



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

**Método de Balance de Materia para Yacimientos  
Localizados en un Acuífero Común**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**INGENIERA PETROLERA**

PRESENTA

**JULIETA ÁLVAREZ MARTÍNEZ**

DIRECTOR DE TESIS

**DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO**



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F. 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **AGRADECIMIENTOS**

A mis padres por su apoyo incondicional, por ser los mejores guías, por impulsarme a lograr mis metas, gracias por todo su amor y esfuerzo para que nunca me faltara nada. ¡Gracias infinitas!

A mi hermana Marisol, gracias por ser la mejor compañía todos estos años, ¡eres una niña admirable!

Al Dr. Fernando Samaniego, por su amistad y apoyo en mi etapa universitaria, le agradezco mucho el tiempo dedicado a la elaboración de esta tesis. ¡Lo admiro muchísimo!

A Mauricio Ortiz, gracias por hacerme reír, por tu paciencia, por tu amistad y amor estoy enormemente agradecida. ¡Gracias por impulsarme en lograr mis metas y creer en mí!

A Miriam Meza, Mónica Aquino, Paola Rodríguez por ser unas amigas increíbles, ustedes son ejemplo de mujeres inteligentes, fuertes y guapas. ¡Gracias por su amistad incondicional!

A Mario, Galeana, Vergara, Servín e Irving, por su amistad desde el comienzo de la carrera, gracias por todos los momentos que pasamos juntos. ¡Gracias por estar ahí!

A mis amigos del Petrobowl: Ahmed, Javo, Iker, César, Eder, Erick, José Eduardo, y Polo, ustedes son personas con las que compartí una de las mejores experiencias que tuve en la universidad, gracias por compartir conmigo un mismo objetivo y por todas las enseñanzas que obtuve de ustedes.

A Campitos, Kike, Dulce, Arango y a todos los amigos que hice en la FI ¡Gracias por su amistad!

A Ricardo Pacheco y Ricardo Posadas, por su apoyo en la elaboración de esta tesis.

A mis sinodales, Mat. Luis A. Vázquez Maison, Ing. Erick Gallardo Ferrera, Ing. Manuel Villamar Villegas y al Ing. Mario Becerra, por apoyarme en la revisión de este trabajo.

A la Facultad de Ingeniería de la UNAM, ¡Por darme la mejor educación!

# ÍNDICE

	Página
<b>RESUMEN</b> .....	v
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	vi
<b>LISTA DE TABLAS</b> .....	vii
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>CAPÍTULO 2 REVISIÓN DE LA LITERATURA</b> .....	4
2.1 Introducción.....	4
2.2 Entrada de agua al yacimiento.....	5
2.2.1 Método de Van Everdingen y Hurst.....	5
2.2.2 Dimensionamiento del acuífero.....	6
2.3 Yacimientos localizados en un acuífero común.....	7
<b>CAPÍTULO 3 MÉTODOS DE BALANCE DE MATERIA PARA LA ESTIMACIÓN DEL VOLUMEN ORIGINAL DE HIDROCARBUROS PARA YACIMIENTOS LOCALIZADOS EN UN ACUÍFERO COMÚN</b> .....	8
3.1 Método de Robinson.....	8
3.1.1 Estimación de la entrada de agua a los campos de interferencia.....	12
3.1.2 Programación del método de Robinson.....	13
3.1.3 Modificación al método de Robinson: acuífero de dimensión finita.....	15
3.2 Método de Hurst.....	17
3.2.1 Modificación al método de Hurst: acuífero de dimensión finita.....	20
3.2.2 Efecto de interferencia empleando el método de Hurst.....	22

<b>CAPÍTULO 4 CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA DE CAMPOS: KU, ABKATÚN, POL, CHUC Y SU ACUÍFERO COMÚN</b> .....	36
4.1 Método de Robinson aplicado al campo Ku y campos de interferencia: Abkatún, Pol y Chuc.....	36
4.1.1 Método de Robinson aplicado al campo Ku y campos de interferencia: Abkatún, Pol y Chuc, contemplando un acuífero de dimensión finita.....	40
4.2 Método de Hurst aplicado al campo Ku sin considerar campos de interferencia.....	42
4.2.1 Método de Hurst aplicado al campo Ku, sin considerar campos de interferencia, contemplando un acuífero de dimensión finita.....	43
4.2.2 Efecto de interferencia empleando el método de Hurst aplicado al campo Ku y campos de interferencia: Abkatún, Pol, Chuc y Maloob, contemplando un acuífero de dimensión finita.....	44
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b> .....	50
<b>NOMENCLATURA</b> .....	53
<b>REFERENCIAS</b> .....	56
<b>APÉNDICE A: TRANSFORMADA DE LAPLACE</b> .....	58
<b>APÉNDICE B: ALGORITMO DE STEHFEST</b> .....	59
<b>APÉNDICE C: FUNCIONES DE BESSEL MODIFICADAS I Y K</b> .....	60
<b>APÉNDICE D: TEOREMAS</b> .....	61

## **RESUMEN**

Este trabajo tuvo como objetivo estudiar los métodos de Robinson y Hurst, con el fin de liberar algunas consideraciones tomadas en cuenta por los autores y tener el escenario más real posible; así también modificar el método de Hurst cuyo objetivo es calcular la caída de presión total en el sistema acuífero-yacimientos, para que se obtenga como resultado el volumen original de aceite dinámico de un yacimiento contemplando la interferencia de otros campos.

Se caracterizan los campos Ku, Abkatún-Pol-Chuc y Maloob con los dos métodos en estudio, siendo estos los yacimientos que alcanzaron producciones importantes en el periodo de estudio (1980-1993). Se considera a Ku el campo para el cual se desea estimar su volumen original de aceite dinámico sujeto a la interferencia de los campos Abkatún-Pol-Chuc y Maloob.

## **ABSTRACT**

This thesis had as an objective to study the methods developed by Robinson and Hurst, with the purpose of liberating certain considerations made by the authors and working with a more realistic scenario; as well as modifying the objective of Hurst's method that is calculating de total pressure drop in the aquifer-reservoirs system, for obtaining as a result the original oil in place of a reservoir taking into account the interference effect from others reservoirs.

The fields: Ku, Abkatún-Pol-Chuc y Maloob are characterized with the two methods in study, since these fields are the ones that reached the highest productions in the period of study (1980-1993). This work is focused on determining the original oil in place for Ku field considering the interference from: Abkatún-Pol-Chuc and Maloob.

## LISTA DE FIGURAS

	Página
<b>Fig. 2.1</b> Mapa donde se observa el área de estudio evaluada por Ortuño (2012).....	7
<b>Fig. 3.1</b> Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson.....	11
<b>Fig. 3.2</b> Diagrama de flujo para estimar el volumen original de aceite, $N$ .....	14
<b>Fig. 3.3</b> Gráfica donde se muestra el inicio de producción de los campos A, B y C ( $t_{Ai}$ , $t_{Bi}$ , $t_{Ci}$ ) en la secuencia de tiempo total ( $t_{BD}$ ).....	23
<b>Fig. 4.1</b> Variación de la entrada de agua acumulativa en los yacimientos del Bloque II (Parra, 2014).....	37
<b>Fig. 4.2</b> Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson para el campo Ku, acuífero de dimensión infinita.....	39
<b>Fig. 4.3</b> Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson, modificado para el campo Ku, acuífero de dimensión finita.....	40
<b>Fig. 4.4</b> Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson, modificado para el campo Ku, acuífero de dimensión finita e incorporando al campo Maloob.....	41
<b>Fig. 4.5</b> Inversión numérica de la Ec. 3.25 considerando la variación del gasto $Q_o$ propuesto en la Fig. 4.6.....	42
<b>Fig. 4.6</b> Ejemplo de comportamiento del gasto de producción ( $Q_o$ ) del yacimiento Ku.....	42
<b>Fig. 4.7</b> Inversión numérica de la Ec. 3.38 considerando la variación del gasto $Q_o$ propuesto en la Fig. 4.6.....	43
<b>Fig. 4.8</b> Comparación entre las caídas de presión obtenidas mediante el método de Hurst y las caídas de presión reales considerando un volumen original de aceite, $N = 5728$ MM B <sub>ce</sub> .....	44
<b>Fig. 4.9</b> Producción de aceite diaria para los campos Abkatún, Pol, Chuc, Ku, Maloob, Zaap, Ixtoc (Parra, 2014).....	45

<b>Fig. 4.10</b> Gastos acumulativos $Q_o$ de los campos Ku, Abkatún-Pol-Chuc, Maloob utilizados para realizar la inversión numérica de la Ec. 3.89.....	45
<b>Fig. 4.11</b> Inversión numérica de la Ec. 3.89 contemplando el efecto de interferencia en el campo Ku debido a su producción y la de Abkatún-Pol-Chuc y Maloob, como se muestra en la Fig. 4.10, así como la inversión de la Ec. 3.38 sin incorporar la interferencia, considerando la producción conjunta de los yacimientos Ku, Abkatún-Pol-Chuc y Maloob, $Q_o$ (Fig. 4.10) .....	46
<b>Fig. 4.12</b> Comparación entre las caídas de presión ( $\Delta p$ ) reales para el campo Ku y las caídas de presión obtenidas con el método de Hurst para el yacimiento Ku considerando un volumen original de aceite, $N=5728$ MM $B_{ce}$ .....	46
<b>Fig. 4.13</b> Comparación entre las caídas de presión ( $\Delta p$ ) reales para el campo Ku y las caídas de presión obtenidas con el método de Hurst para el yacimiento Ku considerando diversos valores de volumen original de aceite.....	48
<b>Fig. 4.14</b> Comparación entre las caídas de presión ( $\Delta p$ ) reales para el campo Ku y las caídas de presión obtenidas con el método de Hurst para el yacimiento Ku, considerando $N = 6150$ MM $B_{ce}$ .....	49
<b>Fig. B.1</b> $I_o(x), K_o(x), I_1(x)$ y $K_1(x)$ .....	60

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 4.1</b> Datos de comportamiento para el yacimiento Ku y de entrada de agua a los yacimientos Abkatún, Pol y Chuc.....	39
<b>Tabla 4.2</b> Entrada de agua al campo Maloob.....	41
<b>Tabla 4.3</b> Cálculo del error ( $DPP$ ) para los volúmenes originales propuestos del campo Ku en la Fig. 4.13.....	49
<b>Tabla A.1</b> Tabla de Transformadas de Laplace.....	57

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

Uno de los mecanismos de producción más importantes en los yacimientos es la entrada de agua, puede arrojar factores de recuperación entre 15 y 60%, dependiendo de las propiedades del acuífero y del tamaño de éste, por lo tanto la caracterización del acuífero resulta relevante. Muy poco se conoce normalmente sobre un acuífero, ya que normalmente se procura no alcanzar dicha zona durante el desarrollo de un pozo petrolero.

La entrada de agua a un yacimiento se puede ver alterada debido al efecto de otros campos que se localicen en el mismo acuífero. Esto se puede afirmar debido a que la entrada de agua está controlada por la caída de presión en los yacimientos, y la caída de presión se verá incrementada debido a la interferencia como se explicará más adelante.

La comunicación hidráulica entre yacimientos era poco estudiada hasta el descubrimiento del campo East Texas, EUA. En México, los yacimientos de uno de los activos más importantes: Ku-Maloob-Zaap, se encuentran localizados en un mismo acuífero; se comenzó a estudiar el efecto de interferencia entre campos debido a que los campos Maloob y Zaap se descubrieron a una presión menor a la esperada, lo mismo sucedió para campos cercanos como: Pol, Chuc, Ixtoc, entre otros. Por lo que se requirió una nueva caracterización de la zona, para poder tomar en cuenta este fenómeno en las técnicas de explotación que se estaban llevando a cabo.

Diversos trabajos se han desarrollado para poder tomar en cuenta la interferencia en la ecuación de balance de materia, y de esta manera estimar un volumen original dinámico de aceite lo más cercano al valor real.

El objetivo de esta tesis es estudiar los métodos de Hurst y de Robinson para estimar el volumen original de aceite de un yacimiento tomando en cuenta la interferencia que ejercen campos localizados en un mismo acuífero.

El trabajo de Hurst tuvo como principal objetivo determinar la caída de presión total en un campo, considerando gasto de producción constante y un acuífero de dimensión infinita, por lo que este trabajo buscó librar dichas consideraciones y modificar el método para que como resultado final se obtenga un valor de volumen original de aceite dinámico,  $N$ , empleando la caída de presión total.

Es importante destacar que Hurst buscó simplificar las ecuaciones al trabajar con ellas en el plano de Laplace, técnica que permitió despejar la caída de presión. En esta tesis se utilizó el algoritmo de Stehfest (1970) para realizar la inversión de la ecuación resultante en el plano de Laplace, a diferencia de Hurst que empleó la transformada de Mellin; por lo que el método de Hurst arroja una solución analítica para la caída de presión y en este trabajo se tendrá una solución numérica.

La inversión numérica mediante el algoritmo de Stehfest resulta muy útil en estudios de ingeniería, y en este trabajo se empleó con el fin de realizar la comparación entre las caídas de presión reales y las obtenidas mediante el algoritmo de Stehfest, para que mediante la variación del volumen original de aceite ( $N$ ) en la ecuación resultante mediante el método de Hurst se buscará la curva que mejor ajusta con los valores reales de caídas de presión como se muestra en el Capítulo 4.

En cuanto al método de Robinson, éste emplea la teoría de Mortada basada en el principio de superposición para añadir un término a la ecuación de balance de materia planteada por Van Everdingen, Timmerman y McMahon (1953), para contemplar el efecto de interferencia entre campos.

Mortada al igual que Hurst consideran un acuífero de dimensión infinita, lo cual puede llevar a un error, como se muestra en el Capítulo 3. La dimensión del acuífero se tomó del trabajo desarrollado por Ortuño (2012), así como propiedades útiles como la

porosidad, permeabilidad y espesor; el estudio elaborado por la compañía “Netherland, Sewell & Associates” (2002) también proporciona propiedades importantes del acuífero.

Este método requiere como dato conocido las entradas de agua a los campos de interferencia, las cuales son determinadas en este trabajo utilizando el método de Van Everdingen y Hurst como se menciona en el Capítulo 2, ya que el autor Robinson no especifica en su artículo el recurso que empleó para el cálculo de las entradas de agua.

En el Capítulo 4, se presenta la aplicación de los dos métodos para la estimación del volumen original de aceite del campo Ku, considerando como campos de interferencia a: Abkatún, Pol, Chuc y Maloob.

En la parte final de este trabajo se presentan conclusiones y recomendaciones útiles para el mejor entendimiento y utilización de este trabajo.

## CAPÍTULO 2

### REVISIÓN DE LA LITERATURA

#### 2.1 Introducción

La evaluación de las reservas de aceite y la predicción del comportamiento de la presión cuando se tienen diferentes gastos de producción, se relacionan al balance volumétrico de los fluidos entrando y saliendo del espacio ocupado por el aceite y gas originalmente presente en la formación, es decir, información importante se puede obtener a partir de un análisis volumétrico del aceite, gas y agua producidos de la formación; la magnitud del cambio en el volumen de la zona de aceite y de gas; y la cantidad de entrada de agua desde el acuífero a la formación productora.

Si el volumen original de aceite y gas es conocido, es relativamente sencillo determinar mediante un balance volumétrico la entrada de agua acumulativa a un yacimiento. Sin embargo, el volumen original de aceite y de gas al igual que la entrada de agua a la formación no es conocida y por tanto debe ser determinada, para ello es necesario asignar una expresión matemática para la entrada de agua que nos permita calcularla, tomando en cuenta que es variable a lo largo del tiempo de explotación de un campo.

La expresión matemática para estimar la entrada de agua en un yacimiento se verá afectada si existe una influencia de otros campos, por la caída de presión adicional que causa la interferencia, y por tanto las estimaciones del volumen original también se verán influenciadas.

En este trabajo se presentan dos métodos para contemplar el efecto de interferencia: Método de Robinson y el Método de Hurst.

