



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA RENORMALIZABILIDAD DE LA MODIFICACIÓN
ANISOTRÓPICA DE AdS_5

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

DANIEL ÁVILA HERNÁNDEZ

TUTOR:

DR. ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR



MÉXICO, D.F.

2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Ávila

Hernández

Daniel

52953639

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

308188127

2. Datos del tutor

Dr

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

3. Datos del sinodal 1

Dr

José Antonio Rafael

García

Zenteno

4. Datos del sinodal 2

Dr

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Dr

Rodolfo Patricio

Martínez

y Romero

6. Datos del sinodal 4

Dr

Román

Linares

Romero

7. Datos del trabajo escrito

Estudio de la renormalizabilidad de la modificación anisotrópica de AdS_5 .

52p

2015

Agradecimientos

Para elaborar la presente tesis, tuve la fortuna de ser dirigido por el Doctor Erick Leonardo Patiño Jaidar, a quien quiero agradecer todo su profesionalismo, dedicación, paciencia y apoyo, pues sin su guía este trabajo no hubiera sido posible.

Agradezco a toda mi familia, particularmente a mi madre, por todo su amor incondicional y apoyo, ya que me han hecho el hombre que soy ahora y sin ellos jamás habría llegado tan lejos. Asimismo, agradezco a Sandra por todo su amor y paciencia, pues aún sin tener conocimientos del tema, estuvo ahí para escuchar cada palabra que tenía que decir acerca del trabajo.

También agradezco a los doctores José Antonio Rafael García Zenteno, Saúl Noé Ramos Sánchez, Román Linares Romero y Rodolfo Patricio Martínez y Romero por destinar su tiempo a revisar este trabajo de tesis y todas sus valiosas correcciones.

Gracias al Departamento de Física, que durante todo este periodo me asignó un espacio para poder trabajar.

Esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN 113115 “Teoría de campos en fondos curvos, gravedad cuántica y holografía”. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Gracias también a todos quienes directa o indirectamente fueron parte de este proceso.

Daniel Ávila Hernández 2015.

ESTUDIO DE LA RENORMALIZABILIDAD DE LA MODIFICACIÓN
ANISOTRÓPICA DE ADS_5

Daniel Ávila Hernández

2015

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | 1 |
| 1. Introducción | 3 |
| 1.1. La correspondencia AdS/CFT | 4 |
| 1.2. El método de renormalización holográfica | 6 |
| 1.2.1. Acción y solución asintótica a la frontera | 6 |
| 1.2.2. Regularización de la acción y divergencias | 7 |
| 1.2.3. Inversión de la serie y contratérminos | 8 |
| 1.2.4. Acción sustraída y renormalizada | 8 |
| 1.3. Encajes de Dp-branas | 9 |
| 1.4. El plasma anisotrópico | 10 |
| 2. El fondo anisotrópico y el encaje de las D7-branas | 13 |
| 2.1. El fondo anisotrópico | 14 |
| 2.1.1. Acción y solución | 14 |
| 2.1.2. Renormalización | 15 |
| 2.2. El encaje de las D7-branas | 17 |
| 2.2.1. Acción DBI | 17 |
| 2.2.2. La métrica inducida | 17 |
| 2.2.3. Solución en la frontera | 18 |
| 2.2.4. Divergencias de la acción | 18 |
| 3. Renormalización holográfica de la D7-brana | 21 |
| 3.1. Análisis del fondo en la frontera | 22 |
| 3.1.1. Acción de SUGRA IIB en el marco de Einstein | 22 |
| 3.1.2. Ecuaciones de movimiento | 23 |
| 3.1.3. Solución asintótica a la frontera | 25 |
| 3.1.4. Inversión | 28 |
| 3.1.5. Acerca de la renormalización del fondo | 29 |
| 3.2. Análisis del encaje en la frontera | 29 |
| 3.2.1. Acción DBI en el marco de Einstein | 29 |
| 3.2.2. Ecuación de movimiento y solución asintótica a la frontera | 30 |

| | |
|--|-----------|
| 3.2.3. Inversión | 31 |
| 3.3. Contratérminos | 31 |
| 4. Discusión de resultados | 33 |
| 4.1. Análisis de la acción de contratérminos | 34 |
| 4.1.1. Una integral de frontera covariante | 34 |
| 4.1.2. Expansión asintótica de orden mayor | 35 |
| 4.1.3. Sistema D3/D7 | 36 |
| 4.1.4. Sobre $\log^2 \epsilon$ | 37 |
| 4.1.5. Divergencias de la acción sustraída | 38 |
| 4.2. Contratérminos extra | 39 |
| 4.2.1. Una nueva acción | 39 |
| 4.2.2. Dependencia de $e^{\phi^{(0)}}$ | 41 |
| 4.2.3. La acción de contratérminos | 43 |
| 4.3. Trabajo futuro | 46 |
| 5. Conclusiones | 47 |

Resumen

La correspondencia AdS/CFT relaciona cálculos en un espacio con gravedad en diez dimensiones con los efectuados en una teoría cuántica cuatro dimensional sin gravedad. Sin embargo, en la mayoría de los casos los resultados divergen en el lado gravitacional debido a la integración sobre el volumen infinito del espacio o el acoplo de ciertos campos. Éste es el caso, por ejemplo, de la acción que describe el encaje de D7-branas de prueba sobre el fondo anisotrópico de [1,2]. Para tales escenarios se ha desarrollado un método sistemático, conocido como renormalización holográfica, que permite eliminar cada término divergente en la acción.

El objetivo de la presente tesis es aplicar el formalismo de renormalización holográfica a dicha acción. Se comenzará en el Capítulo 1 con la revisión de algunos conceptos clave de la correspondencia AdS/CFT, encajes de Dp-branas y el plasma anisotrópico, así como una descripción detallada del método de renormalización holográfica y cada uno de sus pasos. En el Capítulo 2 se resumirán los resultados de [1,2] acerca de la métrica del espacio, la acción del encaje de la D7-brana en éste y se pondrá en evidencia su comportamiento divergente cerca de la frontera.

La aplicación del método de renormalización holográfica se hará en el Capítulo 3, donde se obtendrán las ecuaciones de movimiento a partir de la acción, se resolverán las mismas de forma asintótica a la frontera y se obtendrán expresiones de los coeficientes en términos de los campos, tal como indica el formalismo. Con esto, se construirá una acción de contratérminos y se procederá a analizar su validez en el Capítulo 4. Se hará notar que ésta no es suficiente para que la acción de la D7 sea finita debido a la aparición de uno de los coeficientes indeterminados por las ecuaciones de movimiento, y se demostrará que, para poder eliminarlo, los contratérminos deben contener explícitamente condiciones en la frontera específicas, construyéndose tal integral en el proceso, capaz de renormalizar completamente la acción. No obstante, se darán diversos argumentos para mostrar que la aparición de este factor era de esperarse y que los contratérminos calculados son los correctos. Se finalizará con una descripción del trabajo futuro, que incluye el análisis termodinámico del plasma anisotrópico mediante la correspondencia AdS/CFT.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se revisarán los conceptos previos relevantes para esta tesis. Se comenzará con algunas ideas clave de la correspondencia AdS/CFT, tales como la métrica generada por una distribución de D3-branas, seguido de una explicación detallada del método de renormalización holográfica y cada uno de sus pasos. Posteriormente, se hablará acerca de encajes de Dp-branas en el contexto de la dualidad norma/gravedad, poniéndose énfasis en el caso de D7-branas de prueba sobre la métrica de la brana negra usadas para agregar materia fundamental a la teoría cuántica. Para finalizar, se dará una breve descripción del dual gravitacional al plasma anisotrópico y el encaje de D7-branas de prueba en el mismo.

1.1. La correspondencia AdS/CFT

La Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es la teoría que describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones. A pesar de su éxito, no existen métodos analíticos para estudiar sus propiedades no perturbativas. Una de las alternativas más prometedoras es reformular QCD, o cualquier teoría de norma fuertemente acoplada, en términos de una teoría de cuerdas. Como se sabe, la teoría de cuerdas nació como un intento de modelar los tubos de flujo entre pares quark-antiquark responsables de su confinamiento, para después perfilarse como una teoría de gran unificación. No obstante, se ha descubierto que es posible estudiar teorías de norma reformuladas en términos de una teoría de cuerdas con la llamada correspondencia o dualidad norma/gravedad. El ejemplo más simple y estudiado de esto, propuesto originalmente en [3] y que será explicado muy brevemente a continuación, es la equivalencia entre una teoría de supercuerdas tipo IIB en un espacio $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ diez dimensional, donde AdS_5 es un espacio anti-de Sitter de 5 dimensiones y S^5 es una 5-esfera, y una teoría super Yang-Mills (SYM) $\mathcal{N} = 4$ en un espacio de Minkowski de dimensión 3+1. Como SYM $\mathcal{N} = 4$ es una teoría de norma invariante ante el grupo conforme, éste es un ejemplo de la correspondencia AdS/CFT (anti-de Sitter/teoría de campos conforme) [4,5].

En teoría de cuerdas una Dp-brana, o una Dp para abreviar, es un objeto que describe un volumen de mundo de dimensión $p+1$ en el espacio-tiempo. Su nombre viene de condiciones de Dirichlet, pues inicialmente sólo servía como condición de frontera para las cuerdas abiertas, es decir, un lugar en el que estuvieran fijos sus extremos. Sin embargo, estudios posteriores mostraron que las Dp poseen masa y cargas, de manera que, de acuerdo a la Relatividad General, modifican el espacio a su alrededor y tienen una dinámica no trivial. La dualidad AdS/CFT considera N_c D3-branas en un espacio de diez dimensiones, donde N_c corresponde al número de colores de la teoría de campos. La geometría generada, ilustrada en la Figura 1.1, está descrita por [3,6]

$$ds^2 = \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}} (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_{S^5}^2). \quad (1.1)$$

El parámetro con dimensiones de longitud R en la expresión anterior es

$$R^4 = \frac{N_c}{2\pi^2 T_3}, \quad (1.2)$$

donde T_3 es la tensión de cada D3-brana. Nótese de (1.1) que el espacio se aproxima a Minkowski en 10 dimensiones lejos de las D3 ($r \rightarrow \infty$), mientras que al acercarse a ellas ($r \rightarrow 0$) va a $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ asintóticamente,

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_{S^5}^2, \quad (1.3)$$

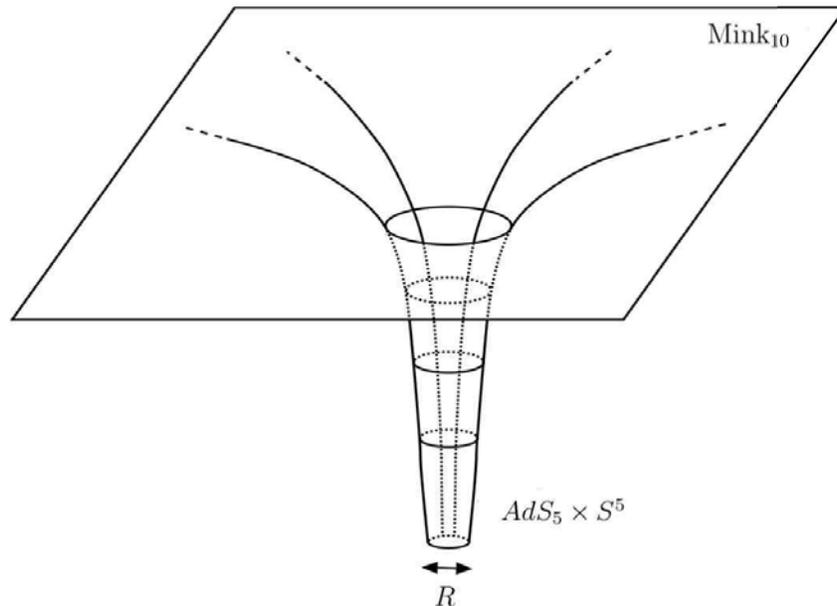


Figura 1.1: Representación pictórica del espacio 10 dimensional generado por un número grande de D3-branas. Tomada de [4].

de forma tal que R es el radio de AdS_5 y de la S^5 .

La conjetura de Maldacena [3,4] indica que la teoría de norma SYM $\mathcal{N} = 4$ en el volumen de mundo de las D3-branas es dual a la teoría de supercuerdas IIB justo en el centro de la garganta, es decir, en $AdS_5 \times S^5$. Esto significa que a cada campo dinámico en la teoría gravitacional en 10 dimensiones le corresponde un operador cuántico en la teoría de norma sin gravedad y las diversas cantidades físicas pueden ser calculadas en uno u otro lenguaje [6,7].

Enunciada de manera más general, la correspondencia AdS/CFT afirma que la teoría de supercuerdas en un espacio asintóticamente anti-de Sitter (la abreviatura AAdS será utilizada a lo largo del texto para denotar estos) producto una variedad de Einstein compacta \mathcal{M} es exactamente equivalente a la teoría cuántica de campos en la frontera de AAdS [8]. La razón por la que esto es ideal para estudiar teorías similares a QCD, es que la dualidad relaciona el régimen de acoplamiento fuerte de la teoría cuántica de campos con el acoplamiento débil de la teoría de cuerdas y viceversa. Esto intercambia cálculos no perturbativos en la teoría cuántica con soluciones gravitacionales clásicas, pues supercuerdas IIB se reduce a supergravedad (SUGRA) IIB a bajas energías [9]. La viscosidad del plasma $\mathcal{N} = 4$ [10,11], así como el radio viscosidad/entropía [12–14] son algunos ejemplos de cantidades físicas que se han podido estudiar gracias a la dualidad.

1.2. El método de renormalización holográfica

Al calcular cantidades físicas en los duales gravitacionales es usual que se obtengan resultados divergentes debido a la integración sobre el volumen infinito del espacio o el acoplamiento de ciertos campos. Para poder extraer el resultado físico correcto es necesario eliminar tales divergencias por medio de integrales de frontera covariantes, denominadas contratérminos, en un procedimiento conocido como renormalización holográfica. Éste fue introducido en [15, 16] y promovido a un método sistemático en [17]; un resumen está dado en [8] mientras que una discusión más completa se da en [18]. Algunas de las primeras aplicaciones pueden encontrarse en [19–22]. A continuación se listan y explican de forma detallada cada uno de sus pasos.

1.2.1. Acción y solución asintótica a la frontera

Se comienza con una acción en un espacio de dimensión $d + 1$

$$S[\mathcal{F}(x, v)] = \int dv d^d x \mathcal{L}[\mathcal{F}(x, v)], \quad (1.4)$$

donde $\mathcal{F}(v, x)$ es cualquier campo dinámico escalar, vectorial o la métrica del espacio mismo (se suprimen por ahora los índices espacio-temporales e internos para simplificar la notación), v denota la coordenada radial del espacio y x son las coordenadas de la frontera d dimensional para un radio fijo. Al variar S se obtienen las ecuaciones de movimiento para cada campo

$$\frac{\delta S}{\delta \mathcal{F}}[\mathcal{F}(x, v)] = 0. \quad (1.5)$$

El espacio debe aproximarse a AdS en su frontera para que la correspondencia AdS/CFT sea aplicable. Esto significa que la métrica $G_{\mu\nu}$ del espacio debe poder expresarse en las coordenadas de Fefferman-Graham (FG) como

$$ds^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{dv^2}{v^2} + \gamma_{ij}(x, v) dx^i dx^j = \frac{1}{v^2} \left(dv^2 + g_{ij}(x, v) dx^i dx^j \right), \quad (1.6)$$

donde los índices i y j corren sobre las coordenadas de la frontera (la misma notación se usará a lo largo de este trabajo). La métrica en la frontera $\gamma_{ij}(x, v)$ se factoriza como

$$\gamma_{ij}(x, v) = \frac{1}{v} g_{ij}(x, v), \quad (1.7)$$

por conveniencia. Una discusión más completa acerca de los espacios AAdS se da en [8]. Nótese que en esta parametrización la frontera se localiza en $v = 0$ y que las distancias se miden en unidades tales que el radio R es unitario.

