



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN**

**CÁLCULO DE SUFICIENCIA DE RESERVAS VÍA CÓPULAS
EN EL SEGURO DE VIDA CORTO PLAZO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

PRESENTA

CARLOS ENRIQUE PÉREZ LÓPEZ

Asesor: DR. ARTURO ERDELY RUIZ.

SEPTIEMBRE 2015

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*El amor nunca deja de ser; pero las profecías se acabarán, y cesarán las
lenguas, y la ciencia acabará.*

1 Corintios 13:8, Versión Reina-Valera de 1960.

Agradecimientos

A Dios, por mi vida y por cada oportunidad inmerecida de comenzar de nuevo.

A mi madre, porque siempre te impulsa a crecer y creer en ti mismo con un apoyo incondicional; A mi padre, por protegernos y cuidarnos sin importar el cansancio, pero siempre por el camino recto; A mi abuelita Rosita, por dar lo mejor de ti y tu cariño siempre presente; A mi abuela Teresa, mi tío José y mi tío Benjamín: por compartir sus búsquedas de conocimiento, música y su cariño. No tengo palabras suficientes y aun me queda mucho por aprender de ustedes.

A mi profesor y asesor Arturo Erdely por su paciencia y confianza, así como su apoyo y conocimiento.

A Quetzalli y Manuel: por su amistad y apoyo (técnico y moral); A Ere, por no dejar de confiar en mi; A Ángel, Lorena, Yamid y Jessica: por sus consejos y que siempre tuvieron sus puertas abiertas para escuchar y compartir; A Karla, Martha y Silvia: por su cariño, apoyo e interés por ver este ciclo terminado.

A todos mis profesores, familiares y amigos que de alguna manera contribuyeron a que este trabajo fuese terminado y comparten conmigo este logro aunque sea a la distancia.

A mi querida Universidad.

Índice general

Introducción	XI
1. Cópulas	1
1.1. Definiciones y propiedades básicas	1
1.2. Enfoque paramétrico: Arquimedianas	3
1.3. Enfoque no paramétrico	5
1.4. Simulación de pseudo-observaciones	6
1.5. Regresión cuantil	6
1.6. Interpretación gráfica	7
1.7. Prueba de bondad de ajuste para cópulas	10
1.8. Elección de un modelo de cópula	12
2. Simulación de siniestros	13
2.1. Elementos	13
2.2. Separación en grupos de riesgo.	14
2.3. Graduación de las tablas de siniestros por edad	14
2.4. Cálculo de la distribución de los residuos dado los expuestos de la cartera	17
2.5. Simulación de tablas de mortalidad	20
2.6. Simulación de siniestros de una cartera	20
3. Cálculo de reservas empleando cópulas	25
3.1. La forma de cálculo tradicional y el supuesto de independencia.	25
3.2. Análisis de dependencia entre coberturas.	26
3.3. Reserva suficiente.	30
4. Resultados	33
4.1. Datos y simulación de escenarios.	33
4.2. Carteras hipotéticas de seguros	43
4.2.1. Escenario 1: Cartera mediana hipotética.	43
4.2.2. Escenario 2: Cartera con distribución de expuestos real.	47
4.2.3. Escenario 3: Cartera hipotética grande.	50
5. Conclusiones	53

A. Tablas	55
B. Código en R project	75

Índice de figuras

1.1. Cotas de Fréchet-Hoeffding y cópula Independencia.	2
1.2. La cópula Frank con dos valores de θ	4
1.3. Gráfico de dispersión de una cópula Clayton, $\theta = 2$	8
1.4. Sección diagonal de las cotas de Fréchet-Hoeffding y la cópula de Independencia	9
1.5. Conjuntos de nivel de las cotas de Fréchet-Hoeffding y la cópula de Independencia	9
2.1. Tabla de mortalidad del censo 2010 de INEGI con su regresión lineal bajo una transformación logarítmica (izquierda); Transformación logarítmica del tipo $\log(q_x) = A + B \cdot \text{Edad}$ (derecha). . .	15
2.2. Separación de grupos en la tabla de mortalidad del censo 2010 de INEGI (izquierda); Gráfico de dispersión de los errores y la edad (derecha).	16
2.3. Tabla de mortalidad del censo 2010 de INEGI con su regresión mediana bajo su cópula Bernstein (izquierda); Pseudo observaciones y regresión mediana. (derecha).	17
2.4. Gráficos de dispersión de la cantidad de población por edad vs residuo de la regresión (izquierda). Pseudo observaciones (derecha).	18
2.5. 100 observaciones de una copula Frank, $\theta = -2.15$ (izquierda). 1000 pseudo observaciones (derecha). Cabe mencionar que el resultado de la prueba de bondad de ajuste fue un p-valor ≈ 0.109	18
2.6. Sección diagonal de la tabla de mortalidad inegi y la cópula Frank, $\theta = -2.15$	19
2.7. Conjuntos de nivel de la tabla de mortalidad inegi y la cópula Frank, $\theta = -2.15$	19
2.8. Simulaciones de tablas de mortalidad con el modelo propuesto. El primer par de gráficos de dispersión corresponde a las tasas brutas originales con la regresión mediana (izquierda) y su respectiva transformación logística (derecha). Los 3 siguientes pares de gráficos corresponden a escenarios de tablas de mortalidad empleando el modelo en cuestión.	23

3.1. Histogramas de los montos de los escenarios para la cobertura X (izquierda) y Y (derecha) respectivamente.	27
3.2. Gráficos de dispersión (izquierda) y pseudo observaciones (derecha) de las coberturas X y Y que no superaron la prueba de independencia.	27
3.3. Histogramas de los montos de los escenarios para la cobertura X (izquierda) y Y (derecha) respectivamente.	28
3.4. Gráficos de dispersión (izquierda) y pseudo observaciones (derecha) de las coberturas X y Y que superaron la prueba de independencia pero no superaron la prueba de simetría.	28
3.5. Histogramas de los montos de los escenarios para la cobertura X (izquierda) y Y (derecha) respectivamente.	29
3.6. Gráficos de dispersión (izquierda) y pseudo observaciones (derecha) de las coberturas X y Y que superaron la prueba de independencia y la prueba de simetría.	29
3.7. Pseudo observaciones entre la cobertura X y Y (izquierda) y ubicación de los percentiles α y β en los gráficos de dispersión de las coberturas X y Y (derecha).	30
4.1. Tabla de tasas brutas de mortalidad (Mendoza (2000)).	34
4.2. Pseudo observaciones de las brutas de mortalidad y la edad (izquierda). Gráficos de dispersión entre la edad y la cantidad de expuestos (derecha).	34
4.3. Regresión mediana sobre las pseudo observaciones y sobre la tabla de mortalidad.	35
4.4. Gráficos de dispersión entre los residuos y la cantidad de expuestos (izquierda). Pseudo observaciones correspondientes (derecha)	35
4.5. 100 observaciones de la cópula 16 (izquierda). 1000 observaciones (derecha).	36
4.6. Sección diagonal de la cópula empírica y la cópula 16.	37
4.7. Conjuntos de nivel de la cópula empírica y la cópula 16.	37
4.8. Escenarios resultantes con el modelo propuesto.	38
4.9. Histogramas de los escenarios de siniestralidad para la cobertura básica (izquierda) y por muerte accidental (derecha)	40
4.10. Gráficos de dispersión de las coberturas básica y de muerte accidental.	40
4.11. Gráficos de dispersión de una cópula Gumbel con un parámetro de 1.6.	41
4.12. Comparación de la sección diagonal de la cópula empírica y la cópula teórica Gumbel.	41
4.13. Comparación de los conjuntos de nivel entre la cópula empírica y la cópula teórica Gumbel.	42
4.14. Tablas resultantes con el modelo propuesto para el escenario 1.	44
4.15. Histogramas de siniestralidad para la cobertura básica (izquierda) y por muerte accidental (derecha) del escenario 1	45

4.16. Gráficos de dispersión de las coberturas básica y de muerte accidental para el escenario 1	45
4.17. Monto de las reservas para las coberturas básica y de muerte accidental en el escenario 1	46
4.18. Tablas resultantes con el modelo propuesto para el escenario 2.	48
4.19. Histogramas de siniestralidad para la cobertura básica (izquierda) y por muerte accidental (derecha) del escenario 2	48
4.20. Gráficos de dispersión de las coberturas básica y de muerte accidental para el escenario 2	49
4.21. Monto de las reservas para las coberturas básica y de muerte accidental en el escenario 2	49
4.22. Tablas resultantes con el modelo propuesto para el escenario 3.	51
4.23. Histogramas de siniestralidad para la cobertura básica (izquierda) y por muerte accidental (derecha) del escenario 3	51
4.24. Gráficos de dispersión de las coberturas básica y de muerte accidental para el escenario 3	52
4.25. Monto de las reservas para las coberturas básica y de muerte accidental en el escenario 3	52

Introducción

La historia de las matemáticas es casi tan antigua como el hombre mismo. Inició proporcionando control para después acompañar la necesidad de lidiar con la incertidumbre, primero encontrado en un ambiente más concreto, delimitado y artificial (como los juegos de azar) a través de la Teoría de Probabilidad. Con el paso del tiempo abrió las puertas a la humanidad al intento de medir la incertidumbre derivada de sus mismas actividades cotidianas. A medida que la teoría avanza no fue posible que este conocimiento liberado estuviera necesariamente al alcance del mundo. Fue indispensable una espera a que la tecnología permitiera emplear estos conocimientos y que obtener los resultados no implicara detener las operaciones involucradas, buscando exactitud y perdiendo factibilidad.

Las actividades humanas se han vuelto más complejas, así como su tecnología. Es por ello que uno de los temas más importantes para el actuario es lograr identificar y medir la dependencia entre los fenómenos que estudia, a la par que las aplicaciones matemáticas emergen y se emplean a través de computadores y programación. Para la operación del seguro de vida en México, las compañías así como la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) han empleado para sus cálculos la construcción de tablas de mortalidad. Con la aprobación de los cambios en su marco legal, buscando un mayor dinamismo en el cálculo de reservas y herramientas estadísticas más robustas (como la aplicación de solvencia II en Europa) la CNSF reemplaza el uso de tablas de mortalidad por *procesos estocásticos tipo Poisson* en donde separan los grupos de riesgo por quinquenios de edad y sexo para calcular sus parámetros por separado. Este cambio implica el uso de otras herramientas estadísticas más complejas y un tiempo de procesamiento mayor.

El motivo de la presente tesis es tomar parte de estos dos panoramas y conjuntarlo en un modelo que emplee la información con la que ya se cuenta y se le incluyan modelos matemáticos dinámicos que permitan un panorama más amplio, flexible y realista sobre los escenarios que se pueden presentar en las operaciones del seguro de Vida Corto Plazo (VCP). Las propuestas para modelar esto es con *funciones cópula*. Aunque el estudio que dio origen a las cópulas no es relativamente reciente, el estudio y aplicación en estadística es prácticamente moderno (Nelsen (2006)).

La palabra cópula es un sustantivo latino que significa “atadura, ligamiento de algo con otra cosa” y es usado en Filosofía como “el término que une el predicado

con el sujeto" (22^a edición del diccionario de la Real academia española).

Desde una visión simplista, en matemáticas y estadística las cópulas son funciones que "unen" o "copulan" el comportamiento individual de los fenómenos (funciones de distribución marginal) con su comportamiento conjunto (funciones de distribución conjunta).

Para comenzar a aplicar estos conceptos a la práctica del seguro de VCP, en el producto básico por fallecimiento la compañía se compromete a otorgar un monto monetario previamente acordado (suma asegurada) a un beneficiario o beneficiarios específicos que el cliente indique en el contrato (póliza con duración menor o igual a un año) en caso de que otra persona llamada asegurado (que puede ser el mismo cliente) fallezca, es decir, se dice que ocurre un siniestro. Las condiciones del fallecimiento y otras coberturas contratadas están relacionadas a otros montos a otorgar, como pueden ser la cobertura por fallecimiento accidental (doble indemnización) o la cobertura por muerte colectiva (triple indemnización). Una vez identificado el inicio de la operación del seguro surge esta pregunta: ¿Cuál es el monto que debe tener la compañía reservado para hacer cumplir las obligaciones adquiridas?

Continuando con los elementos expuestos hablaremos de la **reserva suficiente**. Se entiende como reserva suficiente al monto que necesita la compañía de seguros para hacer frente a todas las obligaciones contraídas en sus pólizas para un determinado lapso de tiempo. Para el caso de los seguros de vida de corto plazo la reserva en cuestión para la cobertura que cubre al beneficiario de la póliza en caso del fallecimiento del asegurado se le llama Reserva matemática, esta reserva no incluye los gastos de operación derivados del ejercicio ni la utilidad o rendimiento esperado para la compañía. En el cálculo y ejercicio tradicional de los seguros de VCP el monto se calcula directamente por asegurado con base en su edad (para la probabilidad de fallecimiento) y la suma asegurada. Los supuestos son bien conocidos: la tasa de fallecimientos respecto a la cantidad de asegurados a cierta edad x (interpretada como la probabilidad de fallecimiento) es constante, aunque en la práctica se sabe que existe una variabilidad de estas tasas si se hacen diferentes cortes en el tiempo. Para el actuario su interés no puede ser si determinado asegurado fallece o no, sino el comportamiento de los grupos de asegurados con características específicas comunes (cartera de asegurados). Dado lo complejo del fenómeno de estudio por todas las variables (medurables y otras incuantificables) que podrían influir en el comportamiento de los fallecimientos en el grupo nos encontramos con la posibilidad de hablar y crear escenarios de estos comportamientos, donde la siguiente pregunta es: ¿cuáles pueden ser los escenarios más apegados a la realidad y comportamiento dadas las características del conjunto? ¿Cómo elegir ante qué escenario ubicar las operaciones de la compañía?

Para generar estos escenarios podemos recurrir a herramientas matemáticas que permiten generar simulaciones. Éstas parten de un modelo estructurado donde cada simulación es un escenario resultante de diversas asignaciones de valores a variables establecidas que responden a un comportamiento predefinido y supuestos conoci-

dos, agregando un poco de libertad y control a la vez. A partir de aquí surgen las preguntas finales que definen el trabajo: ¿Cuáles son las variables mesurables que intervienen en los comportamientos de la cartera? ¿Cómo podríamos modelar matemáticamente cada fenómeno y su dependencia entre sí?

Buscando dar una posible respuesta a las preguntas planteadas la hipótesis central del presente trabajo es que existe evidencia estadística de que las siguientes variables involucradas en una cartera de seguro de VCP tienen una relación de dependencia y que se puede representar vía cópulas: edad, tasa de mortalidad dada la edad (q_x), cantidad de expuestos en la cartera a edad x , saldo por siniestros entre las coberturas de la cartera (fallecimiento, muerte accidental, muerte colectiva, pérdidas orgánicas e invalidez) y con ello calcular la reserva suficiente de dichas coberturas.

Para abordar propiamente el modelo propuesto es indispensable conocer las características más relevantes de la teoría de cópulas bivariadas que se emplearon, esto será en el capítulo 1. Los capítulos 2 y 3 servirán para explicar cada una de las partes del modelo (tabla graduada, residuos y dependencia entre saldos de siniestros de cada cobertura) y la teoría de cópulas empleada (cópulas arquimedianas, cópula Bernstein, regresión mediana) para conformar la propuesta completa. En la sección de Resultados se aplicará dicho modelo a una cartera derivada de la experiencia mexicana publicada por la CNSF en Mendoza (2000) para verificar la hipótesis de este trabajo. Como conclusiones se retomarán los resultados más relevantes del estudio para discernir ventajas y áreas de oportunidad con mayor objetividad.

Capítulo 1

Cóputas

1.1. Definiciones y propiedades básicas

Los inicios del estudio sobre funciones de distribución multivariadas comenzaron con estos autores: Frechet, Dall'Aglio, Feron, Hoeffding entre otros. No se profundizará en la descripción de elementos que sean propios de un curso sobre análisis matemático a nivel licenciatura y nuestro caso de estudio sólo será aplicado a variables aleatorias. Para un enfoque generalizado y revisar las demostraciones de los teoremas, favor de referirse a Nelsen (2006).

Una **cóputa bidimensional** es una función C tal que su dominio es I^2 , rango I y cuenta con las siguientes propiedades:

1. (Condiciones de frontera)

$$\forall u, v \in I,$$

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v)$$

$$C(u, 1) = u \text{ y } C(1, v) = v$$

2. (Propiedad de función 2-creciente)

$$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I \text{ tales que } u_1 \leq u_2 \text{ y } v_1 \leq v_2$$

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

A continuación, uno de los teoremas principales que remarca la trascendencia de este objeto matemático en la teoría para el análisis de dependencia e interacción entre fenómenos.

Teorema de Sklar aplicado a variables aleatorias

Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces existe una cópula C tal que $\forall x, y \in \overline{\mathbf{R}}^2$ (con $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$, *Reales extendidos*),

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), \quad (1.1)$$

Si F y G son continuas, entonces C es única; en otro caso, C está únicamente determinada sobre $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$. Inversamente, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H es una función de distribución con marginales F y G .

La importancia de este teorema en teoría de la probabilidad y estadística radica en que anteriormente sólo se podían obtener las funciones de distribución marginal a partir de su función de distribución conjunta, pero no a la inversa. Es decir, en la cópula está incluida la información de la interacción y/o dependencia existente en el comportamiento conjunto de los fenómenos X, Y .

Adicionalmente, se dice que las variables aleatorias X y Y son *independientes* \Leftrightarrow

$$H(F(x), G(y)) = F(x)G(y), \text{ es decir que } C(u, v) = uv = \Pi(u, v).$$

A la función Π se le conoce como *cópula de independencia*.

Las cotas de Fréchet-Hoeffding.

Una propiedad que se ocupará como punto de comparación en el análisis de cópulas será su comportamiento respecto a las *cotas de Fréchet-Hoeffding* como sigue:

Sea C una cópula y $(u, v) \in \text{Dom}C$, entonces

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v).$$

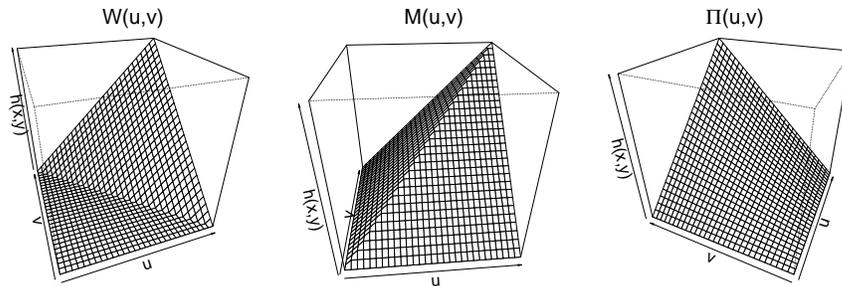


Figura 1.1: Cotas de Fréchet-Hoeffding y cópula Independencia.

En donde se puede observar que cualquier cópula está acotada por estas dos funciones (W , M). Más aún, éstas son funciones cópula (no se abordará en este material su demostración).

Los elementos descritos en este capítulo servirán como un soporte preliminar y suficiente para entender el enfoque de diferentes modelos de cópulas.

1.2. Enfoque paramétrico: Arquimedianas

Existen diversas familias de cópulas que guardan propiedades similares entre sus elementos, pero de las familias más conocidas, fáciles de construir, con grandes estudios sobre sus propiedades y aplicaciones más extendidas son las cópulas arquimedianas. Esta familia tiene una característica singular en su construcción que facilita algunos cálculos (y su programación), la llamada *función generadora*. Comenzaremos por identificar cuáles son las propiedades de esta función y la relación que guarda con la cópula asociada.

Se le llama *función generadora* $\Phi(t)$ de una cópula arquimediana a la que cumple con las siguientes características:

- Es continua.
- Es estrictamente decreciente de I a $[0, \infty]$.
- $\Phi(1) = 0$.
- Es convexa.
- Definimos su función cuasi-inversa $\Phi^{[-1]}$ como:

$$\Phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \Phi(t)^{-1} & 0 \leq t \leq \Phi(0) \\ 0 & \Phi(0) < t \leq \infty \end{cases}$$

En donde:

$$\text{Dom}(\Phi^{[-1]}) = [0, \infty], \text{Ran}(\Phi^{[-1]}) = I.$$

Teniendo claras las propiedades anteriores, podemos pasar a definir el objeto de estudio de esta sección. Se dice que C es una *cópula arquimediana* si existe una función generadora Φ con las características antes descritas, tal que:

$$C(u, v) = \Phi^{[-1]}(\Phi(u) + \Phi(v))$$

y cuenta con las siguientes propiedades:

- C es simétrica. $C(u,v) = C(v,u) \forall u, v \in I$.
- C es asociativa. $C(C(u,v), w) = C(u, C(v,w)) \forall u, v, w \in I$.
- Si c es una constante, entonces $c\Phi$ es también una generadora de C.

A continuación una lista de algunas cópulas arquimedianas conocidas y estudiadas.

Familia	$\Phi_\theta(t)$	$C(u, v)$	θ
Frank	$-\log\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$	$-\frac{1}{\theta}\log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Clayton	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel	$(-\log(t))^\theta$	$\exp\left(-[(-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right)$	$[1, \infty)$

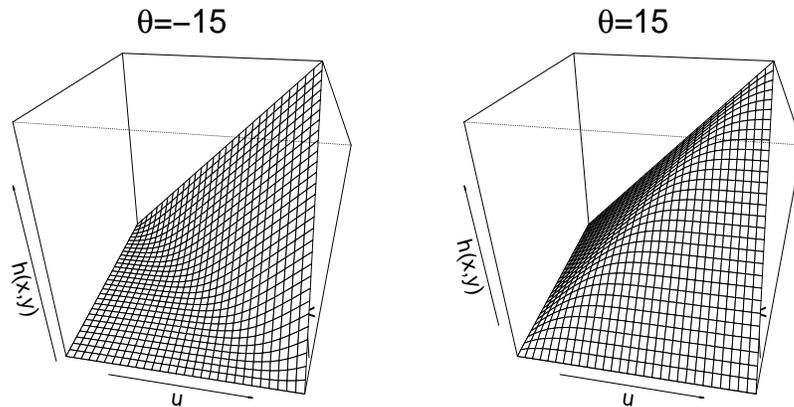


Figura 1.2: La cópula Frank con dos valores de θ

Para este trabajo, más allá de construir cópulas arquimedianas, nos apoyaremos en las familias ya conocidas y verificar que se cumpla el supuesto de simetría más el contraste de una prueba de bondad de ajuste.

1.3. Enfoque no paramétrico

La cópula empírica.

