



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

RESPUESTA SÍSMICA DE VALLES ALUVIALES TRIDIMENSIONALES CON  
MÉTODOS SIMPLIFICADOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
JUAN CAMILO MOLINA VILLEGAS

TUTOR PRINCIPAL  
FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA, INSTITUTO DE INGENIERIA UNAM

COMITÉ TUTOR  
LUIS ESTEVA MARABOTO, INSTITUTO DE INGENIERIA UNAM  
MARIO GUSTAVO ORDAZ SCHROEDER, INSTITUTO DE INGENIERIA UNAM  
EDUARDO REINOSO ANGULO, INSTITUTO DE INGENIERIA UNAM  
JUAN JOSÉ PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE, INSTITUTO DE INGENIERIA UNAM

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

Secretario: DR. MARIO GUSTAVO ORDAZ SCHROEDER

Vocal: DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

1<sup>er.</sup> Suplente: DR. EDUARDO REINOSO ANGULO

2<sup>do.</sup> Suplente: DR. JUAN JOSÉ PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE

MÉXICO, D.F.

**TUTOR DE TESIS:**

DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

-----  
**FIRMA**

---

# Dedicatoria

A Catalina, quien durante estos años ha sido una fuente de apoyo y motivación en esta maravillosa experiencia en México.

A mis padres, por cuyo sacrificio y amor he podido lograr mis metas.

Al Doctor Francisco José Sánchez Sesma en quien he encontrado un gran tutor.

---

# Resumen

Es ampliamente conocido que la presencia de irregularidades verticales (ej: presencia de suelo blando) y laterales son factores determinantes en la respuesta dinámica de cuencas y en los llamados efectos de sitio. Las irregularidades verticales causan cambio del contenido frecuencial, la curvatura y polaridad de los rayos del campo incidente, mientras que las irregularidades laterales tienen como principal efecto la generación de ondas superficiales y el consecuente aumento en la duración del movimiento además de amplificaciones localizadas.

En la presente tesis, por medio de un análisis paramétrico, se estudia la emisión o generación de ondas superficiales en valles aluviales bidimensionales formados por un estrato con una irregularidad lateral sobre un semiespacio, ante la incidencia de ondas planas. Se plantea la construcción del campo total de respuesta como la suma del campo unidimensional “asociado” (analítico) más un campo difractado compuesto únicamente por ondas superficiales, del cual se dan las herramientas para su rápido cálculo.

De tal forma que no solo se presenta un estudio cualitativo de la emisión o generación de ondas superficiales por la presencia de irregularidades laterales sino que también se formula una metodología rápida (método de los coeficientes de emisión) para la obtención de la respuesta dinámica.

# Abstract

It is widely known that the presence of heterogeneities in the subsurface as encountered for example in sedimentary environments are determining factors for the strong dynamic response of alluvial basins; also known as site effect.

The heterogeneities can be of vertical and/or lateral type. The vertical heterogeneities cause changes in the frequency content, the curvature and the polarity of the incident seismic rays whereas the lateral heterogeneities contribute to the generation of surface waves and an increased duration shake time besides localized amplification.

In this thesis, through a parametric analysis, the emission or generation of surface waves from an incoming plane wave are analyzed for various two-dimensional alluvial valleys formed by a layer with lateral irregularity over a half-space.

It's proposed that the total field is computed as the combination of an analytical 1-D field and a diffracted field composed of only surface waves that are easy to compute.

It's presented not only a qualitative study of the emission of surface waves by the presence of lateral irregularities, but also a methodology for the fast computation of the dynamical response of alluvial valleys with lateral heterogeneity due to the so called “emission coefficient method”.

# Indice

<b>I ELASTODINÁMICA</b>	<b>3</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Cinemática . . . . .	5
1.2. Tensiones . . . . .	7
1.2.1. Vector de tracciones . . . . .	7
1.2.2. Tensor de esfuerzos . . . . .	8
1.2.3. Ley de Cauchy . . . . .	8
1.2.4. Ecuación diferencial de equilibrio . . . . .	9
1.2.5. Simetría del tensor de esfuerzos . . . . .	9
1.3. Ley de Hooke generalizada . . . . .	10
<b>2. Ecuaciones diferenciales gobernantes (ecuaciones de Navier)</b>	<b>11</b>
2.1. Ecuación de Navier en tres dimensiones . . . . .	11
2.2. Problemas antiplanos . . . . .	11
2.2.1. Coordenadas cartesianas . . . . .	12
2.2.2. Coordenadas polares . . . . .	13
2.3. Problemas de deformación plana . . . . .	13
2.3.1. Coordenadas cartesianas . . . . .	13
2.3.2. Coordenadas polares . . . . .	16
<b>II MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA (IBEM)</b>	<b>17</b>
<b>3. Método indirecto de elementos de frontera para problemas antiplanos (<math>SH</math>)</b>	<b>19</b>
3.1. Problema de valor en la frontera e inicial a resolver. . . . .	19
3.2. Función de Green. . . . .	20
3.3. Identidad de Somigliana en el dominio espacio-frecuencia. . . . .	20
3.4. Formulación del método indirecto de elementos de frontera . . . . .	21
3.5. Solución esquemática de un problema usando el método indirecto de elementos de frontera. . . . .	23
3.6. Solución de un problema de valor en la frontera tipo valle aluvial bajo la incidencia de ondas $SH$ . . . . .	24
3.7. Solución de un problema de valor en la frontera tipo valle aluvial bajo la acción de fuerzas puntuales internas (cálculo de la función de Green). . . . .	26
<b>4. Método indirecto de elementos de frontera para deformación plana (<math>P - SV</math>)</b>	<b>29</b>
4.1. Formulación . . . . .	29
4.2. Solución de problemas de irregularidades topográficas . . . . .	29
4.3. Solución de problemas de inclusiones (valles aluviales) . . . . .	30

<b>5. Método indirecto de elementos de frontera en tres dimensiones (3D)</b>	<b>33</b>
5.1. Valle aluvial con fuente puntual en la superficie . . . . .	33
5.2. Cálculo del cociente espectral H/V . . . . .	35
<b>III MÉTODO DE LOS COEFICIENTES DE EMISIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES</b>	<b>37</b>
<b>6. Caso antiplano (SH-Love)</b>	<b>41</b>
6.1. Definición del problema . . . . .	41
6.2. Respuesta del modelo unidimensional “asociado” . . . . .	42
6.3. Solución analítica de referencia . . . . .	43
6.4. Descomposición del problema . . . . .	45
6.4.1. Cálculo del campo total . . . . .	46
6.4.2. Cálculo del campo unidimensional “asociado” . . . . .	46
6.4.3. Cálculo del campo difractado . . . . .	46
6.5. Análisis paramétrico de los coeficientes de emisión de ondas de Love . . . . .	48
<b>7. Caso deformación plana (P-SV-Rayleigh)</b>	<b>61</b>
7.1. Definición del problema . . . . .	61
7.2. Descomposición del problema . . . . .	61
7.2.1. Cálculo del campo total . . . . .	62
7.2.2. Cálculo del campo unidimensional “asociado” . . . . .	62
7.2.3. Campo difractado aproximado . . . . .	62
7.3. Análisis paramétrico de los coeficientes de emisión de ondas de Rayleigh . . . . .	64
<b>IV APÉNDICES</b>	<b>67</b>
<b>A. Método de la matriz global</b>	<b>69</b>
A.1. Antiplano ( <i>SH</i> ) . . . . .	70
A.1.1. Ondas planas . . . . .	70
A.1.2. Fuentes puntuales . . . . .	73
A.2. Deformación plana ( <i>P-SV</i> ) . . . . .	75
A.2.1. Ondas planas . . . . .	75
A.2.2. Fuentes puntuales . . . . .	80
<b>B. Método de Thomson-Haskell</b>	<b>85</b>
B.1. Antiplano ( <i>SH</i> ) . . . . .	86
B.1.1. Ondas Planas . . . . .	86
B.1.2. Fuentes puntuales . . . . .	90
B.2. Deformación plana ( <i>P-SV</i> ) . . . . .	94
B.2.1. Incidencia de ondas planas . . . . .	94
B.2.2. Fuentes Puntuales . . . . .	98
<b>C. Cálculo de curvas de dispersión y formas modales</b>	<b>101</b>
C.1. Medios estratificados antiplanos (ondas de Love) . . . . .	101
C.1.1. Estrato sobre semiespacio . . . . .	101
C.1.2. Medio estratificado formado por $N - 1$ estratos sobre un semiespacio . . . . .	103
C.2. Medios estratificados deformación plana (ondas de Rayleigh) . . . . .	103

---

<b>D. Soluciones fundamentales</b>	<b>105</b>
D.1. Antiplanos . . . . .	106
D.1.1. Respuesta de un semiespacio ante la incidencia de una onda plana $SH$ . . . . .	106
D.1.2. Respuesta de un medio formado por un estrato sobre un semiespacio ante la incidencia de una onda plana $SH$ . . . . .	106
D.1.3. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual unitaria . . . . .	107
D.1.4. Respuesta de un semiespacio ante una fuente puntual . . . . .	108
D.2. Deformación plana . . . . .	109
D.2.1. Respuesta de un semiespacio homogéneo ante la incidencia de ondas planas . . . . .	109
D.2.2. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual (función de Green) . . . . .	114
D.3. Tridimensional . . . . .	116
D.3.1. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual . . . . .	116
<b>E. Convenciones y definición de variables</b>	<b>117</b>
E.1. Convenciones . . . . .	117
E.1.1. Ejes coordenados . . . . .	117
E.1.2. Esfuerzos . . . . .	117
E.1.3. Transformada de Fourier . . . . .	117
E.1.4. Pulso de Ricker . . . . .	118
E.1.5. Vectores de propagación y de desplazamiento de las ondas planas $P$ y $SV$ . . . . .	118
E.2. Definición de variables . . . . .	119



# Introducción

La cuantificación del llamado efecto local es relevante para la estimación del riesgo sísmico. La presencia de estratos de suelo blando puede ocasionar amplificaciones del movimiento asociado a las ondas incidentes. Además, es generalmente aceptado que las irregularidades de topografía y geología pueden ocasionar aumentos adicionales muy significativos de la intensidad del movimiento sísmico en ciertos sitios respecto de otros debido a fenómenos generados por la irregularidad lateral [Schnabel et al., 1972].

En la presente tesis se aborda la emisión o generación de ondas superficiales en valles aluviales bidimensionales formados por un estrato con una irregularidad lateral sobre un semiespacio, ante la incidencia de ondas planas. Se plantea la construcción del campo total de respuesta como la suma del campo unidimensional “asociado” (analítico) más un campo difractado compuesto únicamente por ondas superficiales, del cual se dan las herramientas para su rápido cálculo. De tal forma que no solo se presenta un estudio cualitativo de la emisión o generación de ondas superficiales por la presencia de irregularidades laterales sino que también se formula una metodología rápida (método de los coeficientes de emisión) para la obtención de la respuesta dinámica.

El texto está dividido en 4 partes, la I abarca los dos primeros capítulos y es una revisión de los principios de la elastodinámica, como son: cinemática, tensiones, ley de Hooke generalizada y las ecuaciones de Navier para problemas bidimensionales y tridimensionales. El objetivo principal de esta sección es presentar las ecuaciones diferenciales gobernantes de los problemas de valor en la frontera que se emplearán en los capítulos siguientes y algunas soluciones básicas de estas.

En la parte II, la cual está formada por los capítulos 3 a 5, se presenta el método indirecto de elementos de frontera (IBEM) para casos bidimensionales (antiplano y de deformación plana) y tridimensionales. Este es un método numérico empleado en esta tesis para obtener la respuesta dinámica de topografías o valles aluviales ante acciones dinámicas como ondas planas incidentes o fuentes puntuales. La importancia de este método radica en que es empleado como base para el análisis de los problemas de irregularidad lateral, que son el corazón de la tesis. Como valor agregado y novedoso, en el capítulo 5 se presenta el cálculo numérico del cociente espectral  $\frac{H}{V}$  en valles aluviales, empleando como marco teórico los campos difusos.

La parte III se presenta el método de los coeficientes de emisión para valles aluviales bidimensionales abiertos con presencia de una irregularidad lateral, tema central de esta tesis. En el capítulo 6 se presenta la formulación del método para el caso antiplano y se estudia la emisión de ondas de Love, mientras que en el 7 se hace lo propio para el caso de deformación plana y la emisión de ondas de Rayleigh. En ambos casos se realizan análisis paramétricos extensos que involucran variables geométricas y mecánicas.

Por último, la parte IV está compuesta de los apéndices A a E. En los apéndices (A) y (B) se presentan respectivamente los métodos matriciales de la matriz global y Thomson-Haskell para obtener la respuesta dinámica de medios estratificados ante la incidencia de ondas planas o la presencia de fuentes puntuales. En el primero se abarcan los

casos antiplano, deformación plana y tridimensional (empleado en el artículo [Lontsi et al., 2015] para el cálculo del cociente espectral  $\frac{H}{V}$  en profundidad bajo la teoría de los campos difusos), mientras que en el segundo se estudian los casos antiplano y deformación plana. La importancia de estos capítulos en esta tesis radica en que la respuesta del campo unidimensional “asociado” empleado en el método de los coeficientes de emisión, ha sido calculada con estos y además que tiene algunos aspectos novedosos o poco mencionados en la literatura que han sido explotados para realizar algunos cálculos apoyados en la teoría de campos difusos.

En el capítulo C se presenta la metodología para el cálculo de las curvas de dispersión y formas modales empleando el método de Thomson-Haskell, lo cual es materia prima para la implementación del método de los coeficientes de emisión. En el capítulo D se presentan algunas soluciones fundamentales para la implementación del IBEM y el método de los coeficientes de emisión y por último en el capítulo E se presentan las convenciones y definición de las variables empleadas en esta tesis.

**Parte I**

**ELASTODINÁMICA**



# Preliminares

## 1.1. Cinemática

Debido a la aplicación de fuerzas todas las partículas que forman parte de un cuerpo cambian de posición (ver figura 1.1(a)), de tal manera que el desplazamiento de la partícula originalmente ubicada en el punto  $\mathbf{x}$  puede expresarse en función de su posición inicial y del tiempo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_F(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x} \quad (1.1.1)$$

Donde:

$\mathbf{x}$ : Posición inicial (o de referencia) de la partícula ( $t = t_0$ ).

$\mathbf{x}_F(\mathbf{x}, t)$ : Posición en el tiempo  $t$  de la partícula que en  $t = t_0$  se encontraba en la posición  $\mathbf{x}$ .

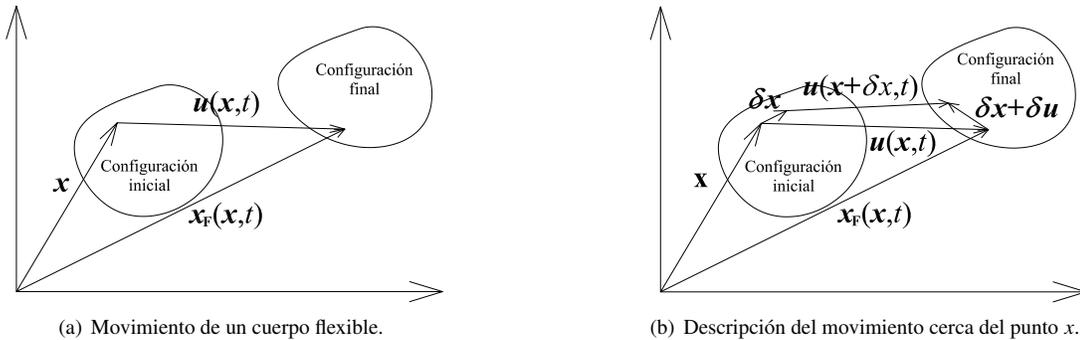


Figura 1.1: Descripción del movimiento de un cuerpo deformable ante la acción de fuerzas.

Si se estudia el comportamiento de un “elemento”  $\delta\mathbf{x}$  centrado en  $\mathbf{x}$ , a partir de la figura 1.1(b) se tiene:

$$\delta\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.2)$$

Donde:

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ : Desplazamiento del punto  $\mathbf{x}$ .

$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t)$ : Desplazamiento del punto  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ .

$\delta\mathbf{u}$ : Cambio del vector de desplazamiento entre los puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ .

$\delta\mathbf{x}$ : Elemento diferencial a estudiar.

De donde se obtiene:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.3)$$

Si se toma  $|\delta \mathbf{x}|$  pequeño, es posible expandir  $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t)$  como  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  mas términos de segundo orden despreciables, con lo cual la ecuación (1.1.3) se expresa como:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \text{o} \quad \delta u_i = u_{i,j} \delta x_j \quad (1.1.4)$$

O en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \delta u_1(\mathbf{x}, t) \\ \delta u_2(\mathbf{x}, t) \\ \delta u_3(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) & \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) & \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{Bmatrix} \quad (1.1.5)$$

Ahora, debido a que  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  en general esta compuesto por una rotación de cuerpo rígido que no produce esfuerzos mas una distorsión que si los produce, es bueno reescribir (1.1.4) de la siguiente forma [Aki and Richards, 2002]:

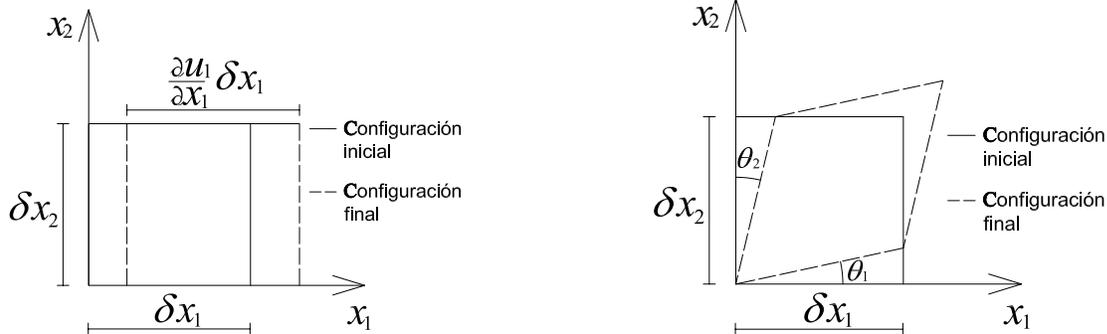
$$\delta u_i = u_{i,j} \delta x_j = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} [\nabla \times (\mathbf{u} \times \delta \mathbf{x})]_i = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \delta x_j = (\epsilon_{ij} + w_{ij}) \delta x_j \quad (1.1.6)$$

Donde puede verse como el tensor  $u_{i,j}$  se descompone como la suma de un tensor simétrico ( $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ ) (tensor de deformaciones) y uno antisimétrico ( $w_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})$ ) (tensor de rotaciones de cuerpo rígido), los cuales se expresan en notación matricial respectivamente como:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.1.7a)$$

$$w_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.7b)$$

Para entender los términos del tensor de deformaciones  $\epsilon_{ij}$  se empleará la figura 1.2, allí se ve que los términos de la diagonal corresponden a deformación axial (figura 1.2(a)) mientras que los de fuera de la diagonal corresponde deformaciones cortantes (figura 1.2(b)):



(a) Representación de  $\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ , este corresponde a una deformación axial.

(b) Representación de  $\epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2)$ , este representa deformación angular.

Figura 1.2: Representación gráfica de los términos del tensor de deformación.

## 1.2. Tensiones

### 1.2.1. Vector de tracciones

Dado un sólido arbitrario (con dominio  $\Omega$  y frontera  $\Gamma$ ) el cual se somete a la acción de fuerzas o solicitaciones externas en su dominio y/o frontera (ver figura 1.3(a)), vemos que debido a dichas fuerzas cada uno de sus puntos se desplaza y se somete a un estado de deformaciones y esfuerzos que tiene como objetivo lograr un estado de equilibrio dinámico (cumplimiento de la segunda ley de Newton)<sup>1</sup> en todos sus puntos.

Si dicho medio lo cortásemos hipotéticamente con un plano con vector normal  $\mathbf{n}^2$  (ver figura 1.3(b)) y nos enfocásemos una la vecindad de área  $\Delta A$ , centrada en el punto  $\mathbf{x}$  y ubicada sobre el plano de corte, observaríamos que sobre este ocurre una fuerza resultante  $\Delta \mathbf{f}$ . Ahora si hacemos el límite cuando  $\Delta A \rightarrow 0$  del cociente entre la fuerza y el área se obtiene:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A} \quad (1.2.1)$$

Donde:

$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ : Vector de tracciones en el punto  $\mathbf{x}$ , sobre un plano con normal exterior  $\mathbf{n}$ .

$\mathbf{n}$ : Vector normal al plano de corte y que apunta hacia el exterior de la región aislada.

Con respecto a la ecuación (1.2.1) es importante resaltar que basados en la teoría del medio continuo, dicho límite existe pese a que tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Además de lo anterior, es importante notar que  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$  es un vector que no solo depende de la posición y del tiempo sino también del vector normal exterior (plano de corte).

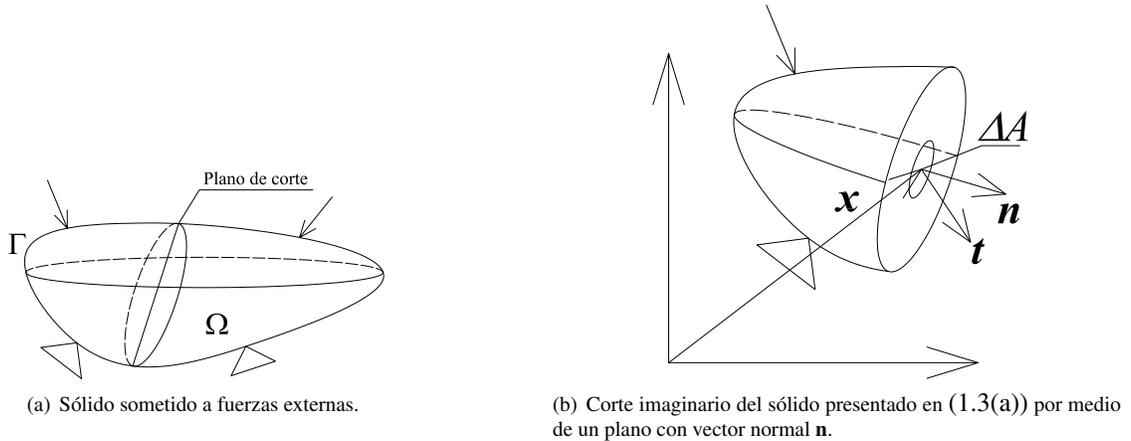


Figura 1.3: Semiespacios con superficie libre y empotrada sometidos a una fuerza puntual antiplana en su interior.

Si en lugar de haber realizado el diagrama de cuerpo libre del cuerpo a la izquierda del corte (ver figuras 1.3) lo hubiésemos hecho con el cuerpo a la derecha, el resultado fuese, que el vector de tracciones para este caso es el negativo del obtenido anteriormente (principio de acción y reacción):

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}, t) \quad (1.2.2)$$

Es decir, para un tiempo dado, los vectores de tracciones (y sus componentes) cambian de signos si son evaluados en caras con vector normal exterior  $\mathbf{n}$  o  $-\mathbf{n}$ .

<sup>1</sup>Dicho estado se cumple no solo para todos los puntos del dominio y frontera el medio sino en cada momento, este procedimiento es normalmente conocido como diagrama de cuerpo libre.

<sup>2</sup>En realidad no se trata de un corte sino de aislar una parte del medio dejando en el plano de separación los esfuerzos que el medio de la derecha ejerce sobre el medio aislado.

### 1.2.2. Tensor de esfuerzos

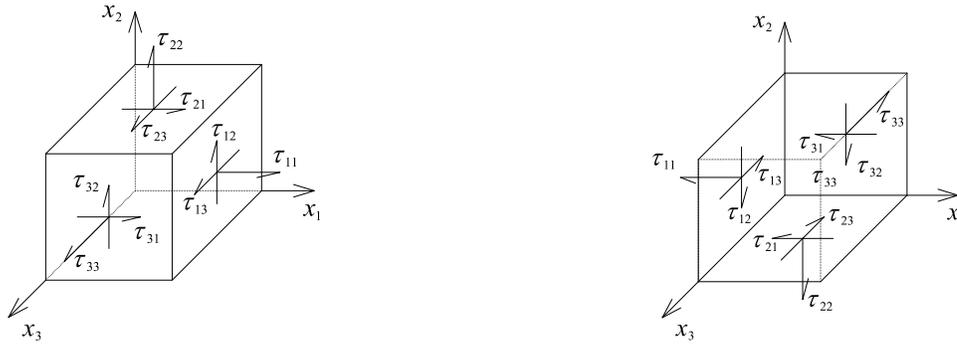
Por facilidad en la nomenclatura, es ideal definir las componentes del tensor de esfuerzos en función de los planos en los que actúan, como caso particular, en coordenadas cartesianas se define:

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}, t) = t_j(\mathbf{x}, n_i, t) \quad (1.2.3)$$

Donde se define:

$\tau_{ij}(\mathbf{x}, t)$ : Tensor de tracciones (tracción en dirección  $x_j$  en una cara o superficie con vector normal exterior en dirección eje  $x_i$ ). Este no es mas que el componente en dirección  $x_j$  del vector de tracciones en un plano con vector normal exterior en dirección  $x_i$ .

Con base en (1.2.2) y en (1.2.3) sabemos que  $\tau_{ij}$  evaluado en una cara con vector normal exterior en dirección del eje  $x_i$  debe actuar en dirección contraria a si el vector normal exterior es  $-x_i$ . Es por esto, que se usa como convención general para los esfuerzos positivos que estos actúan en dirección  $x_j$  si se encuentran en una cara con normal exterior en dirección  $x_i$ , y actúan en dirección  $-x_j$  si se encuentran en una cara con vector normal exterior en dirección  $-x_i$  (lo contrario es valido para los esfuerzos negativos). Lo anterior se encuentra resumido en las figuras 1.4 donde se presenta la convención para los esfuerzos positivos en un sistema cartesiano.



(a) Convención positiva de esfuerzos en caras con vector normal exterior en dirección a los ejes cartesianos.

(b) Convención positiva de esfuerzos en caras con vector normal exterior en dirección contraria a los ejes cartesianos.

Figura 1.4: Convención de esfuerzos positivos.

### 1.2.3. Ley de Cauchy

Debido a que las tracciones deben ser evaluadas en planos arbitrarios (no necesariamente normales a los ejes cartesianos), es conveniente ver como estas pueden ser expresadas en función de las tracciones en coordenadas cartesianas. Para lo anterior se recurre a analizar el equilibrio de un sólido de cuatro caras, de las cuales tres son perpendiculares a los ejes cartesianos y la otra es perpendicular al vector normal exterior  $\mathbf{n}$  (ver figura 1.5), de aplicar la segunda ley de Newton sobre este medio se obtiene:

$$t_i \Delta A - \tau_{i1} \Delta A_1 - \tau_{i2} \Delta A_2 - \tau_{i3} \Delta A_3 + f_i \kappa (\Delta A)^{\frac{3}{2}} = \rho \kappa (\Delta A)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.2.4)$$

Donde:

$f_i$ : Fuerza de cuerpo por unidad de volumen en dirección  $x_i$ .

$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta A^{\frac{3}{2}}}$ : Constante de proporcionalidad.

Dividiendo (1.2.4) por  $\Delta A$ , sabiendo que  $\Delta A_i = n_i \Delta A$  y haciendo el límite cuando  $\Delta A \rightarrow 0$ , se obtiene:

$$t_i = \tau_{i1} n_1 + \tau_{i2} n_2 + \tau_{i3} n_3 = \tau_{ij} n_j \quad (1.2.5)$$

La cual es conocida como la ley de Cauchy y relaciona las componentes del vector de tracciones en una cara con vector normal exterior  $\mathbf{n}$  con el tensor de esfuerzos.

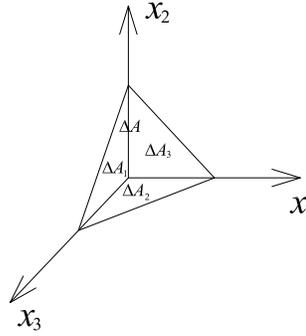


Figura 1.5: Análisis del equilibrio de un subdominio con 3 caras paralelas a los ejes cartesianos y otra cara normal al vector  $\mathbf{n}$ .

#### 1.2.4. Ecuación diferencial de equilibrio

Si se realiza el equilibrio en un subdominio arbitrario de nuestro cuerpo, cuya frontera es  $\Gamma^*$  y dominio  $\Omega^*$  obtenemos (ver figura 1.6):

$$\iiint_{\Omega^*} f_i d\Omega^* + \iint_{\Gamma^*} t_i d\Gamma^* = \iiint_{\Omega^*} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} d\Omega^* \quad (1.2.6)$$

Donde el primer término del lado izquierdo de (1.2.6) representa la contribución de las fuerzas de cuerpo en el dominio ( $\Omega^*$ ), la segunda representa la contribución de las tracciones en la frontera ( $\Gamma^*$ ) y el lado derecho representa las contribuciones inerciales en el dominio ( $\Omega^*$ ). Reemplazando la ley de Cauchy (ecuación 1.2.5) en (1.2.6), se obtiene:

$$\iiint_{\Omega^*} f_i d\Omega^* + \iint_{\Gamma^*} \tau_{ij} n_j d\Gamma^* = \iiint_{\Omega^*} \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} d\Omega^* \quad (1.2.7)$$

Aplicando el teorema de Green a la segunda integral del lado izquierdo de (1.2.7), se obtiene:

$$\iint_{\Omega^*} \left[ \tau_{ij,j} + f_i - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \right] d\Omega^* = 0 \quad (1.2.8)$$

Ahora, debido a que el subdominio sobre el cual se plantea el equilibrio ( $\Omega^*$ ) es arbitrario, la única forma de cumplir (1.2.8) es que:

$$\tau_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (1.2.9)$$

La cual corresponde a la ecuación diferencial de equilibrio que se debe cumplir en todos los puntos del dominio en estudio.

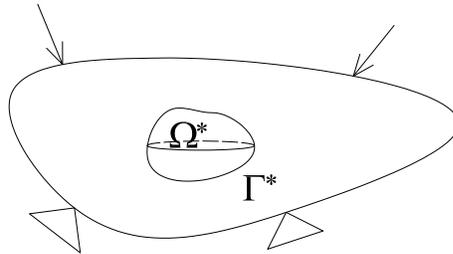


Figura 1.6: Subdominio y frontera arbitrarios en los cuales se realiza el equilibrio.

#### 1.2.5. Simetría del tensor de esfuerzos

Si recurrimos de nuevo a la figura 1.6 y realizamos el equilibrio rotacional del subdominio arbitrario  $\Omega^*$  con frontera  $\Gamma^*$ , se tiene:

$$\iint_{\Gamma^*} \mathbf{x} \times \mathbf{t} d\Gamma^* + \iiint_{\Omega^*} \mathbf{x} \times \mathbf{f} d\Omega^* = \iiint_{\Omega^*} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) d\Omega^* \quad (1.2.10)$$

La cual en notación indicial se expresa como:

$$\oint_{\Gamma^*} \epsilon_{ijk} x_j t_k d\Gamma^* + \iiint_{\Omega^*} \epsilon_{ijk} x_j f_k d\Omega^* = \iiint_{\Omega^*} \rho \epsilon_{ijk} x_j \ddot{u}_k d\Omega^* \quad (1.2.11)$$

Al reemplazar la ley de Cauchy (ecuación (1.2.5)) en (1.2.11) se obtiene:

$$\oint_{\Gamma^*} \epsilon_{ijk} x_j \tau_{lk} n_l d\Gamma^* = \iiint_{\Omega^*} \epsilon_{ijk} (-f_k + \rho \ddot{u}_k) x_j d\Omega^* \quad (1.2.12)$$

Aplicando el teorema del rotacional al lado izquierdo de (1.2.12) se obtiene:

$$\iiint_{\Omega^*} \epsilon_{ijk} [\tau_{jk} + (\tau_{lk,l} + f_k - \rho \ddot{u}_k) x_j] d\Omega^* \quad (1.2.13)$$

A partir de (1.2.9) se tiene que  $\tau_{lk,l} + f_k - \rho \ddot{u}_k = 0$ , con lo cual obtenemos:

$$\int_{\Omega^*} \epsilon_{ijk} \tau_{jk} d\Omega^* = 0 \quad (1.2.14)$$

Debido a que  $\Omega^*$  es un dominio arbitrario, para cumplir 1.2.14 es necesario que el integrando sea cero:

$$\epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0 \quad (1.2.15)$$

Lo cual solo se cumple si el tensor de esfuerzos es simétrico:

$$\tau_{jk} = \tau_{kj} \quad (1.2.16)$$

### 1.3. Ley de Hooke generalizada

A partir de experimentación con resortes, Hooke formuló la proporcionalidad entre fuerzas y deformaciones en materiales elásticos (ley de Hooke). Mas adelante Cauchy generalizo dicha ley formulando la proporcionalidad entre los tensores de esfuerzo y deformación, la cual es conocida actualmente como ley de Hooke generalizada y se expresa como:

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.3.1)$$

Donde  $c_{ijkl}$  es conocido como el tensor generalizado de Hooke (o tensor de rigidez por algunos autores), el cual para el caso de un sólido isótropo toma la siguiente forma ([?]):

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.3.2)$$

Con lo cual la ley de Hooke toma la siguiente forma particular:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1.3.3)$$

Donde  $\lambda$  y  $\mu$  son conocidas como las contantes de Lamé.

## Ecuaciones diferenciales gobernantes (ecuaciones de Navier)

### 2.1. Ecuación de Navier en tres dimensiones

Para un sólido isótropo y homogéneo al reemplazar la ley de Hooke (ecuación (1.3.3)) en la ecuación diferencial de equilibrio (ecuación (1.2.9)) y emplear la definición del tensor de deformaciones ( $\epsilon_{ij}$ ) se obtiene:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + f_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (2.1.1)$$

O en forma vectorial:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.1.2)$$

La cual, usando la identidad vectorial  $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ , puede ser reescrita como:

$$\alpha^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.1.3)$$

Donde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.1.4a)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.1.4b)$$

La ecuación (2.1.2) o su variante (2.1.3) es conocida como la ecuación de Navier para un sólido elástico, homogéneo e isótropo y su solución para diferentes escenarios será uno de los principales objetivos de esta tesis.

### 2.2. Problemas antiplanos

Se define un problema antiplano como aquel que cumple las siguientes hipótesis<sup>1</sup>

1. Solo existen fuerzas y desplazamientos en dirección  $y$ .
2. La respuesta es independiente de  $y$ , es decir, las derivadas en dicha dirección son nulas.

<sup>1</sup> Ver la sección E.1 para las convenciones de los ejes coordenados.

Aplicando las anteriores hipótesis a la ecuación (2.1.2), se obtiene que la única ecuación de movimiento que gobierna estos problemas corresponde a aquella que representa el equilibrio en dirección  $y$ , la cual puede expresarse como:

$$\mu \nabla^2 v(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2.1)$$

Donde por comodidad se ha tomado  $f(\mathbf{x}, t) = f_y(\mathbf{x}, t)$ .

### 2.2.1. Coordenadas cartesianas

Para el caso de coordenadas cartesianas la ecuación (2.2.1) toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, z, t) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, z, t) + \frac{f(x, z, t)}{\mu} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, z, t) \quad (2.2.2)$$

En general la ecuación 2.2.2 no se suele resolver directamente debido a su alta complejidad, en lugar de esto se aplica la transformada directa de Fourier respecto al tiempo (ver E.1.3 para convenciones) a ambos lados de la igualdad, de tal manera que las derivadas respecto a la variable temporal desaparezcan y sea más fácil la solución de estas, de lo anterior se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, z, \omega) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, z, \omega) + \frac{f(x, z, \omega)}{\mu} + \frac{\omega^2}{\beta^2} v(x, z, \omega) = 0 \quad (2.2.3)$$

Como puede verse, la ecuación diferencial (2.2.3), aún no tiene solución analítica simple debido a que tiene derivadas parciales tanto para  $x$  como para  $z$ . Para resolver esto se procede de forma similar a como se hizo anteriormente para eliminar las derivadas respecto al tiempo, es decir, se aplicará la transformada directa de Fourier respecto a una de las dos variables espaciales en ambos lados de la ecuación. Debido a la naturaleza general de los problemas estudiados en elastodinámica, donde muchos de estos poseen condiciones de frontera en planos horizontal (con coordenada  $z$  constante), se opta por emplear la transformada de Fourier respecto a  $x$ , de tal manera que las condiciones de frontera puedan ser aún evaluadas después de la transformación. Realizando lo anterior se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(k, z, \omega) + v^2 v(x, z, \omega) = -\frac{f(k, z, \omega)}{\mu} \quad (2.2.4)$$

Donde:

$k$ : Número de onda horizontal.

$v = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2}$ : Número de onda vertical de las ondas  $SH$ .

La solución general de la ecuación diferencial (2.2.4) esta formada por la solución de la ecuación diferencial homogénea (no existen fuerzas de cuerpo) y una solución particular. Por lo general es difícil obtener la solución particular para un problema en el cual el campo  $f(k, z, \omega)$  no sea sencillo, afortunadamente en todos los problemas estudiados en esta tesis (semiespacios o medio estratificados) los medios pueden descomponerse en subdominios (ej: estratos) con fuerzas de cuerpo nulas y las fuentes son ingresadas como tracciones que actúan en la frontera de dichos subdominios o como soluciones fundamentales que absorben la solución homogénea.

Por lo anterior nos enfocaremos en la solución de la ecuación (2.2.4) para el caso en que no existen fuerzas de cuerpo, es decir:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(k, z, \omega) + v^2 v(x, z, \omega) = 0 \quad (2.2.5)$$

La cual tiene como solución general:

$$v(x, z, \omega) = \hat{S}(\omega) \exp(ivz) + \hat{S}(\omega) \exp(-ivz) \quad (2.2.6)$$

Respecto a (2.2.6) cabe anotar que esta ecuación esta en el dominio  $(k, z, \omega)$  y para regresar al dominio  $(x, z, t)$  es necesario aplicarle las transformadas inversas de Fourier respecto al tiempo y a  $x$ .

Para el caso particular de medios estratificados horizontales ante la incidencia de ondas planas, la ecuación (2.2.4) (con  $f = 0$ ) puede ser resuelta de forma directa y toma la siguiente forma:

$$v(x, z, \omega) = \left[ \dot{S}(\omega) \exp(ivz) + \dot{S}(\omega) \exp(-ivz) \right] \exp(-ikx) \quad (2.2.7)$$

### 2.2.2. Coordenadas polares

En coordenadas polares la ecuación (2.2.1) tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta, t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta, t) + \frac{1}{\mu} f_y(r, \theta, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(r, \theta, t) \quad (2.2.8)$$

En los problemas de medios estratificados estudiados en esta tesis, la ecuación (2.2.8) es poco útil debido a la dificultad de plantear las condiciones de tracciones libres o continuidad en planos horizontales. El único caso de uso es en la definición de la función de Green para un fullspace, para la cual, debido a la axisimetría, se emplea la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(r, \theta, t) \quad (2.2.9)$$

Nuevamente se opta por ingresar la fuente externa no como fuerza de cuerpo sino como una tracción en la frontera. Aplicando la transformada directa de Fourier respecto al tiempo a ambos lados de (2.2.9) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \omega) + \frac{\omega^2}{\beta^2} v(r, \omega) = 0 \quad (2.2.10)$$

Cuya solución general es:

$$\begin{aligned} v(r, \omega) &= A(\omega) H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) + B(\omega) H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) \\ &= C(\omega) J_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) + D(\omega) Y_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Donde cada una de las dos soluciones presentadas en (2.2.11) se emplea para diferentes tipologías de problemas.

## 2.3. Problemas de deformación plana

Se define un problema de deformación plana aquel que cumple las siguientes hipótesis:

1. La respuesta es independiente de  $y$ , es decir, las derivadas en dicha dirección son nulas.
2. El desplazamiento en dirección  $y$  es nulo.

### 2.3.1. Coordenadas cartesianas

A partir de la ecuación (2.1.1) y las hipótesis anteriormente presentadas acerca de la deformación plana, se tiene que las ecuaciones de equilibrio en coordenadas cartesianas toman la siguiente forma:

$$(\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, z, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}(x, z, t) \right] + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, z, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z, t) \right] + f_x(x, z, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, z, t) \quad (2.3.1a)$$

$$(\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(x, z, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(x, z, t) \right] + \mu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, z, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(x, z, t) \right] + f_z(x, z, t) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, z, t) \quad (2.3.1b)$$

Aplicando la transformada directa de Fourier respecto al tiempo a ambos lados de (2.3.1), se obtiene:

$$(\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, z, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}(x, z, t) \right] + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, z, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z, t) \right] + f_x(x, z, \omega) + \rho \omega^2 u(x, z, t) = 0 \quad (2.3.2a)$$

$$(\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(x, z, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(x, z, t) \right] + \mu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, z, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(x, z, t) \right] + f_z(x, z, \omega) + \rho \omega^2 w(x, z, t) = 0 \quad (2.3.2b)$$

La forma general de solucionar (2.3.2), consiste en emplear la descomposición vectorial de Helmholtz, según la cual, el campo de desplazamientos se descompone como<sup>2</sup>:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \nabla \phi(\mathbf{x}, \omega) + \nabla \times \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.3.3)$$

Donde:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}(x, z, \omega) = 0.$$

$$\boldsymbol{\psi}(x, z, \omega) = \psi_x(x, z, \omega)\mathbf{i} + \psi_y(x, z, \omega)\mathbf{j} + \psi_z(x, z, \omega)\mathbf{k}.$$

Con base en (2.3.3) y en ley de Hooke, los componentes del campo de desplazamientos y esfuerzos en las interfaces de los estratos se expresan en función del potencial escalar  $\phi$  y de los componentes del potencial vectorial  $\boldsymbol{\psi}$  en el dominio  $x - z - \omega$  como:

$$u(x, z, \omega) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z, \omega) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z, \omega) \quad (2.3.4a)$$

$$w(x, z, \omega) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z, \omega) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, z, \omega) \quad (2.3.4b)$$

$$\tau_{zx}(x, z, \omega) = \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}(x, z, \omega) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, z, \omega) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, z, \omega) \right] \quad (2.3.4c)$$

$$\tau_{zz}(x, z, \omega) = \lambda \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, z, \omega) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(x, z, \omega) \right] + 2\mu \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(x, z, \omega) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}(x, z, \omega) \right] \quad (2.3.4d)$$

Donde se ha usado por simplicidad en la notación que  $\psi_y(x, z, \omega) = \psi(x, z, \omega)$ .

Si se reemplazan (2.3.4a) y (2.3.4b) en las ecuaciones (2.3.2a) y (2.3.2b) se obtiene que los potenciales escalares  $\phi(x, z, \omega)$  y  $\psi(x, z, \omega)$  deben ser solución de las ecuaciones de onda para las ondas  $P$  y  $SV$  respectivamente, es decir:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, z, \omega) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(x, z, \omega) + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \phi(x, z, \omega) = 0 \quad (2.3.5a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, z, \omega) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, z, \omega) + \frac{\omega^2}{\beta^2} \psi(x, z, \omega) = 0 \quad (2.3.5b)$$

Para resolver las ecuaciones (2.3.5) es necesario realizar la transformada directa de Fourier respecto a  $x$  a ambos lados de estas, de lo cual se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(k, z, \omega) + \gamma^2 \phi(k, z, \omega) = 0 \quad (2.3.6a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(k, z, \omega) + v^2 \psi(k, z, \omega) = 0 \quad (2.3.6b)$$

Donde:

$\gamma$ : Número de onda vertical de las ondas  $P$ ,  $k^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2}$ .

$v$ : Número de onda vertical de las ondas  $S$ ,  $k^2 + v^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2}$ .

<sup>2</sup>Por lo mencionado anteriormente para el caso antiplano, de aquí en adelante se resolverá solo la ecuación homogénea, es decir,  $f_x(x, z, \omega) = 0$  y  $f_z(x, z, \omega) = 0$ .

Las soluciones generales de (2.3.6) son las siguientes<sup>3</sup>:

$$\phi(k, z, \omega) = \dot{p}(k, \omega) \exp(i\gamma z) + \dot{p}(k, \omega) \exp(-i\gamma z) \quad (2.3.7a)$$

$$\psi(k, z, \omega) = \dot{s}(k, \omega) \exp(ivz) + \dot{s}(k, \omega) \exp(-ivz) \quad (2.3.7b)$$

Donde:

$\dot{p}(k, \omega)$ : Amplitud del potencial de la ondas planas ascendetes  $P$ .

$\dot{p}(k, \omega)$ : Amplitud del potencial de la ondas planas descendetes  $P$ .

$\dot{s}(k, \omega)$ : Amplitud del potencial de la ondas planas ascendetes  $S$ .

$\dot{s}(k, \omega)$ : Amplitud del potencial de la ondas planas descendetes  $S$ .