Las ecuaciones de movimiento (1.5) de cada campo deben resolverse de forma asintótica alrededor de la frontera, es decir, con una expansión en potencias de v

$$\mathcal{F}(x, v) = v^m (f_{(0)}(x) + f_{(1)}(x)v + \dots + (f_{(n)}(x) + \tilde{f}_{(n)}(x) \log v)v^n + \mathcal{O}(v^{n+1})), \quad (1.8)$$

donde m y n son números enteros a determinar por las ecuaciones de movimiento. El término logarítmico que aparece a orden $n + m$ es necesario para obtener una solución a las ecuaciones de movimiento si d es par. En tal caso éstas eliminan los coeficientes de las potencias impares de v hasta orden $n + m$ y determinan los demás en función de $f_{(0)}(x)$ y sus derivadas

$$\tilde{f}_{(n)}(x) = \tilde{f}_{(n)}[f_{(0)}(x)], \quad f_{(k)}(x) = f_{(k)}[f_{(0)}(x)], \quad k < n. \quad (1.9)$$

$f_{(0)}(x)$ y $f_{(n)}(x)$ quedan indeterminados pues las ecuaciones de movimiento (1.5) son en general de segundo orden y requieren la especificación de dos parámetros para tener una única solución. El primero de ellos, $f_{(0)}(x)$, es el valor del campo $\mathcal{F}(x, v)$ en la frontera y se interpreta como la fuente del operador dual (es por ello que a tal coeficiente se le conoce como “fuente” en la literatura). Como caso particular de lo anterior, deben buscarse soluciones para $g_{ij}(x, v)$ que posean una expansión del tipo

$$g_{ij}(x, v) = g_{(0)ij}(x) + g_{(1)ij}(x)v + \dots + (g_{(d)ij}(x) + h_{(d)ij}(x) \log v)v^d + \mathcal{O}(v^{d+1})), \quad (1.10)$$

donde una vez más los coeficientes $g_{(k)ij}(x)$ para $k < d$ cuando d es par se anulan y los demás, junto con $h_{(d)ij}$, son determinados de manera única en función de $g_{(0)ij}(x)$. Sin embargo, en este caso las ecuaciones de movimiento determinan parcialmente a $g_{(d)ij}(x)$ en términos de $g_{(0)ij}(x)$ en la forma de cantidades como su divergencia o traza respecto a $g_{(0)ij}(x)$.

1.2.2. Regularización de la acción y divergencias

El diccionario que traduce las cantidades físicas en la dualidad [6–8] indica que deben calcularse variaciones de la acción (1.4) respecto a las fuentes $f_{(0)}(x)$ en un corte de radio constante $v = \epsilon$, para después tomarse el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y obtener los resultados deseados en la frontera, es decir, en AdS. No obstante, al sustituir la solución asintótica (1.8) en (1.4) e integrar sobre v es posible aislar un número finito de términos que divergen al tomar el límite mencionado. Esto es

$$S_{\text{reg}}[f_{(0)}(x); \epsilon] = \int d^d x \sqrt{g_{(0)}} (\epsilon^{-\nu} a_{(0)} + \epsilon^{-(\nu+1)} a_{(1)} + \dots + \log \epsilon a_{(\nu)} + \mathcal{O}(\epsilon^0)), \quad (1.11)$$

donde $g_{(0)}$ es el determinante de $g_{(0)ij}$, los coeficientes $a_{(k)}$ están determinados por las fuentes $f_{(0)}(x)$

$$a_{(k)} = a_{(k)}[f_{(0)}(x)], \quad (1.12)$$

y, según se explica en [8, 15–17], las divergencias no pueden depender de los coeficientes $f_{(n)}(x)$ indeterminados por las ecuaciones de movimiento para que el método sea aplicable en su totalidad.

1.2.3. Inversión de la serie y contratérminos

Las divergencias anteriores deben ser eliminadas por medio de una acción de contratérminos, definida como

$$S_{\text{ct}}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon] = -\text{términos divergentes de } S_{\text{reg}}[f_{(0)}(x); \epsilon]. \quad (1.13)$$

S_{ct} debe ser una integral de frontera totalmente covariante, escrita en términos de los campos $\mathcal{F}(x, \epsilon)$ y la métrica en la frontera $\gamma_{ij}(x, \epsilon)$. Para lograr esto hay que invertir la serie de $\mathcal{F}(x, \epsilon)$ para expresar a $f_{(0)}(x)$ en términos de éste y sus derivadas. De (1.8) se tiene que

$$f_{(0)}(x) = \epsilon^{-m} \mathcal{F}(x, \epsilon) - f_{(1)}(x)\epsilon - \dots - \epsilon^n \tilde{f}_{(n)}(x) \log \epsilon - \mathcal{O}(\epsilon^n), \quad (1.14)$$

donde cualquier cantidad que vaya a cero igual o más rápido que ϵ^n cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se desprecia. Para $\epsilon \ll 1$ se sigue que

$$f_{(0)}(x) \simeq \epsilon^{-m} \mathcal{F}(x, \epsilon), \quad (1.15)$$

y al sustituir esto en (1.9) se llega a

$$\tilde{f}_{(n)}(x) = \tilde{f}_{(n)}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon], \quad f_{(k)}(x) = f_{(k)}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon], \quad k < n. \quad (1.16)$$

De (1.16) en (1.14) se concluye la relación buscada para la fuente en términos del campo,

$$f_{(0)}(x) = f_{(0)}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon], \quad (1.17)$$

y con ella se reescriben los coeficientes (1.12) como

$$a_{(k)} = a_{(k)}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon]. \quad (1.18)$$

Un procedimiento análogo debe aplicarse para expresar $\sqrt{g_{(0)}}$ en términos de $\sqrt{\gamma}$, con γ el determinante de la métrica en la frontera γ_{ij} , y así obtener una integral de frontera S_{ct} completamente covariante.

1.2.4. Acción sustraída y renormalizada

Finalmente, se define la acción sustraída como

$$S_{\text{sus}}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon] = S_{\text{reg}}[f_{(0)}(x); \epsilon] + S_{\text{ct}}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon]. \quad (1.19)$$

Por construcción, ésta es finita cuando $\epsilon \rightarrow 0$, de modo que la acción renormalizada es

$$S_{\text{ren}}[f_{(0)}(x)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{\text{sus}}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon]. \quad (1.20)$$

Claro que es totalmente válido agregar más integrales de frontera covariantes que no contribuyan con términos divergentes a la acción original y aún obtener resultados finitos, de

modo que existen distintos esquemas de renormalización (algunas veces es necesario incluir integrales finitas para restaurar alguna simetría). El procedimiento anterior es el esquema “mínimo” en el cual se eliminan cada una de las divergencias de la acción.

Debido a que S_{ct} fue construida sin hacer referencia a fuentes $f_{(0)}(x)$ específicas, dada una acción renormalizable existe un conjunto universal de contratérminos que la vuelve finita para cualquier solución de las ecuaciones de movimiento con una expansión asintótica en la frontera [18]. Cuando hay varios campos dinámicos involucrados en la acción S , S_{ct} puede descomponerse en contratérminos asociados a cada campo por separado más términos cruzados. Los primeros son necesarios siempre que un campo dado aparezca en la acción, mientras que los segundos se anulan cuando alguno de los campos involucrados no sea dinámico.

Por último, es adecuado mencionar que el método descrito hasta ahora no es el único existente para renormalizar cantidades en la correspondencia AdS/CFT. En [23] fue introducido un procedimiento alternativo en el cual se calcula el Hamiltoniano asociado al Lagrangiano de la acción S con la coordenada radial en el papel del tiempo. En este lenguaje, las funciones de correlación duales corresponden con los momentos canónicos de los campos en el lado gravitacional. Las expansiones asintóticas a la frontera del método descrito aquí son sustituidas por expansiones covariantes en eigenfunciones del operador de dilatación, lo que lleva a expresiones de las funciones de correlación en términos de los coeficientes en las expansiones covariantes de los momentos canónicos. Tal método fue aplicado en [24] para calcular flujos RG holográficos, en [25] para estudiar la termodinámica de espacios asintóticos AdS localmente y en [26] para renormalizar el fondo anisotrópico de interés para esta tesis.

1.3. Encajes de Dp-branas

Por supuesto, QCD y SYM $\mathcal{N} = 4$ son dos teorías diferentes y la geometría (1.1) creada por las D3-branas únicamente es dual a la segunda a temperatura cero. Aunque el dual preciso de QCD no ha sido encontrado, se han estudiado teorías de norma similares y encontrado resultados comparables con diversos experimentos. El fondo gravitacional, que corresponde a SYM $\mathcal{N} = 4$ a temperatura finita, está dado por [4]

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (-f dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{R^2}{r^2 f} dr^2 + R^2 d\Omega_{S^5}^2, \quad (1.21)$$

con

$$f = 1 - \frac{r_H^4}{r^4}. \quad (1.22)$$

La expresión (1.21) corresponde a la métrica de la brana negra cerca del horizonte en $r = r_H$, geometría generada por una configuración específica de D3-branas [27]; la temperatura de SYM $\mathcal{N} = 4$ corresponde a la temperatura de Hawking del horizonte. Obsérvese que para

$r \rightarrow \infty$ (1.21) se acerca a $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$, como debe ser para que la correspondencia sea aplicable.

En los casos discutidos hasta ahora las D3-branas han generado la geometría a su alrededor. No obstante, también es posible considerar un fondo independiente y colocar Dp-branas para estudiar su dinámica sobre éste. Tales encajes han sido utilizados ampliamente en la dualidad, siendo [28] el ejemplo más conocido. Ahí se muestra que el encaje de N_f D7-branas de prueba en un fondo como el de (1.21) es dual a SYM $\mathcal{N} = 4$ a temperatura finita con materia fundamental, que se considera como los quarks de la teoría. Cabe mencionar que el número de sabores N_f de los quarks debe ser mucho menor que el número de colores N_c para que el encaje de prueba de las D7-branas baste, pues esto equivale a pedir que el efecto de las D3-branas en el fondo sea mucho mayor comparado con el de las D7-branas; además, la forma en que las D7-branas se distribuyen a lo largo del espacio es fundamentalmente diferente a las D3-branas. Esto se conoce en la literatura como un sistema D3/D7 (o de forma general, sistemas Dp/Dq para otras dimensionalidades).

Dentro de las cantidades físicas que pueden calcularse con la correspondencia, se encuentran la energía libre y la entropía del sistema cuántico dual. En [29] se calcularon ambas cantidades para el sistema D3/D7 (entre otros) y se encontró que era necesario renormalizar la acción de las D7-branas de prueba, la acción de Dirac-Born-Infeld (DBI), para poder extraer resultados finitos. Para ello se utilizaron los resultados de [30], donde se renormalizaron sistemas de D3/D7, D3/D5 [31, 32] y D3/D3 [33] con el método aquí descrito.

1.4. El plasma anisotrópico

Inicialmente se creía que el plasma de quarks y gluones (QGP) creado en las colisiones era espacialmente isotrópico. No obstante, estudios posteriores mostraron que el sistema es localmente anisotrópico por un corto período de tiempo luego de la colisión para después volverse localmente isotrópico. Esto llevó a la necesidad de estudiar un fondo gravitacional dual apropiado para estudiar al QGP en tiempos cercanos a su creación. En [1, 2] se dio éste, como una solución a supergravedad IIB AAdS anisotrópica en diez dimensiones inspirada por el trabajo de [34]. El fondo propuesto es generado por un número N_{D7} de D7-branas en la geometría en adición a las N_c D3-branas que se consideran en la dualidad. A diferencia de las D3-branas, las D7-branas no se extienden en la dirección radial y por tanto no agregan grados de libertad a la teoría de norma (se explicará esto con más detalle adelante). Algunas de las propiedades de dichos plasmas estudiadas con la correspondencia AdS/CFT pueden encontrarse en [35–43]. En particular, como en el caso del fondo de la brana negra, para agregar quarks al modelo dual es preciso encajar D7-branas de prueba en el fondo anisotrópico. Esto se hizo en [44, 45] para estudiar la producción de fotones del plasma anisotrópico. En tales trabajos los cálculos pudieron llevarse a cabo sin necesidad de renormalizar la acción DBI de las D7-branas pues los términos divergentes no contribuían a las cantidades de in-

terés. No obstante, para poder llevar a cabo un análisis termodinámico análogo al de [29] es imprescindible renormalizar el encaje.

Capítulo 2

El fondo anisotrópico y el encaje de las D7-branas

Se comienza con una revisión de los aspectos fundamentales de la solución anisotrópica a SUGRA IIB dada en [1, 2], así como algunos comentarios acerca de la renormalización de la misma; debido a que las ecuaciones de movimiento serán resueltas en el Capítulo 3 para aplicar el método de renormalización holográfica, se omiten detalles técnicos de la deducción aquí. Le sigue una explicación acerca del encaje de D7-branas en este fondo y se mostrarán explícitamente las divergencias que presenta la acción DBI regularizada para la solución específica. Se hará notar que varias divergencias son heredadas del fondo e independientes del encaje, así como un par de particularidades de éstas: un $\log^2 \epsilon$ y un coeficiente indeterminado por las ecuaciones de movimiento.