La *función de distribución empírica* se construye a partir de los datos de la siguiente manera:

Siendo $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una muestra de n elementos de una variable aleatoria X , su función de distribución empírica se define como:

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{x_i \leq t\}}$$

Resaltando este concepto, se puede construir análogamente una versión de cópula “empírica” directamente de la muestra bivariada.

Siendo $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ una muestra de n pares ordenados del vector aleatorio (X, Y) , su *cópula empírica* C_n se establece como:

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{\hat{F}(x_i) \leq u, \hat{G}(y_i) \leq v\}}$$

Siendo $\hat{F}(x)$ la función de distribución marginal empírica de X y $\hat{G}(y)$ la análoga para Y .

Cópula Bernstein

El enfoque es similar con el caso de uso de polinomios de Bernstein $Q^{-1}(x)$ para “suavizar” la función de distribución empírica del caso marginal $\hat{F}(x)$, donde $Q(u)$ es la aproximación a la función cuantil $F^{-1}(u)$ definida por:

$$Q(u) = \sum_{k=0}^n \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

Donde $x_{(k)}$ es el k -ésimo elemento del conjunto de estadísticos de orden.

La *cópula bernstein* es un ejemplo de ajuste no paramétrico para la muestra bivariada mencionada anteriormente, que hace uso de la cópula empírica C_n y una versión análoga de los polinomios de Bernstein para el caso bivariado:

$$B_n(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j}$$

En la literatura se acostumbra el término de cópula empírica pues es el punto de partida para asociar y realizar pruebas de bondad de ajuste para contrastar los datos. El uso de modelos no paramétricos se emplea en diversas situaciones:

- De los modelos paramétricos conocidos, ninguno supera satisfactoriamente las pruebas de bondad de ajuste contra los datos.
- Se prefiere utilizar únicamente la información de los datos.

Uno de los trabajos más importantes para el actuario en la elección del modelo o enfoque no es sólo en el análisis directo de los datos, implica considerar el contexto o información propia de las características del fenómeno de estudio y cuáles son las bondades o deficiencias esperadas a partir de su elección.

1.4. Simulación de pseudo-observaciones

Como ya se ha mencionado, para una revisión inicial que pueda ayudar al actuario en su elección de un modelo son importantes las herramientas gráficas. Una forma relativamente sencilla de calcular una herramienta de este tipo es la simulación de pseudo-observaciones. Radica en generar datos bivariados que provengan de un modelo previamente definido.

Para la simulación de n pseudo observaciones de una cópula continua C se realizan los siguientes pasos:

1. Generar n pares de variables aleatorias uniformes $(u_1, t_1), \dots, (u_n, t_n)$.
2. Calcular la derivada parcial de la cópula C respecto de u :

$$g_u(v) = \frac{\delta C(u, v)}{\delta u}$$

3. Calcular v_i a partir de las simulaciones como:

$$v_i = g_{u_i}^{-1}(t_i)$$

4. Los pares ordenados deseados serán $\{(u_i, v_i)\}_{1 \leq i \leq n}$.

1.5. Regresión cuantil

Al intentar estimar cuál es el modelo de dependencia que representa el comportamiento de fenómenos aleatorios continuos, uno de los más comunes es la regresión lineal. Como método alternativo para ajustar una curva y no una recta al gráfico de

dispersión entre un par de variables aleatorias se tiene la regresión mediana, que es un caso particular de la regresión cuantil.

Para introducir el concepto comenzaremos con la probabilidad condicional de Y (con $G_Y(y)$ su función de distribución) dado que $X = x$ (con $F_X(x)$ la análoga para X) en términos de su cópula C y sean U y V variables aleatorias uniformes tales que $F(x) \sim U$ y $G(y) \sim V$:

$$\begin{aligned} H_{Y|X}(y|x) &= P(Y \leq y | X = x) \\ &= P(V \leq G_Y(y) | U = F_X(x)) \end{aligned}$$

En la regresión lineal por mínimos cuadrados se realiza el cálculo de la recta que minimice las distancias entre la recta y las observaciones, para este caso lo que se quiere lograr es que la curva pase por la mediana de los datos bivariados, es decir,

$$P(V \leq G_Y(y) | U = F_X(x)) = \frac{\delta C(u, v)}{\delta u} \Big|_{u=F_X(x), v=G_Y(y)} = 0.5$$

Las ventajas obtenidas es que no se tiene que suponer alguna distribución específica sobre los errores (por ejemplo: $e \sim N(0, \sigma)$ para el caso de la regresión lineal para demostrar homocedasticidad). Bastará con ajustar la cópula de los datos.

Para calcular la regresión cuantil a un nivel α de una cópula, se resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \text{Definimos } h_u(v) &= \frac{\delta C(u, v)}{\delta u} = \alpha \\ \text{entonces } v &= h_u^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

Es decir, los pares ordenados deseados de la regresión cuantil a un nivel α son $(u, h_u^{-1}(\alpha))$ para $\forall u \in \text{Dom}C$.

1.6. Interpretación gráfica

Gráficos de dispersión

Para una muestra aleatoria bivariada $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ de un vector aleatorio (X, Y) usualmente no se tiene conocimiento de sus funciones de distribución marginal. Por lo tanto se emplean la función de distribución empírica de cada componente del vector aleatorio ($\hat{F}(x)$ en la v.a. X y $\hat{G}(y)$ para Y) formando el conjunto de pares ordenados $(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)$ donde:

$$\begin{aligned} u_i &= \hat{F}(x_i), \\ v_i &= \hat{G}(y_i). \end{aligned}$$

Al obtener esto, se procede a realizar un gráfico usual de coordenadas cartesianas sobre el cuadrado I^2 . Permite tener un primer análisis visual y rápido para identificar características generales de dependencia, para identificar el tipo de cópulas con las que podría comparar y proceder formalmente a buscar evidencia estadística que sustente el no rechazar al suponer la procedencia de la muestra de una cópula particular.

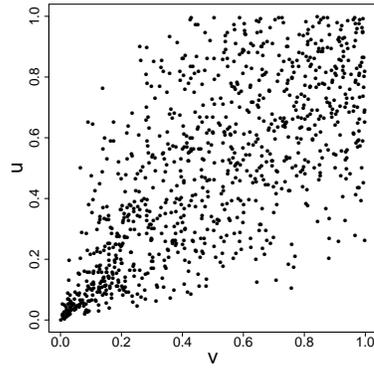


Figura 1.3: Gráfico de dispersión de una cópula Clayton, $\theta = 2$

Secciones de una cópula

En el estudio de las funciones cópula es muy importante la comparación entre nuestra muestra de estudio, las cotas de Fréchet-Hoeffding ($W(u, v)$, $M(u, v)$) y la cópula de independencia $\Pi(u, v)$ para detectar si la dependencia es la misma a lo largo de todo el dominio de las observaciones. Una herramienta apropiada para este análisis visual comienza con las siguientes definiciones:

Sea C una cópula y $a \in I$.

- La sección horizontal de C en a es la función de I a I dada por $t \mapsto C(t, a)$.
- La sección vertical de C en a es la función de I a I dada por $t \mapsto C(a, t)$.
- La sección diagonal de C la función de I a I definida por $\delta_C(t) = C(t, t)$.

Para este trabajo se tomará especial énfasis en el uso de la sección diagonal para interpretar el tipo de dependencia que representa la muestra así como el comportamiento que presentan las cópulas más conocidas y el efecto del parámetro en las mismas. En el gráfico inferior está la sección diagonal de 3 de las cópulas más importantes: $W(u, v)$, $\Pi(u, v)$ y $M(u, v)$.

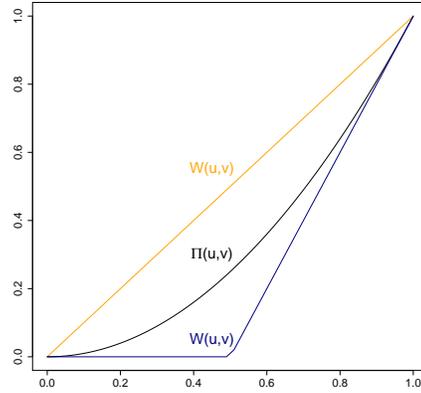


Figura 1.4: Sección diagonal de las cotas de Fréchet-Hoeffding y la cópula de Independencia

Conjuntos de nivel

Empleados como otra forma de representar una cópula gráficamente de la siguiente manera:

Sea C un cópula, se definen los conjuntos de nivel como:

$$\{(u, v) \in I^2 | C(u, v) = a_i\}_{a_i}$$

para cada constante a_i previamente definida en I (siendo comúnmente $a_i = \frac{i}{10}$ con $1 \leq i \leq 10$).

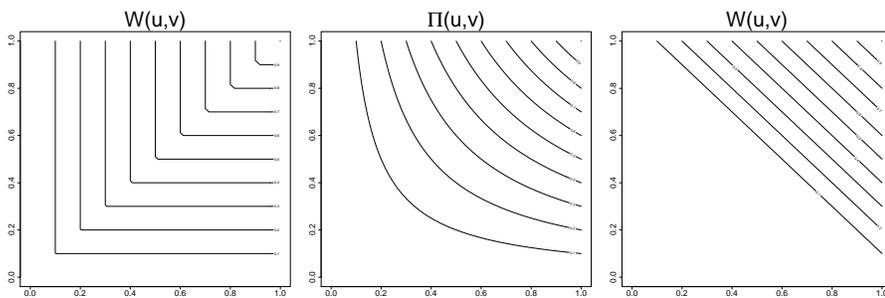


Figura 1.5: Conjuntos de nivel de las cotas de Fréchet-Hoeffding y la cópula de Independencia

Los conjuntos de nivel también pueden ayudar al usuario a identificar el tipo de dependencia que se presenta a medida que toma diferentes valores, tomando

como referencia los contornos de nivel de las cotas $M(u, v)$, $W(u, v)$ o de $\Pi(u, v)$ del gráfico anterior.

1.7. Prueba de bondad de ajuste para cópulas

Esta sección se ha dejado al último para que se tengan los elementos necesarios para poder construir las pruebas y no por su importancia o relevancia. De hecho esta sección es clave para el ejercicio del actuario ya que es el punto de quiebre sobre el modelo, de que exista evidencia estadística para no rechazar la hipótesis correspondiente a la elección de su modelo matemático, en nuestro caso, la cópula empleada. En el artículo Genest et al. (2009) se realizan comparaciones sobre la efectividad y poder entre pruebas de bondad de ajuste pertinentes a las funciones cópula. En el trabajo presente se ocupó el bootstrap paramétrico con los estadísticos S_n y T_n por ser de las pruebas más potentes y por su cálculo.

Bootstrap paramétrico con S_n y T_n .

El objetivo de la prueba es obtener el valor p sobre S_n por una aproximación de Monte Carlo para una muestra $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ contra una cópula teórica C_{θ_n} . El procedimiento es el siguiente:

1. Calcular S_n :

- a) Con las pseudo-observaciones $\bar{U} = \{(u_i, v_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ de la muestra, calcular su cópula empírica :

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{u_i \leq u, v_i \leq v\}}$$

y proceder a aproximar el parámetro θ_n de la cópula con el mejor estimador $\hat{\theta}_n = T_n(\bar{U})$.

- b) Generar una muestra aleatoria $\{(u_i^*, v_i^*)\}_{1 \leq i \leq m}$ (con $m \geq n$) de la cópula teórica C_{θ_n} .

- c) Aproximamos la cópula C_{θ_n} calculando la cópula empírica de la muestra generada

$$B_m(u, v) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I_{\{u_i^* \leq u, v_i^* \leq v\}}, \text{ con } (u, v) \in I^2$$

- d) para finalizar con la aproximación del estimador S_n dada la muestra:

$$S_n = \sum_{i=1}^n (C_n(u_i, v_i) - B_m(u_i, v_i))^2.$$

2. Para calcular los $S_{n,k}^*$ repetir los siguientes pasos para cada $k \in 1, \dots, N$ para cierto N suficientemente grande:

- a) Generar una muestra aleatoria $Y_{1,k}^*, \dots, Y_{n,k}^*$ (con $Y_{i,k}^* = (x_{i,k}^*, y_{i,k}^*)$) proveniente de la cópula teórica C_{θ_n} y sus respectivas pares ordenados $(u_{i,k}^*, v_{i,k}^*)$ de la siguiente manera:

$$u_{i,k}^* = \hat{F}(x_{i,k}^*) \frac{n}{n+1}; v_{i,k}^* = \hat{G}(y_{i,k}^*) \frac{n}{n+1}$$

- b) Calcular la cópula empírica de la k -ésima simulación:

$$C_{n,k}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(u_{i,k}^* \leq u, v_{i,k}^* \leq v), u, v \in I.$$

y estimamos θ con $\theta_{n,k}^* = T_n \left((u_{1,k}^*, v_{1,k}^*), \dots, (u_{n,k}^*, v_{n,k}^*) \right)$.

- c) Calculamos $S_{n,k}^*$ como sigue:

$$S_{n,k}^* = \sum_{i=1}^n \left(C_{n,k}(u_{i,k}^*, v_{i,k}^*) - C_{\theta_{n,k}^*}(u_{i,k}^*, v_{i,k}^*) \right)^2$$

3. Aproximar p como sigue:

$$p \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I(S_{n,k}^* > S_n)$$

Se toma como referencia la distancia que existe entre la cópula empírica de los datos C_n y la cópula teórica con el parámetro calculado por máxima verosimilitud θ_n . Después se realiza un proceso de bootstrapping, generando pseudo observaciones de la cópula teórica con el parámetro θ para después volver a calcular su respectivo θ^* por máxima verosimilitud de la muestra y medir la distancia entre estos dos elementos para cada simulación. Finalmente de las simulaciones totales (N) se contabilizan las que superaron en distancia a la calculada inicialmente entre la cópula empírica y la teórica con su parámetro por máxima verosimilitud. De esta manera aproximamos el p -value para la prueba de bondad de ajuste para una muestra dada contra una cópula teórica C_{θ_n} .

1.8. Elección de un modelo de cópula

En el caso de optar por rechazar o no el uso de una cópula, tenemos los elementos para enlistar las pruebas a considerar en el análisis. Se anexan las funciones a emplear con el software R project y el paquete *copula* como referencia:

- Pruebas de independencia. Se aplican para descartar independencia cuando se trabaja con funciones cópula. Este paso es primordial, si supera la prueba de independencia, ya no se procede a realizar más cálculos. Para el trabajo se emplea como prueba la propuesta por Christian Genest y Bruno Rémillard (en el paquete *copula*), se identifica por una prueba en dos pasos: primero se genera una muestra de distribuciones independientes (la función *indepTestSim*); después se calcula la aproximación al p-valor entre la muestra en sí y la generada en el paso anterior (la función *indepTest*).
- Tipo de dependencia. Se analizan Gráficos de dispersión, sección diagonal y contornos de nivel para identificar el tipo de dependencia que guardan las diferentes coberturas entre sí. Es un primer acercamiento de comparación contra las cópulas conocidas que reflejen el comportamiento presentado entre las coberturas.
- Prueba de simetría. Una vez realizado un análisis visual y se puede observar una tendencia de simetría en las pseudo observaciones de la muestra, se procederá a aplicar pruebas de simetría. Para emplear las cópulas arquimedianas conocidas, es esencial que la muestra supere este paso, de no ser así se descartará el uso de cópulas arquimedianas. La prueba empleada para este trabajo fue la propuesta por Genest, Neslehova y Quessy (2011) para cópulas bivariadas (la función *exchTest* del paquete *copula*).
- Pruebas de bondad de ajuste. Son cálculos que, aún con el poder de procesamiento que se tiene en nuestros días, requieren tiempo para la obtención de resultados. Es por ello que en un inicio se realiza un análisis visual empleando la experiencia del actuario y posteriormente se aplican las pruebas de bondad de ajuste.
- Elección del modelo. Se elegirá el modelo que cumpla con los requerimientos previos (no sea independiente y sea simétrico para las arquimedianas), presente el p-valor más alto y el tipo de dependencia a lo largo del dominio entre la cópula y la muestra presente un comportamiento similar.

Con esto concluimos la sección teórica de cópulas. En los siguientes capítulos ocuparemos este conocimiento para estudiar los diferentes fenómenos abordados.

Capítulo 2

Simulación de siniestros vía cópulas

A lo largo del trabajo se han mencionado las herramientas matemáticas que se emplearán para construir la propuesta. El apartado presente será dedicado a alojar cada concepto abordado en el capítulo 1 en la herramienta o parte del modelo en que será empleado.

2.1. Elementos

En estadística, para delimitar los fenómenos a analizar y modelar se requiere partir de supuestos y los procedimientos de interacción entre las partes del modelo general, procurando ser claro desde el inicio en los alcances esperados del estudio y las limitantes con las que se cuenta respecto a las variables a analizar. Para la simulación de los siniestros partiremos de los siguientes supuestos:

- a) Separación en Grupos de riesgo.
- b) Creación de una tabla graduada de tasas respecto a la edad.
- c) Dispersión de las tasas respecto a la tabla graduada, dada la cantidad de expuestos.
- d) Simulación de siniestros como variables aleatorias Bernoulli.

2.2. Separación en grupos de riesgo.

Una de las tareas que se realizan al analizar un fenómeno es el agrupamiento de los elementos estudiados según sus variables observables procurando que sus características sean similares e incidir en un comportamiento aleatorio pero medible y preferentemente comparable o predecible. Dentro de las características que se ocupan para la simulación de siniestros son:

- Edad. Es usual que en el cálculo de las reservas para las coberturas la edad sea un factor imprescindible. Por ejemplo, en el caso de fallecimiento, se espera que a mayor edad la probabilidad de fallecimiento aumente.
- Sexo. Tanto en indicadores nacionales como los propios del sector, se ha encontrado que es común que la tasa de fallecimiento en las mujeres es menor en comparación a la de los varones.
- Coberturas previas reclamadas. Para el caso de personas con invalidez se tiene contemplado en las tasas empleadas para calcular fallecimiento en personas con invalidez son más altas en comparación a las tasas generales de fallecimiento para el cálculo de pensiones en el IMSS.
- Cantidad de expuestos. Teóricamente en estadística se tiene conciencia de que la cantidad de elementos observados es importante para, bajo ciertos supuestos, emplear la Ley de los grandes números. En este trabajo más allá de ocupar dicha ley, buscaremos evidencia estadística para determinar un modelo que refleje la dependencia entre la cantidad de personas y la aleatoriedad en las tasas de mortalidad esperada.

2.3. Graduación de las tablas de siniestros por edad

En la práctica tradicional se acostumbraba emplear tablas de mortalidad para calcular la reserva suficiente. Existen diversos métodos y herramientas matemáticas para realizar ajustes a una tabla de tasas brutas de mortalidad. Ocuparemos como ejemplo las tasas de mortalidad mexicana resultantes del censo 2010 del INEGI.

Regresión logística

Se aplica una transformación a las tasas brutas de mortalidad para después calcular el respectivo modelo de regresión lineal ($\log(\frac{q_x}{1-q_x}) = A + B \cdot X + \varepsilon_x$).

Este modelo requiere que se cumplan una serie de supuestos sobre los llamados errores (ε) para que tenga una base estadística fuerte:

- La esperanza de los errores es cero ($E(\varepsilon) = 0$).

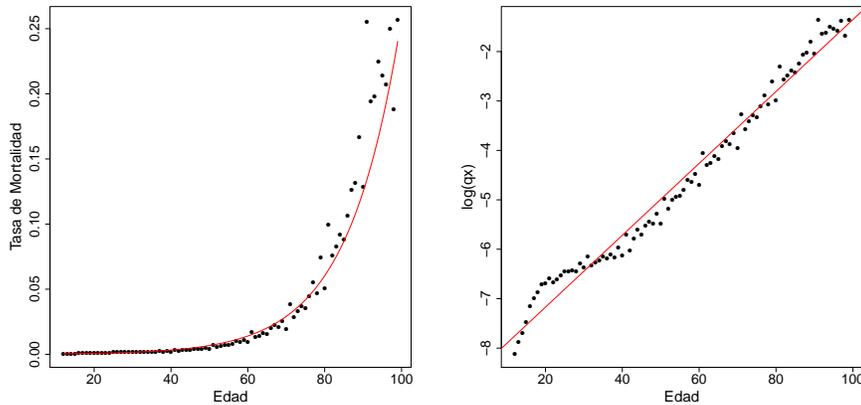


Figura 2.1: Tabla de mortalidad del censo 2010 de INEGI con su regresión lineal bajo una transformación logarítmica (izquierda); Transformación logarítmica del tipo $\log(q_x) = A + B \cdot \text{Edad}$ (derecha).

- Para el caso de la tabla de mortalidad de INEGI: $E(\varepsilon) = 1.2 \times 10^{-16}$.
- Normalidad: La distribución de los errores corresponde a una normal estándar ($\varepsilon \sim N(0, \sigma)$).
 - Para el caso de INEGI: $\varepsilon \sim N(0, 0.068)$ con un p-valor de 0.056, es decir, no rechaza de forma determinante que se distribuya como una normal.
- Homocedasticidad: la varianza de los errores es constante ($\text{Var}(\varepsilon) \in R$). Si separamos los errores en dos grupos (grupo 1: de 12 a 30 años \cup 75 a 99 años; grupo 2: de 31 a 74 años). El resultado de la prueba F de contraste de varianzas arroja un p-valor de 0.029 al contrastar $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ y un p-valor de 0.985 para $H_0 : \sigma_1 > \sigma_2$.
- Las variables explicativas (en el caso de la regresión múltiple) son independientes entre sí ($X_i \perp X_j; \forall i \neq j$)

Una desventaja de esta práctica es que no es usual que todos los supuestos se cumplan (principalmente homocedasticidad y normalidad en los residuos) repercutiendo en la formalidad como modelo estadístico, es decir, influye en la sobre o subestimación del riesgo.

Regresión mediana sobre la cópula Bernstein

Por ello, para recuperar la información propia de la empresa se propone el ajuste no paramétrico de la cópula Bernstein entre sus tasas brutas de mortalidad y la edad:

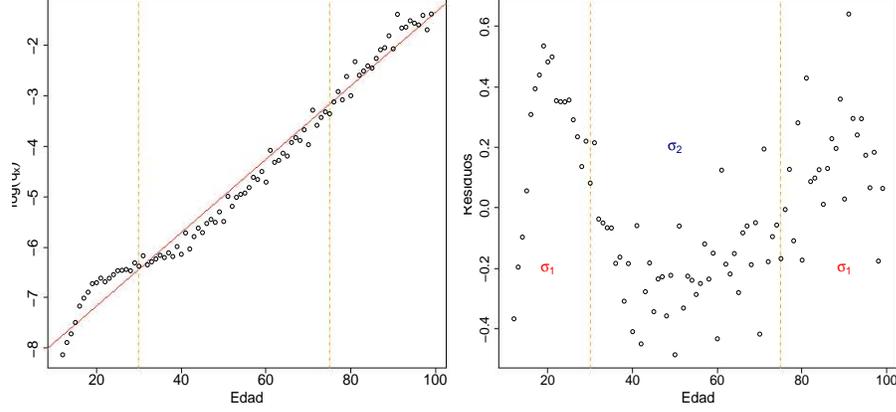


Figura 2.2: Separación de grupos en la tabla de mortalidad del censo 2010 de INEGI (izquierda); Gráfico de dispersión de los errores y la edad (derecha).