## 2.2 Entrada de agua al yacimiento

La entrada de agua a un yacimiento puede contribuir a la producción, si existe una buena comunicación entre el acuífero y la formación, y si el tamaño del acuífero es por lo menos diez veces que el de la formación productora. Varios autores han desarrollado ecuaciones o expresiones que nos permiten estimar la entrada de agua a un yacimiento, uno de los métodos más exactos y empleados es el desarrollado por Van Everdingen y Hurst, el cual emplearemos en este trabajo.

### 2.2.1 Método de Van Everdingen y Hurst

Estos autores presentaron un método para calcular la entrada de agua a un yacimiento de aceite, fue desarrollado al darle solución a la ecuación de difusión mediante el caso de presión constante.

Considera que las propiedades del acuífero se mantienen constantes y la presión en la frontera es igual a la presión en el yacimiento.

$$W_e = 2\pi\phi c_w h r_b^2 \int_0^{t_D} \frac{d\Delta p}{dt_D'} Q_{wD}(t_D - t_D') dt_D' , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1)$$

donde:

$W_e$  = *Entrada de agua al yacimiento*

$r_b$  = *Radio del yacimiento*

$c_w$  = *Compresibilidad del agua*

$h$  = *Espesor del acuífero*

$\phi$  = *Porosidad del acuífero*

$t_D$  = *Tiempo adimensional*

$\Delta p$  = *Diferencia entre la presión inicial de yacimiento y presiones subsecuentes ( $p_i - p$ )*

$$Q_{wD}(t_D) = \text{Entrada de agua adimensional}$$

### 2.2.2 Dimensionamiento del acuífero

El acuífero es una de las principales fuentes de energía de un yacimiento, la relación entre la magnitud del acuífero y el tamaño de los yacimientos localizados en él, según Ortuño (2012), es una variable crítica que afecta la definición del escenario de explotación, factor de recuperación y la determinación del volumen original de aceite de un campo, cuya obtención es el principal objetivo de esta tesis.

Los campos con los que se trabajará en esta tesis pertenecen al Bloque II, el cual se puede observar en la **Fig. 2.1**. Este bloque está constituido por algunos campos de la Región Marina Noreste y del Activo Integral Abkatún-Pol-Chuc, cubriendo un área de 2,269 km<sup>2</sup>, la cual representa un 29.93% del área de estudio.

Según Ortuño la presión inicial del Bloque II era de 350 kg/cm<sup>2</sup> a un plano de referencia de 3000 mvbnm y a Diciembre de 2011 ha declinado a 230 kg/cm<sup>2</sup> debido a la producción de hidrocarburos principalmente de los activos Abkatún-Pol-Chuc y Ku-Maloob-Zaap, y al insuficiente mantenimiento de presión. Se ha extraído un volumen de aceite de 8,849.9 MM B<sub>ce</sub> y 9,547.31 MMM pies<sup>3</sup> de gas. Este bloque, al igual que el Bloque I está confinado por grandes fallas geológicas regionales.

En este bloque se ha inyectado nitrógeno en el campo Ku para mantenimiento de presión, sin embargo ésta no ha sido suficiente debido a que varios campos se encuentran conectados hidráulicamente, a los cuales les han extraído volúmenes significativos de hidrocarburos.

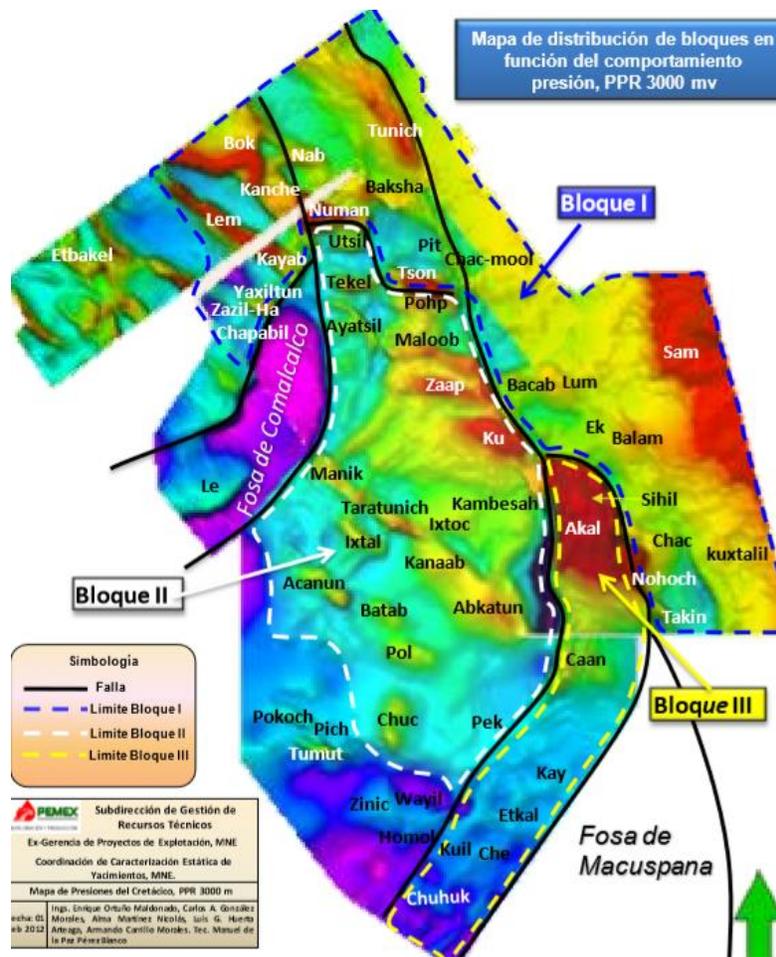


Fig. 2.1 Mapa donde se observa el área de estudio evaluada por Ortuño (2012)

### 2.3 Yacimientos localizados en un acuífero común

Existen diversos métodos para describir el comportamiento de campos localizados en un acuífero en común. Diversos modelos matemáticos han logrado ser desarrollados por autores como: Bell y Shepherd (1951); Mortada (1955); Hurst (1960); Rodríguez, Samaniego y Cinco (1996).

En este trabajo se describirán con detalle los métodos de Hurst y Robinson, éste último basado en la teoría planteada por Mortada



$\phi$  = Porosidad del acuífero

$h$  = Espesor del acuífero (ft)

$c_w$  = Compresibilidad del agua ( $\text{psi}^{-1}$ )

$B_o$  = Factor de volumen del aceite

La Ec. 3.1 se dividirá entre el factor de expansión:  $B_o c_t \Delta p$ .

$$\frac{N_p}{B_o c_t \Delta p} = N + \frac{2\pi r_b^2 \phi h c_w \sum_{t_D} \Delta p' Q_{wD}(t_D)}{5.615 B_o c_t \Delta p}, \dots \dots \dots (3.2)$$

Entonces la relación es lineal para  $N_p/B_o c_t \Delta p$  y  $\sum \Delta p' Q_{wD}(t_D)/B_o c_t \Delta p$  donde la pendiente es la constante  $2\pi r_b^2 \phi h c_w / 5.615$  y la intersección con el eje de las ordenadas es  $N$ .

Para lograr el mejor ajuste del comportamiento del yacimiento con respecto a una línea recta se debe calcular el valor para el intervalo de tiempo adimensional  $\Delta t_D$  correcto.

$$\Delta t_D = \frac{.0002367 k \Delta t}{\phi \mu_w c_w r_b^2}, \dots \dots \dots (3.3)$$

donde:

$k$  = Permeabilidad del acuífero (md)

$\Delta t$  = Tiempo de producción (horas)

$\mu_w$  = Viscosidad del agua (cp)

Como se puede observar, las propiedades más importantes del acuífero se involucran en este término, por lo que para conocer este valor  $\Delta t_D$  para el cual se tiene la menor desviación del comportamiento del yacimiento con respecto a la línea recta descrita por la Ec. 3.1. Se deben variar las propiedades del acuífero que presenten mayor incertidumbre.

La linealidad de la ecuación puede no satisfacerse y atribuirse a las causas siguientes:

- Efectos de la frontera de un acuífero finito (la EBM expresada por la Ec.1 no especifica la dimensión del acuífero; es decir la entrada de agua  $Q(t_D)$  puede corresponder a un acuífero infinito o finito)
- Efecto de interferencia con otros campos localizados en un mismo acuífero

y como se verá más adelante, los efectos anteriores pueden ser corregidos.

La presión de interferencia causada por otros yacimientos resulta en una caída adicional en la presión en el contacto original agua-aceite, y se representa como  $\Delta p'_{in}$ , la cual incrementará la caída de presión  $\Delta p'$  causada por la producción del yacimiento en estudio.

$$(\Delta p'_{in})_j = \left(\frac{\mu_w}{\theta kh}\right)_j \sum_1^n [\Delta W'_e p_D(r_D, t_D)]_j, \quad \dots \quad (3.4)$$

donde:

$\theta$  = Ángulo en el que se presenta la entrada de agua

$\Delta W'_e$  = Cambio instantáneo en la entrada de agua al campo de interferencia

$p_D(r_D, t_D)$  = Función de gasto terminal constante

$j$  = Representa al yacimiento que ejerce interferencia

$n$  = Periodo de producción

La presión total de interferencia en el campo de interés ejercida por  $k$  campos de interferencia será entonces:

$$\sum_1^{j=k} (\Delta p'_{in})_j = \frac{\mu_w}{2\pi kh} \sum_1^{j=k} \sum_1^n [\Delta W'_e p_D(r_D, t_D)]_j \quad \dots \quad (3.5)$$

Para simplificar la expresión anterior, se define el parámetro  $\Delta I$  siguiente:

$$\Delta I = \sum_1^{j=k} \sum_1^n [\Delta W'_e p_D(r_D, t_D)]_j \quad \dots \quad (3.6)$$

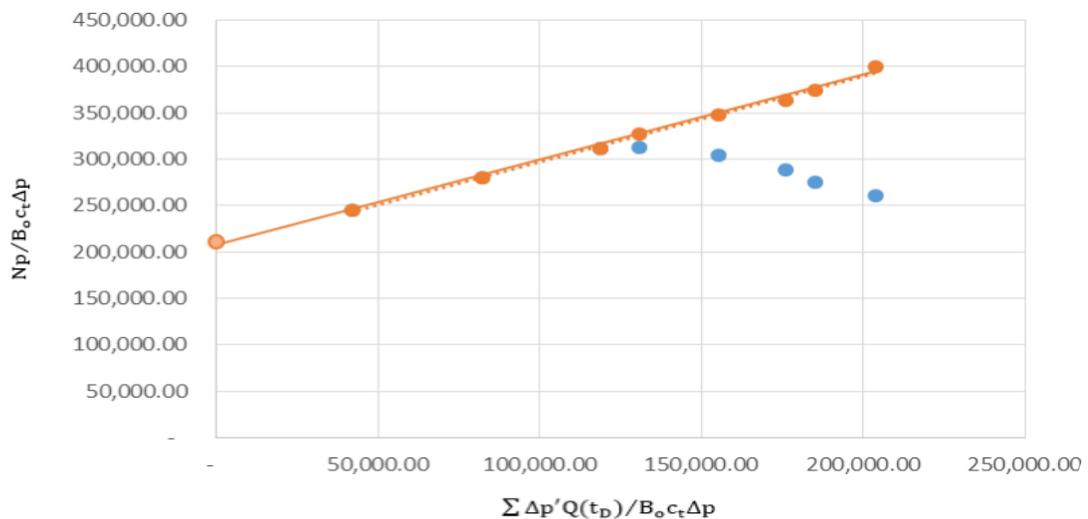
Finalmente la ecuación de balance de materia planteada inicialmente, corregida por los efectos de interferencia causados por los yacimientos vecinos que comparten el acuífero común queda de la siguiente manera:

$$N_p = NB_o c_t \Delta p + \frac{2\pi r_b^2 \phi h c_w}{5.615} \sum_1^n \Delta p' Q_{wD}(t_D) - \frac{2\pi h r_b^2 \phi c_w \mu_w (.0002367)}{2\pi h k} \sum_1^n \Delta I' Q_{wD}(t_D) \quad (3.7)$$

Dividiendo la Ec. 3.7 entre el factor de expansión  $B_o c_t \Delta p$  :

$$\frac{N_p}{B_o c_t \Delta p} + \frac{\Delta t}{B_o c_t \Delta p \Delta t_D} \sum_1^n \Delta I' Q_{wD}(t_D) = N + \left[ \frac{2\pi r_b^2 \phi h c_w}{5.615} \sum_1^n \frac{\Delta p' Q_{wD}(t_D)}{B_o c_t \Delta p} \right] \quad (3.8)$$

En la **Fig. 3.1** se presentan las ecuaciones de balance de materia planteadas por Van Everdingen, Timmerman y McMahon; y Robinson en la forma de la ecuación de una línea recta para un yacimiento sujeto a la interferencia de otros campos. Se observan dos tendencias en la gráfica, una denotada por color naranja y otra por color azul; la línea naranja representa el método de balance de materia planteado por Robinson (Ec. 3.8) y la curva azul representa la ecuación de balance de materia planteada por Van Everdingen, Timmerman y McMahon (Ec. 3.2); la diferencia radica en que la ecuación planteada por Van Everdingen, Timmerman y McMahon no contempla la interferencia y al presentarse dicho fenómeno se desvía de la tendencia de una línea recta.



**Fig. 3.1** Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson

### 3.1.1 Estimación de la entrada de agua a los campos de interferencia

En la Ec. 3.5 se establece que para estimar la presión total de interferencia se necesita conocer el cambio instantáneo en la entrada de agua al campo de interferencia; para ello se debe determinar la entrada de agua a los yacimientos que generan interferencia.

La entrada de agua en forma radial definida por Van Everdingen y Hurst (1949), se expresa por medio de la Ec. 3.9:

$$W_e = 2\pi\phi c_w h r_b^2 \int_0^{t_D} \frac{d\Delta p}{dt'_D} Q_{wD}(t_D - t'_D) dt'_D, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.9)$$

donde:

$r_b$  = Radio del yacimiento

$c_w$  = Compresibilidad del agua

$h$  = Espesor del acuífero

$\phi$  = Porosidad del acuífero

$t_D$  = Tiempo adimensional

Para aproximar la solución de la Ec. 3.9 se empleará la Ec. 3.10 siguiente:

$$W_e = 2\pi\phi c_w h r_b^2 \left\{ \left[ \left( \frac{p_i - p_1}{2} \right) Q_{wD}(t - t_1) \right] + \left[ \left( \frac{p_i - p_2}{2} \right) Q_{wD}(t - t_2) \right] + \left[ \left( \frac{p_1 - p_3}{2} \right) Q_{wD}(t - t_3) \right] + \dots + \left[ \left( \frac{p_{n-2} - p_n}{2} \right) Q_{wD}(t - t_n) \right] \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Programación del método de Robinson

La **Fig. 3.2** presenta un diagrama de flujo para el cálculo del volumen original de aceite,  $N$ . Dicho diagrama fue clave para desarrollar el programa en R studio.

R studio es un programa que se emplea principalmente en análisis estadísticos, permite el uso de una gran cantidad de información en formato de tablas y obtener información importante de las gráficas obtenidas.

En el diagrama de flujo se puede observar que las entradas de agua a los campos de interferencia ( $W_e$ ) se calculan de manera independiente, mediante el uso de la Ec. 3.10, es decir, no forman parte del programa pero se manda a llamar el archivo que contiene dicha información, y de esta manera proceder a calcular el término que contempla la interferencia en la forma que lo hace la Ec. 3.5.

