UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ACATLÁN

DOCENCIA EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Propuesta Didáctica para el aprendizaje del tema de matrices en un curso de matemáticas en la Educación Media Superior

TESIS

que para optar por el grado de Maestro en Docencia para la Educación Media Superior, Área Matemáticas

Presenta

Ximena Alcala Cortés

Tutor:

Mtro. Víctor José Palencia Gómez
FES Acatlán

Miembros del Comité Tutor:

Mtro. Victor José Palencia Gómez	FES Acatlán
Mtra. Lina Zythella Ortega Ojeda	FES Acatlán
Mtro. Jorge Javier Jiménez Zamudio	FES Acatlán

Naucalpan de Juárez, a noviembre de 2015

Índice

Índice de Tablas

Agradecimientos

Es grato redactar esta sección, después de ver este trabajo terminado, y reconocer que no sería posible llegar hasta este punto sin el valioso apoyo de mi tutor, el Mtro. Victor José Palencia Gómez, quien orientó este proyecto, y confió en mi capacidad de desarrollarlo. Agradezco mucho su aportación.

Por otro lado, también agradezco a mi Comité tutoral, Mtra. Lina Zythella Ortega Ojeda, y Mtro. Jorge Javier Jiménez Zamudio, así como a mi Comité Sinodal, los anteriores y además la Mtra. Beatriz Trueba Ríos, y la Mtra. Elena De Oteiza y Oteiza por su tiempo invertido en revisar y dar su aportación al presente trabajo. Entre todos, me ayudaron a que el mismo tuviera mejor estructura y mayor aplicación a situaciones prácticas.

MADEMS me permitió aprender entre otras cosas a mejorar mi planeación de clase, y a comprender de mejor manera el proceso de enseñanza - aprendizaje, agradezco el tiempo invertido por los diversos profesores que tuve, cada uno con su estilo, y el apoyo recibido por la coordinación de la maestría, encabezada por la Mtra. Rosa Evelia Almanza Montañez, para el correcto desarrollo de las actividades que solicitaba la maestría.

Resumen

Se presenta la propuesta de una estrategia didáctica para la enseñanza del tema de "Matrices" en la Educación Media Superior que fomenta que los alumnos desarrollen habilidades matemáticas. Esta establece que el tema se enseñe en nueve sesiones de 110 minutos cada una, tiempo que actualmente no se dedica a la enseñanza del tema en el bachillerato, pero que si se empleara, se tendrían múltiples efectos positivos en el desarrollo de habilidades matemáticas. Para la elaboración de la misma, se consultaron diversas teorías de enseñanza y aprendizaje, seleccionando y analizando en el trabajo principalmente la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, y las aportaciones de Hazzan con respecto de la didáctica mediante la elaboración de ejemplos. Para la evaluación, se tomaron como base las aportaciones de Aduna con respecto de clasificar la evaluación en tres tipos: de diagnóstico, formativa y sumativa, según los objetivos que se busquen con la misma, y con respecto a la selección de habilidades matemáticas a desarrollar, se consideró principalmente la concepción de las matemáticas de Schoenfeld. La estrategia se aplicó a un grupo de estudiantes de licenciatura, evaluando estadísticamente los resultados de la misma. Se concluyó que la práctica presentada sirvió para detonar las capacidades matemáticas de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, el pensamiento inductivo, el análisis, y de razonar en cadenas de argumentos al aplicar un procedimiento.

Abstract

Here it is presented a didactics proposal for teaching the high school subject "Matrix" that promotes the developing of Mathematic skills in the students. It establishes that the subject should be taught in nine lessons of 110 minutes each, time that nowadays isn´t spent in teaching Matrix at high school, but if it were spent, students would develop mathematic skills.

For working out this proposal, many authors were consulted, some of them about teaching and learning theories, just as Ausubel (Significant learning Theory), others from Math didactics (mainly Hazzan, who talks about making examples as a strategy for learning). For evaluation process, it was considered Aduna who classifies the evaluation in three main purposes: Diagnosis, Formative, and certificating evaluation, and for the mathematic skills developing, it was studied mainly the work of Schoenfeld about the mathematical conception. The proposal presented was applied to a group of students from University, and evaluating statistically the results. It was concluded that the practice developed the following math skills in the students: Developing logic situations with mathematical structure from elements of the reality, inductive thinking, analysis, and the capability of reasoning in chain of arguments at executing an algorithm.

Introducción

I.1 Contexto de la problemática

El tema de matrices se aborda en la educación media superior en el sistema educativo mexicano. Forma parte, de manera indirecta, del programa educativo de formación matemática en los estudiantes. Se revisa generalmente cuando se ve la unidad de resolución de ecuaciones lineales: en el caso del Programa de la Escuela Nacional de Preparatoria, forma parte de la Unidad 8 de Matemáticas 4, en el del CCH, como un módulo dentro de la Unidad 1 de Matemáticas 3, y en los Programas de la SEP, sobre todo en el Bloque 7 y 8 de Matemáticas 1. Se considera que se debiera dar mayor relevancia al tema, dada su relación con problemáticas actuales, como el manejo complejo de información, tema en el que se ahondará en la siguiente sección.

En el presente trabajo se pretende desarrollar un programa de clase para el tema de para que el alumno de bachillerato, a través del estudio del tema de una forma más dedicada (empleando mayor número de horas de las que actualmente se pueden llegar a emplear), pueda detonar habilidades matemáticas mientras desarrolla las metas del programa:

- Aplicar la herramienta de matrices para la resolución de problemas de información compleja.
- Emplear a las matrices para representar situaciones que desea analizar cuantitativamente.

I.2 Justificación

Se estableció dicho tema dada su relevancia en el impacto que el mismo tendría en dar a la sociedad individuos con capacidades para desarrollar estrategias de solución ante el manejo de información compleja, que se desarrolla día con día con el uso de la tecnología de información existente (internet, programas de interacción de redes sociales, avance en los sistemas de localización y telefonía celular, etc.). No con ello se deja del lado la necesidad de que dichos individuos cuenten a su vez con un marco de valores cívicos que contemple el aspecto ético del manejo de información, y dicho aprendizaje afectivo se debiera de dar de modo indirecto en las sesiones desarrolladas.

I.3 Objetivos

El Objetivo General de Investigación fue:

- Seleccionar un marco teórico que permita establecer una estrategia de enseñanza para bachillerato, del tema de matrices, que contemple las siguientes características:

a. Sea efectiva para que los alumnos aprendan el tema

b. Propicie el desarrollo de pensamiento estructurado para el análisis de información compleja.

c. Fomente la adopción de la herramienta de matrices para el análisis y resolución de problemas cotidianos.

d. Fortalezca su capacidad de interpretación de la realidad a través de Modelos matemáticos.

e. Fomente la capacidad de trabajar en grupos multidisciplinarios para la creación de propuestas de solución a problemas planteados por el entorno, en cualquier contexto sociocultural.

Para lograr lo anterior, se establecieron los siguientes objetivos específicos:

a) Establecer un marco teórico acerca de las características y naturaleza del Pensamiento Matemático.

b) Establecer un marco teórico acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje a seguir para la enseñanza del tema

c) Establecer un marco teórico acerca de la evaluación para el tema.

d) Desarrollar el programa de clase basado en los marcos teóricos establecidos.

e) Aplicar el Programa de clase a un grupo y evaluar los resultados obtenidos.

Para el marco teórico, en el cual se basa la presente investigación, se definió el mismo en tres niveles distintos, por un lado, el empleado para definir la concepción de las matemáticas, y poder explicar con mayor precisión el desarrollo de habilidades matemáticas, para este fin, se analizaron los trabajos de algunos estudiosos en el tema, tales como Schoenfeld, Guershon Harel y Larry Sowder, los cuales tuvieron influencia para las definiciones de matemáticas que emplea el National Research Council de Washington, Consejo que influye significativamente en las comunidades matemáticas globales.

Por otro lado, para las estructuras teóricas que se emplearon para establecer los procesos de enseñanza- aprendizaje, se seleccionaron elementos de Ausubel, de su teoría de aprendizaje, de Vygotsky para el aprendizaje de aspectos de índole afectivo, como son los valores sociales, y de Hazzan para la didáctica de las matemáticas a través de la construcción de ejemplos.

Y por otro lado, se describió el marco teórico de Aduna para el establecimiento de un sistema de evaluación que permita medir los resultados del Programa propuesto.

Con ello, se propone una estrategia didáctica para la enseñanza del tema de matrices, la cual cuenta con nueve sesiones, cada una de 110 minutos, y posteriormente un sistema de evaluación para las mismas.

A fin de probar y ajustar la propuesta planteada, y dado que en Preparatoria, si bien se imparte el tema de matrices aunado al de resolución de Sistemas de Ecuaciones, se le dedica muy poco tiempo al mismo, ésta se aplicó a un grupo de licenciatura de primeros semestres, realizando posteriormente una prueba estadística para medir los resultados y el impacto de la misma en el aprendizaje del tema de matrices, y en el desarrollo de habilidades matemáticas. En el presente trabajo se presentan los resultados.

Las conclusiones de dicha evaluación son aplicables a alumnos de bachillerato, dada la cercanía de edades y situación de los estudiantes, y permite mejorar la propuesta en aquellos aspectos en los que haga falta reforzarla.

1. El manejo de Información en la actualidad

1.1 Efectos del exceso de información

Es importante comprender la era en la que se está viviendo, en el aspecto del exceso de información. Este fenómeno genera diferentes situaciones en la sociedad:

El hecho de que actualmente existe demasiada información comunicada a través del internet y de las redes sociales, y de que la misma es generada por un sinfín de personas, instituciones, organizaciones, e incluso nacionalidades, genera una serie de factores que afectan a la comunidad humana que actualmente habita el planeta, algunos de ellos se mencionan a continuación:

a) Falta de certidumbre en cuanto a la confiabilidad de la información obtenida:

Se encuentra hoy en día información que llega de todos lados, algunas veces acerca de un mismo suceso, y contradictora según la fuente, o incompleta. Esto genera una situación de confusión acerca de la veracidad de la información que se obtiene de alguna fuente, y puede conllevar a contar con el mismo efecto de no contar con la información.

b) Información no apta para niños al alcance de los mismos

El cada vez mayor acceso a cada vez mayor cantidad de población a la información puede crear problemas de formación en los niños, debido a que a temprana edad no necesariamente cuentan con un criterio definido con respecto al juicio que le deben dar a aquello que reciben. En términos prácticos, y desde el ámbito familiar, esto requeriría de un control parental para accesar a Internet, no sólo por el posible contenido de la información, sino porque además, dada la situación socioeconómica del mundo, puede inclusive representar un riesgo a su seguridad e integridad, ya que tienen acceso también organizaciones violentas, peligrosas o para adultos. El control que anteriormente se le daba al contenido de los canales de televisión o radio, no es tan sencillo de implantar en Internet, ha habido mayores avances en la legislación en este campo en otros países como Estados Unidos, pero a México aún le falta mayor análisis del impacto de las redes sociales, para generar un equilibrio, o bien algo similar, entre la libertad de expresión de la población, y la no afectación de grupos vulnerables (en este caso los niños), con la información a la cual tienen acceso.

c) Falta de privacidad/Seguridad

Cuando la información no tiene algún control establecido, ello puede conllevar a que grupos delictivos cuenten con ella para el desarrollo de actos perjudiciales para la sociedad. Por otro lado, es muy fácil encontrar información acerca de la población en general con tan sólo hacer una búsqueda a través de las redes sociales, de tal suerte que actualmente la vida de una persona es mucho menos privada de lo que se piensa. Tan sólo durante el 2013[1] hubo un aumento del 62% de fuga de información de sitios oficiales, establecidos en internet, debido a “hackers”.

Por otro lado, la cantidad de la misma que se ha generado en Internet es tan grande y desde tantas redes distintas que es muy difícil medir el tamaño de almacenamiento que ocupa. Ello conlleva no sólo a dificultades en cuanto a su manejo, sino también trae oportunidades para la mejora de la calidad de vida humana y del planeta.

Para poder aprovecharlas, primero es importante abordar la construcción de un marco de valores que permita el establecimiento de un juicio para interpretar la información que se recibe y se pueda emplear para atender nuestras necesidades actuales y prever las futuras. Es en este sentido que la educación juega un papel

---

[1] Notimex 20.04.2014, consultado el 17-nov-2014 en http://www.elfinanciero.com.mx/tech/inicia-era-de-mega-fuga-de-informacion-en-internet.html

clave, en el desarrollo de un modelo de manejo de información que permita el progreso a las comunidades, respetando el marco de valores establecido por la sociedad, y fomentando que los proyectos de progreso, que de hecho emplean la información o conocimiento generado hasta el momento, se desarrollen tomando como principios los marcos de valores establecidos. Para este punto, quisiera abordar un aspecto de la educación que resulta importante, hay elementos en la misma que nunca cambian con las épocas, por ejemplo, el reconocimiento de las necesidades universales de bienestar individual y social, así como la del aprendizaje continuo. Lo que sí cambia con las épocas, es la forma en que dichas necesidades se atienden, y para ello ha habido un enfoque distinto de cómo abordarlas, para el Estado, la Iglesia y las familias, y según la época se han abordado de forma diferente.

Desarrollando un ejemplo en el área del presente proyecto, matemáticas, en la época antigua de los griegos, siglos antes de Cristo, había una necesidad, como la hay ahora, de tener autonomía y sentido de propiedad, y la sociedad bajo sus propios mecanismos, basados en su conocimiento, delimitaban la Tierra, y para que hubiera certeza en cuanto a las fronteras de la misma, tuvieron que crear la Geometría, y la información proporcionada por la misma permitía certeza legal a las personas. La Geometría, después aprendida y empleada por los árabes, creó nuevas estrategias para atender dichas necesidades, que con el tiempo iban evolucionando. El sentido de propiedad se trasladaría no sólo a la Tierra, sino a las pertenecías, negocios, y ello generó nuevas necesidades de conocimiento, como la de aprender e inventar lo relacionado con la contabilidad, y el sistema algebraico, con dicha herramienta, se profundizó el pensamiento abstracto de los estudiosos de las matemáticas, y cuando los árabes invadieron a los europeos (siglo VIII), los mismos adquirieron el conocimiento tanto de los griegos como de los árabes. Con ello se difundió el conocimiento matemático por Europa, pero al producirse información de tipo argumentativa o racionalista, y otra propia del empirismo, se comenzó a cuestionar su confiabilidad y validez, por lo que después se tuvo que construir una nueva estructura de análisis de información y generación de conocimiento, lo que dio la pauta a la creación del Método científico, con ello se comenzó el pensamiento científico, el positivismo, y se incrementó el conocimiento matemático.

En el ejemplo anterior, demasiado acelerado para mostrar los matices de la historia, se puede observar cómo una necesidad puede generar un elemento de información o conocimiento, y éste a su vez, también puede crear una nueva necesidad, o bien hacer evolucionar a la misma, y ello da la pauta de un progreso en la generación de conocimiento, de forma cíclica. Se puede aplicar el mismo a diversas épocas como la situación de la Guerra Fría, o en nuestro país, a la forma en que los sucesos mundiales afectan los paradigmas que se van generando con respecto al conocimiento, la educación, el papel de los maestros, la familia y la sociedad en general para educar a la población mexicana. Durkheim menciona que "a pesar de las apariencias, la educación responde antes que nada a necesidades sociales" (Durkheim, 1984). Como vimos en el ejemplo, el pensamiento matemático no se escapa de esta visión, y en la actualidad existe la necesidad de atender a aquellos egresados de las academias educativas que no lograron perfeccionar de forma integral su pensamiento matemático, afectando directamente con ello la capacidad del desarrollo científico y tecnológico del país, así como mejorar el sistema de enseñanza de las mismas para que aquellos estudiantes que actualmente se están formando en Educación Media Superior, e inclusive en la Licenciatura, puedan contar con las bases del pensamiento matemático, y lo puedan vincular a otras disciplinas con el fin de generar aprendizaje significativo, e incidir con ello no sólo a su propio aprendizaje, sino contribuir a resolver una de las problemáticas que aborda continuamente nuestro país: Lograr ser más competitivo, para fomentar el crecimiento y desarrollo económico y social nacional. Dice Durkheim que:

> "La Educación es la acción ejercida por las generaciones adultas sobre las que todavía no están maduras para la vida social. Tiene por objeto suscitar y desarrollar en el niño un cierto número de estados intelectuales, físicos y morales que le exigen la sociedad

política en su conjunto, y el medio especial al cual está particularmente destinado.” (Durkheim, 1984)

En este sentido, se han creado diversas reformas educativas buscando mejorar el nivel educativo integral de los estudiantes y egresados, porque se requiere de ciudadanos con la capacidad de manejo de información, y de generación de conocimiento, y ello implica no sólo contar con un marco de valores, sino el desarrollo también de un conjunto de habilidades y procesos intelectuales. Durante el 2007, bajo la administración de Josefina Vásquez Mota, en la Secretaría de Educación Pública, se establecieron algunos ejes para mejorar el sistema educativo de México, entre ellos, la formación integral de los alumnos para la vida y el trabajo, y la reforma curricular. (Villalpando, 2009) En este marco, en este año se estableció la Reforma Integral de la Educación Media Superior, que dentro de los elementos más importantes de la misma, estableció adoptar un sistema educativo basado en competencias genéricas, disciplinares básicas y extendidas, y profesionales. Con dichas competencias, se pretendía lograr algunos de los ejes planteados como la formación integral y la formación para el trabajo. El sistema de competencias no se inventó en México, fue en 1999 por un grupo colegiado de profesores de Universidades Europeas, principalmente la Universidad de Deusto, y fue difundido hacia Latinoamérica, Asia e India.

Esta situación planteó e implantó en el Sistema Educativo en México dicho modelo pedagógico, además debido a que dichas competencias cuentan a su vez con ciertos estándares para la medición. En la praxis, esto se refleja en que se debe contar con egresados que tengan conocimiento, además de disciplinar, conocimiento integral en diversas áreas del conocimiento, una de las cuales relacionada con las matemáticas (existen diversas competencias que requieren de pensamiento matemático para detonarlas, tales como la competencia de pensamiento analítico, lógico, sistémico, y la de resolución de problemas, entre otras). Hoy en día, resulta inclusive interesante que se pudiera detonar competencias anteriormente no relacionadas con las matemáticas como la de diversidad e interculturalidad o trabajo en equipo, e inclusive pensamiento creativo, a través de la vinculación del pensamiento matemático y el conocimiento multidisciplinario para resolver problemas sociales reales.

1.2 Tema del presente trabajo

La presente investigación responde a la pregunta ¿cómo se puede aplicar el tema de “Matrices” en la enseñanza media superior para detonar en los alumnos capacidades del pensamiento matemático?

Quisiera plantear primero porqué se pretende detonar habilidades de este tipo a través de este tema. Aún cuando la Teoría de Matrices tuvo su origen en los estudios de William Rowan Hamilton, importante matemático irlandés que vivió de 1805 a 1865, interesado en el estudio de la estructura de los números cuaterniónicos (estudio importante para la física cuántica),el término de “Matriz” fue empleado por primera vez en 1841 por los profesores Arthur Cayley y James Sylvester, ambos profesores de Cambridge, y el último también de la Universidad de Johns Hopkings de Estados Unidos, quien además contribuyó al florecimiento de las matemáticas en este país, por su propuesta de uno de los primeros programas de matemáticas para graduados que se estableció en Norte América.

A partir de entonces el concepto y la aplicación de las matrices en aspectos de diversa índole ha ido evolucionando, hasta llegar al presente, que se emplea en los sistemas informáticos y en el manejo de grandes volúmenes de información, y que es aplicable al almacenamiento y análisis de información de toda clase.

Charles Miller, importante intelectual en el estudio del pensamiento matemático, estableció que:

> La teoría de Matrices ha sido una importante herramienta de las ciencias físicas desde 1920 y ha encontrado aplicación en diversas ramas de las matemáticas, la astronomía, la mecánica, la teoría de circuitos electrónicos, la física nuclear, y la aerodinámica. Sin embargo, su empleo en los negocios y la economía data tan sólo

> de 1940, cuando George Dantzing, un matemático que trabajó para la fuerza aérea de los Estados Unidos, desarrolló la idea de la Programación Lineal.
>
> (Miller & Vern E., 1979)

La Programación lineal es un área de las matemáticas en la que se emplean matrices para establecer Modelos Matemáticos de situaciones específicas de diversas áreas del conocimiento, con el fin de resolver problemas de optimización de recursos. Desde este punto de vista, se puede ver a las Matrices como un precursor del diseño de Modelos Matemáticos de situaciones reales.

En términos sencillos, un Modelo Matemático describe teóricamente un objeto que existe fuera del campo de las Matemáticas, acotando la información infinita que podría presentar una situación real, a aquella que se considera relevante para el análisis y la resolución de un problema u objetivo planteado, y siempre se encuentra estructurada en variables, las cuales están o no relacionadas entre sí para establecer la estructura del modelo. Dicha representación de la realidad para un fin específico se le conoce también como Modelado de la realidad, y una de las estructuras empleadas para almacenar la información contenida en las variables son precisamente las matrices.