2.1. El fondo anisotrópico

2.1.1. Acción y solución

El fondo anisotrópico a tratar es una solución a supergravedad IIB en la que se consideran como únicos campos activos la métrica $G_{\mu\nu}$, el campo escalar del dilatón ϕ , la intensidad de campo del axi3n χ y la 5-forma RR F_5 , de manera que la acción que codifica la dinámica del sistema, escrita en el marco de la cuerda, es

$$S = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left[e^{-2\phi} (R + 4\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi) - \frac{1}{2} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi \right] - \frac{1}{8\kappa_{10}^2} \int F_5 \wedge \star F_5, \quad (2.1)$$

con \star el operador estrella de Hodge asociado a la métrica $G_{\mu\nu}$ y κ_{10} la constante de acoplo gravitacional en 10 dimensiones. Basándose en [34], en [1, 2] se propuso el siguiente Ansatz para la métrica en el marco de Einstein

$$ds^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{e^{-\frac{1}{2}\phi}}{u^2} \left(-\mathcal{F}\mathcal{B}dt^2 + dx^2 + dy^2 + e^{-\phi} dz^2 + \frac{du^2}{\mathcal{F}} \right) + d\Omega_{S^5}^2. \quad (2.2)$$

Obsérvese que las componentes G_{xx} y G_{yy} son iguales y ambas distintas a G_{zz} , lo que pone en evidencia la anisotropía espacial. La función \mathcal{F} es tal que se anula para algún radio u_H , de modo que el espacio posee un horizonte ahí y la teoría es dual a un plasma con temperatura finita. Las funciones \mathcal{F} , \mathcal{B} y ϕ sólo dependen de la coordenada radial u mientras que χ es lineal en la coordenada z . Esto es

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(u), \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(u), \quad \phi = \phi(u), \quad \chi = az, \quad (2.3)$$

con a una constante que mide el grado de anisotropía del fondo. Una vez más, con esta parametrización la frontera del espacio se encuentra en $u = 0$ y ahí

$$\mathcal{F}(0) = \mathcal{B}(0) = 1, \quad \phi(0) = 0. \quad (2.4)$$

Por su parte, la 5-forma F_5 es

$$F_5 = \alpha(\Omega_{S^5} + \star\Omega_{S^5}), \quad (2.5)$$

donde α es constante cuyo valor queda fijo por las ecuaciones de movimiento derivadas de (2.1) en

$$\alpha^2 = 16. \quad (2.6)$$

Esta geometría es generada por una densidad uniforme n_{D7} de D7-branas disueltas en el espacio. Esto quiere decir que aunque la acción (2.1) aparentemente no hace referencia alguna a estos objetos, están codificados en el campo $\chi = az$ por medio de la constante a con

$$a \propto n_{D7}. \quad (2.7)$$

Nótese además que para

$$a = 0, \quad \phi = 0, \quad \mathcal{B} = 1, \quad \mathcal{F} = 1 - \frac{u^4}{u_H^4}, \quad (2.8)$$

que es una solución válida a las ecuaciones de movimiento, la métrica (2.2) se reduce a (1.21) (las coordenadas radiales se relacionan con $r \propto 1/u$). Esto lleva a concluir que el fondo anisotrópico es generado por un sistema D3/D7 con retroacción completa. No obstante, es importante señalar que ambos tipos de objetos se extienden de forma muy distinta en la geometría, pues las D7-branas se apilan en la dirección z y no a lo largo de u como las D3-branas. Las coordenadas del volumen de mundo de ambas se resumen en el siguiente cuadro:

| | | t | x | y | z | u | Ω_{S^5} |
|----------|----|-----|-----|-----|-----|-----|----------------|
| N_c | D3 | × | × | × | × | | |
| N_{D7} | D7 | × | × | × | | | × |

2.1.2. Renormalización

Las expansiones asintóticas a la frontera para las funciones \mathcal{F} , \mathcal{B} y el campo ϕ se calculan con las ecuaciones de movimiento derivadas de (2.1). El resultado dado en [2] es

$$\phi = -\frac{a^2}{4}u^2 + \left(\frac{2}{7}b_4 + \frac{121}{4032}a^4 - \frac{1}{6}a^4 \log u\right)u^4 + \mathcal{O}(u^6), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{F} = 1 + \frac{11a^2}{24}u^2 + \left(f_4 + \frac{7}{12}a^4 \log u\right)u^4 + \mathcal{O}(u^6), \quad (2.10)$$

$$\mathcal{B} = 1 - \frac{11a^2}{24}u^2 + \left(b_4 - \frac{7}{12}a^4 \log u\right)u^4 + \mathcal{O}(u^6), \quad (2.11)$$

donde f_4 y b_4 son los coeficientes indeterminados por las ecuaciones de movimiento. Al sustituir dichas expresiones de vuelta en (2.1), así como $\chi = az$ y (2.5), e integrar sobre la S^5 y u hasta un radio de corte ϵ se obtienen términos que divergen al extender la integral hasta la frontera, es decir, al tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. La renormalización del fondo también se hizo en [2] ayudándose con los resultados de [26]. Para ello se llevó la métrica (2.2) a la forma (1.6); tal transformación de coordenadas implica la ecuación diferencial para $u(v)$

$$\frac{u\mathcal{F}^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}\phi}}{v} - u' = 0, \quad (2.12)$$

donde la prima denota la derivada con respecto de v . La solución asintótica de ésta es

$$u = v + \frac{a^2}{12}v^3 + \left(\frac{b_4 + 7f_4}{56} - \frac{419}{32256}a^4 + \frac{1}{16}a^4 \log v\right)v^5 + \mathcal{O}(v^7), \quad (2.13)$$

lo que a su vez implica expansiones para \mathcal{F} , \mathcal{B} y ϕ en términos de v

$$\phi = -\frac{a^2}{4}v^2 + \left(\frac{2}{7}b_4 - \frac{47}{4032}a^4 - \frac{1}{6}a^4 \log v\right)v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (2.14)$$

$$\mathcal{F} = 1 + \frac{11a^2}{24}v^2 + \left(f_4 + \frac{11}{144}a^4 + \frac{7}{12}a^4 \log v\right)v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (2.15)$$

$$\mathcal{B} = 1 - \frac{11a^2}{24}v^2 + \left(b_4 - \frac{11}{144}a^4 - \frac{7}{12}a^4 \log v\right)v^4 + \mathcal{O}(v^6). \quad (2.16)$$

Sustituir (2.13)-(2.16) en (2.2) lleva la métrica a la forma

$$ds^2 = G_{vv}dv^2 + \frac{1}{v^2}g_{ij}dx^i dx^j + d\Omega_{S^5}^2, \quad (2.17)$$

con las expansiones del tipo (1.10) dadas por

$$g_{tt} = -1 + \frac{a^2}{24}v^2 + \left(\frac{2749}{16128}a^4 - \frac{23}{28}b_4 - \frac{3}{4}f_4 + \frac{1}{24}a^4 \log v\right)v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (2.18)$$

$$g_{xx} = g_{yy} = 1 - \frac{a^2}{24}v^2 + \left(\frac{71}{1792}a^4 - \frac{5}{28}b_4 - \frac{1}{4}f_4 - \frac{1}{24}a^4 \log v\right)v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (2.19)$$

$$g_{zz} = 1 + \frac{5a^2}{24}v^2 + \left(\frac{1163}{16128}a^4 - \frac{13}{28}b_4 - \frac{1}{4}f_4 + \frac{1}{8}a^4 \log v\right)v^4 + \mathcal{O}(v^6). \quad (2.20)$$

Obsérvese que, como predice el método general de renormalización holográfica, las ecuaciones de movimiento eliminaron las potencias de v impares. Por su parte, la componente radial es

$$G_{vv} = \frac{1}{v^2} + \mathcal{O}(v^4). \quad (2.21)$$

La acción de contratérminos completa fue dada en [26]. Ahí se usó el método Hamiltoniano para renormalizar el sistema general gravedad-axión-dilatón, señalándose que la divergencia logarítmica está relacionada con la anomalía conforme del lado cuántico de la dualidad. En [2] se dieron los contratérminos reducidos al caso particular del fondo anisotrópico, que son

$$S_{\text{ct}} = \frac{1}{\kappa_{10}^2} \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left(3 - \frac{1}{8}e^{2\phi} \partial_i \chi \partial^i \chi\right) - \frac{1}{\kappa_{10}^2} \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} \mathcal{A}, \quad (2.22)$$

donde \mathcal{A} es la anomalía conforme calculada explícitamente en [26]. Tal expresión general para \mathcal{A} se reduce considerablemente si χ es el único campo que depende de las coordenadas de la frontera, en cuyo caso se tiene que

$$\mathcal{A} = \frac{5}{24}e^{4\phi} (\partial_i \chi \partial^i \chi)^2. \quad (2.23)$$

Finalmente, cabe mencionar que en [2] se agrega además un contratérmino finito para simplificar cálculos.

2.2. El encaje de las D7-branas

2.2.1. Acción DBI

Las Dp-branas son objetos con masa y cargas que tienen una dinámica no trivial, de manera que debe existir una acción que describa su comportamiento. Ésta es la acción de Dirac-Born-Infeld, que escrita en el marco de la cuerda es [9]

$$S_p = -T_p \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} \sqrt{-h}, \quad (2.24)$$

con T_p la tensión de la Dp-brana, ξ las $p + 1$ coordenadas en su volumen de mundo y h el determinante de la métrica inducida ahí, dada por

$$h_{ab} = G_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu, \quad (2.25)$$

donde las derivadas se toman respecto a las coordenadas del volumen de mundo ξ^a y la forma en la que las x^μ se escriben como funciones de éstas depende, como se verá luego, de la forma en la que se encaja la Dp-brana. Es usual abreviar lo anterior y decir que h_{ab} es la métrica inducida en la Dp-brana.

2.2.2. La métrica inducida

Como se explicó en el Capítulo 1, incluir N_f D7-branas de prueba distribuidas en direcciones específicas del lado gravitacional agrega materia fundamental a la teoría dual. En el caso del fondo anisotrópico aquí tratado, el sistema D3/D7/D7 queda descrito en el siguiente cuadro:

| | | t | x | y | z | v | θ_1 | θ_2 | θ_3 | θ_4 | θ_5 |
|----------|----|-----|-----|-----|-----|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| N_c | D3 | × | × | × | × | | | | | | |
| N_{D7} | D7 | × | × | × | | | × | × | × | × | × |
| N_f | D7 | × | × | × | × | × | | | × | × | × |

Esto cuando la métrica de la 5-esfera se escribe como

$$d\Omega_{S^5}^2 = d\theta_1^2 + \cos^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_3^2 + \sin^2 \theta_3 (d\theta_4^2 + \sin^2 \theta_4 d\theta_5^2)). \quad (2.26)$$

La forma en la que se encajan las D7-branas en el fondo es a un ángulo θ_2 fijo y con θ_1 variable. Éste último es así una función de v (pues la métrica del fondo anisotrópico sólo depende de esa coordenada) y el campo que describe la dinámica de una D7-brana es

$$\psi(v) = \cos \theta_1(v). \quad (2.27)$$

Con esto es posible calcular la métrica inducida mediante la expresión (2.25) y el fondo $G_{\mu\nu}$ dado por (2.17). Se obtiene

$$ds_{D7}^2 = \left(G_{vv} + \frac{\psi'^2}{1 - \psi^2} \right) dv^2 + \frac{1}{v^2} g_{ij} dx^i dx^j + (1 - \psi^2) d\Omega_{S^3}^2, \quad (2.28)$$

donde una vez más la prima denota la derivada respecto a v y $d\Omega_{S^3}^2$ es la métrica una 3-esfera

$$d\Omega_{S^3}^2 = d\theta_3^2 + \sin^2 \theta_3 (d\theta_4^2 + \sin^2 \theta_4 d\theta_5^2). \quad (2.29)$$

2.2.3. Solución en la frontera

Sustituir la métrica inducida (2.28) en (2.24) permite escribir a la acción DBI como un funcional de ψ

$$S_{D7} = -T_{D7} \int d^8x \mathcal{L}[\psi, \psi'], \quad (2.30)$$

donde la integral se realiza sobre el volumen de mundo de la D7-brana y el lagrangiano, escrito en el marco de Einstein, es

$$\mathcal{L}[\psi, \psi'] = e^\phi \sin^2 \theta_3 \sin \theta_4 \sqrt{-\frac{1}{v^8} g (1 - \psi^2)^3 \left(G_{vv} + \frac{\psi'^2}{1 - \psi^2} \right)}, \quad (2.31)$$

con g el determinante de g_{ij} (el por qué adopta esa forma en este marco se explicará en el Capítulo 3). El campo dinámico en lo anterior es $\psi(v)$, de modo que las ecuaciones de Euler-Lagrange arrojan la ecuación de movimiento para éste

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dv} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} \right] = 0. \quad (2.32)$$

La solución asintótica que se sigue es

$$\psi = mv + \left(c + \frac{5}{24} a^2 m \log v \right) v^3 + \mathcal{O}(v^5), \quad (2.33)$$

donde la condición de frontera m y el coeficiente indeterminado c se relacionan con la masa y el condensado del quark respectivamente.

2.2.4. Divergencias de la acción

Al sustituir la solución (2.33) en la acción (2.30) e integrar sobre la S^3 y v hasta un radio de corte ϵ se obtiene

$$S_{\text{reg}} = -T_{D7} V_{S^3} \int d^4x \left[\frac{1}{4\epsilon^4} + \left(-\frac{5}{48} a^2 - \frac{1}{2} m^2 \right) \frac{1}{\epsilon^2} + \left(\frac{47}{4032} a^4 - \frac{5}{12} a^2 m^2 - \frac{2}{7} b_4 \right) \log \epsilon + \frac{1}{12} a^4 \log^2 \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right], \quad (2.34)$$

donde V_{S^3} es el volumen de la 3-esfera. La expresión anterior pone en evidencia que S_{reg} no posee un límite finito cuando $\epsilon \rightarrow 0$, de modo que es preciso aplicar el método de renormalización holográfica para poder extraer resultados físicos correctos de la acción. Antes de proceder, es apropiado detenerse a observar algunas particularidades de S_{reg} . Según el método descrito en el Capítulo 1, la acción regularizada debe tener la forma de

$$S_{\text{reg}} = \int d^d x \sqrt{g_{(0)}} (\epsilon^{-\nu} a_{(0)} + \epsilon^{-(\nu+1)} a_{(1)} + \dots + \log \epsilon a_{(\nu)} + \mathcal{O}(\epsilon^0)). \quad (2.35)$$

Lo primero que salta a la vista es que a diferencia de (2.35), (2.34) posee un término que va como $\log^2 \epsilon$ que no se contempla en el método de renormalización holográfica [8, 15–18]. Segundo, en el caso del encaje ψ es el único campo dinámico, de modo que parecería que sólo éste toma el lugar del campo general $\mathcal{F}(x, v)$ considerado en el Capítulo 1 (no se confunda con la función \mathcal{F} en la métrica (2.2)). Sin embargo, de ser así todos los coeficientes de las potencias de ϵ divergentes en (2.34) dependerían de la fuente m . Como esto no sucede, se deduce que parte del comportamiento divergente de la acción de la D7-brana viene heredado del fondo.

Para poner en evidencia esta afirmación, considérense las siguientes expansiones asintóticas a la frontera para los campos ϕ , χ , ψ y g_{ij}

$$g_{ij} = g_{(0)ij} + g_{(2)ij} v^2 + (g_{(4)ij} + h_{(4)ij} \log v) v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (2.36)$$

$$\phi = \phi_{(0)} + \phi_{(2)} v^2 + (\phi_{(4)} + \tilde{\phi}_{(4)} \log v) v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (2.37)$$

$$\chi = \chi_{(0)}(t, x, y, z), \quad (2.38)$$

$$\psi = v(\psi_{(0)} + \psi_{(2)} v^2 + \tilde{\psi}_{(2)} \log v) + \mathcal{O}(v^4). \quad (2.39)$$

Basándose en la forma de las soluciones ya conocidas, (2.14), (2.18), (2.19), (2.20) y (2.33), en las expresiones anteriores se han omitido las potencias de v impares y el término logarítmico se ha introducido a orden v^4 en g_{ij} y ϕ , y a orden v^3 en ψ . Naturalmente, ninguna de estas expansiones es solución a las respectivas ecuaciones de movimiento pues todos los coeficientes involucrados son arbitrarios. Esto es útil, pues al no tener un valor numérico fijo es posible rastrear cómo es que cada uno contribuye a las divergencias de la acción de la D7-brana. El resultado de evaluar ésta es

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{reg}}}{T_{D7} V_{S^3}} = & - \int d^4 x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \left(\frac{1}{\epsilon^4} a_{(0)} + \frac{1}{\epsilon^2} a_{(1)} + a_{(2)} \log \epsilon + a_{(3)} \log^2 \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right) \\ & + \log \epsilon \int d^4 x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \phi_{(4)}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

con

$$a_{(0)} = \frac{1}{4}, \quad (2.41)$$

$$a_{(1)} = \frac{1}{4} \left(g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} + 2\phi_{(2)} - 2\psi_{(0)}^2 \right), \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
a_{(2)} = & -\frac{1}{2}g_{(0)}{}^{ij}g_{(4)ij} - \frac{1}{8}(g_{(0)}{}^{ij}g_{(2)ij})^2 + \frac{1}{4}g_{(0)}{}^{ij}g_{(2)jk}g_{(0)}{}^{kl}g_{(2)li} - \\
& \frac{1}{2}\phi_{(2)}g_{(0)}{}^{ij}g_{(2)ij} - \frac{1}{2}\phi_{(2)}^2 + \frac{1}{2}\psi_{(0)}^2g_{(0)}{}^{ij}g_{(2)ij} + \phi_{(2)}\psi_{(0)}^2 - \psi_{(0)}\tilde{\psi}_{(2)},
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$a_{(3)} = -\frac{1}{4}\left(g_{(0)}{}^{ij}h_{(4)ij} + 2\tilde{\phi}_{(4)}\right). \tag{2.44}$$

Obsérvese que todas las potencias divergentes con coeficientes $a_{(k)}$, incluso aquella que va como $\log^2 \epsilon$, están expresadas en términos de información determinada por las ecuaciones de movimiento y las fuentes, así que en principio todas ellas son manejables. De hecho, en el Capítulo 4 se mostrará que tal término $\log^2 \epsilon$ no representa problema en absoluto. En (2.40) se separó explícitamente una integral atípica que contiene a $\phi_{(4)}$, coeficiente no determinado por las ecuaciones de movimiento. Según el método de renormalización holográfica [8, 15–18] esta situación no debería darse pues, como se verá en capítulos posteriores, tal divergencia no puede ser eliminada con este formalismo. Finalmente, obsérvese que esto también se presenta en el caso particular de (2.34) en la forma del coeficiente indeterminado b_4 ; expresar las divergencias para condiciones de frontera arbitrarias permite notar que éste viene del dilatón en la acción DBI y no de la métrica.

