



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROCESO DE ACRECIÓN DE MATERIA ALREDEDOR DE
UN HOYO NEGRO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICA

PRESENTA:
LAURA OLIVIA VILLEGAS OLVERA

DIRECTOR DE TESIS
DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA

2015



Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1 Datos del Alumno

Villegas
Olvera
Laura Olivia
Universidad Nacional
Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
30201286-8

2. Datos del Tutor:

Doctor
Darío
Núñez
Zúñiga

3. Datos del Sinodal 1:

Doctora
Deborah
Dultzin
Kessler

4. Datos del Sinodal 2:

Doctor
Tonatiuh
Matos
Chassin

5. Datos del Sinodal 3:

Doctor
Jose Luis
Cervantes
Cota

6. Datos del Sinodal 4:

Doctor
Juan Carlos
Degollado
Daza

7. Datos del trabajo escrito.

Proceso de Acreción de materia alrededor de un hoyo negro.
Número de páginas
2015

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM **IN115311 Predicciones teóricas de la materia oscura, de los hoyos negros y de su coexistencia en las estructuras cósmicas así como las señales astrofísicas asociadas** además del proyecto **IN103514, Sobre los diferentes modelos de materia oscura y sus consecuencias observacionales**. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Ten fe en tus propósitos y persevera en ellos con la confianza de hacerlos realidad, cualquier buen éxito súmalo al estímulo de tus esfuerzos, Cualquier fracaso anótalo en el catálogo de tus experiencias; mas nunca abandones tu tarea ni la empobrezcas con tu desaliento

Índice general

Introducción.	1
1. Relatividad General.	4
1.1. Ecuación de Geodésicas.	7
1.2. Movimiento de un fluido.	10
1.3. Potencial gravitacional.	14
1.4. Ecuaciones de Einstein.	15
1.5. Solución de Schwarzschild.	18
1.6. Trayectoria de una partícula: Caída Libre.	20
2. Relatividad Numérica.	24
2.1. Formalismo 3+1	25
2.2. Curvatura extrínseca	27
2.3. Las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1	28
2.4. Datos iniciales para hoyos negros.	31
3. Programa OllinSphere2.	33
3.1. Archivos.	33
3.2. Introducción al uso del programa OllinSphere2	36
3.3. Metodo Runge-Kutta	40
4. Acreción	43
4.1. Proceso de acreción tipo Bondi	43
4.2. Acreción radial de un pulso de polvo.	49
4.3. Caída Libre: Coordenadas Penetrantes.	51
4.4. Caída Libre: Coordenadas Conformes	52
5. Resultados numéricos	54
5.1. Evolución: Fluido sin presión	56
5.2. Polvo Autogravitante.	58
5.3. Evolución: Fluido con presión	60
5.4. Fluido Autogravitante.	62

Introducción.

En astrofísica a los cuerpos celestes que tienen una densidad de materia mucho mayor que una estrella común se les conoce como objetos compactos, los cuales incluyen las enanas blancas, las estrellas de neutrones y los hoyos negros, este último tipo de objetos tienen como característica que las reacciones nucleares dentro de ellos han cesado completamente y en consecuencia la presión térmica del gas no puede soportar su propia fuerza gravitacional. Como sabemos en una estrella ordinaria la presión del gas obedece la ecuación de estado del gas ideal, en su interior el gas está completamente ionizado y está compuesto de iones y electrones libres los cuales provocan una presión que junto con la presión generada por la radiación de la estrella se mantiene en equilibrio con la fuerza gravitacional [7].

La evolución de una estrella está determinada principalmente por la cantidad de masa que la forma. En la década de los 30's el astrofísico Subrahmanyan Chandrasekhar [8], realizó diversos cálculos en los que mostraba que para estrellas de masa superior a $1.4M_{\odot}$ la fuerza gravitacional dominaría sobre la presión, lo que ocasionaría un colapso, este límite se conoce como **límite de Chandrasekhar**. Estos descubrimientos apuntaban a la formación de estrellas de neutrones y agujeros negros.

Dado que este tipo de objetos no pueden ser estudiados observacionalmente, necesitamos analizar la dinámica de la materia que existe alrededor de él. Por ejemplo si consideramos un sistema binario formado por un hoyo negro y una estrella normal muy cercanos entre sí, esta última arroja parte de su atmósfera por medio de los vientos solares, una fracción de ese material es capturada por el hoyo negro, la materia atrapada puede llegar a liberar enormes cantidades de energía ya que al ser absorbida el gas se calienta por fricción y emite rayos X. Debido a la atracción gravitacional y a los efectos de fricción del sistema, el gas no cae libremente. Si pudiéramos seguir la trayectoria de una partícula veríamos que gira alrededor del hoyo negro al chocar con otras partículas el gas pierde energía de movimiento y se acercara gradualmente al hoyo negro (Fig. 1), este proceso de absorción se le conoce como **Acreción**.

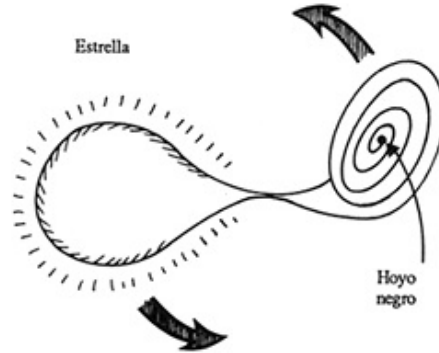


Figura 1: Representación del proceso de acreción en un sistema binario compuesto por un agujero negro y una estrella.

Así al momento de estudiar el sistema descrito anteriormente veríamos una estrella normal que gira alrededor de una compañera invisible y coincidiría con una fuente cósmica de rayos X. Además, si se logra determinar la masa del objeto invisible encontraríamos que resulta ser de varias veces la masa del Sol, entonces no habría duda de que se trata de un agujero negro.

El objetivo de este trabajo es estudiar la dinámica de la materia que se encuentra alrededor de un agujero negro, explicando el proceso de acreción de un fluido que lo rodea, basándonos en la relatividad general formulada por Albert Einstein en 1915 [29], es por ello que en los capítulos posteriores abarcaremos los conceptos básicos de esta teoría, los cuales nos serán de utilidad para el desarrollo del tema. Como base tenemos las ecuaciones de campo de Einstein las cuales forman un sistema de diez ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales, es por ello que encontrar las soluciones exactas no es fácil, salvo para ciertas situaciones con alto grado de simetría. Por otro lado resolveremos dichas ecuaciones utilizando aproximaciones numéricas mediante los conceptos fundamentales de la Relatividad Numérica.

Un caso de acreción interesante, que vamos a estudiar como primera aproximación es la Acreción de Bondi, la cual considera un flujo estacionario infinito de materia que acreta hacia un agujero negro de manera radial y es esféricamente simétrico. Pero el objetivo principal de este trabajo es considerar un pulso de materia cercano al agujero negro. Para iniciar el análisis del problema consideraremos la ecuación de Continuidad y la ecuación de Euler para un fluido sin presión, estas ecuaciones podemos resolverlas de manera analítica y los cálculos son sencillos, por ello tomaremos un pulso de este fluido de prueba, para poder describir su evolución al ser acretado. Sin embargo, sabemos que un gas contenido en un cierto volumen genera una presión debida al movimiento de

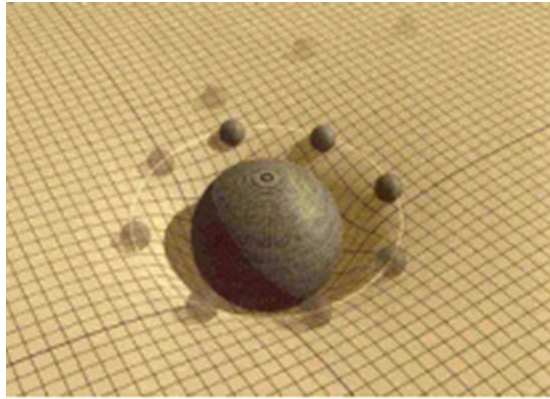


Figura 2: Representación artística de un objeto acretando hacia otro considerando la curvatura del espacio-tiempo.

las moléculas que lo forman, es por eso que un caso interesante a resolver es el pulso de materia de un fluido con presión, para ello ocuparemos la ecuación de estados de un gas politrópico, ambos análisis serán desarrollados para verificar y comparar los resultados correspondientes.

Por ultimo, tenemos el caso donde estudiaremos el pulso de materia considerando su autogravedad, generada por la materia al curvar el espacio-tiempo (Fig. 2), entonces aquí los cálculos ya no son tan simples y no pueden resolverse las ecuaciones de manera analítica por lo cual recurrimos a cálculos numéricos y utilizaremos el programa OllinSphere2 el cual es una herramienta útil en la resolución de las ecuaciones de Einstein. Con los datos obtenidos del programa podemos describir que sucede con la densidad de materia al ser absorbida por el hoyo negro y comparar los diversos casos que se presentan, lo que nos ayudará a entender el proceso de acreción.

Capítulo 1

Relatividad General.

La parte fundamental de la Mecánica Clásica son las tres leyes que rigen el comportamiento de una partícula en movimiento, las cuales fueron postuladas por Isaac Newton hace más de tres siglos [30], y son capaces de describir los fenómenos que se observan alrededor de nosotros. Al considerar la *Segunda Ley de Newton* que considera *un sistema de referencia inercial donde la razón de cambio del momento de un objeto puntual de masa m_i es equivalente a la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo*, es decir,

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}) = \vec{F}, \quad (1.1)$$

Además, cualquier sistema inercial con una velocidad constante con respecto a un sistema fijo, cumple con las leyes de la Física, esto nos permite definir un tiempo absoluto para cualquier sistema de referencia inercial. Por otra parte sabemos que existe una fuerza de atracción entre un objeto de masa gravitacional m_g y otro de masa M los cuales están separados una distancia \vec{r} . Dicha fuerza esta definida por la *Ley de Gravitación Universal*, la cual también fue postulada por Newton alrededor del año 1685.

$$\vec{F} = -\frac{GMm_g}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.2)$$

Donde G es la constante de Gravitación Universal, por otra parte podemos considerar a M como una masa puntual o como una distribución esféricamente simétrica.

Si consideramos que las ecuaciones (1.1) y (1.2) son equivalentes y las masas $m_i = m_g$ son constantes, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.3)$$

Esta expresión implica que todos los objetos masivos se mueven de la misma manera en un campo gravitacional debido a una masa M . Newton decidió atacar el problema del movimiento y logro demostrar que las tres leyes de Kepler

(donde se mostraba que las trayectorias que recorren los planetas son órbitas elípticas y que existe una relación entre los periodos de revolución y sus distancias al Sol), son consecuencia de la Fuerza de Gravitación. Por ello dos años más tarde publicó su famoso libro titulado: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Pierre-Simon Laplace en base a los principios de Newton, publicó varios volúmenes bajo el título de *Mecánica Celeste* en las que desarrollo todas las consecuencias de la física newtoniana, en uno de esos volúmenes, titulado *El sistema del mundo*, explicaba que la gravitación universal no solo afectaba la estabilidad del sistema solar si no también influye para su formación a partir de una nube primordial de polvo y gas. Él observó que muchas estrellas habían aparecido súbitamente y desaparecido después de brillar esplendorosamente durante varias semanas, hoy en día conocemos este fenómeno como *supernova* y sabemos que al explotar una estrella, esta arroja gran parte de su masa al espacio y su núcleo, el cual permanece en el lugar de la explosión, se vuelve un cuerpo oscuro. El razonamiento que llevo a Laplace al concepto de un cuerpo que no deja escapar la luz fue considerar la velocidad de escape desde la superficie de un cuerpo esférico como:

$$v_{esc}^2 = \frac{2GM}{R}, \quad (1.4)$$

con R el radio del objeto de masa M . Esta ecuación describe a la velocidad necesaria de un objeto para escapar de la fuerza gravitacional solo depende de la masa que la provoca. Con esto es posible pensar que existe un cuerpo masivo o tan compacto que la velocidad de escape es superior a la velocidad de la luz, esto nos lleva a que los rayos luminosos no escapan de ese cuerpo si el radio gravitacional es mayor al radio del cuerpo esférico.

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.5)$$

Esta expresión la halló Karl Schwarzschild en 1916 y constituye parte de una solución exacta para el campo gravitacional formado por una estrella con simetría esférica no rotante. Sin embargo las consideraciones anteriores solo podían ser especulativas ya que la velocidad de escape es válida para cualquier partícula, independiente de su masa pero para la época en que fue concebida la idea, no se conocía el comportamiento de la luz bajo la acción de la gravedad. Por eso los cuerpos oscuros de Laplace permanecieron en la oscuridad.

A principios del siglo XX, la Mecánica Clásica sufrió dos modificaciones fundamentales. La primera fue la Mecánica Cuántica, la cual describe los diferentes comportamientos de partículas microscópicas, sin embargo, bajo ciertos límites podemos demostrar que la teoría cuántica se puede reducir nuevamente a la mecánica newtoniana. La segunda modificación fue la teoría de la relatividad especial formulada por Albert Einstein en 1905. Uno de los experimentos fundamentales para el desarrollo de esta teoría fue el de Michelson-Morley en el cual

se demostró que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Por otro lado Lorentz había desarrollado una transformación algebraica que permitía mantener invariante la ecuación de onda para la luz y fue Einstein quien le dio una interpretación física a esa transformación de coordenadas. Las consecuencias de esta asociación son bastante profundas ya que nos permite estudiar el movimiento de una partícula con respecto a un marco de referencia inercial en el cual el tiempo y la longitud son relativos al sistema, además la masa de una partícula depende de la velocidad y puede ser relacionada con la energía $E = mc^2$.

Einstein considera que el espacio y el tiempo se convierte en un concepto unificado en donde la gravedad es la manifestación de esto. Entonces un espacio de cuatro dimensiones $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \vec{x})$ en donde se lleva a cabo la transformación de coordenadas Lorentziana, no podemos considerarlo como un espacio euclidiano. Si tomamos un desplazamiento infinitesimal en este espacio ds , entonces el cuadrado de este desplazamiento, es invariante dado que $(ds)^2 = ds ds$, el cual puede escribirse:

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.6)$$

Donde la cantidad $g_{\alpha\beta}$ es conocida como la métrica, es importante notar que usamos el convenio de suma de Einstein (que usaremos de aquí en adelante).

En la mecánica clásica podemos considerar que el movimiento de cualquier partícula en caída libre es independiente de su composición y estructura. Este principio se remonta al libro de Galileo Galileo *Diálogos Sobre las Dos Nuevas Ciencias*. Esto es lo que nos permite considerar:

$$m_i = m_g. \quad (1.7)$$

En donde m_i es una masa gobernada por la aceleración de un objeto con respecto a un sistema de coordenadas fijo y la segunda masa m_g esta determinada por la fuerza de gravedad, en consecuencia este principio nos permite describir el camino que sigue una partícula en un campo gravitacional ya que este es independiente de la masa. Al incorporar la Relatividad Especial este principio puede enunciarse de una manera más formal y es conocido como el **Principio de equivalencia**, el cual nos dice que. *Las propiedades de un sistema no inercial son las mismas que un sistema inercial cuando existe un cierto campo gravitatorio*. Esto nos lleva a considerar que las trayectorias de las partículas están determinadas solo por la geometría del campo, por ejemplo, una partícula puede moverse, sin fricción, a lo largo de una superficie plana de dos dimensiones siguiendo una línea recta que une dos puntos diferentes del plano. Pero el problema viene cuando uno trata de describir el movimiento de esa partícula sobre una superficie arbitraria, en este caso, dichas trayectorias son llamadas curvas **Geodésicas** definidas como las curvas de menor longitud que unen dos puntos diferentes en la superficie y están determinadas únicamente por la geometría. A partir de este conocimiento Einstein se dio cuenta de que para incluir la gravitación en la teoría de la relatividad, era necesario admitir que el espacio-tiempo

es curvo y en el año de 1916 dedujo la fórmula matemática que relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de masa y energía, la cual se conoce como las Ecuaciones de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Esta expresión es un sistema de 10 ecuaciones complicada de resolver excepto en algunos casos particulares, uno de ellos fue propuesto por Karl Schwarzschild, el cual propuso considerar un problema simple pero real. El considero una masa perfectamente esférica deformando al espacio-tiempo evidentemente esto implica que la simetría que se utiliza simplifica enormemente las ecuaciones, un hecho importante que arroja esta solución es el radio de Schwarzschild descrito por la ecuación (1.5) El cual describe que la luz emitida sobre la superficie de una masa M no puede llegar al radio critico (llamado horizonte de eventos) y que queda atrapada para siempre, lo cual es exactamente la situación descrita por Laplace para los cuerpos oscuros.