Debido a que las ecuaciones diferenciales que gobiernan a los potenciales escalares  $\phi(k, z, \omega)$  y a  $\psi(k, z, \omega)$  han sido resueltas en el dominio  $k - z - \omega$  es necesario obtener los desplazamientos y esfuerzos en este mismo dominio, lo cual se logra realizando la transformada directa de Fourier respecto a  $x$  de las ecuaciones (2.3.4):

$$\begin{aligned} u(k, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, z, \omega) \exp(ikx) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z, \omega) \exp(ikx) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z, \omega) \exp(ikx) dx \\ &= -ik\phi(k, z, \omega) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(k, z, \omega) \\ &= -ik [\dot{p}(k, \omega) \exp(i\gamma z) + \dot{p}(k, \omega) \exp(-i\gamma z)] - iv [\dot{s}(k, \omega) \exp(ivz) - \dot{s}(k, \omega) \exp(-ivz)] \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} w(k, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, z, \omega) \exp(ikx) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z, \omega) \exp(ikx) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, z, \omega) \exp(ikx) dx \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial z}(k, z, \omega) - ik\psi(k, z, \omega) \\ &= i\gamma [\dot{p}(k, \omega) \exp(i\gamma z) - \dot{p}(k, \omega) \exp(-i\gamma z)] - ik [\dot{s}(k, \omega) \exp(ivz) + \dot{s}(k, \omega) \exp(-ivz)] \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx}(k, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{zx}(x, z, \omega) \exp(ikx) dx \\ &= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial w}{\partial x}(x, z, \omega) + \frac{\partial u}{\partial z}(x, z, \omega) \right] \exp(ikx) dx \\ &= \mu \left[ -ikw(k, z, \omega) + \frac{\partial u}{\partial z}(k, z, \omega) \right] \\ &= \mu \{ 2k\gamma [\dot{p}(k, \omega) \exp(i\gamma z) - \dot{p}(k, \omega) \exp(-i\gamma z)] - l [\dot{s}(k, \omega) \exp(ivz) + \dot{s}(k, \omega) \exp(-ivz)] \} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zz}(k, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{zz}(x, z, \omega) \exp(ikx) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, \omega) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}(x, z, \omega) \right] \exp(ikx) dx \\ &= -i\lambda ku(k, z, \omega) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}(k, z, \omega) \\ &= \mu \{ l [\dot{p}(k, \omega) \exp(i\gamma z) + \dot{p}(k, \omega) \exp(-i\gamma z)] + 2kv [\dot{s}(k, \omega) \exp(ivz) - \dot{s}(k, \omega) \exp(-ivz)] \} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

<sup>3</sup>Debe recordarse que  $\dot{p}(\omega)$ ,  $\dot{p}(\omega)$ ,  $\dot{s}(\omega)$  y  $\dot{s}(\omega)$  son las amplitudes de las ondas  $P$  y  $S$  ascendentes y descendentes, mientras que  $\dot{p}(\omega)$ ,  $\dot{p}(\omega)$ ,  $\dot{s}(\omega)$  y  $\dot{s}(\omega)$  hacen referencia a las amplitudes de los términos de los potenciales  $\phi$  y  $\psi$  respectivamente, la relación entre estas se presenta en E.1.5

Donde se ha usado:

$$\begin{aligned}
 -\lambda \frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2\mu\gamma^2 &= \mu \left( -\frac{\lambda}{\mu} \frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2\gamma^2 \right) = -\mu \left( \frac{\lambda + 2\mu - 2\mu}{\mu} \frac{\omega^2}{\beta^2} + 2 \frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2k^2 \right) = -\mu \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2 \right) \frac{\omega^2}{\alpha^2} + 2 \frac{\omega^2}{\alpha^2} - 2k^2 \right] \\
 &= -\mu \left( \frac{\omega^2}{\beta^2} - 2k^2 \right) = -\mu (v^2 + k^2 - 2k^2) \\
 &= \mu (k^2 - v^2) \\
 &= \mu l \quad \therefore \quad l = k^2 - v^2
 \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

### 2.3.2. Coordenadas polares

Debido a que en ésta tesis no se resuelve ningún problema de deformación plana para el cual sea conveniente usar coordenadas polares, no se presentan dichas las ecuaciones de Navier en dicho sistema coordenado. En el único ámbito en que se representa una solución antiplana en coordenadas polares es en la expresión de la función de Green para un espacio completo homogéneo, la cual se presenta en D.2.2, pero debido a no ser un resultado personal, solo se cita la fuente.

## **Parte II**

# **MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA (IBEM)**



## Método indirecto de elementos de frontera para problemas antiplanos ( $SH$ )

### 3.1. Problema de valor en la frontera e inicial a resolver.

El método indirecto de elementos de frontera (IBEM por sus siglas en inglés) es un método numérico empleado para resolver problemas de valor en la frontera e iniciales (PVFI). En nuestro caso lo emplearemos directamente en el dominio de la frontera, es decir, a nuestro PVFI le realizaremos la transformada directa de Fourier respecto al tiempo obteniendo un problema de valor en la frontera (PVF) del siguiente tipo (ver figura 3.1)<sup>1</sup>:

$$\mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\mathbf{x}, \omega) \right] + f(\mathbf{x}, \omega) + \rho \omega^2 v(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (3.1.1a)$$

$$v(\mathbf{x}, \omega) = \hat{v}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (3.1.1b)$$

$$\mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}, \omega) n_x(\mathbf{x}) + \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega) n_z(\mathbf{x}) \right] = t_n(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (3.1.1c)$$

Donde:

$\hat{t}_n(\mathbf{x}, t)$ : Tracción prescrita en  $\mathbf{x}$  sobre una superficie con normal  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{x} \in \Gamma_t$ ).

$v(\mathbf{x}, 0)$ : Desplazamiento inicial.

$\hat{v}(\mathbf{x}, t)$ : Desplazamiento prescrito en  $\Gamma_v$ .

$\frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$ : Velocidad inicial.

$\Omega$ : Dominio del problema.

$\Gamma$ : Frontera del problema.

$\Gamma_v$ : Parte de la frontera donde se especifica el desplazamiento.

$\Gamma_t$ : Parte de la frontera donde se especifican las tracciones.

<sup>1</sup>Ver sección (2.2.2) para detalles sobre la ecuación diferencial.

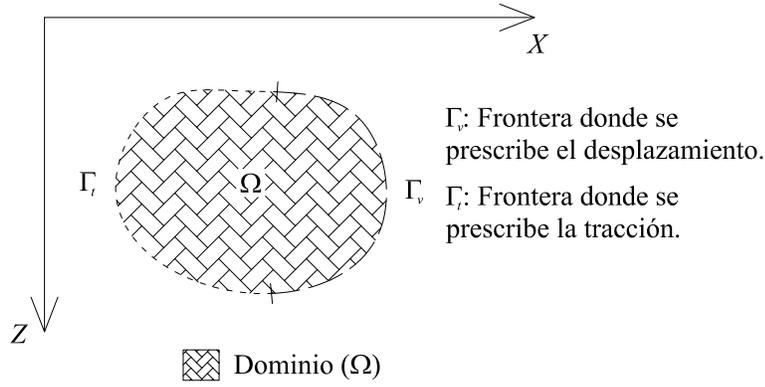


Figura 3.1: Dominio y fronteras del problema a resolver.

### 3.2. Función de Green.

Como se mencionó en la sección D.1.3 la función de Green antiplana para un semiespacio homogéneo en el dominio espacio-frecuencia tiene como ecuación diferencial gobernante y solución de la misma respectivamente:

$$\mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\mathbf{x}, \omega) \right] + \rho \omega^2 v(\mathbf{x}, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (3.2.1)$$

$$G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = -\frac{i}{4\mu} H_0^{(2)} \left( \frac{\omega}{\beta} r \right) \quad (3.2.2)$$

Donde:

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \eta)^2}$ : Distancia entre la fuente y el punto donde se mide el desplazamiento.

$\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ : Delta de Dirac.

### 3.3. Identidad de Somigliana en el dominio espacio-frecuencia.

El primer paso para obtener la identidad de Somigliana del PVF (3.1.1) es obtener la forma débil<sup>2</sup> del mismo. Como primer paso se multiplica la ecuación diferencial gobernante por la función de Green del problema en estudio (función de Green para un espacio completo) y dicho resultado se integra en todo el dominio del problema. De realizar lo anterior se obtiene:

$$\iint_{\Omega} \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\mathbf{x}, \omega) \right] G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) + \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) + \iint_{\Omega} \rho \omega^2 v(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.3.1)$$

Ahora, de integración por partes se obtiene:

$$\iint_{\Omega} \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\mathbf{x}, \omega) \right] G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) = \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) - \mu \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial z} \right] d\Omega(\mathbf{x}) \quad (3.3.2)$$

<sup>2</sup>La forma débil de un PVF es la formulación integral básica de las ecuaciones diferenciales gobernantes, la cual entre otros muchos usos es empleada en la formulación del método de elementos finitos, una muy clara explicación de esto se presenta en [Reddy, 2006].

Donde:

$t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}) = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}, \omega) n_x(\mathbf{x}) + \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega) n_z(\mathbf{x}) \right]$ : Tracción en el punto  $\mathbf{x}$  en una sección con vector normal exterior  $\mathbf{n}$ .

Reemplazando (3.3.2) en (3.3.1) se obtiene:

$$-\mu \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega)}{\partial z} \right] d\Omega(\mathbf{x}) + \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) + \rho \omega^2 \iint_{\Omega} v(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.3.3)$$

Aplicando el teorema de Green a cada uno de los términos de la primera integral del lado izquierdo de (3.3.3) se obtiene:

$$\iint_{\Omega} \left\{ \mu \left[ \frac{\partial^2 G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega)}{\partial z^2} \right] + \rho \omega^2 G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) \right\} v(\mathbf{x}, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) + \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega) v(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.3.4)$$

Donde:

$H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}) = \mu \left[ \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega)}{\partial x} n_x(\mathbf{x}) + \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega)}{\partial z} n_z(\mathbf{x}) \right]$ : Tracción en  $\mathbf{x}$  en una cara con normal exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{x}$  debido a una carga puntual ubicada en  $\xi$ .

Reemplazando la ecuación (3.2.1) en (3.3.4) da como resultado:

$$-\iint_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \xi) v(\mathbf{x}, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) + \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.3.5)$$

La ecuación (3.3.5) es la base del método directo de elementos de frontera, del cual un gran compendio es presentado en [Brebbia and Dominguez, 1992]. Dependiendo de la ubicación de  $\xi$  la ecuación (3.3.5) puede tomar las siguientes formas:

$$\iint_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega) v(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \xi \in \Omega^* \quad (3.3.6a)$$

$$-\frac{1}{2} v(\xi, \omega) + \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega) v(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \xi \in \Gamma \quad (3.3.6b)$$

$$-v(\xi, \omega) + \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega) v(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}) G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \xi \in \Omega \quad (3.3.6c)$$

### 3.4. Formulación del método indirecto de elementos de frontera

Ahora se supondrá que  $v^*(\mathbf{x}, \omega)$  es el campo de desplazamientos en  $\Omega^*$  (ver figura 3.2(a)) causado por los desplazamientos en  $\Gamma$  del problema a resolver, es decir  $v^*(\mathbf{x}, \omega)$  es la solución del siguiente PVF:

$$\mu \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2}(\mathbf{x}, \omega) \right] + \rho \omega^2 v^*(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^* \quad (3.4.1a)$$

$$v^*(\mathbf{x}, \omega) = v(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \Gamma^* = \Gamma \quad (3.4.1b)$$

Donde:

$\mathbf{n}^*(\mathbf{x}) = n_x^*(\mathbf{x}) \mathbf{e}_x + n_z^*(\mathbf{x}) \mathbf{e}_z = -\mathbf{n}(\mathbf{x})$ : Normal exterior de  $\Gamma^*$  (exterior a  $\Omega^*$ ) (ver figuras 3.2).

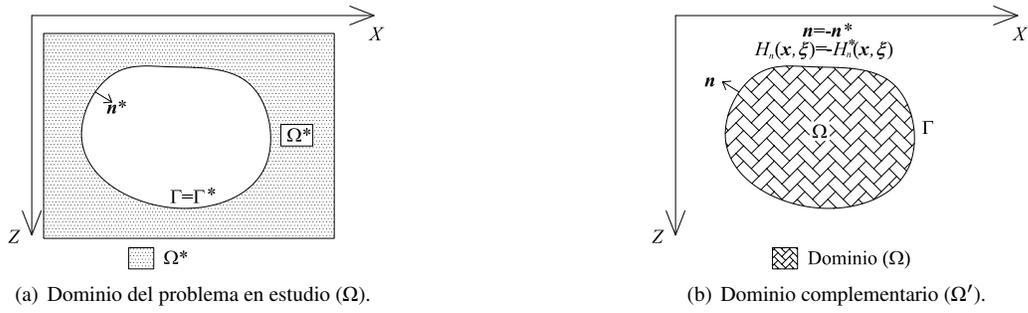


Figura 3.2: Problemas a resolver para la formulación del método indirecto de elementos de frontera.

Aplicando el teorema de Somigliana al problema de valor en la frontera (3.4.1) se obtiene:

$$\iint_{\Omega^*} \left\{ \mu \left[ \frac{\partial^2 G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial z^2} \right] + \rho \omega^2 G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \right\} v^*(\mathbf{x}, \omega) d\Omega^*(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} H_n^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega, \mathbf{n}^*) v^*(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}^*) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.4.2)$$

Reemplazando la ecuación (3.1.1a) en (3.4.2) se obtiene:

$$\iint_{\Omega^*} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) v^*(\mathbf{x}, \omega) d\Omega^*(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} H_n^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega, \mathbf{n}^*) v^*(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}^*) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.4.3)$$

Donde:

$$t_n^*(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}^*) = \mu \left[ \frac{\partial v^*}{\partial x}(\mathbf{x}, \omega) n_x^*(\mathbf{x}) + \frac{\partial v^*}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega) n_z^*(\mathbf{x}) \right] = -t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}^*): \text{Esfuerzo en dirección de } \mathbf{n}^* \text{ para el medio } \Omega^*.$$

De nuevo, la ecuación (3.4.3) tiene los siguientes valores en función de la ubicación de  $\boldsymbol{\xi}$ :

$$-v(\boldsymbol{\xi}, \omega) - \oint_{\Gamma} H_n^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega, \mathbf{n}^*) v(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n^*(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}^*) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega^* \quad (3.4.4a)$$

$$-\frac{1}{2}v(\boldsymbol{\xi}, \omega) - \oint_{\Gamma} H_n^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega, \mathbf{n}^*) v(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n^*(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}^*) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma^* = \Gamma \quad (3.4.4b)$$

$$-\oint_{\Gamma} H_n^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega, \mathbf{n}^*) v(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} t_n^*(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}^*) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \boldsymbol{\xi} \notin (\Omega^* \cup \Gamma^*) \text{ o } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \quad (3.4.4c)$$

Sumando las ecuaciones (3.3.6) y (3.4.4) se obtiene:

$$v(\boldsymbol{\xi}, \omega) = \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} [t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}) + t_n^*(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}^*)] G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (3.4.5)$$

Debido a la simetría de la función de Green (entre  $\mathbf{x}$  y  $\boldsymbol{\xi}$ ), la ecuación (3.4.5) se puede reescribir como:

$$v(\mathbf{x}, \omega) = \iint_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Omega(\boldsymbol{\xi}) + \oint_{\Gamma} \phi(\boldsymbol{\xi}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.4.6)$$

Donde:

$$\phi(\boldsymbol{\xi}, \omega) = t_n(\boldsymbol{\xi}, \omega, \mathbf{n}) + t_n^*(\boldsymbol{\xi}, \omega, \mathbf{n}^*).$$

Ahora, para el caso particular en el que no existen fuerzas de cuerpo, el desplazamiento en un punto  $\mathbf{x}$  puede calcularse como:

$$v(\mathbf{x}, \omega) = \oint_{\Gamma} \phi(\boldsymbol{\xi}, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.4.7)$$

Para obtener los esfuerzos en un punto  $\mathbf{x}$  sobre una cara con vector normal unitario exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , se aplican las leyes de Hooke y Cauchy, obteniéndose:

$$t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}) = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}, \omega) n_x(\mathbf{x}) + \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega) n_z(\mathbf{x}) \right] \quad (3.4.8)$$

$$t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma} \phi(\xi, \omega) H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.4.9a)$$

$$t_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}) = \oint_{\Gamma} \phi(\xi, \omega) H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.4.9b)$$

Son las ecuaciones (3.4.7) y (3.4.9) las que conforman la base de la formulación del IBEM.

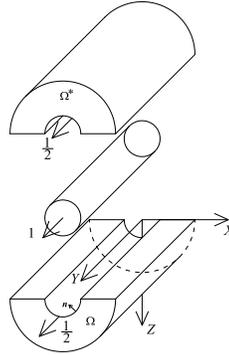


Figura 3.3: Manejo de la singularidad en el campo de esfuerzos en las vecindades de una fuerza puntual.

### 3.5. Solución esquemática de un problema usando el método indirecto de elementos de frontera.

A continuación se empleará un problema tipo para explicar de forma esquemática la implementación del método indirecto de elementos de frontera para el caso  $SH$ .

En cada elemento se supondrá un valor de  $\phi$  constante, con lo cual el desplazamiento en cualquier punto ( $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$ ) se expresa como:

$$v(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \quad (3.5.1)$$

Donde:

$$\phi_i = \phi(\mathbf{x}_i).$$

$\Gamma_i$ : Elemento  $i$ .

Y las tracciones se expresan como:

$$t_n(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}, \omega) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \oint_{\Gamma_i} H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad \text{Aproximándose desde el interior del medio} \quad (3.5.2a)$$

$$t_n(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \oint_{\Gamma_i} H_n(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.5.2b)$$

Para obtener un sistema de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas se evaluará la ecuación (3.5.1) en los  $N_v$  puntos centrales de cada elemento ( $\mathbf{x}_i$   $i = 1, 2, \dots, N_v$ ) donde la condición de frontera de desplazamientos ha sido prescrita y se evaluará la



$\Gamma_{E2} = \Gamma_{R2}$ : Frontera común entre los medios  $E$  y  $R$ . El campo difractado en el medio  $E$  se calcula a partir de la ecuación (3.4.7) como:

$$v^{(d)}(\mathbf{x}, \omega) = \oint_{\Gamma_E} \phi^E(\xi, \omega) G^E(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma_E(\xi) \quad (3.6.2)$$

Donde:

$G^E(\mathbf{x}, \xi, \omega)$ : Función de Green para un espacio completo con iguales propiedades mecánicas a las del medio  $E$ .

Por su parte el campo de desplazamiento en el medio  $R$  se compone solo de ondas refractadas y se expresa a partir de la ecuación (3.4.7) como:

$$v^R(\mathbf{x}, \omega) = v^{(r)}(\mathbf{x}, \omega) = \oint_{\Gamma_R} \phi^R(\xi, \omega) G^R(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma_R(\xi) \quad (3.6.3)$$

Donde:

$v^R(\mathbf{x}, \omega)$ : Campo de desplazamiento en el medio  $R$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_R \cup \Gamma_R$ .

$\Gamma_R = \Gamma_{R1} \cup \Gamma_{R2}$ : Frontera del medio  $R$ .

$G^R(\mathbf{x}, \xi, \omega)$ : Función de Green para un espacio completo con iguales propiedades mecánicas a las del medio  $R$ .

En el actual problema también se debe cumplir que las tracciones en  $\Gamma_{E1}$  deben ser nulas, debido a que el campo libre ya cumple estas condiciones solo resta que el campo difractado las cumpla, es decir:

$$t_n^{(d)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_E) = \frac{1}{2} \phi^E(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_{E1}} \phi^E(\xi, \omega) H_n^E(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_E) d\Gamma_{E1}(\xi) = 0 \quad (3.6.4)$$

Donde:

$t_n^{(d)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_E)$ : Tracciones en el punto  $\mathbf{x}$  en una cara con vector normal unitario exterior  $\mathbf{n}_E$  debidas a una fuerza puntual ubicada en  $\xi$ .

$\mathbf{n}_E(\mathbf{x})$ : Normal unitaria exterior a  $\Gamma_E$ .

$H_n^E(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_E)$ : Tracción en el punto  $\mathbf{x}$  en una cara con normal unitaria exterior  $\mathbf{n}_E$  de un semiespacio con propiedades mecánicas iguales a las del medio  $E$  debida a una carga unitaria aplicada en el punto  $\xi$ .

Las tracciones debidas al campo refractado en la región  $R$  deben ser nulas en  $\Gamma_{R1}$ , aplicando la formula (3.4.9a) lo anterior se expresa como:

$$t_n^{(r)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_R) = \frac{1}{2} \phi^R(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_{R1}} \phi^R(\xi, \omega) H_n^R(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_R) d\Gamma_{R1}(\xi) = 0 \quad (3.6.5)$$

Donde:

$t_n^{(r)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_R)$ : Tracciones en el punto  $\mathbf{x}$  en una cara con vector unitario normal exterior  $\mathbf{n}_R$  debidas a una fuerza puntual ubicada en  $\xi$ .

$\mathbf{n}_R(\mathbf{x})$ : Normal unitaria exterior a  $\Gamma_R$ .

$H_n^R(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_R)$ : Tracción en el punto  $\mathbf{x}$  en una cara con normal  $\mathbf{n}_R$  de un semiespacio con propiedades mecánicas iguales a las del medio  $R$  debida a una carga unitaria aplicada en el punto  $\xi$ .

Si usamos el hecho que  $H_n^R(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_R) = -H_n^R(\mathbf{x}, \xi, \omega, -\mathbf{n}_R)$ , es decir si usamos la normal interior en lugar de la exterior, la ecuación (3.6.5) se reescribe como:

$$-\frac{1}{2} \phi^R(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_{R1}} \phi^R(\xi, \omega) H_n^R(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_R) d\Gamma_{R1}(\xi) = 0 \quad (3.6.6)$$

Debido a la continuidad de desplazamientos entre los dos medios en la región  $\Gamma_{E2} = \Gamma_{R2}$  se obtiene:

$$v^{(0)}(\mathbf{x}, \omega) + v^{(d)}(\mathbf{x}, \omega) = v^{(r)}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{E2} = \Gamma_{R2} \quad (3.6.7)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_E} \phi^E(\xi, \omega) G^E(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma_E(\xi) = \oint_{\Gamma_R} \phi^R(\xi, \omega) G^R(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma_E \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{E2} = \Gamma_{R2} \quad (3.6.8)$$

De la continuidad de tracciones en la frontera común entre los medios  $E$  y  $R$  se obtiene:

$$t_n^{(0)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_E) + t_n^{(d)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_E) = -t_n^{(r)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_R) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{E2} = \Gamma_{R2} \quad (3.6.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\phi^E(\mathbf{x}) + \phi^R(\mathbf{x})] + \oint_{\Gamma_{E2}} \phi^E(\xi, \omega) H_n^E(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_E) d\Gamma_{E2}(\xi) + \\ \oint_{\Gamma_{R2}} \phi^R(\xi, \omega) H_n^R(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_R) d\Gamma_{E2}(\xi) = -t_n^{(i)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_E) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{E2} = \Gamma_{R2} \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Es importante resaltar que ha sido esta implementación del IBEM para valles aluviales abiertos la empleada para el desarrollo del método de los coeficientes de emisión en el caso antiplano (sección 6).

### 3.7. Solución de un problema de valor en la frontera tipo valle aluvial bajo la acción de fuerzas puntuales internas (cálculo de la función de Green).

A continuación se presentará la metodología para obtener la respuesta de un valle aluvial bajo la acción de una fuente puntual en el depósito aluvial (ver figura 3.6).

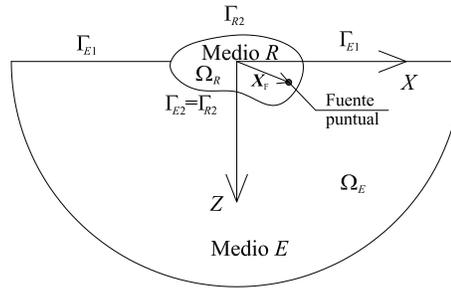


Figura 3.6: Valle aluvial con fuente interna en el medio  $R$ .

Para esta tipología de ejercicios el campo de desplazamientos en el medio  $E$  es debido solo a la refracción de las ondas producidas por la fuente, por tal motivo el campo de desplazamientos se expresa como:

$$\begin{aligned} v^E(\mathbf{x}, \omega) &= v^{(r)}(\mathbf{x}, \omega) \\ &= \oint_{\Gamma_E} \phi_E(\xi, \omega) G_E(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

Donde:

$v^E(\mathbf{x}, \omega)$ : Campo de desplazamiento del medio  $E$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_E \cup \Gamma_E$ .

$v^{(r)}(\mathbf{x}, \omega)$ : Campo de desplazamiento refractado en el medio  $E$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_E \cup \Gamma_E$ .

$G_E(\mathbf{x}, \xi, \omega)$ : Función de Green para un fullspace con iguales propiedades mecánicas a las del medio  $E$ .

El campo de desplazamientos en el medio  $R$  esta formado por el campo generado por la fuente puntual y el campo difractado en  $\Gamma_R$  y se expresa como:

$$\begin{aligned} v^R(\mathbf{x}, \omega) &= v^F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_F, \omega) + v^{(d)}(\mathbf{x}, \omega) \\ &= \frac{F(\omega)}{i4\mu_R} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta_R}\right) + \oint_{\Gamma_R} \phi(\xi, \omega) G_R(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Donde:

$H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{\beta_R} r\right)$ : Función de Hankel de segunda especie y orden 0.

$r = \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_F|} = \sqrt{(x - x_F)^2 + (z - z_F)^2}$ : Distancia entre el punto  $\mathbf{x}$  y la ubicación de la fuente  $\mathbf{x}_F$ .

$v^{(d)}(\mathbf{x}, \omega)$ : Campo difractado en el medio  $R$ .

$v^F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_R, \omega)$ : Campo de desplazamiento generado en un espacio completo con propiedades mecánicas iguales a las del medio  $R$  debido a una carga puntual ubicada en  $\mathbf{x}_F$  y cuya variación temporal esta representada por su espectro de Fourier  $F(\omega)$ .

$\mathbf{x}_F = x_F \mathbf{e}_x + z_F \mathbf{e}_z$ : Vector de posición de la fuente puntual aplicada en el medio  $R$ .

$\beta_R$ : Velocidad de las ondas de cortante del medio  $R$ .

$\mu_R$ : Módulo de cortante del medio  $R$ .

De la condición de superficie libre en  $\Gamma_{E1}$  se obtiene:

$$t_n^{(r)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_E) = \frac{1}{2} \phi^E(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_{E1}} \phi^E(\mathbf{x}, \omega) H_n^E(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_E) d\Gamma_{E1}(\xi) = 0 \quad (3.7.3)$$

Donde:

$t_n^{(r)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_E)$ :

$\mathbf{n}_E(\mathbf{x}, \omega)$ ;

$H_n^E(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_E)$ :

De la condición de frontera libre en  $\Gamma_{R1}$  se obtiene:

$$t_n^{(d)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_R) = \frac{1}{2} \phi^R(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_R} \phi^R(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_R) H_n^R(\mathbf{x}, \xi, \omega, \mathbf{n}_R) d\Gamma_R(\xi) = 0 \quad (3.7.4)$$

Debido a la continuidad de desplazamientos entre los dos medios en la región  $\Gamma_{E2} = \Gamma_{R2}$  se obtiene:

$$v^{(r)}(\mathbf{x}, \omega) = v^F(\mathbf{x}, \omega) + v^{(d)}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{E2} = \Gamma_{R2} \quad (3.7.5)$$

$$\oint_{\Gamma_E} \phi(\xi, \omega) G^E(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma_E(\xi) = \frac{F(\omega)}{i4\mu_R} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{\beta_R}\right) + \oint_{\Gamma_R} \phi^R(\xi, \omega) G^R(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma_R(\xi) \quad (3.7.6)$$

De la continuidad de tracciones en la frontera común entre los medios  $E$  y  $R$  se obtiene:

$$t_n^{(r)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_E) = -[t_n^F(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_R) + t_n^{(d)}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{n}_R)] \quad (3.7.7)$$

En la figura (3.7) se realiza la validación de la implementación numérica de la presente formulación para el caso límite que ambos medios del valle aluvial tienen las mismas propiedades mecánicas, es decir, se trata de un semiespacio. En particular, las propiedades del modelo son:  $\beta = 2500\text{m/s}$ ,  $\rho = 1800\text{kg/m}^3$ , la ubicación de la fuente es  $(1000\text{m}, 500\text{m})$  y su variación temporal corresponden a un pulso de Ricker con parámetros  $t_s = 4.0\text{s}$  y  $t_p = 4.0\text{s}$ .

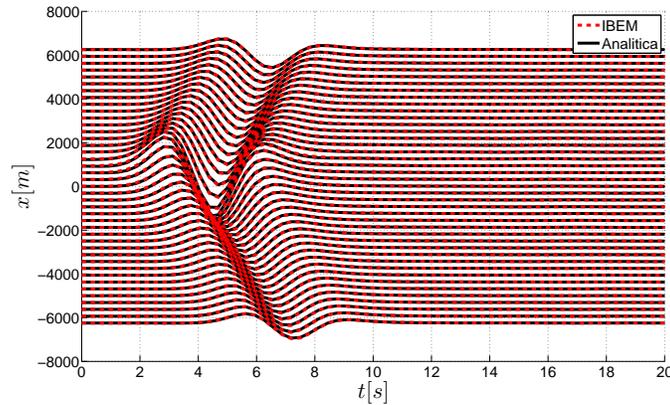


Figura 3.7: Comparación de los sintéticos en superficie entre la solución analítica y la obtenida con el IBEM para un medio homogéneo sometido a una fuente puntual en su interior.



# Método indirecto de elementos de frontera para deformación plana ( $P - S V$ )

En esta sección se presentará la formulación por I.B.E.M. para problemas de deformación plana tomando como marco de referencia al artículo [Sánchez-Sesma and Campillo, 1991]. Por razones de espacio la presentación será mucho mas resumida que para el caso antiplano (ver capítulo 3) presentado anteriormente.

## 4.1. Formulación

Para caso de deformación plana la formulación del IBEM de capa simple lleva a que el campo de desplazamientos y tracciones sean calculados empleando respectivamente las siguientes ecuaciones<sup>1</sup>:

$$u_\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \oint_{\Gamma} \phi_\beta(\boldsymbol{\xi}, \omega) G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma \quad (4.1.1)$$

$$t_\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \begin{cases} \oint_{\Gamma} \phi_\beta(\boldsymbol{\xi}, \omega) T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2} \phi_\alpha(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma} \phi_\beta(\boldsymbol{\xi}, \omega) T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma & \mathbf{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Donde:

$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$ : Función de Green de desplazamientos para un espacio completo con las propiedades mecánicas del medio en estudio o un subdominio de este (ver sección D.2.2).

$T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$ : Función de Green de tracciones para un espacio completo con las propiedades mecánicas del medio en estudio o un subdominio de este (ver sección D.2.2).

$\phi_\beta$ : Densidades de fuerza (variable principal e incógnita del IBEM).

## 4.2. Solución de problemas de irregularidades topográficas

En la figura 4.1 se presentan problemas tipo que corresponden a la repuesta de irregularidades topográficas en medios homogéneos ante la incidencia de ondas planas  $P$  o  $S V$ .

<sup>1</sup>Los índices en letras griegas indican que solo existen dos direcciones (1 y 3).

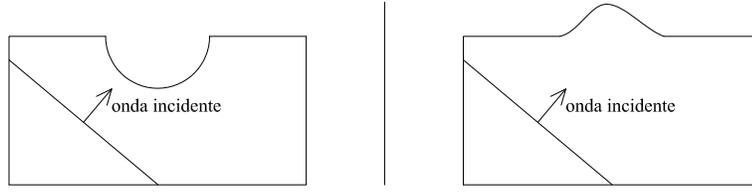


Figura 4.1: Problemas típicos bidimensionales de irregularidades topográficas en un medio homogéneo.

A partir de la formulación por I.B.E.M. los campos de desplazamientos y tracciones en el medio en estudio se calculan respectivamente como:

$$u_{\alpha}(\mathbf{x}, \omega) = u_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega) + u_{\alpha}^d(\mathbf{x}, \omega) \quad (4.2.1)$$

$$= u_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma} \phi_{\beta}(\xi, \omega) G_{ij}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \quad (4.2.2)$$

$$t_{\alpha}(\mathbf{x}, \omega) = t_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega) + t_{\alpha}^d(\mathbf{x}, \omega) \quad (4.2.3)$$

$$= t_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega) + \frac{1}{2} \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} \phi_{\beta}^0(\xi, \omega) T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \quad (4.2.4)$$

Donde:

$u_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega)$ : Campo de desplazamientos de campo libre (respuesta de un semiespacio con las propiedades mecánicas del medio en estudio ante la incidencia de la onda plana empleada como excitación).

$t_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega)$ : Campo de tracciones de campo libre.

Debido a que en los problemas de topografías el medio es homogéneo y las únicas condiciones de frontera corresponden a la tracción libre en la superficie, a partir de (4.2.4) se tiene que las ecuaciones que sirven de base para la formulación del IBEM son de la forma:

$$\frac{1}{2} \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma} \phi_{\beta}(\xi, \omega) T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) = -t_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega) \quad (4.2.5)$$

Por medio de una discretización de la frontera en elementos o subdominio en los cuales se asume que la densidad de fuerza es constante y de la evaluación de las condiciones de frontera libre en los centros de dichos elementos, es posible obtener un sistema lineal de ecuaciones, a partir del cual se calcula el valor de las densidades de fuerza, luego empleando (4.2.2) y (4.2.4) es posible obtener el campo de desplazamientos y tracciones en la frontera y dominio del modelo estudiado.

### 4.3. Solución de problemas de inclusiones (valles aluviales)

El IBEM también puede ser empleado en la solución de problemas de inclusión (o valles aluviales) formados por un semiespacio (medio  $E$ ) y una inclusión (medio  $R$ ) ante la incidencia de ondas planas (ver figura 4.2).

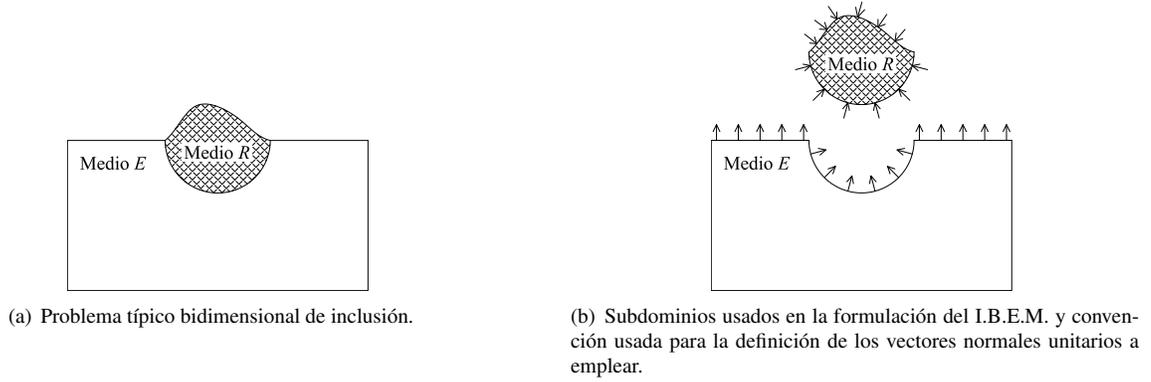


Figura 4.2: Dominio y frontera de los problemas de inclusiones.

Basados en lo presentado anteriormente, el campo de desplazamientos y tracciones en el medio  $E$  son calculados respectivamente como:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^E(\mathbf{x}, \omega) &= u_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega) + u_{\alpha}^d(\mathbf{x}, \omega) \\ &= u_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_E} \phi_{\beta}^E(\xi) G_{\alpha\beta}^E(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma(\xi) \quad \mathbf{x} \in \Omega_E \cup \Gamma_E \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} t_{\alpha}^E(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \omega) &= t_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \omega) + t_{\alpha}^d(\mathbf{x}, \xi, \mathbf{n}) \\ &= t_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \omega) + \frac{1}{2} \phi_{\alpha}^E(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_E} \phi_{\beta}^E(\xi, \omega) T_{\alpha\beta}^E(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma(\xi) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Mientras que para el medio  $R$  como:

$$u_{\alpha}^R(\mathbf{x}, \omega) = \oint_{\Gamma_R} \phi_{\beta}^R(\xi) G_{\alpha\beta}^R(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma(\xi) \quad \mathbf{x} \in \Omega_R \cup \Gamma_R \quad (4.3.3)$$

$$t_{\alpha}^R(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \omega) = \frac{1}{2} \phi_{\alpha}^R(\mathbf{x}, \omega) - \oint_{\Gamma_R} \phi_{\beta}^R(\xi, \omega) T_{\alpha\beta}^R(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) \quad (4.3.4)$$

Ahora, empleando un proceso de discretización similar al explicado en la sección anterior es posible a partir de evaluar las condiciones de frontera libre, continuidad de desplazamiento y tracciones plantear un sistema de ecuaciones que tiene como incógnitas las densidades de fuerzas en las fronteras de ambos medios.

Para el caso de las condiciones de frontera libre en el medio  $E$ , las ecuaciones cumplir son:

$$\frac{1}{2} \phi_{\alpha}^E(\mathbf{x}, \omega) + \oint_{\Gamma_E} \phi_{\beta}^E(\xi) T_{\alpha\beta}^E(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) = 0 \quad (4.3.5)$$

Mientras que las condiciones de continuidad de tracciones y desplazamientos entre los medios  $E$  y  $R$  se calculan respectivamente como:

$$\frac{1}{2} \phi_{\alpha}^E(\mathbf{x}) + \oint_{\Gamma_E} \phi_{\beta}^E(\xi) T_{\alpha\beta}^E(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\Gamma(\xi) + \frac{1}{2} \phi_{\alpha}^R(\mathbf{x}, \omega) - \oint_{\Gamma_R} \phi_{\beta}^R(\xi) T_{\alpha\beta}^R(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma(\xi) = -t_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (4.3.6)$$

$$\oint_{\Gamma_E} \phi_{\beta}^E(\xi) G_{\alpha\beta}^E(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma(\xi) - \oint_{\Gamma_R} \phi_{\beta}^R(\xi) G_{\alpha\beta}^R(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma(\xi) = -u_{\alpha}^0(\mathbf{x}, \omega) \quad (4.3.7)$$

Y las condiciones de tracciones nulas en la superficie el medio  $R$  se expresan como:

$$\frac{1}{2} \phi_{\alpha}^R(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma_R} \phi_{\beta}^R(\xi) T_{\alpha\beta}^R(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma(\xi) = 0 \quad (4.3.8)$$

A partir de evaluar las formas discretas de las ecuaciones (4.3.5) a (4.3.8), es posible obtener los valores de las densidades de fuerza, y por medio del uso de (4.3.1) a (4.3.4) es posible calcular el campo de desplazamientos y tracciones en cualquier punto de los medios  $E$  o  $R$ .

Una forma particular de esta formulación fue la que se empleo en el desarrollo del método de los coeficientes de emisión para el caso de deformación plana (ver capítulo 7).

## Método indirecto de elementos de frontera en tres dimensiones (3D)

En esta sección se presentará brevemente la formulación del IBEM para modelos tridimensionales, para un análisis más detallado se remite al artículo [Sánchez-Sesma and Luzón, 1995]. Por brevedad y por la similitud en la formulación respecto a lo presentado para el caso de deformación plana (capítulo 4) solo se presentarán aquellas cosas que allí no lo hayan sido.

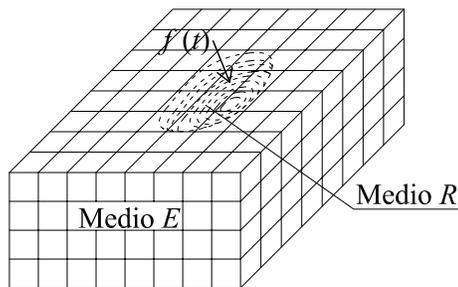
En particular a continuación se presenta una lista de temas cuya formulación puede ser obtenida a partir de lo presentado en el capítulo 4 solo teniendo en cuenta que ahora los subíndices que antes estaban en notación griega (dos componentes) ahora deberán ser reemplazados por notación latina (tres componentes):

1. Formulacion (sección 4.1).
2. Respuesta de topografías ante la incidencia de ondas planas (sección 4.2).
3. Respuesta de valles aluviales ante la incidencia de ondas planas (sección 4.3).

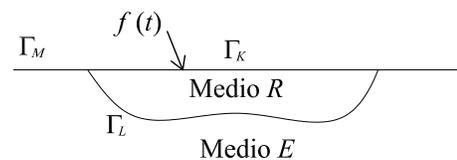
Para lo anterior debe tomarse en cuenta que las funciones de Green de desplazamiento y tracciones a emplear deben ser las presentadas en la sección D.3.1.

### 5.1. Valle aluvial con fuente puntual en la superficie

A continuación se analizará la formulación por el IBEM de la respuesta de un valle aluvial sometido a una fuerza puntual en superficie (ver figura (5.1(a))).



(a) Valle aluvial con fuente puntual en la superficie.



(b) Dominio y fronteras del problema en estudio (vista 2D).

Figura 5.1: Dominio y fronteras del problema en estudio.

En el medio  $E$  el campo de desplazamientos y tracciones son expresados respectivamente como:

$$u_i^E(\mathbf{x}, \omega) = \iint_{\Gamma_E} \phi_j^E(\boldsymbol{\xi}, \omega) G_{ij}^E(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) d\Gamma_E(\boldsymbol{\xi}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_E \cup \Gamma_E \quad (5.1.1)$$

$$t_i^E(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \phi_i^E(\mathbf{x}, \omega) + \iint_{\Gamma_E} \phi_j^E(\boldsymbol{\xi}, \omega) T_{ij}^E(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) d\Gamma_E(\boldsymbol{\xi}) & \mathbf{x} \in \Gamma_E \\ \iint_{\Gamma_E} \phi_j^E(\boldsymbol{\xi}, \omega) T_{ij}^E(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) d\Gamma_E(\boldsymbol{\xi}) & \mathbf{x} \in \Omega_E \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Donde:

$u_i^E(\mathbf{x}, \omega)$ : Componente en dirección  $i$  del campo de desplazamientos en el medio  $E$ .

$t_i^E(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \omega)$ : Componente en dirección  $i$  del campo de tracciones en el medio  $E$ .

$\Omega_E$ : Dominio del medio  $E$ .

$\Gamma_E$ : Frontera del medio  $E$ .

Por su parte el campo de desplazamientos y tracciones en el medio  $R$  se expresan respectivamente como:

$$\begin{aligned} u_i^R(\mathbf{x}) &= u_i^{(F)}(\mathbf{x}) + u_i^{(d)}(\mathbf{x}) \\ &= u_i^{(F)}(\mathbf{x}) + \iint_{\Gamma_R} \phi_j^R(\boldsymbol{\xi}) G_{ij}^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma_R \quad \mathbf{x} \in \Omega_R \cup \Gamma_R \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = \begin{cases} t_i^{(F)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \phi_i^R(\mathbf{x}) + \iint_{\Gamma_R} \phi_j^R(\boldsymbol{\xi}) T_{ij}^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) & \mathbf{x} \in \Gamma_R \\ t_i^{(F)}(\mathbf{x}) + \iint_{\Gamma_R} \phi_j^R(\boldsymbol{\xi}) T_{ij}^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) & \mathbf{x} \in \Omega_R \end{cases}$$

Donde:

$u_i^R(\mathbf{x})$ : Componente en dirección  $i$  del campo de desplazamientos en el medio  $R$ .

$u_i^{(F)}(\mathbf{x})$ : Componente en dirección  $i$  del campo de desplazamientos debido a una fuerza puntual ubicada en la superficie de un semiespacio con las propiedades mecánicas del medio  $R$  (esta corresponde a la solución de Lamb [Lamb, 1904] para una fuerza vertical y a la solución de Chao [Chao, 1960] para una fuente horizontal).

$u_i^{(d)}(\mathbf{x})$ : Componente en dirección  $i$  del campo de desplazamientos difractados en el medio  $R$ .

Para este problema es necesario cumplir las tipologías de condiciones de frontera:

1. Frontera libre en el medio  $E$ .

$$\begin{aligned} t_i^E(\mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{1}{2} \phi_i^E(\mathbf{x}) + \iint_{\Gamma_E} \phi_j^E(\boldsymbol{\xi}) T_{ij}^E(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

2. Continuidad de tracciones en la superficie común entre los medio  $E$  y  $R$ .

$$\begin{aligned} t_i^E(\mathbf{x}) - t_i^R(\mathbf{x}) &= 0 \\ t_i^E(\mathbf{x}) - t_i^{(d)}(\mathbf{x}) &= t_i^{(F)}(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{2} \phi_i^E(\mathbf{x}) + \iint_{\Gamma_E} \phi_j^E(\boldsymbol{\xi}) T_{ij}^E(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2} \phi_i^R(\mathbf{x}) - \iint_{\Gamma_R} \phi_j^R(\boldsymbol{\xi}) T_{ij}^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) &= t_i^{(F)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

3. Continuidad de desplazamientos en la superficie común entre los medio  $E$  y  $R$ .

$$\begin{aligned} u_i^E(\mathbf{x}) &= u_i^R(\mathbf{x}) \\ u_i^E(\mathbf{x}) &= u_i^{(d)}(\mathbf{x}) + u_i^{(F)}(\mathbf{x}) \\ \iint_{\Gamma_E} \phi_j^E(\boldsymbol{\xi}) G_{ij}^E(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) &= \iint_{\Gamma_R} \phi_j^R(\boldsymbol{\xi}) G_{ij}^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + u_i^{(F)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

4. Fuerza puntual aplicada en la superficie del medio  $R$ . Debido a que la única tracción aplicada en  $\Gamma_K$  corresponde a una fuerza puntual, se concluye que el campo de tracciones difractado en el medio  $R$  es nulo en dicha frontera, es decir:

$$t_i^{(d)}(\mathbf{x}) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\phi_i^R(\mathbf{x}) + \iint_{\Gamma_R} \phi_i^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma(\xi) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_K \quad (5.1.7)$$

Esta formulación ha sido implementada para calcular numericamente el cociente espectral H/V en valles aluviales (sección 5.2).

## 5.2. Cálculo del cociente espectral H/V

Basados en la teoría de campos difusos [Kawase et al., 2011], el cociente espectral  $\frac{H}{V}(\mathbf{x}, \omega)$  puede calcularse como:

$$\frac{H}{V}(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{\frac{\text{Im}[G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)] + \text{Im}[G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]}{\text{Im}[G_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]}} \quad (5.2.1)$$

Donde las funciones de Green  $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)$  se calculan en base a lo presentado en la sección 5.1.