- Calcular las funciones de distribución empírica de la edad (F_X) y las tasas brutas de mortalidad (G_Y).
- Calcular la Cópula empírica (C_n) de la muestra.
- Para calcular la regresión mediana sobre la cópula Bernstein, dado que:

$$h_u(v) = \frac{\delta B(u, v)}{\delta u} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^n C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \binom{n}{i} (-i)(n-i) u^{i-1} (1-u)^{n-i-1} v^j (1-v)^{n-j} + \sum_{j=0}^n (C_n \left(0, \frac{j}{n} \right) (-n)(1-u)^{n-1} + C_n \left(1, \frac{j}{n} \right) n(u)^{n-1}) v^j (1-v)^{n-j} = 0.5$$

y resolver las siguientes ecuaciones:

$$v'(u) = h_u^{-1}(0.5) ;$$

$$rm(u) = G_Y^{[-1]}(v'(u)) \forall u \in I.$$

Para tratar a los residuos y poder emplear intervalos de confianza, se pueden analizar por separado contra variables propias del fenómeno en búsqueda de evidencia estadística que respalde descartar independencia y modele su comportamiento conjugado. Para efectos de este trabajo se ocupó la cantidad de expuestos en cada edad.

2.4. CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS RESIDUOS DADO LOS EXPUESTOS DE LA CARTERA 17

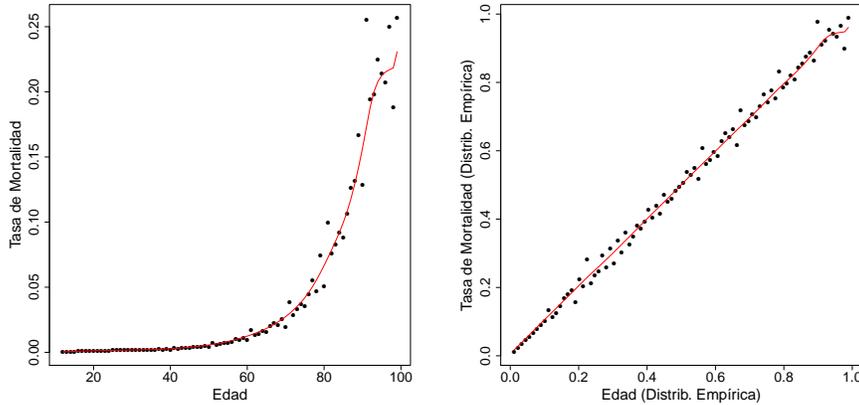


Figura 2.3: Tabla de mortalidad del censo 2010 de INEGI con su regresión mediana bajo su cópula Bernstein (izquierda); Pseudo observaciones y regresión mediana. (derecha).

2.4. Cálculo de la distribución de los residuos dado los expuestos de la cartera

Una vez calculada la regresión mediana de la cópula Bernstein (rm) con base a la muestra, se procede a calcular el residuo por edad x $r(x)$ entre la tasa observada $q(x)$ y la $rm(x)$ de la siguiente forma:

$$r(x) = \frac{q(x) - rm(x)}{rm(x)}$$

Posteriormente se calculan sus respectivas funciones de distribución empírica de los expuestos (F_{exp}) y de los residuos (G_r) con el fin de comenzar a identificar el tipo de dependencia que existe a medida que la cantidad de expuestos aumenta. Intuitivamente se esperaría una mayor dispersión con una baja cantidad de expuestos y una menor a mayor cantidad. (Figura 2.4).

Como se mencionó en el capítulo 1 si este fenómeno se pretende representar con cópulas, se deben aplicar las pruebas correspondientes para su análisis visual (conjuntos de nivel, sección diagonal) y estadístico (pruebas de simetría y de bondad de ajuste).

Visualmente, tenemos una cópula que presenta un comportamiento similar. Los siguientes gráficos corresponden a comparaciones entre la cópula empírica de los datos y la cópula teórica frank.

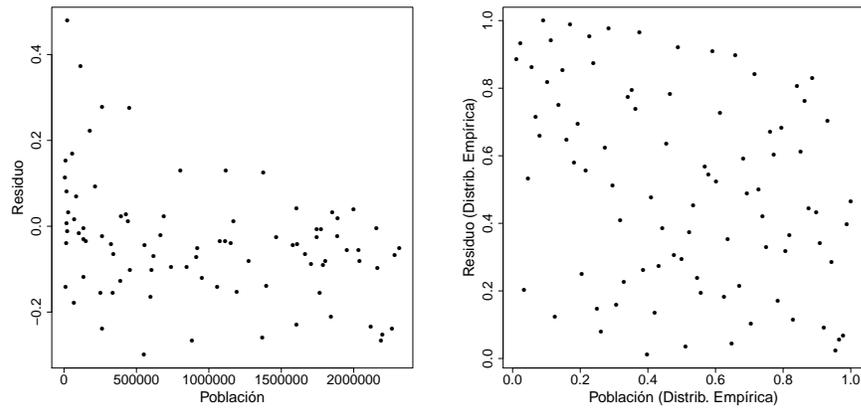


Figura 2.4: Gráficos de dispersión de la cantidad de población por edad vs residuo de la regresión (izquierda). Pseudo observaciones (derecha).

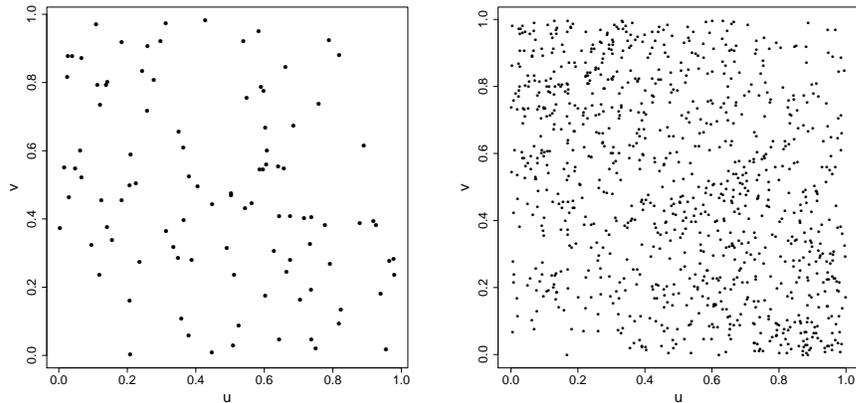


Figura 2.5: 100 observaciones de una copula Frank, $\theta = -2.15$ (izquierda). 1000 pseudo observaciones (derecha). Cabe mencionar que el resultado de la prueba de bondad de ajuste fue un p-valor ≈ 0.109

2.4. CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS RESIDUOS DADO LOS EXPUESTOS DE LA CARTERA19

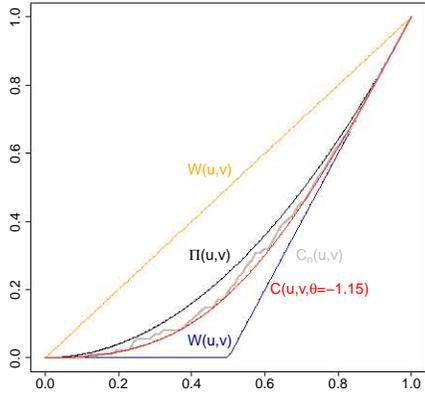


Figura 2.6: Sección diagonal de la tabla de mortalidad inegi y la cópula Frank, $\theta = -2.15$.

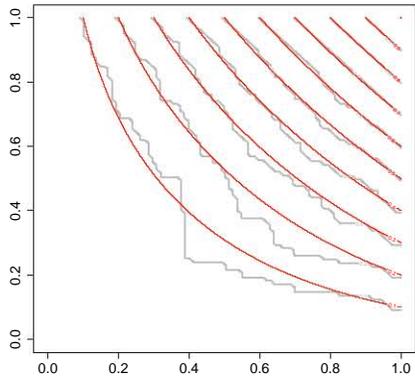


Figura 2.7: Conjuntos de nivel de la tabla de mortalidad inegi y la cópula Frank, $\theta = -2.15$.

2.5. Simulación de tablas de mortalidad

Una vez que se obtienen la tabla graduada y la cópula que representa la dispersión de los residuos dada la cantidad de expuestos, para generar cada escenario de tabla de mortalidad procedemos como sigue para cada edad x :

- Calculamos $F_{exp}(expuestos \text{ a edad } x) = u_x$ donde $exp:=$ es la variable aleatoria de la cantidad de expuestos original.
- Generamos n variables aleatorias uniformes t_x (con $n:=$ cantidad de edades diferentes en la cartera).
- Resolvemos $\frac{\delta C(u_x, v_x)}{\delta u_x} = t_x$ y calculamos $r'_x = F_r^{[-1]}(v_x)$, es decir su valor respecto a la inversa de la función de distribución de la variable aleatoria correspondiente a los residuos originales.
- Por último: $q_{sim}(x) = rm(x) + rm(x) * r'(x)$

2.6. Simulación de siniestros de una cartera

Para el ejercicio del seguro, un siniestro es la ocurrencia o no de un evento esperado y definido. En este caso aplicaría una variable aleatoria Bernoulli para cada asegurado que pertenezca a la cartera en un delimitado *grupo de riesgo*, en donde el monto de la suma asegurada reclamada corresponde al monto máximo contratado que será entregado a los beneficiarios bajo ciertas condiciones conocidas y específicas (en el caso de pérdidas orgánicas, el monto corresponde a un porcentaje de la suma asegurada contratada dependiendo de la localización del miembro perdido o sus partes).

Entonces de manera general podemos simular los escenarios de siniestros para una cobertura c de la siguiente manera:

- Ocurrencia de siniestro: Variables aleatorias Bernoulli

$$P(X_c = x | gr, c) = \theta_{(gr,c)}^x * (1 - \theta_{(gr,c)})^{1-x} I(x)_{\{0,1\}}$$

donde

- $X_c=1$ si ocurre el siniestro en la cobertura c y $X_c=0$ en caso contrario.
- $\theta_{(gr,c)}$:= Probabilidad de ocurrencia del siniestro para la cobertura c .
- gr := Son las características solicitadas del grupo de riesgo para la cobertura c , como pueden ser: edad, sexo, una cobertura previa reclamada o la cantidad de expuestos.

Es de especial importancia analizar las características de agrupación para calcular el $\theta_{(gr,c)}$ correspondiente a cada cobertura, ya que identificar las variables que puedan impactar en el comportamiento del fenómeno y que puedan ser conocidas previamente como parte de la contratación del seguro y sus lineamientos, es una tarea primordial en su operación.

Recordamos que $\theta_{(gr,c)} = q_{(gr,c)} + q_{(gr,c)}\rho_{(gr,c)}$, donde $q_{(gr,c)}$ es un valor constante que depende de las características del grupo pero $\rho_{(gr,c)}$ a su vez es una variable aleatoria que también depende de características del grupo, entonces la variable aleatoria X_c sólo se distribuirá como una variable aleatoria Bernoulli para una simulación de la variable aleatoria θ_{gr} . Con ello, no siempre se tiene directamente una expresión matemática para el modelo completo y calcular intervalos de confianza convencionales. Se puede proceder a realizar simulaciones matemáticas del modelo y con esta información aproximar intervalos de probabilidad para calcular la reserva suficiente correspondiente y facilitar la toma de decisiones.

Contrucción de una cartera de expuestos.

Para generar escenarios de siniestros es importante conocer las características de la cartera que servirá de base para el estudio, ya sea con los productos que la compañía maneje en la cartera actual o para analizar resultados en nuevos productos, sobre grupos de riesgo conocidos (la cartera actual) o nuevos (empleando supuestos y carteras hipotéticas).

Con ello se conocerá la distribución de los expuestos y la asignación de peso en cada grupo de riesgo con su respectiva suma asegurada:

Los supuestos para la distribución de expuestos en cada cobertura, edad y suma asegurada asociada son:

- Se considerarán m niveles de suma asegurada. $SA_i ; i \in \{1, \dots, m\}$
- El peso de expuestos con la cobertura contratada, por cada nivel de suma asegurada en el grupo de riesgo.

Al tener estos elementos, se puede proceder a calcular para cada escenario de siniestralidad s (con $1 \leq s \leq n$) de la cobertura c como sigue:

Para cada grupo de riesgo gr , una cobertura dada c , y nivel de suma asegurada a , $1 \leq a \leq m$

- Generar e variables aleatorias Bernoulli $X_1, \dots, X_{e(gr,a)}$, con $X_j \sim Ber(\theta_{gr})$ y $e(gr, a) := \text{num. de expuestos en el grupo de riesgo } gr \text{ y nivel de suma asegurada } a$.

- Entonces, el monto de siniestros $S_{(gr,s)}$ del grupo para el escenario s será:

$$S_{(gr,s)} = \sum_{j=1}^{e(gr,a)} SA_m * X_j$$

- Y el monto de siniestralidad S_s para el escenario s será

$$S_s = \sum_{gr \in G} (S_{gr}) \text{ con } G := \text{el conjunto de los grupos de riesgo.}$$

Es decir, cada escenario S_s es una variable aleatoria que refleja el comportamiento de siniestralidad de la cartera de expuestos analizada.

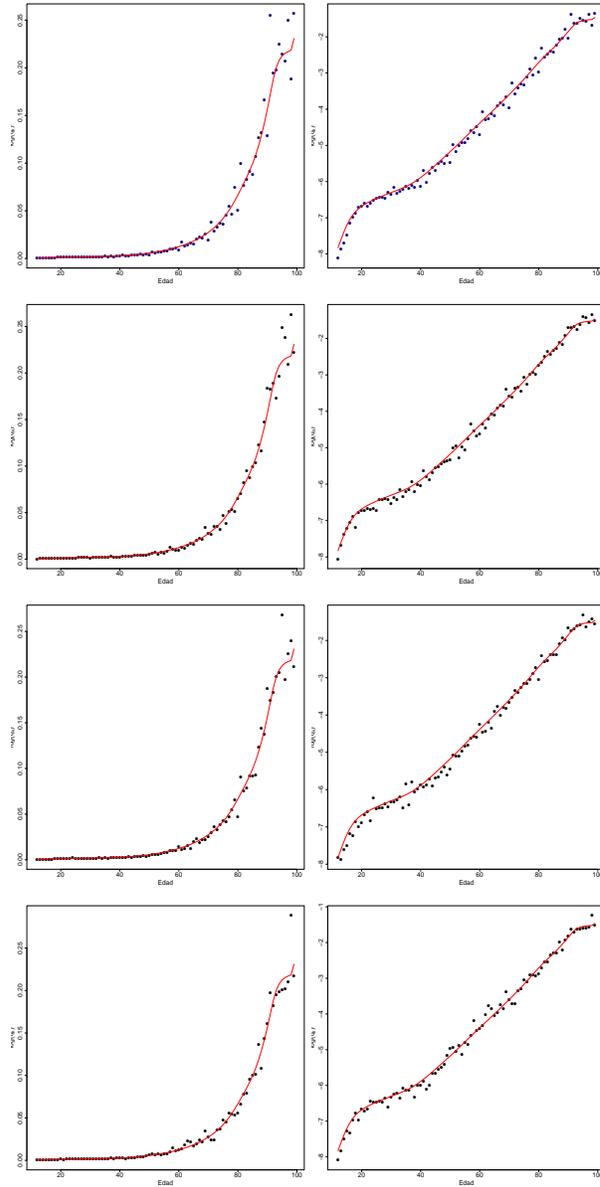


Figura 2.8: Simulaciones de tablas de mortalidad con el modelo propuesto. El primer par de gráficos de dispersión corresponde a las tasas brutas originales con la regresión mediana (izquierda) y su respectiva transformación logística (derecha). Los 3 siguientes pares de gráficos corresponden a escenarios de tablas de mortalidad empleando el modelo en cuestión.

Capítulo 3

Cálculo de reservas empleando cópulas

3.1. La forma de cálculo tradicional y el supuesto de independencia.

Desde el uso de estadística tradicional hasta su aplicación en sectores donde su operación es altamente dinámica y aleatoria, por cuestiones operativas e información disponible es usual emplear los supuestos de independencia, es decir, asumir que no se tiene evidencia estadística de que exista una relación de dependencia entre los fenómenos a estudiar. El cálculo de reservas para cada cobertura que ofrece la compañía de seguros se realiza por separado y sin modelar algún tipo de dependencia entre sus resultados. Así se puede partir de aplicar una tasa de siniestralidad sin importar género o edad, o incluir alguna de esas variables excluyendo las demás, o sin considerar el comportamiento de otras coberturas.

El cálculo tradicional incluye, además de excluir el comportamiento de otras coberturas:

- Cobertura básica: En algunos casos también independiente del sexo.
- Muerte accidental: Independiente de la edad y el sexo.
- Invalidez: Independiente del sexo.
- Pérdidas orgánicas: Independiente la edad y el sexo.

Para el caso de la cobertura básica, suponiendo que toda la cartera comenzara en el mismo momento del tiempo y se calculara la reserva necesaria para un año de operación, la fórmula es:

$$Rva = \sum_{nv \in SA} \sum_{x=12}^{99} S_s * (Exp(x_{nv}) * q_{CNSFInd}(x))$$

Donde:

- S_{nv} es un monto de suma asegurada de nivel nv de la compañía.
- SA es el conjunto de niveles de suma asegurada de los productos de VCP de la compañía
- $Exp(x)$ es la cantidad de expuestos a edad x con nivel de suma asegurada nv .
- $q_{CNSFInd}(x)$ es la tasa de mortalidad a edad x empleada según la CNSF para el seguro de vida individual del año 2000.

En todos los casos mencionados, se supone que la probabilidad de ocurrencia del siniestro en la compañía de seguros es independiente de la cantidad de expuestos. Para un enfoque más actual tenemos el caso del proceso Poisson, en donde al ser un proceso estocástico compuesto que supone la distribución de la cantidad de eventos como poisson (que se caracteriza porque su media y varianza son iguales) esto implica problemas en que a mayor cantidad de expuestos directamente se espera una mayor dispersión en los resultados, ya que conociendo el tipo de fenómeno a modelar se esperaría el efecto contrario.

3.2. Análisis de dependencia entre coberturas.

Tomando como punto de comparación las prácticas comunes empleadas, es relevante analizar el comportamiento conjugado de las coberturas del seguro de vida a corto plazo para determinar si existe evidencia estadística de una relación de dependencia entre las mismas. Para ello las coberturas a analizar serán:

- Básica y Muerte accidental.
- Muerte accidental y Muerte colectiva.
- Invalidez y Básica.
- Pérdidas orgánicas y Básica.

Ejemplos:

Una vez realizados los escenarios de siniestros para una cartera dada, se analizará su comportamiento bivariado. Podemos tener estos casos:

- a) No superan la prueba de independencia: En este caso, se presentan dos coberturas X y Y en donde desde el inicio del análisis no superan la prueba de independencia ($p\text{-valor} \geq 0.05$)

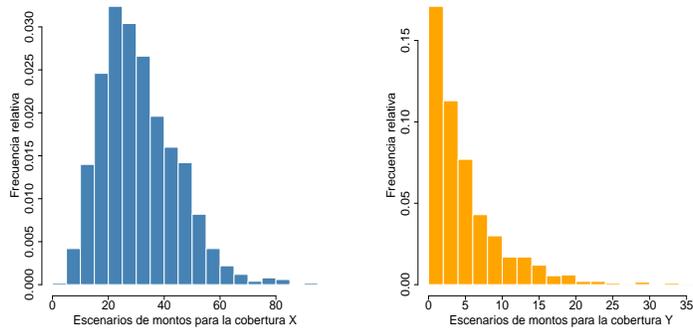


Figura 3.1: Histogramas de los montos de los escenarios para la cobertura X (izquierda) y Y (derecha) respectivamente.

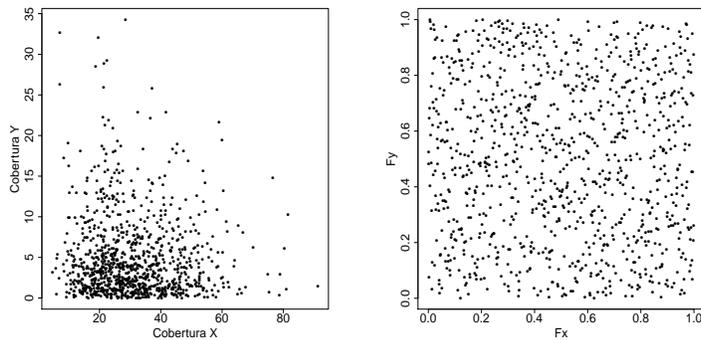


Figura 3.2: Gráficos de dispersión (izquierda) y pseudo observaciones (derecha) de las coberturas X y Y que no superaron la prueba de independencia.

- b) Superan las pruebas de independencia, pero no son simétricas: Las coberturas superan la prueba de independencia (p -valor < 0.05) y podemos observar una tendencia en sus pseudo observaciones, pero la prueba de simetría rechaza la opción de emplear cópulas arquimedianas (p -valor < 0.05).

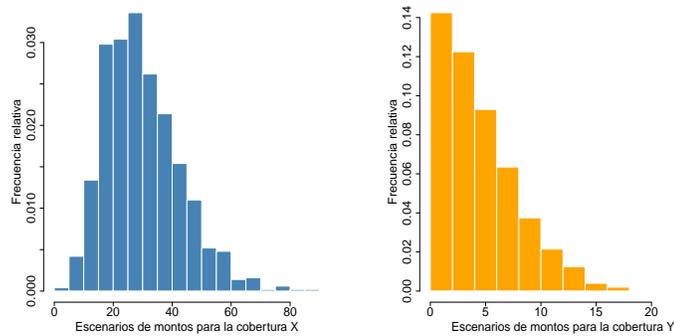


Figura 3.3: Histogramas de los montos de los escenarios para la cobertura X (izquierda) y Y (derecha) respectivamente.