1.1. Ecuación de Geodésicas.

Si definimos la acción como la magnitud que expresa el producto de la energía imprecada en un proceso por el tiempo que dura este. Como queremos encontrar una expresión para describir el movimiento de una partícula en el espacio necesitamos considerar las trayectorias en donde los cuerpos puedan maximizar la acción, por ejemplo, en un espacio Euclidiano (plano) es simplemente una línea recta, para un espacio curvo esas trayectorias son conocidas como Geodésicas. El problema radica en calcular la distancia que existe entre dos puntos en el espacio-tiempo. En relatividad general, podemos deducir las ecuaciones de movimiento a partir del calculo de variaciones. Generalmente la longitud de una curva que une dos puntos A y B esta definida como:

$$L = \int_A^B ds, \quad (1.9)$$

Esta integral representa la suma de todos los elementos de línea. Cualquier curva entre A y B puede ser expresado en términos de un conjunto de coordenadas, x_i definidas de manera general por la métrica dada en la ecuación (1.6). Nosotros podemos obtener una segunda curva a partir de una variación en el elemento de linea a lo largo de cada punto de la trayectoria lo que nos permite expresar la siguiente ecuación:

$$\delta L = \int_A^B \delta(ds), \quad (1.10)$$

La variación en el elemento ds esta dado por:

$$\begin{aligned} \delta((ds)^2) &= dx^\alpha dx^\beta \delta g_{\alpha\beta} + 2 g_{\alpha\beta} dx^\alpha \delta(dx^\beta), \\ \delta(ds) &= \frac{1}{2} \dot{x}^\alpha dx^\beta \delta g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \delta(dx^\beta), \end{aligned} \quad (1.11)$$

Donde $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$, un hecho importante que debemos considerar es que la métrica (1.6) es simétrica y que los índices que utilizamos son mudos, lo que implica que podemos re nombrarlos a conveniencia. Ahora si usamos la regla de la cadena en el termino $\delta g_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta,\mu})\partial x_\mu$ para simplificar la ecuación, y consideramos que $g_{\alpha\beta,\mu} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}$ nos lleva a la expresión:

$$\delta(ds) = \left(\frac{1}{2} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial x_\mu g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \frac{\delta(dx^\beta)}{ds} \right) ds, \quad (1.12)$$

Ahora necesitamos integrar para ello nos enfocaremos en el segundo termino de la ecuación anterior:

$$\int_A^B g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \frac{\delta(dx^\beta)}{ds} ds = [\delta x^\beta g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha]_A^B - \int_A^B \frac{d(g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha)}{ds} \delta x^\beta ds, \quad (1.13)$$

El primer termino de la ecuación desaparece ya que necesitamos considerar que la variación en los extremos de la curva es $\delta x^\alpha = 0$. Utilizando esta ultima ecuación podemos reescribir la (1.10) de tal forma que:

$$\delta L = \int_A^B \left(\frac{1}{2} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta,\mu} - \frac{d(g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha)}{ds} \right) \delta x^\mu ds, \quad (1.14)$$

Ahora para cada elemento δx^α se puede variar de forma independiente lo que implica que el término entre paréntesis debe de ser cero en los extremos de la trayectoria, es decir:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta,\mu} - \frac{d(g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha)}{ds} = 0, \quad (1.15)$$

Diferenciando el producto en el segundo termino obtenemos:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\alpha\mu,\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha - g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha = 0, \quad (1.16)$$

La cual puede ser reescrita, utilizando la simetría de la métrica y re nombrando algunos de los índices, llegamos a que:

$$\ddot{x}^\beta + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad (1.17)$$

Si consideramos que $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$ los cuales son llamados *Simbolos de Christoffel*, además tomamos que $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = u^\alpha$ donde consideramos que τ es el tiempo propio, lo que nos lleva a la ecuación:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0. \quad (1.18)$$

A esta ultima expresión se le conoce como **Ecuación de las Geodésicas** la cual nos describe las trayectorias que sigue una partícula. Es útil notar que,

para un objeto en función de las coordenadas, podemos expresar su derivada de tal manera que, de acuerdo a la regla de la cadena, tenga la forma:

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{\partial A}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = A^\mu{}_{,\lambda} u^\lambda, \quad (1.19)$$

Esta ecuación es considerada la derivada covariante de una función $A = A(x^\mu)$. Entonces tenemos otra manera de escribir la ecuación (1.18) por medio de sus derivadas covariantes.

$$u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = 0, \quad (1.20)$$

Esta expresión es un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, de segundo orden para localizar a una partícula en el espacio-tiempo en función del tiempo propio. Dada su posición y su cuadrivelocidad iniciales, estas ecuaciones pueden ser integradas numéricamente sin embargo podemos considerar casos simples en donde podemos encontrar su solución de manera analítica [18].

Por otra parte podemos relacionar la ecuación (1.18) con la función lagrangiana \mathcal{L} , para ello partimos del *Principio de mínima acción*, o también conocido como el Principio de Hamilton, el cual enuncia que:

De todos los posibles caminos por los que un sistema dinámico puede desplazarse de un punto a otro en un intervalo de tiempo específico, la trayectoria seguida es aquella que minimiza la diferencia entre las energías cinética $T = T(\dot{x}_i)$ y potencial $U = U(x_i)$. [27]

En términos del cálculo variacional podemos escribir el principio de Hamilton como:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0, \quad (1.21)$$

Donde sabemos que la diferencia entre estas energías es $\mathcal{L} = T - U = \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i)$. La lagrangiana es una función escalar de donde se puede obtener la evolución temporal, las leyes de conservación y otras propiedades importantes de un sistema dinámico, si hacemos uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange definidas por la expresión:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad (1.22)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para encontrar fácilmente las ecuaciones de las curvas geodesicas. Para demostrar este hecho podemos plantear el siguiente problema variacional, para el cuadrado de la longitud de una curva:

$$s = \int_A^B \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} dt, \quad (1.23)$$

Al resolver esta expresión podemos considerar que:

$$\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \quad (1.24)$$

Si sustituimos esta expresión en la ecuación (1.22) tenemos que:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) - \frac{d}{dt} (g_{\mu\beta} \dot{x}^\beta) = 0, \quad (1.25)$$

si usamos la simetría del tensor métrico y usando la definición de los símbolos de Christoffel, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\ddot{x}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0. \quad (1.26)$$

Lo que nos lleva a la ecuación de las geodésicas descrita por (1.18). Esto quiere decir que las ecuaciones de Lagrange para el movimiento de una partícula sobre una superficie es la misma que las ecuaciones de Euler-Lagrange para las geodésicas, lo que me permite describir el movimiento y sus cantidades conservadas.

Como ejemplo, nosotros podemos considerar un flujo estacionario, utilizando la ecuación (1.20) y considerando el límite Newtoniano, donde la velocidad de las partículas, en cualquiera de sus componentes, es mucho menor a la velocidad de la luz, podemos reducir la ecuación de las geodésicas a la **ecuación de Euler** para los fluidos:

$$\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (1.27)$$

Esta ecuación se verá con más detenimiento en los capítulos posteriores, pues es una de las bases para resolver el problema que presentamos en este trabajo, pero antes necesitamos más información acerca de la física de fluidos que mencionaremos más adelante.

1.2. Movimiento de un fluido.

Al considerar el principio de Equivalencia podemos deducir que el campo gravitacional es consecuencia de la curvatura del espacio, sin embargo aun no sabemos la razón por la que existe esta curvatura, como hemos visto la fuerza de gravedad newtoniana esta definida por la masa de los objetos, lo que nos lleva a suponer que la materia es lo que curva al espacio, sin embargo, no es la única fuente de curvatura.

La relatividad especial nos enseña que la masa de un objeto es una de las posibles manifestaciones de energía y es posible convertir una cosa a otra, a través de la relación $E = mc^2$. En general, la gravedad se acopla a cualquier tipo de energía y momento en el espacio-tiempo, incluido la energía de cualquier tipo de campos presentes o de la propia curvatura del espacio. Entonces lo que necesitamos es describir la energía, la masa y el momento de la materia de una manera conveniente, para ello consideramos un sistema continuo en el espacio-tiempo, el cual puede ser un *fluido perfecto*. Es así que podemos definir para un fluido el **Tensor de Energía-Momento**

$$T^{\mu\nu} \equiv (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (1.28)$$

Lo primero que notamos es que $T^{\mu\nu}$ es simétrico, y que la densidad (ρ), la presión (p) y la cuadri-velocidad (u^μ) caracterizan a cualquier fluido.

Muchos de los sistemas físicos macroscópicos, incluyendo el Universo mismo, puede ser considerado como un fluido perfecto, pero antes que nada vamos a considerar el caso en donde el fluido no tiene presión el cual es llamado en relatividad como **Polvo**.

Entonces para poder describir su movimiento necesitamos dos ecuaciones fundamentales: la **Ecuación de continuidad** y la **conservación de la energía** [22]. Como sabemos la materia no se crea ni se destruye, lo que implica que el flujo que pasa a través de una superficie cerrada S se conserva durante toda su trayectoria, es decir,

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad (1.29)$$

Si aplicamos el teorema de Gauss $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ llegamos a la expresión:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0, \quad (1.30)$$

Esta ecuación es la forma diferencial de la ecuación de continuidad, una de las expresiones más importantes de la Física, el primer término representa la variación de masa por unidad de tiempo y volumen a través de la superficie mientras que el segundo factor es la masa que sale a través de la superficie de un volumen que contiene a un cierto punto del espacio.

Ahora bien si utilizamos la definición de **vector de flujo** como $\vec{j} = \rho_0 \vec{v}$ y a la ecuación de continuidad, en coordenadas cartesianas, podemos llegar a una expresión para el **cuadrivector de flujo**,

$$j^\mu = \rho_0 u^\mu, \quad (1.31)$$

y reescribir a la ecuación de continuidad como

$$j^\mu{}_{;\mu} = 0. \quad (1.32)$$

Esta ecuación es válida en un sistema de referencia plano, por lo tanto, es válida en todos los sistemas de referencia, gracias a la derivada covariante

En el caso sin presión y en presencia de un potencial gravitatorio. Las partículas al moverse libremente en el espacio curvo, generalizan al movimiento de los fluidos. Al considerar el tensor energía-momento definido por la ecuación:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu, \quad (1.33)$$

Desarrollamos la derivada covariante y al sacarle la divergencia e igualarla a cero $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, reescribimos la expresión como

$$u^\mu (\rho_0 u^\nu)_{;\nu} + \rho_0 u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = 0, \quad (1.34)$$

Pero el primer sumando se anula por la conservación del flujo (1.32), por lo que la divergencia del tensor igualada a cero nos da la siguiente expresión:

$$(\rho_0 u^\mu)_{,\mu} = 0, \quad (1.35)$$

Si desarrollamos la derivada podemos escribir:

$$(\rho_0 c)_{,0} + (\rho_0 u^i)_{,i} = 0, \quad (1.36)$$

Por ultimo podemos denotar esta ultima expresión como:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 v) = 0, \quad (1.37)$$

La cual define a la ecuación de continuidad. De este modo, nos convencemos de que el tensor dado por la ecuación (1.33), junto con la ecuación de continuidad, describen a un fluido sin presión [17].

Agregar un término que, en el límite newtoniano, de el término de presión en las ecuaciones de Euler, $\vec{\nabla} p / \rho_0$, es directo, basta con añadirle al de polvo un término con presión, p sin embargo hay que sumarlo también en el término de la densidad. De tal forma obtenemos la expresión descrita en (1.28).

Sabemos que al tomar la divergencia aparecerá un término $p_{,\nu} g^{\mu\nu}$ que, al considerar una presión que sea independiente del tiempo, nos llevará en el límite newtoniano (también se debe considerar que el término de la presión es muy pequeño comparado con la densidad) a tener sumado al término de las geodésicas, un término con $\vec{\nabla} p$. Finalmente, al dividir entre la densidad, ρ_0 , recuperamos las ecuaciones de Euler con todo y término de presión.

Sin embargo, para obtener una expresión que describa un fluido perfecto se modifica el primer coeficiente del tensor dado por ecuación (1.28) obteniendo:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 c^2 h \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + p g^{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

Con ρ_0 la densidad de energía en reposo, h la entalpía por unidad de energía, definida como $h = 1 + \epsilon + \frac{p}{c^2 \rho_0}$, con ϵ la energía interna y p la presión, dejamos explícitos los términos con la velocidad de la luz para enfatizar a las unidades. La expresión (1.38) es el tensor de energía esfuerzos del fluido perfecto, la cual al aplicarsele la divergencia debe cumplir que $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, si desarrollamos la derivada covariante del lado derecho obtenemos la siguiente expresión:

$$\rho_0 c^2 h \frac{u^\mu{}_{;\nu} u^\nu}{c^2} + \left(\rho_0 c^2 \epsilon_{,\nu} - p \frac{\rho_{0,\nu}}{\rho_0} + p_{,\nu} \right) \frac{u^\nu}{c} \frac{u^\mu}{c} + p_{,\nu} g^{\mu\nu} = 0. \quad (1.39)$$

Donde recordemos que ρ_0 , ϵ y p son escalares, su derivada covariante se reduce a la usual. Ahora, contraemos con u_μ y consideramos que $u_\mu u^\mu{}_{;\nu} = 0$ obtenemos:

$$\left(\rho_0 c^2 \epsilon_{,\nu} - p \frac{\rho_{0,\nu}}{\rho_0} \right) u^\nu = 0, \quad (1.40)$$

Usando esta ecuación de regreso tenemos que la podemos reescribir como

$$\frac{u^\mu{}_{;\nu} u^\nu}{c^2} + \frac{p_{,\nu}}{\rho_0 c^2 h} \left(g^{\mu\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) = 0. \quad (1.41)$$

Que es, finalmente, la ecuación generalizada de Euler para fluidos perfectos con presión y energía interna, totalmente covariante. En efecto, notemos inicialmente que no son cuatro ecuaciones, ya sólo son tres independientes, pues, al contraer con u_μ queda idénticamente igual a cero. Segundo, el término $\rho_0 c^2 h = \rho_0 c^2 (1 + \epsilon) + p = \mu c^2 + p$, donde hemos definido a

$$\mu = \rho_0 (1 + \epsilon), \quad (1.42)$$

como la densidad total de energía. En la física newtoniana, el término de presión es mucho menor que el término de densidad por la velocidad de la luz al cuadrado. Esta es una de las razones de mantener unidades, poder tener intuición de los órdenes de magnitud de las cantidades físicas. Este término de presión será significativo sólo en condiciones de muy altas presiones, como en una estrella de neutrones; en los casos usuales, se puede despreciar. Así mismo, el término $\frac{u^\mu u^\nu}{c^2}$ en general se puede despreciar frente al término de la métrica; el que podría pintar es la componente 00, pero, como en el caso newtoniano consideramos que la presión no depende del tiempo, este término es cero, por lo que la ecuación (1.41), en el límite newtoniano se reduce a $u^\mu{}_{;\nu} u^\nu + \frac{p_{,\nu}}{\mu} g^{\mu\nu} = 0$, que ya sabemos que nos llevará a las ecuaciones de Euler usuales, con μ representando a la densidad newtoniana, pero sabemos que incluye la densidad en reposo, ρ_0 y una densidad de energía interna, $\epsilon \rho_0$.

Por último, como $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, son cuatro ecuaciones, y ya vimos que incluye la generalización covariante de las tres ecuaciones de Euler (tres, pues es una ecuación vectorial). Entonces para ver la cuarta ecuación, regresamos a la expresión que también obtuvimos de pedir que se anulara la divergencia, la ecuación (1.40). Considerando que $a_{,\nu} u^\nu = \frac{da}{d\tau}$, cuando a es una función de las coordenadas, entonces podemos reescribir dicha ecuación como

$$m c^2 \frac{d\epsilon}{d\tau} + p \frac{d\left(\frac{m}{\rho_0}\right)}{d\tau} = 0,$$

donde re acomodamos un poco y multiplicamos por una masa característica del sistema, la masa de cada partícula de fluido, por ejemplo. Pero $d\left(\frac{m}{\rho_0}\right) = dV$, con V un volumen característico del sistema. Como τ es un parámetro, puedo entonces escribir esta ecuación como

$$dU + p dV = 0, \quad (1.43)$$

donde definimos a $U = m c^2 \epsilon$. Pero esta es la energía interna del sistema, por lo que podemos ver que recuperamos la primera ley de la termodinámica para procesos adiabáticos, $dQ = 0$.

De este modo, vemos que la divergencia igual a cero del tensor de energía esfuerzos del fluido perfecto contiene a la generalización covariante de las ecuaciones de Euler, así como a la de la primera ley de la termo, implicando que los procesos descritos por estos fluidos, son adiabáticos.

1.3. Potencial gravitacional.

A partir de la ecuación para la métrica de Minkowski y la ecuación de las geodésicas podemos encontrar una expresión para el potencial gravitacional, para ello suponemos que tenemos un sistema coordenado descrito por el tensor [12]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.44)$$

Donde el tensor $h_{\mu\nu}$ es pequeño pero no tanto como para ser despreciable el cual consideramos como el campo gravitacional y $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor metrico en coordenadas cartesianas descrito por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

A partir de esta definicion de $g_{\mu\nu}$ podemos encontrar una aproximacion Newtoniana para la ecuacion de las geodésicas, valida para una partícula cuyas componentes de la velocidad dx^i/dt ($i=1,2,3$) son pequeñas comparadas con c . Si consideramos un campo gravitacional cuasi-estatico de tal modo que podemos escribir $\partial_0 h_{\mu\nu} \equiv c^{-1} \partial h_{\mu\nu} / \partial t$ es despreciable comparado con $\partial_i h_{\mu\nu}$.

Si en lugar del tiempo propio τ usamos el tiempo coordenado t como un parámetro, entonces la ecuación de las geodésicas para una partícula libre tiene la forma:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = h(t) \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (1.45)$$

donde

$$h(t) \equiv -\frac{d^2 t}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} = \frac{d^2 \tau}{dt^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1}, \quad (1.46)$$

Si dividimos la ecuación (1.45) entre c^2 , la parte espacial de dicha expresión puede ser reescrita

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i + \left(\frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) \left[2\Gamma_{0j}^i + \Gamma_{jk}^i \left(\frac{1}{c} \frac{dx^k}{dt} \right) \right] = \frac{1}{c} h(t) \left(\frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \right), \quad (1.47)$$

Donde vemos que el ultimo termino es despreciable. Dado que el valor para $h^{\mu\nu}$ es igual a $\eta^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\rho} h_{\sigma\rho}$ entonces el calculo se simplifica, considerando la definición de los símbolos de Christoffel podemos encontrar que, en primer orden,

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00},$$

$$\Gamma_{0j}^i = -\frac{1}{2}\delta^{ik}(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}), \quad (1.48)$$

A partir de la ecuación (1.47) podemos llegar a la siguiente expresión:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}, \quad (1.49)$$

De la cual podemos encontrar que $d\tau/dt = (1 + h_{00})^{1/2} = 1 + 1/2h_{00}$. Si multiplicamos por la masa a esta última ecuación llegamos a que puede ser escrita de la forma:

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -m\delta^{ij} \partial_j \left(\frac{1}{2}c^2 h_{00}\right) + mc\delta^{ik}(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}) \frac{dx^j}{dt}, \quad (1.50)$$

Vemos que el término de la izquierda, es la segunda ley de Newton (1.1), así que los términos del lado derecho es la fuerza gravitacional de una partícula, por el principio de equivalencia. El primer término podemos interpretarlo como la fuerza debida a un potencial Φ , el cual definimos como:

$$\Phi = -\frac{1}{2}c^2 h_{00}, \quad (1.51)$$

Mientras que el segundo término es la velocidad de rotación. Sin embargo nosotros consideraremos un sistema no rotante, cuasi-estático lo que nos permite aproximar

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\delta^{ij} \partial_j \Phi, \quad (1.52)$$

Donde

$$\Phi = -\frac{1}{2}c^2 h_{00} + \text{constante}, \quad (1.53)$$

Esta es la ecuación Newtoniana del movimiento para una partícula moviéndose en un campo gravitacional de potencial Φ , con esto podemos escribir:

$$g_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2} + \text{constante}, \quad (1.54)$$

al escoger la constante igual a 1, llegamos a la expresión:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \quad (1.55)$$

Esta ecuación relaciona g_{00} y el potencial newtoniano Φ .