En la figura 5.2(c) se presenta el cálculo del cociente espectral  $\frac{H}{V}$  para el modelo 5.2(a) y discretización 5.2(b) obtenidos de emplear presente metodología:

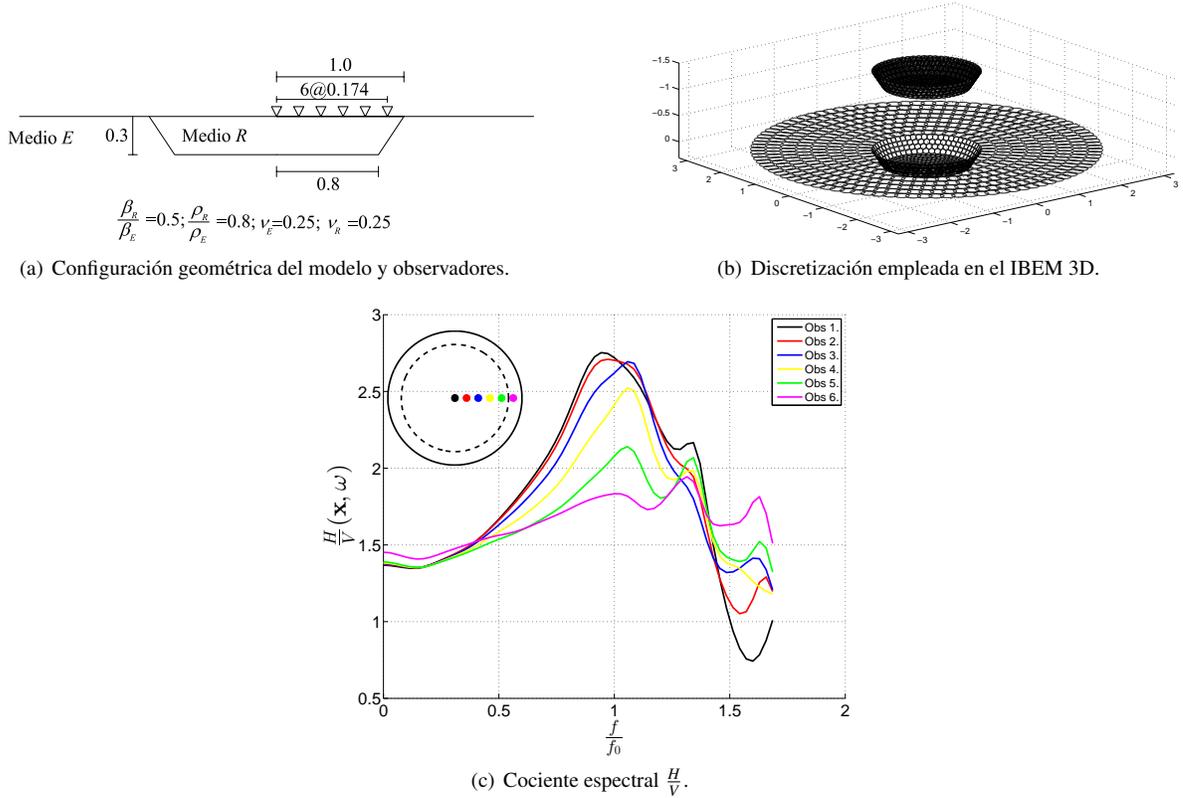
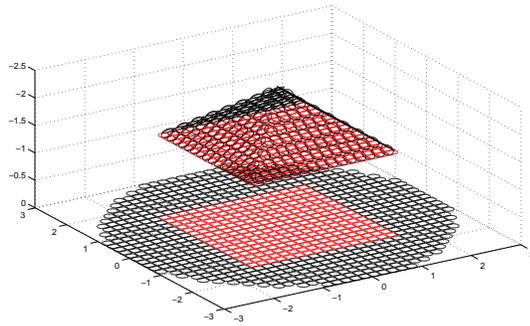


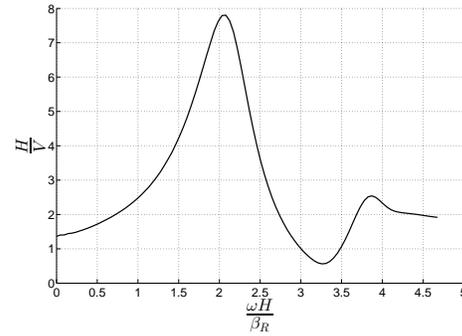
Figura 5.2: Cálculo numérico del cociente espectral  $\frac{H}{V}(\mathbf{x}, \omega)$  en el valle aluvial en estudio empleando el IBEM y la teoría de campos difusos.

Si recordamos que  $f_0$  es la frecuencia fundamental del modelo unidimensional (estrato sobre semiespacio), a partir de la figura 5.2(c) se observa como para los observadores cercanos al centro del valle, la frecuencia fundamental tiende a la del modelo 1D, pero mientras más nos acercamos a la irregularidad lateral se observa como la frecuencia fundamental y la forma del cociente espectral varían debido a la complejidad del campo emitido por dicha irregularidad.

De igual manera en la figura 5.3 se presenta el cociente espectral  $\frac{H}{V}(\mathbf{x}, \omega)$  en la cúspide de la pirámide del sol.



(a) Discretización de la pirámide del sol.



(b) Cociente espectral H/V.

Figura 5.3: Cálculo numérico del cociente espectral  $\frac{H}{V}(\mathbf{x}, \omega)$  en la pirámide del sol empleando el IBEM y la teoría de campos difusos.

## **Parte III**

# **MÉTODO DE LOS COEFICIENTES DE EMISIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES**



Durante muchos años se ha puesto de manifiesto que no solo la variación vertical de las propiedades mecánicas del suelo (modelo 1D estratificado) sino también la horizontal (irregularidad lateral) tienen grandes efectos en el campo de desplazamiento registrado ante un evento sísmico. Las irregularidades verticales causan cambio del contenido frecuencial, la curvatura y polaridad de los rayos del campo incidente, mientras que las irregularidades horizontales (laterales) o valles tienen como principal efecto la generación de ondas superficiales y el consecuente aumento en la duración del movimiento.

Existe gran evidencia de campo sobre los efectos de las irregularidades laterales en la respuesta sísmica de valles aluviales, [Hudson, 1972] informó que durante el sismo de San Fernando en 1971 se obtuvieron movimientos pico muy diferentes entre estaciones cercanas atribuidos a la presencia de irregularidades laterales, por su parte [King and Tucker, 1984] analizaron la respuesta de varios valles en Rusia ante diferentes movimientos sísmicos y concluyeron que esta no podía ser explicada cerca de los bordes de los mismos por modelos unidimensionales, en el sismo de Kobe de 1995 se observaron grandes daños y movimientos fuertes del terreno en franjas estrechas en la cercanía de zonas de irregularidad lateral [Pitarka et al., 1998], en el sismo de Michoacán de 1985 se observaron duraciones muy extensas causadas por la emisión de ondas superficiales en los bordes del valle de la ciudad de México [Campillo et al., 1989], en el valle de Volvi en 1994 fueron evidenciados grandes movimientos causados por la presencia de irregularidades laterales y verticales [Semblat et al., 2005] y en 1995 en la ciudad turca de Dinar ocurrieron graves daños en estructuras concentradas en una región cerca al afloramiento de rocoso que forma el borde de un valle aluvial [Bakır et al., 2002].

Durante los últimos años muchos autores han analizado la respuesta dinámica de valles aluviales bidimensionales con irregularidad lateral. Para el caso antiplano ( $SH$ -Love) [Bard and Bouchon, 1980a] estudiaron la respuesta en el dominio del tiempo y la frecuencia de valles aluviales cerrados ante la incidencia vertical de ondas planas  $SH$ , [Bard and Gariel, 1986] hicieron lo propio para modelos estratificados mientras que [Moczo and Bard, 1993] estudió la respuesta de un valle aluvial abierto incluyendo el análisis del desplazamiento diferencial. De otro lado [Heymsfield, 2000] empleó el método directo de elementos de frontera para estudiar la respuesta de un valle aluvial con geometría similar a la propuesta en el presente trabajo (ver figura 6.1), con la diferencia que para su caso el estrato era viscoelástico, en este se estudió la respuesta en el dominio de la frecuencia en diferentes ubicaciones del valle y se realizó una comparación en función de variables adimensionales con la respuesta del modelo unidimensional. Además de lo anterior [Narayan and Richharia, 2008], [Narayan and Kumar, 2009], [Narayan, 2012] estudiaron respectivamente la respuesta de valles aluviales con irregularidad lateral formados por un estrato sobre un semiespacio, medio estratificado sobre un semiespacio homogéneo y el efecto del ángulo de incidencia empleando el factor de agravamiento.

Por su parte para el caso antiplano ( $P - SV$ -Rayleigh) han sido pocos los estudios llevados a cabo entre los cuales destaca [Bard and Bouchon, 1980b], quienes analizaron la respuesta en el dominio del tiempo de tres valles cerrados ante la incidencia vertical de ondas planas  $P$  y  $SV$ .

Pese a lo anterior, es notable la falta de un análisis paramétrico robusto, basado en el empleo de variables adimensionales, el cual permita obtener resultados que puedan ser extendidos a escenarios diferentes a los modelos empleados en las respectivas investigaciones y en el cual se analice de forma directa la naturaleza de las ondas superficiales emitidas en los modelos bidimensionales con irregularidad lateral (coeficiente de emisión).

Es por esto que en la presente tesis se realiza un análisis paramétrico de los coeficientes de emisión de ondas superficiales de Love y Rayleigh para valles aluviales bidimensionales abiertos con irregularidad lateral, empleando como variables de estudio la geometría de la irregularidad lateral, las propiedades mecánicas y el ángulo de incidencia de las ondas planas para un modelo de un valle aluvial abierto con irregularidad lateral formado por un estrato sobre un semiespacio.

A partir de la solución analítica en forma de suma modal, para un modelo antiplano de un estrato con base y pared vertical rígidas (figura 6.4(a)), en el cual se descompone el campo total como la suma del campo unidimensional “asociado” y el difractado, es posible obtener de forma explícita los coeficientes o funciones de

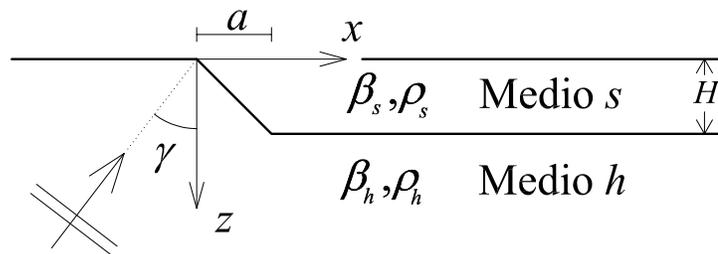
emisión de las ondas de Love para dicho modelo. De extrapolar dichas ideas a los casos de valles aluviales estudiados es posible obtener los coeficientes de emisión para las ondas de Love y Rayleigh producidas por la irregularidad lateral.

Los resultados del presente método pueden ser empleados cualitativamente para medir el efecto de las ondas superficiales emitidas en los bordes de valles aluviales con irregularidades laterales, o como una metodología simplificada para obtener la respuesta dinámica, en la cual el campo total es descompuesto como la suma del campo unidimensional “asociado” (analítico) y de un campo difractado obtenido a partir de los presentes resultados.

## Caso antiplano (SH-Love)

### 6.1. Definición del problema

En esta sección se realiza un análisis paramétrico adimensional de la generación de ondas de Love debido a la incidencia de ondas planas en un modelo formado por un estrato con irregularidad lateral sobre un semiespacio (ver figura 6.1).



Ondas planas  $SH$

Figura 6.1: Modelo con irregularidad lateral para el cual se estudiara la emisión de ondas de Love.

Donde las variables que gobiernan este problema son:

- $a$ : Longitud horizontal de la irregularidad lateral.
- $H$ : Profundidad del estrato.
- $t$ : Tiempo.
- $x$ : Coordenada horizontal.
- $z$ : Coordenada vertical.
- $\beta_h$ : Velocidad de las ondas de corte en el semiespacio.
- $\beta_s$ : Velocidad de las ondas de corte en el estrato.
- $\rho_h$ : Densidad del semiespacio.
- $\rho_s$ : Densidad del estrato.
- $\omega$ : Frecuencia circular.
- $\gamma$ : Ángulo de incidencia de las ondas planas  $SH$ .

#### Variables adimensionales

Para realizar el análisis paramétrico se emplearán las siguientes variables adimensionales:

$\bar{a} = \frac{a}{H}$ : Longitud horizontal adimensional de la irregularidad lateral.

$\bar{x} = \frac{x}{H}$ : Coordenada horizontal adimensional.

$\bar{z} = \frac{z}{H}$ : Coordenada vertical adimensional.

$\bar{\beta} = \frac{\beta_s}{\beta_h}$ : Cociente entre la velocidad de propagación de las ondas de corte en el estrato y semiespacio.

$\bar{\rho} = \frac{\rho_s}{\rho_h}$ : Cociente entre la densidad en el estrato y semiespacio.

$\bar{f} = \frac{f}{f_0} = \frac{4Hf}{\beta_s}$ : Frecuencia adimensional (cociente entre la frecuencia y la frecuencia fundamental del modelo unidimensional formado por un estrato sobre un semiespacio).

## 6.2. Respuesta del modelo unidimensional “asociado”

En las sección D.1.2 se presento la formulación analítica para el modelo antiplano de un estrato sobre un semiespacio el cual se somete a la incidencia una onda plana  $SH$ . Por completes del actual capítulo, a continuación se presentan de nuevo dichas formulas pero ahora en función de las variables adimensionales:

$$\bar{v}_s(\bar{x}, \bar{z}, \bar{f}) = 2\hat{S}_s(\bar{f}) \cos(\bar{v}_s \bar{z}) \exp(-i\bar{k}\bar{x}) \quad (6.2.1a)$$

$$\bar{v}_h(\bar{x}, \bar{z}, \bar{f}) = [\hat{S}_h(\bar{f}) \exp(i\bar{v}\bar{z}) + \hat{S}_h(\bar{f}) \exp(-i\bar{v}\bar{z})] \exp(-i\bar{k}\bar{x}) \quad (6.2.1b)$$

Donde:

$$\bar{k} = kH = \frac{\pi}{2} \bar{f} \sin(\gamma)$$

$$\bar{v}_h = v_h H = \frac{\pi}{2} \bar{f} \cos(\gamma)$$

$$\bar{v}_s = v_s H = \frac{\pi}{2} \sqrt{\bar{f}^2 - \bar{f}^2 \bar{\beta}^2 \sin^2(\gamma)}$$

$$\hat{S}_s(\bar{f}) = \frac{\hat{S}_s(\omega)}{\hat{S}_h(\omega)} = \frac{\exp(i\bar{v}_h)}{\cos(\bar{v}_s) + i\bar{\rho}\bar{\beta}^2 \sin(\bar{v}_s)}$$

$$\hat{S}_h(\bar{f}) = \frac{\hat{S}_h(\omega)}{\hat{S}_h(\omega)} = \frac{\cos(\bar{v}_s) - i\bar{\rho}\bar{\beta}^2 \sin(\bar{v}_s)}{\cos(\bar{v}_s) + i\bar{\rho}\bar{\beta}^2 \sin(\bar{v}_s)} \exp(2i\bar{v}_h)$$

Con base en lo anteriormente presentado y en la sección C.1.1, en la figura 6.2 se presenta la amplitud de la función de transferencia en superficie mientras que en la figura 6.3 las curvas de dispersión adimensionales para el modelo 1D “asociado”:

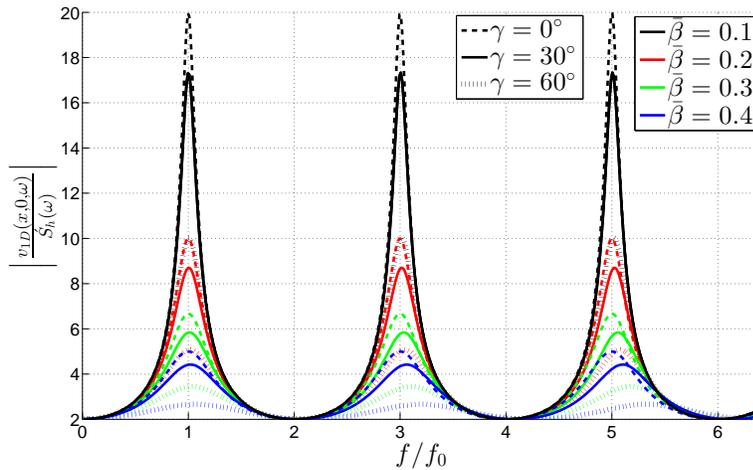


Figura 6.2: Amplitud de la función de transferencia en superficie para un modelo de estrato sobre semiespacio ante la incidencia de una onda plana  $SH$ .

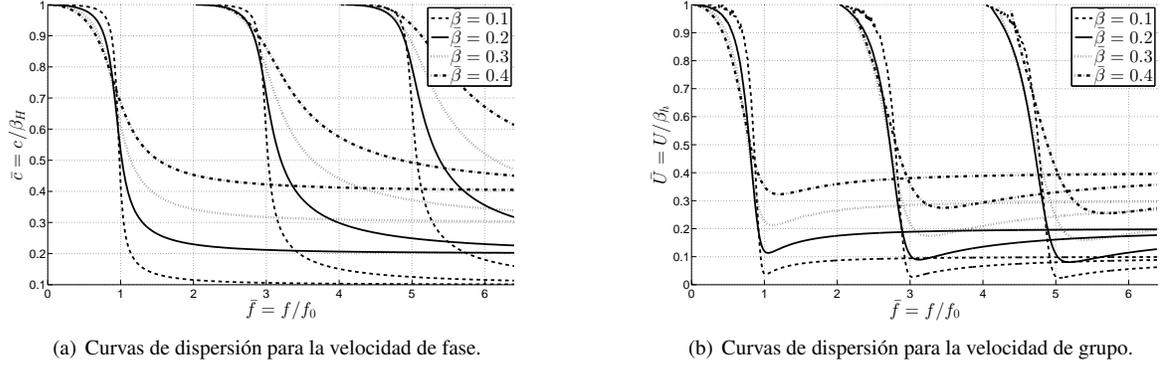


Figura 6.3: Curvas de dispersión adimensional para el modelo antiplano de un estrato sobre un semiespacio.

### 6.3. Solución analítica de referencia

Por medio del método de separación de variables es posible obtener la solución analítica de un estrato homogéneo con base horizontal y pared vertical rígidas y móviles, las cuales se someten a un desplazamiento antiplano prescrito ( $v(\omega)$ ) (ver figura 6.4(a)):

$$\begin{aligned}
 v(x, z, \omega) &= v_{1D}(x, z, \omega) + v_D(x, z, \omega) \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\Omega_n^2}{\Omega_n^2 - \omega^2} \cos\left(\frac{\Omega_n z}{\beta}\right) v_0(\omega) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\omega^2 \exp(-ik_n x)}{\Omega_n^2 - \omega^2} \cos\left(\frac{\Omega_n z}{\beta}\right) v_0(\omega) \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\Omega_n^2 - \omega^2 \exp(-ik_n x)}{\Omega_n^2 - \omega^2} \cos\left(\frac{\Omega_n z}{\beta}\right) v_0(\omega) \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad z < H
 \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Donde:

$v(x, z, t)$ : Campo de desplazamiento.

$v_{1D}(x, z, t)$ : Campo de desplazamiento del modelo unidimensional, el cual corresponde a un estrato infinito cuya base se somete a un desplazamiento antiplano  $v_0(\omega)$ .

$v_D(x, z, t)$ : Campo difractado.

$$\Omega_n = \frac{(2n+1)\beta}{2H} \pi = 2\pi(2n+1)f_0$$

$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - \Omega_n^2}$ : Número de onda horizontal del  $n$ -ésimo modo ( $\text{Im}(k_n) \leq 0$ ).

Con respecto a la ecuación (6.3.1) es importante resaltar que esta se ha descompuesto como la suma de los siguientes dos campos (ver figura 6.5(b)):

1. Campo unidimensional  $v_{1D}(z, \omega)$ , el cual describe la respuesta de un estrato con base rígida sometido a un desplazamiento prescrito en su base  $v_0(\omega)$ , usualmente suele expresarse como:

$$v_{1D}(z, \omega) = \frac{\cos\left(\frac{\omega z}{\beta}\right)}{\cos\left(\frac{\omega H}{\beta}\right)} v_0(\omega) \tag{6.3.2}$$

2. Campo difractado, el cual esta compuesto por ondas inhomogeneas cerca a la pared vertical ( $\text{Re}(k_n) > 0$ ) y ondas de Love ( $\text{Im}(k_n) < 0$ ) que se propagan en dirección de  $+x$ . Con respecto a este campo es importante resaltar que se trata de una suma modal, la cual esta compuesta por: amplitud  $\left(A_i(\omega) = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\omega^2}{\Omega_n^2 - \omega^2}\right)^1$ , forma

<sup>1</sup>De aquí en adelante dicha cantidad será conocida como coeficiente o función de emisión de las ondas de Love, la cual para este modelo tiene una forma analítica pero para los demás modelos a estudiar su forma es desconocida y será obtenida de manera numérica.

modal  $\left(\cos\left(\frac{\Omega_n z}{\beta}\right)\right)$  y factor de propagación  $(\exp(-ik_n x))$ , esto es importante resaltarlo pues una descripción similar se emplea en el análisis paramétrico estudiado.

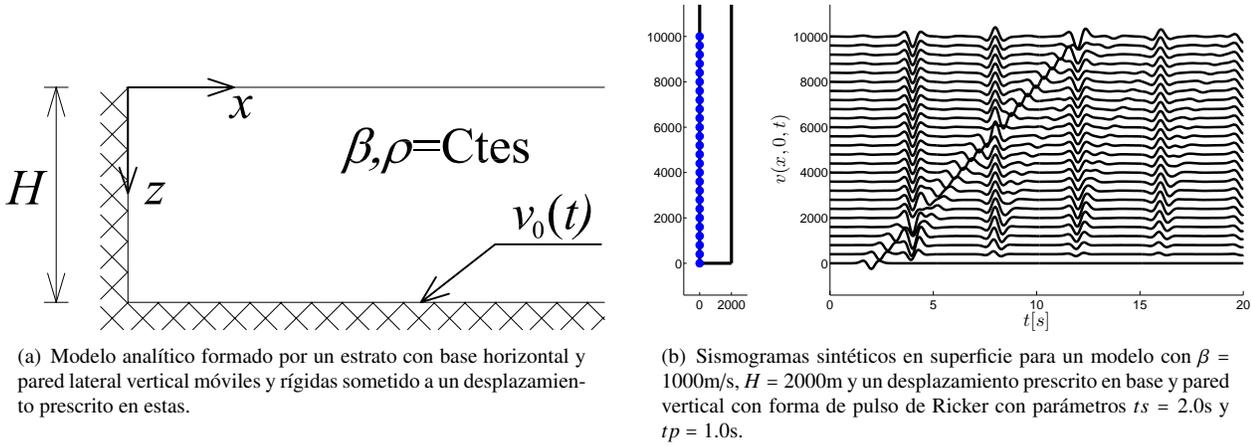


Figura 6.4: Modelo analítico antiplano y sismogramas sintéticos en superficie.

En la figura 6.5 se presentan las curvas de dispersión adimensionales y la amplitud adimensional de los coeficientes de emisión de las ondas de Love  $\left|\frac{A_i(\bar{f})}{v_0(\bar{f})}\right|$ , con respecto a las cuales es importante resaltar lo siguiente:

1. Las curvas de dispersión tienen frecuencias de corte que coinciden con las frecuencias fundamentales del modelo 1D ( $f_c^n = (2n - 1)f_0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), esto es distinto a lo que pasa en el modelo de un estrato sobre un semiespacio (sección C.1.1) para el cual las frecuencias de corte son  $f_c^n \approx 2nf_0$ .
2. Los coeficientes de emisión de las ondas de Love presentan frecuencias de corte que coinciden con las frecuencias fundamentales del modelo 1D, es decir,  $f_c^n = (2n - 1)f_0$   $n = 0, 1, 2, \dots$  y tienen un valor asintótico en altas frecuencias igual a  $\frac{4(-1)^n}{2n+1}\pi$ , lo que indica que dicho valor asintótico decrete al incrementar el modo.
3. Son independientes de la densidad del medio.

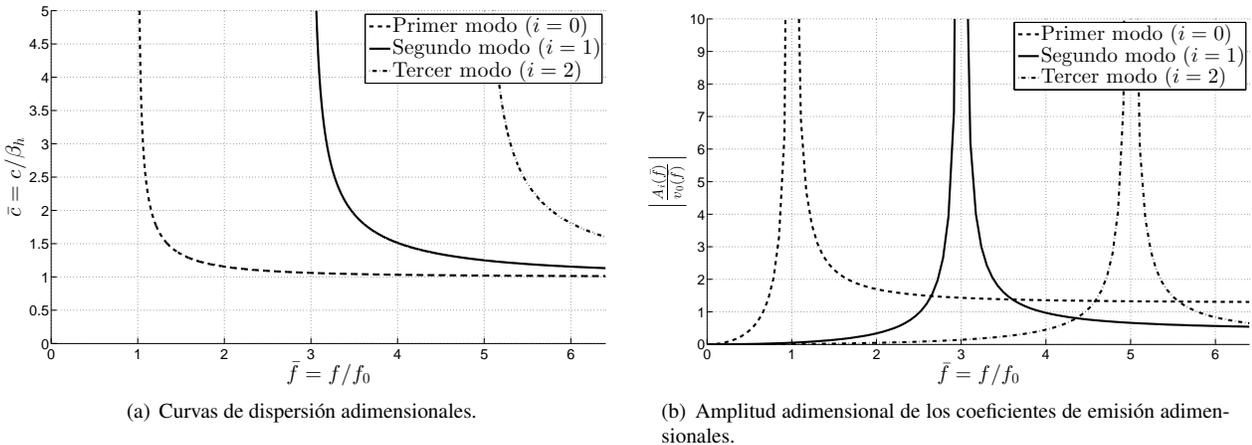


Figura 6.5: Modelo analítico antiplano.

Con motivo de analizar la ecuación (6.3.1) en función del análisis paramétrico que se realizara mas adelante, es conveniente reescribir dicha ecuación en función de variables adimensionales como:

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{f}) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{(2n+1)^2 - \bar{f}^2 \exp(-i\bar{k}_n \bar{x})}{(2n+1)^2 - \bar{f}^2} \cos[2\pi(2n+1)\kappa \bar{z}] \quad (6.3.3)$$

Donde:

$\bar{k}_n = k_n H = 2\pi \sqrt{(\bar{f}\kappa)^2 - [(2n+1)f_0]^2}$ : Número de onda vertical adimensional.

$\kappa = \frac{f_0 H}{\beta}$ : Número de onda adimensional.

## 6.4. Descomposición del problema

Basado en la descomposición del campo total como la respuesta unidimensional mas un campo difractado empleada en el modelo analítico de referencia (sección 6.3), se propone igual descomposición para los modelos con irregularidad lateral (figura 6.1), es decir:

$$v(x, z, \omega) = v_{1D}(x, z, \omega) + v_D(x, z, \omega) \quad (6.4.1)$$

Donde:

$v(x, z, \omega)$ : Campo total de desplazamiento del modelo con irregularidad lateral (calculado con el IBEM).

$v_{1D}(x, z, \omega)$ : Campo de desplazamiento del modelo 1D “asociado”, formado por un estrato sobre un semiespacio (analítico).

$v_D(x, z, \omega)$ : Campo difractado.

El modelo 1D “asociado” se define como un modelo formado por un estrato horizontal de profundidad  $H$  y propiedades mecánicas iguales a las del medio  $s$  el cual se encuentra sobre un semiespacio con las mismas propiedades mecánicas del medio  $h$  y sometido a la incidencia de la misma onda plana del modelo con irregularidad lateral.

Como validación de la anterior descomposición, en la figura 6.6(b) se presenta la comparación de los sintéticos en superficie del campo total y del 1D “asociado” para el modelo presentado en la figura 6.6(a) ante la incidencia de un pulso de Ricker con parámetros  $t_s = 3.0s$  y  $t_p = 0.8s$  (ver E.1.4)<sup>2</sup>.

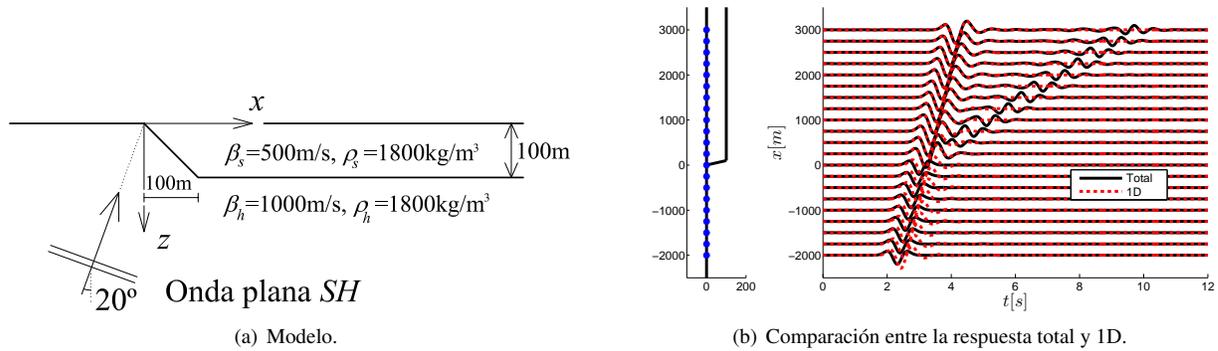


Figura 6.6: Respuesta del modelo con irregularidad lateral.

Como puede verse, la similitud entre la respuesta del modelo con irregularidad lateral antes del arribo del campo difractado y la respuesta del modelo 1D “asociado” es excelente, incluso para observadores cercanos a la irregularidad lateral. Además de lo anterior de la figura (6.6(b)), es posible ver como el campo difractado (campo adicional al 1D para formar el campo total) viaja con una velocidad de propagación menor a la velocidad horizontal aparente del modelo unidimensional “asociado”, lo que sugiere que se encuentre formado principalmente por ondas de Love.

<sup>2</sup>La poca dispersión del campo difractado que se observa en la figura 6.6(b) es debida a que la onda incidente tiene relativamente bajas frecuencias y por tal motivo solo se emiten ondas de Love del primer modo y con una velocidad de grupo casi constante.

### 6.4.1. Cálculo del campo total

Para el cálculo del campo total se realizó una adaptación del método indirecto de elementos de frontera (IBEM) de capa simple [Sánchez-Sesma and Campillo, 1991] para el caso de valles aluviales abiertos (ver capítulo 3). Como ejemplo de validación, a continuación se presenta la comparación de la respuesta analítica de un estrato sobre un semiespacio ante la incidencia de una onda plana  $SH$  y su contraparte calculada con el IBEM, las propiedades del modelo se presentan en la figura 6.7(a) mientras que la comparación de los sintéticos en superficie se presenta en la figura 6.7(b).

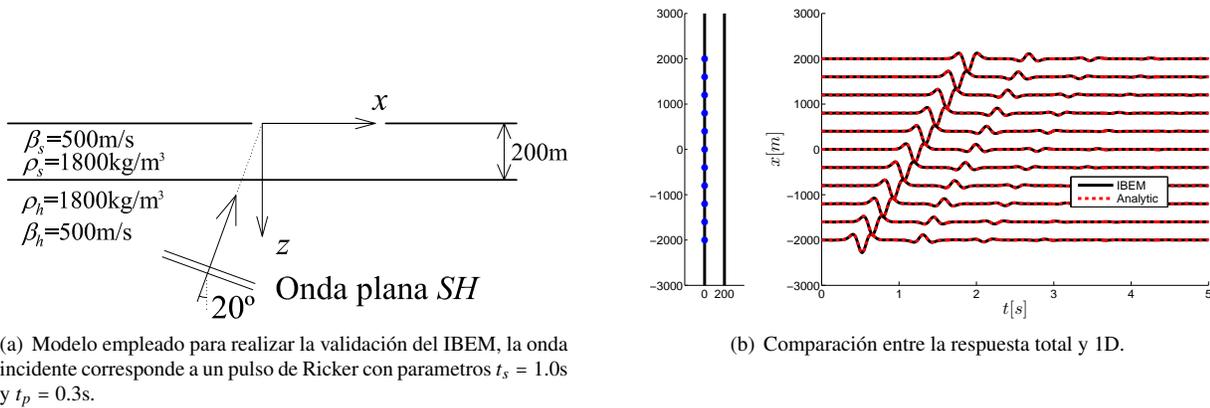


Figura 6.7: Comparación de sintéticos en superficie de la solución analítica y calculada con el IBEM.

### 6.4.2. Cálculo del campo unidimensional “asociado”

El campo unidimensional “asociado” es calculado empleando lo presentado en la sección D.1.2.

### 6.4.3. Cálculo del campo difractado

Tomando de nuevo como motivación los resultados de la solución analítica de referencia (sección 6.3), se postula que el campo difractado está compuesto por ondas inhomogéneas que habitan cerca de la irregularidad lateral (las cuales por su naturaleza no se propagan muy lejos de esta), pero ondas de Love que pueden propagarse en el modelo unidimensional de un estrato sobre un semiespacio. Lo anterior puede ser interpretado como un símil al principio de Saint-Venant de resistencia de materiales, el cual en nuestro caso indicaría que suficientemente lejos de la irregularidad el campo difractado se estabilizaría a las ondas de Love que pueden habitar en el modelo 1D.

Lo anterior se comprueba en la figura (6.8), en la cual se comparan las curvas de dispersión obtenidas a partir de la transformada de Fourier espacial del campo difractado para el modelo de la figura 6.6(a) (mapa de colores)<sup>3</sup> y las del modelo 1D (líneas rojas discontinuas).

<sup>3</sup>Para esto se usaron 256 observadores en superficie ubicados entre  $x=1000m$  y  $x=8650m$

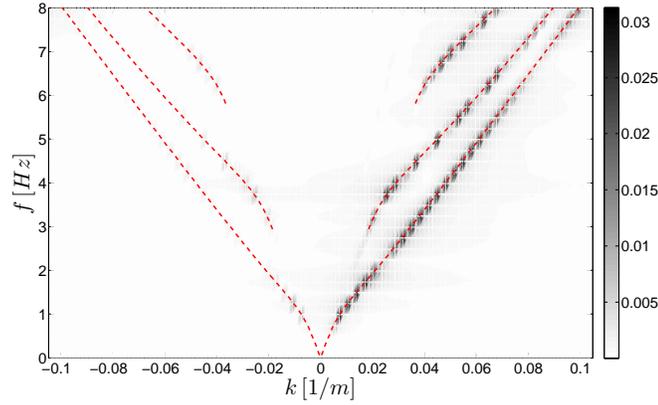


Figura 6.8: Comparación de las curvas de dispersión del modelo presentado en (6.6(a)) (mapa a color) y su modelo 1D “asociado” (línea roja) discontinua.

Lo anterior permite aproximar el campo difractado como:

$$v_D(x, z, \omega) \approx \sum_{n=0}^{N(\omega)-1} A_n(\omega) FM_n(z, \omega) \exp[-ik_n(\omega)x] \quad (6.4.2)$$

Donde:

$A_n(\omega)$ : Amplitud del  $n + 1$ -ésimo modo de las ondas de Love emitidas (incognita).

$FM_n(z, \omega)$ : Forma modal del  $n + 1$ -ésimo modo del modelo 1D (conocido).

$k_n(\omega) = \frac{\omega}{c_n(\omega)}$ : Número de onda horizontal para el  $n + 1$ -ésimo modo del modelo 1D (conocido).

$N(\omega)$ : Número de modos que existen en el modelo 1D para la frecuencia  $\omega$  (conocido).

Con el objetivo de obtener las amplitudes de las ondas de Love empleando la ecuación (6.4.2), es necesario calcular el campo difractado, las curvas de dispersión y formas modales del modelo 1D “asociado”. El campo difractado se obtiene por medio de (6.4.1), como la resta del campo total (calculado usando el IBEM) y del campo 1D “asociado” (sección D.1.2) mientras que las curvas de dispersión y formas modales del modelo 1D se obtienen empleando lo presentado en C.1.1.

Una vez se tienen los anteriores resultados para una frecuencia determinada, se evalúa la ecuación (6.4.2) en  $M$  puntos ( $M \geq N$ ) en la superficie y no muy cerca de la irregularidad lateral, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones (se han normalizado las formas modales para que tengan valor unitario en superficie)<sup>4</sup>:

$$\begin{bmatrix} \exp[-ik_0(\omega)x_1] & \exp[-ik_1(\omega)x_1] & \cdots & \exp[-ik_{N-1}(\omega)x_1] \\ \exp[-ik_0(\omega)x_2] & \exp[-ik_1(\omega)x_2] & \cdots & \exp[-ik_{N-1}(\omega)x_2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp[-ik_0(\omega)x_M] & \exp[-ik_2(\omega)x_M] & \cdots & \exp[-ik_{N-1}(\omega)x_M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0(\omega) \\ A_1(\omega) \\ \vdots \\ A_{N-1}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_D(x_1, 0, \omega) \\ v_D(x_2, 0, \omega) \\ \vdots \\ v_D(x_M, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (6.4.3)$$

El cual se resuelve por medio de un proceso de mínimos cuadrados y se obtienen las amplitudes de las ondas de Love emitidas para dicha frecuencia.

Como validación de la metodología anterior, a continuación se presenta una comparación entre el campo difractado (calculado como la resta del campo total calculado con el IBEM y la respuesta del modelo unidimensional) y el campo difractado aproximado (calculado usando (6.4.2)) para observadores en superficie e interior del modelo presentado en la figura 6.6(a), donde por claridad se han analizado dos tipos de ondas planas incidentes, el primero esta formado por

<sup>4</sup>Con objeto que eliminar las posibles ondas espurias emitidas desde los puntos de truncamiento en los bordes derechos de las discretizaciones empleadas en el IBEM, se han agregado términos desconocidos del tipo  $\exp[ik_n(\omega)x]$  los cuales tiene como objetivo absorber dichas ondas.

un pulso de Ricker con propiedades  $t_s = 3.0s$  y  $t_p = 0.8s$  (baja frecuencia) y el segundo con propiedades  $t_s = 3.0s$  y  $t_p = 0.4s$  (alta frecuencia):

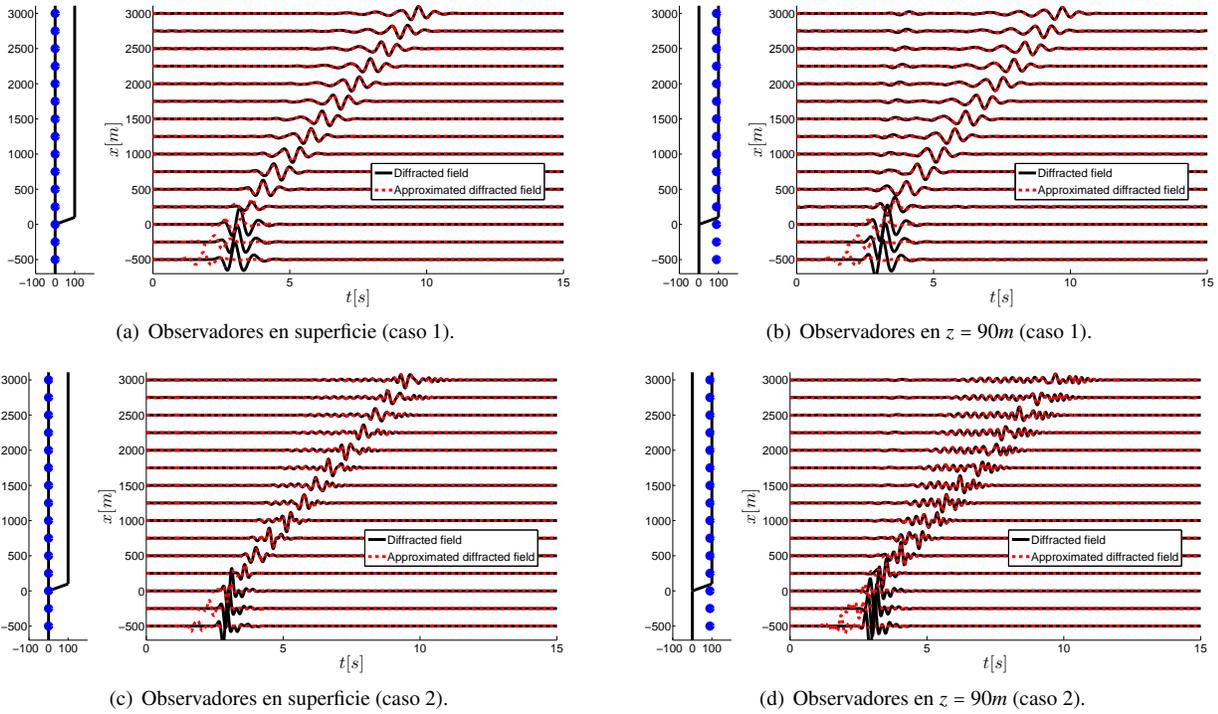


Figura 6.9: Comparación entre los sismogramas del campo difractado y el campo difractado aproximado para observadores en superficie e interior empleando dos variaciones temporales diferentes para las ondas incidentes.

Si tenemos en cuenta que para el modelo en estudio la frecuencia del modelo 1D “asociado” ( $f_0$ ) es 1.25Hz y que para el caso 1 el pulso de Ricker tiene un contenido frecuencial “útil” entre 0 y 4Hz, los resultados de las figuras 6.9(a) y 6.9(b) donde se ve poca dispersión de las ondas de Love son explicables debido a que solo se emiten ondas de Love para un rango estrecho de frecuencias; mientras que para el caso 2 (figuras 6.9(c) y 6.9(c)) se presenta mucha más dispersión debido a que el Ricker empleado tiene un rango de frecuencias “útiles” entre 0 y 8Hz, lo que da la oportunidad de tener modos superiores.

## 6.5. Análisis paramétrico de los coeficientes de emisión de ondas de Love

Siguiendo lo presentado en la sección (6.4.3) se ha realizado un análisis paramétrico adimensional de los coeficientes de emisión de ondas de Love, el cual ha involucrado 4624 modelos con las siguientes propiedades:

$\bar{a} = a/H$	$\bar{\beta} = \beta_s/\beta_h$	$\bar{\rho} = \rho_s/\rho_h$	$\gamma$
17 valores entre 0 y 8	16 valores entre 0.025 y 0.4	1	17 valores entre $-80^\circ$ y $80^\circ$

Por razones de acotar el análisis paramétrico a un tamaño manejable y por el papel poco importante en la emisión de ondas superficiales se ha decidido tomar un solo valor constante para la variable  $\bar{\rho}$  (ambos medios tienen la misma densidad) y no emplear amortiguamiento [Moczo and Bard, 1993].

Incidencia con ángulo positivo ( $\gamma \geq 0$ )

En las figuras 6.10 y ?? se presentan las magnitudes y fase de los coeficientes de emisión adimensionalizados de las ondas de Love para el primer modo  $\left(\left|\frac{A_0(\bar{f})}{S_1(\bar{\omega})}\right|\right)$  en algunos de los modelos estudiados:

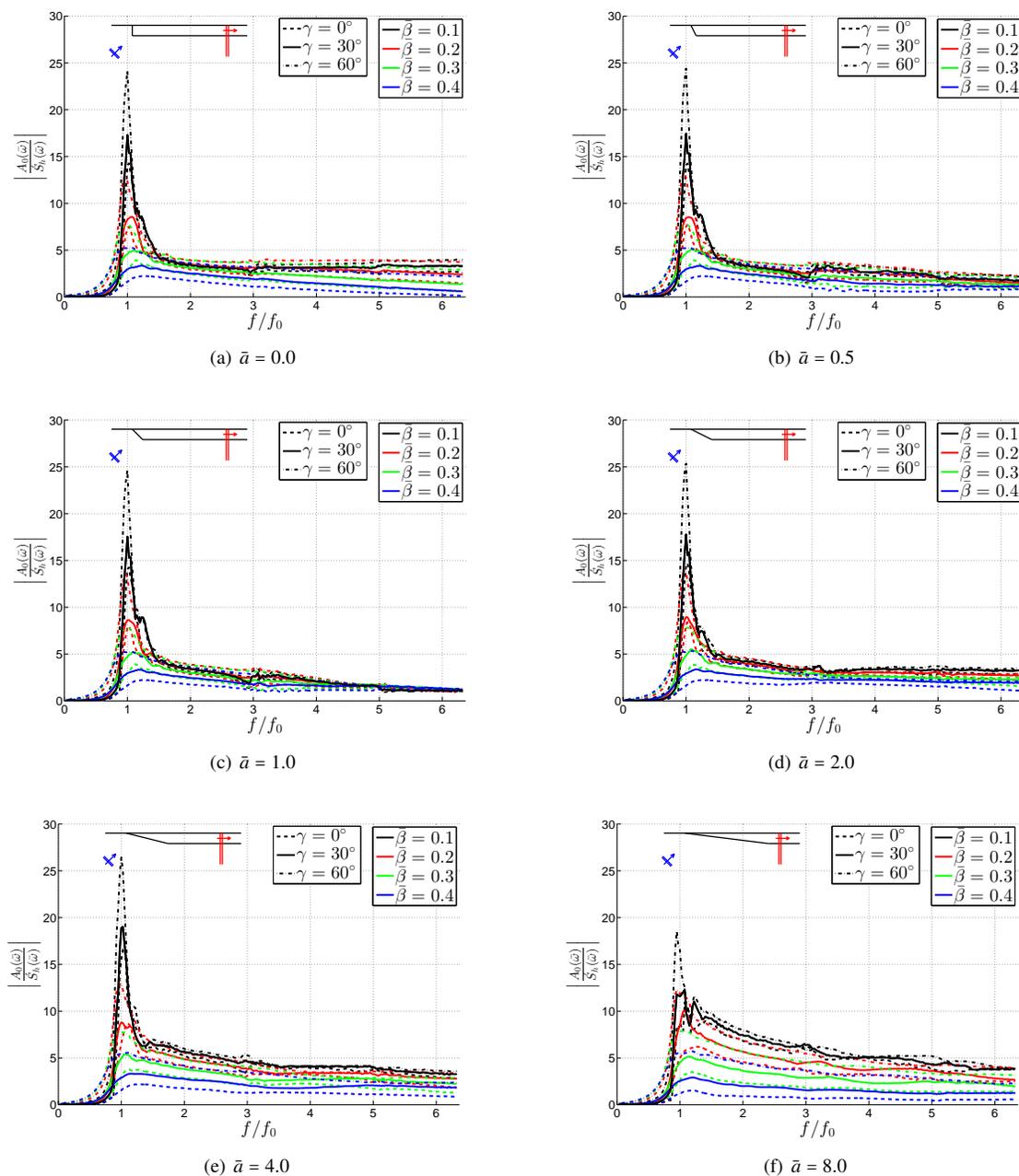


Figura 6.10: Adimensional maximum amplitude of the Love waves for the first mode for different angles of incidence,  $\bar{a}$  and  $\bar{\beta}$ .

