor a dos, entonces el número de capacitores que conectan una fuente con un capacitor ( $r$ -inductores) será igual al número de capacitores que están en paralelo con la carga ( $n_1$ ) y por lo tanto el número total de inductores ( $n_2$ ) se puede calcular como la suma del número de capacitores mas el número de inductores que conectan un capacitor con otro capacitor ( $p$ -inductores), esto es  $n_2 = n_1 + p$ . Entonces la estructura de  $H_{CL}$  será

$$\Delta = -I_r; \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_{n_2} \end{bmatrix}_{n_2 \times p} \quad (\text{A.3})$$

donde  $N$  permanece con las mismas propiedades, y como sólo hay  $r$ -inductores que comparten loopset con la fuente, por lo tanto  $H_{1L}$  tiene la forma

$$H_{1L} = [\mathbf{1}_{1 \times r}^T \quad 0_{1 \times p}] \quad (\text{A.4})$$

## Apéndice B

# Programa para solucionar los flujos de potencia

El siguiente programa ayuda a la solución de los flujos de potencia, fue desarrollado en el laboratorio de control de la Facultad de Ingeniería UNAM por la Maestra Sofía Ávila-Becerril

*% Program for Newton–Raphson Load Flow Analysis*

```
nbus = 4;
x12 = 60*0.03 i;
x13 = 60*0.01 i;
x14 = 60*0.04 i;
x23 = 60*0.02 i;
x24 = 60*0.05 i;
x34 = 0;
r1 = 5;
r2 = 16;
ca1=(0.0001);
ca2=(0.0006);
yr1 = 1/r1;
yr2 = 1/r2;
y1c = (60 i*ca1);
y2c = (60 i*ca2);
b33 = y1c;
b44 = y2c;
y12 = 1/x12;
y13 = 1/x13;
y14 = 1/x14;
y23 = 1/x23;
y24 = 1/x24;
y34 = 0;
y11 = y12 + y13 + y14;
y22 = y12 + y23 + y24;
```



```

y33 = y13 + y23 + y34 + b33;
y44 = y14 + y24 + y34 + b44;
Y =-[y11 -y12 -y13 -y14;-y12 y22 -y23 -y24;-y13 -y23 y33 -y34;-y14 -y24 -y34
    y44];
busd = busdatasS(nbus);           % Calling busdatas.
bus = busd(:,1);                  % Bus Number.
V = busd(:,2);                    % Specified Voltage.
del = busd(:,3);                  % Voltage Angle.
Pg = busd(:,4);                   % PGi.
Qg = busd(:,5);                   % QGi.
Pl = busd(:,6);                   % PLi.
Ql = busd(:,7);                   % QLi.

P = Pg - Pl;                      % Pi = PGi - PLi.
Q = Qg - Ql;                      % Qi = QGi - QLi.
Psp = P;                          % P Specified.
Qsp = Q;                          % Q Specified.
G = real(Y);                      % Conductance matrix.
B = imag(Y);                      % Susceptance matrix.
Tol = 1;
Iter = 1;
while (Tol > 1e-3)                % Inicio de Iteraciones
    nq = 1;
    Q = zeros(nbus,1);
    for i = 1:nbus
        for k = 1:nbus
            Q(i) = Q(i) - V(i)* V(k)*(G(i,k)*sin(del(i)-del(k)) - B(i,k)*cos(
                del(i)-del(k)));
        end
    end
end

d1 = del(1);
d2 = del(2);
d3 = del(3);
d4 = del(4);

x3 = V(1);
x6 = V(2);
x9 = V(3);
x12 = V(4);

%Flujo de potencias
d12 = d1 - d2;
d13 = d1 - d3;
d14 = d1 - d4;
d21 = d2 - d1;
d23 = d2 - d3;
d24 = d2 - d4;
d31 = d3 - d1;
d32 = d3 - d2;