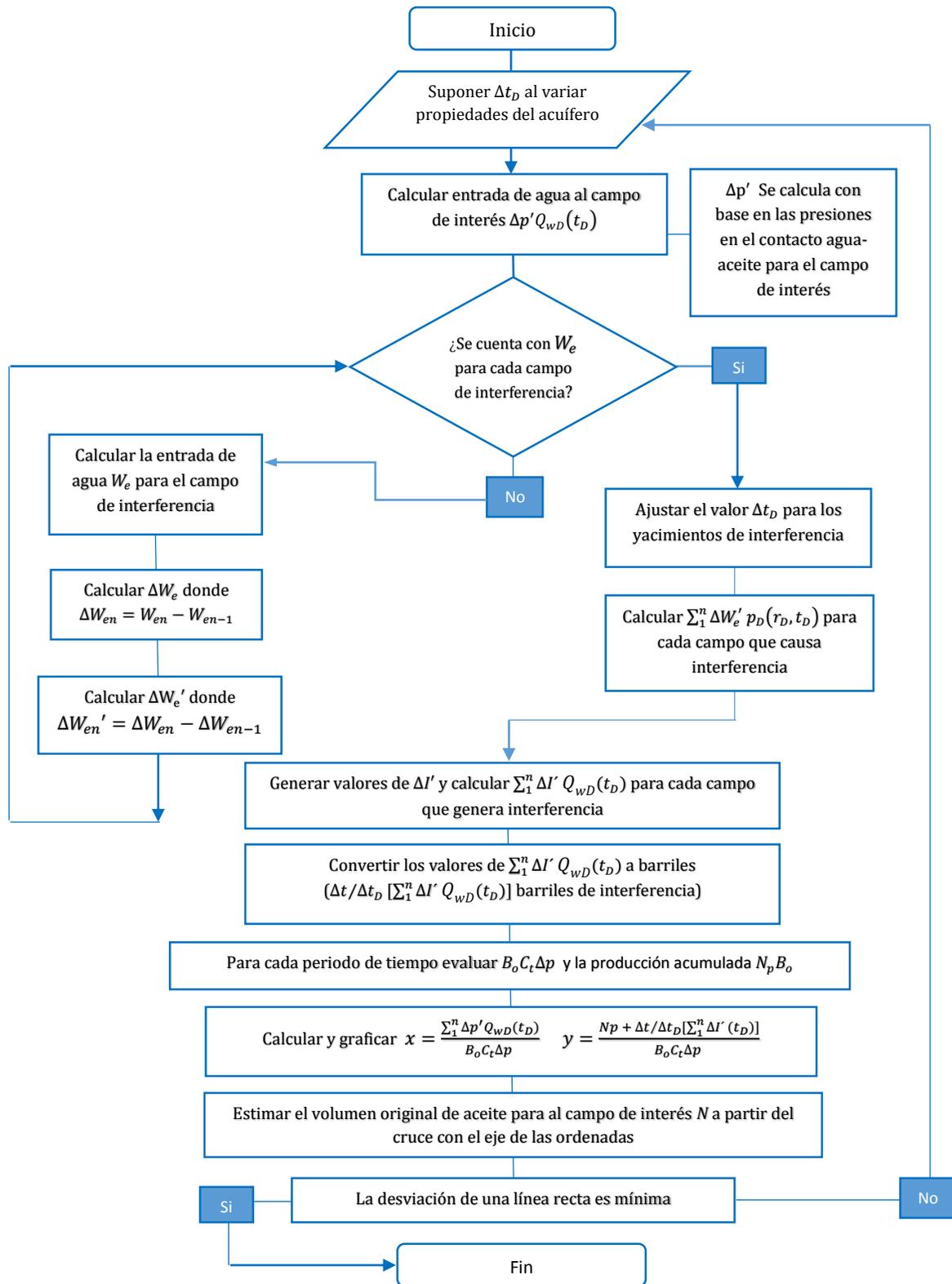


Fig. 3.2 Diagrama de flujo para estimar el volumen original de aceite,  $N$

### 3.1.3 Modificación al método de Robinson: acuífero de dimensión finita

El método de Robinson emplea la teoría de Mortada (1955) para el cálculo de la presión de interferencia, expresada por medio de la Ec. 3.5. Como ya se mencionó previamente, este método considera un acuífero de dimensión infinita; entonces el comportamiento de los yacimientos no se verá afectado por la frontera externa del acuífero durante el periodo de análisis.

Lo anterior puede implícitamente incluir ciertos errores, por lo que ahora se considerará un acuífero de tamaño finito, mediante el uso de las ecuaciones planteadas por Klins, Bouchard y Cable (1988) para el caso de la presión adimensional  $p_D(r_D, t_D)$  a gasto constante, las cuales se emplean para el cálculo de la caída de presión de interferencia  $\Delta p_{in}$ , como se muestra en la Ec. 3.5, así como también para la entrada de agua acumulativa adimensional  $Q_{wD}(t_D)$  en el campo de interés.

- Condición de gasto constante  $p_D(r_D, t_D)$

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2}{(r_D^2 - 1)} \left( \frac{1}{4} + t_D \right) - \frac{(3r_D^4 - 4r_D^4 \log_e r_D - 2r_D^2 - 1)}{4(r_D^2 - 1)^2} + \frac{2e^{-\beta_1^2 t_D} J_1^2(\beta_1 r_D)}{\beta_1^2 [J_1^2(\beta_1 r_D) - J_1^2(\beta_1)]} + \frac{2e^{-\beta_2^2 t_D} J_1^2(\beta_2 r_D)}{\beta_2^2 [J_1^2(\beta_2 r_D) - J_1^2(\beta_2)]} \dots \dots \dots (3.11)$$

Para un acuífero de dimensión finita:

$$\beta_1 = b_0 + b_1[\operatorname{csch}(r_D)] + b_2(r_D)^{b_3} + b_4(r_D)^{b_5}$$

donde:

$$b_0 = -0.00870415$$

$$b_1 = -1.08984$$

$$b_2 = 12.4458$$

$$b_3 = -2.8446$$







Considerando a diferencia de Hurst (1960), un gasto de producción del yacimiento real variable  $Q_o(t)$ , y expresando al tiempo real  $t$  en forma adimensional:

$$N_p = \frac{\phi\mu_w c_w r_b^2}{k} \int_0^{t_D} q_o dt_D, \quad \dots \quad (3.17)$$

donde:

$\mu_w =$  Viscosidad del agua

$k =$  Permeabilidad del acuífero

$q_o =$  Gasto de producción del campo

Sustituyendo las Ecs. 3.9 y 3.17 en la Ec. 3.16, resulta:

$$N(B_{oi}c_o\Delta p) = B_{oi} \frac{\phi\mu_w c_w r_b^2}{k} \int_0^{t_D} q_o dt_D - 2\pi\phi c_w h r_b^2 \int_0^{t_D} \frac{d\Delta p}{dt'_D} Q_{wD}(t_D - t'_D) dt'_D. \quad \dots \quad (3.18)$$

Transformando al plano de Laplace la Ec. 3.18:

$$N(B_{oi}c_o\overline{\Delta p}) = B_{oi} \frac{\phi\mu_w c_w r_b^2 q_o}{k s} - 2\pi\phi c_w h r_b^2 s \overline{\Delta p} \overline{Q}_{wD}, \quad \dots \quad (3.19)$$

Dividiendo la Ec. 3.19 entre  $NB_{oi}c_o$ :

$$\overline{\Delta p} = \frac{2\pi h B_{oi} \phi \mu_w c_w r_b^2 q_o}{2\pi h k N B_{oi} c_o s} - \frac{2\pi\phi c_w h r_b^2}{N B_{oi} c_o} s \overline{\Delta p} \overline{Q}_{wD}; \quad \dots \quad (3.20)$$

Si se define el término  $\sigma$  siguiente para simplificar la ecuación anterior:

$$\sigma = \left(\frac{2\pi}{5.615}\right) \frac{\phi c_w h r_b^2}{N B_{oi} c_o}; \quad \dots \quad (3.21)$$

$$\overline{\Delta p} = \sigma \frac{B_{oi} \mu_w q_o}{2k\pi h s} - \sigma s \overline{\Delta p} \overline{Q}_{wD}. \quad \dots \quad (3.22)$$

Finalmente, despejando la caída de presión en el plano de Laplace  $\overline{\Delta p}$  de la ecuación anterior, y realizando un análisis de unidades para poder obtener la caída de presión en psi, resulta la ecuación siguiente:

$$\overline{\Delta p} = \sigma \frac{887.026 B_{oi} \mu_w}{2k\pi h} \frac{q_o}{s(1+s\sigma\bar{Q}_{wD})} \dots \dots \dots (3.23)$$

La entrada de agua adimensional acumulativa al campo puede expresarse (Van Everdingen y Hurst, 1949):

$$Q_{wD}(t_D) = \int_0^t \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} dt_D \dots \dots \dots (3.24)$$

La transformada de Laplace de la entrada acumulativa adimensional de agua para un acuífero de dimensión infinita se dedujo por Van Everdingen y Hurst (1949):

$$\bar{Q}_{wD}(s) = \frac{K_1(\sqrt{s})}{s^{3/2}K_0(\sqrt{s})} \dots \dots \dots (3.25)$$

Sustituyendo la Ec. 3.25 en la Ec. 3.23:

$$\overline{\Delta p} = \sigma \frac{887.026 B_{oi} \mu_w}{2k\pi h} \frac{q_o}{s(1+s\sigma \frac{K_1(\sqrt{s})}{s^{3/2}K_0(\sqrt{s})})} \dots \dots \dots (3.26)$$

Esta ecuación representa la caída de presión total en el yacimiento debido a su producción. Para obtener la inversión numérica de la Ec. 3.26 se puede emplear el algoritmo de Stehfest.

### 3.2.1 Modificación al método de Hurst: acuífero de dimensión finita

Para considerar un acuífero de dimensión finita, lo primero es establecer que no existe flujo a través de la frontera externa del yacimiento,  $R$ :

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=R} = 0 \dots \dots \dots (3.27)$$

La ecuación de difusión en forma radial se tratará mediante el uso de la transformada de Laplace de la manera siguiente:

$$-\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} ; \dots \dots \dots (3.28)$$

$$\int_0^\infty e^{-st_D} \left(\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right) dt_D = \int_0^\infty e^{-st_D} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} dt_D ; \dots \dots \dots (3.29)$$

$$\frac{d^2 \bar{p}_D(s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{p}_D(s)}{dr_D} = \int_0^\infty e^{-st_D} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} dt_D \dots \dots \dots (3.30)$$

El término del lado derecho de la Ec. 3.30 se transformará al plano de Laplace mediante la Ec. 3.31:

$$\int_0^\infty e^{-st_D} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} dt_D = e^{-st_D} p_{D(t_D)} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st_D} p_{D(t_D)} dt_D = s \bar{p}_D(s) - p_{D(t_D=0)} \dots \dots \dots (3.31)$$

$$\frac{d^2 \bar{p}_D(s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{p}_D(s)}{dr_D} = s \bar{p}_D(s) - p_{D(t_D=0)} \dots \dots \dots (3.32)$$

Karman y Biot (1940), demuestran que la solución general para la Ec. 3.30 está dada por:

$$\bar{p}(r_D, s) = A I_0(r_D \sqrt{s}) + B K_0(r_D \sqrt{s}) \dots \dots \dots (3.33)$$

Para cumplir con las condiciones de frontera, se determinarán los valores para las constantes  $A$  y  $B$  correspondientes.

La transformada para la condición de frontera a un radio  $r_D = 1$ :

$$\frac{1}{s} = A I_0(\sqrt{s}) + B K_0(\sqrt{s}), \dots \dots \dots (3.34)$$

y para la condición  $r_D = R$  :

$$0 = A I_0(R\sqrt{s}) + B K_0(R\sqrt{s}) \dots \dots \dots (3.35)$$

La solución para las constantes  $A$  y  $B$  resolviendo simultáneamente las Ecs. 3.34 y 3.35:

$$A = K_1(\sqrt{s} R) / s [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + K_0(\sqrt{s}) I_1(\sqrt{s} R)]; \dots \dots \dots (3.36)$$

$$B = I_1(\sqrt{s} R) / s [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + K_0(\sqrt{s}) I_1(\sqrt{s} R)] \dots \dots \dots (3.37)$$

Sustituyendo las constantes  $A$  y  $B$  en la Ec. 3.33:

$$\bar{p}(r_D, s) = \frac{[K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s} r_D) + I_1(\sqrt{s} R) K_0(\sqrt{s} r_D)]}{s [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + I_1(\sqrt{s} R) K_0(\sqrt{s})]} \dots \dots \dots (3.38)$$

Para calcular la entrada de agua acumulativa adimensional para una caída de presión unitaria  $\bar{Q}_{wD}(s)$ , se obtendrá la transformada para el gradiente de presión para  $r_D = 1$ :

$$-\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \frac{[I_1(\sqrt{s}R) K_1(\sqrt{s}) - K_1(\sqrt{s}R) I_1(\sqrt{s})]}{s^{1/2} [K_1(\sqrt{s}R) I_0(\sqrt{s}) + I_1(\sqrt{s}R) K_0(\sqrt{s})]} \quad (3.39)$$

Transformando la Ec. 3.24 al plano de Laplace y posteriormente sustituyendo en la Ec. 3.39, se obtiene la ecuación resultante siguiente:

$$\bar{Q}_{wD}(s) = \frac{[I_1(\sqrt{s}R) K_1(\sqrt{s}) - K_1(\sqrt{s}R) I_1(\sqrt{s})]}{s^{3/2} [K_1(\sqrt{s}R) I_0(\sqrt{s}) + I_1(\sqrt{s}R) K_0(\sqrt{s})]} \quad (3.40)$$

Un operador  $s$  adicional aparece del lado derecho de la ecuación debido a la transformación al plano de Laplace.

Finalmente la entrada de agua acumulativa adimensional considerando el tamaño del acuífero está representada por la Ec. 3.40, donde  $R$  es la relación entre el tamaño del acuífero con respecto al tamaño del yacimiento.

Sustituyendo la Ec. 3.40 en la Ec. 3.26, se calcula la caída de presión total contemplando un acuífero de dimensión finita:

$$\bar{\Delta p} = \sigma \frac{887.026 B_{oi} \mu_w}{2k\pi h} \frac{q_o}{s(1+s\sigma \frac{[I_1(\sqrt{s}R) K_1(\sqrt{s}) - K_1(\sqrt{s}R) I_1(\sqrt{s})]}{s^{3/2} [K_1(\sqrt{s}R) I_0(\sqrt{s}) + I_1(\sqrt{s}R) K_0(\sqrt{s})]})} \quad (3.41)$$

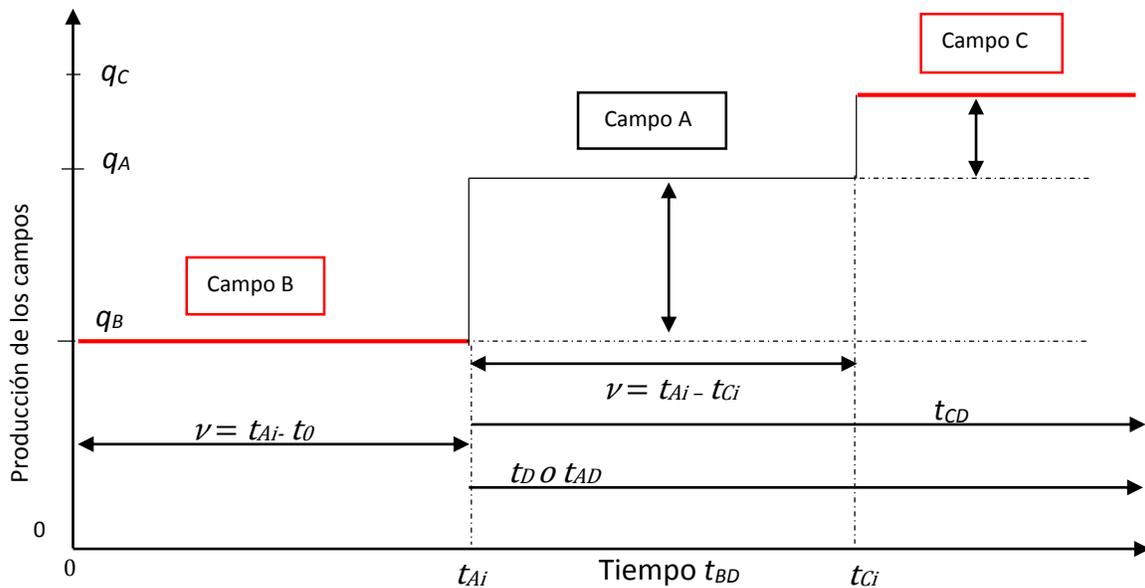
La inversión numérica de la Ec. 3.41 se obtiene mediante el algoritmo de Stehfest.