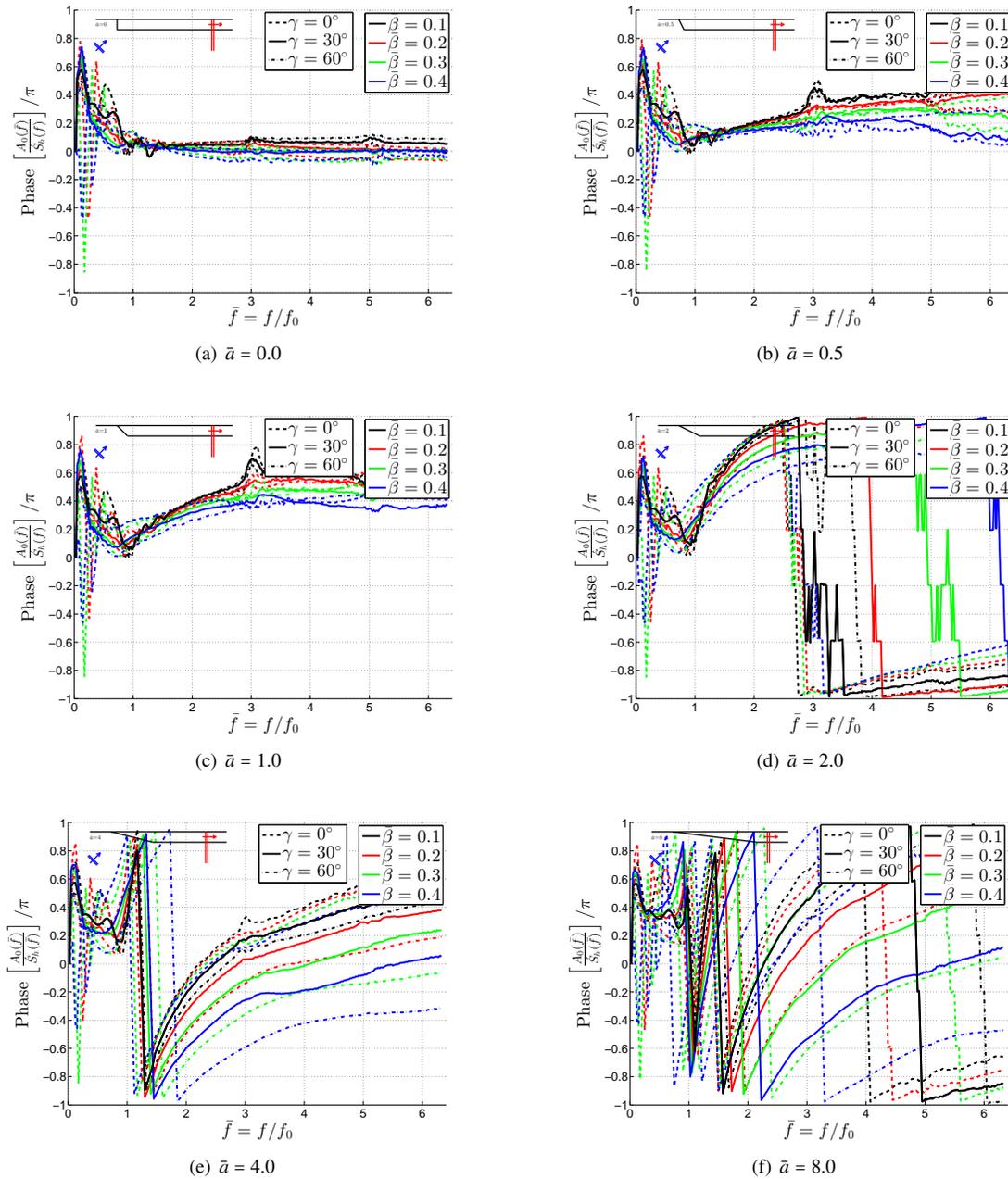


Figura 6.11: Adimensional maximum amplitude of the Love waves for the first mode for different angles of incidence,  $\bar{a}$  and  $\bar{\beta}$ .

Mientras que en la figura (6.12) se presentan los máximos de las amplitudes de los coeficientes de emisión para todos los modelos estudiados.

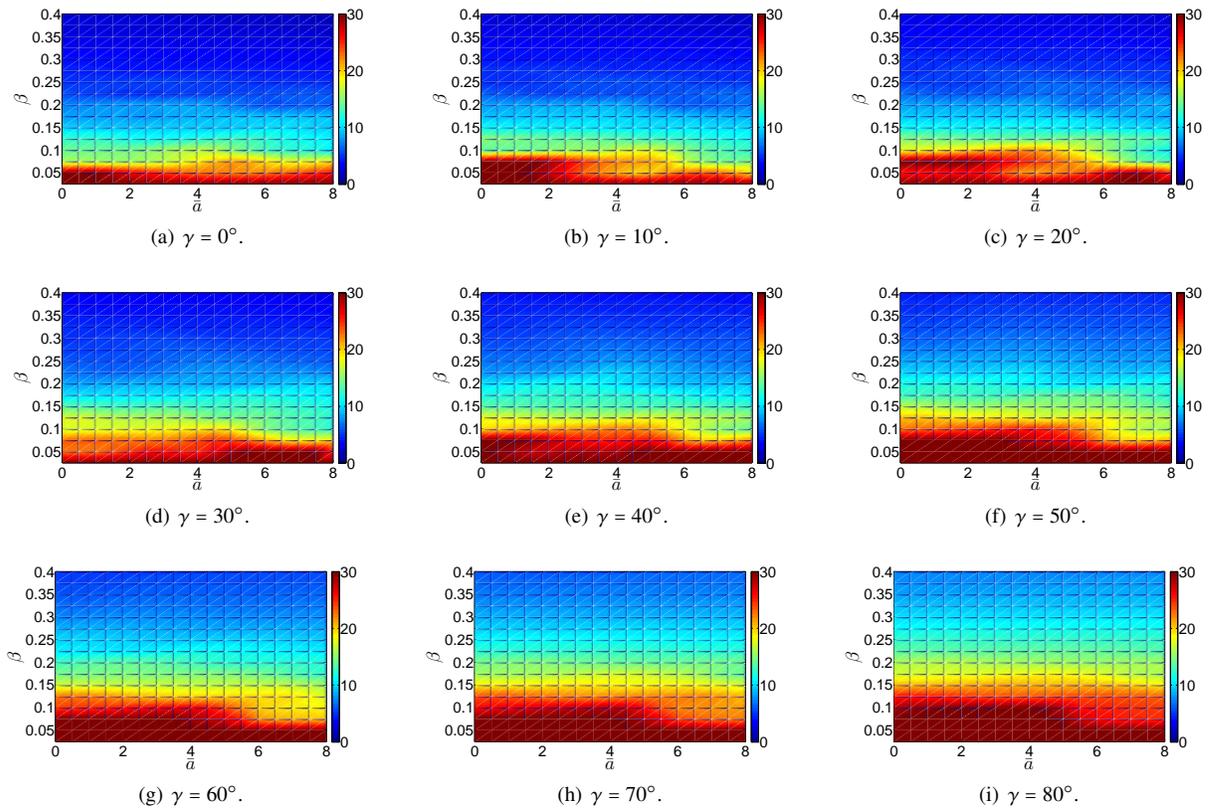


Figura 6.12: Máximo valor de  $\left| \frac{A_0(f)}{S_h(f)} \right|$  para diferentes configuraciones geométricas, propiedades mecánicas y ángulos de incidencia.

Para el caso del segundo modo la amplitud adimensional y la fase de los coeficientes de emisión de las ondas de Love es la siguiente:

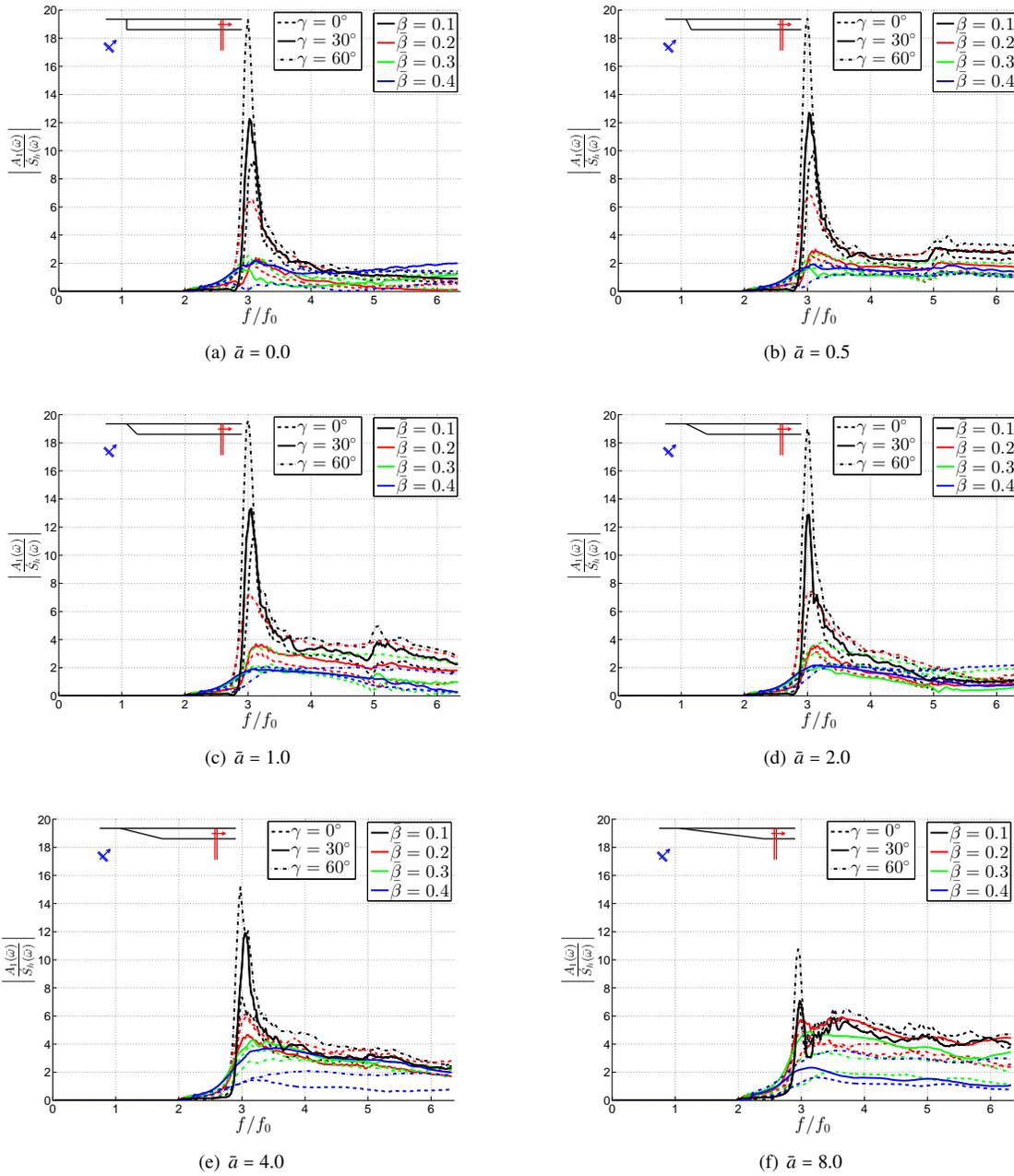


Figura 6.13: Adimensional maximum amplitude of the Love waves for the second mode for different angles of incidence,  $\bar{a}$  and  $\bar{\beta}$ .

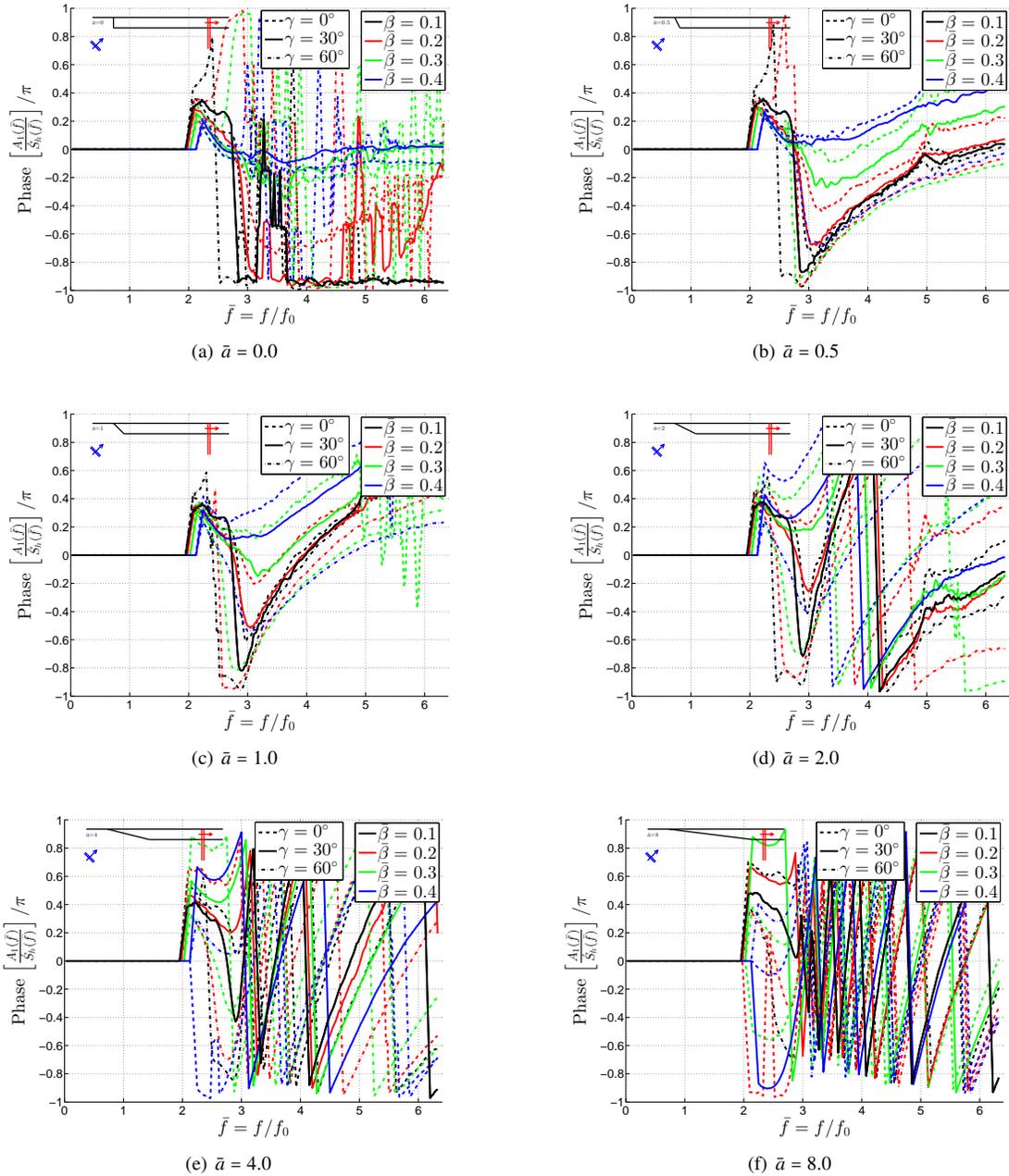


Figura 6.14: Adimensional maximum amplitude of the Love waves for the second mode for different angles of incidence,  $\bar{a}$  and  $\bar{\beta}$ .

Mientras que los máximos de las amplitudes de los coeficientes de emisión de todos los modelos analizados se resumen a continuación:

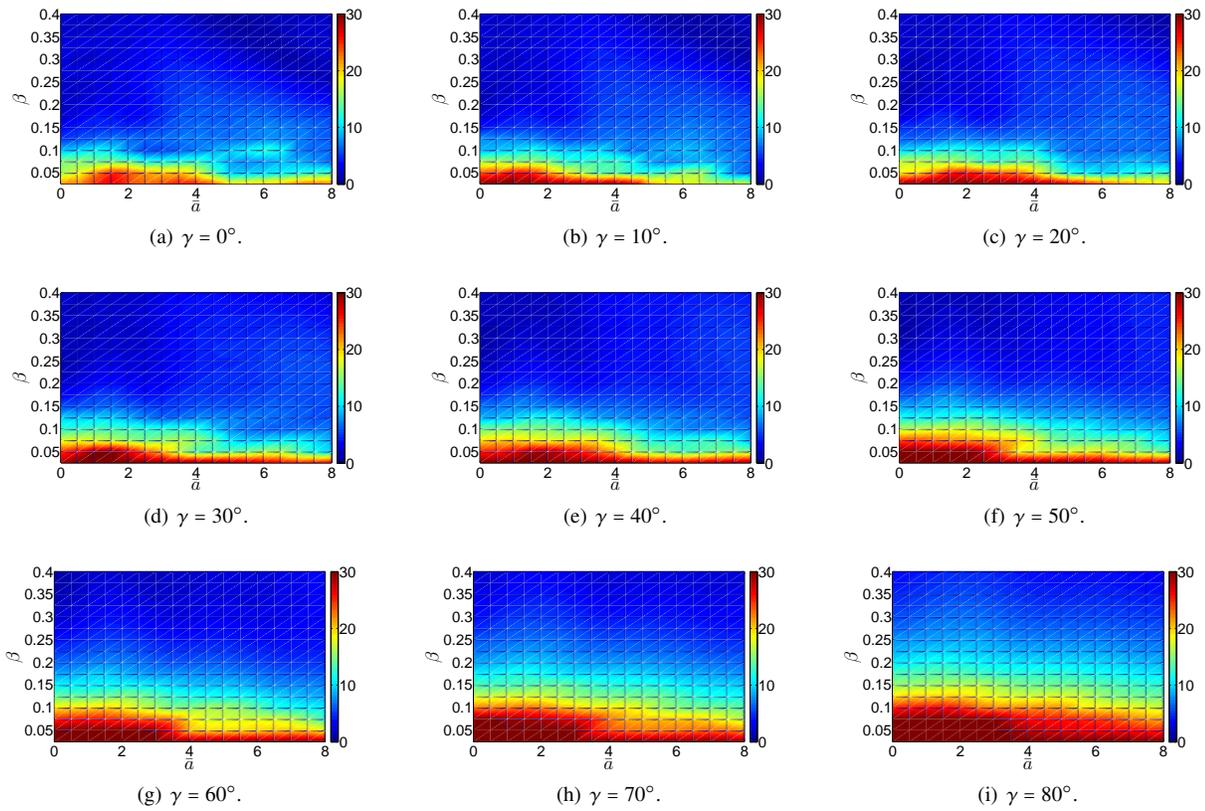


Figura 6.15: Máximo valor de  $\left| \frac{A_1(\vec{f})}{S_n(\vec{f})} \right|$  para diferentes configuraciones geométricas, propiedades mecánicas y ángulos de incidencia.

Incidencia con ángulo negativo ( $\gamma < 0$ )

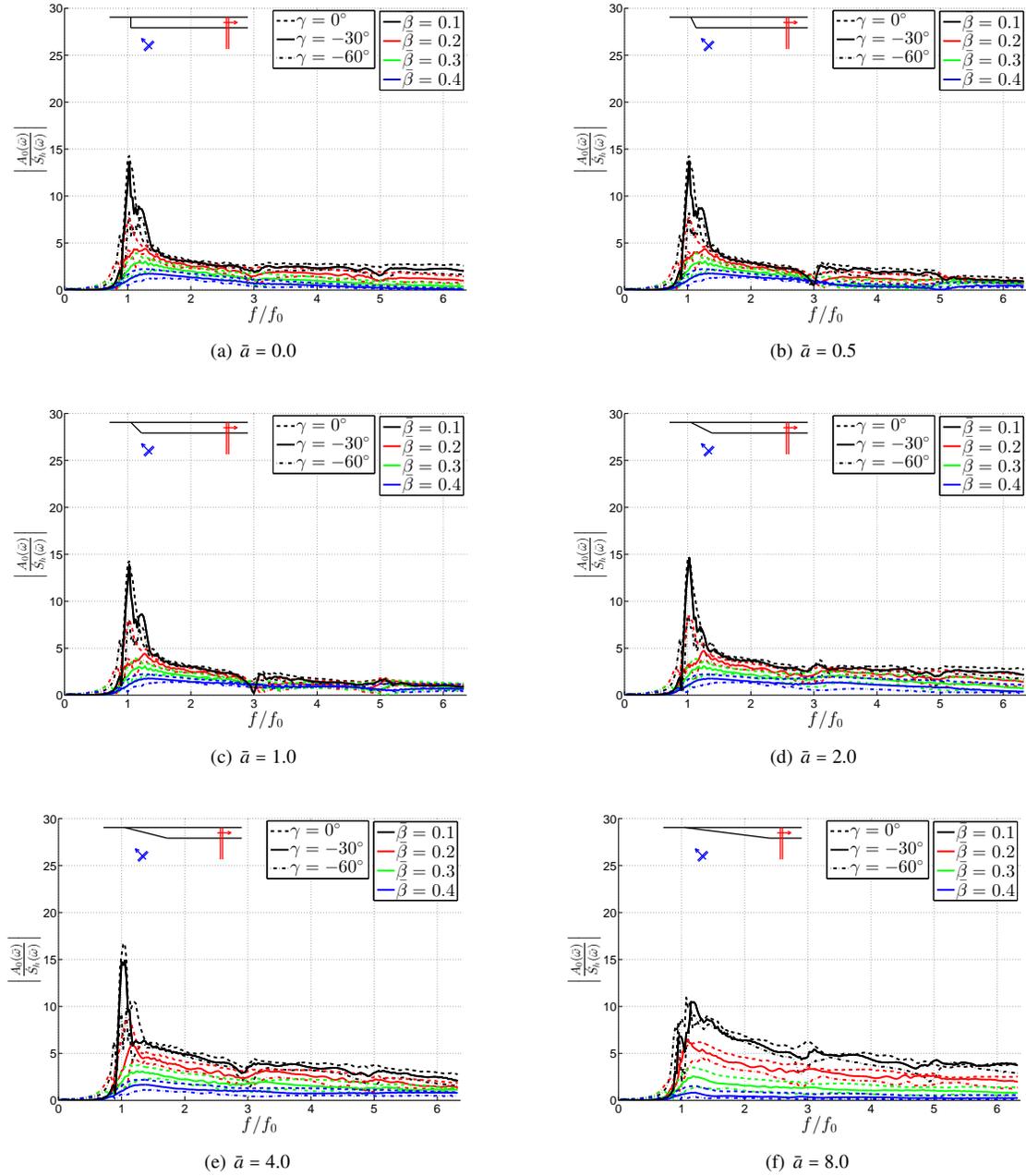


Figura 6.16: Adimensional maximum amplitude of the Love waves for the first mode for different angles of incidencie,  $\bar{a}$  and  $\bar{\beta}$ .

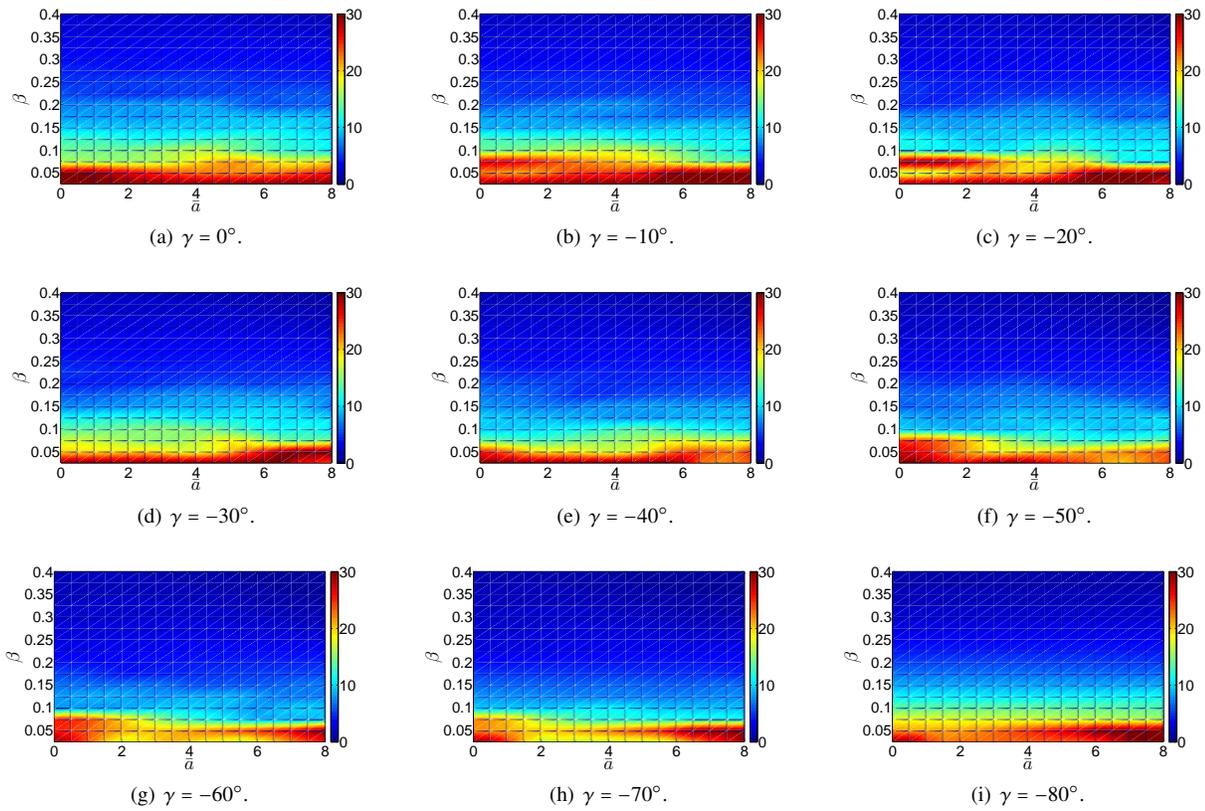


Figura 6.17: Máximo valor de  $\left| \frac{A_0(\vec{f})}{S_n(\vec{f})} \right|$  para diferentes configuraciones geométricas, propiedades mecánicas y ángulos de incidencia.

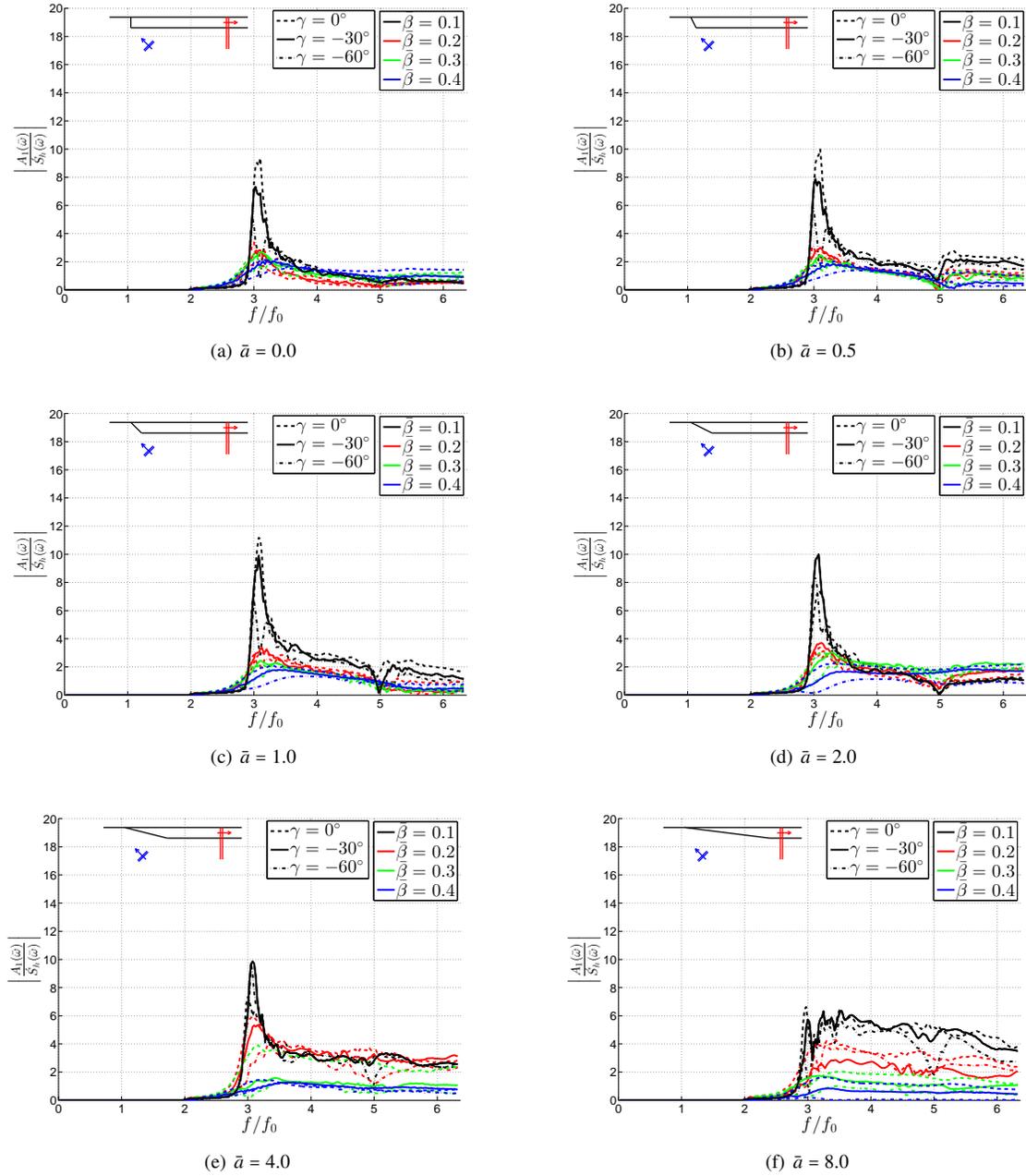


Figura 6.18: Adimensional maximum amplitude of the Love waves for the second mode for different angles of incidence,  $\bar{a}$  and  $\bar{\beta}$ .

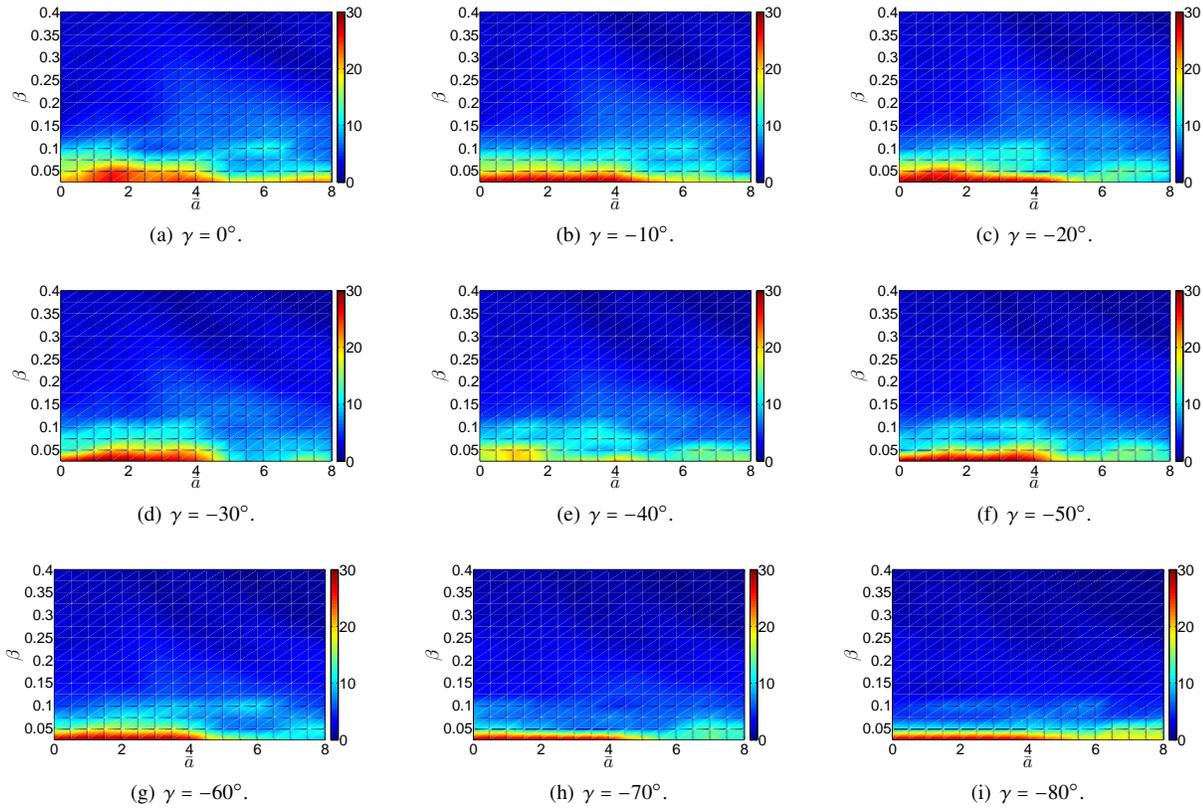


Figura 6.19: Máximo valor de  $\left| \frac{A_1(\bar{f})}{S_n(\bar{f})} \right|$  para diferentes configuraciones geométricas, propiedades mecánicas y ángulos de incidencia.

A partir de lo presentado en las figuras (6.10) a (6.19) se puede concluir lo siguiente:

1. Al igual que lo reportado por [Moczo and Bard, 1993] y [Narayan, 2003], se observan frecuencias de corte para la emisión de las ondas de Love las cuales coinciden con las frecuencias fundamentales del modelo 1D “asociado”. La amplitud de los coeficientes de emisión tiene un máximo en la frecuencia fundamental del modelo 1D y luego continúa con una variación decreciente con el aumento de la frecuencia; lo anterior cobra mayor relevancia para valles blandos ( $\bar{\beta}$  pequeño). Este comportamiento es muy similar al descrito por el modelo analítico de referencia, con la diferencia que en los modelos con irregularidad lateral estudiados, la amplitud máxima no es infinita debido al amortiguamiento geométrico causado por la presencia del semiespacio.
2. Entre menor sea el valor de  $\bar{\beta}$  (mas blando el estrato) mayor es la amplitud de las ondas de Love emitidas, lo cual era resultado era totalmente predecible.
3. A mayor ángulo de incidencia de la onda plana (mas horizontal sea el vector de propagación), mayor es la amplitud de las ondas de Love emitidas. Cabe resaltar que este comportamiento es opuesto al que ocurre con la respuesta 1D donde las mayores amplitudes de la función de transferencia corresponden a incidencias verticales (ver figura 6.2).
4. Entre mas vertical la irregularidad lateral (menor  $\bar{a}$ ), mayor la amplitud de la onda Love emitida.
5. Tanto la respuesta 1D (ver figura 6.2) como los coeficientes de emisión las ondas de Love tienen máximos en las mismas frecuencias ( $f = (2n - 1)f_0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )) y sus amplitudes máximas son relativamente similares o al menos están dentro del mismo orden de magnitud.

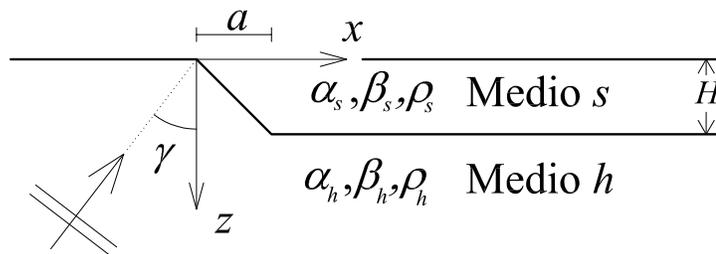
- 
6. La forma de la irregularidad lateral ( $\bar{a}$ ) no tiene efecto significativo en el pico máximo de la amplitud de la onda emitida pero su papel puede tener importancia en medias y altas frecuencias.
  7. En general es mas eficiente la generación de ondas de Love para incidencias positivas (de izquierda a derecha) que para negativas (de derecha a izquierda).



## Caso deformación plana (P-SV-Rayleigh)

### 7.1. Definición del problema

La tipología de problemas que se estudiarán para el caso  $P$ - $SV$  es muy similar a la analizada para el caso  $SH$  (ver sección 6), con la diferencia que ahora existirán la incidencia tanto de ondas  $P$  como  $SV$ , en la figura (7.1) se presenta la tipología típica de estos modelos:



Ondas planas  $P$  o  $SV$

Figura 7.1: Modelo a estudiar.

Donde:

$\alpha_h$ : Velocidad de propagación de las ondas  $P$  en el semiespacio.

$\alpha_s$ : Velocidad de propagación de las ondas  $P$  en el estrato.

Nota: Por brevedad en la notación solo se definirán aquellas variables que no lo hayan sido previamente en el análisis del caso anpliplano.

### 7.2. Descomposición del problema

Como hipótesis inicial se empleará la descomposición del campo total como la suma de los campos del modelo unidimensional “asociado” y el difractado:

$$u(x, y, t) = u_{1D}(x, z, t) + u_D(x, z, t) \quad (7.2.1a)$$

$$w(x, y, t) = w_{1D}(x, z, t) + w_D(x, z, t) \quad (7.2.1b)$$

Donde:

$w(x, z, t)$ : Componente vertical del campo de desplazamiento total (calculado con el IBEM).

$w_{1D}(x, z, t)$ : Componente vertical del campo de desplazamiento del modelo 1D “asociado” (analítico).

$w_D(x, z, t)$ : Componente vertical del campo de desplazamiento difractado.

Como validación de la anterior hipótesis en la figura (7.2(b)) se presenta la comparación de los campos de desplazamiento entre el campo total y el del modelo 1D “asociado” para el modelo presentado en 7.2(a), para los cuales se ha empleado como campo incidente una onda plana  $P$  cuya variación temporal está dada por un pulso de Ricker (ver sección E.1.4) con parámetros  $t_s = 0.6s$  y  $t_p = 0.6s$ :

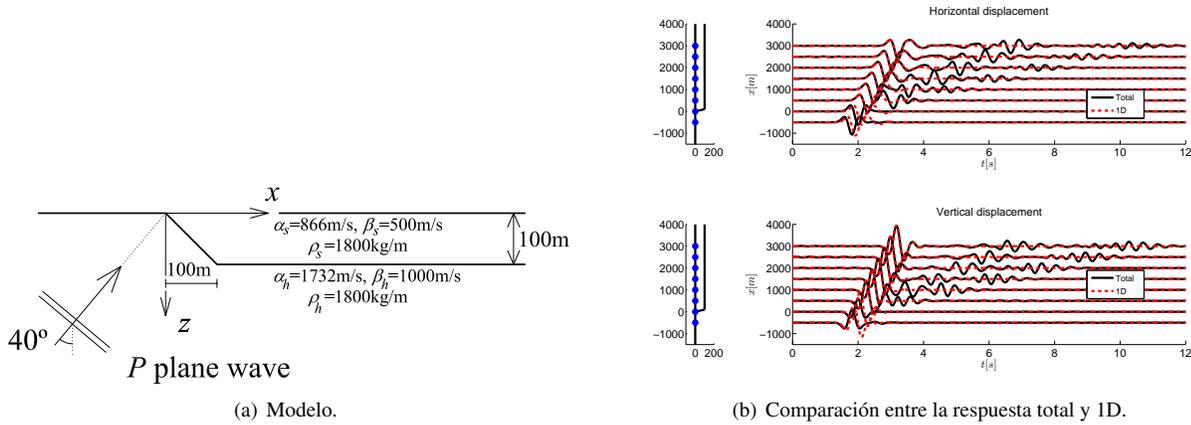


Figura 7.2: Respuesta del modelo con irregularidad lateral.

### 7.2.1. Cálculo del campo total

El campo total ha sido calculado mediante una implementación IBEM para valles aluviales en modelos de deformación plana (ver sección 4.3).

### 7.2.2. Cálculo del campo unidimensional “asociado”

La respuesta del modelo unidimensional “asociado” ha sido calculada empleando el método de la matriz global (ver sección A.2.1).

### 7.2.3. Campo difractado aproximado

De forma similar a como se hizo para el caso antiplano, se supondrá que lejos de la irregularidad lateral, el campo difractado está compuesto solo por las ondas superficiales que pueden existir en el modelo unidimensional “asociado”, las cuales en este caso son ondas de Rayleigh.

Lo anterior se ha comprobado numéricamente para el modelo presentado en la figura 7.2(a). Este resultado se muestra en la figura 7.3 en la cual se presentan en líneas discontinuas blancas las curvas de dispersión analíticas del modelo 1D “asociado” y en colores las curvas de dispersión obtenidas a partir de la realización de la transformada directa de Fourier con respecto a la variable espacial  $x$  para observadores en superficie del modelo en estudio (diagramas  $f - k$ ):

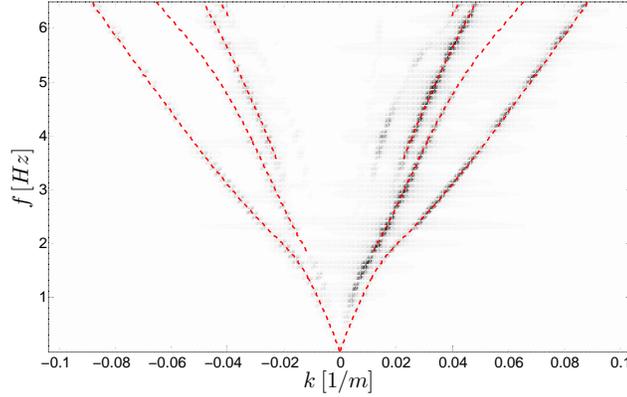


Figura 7.3: Comparación de las curvas de dispersión del modelo presentado en la figura 7.2(a) (mapa a color) y su modelo 1D “asociado” (línea blanca) discontinua.

Basado en la anterior hipótesis, el campo difractado para la tipología de modelos presentados en la figura 7.1 es aproximado como:

$$u_D(x, z, \omega) \approx \sum_{n=0}^{N(\omega)-1} A_n(\omega) FM_n^x(z, \omega) \exp[-ik_n(\omega)x] \quad (7.2.2a)$$

$$w_D(x, z, \omega) \approx \sum_{n=0}^{N(\omega)-1} A_n(\omega) FM_n^z(z, \omega) \exp[-ik_n(\omega)x] \quad (7.2.2b)$$

Donde:

$FM_n^x(z, \omega)$ : Componente horizontal de la forma modal para  $n + 1$ ésimo modo.

$FM_n^z(z, \omega)$ : Componente vertical de la forma modal para  $n + 1$ ésimo modo.

$w_D(x, z, \omega)$ : Componente vertical del campo difractado.

Aquí es importante hacer hincapié que la única variable desconocida en 7.2.2 es la amplitud de las ondas de Rayleigh ( $A_n(\omega)$ ) y las demás son obtenidas a partir del modelo unidimensional “asociado” (ver la sección C.2).

La metodología empleada para obtener los valores de los coeficientes de emisión  $A_n(\omega)$  es similar a la empleada en el caso antiplano. En este caso, para cada frecuencia de análisis las ecuaciones (7.2.2) son evaluadas en  $M$  puntos en la superficie y lejos de la irregularidad lateral, de tal forma que se obtiene un sistema de  $2M$  ecuaciones con  $N$  incógnitas, que es resuelto empleando el método de mínimos cuadrados. La forma general de dicho sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1(\omega) \exp[-ik_1(\omega)x_1] & \epsilon_2(\omega) \exp[-ik_2(\omega)x_1] & \cdots & \epsilon_N(\omega) \exp[-ik_N(\omega)x_1] \\ \exp[-ik_1(\omega)x_1] & \exp[-ik_2(\omega)x_1] & \cdots & \exp[-ik_N(\omega)x_1] \\ \epsilon_1(\omega) \exp[-ik_1(\omega)x_2] & \epsilon_2(\omega) \exp[-ik_2(\omega)x_2] & \cdots & \epsilon_N(\omega) \exp[-ik_N(\omega)x_2] \\ \exp[-ik_1(\omega)x_2] & \exp[-ik_2(\omega)x_2] & \cdots & \exp[-ik_N(\omega)x_2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_1(\omega) \exp[-ik_1(\omega)x_M] & \epsilon_2(\omega) \exp[-ik_2(\omega)x_M] & \cdots & \epsilon_N(\omega) \exp[-ik_N(\omega)x_M] \\ \exp[-ik_1(\omega)x_M] & \exp[-ik_2(\omega)x_M] & \cdots & \exp[-ik_N(\omega)x_M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1(\omega) \\ A_2(\omega) \\ \vdots \\ A_N(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_D(x_1, 0, \omega) \\ w_D(x_1, 0, \omega) \\ u_D(x_2, 0, \omega) \\ w_D(x_2, 0, \omega) \\ \vdots \\ u_D(x_M, 0, \omega) \\ w_D(x_M, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (7.2.3)$$

Donde se han normalizado las formas modales de tal forma que en superficie el componente vertical es unitario y  $\epsilon_n(\omega)$  es la elipticidad de las ondas de Rayleigh ( $\epsilon_n(\omega) = \frac{FM_n^x(0, \omega)}{FM_n^z(0, \omega)} = FM_n^x(0, \omega)$ ).

Como validación de la metodología planteada en esta sección, en la figura (7.4) se comparan los sismogramas sintéticos en superficie e interior para el modelo presentado en la figura 7.2(a) para el caso en que la onda plana incidente está definida en el tiempo por medio de un pulso de Ricker (ver sección E.1.4) con parámetros  $t_s = 6.0$ s y  $t_p = 0.3$ s:

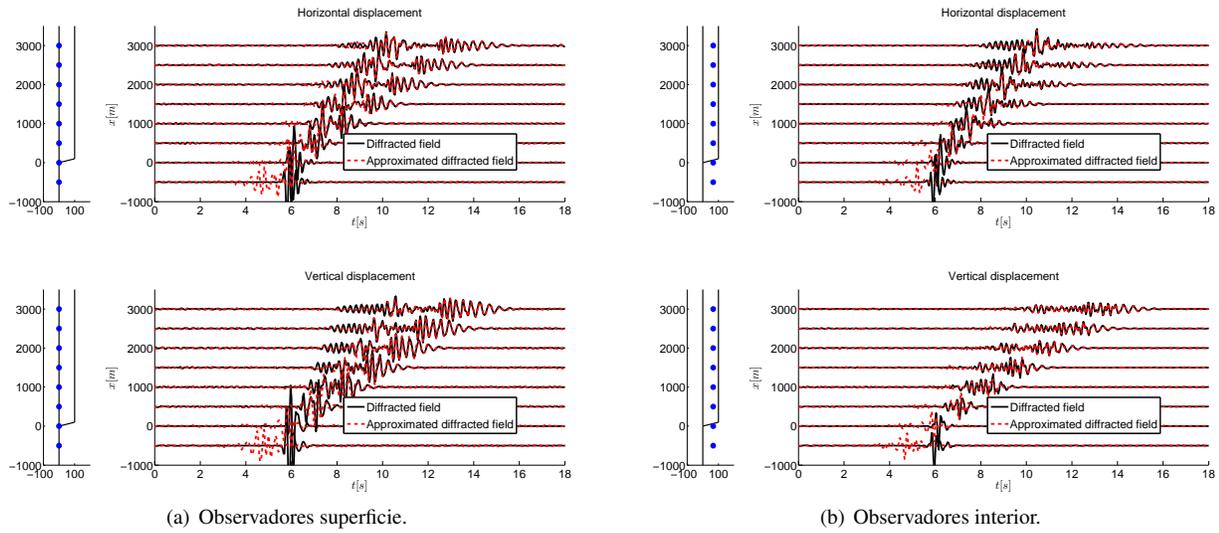


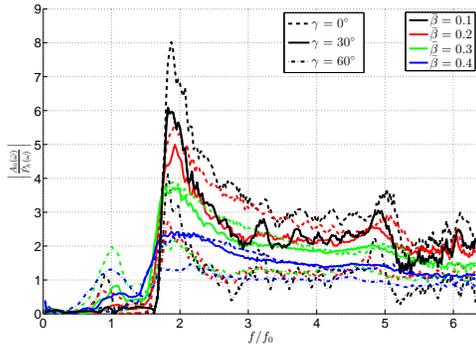
Figura 7.4: Comparación entre el campo difractado y el campo difractado aproximado para observadores en superficie e interior.