```

```

d34 = d3 - d4;
d41 = d4 - d1;
d42 = d4 - d2;
d43 = d4 - d3;

P1 = -G(1,1)*x3^2 - (G(1,2)*x3*x6*cos(d12) + G(1,3)*x3*x9*cos(d13) + G(1,4)*
x3*x12*cos(d14) + B(1,2)*x3*x6*sin(d12) + B(1,3)*x3*x9*sin(d13) + B(1,4)*
x3*x12*sin(d14));
P2 = -G(2,2)*x6^2 - (G(2,1)*x6*x3*cos(d21) + G(2,3)*x6*x9*cos(d23) + G(2,4)*
x6*x12*cos(d24) + B(2,1)*x6*x3*sin(d21) + B(2,3)*x6*x9*sin(d23) + B(2,4)*
x6*x12*sin(d24));
P3 = -G(3,3)*x9^2 - (G(3,1)*x9*x3*cos(d31) + G(3,2)*x9*x6*cos(d32) + G(3,4)*
x9*x12*cos(d34) + B(3,1)*x9*x3*sin(d31) + B(3,2)*x9*x6*sin(d32) + B(3,4)*
x9*x12*sin(d34));
P4 = -G(4,4)*x12^2 - (G(4,1)*x12*x3*cos(d41) + G(4,2)*x12*x6*cos(d42) + G
(4,3)*x12*x9*cos(d43) + B(4,1)*x12*x3*sin(d41) + B(4,2)*x12*x6*sin(d42)
+ B(4,3)*x12*x9*sin(d43));

P = [P1;P2;P3;P4];

% Calculate change from specified value
dPa = Psp-P;
dQa = Qsp-Q;
k = 1;
dQ = zeros(nq,1);
for i = nq:nq
    dQ(k,1) = dQa(i);
    k = k+1;
end
dP = dPa(2:nbus);
M = [dP; dQa(2)]; % Mismatch Vector

% Jacobian
% J1 - Derivative of Real Power Injections with Angles..
J1 = zeros(nbus-1,nbus-1);
for i = 1:(nbus-1)
    m = i+1;
    for k = 1:(nbus-1)
        n = k+1;
        if n == m
            for n = 1:nbus
J1(i,k) = J1(i,k) + V(m)* V(n)*(-G(m,n)*sin(del(m)-del(n)) + B(m,n)*cos(del(m)
-del(n)));
            end
J1(i,k) = J1(i,k) - V(m)^2*B(m,m);
        else
J1(i,k) = V(m)* V(n)*(G(m,n)*sin(del(m)-del(n)) - B(m,n)*cos(del(m)-del(n)));
        end
    end
end
end

```

```

% J2 - Derivative of Real Power Injections with V..
J2 = zeros(nbus-1,nq);
for i = 1:(nbus-1)
    m = i+1;
    for k = 1:nq
        n = k+2;
        if n == m
            for n = 1:nbus
J2(i,k) = J2(i,k) + V(n)*(G(m,n)*cos(del(m)-del(n)) + B(m,n)*sin(del(m)-del(n)
));
            end
J2(i,k) = J2(i,k) + V(m)*G(m,m);
        else
J2(i,k) = V(m)*(G(m,n)*cos(del(m)-del(n)) + B(m,n)*sin(del(m)-del(n)));
        end
    end
end

% J3 - Derivative of Reactive Power Injections with Angles..
J3 = zeros(nq,nbus-1);
for i = 1:nq
    m = i+2;
    for k = 1:(nbus-1)
        n = k+1;
        if n == m
            for n = 1:nbus
J3(i,k) = J3(i,k) + V(m)* V(n)*(G(m,n)*cos(del(m)-del(n)) + B(m,n)*sin(del(m)-
del(n)));
            end
J3(i,k) = J3(i,k) - V(m)^2*G(m,m);
        else
J3(i,k) = V(m)* V(n)*(-G(m,n)*cos(del(m)-del(n)) - B(m,n)*sin(del(m)-del(n)));
        end
    end
end

% J4 - Derivative of Reactive Power Injections with V..
J4 = zeros(nq,nq);
for i = 1:nq
    m = i+2;
    for k = 1:nq
        n = k+2;
        if n == m
            for n = 1:nbus
J4(i,k) = J4(i,k) + V(n)*(G(m,n)*sin(del(m)-del(n)) - B(m,n)*cos(del(m)-del(n)
));
            end
J4(i,k) = J4(i,k) - V(m)*B(m,m);
        else
J4(i,k) = V(m)*(G(m,n)*sin(del(m)-del(n)) - B(m,n)*cos(del(m)-del(n)));
        end
    end
end