### 3.2.2 Efecto de interferencia empleando el método de Hurst

Una vez que se ha discutido cómo se puede manipular la ecuación de balance de materia utilizando la transformada de Laplace para un caso simplificado, como lo es un yacimiento bajosaturado, se incluirá el efecto de interferencia entre yacimientos a través de un acuífero común de dimensión finita.

Se explicará con mayor detenimiento la forma en que se considera la interferencia, realizando el desarrollo de las ecuaciones para tres campos localizados en un acuífero común, aunque podría tratarse con “ $n$ ” números de campos.

Se denominará campo B al yacimiento que comenzó su producción primero y por ello en su etapa inicial la caída de presión solo es causada por su producción; cuando se abre el campo A, a partir de este momento los campos A y B estarán sujetos al efecto de interferencia, de la misma forma cuando el campo C entra a producción. El campo C al igual que el A tendrán una caída de presión adicional a lo largo de su vida productiva causada por los campos con los que comparten acuífero, como se puede observar en la **Fig. 3.3**.



**Fig. 3.3** Gráfica donde se muestra el inicio de producción de los campos A, B y C ( $t_{Ai}$ ,  $t_{Ci}$ ) en la secuencia de tiempo total ( $t_{BD}$ )

Con este método desarrollado por Hurst se puede realizar el análisis de cualquier campo en la Fig. 3.3, es decir se pueden desarrollar las ecuaciones para establecer la interferencia que los campos A y C ejercen sobre el Campo B, también el efecto que tienen los yacimientos B y C sobre el Campo A, o la influencia de los yacimientos B y A

sobre el Campo C. Cualquiera de los casos anteriores puede ser desarrollado, incluso puede ampliarse el análisis para incluir más campos de interferencia.

En esta tesis se desarrollará el análisis del Campo A tomando en cuenta la interferencia generada por los campos B y C, siendo este análisis el más completo ya que incluye un campo que se abrió a producción antes que el Campo A (Campo B) y uno después, Campo C.

### Análisis del Campo A contemplando la interferencia de los campos B y C

Para realizar el análisis del Campo A considerando el efecto de los campos B y C, se modificará la Ec. 3.18 en el término que involucra la entrada de agua al yacimiento A. El efecto del Campo B como se puede observar en la Fig. 3.3 afectará al yacimiento A durante toda su vida productiva y el Campo C a partir de su apertura. Con base en este razonamiento,

$$N(B_{oi}c_o\Delta p) = B_{oi} \frac{\phi\mu_w c_w r_A^2}{k} \int_0^{t_{AD}} q_o dt_{AD} - 2\pi\phi c_w h r_A^2 \int_0^{t_{AD}} \frac{d(\Delta p - \Delta p^{AB} - \Delta p^{AC})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD}, \dots \dots \dots (3.42)$$

la caída de presión total  $\Delta p$ , es la diferencia entre la presión inicial del yacimiento y las presiones desde el inicio de producción del campo de interferencia y presiones subsecuentes; la caída de presión de interferencia adicional debida a la producción de los yacimientos B y C, se denotará como  $\Delta p^{AB}$  y  $\Delta p^{AC}$  respectivamente. Más adelante se demostrará analíticamente como la caída de presión total ( $\Delta p$ ) toma en cuenta la caída de presión debida a interferencia ( $\Delta p^{AB}$ ,  $\Delta p^{AC}$ ).

En la Ec. 3.42, basada en la Ec. 3.18, se establece que el cambio en el volumen de los fluidos está controlado por la caída de presión total en el campo. Sin embargo, el gradiente de presión que causa la entrada de agua al yacimiento, resulta de la caída de

presión total ( $\Delta p$ ) menos el cambio de presión debido a la producción del campo B,  $\Delta p^{AB}$  y posteriormente del campo C,  $\Delta p^{AC}$ .

Algunos de los trabajos que se han realizado en el pasado en cuanto a interferencia entre yacimientos que producen de un acuífero común constituyen básicamente una aplicación del principio de superposición para considerar el efecto del comportamiento de un campo en el otro. Este concepto sigue teniendo validez; en este estudio se incorpora el mecanismo de entrada de agua modificando la caída de presión total  $\Delta p$ , por el efecto de interferencia causada por otro(s) campo(s) a un yacimiento.

En este trabajo se amplían los resultados de Hurst (1960), expresando de manera explícita la caída de presión ( $\Delta p$ ), relacionada con todos los factores que contribuyen a su variación. El ajuste para la expansión de los fluidos en el yacimiento se toma en cuenta de manera automática (implícita) en estas ecuaciones, sin recurrir a procedimientos de ensayo y error para seleccionar las ecuaciones de estado con la caída de presión  $\Delta p$ .

Se realizará, como se mostró en la sección anterior, el despeje e igualación de la caída de presión ( $\Delta p$ ) mediante el uso de la transformada de Laplace. Sin embargo, las condiciones de frontera deben considerarse al aplicar esta transformada para los diferentes cambios en la presión y variables asociadas en la Ec. 3.42.

La caída de presión es cero antes de abrir el yacimiento a producción (al tiempo cero) como se observa en la Fig. 3.3, por lo que la transformada de  $d\Delta p/dt_{AD}$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dp(t)}{dt} dt = e^{-st} p(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} p(t) dt = s\bar{p}(s) - p_{(t=0)} \dots \dots \dots (3.43)$$

Con respecto a la transformada de  $\Delta p^{AB}$  lo anterior no aplica. Se sabe que desde antes del inicio de la producción del Campo A, el yacimiento B ya ejercía una caída de presión inicial  $\Delta p_0^{AB}$  en el Campo A, de la misma forma cualquier yacimiento que haya entrado a producción antes que el Campo A.

Ahora transformando al plano de Laplace la Ec. 3.42:

$$\begin{aligned}
 NB_{oi}c_o\overline{\Delta p} &= B_{oi}\frac{\phi\mu_w c_w r_A^2 q_o}{k} \frac{1}{s} - 2\pi\phi c_w h r_A^2 s_A \overline{\Delta p} \overline{Q}_{wD} \\
 &+ 2\pi\phi c_w h r_A^2 \int_0^\infty e^{-s_A t_{AD}} \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AB}}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD}-t'_{AD}) dt'_{AD} dt_{AD} + \\
 &2\pi\phi c_w h r_A^2 \int_0^\infty e^{-s_A t_{AD}} \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AC}}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD}-t'_{AD}) dt'_{AD} dt_{AD} \dots \dots \dots (3.44)
 \end{aligned}$$

Las caídas de presión  $\Delta p^{AB}$  y  $\Delta p^{AC}$  se encuentran expresadas en la Ec. 3.44 en función del tiempo adimensional  $t_{AD}$ ; en el análisis final se debe relacionar con respecto a las propiedades del yacimiento de interferencia en estudio, los campos B y C.

Primero se realizará el análisis de la integral indefinida involucrada con la caída de presión debida a la producción del campo B,  $\Delta p^{AB}$ , y se denotará como lo muestra la Ec. 3.45:

$$S(t_{AD}) = \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AB}(t'_{AD})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD}-t'_{AD}) dt'_{AD} \dots \dots \dots (3.45)$$

Más adelante se realizará el procedimiento análogo para la integral indefinida incluyendo a la caída de presión:  $\Delta p^{AC}$ .

Definiendo parámetros importantes como:

$$\Delta p^{AB} = \Delta p^{AB}(r_{AB}', t_{BD}), \dots \dots \dots (3.46)$$

$$\Delta p^{AC} = \Delta p^{AC}(r_{AC}', t_{CD}), \dots \dots \dots (3.47)$$

donde:

$$r_{AB}' = r_{AB} / r_B, \dots \dots \dots (3.48)$$

$r_{AB}$  = Distancia entre los campos A y B

$r_B$  = Radio equivalente del campo B



donde:

$s_A = \text{Operador para el yacimiento A}$

$$s_B = \eta^2_{AB} s_A, \dots \dots \dots (3.53)$$

$$s_C = \eta^2_{AC} s_A; \dots \dots \dots (3.54)$$

donde:

$$\eta^2_{AB} = \eta'_A / \eta'_B; \dots \dots \dots (3.55)$$

$$\eta^2_{AC} = \eta'_A / \eta'_C; \dots \dots \dots (3.56)$$

también es importante definir:

$$\eta^2_{BA} = \eta'_B / \eta'_A; \dots \dots \dots (3.57)$$

$$\eta^2_{CA} = \eta'_C / \eta'_A; \dots \dots \dots (3.58)$$

donde:

$$\eta'_A = (k/\phi\mu_w c_w r^2)_A \quad ; \quad \eta'_B = (k/\phi\mu_w c_w r^2)_B \quad ; \quad \eta'_C = (k/\phi\mu_w c_w r^2)_C \dots \dots \dots (3.59)$$

La identificación de  $\Delta p^{AB}$  con respecto al tiempo adimensional  $t_{AD}$  indica que aunque este cambio de presión existe antes del descubrimiento del Campo A, Hurst solamente lo incorporó a partir del inicio de su producción, afectando la entrada de agua.

Es decir, lo que indica  $\Delta p^{AB}$  es la diferencia de presión entre  $\Delta p^{AB}$  y  $\Delta p_o^{AB}$ , la cual es cero antes del inicio de la producción del campo.

El considerar que el efecto del Campo B sobre el Campo A inicia a partir que éste abre a producción es una de las limitaciones más importantes de este método, ya que no considera la expansión de los fluidos del Campo A cuando se encuentra cerrado, esta expansión involucra una aportación de fluidos del Campo A al acuífero.

Como se mencionó anteriormente la caída de presión  $\Delta p^{AB}$  en ecuaciones anteriores está referida al tiempo  $t_{AD}$ ; sin embargo es necesario relacionar  $\Delta p^{AB}$  con el campo que la origina (Campo B) y referirla a la escala de tiempo total, es decir al inicio de la producción del Campo B, Fig. 3.3.

$$t_{BD} = \frac{\eta'_B}{\eta'_A} t_{AD} + \eta'_B \nu, \quad . . . . . (3.60)$$

donde:

$$\nu = t_{Ai} - t_0$$

$t_{Ai}$  = Tiempo adimensional de inicio de producción del campo A

$t_0$  = Tiempo adimensional de inicio de producción del campo B

Con la Ec. 3.60 se puede escribir la Ec. 3.45 en términos del tiempo adimensional  $t_{BD}$  y expresarla en términos de la escala de tiempo total. Para ello, primero se realizará el cambio en la caída de presión adicional  $\Delta p^{AB}$  a la secuencia de tiempo total ( $t_{BD}$ ), con la ayuda de la Fig. 3.3 y de la Ec. 3.60; sabiendo que empieza a actuar con el inicio de la producción del campo A, se tiene que:

$$S(t_{AD}) = \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AB}(\frac{\eta'_B}{\eta'_A} t'_{AD})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD} . . . . . (3.61)$$

En los límites de integración nos indica que desde el tiempo cero en la escala de tiempo  $t_{AD}$ , se tiene el efecto del campo B.

Ahora sustituyendo  $t'_{AD}$  en términos de  $t'_{BD}$ :

$$S(t_{AD}) = \int_{\frac{\eta'_B}{\eta'_A} t_{AD} + \eta'_B \nu}^{\frac{\eta'_B}{\eta'_A} t_{AD} + \eta'_B \nu + \eta'_B t_{BD}} \frac{\eta'_B}{\eta'_A} \frac{d\Delta p^{AB}(t'_{BD} - \eta'_B \nu)}{dt'_{BD}} Q' \left( t_{AD} - \frac{\eta'_A}{\eta'_B} (t'_{BD} - \eta'_B \nu) \right) \frac{\eta'_A}{\eta'_B} dt'_{BD} , \quad . . . (3.62)$$

seguido de  $t_{AD}$  en términos de  $t_{BD}$ :

$$S(t_{BD}) = \int_{\eta'_{B\nu}}^{t_{BD}} \frac{d\Delta p^{AB}(t'_{BD} - \eta'_{B\nu})}{dt'_{BD}} \frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} Q' \left( \frac{\eta'_{A\nu}}{\eta'_{B\nu}} (t_{BD} - \eta'_{B\nu}) - \frac{\eta'_{A\nu}}{\eta'_{B\nu}} (t'_{BD} - \eta_{B\nu}) \right) dt'_{BD} \quad (3.63)$$

Finalmente resulta la Ec. 3.61 en términos del tiempo adimensional  $t_{BD}$ :

$$S(t_{BD}) = \frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} \int_{\eta'_{B\nu}}^{t_{BD}} \frac{d\Delta p^{AB}(t'_{BD} - \eta'_{B\nu})}{dt'_{BD}} Q' \left( \frac{\eta'_{A\nu}}{\eta'_{B\nu}} (t_{BD} - t'_{BD}) \right) dt'_{BD} \quad (3.64)$$

Para realizar la inversión de la Ec. 3.64 se utilizan algunos teoremas que se mencionan en el Apéndice D, si se refiere a dicho apéndice se observa que dicha ecuación tiene la forma de la Ec. D.10 del Teorema II:

$$\bar{G}(s_B) = \int_0^\infty e^{-s_B u} \frac{d\Delta p^{AB}(u)}{du} = s_B \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \Delta p_0^{AB} \quad (3.65)$$

Utilizando la Ec. D.2 del Teorema I, con  $a$  igual a cero:

$$\bar{F}(s_B) = \int_0^\infty e^{-s_B t_{BD}} \frac{dQ\left(\frac{\eta'_{A\nu}}{\eta'_{B\nu}} t_{BD}\right)}{du} = \frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} \bar{Q}_{wD}\left(\frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} s_B\right) \quad (3.66)$$

entonces:

$$\bar{S}(s_B) = e^{-s_B \eta'_{B\nu}} \left( \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_B} \right) s_B \left( \frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} \right)^2 \bar{Q}_{wD}\left(\frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} s_B\right) \quad (3.67)$$

La Ec. 3.67 no es la solución que se busca todavía; es necesario obtener la transformada de Laplace para cada término en la Ec. 3.44 con respecto a  $s_A$  en la secuencia de tiempo  $t_{AD}$ . Sin embargo la Ec. 3.67 se utilizará para determinar la transformada como lo requiere la Ec. 3.44 mediante el uso de la fórmula de inversión de Mellin, que se muestra la ecuación siguiente:

$$P(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda \quad (3.68)$$

El parámetro  $\lambda$  puede ser el operador  $s_A$  y  $s_B$ , sin embargo como la transformada de Laplace mostrada en la Ec. 3.67 está basada en la secuencia de tiempo total para el sistema, la inversión debe estar por tanto en el tiempo  $t_{BD}$ , y con su operador asociado  $s_B$ . Para este problema no tendremos que realizar la integración de contorno bastará con trabajar con el integrando de la Ec. 3.68:

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{s_B t_{BD}} \bar{S}(s_B) ds_B \dots \dots \dots (3.69)$$

Sustituyendo la Ec. 3.67 en la Ec. 3.69:

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{-s_B(t_{BD} - \eta'_{B\nu})} (\bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_B}) \frac{\eta'_{B\nu} \eta'_{B s_B}}{\eta'_{A\nu} \eta'_{A s_B}} \bar{Q}_{wD}(\frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} s_B) ds_B \dots \dots \dots (3.70)$$

Una vez que se estableció mediante la fórmula de Mellin la Ec.3.69, se cambiará la Ec. 3.70 a la secuencia de tiempo del campo A ( $t_{AD}$ ) y a su operador correspondiente ( $s_A$ ) utilizando las Ecs. 3.53 y 3.60, y así la Ec. 3.44 se encuentre completamente en los términos correspondientes al campo A:

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{s_A t_{AD}} \left( \frac{\eta'_{A\nu}}{\eta'_{B\nu}} \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_A} \right) \frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} s_A \bar{Q}_{wD}(s_A) ds_A \dots \dots \dots (3.71)$$

Se realizó hasta el momento la sustitución de los valores respecto a la inversión, entonces lo que resulta de la Ec. 3.72 es comparable con la Ec. 3.67 por lo que se ha encontrado la solución de la integral infinita de la Ec. 3.44:

$$\bar{S}(s_A) = \left( \frac{\eta'_{A\nu}}{\eta'_{B\nu}} \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_A} \right) \frac{\eta'_{B\nu}}{\eta'_{A\nu}} s_A \bar{Q}_{wD}(s_A) \dots \dots \dots (3.72)$$

Se continúa con la integral indefinida que involucra a la caída de presión,  $\Delta p^{AC}$  en la Ec. 3.44 que se expresa mediante la Ec. 3.73, de manera similar a lo previamente establecido para la integral indefinida involucrando  $\Delta p^{AB}$ .

$$S(t_{AD}) = \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AC}(t'_{AD})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD} \dots \dots \dots (3.73)$$

La caída de presión  $\Delta p^{AC}$  en ecuaciones anteriores está referida al tiempo  $t_{AD}$ , pero se debe considerar que el efecto del campo C actúa hasta que éste entra a producción, como lo establece Hurst, por lo que la caída de presión por interferencia actuará en el tiempo:  $t'_{AD} - \eta'_{A\nu}$ .