### 7.3. Análisis paramétrico de los coeficientes de emisión de ondas de Rayleigh

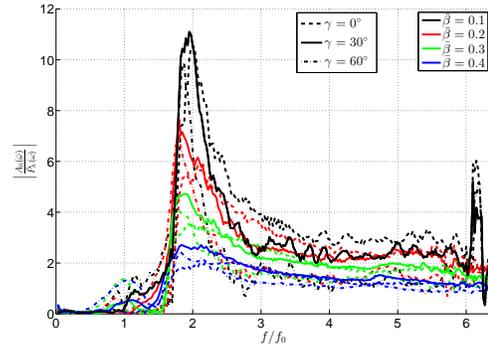
La presente metodología a empleada para un total de 13872 modelos con las propiedades presentadas en la tabla presentada a continuación:

$\bar{a} = a/H$	$\bar{\beta} = \beta_s/\beta_h$	$\nu_E$	$\nu_R$	$\bar{\rho} = \rho_s/\rho_h$	$\gamma$
17 valores entre 0 y 8	16 valores entre 0.025 y 0.4	0.25	0.25, 0.33 y 0.35	1	17 valores entre $-80^\circ$ y $80^\circ$

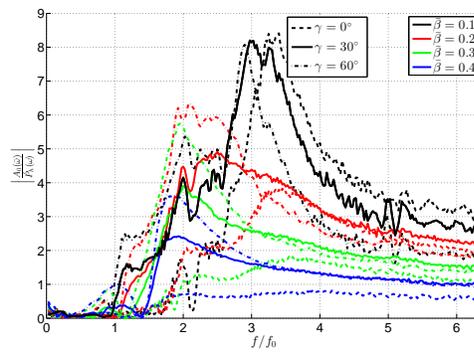
Debido a la multitud de resultados obtenidos a partir de este análisis paramétrico, a continuación solo se presentarán algunas de las gráficas de los coeficientes de emisión para pocos casos particulares, lo anterior con el fin de obtener conclusiones cualitativas:



(a) Coeficiente de Poisson en el estrato igual a 0.25.



(b) Coeficiente de Poisson en el estrato igual a 0.33.



(c) Coeficiente de Poisson en el estrato igual a 0.45.

Figura 7.5: Amplitud del coeficiente de emisión de ondas de Rayleigh para el primer modo en con  $\bar{a} = 0$  y diferentes relaciones de Poisson ante la incidencia de ondas planas  $P$ .

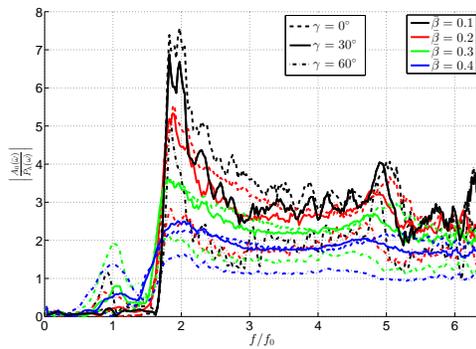
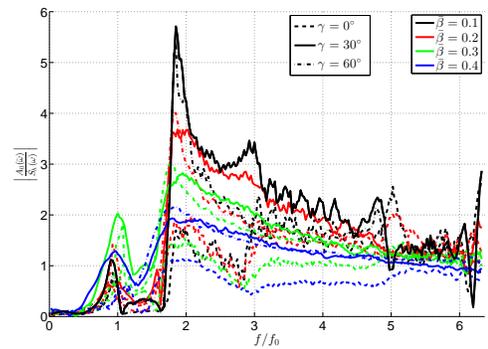
(a) Incidencia de onda plana  $P$ .(b) Incidencia de onda plana  $SV$ .

Figura 7.6: Amplitud del coeficiente de emisión de ondas de Rayleigh para el primer modo en modelos con  $\bar{a} = 1$ ,  $\nu_s = 0.25$  y la incidencia de ondas planas  $P$  y  $SV$ .

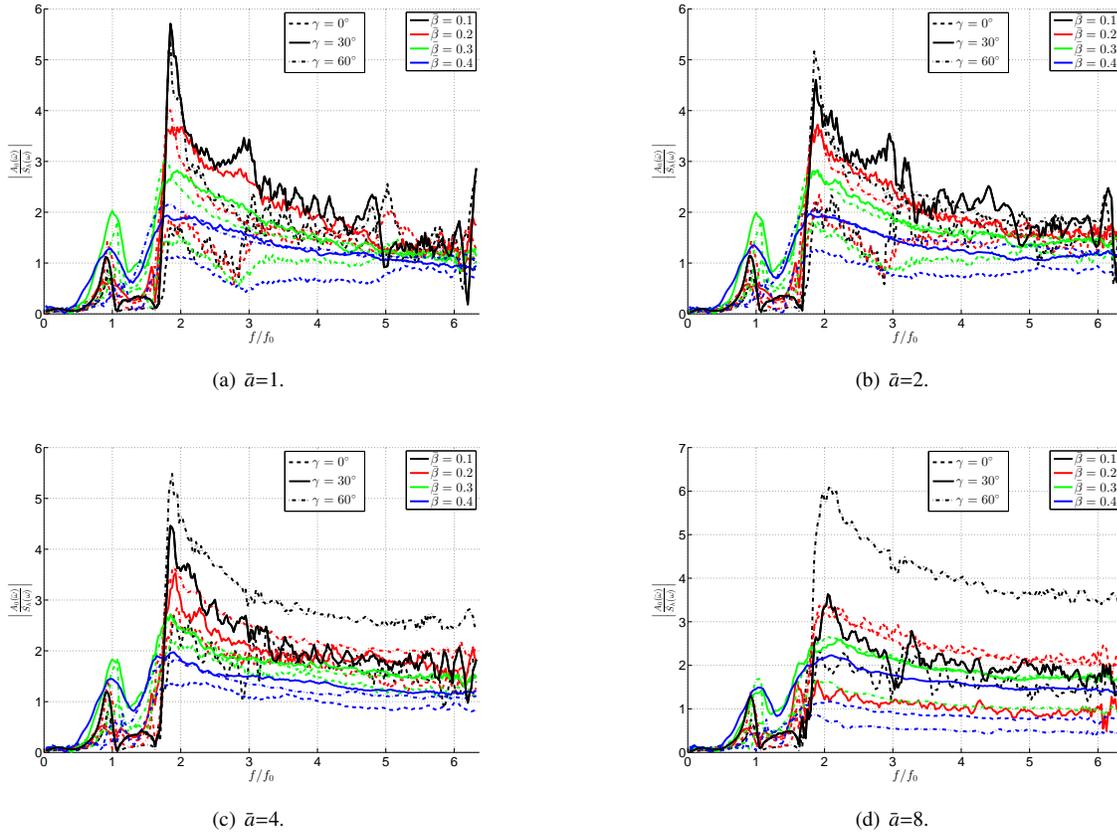


Figura 7.7: Amplitud del coeficiente de emisión de ondas de Rayleigh para el primer modo en modelos con  $\nu_s = 0.25$ , incidencia de ondas  $SV$  y diferentes geometrías ( $\bar{a}$ ).

Basado en lo presentado en las figuras anteriores<sup>1</sup> es posible calcular lo siguiente:

1. Al igual que lo ocurrido para el caso de la emisión de ondas de Love, para el caso de las ondas de Rayleigh se observa como los coeficientes de emisión poseen una frecuencia de corte que coincide con la frecuencia fundamental del modelo unidimensional “asociado”, pero en este caso empleando la velocidad de propagación de las ondas  $P^2$  (ver la figura 7.5).
2. En general no existe mucha diferencia entre las amplitudes de las ondas de Rayleigh emitidas debido a la incidencia de una onda plana  $P$  y una  $SV$  (ver figura 7.6).
3. Al igual que para el caso de las ondas de Love, a mayor ángulo de incidencia mayor amplitud tendrán las ondas de Rayleigh emitidas.
4. Los ángulos de incidencia positivos son mas eficientes que los negativos en la generación de ondas de Rayleigh.

<sup>1</sup>Y en las demás calculadas pero no incluidas por razones de espacio.

<sup>2</sup>Cabe recordar que para el caso de las ondas de Love la frecuencia de corte para el primer modo era  $f_c = \frac{\beta_s}{4H}$ , mientras que para el caso de las ondas de Rayleigh la frecuencia de corte es  $f_c = \frac{\alpha_s}{4H}$ .

**Parte IV**  
**APÉNDICES**



## Método de la matriz global

En este capítulo se presentará el método de la matriz global para obtener la respuesta de medios estratificados antiplanos (SH-Love), de deformación plana (P-SV-Rayleigh) ante la incidencia de ondas planas y la aplicación de fuerzas puntuales (función de Green). Este método fue originalmente propuesto [Knopoff, 1964] para la solución de problemas de incidencia de ondas planas en medios estratificados (ver figura (A.1)) y ha tenido algunas variantes optimizadas como las realizadas por [Chin et al., 1984] y [Schmidt and Tango, 1986].

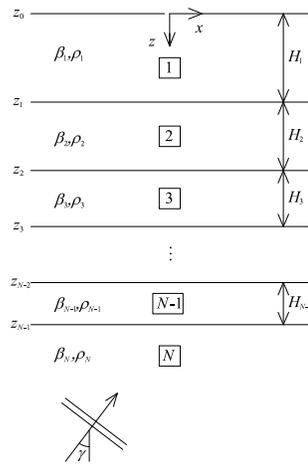


Figura A.1: Medio formado por  $N - 1$  estratos sobre un semiespacio.

La base del método es la solución de las ecuaciones de movimiento en cada medio (estrato o semiespacio) y por medio del cumplimiento de las condiciones de frontera libre, radiación, equilibrio y continuidad en las interfaces, realizar el ensamblaje de todo el sistema. Del anterior procedimiento se obtiene un sistema lineal de ecuaciones cuadrado el cual debe ser resuelto para cada una de las frecuencias de análisis.

## A.1. Antiplano ( $SH$ )

### A.1.1. Ondas planas

A continuación se estudiará el método de la matriz global para el caso de la incidencia de ondas planas  $SH$  en un medio formado por  $N - 1$  estratos sobre un semiespacio (ver figura A.1).

La ecuación de movimiento en el dominio del espacio-frecuencia para el medio  $n$  (estrato o semiespacio) es (ver (2.2.3)) para el caso de  $f(x, z, \omega) = 0$ :

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}(x, z, \omega) + \frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2}(x, z, \omega) + \frac{\omega^2}{\beta_n^2} v(x, z, \omega) = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

Donde:

$v_n(x, z, \omega)$ : Campo de desplazamiento en el medio  $n$ .

$\beta_n$ : Velocidad de propagación de las ondas de corte en el medio  $n$ .

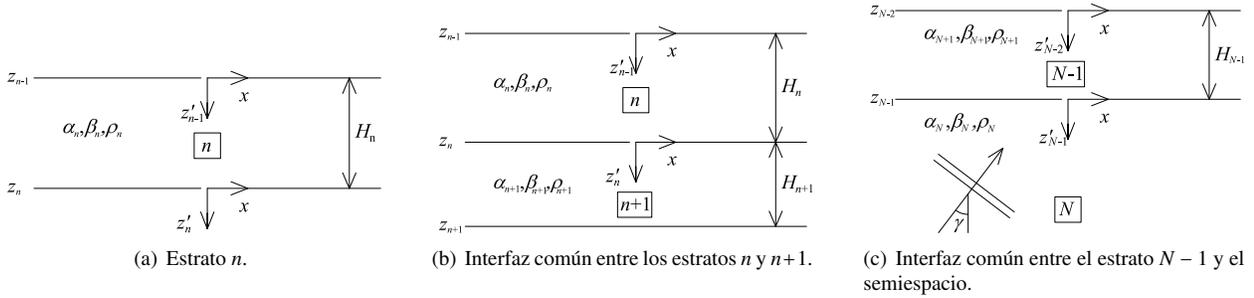


Figura A.2: Estrato  $n$  e interfaz común entre los estratos  $n$  y  $n + 1$ .

#### A.1.1.1. Solución de las ecuaciones de movimiento

A continuación se resolverán las ecuaciones de movimiento para las dos tipologías de elementos que pueden existir en un medio estratificado, las cuales son estrato y semiespacio:

##### Estrato

Para el caso de un estrato (medios 1 a  $N - 1$ ), la solución de (A.1.1) se expresa como:

$$v_n(x, z, \omega) = \{ \hat{S}_n(\omega) \exp[iv_n(z - z_n)] + \hat{S}_n(\omega) \exp[-iv_n(z - z_{n-1})] \} \exp(-ikx) \quad (\text{A.1.2})$$

Donde:

$$k = \frac{\omega}{\beta_N} \sin(\gamma) \quad \text{Número de onda horizontal de la onda incidente}$$

$$v_n = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_n^2} - k^2} \quad \text{Número de onda vertical en el medio } n$$

Mientras que a partir de la ley de Hooke y (A.1.2), el campo de tracciones es:

$$\tau_{zy}^n(x, z, \omega) = i\mu_n v_n \{ \hat{S}_n(\omega) \exp[iv_n(z - z_n)] - \hat{S}_n(\omega) \exp[-iv_n(z - z_{n-1})] \} \exp(-ikx) \quad (\text{A.1.4})$$

##### Semiespacio.

Para el semiespacio (medio  $N$ ) el campo de desplazamientos también es solución de (A.1.1) y se expresa como:

$$v_N(x, z, \omega) = \{ \dot{S}_N(\omega) \exp[iv_N(z - z_{N-1})] + \dot{S}_N(\omega) \exp[-iv_N(z - z_{N-1})] \} \exp(-ikx) \quad (\text{A.1.5})$$

Mientras que las tracciones se expresan como:

$$\tau_{zy}^N(x, z, \omega) = i\mu_N v_N \{ \dot{S}_N(\omega) \exp[iv_N(z - z_{N-1})] - \dot{S}_N(\omega) \exp[-iv_N(z - z_{N-1})] \} \exp(-ikx) \quad (\text{A.1.6})$$

### A.1.1.2. Condiciones de frontera libre, continuidad y/o equilibrio

Además del cumplimiento de las ecuaciones diferenciales en cada uno de los  $N$  medios que forman el modelo estratificado, es necesario cumplir las siguientes condiciones de tracciones libre y continuidad.

#### Tracción libre en la superficie del estrato 1

Para cumplir la condición de frontera libre en  $z = 0$  es necesario evaluar (A.1.4) en  $z = 0$  para el estrato  $n = 1$ , obteniéndose:

$$\dot{S}_1(\omega) \exp(-iv_1 H_1) - \dot{S}_1(\omega) = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

#### Continuidad de tracciones en la interfaz común de los estratos $n$ y $n + 1$ ( $z = z_n$ ).

Para cumplir la condición de continuidad de tracciones entre los estratos  $n$  y  $n + 1$  se emplea la ecuación (A.1.4) para  $n$  y  $n + 1$  y  $z = z_n$  (ver figura A.2(b)):

$$\mu_n v_n \dot{S}_n(\omega) - \mu_n v_n \dot{S}_n(\omega) \exp(-iv_n H_n) - \mu_{n+1} v_{n+1} \dot{S}_{n+1}(\omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) + \mu_{n+1} v_{n+1} \dot{S}_{n+1}(\omega) = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

#### Continuidad de desplazamientos en la interfaz común de los estratos $n$ y $n + 1$ ( $z = z_n$ ).

De forma similar, para cumplir la condición de continuidad de desplazamientos entre los estratos  $n$  y  $n + 1$  se emplea la ecuación (A.1.2) para  $n$  y  $n + 1$  y  $z = z_n$  (ver figura A.2(b)):

$$\dot{S}_n(\omega) + \dot{S}_n(\omega) \exp(-iv_n H_n) - \dot{S}_{n+1}(\omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) - \dot{S}_{n+1}(\omega) = 0 \quad (\text{A.1.9})$$

#### Continuidad de tracciones en la interfaz común entre el estrato $N - 1$ y el semiespacio ( $z = z_{N-1}$ ).

Para cumplir la continuidad de tracciones entre el estrato  $N - 1$  y el semiespacio es necesario emplear la ecuación (A.1.4) para  $n = N - 1$  y la ecuación (A.1.6), obteniéndose (ver figura A.2(c)):

$$v_{N-1} \mu_{N-1} [\dot{S}_{N-1}(\omega) - \dot{S}_{N-1}(\omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1})] - v_N \mu_N [\dot{S}_N(\omega) - \dot{S}_N(\omega)] = 0 \quad (\text{A.1.10})$$

#### Continuidad de desplazamientos en la interfaz común entre el estrato $N - 1$ y el semiespacio ( $z = z_{N-1}$ ).

Para cumplir la continuidad de desplazamientos entre el estrato  $N - 1$  y el semiespacio es necesario emplear la ecuación (A.1.2) para  $n = N - 1$  y la ecuación (A.1.5), obteniéndose (ver figura A.2(c)):

$$\dot{S}_{N-1}(\omega) + \dot{S}_{N-1}(\omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) - \dot{S}_N(\omega) - \dot{S}_N(\omega) = 0 \quad (\text{A.1.11})$$

### A.1.1.3. Ensamblaje del sistema de ecuaciones del modelo

A partir del planteamiento de las condiciones de frontera libre, continuidad de desplazamiento y tracciones en cada una de las interfaces entre dos medios (estratos o semiespacio) se formula un sistema lineal de ecuaciones que tiene la siguiente forma general:

$$\begin{bmatrix} [FS] & [0_{1 \times 2}] & [0_{1 \times 2}] & \cdots & [0_{1 \times 2}] & 0 \\ & [C^1] & [0_{1 \times 2}] & \cdots & [0_{1 \times 2}] & 0 \\ [0_{1 \times 2}] & & [C^2] & \cdots & [0_{1 \times 2}] & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0_{1 \times 2}] & [0_{1 \times 2}] & [0_{1 \times 2}] & \cdots & [D] & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \vdots \\ \{x_{N-1}\} \\ \dot{S}_N(\omega) \end{Bmatrix} = \dot{S}_N(\omega) \begin{Bmatrix} 0 \\ \{0_{2 \times 1}\} \\ \{0_{2 \times 1}\} \\ \vdots \\ \mu_N v_N \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1.12})$$

Donde:

$$\{x_n\} = \begin{cases} \dot{S}_n(\omega) \\ \dot{S}_n(\omega) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{A.1.13})$$

$$[FS] = [\exp(-iv_1 H_1) \quad -1] \quad (\text{A.1.14})$$

$$[C^n] = \begin{bmatrix} \mu_n v_n & -\mu_n v_n \exp(-iv_n H_n) & -\mu_{n+1} v_{n+1} \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) & \mu_{n+1} v_{n+1} \\ 1 & \exp(-iv_n H_n) & -\exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) & -1 \end{bmatrix} \quad n = 1, 2, \dots, N-2 \quad (\text{A.1.15})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \mu_{N-1} v_{N-1} & -\mu_{N-1} v_{N-1} \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) & \mu_N v_N \\ 1 & \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.16})$$

$$[0_{1 \times 2}] = [0 \quad 0] \quad (\text{A.1.17})$$

$$\{0_{2 \times 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1.18})$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (A.1.12) para las amplitudes de las ondas ascendentes y descendentes en cada medio<sup>1</sup>, se emplean las ecuaciones (A.1.2) a (A.1.6) para obtener los desplazamientos y tracciones en el interior de cada uno de los medios.

#### A.1.1.4. Ejemplo

A continuación se presentan unas instantáneas producto de la formulación del procedimiento anteriormente descrito para el siguiente modelo:

	$\beta$	$\rho$	$H$
Medio 1	500	1800	200
Medio 2	1000	1800	300
Medio 3	500	1800	200
Medio 4	1100	1800	400
Medio 5	1500	1800	

La onda incidente tiene un ángulo de incidencia de  $30^\circ$  y una variación temporal corresponde a un pulso de Ricker (ver sección E.1.4) con parámetros  $t_s = 5.0s$  y  $t_p = 0.5$

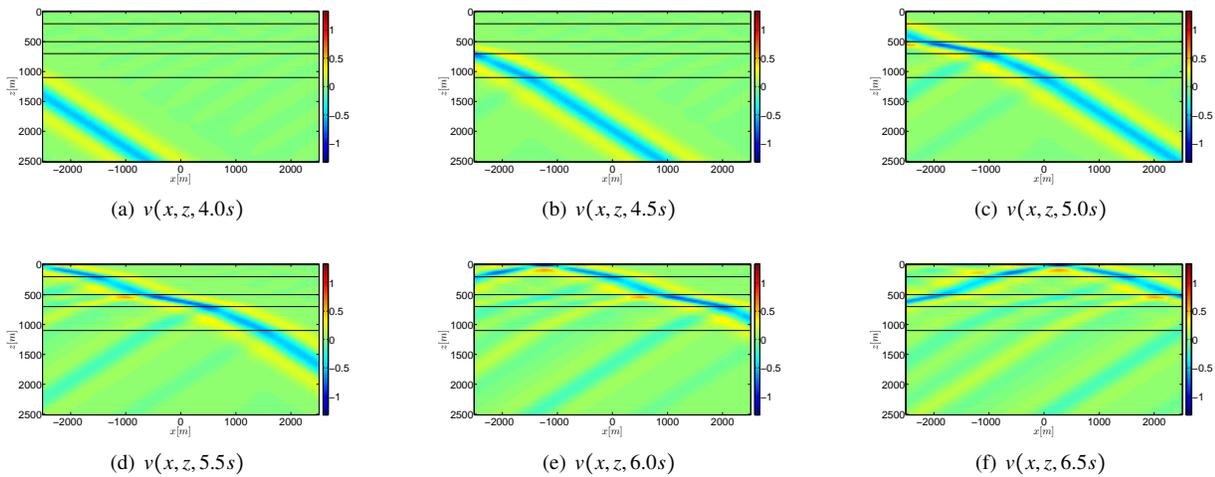


Figura A.3: Campo de desplazamiento.

<sup>1</sup>Las variables desconocidas son  $\dot{S}_n(\omega)$  y  $\dot{S}_n$   $n = 1, 2, \dots, N-1$  y  $\dot{S}_N(\omega)$  debido a que  $\dot{S}_N(\omega)$  es la amplitud de la onda incidente.

### A.1.2. Fuentes puntuales

En esta sección se describe la implantación del método de la matriz global para problemas antiplanos con fuentes aplicadas en las interfaces de un medio estratificado. La formulación y solución de este problema es muy similar a la indicada para el caso de la incidencia de ondas planas (ver sección (A.1.1)) siendo la gran diferencia el hecho que el presente problema se formula en el dominio  $(k, z, \omega)$  mientras que el de ondas planas en  $(x, z, \omega)$ , lo cual trae como consecuencia la realización adicional de la transformada inversa de Fourier respecto a la variable espacial  $x$ .

#### A.1.2.1. Solución de las ecuaciones de movimiento

A continuación se resuelven las ecuaciones de movimiento para las dos tipologías de elementos que pueden existir en un medio estratificado, las cuales son estrato y semiespacio:

##### Estrato

Para el caso de un estrato (medios 1 a  $N - 1$ ), la solución de (2.2.3) se expresa como:

$$v_n(k, z, \omega) = \dot{S}_n(k, \omega) \exp[iv_n(z - z_n)] + \dot{S}_n(k, \omega) \exp[-iv_n(z - z_{n-1})] \quad (\text{A.1.19})$$

Mientras que a partir de la ley de Hooke y (A.1.19), el campo de tracciones es:

$$\tau_{zy}^n(k, z, \omega) = iv_n \mu_n \{ \dot{S}_n(k, \omega) \exp[iv_n(z - z_n)] - \dot{S}_n(k, \omega) \exp[-iv_n(z - z_{n-1})] \} \quad (\text{A.1.20})$$

##### Semiespacio.

Para el semiespacio (medio  $N$ ) el campo de desplazamientos también es solución de (2.2.3) y se expresa como:

$$v_N(k, z, \omega) = \dot{S}_N(k, \omega) \exp[iv_N(z - z_{N-1})] + \dot{S}_N(k, \omega) \exp[-iv_N(z - z_{N-1})] \quad (\text{A.1.21})$$

Mientras que las tracciones se expresan como:

$$\tau_{zy}^N(k, z, \omega) = i\mu_N v_N \{ \dot{S}_N(k, \omega) \exp[iv_N(z - z_{N-1})] - \dot{S}_N(k, \omega) \exp[-iv_N(z - z_{N-1})] \} \quad (\text{A.1.22})$$

#### A.1.2.2. Tracciones prescritas en la frontera 0 ( $z = 0$ )

De evaluar la condición de tracción nula en la superficie se obtiene:

$$\mu_1 v_1 [\dot{S}_1(k, \omega) \exp(-iv_1 H_1) - \dot{S}_1(k, \omega)] = i f_0(k, \omega) \quad (\text{A.1.23})$$

Donde  $f_0(k, \omega)$  es la fuerza aplicada en la interfaz 0.

#### A.1.2.3. Equilibrio y continuidad de desplazamientos en la frontera $n$

Del equilibrio y continuidad de desplazamientos en la interfaz  $n$  se obtiene respectivamente:

$$\mu_n v_n \dot{S}_n(\omega) - \mu_n v_n \dot{S}_n(\omega) \exp(-iv_n H_n) - \mu_{n+1} v_{n+1} \dot{S}_{n+1}(\omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) + \mu_{n+1} v_{n+1} \dot{S}_{n+1}(\omega) = -i f_n(k, \omega) \quad (\text{A.1.24a})$$

$$\dot{S}_n(\omega) + \dot{S}_n(\omega) \exp(-iv_n H_n) - \dot{S}_{n+1}(\omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) - \dot{S}_{n+1}(\omega) = 0 \quad (\text{A.1.24b})$$

Donde  $f_n(k, \omega)$  es la fuerza aplicada en la interfaz  $n$ .

#### A.1.2.4. Equilibrio y continuidad de desplazamientos en la frontera $N - 1$

Por su parte, producto de las condiciones de equilibrio y continuidad de desplazamientos en la interfaz  $N - 1$  se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\mu_{N-1} v_{N-1} [\dot{S}_{N-1}(\omega) - \dot{S}_{N-1}(\omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1})] - \mu_N v_N [\dot{S}_N(\omega) - \dot{S}_N(\omega)] = f_{N-1}(k, \omega) \quad (\text{A.1.25a})$$

$$\dot{S}_{N-1}(\omega) + \dot{S}_{N-1}(\omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) - \dot{S}_N(\omega) - \dot{S}_N(\omega) = 0 \quad (\text{A.1.25b})$$

Donde  $f_{N-1}(k, \omega)$  es la fuerza aplicada en la interfaz  $N - 1$ .

### A.1.2.5. Ensamblaje del sistema de ecuaciones del modelo

A partir del planteamiento de la ecuación de frontera libre, equilibrio y continuidad de desplazamiento en cada una de las interfaces entre dos medios (estratos o semiespacio) se formula un sistema lineal de ecuaciones que tiene la siguiente forma general:

$$\begin{bmatrix} [FS] & [0_{1 \times 2}] & [0_{1 \times 2}] & \cdots & [0_{1 \times 2}] & 0 \\ & [C^1] & [0_{1 \times 2}] & \cdots & [0_{1 \times 2}] & 0 \\ [0_{1 \times 2}] & & [C^2] & \cdots & [0_{1 \times 2}] & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0_{1 \times 2}] & [0_{1 \times 2}] & [0_{1 \times 2}] & \cdots & [D] & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \vdots \\ \{x_{N-1}\} \\ \hat{S}_N(\omega) \end{Bmatrix} = \hat{S}_N(\omega) \begin{Bmatrix} i \frac{f_0(k, \omega)}{\mu_1 v_1} \\ -i f_1(k, \omega) \\ 0 \\ -i f_2(k, \omega) \\ 0 \\ \vdots \\ -i f_{N-1}(k, \omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1.26})$$

Donde  $\{x_n\}$ ,  $[FS]$ ,  $[C^n]$ ,  $[D]$  y  $0_{1 \times 2}$  se han presentado en la sección A.1.1.

### A.1.2.6. Ejemplo

A continuación se presentan unas instantáneas producto de la formulación del procedimiento anteriormente descrito para el siguiente modelo:

	$\beta$ [m/s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$H$ [m]
Medio 1	500	1800	2000
Medio 2	1000	1800	

La fuente aplicada corresponde a una fuente puntual en la superficie, la cual tiene como variación temporal un pulso de Ricker (ver sección E.1.4) con parámetros  $t_s = 1.5s$  y  $t_p = 0.3s$ , a continuación se presentan algunas instantáneas de dicha respuesta.

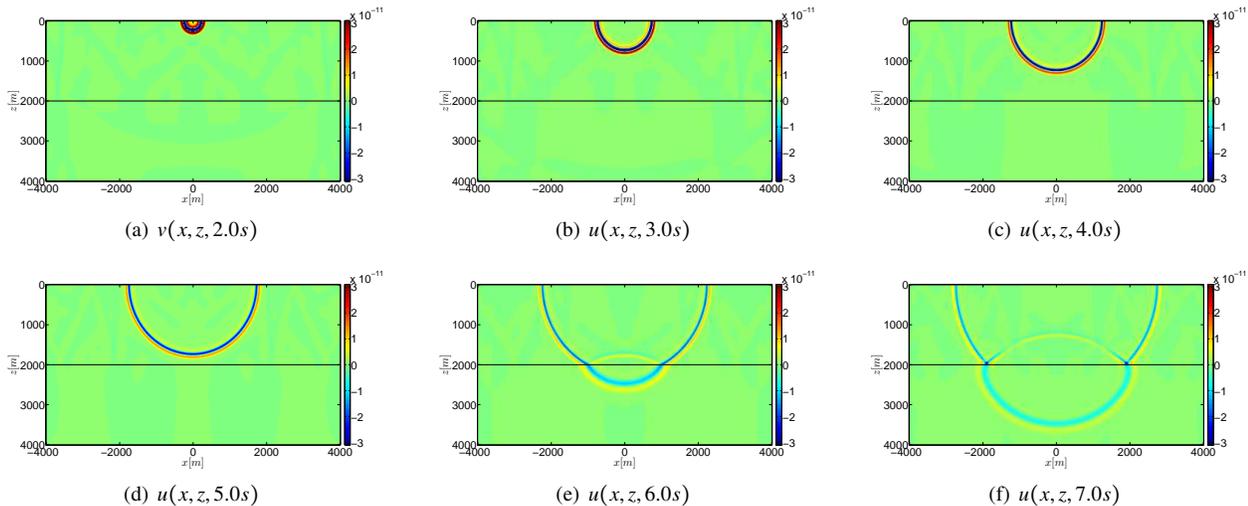


Figura A.4: Campo de desplazamiento.

## A.2. Deformación plana (P-SV)

### A.2.1. Ondas planas

A continuación se presenta el método de la matriz global para el caso de incidencia de ondas planas  $P$  o  $SV$  en modelos estratificados de deformación plana.

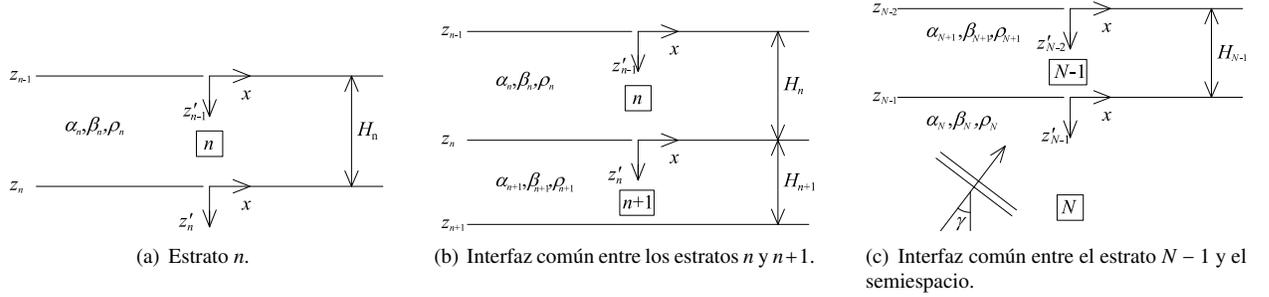


Figura A.5: Estrato  $n$ , interfaz común entre los estratos  $n$  y  $n+1$  e interfaz común entre el estrato  $N-1$  y el semiespacio.

#### A.2.1.1. Estratos

Por comodidad a continuación se reescriben los campos de desplazamientos y esfuerzos para el estrato  $n$  del medio estratificado en estudio, los cuales se obtienen a partir de las ecuaciones (2.3.8) a (2.3.11):

$$u_n(x, z, \omega) = \{-ik [\dot{p}_n(\omega) \exp(i\gamma_n z'_n) + \dot{p}_n(\omega) \exp(-i\gamma_n z'_{n-1})] - iv_n [\dot{s}_n(\omega) \exp(iv_n z'_n) - \dot{s}_n(\omega) \exp(-iv_n z'_{n-1})]\} \exp(-ikx) \quad (\text{A.2.1})$$

$$w_n(x, z, \omega) = \{i\gamma_n [\dot{p}_n(\omega) \exp(i\gamma_n z'_n) - \dot{p}_n(\omega) \exp(-i\gamma_n z'_{n-1})] - ik [\dot{s}_n(\omega) \exp(iv_n z'_n) + \dot{s}_n(\omega) \exp(-iv_n z'_{n-1})]\} \exp(-ikx) \quad (\text{A.2.2})$$

$$\tau_{zx}^n(x, z, \omega) = \mu_n \{2k\gamma_n [\dot{p}_n(\omega) \exp(i\gamma_n z'_n) - \dot{p}_n(\omega) \exp(-i\gamma_n z'_{n-1})] - l_n [\dot{s}_n(\omega) \exp(iv_n z'_n) + \dot{s}_n(\omega) \exp(-iv_n z'_{n-1})]\} \exp(-ikx) \quad (\text{A.2.3})$$

$$\tau_{zz}^n(x, z, \omega) = \mu_n \{l_n [\dot{p}_n(\omega) \exp(i\gamma_n z'_n) + \dot{p}_n(\omega) \exp(-i\gamma_n z'_{n-1})] + 2kv_n [\dot{s}_n(\omega) \exp(iv_n z'_n) - \dot{s}_n(\omega) \exp(-iv_n z'_{n-1})]\} \exp(-ikx) \quad (\text{A.2.4})$$

Donde:

$$z'_i = z - z_i$$

#### A.2.1.2. Semiespacio

Procediendo de forma similar a como se hizo para el estrato  $n$ , los campos de desplazamiento y esfuerzos en el semiespacio se expresan respectivamente como:

$$u_N(x, z, \omega) = \{-ik [\dot{p}_N(\omega) \exp(i\gamma_N z'_{N-1}) + \dot{p}_N(\omega) \exp(-i\gamma_N z'_{N-1})] - iv_N [\dot{s}_N(\omega) \exp(iv_N z'_{N-1}) - \dot{s}_N(\omega) \exp(-iv_N z'_{N-1})]\} \exp(-ikx) \quad (\text{A.2.5})$$

$$w_N(x, z, \omega) = \{i\gamma_N [\dot{p}_N(\omega) \exp(i\gamma_N z'_{N-1}) - \dot{p}_N(\omega) \exp(-i\gamma_N z'_{N-1})] - ik [\dot{s}_N(\omega) \exp(iv_N z'_{N-1}) + \dot{s}_N(\omega) \exp(-iv_N z'_{N-1})]\} \exp(-ikx) \quad (\text{A.2.6})$$

$$\tau_{zx}^N(x, z, \omega) = \mu_N \{2k\gamma_N [\dot{p}_N(\omega) \exp(i\gamma_N z'_{N-1}) - \dot{p}_N(\omega) \exp(-i\gamma_N z'_{N-1})] - l_N [\dot{s}_N(\omega) \exp(iv_N z'_{N-1}) + \dot{s}_N(\omega) \exp(-iv_N z'_{N-1})]\} \exp(-ikx) \quad (\text{A.2.7})$$

$$\tau_{zz}^N(x, z, \omega) = \mu_N \{l_N [\dot{p}_N(\omega) \exp(i\gamma_N z'_{N-1}) + \dot{p}_N(\omega) \exp(-i\gamma_N z'_{N-1})] + 2kv_N [\dot{s}_N(\omega) \exp(iv_N z'_{N-1}) - \dot{s}_N(\omega) \exp(-iv_N z'_{N-1})]\} \exp(-ikx) \quad (\text{A.2.8})$$

### A.2.1.3. Tracciones libres en la superficie $z = z_0 = 0$

Empleando las ecuaciones (A.2.3) y (A.2.4) para  $n = 1$  y  $z = 0$  se obtiene que las condiciones de frontera libre implican:

$$2k\gamma_1 [\dot{p}_1(\omega) \exp(-i\gamma_1 H_1) - \dot{p}_1(\omega)] - l_1 [\dot{s}_1(\omega) \exp(-iv_1 H_1) + \dot{s}_1(\omega)] = 0 \quad (\text{A.2.9})$$

$$l_1 [\dot{p}_1(\omega) \exp(-i\gamma_1 H_1) + \dot{p}_1(\omega)] + 2kv_1 \mu_1 [\dot{s}_1(\omega) \exp(-iv_1 H_1) - \dot{s}_1(\omega)] = 0 \quad (\text{A.2.10})$$

### A.2.1.4. Continuidad de tracciones en la interfaz común de los estrato $n$ y $n + 1$ ( $z = z_n$ )

Empleando las ecuaciones (A.2.3) y (A.2.4) para los estratos  $n$  y  $n + 1$  la continuidad de tracciones entre estos estratos se expresa como (ver figura A.5(b)):

$$2\mu_n k\gamma_n \dot{p}_n(\omega) - 2\mu_n k\gamma_n \dot{p}_n(\omega) \exp(-i\gamma_n H_n) - \mu_n l_n \dot{s}_n(\omega) - \mu_n l_n \dot{s}_n(\omega) \exp(-iv_n H_n) - 2\mu_{n+1} k\gamma_{n+1} \dot{p}_{n+1}(\omega) \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) + 2\mu_{n+1} k\gamma_{n+1} \dot{p}_{n+1}(\omega) + \mu_{n+1} l_{n+1} \dot{s}_{n+1}(\omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) + \mu_{n+1} l_{n+1} \dot{s}_{n+1}(\omega) = 0 \quad (\text{A.2.11})$$

$$\mu_n l_n \dot{p}_n(\omega) + \mu_n l_n \dot{p}_n(\omega) \exp(-i\gamma_n H_n) + 2kv_n \mu_n \dot{s}_n(\omega) - 2kv_n \mu_n \dot{s}_n(\omega) \exp(-iv_n H_n) - \mu_{n+1} l_{n+1} \dot{p}_{n+1}(\omega) \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) - \mu_{n+1} l_{n+1} \dot{p}_{n+1}(\omega) - 2kv_{n+1} \mu_{n+1} \dot{s}_{n+1}(\omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) + 2kv_{n+1} \mu_{n+1} \dot{s}_{n+1}(\omega) = 0 \quad (\text{A.2.12})$$

### A.2.1.5. Continuidad de desplazamientos en la interfaz común del estrato $n$ y $n + 1$ ( $z = z_n$ )

A partir las ecuaciones (A.2.1) y (A.2.2) para los estratos  $n$  y  $n + 1$  la continuidad de tracciones entre estos estratos se expresa como (ver figura A.5(b)):

$$-k\dot{p}_n(\omega) - k\dot{p}_n(\omega) \exp(-i\gamma_n H_n) - v_n \dot{s}_n(\omega) + v_n \dot{s}_n(\omega) \exp(-iv_n H_n) + k\dot{p}_{n+1}(\omega) \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) + k\dot{p}_{n+1}(\omega) + v_{n+1} \dot{s}_{n+1}(\omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) - v_{n+1} \dot{s}_{n+1}(\omega) = 0 \quad (\text{A.2.13})$$

$$\gamma_n \dot{p}_n(\omega) - \gamma_n \dot{p}_n(\omega) \exp(-i\gamma_n H_n) - k\dot{s}_n(\omega) - k\dot{s}_n(\omega) \exp(-iv_n H_n) - \gamma_{n+1} \dot{p}_{n+1}(\omega) \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) + \gamma_{n+1} \dot{p}_{n+1}(\omega) + k\dot{s}_{n+1}(\omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) + k\dot{s}_{n+1}(\omega) = 0 \quad (\text{A.2.14})$$

### A.2.1.6. Continuidad de tracciones en la interfaz común del estrato $N - 1$ y el semiespacio

Evaluando las ecuaciones (A.2.3) y (A.2.4) para el estrato  $N - 1$  y las ecuaciones (A.2.7) y (A.2.8) para el semiespacio, la continuidad de tracciones entre ambos se expresa como (ver figura A.5(c)):

$$2\mu_{N-1} k\gamma_{N-1} \dot{p}_{N-1}(\omega) - 2\mu_{N-1} k\gamma_{N-1} \dot{p}_{N-1}(\omega) \exp(-i\gamma_{N-1} H_{N-1}) - \mu_{N-1} l_{N-1} \dot{s}_{N-1}(\omega) - \mu_{N-1} l_{N-1} \dot{s}_{N-1}(\omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) - 2\mu_N k\gamma_N \dot{p}_N(\omega) + 2\mu_N k\gamma_N \dot{p}_N(\omega) + \mu_N l_N \dot{s}_N(\omega) + \mu_N l_N \dot{s}_N(\omega) = 0 \quad (\text{A.2.15})$$

$$\mu_{N-1} l_{N-1} \dot{p}_{N-1}(\omega) + \mu_{N-1} l_{N-1} \dot{p}_{N-1}(\omega) \exp(-i\gamma_{N-1} H_{N-1}) + 2kv_{N-1} \mu_{N-1} \dot{s}_{N-1}(\omega) - 2kv_{N-1} \mu_{N-1} \dot{s}_{N-1}(\omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) - \mu_N l_N \dot{p}_N(\omega) - \mu_N l_N \dot{p}_N(\omega) - 2kv_N \mu_N \dot{s}_N(\omega) + 2kv_N \mu_N \dot{s}_N(\omega) = 0 \quad (\text{A.2.16})$$

### A.2.1.7. Continuidad de desplazamientos en la interfaz común del estrato $N - 1$ y el semiespacio

Evaluando las ecuaciones (A.2.1) y (A.2.2) para el estrato  $N - 1$  y las ecuaciones (A.2.5) y (A.2.6) para el semiespacio, la continuidad de desplazamientos entre ambos se expresa como (ver figura A.5(c)):

$$-k\hat{p}_{N-1}(\omega) - k\hat{p}_{N-1}(\omega) \exp(-i\gamma_{N-1}H_{N-1}) - v_{N-1}\hat{s}_{N-1}(\omega) + v_{N-1}\hat{s}_{N-1}(\omega) \exp(-iv_{N-1}H_{N-1}) \\ + k\hat{p}_N(\omega) + k\hat{p}_N(\omega) + v_N\hat{s}_N(\omega) - v_N\hat{s}_N(\omega) = 0 \quad (\text{A.2.17})$$

$$\gamma_{N-1}\hat{p}_{N-1}(\omega) - \gamma_{N-1}\hat{p}_{N-1}(\omega) \exp(-i\gamma_{N-1}H_{N-1}) - k\hat{s}_{N-1}(\omega) - k\hat{s}_{N-1}(\omega) \exp(-iv_{N-1}H_{N-1}) \\ - \gamma_N\hat{p}_N(\omega) + \gamma_N\hat{p}_N(\omega) + k\hat{s}_N(\omega) + k\hat{s}_N(\omega) = 0 \quad (\text{A.2.18})$$

### A.2.1.8. Sistema de ecuaciones a resolver

Las ecuaciones (A.2.9) a (A.2.18) se pueden escribir matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} [FS] & [0_{2 \times 2}] & [0_{2 \times 2}] & \cdots & [0_{2 \times 2}] & [0_{2 \times 2}] \\ [C^1] & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & \cdots & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] \\ [0_{4 \times 2}] & [C^2] & [0_{4 \times 2}] & \cdots & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & \cdots & [C^{N-2}] & [0_{4 \times 2}] \\ [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & \cdots & [0_{4 \times 2}] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \vdots \\ \{x_{N-1}\} \\ \{x_N\} \end{Bmatrix} = \hat{p}_N(\omega) \begin{Bmatrix} \{0_{2 \times 1}\} \\ \{0_{2 \times 1}\} \\ \{0_{2 \times 1}\} \\ \vdots \\ \{0_{2 \times 1}\} \\ \{b_I\} \end{Bmatrix} + \hat{s}_N(\omega) \begin{Bmatrix} \{0_{2 \times 1}\} \\ \{0_{2 \times 1}\} \\ \{0_{2 \times 1}\} \\ \vdots \\ \{0_{2 \times 1}\} \\ \{b_{II}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.19})$$

Donde:

$[0_{m \times n}]$ : Matriz de  $m \times n$  con todos sus elementos iguales a cero.

$$[FS] = \begin{bmatrix} 2k\gamma_1 \exp(-i\gamma_1 H_1) & -2k\gamma_1 & -l_1 \exp(-iv_1 H_1) & -l_1 \\ l_1 \exp(-i\gamma_1 H_1) & l_1 & 2kv_1 \exp(-iv_1 H_1) & -2kv_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.20})$$

$$[C^n] = \begin{bmatrix} C_{11}^n & C_{12}^n & C_{13}^n & C_{14}^n & C_{15}^n & C_{16}^n & C_{17}^n & C_{18}^n \\ C_{21}^n & C_{22}^n & C_{23}^n & C_{24}^n & C_{25}^n & C_{26}^n & C_{27}^n & C_{28}^n \\ C_{31}^n & C_{32}^n & C_{33}^n & C_{34}^n & C_{35}^n & C_{36}^n & C_{37}^n & C_{38}^n \\ C_{41}^n & C_{42}^n & C_{43}^n & C_{44}^n & C_{45}^n & C_{46}^n & C_{47}^n & C_{48}^n \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.21})$$

Con:

$$\begin{aligned} C_{11}^n &= 2\mu_n k \gamma_n & C_{31}^n &= -k \\ C_{12}^n &= -2\mu_n k \gamma_n \exp(-i\gamma_n H_n) & C_{32}^n &= -k \exp(-i\gamma_n H_n) \\ C_{13}^n &= -\mu_n l_n & C_{33}^n &= -v_n \\ C_{14}^n &= -\mu_n l_n \exp(-iv_n H_n) & C_{34}^n &= v_n \exp(-iv_n H_n) \\ C_{15}^n &= -2\mu_{n+1} k \gamma_{n+1} \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) & C_{35}^n &= k \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) \\ C_{16}^n &= +2\mu_{n+1} k \gamma_{n+1} & C_{36}^n &= k \\ C_{17}^n &= \mu_{n+1} l_{n+1} \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) & C_{37}^n &= v_{n+1} \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) \\ C_{18}^n &= \mu_{n+1} l_{n+1} & C_{38}^n &= -v_{n+1} \\ \\ C_{21}^n &= \mu_n l_n & C_{41}^n &= \gamma_n \\ C_{22}^n &= \mu_n l_n \exp(-i\gamma_n H_n) & C_{42}^n &= -\gamma_n \exp(-i\gamma_n H_n) \\ C_{23}^n &= 2kv_n \mu_n & C_{43}^n &= -k \\ C_{24}^n &= -2kv_n \mu_n \exp(-iv_n H_n) & C_{44}^n &= -k \exp(-iv_n H_n) \\ C_{25}^n &= -\mu_{n+1} l_{n+1} \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) & C_{45}^n &= -\gamma_{n+1} \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) \\ C_{26}^n &= -\mu_{n+1} l_{n+1} & C_{46}^n &= \gamma_{n+1} \\ C_{27}^n &= -2kv_{n+1} \mu_{n+1} \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) & C_{47}^n &= k \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) \\ C_{28}^n &= 2kv_{n+1} \mu_{n+1} & C_{48}^n &= k \end{aligned}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.22})$$

Con:

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2\mu_{N-1}k\gamma_{N-1} & D_{31} &= -k \\ D_{12} &= -2\mu_{N-1}k\gamma_{N-1} \exp(-i\gamma_{N-1}H_{N-1}) & D_{32} &= -k \exp(-i\gamma_{N-1}H_{N-1}) \\ D_{13} &= -\mu_{N-1}l_{N-1} & D_{33} &= -v_{N-1} \\ D_{14} &= -\mu_{N-1}l_{N-1} \exp(-iv_{N-1}H_{N-1}) & D_{34} &= v_{N-1} \exp(-iv_{N-1}H_{N-1}) \\ D_{15} &= 2\mu_N k \gamma_N & D_{35} &= k \\ D_{16} &= v_N l_N & D_{36} &= -v_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{21} &= \mu_{N-1}l_{N-1} & D_{41} &= \gamma_{N-1} \\ D_{22} &= \mu_{N-1}l_{N-1} \exp(-i\gamma_{N-1}H_{N-1}) & D_{42} &= -\gamma_{N-1} \exp(-i\gamma_{N-1}H_{N-1}) \\ D_{23} &= 2\mu_{N-1}k v_{N-1} & D_{43} &= -k \\ D_{24} &= -2\mu_{N-1}k v_{N-1} \exp(-iv_{N-1}H_{N-1}) & D_{44} &= -k \exp(-iv_{N-1}H_{N-1}) \\ D_{25} &= -\mu_N l_N & D_{45} &= \gamma_N \\ D_{26} &= -2\mu_N k v_N & D_{46} &= k \end{aligned}$$

$$[b_I] = \begin{Bmatrix} 2\mu_N k \gamma_N \\ \mu_N l_N \\ -k \\ \gamma_N \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.23})$$

$$[b_{II}] = \begin{Bmatrix} -\mu_N l_N \\ 2\mu_N k v_N \\ -v_N \\ -k \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.24})$$

$$\{x_n\} = \begin{Bmatrix} \dot{p}_n(\omega) \\ \dot{p}_n(\omega) \\ \dot{s}_n(\omega) \\ \dot{s}_n(\omega) \end{Bmatrix} \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{A.2.25})$$

$$\{x_N\} = \begin{Bmatrix} \dot{p}_N(\omega) \\ \dot{s}_N(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.26})$$

### A.2.1.9. Ejemplo

En la figura A.2.1.9 se presentan las instantáneas para el caso de la aplicación de la fuerza vertical para el siguiente modelo:

	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$H$
Medio 1	150	100	1800	20
Medio 2	600	400	1800	30
Medio 3	1200	800	1800	

La onda incidente corresponde a una onda plana  $S V$  cuya variación temporal es un pulso Ricker (ver sección E.1.4) con parámetros  $t_s = 3.0s$  y  $t_p = 0.07$ .