A partir de mi experiencia como docente en licenciatura en el área de matemáticas de Sociología, en la cual uno de los temas del Programa es el de “Matrices”, me he percatado que existe la posibilidad de que los alumnos también lo empleen para construir modelos matemáticos que representen situaciones en las que ellos se desenvuelven, y con ello fomentar diversas habilidades, entre ellas:

- El uso de variables para interpretar las situaciones cotidianas.
- Estructurar su pensamiento para el análisis de situaciones complejas
- La capacidad para el análisis y solución de problemas de su entorno cotidiano.

En forma particular, despertar dichas habilidades en los alumnos implica también detonar otras relacionadas, tales como poder identificar variables clave para el análisis de situaciones reales, interpretar el comportamiento de las mismas, y según el caso, problematizar la realidad, lo que favorece la resolución de problemas.

Lo anterior forma parte fundamental de competencias relacionadas con el pensamiento matemático, según el marco teórico de Schoenfeld , el cual se explica más adelante, por lo que contar con estrategias didácticas que permitan que los alumnos creen modelos matemáticos basados en matrices puede ser un elemento acelerador de su aprendizaje matemático.

Por lo anteriormente comentado, se eligió para este trabajo, el tema de Matrices como instrumento para fomentar que los alumnos mejoren su capacidad matemática, y se busca proponer estrategias didácticas adecuadas para que los alumnos puedan conocer y aplicar las matrices para el diseño de modelos de la realidad, y que a través de esta herramienta, el alumno tenga la posibilidad de desarrollar competencias en su pensamiento matemático.

Objetivo General de Investigación:

- Seleccionar un marco teórico que permita establecer una estrategia de enseñanza para bachillerato, del tema de matrices, que contemple las siguientes características:

a. Sea efectiva para que los alumnos aprendan el tema
b. Propicie el desarrollo de pensamiento estructurado para el análisis de información compleja.
c. Fomente la adopción de la herramienta de matrices para el análisis y resolución de problemas cotidianos.
d. Fortalezca su capacidad de interpretación de la realidad a través de Modelos matemáticos.

e. Fomente la capacidad de trabajar en grupos multidisciplinarios para la creación de propuestas de solución a problemas planteados por el entorno, en cualquier contexto sociocultural.

Cabe mencionar que el inciso a, b, c y d mostrados forman parte de las características del pensamiento matemático expuestas en el marco teórico del presente trabajo, dicha estrategia de enseñanza propiciaría el desarrollo del pensamiento matemático, en términos del marco teórico presentado.

Objetivos Particulares:

a) Establecer un marco teórico acerca de las características y naturaleza del Pensamiento Matemático.
b) Establecer un marco teórico acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje a seguir para la enseñanza del tema
c) Establecer un marco teórico acerca de la evaluación para el tema.
d) Desarrollar el programa de clase basado en los marcos teóricos establecidos.
e) Aplicar el Programa de clase a un grupo y evaluar los resultados obtenidos.

2. Fundamentación Teórica

2.1 La teoría de aprendizaje que se empleará en el proyecto

Existe un dialogo en muchos intelectuales de la pedagogía como Gage, sobre si conviene o no separar las teorías del aprendizaje de las teorías de la enseñanza, dado que son procesos distintos. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2012). Por un lado se acepta que las teorías y metodologías empleadas en la enseñanza deben de considerar la forma en que los individuos aprenden, aunque son de naturaleza distinta ambos procesos, en el caso de las teorías de aprendizaje, evalúan el aspecto psicológico, fisiológico de cómo son los procesos de aprendizaje, y no se pueden emplear de ninguna manera en la forma en que se enseña, sólo se pueden emplear como referencia para trazar directrices en la forma en que se va a enseñar al individuo, “son derivaciones aplicadas de la teoría del aprendizaje escolar” (Ausubel et al., 2012, p.27) Ausubel establece que las teorías de la enseñanza deben basarse en las teorías del aprendizaje, pero contener en su naturaleza un enfoque más de aplicación.

Ausubel se enfocó en estudiar las teorías del aprendizaje. En la presente sección se explicará más a fondo su teoría, y con base en ella se plantearon diversos elementos del programa que se describe en el presente trabajo. Para comenzar, se dará la definición según Ausubel de algunos de los conceptos que se manejan en la teoría del aprendizaje significativo.

Se entiende como “aprendizaje significativo” a la adquisición de nuevos significados. A su vez, los significados son el producto de realizar un proceso de aprendizaje (significativo). Para que éste se lleve a cabo, debiera haber dos elementos fundamentales, el primero es que exista un material “potencialmente” significativo, y además que el alumno cuente con una actitud de aprendizaje significativo.

Explicando esto en otros términos, el aprendizaje significativo se basa en la creación de nuevos significados en la mente del que aprende. Y Ausubel plantea dos elementos fundamentales para que ello pueda suceder: El material de aprendizaje (como libros, ejercicios, objetos), y la actitud positiva al aprendizaje del alumno. Esto nos lleva al siguiente nivel de análisis:

Se define "material potencialmente significativo" como aquel recurso que emplea el profesor para ayudar al alumno a aprender algo. Se le llama potencial porque el material en sí no es el aprendizaje significativo, es más bien un vehículo a través del cual el alumno podrá aprender si cuenta con la intención de hacerlo y con ciertas características cognoscitivas que en seguida explicamos. Para que el material sea potencialmente significativo, es necesario que el contenido del mismo, el orden y momento en la enseñanza, en que se presenta éste no sea al azar, sino intencionalmente seleccionado y ordenado, para que el alumno lo relacione de forma lógica (es decir, que embona) con su estructura cognoscitiva propia, y que además las ideas nuevas propuestas en el material estén al alcance de la comprensión del estudiante. En este sentido se puede ver nuevamente que el material en sí no es el aprendizaje, porque para que "funcione", requiere embonar con la estructura cognitiva del alumno. De ahí se podrá fácilmente uno dar cuenta que un material que es potencialmente significativo para algún alumno, no necesariamente lo es para otro, puesto que la estructura cognitiva es individual y distinta en cada persona. Es por este motivo que no es el único elemento que se requiere para que haya aprendizaje significativo. El segundo elemento en sí es la actitud de aprendizaje significativo, es decir, la disponibilidad de que las ideas presentadas por el material potencialmente significativo, estén de alguna manera presente en la estructura cognitiva del alumno en particular. De este modo, al embonar, habrá un nuevo significado, o bien uno ampliado, repercutiendo en un significado psicológico para el alumno.

Dos características interesantes del aprendizaje significativo son que por un lado éste no es producto del azar, hay intencionalidad para relacionarlo con las ideas que se pretende que aprenda la persona, y están ordenadas y presentadas de tal manera que en la estructura cognoscitiva de la persona estén presentes de alguna manera, de esta forma se van enriqueciendo significados anteriores en la persona, o bien cuestionando algunos significados que hubiera en esa estructura cognitiva. La otra característica de dicho tipo de materiales es que los símbolos empleados para representar el significado, es decir el aprendizaje, pueden tener sinónimos que se relacionan o que ya estaban previamente relacionados con la estructura cognitiva, de tal forma que haya la posibilidad de relacionarlo. Un ejemplo que puedo dar al respecto, es una situación común en los estudiantes, ¿qué pasa cuando una persona no comprende el significado de una palabra (que es un símbolo finalmente)? La persona va al diccionario, y busca la definición, pero si analizamos la situación, la definición de una palabra no es más que la traducción de un símbolo a símbolos equivalentes relacionados entre sí, y dichos símbolos ya se encontraban en nuestra estructura cognitiva, por lo que se tiene la posibilidad de adquirir un nuevo significado, pero siempre basado en significados anteriores, relacionándolo de forma no arbitraria con éste. Ausubel lo menciona de la siguiente manera:

> En el momento en que se establecen los significados iniciales de los signos o símbolos de los conceptos en el proceso de formación de conceptos, el aprendizaje significativo nuevo proporcionará significados adicionales a los mismos y se adquirirán nuevas relaciones entre los conceptos previamente aprendidos.
>
> (Ausubel et al., 2012, p.52)

El aprendizaje significativo se puede dividir en tres tipos, aprendizaje significativo de representaciones, de conceptos y de proposiciones. El más básico de todos es el de representaciones, que consiste en hacerse de significados de símbolos solos, como pudieran ser palabras, y de sus representaciones. Es la forma en que las palabras sobre todo, representan objetos o ideas en la mente de la gente. El aprendizaje de representaciones y de conceptos está muy relacionado. La primera fase es de representaciones, por ejemplo, un niño de corta edad podrá escuchar la palabra leche, y para él representa saciar el hambre, pero a medida que su estructura cognitiva va haciéndose más compleja, el significado de leche va adquiriendo más características que lo definen mejor, y se va creando el concepto. En este ejemplo, posteriormente la leche podría significar mamila con leche, y después descubrir que hay varios objetos que podrían ser leche, tal como la papilla o la fruta, para después descubrir que leche tiene un significado menos amplio, y dar pauta a que existan los términos de fruta y papilla, y así de forma interminable, se va puliendo la estructura cognitiva de significados y conceptos. El aprendizaje de proposiciones se refiere a las ideas expresadas en grupos de palabras u oraciones, donde el significado individual de cada palabra es muy distinto al resultado de combinar toda la oración en una idea. Para poder tener aprendizaje significativo por proposiciones, cabe mencionar que previamente se deben conocer los conceptos y representaciones inmersos en la oración que se construye, el significado de la misma es el resultado de la combinación de los diferentes significados de dichas representaciones y conceptos. Este último puede dividirse en tres tipos a su vez: subordinado (que es el que se relaciona con conocimientos más generales que ya trae en su estructura la persona), de orden superior (ahora es al revés, se crea un conocimiento general sobre varios particulares), o combinatorio (el conocimiento se deriva de una serie de particulares conocimientos previos, y no forma parte ni de uno superior, ni tampoco generaliza una serie de conocimientos previos) (Ausubel, 2002).

Una vez esclarecidos algunos de los conceptos más relevantes para poder comprender la teoría de aprendizaje de Ausubel, ahora se revisarán los tipos de aprendizaje que se presentan en el ambiente escolar. Se pueden establecer en dos dimensiones diferentes. Por un lado la de aprendizaje significativo-repetición, y por el otro la de aprendizaje por recepción o por descubrimiento.

Se describirá primero la dimensión aprendizaje significativo- repetición. Ausubel admite que no existe el aprendizaje significativo puro, ni tampoco el de repetición puro, todos han aprendido algunas cosas de una forma o de otra, pero existen diferencias sustanciales entre los dos tipos. A diferencia del aprendizaje significativo, el aprendizaje por repetición se da cuando la tarea de aprendizaje consta de únicamente asociaciones arbitrarias, que no embonan en realidad con la estructura de conocimiento previo del alumno. Plantearé un ejemplo, ¿qué pasaría si a un alumno de primaria, que está aprendiendo apenas fracciones, y todavía no se ha relacionado con el álgebra, se le intentara enseñar ecuaciones diferenciales? A lo mejor se le podría presentar al alumno algunas de sus fórmulas, y pedirle que las aprenda de memoria, y que las aplique de alguna manera, posiblemente el alumno pudiera responder algunos ejercicios de ecuaciones diferencias con un entrenamiento para resolver algún tipo de ellos. Ello no significa que el alumno sepa ecuaciones diferenciales, en realidad lo más seguro es que no las entienda porque no hay algo en su estructura cognitiva con lo que pudiera relacionarlas, las aprende de forma arbitraria. A este tipo de aprendizaje se le conoce como aprendizaje por repetición. Es evidente que el aprendizaje significativo es más importante que el de repetición, que generalmente permanece únicamente en la memoria a corto plazo, y es fácilmente desplazable por un nuevo aprendizaje.

Ahora se abordará la dimensión de aprendizaje por recepción o bien por descubrimiento. El aprendizaje por recepción es aquel cuyo contenido total de lo que se va a aprender se le presenta al alumno en su forma final. Anteriormente se confundía aprendizaje por recepción con aprendizaje por repetición, y se menospreciaba, lo cierto es que la mayoría del aprendizaje que se obtiene de la escuela, es por recepción, y no necesariamente es repetitivo, existe aprendizaje por recepción significativo, aunque para que éste se dé, se requiere de cierta madurez cognitiva por parte del alumno, ya que éste será el encargado de reflexionar sobre el mismo, y de ver cómo se relaciona con su estructura cognitiva previa, y no todos los alumnos cuentan con una estructura cognitiva adecuada para trabajar de esta manera, requiere de cierta maduración de la misma. Desde luego para que el aprendizaje significativo sea posible en esta dimensión, se requiere nuevamente que el material didáctico sea potencialmente significativo, y que la actitud del alumno sea significativa. Por otro lado, el aprendizaje por descubrimiento tiene como característica principal que el contenido principal que se va a aprender no se da desde el principio, sino que el alumno lo va descubriendo, con guía del profesor, y que éste se vuelve significativo una vez que fue descubierto, y entonces sí puede formar parte de la estructura cognitiva del mismo. Hay que considerar que incluso en el aprendizaje por descubrimiento cabe la posibilidad de que el aprendizaje no sea significativo sino por repetición, esto se da sobre todo cuando se realiza una práctica de ensayo y error sin una lógica o una intención ordenada de lo que se hace, es decir, no hay que perder de vista los elementos que requieren estar presentes para que el aprendizaje sea significativo: Material potencialmente significativo, y actitud significativa.

El aprendizaje significativo por descubrimiento, desde el punto de vista psicológico, es mucho más complejo que el que se da por recepción, debido a que previamente a la adjudicación del conocimiento y del significado, primero se debe resolver el problema, y ello también implica el desarrollo de más habilidades intelectuales, sin embargo, el aprendizaje significativo por recepción también es posible, pero requiere de una actitud significativa y muy activa por parte del alumno, y un buen uso del material presentado, tal pudiera ser el caso de aquellos alumnos que son capaces de estudiar a través de libros, sin necesidad del profesor.

Comenta Ausubel que:

> El lenguaje es un facilitador importante de los aprendizajes significativos por recepción y por descubrimiento. Incrementando la manipulabilidad de conceptos y proposiciones a través de las propiedades representacionales de las palabras, y refinando los conocimientos subverbales que surgen de los aprendizajes significativos.
>
> (Ausubel et al.,2012, p.47)

Con ello se puede apreciar la importancia y relación tan estrecha que existe entre el lenguaje y el aprendizaje significativo, tanto en el de representaciones, como en la formación de conceptos, y desde luego la precisión que pudieran brindar las proposiciones para el desarrollo de significados combinados y los discursos ideológicos.

La combinación de estas dimensiones da lugar a cuatro posibles tipos de aprendizaje: receptivo repetitivo, receptivo significativo, descubrimiento repetitivo, descubrimiento significativo. Por lo anteriormente comentado, se evitará en la medida de lo posible el aprendizaje dado por repetición, y se buscará generar aprendizaje significativo por recepción o bien por descubrimiento.

Con el fin de buscar que dicho conocimiento embone con la estructura cognoscitiva que ya traen los alumnos, se buscará activar primero los conocimientos previos que traen los alumnos, con respecto de ese tema. Se destaca en este modelo de aprendizaje la importancia de la activación del conocimiento previo porque a través de éste se puede ver la madurez intelectual del alumno y enseñar a partir de lo que ya sabe, haciendo tal vez algunos ajustes.

Por otro lado, se requiere que la actividad a realizar genere una actitud positiva hacia el interés de aprender por parte de los alumnos, para que se den las condiciones para un aprendizaje significativo. Si bien se cuenta con estrategias de aprendizaje y estrategias de enseñanza, aludiendo sobre todo a que tanto profesor como alumno tienen un papel importante y distinto en el proceso de enseñanza-aprendizaje, aún cuando ambos estén totalmente interrelacionados, en este apartado se describirá sobre todo lo que se pretende que haga el alumno, a lo cual el profesor motivará. Uno de los aspectos fundamentales por el cual a los alumnos, sobre todo aquellos interesados en orientar sus estudios a áreas de humanidades, les es difícil aprender matemáticas, está relacionado con el paradigma de que no son universales, y que sólo algunos alumnos con capacidades quizá hasta genéticas son capaces de comprender, generando con ello un bloqueo para aprenderlas. Sin darse cuenta, con ello enfrentan experiencias metacognitivas de tipo afectivo que les impide en un futuro tener acceso a dicho conocimiento. Una forma de enfrentar sus paradigmas sería relacionar su experiencia en el aprendizaje de matemáticas, con experiencias previas con las que estén familiarizados, conozcan, y tengan la capacidad de analizar y resolver. De este modo, y paulatinamente, su proceso cognitivo en el área de matemáticas comenzará a “adherirse” a su estructura cognitiva de pensamiento, y ello le llevará a su vez a contar con experiencias de aprendizaje significativo en áreas que le sean familiares. En este sentido, será papel del profesor hacer conciencia con el alumno, y reflexión acerca de sus progresos en el área, y sobre todo reflexionar sobre la universalidad de las matemáticas, es decir, “cualquiera puede comprenderlas y usarlas como herramientas para analizar y comprender aspectos de la realidad” (Vygotsky, La mente en la sociedad: El desarrollo de las funciones psicológicas superiores., 1978).

Es justamente mediante dicha reflexión que el alumno pueda a su vez aprehender las matemáticas como parte de su metacognición y las pueda emplear conscientemente en otras áreas. Para que él mismo pueda aprender a aprender, el profesor debiera motivarlo a reflexionar sobre cómo resolvió por sí mismo los problemas, y que el mismo alumno describa sus propios procesos y estrategias de solución de problemas. Es la única manera de que después el alumno sea capaz de autoregular su acción en otros ámbitos fuera de la clase, para emplear lo aprendido en ella (uno de los fines más importantes que se buscan con el aprendizaje significativo).

2.2 El enfoque del Pensamiento Matemático

Un aspecto fundamental para el desarrollo de la presente investigación, es la definición de pensamiento matemático, que no resulta una tarea sencilla debido a las diferentes connotaciones que se le pueda dar al término. En este caso se emplearán dos enfoques complementarios, por un lado, existe un estudio interesante hecho por Schoenfeld que se estudiará a partir de Grouws Douglas, en el cual se da una definición práctica del concepto de matemáticas, aunada al pensamiento matemático, y lo vincula a los procesos cognitivos de un individuo.

> Mathematics is an inherently social activity, in which a community of trained practitioners (mathematical scientists) engages in the science of paterns- systematic attempts, based on observation, study, and experimentation to determine the nature or principles of regularities in systemas defined axiomatically or theoretically ("pure mathematics") or models of systems abstracted from real world objects ("applied mathematics").
>
> Alan H. Schoenfeld en (Grouws, 1992, pág. 335)

Explicando la cita anterior, Schoenfeld considera a las matemáticas una actividad que requiere de interacción social entre personas entrenadas y practicantes de la disciplina, quienes basados en la observación, el estudio y la experimentación, buscan encontrar patrones sobre las cosas, para determinar los principios y características de los sistemas definidos axiomáticamente, o bien teoricamente (esto es para el caso de las matemáticas puras), o bien, modelos de sistemas abstraídos de situaciones reales, para el caso de las matemáticas aplicadas.

Por un lado, esta definición permite mejorar la concepción de las matemáticas, y abrir sus fronteras para vincularla con otras disciplinas incluso de las Ciencias Sociales, para comprender la forma de comportarse de situaciones planteadas, a través de la modelación y del estudio de la misma.

Con esta idea concuerda el National Research Council de Washinton (NRC) (1981), establece que las matemáticas se pueden definir de forma sencilla como la búsqueda de patrones, revela patrones ocultos que ayudan a entender de mejor manera el mundo que nos rodea, por lo tanto sus fronteras van más allá de la aritmética o la geometría, hoy en día las matemáticas, a través de diversas herramientas, trabaja con datos, medidas y observaciones de las diferentes ciencias, con inferencias, deducciones, pruebas y modelos matemáticos de fenómenos naturales, comportamiento humano, y sistemas sociales.

Y también de la definición se puede subrayar el aspecto de que es una disciplina social, y concuerda este autor con la idea de Vygotsky de que desarrollamos hábitos y destrezas de interpretación y construcción de significados de una forma más eficiente a través de la sociabilización que de la instrucción. El pensamiento y conocimiento matemático se crea a partir de una comunidad de práctica de la matemática.

En 1989, el NRC definió algunos de los modelos de pensamiento que se desarrollan a partir de las matemáticas, algunos de los cuales son:

- La modelación
- La abstraccion
- La optimización
- El análisis lógico
- Las inferencias a partir de datos y
- El uso de símbolos para la representación.

Dichos modelos de pensamiento a su vez generan algunas capacidades intelectuales como la lectura crítica, la identificación de falacias, de sesgos de información, evaluar riesgos, y sugerir alternativas de solución ante problemas planteados.