La ecuación que nos permitirá realizar el cambio de la escala  $t_{AD}$  a la correspondiente para el campo C:  $t_{CD}$  y viceversa es la ecuación siguiente:

$$t_{AD} = \frac{\eta'_A}{\eta'_C} t_{CD} \quad \dots \quad (3.74)$$

$$S(t_{AD}) = \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AC}(t'_{AD} - \eta'_{AV})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD} \quad \dots \quad (3.75)$$

Ahora se cambiará la Ec. 3.75 a la escala de tiempo  $t_{CD}$ , para ello se refiere a la Fig. 3.3, y se debe tener especial atención que los límites de integración reflejen que el efecto del campo C actúa hasta que éste entra a producción:

$$S(t_{CD}) = \frac{\eta'_C}{\eta'_A} \int_0^{t_{CD}} \frac{d\Delta p^{AC}(t'_{CD} - \eta'_{CV})}{dt'_{CD}} Q'\left(\frac{\eta'_A}{\eta'_C}(t_{CD} - t'_{CD})\right) dt'_{CD} \quad \dots \quad (3.76)$$

Se realizará la inversión de la Ec. 3.76:

$$\bar{G}(s_C) = \int_0^\infty e^{-s_C u} \frac{d\Delta p^{AC}(u)}{du} du = s_C \bar{\Delta p}^{AC}(s_C) ; \quad \dots \quad (3.77)$$

$$\bar{F}(s_C) = \int_0^\infty e^{-s_C t_{CD}} \frac{dQ\left(\frac{\eta'_A}{\eta'_C} t_{CD}\right)}{du} = \frac{\eta'_C}{\eta'_A} \bar{Q}_{wD}\left(\frac{\eta'_C}{\eta'_A} s_C\right) , \quad \dots \quad (3.78)$$

entonces:

$$\bar{S}(s_C) = e^{-s_C \eta'_{CV}} \frac{\eta'_C s_C}{\eta'_A} \bar{\Delta p}^{AC}(s_C) \bar{Q}_{wD}\left(\frac{\eta'_C}{\eta'_A} s_C\right) \quad \dots \quad (3.79)$$

Es necesario obtener la transformada de Laplace para cada término en la Ec. 3.44 con respecto a  $s_A$  en la secuencia de tiempo  $t_{AD}$ . La Ec. 3.79 se utilizará para determinar la transformada como lo requiere la Ec. 3.44 mediante el uso de la fórmula de inversión de Mellin, como se hizo anteriormente.

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{s_C t_{CD}} \bar{S}(s_C) ds_C \quad \dots \quad (3.80)$$

Sustituyendo la Ec. 3.79 en la Ec. 3.80:

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{s_C (t_{CD} - \eta'_{CV})} \frac{\eta'_C s_C}{\eta'_A} \bar{\Delta p}^{AC}(s_C) \bar{Q}_{wD}\left(\frac{\eta'_C}{\eta'_A} s_C\right) ds_C \quad \dots \quad (3.81)$$

Una vez que se estableció mediante la fórmula de Mellin correspondiente, se cambiará la Ec. 3.81 a la secuencia de tiempo del Campo A ( $t_{AD}$ ) y a su operador correspondiente

( $s_A$ ) y así la Ec. 3.44 se encuentre completamente en los términos correspondientes al Campo A:

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{-s_A \eta'_{A^v} \frac{s_A \eta'_{A^v}}{\eta'_C} \Delta \bar{p}^{AC}(s_C)} \bar{Q}_{wD}(s_A) ds_A \dots \dots \dots (3.82)$$

Se realizó hasta el momento la sustitución de los valores respecto a la fórmula de inversión, la Ec. 3.83 es la solución de la integral infinita de la Ec. 3.44:

$$\bar{S}(s_A) = e^{-s_A \eta'_{A^v} \frac{s_A \eta'_{A^v}}{\eta'_C} \Delta \bar{p}^{AC}(s_C)} \bar{Q}_{wD}(s_C) \dots \dots \dots (3.83)$$

Incorporando las Ecs. 3.72 y 3.83 a la Ec. 3.44:

$$\begin{aligned} NB_{oi} c_o \bar{\Delta p} &= B_{oi} \frac{\phi \mu_w c_w r_A^2 q_o}{k s_A} - 2\pi \phi c_w h r_A^2 s_A \bar{\Delta p} \bar{Q}_{wD} \\ &+ 2\pi \phi c_w h r_A^2 \left( \frac{\eta'_A}{\eta'_B} \Delta \bar{p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_A} \right) \frac{\eta'_B}{\eta'_A} s_A \bar{Q}_{wD}(s_A) + \\ &2\pi \phi c_w h r_A^2 e^{-s_A \eta'_{A^v} \frac{s_A \eta'_{A^v}}{\eta'_C} \Delta \bar{p}^{AC}(s_C)} \bar{Q}_{wD}(s_C) \dots \dots \dots (3.84) \end{aligned}$$

Despejando la caída de presión en el plano de Laplace  $\bar{\Delta p}$  de la ecuación anterior y realizando un análisis de unidades para poder obtener la caída de presión en psi, resulta la siguiente ecuación:

$$\bar{\Delta p} = \frac{887.026 \sigma B_{oi} \mu_w q_o}{2\pi k h s_A (1 + \sigma s_A \bar{Q}_{wD})} + \frac{\sigma s_A \bar{\Delta p}^{AB} \bar{Q}_{wD}}{(1 + \sigma s_A \bar{Q}_{wD})} - \frac{\sigma \eta_{BA}^2 \Delta p_0^{AB} \bar{Q}_{wD}}{(1 + \sigma s_A \bar{Q}_{wD})} + \frac{\sigma e^{-s_A \eta'_{A^v} \frac{s_A \eta'_{A^v}}{\eta'_C} \Delta \bar{p}^{AC}(s_C)} \bar{Q}_{wD}}{(1 + \sigma s_A \bar{Q}_{wD})} \dots \dots (3.85)$$

Hasta ahora se ha tratado la caída de presión en el campo A debido a la interferencia del campo B,  $\bar{\Delta p}^{AB}$  y del campo C,  $\bar{\Delta p}^{AC}$  de manera simbólica.

Para conocer la caída de presión por interferencia  $\bar{\Delta p}^{AB}$ , se estudiará el campo B y el acuífero en común únicamente, es decir se realizará un balance de la producción del campo y la entrada de agua del acuífero al campo necesaria para reemplazar el espacio que han dejado los fluidos producidos, y de esta manera obtener la caída de presión efectiva en el acuífero, lo mismo se realizará para el campo C.

$$\bar{\Delta p} = \sigma_B \left( \frac{141.17 B_{oi} \mu_w q_o}{kh} \right)_B \frac{1}{s_B (1+s_B \sigma_B \bar{Q}_{wD})} \dots \dots \dots (3.23)$$

Con la Ec. 3.23 se puede calcular la caída de presión efectiva en el yacimiento B debido a su producción sin contemplar interferencia, indicando la entrada de agua a este campo. La caída de presión antes mencionada debe contemplarse en el campo A para así establecer la interferencia.

La caída de presión total considerando un gasto variable de producción en el campo se determina mediante la ecuación siguiente:

$$\Delta p = q_{o(0)} P(t_D) + \int_0^{t_D} \frac{dq_o(t'_D)}{dt'_D} P(t_D - t'_D) dt'_D, \dots \dots \dots (3.86)$$

donde:

$q_o$  = Gasto variable del campo

$P(t_D)$  = Caída de presión para el caso de gasto constante

La transformada de la Ec. 3.86:

$$\bar{\Delta p} = s \bar{q}_o \bar{P}(s), \dots \dots \dots (3.87)$$

donde:

$$\bar{P}(r,s) = \frac{K_o(r\sqrt{s})}{s^{3/2} K_1(\sqrt{s})} \dots \dots \dots (3.88)$$

Se igualan las Ecs. 3.23 y 3.87, y se sustituye la Ec. 3.88 en la ecuación resultante:

$$\bar{q}_o = \sigma_B \left( \frac{141.17 B_{oi} \mu_w q_o}{kh} \right)_B \frac{K_1(\sqrt{s_B})}{\sqrt{s_B} K_o(\sqrt{s_B}) [1+s_B \sigma_B \bar{Q}_{wD}]} \dots \dots \dots (3.89)$$

Sustituyendo las Ecs. 3.88 y 3.89 en la Ec. 3.87:

$$\bar{\Delta p}^{AB} = \sigma_B \left( \frac{141.17 B_{oi} \mu_w q_o}{kh} \right)_B \frac{K_o(r'_{AB} \sqrt{s_B})}{s_B K_o(\sqrt{s_B}) [1+s_B \sigma_B \bar{Q}_{wD}]} \dots \dots \dots (3.90)$$

De manera similar se obtiene la caída de presión en el campo A causada por la producción del campo C,  $\overline{\Delta p}^{AC}$ :

$$\overline{\Delta p}^{AC} = \sigma_C \left( \frac{141.17 B_{oi} \mu_w q_o}{kh} \right)_C \frac{K_o(r'_{AC} \sqrt{s_C})}{s_C K_o(\sqrt{s_C}) [1+s_C \sigma_C \bar{Q}_{wD}]} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3.91)$$

Finalmente introduciendo las Ecs. 3.90 y 3.91 en la Ec. 3.85:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} = & \frac{141.17 \sigma_B B_{oi} \mu_w q_o}{khs(1+\sigma_S \bar{Q}_{wD})} + \frac{\sigma_S A \bar{Q}_{wD}}{(1+\sigma_S \bar{Q}_{wD})} \left( \frac{141.17 \sigma B_{oi} \mu_w q_o}{kh} \right)_B \frac{K_o(r'_{AB} \sqrt{s_B})}{s_B K_o(\sqrt{s_B}) [1+s_B \sigma_B \bar{Q}_{wD}]} - \frac{\sigma \Delta p_0^{AB} \eta^2_{BA} \bar{Q}_{wD}}{(1+\sigma_S \bar{Q}_{wD})} + \\ & \frac{\sigma e^{-s_A \eta^1 A^v \eta^2_{AC} S_A \bar{Q}_{wD}}}{(1+\sigma_S A \bar{Q}_{wD})} \left( \frac{141.17 \sigma B_{oi} \mu_w q_o}{kh} \right)_C \frac{K_o(r'_{AC} \sqrt{s_C})}{s_C K_o(\sqrt{s_C}) [1+s_C \sigma_C \bar{Q}_{wD}]} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3.92) \end{aligned}$$

Esta ecuación representa la caída de presión total en el yacimiento A debido a su producción y a la interferencia de los campos B y C. Para realizar la inversión numérica de esta ecuación se ocupará el algoritmo de Stehfest.

De la misma forma puede realizarse el análisis del campo B considerando como yacimientos de interferencia a los campos A y C, así también para el Campo C tomando en cuenta el efecto de los yacimientos A y B.

## CAPÍTULO 4

### CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA DE CAMPOS: KU, ABKATÚN, POL, CHUC, MALOOB Y SU ACUÍFERO COMÚN

#### 4.1 Método de Robinson aplicado al campo Ku y campos de interferencia: Abkatún, Pol y Chuc

Se elaboró un programa en R Studio, el cual comienza con el cálculo del intervalo de tiempo adimensional  $\Delta t_D$ , en el que se involucran todas las propiedades relevantes del acuífero; este valor se puede variar sistemáticamente considerando los rangos físicos para las propiedades del acuífero disponibles, hasta lograr el mejor ajuste posible; para este cálculo se empleó un valor de difusividad del acuífero hidráulica ( $\eta = k_a / \phi \mu_a c_t$ ) de  $3.75 \times 10^8 (lb/pg^2 * md) / cp$ , un delta de tiempo real igual a 6 meses, y el radio del campo de interés (Ku), que es de 12278.249 ft, obteniéndose como resultado un intervalo de tiempo adimensional igual a 3.

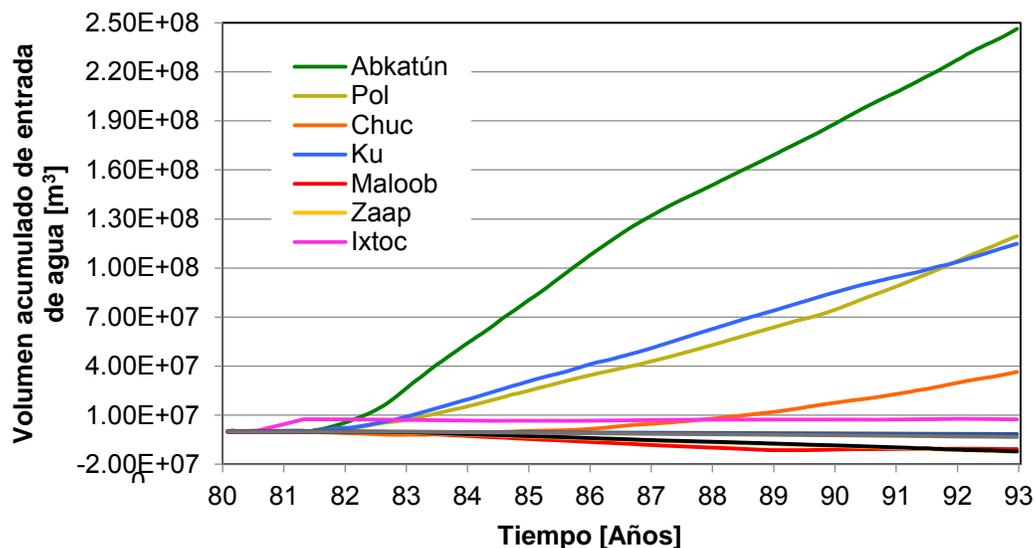
El valor óptimo del intervalo de tiempo adimensional se determina empleando la mejor información para las propiedades del acuífero involucradas en el cálculo de  $\Delta t_D$ , en este estudio se emplearon las estimadas por Ortuño M. (2012) y la compañía “Netherland, Sewell & Associates” (2002).

Empleando el intervalo de tiempo adimensional calculado, se obtiene el valor de la entrada de agua adimensional al yacimiento Ku,  $Q_{wD}(t_D)$ ; es decir, para el caso de presión constante en el contacto original agua-aceite para un acuífero infinito, con una aproximación polinomial planteada por Klins, Bouchard y Cable (1988).

Ahora empleando el principio de superposición se calculará la entrada de agua al campo Ku, por el momento sin contemplar el efecto de interferencia:  $\Delta p' Q_{wD}(t_D)$  empleándose los datos de producción y las presiones promedio del yacimiento.

Similarmente para cada uno de los campos que generan efectos de interferencia, se debe calcular su entrada de agua mediante la Ec. 3.9; en el trabajo presente se seleccionaron para el análisis los campos Abkatún, Pol, y Chuc, debido a su alta producción en los años 80's, la cual afectó al yacimiento Ku.

Se incorporó el efecto de estos tres campos ya que en ellos existe una entrada de agua importante, como se puede observar en la **Fig. 4.1** elaborada por Parra (2014), en la que se incluye la entrada de agua que se presenta en los yacimientos Abkatún, Pol, Chuc, Ku, Maloob, Zaap, Ixtoc, Kutz, Ayatzil y Tekel, que están bajo la influencia del acuífero común que se tiene en el Bloque II de la Región Marina (Ortuño, 2012).