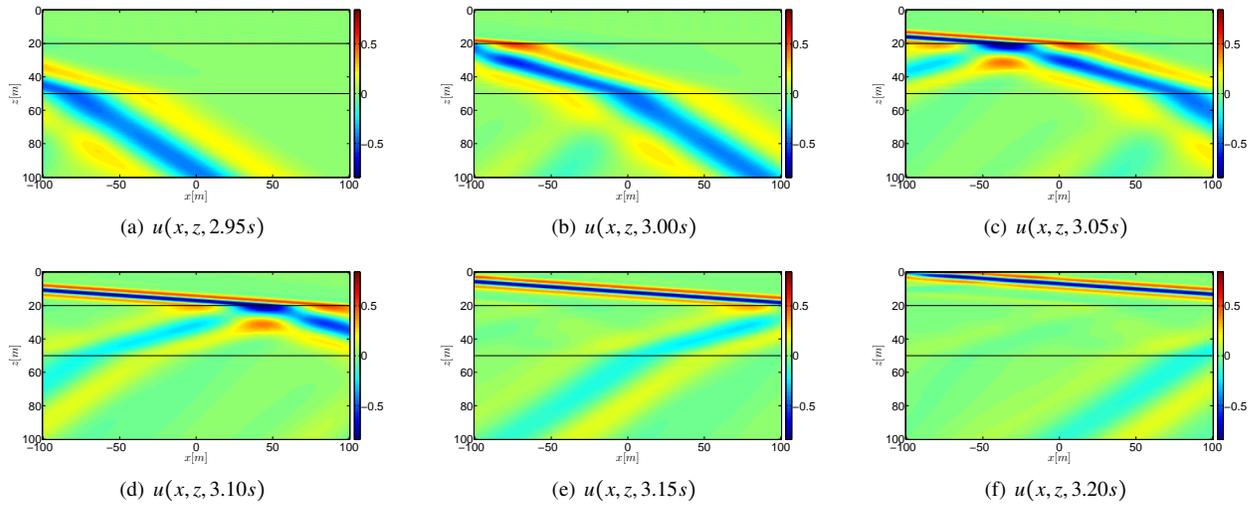


Figura A.6: Campo de desplazamiento horizontal.

## A.2.2. Fuentes puntuales

### A.2.2.1. Estratos

Por comodidad a continuación se reescribirán los campos de desplazamientos y esfuerzos para el estrato  $n$  del medio estratificado en estudio, los cuales se obtienen a partir de las ecuaciones (2.3.8) a (2.3.11):

$$u_n(k, z, \omega) = -ik [\dot{p}_n(k, \omega) \exp(i\gamma_n z'_n) + \dot{p}_n(k, \omega) \exp(-i\gamma_n z'_{n-1})] - i v_n [\dot{s}_n(k, \omega) \exp(i v_n z'_n) - \dot{s}_n(k, \omega) \exp(-i v_n z'_{n-1})] \quad (\text{A.2.27})$$

$$w_n(k, z, \omega) = i\gamma_n [\dot{p}_n(k, \omega) \exp(i\gamma_n z'_n) - \dot{p}_n(k, \omega) \exp(-i\gamma_n z'_{n-1})] - ik [\dot{s}_n(k, \omega) \exp(i v_n z'_n) + \dot{s}_n(k, \omega) \exp(-i v_n z'_{n-1})] \quad (\text{A.2.28})$$

$$\tau_{zx}^n(k, z, \omega) = \mu_n \{2k\gamma_n [\dot{p}_n(k, \omega) \exp(i\gamma_n z'_n) - \dot{p}_n(k, \omega) \exp(-i\gamma_n z'_{n-1})] - l_n [\dot{s}_n(k, \omega) \exp(i v_n z'_n) + \dot{s}_n(k, \omega) \exp(-i v_n z'_{n-1})]\} \quad (\text{A.2.29})$$

$$\tau_{zz}^n(k, z, \omega) = \mu_n \{l_n [\dot{p}_n(k, \omega) \exp(i\gamma_n z'_n) + \dot{p}_n(k, \omega) \exp(-i\gamma_n z'_{n-1})] + 2k v_n [\dot{s}_n(k, \omega) \exp(i v_n z'_n) - \dot{s}_n(k, \omega) \exp(-i v_n z'_{n-1})]\} \quad (\text{A.2.30})$$

Donde:

$$z'_i = z - z_i$$

### A.2.2.2. Semiespacio

Procediendo de forma similar a como se hizo para el estrato  $n$ , los campos de desplazamiento y esfuerzos en el semiespacio se expresan respectivamente como:

$$u_N(k, z, \omega) = -ik [\dot{p}_N(k, \omega) \exp(i\gamma_N z'_{N-1}) + \dot{p}_N(k, \omega) \exp(-i\gamma_N z'_{N-1})] - i v_N [\dot{s}_N(k, \omega) \exp(i v_N z'_{N-1}) - \dot{s}_N(k, \omega) \exp(-i v_N z'_{N-1})] \quad (\text{A.2.31})$$

$$w_N(k, z, \omega) = i\gamma_N [\dot{p}_N(k, \omega) \exp(i\gamma_N z'_{N-1}) - \dot{p}_N(k, \omega) \exp(-i\gamma_N z'_{N-1})] - ik [\dot{s}_N(k, \omega) \exp(i v_N z'_{N-1}) + \dot{s}_N(k, \omega) \exp(-i v_N z'_{N-1})] \quad (\text{A.2.32})$$

$$\tau_{zx}^N(k, z, \omega) = \mu_N \{2k\gamma_N [\dot{p}_N(k, \omega) \exp(i\gamma_N z'_{N-1}) - \dot{p}_N(k, \omega) \exp(-i\gamma_N z'_{N-1})] - l_N [\dot{s}_N(k, \omega) \exp(i v_N z'_{N-1}) + \dot{s}_N(k, \omega) \exp(-i v_N z'_{N-1})]\} \quad (\text{A.2.33})$$

$$\tau_{zz}^N(k, z, \omega) = \mu_N \{l_N [\dot{p}_N(k, \omega) \exp(i\gamma_N z'_{N-1}) + \dot{p}_N(k, \omega) \exp(-i\gamma_N z'_{N-1})] + 2k v_N [\dot{s}_N(k, \omega) \exp(i v_N z'_{N-1}) - \dot{s}_N(k, \omega) \exp(-i v_N z'_{N-1})]\} \quad (\text{A.2.34})$$

### A.2.2.3. Tracciones en la superficie $z = z_0 = 0$

Empleando las ecuaciones (A.2.29) y (A.2.30) para  $n = 1$  y  $z = 0$  se obtiene que las condiciones de frontera libre implican:

$$2k\gamma_1 [\dot{p}_1(k, \omega) \exp(-i\gamma_1 H_1) - \dot{p}_1(k, \omega)] - l_1 [\dot{s}_1(k, \omega) \exp(-i v_1 H_1) + \dot{s}_1(k, \omega)] = -\frac{f_x^0(k, \omega)}{\mu_1} \quad (\text{A.2.35})$$

$$l_1 [\dot{p}_1(k, \omega) \exp(-i\gamma_1 H_1) + \dot{p}_1(k, \omega)] + 2k v_1 [\dot{s}_1(k, \omega) \exp(-i v_1 H_1) - \dot{s}_1(k, \omega)] = -\frac{f_z^0(k, \omega)}{\mu_1} \quad (\text{A.2.36})$$

Donde:

$f_i^j(k, \omega)$ : Fuerza aplicada en dirección  $j$  en la interfaz  $j$  en el dominio  $(k, \omega)$ .

#### A.2.2.4. Equilibrio en la interfaz $n$ (entre los medios $n$ y $n + 1$ )

Empleando las ecuaciones (A.2.29) y (A.2.30) para los estratos  $n$  y  $n + 1$  la continuidad de tracciones entre estos estratos se expresa como (ver figura A.5(b)):

$$\begin{aligned} & 2\mu_n k \gamma_n \dot{p}_n(k, \omega) - 2\mu_n k \gamma_n \dot{p}_n(k, \omega) \exp(-i\gamma_n H_n) - \mu_n l_n \dot{s}_n(k, \omega) - \mu_n l_n \dot{s}_n(k, \omega) \exp(-iv_n H_n) \\ & - 2\mu_{n+1} k \gamma_{n+1} \dot{p}_{n+1}(k, \omega) \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) + 2\mu_{n+1} k \gamma_{n+1} \dot{p}_{n+1}(k, \omega) + \mu_{n+1} l_{n+1} \dot{s}_{n+1}(k, \omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) \\ & + \mu_{n+1} l_{n+1} \dot{s}_{n+1}(k, \omega) = f_x^n(k, \omega) \quad (\text{A.2.37}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_n l_n \dot{p}_n(k, \omega) + \mu_n l_n \dot{p}_n(k, \omega) \exp(-i\gamma_n H_n) + 2k v_n \mu_n \dot{s}_n(k, \omega) - 2k v_n \mu_n \dot{s}_n(k, \omega) \exp(-iv_n H_n) \\ & - \mu_{n+1} l_{n+1} \dot{p}_{n+1}(k, \omega) \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) - \mu_{n+1} l_{n+1} \dot{p}_{n+1}(k, \omega) - 2k v_{n+1} \mu_{n+1} \dot{s}_{n+1}(k, \omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) \\ & + 2k v_{n+1} \mu_{n+1} \dot{s}_{n+1}(k, \omega) = f_z^n(k, \omega) \quad (\text{A.2.38}) \end{aligned}$$

#### A.2.2.5. Continuidad de desplazamientos en la interfaz $n$ (entre los medios $n$ y $n + 1$ )

A partir las ecuaciones (A.2.27) y (A.2.28) para los estratos  $n$  y  $n + 1$  la continuidad de tracciones entre estos estratos se expresa como (ver figura A.5(b)):

$$\begin{aligned} & -k \dot{p}_n(k, \omega) - k \dot{p}_n(k, \omega) \exp(-i\gamma_n H_n) - v_n \dot{s}_n(k, \omega) + v_n \dot{s}_n(k, \omega) \exp(-iv_n H_n) \\ & + k \dot{p}_{n+1}(k, \omega) \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) + k \dot{p}_{n+1}(k, \omega) + v_{n+1} \dot{s}_{n+1}(k, \omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) - v_{n+1} \dot{s}_{n+1}(k, \omega) = 0 \quad (\text{A.2.39}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_n \dot{p}_n(k, \omega) - \gamma_n \dot{p}_n(k, \omega) \exp(-i\gamma_n H_n) - k \dot{s}_n(k, \omega) - k \dot{s}_n(k, \omega) \exp(-iv_n H_n) \\ & - \gamma_{n+1} \dot{p}_{n+1}(k, \omega) \exp(-i\gamma_{n+1} H_{n+1}) + \gamma_{n+1} \dot{p}_{n+1}(k, \omega) + k \dot{s}_{n+1}(k, \omega) \exp(-iv_{n+1} H_{n+1}) + k \dot{s}_{n+1}(k, \omega) = 0 \quad (\text{A.2.40}) \end{aligned}$$

#### A.2.2.6. Equilibrio interfaz común del estrato $N - 1$ y el semiespacio

Evaluando las ecuaciones (A.2.29) y (A.2.30) para el estrato  $N - 1$  y las ecuaciones (A.2.33) y (A.2.34) para el semiespacio, la continuidad de tracciones entre ambos se expresa como (ver figura A.5(c)):

$$\begin{aligned} & 2\mu_{N-1} k \gamma_{N-1} \dot{p}_{N-1}(k, \omega) - 2\mu_{N-1} k \gamma_{N-1} \dot{p}_{N-1}(k, \omega) \exp(-i\gamma_{N-1} H_{N-1}) - \mu_{N-1} l_{N-1} \dot{s}_{N-1}(k, \omega) \\ & - \mu_{N-1} l_{N-1} \dot{s}_{N-1}(k, \omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) - 2\mu_N k \gamma_N \dot{p}_N(k, \omega) + 2\mu_N k \gamma_N \dot{p}_N(k, \omega) + \mu_N l_N \dot{s}_N(k, \omega) \\ & + \mu_N l_N \dot{s}_N(k, \omega) = f_x^{N-1}(k, \omega) \quad (\text{A.2.41}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_{N-1} l_{N-1} \dot{p}_{N-1}(k, \omega) + \mu_{N-1} l_{N-1} \dot{p}_{N-1}(k, \omega) \exp(-i\gamma_{N-1} H_{N-1}) + 2k v_{N-1} \mu_{N-1} \dot{s}_{N-1}(k, \omega) \\ & - 2k v_{N-1} \mu_{N-1} \dot{s}_{N-1}(k, \omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) - \mu_N l_N \dot{p}_N(k, \omega) - \mu_N l_N \dot{p}_N(k, \omega) - 2k v_N \mu_N \dot{s}_N(k, \omega) \\ & + 2k v_N \mu_N \dot{s}_N(k, \omega) = f_z^{N-1}(k, \omega) \quad (\text{A.2.42}) \end{aligned}$$

#### A.2.2.7. Continuidad de desplazamientos en la interfaz común del estrato $N - 1$ y el semiespacio

Evaluando las ecuaciones (A.2.27) y (A.2.28) para el estrato  $N - 1$  y las ecuaciones (A.2.31) y (A.2.32) para el semiespacio, la continuidad de desplazamientos entre ambos se expresa como (ver figura A.5(c)):

$$\begin{aligned} & -k \dot{p}_{N-1}(k, \omega) - k \dot{p}_{N-1}(k, \omega) \exp(-i\gamma_{N-1} H_{N-1}) - v_{N-1} \dot{s}_{N-1}(k, \omega) + v_{N-1} \dot{s}_{N-1}(k, \omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) \\ & + k \dot{p}_N(k, \omega) + k \dot{p}_N(k, \omega) + v_N \dot{s}_N(k, \omega) - v_N \dot{s}_N(k, \omega) = 0 \quad (\text{A.2.43}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{N-1} \dot{p}_{N-1}(k, \omega) - \gamma_{N-1} \dot{p}_{N-1}(k, \omega) \exp(-i\gamma_{N-1} H_{N-1}) - k \dot{s}_{N-1}(k, \omega) - k \dot{s}_{N-1}(k, \omega) \exp(-iv_{N-1} H_{N-1}) \\ & - \gamma_N \dot{p}_N(k, \omega) + \gamma_N \dot{p}_N(k, \omega) + k \dot{s}_N(k, \omega) + k \dot{s}_N(k, \omega) = 0 \quad (\text{A.2.44}) \end{aligned}$$

### A.2.2.8. Sistema de ecuaciones a resolver

Las ecuaciones (A.2.35) a (A.2.44) se pueden escribir matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} [FS] & [0_{2 \times 2}] & [0_{2 \times 2}] & \cdots & [0_{2 \times 2}] & [0_{2 \times 2}] \\ [C^1] & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & \cdots & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] \\ [0_{4 \times 2}] & [C^2] & [0_{4 \times 2}] & \cdots & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & \cdots & [C^{N-2}] & [0_{4 \times 2}] \\ [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & [0_{4 \times 2}] & \cdots & [0_{4 \times 2}] & [D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ \vdots \\ [x_{N-1}] \\ [x_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [T_0] \\ [T_1] \\ [0_{2 \times 1}] \\ \vdots \\ [0_{2 \times 1}] \\ [T_{N-1}] \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.45})$$

Donde:

$$[T_0] = \begin{pmatrix} -\frac{f_x^0(k, \omega)}{\mu_1} \\ -\frac{f_z^0(k, \omega)}{\mu_1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.46})$$

$$[T_i] = \begin{pmatrix} f_x^i(k, \omega) \\ f_z^i(k, \omega) \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{A.2.47})$$

Y las matrices  $[FS]$ ,  $[C^i]$ ,  $[D]$ ,  $\{x_n\}$  y  $[0_{m \times n}]$  son la mismas definidas para el caso de incidencia de ondas planas (sección A.2.1).

### A.2.2.9. Ejemplo

En la figura A.7 se presentan las instantáneas para el caso de la aplicación de la fuerza vertical para el siguiente modelo:

	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$H$
Medio 1	200	100	1800	200
Medio 2	800	400	1800	300
Medio 3	1600	800	1800	

La fuerza externa corresponde a una fuente puntual vertical ubicada en  $(0, 500)$ , la corresponde a un pulso de Ricker (ver sección E.1.4) con parámetros  $t_s = 1.0s$  y  $t_p = 0.15$

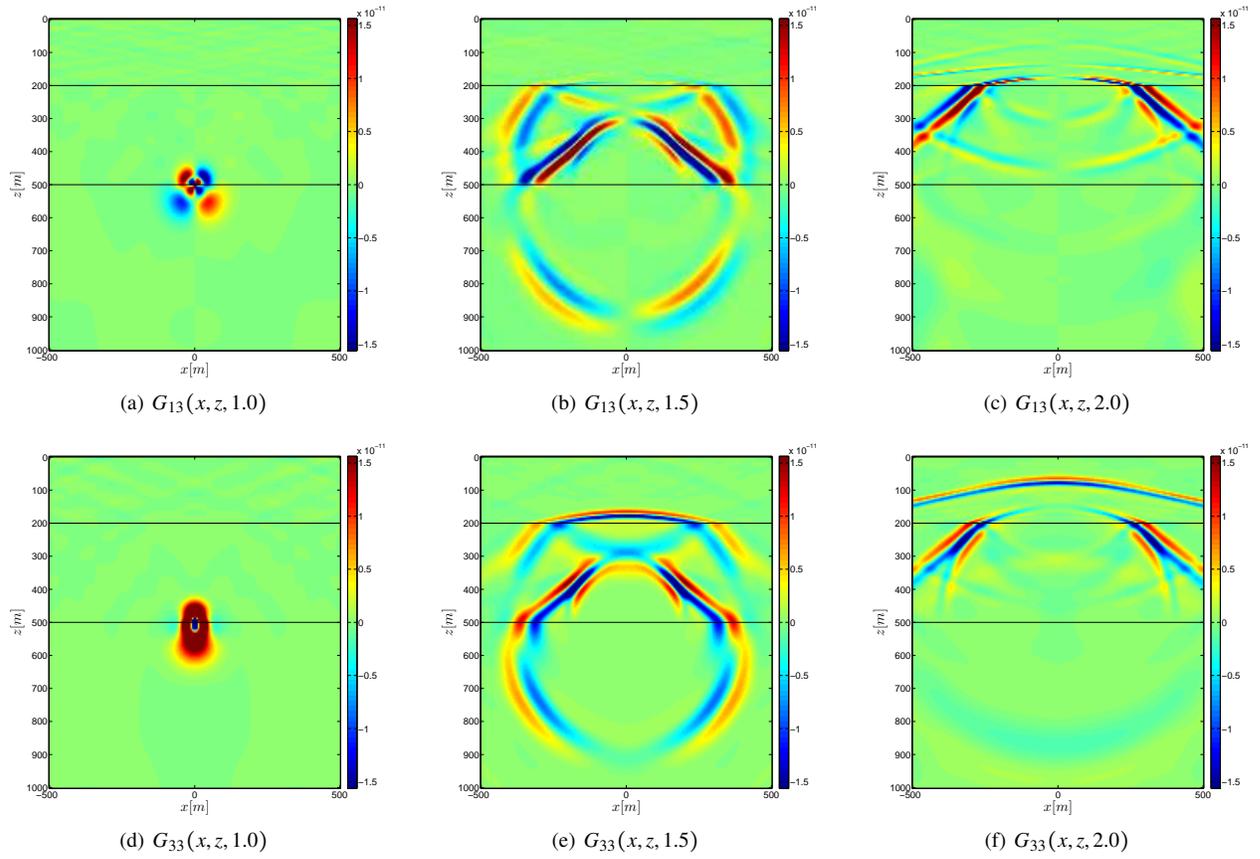


Figura A.7: Respuesta ante la aplicación de la fuerza vertical.



## Método de Thomson-Haskell

En este capítulo se presenta el método de Thomson-Haskell para obtener la respuesta de medios estratificados antiplanos (SH-Love) y de deformación plana (P-SV-Rayleigh) ante la incidencia de ondas planas y fuentes puntuales (función de Green), en particular se analizará el arreglo formado por  $N - 1$  estratos sobre un semiespacio como el presentado en la figura A.1.

Este método fue inicialmente propuesto por [Thomson, 1950] y unos años después fue corregido [Haskell, 1953]. Su base consiste primeramente en construir una relación entre desplazamientos y esfuerzos en planos normales al eje  $z$  para las dos interfaces de cada uno de los medios (estrato o semiespacio). Usando dicha relación y condiciones de continuidad de desplazamientos y equilibrio entre las interfaces de los diferentes medios, es posible obtener una relación final entre los desplazamientos y esfuerzos en superficie respecto a las ondas ascendente (incidente) y descendente en el semiespacio, la cual se resuelve para obtener los desplazamientos y esfuerzos en la superficie. A partir de estos últimos es posible “propagar” la solución al interior de todo el medio para obtener la solución final al problema en estudio.

## B.1. Antiplano ( $SH$ )

### B.1.1. Ondas Planas

En esta sección se analiza la formulación del método de Thomson-Haskell para medios estratificados en los cuales solo existe un número de ondas horizontal ( $k$ ) para cada frecuencia, entre otros problemas abarcados por esta tipología se encuentran:

1. Incidencia de ondas planas  $SH$  en medios estratificados horizontales (ver figura A.1).
2. Medios estratificados horizontales con movimiento antiplano (dirección  $y$ ) en su base.

El hecho que solo exista un número de onda horizontal  $k$  para cada frecuencia, conlleva a que su solución puede ser fácilmente obtenida en el dominio del espacio frecuencia, sin necesidad de realizar la transformada de Fourier respecto a la variable espacial  $x$ , como es el caso cuando actúan fuentes.

A continuación se realizará la formulación del método de Thomson-Haskell para las dos tipologías de medios o elementos que pueden formar un medio estratificado: estrato y semiespacio.

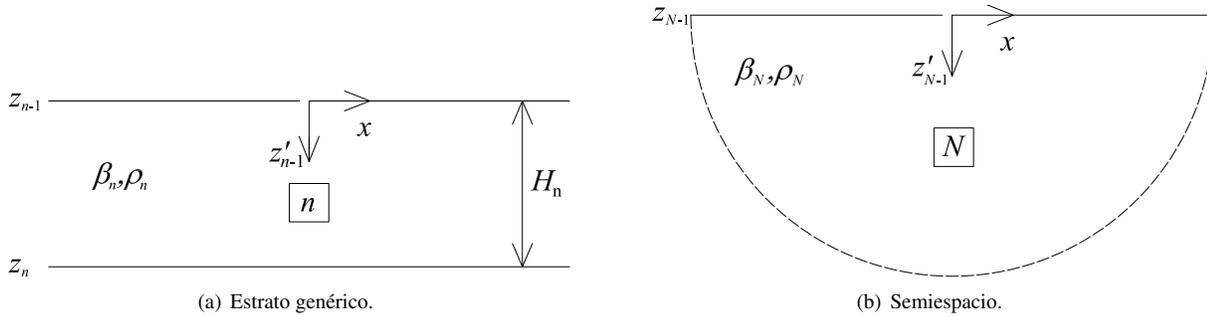


Figura B.1: Estrato y semiespacio genéricos.

#### B.1.1.1. Formulación estrato

A continuación se presenta la formulación del método de Thomson-Haskell para el estrato antiplano genérico presentado en la figura B.1. Para este, el campo de desplazamientos y esfuerzo  $\tau_{zy}$  en el dominio del espacio tiempo son respectivamente (ver A.1.1.1)<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} v_n(x, z, \omega) &= [\hat{S}_n(\omega) \exp(ivz) + \hat{S}_n(\omega) \exp(-ivz)] \exp(-ikx) \\ &= v_n(k, z, \omega) \exp(-ikx) \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

$$\begin{aligned} \tau_n(x, z, \omega) &= i\mu_n v_n [\hat{S}_n(\omega) \exp(ivnz) - \hat{S}_n(\omega) \exp(-ivnz)] \exp(-ikx) \\ &= \tau_n(k, z, \omega) \exp(-ikx) \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

A partir de (B.1.1) y (B.1.2) se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_n(k, z, \omega) \\ -i\tau_n(k, z, \omega) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \exp(ivnz) & \exp(-ivnz) \\ \mu_n v_n \exp(ivnz) & -\mu_n v_n \exp(-ivnz) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{S}_n(\omega) \\ \hat{S}_n(\omega) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_n v_n & -\mu_n v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(ivnz) & 0 \\ 0 & \exp(-ivnz) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{S}_n(\omega) \\ \hat{S}_n(\omega) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

<sup>1</sup>Por facilidad en la notación, en esta esta sección se reemplazará  $\tau_{zy}$  por  $\tau$  y  $z'_{n-1}$  por  $z$ .

Resolviendo (B.1.3) para el vector del lado derecho de la igualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{S}_n(\omega) \\ \hat{S}_n(\omega) \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2\mu_n v_n} \begin{bmatrix} \exp(-iv_n z) & 0 \\ 0 & \exp(iv_n z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_n v_n & 1 \\ \mu_n v_n & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(k, z, \omega) \\ -i\tau_n(k, z, \omega) \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\mu_n v_n} \begin{bmatrix} \mu_n v_n \exp(-iv_n z) & \exp(-iv_n z) \\ \mu_n v_n \exp(iv_n z) & -\exp(iv_n z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(k, z, \omega) \\ -i\tau_n(k, z, \omega) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

Evalutando (B.1.4) en  $z = 0$  y reemplazando en (B.1.3) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} v_n(k, z, \omega) \\ \tau_n(k, z, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_n z) & \frac{1}{\mu_n v_n} \sin(v_n z) \\ -\mu_n v_n \sin(v_n z) & \cos(v_n z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(k, 0, \omega) \\ \tau(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.5})$$

La ecuación (B.1.5) relaciona el campo de desplazamientos y esfuerzos  $\tau_{zy}$  a una profundidad  $z$  dentro del estrato con estas mismas cantidades en la frontera superior de este, es decir, si se conocen dichas cantidades en la frontera superior, es posible conocer estas mismas en cualquier posición. Ahora, evaluando (B.1.5) en  $z = H$  se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} v_n(k, H_n, \omega) \\ \tau_n(k, H_n, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_n H_n) & \frac{1}{\mu_n v_n} \sin(v_n H_n) \\ -\mu_n v_n \sin(v_n H_n) & \cos(v_n H_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n(k, 0, \omega) \\ \tau_n(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.6})$$

La cual se suele expresar en forma compacta como:

$$\{V_n^+(\omega)\}[\mathbb{P}_n(\omega)] = \{V_n^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.7})$$

Donde:

$$[\mathbb{P}_n(\omega)] = \begin{bmatrix} \cos(v_n H_n) & \frac{1}{\mu_n v_n} \sin(v_n H_n) \\ -\mu_n v_n \sin(v_n H_n) & \cos(v_n H_n) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.8})$$

La ecuación (B.1.6) es el sistema de ecuaciones que se emplea en el método de Thomson-Haskell para un estrato genérico y representa la relación entre esfuerzos y desplazamientos en las interfaces inferior y superior del estrato  $n$ .

### B.1.1.2. Formulación semiespacio

Evalutando las ecuaciones (B.1.1) y (B.1.2) en  $z = 0$  y tomando como medio al  $N$  (semiespacio), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} v_N(k, 0, \omega) \\ \tau_N(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_N v_N & -i\mu_N v_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{S}_N(\omega) \\ \hat{S}_N(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.9})$$

A partir de la cual es posible obtener su forma “inversa”:

$$\begin{Bmatrix} \hat{S}_N(\omega) \\ \hat{S}_N(\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{i}{\mu_N v_N} \\ 1 & \frac{i}{\mu_N v_N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_N(k, 0, \omega) \\ \tau_N(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.10})$$

La cual se expresa en forma compacta como:

$$\{S_N(\omega)\} = [\mathbf{Q}]\{V_N^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.11})$$

La ecuación (B.1.10) es el sistema de ecuaciones que se emplea en el método de Thomson-Haskell para un semiespacio genérico.

### B.1.1.3. Implementación del método

La implementación del método de Thomson-Haskell puede resumirse en los siguientes pasos<sup>2</sup>:

1. Obtención de los sistemas de ecuaciones que relacionan esfuerzos y desplazamientos entre las dos interfaces de cada estrato (ecuación (B.1.6)) y la ecuación que relaciona los desplazamientos y esfuerzos en la interfaz del semiespacio con las onda ascendente (incidente) y descendente en el semiespacio (ecuación (B.1.10)).

$$\{V_1^+(\omega)\} = [\mathbf{P}_1]\{V_1^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.12a})$$

$$\{V_2^+(\omega)\} = [\mathbf{P}_2]\{V_{N-1}^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.12b})$$

⋮

$$\{V_{N-1}^+(\omega)\} = [\mathbf{P}_{N-1}]\{V_{N-1}^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.12c})$$

$$\{S_N(\omega)\} = [\mathbf{Q}]\{V_N^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.12d})$$

2. Realizar el ensamblaje del sistema de ecuaciones que relaciona los desplazamientos y tracciones en la superficie ( $z = 0$ ) con las amplitudes de la onda ascendente y descendente en el semiespacio. Lo anterior se realiza por medio de las condiciones de continuidad y/o equilibrio en cada una de las interfaces  $N - 1$  a 1.

Aplicando el anterior concepto para la interfaz  $N - 1$  ( $\{V_N^-(\omega)\} = \{V_{N-1}^+(\omega)\}$ ) se obtiene a partir de (B.1.12):

$$\{S_N(\omega)\} = [\mathbf{Q}][\mathbf{P}_{N-1}]\{V_{N-1}^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.13})$$

Y aplicando recursivamente, se obtiene:

$$\{S_N(\omega)\} = [\mathbf{Q}][\mathbf{P}_{N-1}][\mathbf{P}_{N-2}] \cdots [\mathbf{P}_1]\{V_1^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.14})$$

3. Solución del sistema de ecuaciones (B.1.14): este consta de dos ecuaciones con dos incógnitas (desplazamiento en la superficie del modelo y amplitud de la onda descendente en el semiespacio), de las cuales se resuelve primero el desplazamiento en la superficie y luego la amplitud de la onda descendente en el estrato.
4. Obtención de la solución dentro del estrato 1: Con el paso anterior realizado, se conocen los desplazamientos y tracciones en la interfaz superior del estrato 1 y usando (B.1.5) es posible obtener la solución para cualquier punto del estrato.
5. Obtención de la solución en los medios 2 a  $N$ : Del paso anterior y usando las condiciones de continuidad de desplazamientos y equilibrio en la interfaz 1, es posible calcular los desplazamientos y esfuerzos en la interfaz superior del medio 2 y empleando de nuevo (B.1.5) es posible obtener la respuesta para cualquier punto del medio 2.

Repitiendo este último paso para los demás medios es posible obtener la en cualquier punto del dominio de estudio.

#### Ejemplo

A continuación (figura B.2) se presentan unas instantáneas producto de la formulación del procedimiento anteriormente descrito para el siguiente modelo:

	$\beta$	$\rho$	$H$
Medio 1	200	1800	50
Medio 2	1000	1800	200
Medio 3	2000	1800	

<sup>2</sup>Dicho procedimiento aplica en forma general no solo para los problemas de incidencia de ondas planas sino para el de la aplicación de fuentes y para casos de deformación plana y tridimensionales.

La onda incidente tiene un ángulo de incidencia de  $30^\circ$  y una variación temporal corresponde a un pulso de Ricker con parámetros  $t_s = 3.0s$  y  $t_p = 0.2s$ .

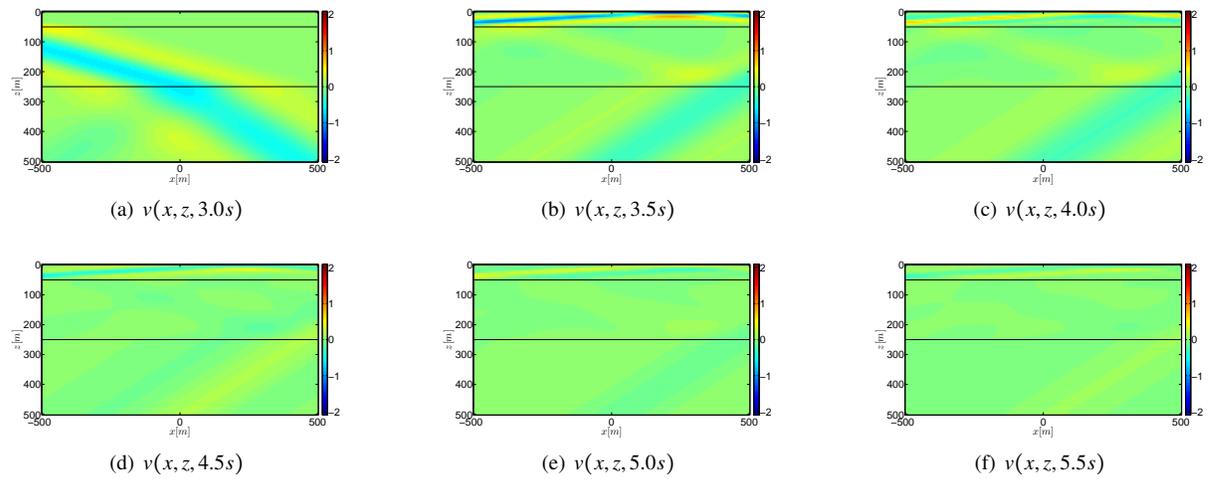


Figura B.2: Campo de desplazamiento.

## B.1.2. Fuentes puntuales

La gran diferencia que existe entre los problemas de incidencia de ondas planas y aplicación de fuerzas es que en los últimos debe aplicarse la transformada inversa de Fourier respecto a la variable espacial  $x$  para regresar al dominio espacio-frecuencia, mientras que los primeros están formulados directamente dicho dominio. Por lo anterior las ecuaciones presentadas en la sección (B.1.1) pueden fácilmente ser adaptadas para el caso de fuerzas externas aplicadas.

Se analizarán dos problemas básicos, el primero es un medio estratificado sometido a fuentes en superficie y en el segundo las fuentes se encuentran en una de sus interfaces interiores.

### B.1.2.1. Fuente puntual en superficie

Para un medio formado por  $N - 1$  estratos sobre un semiespacio sometido a una fuerza en la interfaz superior, se tiene que el sistema de ecuaciones para cada uno de los medios es:

$$\{V_1^+(k, \omega)\} = [\mathbf{P}_1]\{V_1^-(k, \omega)\} \quad (\text{B.1.15a})$$

$$\{V_2^+(k, \omega)\} = [\mathbf{P}_2]\{V_{N-1}^-(k, \omega)\} \quad (\text{B.1.15b})$$

$$\vdots \quad (\text{B.1.15c})$$

$$\{V_{N-1}^+(k, \omega)\} = [\mathbf{P}_{N-1}]\{V_{N-1}^-(k, \omega)\} \quad (\text{B.1.15d})$$

$$\{S_N(\omega)(k, \omega)\} = [\mathbf{Q}]\{V_N^-(k, \omega)\} \quad (\text{B.1.15e})$$

A partir de la condición de continuidad de desplazamiento y equilibrio se tiene que  $\{V_N^-(\omega)\} = \{V_{N-1}^+(\omega)\}$ , con lo cual a partir de la ecuación (B.1.15) se obtiene:

$$\{S_N(\omega)\} = [\mathbf{Q}][\mathbf{P}_{N-1}]\{V_{N-1}^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.16})$$

Aplicando recursivamente la continuidad de desplazamientos y tracciones en las interfaces 1 a  $N - 2$  se obtiene:

$$\{S_N(\omega)\} = [\mathbf{Q}][\mathbf{P}_{N-1}][\mathbf{P}_{N-2}] \cdots [\mathbf{P}_1]\{V_1^-(\omega)\} \quad (\text{B.1.17})$$

Con respecto al sistema de ecuaciones (B.1.17) es importante resaltar que debido a que no existe onda incidente se tiene que  $\dot{S}_N(k, \omega) = 0$  y debido a fuerza externa es conocida, el valor de  $\tau_1(k, 0, \omega)$  también lo es. Por tal motivo se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (tracción aplicada en  $z = 0$  y amplitud de la onda descendente en el semiespacio), la cual se resuelve primero para el desplazamiento en la superficie y luego para  $\dot{S}(k, \omega)$ .

#### Fuerza puntual (fuente y observador coinciden)

Para el caso en que se quiera calcular la respuesta ante una fuente puntual (función de Green) en el punto donde se aplica la fuente<sup>3</sup>, es necesario reescribir (B.1.17) como:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{S}_N(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(k, \omega) & M_{12}(k, \omega) \\ M_{21}(k, \omega) & M_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{22}(k, 0, \omega) \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.18})$$

A partir de la cual se obtiene:

$$G_{22}(k, 0, \omega) = \frac{M_{12}(k, \omega)}{M_{11}(k, \omega)} \quad (\text{B.1.19})$$

Como modo de validación de la anterior metodología, en la figura (B.3) se presenta la comparación del resultado de la presente metodología y la solución analítica para el caso de un semiespacio homogéneo de propiedades  $\beta = 200m/s$ ,  $\rho = 1800kg/m^2$  ante la acción de una fuerza aplicada en  $z = 300m$ .

<sup>3</sup>Esto suele ser muy importante dentro del ámbito de los campos difusos, en particular el cálculo de la parte imaginaria de la función de Green.

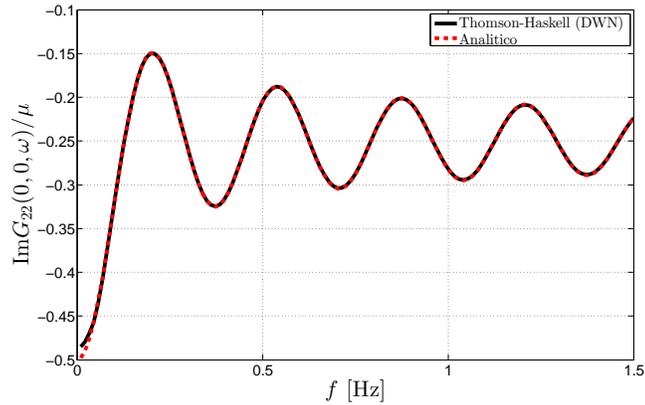


Figura B.3: Comparación entre la solución analítica y obtenida con el número de onda discreto (DWN) de la parte imaginaria de la función de Green  $G_{22}$  para el caso de un semiespacio homogéneo cuando fuente y observador coinciden.

### Ejemplo

En la figura B.1.2.1 se presentan unas instantáneas producto de la formulación del procedimiento anteriormente descrito para el siguiente modelo:

	$\beta$ [m/s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$H$ [m]
Medio 1	300	1800	1500
Medio 2	2000	1800	

La fuente aplicada corresponde a una fuente puntual en la superficie, la cual tiene como variación temporal un pulso de Ricker con parámetros  $t_s = 1.5s$  y  $t_p = 0.3s$ , a continuación se presentan algunas instantáneas de dicha respuesta.

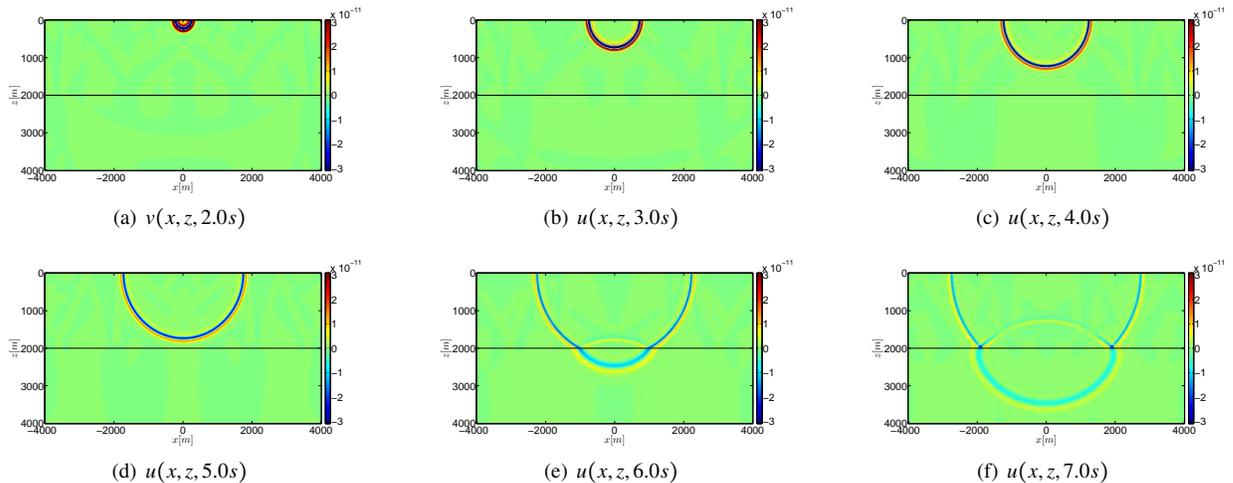


Figura B.4: Campo de desplazamiento.

### B.1.2.2. Fuente puntual aplicada en una interfaz interior

Para el caso genérico presentado en la figura B.5, el sistema de ecuaciones que gobierna cada uno de los medios es (B.1.15), la gran diferencia con respecto al procedimiento anterior (fuerza en la superficie) es que ahora los vectores

$\{V_m^+(k, \omega)\}$  y  $\{V_m^-(k, \omega)\}$  no son iguales y deben representar el equilibrio entre las tracciones en fondo y superficie de los estratos  $m$  y  $m + 1$  con la fuerza externa aplicada  $f_m(k, \omega)$ .

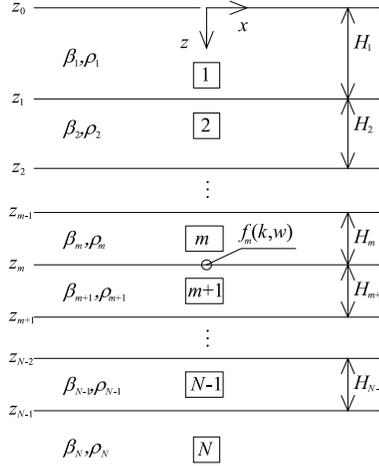


Figura B.5: Medio estratificado sometido a una fuerza (puntual o distribuida) en la interfaz  $m$ .