Siguiendo al modelo de aprendizaje de Ausubel, así como las características del pensamiento matemático, para seleccionar un modelo de enseñanza de las matemáticas eficaz, éste debiera desarrollar en los alumnos la comprensión de conceptos en el contexto adecuado, más allá de las habilidades mecánicas de seguir algorítmos matemáticos, y que dicho conocimiento de conceptos lo puedan aplicar de forma fluida y flexible en la resolución de problemas planteados, ya sean éstos teóricos o bien para la comprensión y resolución de problemas reales. La instrucción matemática debiera enfocarse a desarrollar lo que Schoenfeld conoce como “un punto de vista matemático”, es decir:

- Capacidad de entender, analizar y visualizar estructuras, y relaciones estructurales, a fin de comprender un todo.

- Incrementar la capacidad analítica de los estudiantes.
- Incrementar su capacidad de razonar en cadenas de argumentos.
- Capacidad de leer e interpretar de los alumnos, esto se ve reflejado tanto en el lenguaje matemático como en el verbal, y conlleva a los alumnos a ser a largo plazo autodidactas, intérpretes, y usuarios de las matemáticas para comprender las estructuras de los modelos tanto reales como teóricos del conocimiento.

De forma connotativa, los puntos anteriores apuntan no solamente a comprender la realidad, sino también a diseñar nuevos aspectos de la misma, es por eso que consideramos el punto de vista de Guershon Harel y Larry Sowder (Harel & Sowder, 7: 1), quienes hicieron una interesante división del pensamiento matemático en dos conceptos fundamentales que interactúan continuamente, por lo que en ocasiones no se distingue a primera vista la diferencia, a lo que ellos le llaman "la Dualidad", que es la capacidad de comprensión matemática, y la capacidad de pensar matemáticamente. Abordan la importancia de favorecer que el alumno genere pensamiento matemático sobre su interpretación matemática, con ello se crea en el alumno una interacción entre el pensamiento inductivo y deductivo, y con ello se conduce al alumno a alcanzar lo que llaman el "pensamiento matemático avanzado", término empleado para definir a aquellas personas que son capaces de aumentar a voluntad su propia capacidad de pensamiento matemático.

Fomentar que el alumno genere pensamiento inductivo al estudiar matemáticas, es por tanto una alternativa que permitiría que el alumno pudiera desarrollar un pensamiento matemático avanzado, con la capacidad no sólo de interpretar modelos, sino de crearlos a fin de desarrollar nuevos enfoques de la realidad, o bien resolver problemas planteados.

En consecuencia es de interés analizar la teoría de J.P. Guiltford acerca de su modelo de inteligencia (Culatta, 2013), en el cual se consideran cinco tipos de información que recibe el cerebro (visual, auditivo, simbólico, semántico y de comportamiento), cinco tipos de operaciones que emplea (valoración, producción convergente y divergente, retención de memoria, registro de memoria y cognición) y seis tipos de productos que construye (unidades, clases, relaciones, sistemas, transformaciones e implicaciones), para considerar las múltiples opciones de inteligencia que genera la combinación entre dichos elementos. Destaca dentro de ellos a la creatividad como parte de las operaciones de tipo divergente. Fomentar la creatividad en el estudio de las matemáticas sería de gran apoyo para que la Dualidad antes mencionada permitiera el aceleramiento del desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes.

En el sentido de desarrollo de creatividad matemática, se podría emplear como herramienta didáctica la tarea de construcción de ejemplos. Hazzan realizó una investigación interesante acerca del efecto que tiene la construcción de ejemplos en el desarrollo de pensamiento matemático (Hazzan, 1999, Volume 21, N.4). A continuación se describen sus hallazgos.

El análisis realizado fue hacia la tarea de proporcionar ejemplos que tengan ciertas propiedades. Generalmente los alumnos están instruidos en tareas inversas, como resolución de problemas o análisis de ciertas situaciones, por lo que no hay como tal algoritmos para la construcción de ejemplos, lo que les obliga a ahondar en sus propios conceptos y las conexiones entre estos, para aplicarlos a diseñar ejemplos.

Cabe mencionar que esta actividad no es que los alumnos aprendan mediante ejemplos dados por el profesor, sino que aprendan a través de construir ejemplos. En el primer caso llega a haber fallas en el desarrollo de conceptos porque cuando un profesor plantea un ejemplo y los alumnos analizan las características de dicho ejemplo para denominar al conjunto un concepto, es común que en ese conjunto también incluyan a las características propias del ejemplo que no tienen que ver con el concepto. Por ejemplo, a un niño pequeño se le pide hacer un dibujo y no sabe que es tal, entonces observa lo que hace un compañerito suyo, que toma todos los colores y dibuja una espiral con todos ellos, y la maestra le dice, “sí, eso es un dibujo”. El primer niño podría interpretar que dibujo es hacer espirales de colores. Eso puede pasar a todos los niveles de comprensión de conceptos. Esto se ve reflejado incluso en los alumnos que aprenden cómo resolver un ejercicio de matemáticas a través de la explicación del profesor en un caso dado. Es común del mismo modo que el niño descrito, que los alumnos aprendan el algoritmo de resolución del problema, y lo pretendan aplicar a cualquier tipo de problema, sin distinguir las características esenciales del ejemplo, que lo vinculan a lo que ejemplifica, de las particulares del mismo. Sin embargo, lo cierto es que en realidad todos aprenden de ejemplos, que tomamos como referentes para construir conceptos. Nuestras concepciones están necesariamente vinculadas a algunos ejemplos clave que los tomamos como referentes para poder comprender y asociar a los conceptos de nuestra estructura cognitiva.

La construcción de ejemplos forma parte de las estrategias didácticas constructivistas, porque cuando un estudiante genera un ejemplo, en forma paralela se crea una construcción mental (vínculo entre conceptos para crear objetos matemáticos complejos llamados esquemas) para asociarlo a su estructura de conocimientos previos.

Existe además un elemento afectivo que se desarrolla en el estudiante al construir ejemplos. Al principio, el alumno acostumbrado al aprendizaje dirigido, se siente inseguro cuando aumentan sus grados de libertad, y ello lo lleva a tener las actitudes de los estudiantes ante las matemáticas antes descritas, pero al enfrentarlo a la libertad en el aprendizaje, el alumno poco a poco desarrollará su confianza en sí mismo para aprender las mismas.

2.3 Planeación de la estrategia didáctica para el desarrollo del tema de Matrices

Como se mencionó con anterioridad, la teoría de aprendizaje que se empleará en la práctica docente es la de Ausubel, quien plantea que para que el aprendizaje sea significativo, tiene que haber una significatividad psicológica vinculada a la estructura cognoscitiva del alumno y con la significatividad lógica de los materiales de aprendizaje. Frida Díaz Barriga (1998) precisa que la relacionabilidad no arbitraria quiere decir que si el material o contenido de aprendizaje en sí no es azaroso ni arbitrario, y tiene la suficiente intencionalidad, habrá una manera de relacionarlo con las clases de ideas pertinentes que los seres humanos son capaces de aprender. Respecto al criterio de la relacionabilidad sustancial, es decir, que si el material no es arbitrario, un mismo concepto o proposición puede expresarse de manera sinónima y seguir trasmitiendo exactamente el mismo significado.

A este respecto, buscando la significatividad lógica de los materiales didácticos a enseñar a los alumnos en la práctica docente, y aludiendo a la no arbitrariedad y a la sustancialidad de los contenidos, cabe mencionar que los alumnos están familiarizados con su entorno. Con sus compañeros de clase, con las materias y profesores, con la vida escolar, y con los materiales y temas que ven en clase, hablando de la vida académica. De pronto, se enfrentan a una materia con contenido de matemáticas, donde se ven conceptos con los cuales no están familiarizados de manera formal, y el vocabulario y simbología les es confusa y no la entienden; además de ello, generalmente no perciben su falta de comprensión hacia los conceptos y el lenguaje. Psicológicamente esto les genera una fobia, un bloqueo para aprender. Para evitar este proceso, es fundamental evitar dicho bloqueo psicológico a través de la relacionabilidad no arbitraria y sustancial. Normalmente primero se abordaría la segunda, es decir, la sustancial, a través de exponer, explicar y verificar mediante múltiples ejemplos y actividades, que los alumnos comprenden de forma precisa los conceptos básicos de la materia. La segunda se lograría a través de la aplicación de dichos conceptos en comprender ejemplos de su vida cotidiana, y en la construcción de modelos de matrices de su vida cotidiana. De esta manera, el contenido matemático de la materia lo comenzarán a relacionar con su vida cotidiana, como pasa con cualquier otra disciplina al formar parte de la estructura del individuo.

A su vez, Ausubel plantea que en el aprendizaje por recepción hay tres tipos de aprendizaje: el de representación, el de conceptos y el de preposiciones (Díaz

Barriga, 1998). En el caso de la práctica docente a desarrollar, las representaciones a emplear serían las matrices.

Por otro lado, los conceptos a emplear son los siguientes:

Variable.

Variable cuantitativa.

Variable cualitativa.

Modelo.

Y finalmente, las preposiciones a emplear son las operaciones matriciales: Suma, Resta, Multiplicación e Inversa de Matrices.

Algunos de estos conceptos antes descritos son de suma importancia, por ejemplo, la matriz, ya que es un método para organizar la información de variables, que permite desarrollar operaciones sistemáticamente, y en poco espacio almacena mucha información sobre algún fenómeno.

Para que un alumno pueda comprender ese tipo de representación de información, es necesario que comprenda el concepto de variable, ya que es el elemento fundamental para describir información, es una especie de "contenedor" cuyo fin es almacenar datos relacionados, es un conjunto de datos.

Y ello lleva forzosamente al fin de desarrollar matrices, realizar operaciones matriciales, que es cuando se conjuga en un modelo de matrices mayor información, generalmente relacionadas con más variables, y se pretende hacer una modificación de la información que se conoce de la realidad, o de un modelo de la realidad determinado, y con ello se lleva a cabo un procesamiento de la información la cual requerirá ser interpretada al final.

De acuerdo con los postulados Ausubel, la secuencia de organización de los contenidos curriculares con significatividad lógica consiste en diferenciarlos de manera progresiva, yendo de lo más general e inclusivo a lo más detallado y, estableciendo al mismo tiempo relaciones entre contenidos del mismo nivel (conceptos coordinados) y/o con conceptos combinados (Díaz Barriga, 1998).

Cabe mencionar que la presente propuesta no sólo pudiera aplicarse al CCH, sino a cualquier bachillerato, alineándolo a la materia en la cual se abarque el tema de matrices, o bien como tema introductorio en una asignatura de Licenciatura, que pretenda que los alumnos construyan Modelos Matemáticos, como en el caso de las asignaturas de Programación Lineal.

De acuerdo con Frida Díaz Barriga (1998), los contenidos que se enseñan en la currícula de todos los niveles educativos pueden agruparse en tres áreas básicas: declarativos, procedimentales y actitudinales, y los declarativos, se pueden dividir en factuales y conceptuales.

Para la estrategia didáctica a desarrollar, los conocimientos fácticos que se considera que es importante que los alumnos aprendan es la mecánica de multiplicación de las matrices, ya que la manera en que se multiplica es una convención, y no está relacionada con la lógica, a pesar de que una vez que se aplica, es importante razonar la forma en cómo se acomodaron las variables. También se puede considerar conocimiento procedimental desde el punto de vista que habla de secuencia de acciones.

Considerando que la mecánica de la multiplicación de matrices en sí cuenta con un significado de referente, no de concepto, se buscará que los alumnos se familiaricen con ella a partir de aprender el orden y algoritmo de la misma, pero sobre todo, en la parte de construcción de significados conceptuales, todo el tiempo se relacionarán con variables, de tal forma que al plantear ejemplos de multiplicación, los alumnos jueguen con las mismas, y experimenten el significado – o falta del mismo- de la interacción de las variables de sus ejemplos. Con ello comprenderán el significado de multiplicar matricialmente.

Ello no puede evitar que de todos modos exista una parte del conocimiento de multiplicación de matrices que es memorístico. Hay parte de los conocimientos relacionados con las matemáticas que se han establecido por convención, para facilitar procesos de análisis, por ejemplo, la forma en cómo sumamos, que empezamos por la derecha y no por la izquierda facilita la suma de unidades de la siguiente posición, pero es de memoria, porque se puede empezar al revés, por ejemplo en el ábaco. El orden y la manera en que escribimos y codificamos es una convención, que se vuelve automatizada con la repetición.

Por otro lado, de los conocimientos conceptuales a aprender por el alumno, el más importante es el concepto de "variable", ya que sin éste, es imposible que el alumno pueda crear un modelo matemático, y es el que "conecta" al modelo matemático con la realidad. Para el aprendizaje conceptual se requiere que el alumno realice de una asimilación sobre el significado de la información nueva por lo que el docente debe recurrir al uso de los conocimientos previos pertinentes que posee el alumno, para ello el profesor debe fomentar actividades con las cuales el alumno ya esté familiarizado, y que presuma que comprende. A este tipo de estrategias se les conoce como constructivistas (Coll, 2000), ya que para que un nuevo concepto pueda comprenderse adecuadamente, el alumno debe "conectarlo" con otros conceptos, y con ello asociarlo a otros significados. Ello le permitirá poder definirlo y emplearlo en diversas circunstancias donde se requiera, y con ello afianza aún más la comprensión de su significado.

Por otro lado, se cuenta con el conocimiento procedimental, que es el saber hacer y se refiere a la ejecución de procedimientos, estrategias, técnicas, habilidades, destrezas, métodos, etc. Es común percibir los conocimientos declarativo y procedimental como separados, incluso a veces se privilegia uno de ellos en detrimento del otro. En realidad es mejor percibirlos como conocimientos complementarios por lo que la enseñanza de alguna competencia procedimental, debe enfocarse en un doble sentido: para que el alumno conozca su forma de acción, uso y aplicación correcta, y para que al utilizarla enriquezca su conocimiento declarativo.

En particular, en la actividad que pretendo realizar, la resolución de problemas le genera a los alumnos nociones procedimentales, aunque está establecido en mi estrategia no dar explícitamente “los pasos a seguir” para resolver los problemas, sino inducir a los alumnos a descubrirlos.

Al menos en el área de matemáticas, mi postura es que plantearles a los alumnos desde el principio procedimientos no es muy favorable, ya que con ello tienden los alumnos a “dejarse llevar” en desarrollar el procedimiento y no pensar, en el peor de los casos aprendérselos de memoria. Los efectos negativos de ello son grandes, pues no fomentan el desarrollo de su capacidad de análisis, y de creatividad en la búsqueda de soluciones a problemas planteados. En cambio cuando no se les da el procedimiento y sólo se induce a los mismos a encontrarlo por sí mismos, se adueñan del procedimiento, y con ello se forman tanto en actitudes como en el desarrollo de conceptos, (los cuales requieren para la construcción del procedimiento).

Por este motivo, los recursos instruccionales que emplearé para que el alumno comprenda y sea capaz de ejecutar estos procesos son: Establecimiento del sentido de lo que está resolviendo, es decir, que el alumno sea capaz de comprender primero a fondo el problema antes de intentar resolverlo, verbalizar en voz alta su pensamiento al respecto de lo que comprendió de la situación planteada, observación crítica, y con ello llevarlo a que observe situaciones reales que pueda problematizar, y generar procedimientos de análisis y resolución de las problemáticas que él mismo se plantee.

Uno de los contenidos poco atendidos en la currícula y en la enseñanza de todos los niveles educativos es el de las actitudes y los valores (el denominado “saber ser”). Los valores y actitudes también se van aprendiendo según el estilo de trabajo con el que trabajarán los alumnos. En particular, Frida Díaz Barriga (Díaz Barriga, 1998) explica la metodología de aprendizaje cooperativo y situado, la cual es acorde a la actividad que se planteará con los alumnos, además de que con ella ellos aprenden actitudes y valores relacionadas con el trabajo en equipo, y el compartir sus habilidades con un equipo para intentar solucionar problemas de la vida cotidiana que detecte el grupo de trabajo. En este caso, el aprendizaje cooperativo y situado, el cual está orientado a la comunidad, es pertinente debido a que se espera que desarrollen proyectos para análisis de casos reales, de forma cooperativa, y establezcan soluciones a los problemas que planteen.

2.4 Criterios para el desarrollo de una estrategia de enseñanza

Si bien estudiamos a Ausubel para conocer su teoría acerca del aprendizaje, existe otro intelectual que estudiando el aprendizaje significativo, desarrolló algunas ideas que se acercan más al proceso de enseñanza, y el presente trabajo se basa en cierta forma en parte de su teoría para el diseño del material didáctico, y de las tareas a realizar por los alumnos. Se empleará como base principalmente la propuesta teórica de Vygotsky, basada en el desarrollo humano. Vygotsky si bien sí acepta que en el aprendizaje del individuo intervienen factores biológicos (genética), le da mayor peso a la influencia sociocultural en el progreso cognoscitivo de la persona (Vygotsky, 1978). En términos generales, es gracias a esa interacción con su medio ambiente, que el ser humano empieza a conocer los elementos básicos de su cultura, y el conocimiento relacionado con ella, de ahí el valor de la escuela en la educación del individuo. Elementos adicionales de la teoría vygotskiana a considerar, son su concepto de “Zona de Desarrollo Próximo”, y la importancia que tiene ampliar el lenguaje en el aprendizaje (Vygotsky, 1962).

Cesar Coll (Coll, 2000) habla de la importancia de la interacción entre los alumnos y el aprendizaje (haciendo mucha referencia al aprendizaje constructivista de Vygotsky), se establece que el aprendizaje, aparentemente más productivo es el 100% colaborativo, siguiéndole el de grupos internamente cooperativos pero que establecen relaciones de competencia con otros grupos, y en el siguiente lugar las relaciones competitivas, y entre esta situación y el aprendizaje individual no se percibe mucha diferencia en cuanto a la productividad del mismo. Por tal motivo, algunos de los elementos que se pudieran emplear por el alumno para comprender mejor cómo resolver problemas es plantear estrategias probables de intervención en problemas mediante diagramas, mismos que se pueden realizar por equipos de trabajo, fomentando con ello el diálogo constructivo entre los alumnos. Coll (Coll, 2000) refiere también sobre todo, un concepto importante, el conflicto sociocognitivo, el cual es clave para poder generar aprendizaje grupal mediante la confrontación de dicho conflicto, y posteriormente desenredar dichas confusiones, hasta generar un aprendizaje grupal. Desde el punto de vista genético, el hombre ha ido aprendiendo precisamente de dicha forma, y a través de dicha confrontación. Si se puede llevar dicha situación al aula, los alumnos podrían, en forma consensada, desarrollar mapas conceptuales sobre el desarrollo de Modelos Matemáticos. Con ello no sólo comprenderían los conceptos de mejor manera, sino que podría relacionarlos y compararlos con otros, para que la aplicación de los mismos en contextos reales sea más sencilla.

Desde un sentido de cómo la institución educativa puede propiciar en el alumno el aprendizaje significativo, se habla del docente más que como un transmisor del conocimiento, como un facilitador del mismo, siendo el propio alumno quien aprende, y el profesor sobre todo propicia este proceso al “ayudarlo” en situaciones contingentes, cuando el alumno al enfrentarse a la tarea y experimentar conflictos cognitivos, requiere de su apoyo para destrabar su conflicto y poder superar favorablemente su zona de desarrollo próxima (Vygotsky, 1978) y el Currículo debiera fomentar estas situaciones contingentes, que en realidad están planeadas, para que el alumno se encuentre avanzando continuamente en su zona de desarrollo. Cabe mencionar también la importancia que tiene la motivación del alumno para aprender, sin ella no existe el interés de resolver problemas, y no se desarrolla la curiosidad epistémica, que lleva al alumno a reconstruir su propia identidad a través de construir por sí mismo su conocimiento, y después compartirlo con los demás, para generar conflictos sociocognitivos, y de nuevo seguir interactuando para la reconstrucción colectiva de conocimiento.

Por último, cabe destacar que si bien Ausubel y Vygotsky cuentan con diferencias importantes en sus teorías, como el origen del aprendizaje (si éste empieza en la adquisición de significados o bien en conflictos sociocognitivos), hay un elemento que tienen en común que permite que haya un beneficio en el aprendizaje al vincular ambos puntos de vista, que es lo que Ausubel denomina "actitud de aprendizaje significativo". ¿Cómo propiciamos como profesores que los alumnos cuenten con una actitud hacia aprender? En este punto influye un aspecto motivacional y emocional. Desde esta perspectiva, la teoría de Vygotsky puede embonar, al proponer que dicha actitud se genere a través de una activación social: el diálogo visto como un motivador del aprendizaje, y de influencia en la Zona de Desarrollo Próximo, al haber conflictos sociocognitivos. De este modo, Vygotsky nos da la pauta de cómo generar estrategias de enseñanza, a partir de un modelo particular de aprendizaje, empleado como marco teórico del presente trabajo.