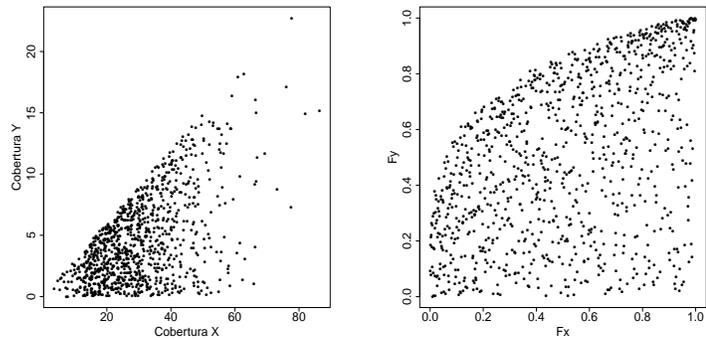


Figura 3.4: Gráficos de dispersión (izquierda) y pseudo observaciones (derecha) de las coberturas X y Y que superaron la prueba de independencia pero no superaron la prueba de simetría.

- c) Superan las pruebas de independencia y simetría. En este caso las coberturas superan exitosamente la prueba de independencia ($p\text{-valor} \geq 0.05$) y la de simetría ($p\text{-valor} > 0.05$). Podemos proceder a comparar modelos de cópulas arquimedianas y sus respectivas pruebas de bondad de ajuste.

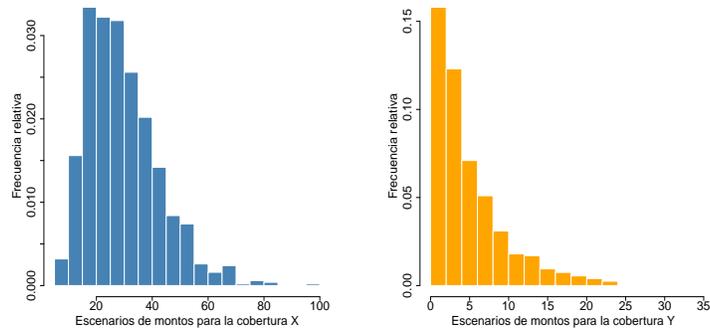


Figura 3.5: Histogramas de los montos de los escenarios para la cobertura X (izquierda) y Y (derecha) respectivamente.

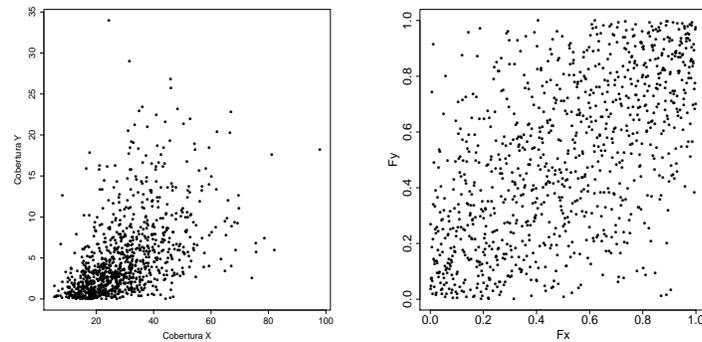


Figura 3.6: Gráficos de dispersión (izquierda) y pseudo observaciones (derecha) de las coberturas X y Y que superaron la prueba de independencia y la prueba de simetría.

En cada par de coberturas a analizar, se realizan los pasos ya mencionados en el capítulo 1 para elegir un modelo de cópula.

3.3. Reserva suficiente.

Ahora procederemos a calcular la reserva suficiente sin emplear el supuesto de independencia entre las coberturas de la compañía, es decir, se realizará el cálculo como a continuación se presenta para aquellas coberturas que superen las pruebas anteriormente mencionadas.

Una vez elegido cada modelo, pasar a realizar el cálculo de la probabilidad condicional de la reserva de la cobertura Y a un cuantil γ dada el monto de la cobertura X a un cierto cuantil α . Es decir, calculamos el $\beta = G(y)$ tal que

$$P(Y \leq y | X = F_x^{-1}(\alpha)) = \frac{\delta C(u, v)}{\delta u} \Big|_{u=\alpha, v=\beta} = \gamma$$

Así ocupamos la dependencia existente entre las coberturas para construir las reservas. A continuación se anexan gráficos de dispersión con el indicador del valor α y γ elegidos y el cuantil β y monto resultantes si la dependencia fuese reflejada para una cópula Gumbel con $\theta = 1.5$.

γ	α	β	Reserva total	Cob X	Cob Y
0.950	0.950	0.950	70.83 u	55.00 u	15.83 u
0.950	0.950	0.985	76.68 u	55.00 u	21.68 u
0.975	0.975	0.995	92.19 u	63.29 u	28.90 u

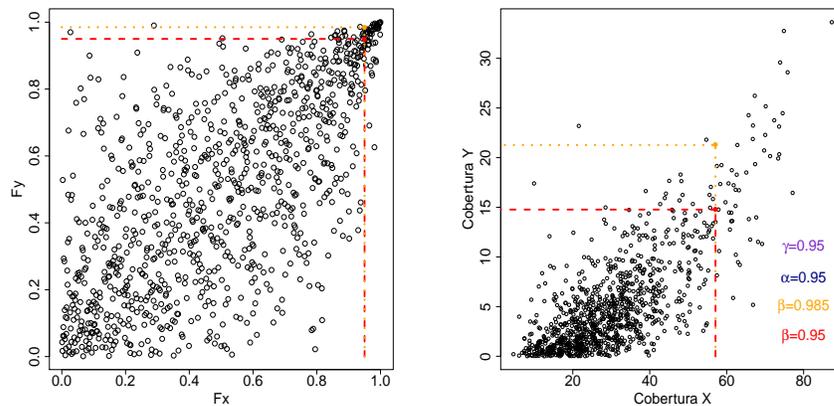


Figura 3.7: Pseudo observaciones entre la cobertura X y Y (izquierda) y ubicación de los percentiles α y β en los gráficos de dispersión de las coberturas X y Y (derecha).

Podemos observar que al estar relacionados los fenómenos se debe ocupar este conocimiento para tener una postura más amplia respecto al riesgo. Con esto terminamos el presente capítulo ya que se cuentan con las herramientas suficientes para aplicarlas a la experiencia mexicana y validar nuestra hipótesis en búsqueda de evidencia estadística.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Datos y simulación de escenarios.

Los supuestos con los que se desarrolló información para el trabajo, dada las limitantes para el acceso a mayor información, son:

- No hay separación por sexo.
- Cuando se hable de reserva suficiente únicamente estará dirigido al componente de riesgo sin gastos de operación ni utilidad de la compañía.
- Para los cálculos se consideran carteras donde todos los asegurados inician el mismo día, el cálculo de la reserva es al inicio de la vigencia y la duración del contrato de la póliza es anual.

La información empleada proviene de las siguientes fuentes:

- Para la cobertura de fallecimiento se utilizaron las tasas brutas de mortalidad pertenecientes al sector asegurador mexicano empleados en Mendoza (2000), con su respectiva cantidad de expuestos y fallecidos (vea Anexo A).
- Para la cobertura de Muerte accidental, se calcularon las tasas de mortalidad por accidente de INEGI para el año 2000.
- Para la cobertura de invalidez se ocuparon las tablas de invalidez y mortalidad dada invalidez del IMSS de 1997.

Tomaremos esta información como punto de partida para verificar la hipótesis que impulsa este trabajo. En la figura 4.1 observamos la tabla de mortalidad y la relación entre la edad y la tasa de mortalidad.

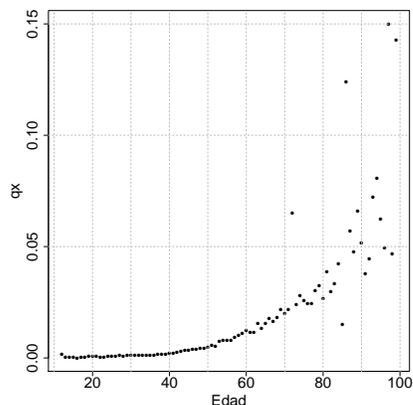


Figura 4.1: Tabla de tasas brutas de mortalidad (Mendoza (2000)).

Si analizamos estos datos desde sus pseudo observaciones, encontramos para el caso de la tabla de mortalidad que existe una mayor dispersión en los extremos del dominio que en el centro, que coincide con una menor cantidad de expuestos en las colas y mayor en el centro.

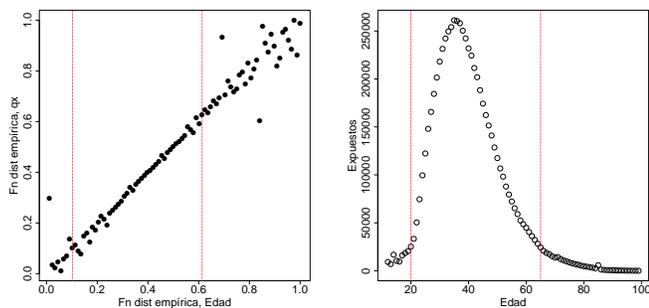


Figura 4.2: Pseudo observaciones de las brutas de mortalidad y la edad (izquierda). Gráficos de dispersión entre la edad y la cantidad de expuestos (derecha).

Más allá de buscar una cópula arquimediana o conocida que tuviese este comportamiento (mayor dispersión en los extremos y convergencia en el centro), podemos intuir que existe una dependencia entre la cantidad de expuestos y la dispersión encontrada en las edades extremas. Por ello procederemos a calcular la regresión mediana sobre la cópula Bernstein (es decir, el enfoque no paramétrico, recobrar la información únicamente de los datos) y trataremos la dispersión de los residuos resultantes con otro modelo que dependa de la cantidad de expuestos. La regresión

mediana se presenta a continuación:

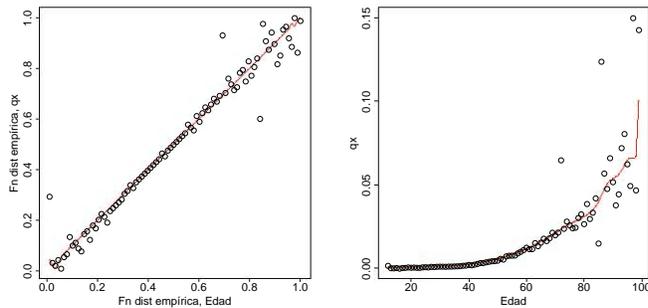


Figura 4.3: Regresión mediana sobre las pseudo observaciones y sobre la tabla de mortalidad.

Para el cálculo de los residuos se realizará como se mencionó en capítulos anteriores:

$$r = \frac{q(x) - rm(x)}{rm(x)}$$

Obteniendo estos datos entre el residuo y la cantidad de expuestos.

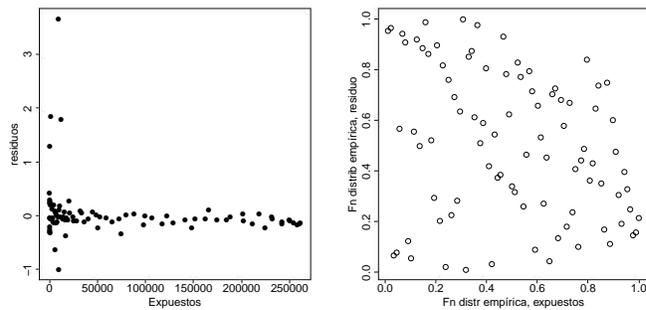


Figura 4.4: Graficos de dispersión entre los residuos y la cantidad de expuestos (izquierda). Pseudo observaciones correspondientes (derecha)

Podemos observar que en la figura 4.4 la dispersión de los datos es alta en los primeros valores y disminuye conforme la cantidad de expuestos aumenta. Procedemos a realizar los cálculos pertinentes y los resultados son los siguientes:

- Descartar independencia: con $\alpha = 0,05$, $p - valor \approx 0,0035$, es decir, no podemos suponer independencia.

- Pruebas con cópulas arquimedianas:
 - Prueba de simetría: $p - \text{valor} \approx 0,19$. No se descarta simetría.
 - Pruebas de bondad de ajuste:

Familia	θ	$p - \text{valor}$
Gumbel	N/A	N/A
Frank	≈ -1.983	$\approx 0,067$
Clayton	N/A	N/A
Cópula 16 (Nelsen)	$\approx 0,0701$	$\approx 0,54$

La cópula arquimediana candidata para poder modelar el comportamiento de la distribución de los residuos y la cantidad de expuestos es la *cópula 16* mencionada en Nelsen (2006).

$$C_{16}(u, v) = \frac{1}{2} \left(S + \sqrt{S^2 + 4\theta} \right)$$

donde

$$S = u + v - 1 - \theta \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 1 \right), \theta > 0$$

$$\Phi_{\theta}(t) = \left(\frac{\theta}{t} \right) (1 - t)$$

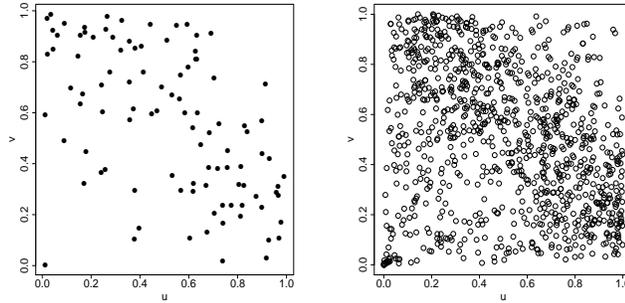


Figura 4.5: 100 observaciones de la cópula 16 (izquierda). 1000 observaciones (derecha).

Donde podemos observar que conforme se desplaza por el dominio, el comportamiento de la cópula empírica así como la cópula teórica pasa de ser muy cercano a la cópula de independencia, después a la cota inferior.

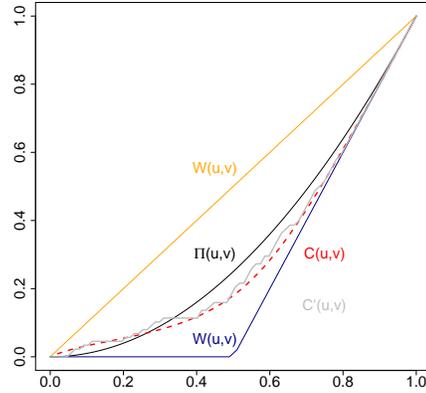


Figura 4.6: Sección diagonal de la cópula empírica y la cópula 16.

En los contornos de nivel no llega a ser tan clara la similitud entre la cópula empírica y la teórica, pero dada la poca información disponible en conjunto con las pruebas de simetría y bondad de ajuste el modelo es aceptable.

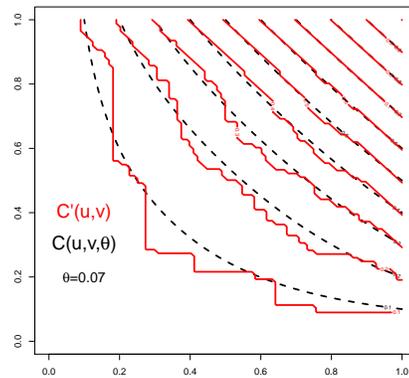


Figura 4.7: Conjuntos de nivel de la cópula empírica y la cópula 16.

Tablas de mortalidad

Procedemos a realizar los pasos necesarios para generar los escenarios de tablas de mortalidad mencionados en el capítulo 2, considerando la tabla graduada de mortalidad de los datos y la cópula 16 para la dispersión de los residuos. En la figura 4.8 se presentan algunos escenarios de tablas.

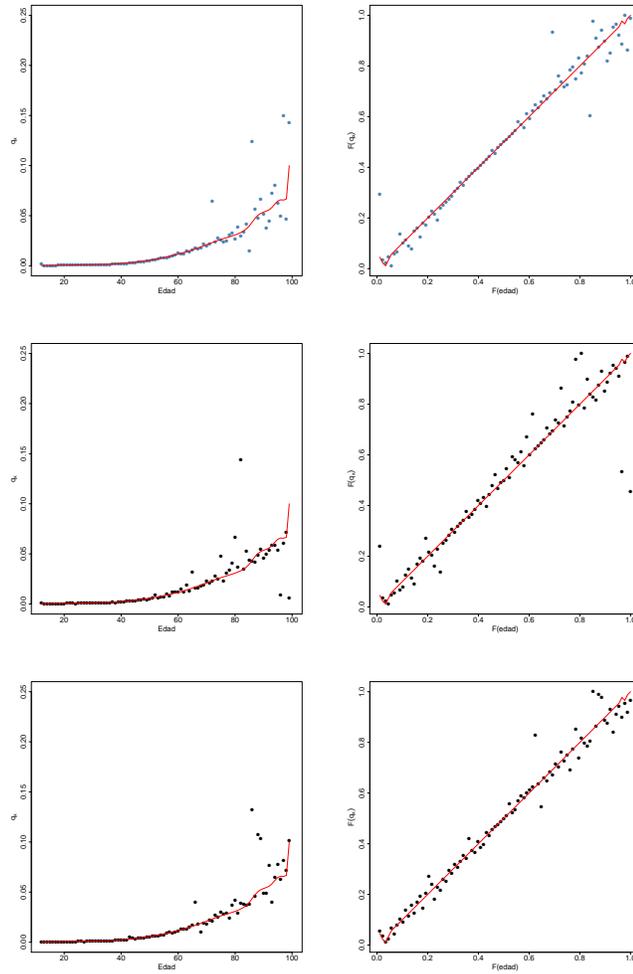


Figura 4.8: Escenarios resultantes con el modelo propuesto.

Para obtener escenarios de siniestros y verificar si existe dependencia entre las coberturas Básica por fallecimiento y la cobertura de Muerte accidental construimos una cartera de expuestos por nivel de suma asegurada:

Nivel	Suma asegurada
1	10,000
2	40,000
3	80,000
4	125,000
5	175,000
6	250,000
7	400,000
8	625,000
9	1,125,000
10	5,750,000

En el Anexo A se incluye la distribución completa de expuestos por edad y suma asegurada empleada para los escenarios.

Simulación de siniestros

Se realizaron 1,000 simulaciones de siniestros de la cartera para las coberturas de fallecimiento y muerte accidental y estos fueron los resultados:

- Descartar independencia: con $\alpha = 0,05$, $p - valor \approx 0,00049$, es decir, no podemos suponer independencia.
- Pruebas con cópulas arquimedianas:
 - Prueba de simetría: $p - valor \approx 0,43$. No se descarta simetría.
 - Pruebas de bondad de ajuste:

Familia	θ	$p - valor$
Gumbel	1.668	$\approx 0,437$
Frank	4.412	$\approx 0,0005$

Donde el p-valor más alto es para la cópula Gumbel, con $\theta = 1.668$

Análisis de los montos de la simulación con los datos.

Cobertura	Media	Mediana	Desv. estándar	Mínimo	Máximo
Básica	8,947	8,867	488.51	7,891	11,240
Muerte accidental	781.4	775.9	55.93	625.3	1006

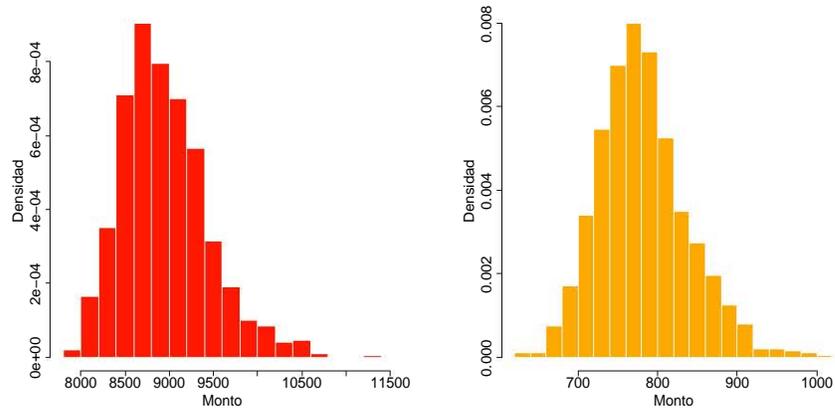


Figura 4.9: Histogramas de los escenarios de siniestralidad para la cobertura básica (izquierda) y por muerte accidental (derecha)

En la figura 4.10 podemos observar una ligera dependencia en los extremos, similar a la presentada en las cópulas Gumbel y Frank.

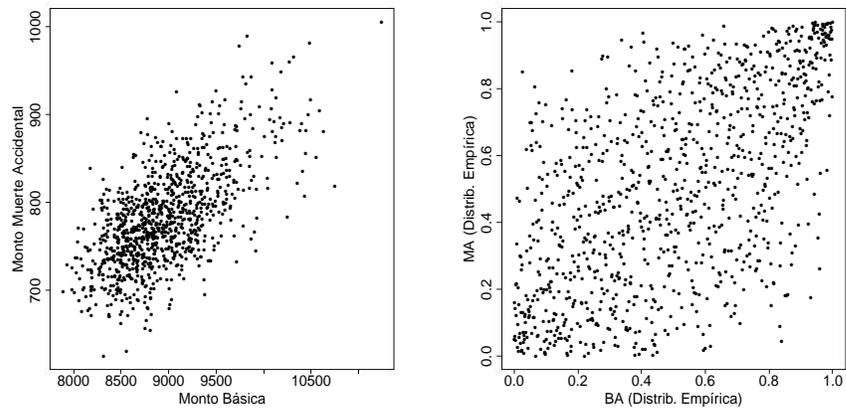


Figura 4.10: Gráficos de dispersión de las coberturas básica y de muerte accidental.

Figura 4.11: Gráficos de dispersión de una cópula Gumbel con un parámetro de 1.6.

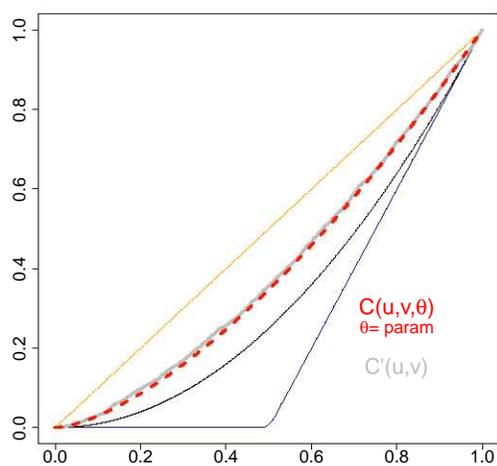


Figura 4.12: Comparación de la sección diagonal de la cópula empírica y la cópula teórica Gumbel.

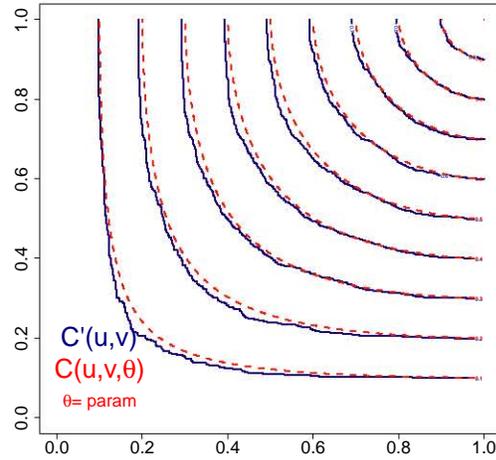


Figura 4.13: Comparación de los conjuntos de nivel entre la cópula empírica y la cópula teórica Gumbel.