Para el estrato se tiene que la relación entre los desplazamientos y esfuerzos en la interfaz y las amplitudes de las ondas ascendentes y descendentes es:

$$\{S_N(k, \omega)\} = [\mathbf{Q}(k, \omega)]\{V_N(k, \omega)\} \quad (\text{B.1.20})$$

Por medio de la continuidad de desplazamientos y esfuerzos entre el semiespacio (medio  $N - 1$ ) y el estrato  $N$  es posible obtener:

$$\{S_N(k, \omega)\} = [\mathbf{Q}(k, \omega)][\mathbf{P}_{N-1}(k, \omega)]\{V_{N-1}^-(k, \omega)\} \quad (\text{B.1.21})$$

Realizando la continuidad de desplazamientos y esfuerzos para la interfaces de los estratos  $N - 1$  a  $m + 1$  se obtiene:

$$\{S_N(k, \omega)\} = [\mathbf{Q}(k, \omega)][\mathbf{P}_{N-1}(k, \omega)] \cdots [\mathbf{P}_{m+1}(k, \omega)]\{V_{m+1}^-(k, \omega)\} \quad (\text{B.1.22})$$

El cual puede expresarse en forma extendida como (la letra  $L$  se refiere a que es la matriz de propagación de los medios ubicados debajo (Lower) de la fuente):

$$\begin{Bmatrix} \hat{S}_N(k, \omega) \\ \hat{S}_N(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(k, \omega) & L_{12}(k, \omega) \\ L_{21}(k, \omega) & L_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{m+1}^-(k, \omega) \\ \tau_{m+1}^-(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.23})$$

Procediendo de forma similar pero ahora con los medios que se encuentran encima de la fuente, se obtiene:

$$\{V_m^+(k, \omega)\} = [\mathbf{P}_m(k, \omega)] \cdots [\mathbf{P}_1(k, \omega)]\{V_1^-(k, \omega)\} \quad (\text{B.1.24})$$

La cual se expresa en forma extendida como (aquí la matriz  $U$  se refiere a que corresponde a los medios ubicados encima (Upper) a la fuente):

$$\begin{Bmatrix} v_m^+(k, \omega) \\ \tau_m^+(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}(k, \omega) & U_{12}(k, \omega) \\ U_{21}(k, \omega) & U_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(k, \omega) \\ \tau_0(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.25})$$

De aplicar la condición de continuidad de desplazamiento y equilibrio en la interfaz  $m$  se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} v_{m+1}^-(k, \omega) \\ \tau_{m+1}^-(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_m^+(k, \omega) \\ \tau_m^+(k, \omega) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ f_m(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.26})$$

De reemplazar (B.1.23) y (B.1.25) en (B.1.26) y se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{S}_N(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(k, \omega) & L_{12}(k, \omega) \\ L_{21}(k, \omega) & L_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11}(k, \omega) & U_{12}(k, \omega) \\ U_{21}(k, \omega) & U_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(k, \omega) \\ \tau_0(k, \omega) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11}(k, \omega) & L_{12}(k, \omega) \\ L_{21}(k, \omega) & L_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ f_m(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.27})$$

A partir de la cual se obtiene:

$$v_0(k, \omega) = \frac{L_{12}(k, \omega)}{L_{11}(k, \omega)U_{11}(k, \omega) + L_{12}(k, \omega)U_{21}(k, \omega)} f_m(k, \omega) \quad (\text{B.1.28})$$

Una vez conocido  $v_0(k, \omega)$  y sabiendo que  $\tau_0(k, \omega) = 0$ , es posible emplear (B.1.25) para obtener los desplazamientos y esfuerzos en la interfaz inferior del medio  $m$ , la cual puede ser fácilmente propagada hacia la superficie.

Para obtener los desplazamientos y esfuerzos en los medios ubicados debajo de la fuente es necesario usar (B.1.26) y luego proceder de forma similar a como se hizo para los medios ubicados encima de la fuente.

#### Fuerza puntual (fuente y observador coinciden)

La ecuación (B.1.21) puede ser reescrita en forma extendida como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{S}_N(k, \omega) \\ \dot{S}_N(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(k, \omega) & L_{12}(k, \omega) \\ L_{21}(k, \omega) & L_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{m+1}^-(k, \omega) \\ \tau_{m+1}^-(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.29})$$

Por su parte propagando a partir de la interfaz  $m$  a la superficie del medio se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} v_m^+(k, \omega) \\ \tau_m^+(k, \omega) \end{Bmatrix} = [\mathbf{P}_m(k, \omega)][\mathbf{P}_{m-1}(k, \omega)] \cdots [\mathbf{P}_1(k, \omega)] \begin{Bmatrix} v_0(k, \omega) \\ \tau_0(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.30})$$

La cual puede escribirse en forma extendida como:

$$\begin{Bmatrix} v_m^+(k, \omega) \\ \tau_m^+(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}(k, \omega) & U_{12}(k, \omega) \\ U_{21}(k, \omega) & U_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(k, \omega) \\ \tau_0(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.31})$$

Mientras que las condiciones de continuidad de desplazamiento y equilibrio en la interfaz  $m$  se expresa de forma extendida como:

$$\begin{Bmatrix} v_{m+1}^-(k, \omega) \\ \tau_{m+1}^-(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_m^+(k, \omega) \\ \tau_m^+(k, \omega) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ f_m(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.32})$$

Reemplazando (B.1.29) y (B.1.31) en (B.1.32) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{S}_N(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(k, \omega) & L_{12}(k, \omega) \\ L_{21}(k, \omega) & L_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11}(k, \omega) & U_{12}(k, \omega) \\ U_{21}(k, \omega) & U_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(k, \omega) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11}(k, \omega) & L_{12}(k, \omega) \\ L_{21}(k, \omega) & L_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.33})$$

A partir de la cual se obtiene:

$$v_0(k, \omega) = \frac{L_{12}(k, \omega)}{L_{11}(k, \omega)U_{11}(k, \omega) + L_{12}(k, \omega)U_{21}(k, \omega)} \quad (\text{B.1.34})$$

Ahora, a partir de (B.1.31) se tiene:

$$G_{22}(k, 0, \omega) = U_{11}(k, \omega)v_0(k, \omega) \quad (\text{B.1.35})$$

Reemplazando (B.1.34) en (B.1.35) se obtiene:

$$G_{22}(k, 0, \omega) = \frac{L_{12}(k, \omega)U_{11}(k, \omega)}{L_{11}(k, \omega)U_{11}(k, \omega) + L_{12}(k, \omega)U_{21}(k, \omega)} \quad (\text{B.1.36})$$

## B.2. Deformación plana ( $P$ - $SV$ )

### B.2.1. Incidencia de ondas planas

A continuación se formulan los elementos tipo estrato y semiespacio (ver figura B.6) para la implantación del método de Thomson-Haskell en medios estratificados horizontales de deformación plana ante la incidencia de ondas planas  $P$  y  $SV$ .

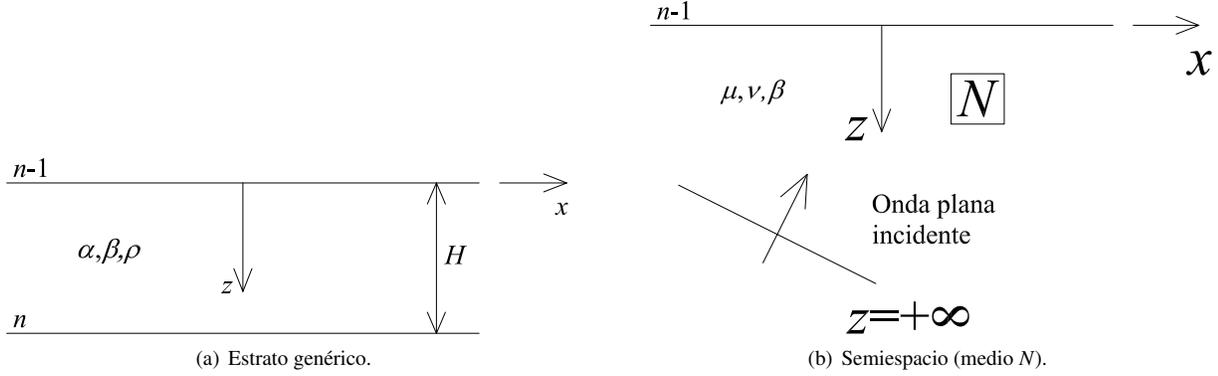


Figura B.6: Elementos tipo de un medio estratificado.

#### B.2.1.1. Estrato

Definiendo:

$$\{\Phi(k, z, \omega)\} = \{\dot{p}(k, \omega) \exp(i\gamma z), \dot{s}(k, \omega) \exp(ivz), \dot{p}(k, \omega) \exp(-i\gamma z), \dot{s}(k, \omega) \exp(-ivz)\}^T \quad (\text{B.2.1a})$$

$$\{S(k, z, \omega)\} = \{u(k, z, \omega), w(k, z, \omega), \tau_{zz}(k, z, \omega), \tau_{zx}(k, z, \omega)\}^T \quad (\text{B.2.1b})$$

De las ecuaciones (2.3.8) a (2.3.11) se obtiene:

$$\{S(k, z, \omega)\} = [T(k, \omega)] \{\Phi(k, z, \omega)\} \quad (\text{B.2.2a})$$

$$\{\Phi(k, z, \omega)\} = [T(k, \omega)]^{-1} \{S(k, z, \omega)\} \quad (\text{B.2.2b})$$

Donde:

$$[T(k, \omega)] = \begin{bmatrix} -ik & -iv & -ik & iv \\ i\gamma & -ik & -i\gamma & -ik \\ \mu l & 2\mu v k & \mu l & -2\mu v k \\ 2\mu \gamma k & -\mu l & -2\mu \gamma k & -\mu l \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3a})$$

$$[T(k, \omega)]^{-1} = \frac{\beta^2}{2\mu \gamma v \omega^2} \begin{bmatrix} 2i\mu \gamma v k & i\mu v l & -\gamma v & v k \\ -i\mu \gamma l & 2i\mu \gamma v k & \gamma k & \gamma v \\ 2i\mu \gamma v k & -i\mu v l & -\gamma v & -v k \\ i\mu \gamma l & 2i\mu \gamma v k & -\gamma k & \gamma v \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3b})$$

Ahora, la relación entre los vectores  $\{\Phi(k, H, \omega)\}$  en las interfaces del estrato son:

$$\{\Phi(k, H, \omega)\} = [E(k, \omega)] \{\Phi(k, 0, \omega)\} \quad (\text{B.2.4a})$$

$$\{\Phi(k, 0, \omega)\} = [E(k, \omega)]^{-1} \{\Phi(k, H, \omega)\} \quad (\text{B.2.4b})$$

Donde:

$$[E(k, \omega)] = \begin{bmatrix} \exp(i\gamma H) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\nu H) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\gamma H) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\nu H) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.5a})$$

$$[E(k, \omega)]^{-1} = \begin{bmatrix} \exp(-i\gamma H) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\nu H) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\gamma H) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(i\nu H) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.5b})$$

Para obtener la matriz propagadora del estrato se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{S(k, H, \omega)\} &= [T(k, \omega)]\{\Phi(k, H, \omega)\} \\ &= [T(k, \omega)][E(k, \omega)]\{\Phi(k, 0, \omega)\} \\ &= [T(k, \omega)][E(k, \omega)][T(k, \omega)]^{-1}\{S(k, 0, \omega)\} \\ &= [P(k, \omega)]\{S(k, 0, \omega)\} \quad \therefore [P(k, \omega)] = [T(k, \omega)][E(k, \omega)][T(k, \omega)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

La ecuación (B.2.6) se puede escribir en forma expandida como:

$$\begin{bmatrix} u(k, H, \omega) \\ w(k, H, \omega) \\ \tau_{zz}(k, H, \omega) \\ \tau_{zx}(k, H, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(k, \omega) & P_{12}(k, \omega) & P_{13}(k, \omega) & P_{14}(k, \omega) \\ P_{21}(k, \omega) & P_{22}(k, \omega) & P_{23}(k, \omega) & P_{24}(k, \omega) \\ P_{31}(k, \omega) & P_{32}(k, \omega) & P_{33}(k, \omega) & P_{34}(k, \omega) \\ P_{41}(k, \omega) & P_{42}(k, \omega) & P_{43}(k, \omega) & P_{44}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k, 0, \omega) \\ w(k, 0, \omega) \\ \tau_{zz}(k, 0, \omega) \\ \tau_{zx}(k, 0, \omega) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.7})$$

El sistema de ecuaciones (B.2.7) se expresa en forma compacta como  $\{V_n^+(\omega)\} = [\mathbb{P}_n]\{V_n^-(\omega)\}$  y los términos de la matriz  $[\mathbb{P}_n]$  se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}_n] &= \frac{\beta^2}{2\mu\gamma\nu\omega^2} \begin{bmatrix} -ik & -i\nu & -ik & i\nu \\ i\gamma & -ik & -i\gamma & -ik \\ \mu l & 2\mu\nu k & \mu l & -2\mu\nu k \\ 2\mu\gamma k & -\mu l & -2\mu\gamma k & -\mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(i\gamma H) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\nu H) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\gamma H) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\nu H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i\mu\gamma\nu k & i\mu\nu l & -\gamma\nu & \nu k \\ -i\mu\gamma l & 2i\mu\gamma\nu k & \gamma k & \gamma\nu \\ 2i\mu\gamma\nu k & -i\mu\nu l & -\gamma\nu & -\nu k \\ i\mu\gamma l & 2i\mu\gamma\nu k & -\gamma k & \gamma\nu \end{bmatrix} \\ &= \frac{\beta^2}{2\mu\gamma\nu\omega^2} \begin{bmatrix} -ik \exp(i\gamma H) & -i\nu \exp(i\nu H) & -ik \exp(-i\gamma H) & i\nu \exp(-i\nu H) \\ i\gamma \exp(i\gamma H) & -ik \exp(i\nu H) & -i\gamma \exp(-i\gamma H) & -ik \exp(-i\nu H) \\ \mu l \exp(i\gamma H) & 2\mu\nu k \exp(i\nu H) & \mu l \exp(-i\gamma H) & -2\mu\nu k \exp(-i\nu H) \\ 2\mu\gamma k \exp(i\gamma H) & -\mu l \exp(i\nu H) & -2\mu\gamma k \exp(-i\gamma H) & -\mu l \exp(-i\nu H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i\mu\gamma\nu k & i\mu\nu l & -\gamma\nu & \nu k \\ -i\mu\gamma l & 2i\mu\gamma\nu k & \gamma k & \gamma\nu \\ 2i\mu\gamma\nu k & -i\mu\nu l & -\gamma\nu & -\nu k \\ i\mu\gamma l & 2i\mu\gamma\nu k & -\gamma k & \gamma\nu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} P_{11}(k, \omega) = P_{44}(k, \omega) &= \frac{\beta^2}{2\omega^2} [2k^2 \exp(i\gamma H) - l \exp(i\nu H) + 2k^2 \exp(-i\gamma H) - l \exp(-i\nu H)] \\ &= \frac{\beta^2}{\omega^2} [2k^2 \cos(\gamma H) - l \cos(\nu H)] \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

$$\begin{aligned} P_{12}(k, \omega) = P_{34}(k, \omega) &= \frac{\beta^2 k}{2\gamma\omega^2} [l \exp(i\gamma H) + 2\gamma\nu \exp(i\nu H) - l \exp(-i\gamma H) - 2\gamma\nu \exp(-i\nu H)] \\ &= i \frac{k\beta^2}{\gamma\omega^2} [l \sin(\gamma H) + 2\gamma\nu \sin(\nu H)] \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

$$\begin{aligned} P_{13}(k, \omega) = P_{24}(k, \omega) &= i \frac{k\beta^2}{2\mu\omega^2} [\exp(i\gamma H) - \exp(i\nu H) + \exp(-i\gamma H) - \exp(-i\nu H)] \\ &= i \frac{k\beta^2}{\mu\omega^2} [\cos(\gamma H) - \cos(\nu H)] \end{aligned} \quad (\text{B.2.11})$$

$$\begin{aligned}
P_{14}(k, \omega) &= i \frac{\beta^2}{2\mu\gamma\omega^2} \left[ -k^2 \exp(i\gamma H) - \gamma v \exp(ivH) + k^2 \exp(-i\gamma H) + \gamma v \exp(-ivH) \right] \\
&= \frac{\beta^2}{\mu\gamma\omega^2} [k^2 \sin(\gamma H) + \gamma v \sin(vH)]
\end{aligned} \tag{B.2.12}$$

$$\begin{aligned}
P_{21}(k, \omega) = P_{43}(k, \omega) &= \frac{k\beta^2}{2v\omega^2} \left[ -2\gamma v \exp(i\gamma H) - l \exp(ivH) + 2\gamma v \exp(-i\gamma H) + l \exp(-ivH) \right] \\
&= -i \frac{k\beta^2}{v\omega^2} [2\gamma v \sin(\gamma H) + l \sin(vH)]
\end{aligned} \tag{B.2.13}$$

$$\begin{aligned}
P_{22}(k, \omega) = P_{33}(k, \omega) &= \frac{\beta^2}{2\omega^2} \left[ -l \exp(i\gamma H) + 2k^2 \exp(ivH) - l \exp(-i\gamma H) + 2k^2 \exp(-ivH) \right] \\
&= \frac{\beta^2}{\omega^2} [-l \cos(\gamma H) + 2k^2 \cos(vH)]
\end{aligned} \tag{B.2.14}$$

$$\begin{aligned}
P_{23}(k, \omega) &= i \frac{\beta^2}{2\mu v \omega^2} \left[ -\gamma v \exp(i\gamma H) - k^2 \exp(ivH) + \gamma v \exp(-i\gamma H) + k^2 \exp(-ivH) \right] \\
&= \frac{\beta^2}{\mu v \omega^2} [\gamma v \sin(\gamma H) + k^2 \sin(vH)]
\end{aligned} \tag{B.2.15}$$

$$\begin{aligned}
P_{31}(k, \omega) = P_{42}(k, \omega) &= i \frac{\mu k l \beta^2}{\omega^2} \left[ \exp(i\gamma H) - \exp(ivH) + \exp(-i\gamma H) - \exp(-ivH) \right] \\
&= 2i \frac{\mu k l \beta^2}{\omega^2} [\cos(\gamma H) - \cos(vH)]
\end{aligned} \tag{B.2.16}$$

$$\begin{aligned}
P_{32}(k, \omega) &= i \frac{\mu \beta^2}{2\gamma \omega^2} \left[ l^2 \exp(i\gamma H) + 4k^2 \gamma v \exp(ivH) - l^2 \exp(-i\gamma H) - 4k^2 \gamma v \exp(-ivH) \right] \\
&= -\frac{\mu \beta^2}{\gamma \omega^2} [l^2 \sin(\gamma H) + 4k^2 \gamma v \sin(vH)]
\end{aligned} \tag{B.2.17}$$

$$\begin{aligned}
P_{41}(k, \omega) &= i \frac{\mu \beta^2}{2v \omega^2} \left[ 4k^2 \gamma v \exp(i\gamma H) + l^2 \exp(ivH) - 4k^2 \gamma v \exp(-i\gamma H) - l^2 \exp(-ivH) \right] \\
&= -\frac{\mu \beta^2}{v \omega^2} [4k^2 \gamma v \sin(\gamma H) + l^2 \sin(vH)]
\end{aligned} \tag{B.2.18}$$

Lo presentado anteriormente entre las ecuaciones (B.2.9) a (B.2.18) concuerda con lo presentado en [Watson, 1970]<sup>4</sup>.

Para obtener los desplazamientos en el interior de cada estrato se emplea la ecuación (B.2.7) reemplazando  $H$  por  $z$ .

<sup>4</sup>Para mayor claridad, en el artículo [Watson, 1970] la forma matricial de los propagadores para el estrato  $n$  es:

$$\begin{Bmatrix} u(k, H, \omega) \\ w(k, H, \omega) \\ -\frac{i}{k} \tau_{zz}(k, H, \omega) \\ -\frac{i}{k} \tau_{zx}(k, H, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(k, \omega) & P_{12}(k, \omega) & P_{13}(k, \omega) & P_{14}(k, \omega) \\ P_{21}(k, \omega) & P_{22}(k, \omega) & P_{23}(k, \omega) & P_{24}(k, \omega) \\ P_{31}(k, \omega) & P_{32}(k, \omega) & P_{33}(k, \omega) & P_{34}(k, \omega) \\ P_{41}(k, \omega) & P_{42}(k, \omega) & P_{43}(k, \omega) & P_{44}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(k, 0, \omega) \\ w(k, 0, \omega) \\ -\frac{i}{k} \tau_{zz}(k, 0, \omega) \\ -\frac{i}{k} \tau_{zx}(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \tag{B.2.19}$$

Por lo cual los términos que allí aparecen son múltiplos de los presentados en el presente documento.

**B.2.1.2. Semi-espacio**

A partir de las ecuaciones (B.2.2b) y (B.2.3b) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{p}(k, \omega) \\ \dot{s}(k, \omega) \\ \dot{p}(k, \omega) \\ \dot{s}(k, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{\beta^2}{2\mu\gamma v\omega^2} \begin{bmatrix} 2i\mu\gamma vk & i\mu v l & -\gamma v & vk \\ -i\mu\gamma l & 2i\mu\gamma vk & \gamma k & \gamma v \\ 2i\mu\gamma vk & -i\mu v l & -\gamma v & -vk \\ i\mu\gamma l & 2i\mu\gamma vk & -\gamma k & \gamma v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{n-1}(k, \omega) \\ w_{n-1}(k, \omega) \\ \tau_{zz}^{n-1}(k, \omega) \\ \tau_{zx}^{n-1}(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.20})$$

La cual se expresa en forma compacta como  $\{S_N(\omega)\} = [Q]\{V_N^-(\omega)\}$ .

**B.2.1.3. Ensamblaje y solución del sistema**

Empleando un procedimiento similar al descrito para el caso antiplano, por medio de las condiciones de continuidad de desplazamiento y equilibrio en cada una de las interfaces compartidas por dos medios es posible ensamblar el sistema de ecuaciones que gobierna al arreglo de  $N - 1$  estratos mas un semiespacio estudiado. Una vez obtenido este, se obtiene el desplazamiento en superficie y la amplitud de la onda descendente en el semiespacio. Una vez obtenidos los desplazamientos y esfuerzos en la superficie esta solución se propaga de forma descendente a los demás puntos de los medios que forman el arreglo.

## B.2.2. Fuentes Puntuales

En esta sección se analiza la implementación del método de Thomson-Haskell para obtener la respuesta de medios estratificados formados por  $N - 1$  estratos sobre un semiespacio el cual se somete a la acción de una fuente en su interfaz  $m$  (ver figura B.5).

La metodología empleada en la solución de problemas de medios estratificados de deformación plana con fuentes en su superficie y/o interior es similar a la expuesta anteriormente para el caso antiplano (ver B.1.2), la única diferencia radica en que para el caso de fuerzas internas el equilibrio de fuerzas en la interfaz donde se aplica la fuerza debe ser tanto en dirección  $x$  como  $z$ .

Como primer paso se calcula el sistema que abarca a los medios  $m$  a 1 (aquellos que se encuentran encima de la fuente), lo cual se expresa en forma compacta como:

$$\begin{Bmatrix} \{u_m^+(k, \omega)\} \\ \{\tau_m^+(k, \omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [U_{11}(k, \omega)] & [U_{12}(k, \omega)] \\ [U_{21}(k, \omega)] & [U_{22}(k, \omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_0(k, \omega)\} \\ \{\tau_0(k, \omega)\} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.21})$$

Donde la variable  $U$  se usa para definir que se trata de la porción de medio por encima (Upper) de la fuente y es calculada como:

$$\begin{bmatrix} [U_{11}(k, \omega)] & [U_{12}(k, \omega)] \\ [U_{21}(k, \omega)] & [U_{22}(k, \omega)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{11}^m(k, \omega)] & [P_{12}^m(k, \omega)] \\ [P_{21}^m(k, \omega)] & [P_{22}^m(k, \omega)] \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} [P_{11}^1(k, \omega)] & [P_{12}^1(k, \omega)] \\ [P_{21}^1(k, \omega)] & [P_{22}^1(k, \omega)] \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.22})$$

Mientras que el sistema que relaciona lo que pasa en los medios  $N$  a  $m + 1$  puede escribirse en forma compacta como (esta vez la letra  $L$  es por Lower):

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{S}_N(k, \omega)\} \\ \{\dot{S}_N(k, \omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{11}(k, \omega)] & [L_{12}(k, \omega)] \\ [L_{21}(k, \omega)] & [L_{22}(k, \omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{m+1}^-(k, \omega)\} \\ \{\tau_{m+1}^-(k, \omega)\} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.23})$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} [L_{11}(k, \omega)] & [L_{12}(k, \omega)] \\ [L_{21}(k, \omega)] & [L_{22}(k, \omega)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Q_{11}(k, \omega)] & [Q_{12}(k, \omega)] \\ [Q_{21}(k, \omega)] & [Q_{22}(k, \omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P_{11}^{N-1}(k, \omega)] & [P_{12}^{N-1}(k, \omega)] \\ [P_{21}^{N-1}(k, \omega)] & [P_{22}^{N-1}(k, \omega)] \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} [P_{11}^{m+1}(k, \omega)] & [P_{12}^{m+1}(k, \omega)] \\ [P_{21}^{m+1}(k, \omega)] & [P_{22}^{m+1}(k, \omega)] \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.24})$$

Ahora, de formular la condición de continuidad de desplazamientos y equilibrio en la interfaz donde esta la fuente aplicada ( $m$ ) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \{u_{m+1}^-(k, \omega)\} \\ \{\tau_{m+1}^-(k, \omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{u_{m+1}^+(k, \omega)\} \\ \{\tau_{m+1}^+(k, \omega)\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_m\} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.25})$$

Reemplazando (B.2.21) y (B.2.21) en (B.2.25) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_m\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{11}(k, \omega)] & [L_{12}(k, \omega)] \\ [L_{21}(k, \omega)] & [L_{22}(k, \omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_{11}(k, \omega)] & [U_{12}(k, \omega)] \\ [U_{21}(k, \omega)] & [U_{22}(k, \omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_0(k, \omega)\} \\ \{\tau_0(k, \omega)\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [L_{11}(k, \omega)] & [L_{12}(k, \omega)] \\ [L_{21}(k, \omega)] & [L_{22}(k, \omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_m\} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.26})$$

A partir de (B.2.26) es posible obtener:

$$\{u_0(k, \omega)\} = [[L_{11}(k, \omega)][U_{11}(k, \omega)] + [L_{12}(k, \omega)][U_{21}(k, \omega)]]^{-1} [L_{12}(k, \omega)] \{f_m(k, \omega)\} \quad (\text{B.2.27})$$

Donde:

$$\begin{Bmatrix} \{f_m(k, \omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \end{Bmatrix}^T \text{ Si la fuerza aplicada es horizontal.}$$

$$\begin{Bmatrix} \{f_m(k, \omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \end{Bmatrix}^T \text{ Si la fuerza aplicada es vertical.}$$

Una vez obtenido el vector  $\{u_0(k, \omega)\}$  y recordando que  $\{\tau_0(k, \omega)\}$  es conocido, es posible por medio de la ecuación (B.2.21) obtener los desplazamientos y tracciones en la interfaz superior del medio  $m$ , los cuales pueden propagarse hacia la superficie empleando el sistema de ecuaciones de los medios  $m$  a 1.

De otra parte al emplear (B.2.25) es posible obtener los desplazamientos y esfuerzos en la interfaz superior del medio  $m + 1$  y por medio de la ecuación (B.2.23) es posible obtener las amplitudes de las ondas ascendentes y descendentes

en el semiespacio, los cuales pueden propagarse hacia la interfaz  $m + 1$  usando el sistema de ecuaciones de los medios  $N$  a  $m + 1$ .

#### Caso en que fuente y observador coinciden

Ahora, si lo que se desea es calcular la función de Green para el caso que el observador esté ubicado en la interfaz  $m$ , a partir de (B.2.21) se obtiene:

$$\{G(k, \omega)\} = [U_{11}(k, \omega)]\{u_0(k, \omega)\} \quad (\text{B.2.28})$$

Reemplazando (B.2.27) en (B.2.28) se obtiene:

$$\{G(k, \omega)\} = [U_{11}(k, \omega)][[L_{11}(k, \omega)][U_{11}(k, \omega)] + [L_{12}(k, \omega)][U_{21}(k, \omega)]]^{-1}[L_{12}(k, \omega)]\{f_m(k, \omega)\} \quad (\text{B.2.29})$$

Con lo cual si se trata de una fuente puntual horizontal la función de Green cuando fuente y receptor coinciden puede calcularse como:

$$\begin{Bmatrix} G_{11}(k, \omega) \\ G_{31}(k, \omega) \end{Bmatrix} = [U_{11}(k, \omega)][[L_{11}(k, \omega)][U_{11}(k, \omega)] + [L_{12}(k, \omega)][U_{21}(k, \omega)]]^{-1}[L_{12}(k, \omega)] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.30})$$

Mientras que si la fuente puntual vertical la función de Green cuando fuente y receptor coinciden tiene la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} G_{13}(k, \omega) \\ G_{33}(k, \omega) \end{Bmatrix} = [U_{11}(k, \omega)][[L_{11}(k, \omega)][U_{11}(k, \omega)] + [L_{12}(k, \omega)][U_{21}(k, \omega)]]^{-1}[L_{12}(k, \omega)] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.31})$$

O en forma compacta:

$$\begin{bmatrix} G_{13}(k, \omega) & G_{11}(k, \omega) \\ G_{33}(k, \omega) & G_{31}(k, \omega) \end{bmatrix} = [U_{11}(k, \omega)][[L_{11}(k, \omega)][U_{11}(k, \omega)] + [L_{12}(k, \omega)][U_{21}(k, \omega)]]^{-1}[L_{12}(k, \omega)] \quad (\text{B.2.32})$$

$$\begin{bmatrix} G_{13}(k, \omega) & G_{11}(k, \omega) \\ G_{33}(k, \omega) & G_{31}(k, \omega) \end{bmatrix} = [[L_{11}(k, \omega)] + [L_{12}(k, \omega)][U_{21}(k, \omega)][U_{11}(k, \omega)]^{-1}]^{-1}[L_{12}(k, \omega)] \quad (\text{B.2.33})$$

#### Ejemplo

En la figura (B.7) se presentan las instantáneas para el caso de la aplicación de la fuerza vertical para el siguiente modelo:

	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$H$
Medio 1	100	50	1800	100
Medio 2	400	200	1800	200
Medio 3	2000	1200	1800	

La fuerza externa corresponde a una fuente puntual horizontal ubicada en  $(0, 300)$ , la corresponde a un pulso de Ricker con parámetros  $t_s = 1.0s$  y  $t_p = 0.15$

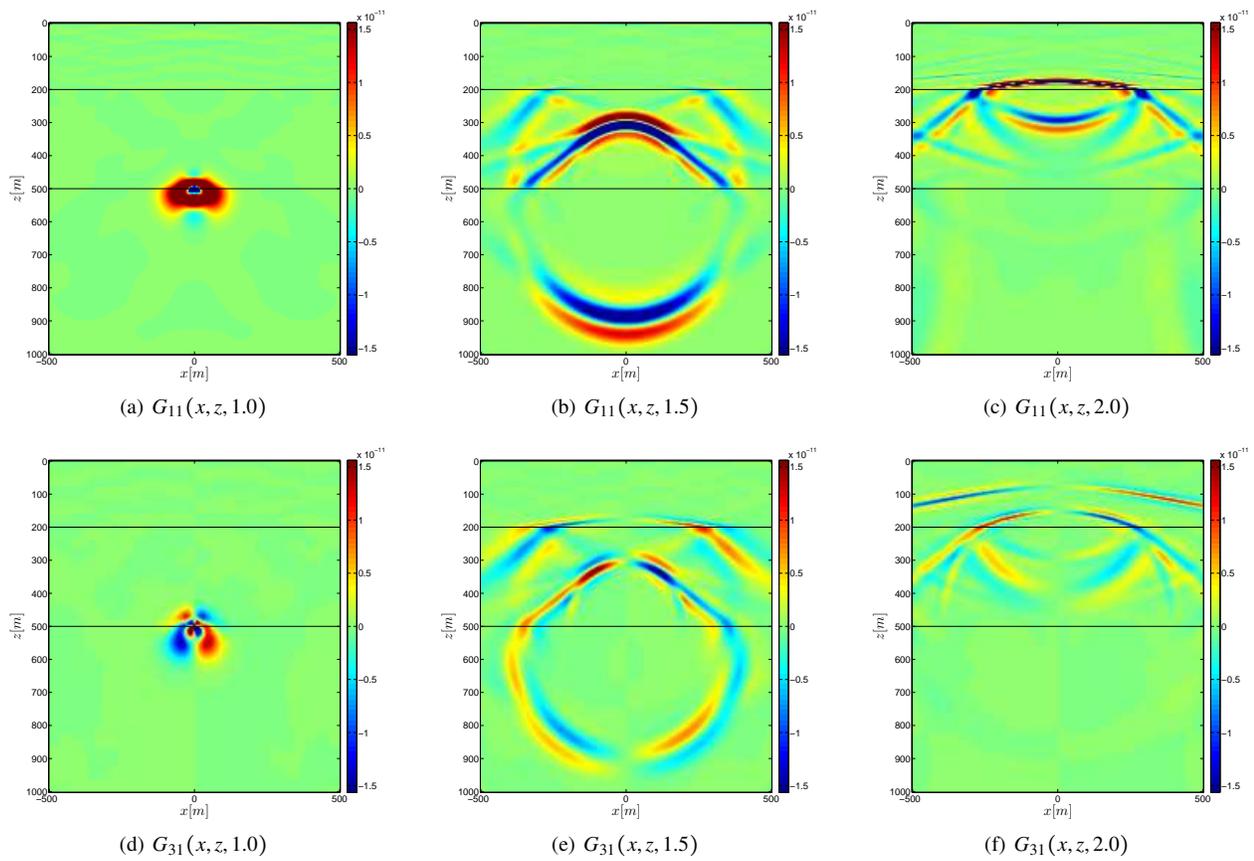


Figura B.7: Respuesta ante la aplicación de la fuerza vertical.

## Cálculo de curvas de dispersión y formas modales

En este capítulo se presenta la formulación del método de Thomson-Haskell (ver capítulo B) para calcular las curvas de dispersión y formas modales de un medio formado por un estrato sobre un semiespacio y un medio estratificado genérico formado por  $N - 1$  estratos sobre un semiespacio tanto para el caso antiplano (ondas de Love) como para el caso de deformación plana (ondas de Rayleigh).

### C.1. Medios estratificados antiplanos (ondas de Love)

#### C.1.1. Estrato sobre semiespacio

A continuación se presenta el cálculo de las curvas de dispersión para un medio formado por un estrato sobre un semiespacio como el presentado en la figura C.1, la importancia de lo anterior es que esta se utiliza en la formulación del método de los coeficientes de emisión para el caso antiplano (ver sección 6).

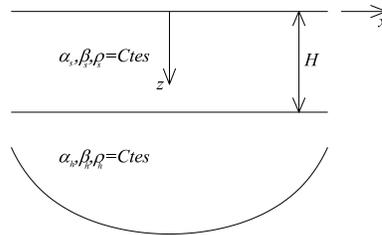


Figura C.1: Modelo de un estrato sobre un semiespacio.

Estrato:

El sistema de ecuaciones para el estrato es:

$$\begin{Bmatrix} v_s(k, H, \omega) \\ \tau_s(k, H, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_s H) & \frac{1}{\mu_s v_s} \sin(v_s H) \\ -\mu v \sin(v_s H) & \cos(v_s H) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s(k, 0, \omega) \\ \tau_s(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.1.1})$$

Donde  $v_s = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_s^2} - k^2}$ .

Semiespacio.

Mientras que sistema de ecuaciones para el semiespacio es:

$$\begin{Bmatrix} \dot{S}_h(k, \omega) \\ \dot{S}_h(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\mu_h v_h} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\mu_h v_h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_h(k, 0, \omega) \\ \tau_h(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.1.2})$$

Donde  $v_h = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_h^2} - k^2}$  ( $\text{Im}(v_h) < 0$ ).

Sistema de ecuaciones del sistema estrato semiespacio.

De realizar la continuidad de desplazamientos y equilibrio en la interfaz común entre el estrato y el semiespacio se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{S}_h(k, \omega) \\ \dot{S}_h(k, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(v_s H) + i \frac{\mu_s v_s}{\mu_h v_h} \sin(v_s H) & \frac{1}{\mu_s v_s} \sin(v_s H) - \frac{i}{\mu_h v_h} \cos(v_s H) \\ \cos(v_s H) - i \frac{\mu_s v_s}{\mu_h v_h} \sin(v_s H) & \frac{1}{\mu_s v_s} \sin(v_s H) + \frac{i}{\mu_h v_h} \cos(v_s H) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s(k, 0, \omega) \\ \tau_s(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.1.3})$$

A partir de la ecuación (C.1.3), de la condición de frontera libre en la superficie del estrato  $\tau_s(k, 0, \omega) = 0$  y de la condición de radiación en el semiespacio  $\dot{S}_h(\omega) = 0$  se tiene que se debe cumplir que la entrada (1,1) de la matriz debe ser nula, es decir:

$$\tan(v_s H) = i \frac{\mu_h v_h}{\mu_s v_s} \quad (\text{C.1.4})$$

La cual se puede expresar como:

$$\tan\left(\frac{\omega H}{c} \sqrt{\frac{c^2}{\beta_s^2} - 1}\right) = \frac{\mu_h}{\mu_s} \frac{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_h^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{\beta_s^2} - 1}} \quad (\text{C.1.5})$$

O en forma adimensional:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \bar{f} \frac{\bar{\beta}}{\bar{c}} \sqrt{\frac{\bar{c}^2}{\bar{\beta}^2} - 1}\right) = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\beta}^2} \frac{\sqrt{1 - \bar{c}^2}}{\bar{c}^2 - 1} \quad (\text{C.1.6})$$

Ahora, las curvas de dispersión son obtenidas al resolver numéricamente la ecuación C.1.5 o (C.1.6) para  $c$  o  $\bar{c}$ . En la figura C.2 se presentan las curvas de dispersión adimensionalizadas para el modelo en estudio.

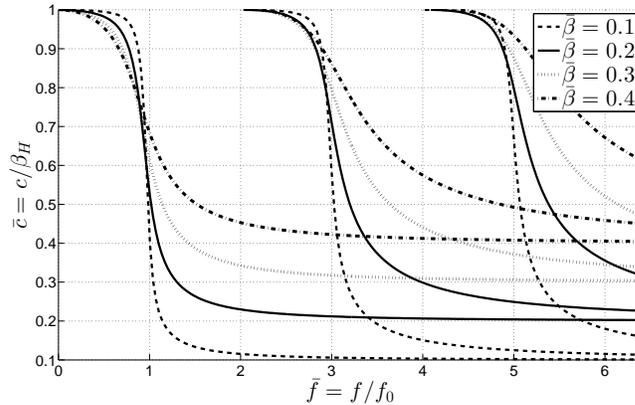


Figura C.2: Curvas de dispersión adimensionalizadas para el modelo 1D de un estrato sobre un semiespacio con densidades iguales ( $\bar{\rho} = 1$ ).

Es importante resaltar que para este modelo las curvas de dispersión tienen la siguiente frecuencia de corte:

$$f_c^n = \frac{2n}{\sqrt{1-\bar{\beta}^2}} f_0 \approx 2n f_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.1.7})$$

A partir de la ecuación (C.1.7) es importante resaltar que para valores realistas de  $\bar{\beta}$  ( $\bar{\beta} < 0.4$ ) y para los primeros modos, se tiene que las frecuencias de corte de las ondas de Love se encuentran justo en medio de las frecuencias fundamentales del modelo 1D, es decir,  $0f_0, 2f_0, 4f_0, \dots$

Para el cálculo de las formas modales a partir de las curvas de dispersión, solo es necesario emplear una pequeña variante de las ecuaciones presentadas en D.1.2, a partir de las cuales se obtiene que el campo de desplazamiento para los pares  $(k, \omega)$  de las curvas de dispersión:

$$v_s(k, z, \omega) = 2\hat{S}_s(k, \omega) \cos(v_s z) \exp(-ikx) \quad (\text{C.1.8a})$$

$$v_h(k, z, \omega) = \hat{S}_h(k, \omega) \exp(-iv_h z) \exp(-ikx) \quad (\text{C.1.8b})$$

Donde  $\hat{S}_s(k, \omega)$  y  $\hat{S}_h(k, \omega)$  se obtienen empleando C.1.3.

### C.1.2. Medio estratificado formado por $N - 1$ estratos sobre un semiespacio

A partir de lo presentado en la sección B.1.2 se tiene que luego de acoplar el sistema de ecuaciones para todo el modelo obtenemos:

$$\{S_N(k, \omega)\} = [Q(k, \omega)][P_{N-1}(k, \omega)][P_{N-2}(k, \omega)] \cdots [P_1(k, \omega)]\{V_1^-(k, \omega)\} \quad (\text{C.1.9})$$

La cual se expresa en forma extendida como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{S}_N(k, \omega) \\ \hat{S}_N(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(k, \omega) & M_{12}(k, \omega) \\ M_{21}(k, \omega) & M_{22}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0(k, \omega) \\ \tau_0(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.1.10})$$

Ahora teniendo en cuenta que por condición de frontera libre  $\tau_1(k, \omega) = 0$  y que no existe ondas ascendente desde el semiespacio  $\hat{S}_N(\omega) = 0$ , se debe cumplir que:

$$M_{11}(k, \omega) = 0 \quad (\text{C.1.11})$$

Donde, a partir de las las parejas  $(k, \omega)$  que cumplan (C.1.11) se obtienen las curvas de dispersión al recordar que  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Para obtener las curvas de dispersión se sigue un procedimiento similar al presentado para el caso del estrato sobre el semiespacio. De forma general el campo de desplazamiento para cada estrato y para el semiespacio se calculan respectivamente como:

$$v_j(k, z, \omega) = [\hat{S}_j(k, \omega) \exp(iv_j z) + \hat{S}_j(k, \omega) \exp(-iv_j z)] \exp(-ikx) \quad 1 \leq j \leq N - 1 \quad (\text{C.1.12a})$$

$$v_N(k, z, \omega) = \hat{S}_N(k, \omega) \exp(-iv_N z) \exp(-ikx) \quad (\text{C.1.12b})$$

Donde los valores de las amplitudes de las ondas ascendentes y descendentes se obtienen empleando la formulación de Thomson-Haskell para las parejas  $(k, \omega)$  usadas en las curvas de dispersión.

## C.2. Medios estratificados deformación plana (ondas de Rayleigh)

Debido a que para el caso de un estrato sobre un semiespacio no existe una solución explícita que permita obtener las ecuaciones para el cálculo de las curvas de dispersión de una manera sencilla, solo se presentará el procedimiento general para el caso de un medio formado por  $N - 1$  estratos sobre un semiespacio (ver figura C.1).

Basados en lo presentado en la sección B.2.2 se tiene que al acoplar el sistema de ecuaciones para todo el modelo se obtiene:

$$\{S_N(k, \omega)\} = [Q(k, \omega)][P_{N-1}(k, \omega)][P_{N-2}(k, \omega)] \cdots [P_1(k, \omega)]\{V_1^-(k, \omega)\} \quad (\text{C.2.1})$$

La cual se puede expresar de forma explícita como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{p}_N(k, \omega) \\ \dot{s}_N(k, \omega) \\ \dot{p}_N(k, \omega) \\ \dot{s}_N(k, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(k, \omega) & M_{12}(k, \omega) & M_{13}(k, \omega) & M_{14}(k, \omega) \\ M_{21}(k, \omega) & M_{22}(k, \omega) & M_{23}(k, \omega) & M_{24}(k, \omega) \\ M_{31}(k, \omega) & M_{32}(k, \omega) & M_{33}(k, \omega) & M_{34}(k, \omega) \\ M_{41}(k, \omega) & M_{42}(k, \omega) & M_{43}(k, \omega) & M_{44}(k, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(k, \omega) \\ w_0(k, \omega) \\ \tau_{zz}^0(k, \omega) \\ \tau_{zx}^0(k, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.2.2})$$

Debido a que no existen ondas en el semiespacio que se propaguen de forma ascendente ( $\dot{p}_N(k, \omega) = \dot{s}_N(k, \omega) = 0$ ) y a que en la superficie existen tracciones nulas ( $\tau_{zz}^0(k, \omega) = \tau_{zx}^0(k, \omega) = 0$ ), para que se cumpla el sistema de ecuaciones (C.2.2) es necesario que el determinante formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas sea nulo, es decir:

$$M_{11}(k, \omega)M_{22}(k, \omega) - M_{21}(k, \omega)M_{12}(k, \omega) = 0 \quad (\text{C.2.3})$$

Donde, las curvas de dispersión son obtenidas a a partir de las las parejas  $(k, \omega)$  que cumplan (C.2.3).

Para el calculo de las curvas de dispersión solo es necesario obtener las amplitudes de las ondas ascendentes y descendentes en cada estrato y en semiespacio y usar las ecuaciones (A.2.27) y (A.2.28) para el calculo del campo de desplazamiento en los estratos, mientras que (A.2.31) y (A.2.32) para el semiespacio.

## Soluciones fundamentales

En este capítulo se presentan algunas soluciones fundamentales para problemas antiplanos, de deformación plana y tridimensionales.

### Índice

---

<b>D.1. Antiplanos</b> . . . . .	<b>104</b>
D.1.1. Respuesta de un semiespacio ante la incidencia de una onda plana $SH$ . . . . .	104
D.1.2. Respuesta de un medio formado por un estrato sobre un semiespacio ante la incidencia de una onda plana $SH$ . . . . .	104
D.1.3. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual unitaria . . . . .	105
D.1.4. Respuesta de un semiespacio ante una fuente puntual . . . . .	106
<b>D.2. Deformación plana</b> . . . . .	<b>107</b>
D.2.1. Respuesta de un semiespacio homogéneo ante la incidencia de ondas planas . . . . .	107
D.2.2. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual (función de Green) . . . . .	112
<b>D.3. Tridimensional</b> . . . . .	<b>114</b>
D.3.1. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual . . . . .	114

---

## D.1. Antiplanos

### D.1.1. Respuesta de un semiespacio ante la incidencia de una onda plana $SH$

Ante la incidencia de una onda plana  $SH$  en un semiespacio, es generada otra onda reflejada  $SH$  como se presenta en la figura (D.1):

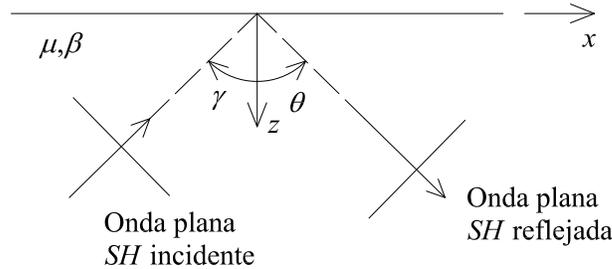


Figura D.1: Incidencia de una onda plana  $SH$  en un semiespacio.

A continuación se analizará dicha respuesta, para lo cual se partirá de la ecuación (2.2.7), que se reescribe a continuación por facilidad:

$$v(x, z, \omega) = [\dot{S}(\omega) \exp(ivz) + \dot{S}(\omega) \exp(-ivz)] \exp(-ikx) \quad (D.1.1)$$

De evaluar la condición de frontera libre en  $z = 0$  se tiene que:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}(\omega) \quad (D.1.2)$$

Lo que da como resultado que el campo de desplazamiento es:

$$v(x, z, \omega) = \dot{S}(\omega) [\exp(ivz) + \exp(-ivz)] \exp(-ikx) \quad (D.1.3)$$

Esto significa que la respuesta total corresponde a la onda incidente y una onda reflejada con ángulo de reflexión  $\theta = \gamma$  (ver figura (D.1)).