**Fig. 4.1** Variación de la entrada de agua acumulativa en los yacimientos del Bloque II (Parra, 2014)

Se calcula un intervalo de tiempo adimensional para cada campo que ejerce interferencia en el yacimiento Ku; para ello se necesita conocer el radio equivalente de hidrocarburos de cada uno de estos yacimientos.

Una vez que se cuenta con la estimación para el tiempo adimensional  $\Delta t_D$ , se obtiene la presión adimensional  $p_D(r_D, t_D)$  correspondiente al caso de gasto de entrada de agua constante; este valor, al igual que la entrada de agua adimensional  $Q_{wD}(t_D)$ , se calcularon empleando una aproximación polinomial.

Ahora bien, con los datos anteriores se obtiene la caída de presión en el yacimiento causada por los campos de interferencia ( $\Delta p_{in}$ ).

Finalmente se procede a corregir por el efecto de interferencia, y ajustar mediante el método de mínimos cuadrados la ecuación de balance de materia, considerando el término de interferencia para así poder obtener la intersección con el eje de las ordenadas, el cual indica el volumen original de hidrocarburos en el campo de interés,  $N$ .

Los cálculos de balance de materia son válidos una vez que se han alcanzado condiciones de flujo pseudoestacionario (representado por: pss, “pseudo steady state”) en el sistema yacimientos - acuífero común, por lo que se estimó este tiempo de interés  $t_{Dpss}$ , para así seleccionar los datos que sean apropiados para estimar el volumen original de aceite del yacimiento de interés, ya que si se emplearan todos se calcularía un valor incorrecto de aceite del yacimiento de interés; en particular para el yacimiento Ku. La expresión a emplearse es la siguiente (Earlougher, 1974):

$$\Delta t_{Dpss} = \frac{2.367 \times 10^{-4} \eta_a t_{pss \text{ Bloque II}}}{r_{\text{bloque II}}^2} = \frac{1}{4} \dots \dots \dots (4.1)$$

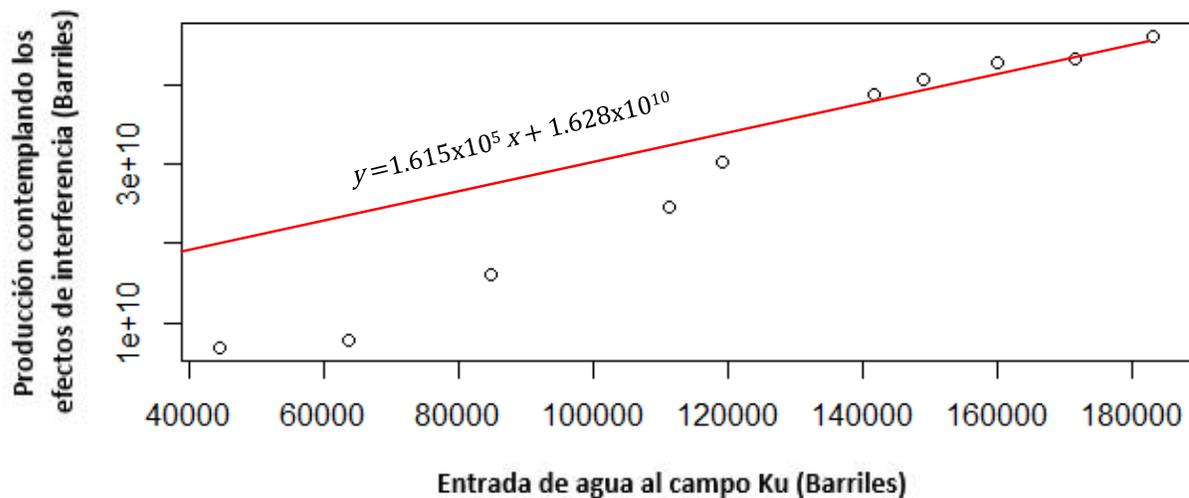
Sustituyendo los valores para la constante de difusión del acuífero y del radio exterior equivalente del acuífero del Bloque II,  $r_{\text{bloque II}} = 26.87 \text{ km}$  se obtiene un resultado  $t_{pss \text{ Bloque II}}$  igual a 1173.54 días; entonces a partir de la **Tabla 4.1** se establece que a partir del periodo 6 concluye el comportamiento infinito del sistema acuífero-yacimientos.

**Tabla 4.1 Datos de comportamiento para el yacimiento Ku y de entrada de agua a los yacimientos Abkatún, Pol y Chuc**

Periodo	Tiempo de Explotación (Días)	NpBo (Barriles)	Presión en el contacto agua-aceite (psi)	Entrada de Agua Abkatún (Barriles)	Entrada de Agua Pol (Barriles)	Entrada de Agua Chuc (Barriles)
0	184.90	-	4,621.50	9,968,312.56	6,450,391.29	8,475,362.92
1	365.00	62,624.00	4,550.40	30,998,766.99	19,852,771.71	24,528,821.66
2	547.50	76,655.00	4,408.20	56,850,023.07	41,805,516.24	49,326,178.04
3	730.00	209,299.00	4,266.00	99,906,169.46	119,652,823.90	144,135,867.30
4	912.50	375,720.00	4,194.90	145,755,341.00	193,959,073.50	218,881,087.70
5	1,095.00	563,538.00	4,052.70	202,279,502.10	342,830,787.20	384,190,133.30
6	1,277.50	741,498.00	3,981.60	261,098,014.10	476,667,021.90	507,127,966.90
7	1,460.00	945,347.00	3,839.40	329,996,702.50	646,252,055.90	668,160,981.70
8	1,642.50	1,126,235.00	3,697.20	403,014,351.10	805,598,855.90	801,141,082.20
9	1,825.00	1,301,225.00	3,555.00	480,086,520.30	971,180,118.10	936,058,581.30
10	2,007.50	1,481,957.00	3,412.80	579,695,991.30	1,185,604,419.00	1,121,681,864.00

Empleando regresión lineal con respecto a valores a partir del periodo 6, se obtiene el cruce con el eje de las ordenadas indicado en la **Fig. 4.2**, el cual corresponde al valor del volumen original de 16280 MM B<sub>ce</sub> de aceite para el campo Ku, el cual es un valor demasiado grande en comparación con la estimación volumétrica obtenida por Ortuño (2012),  $N = 5728$  MM B<sub>ce</sub>.

Los resultados obtenidos se presentan en la Fig. 4.2:


**Fig. 4.2 Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson para el campo Ku, acuífero de dimensión infinita**

#### 4.1.1 Método de Robinson aplicado al campo Ku y campos de interferencia: Abkatún, Pol, Chuc y Maloob, contemplando un acuífero de dimensión finita

Como se observa en la Fig. 4.9 campo Maloob inicia su producción en el año 89, y hasta este momento no se ha contemplado en el análisis; a continuación se evaluará el efecto que tiene su producción en el campo Ku.

Para continuar analizando el bloque II se consideró un radio del acuífero de 88,156 ft, estimado con base en los resultados de Ortuño M. (2012) para el área del bloque II que se tiene en la Región Marina.

Con las modificaciones realizadas se obtiene un mejor ajuste de los datos para el comportamiento del yacimiento Ku; considerando todos los datos a excepción de los primeros cinco (Fig. 4.3), resulta un valor para la intersección al origen “*b*” o cruce con el eje de las ordenadas, de  $5995 \times 10^6$  Barriles, el cual puede compararse con la estimación para el volumen original volumétrico de aceite del yacimiento Ku de 5911 MM B<sub>ce</sub>. Este resultado es menor al calculado al emplear el método de Robinson en la forma planteada originalmente en su artículo, debido a que considera un acuífero de dimensión infinita, cuando en la realidad el acuífero que se tiene en el bloque II es finito.

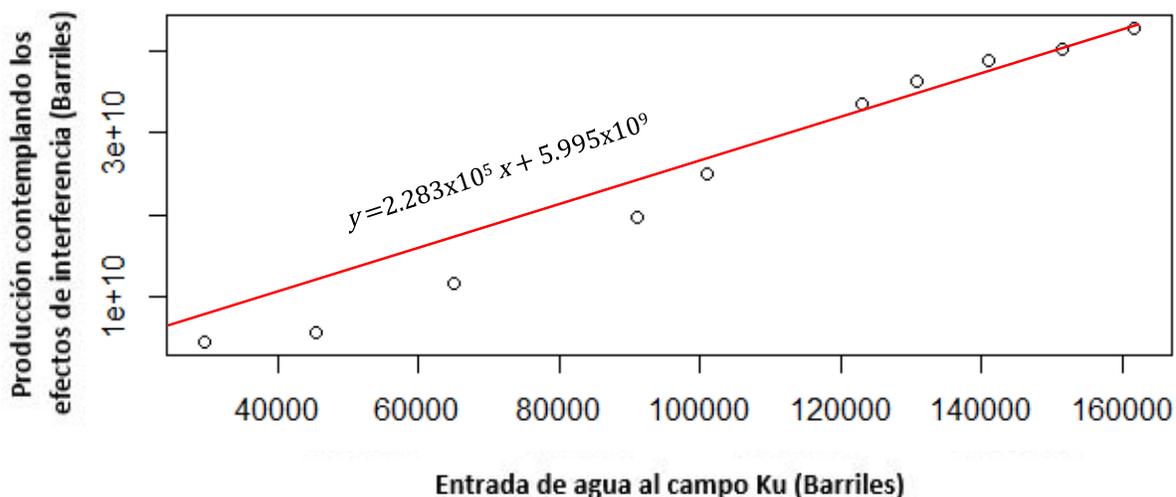


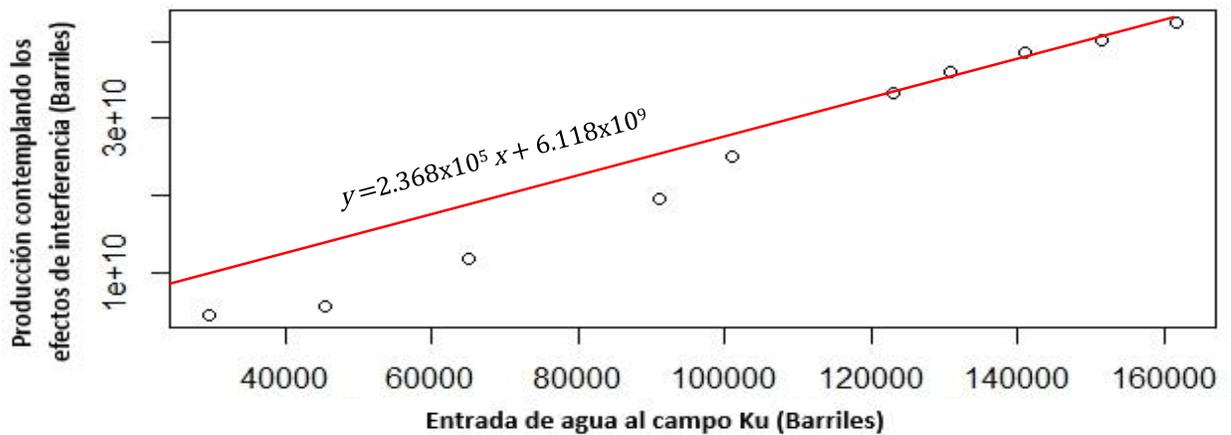
Fig. 4.3 Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson, modificado para el campo Ku, acuífero de dimensión finita

Se incorporará la entrada de agua al yacimiento Maloob (**Tabla 4.2**) en la Tabla 4.1.

**Tabla 4.2 Entrada de agua al campo Maloob**

Periodo	Tiempo de explotación (Días)	Entrada de agua Maloob (Barriles)
0	184.9	0
1	365	0
2	547.5	0
3	730	0
4	912.5	0
5	1095	8389957.75
6	1277.5	26361366.8
7	1460	35567891.4
8	1642.5	47299052.9
9	1825	59392577.5
10	2007.5	67665905.5

Como se muestra en la **Fig. 4.4**, la regresión lineal incorporando al campo Maloob da como resultado 6118 MM de barriles.



**Fig. 4.4** Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson, modificado para el campo Ku, acuífero de dimensión finita e incorporando al campo Maloob

#### 4.2 Método de Hurst aplicado al campo Ku sin considerar campos de interferencia, contemplando un acuífero de dimensión infinita

Para observar la respuesta de presión  $\Delta p(t)$  que se calcula mediante la Ec. 3.26, se obtiene su inversión numérica mostrada en la Fig. 4.5, la cual considera un acuífero de dimensión infinita para aplicar este método de Hurst al campo de interés (Ku), se tiene una variación para el gasto acumulativo  $Q_o$  en la forma mostrada en la Fig. 4.6, un volumen original de aceite  $N = 5728$  MM B<sub>ce</sub>, basado en la estimación de Ortuño (2012), y las propiedades del acuífero involucradas en la Ec. 3.26 se obtuvieron a partir del estudio elaborado por Ortuño (2012) y del reporte de la compañía “Netherland, Sewell & Associates” (2002).

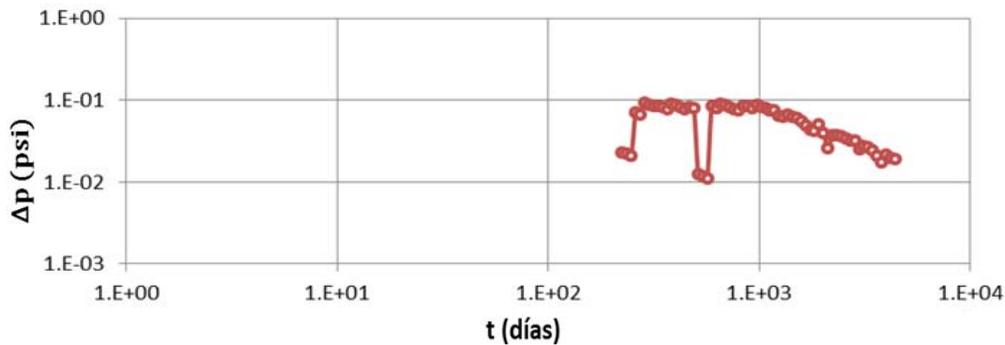


Fig. 4.5 Inversión numérica de la Ec. 3.26 considerando la variación del gasto  $Q_o$  propuesto en la Fig. 4.6

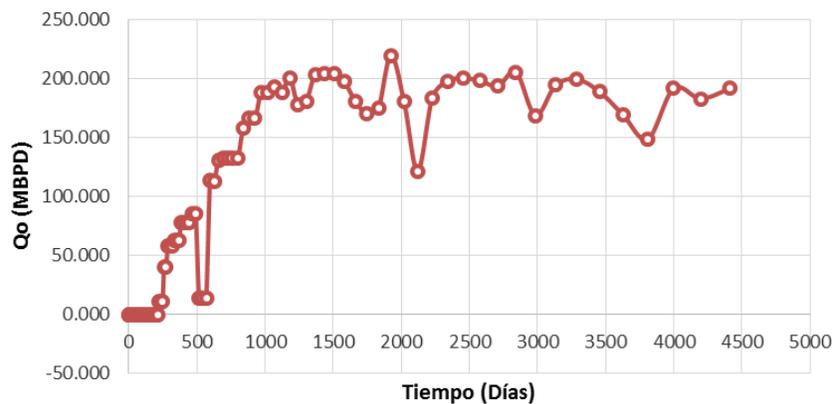
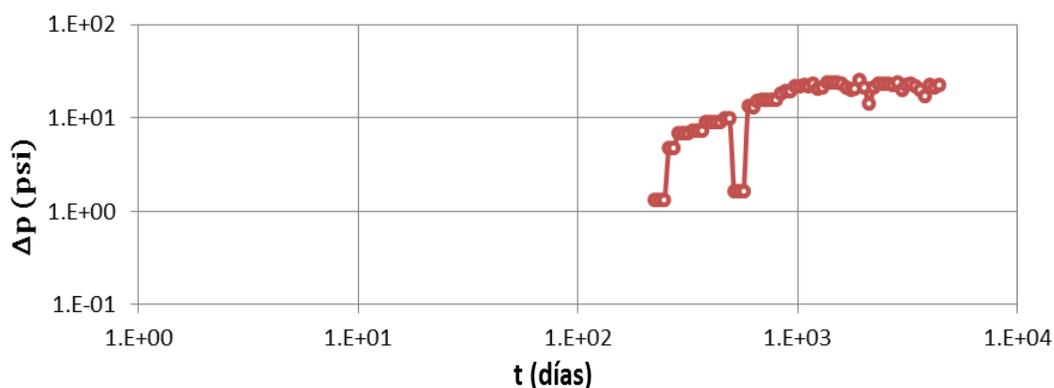


Fig. 4.6 Ejemplo de comportamiento del gasto de producción ( $Q_o$ ) del yacimiento Ku

Al analizar la inversión de la Ec. 3.26 en la Fig. 4.5, no se observa el comportamiento creciente esperado para la caída de presión, debido que se ha considerado un acuífero de dimensión infinita. Para liberar la consideración anterior, se modificará la entrada de agua adimensional  $Q_w(t_D)$ ; es decir su equivalente en el espacio de Laplace  $\bar{Q}_{wD}(s)$  para la Ec. 3.26 estará definido de manera distinta.