1.4. Ecuaciones de Einstein.

Como sabemos el Principio de Equivalencia nos permite considerar a la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio, lo que nos proporciona una propiedad geométrica del espacio-tiempo además tenemos que la fuente

de esta curvatura es la materia descrita por el tensor de energía-momento. La relación que existe entre ellas es descrita por las Ecuaciones de Einstein las cuales nos permiten describir como la materia le dice al espacio cómo curvarse y el espacio le dice a la materia cómo moverse. Hasta el momento las pruebas experimentales y observacionales han tenido una extraordinaria precisión, esta teoría describe de una manera correcta la existencia de objetos exóticos como las estrellas de neutrones, hoyos negros y el modelo cosmologico de la Gran Explosión.

Para poder entender la relación que existe entre el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ y la curvatura del espacio-tiempo usamos la siguiente expresión:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.56)$$

Donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein el cual describe la curvatura del espacio, ademas consideramos κ como una constante de proporcionalidad. Lo que necesitamos es encontrar la forma del tensor $G_{\mu\nu}$, para ello es necesario que este tensor sea simétrico y diferenciable para que concuerde con el tensor de energía-momento, asimismo debe ser un objeto puramente geométrico por lo tanto debe ser una función solamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas. Para que estas propiedades se cumplan debemos tener en cuenta el tensor de Riemann descrito en su forma covariante por $R_{\beta\nu\lambda\rho} = g_{\beta\alpha} R_{\sigma\lambda\nu}^{\alpha}$, con el cual podemos definir al tensor de Ricci [31], el cual es una contracción de dicho tensor $R_{\nu\rho} = R_{\nu\alpha\rho}^{\alpha}$, al cual podemos volver a contraerlo para obtener el escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Con estas definiciones podemos reescribir la ecuacion (1.56) como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \alpha g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.57)$$

Con α constante y Λ es conocida como la *constante cosmologica*. Un hecho importante que podemos considerar es cuando tenemos un espacio plano, lo que significa que $\Lambda = 0$ y donde $G_{\mu\nu} = 0$, esto permite que la expresión anterior satisfaga la ecuación de conservación:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (1.58)$$

Y en consecuencia tenemos que $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, esto implica que la constante $\alpha = -1/2$. Al reescribir la ecuación (1.57) llegamos a que:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (1.59)$$

La cual es conocida como la Ecuación Bianchi-Einstein, la cual podemos sustituirla en la expresicon (1.56) para obtener la siguiente relacion

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.60)$$

Calculamos el tensor de curvatura el cual nos da como resultado $R = -\kappa T$ donde $T \equiv T_{\nu}^{\nu}$ entonces con esto podemos llegar a la siguiente ecuacion:

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}), \quad (1.61)$$

Esta expresión nos permite obtener la magnitud de κ por medio de la relación que existe entre la Relatividad General y la Física Newtoniana [21]. Para ello consideramos un campo débil y estático, lo que implica que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y que las velocidades involucradas son mucho menores a la de la luz, en donde la distribución de partículas nos permite considerar que $p/c^2 \ll \rho$, lo que nos lleva a escribir al tensor de energía-momento (1.33) como:

$$T_{00} = \rho c^2, \quad (1.62)$$

Si tomamos la ecuación (1.61) y consideramos solo la componente 00 llegamos a la expresión:

$$R_{00} = k(\rho - \frac{1}{2}c^2 g_{00}), \quad (1.63)$$

Donde sabemos que $u_0 \approx 0$ y también $g_{00} \approx 1$ así que obtenemos:

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\kappa\rho c^2, \quad (1.64)$$

Si tomamos el Tensor de Riemann en términos de los símbolos de Christoffel:

$$R_{00} = \partial_0\Gamma_{0\mu}^\mu - \partial_\mu\Gamma_{00}^\mu + \Gamma_{0\mu}^\nu\Gamma_{\nu 0}^\mu - \Gamma_{00}^\nu\Gamma_{\nu\mu}^\mu, \quad (1.65)$$

Recordemos que estamos considerando un campo débil tenemos que $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ es pequeño lo que nos permite despreciar los dos últimos términos de la expresión anterior, lo que nos lleva a que:

$$R_{00} \approx -\partial_i\Gamma_{00}^i \quad (1.66)$$

Donde $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j g_{00}$ entonces podemos reescribir la ecuación (1.64) como:

$$-\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} \approx -\frac{1}{2}\kappa\rho c^2 \quad (1.67)$$

Dado que $\delta^{ij}\partial_i\partial_j = \nabla^2$ y de la ecuación (1.55) $g_{00} = -(1 + 2\Phi/c^2)$, donde Φ es el potencial gravitacional lo que nos da la expresión:

$$\nabla^2\Phi \approx \frac{1}{2}\kappa\rho c^4 \quad (1.68)$$

Al comparar esta expresión con la ecuación de Poisson en la mecánica clásica dada por:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (1.69)$$

Podemos concluir que $\kappa = 8\pi G/c^2$ por lo tanto usando este hecho podemos reescribir la ecuación (1.56) como:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.70)$$

Esta expresión representa un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales en 4 dimensiones, acopladas y no lineales. Escritas en su forma más general estas ecuaciones poseen miles de términos. Debido a esta complejidad, soluciones exactas se conocen sólo en situaciones con alto grado de simetría. Una ejemplo de este tipo de soluciones lo presenta Schwarzschild en 1916 y es la primera y mas importante solución exacta de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

1.5. Solución de Schwarzschild.

La solución de Schwarzschild es llamada así en honor al físico alemán Karl Schwarzschild (1873 1916), que encontró la solución exacta, un poco más de un mes después de la publicación de la teoría de la relatividad general de Einstein. Fue la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein que no sean la solución trivial espacio plano. Schwarzschild murió poco después de que se publicase su trabajo, como consecuencia de una enfermedad que contrajo durante su servicio en el ejército alemán durante la Primera Guerra Mundial.

Esta solución es considerada el más importante logro de la Relatividad General, ya que nos permite realizar cálculos de muchos fenómenos físicos presentes en la naturaleza [23]. Por ejemplo: la precesión de las órbitas planetarias, la deflexión de la luz alrededor del sol, el corrimiento al rojo de la longitud de onda, las estrellas de neutrones y los hoyos negros, entre otros. El punto de partida para encontrar la expresión de la métrica de Schwarzschild es considerar un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico, entonces a partir de la ecuación (1.6) escrita en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -e^A c^2 dt^2 + e^B dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (1.71)$$

Donde A y B son funciones de r solamente, las cuales pueden ser determinadas por las ecuaciones de campo. Para ello tomamos las componentes métricas siguientes:

$$g_{00} = -e^A, \quad g_{rr} = e^B \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \text{sen}^2 \theta,$$

La métrica es diagonal así que $g^{ij} = 1/g_{ij}$. Al calcular los símbolos de Christoffel para los términos no nulos y usando las componentes no triviales del tensor de Riemann escrito de la forma y obtenemos las componentes del tensor de Ricci $R_{\beta\delta} = R_{\beta\alpha\delta}^\alpha$, obtenemos:

$$R_{00} = -e^{A-B} \left[\frac{1}{2}A'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}(A')^2 + A'/r \right], \quad (1.72)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{2}A'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}A' - B'/r, \quad (1.73)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-B} \left[1 + \frac{1}{2}r(A' - B') \right] - 1, \quad (1.74)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \text{sen}^2\theta, \quad (1.75)$$

Donde la prima denota la derivada con respecto a r, dado que estamos considerando las ecuaciones de campo en el vacío necesitamos que $R_{\mu\nu} = 0$ para todos los índices, usando las expresiones (1.72) (1.73) nos lleva a la relación: $A' = -B'$. Al integrarla nos queda $A + B = k$, con k constante. Tomamos la ecuación (1.71) y realizamos un simple cambio en la escala de tiempo dado por

$t \rightarrow e^{-k/2}t$ lo que me permite tomar a $k = 0$ y por lo tanto $A = -B$. Con la ecuación (1.74) podemos escribir

$$e^A(a + rA') = 1, \quad (1.76)$$

Cuya solución es:

$$e^A = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (1.77)$$

Donde m es una constante. Si combinamos esto con el hecho de que $A = -B$ obtenemos

$$g_{00} = -e^A = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (1.78)$$

$$g_{rr} = e^B = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (1.79)$$

De tal forma que la ecuación (1.71) nos queda de la siguiente forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (1.80)$$

Esta métrica es válida para un campo débil a grandes distancias del origen, recordemos que el potencial gravitacional en este tipo de campo, es:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \quad (1.81)$$

La cual podemos relacionar con la ecuación para el potencial (1.55), lo que me permite definir la magnitud de la constante $m = GM/c^2$. En conclusión la Métrica de Schwarzschild está descrita por la ecuación:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (1.82)$$

De esta relación podemos notar que los componentes de la métrica no dependen del tiempo por lo tanto esta métrica es estática como habíamos supuesto desde un principio. Este resultado puede ser aplicado para una estrella de neutrones o un hoyo negro mientras mantenga la simetría esférica.

A partir de la forma de la ecuación de la métrica de Schwarzschild es claro que el factor $2GM/rc^2$ es una importante medida del efecto de la masa sobre la curvatura del espacio-tiempo. Si consideramos $2GM/rc^2$ menor a la unidad, la curvatura es pequeña y en general los efectos relativistas son despreciables, pero por otro lado si $2GM/rc^2$ es aproximadamente 1 los efectos relativistas predominan, este fenómeno se presenta principalmente en los hoyos negros. Si tomamos en cuenta los componentes métricos reescritos en términos del potencial gravitacional $\Phi = -GM/r$, lo que nos lleva a la conclusión de que las fuerzas gravitacionales pueden ser interpretadas como la consecuencia de la curvatura

del espacio-tiempo.

Para valores pequeños de GM/rc^2 el elemento de línea puede ser considerado el del espacio-tiempo plano en coordenadas esféricas y donde r representa la distancia radial, podemos definir entonces:

$$x^0 = ct, \quad x^r = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad x^\theta = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad x^\phi = r \cos \theta, \quad (1.83)$$

Podemos obtener el elemento de línea cuya métrica está dada por la ecuación $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde a valores grandes de GM/rc^2 tenemos que $h_{\mu\nu}$ es muy pequeña, lo que implica que $h_{00} = -2GM/rc^2$. Ahora tomamos las ecuaciones (1.52) y (1.55) de la sección anterior para obtener la relación:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi; \quad \text{donde } \vec{r} = (x^0, x^r, x^\theta, x^\phi), \quad (1.84)$$

$$\vec{F} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}. \quad (1.85)$$

La expresión anterior representa la Ley de la Gravitación Universal por lo que podemos concluir nuevamente que para partículas que se mueven con una velocidad mucho menor a la de la luz, la Relatividad General se reduce a las ecuaciones de la mecánica clásica. En este caso la solución de Schwarzschild nos proporciona una aproximación a la Fuerza Gravitacional lo que nos permite describir las órbitas de las partículas al moverse en el campo bajo ciertas condiciones.

1.6. Trayectoria de una partícula: Caída Libre.

El estudio de las trayectorias en la métrica de Schwarzschild nos permite encontrar las leyes de conservación de la energía y del momento angular, esto se debe a que la métrica es independiente del tiempo y esféricamente simétrica. Si consideramos el lagrangiano en términos de esta métrica tenemos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.86)$$

Donde $d\Omega = \dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2$. Observamos que la ecuación anterior es independiente de t y de ϕ al utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange dadas por la expresión

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (1.87)$$

Podemos encontrar que el momento se conserva debido a la simetría que estamos usando

$$l_\phi = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}, \quad (1.88)$$

Y la energía también se conserva gracias a que la métrica es independiente del tiempo, lo que nos lleva a la siguiente ecuación:

$$\mathcal{E} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (1.89)$$

Estas ecuaciones de movimiento se cumplen de manera general para una partícula que está sujeta a una fuerza gravitacional, en secciones posteriores realizaremos un desarrollo más detallado de cómo llegar a estas expresiones considerando cualquier métrica esféricamente simétrica. Es importante notar que los valores de $G = c = 1$ para facilitar las expresiones y cálculos siguientes.

La conservación del momento angular implica que las órbitas se encuentran sobre un plano, como lo hacen las órbitas en la teoría Newtoniana. Sin embargo al tener caída libre consideramos las componentes espaciales de la quadri-velocidad $d\phi/d\tau = 0$, lo que permite que las partículas se muevan sobre el plano meridional. Una vez establecido esto, es simple reorientar las coordenadas para que la partícula se mueva en el plano ecuatorial entonces $\theta = \pi/2$ así que la componente de la velocidad en $u^\theta = 0$.

Consideramos la normalización de la quadri-velocidad $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$, donde $u^\mu = dx^\mu/d\tau$. la cual puede ser integrada para encontrar las expresiones de sus tres componentes no nulas en términos de las constantes de movimiento E y l_ϕ , si reescribimos la expresión anterior usando la métrica de Schwarzschild, donde $\theta = 0$ y $\dot{\theta} = 0$, obtenemos:

$$-\left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\phi)^2 = -1, \quad (1.90)$$

Usando las ecuaciones (1.88) y (1.89), podemos reescribir la expresión anterior:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \mathcal{E}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l_\phi^2}{r^2} = -1, \quad (1.91)$$

Con un pequeño cambio podemos escribir esta ecuación para verificar que corresponde con la energía en el caso Newtoniano:

$$\frac{\mathcal{E}^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l_\phi^2}{r^2}\right) - 1 \right], \quad (1.92)$$

De tal forma donde $E \equiv (\mathcal{E}^2 - 1)/2$. Al reducir la expresión podemos encontrar el potencial efectivo para el movimiento radial, de acuerdo a la ecuación

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l_\phi^2}{r^2}\right) - 1 \right] = -\frac{M}{r} + \frac{l_\phi^2}{2r^2} - \frac{Ml_\phi^2}{r^3}, \quad (1.93)$$

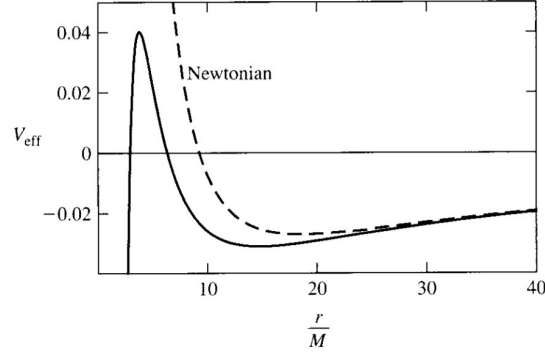


Figura 1.1: Los potenciales efectivos relativista y newtoniano para un movimiento radial [13], observamos como a mayor distancia ambos potenciales son similares pero para distancias menores la diferencia radica en que el potencial newtoniano diverge, mientras que el relativista tiene una caída.

Si sustituimos en la ecuación (1.92) tenemos:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{eff}(r), \quad (1.94)$$

Al comparar la expresión para el potencial efectivo con el caso newtoniano el cual está definido por la ecuación:

$$V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l_\phi^2}{2r^2}, \quad (1.95)$$

El cual vemos que difiere por un factor de $-M l_\phi^2 / r^3$, cual tiene consecuencias importantes para la órbita. Si analizamos la ecuación (1.93) para valores grandes de r se aproxima al caso newtoniano, sin embargo cuando r decrece el término $1/r^3$ toma un papel importante en la trayectoria de la partícula. En el caso relativista el potencial efectivo tiene dos valores importantes un máximo y un mínimo los cuales podemos encontrar resolviendo $dV_{eff}/dr = 0$, mientras que el caso newtoniano diverge para valores muy pequeños de r Fig. (1.1).

$$r_m = \frac{l_\phi^2}{2M} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{M}{l_\phi} \right)^2} \right]. \quad (1.96)$$

Si consideramos que $l_\phi/M < \sqrt{12}$ observamos que existe una barrera de potencial con una altura máxima sin embargo si consideramos el potencial newtoniano

dicha barrera es infinita.

Como estamos considerando la caída radial de una partícula podemos suponer que el infinito dicha partícula se encuentra en reposo lo que me permite considerar inicialmente los valores $dt/d\tau = 1$ y $\mathcal{E} = 1$. A partir de la ecuación (1.89), en consecuencia $E = 0$. Al sustituir estos valores en la expresión de la energía (1.94), teniendo en cuenta que $l_\phi = 0$, obtenemos:

$$0 = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{M}{r}, \quad (1.97)$$

La cual nos da la componente radial de la cuadri-velocidad $dr/d\tau$. Tomamos la componente del tiempo $dt/d\tau$ dada por la ecuación (1.89), entonces:

$$u^\mu = \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, - \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2}, 0, 0 \right), \quad (1.98)$$

Reescribimos la ecuación (1.97) de tal forma que $r^{1/2}dr = -(2M)^{1/2}d\tau$ Integrando ambos lados de la ecuación el resultado es:

$$r(\tau) = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} (2M)^{1/3} (\tau_* - \tau)^{2/3}, \quad (1.99)$$

Donde τ_* es una constante de integración arbitraria que arregla el tiempo propio cuando $r = 0$. A partir de la ecuación anterior, la conservación de la energía y de la ecuación (1.97) llegamos a:

$$v(r) = \frac{dt}{dr} = - \left(\frac{2M}{r} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, \quad (1.100)$$

Mientras que la expresión de la velocidad clásica es $\tilde{v}(r) = (2M)^{1/2}/r^{1/2}$. estas expresiones muestran que al disminuir r desde el infinito $v(r)$ aumenta hasta alcanzar un máximo valor, después del cual la velocidad disminuye, y cuando $v(r) \rightarrow 0$ entonces $r \rightarrow 2M$. Por otro lado, cuando r decrece $\tilde{v}(r)$ aumenta pero cuando $\tilde{v}(r) \rightarrow \infty$ entonces $r \rightarrow 0$.