2.5 Estrategias de enseñanza a emplear

No podríamos hablar sobre el proceso de aprendizaje, sin considerar el proceso de enseñanza en una práctica didáctica, este apartado tiene como fin propiciar el proceso de aprendizaje del alumno, y es la estrategia mediante la cual se busca que el alumno logre aprender aquello que se planteó en la evaluación.

Frida Díaz Barriga (Díaz Barriga, 1998) menciona que existen estrategias preinstruccionales, coinstruccionales y postinstruccionales, clasificación que se basa en el momento de la aplicación de la estrategia.

Se entiende a las estrategias preinstruccionales como aquellas que sirven como introducción y "calentamiento". Preparan al alumno para la experiencia cognitiva que se pretende que tengan. En este caso, se consideran dos estrategias:

1) Planteamiento de objetivos de la práctica didáctica (para que los alumnos sepan qué se espera que aprendan al final de la misma, y no estén con incertidumbre con respecto de qué se quiere lograr).
2) Actividades relacionadas con la activación de conocimiento previo. Esto es a través de la evaluación de diagnóstico, en la cual además de evaluar el conocimiento previo, se previene a los alumnos con respecto de qué van a requerir saber hacer para poder comprender lo que van a estudiar.
3) Orientar y guiar la atención y el aprendizaje para sensibilizarlos en la importancia y aplicación que tiene lo que van a aprender. Ello es con el fin de mejorar la actitud de los alumnos con respecto de su proceso de aprendizaje. Se planteará una discusión guiada en este rubro.

Por otro lado, se plantean las estrategias coinstruccionales, (Las estrategias que se seguirán para el aprendizaje de lo que se pretende en la práctica didáctica). En particular se emplearán aquí dos recursos, primero, el desarrollo de mapas conceptuales sobre los conceptos a revisar, y se reforzará su aprendizaje a través de juegos donde se les pida ejemplificar los conceptos. En segundo lugar, se empleará, y esto será la mayor parte del tiempo de la práctica didáctica, elaboración de ejemplos de matrices. Esto se realizará prácticamente todo el tiempo, de forma grupal primero, y después algunos ejemplos de forma individual, recibiendo retroalimentación y evaluación de forma continua e inmediata (evaluación formativa), después de cada ejemplo construido. La ejemplificación se detiene en lapsos, cuando de repente entre ejemplo y ejemplo, se incorporan dos actividades:

1. Mapas conceptuales con nuevos conceptos adicionales a aplicar (la actividad de ejemplificar se va realizando con ello cada vez más compleja, con ello va incorporando de forma paulatina y secuencial las siguientes operaciones: descripción de un modelo, suma, resta, multiplicación, inversa de matrices).
2. En ocasiones en vez de construir ejemplos (que en realidad dichos ejemplos, con la complejidad se van convirtiendo en Modelos de la

realidad), se les solicita la resolución e interpretación de ejercicios acerca de problemas con matrices. (Esto es con la finalidad de que no sólo desarrollen su parte creativa, sino también la analítica).

3. Para el caso de la comprensión de la "División" de matrices (en realidad la obtención y uso de la inversa de matrices en una aplicación similar a la operación de división), se emplea la Analogía como recurso didáctico, en el cual el profesor explica la obtención aritmética a través del inverso multiplicativo, y se explican las propiedades de los números, y con dicha analogía se les solicita a los equipos que "descubran" cómo resolver el problema de Dividir dos matrices. Con ello se fomenta su capacidad analítica para el desarrollo de estrategias de resolución de problemas matemáticos.

Cabe mencionar que se buscará que las estrategias de enseñanza descritas se vayan dando paulatinamente por autodescubrimiento guiado. Un ejemplo muy contundente de este tipo de estrategia es justamente la enseñanza de la matriz inversa, donde el profesor proporciona a los alumnos los elementos necesarios para que por medio de analogías el equipo sea capaz de concluir cómo llegar a resolver una "división de matrices" y porqué tiene que ser a través de la matriz inversa como se puede enfrentar y en algunos casos resolver dicha situación.

2.6 La Evaluación

Existen diversas clasificaciones y consideraciones con respecto de la estructura de la evaluación, y en algunos aspectos resulta práctico combinar algunas, con el fin de que la evaluación sea completa y contemple todos los elementos del aprendizaje.

Un primer nivel de estructura lo puede dar el momento y el propósito de la evaluación. Para ello se conciben tres niveles de evaluación, las cuales menciono a continuación (Aduna, 2006):

- Evaluación Diagnóstica: Este tipo de evaluación permite identificar el estado de conocimiento de los alumnos antes de abordar un tema, y ayuda a que el profesor ajuste las sesiones de activación de conocimiento previo que deberá considerar para abordar el tema.

- Evaluación Formativa: Esta evaluación permite un ajuste continuo de las sesiones, su intención es que el profesor identifique el grado de aprovechamiento de los alumnos con respecto de un tema, al concluir cada subtema, y no avanzar al siguiente hasta que se hayan comprendido de forma adecuada los aprendizajes esperados. Es un instrumento para fomentar un mayor aprendizaje.

- Evaluación Sumativa: Ayuda a identificar el grado de aprovechamiento total del curso y es empleada para otorgar una calificación a los alumnos, con fines de certificar o acreditar su conocimiento en un determinado tema. Generalmente se utiliza al final de un tema, y se traduce a un indicador numérico.

Por otro lado, con respecto del contenido, Frida Díaz Barriga (Díaz Barriga, 1998) hace referencia a tres tipos de aprendizaje, cada uno con diferentes niveles de profundidad. En la evaluación es importante considerar el tipo de aprendizaje que tengan los alumnos, y evaluarlo acorde a objetivos específicos de profundidad en cada uno. Estos tipos de conocimientos son declarativos, procedimentales, o bien actitudinales, y el siguiente paso es definir el nivel de profundidad que se quisiera que los alumnos alcanzaran, con el fin de poder establecer medios y criterios para la evaluación. Para ello distinguimos lo siguiente:

En el caso de los conocimientos, se buscaría que los alumnos contaran con el siguiente nivel de profundidad cognoscitiva:

- En el caso de los conocimientos declarativos antes mencionados, que involucran aprendizajes tanto de tipo factual como conceptual: Se busca que aprendan conceptos con la suficiente profundidad como para no sólo enunciarlos, sino comprenderlos y aplicarlos en el desarrollo de modelos de la realidad.

- En el caso de los conocimientos de tipo estratégico, que se refieren a aprendizaje de habilidades cognitivas, y que también abarcan a los procedimentales cuando el alumno es capaz de seleccionar por sí mismo los procesos a emplear. Se buscará que los alumnos reflexionen sobre los procesos que ellos mismos siguen para la resolución de problemas.

- Actitudinales: Que los alumnos sean capaces de mantener diálogos de tipo lógico argumentativo para llegar a soluciones grupales en consenso.

Y por último, Frida Díaz Barriga también habla del tipo de instrumentos que se pueden emplear para la evaluación. Algunos de los instrumentos de evaluación que se plantearon como opciones para evaluar dichos tipos de conocimiento se enlistan a continuación:

Desde el punto de vista de conocimientos declarativos se puede utilizar lo siguiente para evaluar:

- Elaboraciones.
- Mapas conceptuales.
- Ejemplificación.
- Diagramas.
- Solución de problemas.

- Argumentaciones. Explicaciones.
- Elaboración de documentos creativos (textos, artículos. diagramas, etc.).
- Solicitar la definición intensiva de un concepto o principio.
- Reconocer el significado de un concepto entre varios posibles.
- Trabajar con ejemplos.
- Relacionar los conceptos con otros de mayor o menor complejidad.
- Emplear la exposición temática.
- Aplicar los conceptos a tareas de solución de problemas.

Desde el punto de vista de conocimientos estratégicos, se puede emplear:

- Ordenaciones.
- Secuencias.
- Glosarios.
- Resúmenes.
- Esquemas.
- Cuadros sinópticos.
- Organizadores.
- Preguntas.
- Cuestionario.
- Problemas.
- Proyectos.
- Casos para desarrollar la capacidad del aprendizaje autodirigido.

Es importante contar con una lista amplia de opciones para evaluar el conocimiento, y para que el propio alumno a su vez pueda comprender y mejorar su nivel cognoscitivo con respecto de algún rubro de aprendizaje, sin embargo, de la lista anterior se seleccionaron algunos, y las demás opciones quedan mencionadas para poder ser empleadas en un momento dado como recursos adicionales.

En el caso particular de la práctica docente que se realizó, de las listas de arriba se consideraron la elaboración de ejemplos, argumentaciones y explicaciones, y aplicación de conceptos a la solución de problemas, preguntas, y casos para fomentar el aprendizaje autodirigido.

La razón de la constante búsqueda de ejemplos de aplicación, y que ello se dé sobre todo en equipos de trabajo (sin excluir trabajos individuales) es que se pretende que los alumnos tengan habilidades creativas y a la vez analíticas para la proposición de problemas y proyectos a desarrollar, y su creatividad los lleve a necesitar desarrollar análisis para resolver sus casos en particular. Este tipo de instrumentos en realidad se aplica sobre todo a proyectos académicos, sin embargo, si bien la práctica de la actividad conduciría a mediano plazo a tener habilidades para desarrollar proyectos, el alcance de la misma, al menos en este nivel educativo –educación media superior- sería que los alumnos pudieran plasmar ejemplos reales que pudieran resolver ellos mismos con las herramientas que se les proporcionen, en especial en la aplicación e interpretación de conceptos en un contexto real.

La mejor evidencia de aprendizaje que se tendrá en la práctica, será el poder aplicar adecuadamente los conceptos en la resolución de casos planteados por ellos o por el profesor, y la correcta interpretación de los resultados que obtengan.

Sin embargo, como en algún momento se comentó, los alumnos no llegan siempre al inicio de la clase con el mismo nivel académico, por lo cual es importante realizar una evaluación diagnóstica previa, para poder comprender el nivel académico con el que llegan los alumnos, y poder en un momento dado ajustar la práctica que se pretende desarrollar con ellos. En el caso de la evaluación diagnóstica, sobre todo se deberá evaluar sus conocimientos conceptuales con respecto a lo que es una matriz, y lo que es una variable, así como los tipos de variables que existen; y en el caso de los conocimientos procedimentales previos, será importante evaluar su capacidad aritmética en los siguientes rubros:

- Suma, resta, multiplicación y división con números positivos y negativos.
- Operación y manejo de fracciones.
- Propiedades asociativas en la suma y la multiplicación.
- Y su capacidad algebraica básica: Resolución de ecuaciones de primer grado, y despeje de incógnitas en sistemas de ecuaciones.

Y por otro lado, una evaluación de tipo cualitativo en el aspecto de la percepción de la dificultad de lo que se pretende que aprendan.

La evaluación diagnóstica se puede llevar a cabo, en el caso de los conocimientos declarativos, mediante la solicitud de definiciones y ejemplos de aplicación de las mismas, y en el caso de los conocimientos procedimentales, mediante la resolución de ejercicios.

Y desde el punto de vista de la evaluación, nos queda la evaluación formativa, a través de la cual se puede ir monitoreando el proceso de aprendizaje de los alumnos. En este caso se orientará la evaluación hasta llegar los mismos elementos que se evalúan al final, sólo que de forma paulatina. Se evaluará sobre todo la real comprensión de los conceptos en la aplicación. Ello es a través de enfocarse sobre todo en dos aspectos en particular, yendo de ejemplos más sencillos a ejemplos de mayor complejidad en cuanto a sus variables:

1. Por un lado el proceso diseñado por el equipo de trabajo, y después por el alumno (algunos ejercicios son en equipo, y después algunos son individuales), para la resolución de un problema, o para la construcción de un problema. En este caso en particular se evaluarán los siguientes aspectos:

    - El uso de los conceptos vistos en la clase.

    - La correcta interpretación de los conceptos cuando se aplican a una situación en particular.

- La secuencia lógica de la estrategia para llegar a un resultado.

2. Y por otro lado, la correcta interpretación de los resultados que obtienen mediante su estrategia: Es de fundamental importancia que el alumno sea capaz de ver información significativa para resolver o interpretar una situación en vez de sólo números sin significado. Para que un alumno sea capaz de interpretar una información numérica, es necesario que el alumno pueda:
    a. Comprender la variable de respuesta.
    b. Conocer, y también reconocer, parámetros para la interpretación del valor de una variable de respuesta.
    c. Poder “conectar” el valor de una variable de respuesta a un cierto contexto real, con el fin de “imaginar” implicaciones en otros elementos del modelo. De este modo el alumno será capaz de interpretar una realidad.

Una consideración adicional, implícita, pero dada su importancia es menester mencionarla, es que la Evaluación debe estar alineada a los objetivos de aprendizaje, y al nivel de profundidad establecidos en los mismos, de tal manera que sirva como instrumento no sólo para otorgar una calificación al alumno, sino para en un futuro poder mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje.

3. Planeación de la secuencia didáctica

Considerando las estrategias de enseñanza y evaluación planteadas, se tomaron en cuenta tres tipos de actividades para la planeación de las sesiones:

- Preinstruccionales: Principalmente de activación de conocimiento previo, y en el caso de la inversa de matrices, la analogía con el proceso aritmético de división.

- Coinstruccionales: Principalmente la ejemplificación (Construcción de ejemplos), y la resolución de problemas planteados en los ejercicios.

- De evaluación: sesión tras sesión se realizan actividades relacionadas con la evaluación formativa, y existe al final un examen como recurso de la evaluación sumativa.

3.1 Lineamientos y consideraciones generales:

A continuación se presenta en forma de resumen el marco general de las sesiones que se pretende abordar para el tema planteado: Matrices. Se tiene planeado llevar un total de 9 sesiones para revisar el tema. Las metas a lograr con el total de las sesiones son las siguientes:

- Que el alumno:
    - Aplique la herramienta de matrices para la resolución de problemas de información compleja
    - Use a las matrices para representar situaciones que desea analizar cuantitativamente.

La descripción general de las sesiones se presenta a continuación:

Objetivos por sesión:

Sesión	Subtema	Objetivo
1	Variables	Definir el concepto de variable, e identificar la diferencia entre variable cualitativa y cuantitativa.
2	Construcción de matrices	Expresar situaciones del entorno a través del uso de variables estructuradas en matrices.
3	Suma y resta de matrices: Construcción de ejemplos	Expresar situaciones del entorno a través de sumas y restas de matrices.
4	Suma y resta de matrices: Resolución de ejercicios	Solucionar problemas de información cuantitativa compleja a través del empleo de matrices.
5	Multiplicación de matrices: Construcción de ejemplos.	Expresar situaciones del entorno a través de multiplicación de matrices
6	Multiplicación de matrices: Resolución de problemas	Solucionar problemas de información cuantitativa compleja a través del empleo de multiplicación de matrices.
7	Análisis del Algoritmo de la División	Describir diferentes métodos para la división.
8	Inversa de una matriz	Traducir los métodos desarrollados para la división de números naturales a la dimensión de matrices.
9	Inversa de una matriz	Expresar situaciones del entorno que requieran el uso de inversa de una matriz.

A continuación se describen las sesiones:

3.2 Programas de clase

3.2.1 SESIÓN 1: Concepto de Variable

Objetivo de la sesión:

Definir el concepto de variable, e identificar la diferencia entre variable cualitativa y cuantitativa.

Duración: 110 minutos

Aprendizajes esperados

Contenido cognitivo:

- Conocimiento teórico, y primer acercamiento hacia el concepto de variable, y su clasificación en variable cualitativa y cuantitativa.
- Capacidad de proporcionar variables de ambos tipos, así como valores asociados a cada variable.

Habilidades:

- Adquisición del concepto de variable para que posteriormente se pueda aplicar al desarrollo de modelos matemáticos. Primer acercamiento.

Valores:

- Primer acercamiento a su grupo a fin de conocerlo y posteriormente elegir un equipo con el que trabajará en la mayoría de las siguientes sesiones.

Contenido temático

- Concepto de variable
- Clasificación en variable cuantitativa y cualitativa.

Secuencia didáctica:

Etapa 1: Inicio

Tiempo estimado: 30 minutos

Experiencia de aprendizaje

El profesor preguntará a los alumnos si alguien sabe qué es una variable. En su caso, permitirá que haya una lluvia de ideas por parte de los alumnos para acercarse al concepto de variable.

Posteriormente, el profesor expondrá la definición de “variable”, y de su clasificación en “variable cualitativa” y “variable cuantitativa”:

Primero la definición del Diccionario:

“variable.

(Del lat. variabĭlis).

1. adj. Que varía o puede variar.”

(Real Academia Española)

La misma se explica a los alumnos, y posteriormente, se plantea una definición de variable, empleada para aspectos de análisis matemático, así como de su clasificación en “variables cualitativas” y “variables cuantitativas”.

“Una variable es una característica de interés de algunos elementos”

“Variable cualitativa: Una variable con valores que aparecen en etiquetas o nombres de determinada característica de un elemento. Pueden ser numéricos o no numéricos”

“Variable cuantitativa: Variable con valores que indican cuánto o cuántos tengo de algo. Siempre son numéricos”

(Anderson Sweeney, 2001)

Posteriormente se expone un ejemplo de una situación. Una compañía de autos quiere diseñar un nuevo modelo de automóvil, y se les plantea a los alumnos las siguientes preguntas generadoras:

1. ¿Qué variables cualitativas y cuantitativas puede tomar en cuenta el diseñador para enriquecer dicho diseño?
2. ¿Sobre qué variables cualitativas y cuantitativas puede influir el comprador del coche para personalizar su automóvil?

Etapa 2: Desarrollo

Tiempo estimado: 20 minutos

Experiencia de aprendizaje

Se realiza una actividad lúdica con los alumnos para que se familiaricen con los conceptos de variables, esta actividad se lleva a dos niveles que a continuación se describen. Dar ejemplos de variables mediante el juego que se presenta a continuación, tiene la finalidad de que el alumno pueda aprender en un ambiente relajado, y a su vez permite que el mismo se empiece a relacionar con sus compañeros de clase, ya que en sesiones posteriores se desarrollarán diversas actividades en equipo.

Rueda de juego nivel 1.

Material necesario:
Una pelota, premios para los ganadores.

Descripción

El profesor solicita a los alumnos que se sienten en círculo, y explica las siguientes reglas del juego:

Cada alumno deberá estar atento a quién tiene la pelota, y lo que contesta cada persona.

Cada alumno al que le toque la pelota deberá proponer una variable del tipo que le indique el profesor (cualitativa o cuantitativa), que no se haya mencionado previamente en la rueda (por ejemplo, si el profesor solicitó variable cualitativa, y alguien ya previamente hubiera propuesto “color” como variable, el alumno no debiera repetir la misma, para ello debiera estar atento a lo que dicen los demás), y también deberá dar un ejemplo de valor de dicha variable (por ejemplo: variable: color, valor: rojo).

Si el alumno que está contestando, menciona una palabra que no sea variable, o bien repita alguna previamente mencionada, se sale del juego. Los alumnos que contestan erróneamente se van saliendo del juego hasta que sólo quede un ganador. La pelota se la van pasando los alumnos en el orden en que estén acomodados, de modo que todos participen.

El profesor repite las rondas de juego como sea necesario, hasta que pueda subir el nivel del juego.

Etapa 3: Desarrollo parte 2

Tiempo estimado: 35 minutos

Experiencia de aprendizaje

Rueda de juego nivel 2.

Material
Una pelota, premios para los ganadores.

Descripción

El profesor ahora explica las siguientes reglas del juego:

Cada alumno deberá estar atento a quién tiene la pelota, y lo que contesta cada persona.

Cada alumno al que le toque la pelota deberá primero contestar si la variable que le solicitan es cualitativa o cuantitativa, y posteriormente proponer una nueva variable del tipo que quiera (cualitativa o cuantitativa), para que alguien más conteste. Esta variable no se deberá haber mencionado previamente en la rueda. El alumno le pasa la pelota a quien quiera que esté en la rueda.

Si el alumno que está contestando se equivoca al clasificar la variable que le solicita su compañero, o bien propone una palabra que no sea variable, o bien una variable que ya se hubiera mencionado previamente, se sale del juego. Los alumnos que se van equivocando, van saliendo del juego hasta que sólo quede un ganador.

El profesor repite las rondas de juego como sea necesario, hasta que todos los alumnos hayan participado y comprendido los conceptos estudiados en la sesión.

Etapa 4: Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos

Experiencia de aprendizaje

El profesor pide al grupo que le definan, en sus propias palabras, qué es una variable, y que le expliquen la diferencia entre variable cualitativa y variable cuantitativa. Solicita ejemplos.

A continuación el profesor solicita a los alumnos que realicen la siguiente tarea, en modo individual, para entregar la siguiente clase:

Explica el concepto de variable. Plantea cinco ejemplos de variable cualitativa, y cinco de variable cuantitativa, y describe al menos una posible aplicación para cada una de ellas.