Como último comentario, es importante mencionar que aunque (2.30) es la acción para el campo $\psi(v)$ en el volumen de mundo de la D7, está puede verse como la acción de un campo escalar ψ propagándose en la parte AAdS₅ del fondo anisotrópico, de modo que el formalismo de renormalización holográfica es aplicable. Una discusión completa acerca de esto se da en [30].

Capítulo 3

Renormalización holográfica de la D7-brana

Aquí se utilizará el método de renormalización holográfica para eliminar las divergencias que aparecen en la acción DBI del encaje de la D7-brana en el fondo anisotrópico. En el capítulo anterior se evidenció que varias de estas divergencias dependen únicamente de la información del fondo. Por tanto, se comenzará con la deducción de las ecuaciones de movimiento del fondo y de la D7-brana en el marco de Einstein y se resolverán bajo condiciones de frontera arbitrarias para poder escribir correctamente cada divergencia de forma covariante. Luego se usarán esos resultados para construir la acción de contratérminos y se notará en el proceso que no todas las integrales arrojadas por el método contribuyen con términos divergentes, lo que permitirá simplificar el resultado.

3.1. Análisis del fondo en la frontera

3.1.1. Acción de SUGRA IIB en el marco de Einstein

Como se comentó en el Capítulo 2, el punto de partida para la deducción del fondo anisotrópico es la acción

$$S = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left[e^{-2\phi} (R + 4\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi) - \frac{1}{2} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi \right] - \frac{1}{8\kappa_{10}^2} \int F_5 \wedge \star F_5, \quad (3.1)$$

que se encuentra escrita en el marco de la cuerda, lo que significa que el escalar de curvatura R aparece multiplicado por una función escalar que nunca se anula. Cuando esto ocurre, es una técnica usual aplicar una transformación conforme a la métrica

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \omega^2(x) G_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

con $\omega(x) \neq 0$ para todo punto. Cuando el tensor de curvatura está dado por

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}, \quad (3.3)$$

el escalar de Ricci es

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu}, \quad (3.4)$$

y el espacio tiene dimensión d , el escalar de curvatura R cambia bajo (3.2) de acuerdo a [46]

$$R = \omega^2 \tilde{R} + 2(d-1)\omega \tilde{G}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \omega - d(d-1) \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega, \quad (3.5)$$

donde la tilde indica que los objetos geométricos son los asociados a la nueva métrica $\tilde{G}_{\mu\nu}$.

Como se verá a continuación, tal transformación separa al escalar de curvatura en la acción llevándola a tomar la forma de la acción de Einstein-Hilbert. Para el presente caso la métrica $\tilde{G}_{\mu\nu}$ está dada por

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = e^{-\frac{1}{2}\phi} G_{\mu\nu}; \quad (3.6)$$

al considerar esto y que el espacio en la acción (3.1) tiene 10 dimensiones, se obtiene de (3.5) que el escalar de curvatura es

$$R = e^{-\frac{1}{2}\phi} \left[\tilde{R} - \frac{9}{2} \tilde{G}^{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right]. \quad (3.7)$$

Es útil notar también que, en 10 dimensiones, el determinante de la métrica cambiará bajo (3.6) como

$$\sqrt{-G} = e^{\frac{5}{2}\phi} \sqrt{-\tilde{G}}. \quad (3.8)$$

Debido a esto, el dual de Hodge de k -formas se verá afectado en función de k con

$$F \wedge \star F = e^{\frac{5-k}{2}\phi} F \wedge \tilde{\star} F. \quad (3.9)$$

Sustituir las expresiones (3.6) a (3.9) en (3.1) lleva la acción a la forma

$$S = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} R - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} (9\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi + \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + e^{2\phi} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi) - \frac{1}{8\kappa_{10}^2} \int F_5 \wedge \star F_5, \quad (3.10)$$

donde se ha optado por abandonar las tildes para simplificar la notación; sólo debe recordarse que de este punto en adelante las ecuaciones obtenidas estarán en todo momento en el marco de Einstein.

3.1.2. Ecuaciones de movimiento

El paso siguiente es derivar las ecuaciones para ϕ , $G_{\mu\nu}$, χ y F_5 de la acción (3.10). Considérese primero su variación respecto al dilatón

$$\delta S = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} (2e^{2\phi} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi \delta\phi + 2\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \delta\phi + 9\nabla_\sigma \nabla^\sigma \delta\phi). \quad (3.11)$$

Integración por partes sobre el segundo término arroja, tomándose variaciones nulas en la frontera, que

$$\int d^{10}x \sqrt{-G} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \delta\phi = - \int d^{10}x \partial_\nu (\sqrt{-G} G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) \delta\phi, \quad (3.12)$$

mientras que para el tercero se utiliza el teorema de Stokes, se completa la derivada tomándose en cuenta que $\delta\phi = 0$ en la frontera y se utiliza de nuevo el teorema de Stokes para concluir que

$$\int d^{10}x \sqrt{-G} \nabla_\sigma \nabla^\sigma \delta\phi = \int d^9x \sqrt{-H} \nabla^\sigma (n_\sigma \delta\phi) = 0, \quad (3.13)$$

pues la frontera de la frontera es el vacío. Con estos resultados la variación de la acción respecto a ϕ es

$$\delta S = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left(2e^{2\phi} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi - \frac{2}{\sqrt{-G}} \partial_\nu (\sqrt{-G} G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) \right) \delta\phi, \quad (3.14)$$

y por tanto la ecuación de movimiento del dilatón resulta ser

$$e^{2\phi} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi - \nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi = 0, \quad (3.15)$$

donde se utilizó la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_\nu (\sqrt{-G} G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) = \nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi. \quad (3.16)$$

Por su parte, la variación respecto al axión χ es

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} e^{2\phi} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \delta \chi = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \partial_\mu (e^{2\phi} \sqrt{-G} G^{\mu\nu} \partial_\nu \chi) \delta \chi \\ &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} e^{2\phi} \left[2\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \chi + \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_\nu (\sqrt{-G} G^{\mu\nu} \partial_\mu \chi) \right] \delta \chi,\end{aligned}\quad (3.17)$$

de donde se obtiene la ecuación de movimiento

$$\nabla_\sigma \nabla^\sigma \chi + 2\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \chi = 0. \quad (3.18)$$

Para variar (3.10) respecto a la métrica es conveniente hacerlo paso a paso. Considérese primero el término que contiene a F_5

$$S_{F_5} = -\frac{1}{8\kappa_{10}^2} \int F_5 \wedge \star F_5 = -\frac{1}{5! \times 8\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} F_{\sigma\alpha\beta\gamma\delta} F^{\sigma\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.19)$$

que al variar da

$$\delta S_{F_5} = -\frac{1}{5! \times 8\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left(5F_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} F_\nu^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} F_{\sigma\alpha\beta\gamma\delta} F^{\sigma\alpha\beta\gamma\delta} \right) \delta G^{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

Luego la integral que contiene al axión

$$S_\chi = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} e^{2\phi} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi, \quad (3.21)$$

al ser variada respecto a $G^{\mu\nu}$ resulta en

$$\delta S_{F_1} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} e^{2\phi} \left(\partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi \right) \delta G^{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

En cuanto a la integral que sólo contiene a la métrica y al dilatón

$$\begin{aligned}S_\phi &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} (9\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi + \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi) \\ &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left(\frac{9}{\sqrt{-G}} \partial_\nu (\sqrt{-G} G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) + \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \right),\end{aligned}\quad (3.23)$$

tomar variaciones de la métrica tales que se anulen en la frontera elimina el primer sumando y el segundo, luego de integrar por partes, conduce a

$$\delta S_\phi = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \right) \delta G^{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Por último, la integral que contiene al escalar de curvatura

$$S_R = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} R, \quad (3.25)$$

es el término usual de Einstein-Hilbert cuya variación respecto a la métrica, una vez que se descartan términos de frontera, es [46]

$$\delta S_R = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R G_{\mu\nu} \right) \delta G^{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Con esto y los resultados de (3.20), (3.22) y (3.24) se concluye que las ecuaciones de Einstein son:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} R = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + e^{2\phi} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi + \frac{1}{48} F_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} F_\nu^{\alpha\beta\gamma\delta}) \\ & - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + e^{2\phi} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi + \frac{1}{2 \times 5!} F_{\sigma\alpha\beta\gamma\delta} F^{\sigma\alpha\beta\gamma\delta}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por otro lado, la 5-forma F_5 es la intensidad de campo de una 4-forma C_4

$$F_5 = dC_4, \quad (3.28)$$

de modo que al variar (3.10) respecto a C_4 se tiene

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{8\kappa_{10}^2} \int (\delta F_5 \wedge \star F_5 + F_5 \wedge \star \delta F_5) = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \delta F_5 \wedge \star F_5 \\ = & -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d(\delta C_4) \wedge \star F_5 = \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int C_4 \wedge d \star F_5, \end{aligned} \quad (3.29)$$

y la ecuación de movimiento que se sigue es

$$d \star F_5 = 0, \quad (3.30)$$

sujeta a

$$dF_5 = d(dC_4) = 0. \quad (3.31)$$

Adicionalmente, supergravedad IIB indica que F_5 debe ser autodual (esta información no es consecuencia de la acción (3.10))

$$F_5 = \star F_5. \quad (3.32)$$

3.1.3. Solución asintótica a la frontera

El paso siguiente en el método de renormalización holográfica es resolver las ecuaciones de movimiento cerca de la frontera. Como se explicó en el Capítulo 1, esto se logra al buscar expansiones de la forma

$$\mathcal{F}(x, v) = v^m (f_{(0)}(x) + f_{(1)}(x)v + \dots + (f_{(n)}(x) + \tilde{f}_{(n)}(x) \log v) v^n + \mathcal{O}(v^{n+1})), \quad (3.33)$$

para cada campo dinámico $\mathcal{F}(x, v)$ (no se confunda con la función \mathcal{F} en (2.2)). Para que sea un espacio AAdS \times S⁵, la métrica del fondo debe poder escribirse en las coordenadas FG como

$$ds^2 = G_{vv}(v) dv^2 + \frac{1}{v^2} g_{ij}(v) dx^i dx^j + d\Omega_{S^5}^2, \quad (3.34)$$

donde x^i son las coordenadas en la frontera de la parte AAdS del espacio y las coordenadas de la 5-esfera se eligen una vez más como en (2.26)

$$d\Omega_{S^5}^2 = d\theta_1^2 + \cos^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_3^2 + \sin^2 \theta_3 (d\theta_4^2 + \sin^2 \theta_4 d\theta_5^2)). \quad (3.35)$$

Nótese que aún con esta forma general para $G_{\mu\nu}$, la 5-forma

$$F_5 = \alpha(\Omega_{S^5} + \star\Omega_{S^5}), \quad (3.36)$$

es solución a las ecuaciones de movimiento. Para evidenciar esto, observase que con la presente elección de coordenadas la forma de volumen de S^5 es

$$\Omega_{S^5} = \cos \theta_1 \sin \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin^3 \theta_1 d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \wedge d\theta_5, \quad (3.37)$$

y con la métrica (3.34) su dual de Hodge resulta ser

$$\star\Omega_{S^5} = -\frac{\sqrt{-G_{vv}(v)g(v)}}{v^4} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \wedge dv, \quad (3.38)$$

con $g(v) = \det(g_{ij}(v))$. Por tanto, como Ω_{S^5} no depende de v o alguna x^i y $d\theta_n \wedge d\theta_n = 0$ se tiene que

$$d\Omega_{S^5} = \partial_\mu (\cos \theta_1 \sin \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin^3 \theta_1) dx^\mu \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \wedge d\theta_5 = 0, \quad (3.39)$$

y de forma similar

$$d\star\Omega_{S^5} = -\partial_\mu \left(\frac{\sqrt{-G_{vv}(v)g(v)}}{v^4} \right) dx^\mu \wedge dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \wedge dv = 0, \quad (3.40)$$

debido a que $dx^i \wedge dx^i = dv \wedge dv = 0$ y $\star\Omega_{S^5}$ no depende de las coordenadas angulares θ_n . Lo anterior implica que

$$dF_5 = \alpha(d\Omega_{S^5} + d(\star\Omega_{S^5})) = 0, \quad (3.41)$$

F_5 satisface la identidad de Bianchi (3.31). Por otra parte, al calcular el doble dual de Hodge de Ω_{S^5} se obtiene

$$\star^2\Omega_{S^5} = \cos \theta_1 \sin \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin^3 \theta_1 d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \wedge d\theta_5 = \Omega_{S^5}, \quad (3.42)$$

de modo que

$$\star F_5 = \alpha(\star\Omega_{S^5} + \star^2\Omega_{S^5}) = \alpha(\star\Omega_{S^5} + \Omega_{S^5}) = F_5, \quad (3.43)$$

y por tanto F_5 es autodual y, al satisfacer también la identidad de Bianchi, cumple la ecuación (3.30). Cabe mencionar que el valor de la constante α se fija por la solución asintótica de las ecuaciones de movimiento en 4, independientemente del valor de g_{ij} y ϕ en la frontera.