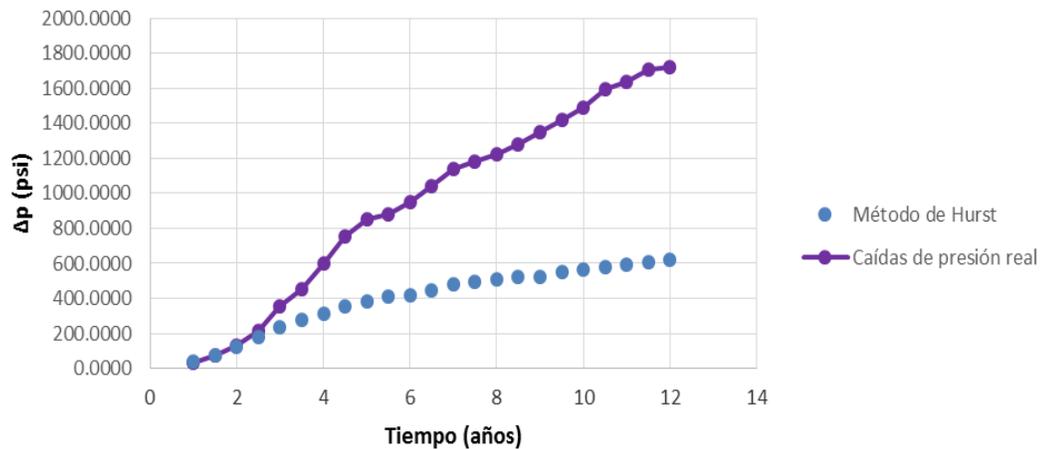
#### 4.2.1 Método de Hurst aplicado al campo Ku, sin considerar campos de interferencia, contemplando un acuífero de dimensión finita

Considerando el mismo gasto acumulativo  $Q_o$  de la Fig. 4.6 y un volumen original de aceite  $N = 5728$  MM B<sub>ce</sub> basado en la estimación de Ortuño (2012), se obtuvo



**Fig. 4.7 Inversión numérica de la Ec. 3.41 considerando la variación del gasto  $Q_o$  propuesto en la Fig. 4.6**

el comportamiento creciente obtenido mediante la inversión numérica mostrado en la **Fig. 4.7**, el cual puede compararse con respecto a las caídas de presión acumulativas reales correspondientes al campo Ku.



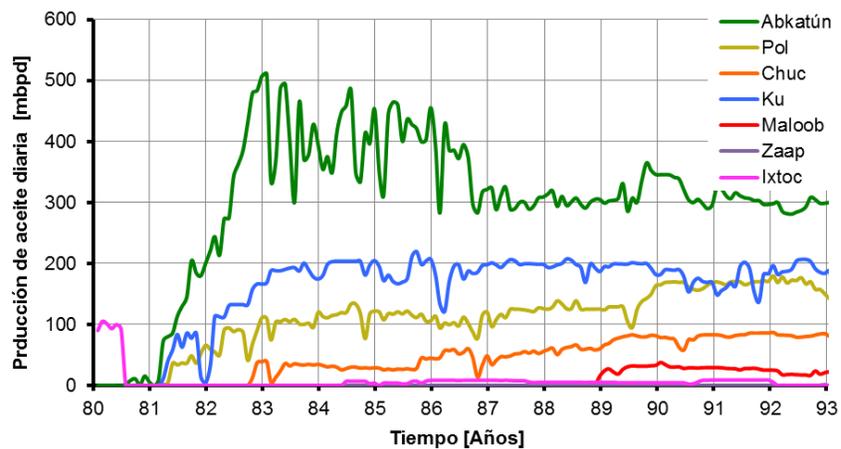
**Fig. 4.8 Comparación entre las caídas de presión obtenidas mediante el método de Hurst y las caídas de presión reales considerando un volumen original de aceite,  $N = 5728 \text{ MM}$**

**$B_{ce}$**

Hasta este momento solo se ha considerado el comportamiento del campo Ku con su acuífero asociado de dimensión finita, por lo que aún no se logra el ajuste apropiado en la **Fig. 4.8**; hace falta que se considere el efecto de interferencia de los otros campos con los cuales el yacimiento Ku comparte el acuífero.

#### **4.2.2 Efecto de interferencia empleando el método de Hurst aplicado al campo Ku y campos de interferencia: Abkatún, Pol-Chuc y Maloob, contemplando un acuífero de dimensión finita**

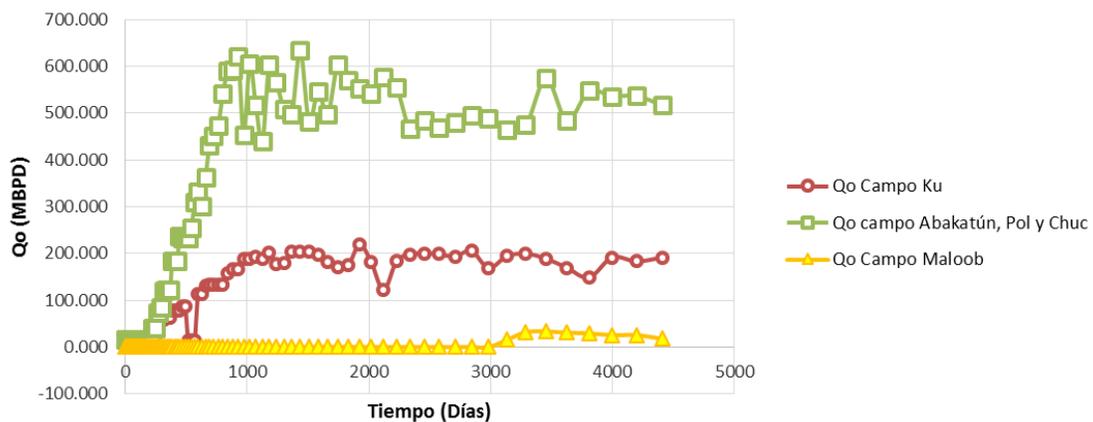
Se observa en la **Fig. 4.9** la producción de aceite diaria para los campos Abkatún, Pol, Chuc, Ku, Maloob, Zaap, Ixtoc en el periodo 1980-1993; los campos de producciones importantes durante el periodo de ajuste son los yacimientos Abkatún, Ku, Pol, Chuc y Maloob, por lo que durante el periodo de ajuste se tomarán en cuenta para este análisis. Ku se denominará campo A, los campos Abkatún-Pol-Chuc conformarán el campo B de interferencia y Maloob el campo C.



**Fig. 4.9 Producción de aceite diaria para los campos Abkatún, Pol, Chuc, Ku, Maloob, Zaap, Ixtoc (Parra, 2014)**

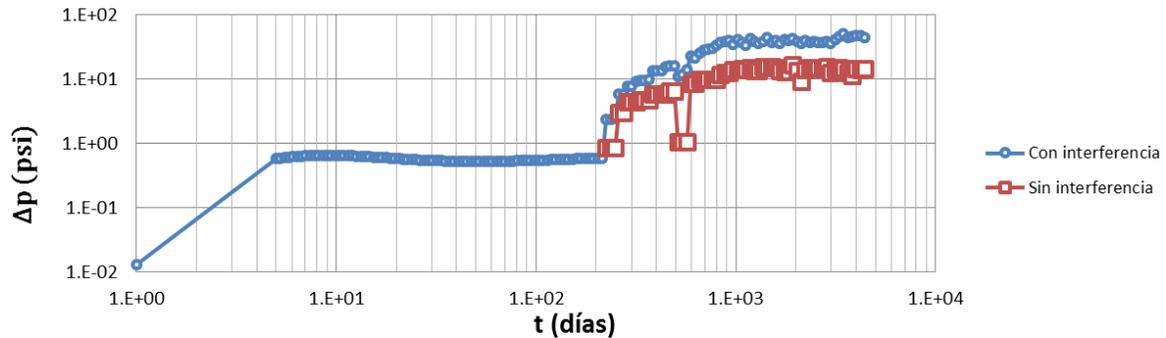
Se emplearán los gastos mostrados en la **Fig. 4.10** obtenidos a partir de la Fig.4.9, realizando la suma de los gastos de los campos de interferencia cercanos entre sí: Abkatún, Pol y Chuc para conformar el yacimiento B, buscando simplificar el problema.

Se utiliza un volumen original de aceite,  $N = 5728 \text{ MM } B_{ce}$  para el campo Ku,  $N = 9958.74 \text{ MM } B_{ce}$  para el conjunto de campos Abkatún-Pol-Chuc y  $N = 6034 \text{ MM } B_{ce}$  para el campo Maloob. Las propiedades del acuífero necesarias para realizar la inversión de la Ec. 3.92, las estimadas por Ortuño (2012) y el reporte de la compañía NSAI (2002).



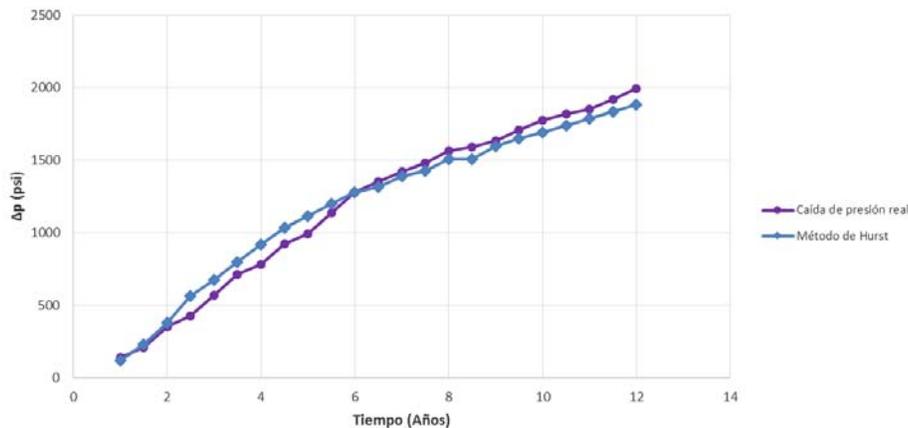
**Fig. 4.10 Gastos acumulativos  $Q_o$  de los campos Ku, Abkatún-Pol-Chuc y Maloob utilizados para realizar la inversión numérica de la Ec. 3.92**

La inversión numérica de la Ec. 3.92 se puede observar en la **Fig. 4.11**, donde también se incorpora la inversión de la Ec. 3.41, para demostrar como la interferencia genera una caída de presión adicional, incrementando la caída de presión total en un yacimiento.



**Fig. 4.11** Inversión numérica de la Ec. 3.92 contemplando el efecto de interferencia en el campo Ku debido a su producción, la de los campos Abkatún-Pol-Chuc y Maloob, como se muestra en la Fig. 4.10, así como la inversión de la Ec. 3.41 sin incorporar la interferencia, considerando la producción conjunta de los yacimientos Ku y Abkatún-Pol-Chuc,  $Q_o$  (Fig. 4.10)

Se realiza en la **Fig. 4.12** la comparación entre las caídas de presión acumulativas reales para el campo Ku y las obtenidas mediante el método de Hurst.



**Fig. 4.12** Comparación entre las caídas de presión ( $\Delta p$ ) reales para el campo Ku y las caídas de presión obtenidas con el método de Hurst para el yacimiento Ku considerando un volumen original de aceite,  $N = 5728 \text{ MM B}_{ce}$

Se observa en la Fig. 4.12 que existe una diferencia entre el comportamiento real y el obtenido por el método de Hurst; ya se han incluido todos los campos de producciones importantes, se han ajustado los parámetros volumétricos del acuífero y de los yacimientos no excediendo los límites de su variación: como la dimensión del acuífero y los radios de los yacimientos (Ku, Abkatún-Pol-Chuc, Maloob).

Por lo que se procede a realizar el ajuste mediante la variación del volumen original del campo de interés (Ku), como se ha mencionado con anterioridad se ha empleado hasta el momento un valor volumétrico estimado por Ortuño, este trabajo busca determinar un volumen original dinámico para el campo Ku. Se generaran algunas curvas de caída de presión que corresponderán a diferentes valores de volumen original cercanos a 5728 MM B<sub>ce</sub>.

El mejor ajuste se realiza contemplando los campos de interferencia de mayor importancia (Abkatún-Pol-Chuc y Maloob), proponiendo estimaciones para los volúmenes originales del campo Ku y para los campos de interferencia (principales) que mejoren el ajuste, los cuales pueden obtenerse mediante cálculos volumétricos y dinámicos disponibles.

Es importante mencionar que aún con todos los ajustes que se han realizado, puede existir cierto error en la determinación del  $N$  para el yacimiento Ku, ya que algunos de los volúmenes originales de los campos de interferencia empleados son estimaciones volumétricas.

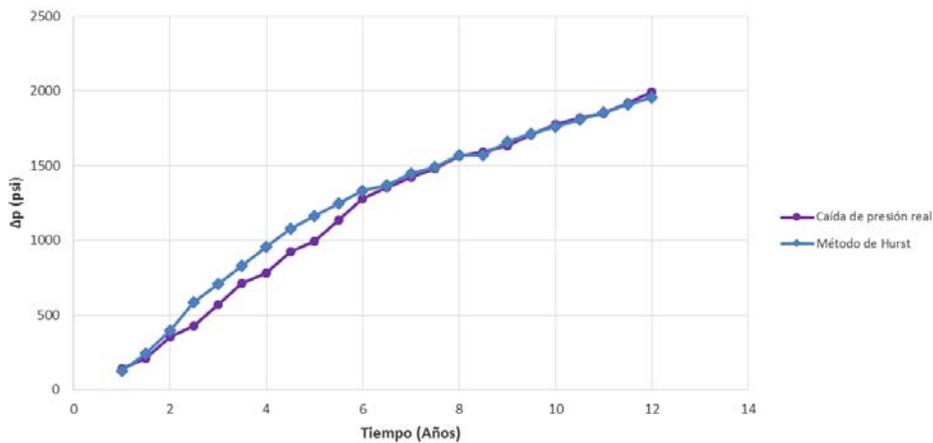
En la **Fig. 4.13** se muestra la comparación entre las curvas correspondientes a diferentes valores de volumen original para el campo Ku empleando las estimaciones para los campos de interferencia siguientes: Abkatún-Pol-Chuc de 9958.74 MM B<sub>ce</sub> y Maloob 6034 MM B<sub>ce</sub>, así también la caída de presión real se incluye en la gráfica.



**Tabla 4.3 Cálculo del error (DPP) para los volúmenes originales propuestos del campo Ku en la Fig. 4.13**

Volumen Original, $N$ (MM B <sub>ce</sub> )	DPP (%)
5728	5.844228618
6000	4.835848526
6250	5.87411449
6500	7.516714167

Se tiene el menor error para un volumen original de 6000 MM B<sub>ce</sub> como se observa en Tabla 4.3. Se realizaron más iteraciones con volúmenes cercanos a 6000 millones y se obtuvo un error de 4.5% para un volumen original de 6150 MM B<sub>ce</sub>, por lo que el mejor ajuste corresponderá a dicho volumen original. Se realizará la gráfica comparativa para observar el ajuste correspondiente al volumen original de 6150 MM B<sub>ce</sub> y el comportamiento real en la Fig. 4.14:



**Fig. 4.14 Comparación entre las caídas de presión ( $\Delta p$ ) reales para el campo Ku y las caídas de presión obtenidas con el método de Hurst para el yacimiento Ku, considerando  $N = 6150$  MM B<sub>ce</sub>**

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El objetivo de este trabajo ha sido modificar los métodos de Robinson y Hurst para estimar el volumen original de aceite, considerando las condiciones reales en que se presentan los efectos de interferencia entre campos que producen de un acuífero común. Se realizó la caracterización de los yacimientos Ku, Abkatún, Pol, Chuc, Maloob y su acuífero común con cada uno de los métodos antes mencionados.