Es importante notar como la relatividad general es capaz de reproducir las ecuaciones de la Mecánica Clásica, bajo ciertas condiciones, por ello el problema que queremos discutir va más allá de las consideraciones que hemos tomado hasta el momento, por ello es fundamental el estudio de la Relatividad Numérica la cual nos permite dar una mayor aproximación al proceso de acreción de materia hacia un hoyo negro. En la siguiente sección daremos las bases de esta nueva teoría, la cual tiene como objetivo resolver las ecuaciones de Einstein.

Capítulo 2

Relatividad Numérica.

A principios del siglo XX fuimos testigos de una revolución del entendimiento de la gravitación. La teoría de Einstein cambio radicalmente el modo en que concebimos la gravedad y sus efectos, sin embargo, esta teoría requiere de la habilidad para resolver un sistema de 10 ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales las cuales gobiernan la estructura del espacio-tiempo y como vimos anteriormente solo eran posible resolverlas a través de problemas con alto grado de simetría. Pero a finales de siglo fuimos sorprendidos por las capacidades computacionales de los ordenadores los cuales fueron usados como una herramienta para el estudio de sistemas que eran imposibles de resolver analíticamente, gracias a las computadoras somos capaces de realizar simulaciones para demostrar la existencia de singularidades en un colapso gravitacional; la posible aparición de horizontes de eventos toroidales; propiedades genéricas indicadas de singularidades en contextos cosmológicos; proporciona una comprensión más precisa de a rapidez de las estrellas de neutrones y arroja luz sobre la estructura de las singularidades. Las mejoras continuas en la potencia de los ordenadores, junto con la experiencia adquirida en la simulación de las ecuaciones de Einstein señalar que, después de casi un siglo, estamos en el camino de la revelación lo que estas ecuaciones han, hasta ahora, mantenido oculto. Las simulaciones por ordenador son y serán cada vez más de una importancia crucial para dejarnos estudio de sistemas gravitando fuertemente como los que contienen las estrellas masivas y / o los hoyos negros.

La teoría de la Relatividad Numérica se desarrollo como un campo de investigación independiente a mediados de la década de los sesentas, comenzando con los esfuerzos pioneros de Hahn y Lindquist, pero no fue sino hasta finales de los setentas cuando las primeras simulaciones realmente exitosas fueron realizadas por Smarr y Eppley en el contexto de la colisión de frente de dos agujeros negros [15]. En esa época, sin embargo, el poder de las computadoras era aun muy modesto, y las simulaciones que podían realizarse se limitaban a problemas con simetría esférica, o a lo mas simetría axial a muy baja resolución. Esta situación ha cambiado, durante las décadas de los ochenta y noventas una verdadera re-

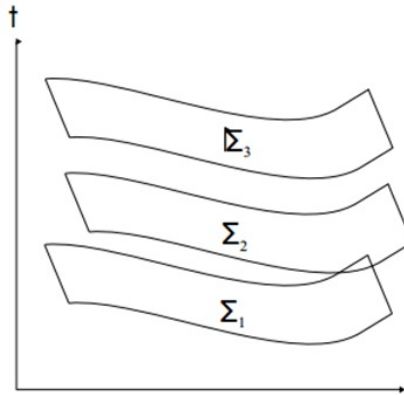


Figura 2.1: Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales.

volución tuvo lugar en el campo de la relatividad numérica. Problemas cada vez mas complejos en muy diversos aspectos de la teoría de la gravitación se han estudiado, desde la simulación de estrellas en rotación, al estudio de defectos topologicos, el colapso gravitacional y las colisiones de objetos compactos.

El estudio de los hoyos negros es uno de los logros de la relatividad numérica pero esto posee una complicación ya que los hoyos negros contiene regiones en el espacio-tiempo donde el campo gravitacional, la densidad de materia y la curvatura son infinitos, los cuales son llamados singularidades, entonces cuando se trata de estudiar este tipo de objetos es crucial elegir un método computacional que evita encontrarse en ese tipo de regiones en el curso de la simulación

Existen varios formalismos diferentes utilizados en la relatividad numérica. En cada caso, lo que debe hacerse es separar las ecuaciones de campo de Einstein de forma tal que podamos dar ciertas condiciones iniciales y a partir de ellas obtener la evolución del campo gravitacional. Los diferentes formalismos difieren en la forma especifica en que se hace esta separación. Aquel que utilizaremos para el análisis de nuestro problema es el llamado **formalismo 3 + 1**, en donde se hace una separación entre las tres dimensiones del espacio y el tiempo.

2.1. Formalismo 3+1 .

Para estudiar la evolución en el tiempo de cualquier sistema físico debemos considerar las condiciones iniciales y plantear las ecuaciones que puedan predecir de manera adecuada el desarrollo del sistema. En el caso de las ecuaciones de Einstein, el espacio y el tiempo son simétricos, esto nos permite separar estas variables considerándolas un problema de Cauchy, ha este proceso se le conoce

por el nombre de formalismo 3+1. [1]

Si consideramos un espacio-tiempo globalmente hiperbólico caracterizado por no poseer curvas temporaloides cerradas, lo que significa que no permite viajes hacia atrás en el tiempo pero puede ser foliado, es decir, separado en cortes tridimensionales apilados, de tal forma que cada hoja es una hipersuperficie tipo espacialoide, la cual en general no es única. Si denotamos a esta hipersuperficie como Σ_t de tiempo t . Definimos el parámetro t como aquel que identifica a las distintas hojas de la foliación, t puede considerarse entonces como un tiempo universal. Consideremos ahora una cierta foliación, tomemos dos hipersuperficies infinitesimalmente cercanas Σ_y y Σ_{t+1} , la geometría de la región del espacio-tiempo contenida entre ambas hipersuperficies puede determinarse a partir de los siguientes parámetros:

1. La métrica tridimensional que mide las distancias dentro de la hipersuperficie misma:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (2.1)$$

2. El lapso de tiempo propio entre ambas hipersuperficies que mide un observador que se mueve en la dirección normal a ellas (observador de Euler)

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt \quad (2.2)$$

donde α se le conoce como “función de lapso”

3. La velocidad relativa entre los observadores de Euler y las líneas con coordenadas espaciales constantes:

$$x_{t+1}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j) dt \quad (2.3)$$

Con el vector β^i como el vector de corrimiento.

De acuerdo a las ecuaciones anteriores notamos que la foliación no es única y la manera en que se propaga el sistema de coordenadas espaciales de una hipersuperficie a otra tampoco lo es, es decir, el lapso α y el vector de corrimiento β^i son funciones que pueden especificarse libremente. Estas funciones determinan nuestro sistema de coordenadas y se conocen como funciones de norma y en términos de ellas podemos escribir la métrica:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (2.4)$$

donde $\beta_i = \gamma_{ij} \beta^j$. además tomando en cuenta las componentes del vector normal n^μ a las hipersuperficies dadas por las expresiones

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{-\beta^i}{\alpha} \right) \quad n_\mu = (-\alpha, 0), \quad n^\mu n_\mu = -1 \quad (2.5)$$

El cual por definición es la quadri-velocidad para un observador euleriano.

2.2. Curvatura extrínseca

Es importante notar que al formar la foliación del espacio tiempo y hablar de curvatura tenemos que considerar la geometría interna debido a estas hipersuperficies y aquella relacionada con la forma en que éstas se encuentran en el espacio-tiempo. La primera de estas curvaturas es la llamada **curvatura intrínseca** la cual está dada por el tensor de Ricci definido por los términos de la métrica γ_{ij} , y por otro lado tenemos la **curvatura extrínseca** en términos del vector normal n^α al transportarlo paralelamente de un sitio a otro de la superficie, sin embargo observamos que al realizar este transporte el vector resultante ya no es normal a la superficie, es por ello que definimos el tensor de curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}$ como una medida de este cambio del vector normal, para poder encontrar una expresión que describa este cambio consideramos el operador de proyección P_β^α determinado por:

$$P_\beta^\alpha := \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta \quad (2.6)$$

De tal forma que para cualquier vector v^α tenemos que:

$$(P_\beta^\alpha v^\beta) n_\alpha = 0 \quad (2.7)$$

esto quiere decir que cualquier vector proyectado en la hipersuperficie es ortogonal a n_α , usando este operador el tensor de curvatura extrínseca se define como

$$K_{\alpha\beta} := -P\nabla_\alpha n_\beta \quad (2.8)$$

Donde P es la proyección de todos los índices libres a la hipersuperficie espacial, este tensor tiene la propiedad de $n^\alpha K_{\alpha\beta} = 0$ además de ser simétrico lo que implica que solo depende del espacio, es por ello que podemos considerar los subíndices i, j. Al sustituir la ecuación (2.5) en la definición de curvatura extrínseca (2.8) podemos definir en términos de la métrica espacial

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} (\partial_t \gamma_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i) \quad (2.9)$$

Considerando que D_i representa la derivada covariante con respecto a la métrica espacial. A partir de esta ecuación podemos reescribirla como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (2.10)$$

Lo cual relaciona el cambio en el tiempo de la métrica espacial con la curvatura extrínseca, es decir, esta ecuación es la ecuación de evolución para γ_{ij} sin embargo lo que hemos trabajado los conceptos de geometría pero es imprescindible utilizar las ecuaciones de campo de Einstein para obtener una mejor ecuación de evolución para K_{ij} .

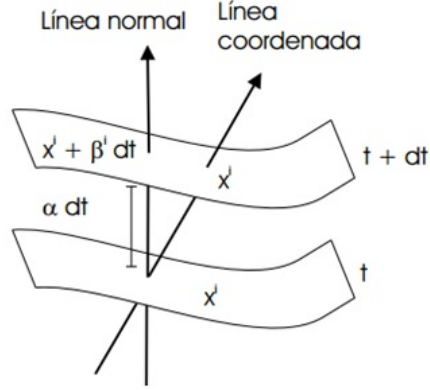


Figura 2.2: Dos hipersuperficies adyacentes. En la figura se muestra las definiciones de la función de lapso y el vector de corrimiento

2.3. Las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1

Si nosotros utilizamos el operador de proyección para separar las ecuaciones de Einstein en 3 grupos dependiendo de la proyección que se realice. Uno de los resultados que es necesario encontrar es la ecuación de evolución para este tensor, la cuál nos dará la información dinámica del un sistema físico, para ello necesitamos utilizar el operador de proyección definido en la sección anterior por la ecuación (2.6) y al el vector normal a las hipersuperficies n^α [11]. Si realizamos una proyección normal a las ecuaciones de Einstein de tal manera que:

$$n^\alpha n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0 \quad (2.11)$$

A partir de esta ecuación y después de algunos pasos algebraicos podemos reescribir la esta ecuación como:

$${}^3R + (\gamma^{ij} K_{ij})^2 + K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho \quad (2.12)$$

Donde $R^{(3)}$ es el escalar de curvatura y $trK = \gamma^{ij} K_{ij}$ es la traza del tensor de curvatura y ρ es la densidad de energía $\rho := n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}$. Como podemos observar esta ecuación no tiene derivadas temporales por lo que podemos considerarla como una ecuación de constricción del sistema, la cual esta relacionada con la densidad de energía, es por ello que recibe el nombre de ecuación de **constricción Hamiltoniana**. [4]. Si ahora realizamos una proyección mixta a partir de:

$$P[n^\alpha (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta})] = 0 \quad (2.13)$$

de igual forma llegamos a la ecuación

$$\nabla_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K_{ij}) = 8\pi j^i \quad (2.14)$$

Con $j^i = P_\beta^i(n_\alpha T^{\beta\alpha})$ que representa el flujo de momento medido por los observadores de Euler, además observamos que esta expresión no depende de las derivadas temporales, por lo cual podemos obtener tres ecuaciones de **constricción de Momentos**. La existencia de estas ecuaciones de constricción significa que no podemos especificar de manera arbitraria las 12 cantidades dinámicas como condiciones iniciales. Es imprescindible que se satisfagan estas ecuaciones desde el inicio, en caso contrario no estamos resolviendo las ecuaciones de Einstein.

Por último consideramos una proyección de las ecuaciones de Einstein sobre la hipersuperficie, lo cual nos dará como resultado la dinámica de K_{ij} del sistema si consideramos que [3]:

$$P(G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0 \quad (2.15)$$

Esta expresión me da como resultado 6 ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^a D_a K_{ij} + K_{ia} D_j \beta^a + K_{ja} D_i \beta^a - D_i D_j \alpha + \\ & \alpha [R_{ij}^{\langle 3 \rangle} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} \gamma^{ij} K_{ij}] + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (tr S - \rho) - 2S_{ij}] \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $S_{ij} = P_i^\alpha P_j^\beta T_{\alpha\beta}$ es el tensor de esfuerzos. Si tomamos la ecuación (2.10) y la expresión anterior vemos que forman un sistema cerrado de ecuaciones de evolución, las cuales fueron desarrolladas por R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner o simplemente ecuaciones ADM.

Gracias a las identidades de Bianchi podemos asegurar que si las ecuaciones de constricción se satisfacen para condiciones iniciales, entonces se satisfacen en todo momento es decir, que las ecuaciones de evolución pueden propagar las constricciones. Ahora lo que necesitamos es elegir las condiciones iniciales de tal modo que se cumpla lo anterior para ello debemos resolver el problema de valores iniciales para obtener de manera apropiada aquellos γ_{ij}, K_{ij} que representen el problema que se desea estudiar.

Las constricciones forman un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales de tipo elíptico y en general son difíciles de resolver, sin embargo existen diversos métodos para hacerlo, el procedimiento más común que se utiliza se le conoce como “descomposición conforme” de York-Lichnerowicz. Este procedimiento parte de considerar una transformación de la métrica del tipo

$$\gamma_{ij} = \phi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad (2.17)$$

Donde la métrica $\tilde{\gamma}_{ij}$ se le conoce como métrica conforme [2]. Como hemos mencionado, en el formalismo 3+1 la elección del sistema de coordenadas está dada

en términos de las **variables de norma**: la función de lapso α y el vector de corrimiento β . Estas funciones aparecen en las ecuaciones de evolución (2.10) y (2.16) para la métrica y la curvatura extrínseca. Sin embargo, las ecuaciones de Einstein no nos dicen que valores deben tomar las variables de norma. Esto es lo que deberíamos esperar, pues es claro que las coordenadas deben poder elegirse libremente. Por un lado, nos permite elegir las cosas de manera que las ecuaciones se simplifiquen, o de manera que la solución sea mejor comportada. Por otro lado, surge inmediatamente la pregunta: ¿Cual es una buena elección de las funciones α y β ? Recuérdese que esta decisión debe tomarse incluso antes de comenzar la evolución. Existen, desde luego, infinitas elecciones posibles.

Otro valor que debemos considerar en primer lugar es la función de lapso, la cual nos determina como avanza el tiempo propio entre distintas hipersuperficies espaciales, es decir, determina como esta rebanado el espacio-tiempo en superficies de coordenada t constante. Debido a esto, a la elección del lapso se le llama comúnmente una **condición de foliación**. Antes de considerar diferentes condiciones de foliación, debemos mencionar un par de resultados que son muy importantes al hablar sobre este tema. En primer lugar, consideremos el movimiento de los observadores de Euler, es decir, aquellos que se mueven siguiendo las líneas normales a las hipersuperficies que forman la foliación. Note que no hay razón para suponer que estos observadores estén en caída libre, por lo que en general pueden tener lo que se conoce como una **aceleración propia** que mide la fuerza requerida para mantenerlos en una trayectoria diferente a la caída libre. Esta aceleración esta dada por la derivada direccional de la cuatro-velocidad de los observadores de Euler (el vector normal n^μ) a lo largo de si misma:

$$a^\mu = n^\nu \nabla_\nu n^\mu \quad (2.18)$$

vemos que esto involucra a la derivada covariante en 4 dimensiones ∇_μ . No es difícil mostrar que esta ecuación implica que la aceleración esta dada en términos de la función de lapso por

$$a_i = \partial_i \ln \alpha \quad (2.19)$$

Otra relación importante esta relacionada con la evolución de los elementos de volumen asociados a los observadores de Euler. El cambio de estos elementos de volumen en el tiempo esta dado por la divergencia de las velocidades de estos observadores $\nabla_\mu n^\mu$. Usando la definición de la curvatura extrínseca encontramos ahora

$$\nabla_\mu n^\mu = -tr K \quad (2.20)$$

es decir, el cambio de los elementos de volumen en el tiempo es la traza de la curvatura extrínseca. Si regresemos ahora al problema de como elegir la función de lapso. La manera mas obvia de elegir esta función es simplemente decidir que queremos que el tiempo coordenado t coincida en todo punto con el tiempo propio de los observadores de Euler. Esta elección corresponde a tomar $\alpha = 1$ en todo el espacio, y de la ecuación (2.19) vemos que en este caso la aceleración de los observadores de Euler es cero, es decir, están en caída libre y se mueven a

lo largo de geodésicas. Debido a esto, a esta elección se le conoce como foliación geodésica

2.4. Datos iniciales para hoyos negros.

Un hoyo negro es una región del espacio-tiempo que no puede comunicarse con el Universo exterior. el limite de esta región es una hipersuperficie de 3 dimensiones en el espacio-tiempo llamada la superficie del hoyo negro o el *horizonte de eventos*. Nada puede escapar desde el interior del hoyo negro, ni siquiera la luz. Las singularidades inevitablemente forman parte del estudio de estos objetos, las cuales están dentro del horizonte de eventos. La solución más general de las ecuaciones de Einstein para el hoyo negro estacionario es la métrica de Kerr-Newman, la cual esta especificada por tres parámetros: La masa M , el momento angular J y la carga Q del hoyo negro. Casos especiales son el de la métrica de Kerr ($Q = 0$), la métrica de Reissner-Nordstrom ($J = 0$) y la métrica de Schwarzschild ($J = 0, Q = 0$).