Las expansiones propuestas para los campos serán las mismas que se consideraron al final del Capítulo 2

$$G_{vv} = \frac{1}{v^2} + \mathcal{O}(v^4), \quad (3.44)$$

$$g_{ij} = g_{(0)ij} + g_{(2)ij}v^2 + (g_{(4)ij} + h_{(4)ij} \log v)v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (3.45)$$

$$\chi = \chi_{(0)}(t, x, y, z), \quad (3.46)$$

$$\phi = \phi_{(0)} + \phi_{(2)}v^2 + (\phi_{(4)} + \tilde{\phi}_{(4)} \log v)v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (3.47)$$

donde el orden al que se introduce el término logarítmico está basado en la solución del fondo anisotrópico ya conocido y se omiten las potencias impares de v pues se sabe de antemano que las ecuaciones de movimiento anulan estos coeficientes (como siempre, i y j corren sobre las coordenadas x^i en la frontera de AdS). Obsérvese que debido a que la métrica (3.34) y el dilatón sólo dependen de la coordenada v , la ecuación para χ (3.18) se reduce a

$$\gamma^{ij} \partial_i \partial_j \chi_{(0)} = \partial_i \partial^i \chi_{(0)} = 0, \quad (3.48)$$

y aunque ésta representa la única restricción sobre $\chi_{(0)}$, no será necesaria en los cálculos siguientes. Con esto se procede a resolver las ecuaciones (3.15) y (3.27) con las expansiones (3.34), (3.44), (3.45) y (3.47) orden a orden en v . El resultado es

$$g_{(2)ij} = \frac{1}{4} e^{2\phi_{(0)}} \left[\partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)} - \frac{1}{6} g_{(0)ij} g_{(0)}^{kl} \partial_k \chi_{(0)} \partial_l \chi_{(0)} \right], \quad (3.49)$$

$$h_{(4)ij} = \frac{1}{6} e^{4\phi_{(0)}} g_{(0)}^{kl} \partial_k \chi_{(0)} \partial_l \chi_{(0)} \left[\partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)} - \frac{1}{4} g_{(0)ij} g_{(0)}^{ab} \partial_a \chi_{(0)} \partial_b \chi_{(0)} \right], \quad (3.50)$$

$$g_{(0)}^{ij} g_{(4)ij} = -\frac{11}{576} e^{4\phi_{(0)}} (g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)})^2, \quad (3.51)$$

$$\phi_{(2)} = -\frac{1}{4} e^{2\phi_{(0)}} g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)}, \quad (3.52)$$

$$\tilde{\phi}_{(4)} = -\frac{1}{6} e^{4\phi_{(0)}} (g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)})^2. \quad (3.53)$$

Las ecuaciones de movimiento determinaron parcialmente al coeficiente $g_{(4)ij}$ y dejaron completamente indeterminado a $\phi_{(4)}$. En los cálculos posteriores serán necesarias un par de cantidades más, que se obtienen de contraer a $g_{(2)ij}$ y $h_{(4)ij}$ con la matriz inversa de la fuente $g_{(0)}^{ij}$

$$g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} = \frac{1}{12} e^{2\phi_{(0)}} g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)}, \quad (3.54)$$

$$g_{(0)}^{ij} g_{(2)jk} g_{(0)}^{kl} g_{(2)li} = \frac{7}{144} e^{4\phi_{(0)}} (g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)})^2, \quad (3.55)$$

$$g_{(0)}^{ij} h_{(4)ij} = 0. \quad (3.56)$$

Es apropiado hacer notar que no es necesario proponer una expansión general para la 5-forma F_5 , pues ésta depende completamente de la métrica y no aportaría términos nuevos.

3.1.4. Inversión

Ahora se deben reescribir los coeficientes de las expansiones asintóticas calculadas en términos de los campos originales. Para ello, es preciso notar que a orden cero en v (3.45), (3.46) y (3.47) se reducen a

$$g_{(0)ij} = g_{ij}, \quad \phi_{(0)} = \phi, \quad \chi_{(0)} = \chi, \quad (3.57)$$

Sustituir esto en las soluciones para los coeficientes, (3.51) a (3.56), junto con el hecho de que la métrica en la frontera de AAdS γ_{ij} se relaciona con g_{ij} mediante

$$g_{ij} = v^2 \gamma_{ij}, \quad g^{ij} = \frac{1}{v^2} \gamma^{ij}, \quad (3.58)$$

da por resultado

$$g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} = \frac{1}{12v^2} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \quad (3.59)$$

$$g_{(0)}^{ij} h_{(4)ij} = 0 \quad (3.60)$$

$$g_{(0)}^{ij} g_{(2)jk} g_{(0)}^{kl} g_{(2)li} = \frac{7}{144v^4} e^{4\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2, \quad (3.61)$$

$$g_{(0)}^{ij} g_{(4)ij} = -\frac{11}{576v^4} e^{4\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2, \quad (3.62)$$

$$\phi_{(2)} = -\frac{1}{4v^2} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi, \quad (3.63)$$

$$\tilde{\phi}_{(4)} = -\frac{1}{6v^4} e^{4\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2, \quad (3.64)$$

donde los índices se suben y bajan con la métrica en la frontera γ_{ij} del lado de las expresiones covariantes.

Nótese que para expresar los coeficientes de las potencias divergentes de (2.40) no es necesario calcular $g_{(0)ij}$ y $\phi_{(0)}$ en términos de γ_{ij} y ϕ , sino $\sqrt{-g_{(0)}}$ y $e^{\phi_{(0)}}$. Para el primero se calcula la expansión en la frontera de $\sqrt{-\gamma}$ con ayuda de (3.45). Se obtiene

$$\sqrt{-\gamma} = \sqrt{-g_{(0)}} \left(\frac{1}{v^4} + \frac{1}{2v^2} g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} + \frac{1}{2} g_{(0)}^{ij} h_{(4)ij} \log v + \mathcal{O}(v^0) \right), \quad (3.65)$$

de donde

$$\sqrt{-g_{(0)}} = v^4 \sqrt{-\gamma} \left(1 - \frac{1}{2} g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} v^2 - \frac{1}{2} g_{(0)}^{ij} h_{(4)ij} v^4 \log v \right), \quad (3.66)$$

y con las expresiones covariantes para las trazas, (3.59) y (3.60), se concluye que

$$\sqrt{-g_{(0)}} = v^4 \sqrt{-\gamma} \left(1 - \frac{1}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \right). \quad (3.67)$$

En cuanto a la inversión de $e^{\phi(0)}$, con (3.47) se calcula que

$$e^{\phi} = e^{\phi(0)}(1 + v^2\phi_{(2)} + v^4\tilde{\phi}_{(4)} \log v + \mathcal{O}(v^4)), \quad (3.68)$$

de donde

$$e^{\phi(0)} = e^{\phi}(1 - v^2\phi_{(2)} - v^4\tilde{\phi}_{(4)} \log v), \quad (3.69)$$

y con ayuda de las expresiones (3.63) y (3.64) se tiene

$$e^{\phi(0)} = e^{\phi} \left(1 + \frac{1}{4}e^{2\phi}\partial^i\chi\partial_i\chi + \frac{1}{6}e^{4\phi}(\partial^i\chi\partial_i\chi)^2 \log v \right). \quad (3.70)$$

3.1.5. Acerca de la renormalización del fondo

Hasta este punto no se han considerado de ninguna forma las D7-branas de prueba y sólo se ha trabajado con las ecuaciones del fondo. De hecho, el trabajo hasta ahora es el necesario para renormalizar la acción gravitacional (3.10). Si se evalúa la acción (3.10) en las expansiones asintóticas (3.34), (3.44)-(3.47) se pueden aislar términos que divergen en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y escribir sus coeficientes en términos de los campos originales mediante las inversiones anteriores. Como puede comprobarse por sustitución directa, esto devuelve la acción de contratérminos (2.22) reportada en [2].

En [26] se renormalizó la acción dilatón-axión-gravedad general mediante el método Hamiltoniano. Al final de dicho trabajo, se tomó como caso particular la acción (3.10) reducida ya a 5 dimensiones y se obtuvieron los contratérminos necesarios, reportándose las inversiones de los coeficientes $g_{ij}^{(k)}$, $\phi^{(k)}$ y $\chi^{(k)}$ en términos de los campos g_{ij} , ϕ y χ en el caso en el que estos últimos dependen de las coordenadas x^i en la frontera. Por supuesto, sus resultados se reducen a los aquí presentados como caso particular.

3.2. Análisis del encaje en la frontera

3.2.1. Acción DBI en el marco de Einstein

En el Capítulo 2 se explicó que la acción para el encaje de prueba de una D7-brana en un fondo 10 dimensional es

$$S_{D7} = -T_{D7} \int d^8\xi e^{-\phi} \sqrt{-h}, \quad (3.71)$$

esto cuando la métrica de fondo está escrita en el marco de la cuerda. Recuérdese que en este caso ambos marcos se relacionan mediante

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = e^{-\frac{1}{2}\phi} G_{\mu\nu}, \quad (3.72)$$

y que la métrica inducida en la D7 se calcula de $G_{\mu\nu}$ con

$$h_{ab} = G_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu. \quad (3.73)$$

De ambas se sigue que la métrica inducida en la D7 escrita en el marco de Einstein es

$$\tilde{h}_{ab} = e^{-\frac{1}{2}\phi} h_{ab}, \quad (3.74)$$

lo que implica que su determinante se escribe como

$$\sqrt{-h} = e^{2\phi} \sqrt{-\tilde{h}}. \quad (3.75)$$

Con esto se concluye que la acción DBI en el marco de Einstein en este caso es

$$S_{D7} = -T_{D7} \int d^8\xi e^\phi \sqrt{-h}, \quad (3.76)$$

donde de nuevo se abandonan las tildes para simplificar la notación. Si la métrica de fondo está dada por (3.34) y el encaje aún está descrito por el campo $\psi(v)$ de (2.27), la métrica inducida vuelve a ser

$$ds_{D7}^2 = \left(G_{vv} + \frac{\psi'^2}{1 - \psi^2} \right) dv^2 + \frac{1}{v^2} g_{ij} dx^i dx^j + (1 - \psi^2) d\Omega_{S^3}^2, \quad (3.77)$$

y la acción para la D7-brana se reescribe finalmente como

$$S_{D7} = -T_{D7} \int d^8x \mathcal{L}[\psi, \psi'], \quad (3.78)$$

con

$$\mathcal{L}[\psi, \psi'] = e^\phi \sin^2 \theta_3 \sin \theta_4 \sqrt{-\frac{1}{v^8} g(1 - \psi^2)^3 \left(G_{vv} + \frac{\psi'^2}{1 - \psi^2} \right)}. \quad (3.79)$$

3.2.2. Ecuación de movimiento y solución asintótica a la frontera

La ecuación de movimiento para $\psi(v)$ es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dv} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} \right] = 0, \quad (3.80)$$

y para resolverla se propone la siguiente expansión en la frontera

$$\psi(v) = v(\psi_{(0)} + v^2(\psi_{(2)} + \tilde{\psi}_{(2)} \log v) + \mathcal{O}(v^4)), \quad (3.81)$$

basada en la solución (2.33) ya conocida. La sustitución de (3.45), (3.47) y (3.81) en (3.80) permite resolver orden a orden en v . Como era de esperarse, el único coeficiente que se determina así es

$$\tilde{\psi}_{(2)} = -\psi_{(0)} \left[\phi_{(2)} + \frac{1}{2} g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} \right]. \quad (3.82)$$

3.2.3. Inversión

Las inversiones (3.59) y (3.63) permiten reescribir (3.82) como

$$\tilde{\psi}_{(2)} = \frac{5}{24v^3} \psi e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi, \quad (3.83)$$

donde se usó además que, por (3.81), para $v \ll 1$ se tiene que

$$\psi_{(0)} = \frac{\psi}{v}. \quad (3.84)$$

Obsérvese de (2.40) que esta vez sí es necesario expresar a $\psi_{(0)}$ en términos de ψ , lo que se consigue al sustituir (3.83) en (3.81); el resultado es

$$\psi_{(0)} = \frac{1}{v} \psi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \log v \right]. \quad (3.85)$$

Finalmente, es necesario expresar también a $\psi_{(0)}^2$ en función de ψ

$$\psi_{(0)}^2 = \frac{1}{v^2} \psi^2 \left[1 - \frac{5}{12} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \log v \right]. \quad (3.86)$$

3.3. Contratérminos

Con los cálculos anteriores es posible reescribir todas las divergencias $a_{(k)}$ de la acción DBI del encaje de la D7-brana de forma covariante. Recuérdese que, como se calculó en el Capítulo 2, éstas son

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{reg}}}{T_{D7} V_{S^3}} = & - \int d^4 x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \left(\frac{1}{\epsilon^4} a_{(0)} + \frac{1}{\epsilon^2} a_{(1)} + a_{(2)} \log \epsilon + a_{(3)} \log^2 \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right) \\ & + \log \epsilon \int d^4 x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \phi_{(4)}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

con

$$a_{(0)} = \frac{1}{4}, \quad (3.88)$$

$$a_{(1)} = \frac{1}{4} \left(g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} + 2\phi_{(2)} - 2\psi_{(0)}^2 \right), \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} a_{(2)} = & -\frac{1}{2} g_{(0)}^{ij} g_{(4)ij} - \frac{1}{8} (g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij})^2 + \frac{1}{4} g_{(0)}^{ij} g_{(2)jk} g_{(0)}^{kl} g_{(2)li} - \\ & \frac{1}{2} \phi_{(2)} g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} - \frac{1}{2} \phi_{(2)}^2 + \frac{1}{2} \psi_{(0)}^2 g_{(0)}^{ij} g_{(2)ij} + \phi_{(2)} \psi_{(0)}^2 - \psi_{(0)} \tilde{\psi}_{(2)}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$a_{(3)} = -\frac{1}{4} \left(g_{(0)}^{ij} h_{(4)ij} + 2\tilde{\phi}_{(4)} \right). \quad (3.91)$$

Mediante (3.59) a (3.64) y (3.83) a (3.86), las cuatro expresiones anteriores se reescriben en términos de los campos en la frontera de la superficie de corte $v = \epsilon$ como

$$a_{(0)} = \frac{1}{4}, \quad (3.92)$$

$$a_{(1)} = \frac{1}{4\epsilon^2} \left(-\frac{5}{12} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \left[1 - \frac{5}{12} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \log \epsilon \right] \right), \quad (3.93)$$

$$a_{(2)} = \frac{1}{\epsilon^4} \psi^2 \left[-\frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \left(2 - \frac{1}{8} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \log \epsilon \right) \right], \quad (3.94)$$

$$a_{(3)} = -\frac{1}{12\epsilon^4} e^{4\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2, \quad (3.95)$$

junto con

$$\begin{aligned} e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} &= \epsilon^4 \sqrt{-\gamma} e^\phi \\ &\times \left[1 + \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi + \frac{1}{6} e^{4\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 (\log \epsilon - \frac{1}{16}) - \frac{1}{144} e^{6\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^3 \log \epsilon \right]. \end{aligned} \quad (3.96)$$

En principio, la acción de contratérminos se obtendría de sustituir (3.92) a (3.96) en (3.87). Sin embargo, no todos los términos que surgen de eso contribuyen con potencias de ϵ divergentes. Por ejemplo, uno de los que resulta de multiplicar (3.93) por (3.96) es $\sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2$ y su expansión en potencias de ϵ

$$\sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 = e^{5\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} (g_{(0)})^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.97)$$

es finita en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Dicho lo anterior, la acción de contratérminos (1.13) que da el método de renormalización holográfica es finalmente

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{ct}}}{T_{D7} V_{S^3}} &= \frac{1}{4} \int d^4 x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ &+ \frac{1}{24} \log \epsilon \int d^4 x \sqrt{-\gamma} e^{3\phi} \left[e^{2\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 - 5\psi^2 \partial^i \chi \partial_i \chi \right] \\ &+ \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4 x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Es importante notar dos cosas. La primera es que la divergencia tipo $\log^2 \epsilon$ dio lugar a un contratérmino con coeficiente $\log^2 \epsilon$, que será estudiado en el Capítulo 4. Segundo y más importante, la integral que contiene a $\phi_{(4)}$ en (3.87) jugó ningún papel en la construcción de S_{ct} . Como se verá más adelante, tal término debe ser eliminado por un procedimiento diferente.