Reserva suficiente

Una vez elegido cada modelo, pasar a realizar el cálculo de la probabilidad condicional de la reserva de la cobertura Y a un cuantil γ dada el monto de la cobertura X a un cierto cuantil α . Es decir, calculamos el $\beta = G(y)$ tal que

$$P(Y \leq y | X = F_x^{-1}(\alpha)) = \frac{\delta C(u, v)}{\delta u} \Big|_{u=\alpha, v=\beta} = \gamma$$

Enseguida se muestran los cálculos de la reserva suficiente dependiendo de los cuantiles α y γ elegidos.

γ	α	β	Reserva total*	Cob BA*	Cob MA*
0.950	0.950	0.950	10,735.77	9,853.28	882.49
0.950	0.950	0.985	10,771.23	9,853.28	917.94
0.975	0.975	0.975	11,036.98	10,131.7	905.285
0.975	0.975	0.995	11,091.87	10,131.7	960.17

Cálculo tradicional de reserva en un año

$$Rva_{suf} = \sum_{n=1}^{10} \sum_{x=12}^{99} SA_i * q_{CNSFInd}(x)$$

Para el caso de emplear las tablas de la CNSF del año 2000, el monto a considerar sería de 11,591.7* para el caso de la cobertura básica,

mientras que en la cobertura de muerte accidental (suponiendo una tasa generalizada de $\frac{1}{10000}$) el monto sería de 198.9*, es decir, un total de 11,790.6*.

Comparación entre reservas respecto al modelo tradicional

- Tradicional: 11,790.6
- Al **0.95**
 - Suponiendo independencia: 10,735.77 (-8.95 %)
 - Sin suponer independencia: 10,771.23 (-8.65 %)
- Al **0.97**
 - Suponiendo independencia: 11,036.98 (-6.39 %)
 - Sin suponer independencia: 11,091.87 (-5.93 %)

*cifras en millones de pesos.

4.2. Carteras hipotéticas de seguros

Enseguida se comparten escenarios de carteras de seguros con diversas cantidades de expuestos.

4.2.1. Escenario 1: Cartera mediana hipotética.

- Cantidad de expuestos: 500,000.
- Número de simulaciones: 1,000.
- Cifras en millones.
- Cópula para dispersión de residuos: Cópula 16.
- Tiempo de generación de la simulación: 6 min 31 seg
- Equipo de cómputo: Intel i7 a 3.20 GHz ; 8 GB RAM.
- Simulación de siniestros.

Análisis de los montos de la simulación del escenario 1.

Cobertura	Media	Mediana	Desv. estándar	Mínimo	Máximo
Básica	806.1	801.1	80.08	601.5	1,144.0
Muerte accidental	71.79	71.36	13.98	37.56	130.1

Análisis de dependencias para la cobertura básica y de muerte accidental.

Concepto	Valor
Prueba de independencia:	p-valor \approx 0.00049
Simetría:	p-valor = 0.47
Cópula arquimediana elegida:	<i>Frank</i>
Parámetro:	3.127
p-valor:	0.1083

Enseguida se muestran los cálculos de la reserva suficiente dependiendo de los cuantiles α y γ elegidos.

γ	α	β	Reserva total	Cob BA	Cob MA
0.950	0.950	0.950	1,045.31	949.19	96.12
0.950	0.950	0.981	1,052.54	949.19	103.35
0.975	0.975	0.975	1,084.43	984.43	100.9
0.975	0.975	0.991	1,099.90	984.43	115.4

Para el caso de emplear las tablas de la CNSF del año 2000, el monto a considerar sería de 865.99 para el caso de la cobertura básica, mientras que en la cobertura de muerte accidental (suponiendo una tasa generalizada de $\frac{1}{10000}$) el monto sería de 14.86, es decir, un total de 880.85.

Comparación entre reservas respecto al modelo tradicional

- Tradicional: 880.85
- Al **0.95**
 - Suponiendo independencia: 1,045.31 (+18.67 %)
 - Sin suponer independencia: 1,052.54 (+19.49 %)
- Al **0.97**
 - Suponiendo independencia: 1,084.43 (+23.11 %)
 - Sin suponer independencia: 1,099.90 (+24.87 %)

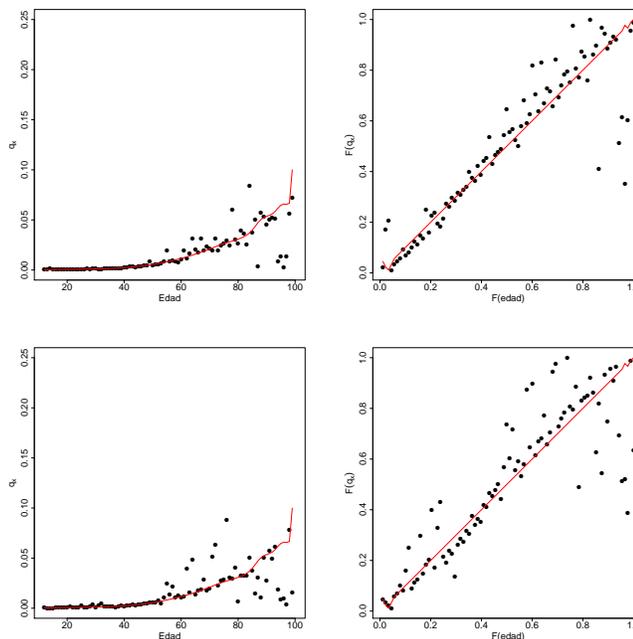


Figura 4.14: Tablas resultantes con el modelo propuesto para el escenario 1.

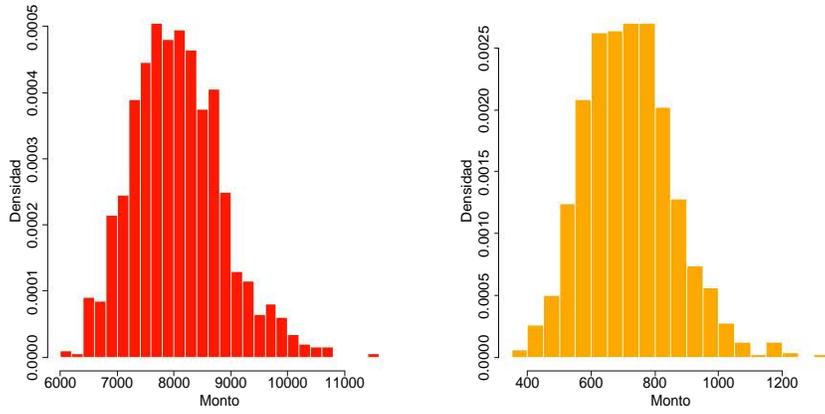


Figura 4.15: Histogramas de siniestralidad para la cobertura básica (izquierda) y por muerte accidental (derecha) del escenario 1

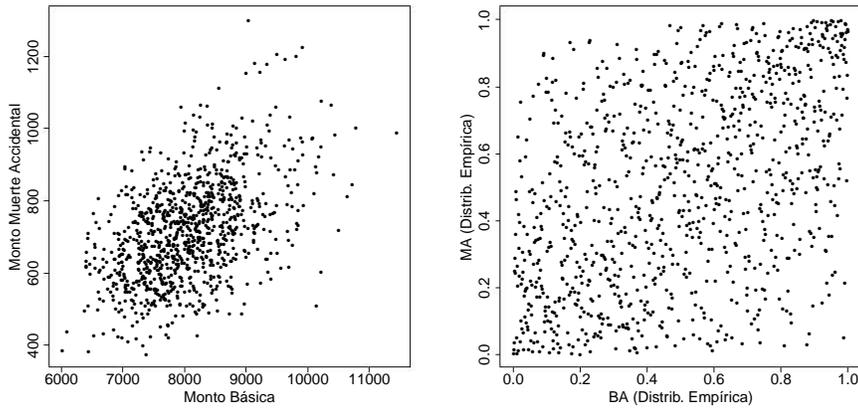


Figura 4.16: Gráficos de dispersión de las coberturas básica y de muerte accidental para el escenario 1

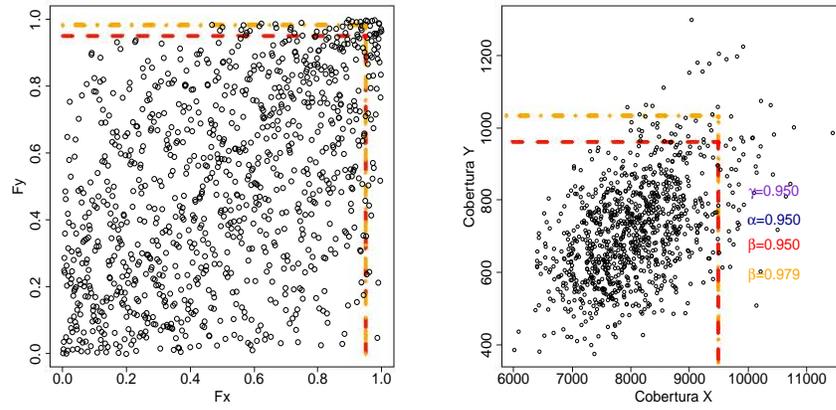


Figura 4.17: Monto de las reservas para las coberturas básica y de muerte accidental en el escenario 1

4.2.2. Escenario 2: Cartera con distribución de expuestos real.

- Cantidad de expuestos: 483,693.
- Número de simulaciones: 1,000.
- Cifras en millones.
- Cópula para dispersión de residuos: Cópula 16.
- Tiempo de generación de la simulación: 5 min 7 seg
- Equipo de cómputo: Intel i7 a 3.20 GHz ; 8 GB RAM.
- Simulación de siniestros.

Análisis de los montos de la simulación del escenario 1.

Cobertura	Media	Mediana	Desv. estándar	Mínimo	Máximo
Básica	289.7	287.7	29.77	209.9	406.2
Muerte accidental	44.8	43.65	8.11	26.52	80.48

Análisis de dependencias para la cobertura básica y de muerte accidental.

Concepto	Valor
Prueba de independencia:	p-valor = 0.00049
Simetría:	p-valor = 0.87
Cópula arquimediana elegida:	<i>Frank</i>
Parámetro:	3.645
p-valor:	0.164

Enseguida se muestran los cálculos de la reserva suficiente dependiendo de los cuantiles α y γ elegidos.

γ	α	β	Reserva total	Cob BA	Cob MA
0.950	0.950	0.950	400.8	341.30	59.50
0.950	0.950	0.982	407.5	341.30	66.19
0.975	0.975	0.975	418.22	354.86	63.36
0.975	0.975	0.992	424.49	354.86	69.63

Para el caso de emplear las tablas de la CNSF del año 2000, el monto a considerar sería de 304.27 para el caso de la cobertura básica, mientras que en la cobertura de muerte accidental (suponiendo una tasa generalizada de $\frac{1}{10000}$) el monto sería de 12.15, es decir, un total de 316.43.

Comparación entre reservas respecto al modelo tradicional

- Tradicional: 316.43
- Al **0.95**
 - Suponiendo independencia: 400.8 (+26.66 %)
 - Sin suponer independencia: 407.5 (+28.78 %)
- Al **0.97**
 - Suponiendo independencia: 418.22 (+32.17 %)

○ Sin suponer independencia: 424.49 (+34.15 %)

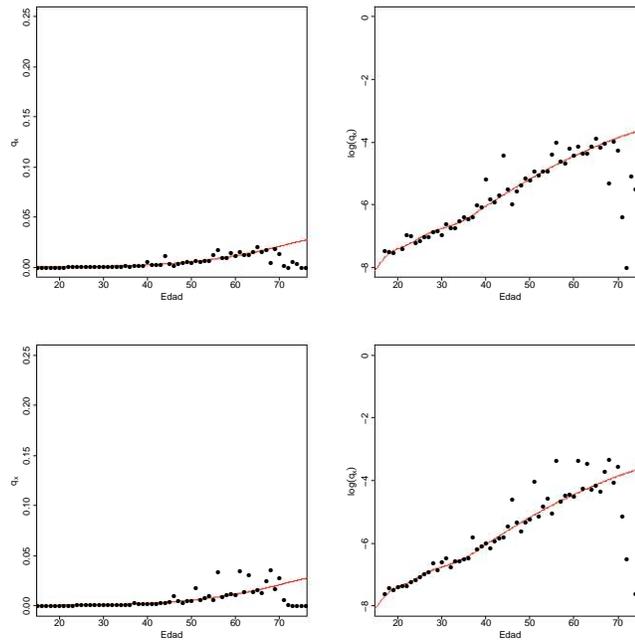


Figura 4.18: Tablas resultantes con el modelo propuesto para el escenario 2.

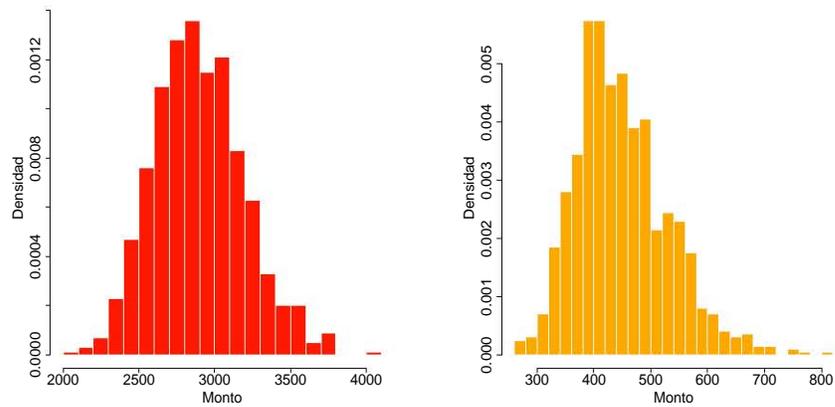


Figura 4.19: Histogramas de siniestralidad para la cobertura básica (izquierda) y por muerte accidental (derecha) del escenario 2

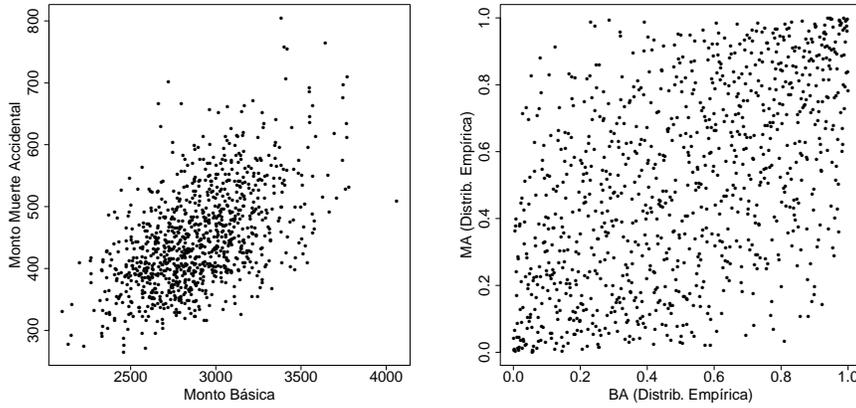


Figura 4.20: Gráficos de dispersión de las coberturas básica y de muerte accidental para el escenario 2

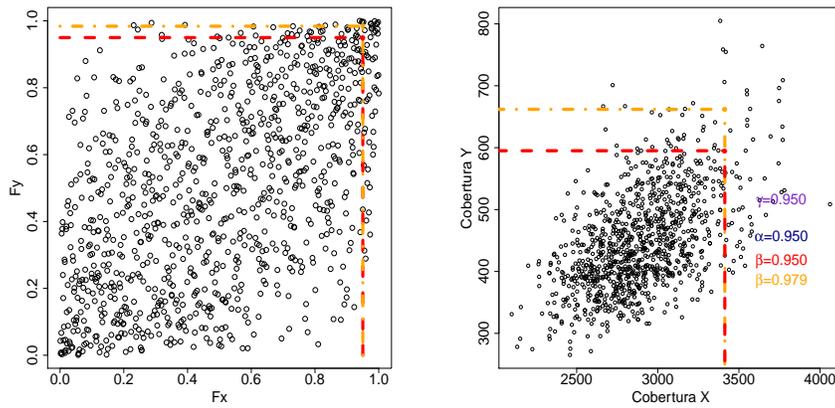


Figura 4.21: Monto de las reservas para las coberturas básica y de muerte accidental en el escenario 2

4.2.3. Escenario 3: Cartera hipotética grande.

- Cantidad de expuestos: 1,000,000.
- Número de simulaciones: 1,000.
- Cifras en millones.
- Cópula para dispersión de residuos: Cópula 16.
- Tiempo de generación de la simulación: 12 min 0 seg
- Equipo de cómputo: Intel i5 a 2.50 GHz; 8 GB RAM.
- Simulación de siniestros.

Análisis de los montos de la simulación del escenario 1.

Cobertura	Media	Mediana	Desv. estándar	Mínimo	Máximo
Básica	1,716	1,703	131.75	1,399	2,329
Muerte accidental	175.4	173.4	23.87	109.5	271.2

Análisis de dependencias para la cobertura básica y de muerte accidental.

Concepto	Valor
Prueba de independencia:	p-valor = 0.00049
Simetría:	p-valor = 0.636
Cópula arquimediana elegida:	<i>Frank</i>
Parámetro:	3.3495
p-valor:	0.355

Enseguida se muestran los cálculos de la reserva suficiente dependiendo de los cuantiles α y γ elegidos.

γ	α	β	Reserva total	Cob BA	Cob MA
0.950	0.950	0.950	2,170.41	1,953.23	217.18
0.950	0.950	0.982	2,180.78	1,953.23	227.55
0.975	0.975	0.975	2,230.92	2,007.7	223.22
0.975	0.975	0.992	2,242.86	2,007.7	235.16

Para el caso de emplear las tablas de la CNSF del año 2000, el monto a considerar sería de 1,979.29 para el caso de la cobertura básica, mientras que en la cobertura de muerte accidental (suponiendo una tasa generalizada de $\frac{1}{10000}$) el monto sería de 43.13, es decir, un total de 2,022.42.

Comparación entre reservas respecto al modelo tradicional

- Tradicional: 2,022.42
- Al **0.95**
 - Suponiendo independencia: 2,170.41 (+7.32 %)
 - Sin suponer independencia: 2,180.78 (+7.83 %)
- Al **0.97**
 - Suponiendo independencia: 2,230.92 (+10.31 %)
 - Sin suponer independencia: 2,242.86 (+10.90 %)

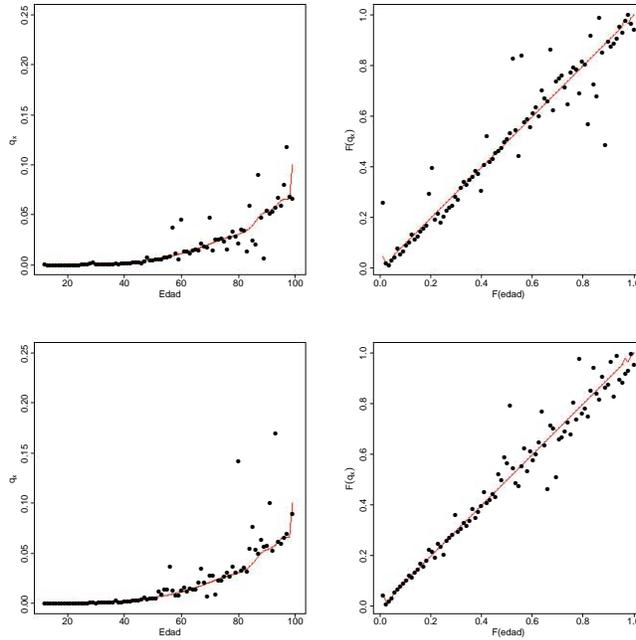


Figura 4.22: Tablas resultantes con el modelo propuesto para el escenario 3.

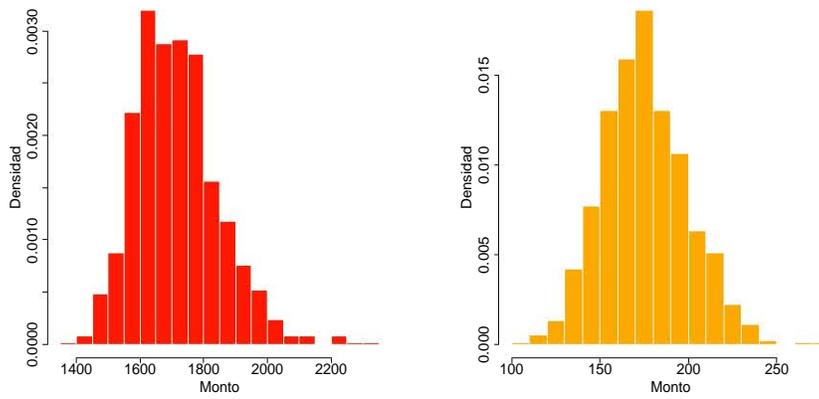


Figura 4.23: Histogramas de siniestralidad para la cobertura básica (izquierda) y por muerte accidental (derecha) del escenario 3

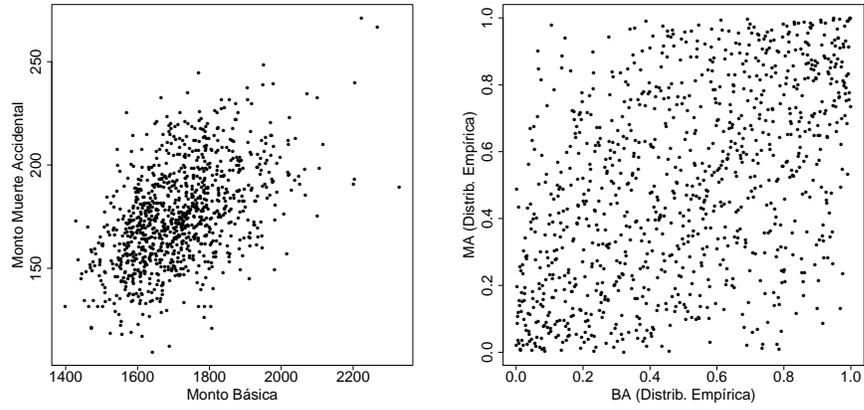


Figura 4.24: Gráficos de dispersión de las coberturas básica y de muerte accidental para el escenario 3

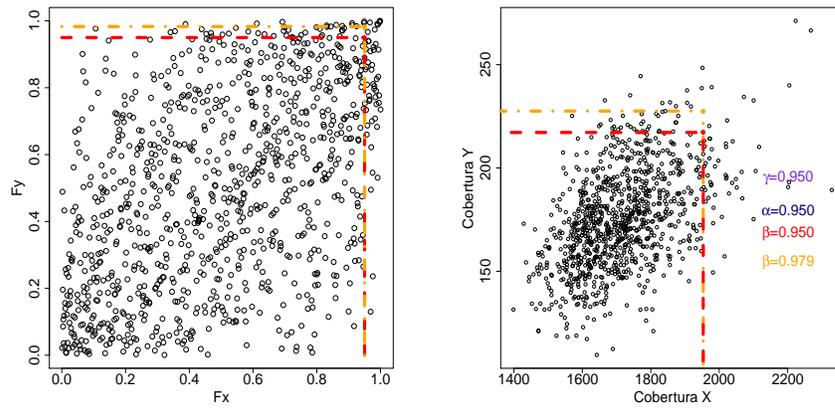


Figura 4.25: Monto de las reservas para las coberturas básica y de muerte accidental en el escenario 3

Capítulo 5

Conclusiones

Ahora contamos con evidencia estadística sobre:

- La posibilidad de construir tablas de mortalidad con funciones cópula.
- La dependencia existente entre los errores resultantes de la diferencia entre la regresión mediana sobre la cópula Bernstein y la cantidad de expuestos en una cartera puede ser representada mediante cópulas.
- La dependencia entre las coberturas básica y muerte accidental se puede representar mediante cópulas.
- A través de la representación de la dependencia entre las coberturas mencionadas, se puede ocupar la derivada parcial de su cópula para el cálculo de la reserva suficiente.