Esta última métrica la consideramos en el capítulo anterior dada por la ecuación (1.82). Escrito de esta forma la coordenada radial r esta relacionada con el área de una superficie esférica centrado en el hoyo negro de acuerdo con la expresión euclidiana $r = (A/4\pi)^{1/2}$. La solución de Schwarzschild mantiene una región en el vacío para cualquier espacio-tiempo esférico. Cuando $r < 2M$ el espacio-tiempo corresponde a un agujero negro vacío de masa M . El horizonte de eventos se encuentra en $r = 2M$ llamado el radio de Schwarzschild el cual se conoce como el límite estático y por último cuando $r > 2M$ los fotones tendrán longitud de onda infinita medida por un observador estático en el infinito.

En el capítulo anterior vimos que la métrica de Schwarzschild mantiene la energía y el momento angular constantes para una partícula en caída libre, si por otro lado consideramos las órbitas circulares de las partículas al caer hacia $r = 3M$, La energía y el momento angular de la partícula están dados por las ecuaciones:

$$\left(\frac{E}{\mu}\right)^2 = \frac{(r - 2M)^2}{r(r - 3M)}, \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{l}{\mu}\right)^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M}, \quad (2.22)$$

Las órbitas circulares cuando $r = 3M$ corresponde a las órbitas de los fotones cuando $(E/\mu \rightarrow \infty)$ las cuales son estables si $r > 6M$ e inestables cuando $r < 6M$. Lo que necesitamos es quitar la singularidad en la métrica $r = 2M$ por medio de una transformación de coordenadas, dejando invariante la curvatura

$$I = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (2.23)$$

Por ejemplo si consideramos la transformación $r = \bar{r}(1 + M/2\bar{r})^2$ la ecuación (1.82) nos lleva a la siguiente expresión:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] , \quad (2.24)$$

Donde \bar{r} se le conoce como la coordenada isotrópica y describe solo la región de la geometría de Schwarzschild con $r > 2M$. El horizonte de eventos del hoyo negro esta localizado en $\bar{r} = M/2$ [24].

La existencia de las constricciones en la Relatividad General implica que no es posible elegir de manera arbitraria las doce cantidades dinámicas (γ_{ij}, K_{ij}) como condiciones iniciales. Estas deben elegirse de tal modo que las constricciones se satisfagan desde el principio. Como sabemos las constricciones constituyen un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales elípticas; entonces una manera de resolver estas ecuaciones es el llamado procedimiento de York-Lichnerowicz [16] [5] el cual consiste en una descomposición conforme de la métrica y de la curvatura extrínseca Sin embargo, es posible encontrar soluciones sencillas si se revisa las ecuaciones de constricción.

De manera ilustrativa podemos dar solución a un problema en particular, el cual es considerar el caso en donde la métrica es conformemente plana y el momento de simetría temporal es $K_{ij} = 0$. en este caso las constricciones de momento se satisfacen de forma trivial lo que nos deja solo con la ecuación hamiltoniana la cual toma la forma:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.25)$$

La cual reconocemos inmediatamente como la ecuación de Laplace. Una solución puede ser considerada en espacio-tiempo asintóticamente plano, donde Φ tiende a cero lejos del campo gravitacional, en consecuencia en el infinito así que la solución mas sencilla de esta ecuación satisface la condición de frontera $\Phi = 1$, lo cual nos permite utilizar la métrica de Mikowski dada por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.26)$$

Pero la solución más interesante de la ecuación de constricción hamiltoniana que podemos considerar esta dada de la siguiente forma:

$$\phi = 1 + \frac{k}{r} \quad (2.27)$$

Con k una constante arbitraria, por lo que la métrica en coordenadas esféricas esta dada por:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k}{r} \right)^4 [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (2.28)$$

La cual nos describe a un hoyo negro de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas, donde la masa del agujero negro esta dada por $M = 2k$ [19]. Nuestro problema es considerar no solo aun hoyo negro si no a la materia que se encuentra alrededor de él y es absorbida, en los siguiente capitulo se explicara con mayor detalle dicho problema.

Capítulo 3

Programa OllinSphere2.

El programa OllinSphere2 esta diseñado para resolver las ecuaciones de campo de Einstein utilizando la formulación 3+1, esta compuesta por diversas subrutinas las cuales se elijen de acuerdo al sistema físico que se desea resolver. Como en cualquier programa que vamos a utilizar es importante conocer cada uno de los elementos que lo componen, las carpetas y los archivos necesarios para su funcionamiento, es por ello que en la siguiente sección daremos una breve explicación de aquellos que están relacionados directamente con el problema que se quiere resolver. Una vez familiarizados con los archivos comenzaremos a modificar nuestro código de tal manera que nos permita resolver el problema de acreción de materia hacia un hoyo negro. [28]

3.1. Archivos.

A continuación daremos una descripción breve de los archivos que utilizaremos al momento de utilizar nuestro código. Recordemos que este programa tiene diversas subrutinas ubicadas en varios archivos con un objetivo específico.

1. INITIAL.F90: En este archivo declaramos el nombre de todas las subrutinas que se han creado para el programa OllinSphere2, si nosotros creamos una nueva subrutina es importante colocar el nombre de la misma en este archivo, ya que al momento de compilar el programa busca todas las subrutinas que utilizara. A continuación se muestra un ejemplo

```
! *****  
! ***** NOMBRE *****  
! *****  
  
! Initial data for a black hole and a fluid spherical shell.  
  
if (idata=="NOMBRE") then
```

```

    if (contains(mattertype,"fluid").or.contains(mattertype,"dust")) then

        call idata_NOMBRE

    else

        print *, 'NOMBRE initial data needs fluid type matter ...'
        print *
        print *, 'Aborting!'
        print *
        call die

    end if

end if

```

2. PARAM.F90: Se declaran las variables, constantes o los valores fijos que vamos a utilizar a lo largo del programa, en este mismo archivo debemos de agregar el nombre de nuestra subrutina, para que el programa reconozca las nuevas cantidades, es importante notar que una letra solo puede ponerse una vez, por lo que es necesario antes de agregar algún parámetro verificar que no haya sido utilizado con anterioridad.

```

! *****
! ***  INITIAL DATA  ***
! *****

! idata:          Type of initial data.

character(30) :: idata = "minkowski" ! range=
(minkowski,schwarzschild,FRW,desitter,scarpulse,&
ghostpulse,complexpulse,nonminpulse, &
reissnernordstrom,boson,boson2,fluidboson,&
fluidshell,acrecion,TOV,jacobson,bhpulse, &
nonstatic_ghostpulse,vlasovbackgroundBH,&
scalarDMbackground,complexDMbg,complexDMpert,FRWdust)

! *****
! *****  NOMBRE  *****
! *****

C1:          #Constante 1
C2:          #Constante 2
C3:          #Constante 3

```



```

V1:          #Variable 1
V2:          #Variable 2
V3:          #Variable 3

valores1 :: 10 #Valor por default 1
valores2 :: 12 #Valor por default 2
valores3 :: 15 #Valor por default 3

```

3. IDATANOMBRE.F90: Los archivos "idata" son las subrutinas que debemos crear para resolver el problema de nuestro interés, en estos archivos utilizaremos los métodos numéricos necesarios para resolver el problema de manera inicial.
4. PARAMETROS.PAR: Por ultimo debemos tener en cuenta que algunos valores del problema los estaremos cambiando constantemente, por ejemplo el numero de puntos y el numero de pasos de tiempo que nosotros definamos para la solución del problema, para evitar modificar el archivo IDATA utilizaremos los archivos "NOMBRE.par" ya que en ellos podemos definir el valor de algunas de las variables que se utilizan además de definir los archivos de salida

Listo, ahora que conocemos un poco más de este programa vamos a aprender a compilar es muy fácil y rápido solo debemos de ubicarnos en la carpeta **OllinSphere2** y escribir: **make**. Esta orden nos compila un archivo **makefile** en el cual a su vez compila todas las rutinas que utiliza el programa dentro de cualquier subdirectorio, este reconocerá todos aquellos archivos que tengan extensión **F90** es por ello que debemos tener mucho cuidado con archivos que no este declarados en **INITIAL.f90** o en **PARAM.f90**.

Una vez compilado los archivos .F90, podemos correr el código OllinSphere2 para ello es necesario colocarse en el directorio **exe** y escribir desde la terminal: **./ollinsphere parametros.par**. De modo que el código leerá los datos del archivo de parámetros y creara un subdirectorio con los archivo de salida. con esto estaremos empezando a dar una solución al problema que necesitamos resolver, solo faltaría la interpretación de nuestros datos y la realización de pruebas de convergencia para obtener la validez de la solución.

Los archivos de salida que crea el programa tienen dos diferentes extensiones los **archivos.tl** que son conocidos como archivos '0D' los cuales muestran una gráfica fija, pues son cantidades escalares obtenidas a partir de los arreglos espaciales como función del tiempo, mientras que los archivos.rl son aquellos que presentan un movimiento conforme el tiempo computacional que utilizamos, a estos archivos se les conoce como archivos '1D' éstos contienen los arreglos espaciales completos a distintos tiempos.

PRECAUCION : Este tipo de archivo son bastante pesados, por lo

que necesitamos tener cuidado al momento de ir corriendo el programa

3.2. Introducción al uso del programa OllinSphere2

Una vez que hemos entendido el funcionamiento del programa comenzaremos a resolver el problema que nos interesa, para ello vamos a hacer las modificaciones pertinentes y específicas.

Comenzaremos creando la subrutina que necesitamos para resolver el problema que planteamos en el capítulo anterior. En este definimos la densidad de materia dada por la ecuación, para este caso el programa tenía una subrutina similar a la que necesitamos la cual la modificamos de manera sencilla, esta subrutina resuelve la evolución para una distribución de un fluido inicialmente en reposo considerando la métrica conforme y la constricción hamiltoniana para un factor Φ , mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden. En ella incluimos la expresión para la densidad. Una vez hecho las modificaciones convenientes llamamos a este archivo **idata_acrecion.f90**. Para que el programa OllinSphere2 funciones, necesitamos definir esta subrutina en el archivo **initial.f90** en el cual agregaremos consideraremos que tipo de materia debemos considerar, como se muestra a continuación:

```
! *****
! ***  ACRETION  ***
! *****

! Initial data for a black hole and a fluid distribution.

if (idata=="acrecion") then

if (contains(mattertype,"fluid").or.contains(mattertype,"dust"))

then
  call idata_acrecion
else

  print *, 'Acretion initial data needs fluid type matter'
  print *
  print *, 'Aborting!'
  print *
  call die
```

```
end if
```

```
end if
```

Una vez hecho esto abrimos el archivo **param.f90** para agregar el nombre de la subrutina. En la sección ******INITIAL DATA****** se definen todas las subrutinas que ocupa el programa, de manera predeterminada esta definida por "minkowski" como se muestra en un ejemplo anterior, en la parte de "range =" agregamos nuestro archivo y agregamos las constantes y variables que utilizamos para resolver el problema:

```
! *****
! ***  FLUID  ***
! *****

! VARIABLES FOR DENSITY DISTRIBUTION

real(8) :: fluid_a0 = 0.d0
real(8) :: fluid_r0 = 0.d0
real(8) :: fluid_s0 = 1.d0

! VARIABLES FOR FLUID WITH PRESSURE

real(8) :: fluid_N = 1.5d0      ! 3/2, consistent with gamma=5/3
real(8) :: fluid_gamma = 1.6666 ! 5/3 for a monoatomic
                                non-relativistic gas.
real(8) :: fluid_kappa = 1.d0
real(8) :: fluid_q1 = 0.d0
real(8) :: fluid_q2 = 0.d0
real(8) :: fluid_atmos = 1.d-10

character(1000) :: fluid_method = "hlle"
                                ! range=(center,upwind,limiter,hlle)
character(1000) :: fluid_limiter = "vanleer"
                                ! range=(minmod,vanleer)

! TOV initial data:
!
! TOV_rho0:          Central density of the star.
! TOV_N:             Polytropic index.

real(8) :: TOV_rho0 = 0.001! CHECK IF THIS IS BROKEN, SEEMS NOT

! Accretion parameters
! It is considered a black hole and a density distribution,
! initially at rest
```

```

! maxf, minf, auxf
! const_1, const_2  values for the intial data of Psi

integer :: maxf = 0
integer :: minf = 0
integer :: auxf = 0
real(8) :: const_1 = 0.0
real(8) :: const_2 = 0.0
%
```

Una vez hecho esto solo queda crear el archivo de parámetros que utilizaremos y en el cual definiremos el números de pasos necesarios y el tamaño de la maya que empleamos.

```

# Test parameter file:
# Polvo sin curvatura del espacio-tiempo

# *****
# ***  GRID  ***
# *****

dr = 0.12 # Spatial interval. Grid spacing
Nr = 500 # Number of grid points

# *****
# ***  TIME STEPPING  ***
# *****

dtfac = 0.5 # Courant parameter (dtfac=dt/dr)
Nt = 2500 # Total Number of time steps

# *****
# ***  SLICING  ***
# *****

#slicing:      Type of slicing condition.
#ilapse:      Type of initial lapse:
#              one:          initial lapse equal to 1.
#              isotropic:   isotropic lapse for Schwarzschild data.
#              psiminus2:  alpha = 1/psi**2
#              psiminus4:  alpha = 1/psi**4

slicing = maximal # Type of slicing condition
              #(static,harmonic,1+log,maximal,shockavoid,isoreg,isotropic)
ilapse = isotropic # Type of initial lapse
              #(one,isotropic,isoreg,psiminus2,psiminus4)
```

```

# *****
# ***  EVOLUTION  ***
# *****

spacetime = background # dynamic,background
integrator = icn # Type of integration method (icn,rk4)
order = two # Order for spatial finite differencing (two,four)

# *****
# ***  BOUNDARIES  ***
# *****

boundtype = eigen # Type of boundary condition

# *****
# ***  HORIZONS  ***
# *****

ahfind = .true. # Do we want to find an apparent horizon?
              ah_*.tl (mass,area,radius)

# *****
# ***  MATTER  ***
# *****

#mattertype = fluid # Perfect fluid
mattertype = dust # dust

# *****
# ***  FLUID  ***
# *****

fluid_method = center # Method for fluid integration.
                  (center,upwind,limiter,hlle)
fluiddiss = 0.05 # Dissipation coefficient

# *****
# *****
# *****

idata = acrecion # Type of initial data

```

```

fluid_a0 = 30.0      # valor inicial del pulso
fluid_r0 = 50.0      # valor final del pulso
fluid_s0 = 0.0001    # altura del pulso

const_1 = 1.0
const_2 = 1.0

#constantes del fluido

fluid_N = 1.5          #Polytropic index.
fluid_gamma = 1.666666 #Adiabatic index.
fluid_kappa = 1        #Polytropic constant.

fluid_q1 = 0.0 # Coefficient for linear
                # artificial viscosity term.
fluid_q2 = 0.0 # Coefficient for quadratic
                # artificial viscosity term.

# *****
# ****OUT FILE****
# *****

directory = Polvo # Name of output directory
Ninfo = 50        # How often do we want to output
                  # information to screen?
Noutput0D = 1     # How often do we want 0D output?
Noutput1D = 50    # How often do we want 1D output?

outvars0D = fluid_rho0
outvars1D = fluid_rho0

```

Este último archivo nos permite modificar los parámetros, de tal forma que, al momento de compilar el programa, solo se haga una vez y así correrlo las veces que uno desee. Ahora veremos las trayectorias de una partícula y como evoluciona nuestra distribución de materia alrededor de un hoyo negro considerando diferentes métricas.

3.3. Metodo Runge-Kutta

Las ecuaciones diferenciales sirven para modelar problemas físicos que requieren el cambio de una variable con respecto a otra. En la mayor parte de ellos hay que resolver un problema de valor inicial, es decir, resolver una ecuación diferencial que satisfaga una condición inicial dada. En general las situaciones de la vida real este tipo de ecuaciones resultan complicadas de resolver con exactitud, por lo que se recurre a dos procedimientos para aproximar la solución. El

primero consiste en simplificar la ecuación diferencial de modo que podamos resolverla exactamente y utilizar la solución de esta para aproximar una solución a la ecuación original, sin embargo este método no es muy preciso y no todas las ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas de esta forma. Por otro lado podemos usar métodos de aproximación que dan una solución mas exacta a la ecuación diferencial original.

Uno de los métodos más utilizados para resolver numéricamente problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales es el método de Runge- Kutta de cuarto orden (RK4), el cual proporciona un pequeño margen de error con respecto a la solución real del problema y es fácilmente programable en un software para realizar las iteraciones necesarias.

Entonces consideramos la ecuación descrita de manera general como:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y) \quad (3.1)$$

Con la condición inicial dada por $y(t_0) = y_0$. Al momento de integrar esta ecuación tenemos

$$\int_{y_0}^y = \int_{x_0}^x f(x, y(x))dx \Rightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x))dx \quad (3.2)$$

Para poder aproximar esta ultima integral mediante un método numérico adecuado, planteamos el problema paso a paso de tal forma que podemos escribirla como:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \quad (3.3)$$

Para poder utilizar el método RK4 necesitamos definir el tamaño del paso h que queremos utilizar y el numero máximo de iteraciones n tal que

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (3.4)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

y realizamos la iteracion:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.5)$$

Para $i = 0, \dots, n - 1$ La solución se da a lo largo del intervalo $(t_0, t_0 + h_n)$ Así, el siguiente valor y_{n+1} es determinado por el presente valor y_n mas el producto

del tamaño del intervalo h por una pendiente estimada esta es un promedio ponderado de pendientes de tal manera que:

$$\text{pendiente} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \quad (3.6)$$

Si queremos resolver una ecuación diferencial podemos realizar un programa que facilite encontrar la solución al problema por lo que usamos el siguiente algoritmo [6]:

Para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t,y), \quad a < t < b, \quad y(a) = \alpha,$$

en $(N + 1)$ números uniformemente espaciados en el intervalo $[a,b]$

ENTRADA extremos a,b ; entero N ; condición inicial α .