- Método de Robinson

### Conclusiones

- 1) Se estimó la entrada de agua a los yacimientos mediante la ecuación planteada por Van Everdingen y Hurst, para Robinson se emplearon las presiones reales de los campos, dado que las caídas de presión calculadas ya contemplan la caída de presión adicional causada por interferencia.
- 2) Se modificó la entrada de agua adimensional y presión adimensional para un yacimiento infinito mediante las ecuaciones de Klins, Cable y Bouchard, para considerar un acuífero de dimensión finita.
- 3) Se determinó el tiempo en el que termina el comportamiento infinito del bloque II y comienza el flujo pseudoestacionario,  $t_{DpssBloqueII} = 1173.54$  días, para seleccionar los puntos en la que los cálculos de balance de materia son válidos.
- 4) Se determinó un volumen original para el campo Ku de 16280 MM B<sub>ce</sub> si se considera un acuífero de dimensión infinita, el cual es un volumen muy alejado del estimado volumétrico, al considerar un acuífero de dimensión finita se obtiene un volumen original de 6118 MM B<sub>ce</sub>, el cual es un valor muy cercano al valor volumétrico de 5728 MM B<sub>ce</sub>.
- 5) El aceite producido acumulado para el campo Ku es de 2655.96 MM B<sub>ce</sub> a Agosto de 2015, el factor de recuperación que se obtiene: 0.43, el cual es un valor consistente con el factor de recuperación que se tiene para el campo Akal.

### Recomendaciones

- 1) Se recomienda automatizar el ajuste de  $\Delta t_D$  en el programa elaborado en R studio; para el caso de aplicación no fue necesario un proceso iterativo ya que se realizó un buen ajuste con los datos del acuífero proporcionados del estudio de Ortuño y NSAI.
- 2) Se recomienda evaluar el impacto de cada una de las propiedades del acuífero incluidas en el término  $\Delta t_D$ ; se sugiere un análisis de sensibilidad. En este estudio no se realizó debido al conocimiento previo de las propiedades del acuífero, pero normalmente no se tiene información del acuífero.
- 3) Se recomienda aplicar el método de Robinson en otros campos que se encuentren comunicados mediante su acuífero común.

- Método de Hurst

### Conclusiones

- 1) Se modificaron las ecuaciones planteadas por Hurst para considerar un gasto variable de producción de los campos.
- 2) Se modificó el cálculo para la entrada de agua acumulativa considerando un acuífero de dimensión finita.
- 3) Se realizó la inversión numérica de las ecuaciones mediante el algoritmo de Stehfest debido a la complejidad que algunas de ellas presentan para realizar su inversión analíticamente
- 4) La inversión numérica también ayudó a verificar que las ecuaciones desarrolladas fueran correctas al observar el comportamiento de los resultados obtenidos.
- 5) Se realizó una comparación entre la caída de presión del yacimiento Ku obtenidas mediante este método con y sin considerar los campos de interferencia, observándose que los campos de interferencia causan una caída de presión adicional, incrementando la caída de presión total.
- 6) Considerando como campos de interferencia a los yacimientos Abkatún, Pol, Chuc y Maloob, se estimó el volumen original del campo Ku por medio de un ajuste de la caída de presión que se obtiene con este método con respecto a la caída de presión

real basado en el porcentaje de error, obteniéndose un valor igual a 6150 MM B<sub>ce</sub> con un error de 4.5%.

- 7) El aceite producido acumulado para el campo Ku es de 2655.96 MM B<sub>ce</sub> a Agosto de 2015, el factor de recuperación que se obtiene: 0.43, el cual es un valor consistente con el factor de recuperación que se tiene para el campo Akal.

### **Recomendaciones**

- 1) Se recomienda modificar las ecuaciones para incluir yacimientos en estado saturado.

## NOMENCLATURA

$B_o$	= Factor de volumen del aceite
$B_{oi}$	= Factor de volumen inicial del aceite
$c_t$	= Compresibilidad total ( $\text{psi}^{-1}$ )
$c_w$	= Compresibilidad del agua ( $\text{psi}^{-1}$ )
$h$	= Espesor del acuífero (ft)
$j$	= Representa al yacimiento que ejerce interferencia
$k$	= Permeabilidad del acuífero (md)
$n$	= Periodo de producción
$N$	= Volumen original de aceite (barriles)
$N_p$	= Producción acumulativa de aceite y agua (barriles)
$p$	= Presión promedio del yacimiento (psi)
$p_D(r_D, t_D)$	= Presión adimensional para el caso de producción
$p_i$	= Presión inicial de yacimiento (psi)
$Q_o$	= Gasto de producción del campo
$Q_{wD}(t_D)$	= Entrada adimensional de agua
$r_{AB}$	= Distancia entre los campos A y B
$r_{AC}$	= Distancia entre los campos A y C
$r_{AE}$	= Distancia entre los campos A y E
$r_B$	= Radio equivalente del campo B
$r_C$	= Radio equivalente del campo C

$r_b$	= Radio del yacimiento (ft)
$s_A$ ó $s$	= Operador referido al campo A
$s_B$	= Operador referido al campo B
$s_C$	= Operador referido al campo C
$s_E$	= Operador referido al campo E
$t_{AD}$ ó $t_D$	= Tiempo adimensional referido al campo A
$t_{BD}$	= Tiempo adimensional referido al campo B
$t_{CD}$	= Tiempo adimensional referido al campo C
$\Delta p$	= Caída de presión ( $p_i - p$ )
$\Delta p'$	= Presión promedio en la zona de hidrocarburos (psi)
$\Delta p^{AB}$	= Caída de presión en el campo A debido a la producción del campo B
$\Delta p^{AC}$	= Caída de presión en el campo A debido a la producción del campo C
$\Delta p^{AE}$	= Caída de presión en el campo A debido a la producción del campo E
$\Delta t$	= Tiempo de producción (horas)
$\Delta t_D$	= Intervalo de tiempo adimensional
$\Delta t_{Dpss}$	= Tiempo en el que se alcanza el periodo pseudoestacionario en el sistema yacimientos – acuífero común
$\Delta W_e'$	= Cambio instantáneo en la entrada de agua al campo de interferencia
$\phi$	= Porosidad del acuífero
$\mu_w$	= Viscosidad del agua (cp)
$\theta$	= Ángulo en el que se presenta la entrada de agua

$\eta$  = *Difusividad hidráulica*

$\eta'$  = *Pseudo difusividad hidráulica*

## REFERENCIAS

1. Abramowitz, M. y Stegun I.A. 1968. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications.
2. Bell, J.S. y Shepherd, J.M. 1951. Pressure Behavior in the Woodbine Sand. *J. Pet Tech* **3** (1): 19-28. SPE-951019-G
3. Craft, B.C. y Hawkins, M.F. 1991. *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, second edition revised. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
4. Carslaw, H.S. y Jaeger J.C. 1959. *Conduction of Heat in Solids*, second edition revised. Oxford at the Clarendon Press, London: Oxford University Press.
5. Hurst, W. 1960. Interference between Oil Fields. *Trans.*, AIME **219**: 175-192.
6. Hurst, W. 1958. The Simplification of the Material Balance Formulas by the Laplace Transformation. *Trans.*, AIME **213**: 292-303.
7. Klins, M.A., Bouchard, A.J. y Cable C.L. 1988. A Polynomial Approach to the Van Everdingen-Hurst Dimensionless Variables for Water Encroachment. *SPE* (Feb. 1988) 320-326.
8. Matthews, C.S. y Russell D.G. 1967. *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*. New York: Society of Petroleum Engineers of AIME.
9. Mortada, M. 1955. A Practical Method for Treating Oilfield Interference in Water-Drive Reservoirs. *Trans.*, AIME **204**: 217-226.
10. Netherland, Sewell & Associates, Inc. 2002. Estudio para determinar la interacción entre campos a través de su acuífero común localizados en la Sonda de Campeche.
11. Ortuño Maldonado, E. 2012. Estudio de Distribución, Comportamiento y Magnitud de los Acuíferos del Cretácico en los Campos de la SPRMNE, APAPCh de la SPRMSO. Artículo presentado en el Congreso Mexicano del Petróleo, Ciudad de México, septiembre 9-14.
12. Parra, J. 2014. *Interferencia entre campos localizados en un acuífero común*, Tesis de Licenciatura. Facultad de Ingeniería, UNAM, México D.F.

13. Robinson, M.P. 1958. Pressure Interference Correction to the Material Balance Equation for Water-Drive Reservoirs Using a Digital Computer. *Trans.*, AIME **213**: 418-422.
14. Rodríguez, F., Samaniego-V., F. y Cinco-Ley, H. 1996. A Model for the Production Interference of Multiple Reservoirs Sharing a Common Aquifer. *SPE Advanced Technology Series* **4** (1): 38-43. SPE-26975-PA.
15. Van Everdingen, A.F. y Hurst, W. 1949. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs. *Trans.*, AIME **186**: 305-324.
16. Van Everdingen, A.F., Timmerman, A.F. y McMahon, J.J. 1953. Application of the Material Balance Equation to a Partial Water-Drive Reservoir. *Trans.*, AIME **198**: 51-60.
17. Chierici, G.L., Pizzi G. y Ciucci G.M. 1967. Water Drive Gas Reservoirs: Uncertainty in Reserves Evaluation from Past History. *JPT* (Feb. 1967) 237-244.



## APÉNDICE B

### ALGORITMO DE STEHFEST

La inversión de una ecuación que se encuentra en el plano de Laplace es uno de los problemas que se presentan en este trabajo. Se define la transformada de Laplace en la forma de la Ec. A.1, por lo que el problema se centra en recuperar la función  $F(t)$  dado que se conoce  $f(s)$ . El Algoritmo de Stehfest propuesto en 1970 busca aproximar  $F(t)$  mediante una secuencia de funciones.

El procedimiento numérico para obtener la inversa de una función en términos de la variable de Laplace  $s$  es el siguiente:

Si  $F(t)$  es el valor aproximado de la inversa de  $f(s)$  a un tiempo  $t$ , entonces  $F(t)$  se expresa por medio de la Ec. B.1:

$$F(t) = \left(\ln \frac{2}{t}\right) \sum_{i=1}^n V_i F\left(\frac{\ln 2}{t} i\right) \quad \dots \quad (B.1)$$

$$V_i = (-1)^{n/2+i} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, \frac{n}{2})} \frac{k^{\frac{n}{2}} (2k!)}{\left(\frac{n}{2}-k\right)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!} \quad \dots \quad (B.2)$$

donde:

$f(s)$  = Es la función cuya inversa se desea encontrar

$n$  = Número par

$k$  = Número entero que se determina aritméticamente

El valor de  $n$  debe variar con el tiempo y se selecciona experimentando numéricamente.

## APÉNDICE C

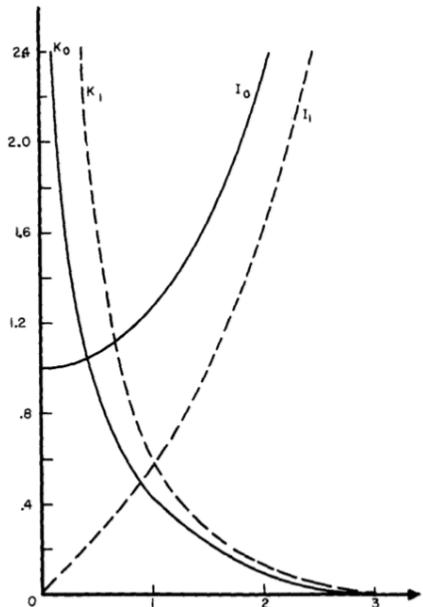
### FUNCIONES DE BESSEL MODIFICADAS I Y K

Se tiene la ecuación diferencial:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + v^2)w = 0 \quad \dots \dots \dots (C.1)$$

Las soluciones son  $I_{\pm v}(z)$  y  $K_v(z)$ . Cada una es una función regular de  $z$  a través del plano  $z$  en el eje real negativo y para un valor fijo de  $z$  diferente de cero, cada uno es una función de  $v$ . Cuando  $v = \pm n$ ,  $I_v(z)$  es función de  $z$ .

$I_v(z)$  ( $\text{Re } v \geq 0$ ) está cerrado cuando  $z$  tiende a cero en cualquier rango cerrado del argumento  $z$ .  $K_v(z)$  tiende a cero cuando el valor absoluto de  $z$  tiende a infinito en el sector cuando el argumento  $z$  es menor a  $\frac{1}{2}\pi$  y para todos los valores de  $v$ ,  $I_v(z)$  y  $K_v(z)$  son linealmente independientes.  $I_v(z)$ ,  $K_v(z)$  son reales y positivos cuando  $v > -1$  y  $z > 0$ .



**Fig. B.1**  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $I_1(x)$  y  $K_1(x)$

## APÉNDICE D

- **Teorema I**

Se tiene una función  $x(ct - a)$ , tal que:

$$x(ct - a) = 0, \text{ para } 0 < ct < a \dots \dots \dots (D.1)$$

Entonces la transformada de Laplace con respecto al tiempo se expresa de la manera siguiente:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} x(ct - a) dt = \frac{e^{-sa/c}}{c} \int_0^{\infty} e^{-su/c} x(u) du, \dots \dots \dots (D.2)$$

donde  $u = (ct - a)$ . La integral del lado derecho es la transformada para  $x(u)$ , la cual se denotará como  $\bar{x}(s/c)$ ; entonces la Ec. I.2 se expresa de la manera siguiente:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} x(ct - a) dt = \frac{e^{-sa/c}}{c} \bar{x}\left(\frac{s}{c}\right) \dots \dots \dots (D.3)$$

En su forma más simple, para  $c = 1$ , la Ec. I.3 puede expresarse como:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} x(t - a) dt = e^{-sa} \bar{x}(s) \dots \dots \dots (D.4)$$

- **Teorema II**

Como se indicó en el teorema anterior para cualquier función  $G(t' - a)$ , la transformada de Laplace de esa función es:

$$e^{-sa} \bar{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st'} G(t' - a) dt', \dots \dots \dots (D.5)$$

dado que  $G(t' - a)$  es igual a cero para  $0 < t' < a$ . Si se multiplica la Ec. II.1 por una segunda transformada  $\bar{F}(s)$ , entonces se tiene:

$$e^{-sa} \bar{F}(s) \bar{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st'} \bar{F}(s) G(t' - a) dt' . . . . . (D.6)$$

Como se realizó en la Ec. I.4, se empleará esta misma interpretación para la integral de la Ec. II.2:

$$e^{-st'} \bar{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st'} F(t - t') dt . . . . . (D.7)$$

Para la cual  $F(t - t')$  es cero para valores negativos de su argumento. Incorporando la Ec. II.3 a la Ec. II.2:

$$e^{-sa} \bar{F}(s) \bar{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_0^{\infty} F(t - t') G(t' - a) dt' \right] dt . . . . . (D.8)$$

Como se ha dictado que  $t'$  debe ser mayor que  $a$  para que  $G(t' - a)$  exista y ya que  $t'$  siempre es menor que  $t$  (Ec. II.3), entonces la integración de la Ec. II.4 es la siguiente:

$$e^{-sa} \bar{F}(s) \bar{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_a^t F(t - t') G(t' - a) dt' \right] dt . . . . . (D.9)$$

En resumen esta es su transformada de Laplace:

$$e^{-sa} \bar{F}(s) \bar{G}(s) \subset \int_a^t F(t - t') G(t' - a) dt' . . . . . (D.10)$$

Finalmente si  $a$  es igual a cero:

$$\bar{F}(s) \bar{G}(s) \subset \int_0^t F(t - t') G(t') dt' . . . . . (D.11)$$