```

```

    end
end

J = [J1 J2; J3 J4]           % Jacobian Matrix..
X = -inv(J)*M                % Correction Vector;
dTh = X(1:nbus-1);          % Change in Voltage Angle..
dV = X(nbus:end);           % Change in Voltage Magnitude..

% Updating State Vectors..
del(2:nbus) = dTh + del(2:nbus); % Voltage Angle..
k = 1;
for i = 2:2
    V(i) = dV(k) + V(i);      % Voltage Magnitude..
    k = k+1;
end

Iter = Iter + 1;
Tol = max(abs(M));           % Tolerance..
end
loadflowS(nbus,V,del,P,Q);   % Calling Loadflow.m..
function [Pi Qi Pg Qg Pl Ql Pn Qn] = loadflowS(nb,V,del,P,Q)

BMva=1;
Y = ybusppg(nb);            % Calling Ybus program.
lined = linedatas(nb);      % Get linedats.
busd = busdatas(nb);        % Get busdatas.
Vm = pol2rect(V,del);       % Converting polar to rectangular.
Del = 180/pi*del;           % Bus Voltage Angles in Degree.
fb = lined(:,1);            % From bus number.
tb = lined(:,2);            % To bus number.
nl = length(fb);            % No. of Branches.
Pl = busd(:,6);              % PLi.
Ql = busd(:,7);              % QLi.

Iij = zeros(nb,nb);
Sij = zeros(nb,nb);
Si = zeros(nb,1);

% Bus Current Injections..
I = Y*Vm;
Im = abs(I);
Ia = angle(I);
Pn = P;
Qn = Q;

% Line Current Flows..
for m = 1:nl
    p = fb(m); q = tb(m);
    Iij(p,q) = -(Vm(p) - Vm(q))*Y(p,q);
    Iij(q,p) = -Iij(p,q);
end

```

```

Iij = sparse(Iij);
Iijm = abs(Iij);
Iija = angle(Iij);

% Line Power Flows..
for m = 1:nb
    for n = 1:nb
        if m ~= n
            Sij(m,n) = Vm(m)*conj(Iij(m,n))*BMva;
        end
    end
end
Sij = sparse(Sij);
Pij = real(Sij);
Qij = imag(Sij);

% Line Losses..
Lij = zeros(nl,1);
for m = 1:nl
    p = fb(m); q = tb(m);
    Lij(m) = Sij(p,q) + Sij(q,p);
end
Lpij = real(Lij);
Lqij = imag(Lij);

% Bus Power Injections..
for i = 1:nb
    for k = 1:nb
        Si(i) = Si(i) + conj(Vm(i))*Vm(k)*Y(i,k)*BMva;
    end
end
Pi = real(Si);
Qi = -imag(Si);
Pg = Pi+Pl;
Qg = Qi+Ql;