SALIDA aproximación w a y en los $(n+1)$ valores de t .

Paso 1 Tome $h = (b-a)/N$;

$t = a$;

$w = \alpha$;

SALIDA (t,w) .

Paso 2 Para $i = 1, 2, \dots, N$ haga pasos 3-5.

Paso 3 Tome $K_1 = hf(t,w)$;

$K_2 = hf(t + h/2, w + K_1 / 2)$;

$K_3 = hf(t + h/2, w + K_2 / 2)$;

$K_4 = hf(t + h, w + K_3)$;

Paso 4 Tome $w = w + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$; (calcule w_i)

$t = a + ih$ (Calcule t_i)

Paso 5 SALIDA (t,w)

Paso 6 PARAR

Este método lo utilizaremos para encontrar la solución para la constricción hamiltoniana en un caso específico el cual veremos en el capítulo 5.

Capítulo 4

Acreción

Como se menciona anteriormente el objetivo de este trabajo es analizar el proceso de acreción de materia alrededor de un hoyo negro, para ello es importante conocer los diversos procesos que se han estudiado, empezando con la acreción tipo Bondi [25] el cual discutiremos una forma de encontrar la densidad y la tasa de acreción de un fluido infinito considerando desde el punto newtoniano y utilizando las ecuaciones de la hidrodinámica. Junto con este análisis realizaremos de manera análoga el análisis de la acreción de Mitchel [20] donde la diferencia radica principalmente en la teoría relativista [9].

Sin embargo nosotros queremos estudiar este proceso considerando un pulso de materia lo que nos lleva al análisis de la trayectoria de la partícula sin considerar su momento angular, es decir, en caída libre, el estudio de este hecho nos permite considerar las diferentes métricas en coordenadas esféricas sin considerar la autogravedad del pulso, para ello utilizaremos una manera analítica y numérica usando el programa OllinSphere2.

4.1. Proceso de acreción tipo Bondi

Si consideramos una nube de partículas que son absorbidas por el campo gravitacional debido a una masa central, la trayectoria de cada partícula podemos suponerla de manera espiral ya que al perder energía mediante el choque entre ellas, el momento angular va disminuyendo y se aproxima hacia el centro, al proceso de absorción de partículas se le conoce como Acreción. En esta sección se pretende estudiar el proceso de acreción hacia un agujero negro de manera no relativista, considerando una densidad de partículas con geometría esférica alrededor de un objeto compacto consideraremos un fluido hidrodinámico. Si consideramos una densidad de partículas que chocan entre si, podemos realizar el análisis del flujo de manera hidrodinámica. Una primera aproximación es considerar un gas adiabático, el cual podemos caracterizar por un índice Γ el cual indica la relación que existe entre el calor específico a presión y volumen

constantes [25].

$$\Gamma = \frac{C_P}{C_V}, \quad (4.1)$$

y además depende del número efectivo de grados de libertad en el movimiento molecular.

$$\Gamma = \frac{f+2}{f}, \quad (4.2)$$

Donde f es el número de grados de libertad del movimiento molecular. Por ejemplo para un gas monoatómico como el helio, $f=3$ y $\Gamma = 5/2$ [14] Sabemos que un gas adiabático no cede ni recibe calor, es decir, que la presión se mantiene constante para toda la densidad ρ y esta dada como:

$$P = K\rho^\Gamma, \quad (4.3)$$

Definimos la velocidad del sonido u_s en un fluido como:

$$u_s \equiv \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{\Gamma P}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

Podemos describir completamente el flujo partiendo de la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \rho v = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0, \quad (4.5)$$

Donde v es la velocidad radial si consideramos también la ecuación de Euler.

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}, \quad (4.6)$$

Las cuales están escritas para un gas en estado estable y un flujo esférico con velocidad $v > 0$. Integrando la ecuación (4.5) podemos escribir:

$$4\pi r^2 \rho v = \dot{M} = \text{constante}, \quad (4.7)$$

Usando la ecuación (4.6) y siguiente relación

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dP}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{u_s^2}{\Gamma - 1} \right), \quad (4.8)$$

Llegamos a la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\Gamma - 1}u_s^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{\Gamma - 1}u_\infty^2, \quad (4.9)$$

Donde usamos las condiciones de frontera para evaluar la constante de integración. El flujo queda determinado una vez que se tenga \dot{M} , la distribución de la presión $P(r)$ y la velocidad. Como mostr´o Bondi (1952), diferentes valores para \dot{M} nos llevan a distintas clases de soluciones para las mismas condiciones de frontera, sin embargo solo nos interesa una única solución cuando la velocidad

v aumenta monótonamente desde $r = 0$ hasta $r = \infty$. Para calcular la tasa de acreción reescribimos la ecuación de continuidad (4.5) de la siguiente forma

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{v'}{v} + \frac{2}{r} = 0, \quad (4.10)$$

y la ecuación 4.9 como

$$v v' + u_s^2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (4.11)$$

De esta manera tenemos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolver por el método de Cramer llegando a que las soluciones son:

$$v' = \frac{D_1}{D} \quad p' = -\frac{D_2}{D}, \quad (4.12)$$

Donde

$$D_1 = \frac{2u_s^2/r - GM/r^2}{\rho}, \quad (4.13)$$

$$D_2 = \frac{2v^2/r - GM/r^2}{v}, \quad (4.14)$$

$$D = \frac{v^2 - u_s^2}{v\rho}, \quad (4.15)$$

La ecuación (4.12) muestra que para garantizar el crecimiento uniforme y monótono de la velocidad conforme el radio decrece y simultáneamente evita las singularidades en el flujo, la solución debe pasar por un punto crítico, donde $D_1 = D_2 = D = 0$ para $r \equiv r_c$, el cual podemos encontrar a partir de las ecuaciones anteriores.

$$v_c^2 = u_s^2 = \frac{1}{2} \frac{GM}{r_c}, \quad (4.16)$$

donde u_c y r_c es la velocidad y el radio respectivamente en el punto crítico. Este último corresponde al radio Transónico en el cual la velocidad es igual a la velocidad del sonido. Combinando las ecuaciones (4.9) y (4.16) con u_∞ como la velocidad en el infinito

$$u_c^2 = \left(\frac{2}{5 - 3\Gamma} \right) u_\infty^2, \quad (4.17)$$

De la que podemos despejar el radio crítico de la ecuación (4.16) tal manera que nos queda:

$$r_c = \left(\frac{5 - 3\Gamma}{4} \right) \frac{GM}{u_\infty^2}, \quad (4.18)$$

El cual corresponde al radio transónico donde el potencial gravitacional es comparable a la energía interna térmica del ambiente por unidad de masa. Entonces a partir de la expresión (4.7) y la relación:

$$\rho = \rho_\infty \left(\frac{u_s}{u_\infty} \right)^{2/(\Gamma-1)}, \quad (4.19)$$

Podemos llegar a la expresión para la tasa de acreción

$$\dot{M} = 4\pi\rho_\infty v_c r_c^2 \left(\frac{u_c}{u_\infty} \right)^{2/(\Gamma-1)},$$

La cual podemos describir en terminos del eigenvalor λ_c lo que nos lleva a que:

$$\dot{M} = 4\pi\lambda_c \left(\frac{GM}{u_\infty^2} \right)^2 \rho_\infty u_\infty, \quad (4.20)$$

Donde

$$\lambda_c = \left(\frac{1}{2} \right)^{\Gamma+1/2(\Gamma-1)} \left(\frac{5-3\Gamma}{4} \right)^{-(5-3\Gamma)/2(\Gamma-1)}, \quad (4.21)$$

Para un gas ideal Maxwell-Boltzmann con peso molecular μ tenemos la presión, la velocidad del sonido en el medio y la temperatura definidos como:

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_u}; \quad u_s^2 = \frac{\Gamma k T}{\mu m_u}; \quad T = T_\infty \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\Gamma-1}, \quad (4.22)$$

Podemos evaluar el valor de \dot{M} para la componente ionizada del medio interestelar (que se supone hidrógeno puro $\mu = 1/2$) donde $\Gamma = 5/3$ tenemos

$$\dot{M} = 1.2 \times 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24}} \right) \left(\frac{T_\infty}{10^4 K} \right)^{-3/2}, g s^{-1}, \quad (4.23)$$

Los perfiles de flujo transónico son fáciles de deducir. Lejos del radio transónico el potencial gravitacional de la masa central es difícilmente detectado y la temperatura y la densidad permanecen cerca de sus valores en el infinito:

$$\rho \approx \rho_\infty \quad T \approx T_\infty \quad u_s \approx u_\infty; \quad \frac{r}{r_c} \gg 1, \quad (4.24)$$

De las ecuaciones (4.20) y (4.24) vemos que la velocidad del flujo decrece cuando el radio r crece de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{v}{u_\infty} \approx \lambda_c \left(\frac{GMn}{u_\infty^2} \right)^2 r^{-2}; \quad \frac{r}{r_c} \gg 1, \quad (4.25)$$

Entonces dentro del radio transónico el flujo es significativo debido al campo gravitacional de la masa central. Para $r/r_c \ll 1$, el término GM/r domina sobre el término $u_s^2/(\Gamma-1)$ en la ecuación (4.9). El flujo de velocidades se aproximan a la velocidad de caída libre y la desaceleración debido a la presión del gas es despreciable.

$$v \approx \left(\frac{2Gm}{r} \right)^{1/2}; \quad \frac{r}{r_c} \ll 1 \quad ; \quad \left(1 < \Gamma < \frac{5}{3} \right), \quad (4.26)$$

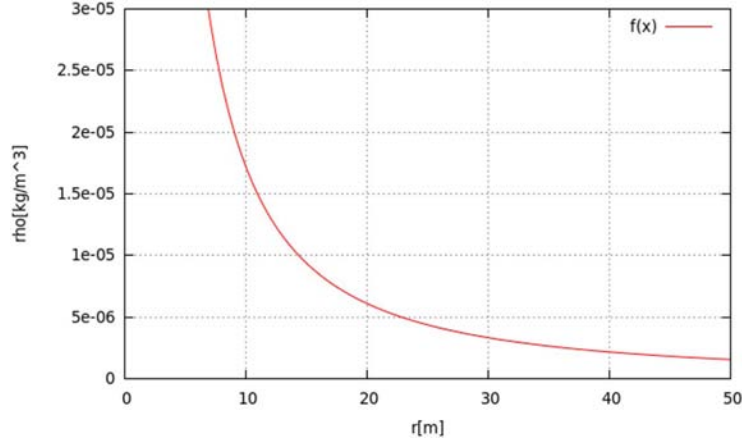


Figura 4.1: Perfil de densidad, acreción estacionaria y esféricamente simétrica, considerando los valores de $\rho_\infty = 10^{-21} \text{kg/m}^3$ y $u_\infty = 10^4 \text{m/s}$

De acuerdo con estos datos podemos encontrar la razón de densidades donde se observa que cuando el radio decrece la densidad aumenta, considerando las ecuaciones (4.20) y (4.26) llegamos a

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \approx \frac{\lambda_s}{2^{1/2}} \left(\frac{GM}{u_\infty^2} \right)^{3/2} r^{-3/2}; \quad \frac{r}{r_c} \ll 1 \quad ; \quad \left(1 < \Gamma < \frac{5}{3} \right), \quad (4.27)$$

Evaluando la ecuación (4.27) y $r = 2GM/c^2$ indica que en el horizonte la densidad del flujo hidrodinámico es mayor a la densidad de partículas sin colisiones en un factor de (c^2/u_∞^2) . La razón de temperatura con r pequeña la obtenemos combinando la ecuación (4.27) con los valores de un gas ideal de Maxwell-Boltzmann obtenemos

$$\frac{T}{T_\infty} \approx \left[\frac{\lambda_s}{2^{1/2}} \left(\frac{GM}{u_\infty^2} \right)^{3/2} \right]^{\Gamma-1} r^{-3(\Gamma-1)/2} \quad (4.28)$$

Si consideramos el caso donde $\Gamma = 5/3$ para la cual la aproximación newtoniana de $r_s = 0$, encontramos que $r = (GM/u_\infty^2) \ll 1$ la solución crítica satisface

$$v \approx \left(\frac{GM}{2r} \right)^{1/2} \quad (4.29)$$

Esto corresponde a los perfiles de densidad y temperatura a radios pequeños los cuales son descritos por las ecuaciones:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \approx \frac{2^{1/2}}{4} \left(\frac{GM}{u_\infty^2} \right)^{3/2} r^{-3/2} \quad (4.30)$$

$$\frac{T}{T_\infty} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{GM}{u_\infty^2} \right) r^{-1} \quad (4.31)$$

Este tipo de acreción considera un fluido con presión y gracias a él encontramos una expresión para la densidad dada por la ecuación (4.30) en donde podemos utilizar el valor para $\Gamma = 5/3$, el cual corresponde a un gas monoatómico, vemos como la densidad depende principalmente de la distancia a la que se encuentre la materia, si asignamos valores típicos del medio interestelar donde $\rho_\infty = 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$, $u_\infty = 10^4 \text{ m s}^{-1}$ y donde $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ y la masa $M = 1M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ podemos observar que la densidad de materia aumenta conforme la distancia disminuye, hasta que diverge cuando el radio tiende a cero Fig. (4.1).

Las condiciones de frontera en el infinito (4.24) con $v = 0$ no especifican de forma única la solución newtoniana a las ecuaciones (4.5) y (4.6). De hecho, como Bondi señaló, existe una segunda clase de soluciones a dichas ecuaciones que cumplan las mismas condiciones de frontera, esta clase se caracteriza por el movimiento subsónico de las partículas. Una diferente solución subsónica existe para cada valor de λ en el intervalo de $0 \leq \lambda_c < \lambda_s$ Fig(4.2), definida acuerdo con la ecuación (4.16). Las soluciones subsónicas satisfacen también (4.24) para $r/r_c \gg 1$. Pero para $r \ll r_c$, sin embargo, el flujo difiere significativamente del flujo transónico. Considerando los casos subsónicos, en la ecuación (4.9) el término $\frac{1}{\Gamma-1}a^2$ domina al término $\frac{1}{2}v^2$ cuando r decrece, entonces cuando $1 < \Gamma < \frac{5}{3}$ podemos llegar a:

$$\frac{1}{\Gamma-1} \left[\left(\frac{u_s}{u_\infty} \right)^2 - 1 \right] \approx \frac{GM}{u_\infty^2 r} \quad (4.32)$$

Esta ecuación representa el equilibrio termodinámico para una ecuación de estado politrópica. Por lo tanto, el flujo se contrarresta por la contrapresión en el régimen subsónico. Esta presión es generada por el gradiente de densidad de gran tamaño que se construye como materia acumulada en las proximidades de la masa central. De la ecuación (4.32) encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_\infty} &= \left(\frac{u_s}{u_\infty} \right)^{2/(\Gamma-1)} \\ &\approx \left[1 + \frac{(\Gamma-1)GM}{u_\infty^2 r} \right]^{1/(\Gamma-1)} \\ &\approx \left[\frac{(\Gamma-1)GM}{u_\infty^2 r} \right]^{1/(\Gamma-1)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

El crecimiento de la densidad dada por la ecuación anterior para el flujo subsónico es claramente mayor que en el caso transónico (4.26). En general, las condiciones de frontera para la acreción hacia la superficie de un objeto compacto puede ser determinada por dos casos, transónico y subsónico, en particular para el hoyo negro debemos considerar el régimen transónico [26]

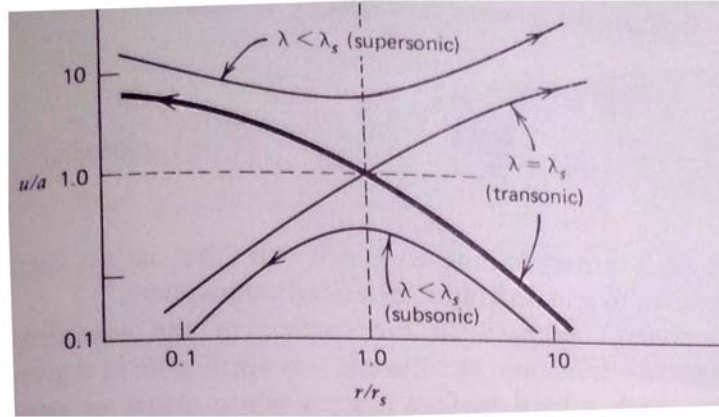


Figura 4.2: Esbozo de algunas posibles soluciones a las ecuaciones bondi para el flujo esférico, estacionario y adiabático sobre un punto de masa gravitatoria. La línea continua gruesa corresponde a acreción transónica [25]

Ahora es interesante verificar estos resultados pero ahora considerando no una distribución esférica e infinita de materia alrededor del hoyo negro, si no teniendo en cuenta un pulso de materia, pero antes de ver el caso de un fluido con presión vamos a estudiar el caso en donde tenemos una distribución homogénea de polvo, el cual está descrito por las ecuaciones de continuidad y la ecuación de Euler, su dinámica que presenta este tipo de fluido es fácil de describir gracias a las ecuaciones de las geodésicas vistas en el capítulo 2, por lo tanto tienen una solución analítica. entonces el primer paso que debemos estudiar es la caída libre por medio de las curvas geodésicas.