Ventajas:

- El modelo podría permitir emplear información propia de la compañía e información del sector asegurador.
- El tiempo de procesamiento de los modelos es entre 7 y 12 min para cada escenario, dependiendo el computador y la cantidad de asegurados.
- Mayor dinamismo y evita la sobre-estimación en el caso de escenarios en donde se cuente con mayor cantidad de expuestos de características similares.
- Se puede incluir en análisis de escenarios de caducidad de cartera.
- Se puede incluir en análisis de escenarios de expansión o ampliación de cartera.

Desventajas:

- En el caso del ajuste no paramétrico de la cópula Bernstein sobre la tabla de mortalidad, es más débil estadísticamente.
- No se tiene evidencia estadística de que los residuos sean independientes de la edad de los expuestos.

- No se tiene información suficiente para revisar los modelos de dependencia entre coberturas para pérdidas orgánicas, invalidez y otras coberturas.
- No se tiene información suficiente para separar en grupos de riesgo por sexo.

Para futuras investigaciones:

- Incluir en un modelo más flexible la dependencia existente de los residuos entre las observaciones y la regresión mediana sobre la cópula Bernstein y la edad.
- Con la experiencia mexicana y la información completa de la CNSF construir un modelo estandar sobre la dependencia entre la cantidad de expuestos y la regresión mediana de la cópula Bernstein de la información de cada compañía.
- Realizar pruebas con información anterior en diferentes años para analizar la estabilidad de la dispersión de los residuos y las diferentes variables externas que puedan llegar a influir.
- Realizar un cálculo completo de ALM empleando este modelo de mortalidad.
- Separar en grupos de riesgo por sexo.

Consideraciones especiales

- El modelo no está planeado para calcular la reserva individual por póliza/asegurado. Precisamente se emplea como recurso el tener más información de la cartera y su mortalidad en conjunto para la creación de escenarios.
- Sólo para el caso del análisis con todos los expuestos en Mendoza (2000) la reserva con el modelo y cálculo propuesto es más pequeña respecto al modelo y cálculo tradicional. Pero, conforme la cantidad de expuestos disminuye, la reserva tiende a ser mayor que en el cálculo y modelo tradicional, realizado directamente de las tablas de la CNSF 2000 para el seguro de vida individual.
- Es importante resaltar que estos resultados son derivados de información de todo el sector agrupada en tablas brutas de mortalidad. La verificación de la hipótesis de este trabajo no pretende alcanzar una categoría como modelo generalizado, pues la información con la que se cuenta en este momento es limitada, pero sí como un primer paso para no descartar una investigación más profunda: con acceso a la información relevante y análisis de escenarios reales. Dicha investigación partiría de que no se rechazaron estadísticamente los modelos propuestos vía cópulas.

Apéndice A

Tablas

Cuadro A.1: Tablas brutas de mortalidad empleadas en Mendoza (2000).

Edad x	Expuestos	Fallecimientos	q_x
12	9203	16	0.001738564
13	7001	2	0.000285673
14	16768	3	0.000178912
15	10445	4	0.000382958
16	9654	0	0
17	16102	7	0.000434729
18	18442	9	0.000488016
19	20408	15	0.000735006
20	25173	14	0.000556151
21	33359	23	0.000689469
22	50374	27	0.000535991
23	74561	37	0.000496238
24	99480	80	0.000804182
25	122342	106	0.000866424
26	147954	108	0.000729957
27	165651	183	0.001104732
28	184425	182	0.000986851
29	201460	233	0.001156557
30	218085	265	0.001215123
31	231340	276	0.001193049
32	242170	277	0.001143825
33	249538	312	0.001250311
34	254078	318	0.001251584
35	261217	347	0.001328397

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.1 – Continuación de la página anterior

Edad x	Expuestos	Fallecimientos	q_x
36	260378	364	0.001397968
37	258114	388	0.001503212
38	250332	443	0.00176965
39	242261	446	0.00184099
40	231921	517	0.002229207
41	224367	456	0.002032384
42	211408	509	0.002407667
43	201843	574	0.002843794
44	188313	630	0.003345494
45	174223	591	0.003392204
46	162347	617	0.003800501
47	151459	623	0.004113324
48	141042	626	0.004438394
49	128595	581	0.004518061
50	117505	562	0.004782775
51	106745	629	0.005892548
52	98154	535	0.005450618
53	87818	647	0.00736751
54	79525	617	0.007758566
55	72288	562	0.007774458
56	65234	513	0.007863997
57	59083	542	0.009173536
58	52445	530	0.010105825
59	48508	540	0.011132184
60	44817	563	0.012562197
61	40417	473	0.011702996
62	36168	423	0.011695421
63	32128	492	0.015313745
64	28208	380	0.013471356
65	24342	379	0.015569797
66	20805	373	0.017928383
67	18746	310	0.016536861
68	17329	315	0.018177621
69	15277	329	0.021535642
70	13819	277	0.020044866
71	14268	308	0.021586768
72	12116	786	0.064872895
73	10888	260	0.0238795
74	9822	277	0.028201996
75	8752	227	0.025936929
76	7762	188	0.024220562

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.1 – Continuación de la página anterior

Edad x	Expuestos	Fallecimientos	q_x
77	6973	171	0.024523161
78	6392	194	0.030350438
79	5440	177	0.032536765
80	4758	127	0.026691887
81	4286	166	0.038730751
82	3799	113	0.02974467
83	3222	108	0.033519553
84	2588	109	0.042117465
85	5841	88	0.015065913
86	1259	156	0.123907863
87	913	52	0.056955093
88	775	37	0.047741935
89	635	42	0.066141732
90	618	32	0.051779935
91	448	17	0.037946429
92	337	15	0.044510386
93	291	21	0.072164948
94	186	15	0.080645161
95	160	10	0.0625
96	101	5	0.04950495
97	60	9	0.15
98	64	3	0.046875
99	35	5	0.142857143

Cuadro A.2: Tabla censo INEGI 2010.

Edad	Población mexicana	Fallecimientos	por muerte accidental
12	2198326	655	172
13	2117387	805	210
14	2188419	988	279
15	2264338	1281	391
16	2164278	1695	515
17	2282332	2093	643
18	2315644	2390	746
19	1999520	2443	743
20	2158009	2690	752
21	1852751	2525	680
22	2040729	2588	729
23	1953669	2656	750

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.2 – Continuación de la página anterior

Edad	Población mexicana	Fallecimientos	por muerte accidental
24	1887113	2757	683
25	1888107	2985	709
26	1744230	2778	703
27	1744709	2825	651
28	1805401	2849	652
29	1605730	2964	626
30	2033652	3514	699
31	1376746	2924	595
32	1787288	3172	616
33	1664186	3136	611
34	1608926	3209	597
35	1773570	3801	705
36	1705919	3498	567
37	1580995	3559	584
38	1765973	3696	605
39	1466530	3738	531
40	1842724	4033	575
41	1116315	3730	495
42	1604324	3900	497
43	1275856	3964	464
44	1170007	4299	478
45	1395960	4695	566
46	1150955	4639	469
47	1113097	4860	424
48	1192239	4919	411
49	1076479	5462	413
50	1368876	5744	470
51	802737	5544	378
52	1058878	5998	391
53	919419	6223	391
54	914381	6567	390
55	952197	7017	418
56	846799	6959	387
57	689810	6946	329
58	739369	7130	325
59	667190	7538	293
60	884486	8098	376
61	451220	7758	281
62	619191	8391	329
63	604546	8529	310
64	557023	9042	284

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.2 – *Continuación de la página anterior*

Edad	Población mexicana	Fallecimientos	por muerte accidental
65	597932	9176	304
66	442028	8887	292
67	427801	9462	295
68	455710	9539	290
69	393794	10183	290
70	551913	10621	272
71	264533	10095	260
72	389299	11009	254
73	342035	11300	278
74	326154	12040	299
75	336549	11958	244
76	262546	11800	254
77	215279	11884	256
78	252281	11827	259
79	178828	13314	267
80	262384	13346	287
81	114368	11420	246
82	152320	11617	237
83	134542	11164	236
84	135322	12414	256
85	136008	11966	223
86	103031	10977	216
87	85549	10816	232
88	71548	9420	207
89	58028	9672	194
90	67860	8742	198
91	23769	6070	146
92	30799	5989	120
93	23702	4694	111
94	18794	4223	102
95	18905	4049	91
96	15924	3294	61
97	11048	2764	59
98	11929	2240	50
99	7926	2035	42

Cuadro A.3: Tabla resultante de la regresión mediana de la cópula Bernstein.

Edad	Reg. mediana	Residuo
12	0.000374	3.654
13	0.000282	0.012
14	0.00028	-0.362
15	0.000321	0.194
16	0.00039	-1
17	0.000465	-0.065
18	0.00053	-0.08
19	0.000578	0.272
20	0.000615	-0.095
21	0.000649	0.063
22	0.000688	-0.221
23	0.000737	-0.327
24	0.000797	0.009
25	0.000863	0.004
26	0.00093	-0.215
27	0.000995	0.11
28	0.001054	-0.064
29	0.00111	0.042
30	0.001162	0.045
31	0.001216	-0.019
32	0.001275	-0.103
33	0.001343	-0.069
34	0.001424	-0.121
35	0.001524	-0.128
36	0.001645	-0.15
37	0.001789	-0.16
38	0.001957	-0.096
39	0.002147	-0.143
40	0.002357	-0.054
41	0.002586	-0.214
42	0.002832	-0.15
43	0.003097	-0.082
44	0.003382	-0.011
45	0.003689	-0.08
46	0.004019	-0.054
47	0.004374	-0.059
48	0.004755	-0.067
49	0.005164	-0.125
50	0.005601	-0.146

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.3 – *Continuación de la página anterior*

Edad	Reg. mediana	Residuo
51	0.006069	-0.029
52	0.006567	-0.17
53	0.007096	0.038
54	0.007656	0.013
55	0.008248	-0.057
56	0.00887	-0.113
57	0.009519	-0.036
58	0.010196	-0.009
59	0.010898	0.022
60	0.011629	0.08
61	0.012392	-0.056
62	0.013195	-0.114
63	0.01404	0.091
64	0.01493	-0.098
65	0.01586	-0.018
66	0.016825	0.066
67	0.017821	-0.072
68	0.018848	-0.036
69	0.019908	0.082
70	0.021004	-0.046
71	0.022123	-0.024
72	0.023242	1.791
73	0.024328	-0.018
74	0.025352	0.112
75	0.026307	-0.014
76	0.027205	-0.11
77	0.028072	-0.126
78	0.028943	0.049
79	0.02985	0.09
80	0.030829	-0.134
81	0.031927	0.213
82	0.033219	-0.105
83	0.034833	-0.038
84	0.036974	0.139
85	0.039885	-0.622
86	0.043578	1.843
87	0.047378	0.202
88	0.050383	-0.052
89	0.052369	0.263
90	0.053615	-0.034
91	0.054621	-0.305

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.3 – Continuación de la página anterior

Edad	Reg. mediana	Residuo
92	0.05604	-0.206
93	0.058486	0.234
94	0.061814	0.305
95	0.064674	-0.034
96	0.065867	-0.248
97	0.065611	1.286
98	0.06666	-0.297
99	0.099979	0.429

Cuadro A.4: Tabla con las tasas de mortalidad de la CNSF del año 2000.

Edad	Individual 2000	Grupo 2000
12	0.000396	0.000788
13	0.000427	0.000804
14	0.00046	0.000821
15	0.000495	0.00084
16	0.000533	0.000861
17	0.000575	0.000884
18	0.000619	0.000909
19	0.000667	0.000936
20	0.000718	0.000965
21	0.000773	0.000997
22	0.000833	0.001031
23	0.000897	0.001069
24	0.000966	0.001109
25	0.001041	0.001153
26	0.001121	0.001201
27	0.001207	0.001252
28	0.0013	0.001308
29	0.0014	0.001368
30	0.001508	0.001434
31	0.001624	0.001505
32	0.001749	0.001582
33	0.001884	0.001665
34	0.002029	0.001756
35	0.002186	0.001854
36	0.002354	0.001962
37	0.002535	0.002078

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.4 – *Continuación de la página anterior*

Edad	Individual 2000	Grupo 2000
38	0.00273	0.002205
39	0.00294	0.002344
40	0.003166	0.002495
41	0.00341	0.00266
42	0.003672	0.00284
43	0.003954	0.003038
44	0.004258	0.003254
45	0.004585	0.003491
46	0.004938	0.003751
47	0.005317	0.004037
48	0.005725	0.004352
49	0.006164	0.004698
50	0.006637	0.00508
51	0.007145	0.005501
52	0.007693	0.005966
53	0.008282	0.006481
54	0.008915	0.007051
55	0.009597	0.007682
56	0.01033	0.008383
57	0.011119	0.009162
58	0.011967	0.010028
59	0.012879	0.010992
60	0.01386	0.012067
61	0.014914	0.013266
62	0.016048	0.014605
63	0.017265	0.016102
64	0.018574	0.017778
65	0.01998	0.019656
66	0.02149	0.021761
67	0.023111	0.024123
68	0.024851	0.026776
69	0.02672	0.029758
70	0.028724	0.033112
71	0.030874	0.036885
72	0.03318	0.041133
73	0.035651	0.045915
74	0.0383	0.051302
75	0.041136	0.057369
76	0.044174	0.064199
77	0.047424	0.071887
78	0.050902	0.080534

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.4 – Continuación de la página anterior

Edad	Individual 2000	Grupo 2000
79	0.054619	0.090251
80	0.058592	0.101155
81	0.062834	0.113373
82	0.067362	0.127033
83	0.07219	0.14227
84	0.077337	0.159214
85	0.082817	0.17799
86	0.088649	0.198711
87	0.09485	0.221468
88	0.101436	0.246327
89	0.108424	0.273313
90	0.115832	0.302405
91	0.123677	0.333527
92	0.131973	0.36654
93	0.140737	0.401237
94	0.149983	0.437344
95	0.159723	0.474524
96	0.16997	0.512385
97	0.180733	0.550499
98	0.19202	0.588413
99	0.203837	0.625679

Cuadro A.5: Cartera de expuestos hipotética para análisis inicial con número de expuestos en Mendoza [2000].

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
12	5356	2678	893	223	45	7	1	0	0	0
13	4074	2037	679	170	34	6	1	0	0	0
14	9759	4879	1626	407	81	14	2	0	0	0
15	3270	3270	2180	1090	436	145	42	10	2	0
16	3022	3023	2015	1007	403	134	38	10	2	0
17	5040	5041	3360	1680	672	224	64	16	4	1
18	5773	5773	3849	1924	770	257	73	18	4	1
19	6389	6388	4259	2129	852	284	81	20	5	1
20	7880	7880	5253	2627	1051	350	100	25	6	1
21	10443	10443	6962	3481	1392	464	133	33	7	1
22	7921	11881	11880	8911	5346	2673	1146	430	143	43
23	11724	17585	17585	13189	7913	3957	1696	636	212	64
24	15642	23463	23463	17597	10558	5279	2262	848	283	85

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.5 – Continuación de la página anterior

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
25	19237	28855	28855	21641	12985	6492	2782	1043	348	104
26	23264	34895	34895	26172	15703	7851	3365	1262	421	126
27	26046	39070	39069	29302	17581	8791	3767	1413	471	141
28	13803	27607	36810	36809	29447	19632	11218	5609	2493	997
29	15078	30157	40209	40211	32167	21445	12254	6127	2723	1089
30	16323	32646	43527	43527	34822	23215	13265	6633	2948	1179
31	17315	34630	46172	46173	36938	24626	14072	7036	3127	1251
32	18125	36251	48335	48335	38668	25778	14731	7365	3273	1309
33	18677	37354	49805	49805	39844	26563	15179	7589	3373	1349
34	19017	38033	50711	50712	40569	27046	15455	7727	3434	1374
35	19551	39102	52136	52136	41709	27806	15889	7945	3531	1412
36	8955	22388	37313	46641	46640	38867	27762	17352	9640	4820
37	8877	22193	36988	46235	46236	38529	27521	17201	9556	4778
38	8610	21524	35873	44841	44841	37368	26691	16682	9268	4634
39	8332	20830	34716	43396	43395	36163	25831	16144	8969	4485
40	7976	19941	33235	41544	41543	34620	24728	15455	8586	4293
41	7717	19291	32152	40190	40190	33492	23923	14952	8307	4153
42	7271	18177	30295	37870	37869	31557	22541	14088	7827	3913
43	6942	17355	28925	36154	36156	30130	21521	13451	7473	3736
44	6477	16191	26986	33731	33732	28110	20079	12549	6972	3486
45	5992	14980	24967	31208	31208	26007	18576	11610	6450	3225
46	2529	7586	15171	22757	27308	27308	23407	17555	11704	7022
47	2359	7077	14154	21230	25477	25477	21837	16378	10919	6551
48	2197	6590	13180	19769	23725	23725	20335	15252	10168	6101
49	2003	6009	12017	18025	21631	21631	18541	13906	9270	5562
50	1830	5490	10981	16472	19765	19765	16942	12706	8471	5083
51	1663	4988	9975	14962	17956	17956	15390	11543	7695	4617
52	1529	4586	9172	13759	16510	16510	14152	10614	7076	4246
53	3020	7551	12584	15731	15731	13109	9363	5852	3251	1626
54	2735	6838	11396	14245	14245	11871	8479	5300	2944	1472
55	2486	6215	10359	12949	12949	10791	7708	4817	2676	1338
56	2244	5609	9348	11685	11685	9738	6955	4347	2415	1208
57	2032	5080	8467	10584	10583	8819	6300	3937	2187	1094
58	1804	4509	7515	9394	9394	7829	5592	3495	1942	971
59	1668	4171	6951	8689	8689	7241	5172	3233	1796	898
60	1541	3853	6422	8028	8028	6690	4779	2987	1659	830
61	1390	3475	5792	7241	7240	6033	4309	2693	1496	748
62	1244	3110	5183	6478	6479	5399	3856	2410	1339	670
63	1105	2762	4604	5755	5755	4796	3426	2141	1189	595
64	970	2425	4042	5053	5053	4211	3008	1880	1044	522
65	837	2093	3488	4361	4360	3634	2595	1622	901	451

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.5 – Continuación de la página anterior

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
66	716	1789	2981	3727	3727	3106	2218	1386	770	385
67	645	1612	2686	3358	3358	2798	1999	1249	694	347
68	596	1490	2483	3103	3104	2587	1848	1155	642	321
69	525	1314	2189	2736	2737	2280	1629	1018	566	283
70	475	1188	1980	2476	2475	2063	1473	921	512	256
71	491	1227	2045	2555	2556	2130	1521	951	528	264
72	417	1042	1736	2170	2170	1809	1292	807	449	224
73	374	936	1560	1951	1950	1625	1161	726	403	202
74	338	845	1408	1758	1759	1466	1047	655	364	182
75	301	753	1254	1568	1568	1306	933	583	324	162
76	267	667	1112	1391	1390	1159	828	517	287	144
77	240	600	999	1249	1249	1041	743	465	258	129
78	220	550	916	1144	1145	954	682	426	237	118
79	187	468	780	974	974	812	580	363	201	101
80	164	409	682	853	852	710	507	317	176	88
81	147	369	614	767	768	640	457	286	159	79
82	131	327	544	680	681	567	405	253	141	70
83	111	277	462	576	577	481	344	215	119	60
84	89	223	371	463	464	386	276	172	96	48
85	201	502	837	1047	1046	872	623	389	216	108
86	43	108	180	226	226	188	134	84	47	23
87	31	79	131	163	164	136	97	61	34	17
88	27	67	111	137	139	116	83	52	29	14
89	22	55	91	112	114	95	68	42	24	12
90	21	53	89	111	111	92	66	41	23	11
91	15	39	64	80	80	67	48	30	17	8
92	12	29	48	62	60	50	36	22	12	6
93	10	25	42	53	52	43	31	19	11	5
94	6	16	27	34	33	28	20	12	7	3
95	6	14	23	27	29	24	17	11	6	3
96	3	9	14	18	18	15	11	7	4	2
97	2	5	9	11	11	9	6	4	2	1
98	2	6	9	12	11	10	7	4	2	1
99	1	3	5	7	6	5	4	2	1	1

Cuadro A.6: Cartera de expuestos hipotética mediana 500,000. Escenario 1.