Capítulo 4

Discusión de resultados

Se comenzará con un análisis de la validez de la acción de contratérminos S_{ct} calculada anteriormente, destacándose que la integral que va como $\log^2 \epsilon$ es natural y que los contratérminos se reducen a los necesarios para renormalizar el sistema D3/D7 bajo las consideraciones apropiadas. Se hará notar además que S_{ct} no basta para que la acción de la D7 sea finita en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ debido al coeficiente indeterminado por las ecuaciones de movimiento $\phi_{(4)}$, que no puede ser escrito en términos de los campos originales con las inversiones anteriores. Posteriormente, se explorará la posibilidad de calcular contratérminos extra por inspección y se mostrará que es posible construir una nueva integral S_{CT} que renormaliza la acción de la D7, pero que hace referencia explícita a un $e^{\phi^{(0)}}$ específico; no sólo eso, se mostrará que es la única forma de volver completamente finita a dicha acción, reduciéndose así el problema de la renormalizabilidad del encaje a si es posible $e^{\phi^{(0)}}$ en los contratérminos; por supuesto, se darán diversos argumentos para apoyar la validez de esto. Finalmente, se describirá el trabajo futuro, que involucra la evaluación numérica de la acción de la D7 para calcular la energía libre del plasma anisotrópico con materia fundamental.

4.1. Análisis de la acción de contratérminos

4.1.1. Una integral de frontera covariante

Una pregunta válida acerca del método de renormalización holográfica es: ¿para qué invertir las series y escribir las divergencias de S_{reg} en términos de los campos originales y no simplemente restarlas de la acción? En otras palabras, ¿por qué

$$\frac{S_{\text{ct}}}{T_{D7}V_{S^3}} = \int d^4x \left[\frac{1}{4\epsilon^4} + \left(-\frac{5}{48}a^2 - \frac{1}{2}m^2 \right) \frac{1}{\epsilon^2} + \left(\frac{47}{4032}a^4 - \frac{5}{12}a^2m^2 - \frac{2}{7}b_4 \right) \log \epsilon + \frac{1}{12}a^4 \log^2 \epsilon \right] \quad (4.1)$$

no es una acción de contratérminos válida si la combinación

$$S_{\text{sus}} = S_{\text{reg}} + S_{\text{ct}}, \quad (4.2)$$

tiene un límite finito cuando ϵ tiende a cero? Porque básicamente sólo se están ignorando los sumandos divergentes en lugar de modificar la acción para obtener el resultado finito adecuado. La forma adecuada de eliminar resultados infinitos de S_{reg} es construir una integral de frontera covariante escrita en términos de los campos dinámicos, pues como se verá más adelante, esto no sólo cura el comportamiento divergente de la acción, sino que además da el resultado finito correcto.

Adicionalmente, la acción de contratérminos debe cumplir ciertos requisitos más para ser considerada una integral de frontera válida. El primero de ellos es que sólo debe contener información de los campos involucrados en la superficie $v = \epsilon$ y no más allá; una S_{ct} sería totalmente inválida si apareciera una derivada con respecto a la coordenada radial (por ejemplo, $\partial_v \psi$ en el caso del encaje) pues esta función depende del valor del campo en una vecindad alrededor de $v = \epsilon$. Segundo, la forma de volumen $\sqrt{-\gamma}d^d x$ de la frontera debe aparecer en la integral para medir adecuadamente. Por último, la acción debe ser un escalar, de modo que cualquier cantidad con índices espacio-temporales debe aparecer contraída con la métrica en la frontera γ_{ij} . La acción de contratérminos construida

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{ct}}}{T_{D7}V_{S^3}} = & \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ & + \frac{1}{24} \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{3\phi} \left[e^{2\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 - 5\psi^2 \partial^i \chi \partial_i \chi \right] \\ & + \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

cumple con todos los requisitos anteriores, de modo que es una integral de frontera válida.

4.1.2. Expansión asintótica de orden mayor

El método de renormalización holográfica menciona que las expansiones

$$\mathcal{F}(x, v) = v^m(f_{(0)}(x) + f_{(1)}(x)v + \dots + (f_{(n)}(x) + \tilde{f}_{(n)}(x) \log v)v^n + \mathcal{O}(v^{n+1})), \quad (4.4)$$

bastan para obtener cada uno de los términos divergentes de la acción. Se podría preguntar entonces si agregar un sumando de orden mayor a v^{n+m} modifica el comportamiento divergente de S . De ocurrir esto, significaría que los contratérminos así obtenidos dependerían del grado de precisión al que se resuelvan de forma asintótica las ecuaciones de movimiento, escenario para nada deseable. Resulta que, por lo menos en el caso en cuestión, esto no ocurre. Puede comprobarse directamente que al sustituir las expansiones de mayor orden

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{a^2}{4}v^2 + \left(\frac{2}{7}b_4 - \frac{47}{4032}a^4 - \frac{1}{6}a^4 \log v\right)v^4 \\ & \left(-\frac{29}{864}a^6 \log v + \frac{20323a^6}{580608} + \frac{79a^2b_4}{1008} + \frac{1}{48}a^2f_4\right)v^6 \\ & \left(\frac{31}{6912}a^8 \log v - \frac{923a^8}{4644864} - \frac{5}{448}a^4b_4 - \frac{1}{288}a^4f_4\right)v^8 + \mathcal{O}(v^{10}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} g_{tt} = & -1 + \frac{a^2}{24}v^2 + \left(\frac{2749}{16128}a^4 - \frac{23}{28}b_4 - \frac{3}{4}f_4 + \frac{1}{24}a^4 \log v\right)v^4 \\ & + \left(\frac{7}{432}a^6 \log v - \frac{209a^6}{10368} + \frac{1}{72}a^2b_4 + \frac{1}{24}a^2f_4\right)v^6 \\ & + \left(\frac{1}{432}a^8 \log^2 v - \frac{2398945a^8}{195084288} - \frac{a^4 \log v (121a^4 - 72(5b_4 + 7f_4))}{18144}\right. \\ & \left. + \frac{a^4(1241b_4 + 1120f_4)}{10584} - \frac{23}{42}b_4f_4 - \frac{57b_4^2}{196} - \frac{f_4^2}{4}\right)v^8 + \mathcal{O}(v^{10}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} g_{xx} = g_{yy} = & 1 - \frac{a^2}{24}v^2 + \left(\frac{71}{1792}a^4 - \frac{5}{28}b_4 - \frac{1}{4}f_4 - \frac{1}{24}a^4 \log v\right)v^4 \\ & \left(-\frac{7}{432}a^6 \log v + \frac{77a^6}{13824} + \frac{1}{18}a^2b_4 + \frac{1}{36}a^2f_4\right)v^6 \\ & \left(-\frac{1}{432}a^8 \log^2 v - \frac{605a^8 \log v}{290304} + \frac{19007a^8}{16257024}\right. \\ & \left. + \frac{11}{504}a^4b_4 \log v + \frac{61a^4b_4}{18816} + \frac{1}{72}a^4f_4 \log v\right. \\ & \left.- \frac{a^4f_4}{3024} - \frac{1}{42}b_4f_4 - \frac{3b_4^2}{98}\right)v^8 + \mathcal{O}(v^{10}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
g_{zz} = & 1 + \frac{5a^2}{24}v^2 + \left(\frac{1163}{16128}a^4 - \frac{13}{28}b_4 - \frac{1}{4}f_4 + \frac{1}{8}a^4 \log v \right) v^4 \\
& \left(\frac{1}{24}a^6 \log v - \frac{2293a^6}{145152} - \frac{8}{63}a^2b_4 - \frac{1}{18}a^2f_4 \right) v^6 \\
& + \left(\frac{1}{216}a^8 \log^2 v + \frac{71a^8 \log v}{10752} - \frac{481249a^8}{195084288} \right. \\
& - \frac{11}{252}a^4b_4 \log v - \frac{5521a^4b_4}{338688} - \frac{1}{36}a^4f_4 \log v \\
& \left. - \frac{241a^4f_4}{48384} + \frac{1}{21}b_4f_4 + \frac{3b_4^2}{49} \right) v^8 + \mathcal{O}(v^{10}).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$G_{vv} = \frac{1}{v^2} + \mathcal{O}(v^8). \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\psi = & mv + \left(c + \frac{5}{24}a^2m \log v \right) v^3 \\
& + \left(\frac{89}{768}a^4m \log v - \frac{829a^4m}{21504} + \frac{5a^2c}{32} + \frac{5}{24}a^2m^3 \log v - \frac{1}{7}b_4m + cm^2 \right) v^5 \\
& + \left(-\frac{148651a^6m}{9289728} + \frac{1055a^4c}{64512} - \frac{5377a^4m^3}{145152} - \frac{325a^2b_4m}{8064} + \frac{25}{72}a^2cm^2 \right. \\
& \left. - \frac{1}{128}a^2f_4m + \left(\frac{5a^6m}{288} + \frac{25a^4m^3}{288} \right) \log^2 v \right. \\
& \left. + \log v \left(\frac{34619a^6m}{1548288} + \frac{a^4c}{12} + \frac{269a^4m^3}{1728} - \frac{5}{168}a^2b_4m + \frac{5}{6}a^2cm^2 + \frac{5a^2m^5}{24} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{7}b_4c - \frac{1}{7}b_4m^3 + 2c^2m + cm^4 \right) v^7 + \mathcal{O}(v^9),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

en la acción para la D7-brana (2.30) se obtienen los mismos términos divergentes que en (2.34), de modo que los contratérminos (3.98) no dependen del grado al que se resuelvan las ecuaciones de movimiento.

4.1.3. Sistema D3/D7

Los contratérminos para renormalizar la acción de D7-branas de prueba en el fondo de la brana negra fueron dados en [29, 30] y son

$$\frac{S_{D3/D7}}{T_{D7}V_{S^3}} = \frac{1}{4} \int d^d x \sqrt{-\gamma} (1 - 2\psi^2), \tag{4.11}$$

cuando la métrica γ_{ij} y ψ sólo dependen de la coordenada radial (de lo contrario aparecen la curvatura de la frontera R_{ij} y derivadas $\partial_i \partial^i \psi$). Se mencionó en el Capítulo 2 que la métrica del fondo anisotrópico se reduce a la solución de la brana negra cuando

$$a = 0, \quad \phi = 0, \quad \mathcal{B} = 1, \quad \mathcal{F} = 1 - \frac{u^4}{u_H^4}, \tag{4.12}$$

de modo que si se aplican estas condiciones a los contratérminos aquí calculados debería recuperarse la acción (4.11). En efecto, hacer $a = 0$ o equivalentemente $\chi = 0$ en (3.98) da

$$\frac{S_{\text{ct}}}{T_{D7}V_{S^3}} = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi (1 - 2\psi^2), \quad (4.13)$$

y al aplicar la condición $\phi = 0$ el resultado final

$$\frac{S_{\text{ct}}}{T_{D7}V_{S^3}} = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} (1 - 2\psi^2), \quad (4.14)$$

es precisamente la acción (4.11).

4.1.4. Sobre $\log^2 \epsilon$

Cuando se encontraron los términos divergentes de la acción de la D7-brana en el fondo anisotrópico se hizo notar que aparecía una inusual contribución del tipo $\log^2 \epsilon$, lo que dio lugar al contratérmino

$$\frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2. \quad (4.15)$$

Una integral de este tipo, multiplicada por $\log^2 \epsilon$ no es común en la literatura, pero no por eso inválida. De hecho, al numerar los contratérminos necesarios para renormalizar la acción de un campo escalar masivo en [30] se dió la integral

$$\frac{1}{2 \log \epsilon} \int d^d x \sqrt{-\gamma} \Phi^2, \quad (4.16)$$

que va como $\log^{-1} \epsilon$. Esto muestra que el método de renormalización holográfica no es ajeno de ninguna forma a potencias de logaritmo distintas de la unidad. Más aún, en [30] se menciona que tal integral tiene una razón de ser, necesaria cuando el campo escalar Φ satura la frontera de Breitenlohner-Freedman para AdS_{d+1} .

Con esto en mente, puede resultar útil rastrear de dónde provenía ese $\log^2 \epsilon$ desde un comienzo. En (2.40) el coeficiente que multiplicaba al mismo era

$$a_{(3)} = -\frac{1}{4} \left(g_{(0)}{}^{ij} h_{(4)ij} + 2\tilde{\phi}_{(4)} \right). \quad (4.17)$$

Sin embargo, recuérdese que las ecuaciones de movimiento arrojaron que

$$g_{(0)}{}^{ij} h_{(4)ij} = 0, \quad (4.18)$$

de manera que el coeficiente efectivo es

$$a_{(3)} = -\frac{1}{2} \tilde{\phi}_{(4)}. \quad (4.19)$$

Ahora bien, la expansión para g_{ij} usada para resolver las ecuaciones de movimiento de forma asintótica era

$$g_{ij} = g_{(0)ij} + g_{(2)ij}v^2 + (g_{(4)ij} + h_{(4)ij} \log v)v^4 + \mathcal{O}(v^6), \quad (4.20)$$

y ésta, a diferencia de la métrica del fondo anisotrópico (2.2), no contiene al dilatón ϕ de ninguna forma. Lo anterior permite concluir que la divergencia tipo $\log^2 \epsilon$ en la acción DBI viene exclusivamente del acoplo del dilatón no constante con la D7-brana. Esto explica por qué no se necesitó el contratérmino (4.15) en [29, 30], pues el sistema D3/D7 considerado ahí contenía un dilatón ϕ constante (nótese que (4.15) desaparece de S_{ct} cuando el fondo se reduce al de la brana negra).

El por qué el acoplo del dilatón con la D7 genera ese comportamiento divergente no es claro ahora, pero una pista podría encontrarse en la forma del contratérmino (4.15) necesario para cancelarlo. Obsérvese que éste se reescribe como

$$\frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 = \frac{2}{5} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \mathcal{A}, \quad (4.21)$$

donde \mathcal{A} es la anomalía conforme encontrada en el fondo. Es apropiado mencionar que ésta aparece en la forma reducida al caso particular (2.23) cuando ϕ y g_{ij} no dependen de las coordenadas en la frontera x^i .

4.1.5. Divergencias de la acción sustraída

Habiéndose aclarado ya que S_{ct} es una acción de contratérminos válida, resta asegurarse que cumple con el propósito de renormalizar la acción de la D7, es decir, que la acción sustraída

$$S_{\text{sus}} = S_{\text{reg}} + S_{\text{ct}}, \quad (4.22)$$

tiene un límite finito cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En el presente caso S_{sus} es

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{sus}}}{T_{D7} V_{S^3}} = & - \int dv d^4x e^\phi \sqrt{-\gamma(1-\psi^2)^3 \left(G_{vv} + \frac{\psi'^2}{1-\psi^2} \right)} \\ & + \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ & + \frac{1}{24} \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{3\phi} \left[e^{2\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 - 5\psi^2 \partial^i \chi \partial_i \chi \right] \\ & + \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

No obstante, ésta aún diverge cuando $\epsilon \rightarrow 0$, ya que al sustituir las soluciones asintóticas a la frontera e integrar hasta $v = \epsilon$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{sus}}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \int d^4x \left(\frac{241}{5376}a^4 - cm + \frac{5}{48}a^2m^2 + \frac{1}{14}b_4 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right) \\ &+ \log \epsilon \int d^4x \left(-\frac{47}{4032}a^4 + \frac{2}{7}b_4 \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

o para condiciones de frontera arbitrarias

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{sus}}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \int d^4x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \left[\frac{\phi_{(4)}}{4} - \psi_{(1)}\psi_{(3)} + \frac{5}{48}\psi_{(1)}^2 e^{2\phi_{(0)}} g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)} \right. \\ &\left. + \frac{55}{1152} e^{4\phi_{(0)}} (g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)})^2 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right] + \log \epsilon \int d^4x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \phi_{(4)}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

y en ambos casos la segunda integral claramente diverge en el límite mencionado. Como se esperaba, ésta no pudo ser eliminada con el método de renormalización holográfica pues depende del coeficiente indeterminado $\phi_{(4)}$ y no es posible expresar éste en términos del campo original ϕ con una inversión similar a la utilizada antes. Tal integral proviene una vez más del acoplo del dilatón no constante y la D7-brana de prueba, y es por ello que esta situación no se presentó en el trabajo de [29, 30]. Es importante aclarar que la aparición de un coeficiente indeterminado por las ecuaciones de movimiento en las divergencias de la acción no ha sido reportado en la literatura, así que no hay ningún registro de qué consecuencias tenga en la renormalizabilidad de la acción. En la siguiente sección se explorarán varias posibilidades a detalle.