4.2. Acreción radial de un pulso de polvo.

Nuestro objetivo es describir la evolución de un pulso de materia cercano al hoyo negro, es por ello que necesitamos estudiar las trayectorias de las partículas que conforman un pulso de polvo, para ello necesitamos encontrar las expresiones de la quadri-velocidad, simplemente utilizando las ecuaciones de geodésicas. Si utilizamos el elemento de línea en coordenadas esféricas dado por la expresión:

$$ds^2 = -g_{00}dt^2 + 2g_{0r}dt dr + g_{rr} dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (4.34)$$

Para encontrar la ecuación de movimiento de esta materia consideramos el Principio de Mínima acción el cual nos describe la evolución a lo largo del tiempo en un campo físico de tal manera que podemos comparar la ecuación (1.18) con las ecuaciones de Euler-Lagrange para la mecánica clásica dadas por la ecuación (1.87) y consideramos \mathcal{L} como la Lagrangiana descrita de la siguiente forma en

coordenadas esfericas como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (-g_{00} c^2 \dot{t}^2 + 2g_{0r} c \dot{t} \dot{r} + g_{rr} \dot{r}^2 + r^2 d\Omega^2 + k) \quad (4.35)$$

Donde $d\Omega^2 = \dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta \dot{\phi}^2$ describe el angulo solido, $\dot{t} = dt/d\tau = u^0$ y $\dot{r} = dr/d\tau = u^r$. Como sabemos \mathcal{L} es una función escalar a partir de la cual se pueden obtener la evolución temporal, las leyes de conservación y otras propiedades importantes de un sistema dinámico.

Al ver la expresión anterior podemos deducir de manera directa que la ecuación no depende de t ni de ϕ , de tal forma que encontramos las dos primeras ecuaciones de conservación para estos parámetros de tal forma que utilizando (1.87)

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 \quad (4.36)$$

De lo cual deducimos de manera inmediata que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = C_1$, esta constante esta relacionada con la Energía del sistema así que llegamos a la ecuación:

$$-g_{00} \dot{t} + g_{0r} \dot{r} = E \quad (4.37)$$

De la misma manera tenemos que:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (4.38)$$

Lo cual nos lleva a la ecuación de conservación del momento angular en la dirección z, entonces:

$$r^2 \text{sen}^2\theta \dot{\phi} = l_\phi \quad (4.39)$$

Donde l_ϕ es el momento angular en dirección ϕ , esta expresion describe la conservación de momento angular. Otra relación importante que podemos deducir de (1.87) considerando la coordenada θ lo cual podemos deducir la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad (4.40)$$

Por lo que llegamos a la expresión siguiente:

$$r^2 \ddot{\theta} + 2r \dot{r} \dot{\theta} - \frac{l_\phi^2 \cos\theta}{g_{rr}^2 r^2 \text{sen}^3\theta} = 0 \quad (4.41)$$

Al resolver la expresión anterior nos damos cuenta que una de las soluciones posibles es considerar el movimiento sobre el plano ecuatorial de tal forma que θ sea igual a $\pi/2$. Entonces las ecuaciones de las geodésicas, usando la simetría del espacio-tiempo y la normalización de la velocidad $u^\mu u_\mu = -k$, donde $k = 1$ si consideramos partículas y $k = 0$ si consideramos luz. De esta forma podemos escribir la ecuación:

$$-\frac{E^2}{g_{00}} + \frac{2g_{0r}^2 \dot{r}^2}{g_{00}} + g_{rr} \dot{r}^2 + \frac{l_\phi^2}{g_{rr} r^2} = -k \quad (4.42)$$

Despejando la ecuación (4.42) tenemos la velocidad de la partícula definida por \dot{r} :

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{E^2 - g_{00} \left(k + \frac{l_\phi^2}{g_{rr} r^2} \right)}{g_{rr} g_{00} + g_{0r}^2}} \quad (4.43)$$

Junto con la ecuación (4.37) llegamos a la expresión

$$\dot{t} = \frac{1}{g_{00}} \left(-E + g_{0r} \sqrt{\frac{E^2 - g_{00} \left(k + \frac{l_\phi^2}{g_{rr} r^2} \right)}{g_{rr} g_{00} + g_{0r}^2}} \right) \quad (4.44)$$

Es importante notar que estas ecuaciones dependen de las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ por lo que podemos utilizar cualquier tipo de coordenadas para describir nuestro problema, a continuación haremos un análisis de las componentes de la cuadvirvelocidad ocupando tres de las mas importantes coordenadas, esto nos sera muy útil más adelante.

4.3. Caída Libre: Coordenadas Penetrantes.

Para el caso particular utilizaremos el elemento de linea de Schwarzschild para hoyos negros, escrita usando coordenadas Eddington-Finkelstein conocidas como **coordenadas penetrantes** [10]. Podemos calcular las ecuaciones (4.43) y (4.44) teniendo en cuenta que $l_\phi = 0$ lo cual nos indica el movimiento radial ademas al considerar polvo tenemos $k = 1$.

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r}; \quad g_{0r} = \frac{2M}{r}; \quad g_{rr} = 1 + \frac{2M}{r} \quad (4.45)$$

Las componentes de la cuadvirvelocidad estan dadas por las ecuaciones (4.43) y (4.44) de tal forma que al sustituir las componentes de la métrica llegamos a que las ecuaciones mencionadas se escriben como:

$$u^r = \sqrt{E^2 - 1 + \frac{2M}{r}} \quad (4.46)$$

De manera análoga podemos calcular:

$$u^0 = \frac{Er + 2Mu^r}{r - 2M} \quad (4.47)$$

Las cuales determinan las componentes de la cuadvirvelocidad para cada partícula dada su posición y tiempo. Por ultimo encontraremos las componentes de la velocidad de manera análoga para las coordenadas conformes.

4.4. Caída Libre: Coordenadas Conformes

El problema que queremos resolver es a partir de la métrica conforme definida con la ecuación:

$$ds^2 = -\alpha dt^2 + \psi^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (4.48)$$

De manera inmediata vemos una similitud con la métrica penetrante, lo cual nos lleva a repetir el proceso anterior para encontrar las ecuaciones de conservación. La métrica conforme tampoco depende del tiempo t ni de la coordenada ϕ de tal manera que podemos definir la ecuación para la conservación de la energía como:

$$-\alpha \dot{t} = E \quad (4.49)$$

Del mismo modo podemos encontrar la ecuación de conservación para el momento angular descrito de tal forma que:

$$r^2 \psi^4 \text{sen}^2 \theta \dot{\phi} = l_\phi \quad (4.50)$$

Podemos considerar que las partículas se mueven en el plano ecuatorial de tal forma que $\theta = \pi/2$ así podemos concluir que la ecuación de movimiento esta descrita a partir de la expresion:

$$-\alpha \dot{t}^2 + \psi^4 \dot{r}^2 \psi^4 \dot{\phi}^2 = -1 \quad (4.51)$$

A partir de las ecuaciones de conservación despejando \dot{t} y $\dot{\phi}$ respectivamente y sustituirlas en las ecuaciones anteriores deducimos que \dot{r}^2 es igual a:

$$\dot{r}^2 = \frac{E}{\alpha \psi^4} - \frac{1}{\psi^4} - \frac{l_\phi^2}{r^2 \psi^8} \quad (4.52)$$

Sin embargo consideramos que las partículas esta en caída libre lo que nos lleva a que $l_\phi = 0$, por lo tanto las componentes de la cuadri-velocidad en coordenadas conformes depende del lapso y el factor conforme:

$$u^r = \left(\frac{E}{\alpha \psi^4} - \frac{1}{\psi^4} \right)^2 \quad u^0 = -\frac{E}{\alpha} \quad (4.53)$$

donde el factor conforme puede ser escrito como $1 + \frac{M}{2r}$ y el lapso esta definido por $\alpha = \frac{1-2M/r}{1+2M/r}$. Podemos repetir los cálculos de manera similar que el anterior caso, en donde encontramos que las componentes de la cuadri-velocidad en la métrica conforme están dadas por:

$$u^0 = \frac{E(2r + M)^2}{(-2r + M)^2} \quad (4.54)$$

ademas

$$u^r = \frac{\sqrt{2(E + M/r)}(1 - 2M/r)}{\sqrt{1 + 2E} - \frac{2M\sqrt{2(E+2M/r)}}{r}} \quad (4.55)$$

Estas últimas expresiones nos serán de mucha ayuda al momento de resolver las ecuaciones de continuidad y de Euler para nuestro fluido de prueba, ya que el programa *OllinSphere2* que ocuparemos para verificar nuestros resultados tiene por default este tipo de coordenadas.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Anteriormente vimos que para si tenemos un problema que implique resolver de manera general las ecuaciones de Einstein necesitamos especificar las condiciones iniciales que satisfagan las ecuaciones de constricción en la formulación 3+1. Nuestro problema requiere considerar un hoyo negro en el espacio-tiempo y un pulso de materia acretando de manera radial hacia él, realizaremos una descripción detallada de la evolución del sistema por medio del programa OllinSphere2, por lo que necesitamos utilizar la métrica conformemente plana, lo que implica que $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$, la cual podemos escribir de manera general como:

$$ds^2 = \psi(r)^4(Adr^2 + r^2Bd\Omega^2), \quad (5.1)$$

Donde $\psi(r)$ es el factor conforme, A y B son funciones que dependen solo de r, las cuales podemos elegir arbitrariamente, para simplificar las ecuaciones decidimos utilizar $A = B = 1$. Si además consideramos la simetría $K_{ij} = 0$ podemos observar que la constricción de momento se satisface trivialmente $8\pi j^i = 0$ mientras que la ecuación de constricción hamiltoniana esta descrita por la ecuación:

$$\frac{\nabla^2\psi}{\psi^5} + 16\pi\rho = 0, \quad (5.2)$$

Donde ρ es la densidad de materia. Como podemos observar para encontrar una solución a esta ecuación diferencial necesitamos utilizar un metodo numerico, nosotros elegimos el método de Runge-Kutta visto en el capitulo 3. Entonces para poder resolverla esta ecuacion podemos proponer la densidad ρ como una función continua y cuatro veces diferenciable, donde los extremos se aproximen a cero muy suavemente, es por ello que podemos utilizar la siguiente ecuación:

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq a \\ [(r-a)(r-b)]^4 & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r \geq b \end{cases} \quad (5.3)$$

Donde a y b son los limites inferior y superior de la región donde se encuentra la materia y A es la amplitud de nuestro pulso. Entonces esta expresión nos divide

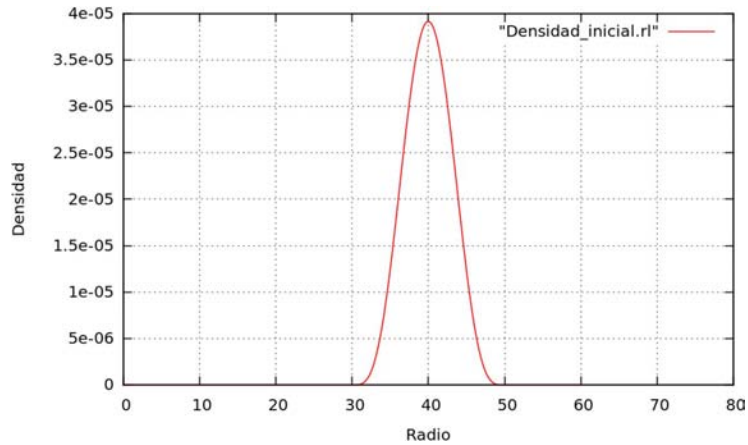


Figura 5.1: Perfil de densidad para un pulso de polvo.

el espacio en tres regiones Fig.(5) En la region I y III vemos que la ecuación (5.2) se reduce al caso en el vacío por lo que tenemos una solución tipo hoyo negro dada por la ecuación:

$$\rho = 1 + k/r \quad (5.4)$$

lo que nos lleva a que en la region I $k = \frac{M}{2}$ en la ecuación (5.4), lo cual indicaría la condición inicial para la región II en la cual esta representada la materia alrededor del hoyo negro, si consideramos esto junto con la condición de inicial en la región III entonces podemos asegurar que la región II en donde esta la distribución de materia debe tener la forma de la ecuación (5.4) donde necesitamos definir el valores de k

Ya que tenemos una solución para el Factor conforme, nos queda definir el tipo de materia que debemos considerar, en este trabajo veremos esa distribución de materia en la cual despreciaremos la contribución de presión debida al mismo material, es decir, polvo y compararemos los resultados obtenidos con los de un fluido perfecto.

Como vimos en capítulos anteriores el polvo esta descrito solamente con la ecuación de continuidad y el vector de flujo dados en las ecuaciones (1.30) (1.31) respectivamente la solución a estas ecuaciones pueden ser resueltas de una manera analítica. Sin embargo para el caso de fluido perfecto necesitamos considerar la ecuación (1.38) la cual presenta un problema ya que no podemos resolverla de manera directa, pero gracias a las herramientas computacionales podemos llegar a encontrar resultados interesantes

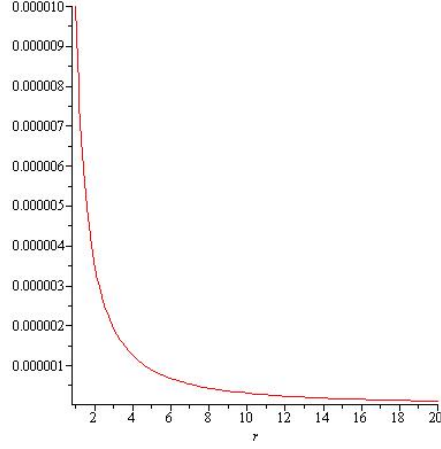


Figura 5.2: Perfil de densidad para un pulso de polvo, coordenadas penetrantes, con $A_0 = 10^{-5}$ y $r_0 = 70M$

5.1. Evolución: Fluido sin presión

Una vez familiarizado con las trayectorias que recorren las partículas al caer libremente necesitamos considerar las ecuaciones de continuidad y de Euler, las cuales, como hemos mencionado, pueden ser resueltas de manera analítica lo que nos permitirá describir que pasa con la densidad del pulso al acercarse al hoyo negro. Entonces, para un fluido sin presión, necesitamos resolver la ecuación de continuidad 1.30 la cual podemos escribir como:

$$\sqrt{-g} \rho_{,t} u^0 + \sqrt{-g} u^r \rho_{,r} + \rho (\sqrt{-g} u^r)_{,r} = 0 \quad (5.5)$$

Si consideramos que $\frac{d\rho}{dt} = \rho_{,t} + v^r \rho_{,r}$, donde $v^r = u^r/u^0$. La ecuación que obtenemos esta dada por:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{(\sqrt{-g} u^r)_{,r}}{(\sqrt{-g} u^0)} dt \quad (5.6)$$

Si utilizamos la regla de la cadena en el termino de la derecha y tomando en cuenta que $u^0 = \frac{dt}{d\tau}$ podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{(\sqrt{-g} u^r)_{,r}}{(\sqrt{-g} u^r)} dr \quad (5.7)$$

Considerando que $\frac{d(\ln(v))}{dr} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$ entonces tenemos que:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\ln(\sqrt{-g} u^r) \quad (5.8)$$

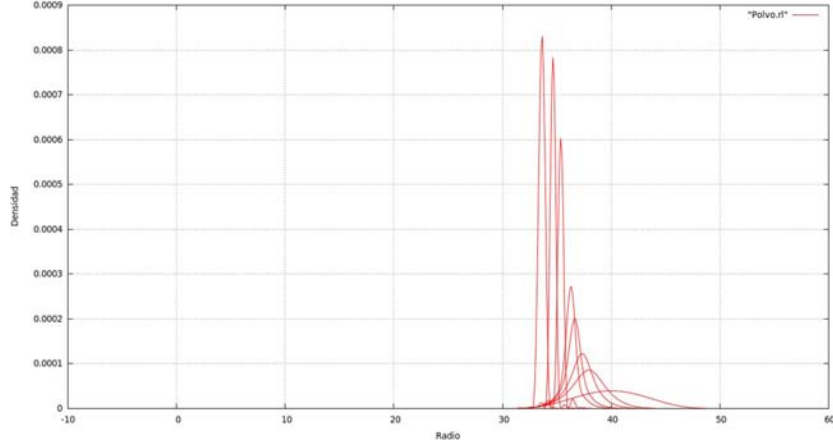


Figura 5.3: Evolución de la densidad para el caso sin presión, sin considerar la auto-gravedad.

Si integramos esta expresión tenemos una ecuación para la envolvente descrita por

$$\rho(r) = \frac{k_0}{\sqrt{-g}u^r} \quad (5.9)$$

Esta expresión es la solución de manera general para la ecuación de continuidad, la cual llamamos envolvente, la ventaja que tenemos con esta expresión es que podemos utilizarla sin importar que tipo de coordenadas utilicemos, siempre y cuando tengamos una métrica esférica, esto nos permite estudiar la evolución del polvo alrededor de un hoyo negro, sin considerar su autogravedad, desde diferentes coordenadas. Como ejemplo podemos utilizar las coordenadas penetrantes para describir la evolución de un fluido sin presión y sin considerar su auto-gravedad, lo que nos permite escribir la ecuación de continuidad como (5.5). Entonces, dadas las componentes de la velocidad llegamos a la expresión:

$$\partial_0 \rho + v^r \partial_r \rho + 2 \frac{E^2 - 1 + \frac{3M}{2r}}{r(E^2 - 1 + \frac{2M}{r})} v^r \rho = 0, \quad (5.10)$$

Donde $v^r = \frac{dr}{dt} = \frac{u^1}{u^r}$. Para poder resolver esta ecuación usamos la expresión para la envolvente (5.9) en donde consideramos $\sqrt{-g}$ como el determinante de la métrica, ya que y utilizamos el hecho de que:

$$\sqrt{-g} = \left(1 - \frac{4M^2}{r^2}\right), \quad (5.11)$$

podemos encontrar la expresión para la envolvente en coordenadas penetrantes[10]:

$$\rho(r) = A_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2}, \quad (5.12)$$

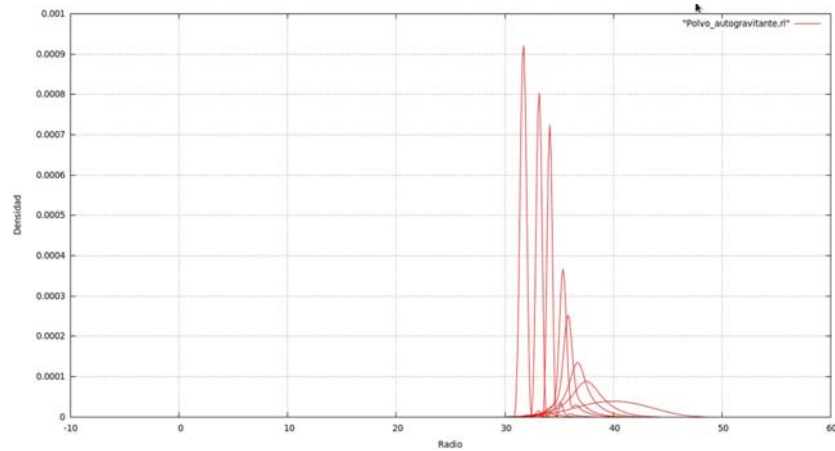


Figura 5.4: Evolución de la densidad para el caso sin presión, considerando la auto-gravedad.