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
12	400	200	67	17	3	1	0	0	0	0
13	304	152	51	13	3	0	0	0	0	0
14	730	365	122	30	6	1	0	0	0	0
15	244	244	163	82	33	11	3	1	0	0
16	226	226	151	75	30	10	3	1	0	0
17	377	377	251	126	50	17	5	1	0	0
18	432	432	288	144	58	19	5	1	0	0
19	478	478	318	159	64	21	6	2	0	0
20	589	589	393	197	79	26	7	2	0	0
21	781	781	520	260	104	35	10	2	1	0
22	592	888	888	666	400	200	86	32	11	3
23	876	1315	1315	984	592	296	127	48	16	5
24	1169	1754	1754	1319	789	395	169	63	21	6
25	1438	2157	2157	1618	971	485	208	78	26	8
26	1739	2609	2609	1957	1174	587	252	94	31	9
27	1947	2921	2921	2190	1314	657	282	106	35	11
28	1032	2064	2752	2751	2202	1468	839	419	186	75
29	1127	2255	3006	3006	2405	1603	916	458	204	81
30	1220	2441	3254	3254	2603	1736	992	496	220	88
31	1294	2589	3452	3451	2762	1841	1052	526	234	94
32	1355	2710	3614	3613	2891	1927	1101	551	245	98
33	1396	2793	3724	3723	2979	1986	1135	567	252	101
34	1422	2843	3791	3791	3033	2022	1155	578	257	103
35	1462	2923	3898	3897	3118	2079	1188	594	264	106
36	669	1674	2790	3486	3487	2906	2076	1297	721	360
37	664	1659	2765	3456	3457	2881	2058	1286	714	357
38	644	1609	2682	3353	3352	2794	1995	1247	693	346
39	623	1557	2595	3245	3244	2704	1931	1207	671	335
40	596	1491	2485	3106	3106	2588	1849	1155	642	321
41	577	1442	2404	3003	3005	2504	1789	1118	621	311
42	544	1359	2265	2831	2831	2359	1685	1053	585	293
43	519	1297	2162	2703	2703	2253	1609	1006	559	279
44	484	1210	2017	2523	2522	2101	1501	938	521	261
45	448	1120	1867	2333	2333	1944	1389	868	482	241
46	189	567	1134	1701	2042	2042	1750	1312	875	525
47	176	529	1058	1587	1905	1905	1633	1224	816	490
48	164	493	985	1478	1774	1774	1520	1140	760	456
49	150	449	898	1348	1617	1617	1386	1040	693	416
50	137	410	821	1231	1478	1478	1267	950	633	380

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.6 – Continuación de la página anterior

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
51	124	373	746	1119	1342	1342	1151	863	575	345
52	114	343	686	1030	1234	1234	1058	793	529	317
53	226	564	941	1176	1176	980	700	437	243	122
54	204	511	852	1066	1065	887	634	396	220	110
55	186	465	774	968	968	807	576	360	200	100
56	168	419	699	873	874	728	520	325	181	90
57	152	380	633	791	791	659	471	294	164	82
58	135	337	562	703	702	585	418	261	145	73
59	125	312	520	649	650	541	387	242	134	67
60	115	288	480	602	600	500	357	223	124	62
61	104	260	433	542	541	451	322	201	112	56
62	93	232	387	486	484	404	288	180	100	50
63	83	207	344	430	430	359	256	160	89	44
64	73	181	302	377	378	315	225	141	78	39
65	63	156	261	326	326	272	194	121	67	34
66	53	134	223	277	279	232	166	104	58	29
67	48	120	201	252	251	209	149	93	52	26
68	45	111	186	233	232	193	138	86	48	24
69	39	98	164	205	205	170	122	76	42	21
70	36	89	148	185	185	154	110	69	38	19
71	37	92	153	190	191	159	114	71	40	20
72	31	78	130	162	162	135	97	60	34	17
73	28	70	117	145	146	122	87	54	30	15
74	25	63	105	132	131	110	78	49	27	14
75	22	56	94	117	117	98	70	44	24	12
76	20	50	83	103	104	87	62	39	21	11
77	18	45	75	92	93	78	56	35	19	10
78	16	41	68	86	86	71	51	32	18	9
79	14	35	58	73	73	61	43	27	15	8
80	12	31	51	63	64	53	38	24	13	7
81	11	28	46	57	57	48	34	21	12	6
82	10	24	41	51	51	42	30	19	11	5
83	8	21	35	43	43	36	26	16	9	4
84	7	17	28	32	35	29	21	13	7	4
85	15	38	63	78	78	65	47	29	16	8
86	3	8	13	18	17	14	10	6	3	2
87	2	6	10	12	12	10	7	5	3	1
88	2	5	8	11	10	9	6	4	2	1
89	2	4	7	8	8	7	5	3	2	1
90	2	4	7	7	8	7	5	3	2	1
91	1	3	5	5	6	5	4	2	1	1

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.6 – Continuación de la página anterior

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
92	1	2	4	4	4	4	3	2	1	0
93	1	2	3	5	4	3	2	1	1	0
94	0	1	2	3	3	2	1	1	1	0
95	0	1	2	3	2	2	1	1	0	0
96	0	1	1	2	1	1	1	1	0	0
97	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
98	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
99	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0

Cuadro A.7: Cartera de expuestos mediana real de 483,693. Escenario 2.

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17	577	349	14	459	11	12586	1303	1240	771	200
18	788	309	22	340	24	4765	517	551	333	45
19	924	412	52	593	45	5418	518	575	375	68
20	942	444	66	884	144	5996	589	646	393	64
21	1127	521	108	1237	279	6339	631	687	469	68
22	1237	613	143	1783	476	6748	679	701	522	81
23	1324	610	195	2171	690	7118	688	740	491	76
24	1360	673	260	2635	860	7461	747	776	537	121
25	1460	670	275	2979	1065	7627	709	724	509	98
26	1462	754	307	3294	1147	7446	799	763	508	133
27	1514	740	378	3574	1216	7442	766	741	556	120
28	1450	679	402	3613	1249	7491	757	724	552	124
29	1443	736	478	3835	1289	7543	864	775	562	120
30	1413	687	472	3869	1178	7367	876	727	582	117
31	1445	649	509	3932	1211	7312	853	707	530	144
32	1403	665	545	3980	1093	7243	867	699	535	148
33	1408	666	527	4057	1004	7222	835	679	528	132
34	1364	684	528	4018	1034	7075	888	705	581	166
35	1472	692	505	3953	2018	5043	716	428	282	102
36	1498	714	514	3688	2827	3555	709	383	257	76
37	1596	692	526	3347	3409	2772	705	375	210	83

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.7 – Continuación de la página anterior

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
38	1589	723	531	3219	3359	2455	677	327	248	90
39	1497	663	475	3047	3243	2207	582	319	220	78
40	1644	649	484	2715	2988	2099	528	298	193	80
41	1577	658	470	2704	2897	2001	577	293	226	88
42	1558	626	469	2620	2862	1941	529	275	215	83
43	1411	598	406	2588	2586	1808	546	282	195	102
44	1368	571	402	2392	2582	1697	479	261	186	73
45	1345	583	385	2254	2055	1161	362	178	133	40
46	1332	558	353	2003	1673	1096	373	154	140	35
47	1457	543	349	1889	1546	985	386	123	84	31
48	1349	485	352	1790	1406	969	344	153	83	32
49	1308	499	319	1587	1367	900	308	117	86	28
50	1404	489	317	1539	1345	799	325	126	91	30
51	1260	537	302	1358	1258	846	270	102	82	27
52	1185	431	264	1196	1091	755	262	109	65	18
53	1202	385	289	1138	1047	706	262	88	56	18
54	1034	391	244	1068	1045	645	256	69	62	22
55	959	335	186	964	810	500	215	60	27	12
56	942	321	203	810	745	451	186	63	34	7
57	945	256	140	763	627	394	169	38	33	5
58	789	217	147	620	506	330	144	61	27	4
59	753	109	122	617	467	341	163	43	23	1
60	689	56	123	514	369	271	104	34	26	1
61	631	46	94	431	346	267	91	19	16	0
62	495	47	92	346	292	212	82	26	13	0
63	497	33	80	327	267	177	82	25	7	0
64	396	24	53	224	210	138	62	18	4	0
65	109	4	26	150	129	104	39	10	6	0
66	17	4	23	95	83	68	34	9	4	0
67	3	1	25	74	61	64	28	7	1	0
68	3	1	10	40	28	39	11	1	1	0
69	1	0	5	24	12	16	11	2	0	0
70	0	1	1	9	5	6	4	0	0	0
71	0	0	0	0	2	3	1	0	0	0
72	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
73	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
74	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.7 – Continuación de la página anterior

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
92	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
93	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
95	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
97	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro A.8: Cartera de expuestos grande hipotética de 1,000,000.
Escenario 3.

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
12	2608	2608	1738	868	347	115	32	7	1	0
13	2608	2608	1738	868	347	115	32	7	1	0
14	2609	2609	1740	872	349	117	34	9	3	0
15	3443	3443	2295	1147	458	152	43	10	1	0
16	3443	3443	2295	1147	458	152	43	10	1	0
17	3443	3443	2295	1147	458	152	43	10	1	0
18	3443	3443	2295	1147	458	152	43	10	1	0
19	3444	3444	2297	1150	463	157	46	13	7	1
20	248	747	1495	2242	2690	2690	2306	1730	1153	691
21	248	747	1495	2242	2690	2690	2306	1730	1153	691
22	248	747	1495	2242	2690	2690	2306	1730	1153	691
23	248	747	1495	2242	2690	2690	2306	1730	1153	691
24	253	749	1495	2245	2696	2696	2309	1730	1154	696

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.8 – Continuación de la página anterior

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
25	373	1120	2242	3363	4036	4036	3460	2595	1730	1037
26	373	1120	2242	3363	4036	4036	3460	2595	1730	1037
27	373	1120	2242	3363	4036	4036	3460	2595	1730	1037
28	373	1120	2242	3363	4036	4036	3460	2595	1730	1037
29	376	1126	2245	3368	4041	4041	3460	2595	1730	1042
30	435	1307	2615	3923	4744	4708	4036	3027	2018	1210
31	435	1307	2615	3923	4744	4708	4036	3027	2018	1210
32	435	1307	2615	3923	4744	4708	4036	3027	2018	1210
33	435	1307	2615	3923	4744	4708	4036	3027	2018	1210
34	440	1312	2622	3931	4749	4716	4041	3030	2020	1215
35	373	1120	2242	3363	4036	4036	3460	2595	1730	1037
36	373	1120	2242	3363	4036	4036	3460	2595	1730	1037
37	373	1120	2242	3363	4036	4036	3460	2595	1730	1037
38	373	1120	2242	3363	4036	4036	3460	2595	1730	1037
39	376	1126	2245	3368	4041	4041	3460	2595	1730	1042
40	342	1027	2055	3083	3700	3700	3171	2378	1585	950
41	342	1027	2055	3083	3700	3700	3171	2378	1585	950
42	342	1027	2055	3083	3700	3700	3171	2378	1585	950
43	342	1027	2055	3083	3700	3700	3171	2378	1585	950
44	344	1030	2058	3086	3702	3702	3174	2381	1588	957
45	755	1890	3152	3940	3940	3283	2345	1465	813	406
46	755	1890	3152	3940	3940	3283	2345	1465	813	406
47	755	1890	3152	3940	3940	3283	2345	1465	813	406
48	755	1890	3152	3940	3940	3283	2345	1465	813	406
49	762	1897	3154	3943	3943	3288	2348	1470	819	411
50	618	1547	2578	3223	3223	2686	1918	1198	665	332
51	618	1547	2578	3223	3223	2686	1918	1198	665	332
52	618	1547	2578	3223	3223	2686	1918	1198	665	332
53	618	1547	2578	3223	3223	2686	1918	1198	665	332
54	623	1549	2584	3228	3228	2689	1923	1205	671	337
55	412	1031	1718	2148	2148	1790	1278	798	443	221
56	412	1031	1718	2148	2148	1790	1278	798	443	221
57	412	1031	1718	2148	2148	1790	1278	798	443	221
58	412	1031	1718	2148	2148	1790	1278	798	443	221
59	415	1034	1725	2155	2155	1795	1284	806	448	226
60	275	687	1145	1432	1432	1193	852	532	295	147
61	275	687	1145	1432	1432	1193	852	532	295	147
62	275	687	1145	1432	1432	1193	852	532	295	147
63	275	687	1145	1432	1432	1193	852	532	295	147
64	275	690	1151	1437	1437	1198	855	537	300	152
65	298	598	798	798	638	425	242	120	53	20

Continúa en la siguiente página

Cuadro A.8 – Continuación de la página anterior

Edad	Nv1	Nv2	Nv3	Nv4	Nv5	Nv6	Nv7	Nv8	Nv9	Nv10
66	298	598	798	798	638	425	242	120	53	20
67	298	598	798	798	638	425	242	120	53	20
68	298	598	798	798	638	425	242	120	53	20
69	304	601	799	799	641	428	247	127	58	27
70	148	298	398	398	318	212	120	60	26	10
71	148	298	398	398	318	212	120	60	26	10
72	148	298	398	398	318	212	120	60	26	10
73	148	298	398	398	318	212	120	60	26	10
74	156	304	403	403	324	215	127	63	31	13
75	118	238	318	318	255	170	96	48	20	8
76	118	238	318	318	255	170	96	48	20	8
77	118	238	318	318	255	170	96	48	20	8
78	118	238	318	318	255	170	96	48	20	8
79	126	245	324	324	256	170	101	50	27	10
80	73	148	198	198	158	105	60	30	13	5
81	73	148	198	198	158	105	60	30	13	5
82	73	148	198	198	158	105	60	30	13	5
83	73	148	198	198	158	105	60	30	13	5
84	81	156	205	205	166	111	63	31	15	6
85	58	118	158	158	127	85	48	23	10	3
86	58	118	158	158	127	85	48	23	10	3
87	58	118	158	158	127	85	48	23	10	3
88	58	118	158	158	127	85	48	23	10	3
89	66	126	166	166	130	85	50	28	13	8
90	28	58	78	78	63	42	23	11	5	1
91	28	58	78	78	63	42	23	11	5	1
92	28	58	78	78	63	42	23	11	5	1
93	28	58	78	78	63	42	23	11	5	1
94	36	66	86	86	66	44	28	16	6	6
95	13	28	38	38	31	20	11	5	2	0
96	13	28	38	38	31	20	11	5	2	0
97	13	28	38	38	31	20	11	5	2	0
98	13	28	38	38	31	20	11	5	2	0
99	21	36	46	46	34	25	16	10	5	5

Apéndice B

Código en R project

Para el análisis se empleó el software libre R project versión 3.2.1 y se hizo uso de la librería `copula`". El software es empleado para cómputo y gráficos estadísticos, se puede obtener de la página <https://www.r-project.org/>.

Cálculo de la cópula Empírica.

```
copula.Emp<-function(observa)
{
#### Cálculo de la cópula Empírica ####
#observa:= matriz con los pares de observaciones

n<-length(observa[,1])
ordena<-observa[order(observa[,1]),]
index<-sort(ordena[,2])
mat.copula<-matrix(0,nrow=n+1,ncol=n+1)
for(i in 1:n)
{
for(j in 1:n)
{
acum<-sum((match(index[1:j],
ordena[,2])<=i)*1)
mat.copula[i+1,j+1]=acum/n
}
}
return(mat.copula)
}
```

Cálculo de la Cópula Bernstein.

```

copula.Bernstein<-function(u,v)
{
#### Cálculo de la cópula Bernstein ####
# Guardar la matriz de la cópula empírica
# en la variable mat.cop.emp

result<-0
n<-length(mat.cop.emp[,1])-1
result<-(t(c(0,dbinom((1:n),n,u))))%*%
mat.cop.emp)%*%c(0,dbinom((1:n),n,v))
return(result)
}

```

Derivada de la cópula Bernstein.

```

du.copula.Bernstein<-function(u,v)
{
#### Derivada de la Cópula Bernstein ####
# Guardar la matriz de la cópula empírica en
# la variable mat.cop.emp

result<-0
n<-length(mat.cop.emp[,1])-1
const<-((1:n)*u^(-1))-(n-(1:n))*((1-u)^(-1))
result<-(t(c(0,dbinom((1:n),n,u)*const))%*%
mat.cop.emp)%*%c(0,dbinom((1:n),n,v))
return(result)
}

```

Regresión cuantil sobre la cópula Bernstein (función auxiliar).

```

du.copula.Bernstein.aux<-function(u.aux,v,xdada=0)
{
# Función auxiliar de la regresión cuantil
# sobre la cópula Bernstein.

# Se guarda en la variable mat.cop.emp
# la matriz de la cópula empírica de
# los datos.

result<-du.copula.Bernstein(u.aux,v)-xdada
return(result)
}

```

Cálculo de la regresión cuantil sobre la cópula Bernstein.

```

Reg.quantil.berns<-function(x,original,cuantil=0.5)
{
####   Cálculo de la regresión cuantil de la cópula
####   Bernstein

#       Se guarda en la variable mat.cop.emp
#       la matriz de la cópula empírica de
#       los datos.

F_x<-ecdf(original[,1])(x)*length(original[,1])/
      (length(original[,1])+1)

tolerancia<-0.00005
intervalo<-c(0.0001,0.999999)

u<-F_x
t<-cuantil
v<-rep(0,length(u))

for(i in 1:length(u))
{
      v[i]<-uniroot(du.copula.Bernstein.aux,
      u.aux=u[i],xdada=t,interval=intervalo,
      tol=tolerancia)$root
}

x.obs<-rep(0,length(x))

for(i in 1:length(x))
{
      x.obs[i]<-Fn.inv.Bernshtein(v[i],
      original[,2])
}

return(x.obs)
#$
}

```

Cópulas arquimedianas Nelsen (2006).

```
#####
```

```

### Funciones de copulas arquimedianas (Nelsen 2006) ###
#####

Cop1<-function(u,v,a)
{
#Clayton Family
(max((u^-a)+(v^-a)-1,0))^-1/a
}

Cop2<-function(u,v,a)
{
max(1-((1-u)^a+(1-v)^a)^(1/a),0)
}

Cop3<-function(u,v,a)
{
#Ali-Mikhail-Haq family.
(u*v)/(1-a*(1-u)(1-v))
}

Cop4<-function(u,v,a)
{
#Gumbel-Hougaard family
exp(-((-log(u))^a+(-log(v))^a)^(1/a))
}

Cop5<-function(u,v,a)
{
#Frank Family
cop<-(-1.0/a)*log(1+((exp(-a*u)-1.0)*(exp(-a*v)-1.0))/
(exp(-a)-1.0))
return(cop)
}

Cop6<-function(u,v,a)
{
1-(((1-u)^a+(1-v)^a-(1-u)^a*(1-v)^a)^(1/a))
}

Cop7<-function(u,v,a)
{
max(a*u*v+(1-a)*(u+v-1),0)
}

Cop8<-function(u,v,a)
{

```

```
max((a^2*u*v-(1-u)*(1-v))/(a^2-(a-1)^2*(1-u)*(1-v)),0)
}
```

```
Cop9<-function(u,v,a)
{
#Gumbel-Barnett family
u*v*exp(-a*log(u)*log(v))
}
```

```
Cop10<-function(u,v,a)
{
(u*v)/(1+(1-u^a)*(1-v^a))^(1/a)
}
```

```
Cop11<-function(u,v,a)
{
(max(u^a*v^a-2*(1-u^a)*(1-v^a),0))^(1/a)
}
```

```
Cop12<-function(u,v,a)
{
(1+((-1+u^-1)^a+(-1+v^-1)^a)^(1/a))^-1
}
```

```
Cop13<-function(u,v,a)
{
exp(1-((1-log(u))^a+(1-log(v))^a-1)^(1/a))
}
```

```
Cop14<-function(u,v,a)
{
(1+((u^(-1/a)-1)^a+(v^(-1/a)-1)^a)^(1/a))^(-a)
}
```

```
Cop15<-function(u,v,a)
{
(max(1-((1-u^(1/a))^a+(1-v^(1/a))^a)^(1/a),0))^a
}
```

```
Cop16<-function(u,v,a)
{
## Empleada en el trabajo para la distribución de los errores ##
S<-u+v-1-a*((1/u)+(1/v)-1)
return((S+sqrt(S^2+4*a))/2)
}
```

```
Cop17<-function(u,v,a)
{
(1+((-1+(1+u)^-a)*(-1+(1+v)^(-a)))/(-1+2^-a))^-1/a-1
}
```

```
Cop18<-function(u,v,a)
{
max(1+a/(log(exp(a/(u-1))+exp(a/(v-1))))),0)
}
```

```
Cop19<-function(u,v,a)
{
a/(log(exp(a/u)+exp(a/v)+exp(a)))
}
```

```
Cop20<-function(u,v,a)
{
(log(exp(u^-a)+exp(v^-a)+exp(1)))^-1/a
}
```

Derivada de las cópulas arquimedianas $\frac{\delta C(u,v)}{\delta u}$ (Nelsen 2006) .

```
du.cop1<-function(u,v,a)
{
max(u^-1/a)/(-1+u^-a+v^-a)^((1+a)/a),0)
}
```

```
du.cop3<-function(u,v,a)
{
((1+a*(-1+v))*v)/(-1+a*(-1+u)*(-1+v))^2
}
```

```
du.cop4<-function(u,v,a)
{
cop<-exp(-((-log(u))^a+(-log(v))^a)^(1/a))*((-log(u))^-1/a)*
((-log(u))^a+(-log(v))^a)^(-1+a^(-1))*(1/u)
return(cop)
}
```

```

du.cop5<-function(u,v,a)
{
cop<-(exp(a)*(-1+exp(a*v)))/
(-exp(a)+exp(a+a*u)-exp(a*(u+v))+exp(a+a*v))
return(cop)
}

du.cop6<-function(u,v,a)
{
return(-((1-u)^(-1+a)*(-1+(1-v)^a)*
((1-u)^a+(1-v)^a-(1-u)^a*(1-v)^a)^(-1+a^(-1))))
}

du.cop9<-function(u,v,a)
{
(v-a*v*log(v))/exp(a*log(u)*log(v))
}

du.cop10<-function(u,v,a)
{
-((v*(-2+v^a))/(2-v^a+u^a*(-1+v^a))^(1+a/a))
}

du.cop12<-function(u,v,a)
{
((-1+u^(-1))^(-1+a)*((-1+u^(-1))^a+(-1+v^(-1))^a)^(-1+a^(-1)))/
(u^2*(1+((-1+u^(-1))^a+(-1+v^(-1))^a)^a^(-1))^2)
}

du.cop13<-function(u,v,a)
{
(exp(1-(-1+(1-log(u))^a+(1-log(v))^a)^a^(-1))*
(1-log(u))^(-1+a)*(-1+(1-log(u))^a+(1-log(v))^a)^(-1+a^(-1)))/u
}

du.cop14<-function(u,v,a)
{
((-1+u^(-a^(-1)))^(-1+a)*((-1+u^(-a^(-1)))^a+
(-1+v^(-a^(-1)))^a)^(-1+a^(-1))*
(1+((-1+u^(-a^(-1)))^a+
(-1+v^(-a^(-1)))^a)^a^(-1))^(-1-a))/u^(1+a/a)
}

du.cop16<-function(u,v,a)
{
(1+a/u^2+((1+a/u^2)*(-1+u-a*(-1+u^(-1)+v^(-1))+v))/
sqrt(4*a+(-1+u-a*(-1+u^(-1)+v^(-1))+v)^2))/2
}