Evaluación de la sesión:

Para la primera sesión, el profesor realizará mediante la tarea entregada por los alumnos, una heteroevaluación de tipo formativa (Aduna, 2006). El objetivo de la misma será determinar si los alumnos comprendieron los conceptos de variable,

variable cuantitativa y variable cualitativa, y los pueden aplicar en la construcción de ejemplos de dichos conceptos.

3.2.2 SESIÓN 2: Construcción de Matrices

Objetivo de la sesión:

Expresar situaciones del entorno a través del uso de variables estructuradas de matrices.

Duración: 110 minutos

Aprendizajes esperados

Contenido cognitivo:

- Aplicación del concepto de variable a la construcción de matrices de índole cualitativo y cuantitativo.
- Adquisición del concepto de matriz y su aplicación en la construcción de ejemplos.

Habilidades:

- Capacidad de desarrollar estructuras lógicas a partir de elementos de la realidad, empleando variables cualitativas y cuantitativas.
- Incrementar su habilidad analítica a través de la construcción de ejemplos lógicos de matrices, a partir de imitar ejemplos dados por el profesor.
- Fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo de los alumnos a través de la construcción de ejemplos.

Valores:

- Elección de equipo de trabajo, y primera sesión de trabajo colaborativo.
- Discusión en el equipo para cuestionar la validez de sus ejemplos desarrollados.

Contenido temático

- Concepto de matriz
- Estructura de las matrices cuantitativas y cualitativas

Secuencia didáctica:

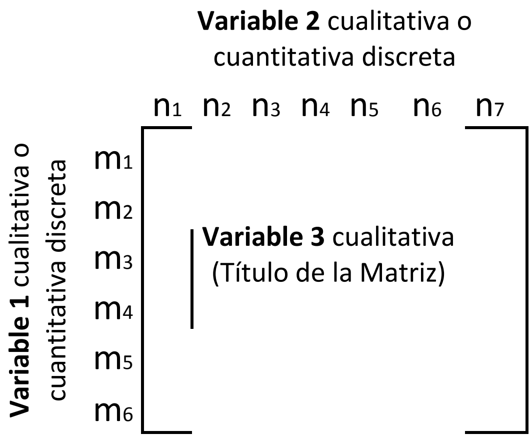
Etapa 1: Inicio

Tiempo estimado: 30 minutos

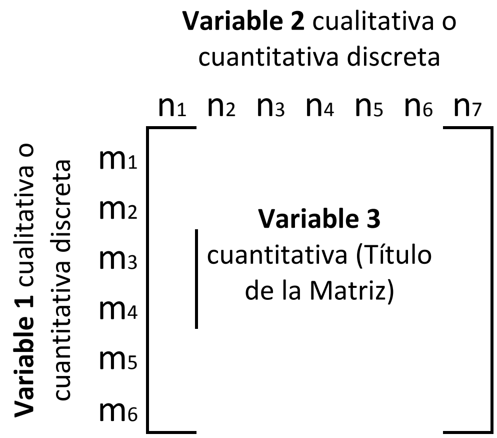
Experiencia de aprendizaje

El profesor pide a la clase que le definan qué es una matriz, y pregunta si recuerdan alguna vez haber oído o trabajado con las matrices. Permite que haya una participación voluntaria de los alumnos, y escribe los elementos que mencionan los mismos en el pizarrón, en caso de haber. Cuestiona o bien refuerza los elementos mencionados por los alumnos, según sean válidos o no, y posteriormente explica a los alumnos que una matriz es una convención acerca de cómo almacenar información, que permita su fácil manejo posterior.

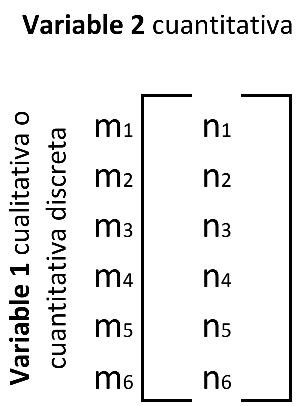
Explica que las matrices, al ser éstas de dos dimensiones generalmente (puede haber de tres si se empleara algún tipo de programa de computación, pero no está al alcance del presente trabajo), pueden contar con alguna de las siguientes estructuras:



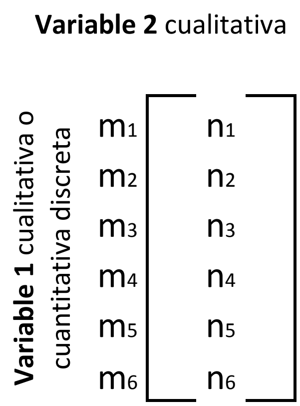
MATRIZ CUALITATIVA



MATRIZ CUANTITATIVA



MATRIZ CUANTITATIVA



MATRIZ CUALITATIVA

Resalta la importancia de que las matrices estructuran variables que se relacionan a través de la tercera variable, en caso de ser de tres variables. Y que un grupo de números acomodados de forma rectangular no tiene ningún significado a no ser que la estructura represente el acomodo de dos o de tres variables como se indica. Plantea algún ejemplo sencillo, como el que se describe a continuación:

Alumno \ materia	Matemáticas	Física
Laura	Equipo 1	Equipo 2
Luis	Equipo 5	Equipo 1
Rocío	Equipo 1	Equipo 1
Miriam	Equipo 3	Equipo 4
Pedro	Equipo 2	Equipo 2
Juan	Equipo 3	Equipo 3

MATRIZ CUALITATIVA

Género \ Grupo	105	103
Mujer	19	21
Hombre	15	23

MATRIZ CUANTITATIVA

El profesor resalta el significado de cada variable y valor de variable, y cómo se relaciona con las demás variables.

Explica un convencionalismo social: Se describe la forma de una matriz a través de M x N, en donde M representa la cantidad de valores de la variable 1 y N la cantidad de valores de la variable 2. Dicho en otras palabras, M representa el número de filas y N el número de columnas de la matriz.

En el primer ejemplo anterior: el orden o tamaño de la matriz es de 6 x 2, y el segundo ejemplo, de 2 x 2.

El profesor abre una sesión de preguntas y respuestas, y una vez concluida la aclaración de dudas con los alumnos, solicita que pasen a la siguiente actividad:

Etapa 2: Desarrollo

Tiempo estimado: 60 minutos

Experiencia de aprendizaje

Construcción de Ejemplos de Matrices

Descripción

El profesor solicita a los alumnos que se reúnan en equipos de máximo 4 personas, con las cuales estarán trabajando en diversas sesiones.

Una vez establecidos los equipos, les solicita la siguiente tarea, para entregar el mismo día:

Construir 6 ejemplos de matrices, cuatro de índole cuantitativo y dos cualitativas. En cada matriz considerar:

a) La correcta definición de las variables que la construyen.
b) Los valores a considerar para cada variable.
c) La construcción lógica de la matriz.
d) La explicación del contexto, y del significado de cada valor presentado en la misma.

Para el desarrollo de la actividad, invita a los alumnos a que salgan del salón y observen su entorno, y que representen algunos de sus ejemplos a partir de lo que observaron.

Le solicita a cada equipo que antes de finalizar la clase, deberán entregar la actividad al profesor.

Etapa 3: Cierre

Tiempo estimado: 20 minutos

Experiencia de aprendizaje

El cierre no es grupal sino por equipo de trabajo, al presentar sus ejemplos. El profesor revisa sus ejemplos, y en caso de estar incorrectos (ya sea por una falta de posibilidad de representar una situación real, o por una falla en los conceptos de variable, o de la construcción de las matrices), fomenta la discusión y el análisis en el equipo para que descubran la falla y les solicita que lo corrijan para entregarlos al profesor. Con ello se busca que los alumnos no salgan de la clase con concepciones erróneas de la construcción de matrices.

A continuación el profesor solicita a los alumnos que realicen la siguiente tarea,

Pasar a computadora sus ejemplos para entregar.

Evaluación de la sesión:

Se considera una evaluación formativa, a través de los ejemplos entregados en limpio por parte del equipo.

3.2.3 SESIÓN 3: Suma y resta de Matrices: Construcción de ejemplos.

Objetivo de la sesión:
Expresar situaciones del entorno a través de sumas y restas de matrices.

Duración: 110 minutos

Aprendizajes esperados

Contenido cognitivo:

- Aplicación del concepto de matriz en la construcción de ejemplos de sumas y restas de matrices.
- Adquisición del concepto de “agregar” y “desagregar” información.

Habilidades:

- Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, empleando suma y resta de matrices.
- Incrementar su habilidad analítica a través de la construcción de ejemplos lógicos de sumas y restas de matrices, a partir de imitar ejemplos dados por el profesor.
- Fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo de los alumnos a través de la construcción de ejemplos de sumas y restas de matrices.

Valores:

- Trabajo en equipo.
- Discusión en el equipo para cuestionar la validez de sus ejemplos desarrollados.

Contenido temático

- Concepto de suma y resta de matrices.
- Concepto de “agregar” y “desagregar” información.
- Estructura de las sumas y restas de matrices.

Secuencia didáctica:

Etapa 1: Inicio

Tiempo estimado: 30 minutos

Experiencia de aprendizaje

El profesor pregunta si recuerdan alguna vez haber oído o trabajado con las sumas y restas de matrices. Permite que haya una participación voluntaria de los alumnos, y escribe los elementos que mencionan los mismos en el pizarrón, en caso de haber. Cuestiona o bien refuerza los elementos mencionados por los alumnos, según sean válidos o no, y posteriormente plantea un ejemplo de suma de matrices, para estudiar por la clase:

La empresa W cuenta con dos plantas productivas: Una en Azcapotzalco y la otra en Toluca. A continuación se presenta una descripción de los empleados que trabajan en las Plantas Productivas de la empresa:

Cantidad de Hombres y Mujeres que trabajan en la Planta Azcapotzalco de la empresa W | **Cantidad de Hombres y Mujeres que trabajan en la Planta Toluca de la empresa W** | **Cantidad de Hombres y Mujeres que trabajan en las Plantas Azcapotzalco y Toluca de la empresa W**

$$\begin{array}{cc} & \textbf{Tipo de Puesto} \\ & \begin{array}{cc}\text{Administrativo} & \text{Sindicalizado}\end{array} \\ \textbf{Género}\ \begin{array}{c}\text{Mujer}\\ \text{Hombre}\end{array} & \begin{pmatrix} 35 & 121 \\ 24 & 213 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{cc} & \textbf{Tipo de Puesto} \\ & \begin{array}{cc}\text{Administrativo} & \text{Sindicalizado}\end{array} \\ \textbf{Género}\ \begin{array}{c}\text{Mujer}\\ \text{Hombre}\end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 135 \\ 18 & 161 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \textbf{Tipo de Puesto} \\ & \begin{array}{cc}\text{Administrativo} & \text{Sindicalizado}\end{array} \\ \textbf{Género}\ \begin{array}{c}\text{Mujer}\\ \text{Hombre}\end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array}$$

Se les pide a los alumnos que observen el ejemplo presentado, y que completen la matriz de resultado (no se les explica previamente el algoritmo de la suma de matrices, la idea es que lo descubran al observar las variables).

Una vez que los alumnos pudieron deducir las cantidades que se presentan en la matriz de resultados, se les pide que expliquen el significado de cada valor dado. (A modo de que el profesor observe si comprendieron la estructura de la suma).

Cantidad de Hombres y Mujeres que trabajan en la Planta Azcapotzalco de la empresa W + **Cantidad de Hombres y Mujeres que trabajan en la Planta Toluca de la empresa W** = **Cantidad de Hombres y Mujeres que trabajan en las Plantas Azcapotzalco y Toluca de la empresa W**

$$\begin{array}{cc} & \textbf{Tipo de Puesto} \\ & \begin{array}{cc} \text{Administrativo} & \text{Sindicalizado} \end{array} \\ \textbf{Género} \begin{array}{c} \text{Mujer} \\ \text{Hombre} \end{array} & \begin{pmatrix} 35 & 121 \\ 24 & 213 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{cc} & \textbf{Tipo de Puesto} \\ & \begin{array}{cc} \text{Administrativo} & \text{Sindicalizado} \end{array} \\ \textbf{Género} \begin{array}{c} \text{Mujer} \\ \text{Hombre} \end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 135 \\ 18 & 161 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \textbf{Tipo de Puesto} \\ & \begin{array}{cc} \text{Administrativo} & \text{Sindicalizado} \end{array} \\ \textbf{Género} \begin{array}{c} \text{Mujer} \\ \text{Hombre} \end{array} & \begin{pmatrix} 55 & 256 \\ 42 & 374 \end{pmatrix} \end{array}$$

Posteriormente el profesor remarca algunos aspectos importantes:

1. Les pide que enumeren las tres variables que construyen cada una de las tres matrices.
2. Les hace notar que hay una cuarta variable: La ubicación de la planta.
3. Les hace notar que del lado izquierdo la información está dividida por planta productiva, lo que le llama información “desagregada”, y del lado derecho se “agrega” la información en una sola matriz.
4. Conclusión: En la suma y en la resta se considera una variable adicional.
5. Repasa con ellos el mecanismo de la suma de matrices: se suma el número en una posición dada en una matriz, con el número de la misma posición de otra matriz. Para ello considerar que las variables en ambas matrices son las mismas, y los valores de la variable 1 y 2 también son los mismos, además de que están acomodados de la misma forma. Esto es lo que permite que la operación de suma sea sencilla.

El profesor no explica el mecanismo de la resta. Éste se los deja analizar a los alumnos en la siguiente actividad.

El profesor abre una sesión de preguntas y respuestas, y una vez concluida la aclaración de dudas con los alumnos, solicita que pasen a la siguiente actividad:

Etapa 2: Desarrollo

Tiempo estimado: 50 minutos

Experiencia de aprendizaje

Construcción de Ejemplos de Sumas y Restas de Matrices

Descripción

El profesor solicita a los alumnos que se reúnan con sus equipos de trabajo, y les solicita la siguiente tarea, para entregar el mismo día:

Construir 6 ejemplos de suma y resta de matrices: cuatro de suma y dos de resta. En cada matriz considerar:

a) La correcta definición de las variables que la construyen.
b) Los valores a considerar para cada variable.
c) La construcción lógica de la matriz.
d) La construcción y sentido lógico de la operación planteada.
e) La explicación del contexto, y del significado de cada valor presentado en el ejemplo.

Para el desarrollo de la actividad, invita a los alumnos a que salgan del salón y observen su entorno, y que representen algunos de sus ejemplos a partir de lo que observaron.

Le solicita a cada equipo que antes de finalizar la clase, deberán entregar la actividad al profesor.

Etapa 3: Cierre

Tiempo estimado: 30 minutos

Experiencia de aprendizaje

El cierre no es grupal sino por equipo de trabajo, al presentar sus ejemplos. El profesor los revisa, y en caso de estar incorrectos (ya sea por una falta de posibilidad de representar una situación real, o por una falla en los conceptos de variable, suma o resta, o bien de la construcción de las matrices), fomenta la discusión y el análisis en el equipo mediante preguntas, para que descubran la falla y les solicita que lo corrijan para entregarlos al profesor. Con ello se busca que los alumnos no salgan de la clase con concepciones erróneas de la suma y resta de matrices.

A continuación el profesor solicita a los alumnos que realicen la siguiente tarea:

Pasar a computadora sus ejemplos para entregar.

Evaluación de la sesión:

Se considera una evaluación formativa, a través de los ejemplos entregados en limpio por parte del equipo.

5.2.4 SESIÓN 4: Suma y Resta de Matrices, ejercicios.

Objetivo de la sesión:
Solucionar problemas de información cuantitativa compleja a través del empleo de matrices.

Duración: 110 minutos.

Aprendizajes esperados

<u>Contenido cognitivo:</u>

- Aplicación de los conceptos de matrices, y suma y resta de matrices

<u>Habilidades:</u>

- Capacidad de leer e interpretar textos y traducirlos al lenguaje matemático.
- Capacidad de razonar en cadenas de argumentos lógicos matemáticos.
- Resolución de problemas.

<u>Valores:</u>

- Trabajo en equipo.
- Discusión en el equipo para cuestionar la validez de sus respuestas.

Contenido temático

- Aplicaciones de matrices, suma y resta de matrices.

Secuencia didáctica:

Etapa 1: Inicio

Tiempo estimado: 80 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El profesor explica a los alumnos que han ejercitado hasta ahora su capacidad creativa en el desarrollo de modelos matemáticos sencillos, pero que en la presente sesión van a ejercitar su capacidad para resolver problemas relacionados con matrices. Para tal fin, el profesor solicita a los alumnos que se reúnan con sus equipos de trabajo, y les solicita la siguiente tarea, para entregar el mismo día: Contestar en equipo la siguiente batería de ejercicios, y entregarlos en equipo en 80 min.

(Los ejercicios presentados a continuación son una adecuación del material del libro Charles Miller, “Introducción al Pensamiento Matemático”, ejercicios de sumas y restas de matrices, material seleccionado debido a que hace una relación entre el uso de matrices y las variables que son representadas a través de dichas estructuras).

Ejercicios:

1. Un dietista prepara una dieta especificando las cantidades admisibles de cuatro grupos de alimentos principales: Grupo 1: Carnes, Grupo 2: Frutas y vegetales, Grupo 3: pan y féculas, y Grupo 4: Productos de leche. Las cantidades están dadas en unidades que representan 30 gramos de carne en el grupo 1, ½ taza de frutas y vegetales en el grupo 2, una rebanada de pan en el grupo 3, y ½ litro de leche en el grupo 4.
    a. El número de unidades para el desayuno, de cada uno de los grupos de alimentos son 2, 1, 2 y 1 para cada grupo de alimentos, respectivamente, en orden, para la comida, 3, 2, 2 y 1, y para la cena 4, 3, 2 y 1. Escriba una matriz de 3 x 4 con esta información, especificando sus variables.

b. Las cantidades de grasa, carbohidratos y proteínas por unidad, para cada grupo son respectivamente como sigue, en orden: grasas: 5, 0, 0, 10; carbohidratos: 0, 10, 15, 12; proteínas: 7, 1, 2 y 8.
   Utilice esta información para construir una matriz de 4 x 3.
c. Suponga que hay 8 calorías por unidad de grasa, 4 calorías por unidad de carbohidratos, y 5 calorías por unidad de proteína. Escriba estos datos como una matriz de 3 x 1.

2. La compañía de muebles X hace sofás y sillas en tres modelos, rústicos, modernistas y minimalistas. Cada mes envía a cada uno de sus almacenes 10 sofás rústicos, 12 sofás modernistas, y 5 sofás minimalistas, 15 sillas rústicas, 20 sillas modernistas y 8 sillas minimalistas. Escribir esta información en una matriz denominada M de 2 x 3. Ponga los sofás en el renglón superior.

3. Suponga que el almacén en San Luis tiene la siguiente existencia al primero de septiembre:

$$N = \begin{array}{cc} & \textbf{Estilo} \\ & \begin{array}{ccc} \text{rústico} & \text{modernista} & \text{minimalista} \end{array} \\ \textbf{Tipo de mueble} \begin{array}{c} \text{sofás} \\ \text{sillas} \end{array} & \begin{bmatrix} 45 & 35 & 20 \\ 65 & 40 & 35 \end{bmatrix} \end{array}$$

Existencia al 1° de Septiembre en almacén SLP

a. Si es reportada la existencia del almacén durante septiembre, ¿cuál será la existencia disponible para el primero de octubre? Utilizar la información del problema 2.
b. ¿Cuántas sillas modernistas estarán disponibles para el primero de octubre en el almacén de San Luis Potosí?
c. ¿Cuántos sofás minimalistas?

4. Las cantidades de cada modelo que tienen hasta el primero de septiembre los almacenes de Puebla y Guadalajara son como se muestra a continuación:

$$C = \begin{array}{cc} & \textbf{Estilo} \\ & \begin{array}{ccc} \text{rústico} & \text{modernista} & \text{minimalista} \end{array} \\ \textbf{Tipo de mueble} \begin{array}{c} \text{sofás} \\ \text{sillas} \end{array} & \begin{bmatrix} 22 & 25 & 38 \\ 31 & 34 & 35 \end{bmatrix} \end{array}$$

Existencia al 1° de Septiembre en almacén Puebla

$$S = \begin{array}{cc} & \textbf{Estilo} \\ & \begin{array}{ccc} \text{rústico} & \text{modernista} & \text{minimalista} \end{array} \\ \textbf{Tipo de mueble} \begin{array}{c} \text{sofás} \\ \text{sillas} \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 32 & 28 \\ 43 & 47 & 30 \end{bmatrix} \end{array}$$

Existencia al 1° de Septiembre en almacén Guadalajara

Encuentre el inventario total de los tres almacenes al primero de septiembre.