4.2. Contratérminos extra

4.2.1. Una nueva acción

Aunque el método de renormalización holográfica es el camino formal para construir los contratérminos adecuados, ¿es posible tratar de deducirlos por inspección? Esto es, ¿es válido proponer una acción de contratérminos mediante ciertos productos de los campos con coeficientes arbitrarios y ajustar estos últimos para eliminar cada potencia divergente de S_{reg} ?

Para responder lo anterior, considérese S_{sus} en el caso del encaje en el fondo anisotrópico de interés

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{sus}}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \int d^4x \left(\frac{241}{5376}a^4 - cm + \frac{5}{48}a^2m^2 + \frac{1}{14}b_4 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right) \\ &+ \log \epsilon \int d^4x \phi_{(4)}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde

$$\phi_{(4)} = -\frac{47}{4032}a^4 + \frac{2}{7}b_4. \quad (4.27)$$

El objetivo es eliminar $\phi_{(4)} \log \epsilon$ mediante integrales de frontera de productos de los campos y sus expansiones asintóticas a la frontera (2.14), (2.18) a (2.20) y (2.33). Obsérvese que $\phi_{(4)}$ sólo aparece en el coeficiente de la potencia ϵ^0 en

$$\int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi = \int d^4x \left(\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{5a^2}{24\epsilon^2} - \frac{1}{6}a^4 \log \epsilon + \phi_{(4)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right), \quad (4.28)$$

lo que sugiere agregar

$$\frac{Ct}{T_{D7}V_{S^3}} = -\log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \quad (4.29)$$

como contratérmino extra. Nótese que no son importantes los sumandos de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, pues estos no divergen en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Sumar esto a la acción sustraída da

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{D7}V_{S^3}} (S_{\text{sus}} + Ct) &= \int d^4x \left(\frac{241}{5376}a^4 - cm + \frac{5}{48}a^2m^2 + \frac{1}{14}b_4 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right) \\ &+ \int d^4x \left(-\log \epsilon \frac{1}{\epsilon^4} + \log \epsilon \frac{5a^2}{24\epsilon^2} + \frac{1}{6}a^4 \log^2 \epsilon \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

y aunque se logró eliminar $\phi_4 \log \epsilon$, se generaron nuevas divergencias. Aunque esto pudiera parecer desalentador, es posible construir los contratérminos adecuados para eliminar cada una de éstas. Por ejemplo,

$$\log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} = \log \epsilon \int d^4x \left(\frac{1}{\epsilon^4} + \frac{a^2}{24\epsilon^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right), \quad (4.31)$$

contiene justo el $\log \epsilon / \epsilon^4$ que aparece en (4.30). Mediante este procedimiento se construye la segunda acción de contratérminos

$$\begin{aligned} \frac{S'_{\text{ct}}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left(1 - e^\phi - \frac{1}{4}e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - \frac{7}{48}e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 \right) \\ &- \frac{1}{6} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Si se agrega esto a S_{ct}

$$S_{\text{CT}} = S_{\text{ct}} + S'_{\text{ct}}, \quad (4.33)$$

se obtiene como resultado final

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{CT}}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24}e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ &+ \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left(1 - e^\phi - \frac{1}{4}e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \left[1 + \frac{5}{6}e^\phi \psi^2 \right] - \frac{5}{48}e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 \right) \\ &- \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como puede comprobarse mediante la sustitución directa de la solución asintótica, sumar S_{CT} a la acción de la D7 arroja un resultado finito

$$\frac{S_{\text{sus}}}{T_{D7}V_{S^3}} = \frac{1}{T_{D7}V_{S^3}} (S_{\text{reg}} + S_{\text{CT}}) = \int d^4x \left(\frac{241}{5376}a^4 - cm + \frac{5}{48}a^2m^2 + \frac{1}{14}b_4 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right), \quad (4.35)$$

en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y no agrega ningún término de orden ϵ^0 en lo absoluto.

4.2.2. Dependencia de $e^{\phi_{(0)}}$

El cálculo anterior podría llevar a pensar prematuramente que el método formal de renormalización holográfica es innecesario, ya que se logró eliminar cada potencia divergente de la acción sin todo el trabajo de invertir las expansiones asintóticas. Antes de llegar a tal conclusión, es preciso hacer notar nuevamente que en [18] se menciona que dada una acción renormalizable existe un conjunto universal de contratérminos que la vuelve finita para cualquier solución de las ecuaciones de movimiento con una expansión asintótica en la frontera. En otras palabras, la acción de contratérminos debe funcionar sin importar cuáles sean los valores en la frontera para los campos dinámicos (las fuentes $f_{(0)}$). Recuérdese que la ecuación (4.25),

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{sus}}}{T_{D7}V_{S^3}} = & \int d^4x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \left[\frac{\phi_{(4)}}{4} - \psi_{(1)}\psi_{(3)} + \frac{5}{48}\psi_{(1)}^2 e^{2\phi_{(0)}} g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)} \right. \\ & \left. + \frac{55}{1152} e^{4\phi_{(0)}} (g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)})^2 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right] + \log \epsilon \int d^4x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \phi_{(4)}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

se obtuvo de sumar la primera acción de contratérminos a S_{reg} y evaluar en las soluciones con condiciones de frontera arbitrarias. Cuando se construyó la segunda acción de contratérminos S'_{ct} se argumentó que para eliminar $\phi_{(4)}$ de S_{sus} bastaba agregar

$$\frac{Ct}{T_{D7}V_{S^3}} = -\log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{\phi}. \quad (4.37)$$

Sin embargo, la expansión de Ct es ahora

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{\phi} = & \int d^4x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \left(\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{5}{24\epsilon^2} e^{2\phi_{(0)}} g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)} \right. \\ & \left. + \phi_{(4)} - \frac{1}{6} e^{4\phi_{(0)}} (g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)})^2 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

y aunque esta se reduce a (4.28) al fijar $\chi_{(0)} = az$, $\phi_{(0)} = 0$ y $g_{(0)ij} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$, hay un problema: aparece un factor $e^{\phi_{(0)}}$ que multiplica a toda la integral (éste se encontraba

elegantemente oculto como un 1 en (4.28)). Esto es un inconveniente, pues al considerar

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{D7}V_{S^3}} (S_{\text{sus}} + Ct) &= \int d^4x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \left[\frac{\phi_{(4)}}{4} - \psi_{(1)}\psi_{(3)} + \frac{5}{48} \psi_{(1)}^2 e^{2\phi_{(0)}} g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{55}{1152} e^{4\phi_{(0)}} (g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)})^2 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right] \\ &\quad - \log \epsilon \int d^4x e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \left(\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{5}{24\epsilon^2} e^{2\phi_{(0)}} g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} e^{4\phi_{(0)}} (g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)})^2 + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right), \end{aligned} \quad (4.39)$$

se elimina el término $\phi_{(4)} \log \epsilon$ pero aparecen nuevas divergencias. El problema es que la integral sugerida antes

$$\log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} = \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-g_{(0)}} \left(\frac{1}{\epsilon^4} + \frac{1}{24\epsilon^2} e^{2\phi_{(0)}} g_{(0)}^{ij} \partial_i \chi_{(0)} \partial_j \chi_{(0)} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right), \quad (4.40)$$

no funciona para eliminar el término $e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \log \epsilon / \epsilon^4$ en (4.39). La única integral que contiene dicha cantidad es

$$\log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi, \quad (4.41)$$

pero usarla de nuevo generaría una divergencia tipo $e^{\phi_{(0)}} \sqrt{-g_{(0)}} \phi_{(4)} \log \epsilon$ que sólo puede ser eliminada con la misma integral. Se podría entonces pensar en sugerir

$$e^{\phi_{(0)}} \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma}, \quad (4.42)$$

pero ésta hace referencia a una fuente $\phi_{(0)}$ específica, así que es un contratérmino válido sólo hasta que se fija la solución para ϕ . Esto es verdaderamente importante: la primera acción de contratérminos S_{ct} elimina todas las divergencias de S_{reg} , salvo $\phi_{(4)} \log \epsilon$, sin importar cuál sea el valor de dilatón ϕ en $v = 0$, pero S'_{ct} (y en consecuencia S_{CT}) sólo funciona si $\phi_{(0)} = 0$. Para cualquier otro valor S_{CT} debe ser modificada con el factor $e^{\phi_{(0)}}$ apropiado en la forma

$$\begin{aligned} \frac{S_{CT}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ &\quad + \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left(e^{\phi_{(0)}} - e^\phi - \frac{1}{4} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \left[e^{\phi_{(0)}} + \frac{5}{6} e^\phi \psi^2 \right] - \frac{5}{48} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Pero, ¿no hay forma de utilizar las inversiones de los coeficientes para eliminar las divergencias que genera el agregar Ct ? Esto es, considerar ahora como nueva acción regularizada

$$\frac{\tilde{S}_{\text{reg}}}{T_{D7}V_{S^3}} = \frac{S_{\text{sus}}}{T_{D7}V_{S^3}} - \frac{1}{T_{D7}V_{S^3}} \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi, \quad (4.44)$$

y construir una acción de contratérminos con el método usado con anterioridad. Al sustituir las expansiones (3.44) a (3.47) en la expresión anterior se obtiene

$$\frac{\tilde{S}_{\text{reg}}}{T_{D7}V_{S^3}} = -\log \epsilon \int d^4x e^{\phi^{(0)}} \sqrt{-g^{(0)}} \left(\frac{1}{\epsilon^4} \tilde{a}_{(0)} + \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{a}_{(1)} + \tilde{a}_{(2)} \log \epsilon + \tilde{a}_{(3)} \log^2 \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right), \quad (4.45)$$

donde

$$\tilde{a}_{(0)} = 1, \quad (4.46)$$

$$\tilde{a}_{(1)} = \frac{1}{2} g^{(0)ij} g_{(2)ij} + \phi_{(2)}, \quad (4.47)$$

$$\tilde{a}_{(2)} = \frac{1}{2} g^{(0)ij} h_{(4)ij} + \tilde{\phi}_{(4)}, \quad (4.48)$$

$$\tilde{a}_{(3)} = \frac{1}{2} \phi_{(2)}^2 + \frac{1}{2} \phi_{(2)} g^{(0)ij} g_{(2)ij} + \frac{1}{2} g^{(0)ij} g_{(4)ij} + \frac{1}{8} (g^{(0)ij} g_{(2)ij})^2 - \frac{1}{4} g^{(0)ij} g_{(2)jk} g^{(0)kl} g_{(2)li}. \quad (4.49)$$

Debido a que en ninguno de los $\tilde{a}_{(k)}$ aparece alguno de los coeficientes indeterminados, hasta el momento parecería que todos estos elementos divergentes pueden ser eliminados sin ningún problema. No obstante, la sustitución de las inversiones (3.63) a (3.64) permite reescribir lo anterior como

$$\tilde{a}_{(0)} = 1, \quad (4.50)$$

$$\tilde{a}_{(1)} = -\frac{5}{24\epsilon^2} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi, \quad (4.51)$$

$$\tilde{a}_{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^4} e^{4\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2, \quad (4.52)$$

$$\tilde{a}_{(3)} = 0, \quad (4.53)$$

y luego de sustituir esto en (4.45) junto con la expresión para $e^{\phi^{(0)}} \sqrt{-g^{(0)}}$ (3.96) y descartar los términos finitos tal como en el Capítulo 3, se sigue que

$$\frac{\tilde{S}_{\text{ct}}}{T_{D7}V_{S^3}} = \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{\phi} \left(1 - \frac{31}{576} e^{4\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi) \right), \quad (4.54)$$

debería ser la integral de frontera necesaria para renormalizar \tilde{S}_{reg} . No obstante, mientras ésta elimina cada una de las potencias con coeficientes $\tilde{a}_{(k)}$, causa que el término divergente $e^{\phi^{(0)}} \sqrt{-g^{(0)}} \phi_{(4)} \log \epsilon$ aparezca una vez más.

4.2.3. La acción de contratérminos

Los cálculos anteriores llevan a una importante conclusión: es imposible construir una integral que renormalice la acción de la D7 sin hacer referencia directa a la fuente $e^{\phi^{(0)}}$. Así,

el problema de la renormalizabilidad del encaje se ha reducido considerablemente, pues se ha probado que

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{CT}}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ &+ \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left(e^{\phi_{(0)}} - e^\phi - \frac{1}{4} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \left[e^{\phi_{(0)}} + \frac{5}{6} e^\phi \psi^2 \right] - \frac{5}{48} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 \right) \\ &- \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

es la única opción viable para eliminar cada una de las potencias divergentes de la acción. Es importante señalar que ésta aún comparte características con la S_{ct} original. Al fijar

$$\chi = 0, \quad \phi = 0, \quad (4.56)$$

los contratérminos se reducen a los necesarios para renormalizar el sistema D3/D7

$$\frac{S_{\text{CT}}}{T_{D7}V_{S^3}} = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} (1 - 2\psi^2), \quad (4.57)$$

pues al tomar $\phi = 0$ se fija simultáneamente $\phi_{(0)} = 0$. Además, como se puede corroborar por sustitución directa, S_{CT} renormaliza la acción de la D7 sin importar el orden al que se resuelvan las ecuaciones de movimiento. Estos hechos apoyan la hipótesis de que (4.55) en efecto es la acción de contratérminos adecuada. Esta renormaliza completamente la acción del encaje de la D7, es decir, la combinación

$$S_{\text{reg}} + S_{\text{CT}}, \quad (4.58)$$

tiene un límite finito cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Sólo resta verificar si es válido hacer referencia a una fuente específica en los contratérminos. Se vuelve a recalcar que esta situación, la aparición de uno de los coeficientes indeterminados en las divergencias de la acción y la necesidad de la especificación de una de las fuentes en los contratérminos, no está contemplada en el método de renormalización holográfica [8, 15–18] y en consecuencia tampoco la respuesta a tal interrogante. No obstante, se darán aquí tres argumentos para apoyar su validez.

El primero y más importante, es que la acción que se está renormalizando es la del encaje de prueba de una D7-brana, no la del fondo, y en lo que respecta a esta acción ϕ es un campo escalar ya dado, de manera que $\phi_{(0)}$ es un número fijo que puede incluirse en los contratérminos sin ningún problema.