### D.1.2. Respuesta de un medio formado por un estrato sobre un semiespacio ante la incidencia de una onda plana $SH$

A continuación se presenta la respuesta de un medio formado por un estrato sobre un semiespacio ante la incidencia de una onda plana  $SH$  (ver figura D.2), la importancia de esta consiste en que será empleada en la formulación del método de los coeficientes de emisión para el caso antiplano (ver sección (6)).

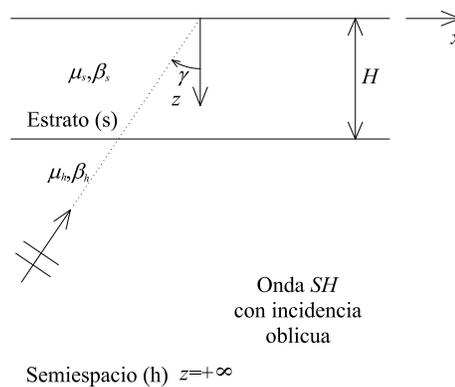


Figura D.2: Incidencia de una onda plana  $SH$  en un medio formado por un estrato sobre un semiespacio.

$$v_s(x, z, \omega) = 2\hat{S}_s(\omega) \cos(v_s z) \exp(-ikx) \quad (\text{D.1.4a})$$

$$v_h(x, z, \omega) = [\hat{S}_h(\omega) \exp(iv_h z) + \hat{S}_h(\omega) \exp(-iv_h z)] \exp(-ikx) \quad (\text{D.1.4b})$$

Donde:

$$k = \frac{\omega}{\beta_h} \sin(\gamma) \quad (\text{D.1.5a})$$

$$v_h = \frac{\omega}{\beta_h} \cos(\gamma) \quad (\text{D.1.5b})$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_s^2} - k^2} \quad (\text{D.1.5c})$$

$$\frac{\hat{S}_s(\omega)}{\hat{S}_h(\omega)} = \frac{\exp(iv_h H)}{\cos(v_s H) + i \frac{\mu_s v_s}{\mu_h v_h} \sin(v_s H)} \quad (\text{D.1.5d})$$

$$\frac{\hat{S}_h(\omega)}{\hat{S}_h(\omega)} = \frac{\cos(v_s H) - i \frac{\mu_s v_s}{\mu_h v_h} \sin(v_s H)}{\cos(v_s H) + i \frac{\mu_s v_s}{\mu_h v_h} \sin(v_s H)} \exp(2iv_h H) \quad (\text{D.1.5e})$$

En la figura (D.3) se presenta la amplitud de la función de transferencia para el caso que las densidades de ambos medios son iguales ( $\bar{\rho} = \frac{\rho_s}{\rho_h} = 1$ ) para varios cocientes entre las velocidades de propagación del estrato y el semiespacio y varios ángulos de incidencia.

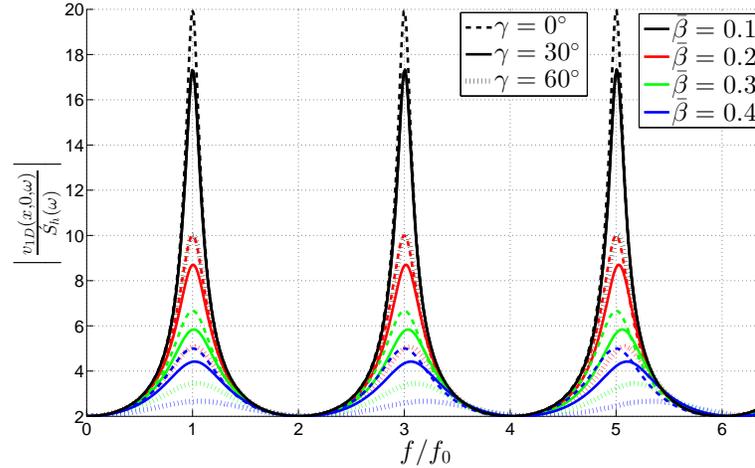


Figura D.3: Amplitud de la función de transferencia del desplazamiento en superficie para un medio formado por un estrato sobre un semiespacio ante la incidencia de una onda plana  $SH$ .

### D.1.3. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual unitaria

#### Coordenadas polares

El campo de desplazamientos generado por una fuente puntual es:

$$G_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = -i \frac{1}{4\mu} H_0^{(2)} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) \quad (\text{D.1.6})$$

Donde:

$\mathbf{x}$ : Vector de posición del observador.

$\xi$ : Vector de posición de la fuente.

$r = \sqrt{(x - x_F)^2 - (z - z_F)^2}$ : Distancia radial entre el observador y la fuente.

Mientras que los esfuerzos son:

$$T_{221}(\mathbf{x}, \omega) = \mu \frac{\partial G_{22}}{\partial x}(\mathbf{x}, \omega) = \mu \frac{\partial G_{22}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{i}{4r} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) H_1^{(2)} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) \gamma_x \quad (\text{D.1.7a})$$

$$T_{223}(\mathbf{x}, \omega) = \mu \frac{\partial G_{22}}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega) = \mu \frac{\partial G_{22}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{i}{4r} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) H_1^{(2)} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) \gamma_z \quad (\text{D.1.7b})$$

Donde:

$\gamma_j = \frac{x_j - \xi_j}{r}$ : Coseno director de la línea que une el punto de aplicación de la carga ( $\xi$ ) y el punto de medición del esfuerzo ( $\mathbf{x}$ ).

Por su parte el vector de tracciones se expresa como:

$$t_2(\mathbf{x}, \omega) = \tau_{xy}n_x + \tau_{zy}n_z = \frac{i}{4r} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) H_1^{(2)} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) (\gamma_x n_x + \gamma_z n_z) \quad (\text{D.1.8})$$

#### Coordenadas cartesianas

En el dominio  $(k, z, \omega)$  la función de Green de desplazamientos y tracciones es:

$$G_{22}(k, z, \omega) = -\frac{i}{2\mu v} \exp(-iv|z|) \quad (\text{D.1.9a})$$

$$T_{221}(k, z, \omega) = -\frac{k}{2v} \exp(-iv|z|) \quad (\text{D.1.9b})$$

$$T_{223}(k, z, \omega) = -\frac{\text{sgn}(z)}{2} \exp(-iv|z|) \quad (\text{D.1.9c})$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier respecto a  $x$ , se obtiene la función de Green en el dominio  $(x, z, \omega)$ :

$$G_{22}(x, z, \omega) = -\frac{i}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v} \exp[-i(kx + v|z|)] dk \quad -\infty < z < +\infty \quad \text{Imag}(v) \leq 0 \quad (\text{D.1.10a})$$

$$T_{221}(x, z, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(kx + v|z|)] dk \quad (\text{D.1.10b})$$

$$T_{223}(x, z, \omega) = -\frac{\text{sgn}(z)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(kx + v|z|)] dk \quad (\text{D.1.10c})$$

#### D.1.4. Respuesta de un semiespacio ante una fuente puntual

La respuesta de un semiespacio homogéneo ante la aplicación de una fuente puntual en el punto  $(x_F, z_F)$  se obtiene por medio del método de imágenes, obteniéndose como la suma de la respuesta de un espacio completo ante la aplicación de una fuente en  $(x_F, z_F)$  y en  $(x_F, -z_F)$ , es decir:

$$v(\mathbf{x}, \xi, \omega) = v(\mathbf{x}, \xi_F, \omega) + v(\mathbf{x}, \xi_R, \omega) \quad (\text{D.1.11})$$

Donde:

$v(\mathbf{x}, \xi, \omega)$ : Respuesta del semiespacio.

$v(\mathbf{x}, \xi_F, \omega)$ : Respuesta de un espacio completo ante la aplicación de una fuente en  $\xi_F = (x_F, z_F)$ .

$v(\mathbf{x}, \xi_I, \omega)$ : Respuesta de un espacio completo ante la aplicación de una fuente en  $\xi_I = (x_F, -z_F)$ .

## D.2. Deformación plana

### D.2.1. Respuesta de un semiespacio homogéneo ante la incidencia de ondas planas

Los campos de desplazamientos y esfuerzos en un semiespacio debido a la incidencia de ondas planas  $P$  o  $SV$  pueden calcularse a partir de las ecuaciones (2.3.8) a (2.3.11) teniendo en cuenta que para estos solo existe un número de onda horizontal, obteniéndose:

$$u(x, z, \omega) = \{-ik [\dot{p}(\omega) \exp(i\gamma z) + \dot{p}(\omega) \exp(-i\gamma z)] + iv [-\dot{s}(\omega) \exp(ivz) + \dot{s}(\omega) \exp(-ivz)]\} \exp(-ikx) \quad (D.2.1)$$

$$w(x, z, \omega) = \{i\gamma [\dot{p}(\omega) \exp(i\gamma z) - \dot{p}(\omega) \exp(-i\gamma z)] - ik [\dot{s}(\omega) \exp(ivz) + \dot{s}(\omega) \exp(-ivz)]\} \exp(-ikx) \quad (D.2.2)$$

$$\tau_{zx}(x, z, \omega) = \mu \{2k\gamma [\dot{p}(\omega) \exp(i\gamma z) - \dot{p}(\omega) \exp(-i\gamma z)] - (k^2 - v^2) [\dot{s}(\omega) \exp(ivz) + \dot{s}(\omega) \exp(-ivz)]\} \exp(-ikx) \quad (D.2.3)$$

$$\tau_{zz}(x, z, \omega) = \mu \{(k^2 - v^2) [\dot{p}(\omega) \exp(i\gamma z) + \dot{p}(\omega) \exp(-i\gamma z)] + 2kv [\dot{s}(\omega) \exp(ivz) - \dot{s}(\omega) \exp(-ivz)]\} \exp(-ikx) \quad (D.2.4)$$

A partir de evaluar las condiciones de frontera libre en (D.2.3) y (D.2.4) se obtiene:

$$2k\gamma [\dot{p}(\omega) - \dot{p}(\omega)] - (k^2 - v^2) [\dot{s}(\omega) + \dot{s}(\omega)] = 0 \quad (D.2.5a)$$

$$(k^2 - v^2) [\dot{p}(\omega) + \dot{p}(\omega)] + 2kv [\dot{s}(\omega) - \dot{s}(\omega)] = 0 \quad (D.2.5b)$$

O de forma equivalente:

$$2f_\alpha [\dot{p}(\omega) - \dot{p}(\omega)] - (1 - f_\beta^2) [\dot{s}(\omega) + \dot{s}(\omega)] = 0 \quad (D.2.6a)$$

$$(1 - f_\beta^2) [\dot{p}(\omega) + \dot{p}(\omega)] + 2f_\beta [\dot{s}(\omega) - \dot{s}(\omega)] = 0 \quad (D.2.6b)$$

Donde se ha empleado<sup>1</sup>:

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right) = k^2 f_\alpha^2 \quad \Im(f_\alpha) < 0 \quad (D.2.9)$$

$$v^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{c^2}{\beta^2} - 1 \right) = k^2 f_\beta^2 \quad \Im(f_\beta) < 0 \quad (D.2.10)$$

<sup>1</sup>Para incidencias con ángulos positivos ( $k > 0$ ) se tiene que:

$$\gamma = kf_\alpha = \begin{cases} k \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - 1} & \text{Ondas } P \text{ con cualquier ángulo de incidencia y ondas } SV \text{ con ángulo menor al crítico} \\ k \left( -i \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha^2}} \right) & \text{Onda } SV \text{ con ángulo de incidencia mayor al crítico} \end{cases} \quad (D.2.7a)$$

$$v = kf_\beta = k \sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1} \quad (D.2.7b)$$

Mientras que para ondas incidentes con ángulo negativo ( $k < 0$ ) se tiene:

$$\gamma = -kf_\alpha = \begin{cases} -k \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - 1} & \text{Ondas } P \text{ con cualquier ángulo de incidencia y ondas } SV \text{ con ángulo mayor (menor en valor absoluto) al crítico} \\ k \left( i \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha^2}} \right) & \text{Onda } SV \text{ con ángulo de incidencia menor (mayor en valor absoluto) al crítico} \end{cases} \quad (D.2.8a)$$

$$v = -kf_\beta = -k \sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1} \quad (D.2.8b)$$

En conclusión, para la incidencia con ángulo negativo solo se debe cambiar  $f_\alpha$  (para ángulo positivo) por  $-f_\alpha$ ,  $f_\beta$  (para el ángulo positivo) por  $-f_\beta$  y calcular  $k$  con el ángulo negativo.

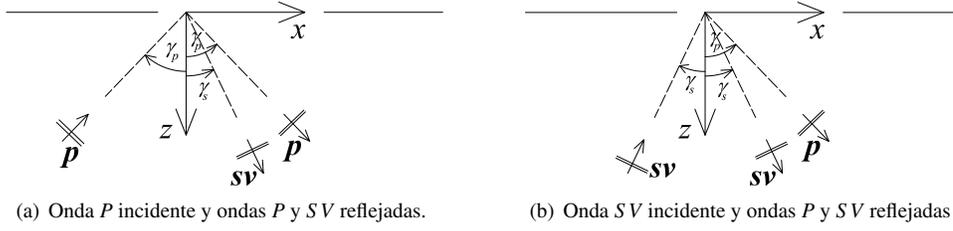


Figura D.4: Ondas  $P$  y  $SV$  incidentes y ondas  $P$  y  $SV$  reflejadas.

### D.2.1.1. Incidencia de una onda $P$

A partir de la definición de velocidad de propagación horizontal aparente se tiene:

$$c = \frac{\alpha}{\sin(\gamma_p)} \quad \therefore \quad \beta < \alpha < |c| \quad (D.2.11a)$$

$$\sin(\gamma_s) = \frac{\beta}{\alpha} \sin(\gamma) \quad \therefore \quad \gamma_s < \gamma_p \quad \gamma_s \wedge \gamma_p \in \mathbb{R} \quad (D.2.11b)$$

El resultado de la anterior ecuación quiere decir que cuando incide una onda plana  $P$  sobre un semiespacio se generan dos ondas planas no inhomogéneas, una de ellas es una onda  $P$  que se propaga con un ángulo igual al de incidencia y otra onda  $SV$  con un ángulo menor al de la onda  $P$  incidente (ver figura D.4(a)).

Ahora, si en (D.2.6) hacemos que  $\dot{s}(\omega) = 0$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1-f_\beta^2}{2f_\alpha} \\ -1 & \frac{2f_\beta}{1-f_\beta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}(\omega) \\ \dot{s}(\omega) \end{Bmatrix} = \dot{p}(\omega) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (D.2.12)$$

Cuya solución es:

$$\frac{\dot{p}(\omega)}{\dot{p}(\omega)} = \frac{\dot{p}}{\dot{p}} = \frac{4f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (D.2.13a)$$

$$\frac{\dot{s}(\omega)}{\dot{p}(\omega)} = \frac{\dot{s}}{\dot{p}} = -\frac{4f_\alpha (f_\beta^2 - 1)}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (D.2.13b)$$

De las ecuaciones (D.2.13) es importante resaltar que el cociente entre la amplitud de la onda incidente y las reflejadas es independiente de la frecuencia lo que quiere decir que no es un fenómeno dispersivo.

### D.2.1.2. Incidencia de una onda $SV$

A partir de la definición de velocidad de propagación horizontal aparente se tiene:

$$c = \frac{\beta}{\sin(\gamma_s)} \quad \therefore \quad \beta < |c| < \alpha \vee \beta < \alpha < |c| \quad (D.2.14a)$$

$$\sin(\gamma_p) = \frac{\alpha}{\beta} \sin(\gamma_s) \quad \gamma_p \in \mathbb{R} \vee \gamma_p \in \mathbb{C} \quad (D.2.14b)$$

El resultado de la anterior ecuación quiere decir que cuando incide una onda plana  $S$  sobre un semiespacio se generan dos ondas planas, una de ellas es una onda  $S$  que se propaga con un ángulo igual al de incidencia y otra onda  $P$  que puede ser homogénea o inhomogénea, si se trata de una onda plana homogénea esta se propagará con un ángulo mayor al de la onda  $SV$  incidente (ver figura D.4(b)), mientras si es inhomogénea se propagará en dirección  $x$ .

El criterio empleado para definir si la onda  $P$  reflejada es homogénea o inhomogénea consiste en comparar el ángulo de incidencia de la onda  $SV$  con el ángulo crítico  $\gamma_s^c$  ((D.2.15)), si el ángulo de incidencia es menor al crítico la onda reflejada  $P$  será homogénea mientras si es mayor se tratará de una onda inhomogénea.

$$\gamma_s^c = \sin^{-1} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (\text{D.2.15})$$

Para el caso de la incidencia de una onda  $SV$ , se tiene que  $\dot{p}(\omega) = 0$  y a partir de (D.2.6) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2f_\alpha}{1-f_\beta^2} & -1 \\ -\frac{1-f_\beta}{2f_\beta} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}(\omega) \\ \dot{s}(\omega) \end{Bmatrix} = \dot{s}(\omega) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.2.16})$$

Cuya solución es:

$$\frac{\dot{p}(\omega)}{\dot{s}(\omega)} = \frac{\dot{p}}{\dot{s}} = \frac{4f_\beta(f_\beta^2 - 1)}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{D.2.17a})$$

$$\frac{\dot{s}(\omega)}{\dot{s}(\omega)} = \frac{\dot{s}}{\dot{s}} = \frac{4f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (\text{D.2.17b})$$

Al igual que para el caso de la onda  $P$  incidentes, a partir de (D.2.17) se concluye que el cociente entre la amplitud de la onda incidente y las reflejadas es independiente de la frecuencia, lo que quiere decir que no es un fenómeno dispersión.

### D.2.1.3. Onda de Rayleigh

La onda de Rayleigh consiste en una onda  $P$  y una onda  $S$  inhomogéneas las cuales pueden existir en un semiespacio sin necesidad de que sean generadas por alguna onda plana incidente.

Lo anterior puede obtenerse a partir de (D.2.6) haciendo  $\dot{p}(\omega) = 0$  y  $\dot{s}(\omega) = 0$ , con lo cual se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 2f_\alpha & 1-f_\beta^2 \\ 1-f_\beta^2 & -2f_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}(\omega) \\ \dot{s}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.2.18})$$

La solución de (D.2.18) requiere que su determinante sea cero, es decir:

$$4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2 = 0 \quad (\text{D.2.19})$$

Una forma auxiliar de expresar (D.2.19) es la siguiente:

$$\begin{aligned} (\xi - 2)^4 &= 16f_\alpha^2 f_\beta^2 \\ \xi^4 - 8\xi^3 + 24\xi^2 - 32\xi + 16 &= 16 \left( \frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right) (\xi - 1) \\ \xi^4 - 8\xi^3 + 24\xi^2 - 16 \left( 1 + \frac{c^2}{\alpha^2} \right) \xi + 16 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \xi &= 0 \\ \xi^3 - 8\xi^2 + 8 \left( 3 - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \xi - 16 \left( 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2.20})$$

Donde:

$$\xi = \frac{c_s^2}{\beta^2}.$$

El hecho que la ecuación (D.2.20) (o (D.2.19)) no sea función de  $\omega$  significa que la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh para un semiespacio no depende de la frecuencia<sup>2</sup>. En la figura D.5 se presenta la variación de la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh para un semiespacio en función del coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

<sup>2</sup>Como caso general, se tiene que para medios estratificados la velocidad de la onda de Rayleigh depende de la frecuencia, lo cual es conocido como dispersión.

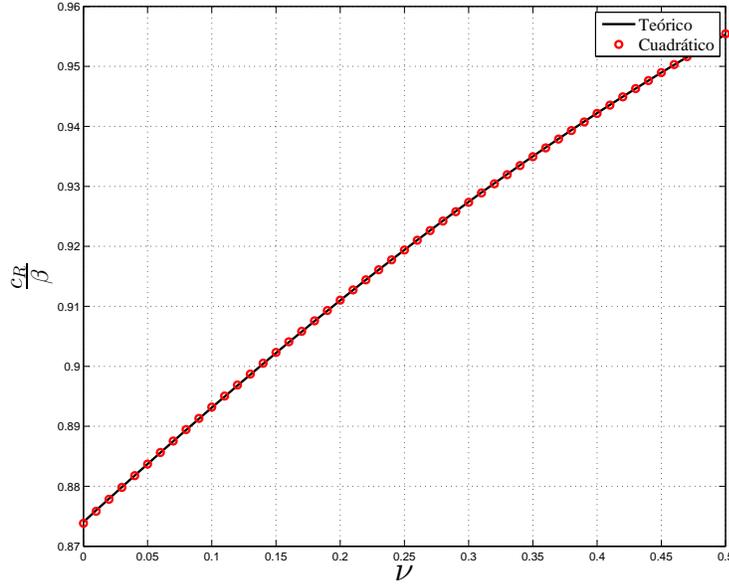


Figura D.5: Velocidad de la onda de Rayleigh en función del coeficiente de Poisson del medio ( $v$ ).

La ecuación (D.2.20) solo tiene una raíz real que cumpla  $0 < c_R < \beta$ , la cual puede ser aproximada por el siguiente polinomio cuadrático:

$$\frac{c_R}{\beta} \approx -0.0760v^2 + 0.2012v + 0.8738 \quad (\text{D.2.21})$$

Donde:

$v$ : Coeficiente de Poisson del semiespacio.

Debido a que  $c_R < \beta < \alpha$  se tiene:

$$f_\alpha = -i \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{\alpha^2}} \quad (\text{D.2.22a})$$

$$f_\beta = -i \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{\beta^2}} \quad (\text{D.2.22b})$$

A partir de (D.2.6) y (D.2.19) se obtiene:

$$\frac{\dot{p}(\omega)}{\dot{s}(\omega)} = \frac{f_\beta^2 - 1}{2f_\alpha} = \frac{(f_\beta^2 - 1)2f_\beta}{-(f_\beta^2 - 1)^2} = \frac{2f_\beta}{1 - f_\beta^2} \quad (\text{D.2.23})$$

Donde se ha empleado (D.2.19).

A partir de (D.2.1), (D.2.2),  $\dot{p}(\omega) = 0$  y que  $\dot{s}(\omega) = 0$ , se tiene que el campo de desplazamientos para las ondas de Rayleigh en un semiespacio se expresan como:

$$u(x, z, \omega) = [-ik\dot{p}(\omega) \exp(-iyz) + iv\dot{s}(\omega) \exp(-ivz)] \exp(-ikx) \quad (\text{D.2.24a})$$

$$w(x, z, \omega) = [-i\gamma\dot{p}(\omega) \exp(-iyz) - ik\dot{s}(\omega) \exp(-ivz)] \exp(-ikx) \quad (\text{D.2.24b})$$

La elipticidad de las ondas de Rayleigh ( $\chi$ ) se define como  $i$  veces el cociente entre el desplazamiento horizontal y el

vertical en la superficie, es decir:

$$\chi = i \frac{u(x, 0, \omega)}{w(x, 0, \omega)} \quad (D.2.25)$$

$$\begin{aligned} &= i \frac{-ik\dot{p}(\omega) + iv\dot{s}(\omega)}{-i\gamma\dot{p}(\omega) - ik\dot{s}(\omega)} = i \frac{\frac{\dot{p}(\omega)}{\dot{s}(\omega)} - f_\beta}{f_\alpha \frac{\dot{p}(\omega)}{\dot{s}(\omega)} + 1} = i \frac{\frac{2f_\beta}{1-f_\beta^2} - f_\beta}{f_\alpha \frac{2f_\beta}{1-f_\beta^2} + 1} \\ &= i \frac{\frac{2f_\beta}{1-f_\beta^2} - f_\beta}{\frac{f_\beta^2-1}{2} + 1} = i \frac{2f_\beta}{1-f_\beta^2} = \frac{2\delta\sqrt{\delta^2-1}}{2\delta^2-1} \end{aligned} \quad (D.2.26)$$

Donde:

$$\delta = \frac{\beta}{c_R}$$

$$\xi = \frac{1}{\chi} = -i \frac{w(x, 0, \omega)}{u(x, 0, \omega)} = \frac{2\delta^2-1}{2\delta\sqrt{\delta^2-1}} \quad (D.2.27)$$

Dividiendo las ecuaciones (D.2.24) por  $[-ik\dot{p}(\omega) + iv\dot{s}(\omega)]$  se obtiene que el campo de desplazamiento para las ondas de Rayleigh puede expresarse como:

$$u(x, z, \omega) = [2\delta^2 \exp(-i\gamma z) + (1 - 2\delta^2) \exp(-ivz)] \exp(-ikx) \quad (D.2.28a)$$

$$w(x, z, \omega) = i\xi [(1 - 2\delta^2) \exp(-i\gamma z) + 2\delta^2 \exp(-ivz)] \exp(-ikx) \quad (D.2.28b)$$

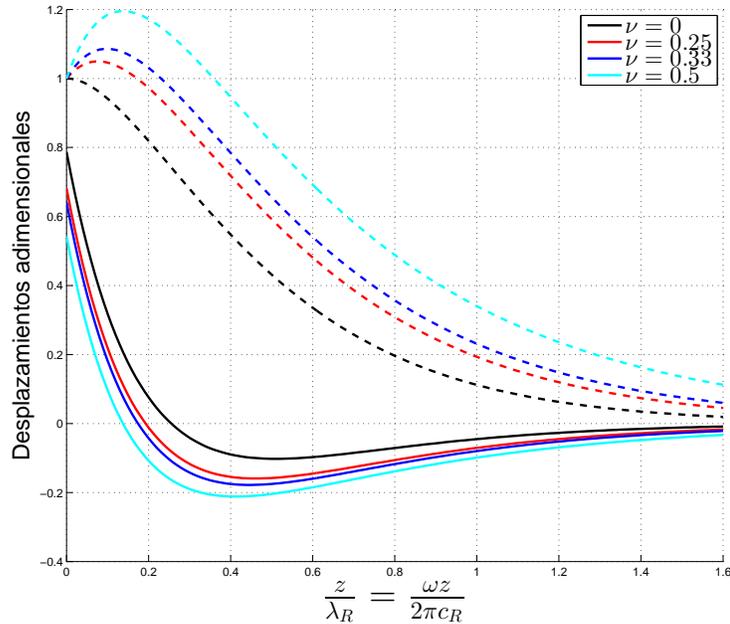


Figura D.6: Campo de desplazamiento adimensionalizado respecto al desplazamiento vertical en superficie, en línea continua el desplazamiento horizontal  $\left(\frac{u(0,z,\omega)}{-iw(0,0,\omega)}\right)$  y en línea discontinua el desplazamiento vertical  $\left(\frac{-iw(0,z,\omega)}{-iw(0,0,\omega)}\right)$ .

Con respecto a los resultados presentados en la figura D.6 se tiene que los desplazamientos horizontales y verticales de las ondas de Rayleigh están desfasados  $90^\circ$ , lo que da como resultado un movimiento elíptico retrogrado de las partículas cerca a la superficie y un movimiento elíptico lejos de esta.

## D.2.2. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual (función de Green)

### Coordenadas cartesianas

La función de Green de desplazamientos y tracciones en el dominio  $(k, z, \omega)$  es:

$$G_{11}(k, z, \omega) = -i \frac{g(\omega)}{2k_\beta^2 \mu} \left[ \frac{k^2}{\gamma} \exp(-i\gamma|z|) + v \exp(-iv|z|) \right] \quad (\text{D.2.29a})$$

$$G_{31}(k, z, \omega) = i \operatorname{sgn}(z) \frac{g(\omega)k}{2k_\beta^2 \mu} [-\exp(-i\gamma|z|) + \exp(-iv|z|)] \quad (\text{D.2.29b})$$

$$G_{13}(k, z, \omega) = -i \operatorname{sgn}(z) \frac{f(\omega)k}{2k_\beta^2 \mu} [\exp(-i\gamma|z|) - \exp(-iv|z|)] \quad (\text{D.2.29c})$$

$$G_{33}(k, z, \omega) = -i \frac{f(\omega)}{2k_\beta^2 \mu} \left[ \gamma \exp(-i\gamma|z|) + \frac{k^2}{v} \exp(-iv|z|) \right] \quad (\text{D.2.29d})$$

$$T_{311}(k, z, \omega) = \operatorname{sgn}(z) \frac{g(\omega)}{2k_\beta^2} [-2k^2 \exp(-i\gamma|z|) + (k^2 - v^2) \exp(-iv|z|)] \quad (\text{D.2.29e})$$

$$T_{331}(k, z, \omega) = \frac{g(\omega)k}{2k_\beta^2} \left[ \frac{k^2 - v^2}{\gamma} \exp(-i\gamma|z|) + 2v \exp(-iv|z|) \right] \quad (\text{D.2.29f})$$

$$T_{111}(k, z, \omega) = -\frac{g(\omega)}{2k_\beta^2} \left[ \left( \frac{\omega^2}{\beta^2} - 2\gamma^2 \right) \frac{k}{\gamma} \exp(-i\gamma|z|) + 2kv \exp(-iv|z|) \right] \quad (\text{D.2.29g})$$

$$T_{313}(k, z, \omega) = -\frac{f(\omega)k}{2k_\beta^2} \left[ 2\gamma \exp(-i\gamma|z|) + \frac{k^2 - v^2}{v} \exp(-iv|z|) \right] \quad (\text{D.2.29h})$$

$$T_{333}(k, z, \omega) = \operatorname{sgn}(z) \frac{f(\omega)}{2k_\beta^2} [(k^2 - v^2) \exp(-i\gamma|z|) - 2k^2 \exp(-iv|z|)] \quad (\text{D.2.29i})$$

$$T_{113}(k, z, \omega) = \operatorname{sgn}(z) \frac{f(\omega)}{2k_\beta^2} \left[ -\left( \frac{\omega^2}{\beta^2} - 2\gamma^2 \right) \exp(-i\gamma|z|) + 2k^2 \exp(-iv|z|) \right] \quad (\text{D.2.29j})$$

### Coordenadas polares

Según lo presentado en el artículo [Sánchez-Sesma and Campillo, 1991], la función de Green se calcula como:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \frac{1}{i8\rho} [\delta_{\alpha\beta} A - (2\gamma_\alpha \gamma_\beta - \delta_{\alpha\beta}) B] \quad (\text{D.2.30})$$

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) = \frac{i\mu}{2\rho r} \left\{ \left[ B + \frac{\lambda D(qr)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_\beta n_\alpha + \left[ B + \frac{D(kr)}{2\beta^2} \right] [\gamma_\alpha n_\beta + \gamma_\chi n_\chi \delta_{\alpha\beta}] + (C - 4B) \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\chi n_\chi \right\} \quad (\text{D.2.31})$$

Donde:

$$A = \frac{H_0^{(2)}(qr)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(kr)}{\beta^2}, \quad (\text{D.2.32a})$$

$$B = \frac{H_2^{(2)}(qr)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(kr)}{\beta^2}, \quad (\text{D.2.32b})$$

$$C = \frac{D(qr)}{\alpha^2} - \frac{D(kr)}{\beta^2}, \quad (\text{D.2.32c})$$

$$D = p H_1^{(2)}(p) \quad (\text{D.2.32d})$$

---

$\rho$ = densidad de masa,  $k = \frac{\omega}{\beta}$ = número de onda  $S$ ,  $q = \frac{\omega}{\alpha}$ = número de onda  $P$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ = velocidad de las ondas  $P$ ,  $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ = velocidad de las ondas  $S$ ,  $\lambda, \mu$  = constantes de Lamé,  $\gamma_\alpha = \frac{x_\alpha - \xi_\alpha}{r}$ = coseno director,  $n_\alpha$ = vector normal exterior unitario,  $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ ,  $H_m^{(2)}(\cdot)$ = Función de Hankel de segundo genero y orden  $m$ .

### D.3. Tridimensional

#### D.3.1. Respuesta de un espacio completo ante una fuente puntual

##### Coordenadas cartesianas

Basado en lo presentado en [Luzón et al., 1997], la función de Green puede expresarse como:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu r} [f_2\delta_{ij} + (f_1 - f_2)\gamma_i\gamma_j] \quad (\text{D.3.1})$$

Donde:

$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ : Distancia entre la fuente y el observador (magnitud del vector  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ ).

$\gamma_i = \frac{x_i - \xi_i}{r}$ : Coseno director de la componente  $i$  del vector  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ .

$k = \frac{\omega}{\beta}$ : Número de onda para las ondas  $S$ .

$q = \frac{\omega}{\alpha}$ : Número de onda para las ondas  $P$ .

$\alpha$ : Velocidad de propagación de las ondas  $P$ .

$\beta$ : Velocidad de propagación de las ondas  $S$ .

$$f_1 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \frac{2i}{qr} - \frac{2}{(qr)^2}\right] \exp(-iqr) + \left[\frac{2i}{kr} + \frac{2}{(kr)^2}\right] \exp(-ikr) \quad (\text{D.3.2a})$$

$$f_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \left[\frac{i}{qr} + \frac{1}{(qr)^2}\right] \exp(-iqr) + \left[1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}\right] \exp(-ikr) \quad (\text{D.3.2b})$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi r^2} [(g_1 - g_2 - 2g_3)\gamma_i\gamma_j\gamma_k n_k + g_3\gamma_i n_j + g_2\gamma_j n_i + g_3\gamma_k n_k \delta_{ij}] \quad (\text{D.3.3})$$

$$g_j = \left[krA_{1j} + B_{1j} + \frac{C_{1j}}{kr} + \frac{D_{1j}}{(kr)^2}\right] \exp(-ikr) + \left[krA_{2j} + B_{2j} + \frac{C_{2j}}{kr} + \frac{D_{2j}}{(kr)^2}\right] \exp(-iqr) \quad (\text{D.3.4})$$

Tabla D.3.1: Coeficientes de la ecuación (D.3.4).

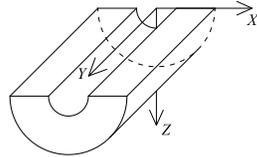
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$A_{1j}$	0	0	$-i$
$A_{2j}$	$-i\frac{\beta}{\alpha}$	$i\left[2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - \frac{\beta}{\alpha}\right]$	0
$B_{1j}$	4	-2	-3
$B_{2j}$	$-4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1$	$4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1$	$2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$
$C_{1j}$	$-12i$	$6i$	$6i$
$C_{2j}$	$12i\frac{\beta}{\alpha}$	$-6i\frac{\beta}{\alpha}$	$-6i\frac{\beta}{\alpha}$
$D_{1j}$	-12	6	6
$D_{2j}$	12	-6	-6

## Convenciones y definición de variables

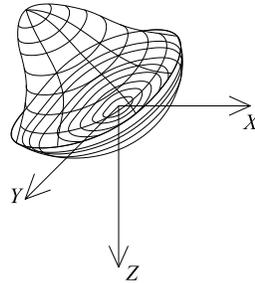
### E.1. Convenciones

#### E.1.1. Ejes coordenados

La convención de ejes coordenados empleada en esta tesis corresponde a la empleada usualmente en problemas de elastodinámica, según la cual los ejes siguen la regla de la mano derecha y el eje vertical corresponde al  $z$  y es positivo hacia abajo. En la figura E.1 se presenta la convención empleada en problemas bidimensionales (*SH-Love* o *P-SV-Rayleigh*).



(a) Convención de ejes empleados en los problemas bidimensionales (*SH-Love* o *P-SV-Rayleigh*).



(b) Convención de ejes empleados en los problemas tridimensionales.

Figura E.1: Convención de ejes coordenados cartesianos empleados.

#### E.1.2. Esfuerzos

La convención positiva para los esfuerzos se presenta en la sección 1.2.2.

#### E.1.3. Transformada de Fourier

En esta tesis la convención para la transformada directa e inversa de Fourier respecto al tiempo son respectivamente:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{E.1.1a})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (\text{E.1.1b})$$

Por su parte para las variables espaciales  $x$ ,  $y$  y  $z$  las convenciones para la transformada directa e inversa de Fourier son respectivamente (por simplicidad solo se presenta para el caso de la variable  $x$ ):

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(ikx) dx \quad (\text{E.1.2a})$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \exp(-ikx) dk \quad (\text{E.1.2b})$$

#### E.1.4. Pulso de Ricker

Se define al pulso de Ricker como la ondícula que tiene la siguiente representación en el dominio del tiempo y de la frecuencia respectivamente:

$$R(t) = \left[ \left( \pi \frac{t-t_s}{t_p} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \exp \left[ - \left( \pi \frac{t-t_s}{t_p} \right)^2 \right] \quad (\text{E.1.3a})$$

$$R(\omega) = - \frac{t_p}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right] \quad (\text{E.1.3b})$$

Donde  $\omega_p = 2\pi/t_p$ .

#### E.1.5. Vectores de propagación y de desplazamiento de las ondas planas $P$ y $SV$

La convención positiva para las ondas planas  $P$  y  $SV$  se presenta en la figura (E.2), mientras que para las ondas de Rayleigh la convención se presenta en (D.2.1.3).

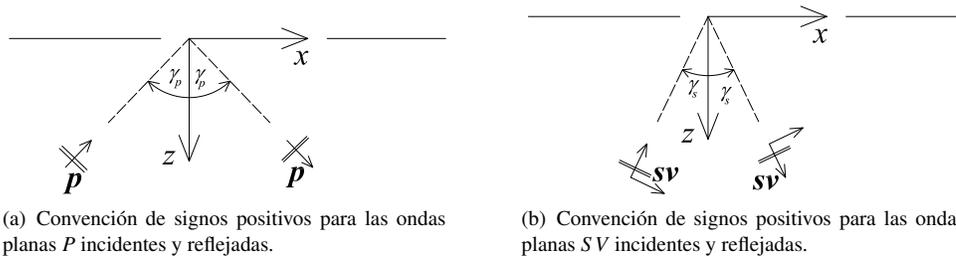


Figura E.2: Convención de signos positivos para las ondas incidentes  $P$  y  $SV$ .

Basados en la anterior convención de signos para los vectores de propagación y desplazamiento para las ondas planas, se tiene que la relación entre la amplitud de los potenciales de las ondas planas  $P$  y  $SV$  con la amplitud de estas mismas ondas es:

$$\dot{p}(\omega) = i \frac{\alpha}{\omega} \dot{P}(\omega) \quad (\text{E.1.4a})$$

$$\dot{p}(\omega) = i \frac{\alpha}{\omega} \dot{P}(\omega) \quad (\text{E.1.4b})$$

$$\dot{s}(\omega) = i \frac{\beta}{\omega} \dot{S}V(\omega) \quad (\text{E.1.4c})$$

$$\dot{s}(\omega) = -i \frac{\beta}{\omega} \dot{S}V(\omega) \quad (\text{E.1.4d})$$

## E.2. Definición de variables

La siguiente es la definición de las variables empleadas en esta tesis<sup>1</sup>.

$f_0 = 4Beta_s/H$ : Frecuencia fundamental del modelo unidimensional de un estrato sobre un semiespacio.

$f_c^n$ : Frecuencia de corte para el modo  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

$H_a^{(b)}$ : Función de Hankel de orden  $a$  y de especie  $b$ .

$k$ : Número de onda horizontal.

$k_r$ : Número de onda radial.

$k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}$ : Número de onda de las ondas  $P$ .

$k_\beta = \frac{\omega}{\beta}$ : Número de onda de las ondas  $S$ .

$\mathbf{n}$ : Vector normal exterior.

$\hat{p}(\omega)$ : Amplitud del potencial de la onda  $P$  ascendente.

$\check{p}(\omega)$ : Amplitud del potencial de la onda  $P$  descendente.

$\hat{P}(\omega)$ : Amplitud de la onda  $P$  ascendente.

$\check{P}(\omega)$ : Amplitud de la onda  $P$  descendente.

$r$ : Coordenada radial, centrada en la fuente.

$\hat{s}(\omega)$ : Amplitud del potencial de la onda  $S$  ascendente.

$\check{s}(\omega)$ : Amplitud del potencial de la onda  $S$  descendente.

$\hat{S}(\omega)$ : Amplitud de la onda  $S$  ascendente.

$\check{S}(\omega)$ : Amplitud de la onda  $S$  descendente.

$\mathbf{t}(\mathbf{n})$ : Vector de tracciones en una cara con vector normal exterior  $\mathbf{n}$ .

$t_i^n(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ : Componente en dirección  $x_i$  del vector de tracción normal.

$u_i^0(\mathbf{x}, \omega)$ : Respuesta de campo libre.

$\mathbf{x}$ : Vector de posición del observador.

$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ : Velocidad de propagación de las ondas  $P$ .

$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ : Velocidad de propagación de las ondas  $S$ .

$\gamma$ : Número de onda vertical para las ondas  $P$ .

$\gamma_i = \frac{x_i - \xi_i}{r}$ : Coseno director en dirección  $x_i$ .

$\Gamma$ : Frontera del problema en estudio.

$\lambda$ : Constante de Lamé.

$\mu$ : Módulo de rigidez a cortante (constante de Lamé).

$v$ : Número de onda vertical de las ondas  $S$ .

$\xi$ : Vector de posición de la fuente.

$\rho$ : Densidad.

$\tau_{ij}$ : Tracción en dirección  $x_i$  en una cara con normal exterior paralela a  $x_j$ .

$\omega$ : Frecuencia circular.

$\Omega$ : Dominio del problema en estudio.

<sup>1</sup>En caso de usarse otras convenciones, estas se explicarán de forma explícita en el lugar correspondiente.



# Bibliografía

- [Aki and Richards, 2002] Aki, K. and Richards, P. (2002). *Quantitative seismology*. Univ Science Books.
- [Bakır et al., 2002] Bakır, B., Özkan, M., and Cılız, S. (2002). Effects of basin edge on the distribution of damage in 1995 dinar, turkey earthquake. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22(4):335–345.
- [Bard and Bouchon, 1980a] Bard, P. and Bouchon, M. (1980a). The seismic response of sediment-filled valleys. part 1. the case of incident SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 70(4):1263–1286.
- [Bard and Bouchon, 1980b] Bard, P. and Bouchon, M. (1980b). The seismic response of sediment-filled valleys. part 2. the case of incident P and SV waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 70(5):1921.
- [Bard and Gariel, 1986] Bard, P.-Y. and Gariel, J.-C. (1986). The seismic response of two-dimensional sedimentary deposits with large vertical velocity gradients. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 76(2):343–366.
- [Brebba and Dominguez, 1992] Brebba, C. and Dominguez, J. (1992). *Boundary Elements and Introductory Course*. WITpress, 2nd edition.
- [Campillo et al., 1989] Campillo, M., Gariel, J., Aki, K., and Sánchez-Sesma, F. (1989). Destructive strong ground motion in mexico city: Source, path, and site effects during great 1985 michoacan earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 79(6):1718–1735.
- [Chao, 1960] Chao, C. (1960). Dynamical response of an elastic half-space to tangential surface loadings. *Journal of Applied Mechanics*, 27:559.
- [Chin et al., 1984] Chin, R., Hedstrom, G., and Thigpen, L. (1984). Matrix methods in synthetic seismograms. *Geophysical Journal International*, 77(2):483–502.
- [Haskell, 1953] Haskell, N. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1):17–34.
- [Heymsfield, 2000] Heymsfield, E. (2000). Two-dimensional scattering of SH waves in a soil layer underlain with a sloping bedrock. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 19(7):489–500.
- [Hudson, 1972] Hudson, D. E. (1972). Local distribution of strong earthquake ground motions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 62(6):1765–1786.
- [Kawase et al., 2011] Kawase, H., Sánchez-Sesma, F. J., and Matsushima, S. (2011). The optimal use of horizontal-to-vertical spectral ratios of earthquake motions for velocity inversions based on diffuse-field theory for plane waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 101(5):2001–2014.
- [King and Tucker, 1984] King, J. and Tucker, B. (1984). Observed variations of earthquake motion across a sediment-filled valley. *Bulletin of the seismological society of america*, 74(1):137–151.

- [Knopoff, 1964] Knopoff, L. (1964). A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(1):431–438.
- [Lamb, 1904] Lamb, H. (1904). On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 203:1–42.
- [Lontsi et al., 2015] Lontsi, A. M., Sánchez-Sesma, F. J., Molina-Villegas, J. C., Ohrnberger, M., and Krüger, F. (2015). Full microtremor h/v (z, f) inversion for shallow subsurface characterization. *Geophysical Journal International*, 202(1):298–312.
- [Luzón et al., 1997] Luzón, F., Sánchez-Sesma, F., Rodríguez-Zúñiga, J., Posadas, A., García, J., Martín, J., Romacho, M., and Navarro, M. (1997). Diffraction of p, s and rayleigh waves by three-dimensional topographies. *Geophysical Journal International*, 129(3):571–578.
- [Moczo and Bard, 1993] Moczo, P. and Bard, P.-Y. (1993). Wave diffraction, amplification and differential motion near strong lateral discontinuities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 83(1):85–106.
- [Narayan, 2003] Narayan, J. (2003). 2.5 d simulation of basin-edge effects on the ground motion characteristics. *Journal of Earth System Science*, 112(3):463–469.
- [Narayan, 2012] Narayan, J. (2012). Effects of angle of incidence of sh-waves at the basin-edge on the characteristics of basin-edge induced love wave. *Journal of Earthquake and Tsunami*, 6(01).
- [Narayan and Richharia, 2008] Narayan, J. and Richharia, A. A. (2008). Effects of strong lateral discontinuity on ground motion characteristics and aggravation factor. *Journal of seismology*, 12(4):557–573.
- [Narayan and Kumar, 2009] Narayan, J. P. and Kumar, S. (2009). Effects of soil layering on the characteristics of basin-edge induced surface waves. *Acta Geophysica*, 57(2):294–310.
- [Pitarka et al., 1998] Pitarka, A., Irikura, K., Iwata, T., and Sekiguchi, H. (1998). Three-dimensional simulation of the near-fault ground motion for the 1995 hyogo-ken nanbu (kobe), japan, earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(2):428–440.
- [Reddy, 2006] Reddy, J. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGrawHill.
- [Sánchez-Sesma and Luzón, 1995] Sánchez-Sesma, F. and Luzón, F. (1995). Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S, and Rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85(1):269–284.
- [Sánchez-Sesma and Campillo, 1991] Sánchez-Sesma, F. J. and Campillo, M. (1991). Diffraction of p, sv, and rayleigh waves by topographic features: A boundary integral formulation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 81(6):2234–2253.
- [Schmidt and Tango, 1986] Schmidt, H. and Tango, G. (1986). Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 84(2):331–359.
- [Schnabel et al., 1972] Schnabel, P., Seed, H. B., and Lysmer, J. (1972). Modification of seismograph records for effects of local soil conditions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 62(6):1649–1664.
- [Semblat et al., 2005] Semblat, J. F., Kham, M., Parara, E., Bard, P.-Y., Pitilakis, K., Makra, K., and Raptakis, D. (2005). Seismic wave amplification: basin geometry vs soil layering. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 25(7):529–538.
- [Thomson, 1950] Thomson, W. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, 21(2):89–93.
- [Watson, 1970] Watson, T. (1970). A note on fast computation of rayleigh wave dispersion in the multilayered elastic half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 60(1):161–166.