5. Supongamos que el almacén de Puebla envió el siguiente número de artículos durante septiembre.

$$K = \begin{array}{cc} & \textbf{Estilo} \\ & \begin{array}{ccc} \text{rústico} & \text{modernista} & \text{minimalista} \end{array} \\ \textbf{Tipo de mueble} \begin{array}{c} \text{sofás} \\ \text{sillas} \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 7 & 0 \\ 13 & 12 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Artículos enviados durante septiembre por el almacén de Puebla

Encuentre la existencia disponible al primero de octubre, tomando en cuenta el número de artículos recibidos y enviados durante el mes.

6. Considera la presentación numérica de las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Desarrolla las siguientes operaciones de matrices:

a. $A + B$
b. $A - B$
c. $2A$
d. $A + A$
e. $B - A$
f. $2A + (-4)B$

g. $(-1)A + A$

7. Considera la presentación numérica de las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Desarrolla las siguientes operaciones de matrices:

a. $A + B$
b. $2A - B$
c. $B - A$
d. $2B + (-2)A$
e. $(-1)A + A$

8. Para cada uno de los siguientes enunciados, da un contra ejemplo a fin de mostrar su falsedad, o en su lugar, escribe ejemplos para verificar que el enunciado es verdadero:

a. (A + B) + C = A + (B + C).
b. A – B = B – A.
c. aB = Ba (a es un número real).
d. a (B + C) = aB + aC.
e. Si 0 es una matriz que contiene todas sus entradas en cero, y tiene el mismo tamaño de A, entonces 0 + A = A + 0 = A

Etapa 3: Cierre

Tiempo estimado: 30 minutos.

Experiencia de aprendizaje

Se solicita a los alumnos que se incorporen a la clase de forma individual y que presten atención al pizarrón.
Posteriormente, se solicita a cada equipo que pase al pizarrón a explicar uno de los ejercicios, en caso de haberse equivocado el profesor solicita al grupo su retroalimentación, y en caso de acertar la respuesta, el profesor reafirma con el grupo el mecanismo de pensamiento, así como la estrategia seguida para resolver el problema. Se realiza de este modo para cada ejercicio hasta que se hayan revisado todos los incisos por el grupo. Todos los equipos debieron haber pasado al pizarrón.

A continuación el profesor solicita a los alumnos que realicen la siguiente tarea:

Pasar a computadora sus ejercicios para entregar.

Evaluación de la sesión:

Se considera una evaluación formativa, a través de los ejercicios entregados en limpio por parte del equipo.

3.2.5 SESIÓN 5: Multiplicación de Matrices: Construcción de ejemplos.

Objetivo de la sesión:
Expresar situaciones del entorno a través de multiplicación de matrices.

Duración: 110 minutos

Aprendizajes esperados

Contenido cognitivo:

- Aplicación del concepto de matriz en la construcción de ejemplos de multiplicación de matrices.
- Profundizar el concepto de variable a través de ver cómo se construyen variables con la multiplicación.
- Algoritmo de la multiplicación de matrices.

Habilidades:

- Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, empleando multiplicación de matrices.
- Incrementar su habilidad analítica a través de la construcción de ejemplos lógicos de multiplicación de matrices, a partir de imitar ejemplos dados por el profesor.
- Incrementar su habilidad analítica a través de analizar la posibilidad de multiplicación entre matrices, así como del comportamiento de las variables en la operación.
- Fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo de los alumnos a través de la construcción de ejemplos de multiplicación de matrices.

Valores:

- Trabajo en equipo.
- Discusión en el equipo para cuestionar la validez de sus ejemplos desarrollados.

Contenido temático

- Concepto de multiplicación de matrices.
- Estructura de la multiplicación de matrices.
- Algoritmo de la multiplicación.

Secuencia didáctica:

Etapa 1: Inicio

Tiempo estimado: 40 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El profesor pregunta si recuerdan alguna vez haber oído o trabajado con la multiplicación de matrices. Permite que haya una participación voluntaria de los alumnos, y escribe los elementos que mencionan los mismos en el pizarrón, en caso de haber. Cuestiona o bien refuerza los elementos mencionados por los alumnos, según sean válidos o no, y posteriormente plantea un ejemplo de multiplicación de matrices, para estudiar por la clase:

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Papas} & \text{Sandwiches} & \text{Refrescos}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Tienda 1}\\ \\ \text{Tienda 2}\end{array} & \begin{bmatrix} 13 & 11 & 18 \\ \\ 15 & 8 & 23\end{bmatrix}\end{array}
\text{X}
\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc}\text{Mayoreo} & \text{Menudeo}\end{array}\\ \textbf{Artículo} & \begin{array}{c}\text{Papas}\\ \text{Sandwiches}\\ \text{Refrescos}\end{array} & \begin{bmatrix} \$5 & \$7 \\ \$7 & \$12 \\ \$5 & \$6\end{bmatrix}\end{array}
=
\begin{bmatrix}
\begin{array}{c}\text{= (13x5)+(11x7)+(18x5)}\\ \text{.= (costo mayoreo papas x}\\ \text{cantidad vendida en T1) +}\\ \text{(costo mayoreo sandwiches x}\\ \text{sandwiches vendidos en T1) +}\\ \text{(costo mayoreo refrescos x ref.}\\ \text{vendidos en T1)}\end{array} & \begin{array}{c}\text{= (13x7)+(11x12)+(18x6)}\\ \text{.= (costo menudeo papas x}\\ \text{cantidad vendida en T1) +}\\ \text{(costo meudeo sandwiches}\\ \text{x sandwiches vendidos en}\\ \text{T1) + (costo menudeo}\\ \text{refrescos x ref. vendidos en}\\ \text{T1)}\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{= (15x5)+(8x7)+(23x5)}\\ \text{.= (costo mayoreo papas x}\\ \text{cantidad vendida en T2) +}\\ \text{(costo mayoreo sandwiches x}\\ \text{sandwiches vendidos en T2) +}\\ \text{(costo mayoreo refrescos x ref.}\\ \text{vendidos en T2)}\end{array} & \begin{array}{c}\text{= (15x7)+(8x12)+(23x6)}\\ \text{.= (costo menudeo papas x}\\ \text{cantidad vendida en T2) +}\\ \text{(costo meudeo sandwiches}\\ \text{x sandwiches vendidos en}\\ \text{T2) + (costo menudeo}\\ \text{refrescos x ref. vendidos en}\\ \text{T2)}\end{array}
\end{bmatrix}
$$

En dicho ejemplo, el profesor explica cada matriz que se va a multiplicar con sus variables, y el algoritmo de la multiplicación. Y analiza el algoritmo desde el punto de vista numérico, y desde el punto de vista de las variables en juego. Posteriormente le pide a la clase, de forma individual, que deduzcan las tres variables de la matriz de resultado, y los deja un tiempo pensar. Pide participación voluntaria, para finalmente plantear el ejemplo completo:

	Papas	Sandwiches	Refrescos
Tienda 1	13	11	18
Tienda 2	15	8	23

X

Artículo	Mayoreo	Menudeo
Papas	$5	$7
Sandwiches	$7	$12
Refrescos	$5	$6

=

= (13x5)+(11x7)+(18x5) .= (costo mayoreo papas x cantidad vendida en T1) + (costo mayoreo sandwiches x sandwiches vendidos en T1) + (costo mayoreo refrescos x ref. vendidos en T1)	= (13x7)+(11x12)+(18x6) .= (costo menudeo papas x cantidad vendida en T1) + (costo meudeo sandwiches x sandwiches vendidos en T1) + (costo menudeo refrescos x ref. vendidos en T1)
= (15x5)+(8x7)+(23x5) .= (costo mayoreo papas x cantidad vendida en T2) + (costo mayoreo sandwiches x sandwiches vendidos en T2) + (costo mayoreo refrescos x ref. vendidos en T2)	= (15x7)+(8x12)+(23x6) .= (costo menudeo papas x cantidad vendida en T2) + (costo meudeo sandwiches x sandwiches vendidos en T2) + (costo menudeo refrescos x ref. vendidos en T2)

=

Costo total

Tienda	Mayoreo	Menudeo
Tienda 1	$232	$331
Tienda 2	$246	$339

Costo total de la venta de ayer para cada tienda bajo las dos modalidades de compra

Posteriormente el profesor remarca algunos aspectos importantes:

- En el acomodo de las dos matrices que se multiplicarán, la variable de la primera matriz que se ve reflejada en las columnas de ésta es la misma que se observa en las filas en la 2da matriz. En este ejemplo fue la variable "artículo". Deben contar con los mismos valores acomodados en el mismo orden.

- La multiplicación debe ser lógica: cantidad por costo unitario da total de costo, tiene significado, pero no todo tiene significado: cantidad de personas por cantidad de personas daría personas al cuadrado, no tiene sentido ni significado.
- En la matriz resultante, observar que la variable posicionada en las filas en la primera matriz permanece en esa posición, y la variable posicionada en las columnas en la segunda matriz, permanece en esa posición.

El profesor abre una sesión de preguntas y respuestas, y una vez concluida la aclaración de dudas con los alumnos, solicita que pasen a la siguiente actividad:

Etapa 2: Desarrollo

Tiempo estimado: 50 minutos.

Experiencia de aprendizaje

Construcción de Ejemplos de Multiplicación de Matrices

Descripción

El profesor solicita a los alumnos que se reúnan con sus equipos de trabajo, y les solicita la siguiente tarea, para entregar el mismo día:

Construir 5 ejemplos de multiplicación de matrices. En cada matriz considerar:

a) La correcta definición de las variables que las construyen.
b) Los valores a considerar para cada variable.
c) La construcción lógica de la matriz.

d) La construcción y sentido lógico de la operación planteada.
e) La explicación del contexto, y del significado de cada valor presentado en el ejemplo.

Para el desarrollo de la actividad, invita a los alumnos a que salgan del salón y observen su entorno, y que representen algunos de sus ejemplos a partir de lo que observaron.

Le solicita a cada equipo que antes de finalizar la clase, deberán entregar la actividad al profesor.

Etapa 3: Cierre

Tiempo estimado: 20 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El cierre no es grupal sino por equipo de trabajo, al presentar sus ejemplos. El profesor los revisa, y en caso de estar incorrectos (ya sea por una falta de posibilidad de representar una situación real, o por una falla en los conceptos de variable, multiplicación, o bien de la construcción de las matrices), fomenta la discusión y el análisis en el equipo mediante preguntas, para que descubran la falla y les solicita que lo corrijan para entregarlos al profesor. Con ello se busca que los alumnos no salgan de la clase con concepciones erróneas de la multiplicación de matrices.

A continuación el profesor solicita a los alumnos que realicen la siguiente tarea:

Pasar a computadora sus ejemplos para entregar.

Evaluación de la sesión:

Se considera una evaluación formativa, a través de los ejemplos entregados en limpio por parte del equipo.

3.2.6 SESIÓN 6: Multiplicación de Matrices, ejercicios.

Objetivo de la sesión:

Solucionar problemas de información cuantitativa compleja a través del empleo de matrices.

Duración: 110 minutos

Aprendizajes esperados

Contenido cognitivo:

- Aplicación de los conceptos de multiplicación de matrices

Habilidades:

- Capacidad de leer e interpretar textos y traducirlos al lenguaje matemático.
- Capacidad de razonar en cadenas de argumentos lógicos matemáticos.
- Resolución de problemas.

Valores:

- Trabajo en equipo.
- Discusión en el equipo para cuestionar la validez de sus respuestas.

Contenido temático

- Aplicaciones de matrices, multiplicación de matrices.

Secuencia didáctica:

Etapa 1: Inicio

Tiempo estimado: 80 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El profesor explica a los alumnos que han ejercitado hasta ahora su capacidad creativa en el desarrollo de modelos matemáticos que representan la multiplicación entre matrices, y que en la presente sesión van a ejercitar ahora su capacidad para resolver problemas relacionados con la multiplicación de matrices. Para tal fin, el profesor solicita a los alumnos que se reúnan con sus equipos de trabajo, y les solicita la siguiente tarea, para entregar el mismo día: Contestar en equipo la siguiente batería de ejercicios, y entregarlos en equipo en 80 min. Para alguno de los ejercicios requerirán contar con los ejercicios que realizaron para suma y resta de Matrices, por lo que les pide que los tengan a la mano.

(Los ejercicios presentados a continuación son una adecuación del material del libro Charles Miller, “Introducción al Pensamiento Matemático”, ejercicios de multiplicación de matrices, material seleccionado debido a que hace una relación entre el uso de matrices y las variables que son representadas a través de dichas estructuras).

Ejercicios:

1. La pastelería Eduardo, una pequeña panadería del barrio, vende cuatro artículos principales: donas, panes, pasteles y empanadas. La matriz A muestra el número de unidades de los ingredientes principales necesarios para cada unidad de cada uno de estos artículos. Las unidades de cada artículo están conformados de la siguiente forma, una unidad de donas representa 12 donas, una unidad de pan es una docena de panes, una de pastel es un pastel, y una de empanadas son 6 empanadas.

Ingrediente

$$A = \begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccccc} \text{huevos} & \text{harina} & \text{azúcar} & \text{mantequilla} & \text{leche} \end{array} & & \\
\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1/4 & 1/4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1/4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{donas} \\ \text{pan} \\ \text{pasteles} \\ \text{empanadas} \end{array} & \textbf{artículo}
\end{array}$$

Unidades de ingredientes necesarias para hacer cada unidad de los artículos de la panadería

El costo (en pesos por unidad) para cada ingrediente, cuando son comprados al mayoreo o al menudeo está dado por la matriz B:

Modalidad de Compra

$$B = \begin{array}{ccc}
\begin{array}{cc} \text{Mayoreo} & \text{Menudeo} \end{array} & & \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 12 & 15 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{huevo} \\ \text{harina} \\ \text{azúcar} \\ \text{mantequilla} \\ \text{leche} \end{array} & \textbf{ingrediente}
\end{array}$$

Costo para cada unidad de ingrediente, bajo dos modalidades de compra

a. Emplea la multiplicación de matrices para encontrar una matriz que represente el costo comparativo por artículo bajo las dos modalidades de compra.
b. Supongamos que las órdenes en un día consisten en 20 docenas de donas, 240 hogazas de pan, 50 pasteles y 60 empanadas. Escribe estas órdenes como una matriz de 1 x 4.
c. Emplea la multiplicación de matrices de ser necesario, para determinar la cantidad requerida de cada ingrediente bajo las dos opciones de compra, a fin de satisfacer las órdenes del día.
d. Utiliza la multiplicación de matrices para encontrar una matriz representativa de los costos bajo las dos opciones de compra, a fin de llevar las órdenes del día.

2. Haciendo referencia al problema 1 de los ejercicios de Suma y Resta de Matrices, nombra a las matrices de los incisos a), b) y c) respectivamente como X, Y y Z.
   a. Calcula XY e interpreta la respuesta.
   b. Encuentra YZ e interpreta la respuesta.

3. Considera la presentación numérica de las siguientes dos matrices:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   a. Calcula si es posible, ED.
   b. Calcula si es posible, DE.
   c. Supongamos que deseamos multiplicar dos matrices F y G para obtener FG. ¿Cuál debe ser el número de columnas de F para comparar con el número de renglones de G? ¿Qué hay acerca del número de renglones de F?

4. Considera la presentación numérica de las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Desarrolla las siguientes operaciones de matrices:

a. AB.

b. BA.

c. $2A + AB$.

d. $-B + BA$.

5. Considera la presentación numérica de las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Desarrolla las siguientes operaciones de matrices:

a. AB

b. BA

Etapa 3: Cierre

Tiempo estimado: 30 minutos.

Experiencia de aprendizaje

Se solicita a los alumnos que se incorporen a la clase de forma individual y que presten atención al pizarrón.

Posteriormente, se solicita a cada equipo que pase al pizarrón a explicar uno de los ejercicios, en caso de haberse equivocado, el profesor solicita al grupo su retroalimentación, y en caso de acertar la respuesta, el profesor reafirma con el grupo el mecanismo de pensamiento, así como la estrategia seguida para resolver el problema. Se realiza de este modo para cada ejercicio hasta que se hayan revisado todos los incisos por el grupo. Todos los equipos debieron haber pasado al pizarrón.

A continuación el profesor solicita a los alumnos que realicen la siguiente tarea:

Pasar a computadora sus ejercicios para entregar.

Evaluación de la sesión:

Se considera una evaluación formativa, a través de los ejercicios entregados en limpio por parte del equipo.

3.2.7 SESIÓN 7: Análisis del algoritmo de la División

Objetivo de la sesión:
Que el alumno comprenda diferentes métodos para la división, así como algunas propiedades de nuestro sistema numérico: Propiedad identidad y e inverso multiplicativo.

Duración: 110 minutos

Aprendizajes esperados

Contenido cognitivo:

- Propiedad identidad en la suma y en la multiplicación.
- Concepto de inverso multiplicativo.
- Revisión del conocimiento previo: Algoritmo de la división.
- Algoritmo de la División método egipcio.
- Algoritmo de la División a través del Inverso multiplicativo.

Habilidades:

- Análisis de los algoritmos de la división.
- Incremento de la capacidad analítica a través de analizar el algoritmo de división para traducirlo al universo de las matrices.
- Incremento de la capacidad de razonar en cadenas de argumentos al diseñar una estrategia para la aplicación de la inversa de matrices como sustituto de una operación de división.

Contenido temático

- Concepto de la propiedad identidad
- Concepto del inverso multiplicativo
- Algoritmo de la división a través del inverso multiplicativo.

Secuencia didáctica:

Etapa 1: Inicio

Tiempo estimado: 50 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El profesor explica que el objetivo de la sesión es revisar el tema de División.

El profesor pregunta al grupo si recuerdan cuáles son las operaciones aritméticas básicas, posiblemente el grupo establezca: suma, resta, multiplicación y división.

El profesor hará notar que en realidad la división no existe, para lo cual solicita a algún voluntario que pase al pizarrón y planté un ejemplo de división y de cómo se resuelve la misma.

El profesor hará notar que para resolverla se tiene que hacer uso de la memoria de las tablas de multiplicar y realizar la multiplicación que lleve al resultado menor más aproximado, para posteriormente realizar la resta y sumar el residuo con lo que falta por dividir. Con ello el profesor señala que la operación de división es un tanteo de la multiplicación, cada vez más aproximado, por lo que la división se obtiene de forma indirecta.

Posteriormente pregunta al grupo ¿qué pasaría si no se supieran de memoria las tablas de multiplicar? ¿Qué tan complicado sería resolver la división?

A continuación explica a modo de ejemplo, la estrategia seguida por los egipcios para dividir:

Por ejemplo: 10321 entre 21:
Se explica que para ello, los egipcios únicamente eran capaces de duplicar una cantidad, es decir multiplicar por dos, y con ello podían realizar cualquier división. Para ello, construían la siguiente tabla:

N	Divisor	
1	21	
2	42	
4	84	
8	168	
16	336	
32	672	
64	1344	
128	2688	
256	**5376**	Número inferior más cercano a 10321
512	**10752**	**Se pasa**
1024	21504	
2048	43008	

En ella se ve en las columnas, la primera comienza siempre por la unidad, y la segunda comienza por el divisor. Ambas columnas se van duplicando en el siguiente renglón, de tal modo que la primera columna refleja por qué número de veces se multiplica el divisor y la segunda columna el resultado de dicha multiplicación.

Se selecciona el renglón cuya segunda columna refleje el número más cercano pero inferior o mayor al dividendo (10321), en este caso es 5376. Y se va construyendo la siguiente tabla empezando con ese renglón:

Se toman X unidades de N	N	Multiplicación	Progreso de la división	Nuevo dividendo	
1	256	5376	10321-5376=	4945	* Se busca el divisor más cercano al dividendo que no sea mayor a éste
1	128	2688	4945-2688=	2257	
1	64	1344	2257-1344=	913	
1	32	672	913-672=	241	
1	8	168	241-168=	73	
1	2	42	73-42=	31	
1	1	21	31-21=	**10**	**residuo**
Suma total:	**491**	10311			
	Resultado	Resultado de la multiplicación			

Se hace la resta del dividendo con el resultado de la multiplicación, y al resultado, el nuevo dividendo, se le aplica el mismo procedimiento, hasta llegar al residuo. Posteriormente para obtener el resultado de la división, se suma las N´s elegidas.

En resumen, el procedimiento es muy similar al que se emplea en aritmética, pero considerando que sólo se usa la multiplicación por 2, y que no se emplea el recurso de nuestro sistema de numeración decimal que suma en automático las cantidades por 10 al colocarlas en la posición correcta.

El profesor plantea otro ejemplo sencillo y solicita a los alumnos que lo resuelvan.

Posteriormente el profesor explica el método del inverso multiplicativo.

Para ello explica la propiedad de identidad en la suma y en la multiplicación:

Propiedad de identidad en la suma:

$$A + I = A$$

$$2 + ¿? = 2$$

Respuesta: $2 + 0 = 2$

Pero también:

$$10 + 0 = 10$$

$$1231 + 0 = 1231.$$

En nuestro sistema de numeración, el cero tiene la propiedad de identidad en la suma. Además es el único número que cuenta con esa propiedad.