Segundo, obsérvese que si se define

$$\tilde{\phi} = \phi + C, \quad \tilde{\chi} = e^{-C} \chi, \quad (4.59)$$

y se sustituye esto en la acción del encaje (2.30)

$$\frac{S}{T_{D7}V_{S^3}} = - \int dv d^4x e^\phi \sqrt{-\gamma(1-\psi^2)^3 \left(G_{vv} + \frac{\psi'^2}{1-\psi^2} \right)}, \quad (4.60)$$

se obtiene

$$\frac{S}{T_{D7}V_{S^3}} = - e^{-C} \int dv d^4x e^{\tilde{\phi}} \sqrt{-\gamma(1-\psi^2)^3 \left(G_{vv} + \frac{\psi'^2}{1-\psi^2} \right)}. \quad (4.61)$$

Éste nuevo factor de e^{-C} puede ser absorbido en la tensión de la brana T_{D7} , de modo que ante el cambio (4.59) la acción reescala de forma homogénea. Tal característica, como se hizo notar en [2], también está presente en la acción del fondo (2.1) escrita en el marco de la cuerda; sin embargo, en el marco de Einstein (3.10) no cambia de forma alguna ante el cambio (4.59) y como puede corroborarse, los contratérminos del fondo (2.22) poseen ésta misma simetría. En consecuencia, es deseable que si la acción de la D7 reescala de forma homogénea, también lo hagan los contratérminos. En efecto, S_{CT} posee ésta característica gracias a la aparición explícita de $e^{\phi_{(0)}}$, pues (4.59) implica que

$$\tilde{\phi}_{(0)} = \phi_{(0)} + C, \quad (4.62)$$

y en consecuencia (4.55) cambia a

$$\begin{aligned} \frac{S_{CT}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \frac{1}{4} e^{-C} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{\tilde{\phi}} \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\tilde{\phi}} \partial^i \tilde{\chi} \partial_i \tilde{\chi} - 2\psi^2 \right] \\ &+ e^{-C} \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left(e^{\tilde{\phi}_{(0)}} - e^{\tilde{\phi}} - \frac{1}{4} e^{2\tilde{\phi}} \partial^i \tilde{\chi} \partial_i \tilde{\chi} \left[e^{\tilde{\phi}_{(0)}} + \frac{5}{6} e^{\tilde{\phi}} \psi^2 \right] - \frac{5}{48} e^{5\tilde{\phi}} (\partial^i \tilde{\chi} \partial_i \tilde{\chi})^2 \right) \\ &- \frac{1}{12} e^{-C} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\tilde{\phi}} (\partial^i \tilde{\chi} \partial_i \tilde{\chi})^2, \end{aligned} \quad (4.63)$$

y por tanto los contratérminos también reescalan de forma homogénea (nótese que sin el factor $e^{\phi_{(0)}}$ esto no hubiera ocurrido).

Por último, es preciso hacer notar que si en (4.59) se toma $C = -\phi_{(0)}$, siempre puede llevarse el valor del dilatón a cero en la frontera sin importar su comportamiento lejos de ahí. Para apreciar mejor éste hecho, obsérvese que las ecuaciones del fondo (3.15), (3.18) y (3.27) son invariantes al cambio (4.59), lo que significa que dada una solución asintótica para la que ya se han calculado los respectivos $\phi_{(n)}$, $G_{\mu\nu(n)}$ y $\chi_{(n)}$ siempre puede redefinirse de forma tal que $\phi_{(0)} = 0$. Debido a esto, $\phi_{(0)}$ no es un parámetro libre de las soluciones pues sin pérdida de generalidad siempre puede tomarse $\phi_{(0)} = 0$.

Por supuesto, aunque toda la evidencia aquí presentada apunta a que efectivamente S_{CT} es la acción de contratérminos buscada, se continuará investigando hasta probar definitivamente la validez del término $e^{\phi_{(0)}}$ en S_{CT} .

4.3. Trabajo futuro

Ya con la acción del encaje renormalizada, es posible llevar a cabo un análisis termodinámico del plasma anisotrópico con materia fundamental mediante la correspondencia AdS/CFT, análogo al efectuado en [29]. La energía libre del sistema es proporcional a S_{D7}

$$F \propto S_{D7}, \quad (4.64)$$

que en este caso es

$$\begin{aligned} \frac{S_{CT}}{T_{D7}V_{S^3}} = & \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ & + \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left(e^{\phi(0)} - e^\phi - \frac{1}{4} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \left[e^{\phi(0)} + \frac{5}{6} e^\phi \psi^2 \right] - \frac{5}{48} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 \right) \\ & - \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Las integrales anteriores deben ser efectuadas de forma numérica pues, como se explica en [1, 2], la solución al fondo anisotrópico de interés se puede calcular de forma analítica sólo en los límites de altas y bajas temperaturas, y para regímenes intermedios es necesario recurrir a métodos numéricos. Aunque ya se ha comenzado con el trabajo para realizar estos cálculos y los resultados preliminares apuntan a que S_{D7} es en efecto finita, se han encontrado problemas de computo debido a la alta precisión necesaria al integrar cerca de la frontera.

Capítulo 5

Conclusiones

En la presente tesis se planteó el objetivo de renormalizar la acción que describe el encaje de una D7-brana de prueba en el fondo anisotrópico dado en [1, 2]. La aplicación del método de renormalización holográfica descrito en [8, 15–18], arrojó como acción de contratérminos a

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{ct}}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ &+ \frac{1}{24} \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{3\phi} \left[e^{2\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 - 5\psi^2 \partial^i \chi \partial_i \chi \right] \\ &+ \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

que a pesar de ser una integral de frontera válida y reducirse a los contratérminos del sistema D3/D7 como caso particular, resultó no ser suficiente para eliminar cada uno de los términos divergentes de la acción, en particular aquel que involucraba el coeficiente $\phi_{(4)}$ de la expansión asintótica a la frontera de ϕ , indeterminado por las ecuaciones de movimiento. Debido a que esta situación no está contemplada en el método de renormalización holográfica [8, 15–18], se procedió a investigar la posibilidad de renormalizar totalmente la acción, esto es, eliminar el término divergente mencionado.

Mediante el análisis de productos de los campos involucrados y el ajuste de los coeficientes de las integrales, se logró construir contratérminos extra, lo que llevó a la nueva acción

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{CT}}}{T_{D7}V_{S^3}} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[1 - \frac{5}{24} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi - 2\psi^2 \right] \\ &+ \log \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left(e^{\phi_{(0)}} - e^\phi - \frac{1}{4} e^{2\phi} \partial^i \chi \partial_i \chi \left[e^{\phi_{(0)}} + \frac{5}{6} e^\phi \psi^2 \right] - \frac{5}{48} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2 \right) \\ &- \frac{1}{12} \log^2 \epsilon \int d^4x \sqrt{-\gamma} e^{5\phi} (\partial^i \chi \partial_i \chi)^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

que vuelve finita a la acción de la D7, pero hace referencia a una fuente $\phi_{(0)}$ específica. Como esto es atípico en una acción de contratérminos, se investigó la posibilidad de construir una

integral capaz de volver finita a la acción que no contara con el factor de $e^{\phi^{(0)}}$. Se probó que esto no es posible: ésta es la única forma de renormalizar dicha acción, o en otras palabras, que efectivamente no hay manera de expresar a $\phi_{(4)}$ en términos de los campos originales e irremediamente aquella integral que renormalice la acción debe contener explícitamente un factor de $e^{\phi^{(0)}}$.

La aparición de un coeficiente indeterminado por las ecuaciones de movimiento, $\phi_{(4)}$ en este caso, no se ha reportado hasta el momento en la literatura, de modo que los hallazgos anteriores son de suma importancia. No sólo se logró volver finita la acción del encaje, sino que se demostró que los contratérminos propuestos aquí son los únicos viables para llevar a cabo la renormalización completamente. Adicionalmente, se expuso como argumento en apoyo a la validez de S_{CT} que debido a que la acción del encaje reescala de forma homogénea ante el cambio

$$\phi \rightarrow \phi + C, \quad \chi \rightarrow e^{-C}\chi, \quad (5.3)$$

los contratérminos deben también poseer tal particularidad, y que esto ocurre sólo si está presente el factor de $e^{\phi^{(0)}}$. Además, ya que el encaje de la D7-brana es de prueba y los elementos del fondo son fijos, se expuso que $e^{\phi^{(0)}}$ es en ese escenario un número cualquiera que puede ser incluido en los contratérminos sin ningún problema. Por tanto, toda la evidencia aquí presentada apunta a que S_{CT} es la acción de contratérminos buscada, cumpliéndose así el objetivo planteado, de vital importancia para estudiar la termodinámica del plasma anisotrópico con materia fundamental mediante la correspondencia AdS/CFT.

Bibliografía

- [1] David Mateos and Diego Trancanelli. The anisotropic $N=4$ super Yang-Mills plasma and its instabilities. *Phys. Rev. Lett.*, 107:101601, 2011.
- [2] David Mateos and Diego Trancanelli. Thermodynamics and Instabilities of a Strongly Coupled Anisotropic Plasma. *JHEP*, 07:054, 2011.
- [3] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [4] David Mateos. String Theory and Quantum Chromodynamics. *Class. Quant. Grav.*, 24:S713–S740, 2007.
- [5] Alfonso V. Ramallo. Introduction to the AdS/CFT correspondence. *Springer Proc. Phys.*, 161:411–474, 2015.
- [6] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998.
- [7] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [8] Kostas Skenderis. Lecture notes on holographic renormalization. *Class. Quant. Grav.*, 19:5849–5876, 2002.
- [9] C.V. Johnson. *D-Branes*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [10] G. Policastro, Dan T. Son, and Andrei O. Starinets. The Shear viscosity of strongly coupled $N=4$ supersymmetric Yang-Mills plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 87:081601, 2001.
- [11] Giuseppe Policastro, Dam T. Son, and Andrei O. Starinets. From AdS / CFT correspondence to hydrodynamics. *JHEP*, 09:043, 2002.
- [12] Alex Buchel and James T. Liu. Universality of the shear viscosity in supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, 93:090602, 2004.

- [13] Alex Buchel. On universality of stress-energy tensor correlation functions in supergravity. *Phys. Lett.*, B609:392–401, 2005.
- [14] Paolo Benincasa, Alex Buchel, and Roman Naryshkin. The Shear viscosity of gauge theory plasma with chemical potentials. *Phys. Lett.*, B645:309–313, 2007.
- [15] M. Henningson and K. Skenderis. The Holographic Weyl anomaly. *JHEP*, 07:023, 1998.
- [16] Mans Henningson and Kostas Skenderis. Holography and the Weyl anomaly. *Fortsch. Phys.*, 48:125–128, 2000.
- [17] Sebastian de Haro, Sergey N. Solodukhin, and Kostas Skenderis. Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence. *Commun. Math. Phys.*, 217:595–622, 2001.
- [18] Massimo Bianchi, Daniel Z. Freedman, and Kostas Skenderis. Holographic renormalization. *Nucl. Phys.*, B631:159–194, 2002.
- [19] Roberto Emparan, Clifford V. Johnson, and Robert C. Myers. Surface terms as counterterms in the AdS / CFT correspondence. *Phys. Rev.*, D60:104001, 1999.
- [20] Vijay Balasubramanian and Per Kraus. A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity. *Commun. Math. Phys.*, 208:413–428, 1999.
- [21] Shinichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Conformal anomaly for dilaton coupled theories from AdS / CFT correspondence. *Phys. Lett.*, B444:92–97, 1998.
- [22] Shinichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, Sachiko Ogushi, Akio Sugamoto, and Miho Yamamoto. Axion - dilatonic conformal anomaly from AdS / CFT correspondence. *Phys. Lett.*, B465:128–135, 1999.
- [23] Ioannis Papadimitriou and Kostas Skenderis. AdS / CFT correspondence and geometry. In *AdS/CFT correspondence: Einstein metrics and their conformal boundaries. Proceedings, 73rd Meeting of Theoretical Physicists and Mathematicians, Strasbourg, France, September 11-13, 2003*, pages 73–101, 2004.
- [24] Ioannis Papadimitriou and Kostas Skenderis. Correlation functions in holographic RG flows. *JHEP*, 10:075, 2004.
- [25] Ioannis Papadimitriou and Kostas Skenderis. Thermodynamics of asymptotically locally AdS spacetimes. *JHEP*, 08:004, 2005.
- [26] Ioannis Papadimitriou. Holographic Renormalization of general dilaton-axion gravity. *JHEP*, 08:119, 2011.

- [27] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and A. W. Peet. Entropy and temperature of black 3-branes. *Phys. Rev.*, D54:3915–3919, 1996.
- [28] Andreas Karch and Emanuel Katz. Adding flavor to AdS / CFT. *JHEP*, 06:043, 2002.
- [29] David Mateos, Robert C. Myers, and Rowan M. Thomson. Thermodynamics of the brane. *JHEP*, 05:067, 2007.
- [30] Andreas Karch, Andy O’Bannon, and Kostas Skenderis. Holographic renormalization of probe D-branes in AdS/CFT. *JHEP*, 04:015, 2006.
- [31] Andreas Karch and Lisa Randall. Open and closed string interpretation of SUSY CFT’s on branes with boundaries. *JHEP*, 06:063, 2001.
- [32] Kostas Skenderis and Marika Taylor. Branes in AdS and p p wave space-times. *JHEP*, 06:025, 2002.
- [33] Neil R. Constable, Johanna Erdmenger, Zachary Guralnik, and Ingo Kirsch. Intersecting D-3 branes and holography. *Phys. Rev.*, D68:106007, 2003.
- [34] Tatsuo Azeyanagi, Wei Li, and Tadashi Takayanagi. On String Theory Duals of Lifshitz-like Fixed Points. *JHEP*, 06:084, 2009.
- [35] Mariano Chernicoff, Daniel Fernandez, David Mateos, and Diego Trancanelli. Drag force in a strongly coupled anisotropic plasma. *JHEP*, 08:100, 2012.
- [36] Mariano Chernicoff, Daniel Fernandez, David Mateos, and Diego Trancanelli. Jet quenching in a strongly coupled anisotropic plasma. *JHEP*, 08:041, 2012.
- [37] Dimitrios Giataganas. Probing strongly coupled anisotropic plasma. *JHEP*, 07:031, 2012.
- [38] Berndt Müller and Di-Lun Yang. Light Probes in a Strongly Coupled Anisotropic Plasma. *Phys. Rev.*, D87(4):046004, 2013.
- [39] Kazem Bitaghsir Fadafan and Hesam Soltanpanahi. Energy loss in a strongly coupled anisotropic plasma. *JHEP*, 10:085, 2012.
- [40] Mariano Chernicoff, Daniel Fernandez, David Mateos, and Diego Trancanelli. Quarkonium dissociation by anisotropy. *JHEP*, 01:170, 2013.
- [41] Somdeb Chakraborty and Najmul Haque. Holographic quark-antiquark potential in hot, anisotropic Yang-Mills plasma. *Nucl. Phys.*, B874:821–851, 2013.
- [42] Anton Rebhan and Dominik Steineder. Violation of the Holographic Viscosity Bound in a Strongly Coupled Anisotropic Plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 108:021601, 2012.

- [43] Shankhadeep Chakraborty, Somdeb Chakraborty, and Najmul Haque. Brownian motion in strongly coupled, anisotropic Yang-Mills plasma: A holographic approach. *Phys. Rev.*, D89(6):066013, 2014.
- [44] Leonardo Patino and Diego Trancanelli. Thermal photon production in a strongly coupled anisotropic plasma. *JHEP*, 02:154, 2013.
- [45] Viktor Jahnke, Andrés Luna, Leonardo Patiño, and Diego Trancanelli. More on thermal probes of a strongly coupled anisotropic plasma. *JHEP*, 01:149, 2014.
- [46] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.