```

# Bibliografía

- P. Kothari and J. Nagrath, *Modern Power System Analysis*, Third Edition. McGraw Hill.
- P. Kundur, N. Balu, and M. Lauby, *Power System Stability And Control*, Volume 7. McGraw-Hill New York, 1994.
- F. Milano, *Power System Modelling and Scripting*, Springer, 2010.
- O. Elgerd, Control of electric power systems. *Control Systems Magazine, IEEE*, pp. 4–16, 1981.
- M. J. Guerrero, M. Chandorkar and T. Lee and P. Loh, Advanced control architectures for intelligent microgrids, part I: decentralized and hierarchical control, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, pp. 1254–1262, 2013.
- D. Hill and G. Chen, Power systems as dynamic networks, *Circuits and Systems, IEEE International Symposium on* 2006.
- J. W. Simpson-Porco, F. Dörfler, and F. Bullo, Synchronization and power sharing for droop-controlled inverters in islanded microgrids, *Automatica*, vol. 49, pp. 2603–2611, 2013.
- J. Schiffer, R. Ortega, A. Astolfi, J. Raisch and T. Sezi, Conditions for stability of droop-controlled inverter-based microgrids, *Automatica*, vol. 50, pp. 2457–2469, 2014.
- H. Farhangi, The path of the smart grid, *Power and Energy Magazine, IEEE*, vol. 8, pp. 18–28, 2010.
- R. Brayton and J. Moser, A theory of nonlinear networks. *Quart. Appl. Math*, 22(1), pp. 1-33, 1964.
- S. Fiaz, and D. Zonetti, R. Ortega, J. Scherpen and A. Van Der Schaft, A port-Hamiltonian approach to power network modeling and analysis. *European Journal of Control*, 477–485, 2013.
- J.A. Pecas, C.L. Moreira and A.G. Madureira, Defining control strategies for microgrids islanded operation. *Power System IEEE Transactions*, pp. 916–924, 2006.

- N. Pogaku, M. Prodanovic and T.C. Green. Modeling, analysis and testing of autonomous operation of an inverter-based microgrid. *Power Electronics IEEE Transactions on* 22(2), pp. 613–625, 2007.
- M.C. Chandorkar, D.M. Divan and R. Adapa, Control of parallel connected inverters in standalone ac supply systems. *Industry Applications, IEEE Transactions on* 29(1), pp. 136–143, 1993.
- E.A. Coelho, P.C. Cortizo and P.F. García, Small-signal stability for parallel connected inverters in stand-alone ac supply systems. *Industry Applications, IEEE Transactions on* 38(2), pp. 533–542, 2002.
- E. Barklund, N. Pogaku, M. Prodanovic, C. Hernandez-Aramburo and T.C. Green, Energy management in autonomous microgrid using stability-constrained droop control of inverters. *Power Electronics, IEEE Transactions on* 23(5), pp. 2346–2352, 2008.
- R. Ortega, A.J. Van der Schaft, I. Mareels and B. Maschke, Putting energy back in control. *Control Systems, IEEE*, 21(2), 18–33, 2001.
- A. J. Van der Schaft and B. M. Maschke, Discrete conservation laws and port-Hamiltonian systems on graphs and complexes. *Computer Research Repository*, 1107–2006, 2011.
- R. Olfati-Saber and R. Murray, Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans on Automatic Control*, 49(9), 1520–1533, 2004.
- J. Wei and Van der Schaft, Load balancing of dynamical distribution networks with flow constraints and unknown in/out flows. *Systems and Control Letters*, 62(11), 1001–1008, 2013.
- M. Arcak, Passivity as a design tool for group coordination. *IEEE Trans on Automatic Control*, 52(8), 1380–1389, 2007.
- P. E. Wellstead, *Introduction to physical system modelling*. Academic Press London, 1979.
- S. Ávila-Becerril, G. Espinosa-Pérez, P. Fernández-Carrillo. Stability and Consensus of Electrical Circuits via Structural Properties. 5th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control, 2015.
- B. Jayawardhana, R. Ortega, E. Garca-Canseco and F. Castaños. Passivity Of Nonlinear Incremental Systems: Application To PI Stabilization Of Nonlinear RLC Circuits. *Systems And Control Letters*, vol.56, no.9, p. 618-622, 2007.
- R. Ortega, A. Van der Schaft, B. Maschke and G. Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *European journal control, Automatica on* 38(4), 569-746, 2002.
- H. Khalil. *Nonlinear Systems Third Edition*, Prentice Hall, 2002.