```

```

}

du.cop17<-function(u,v,a)
{
((1+u)^(-1-a)*(-1+(1+v)^(-a)))/((-1+2^(-a))*
(1+((-1+(1+u)^(-a))*(-1+(1+v)^(-a)))/(-1+2^(-a)))^((1+a)/a))
}

du.cop19<-function(u,v,a)
{
(a^2*exp(a/u))/((-exp(a)+exp(a/u)+exp(a/v))*
u^2*log(-exp(a)+exp(a/u)+exp(a/v))^2)
}

du.cop20<-function(u,v,a)
{
(exp(u^(-a))*u^(-1-a))/((-exp(1)+exp(u^(-a))+exp(v^(-a)))*
log(-exp(1)+exp(u^(-a))+exp(v^(-a)))^((1+a)/a))
}

```

$$\frac{\delta^2 C(u,v)}{\delta u \delta v}.$$

Se emplean para el cálculo del estimador por máxima verosimilitud.

```

duv.cop1<-function(u,v,a)
{
(1+a)*u^(-1-a)*v^(-1-a)*(-1+u^(-a)+v^(-a))^(-2-a^(-1))
}

duv.cop3<-function(u,v,a)
{
(-1+a^2*(-1+u+v-u*v)-a*(-2+u+v+u*v))/(-1+a*(-1+u)*(-1+v))^3
}

duv.cop4<-function(u,v,a)
{
cop<-((-log(u))^(-1+a)*(-1+a+((-log(u))^a+(-log(v))^a)^a^(-1))*

```

```

((-log(u))^a+(-log(v))^a)^(-2+a^(-1))*(-log(v))^(-1+a)/
(exp((-log(u))^a+(-log(v))^a)^(1/a))*u*v
return(cop)
}

duv.cop5<-function(u,v,a)
{
return((a*exp(a*(1+u+v)))*(-1+exp(a)))/
(exp(a)-exp(a+a*u)+exp(a*(u+v))-exp(a+a*v))^2)
}

duv.cop6<-function(u,v,a)
{
(1-u)^(-1+a)*(a-(-1+(1-u)^a)*(-1+(1-v)^a))*
((1-u)^a+(1-v)^a-(1-u)^a*(1-v)^a)^(-2+a^(-1))*(1-v)^(-1+a)
}

duv.cop9<-function(u,v,a)
{
(1-a*a*log(v)+a*log(u)*(-1+a*log(v)))/exp(a*log(u)*log(v))
}

duv.cop10<-function(u,v,a)
{
(2-v^a+u^a*(-1+v^a))^(-2-a^(-1))*(4-2*v^a+u^a*(-2-(-1+a)*v^a))
}

duv.cop12<-function(u,v,a)
{
((-1+u^(-1))^a*(-1+a+((-1+u^(-1))^a+(-1+v^(-1))^a)^(-1)+a*
((-1+u^(-1))^a+(-1+v^(-1))^a)^a^(-1))*((-1+u^(-1))^a+
(-1+v^(-1))^a)^(-2+a^(-1))*(-1+v^(-1))^a)/
((-1+u)*u*(1+((-1+u^(-1))^a+(-1+v^(-1))^a)^a^(-1))^3*(-1+v)*v)
}

duv.cop13<-function(u,v,a)
{
(exp(1-(-1+(1-log(u))^a+(1-log(v))^a)^a^(-1))*
(1-log(u))^(-1+a)*(-1+a+(-1+(1-log(u))^a+(1-log(v))^a)^a^(-1))*
(-1+(1-log(u))^a+(1-log(v))^a)^(-2+a^(-1))*(1-log(v))^(-1+a))/(u*v)
}

duv.cop14<-function(u,v,a)
{
((-1+u^(-a^(-1)))^a*(-1+v^(-a^(-1)))^a*
((-1+u^(-a^(-1)))^a+(-1+v^(-a^(-1)))^a)^(-2+a^(-1))*

```

```

(1+((-1+u^(-a^(-1))))^a+(-1+v^(-a^(-1))))^a^(-1))^(-2-a)*
(-1+a+2*a*((-1+u^(-a^(-1))))^a+(-1+v^(-a^(-1))))^a^(-1))/
(a*u*(-1+u^a^(-1))*v*(-1+v^a^(-1)))
}

duv.cop16<-function(u,v,a)
{
(2*a*(a^2+u^2*v^2+a*(u^2+v^2)))/
(sqrt(4*a+(-1+u-a*(-1+u^(-1))+v^(-1))+v)^2)*(u^2*v^2*(-1+u+v)^2+a^2*
(u+v-u*v)^2+2*a*u*v*(u^2*(-1+v)-(-1+v)*v+u*(1-v+v^2)))
}

duv.cop17<-function(u,v,a)
{
(2^a*((-1+2^a)*a*(1+u)^a*(1+v)^a+2^a*(-1+(1+u)^a)*
(-1+(1+v)^a)))/((1+u)*(1+v)*(2^a-2^a*(1+u)^a-2^a*(1+v)^a+
(1+u)^a*(1+v)^a)^2*(1+((-1+(1+u)^(-a))*(-1+(1+v)^(-a))))/
(-1+2^(-a))^a^(-1))
}

duv.cop19<-function(u,v,a)
{
(a^3*exp(a*(u^(-1)+v^(-1)))*(2+log(-exp(a)+exp(a/u)+exp(a/v))))/
((-exp(a)+exp(a/u)+exp(a/v))^2*u^2*v^2*log(-exp(a)+exp(a/u)+exp(a/v))^3)
}

duv.cop20<-function(u,v,a)
{
(exp(u^(-a)+v^(-a))*u^(-1-a)*v^(-1-a)*log(-exp(1)+exp(u^(-a))+
exp(v^(-a))))^(-2-a^(-1))*(1+a+a*log(-exp(1)+exp(u^(-a))+exp(v^(-a))))/
(-exp(1)+exp(u^(-a))+exp(v^(-a)))^2
}

```

Comparación de la sección diagonal.

```

grafica.secc_diag<-function(cop.emp,ncop,param)
{
### Grafica la comparación de la sección diagonal

# cop.emp := matriz de la cópula empírica.
# ncop:= número de cópula en Nelsen (2006)
# param:= parámetro de la cópula teórica

```

```

graphics.off()

# Cota superior
h <- function(x,y){
  z<-rep(0,length(x))
  for(i in 1:length(x)){
    z[i]<-min(x[i],y[i])
  }
  return(z)
}
u <- seq(from=0,to=1,length=length(cop.emp[,1])-1)

diag<-h(u,u)

plot(u,diag,lwd=1,type="l",col="orange",
     main="Sección diagonal, Cópula teórica vs Empírica",
     xlab="",ylab="",
     cex.main=2,cex.axis=1.5)

text(0.45,0.55,expression(paste("W", "(u,v)", sep="")),
     col="orange",cex=2)

#independencia

h <- function(x,y) x*y

diag<-h(u,u)

lines(u,diag,lwd=1,type="l")

text(0.45,0.3,expression(paste(Pi, "(u,v)", sep="")),cex=2)

# Cota inferior

h <- function(x,y){
  z<-rep(0,length(x))
  for(i in 1:length(x)){
    z[i]<-max(x[i]+y[i]-1,0)
  }
  return(z)
}

```

```

diag<-h(u,u)

lines(u,diag,lwd=1,type="l",col="navy")
text(0.45,0.05,expression(paste("W", "(u,v)", sep="")),
col="navy",cex=2)

#cop.emp<-copula.Emp(cbind(M_BA_sim,M_MA_sim))

#Copula empírica

h <- function(x,y){
z<-rep(0,length(x))
for(i in 1:length(x)){
z[i]<-cop.emp[rank(x)[i]+1,rank(x)[i]+1]
}
return(z)
}

diag<-h(u,u)

lines(u,diag,lwd=4,type="l",col="gray",lty=1)
text(0.8,0.3,expression(paste("C(u,v, ", theta, ")", sep="")),
col="red",cex=2.5)
text(0.8,0.25,expression(paste(theta, "= ", param)),
col="red",cex=2)

#Copula Nelsen

usa.copula<-get(paste("Cop",ncop,sep=""))

h <- function(x,y){
z<-rep(0,length(x))
for(i in 1:length(x)){
z[i]<-usa.copula(x[i],y[i],param)
}
return(z)
}

diag<-h(u,u)

lines(u,diag,lwd=4,type="l",col="red",lty=2)

```

```
text(0.8,0.15,"C'(u,v)",col="gray",cex=2.5)

}
```

Comparación de contornos de nivel.

```
grafica.c_nivel<-function(cop.emp,ncop,param)
{
  ### Grafica la comparación de los conjuntos de nivel

  # cop.emp := matriz de la cópula empírica.
  # ncop:= número de cópula en Nelsen (2006)
  # param:= parámetro de la cópula teórica

  graphics.off()

  #Empírica

  u <- seq(from=0,to=1,length=length(cop.emp[,1])-1)
  v <- u

  z <- cop.emp[-1,-1]

  contour(u,v,z,lwd=3,
  main="Conjuntos de nivel, Cópula teórica vs Empírica",
  cex.lab=4,cex.main=2,cex.axis=1.5,
  lty=1, col="navy")

  #Copula Nelsen

  usa.copula<-get(paste("Cop",ncop,sep=""))

  # Copula

  h <- function(x,y){
  z<-rep(0,length(x))
  for(i in 1:length(x)){
  z[i]<-usa.copula(x[i],y[i],param)
  }
  return(z)
  }
```

```

z <- outer(u,v,h)

contour(u,v,z,lwd=3,
cex.axis=1.5,cex.lab=4,cex.main=2,col="red",lty=2,
add=T)

text(0.1,0.2,"C'(u,v)",col="navy",cex=3)
text(0.1,0.12,expression(paste("C(u,v,",theta,")",sep="")),
col="red",cex=3)
text(0.1,0.04,expression(paste(theta,"=1.64",sep="")),
col="red",cex=2)
}

```

Función inversa, polinomios de Bernstein.

```

Fn.inv.Bernstein<-function (u, valores.emp)
{
  x <- sort(valores.emp)
  n <- length(x)
  xm <- rep(0, n + 1)
  for (j in 2:n) {
    xm[j] <- (x[j - 1] + x[j])/2
  }
  xm[1] <- x[1]
  xm[n + 1] <- x[n]
  return(sum(xm * dbinom(0:n, n, u)))
}

```

Polinomios de Bernstein (función auxiliar).

```

Fn.inv.Bernstein.Fx<-function(ev,xdada=0)
{
  #Guardar en la variable "Datos" el vector con los valores empíricos
  Fn.inv.Bernstein(ev,Datos)-xdada
}

```

Polinomios de Bernstein.

```

#### Polinomios de Bernstein ####
# Guardar en la variable "Datos"
# el vector con los valores empíricos
Fn.Bernstein.Fx<-function(x)

```

```
{
uniroot(Fn.inv.Bernshtein.Fx,
interval = c(0,1), xdada = x, tol = 0.0005)$root
}
##
```

Cálculo de máxima verosimilitud del parámetro de la cópula.

```
# Transforma los datos a una uniforme estandar
# a través de su función de distribución empírica
```

```
Empiric.df<-function(data,x)
{
data <- sort(data)
if(min(data) > 0) a=0 else a=floor(min(data)/100)*100
if(max(data) < 0) b=0 else b=ceiling(max(data)/100)*100
for(j in 1:length(x))
{
if(x[j] < a) x[j] <- a
if(x[j] > b) x[j] <- b
}
data <- c(a,data,b)
n <- length(data)
p <- c(rep(NA,(n-1)))
q <- c(rep(NA,(n-1)))
for(i in 2:(n-2))
{
p[i] <- (data[i]+data[i+1])/2
q[i] <- (i-1)/(n-2)
}
p[1] <- a
p[n-1] <- b
q[1] <- 0
q[n-1] <- 1

return(approx(p,q,xout=c(x))$y)
}
##
```

```
likest<-function(u, v, nr, start)
{
#Función de verosimilitud#
# nr:= número de cópula Nelsen.
# u,v:= Observaciones.
# start:= parámetro de inicio, para convergencia.
```

```

diffmethod<-paste("dov.cop",nr,sep="")
assign("udata", u)
assign("vdata", v)
assign("dfunc", diffmethod)
negloglik <- function(alpha)
{
f <- - sum(log(eval(call(dfunc,udata, vdata, alpha))))
return(f)
}
result<-nlminb(objective=negloglik,start=start,
control=list(eval.max=1000,iter.max=300))
loglik.value <- - negloglik(result$par)
###

#list(result)
#Revisar si el estimador es válido o no.

validtest="alpha is not valid"
if (nr==1) {if(result$par >= -1 & result$par != 0)
validtest="alpha is valid" } else
if (nr==3) {if(result$par >= -1 & result$par < 1)
validtest="alpha is valid" } else
if (nr==4) {if(result$par >= 1) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==5) {if(result$par != 0) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==6) {if(result$par >= 1) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==9) {if(result$par > 0 & result$parameters <= 1)
validtest="alpha is valid" } else
if (nr==10) {if(result$par > 0 & result$parameters <= 1)
validtest="alpha is valid" } else
if (nr==12) {if(result$par >= 1) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==13) {if(result$par >0) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==14) {if(result$par >= 1) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==16) {if(result$par >= 0) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==17) {if(result$par != 0) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==19) {if(result$par > 0) validtest="alpha is valid" } else
if (nr==20) {if(result$par > 0) validtest="alpha is valid" } else
validtest="validity test not successfull!"

return(list(result$par, loglik.value, result$message, validtest))
}

```

Prueba de Bondad de Ajuste S_n .

```

gofCop_Sn<-function(observa,ncopula,inicia_theta,N)
{
## Prueba de bondad de Ajuste para cópulas arquimedianas, Nelsen ##
# observa:= matriz con las observaciones
# ncopula:= número de cópula en Nelsen (2006)
# inicia_theta:= parámetro de inicio para convergencia
# N:= número de simulaciones.

#Calcular Theta_n por máxima verosimilitud

x<-observa[,1]
y<-observa[,2]

#Apply this procedure on x and y calling
Emp.x <- Empiric.df(x,x)
Emp.y <- Empiric.df(y,y)

(Theta_n<-unlist(likest(u=Emp.x,v=Emp.y,nr=ncopula,
start=inicia_theta)[1]))

#1 programar Cn y estimar Theta_n por máxima verosimilitud

#Cópula empírica de las observaciones

u_obs<-cbind(ecdf(observa[,1])(observa[,1]),
ecdf(observa[,2])(observa[,2]))

Cn_obs<-function(u) {C.n(u=u,U=u_obs)}

#2c Aproximar Sn

#Cópula teórica

usa.Copula<-get(paste("ncopula",ncopula,sep=""))

usa.Copula.aux<-function(u_v)
{
cop_uv<-rep(NA,length(u_v[,1]))
for(i in 1:length(u_v[,1]))
{
cop_uv[i]<-usa.Copula(u=u_v[i,1],v=u_v[i,2],a=Theta_n)
}
return(cop_uv)
}

```

```

}

(Sn=sum((Cn_obs(u_obs)-usa.Copula.aux(u_obs))^2))

#3 Escoger N suficientemente grande para número de simulaciones.

N

usa.copula<-get(paste("du.cop",ncopula,sep=""))

Sn_k<-rep(NA,N)

pb <- txtProgressBar(min = 0, max = N, style = 3)

for(k in 1:N)
{

param<-Theta_n
n.sim<-n
tolerancia<-0.005

copula.aux<-function(u,v,a,xdada=0)
{
cop<-usa.copula(u,v,a)-xdada
return(cop)
}

u.sim<-runif(n.sim,0,1)
t.aux<-runif(n.sim,0,1)
v.sim<-rep(0,n.sim)

for(i in 1:NROW(u.sim))
{
v.sim[i]<-uniroot(copula.aux,u=u.sim[i],a=param,xdada=t.aux[i],
interval=intervalo,tol=tolerancia)$root
}
###
#Pseudo observaciones de la k-ésima simulación con el parámetro "original"

u_k<-cbind(rank(u.sim)/(n.sim+1),rank(v.sim)/(n.sim+1))

```

```

Cn_emp<-function(u) {C.n(u=u,U=u_k)}

x<-u.sim
y<-v.sim

#Apply this procedure on x and y calling
Emp.x <- Empiric.df(x,x)
Emp.y <- Empiric.df(y,y)

#Cálculo por máxima verosimilitud del parámetro de la k-ésima simulación
Theta_n.k<-unlist(likest(u=Emp.x,v=Emp.y,nr=ncopula,start=Theta_n)[1])

#2c Calcular Sn_k

usa.Copula.aux<-function(u_v)
{
cop_uv<-rep(NA,length(u_v[,1]))
for(i in 1:length(u_v[,1]))
{
cop_uv[i]<-usa.Copula(u=u_v[i,1],v=u_v[i,2],a=Theta_n.k)
}
return(cop_uv)
}

Sn_k[k]=sum((Cn_emp(u_k)-usa.Copula.aux(u_k))^2)

setTxtProgressBar(pb,k)

}

Theta_n
(p_value<-(length(Sn_k[Sn_k>Sn])+1/2)/(length(Sn_k)+1))

close(pb)

return(p_value)
}

```

Regresión cuantil sobre la cópula Bernstein.

```

Reg.quantil.berns<-function(x,original,cuantil=0.5)
{
#### Cálculo de la regresión cuantil de la cópula

```

```
#### Bernstein

# Se guarda en la variable mat.cop.emp
# la matriz de la cópula empírica de
# los datos.

F_x<-ecdf(original[,1])(x)*length(original[,1])/
(length(original[,1])+1)

tolerancia<-0.00005
intervalo<-c(0.0001,0.999999)

u<-F_x
t<-cuantil
v<-rep(0,length(u))

for(i in 1:length(u))
{
v[i]<-uniroot(du.copula.Bernstein.aux,
u.aux=u[i],xdada=t,interval=intervalo,
tol=tolerancia)$root
}

x.obs<-rep(0,length(x))

for(i in 1:length(x))
{
x.obs[i]<-Fn.inv.Bernstein(v[i],
original[,2])
}

return(x.obs)
}
# $
```

Simulación de tablas de mortalidad.

```
qx_dinam<-function(tabla.grad,nExp,resi.orig,exp.orig,ncop.resi=16,param)
{
#Función: calcular tabla dinámica de mortalidad;
# residuos, pegarlos a la tabla.

usa.copula<-get(paste("du.cop",ncop.resi,sep=""))

n.sim<-length(tabla.grad[,1])
tolerancia<-0.00005

copula.aux<-function(u,v,a,xdada=0)
{
cop<-usa.copula(u,v,a)-xdada
return(cop)
}

intervalo<-c(0.00000001,0.99999999)

Datos<-c(exp.orig,0)
Fx.exp<-rep(NA,length(Datos)-1)

for(ag in 1:88){
Fx.exp[ag]<-Fn.Bernstein.Fx(nExp[ag])
}

u.sim<-Fx.exp

# V.a. de apoyo
t.aux<-runif(n.sim,0,1)
v.sim<-rep(0,n.sim)

#Simulación de los residuos | cantidad de expuestos

for(i in 1:NROW(u.sim))
{
if(u.sim[i]>0)
{
v.sim[i]<-uniroot(copula.aux,u=u.sim[i],a=param,
xdada=t.aux[i],interval=intervalo,
```

```

tol=tolerancia)$root
}
}

#Transformación de los datos

datos<-v.sim
residuos.sim<-rep(0,length(datos))

for(ag in 1:length(datos))
{
residuos.sim[ag]<-Fn.inv.Bernstein(datos[ag],resi.orig)
}

# Genera tabla de mortalidad
# Reg med + residuo*Reg med

## Es importante acotar las tasas para evitar errores,
## ya que en la fórmula no existe un límite.

Qx_sim<-rep(0,length(datos))

for(ag in 1:length(datos))
{
Qx_sim[ag]<-max(min(tab.grad[,2][ag]+tab.grad[,2][ag]*residuos.sim[ag],1),0)
}

return(data.frame(Age=tab.grad[,1],Qx_sim))
}
#\$

```

Cálculo de reserva suficiente por cópulas

```

reserva_cop<-function(siniestros,alfa,gamma,ncopula,param)
{
#Calcular la reserva de un escenario de pares de coberturas de siniestros #
# P(rva cob 2 = F[-1] (beta) | rva cob 1 = F[-1] (alfa) ) = gamma
# y que F(cob1 , cob2) ~ C_ncopula(u,v,param)

n<-length(siniestros[,1])
usa.copula<-get(paste("du.cop",ncopula,sep=""))

# Auxiliar para calcular la reserva condicionada.
copula.aux<-function(u,v,a,xdada=0)
{
usa.copula(u,v,a)-xdada

```

```
}  
  
tolerancia<-0.00005  
intervalo<-c(0,1)  
  
beta<-uniroot(copula.aux,u=alfa,a=param,xdada=gamma,  
interval=intervalo,tol=tolerancia)$root  
  
##$#  
  
rva_alfa=sort(siniestros[,1])[round(alfa,3)*n]  
rva_beta=sort(siniestros[,2])[round(beta,3)*n]  
  
reservas<-data.frame(rva_alfa,alfa,rva_beta,beta,  
rva_tot=rva_alfa+rva_beta,gamma)  
  
return(reservas)  
}
```


Bibliografía

- [1] DE MATTEIS R.; MCNEIL A. *Fitting copulas to data*. Diploma thesis, Institute of Mathematics of the University of Zurich., 2001.
- [2] GENEST C.; RÉMILLARD B. *Test of independence and randomness based on the empirical copula process*. 2004.
- [3] GENEST C; RÉMILLARD B; BEAUDOIN D. *Goodness-of-Fit Tests for Copulas: A Review and a Power Study*. Insurance: Mathematics and Economics., 2009.
- [4] Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). Registros administrativos, 2010. Mortalidad. Consultado el 4 de abril de 2014.
- [5] Consejo Nacional de Población (CONAPO). Indicadores demográficos básicos 1990-2010, 2010. Consultado el 4 de abril de 2014.
- [6] GENEST C.; NESLHOVÁ T.; QUESSY J. *Test of symmetry for bivariate copulas*. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 2011.
- [7] ERDELY A; DIAZ-VIERA M. *Nonparametric and Semiparametric Bivariate Modeling of Petrophysical Porosity-Permeability Dependence from Well Log Data*. Copula Theory and Its Applications. Springer, 2010.
- [8] Madrigal-AM. y Gutiérrez-Peña E. Mendoza, M. *Predictive Mortality Graduation and the Value at Risk. A Bayesian Approach*. ITAM, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, IIMAS-UNAM, 2000.
- [9] R. Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer Verlag, 2006.
- [10] CHEN X; KOENKER R; XIAO Z. *Copula-Based Quantile Autoregression*. Royal Economic Society., 2009.