Como vemos la densidad del polvo diverge cuando $r \rightarrow 0$, esto implica que a distancia cercanas al hoyo negro la densidad del material aumenta de manera exponencial como lo muestra la figura 5.1 Es importante notar que la ecuación anterior tiene la misma forma que la ecuación (4.30) la diferencia radica en la elección de los valores para la constante, sin embargo ambas depende de la distancia a la que se encuentre la materia.

El caso que más nos interesa calcular es aquel descrito con las coordenadas conformes ya que si realizamos los cálculos pertinentes podemos encontrar la ecuación de continuidad y la de la envolvente con estas coordenadas. Si utilizamos el programa OllinSphere2 tenemos que la densidad que queremos esta dada por la ecuación (5.3) utilizamos los siguientes datos para poder describir la evolución del polvo al momento de ser acretado hacia un hoyo negro

```
fluid_a0 = 30.0          # limite izquierdo de la densidad a
fluid_r0 = 50.0         # limite derecho de la densidad b
fluid_s0 = 0.0001      # Amplitud de la curva C
```

Como observamos en la figura 5.3 la evolución del polvo sigue con la forma de la envolvente lo que nos permite demostrar que los cálculos numéricos y los analíticos concuerdan. Habiendo demostrado este hecho podemos empezar a considerar la autogravedad de la materia.

5.2. Polvo Autogravitante.

Como hemos mencionado anteriormente la curvatura del espacio-tiempo es una de las principales consecuencias de la teoría de la relatividad general de

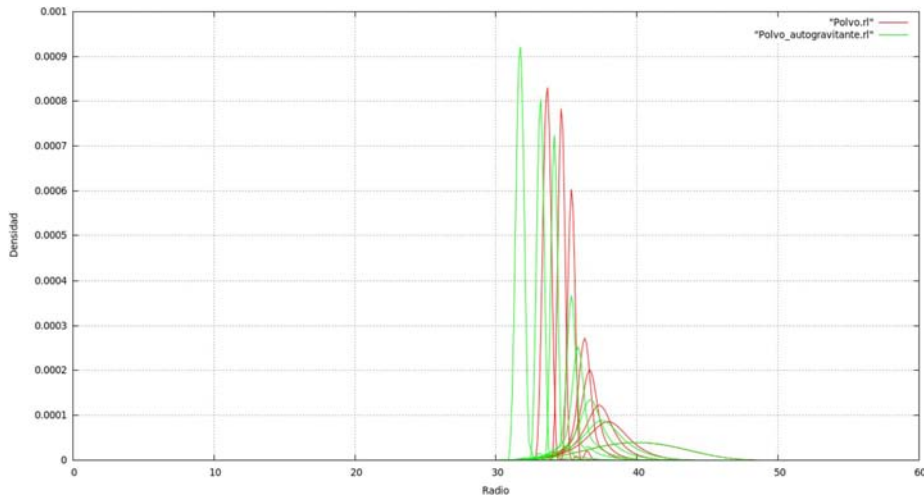


Figura 5.5: Evolución de la densidad para el caso sin presión, Color rojo: Polvo sin autogravedad; Color verde: Polvo Autogravitante. Al utilizar los mismos tiempos de evolución en ambos casos notamos que el proceso autogravitante crece más rápidamente.

acuerdo con la cual la gravedad es efecto o consecuencia de la geometría curva del espacio-tiempo. Los cuerpos dentro de un campo gravitatorio siguen una trayectoria espacial curva. Si quisiéramos ejemplificar dicha curvatura imaginemos en un principio una tela completamente extendida, si nosotros pusiéramos un objeto cualquiera veríamos como esa tela se curva bajo el peso del objeto, entonces si colocamos un balón cercano a esa curvatura, caería hacia el objeto más pesado pero a su vez al tener una masa la tela se curva bajo la acción del peso del balón. Entonces un caso interesante a estudiar es el pulso de materia anteriormente descrito pero ahora considerando un fluido de prueba autogravitante. Ya que no podemos resolver la ecuación (5.5) de manera analítica entonces nos apoyaremos en el programa OllinSphere2 ya que en el caso anterior nos dio una buena aproximación. Para utilizar el código solo hay que modificar la bandera

```
spacetime = dynamic # dynamic,background
```

Ya que este comando me permite considerar la curvatura del espacio-tiempo, al elegirlo como dinámico el código interpreta la curvatura del pulso que estamos considerando. Entonces al momento que realizamos la compilación del programa, tratamos de mantener los valores para la maya y los pasos de tiempo, así como también los datos iniciales para la densidad lo que nos lleva a la Figura 5.4, en donde observamos una vez más la densidad diverge al acercarse al horizonte, lo que es consistente con la parte analítica y el caso anterior. Sin embargo al comparar ambas gráficas podemos observar la diferencia en el tiempo en donde

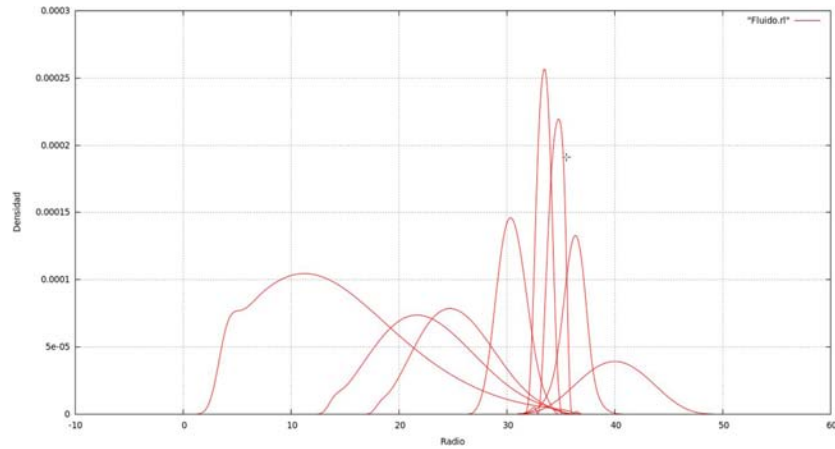


Figura 5.6: Evolución de la densidad para el caso con presión, sin considerar la auto-gravedad y para los siguientes valores: $N = 1.5$, $\gamma = 1.666666$, $\kappa = 1$, archivo Fluido1.

el fluido de prueba sin autogravedad acreta más despacio lo que nos permite suponer que el polvo al curvar al espacio hace que las partículas caigan con una velocidad mayor Figura(5.5).

En conclusión vemos que la densidad tiene la forma

$$\rho = C_0 r^{-n}. \quad (5.13)$$

Donde C_0 y n son constantes, los cuales podemos encontrar de acuerdo a los valores iniciales que consideremos y a las coordenadas que elijamos para plantear el problema. Esto nos permite demostrar que el programa OllinSphere2 nos describe de una manera correcta los resultados esto es de gran ayuda ya que ahora analizaremos el caso en donde tenemos un pulso pero tomando en cuenta un fluido que tiene presión, lo que nos lleva a que las expresiones de las geodésicas no son suficientes para describir la evolución de dicha materia, pues el método de solución a las ecuaciones de continuidad y de Euler ya no son analíticas, sino numéricas, entonces haremos uso del nuestro código que nos ha servido muy bien hasta ahora.

5.3. Evolución: Fluido con presión

En el caso de un fluido hidrodinámico en donde la presión del gas esta combinado conforme el tiempo pasa necesitamos utilizar la ecuación de estado dada por la expresión

$$P = K\rho^\Gamma \quad (5.14)$$

Como vimos en secciones anteriores esta ecuación describe un gas politrópico, si elegimos los valores adecuados para Γ que es el indice adiabatico y K que es el

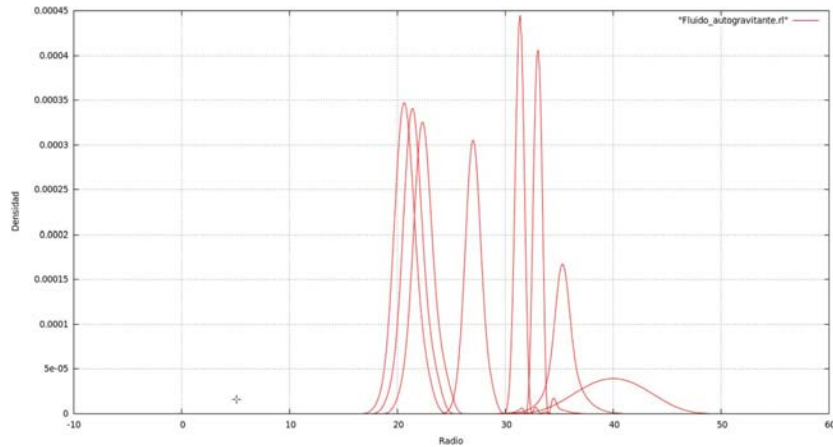


Figura 5.7: Evolución de la densidad para el caso con presión, considerando la auto-gravedad y para los siguientes valores: $N = 1.5$, $\gamma = 1.666666$, $\kappa = 1$, archivo FLuido.

índice politropico. Ya que el programa OllinSphere2 nos dio un buen resultado para la evolución de polvo, ahora consideraremos un gas monoatómico con los siguientes datos:

```
fluid_N = 1.5           #índice Politropico.
fluid_gamma = 1.666666 #índice Adiabatico.
fluid_kappa = 1        #Constante Poliatropica.
```

Los cuales corresponden a un gas monoatómico. Ahora vemos en la Figura 5.3 como la densidad aumenta hasta un punto en donde vuelve a disminuir, esto puede deberse a que la presión aumenta conforme el volumen va disminuyendo ya que podemos escribir a la ecuación de estados en términos del volumen como:

$$P = K (m/V)^\Gamma. \quad (5.15)$$

En donde m es la masa de la materia que comparada con la masa del hoyo negro es muy pequeña, así que todo radica en el cambio del volumen al ser acretada, así que la presión llega a crecer de tal forma que contrarresta por un tiempo la fuerza gravitacional del hoyo negro, sin embargo, al aumentar el volumen una vez más dicha fuerza predomina nuevamente lo que nos permite observar como la densidad aumenta y diverge al acercarse al horizonte.

El ultimo caso que deseamos estudiar es el caso donde el fluido con presión curva al espacio-tiempo y compararlo con los casos anteriores

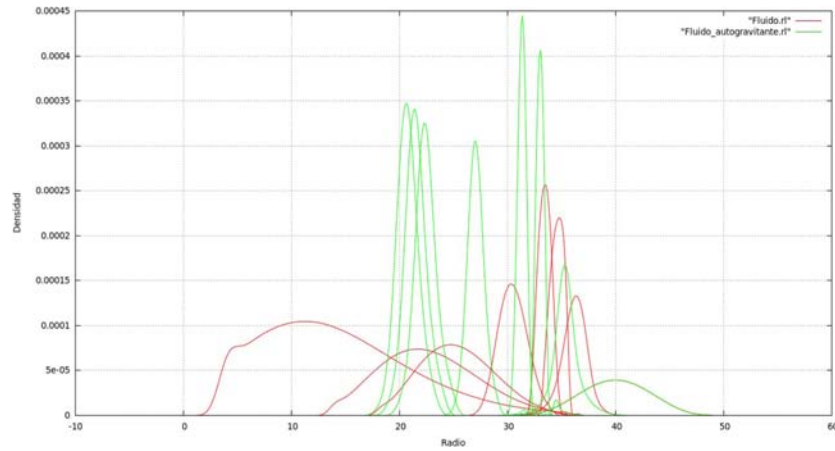


Figura 5.8: Evolución de la densidad para el caso con presión, considerando la auto-gravedad y para los siguientes valores: $N = 1.5$, $\gamma = 1.666666$, $\kappa = 1$, archivo FLuido.

5.4. Fluido Autogravitante.

Como sabemos el espacio-tiempo se curva debido a la materia que se encuentra en él y a su vez la materia se mueve gracias a la curvatura, esta es una de las conclusiones que podemos considerar de la relatividad general. Los casos anteriores nos ayudan a explicar y entender la dinámica de las partículas en casos bajo ciertas condiciones pero cada uno de ellos nos puede acercar a la realidad. El último caso que consideraremos es el fluido con presión autogravitante en donde las ecuaciones que hemos manejado se complican demasiado y los cálculos numéricos se vuelven la única forma para tratar de resolver el problema sin embargo al haber utilizado el código numérico que resuelve las ecuaciones de constricción y plantea las ecuaciones de evolución y haber obtenido resultados consistentes con los casos más sencillos, nos permite estudiar nuestro problema, de tal forma que obtenemos la Figura. 5.7. en donde vemos como se cumple el hecho visto en el caso anterior, donde la densidad crece hasta que la presión aumenta lo suficiente para contrarrestar la fuerza gravitacional, pero ahora que tenemos autogravedad podemos observar que el fluido acreta de una manera más veloz, si colocamos los dos resultados juntos Figura(5.8) vemos como el fluido autogravitante en un principio alcanza una densidad mayor que el caso anterior pero vemos como la velocidad con la que acreta disminuye considerablemente.

Bibliografía

- [1] M. Alcubierre, *Introduction to 3 + 1 numerical relativity*, Oxford Univ. Press, New York, 2008.
- [2] C. Bona, T. Ledvinka, C. Palenzuela, and M. Zacek, *General-covariant evolution formalism for numerical relativity*, Phys. Rev. **D67** (2003), 104005.
- [3] C. Bona and J. Massó, *Einstein's evolution equations as a system of balance laws*, Phys. Rev. D **40** (1989), 1022–1026.
- [4] C. Bona and J. Massó, *Numerical relativity: evolving space-time*, International Journal of Modern Physics C: Physics and Computers **4** (1993), 88.
- [5] Jeffrey M. Bowen and James W. York, *Time-asymmetric initial data for black holes and black hole collisions*, Phys. Rev. D **21** (1980), no. 8, 2047–2056.
- [6] R.L. Burden and J.D. Faires, *Análisis numérico*, International Thomson Editores, 2002.
- [7] S. Chandrasekhar, *The highly collapsed configurations of a stellar mass (Second paper)*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **95** (1935), 207–225.
- [8] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Oxford University Press, Oxford, England, 1983.
- [9] J. C. Degollado Daza, *Ondas gravitacionales y acreción hacia agujeros negros*, Tesis doctoral, Posgrado en Ciencias Físicas, 2010.
- [10] Juan Carlos Degollado, Darío Núñez, and Carlos Palenzuela, *Signatures of the sources in the gravitational waves of a perturbed Schwarzschild black hole*, Gen. Rel. Grav. **42** (2010), 1287–1310.
- [11] José A. Font, *Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity*, Living Rev.Rel. **11** (2008), 7.
- [12] J. Foster and J.D. Nightingale, *A short course in general relativity*, Longman, 1995.

- [13] J. B. Hartle, *Gravity. an introduction to einstein's general relativity*, Pearson Education, San Fransisco, U.S.A., 2003.
- [14] E. M. Landau, L. D. Lifshitz, *Física teórica en diez tomos. tomo vi. hidrodinámica*, Ed. Fisimatlit, Moscú, 2003.
- [15] Luis Lehner, *Numerical relativity: A Review*, Class. Quant. Grav. **18** (2001), R25–R86.
- [16] Andre Lichnerowicz, *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps*, J. Math. Pures et Appl. **23** (1944), 37.
- [17] Rezzolla Luciano and Olindo Zanotti, *Relativistic hydrodynamics*, Oxford University Press, Oxford, Sep 2013.
- [18] M. Ludvigsen, *General relativity: A geometric approach*, Cambridge University Press, 1999.
- [19] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Academic Press, San Francisco, 1973.
- [20] A. R. Mitchell, *The finite element method in partial differential equations*, J. Wiley and Sons, U.S.A., 1977.
- [21] J.V. Narlikar, *An introduction to relativity*, Cambridge University Press, 2010.
- [22] Darío Núñez and Juan Carlos Degollado, *Relatividad general. notas para el curso de la facultad de ciencias, unam*, <http://nucleares.unam.mx/nunez>, Instituto de Ciencias Nuclares, UNAM - U de G, 2013.
- [23] Wolfgang Rindler, *Essential relativity : special, general, and cosmological*, Texts and monographs in physics, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [24] S. L. Shapiro. and T. W. Baumgarte, *Numerical relativity*, Cambridge University Press, U.S.A., 2010.
- [25] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: the physics of compact objects*, John Wiley, 1983.
- [26] Murray R. Spiegel, *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, McGraw-Hill, McGraw-Hill de México, 1970.
- [27] S.T. Thornton and J.B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, Brooks/Cole, 2004.
- [28] C. Vergara, *Formacion de objetos compactos en friedmann*, Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, UNAM, 2015.
- [29] R. M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., 1984.

- [30] John Dirk Walecka, *Introduction to General Relativity*, World Scientific, Singapore, 2007.
- [31] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, New York, U.S.A., 1972.