El profesor pregunta a los alumnos ¿qué números cuentan con la propiedad identidad en la multiplicación?

Permite discusión en el grupo, hasta que lleguen a la conclusión que es el 1 el único número que cuenta con dicha propiedad.

Posteriormente explica el concepto de inverso aditivo, e inverso multiplicativo:

A + (inverso aditivo de A) = Número con la propiedad de identidad en la suma

A * (inverso multiplicativo de A) = Número con la propiedad de identidad en la multiplicación, y plantea la pregunta:

¿Para toda A existe su inverso aditivo?

¿Para toda A existe su inverso multiplicativo?

Permite discusión en el grupo, y posteriormente se llega en grupo a la conclusión de que:

En la suma todos los números cuentan con un inverso aditivo, pero en el caso del cero, éste mismo número es su inverso: $0 + 0 = 0$.

En el caso de la multiplicación todos los números excepto el cero, cuentan con un inverso multiplicativo.

Se solicita a los alumnos que determinen el inverso multiplicativo de los siguientes números o expresiones, considerando que A* (Inverso mult de A) = 1

a) 2
b) 0.25
c) 1/3
d) X
e) 1/(x+y)
f) X^2
g) 10%

Se revisan sus respuestas en clase.

Se explica el procedimiento de División a través del Inverso multiplicativo, planteando ejemplos:

10 / 2 = 10 * (Inv. Multiplicativo de 2)

2 * (Inv multiplicativo de 2) = 1
2 * (0.5) = 1

10 / 2 = 10 * (0.5) = 5

Se solicita a los alumnos que resuelvan más ejercicios a modo de ejemplo:

a) 20/ 4
b) 50 / 8

El profesor abre una sesión de preguntas y respuestas, y una vez concluida la aclaración de dudas con los alumnos, solicita que pasen a la siguiente actividad:

Etapa 2: Descubrir un mecanismo para poder aplicar la inversa de una matriz como sustituto de la División, para el ámbito de matrices.

Tiempo estimado: 60 minutos.

Experiencia de aprendizaje

Construcción de ejemplos de aplicación de la inversa de Matrices

Descripción

El profesor solicita a los alumnos que se reúnan con sus equipos de trabajo, y les solicita la siguiente tarea, para entregar el mismo día:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el desarrollo de la actividad, explica a los alumnos que deben descubrir la forma de poder realizar la operación, tomando como base la estrategia que se siguió para desarrollar el algoritmo de la división a partir del inverso multiplicativo.

En caso de que algunos alumnos conozcan algún otro procedimiento para obtener la inversa de matrices, el profesor les pide que deben explicar la lógica del procedimiento a emplear, el objetivo de la actividad es que los equipos deduzcan la lógica detrás de las operaciones equivalentes a la obtención y uso de la inversa de matrices.

Etapa 3: Cierre

Tiempo estimado: 5 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El profesor da algunas pautas para los equipos que no hayan desarrollado el procedimiento de la inversa de matrices, alentándolos a descubrirlo. Explica que en la siguiente sesión se desarrollará el procedimiento.

A continuación el profesor solicita a los alumnos que realicen la siguiente tarea:

Concluir su análisis.

Evaluación de la sesión:

Se considera una evaluación formativa, a través del progreso en el análisis de cómo realizar y aplicar una inversa de una matriz.

3.2.8 SESIÓN 8: Inversa de una matriz

Objetivo de la sesión:
Que el alumno traduzca los métodos desarrollados para la división de números a través de la obtención del inverso multiplicativo, a la dimensión de matrices.

Duración: 110 minutos

Aprendizajes esperados

Contenido cognitivo:

- Algoritmo de la inversa de matrices a través de la obtención y uso del inverso multiplicativo.

Habilidades:

- Incremento en la capacidad de entender, analizar y visualizar el algoritmo de la división en el ámbito numérico, para traducirlo al campo de las matrices.
- Incremento de la capacidad de razonar en cadenas de argumentos al diseñar una estrategia para la obtención y uso de la inversa de matrices.

Contenido temático

- Algoritmo para la aplicación y uso de inversa de matrices, a través del inverso multiplicativo.

Secuencia didáctica:

Etapa 1: Desarrollo del tema

Tiempo estimado: 100 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El profesor explica que el objetivo de la sesión es explicar cómo sustituir una operación de División a través de otras estrategias, en el ámbito de las matrices.

El profesor pregunta al grupo si pudieron resolver el problema planteado la clase anterior y espera y analiza sus respuestas. En caso afirmativo, solicita la exposición a los alumnos y corrige o refuerza la explicación de los mismos a fin de mayor comprensión por parte del grupo.

Adicionalmente, o en caso contrario, retoma el problema planteado en la clase anterior para tomarlo como punto de partida de la clase:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A su vez representa dos columnas en el pizarrón, y en la primera plantea el ejemplo que dio la clase anterior, en la segunda el problema planteado, y va explicando las similitudes y equivalencias para cada procedimiento de forma análoga y comparativa, de la siguiente forma:

Encontrar 10 ÷ 2 10 ÷ 2 = 10 * (Inv. multiplicativo de 2) 2 * (Inv multiplicativo de 2) = 1	Encontrar $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} * (inv\ multip.de \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \left(inv\ multip.de \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ $= equivalente\ al\ 1\ aritmético$ (¿Por qué en aritmética se emplea el 1? Porque el 1 tiene la propiedad de identidad en la multiplicación. Lo importante no es el número, sino el

	elemento que cuenta con dicha propiedad) Entonces, retomando: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \left(inv\ multip.de \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) =$ Matriz con la propiedad identidad en la multiplicación. ¿Qué matriz será? Se plantea un ejemplo de una matriz cualquiera: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ $$a + 2c = 1$$ $$a = 1$$ $$b + 2d = 2$$ $$b = 0$$ Despejando: $c = 0$ y $d = 1$ Matriz identidad en la multiplicación: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Se les pide a los alumnos que prueben que tiene dicha propiedad. Entonces:
2 * (Inv multiplicativo de 2) = 1	$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \left(inv\ multip.de \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$ $$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1 es el número que representa la propiedad identidad en la multiplicación)	($\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz que representa la propiedad identidad en la multiplicación en matrices de 2 x 2) Empleando la misma estrategia que se siguió para encontrar la matriz identidad, se puede encontrar la matriz inversa de la multiplicación: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $w + y = 1$ $w = 0$ $x + z = 0$ $x = 1$ Por tanto: $y = 1$ y $z = -1$
2 * (0.5) = 1	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
O.5 es el Inverso multiplicativo de 2	$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
10 ÷ 2 = 10 * (0.5) = 5	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

El profesor abre una sesión de preguntas y respuestas, y una vez concluida la aclaración de dudas con los alumnos, solicita que pasen a la siguiente actividad:

Se solicita a los alumnos que resuelvan más ejercicios a modo de ejemplo:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Etapa 3: Cierre

Tiempo estimado: 5 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El profesor da algunas pautas sobre la inversa de matrices:

- No todas las matrices cuentan con su inversa, así como no existe el inverso multiplicativo de cero.
- Sólo se pueden emplear matrices cuadradas, es decir mismo número de columnas que de filas, ya que son la única estructura de matrices que puede generar la misma estructura como resultado.

Evaluación de la sesión:

Se considera una evaluación formativa, a través de los ejercicios dejados al final de la clase.

3.2.9 SESIÓN 9: Inversa de una matriz: Construcción de ejemplos de aplicación.

Objetivo de la sesión:

Expresar situaciones del entorno empleando inversas de una matriz.

Duración: 110 minutos

Aprendizajes esperados

Contenido cognitivo:

- Aplicación del concepto de inversa de una matriz en la construcción de ejemplos de sustitución de divisiones de matrices.
- Profundizar el concepto de variable a través de ver cómo se construyen variables con la inversa de la matriz.
- Algoritmo de la inversa de matrices.

Habilidades:

- Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, empleando inversas de matrices.
- Incrementar su habilidad analítica a través de la construcción de ejemplos lógicos de inversa de matrices, a partir de imitar ejemplos dados por el profesor.
- Incrementar su habilidad analítica a través de analizar la posibilidad de aplicar la inversa de matrices como sustitución del proceso de división, así como del comportamiento de las variables en la operación.
- Fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo de los alumnos a través de la construcción de ejemplos de inversas de matrices.

Valores:

- Trabajo en equipo.
- Discusión en el equipo para cuestionar la validez de sus ejemplos desarrollados.

Contenido temático

- Concepto de matriz identidad
- Concepto de matriz inversa

- Estructura de la matriz inversa
- Algoritmo sustituto de la división de matrices.

Secuencia didáctica:

Experiencia de aprendizaje

Construcción de ejemplos de aplicación de inversa de Matrices

Tiempo estimado: 80 minutos.

Descripción

El profesor solicita a los alumnos que se reúnan con sus equipos de trabajo, y les solicita la siguiente tarea, para entregar el mismo día:

El profesor plantea el ejemplo de multiplicación de matrices que anteriormente había planteado, para estudiar por la clase, adaptado a matrices cuadradas:

$$
\begin{array}{cc} & \textbf{Artículo} \\ & \begin{array}{cc}\text{Papas} & \text{Sandwiches}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Tienda 1}\\ \text{Tienda 2}\end{array} & \begin{bmatrix}13 & 11\\ 15 & 8\end{bmatrix}\end{array}
\;\mathbf{X}\;
\begin{array}{cc} & \textbf{Tipo de costo} \\ & \begin{array}{cc}\text{Mayoreo} & \text{Menudeo}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Papas}\\ \text{Sandwich}\end{array} & \begin{bmatrix}13 & 11\\ 15 & 8\end{bmatrix}\end{array}
\;=\;
\begin{array}{cc} & \textbf{Costo total} \\ & \begin{array}{cc}\text{Mayoreo} & \text{Menudeo}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Tienda 1}\\ \text{Tienda 2}\end{array} & \begin{bmatrix}334 & 231\\ 315 & 229\end{bmatrix}\end{array}
$$

Cantidad de Artículos vendidos por cada tienda ayer

Costo unitario bajo la modalidad de Mayoreo o Menudeo

Costo total de la venta de ayer para cada tienda bajo las dos modalidades de compra

Posteriormente el profesor plantea el ejemplo de aritmética que empleó para explicar el cálculo de la matriz inversa:

$10 \div 2 = 5$; $5 \times 2 = 10$

Observando que se puede pasar de una expresión a otra fácilmente.

Le pide a los alumnos que construyan un ejemplo de aplicación de la inversa de matrices tomando como base el ejemplo de multiplicación visto previamente, considerando los siguientes elementos:

1. Resolver la operación a través del método visto, y verificar que el resultado corresponda con el otro factor de multiplicación.
2. Analizar qué pasa con las variables, y definir las variables que representa la matriz inversa.
3. Correcta definición de las variables que construyen el ejemplo
4. La explicación del contexto, y del significado de cada valor presentado en el ejemplo.
5. Construir dos ejemplos más a partir de sus propios ejemplos de multiplicación, adaptados a matrices cuadradas.

Le solicita a cada equipo que antes de finalizar la clase, deberán entregar la actividad al profesor.

Etapa 3: Cierre

Tiempo estimado: 30 minutos.

Experiencia de aprendizaje

El cierre no es grupal sino por equipo de trabajo, al presentar sus ejemplos. El profesor los revisa, y en caso de estar incorrectos (ya sea por una falta de posibilidad de representar una situación real, o por una falla en los conceptos de variable, inverso multiplicativo, matriz identidad, o bien de la construcción de las matrices), fomenta la discusión y el análisis en el equipo mediante preguntas, para que descubran la falla y les solicita que lo corrijan para entregarlos al profesor. Con ello se busca que los alumnos no salgan de la clase con concepciones erróneas de la inversa de matrices.

A continuación el profesor solicita a los alumnos que realicen la siguiente tarea:

Pasar a computadora sus ejemplos para entregar.

Evaluación de la sesión:

Se considera una evaluación formativa, a través de los ejemplos entregados en limpio por parte del equipo.

4. Aplicación

4.1 Estructura de Evaluación de las unidades presentadas

Considerando el marco teórico en el cual se basó la estructura para la evaluación, se presenta a continuación el siguiente cuadro que muestra la estructura de evaluación de las unidades presentadas:

Tabla 1. Estructura de Evaluación

<table>
<tr><th colspan="5">EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA</th></tr>
<tr><td colspan="5">De tipo cualitativo.

Conceptual:
Que el alumno conozca los conceptos de Variable, Variable cuantitativa, Variable cualitativa, y de Matriz.

Procedimental:
Que el alumno esté familiarizado con el algoritmo de la suma, resta, multiplicación e inversa de Matrices.</td></tr>
<tr><th colspan="5">EVALUACIÓN FORMATIVA</th></tr>
<tr><th>Unidad</th><th>Objetivos de Contenido cognitivo</th><th>Objetivos de Habilidades cognitivas</th><th>Instrumentos de Evaluación</th><th>Criterios de Evaluación</th></tr>
<tr><td>1. Concepto de Variable</td><td>Capacidad de proporcionar variables de ambos tipos, así como valores asociados a cada variable.</td><td>Adquisición del concepto de variable para que posteriormente se pueda aplicar al desarrollo de modelos matemáticos. Primer acercamiento.</td><td>Ejercicio sobre plantear ejemplos de ambos tipos de variables y algunos valores asociados a cada una.</td><td>Ejemplos acertados a cada tipo de variable, y valores adecuados a cada variable. Observar que el alumno no confunda “variable” con “valor”</td></tr>
<tr><td>2. Construcción de Matrices</td><td>Aplicación del concepto de variable a la</td><td>Capacidad de desarrollar estructuras lógicas a partir</td><td>Ejemplos de construcciones de matrices desarrollados en equipo</td><td>Observar que las matrices representen la estructura de variables enseñada, y que además sean ejemplos coherentes y capaces de ser encontrados en la realidad.</td></tr>
</table>

	construcción de matrices de índole cualitativo y cuantitativo. Adquisición del concepto de matriz y su aplicación en la construcción de ejemplos.	de elementos de la realidad, empleando variables cualitativas y cuantitativas. Incrementar su habilidad analítica a través de la construcción de ejemplos lógicos de matrices, a partir de imitar ejemplos dados por el profesor. Fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo de los alumnos a través de la construcción de ejemplos.		
3. Suma y resta de Matrices: Construcción de ejemplos	Aplicación del concepto de matriz en la construcción de ejemplos de sumas y restas de matrices. Adquisición del concepto de “agregar” y “desagregar” información.	Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, empleando suma y resta de matrices. Incrementar su habilidad analítica a través de la construcción de ejemplos	Ejemplos de sumas y restas de matrices desarrollados en equipo	Observar que las matrices representen la estructura de variables enseñada, y que la operación representada sea lógica y tenga significado. Poner mayor énfasis en la interpretación de la resta, debido a que ésta se debió deducir por parte del equipo.

		lógicos de sumas y restas de matrices, a partir de imitar ejemplos dados por el profesor. Fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo de los alumnos a través de la construcción de ejemplos de sumas y restas de matrices.		
4 Suma y Resta de Matrices, ejercicios	Aplicación de los conceptos de matrices, y suma y resta de matrices	Capacidad de leer e interpretar textos y traducirlos al lenguaje matemático. Capacidad de razonar en cadenas de argumentos lógicos matemáticos. Resolución de problemas	Resolución de ejercicios en equipo	Observar la correcta lectura e interpretación de las preguntas realizadas. Observar una explicación y lenguaje lógico y ordenado para la resolución de los problemas planteados.
5 Multiplicación de Matrices: Construcción de ejemplos.	Aplicación del concepto de matriz en la construcción de ejemplos de multiplicación de matrices.	Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad,	Ejemplos de multiplicación de matrices desarrollados en equipo	Observar que las matrices representen la estructura de variables enseñada, y que la operación representada sea lógica y tenga significado. Enfatizar la correcta interpretación de los valores de la matriz de respuesta, a través de la correcta deducción de las variables de respuesta.

	Profundizar el concepto de variable a través de ver cómo se construyen variables con la multiplicación . Algoritmo de la multiplicación de matrices.	empleando multiplicación de matrices. Incrementar su habilidad analítica a través de la construcción de ejemplos lógicos de multiplicación de matrices, a partir de imitar ejemplos dados por el profesor. Incrementar su habilidad analítica a través de analizar la posibilidad de multiplicación entre matrices, así como del comportamiento de las variables en la operación. Fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo de los alumnos a través de la construcción de ejemplos de multiplicación de matrices.		
6 Multiplicación de Matrices, ejercicios	Aplicación de los conceptos de multiplicación de matrices	Capacidad de leer e interpretar textos y traducirlos al lenguaje	Resolución de ejercicios en equipo	Observar la correcta lectura e interpretación de las preguntas realizadas. Observar una explicación y lenguaje lógico y ordenado para la resolución de los problemas planteados.

		matemático. Capacidad de razonar en cadenas de argumentos lógicos matemáticos. Resolución de problemas		
7 Análisis del algoritmo de la División	Propiedad identidad en la suma y en la multiplicación Concepto de inverso multiplicativo Revisión del conocimiento previo: Algoritmo de la división Algoritmo de la División método egipcio Sustitución de la División a través del Inverso multiplicativo.	Análisis de los algoritmos de la división. Incremento de la capacidad analítica a través de analizar el algoritmo de división para traducirlo al universo de las matrices. Incremento de la capacidad de razonar en cadenas de argumentos al diseñar una estrategia para el uso de la inversa de matrices	Evaluación Oral, en la clase el profesor analiza equipo por equipo su agrado de avance en el análisis.	Observar el grado de avance de los estudiantes en su capacidad analítica matemática. Reforzar su conciencia en los métodos empleados por ellos mismos para llegar a una posible solución.
8 Inversa de una matriz	Algoritmo de la obtención de la matriz inversa y su aplicación en sustitución de divisiones.	Incremento en la capacidad de entender, analizar y visualizar el algoritmo de la división en el ámbito numérico, para traducirlo al campo de las	Resolución de Ejercicios de forma individual	Observar la correcta interpretación por parte de los alumnos con respecto del procedimiento de resolución planteado.

		matrices. Incremento de la capacidad de razonar en cadenas de argumentos al diseñar una estrategia para el uso de la inversa de matrices como sustituto de procesos de división.		
9 Inversa de una matriz: Construcción de ejemplos de aplicación	Aplicación del concepto de inversa de una matriz en la construcción de ejemplos de sustitución de divisiones de matrices. Profundizar el concepto de variable a través de ver cómo se construyen variables con la inversa de la matriz. Algoritmo de la inversa de matrices.	Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, empleando inversas de matrices. Incrementar su habilidad analítica a través de la construcción de ejemplos lógicos de inversa de matrices, a partir de imitar ejemplos dados por el profesor. Incrementar su habilidad analítica a través de analizar la	Ejemplos de aplicación de matrices inversa entregados en equipo	Observar que las matrices representen la estructura de variables enseñada, y que la operación representada sea lógica y tenga significado. Enfatizar la correcta interpretación de los valores de la matriz inversa, a través de la correcta deducción de las variables que la estructuran.

		posibilidad de utilizar la inversa de matrices, así como del comportamiento de las variables en la operación. Fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo de los alumnos a través de la construcción de ejemplos de inversas de matrices.		

EVALUACIÓN SUMATIVA (Examen, se muestra la descripción de cada reactivo finalizando el presente esquema)

N	Objetivos de Contenido cognitivo a evaluar	Objetivos de Habilidades cognitivas a evaluar	Nivel de profundidad esperado	Criterios de calificación		
				0	1	2
1	Concepto de variable		Definición	No sabe definición ni puede plantear ejemplos	Plantea la definición pero no la puede aplicar a ejemplos	Plantea definición y ejemplos
2	Concepto de matriz Estructura de una matriz		Uso de la matriz y conocimiento de los elementos que conforman la estructura de matrices.	No define los elementos	Define algunos elementos	Define todos los elementos que conforman a la matriz
3	Aplicación del concepto de matriz en la construcción de ejemplos restas de matrices. Adquisición del concepto de “desagregar” información.	Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad,	Selección de elementos de la realidad y con ellos, la construcción de estructuras lógicas en forma de matrices que se relacionan a través del operador de	No hay un planteamiento lógico o estructurado de las matrices	Define las matrices pero no las relaciona correctamente en una operación de resta	Define adecuada y completamente tanto las matrices como la operación de resta

		empleando resta de matrices. Capacidad del pensamiento inductivo a través de la construcción de ejemplos de resta de matrices.	resta.			
4.a	Conocimiento profundo del concepto de variable a través de ver cómo se interpretan variables con la multiplicación. Algoritmo de la multiplicación de matrices.	Habilidad analítica a través de la deducción del significado de los valores de respuesta.	Comprensión y aplicación del concepto de multiplicación para la construcción de variables cuantitativas.	No reconoce ninguna variable representada en la matriz de respuesta	Reconoce algunas pero no todas las variables representadas en la matriz de respuesta	La interpretación de la matriz de respuesta es correcta
4.b	Conocimiento profundo del concepto de multiplicación a través de ver cómo se interpretan las operaciones con la multiplicación. Algoritmo de la multiplicación de matrices.	Habilidad analítica a través de analizar la posibilidad de multiplicación entre matrices, así como del comportamiento de las variables en la operación.	Comprensión y aplicación del concepto de multiplicación para la construcción de variables cuantitativas.	No sabe el algoritmo de la multiplicación	Conoce el algoritmo de la multiplicación pero no es capaz de interpretar el significado	Buen análisis lógico sobre el significado de las variables desarrolladas con la multiplicación, y del algoritmo de la multiplicación
5	Algoritmo de la inversa de matrices a través de la obtención y uso del inverso multiplicativo.	Capacidad de razonar en cadenas de argumentos al aplicar un procedimiento.	Algoritmia del método para sustitución de la división planteado.	Algoritmia incorrecta	Algoritmia incompleta	Algoritmia completa y correcta

Fuente: Elaboración propia basada en el marco teórico presentado.

4.2 Evaluación Sumativa: Examen Planteado

A continuación se presenta la estructura del examen planteado para una evaluación sumativa, buscando con ello que a manera de resumen, y considerando el tiempo de una sesión, el alumno pudiera demostrar su conocimiento con respecto del tema de matrices, así como reflejar su capacidad matemática. En el cuadro anterior se hace un análisis por cada reactivo, y en esta sección se presenta la descripción de cada reactivo.

Cuadro 1. Examen sumativo planteado a los alumnos

1. Explica qué es una variable y plantea un ejemplo.
2. Define los elementos que conforman a una matriz.
3. Plantea un ejemplo que te sea familiar que se pueda representar mediante una resta de matrices, y haz la representación de la misma: Considera las dos matrices que se están restando con la definición de sus variables, y plantea e interpreta la matriz de resultado.
4. Del ejemplo planteado al final del presente reactivo:
    a. Interpreta la matriz de los resultados de la operación.
    b. Analiza y explica si la operación es correcta y si tiene sentido o no, y el motivo.

Tipo de persona

Piso de procedenica	Adultos	Niños	Bebés
1°	4	1	0
2do	1	2	1

Número de personas en el elevador cuando va a Planta Baja

X

Tipo de medida

Tipo de persona	kg	Lb
Adultos	60	132
Niños	40	88
Bebés	10	22

Peso promedio por persona

=

280	616
150	330

5. Resuelve la siguiente operación, explicando de forma lógica tu procedimiento.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fuente: Elaboración propia

4.3 Aplicación del programa y presentación de resultados

Como se planteó en un inicio, dado que actualmente no existe en el Programa de Educación Media Superior el tema de Matrices de forma aislada, se realizó la validación del programa expuesto en el presente trabajo a un grupo de estudiantes de cuarto semestre de licenciatura en Sociología, durante la primera mitad del año 2015, así como una prueba estadística de hipótesis (t-Student), para medir los resultados del mismo.

La prueba estadística t-Student permite identificar si dos promedios tomados de dos muestras son estadísticamente iguales o no, dado un nivel de confianza establecido, y se emplea para tamaños de muestra pequeños. Se empleará en el estudio de la siguiente forma:

Se definen las variables cuantitativas que se pretenden evaluar, en este caso serán cada reactivo del examen sumativo a aplicar a los estudiantes.

Existe una muestra, a la cual se le denomina grupo de control, que consiste en los estudiantes que no tomaron el programa presentado en el presente trabajo. Ellos servirán como punto de referencia para comparar el efecto que tiene el programa de clase en el desarrollo de habilidades matemáticas.

Cada variable cuantitativa está relacionada con una habilidad matemática, como se presentó con anterioridad, de tal modo que un cambio en la calificación de un rubro, estará relacionada con la obtención de cierta destreza en alguna de dichas habilidades.

Para el desarrollo de la prueba, se requiere la formulación de la Hipótesis nula, y de la hipótesis alternativa, en este caso:

Hipótesis nula: No existe diferencia entre las medias de evaluación del grupo de control y del grupo que formó parte del Programa. Ho: $\mu_c=\mu_p$

Hipótesis alternativa: Sí existe diferencia entre las medias de evaluación del grupo de control y del grupo que formó parte del Programa. Ha: $\mu_c \neq \mu_p$

El grupo consistió en 28 estudiantes, de los cuales hubo 14 alumnos que no participaron en más de tres actividades propuestas en el Programa. A estos alumnos se les permitió que se presentaran a la Evaluación sumativa. A este conjunto de alumnos se les consideró el grupo de control.

Los demás alumnos, participaron en el Programa, tal cual se describe en la sección anterior, y contaron con su evaluación formativa (que no estuvo relacionada con una calificación, pero para establecer una cuantificación de la misma, el número presentado de dicha evaluación representa el número de actividades completas entregadas por el alumno). Posteriormente, se aplicó la evaluación sumativa mediante el examen antes descrito, el cual se evaluó, y se asignó una calificación a la evaluación de acuerdo con la tabla presentada sobre criterios de calificación. A continuación se presentan los resultados de dicha evaluación:

Tabla 2: Total alumnos en el estudio

N	Calificación Formativa	Calificación Sumativa						
		Reactivo						
		1	2	3	4a	4b	5	Total
1	0	0	1	1	0	0	0	2
2	10	1	2	2	1	1	0	7
3	10	2	1	2	1	1	1	8
4	1	0	0	1	1	1	0	3
5	3	1	2	0.5	0	0	0	3.5
6	7	2	2	1	1	1	2	9
7	0	0	1	1	1	1	0.5	4.5
8	3	1	2	1	1	1	1	7
9	3	1	2	2	0.5	0.5	0.5	6.5
10	0	2	1	0.5	0.5	0.5	0	4.5
11	0	1	0	2	0.5	0.5	0	4

12	4	1	2	1	1	1	1	7
13	3	2	2	2	1	1	0	8
14	5	2	1	2	0	0	1	6
15	10	2	2	2	1	1	2	10
16	3	2	2	1	1	1	0	7
17	9	1	2	1	1	1	1.5	7.5
18	3	2	2	2	1	0	0	7
19	3	2	0	2	1	1	0	6
20	5	2	2	2	1.5	1	2	10.5
21	0	2	1	0	0	0	0	3
22	4	2	2	1	1	0	0	6
23	7	2	2	2	1	1	1	9
24	6	0	0	2	1	1	1	5
25	5	1	2	2	1	1	2	9
26	1	2	2	2	1	1	0	8
27	11	2	1	2	1	1	2	9
28	9	2	2	2	0.5	0	0	6.5

Máximo	11	2	2	2	1.5	1	2	10.5
Mínimo	0	0	0	0	0	0	0	2
Media	4.46	1.43	1.46	1.50	0.80	0.70	0.66	6.55

En esta tabla se incluyen tanto a los alumnos que participaron con 3 o menos actividades como los que desarrollaron todas las actividades. Se obtuvo en coeficiente de correlación lineal entre el valor de la Evaluación Formativa y el valor de la Calificación Sumativa, con el fin de observar la relación entre el desarrollo de actividades y la calificación obtenida en el examen, obteniéndose un valor de 0.65, que expresa una fuerte relación directa entre ambas observaciones.

Posteriormente se realizó una prueba de hipótesis empleando el estadístico t-Student con un nivel de confianza del 95%, considerando como grupo de control al grupo que realizó tres actividades o menos, el cual se muestra a continuación:

Tabla 3. Grupo de Control, evaluación diagnóstica: Alumnos que no participaron en la práctica y sólo realizaron el Examen Final

N	Calificación Formativa	Calificación Sumativa						
		Reactivo						
		1	2	3	4a	4b	5	Total
1	0	0	1	1	0	0	0	2
2	1	0	0	1	1	1	0	3
3	3	1	2	0.5	0	0	0	3.5
4	0	0	1	1	1	1	0.5	4.5
5	3	1	2	1	1	1	1	7
6	3	1	2	2	0.5	0.5	0.5	6.5
7	0	2	1	0.5	0.5	0.5	0	4.5
8	0	1	0	2	0.5	0.5	0	4
9	3	2	2	2	1	1	0	8
10	3	2	2	1	1	1	0	7
11	3	2	2	2	1	0	0	7
12	3	2	0	2	1	1	0	6
13	0	2	1	0	0	0	0	3
14	1	2	2	2	1	1	0	8
Máximo	3	2	2	2	1	1	1	8
Mínimo	0	0	0	0	0	0	0	2
Media	1.64	1.29	1.29	1.29	0.68	0.61	0.14	5.29
Desv Est muestra		0.83	0.83	0.70	0.42	0.45	0.31	2.02

Y después la muestra de los 14 alumnos restantes, que desarrollaron por lo menos cuatro de las actividades planteadas, que se presenta a continuación: 115

Tabla 4. Grupo de Estudio, evaluación formativa y sumativa: Alumnos que participaron en la práctica y realizaron el Examen Final

N	Calificación Formativa	Calificación Sumativa						
		Reactivo						
		1	2	3	4a	4b	5	Total
1	10	1	2	2	1	1	0	7

2	10	2	1	2	1	1	1	8
3	7	2	2	1	1	1	2	9
4	4	1	2	1	1	1	1	7
5	5	2	1	2	0	0	1	6
6	10	2	2	2	1	1	2	10
7	9	1	2	1	1	1	1.5	7.5
8	5	2	2	2	1.5	1	2	10.5
9	4	2	2	1	1	0	0	6
10	7	2	2	2	1	1	1	9
11	6	0	0	2	1	1	1	5
12	5	1	2	2	1	1	2	9
13	11	2	1	2	1	1	2	9
14	9	2	2	2	0.5	0	0	6.5

Máximo	11	2	2	2	1.5	1	2	10.5
Mínimo	4	0	0	1	0	0	0	5
Media	7.29	1.57	1.64	1.71	0.93	0.79	1.18	7.82
Desv Est muestra		0.65	0.63	0.47	0.33	0.43	0.77	1.65

De inicio, se puede observar que la media de evaluación en el grupo que tomó el programa es de 7.82 contra 5.29 del grupo de control. Se requiere hacer la prueba de hipótesis para corroborar que la diferencia entre las medias sea significativamente distinta.

A continuación se presenta los resultados de la prueba de hipótesis con el estadístico t- Student y un nivel de confianza del 95%:

Hipótesis nula: No existe diferencia entre las medias de evaluación del grupo de control y del grupo que formó parte del Programa.

Hipótesis alternativa: Sí existe diferencia entre las medias de evaluación del grupo de control y del grupo que formó parte del Programa.

A continuación se presenta la tabla de resultados del estudio:

Tabla 5.Resultados del estudio

	t-Student de Evaluación Sumativa						
	Reactivo						
	1	2	3	4a	4b	5	Total
t-Student calculada:	1.30	1.62	2.29	2.22	1.50	12.68	4.71
t-Student obtenido en tablas:	2.16	2.16	2.16	2.16	2.16	2.16	2.16
Prueba de Hipótesis:	Se acepta Ho	Se acepta Ho	Se rechaza Ho	Se rechaza Ho	Se acepta Ho	Se rechaza Ho	Se rechaza Ho
Sí hay diferencia significativa			SÍ	SÍ		SÍ	SÍ
Reactivo Afectado:			3	4a		5	global

En la tabla anterior se puede observar que sí existen diferencias significativas en los resultados de los reactivos 3, 4ª y 5 de la prueba, así como en el resultado global de la prueba.

Retomando el diseño de la prueba, los reactivos de la misma en los cuales se presentan las diferencias significativas cubren los siguientes objetivos de aprendizaje:

Tabla 6. Objetivos de aprendizaje afectados con la práctica didáctica

Reactivo	Objetivos de Contenido cognitivo a evaluar	Objetivos de Habilidades cognitivas a evaluar
3	• Aplicación del concepto de matriz en la construcción de ejemplos restas de matrices. • Adquisición del concepto de "desagregar" información.	• Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, empleando resta de matrices. • Capacidad del pensamiento inductivo a través de la construcción de ejemplos de

		resta de matrices.
4.a	• Conocimiento profundo del concepto de variable a través de ver cómo se interpretan variables con la multiplicación. • Algoritmo de la multiplicación de matrices.	• Habilidad analítica a través de la deducción del significado de los valores de respuesta.
5	• Algoritmo de la división de matrices a través de la obtención y uso del inverso multiplicativo.	• Capacidad de razonar en cadenas de argumentos al aplicar un procedimiento.

Esto implica que el programa sí fue efectivo para alcanzar los objetivos cognitivos planteados en la tabla, y en particular, de ellos, los siguientes son considerados por Schoenfeld como habilidades matemáticas, según se revisó en el marco teórico del proyecto:

- Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, empleando resta de matrices.
- Capacidad del pensamiento inductivo a través de la construcción de ejemplos de resta de matrices.
- Habilidad analítica a través de la deducción del significado de los valores de respuesta.
- Capacidad de razonar en cadenas de argumentos al aplicar un procedimiento.

También se puede observar que no existe diferencia en el aprendizaje de los dos grupos con respecto de los reactivos 1, 2 y 4b, que son los siguientes:

Tabla 7. Objetivos de aprendizaje que no mejoraron con la práctica didáctica

Reactivo	Objetivos de Contenido cognitivo a evaluar	Objetivos de Habilidades cognitivas a evaluar
1	Concepto de variable	
2	Estructura de una matriz	
4b	Conocimiento profundo del concepto de multiplicación a través de ver cómo se interpretan las operaciones con la multiplicación.	Habilidad analítica a través de analizar la posibilidad de multiplicación entre matrices, así como del comportamiento de las variables en la operación.

De la tabla anterior se puede observar que los conceptos de variable y de matriz no mejoraron de forma significativa, ni la operación misma de multiplicación, así como tampoco hubo diferencia significativa en la habilidad de análisis de la operación de la multiplicación.

Una interpretación de lo anterior es que el concepto de variable o de matriz es algo que el alumno puede estudiar por sí mismo, y en cuanto a la operación de la multiplicación, un punto de mejora sería ahondar más en estrategias que permitan una mayor comprensión sobre la operación de la multiplicación (por ejemplo, ¿por qué se establece que se multiplica cada fila de la primera matriz por cada columna de la segunda matriz?). Ello permitiría una mejor comprensión del procedimiento de multiplicación. Elemento que sí se desarrolló al explicar cómo obtener la inversa de una matriz.

Conclusiones

A modo de conclusiones generales, en el presente documento, a partir del marco teórico, principalmente de Ausubel, así como del concepto de Matemáticas de Schoenfel, se desarrolló un Programa de Clase para la enseñanza del tema de Matrices en Bachillerato, que permitiera a la vez que el alumno aprendiera los aspectos cognitivos relacionados con el tema, el desarrollo de habilidades matemáticas, mismo que se presentó ante una muestra de estudiantes, y se corroboró su efectividad a través de una evaluación formativa y sumativa. A partir de los resultados obtenidos del análisis estadístico de dicha evaluación se concluyó que el Programa era efectivo en desarrollo de las siguientes habilidades matemáticas:

- Capacidad de desarrollar situaciones lógicas empleando estructuras matemáticas a partir de elementos de la realidad, empleando resta de matrices.
- Capacidad del pensamiento inductivo a través de la construcción de ejemplos de resta de matrices.
- Habilidad analítica a través de la deducción del significado de los valores de respuesta.
- Capacidad de razonar en cadenas de argumentos al aplicar un procedimiento.

Si bien existen oportunidades de mejora en el Programa didáctico (reflejadas también en el análisis estadístico desarrollado), como ocurre con todos los Programas didácticos, sí fomenta el desarrollo de habilidades imprescindibles en el campo de las matemáticas. Retomando el contendido teórico de Guershon Harel y Larry Sowder, para que un individuo desarrolle pensamiento matemático avanzado se requiere crear la “dualidad matemática”, es decir la capacidad de comprensión matemática, y que a partir de ella se pueda inducir el pensamiento matemático a voluntad, para crear nuevos escenarios de conocimiento matemático, y con ello poder llevar a cabo innovación en el campo de las matemáticas. En este sentido, las habilidades matemáticas que se desarrollan con el programa cuentan con la peculiaridad de impactar tanto a la comprensión matemática como a la inducción de crear pensamiento matemático. Si se pudiera agregar a un Programa a largo plazo en la formación de estudiantes enfocado en incrementar el nivel de desarrollo de dichas habilidades, podría impactar a la sociedad en el desarrollo de profesionistas con alta capacidad matemática para la resolución de problemas complejos que se resuelven únicamente a través de la creación de modelos multidisciplinarios.

En la definición del problema que dio origen al presente trabajo, se plantea la necesidad no sólo de desarrollar ciudadanos con habilidades y conocimiento en manejo y análisis de información, sino también en la necesidad de crear un marco de valores en los individuos que permitiera establecer juicios acerca del análisis de información. Este elemento es fundamental para la toma de decisiones en nuestra sociedad. Las habilidades matemáticas no son suficientes para la resolución de problemas sociales actuales complejos, además es necesario el progreso en el desarrollo de valores de bienestar social e individual, si bien ello es difícil de cuantificar, sí se puede fomentar a través de la forma de aprender, y se puede llevar a cabo una evaluación formativa de carácter cualitativo. Como se mencionó anteriormente, Vygotsky establece la importancia de la interacción humana para crear conocimiento, cabe mencionar que él mismo no sólo es de tipo cognitivo, sino que también afectivo, ya que es en conjunto como los individuos definen y comprenden el concepto de los valores de nuestra civilización, tales como la solidaridad, el respeto, la confianza y la tolerancia, entre otros. Es por ello importante fomentar experiencias de aprendizaje en equipo, en la cual los alumnos requieran interactuar entre ellos, y dialogar para llegar a soluciones y decisiones consensadas, para abordar los problemas planteados en la clase, situación virtual de la realidad, pero que a través del sistema educativo se puede dar un entrenamiento y herramientas para que en un futuro los individuos cuenten con herramientas para la solución de problemas y toma de decisiones.

Fuentes de Consulta

Aduna, L. (2006). *Planeación, conducción y evaluación del aprendizaje.* México, D.F.: Nueva Imagen.

Anderson Sweeney, W. (2001). *Estadística, Administración y Economía 1.* Mexico, D.F.: International Thompson Editores.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (2012). *Psicología Educatva: Un punto de vista cognitivo.* México: Trillas.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (vol. xv no.35). Matemática educativa: una visión de su evolución". *Educación y pedagogía* .

Coll, C. (2000). *Aprendizaje escolar y construcción del Conocimiento.* España: Paidos.

Culatta, R. (2013). *Structure of Intellect (J.P. Guilford)*. Recuperado el 26 de 05 de 2014, de Structure of Intellect (J.P. Guilford): http://www.instructionaldesign.org/theories/intellect.html

Díaz Barriga, F. (1998). *Estrategias Docentes para el aprendizaje significativo.* México: Mc Graw Hil.

Durkheim, E. (1984). *Educación y sociología.* México: Colofón.

Freire, P. (2005). *Pedagogía del Oprimido.* Mexico: Siglo XXi editores.

Grouws, D. A. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the.* Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Harel, G., & Sowder, L. (7: 1). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature. *Mathematical Thinking and Learning* , 27-50.

Hazzan, O. (1999, Volume 21, N.4). A Perspective on "Give an Example" Tasks as Opportunities to Construct Links Among Mathematical Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics* .

Mannheim, K. (1986). Diagnostico de nuestro tiempo. México: FCE.

Miller, C. D., & Vern E., H. (1979). *Introducción al Pensamiento Matemático.* México, D.F.: Trillas.

Ramos, A. (Enero 2008). Hacia una metodología crítica en las ciencias sociales (Zemelman y el pensamiento dialéctico). En L. L. Hernández, M. A. J., & A. A. Pérez, *Enfoques metodológicos críticos e investigación en ciencias sociales.* México: Plaza y Valdés.

Real Academia Española. (s.f.). *Diccionario de la Lengua Española*. Recuperado el 22 de Mayo de 2014, de Real Academia Española: http://lema.rae.es/drae/

Rosales, M. H. (2009). Formación de la Autonomía a través del Aprendizaje Estratégico. *Aporte Santiaguino* , 11.

Schoenfeld, A. H. *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense.*

Tall, D., & Vinner, S. (N. 12). Concept Image and Concept Definition in Mathematics. *Educational Studies* , 151-169.

Valenzuela Calahorro, C. (1995). *Química General: Introducción a la Química Teórica.* Salamanca, España: Ediciones Universidad Salamanca.

Villalpando, J. M. (2009). *Historia de la educación en México.* México: Porrua.

Vygotsky, L. S. (1978). *La mente en la sociedad: El desarrollo de las funciones psicológicas superiores.* Cambridge: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1962). *Pensamiento y Lenguaje.* Nueva York: Wiley and M.T.T. Press.