UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN
MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN
MATEMÁTICAS

"MATERIAL DIDÁCTICO, LA FUNCIÓN RACIONAL, ORIENTADO AL ALUMNO Y PROFESOR"

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

P R E S E N T A

ALBERTO LOZANO VARGAS

TUTOR: M. en C. VÍCTOR JOSÉ PALENCIA GÓMEZ - FES Acatlán

NAUCALPAN DE JUÁREZ, ESTADO DE MÉXICO, SEPTIEMBRE DE 2015

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

R E S U M E N

En este trabajo de investigación se desarrolló un material didáctico, orientado al alumno y profesor, para llevar a cabo un comparativo de los cuatro temas que se imparten en Matemáticas IV en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México. Tres de ellos son las funciones: polinomiales, exponencial y logarítmica así como las trigonométricas, estos tres temas se impartieron con el método de aprendizaje en forma de exposición, en donde el profesor marca las pautas y dice lo que hay que aprender. Por otro lado, con el tema de función racional se usó el método de aprendizaje por descubrimiento en donde el alumno es el que regula y aprende de acuerdo a su ritmo y conocimientos que adquirió previamente.

Los dos métodos se aplicaron con la dirección del docente, el aprendizaje se dio a niveles de memoria, entendimiento y análisis. También se tomaron en cuenta los conocimientos que debe tener el alumno para entender los temas, ya mencionados, sin ningún problema.

Este trabajo está basado en las teorías de David Ausubel, Bigge M. y Vygotsky quienes afirman que cualquiera de ellas que sea aplicada correctamente, dará buenos resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

SUMMARY

In this research, a set of didactic material was developed targeting both teachers and students in order to make a comparison among the topics given in Mathematics IV at the Colegio de Ciencias y Humanidades of the Universidad Nacional Autonoma de Mexico. Three of the topics are the functions; polynomial, exponential and logarithmic, as well as the trigonometric ones. These topics were taught using the Teacher- Centered approach, where the teachers determines what to learn and gives the guidelines to follow. On the other hand, when it came to the rational function topic, the Discovery method was used in which the student learns at his own pace according to his previous and new acquired knowledge.

Both methods were applied with the guidance of the teacher. The learning involved the memory, understanding and analysis levels. In addition to this, the previous knowledge that the students must have to understand the topics was taken into account so as to trigger a meaningful learning.

This research is based on the theories of David Ausubel, Bigge M and Vygotsky, who state that any of the theories applied correctly will turn out into a good outcome in the Teaching-Learning process.

SCIENCE AND HUMANITIES SCHOOL

NATIONAL AUTONOMOUS UNIVERSITY OF MEXICO

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación se realizó con el fin de elaborar un material didáctico para el alumno y el profesor de la asignatura de Matemáticas IV que forma parte del plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México. Dicha asignatura comprende cuatro tipos de funciones que son:

I. Función Polinomial
II. Función Racional
III. Función Exponencial y logarítmica
IV. Funciones Trigonométricas.

La matemática es una ciencia abstracta que es de gran utilidad, puede dar apoyo en la aplicación de otras disciplinas tanto en fenómenos físicos como sociales (Kline, 2007). Por la importancia que tiene esta área en la vida del ser humano se tiene una gran preocupación en su impartición, el alumno debe ser motivado por parte del docente para lograr entender dichos temas.

Al impartir dicha asignatura se detecta una gran dificultad en los alumnos cuando se da la función racional, se considera que los conocimientos previos que debe tener el estudiante, para entender esta parte, es muy deficiente por lo que hay que trabajar sobre algunos conceptos necesarios para cubrir esas fallas. Para tal efecto se sigue la filosofía del Colegio —Aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser”.

El material didáctico desarrollado en esta investigación, se aplicó a un grupo del cuarto semestre del CCH, Plantel Azcapotzalco, con el fin de hacer una comparación entre el Aprendizaje por Recepción (AR) y el Aprendizaje por Descubrimiento (AD). En el primero el profesor indica al estudiante lo que tiene que aprender y el segundo se hace por descubrimiento del alumno, obteniendo nueva información e integrándola a su estructura cognitiva ya existente. Todo este proceso debe estar guiado y vigilado por el docente para evitar que haya error en el aprendizaje.

El AR se aplicó en las funciones: polinomial, exponencial y logarítmica así como en las trigonométricas. Para el AD se hizo con la función racional, sin dejar de tomando en cuenta las grandes deficiencias que tienen los alumnos al llegar al bachillerato. El grupo de estudio fue de 49 alumnos que se encontraban cursando nuevamente la asignatura de Matemáticas IV, en el período 2011-2012.

Este trabajo se divide en cuatro capítulos, en el primero se da el Marco Teórico que sustenta esta investigación, en el segundo se ve la metodología a usar y su aplicación, en el tercero se marcan los conocimientos previos que debe tener el alumno para abordar el tema a tratar tales como: las funciones lineales, cuadráticas y las polinomiales, dando algunos ejemplos, finalmente en el cuarto se dan los resultados obtenidos. Se presentan también las conclusiones, la bibliografía y anexos.

Justificación:

Existen dos dimensiones del aprendizaje, por un lado está la de repetición-aprendizaje significativo y por el otro tenemos la de descubrimiento. Además se tiene la teoría de que el conocimiento es social, adquirido por las vivencias del individuo en su entorno, quien adquiere aprendizaje debido a sus propios intereses e inquietudes buscando su satisfacción y beneficio. El estudiante para adquirir conocimiento debe estar motivado e interesado y por otro lado el docente debe contar con los recursos necesarios para enseñar así como infundir confianza y respeto. Debe existir la disposición por ambos lados.

En base a las teorías de David Ausubel, Bigge M. y Vygotsky quienes afirman que cualquiera de ellas que sea aplicada correctamente, dará buenos resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se lleva a cabo el comparativo.

Objetivo:

Aplicar el material didáctico para realizar un comparativo entre el aprendizaje por recepción y el aprendizaje por descubrimiento en los alumnos de cuarto semestre del CCH, Azcapotzalco.

Objetivos Específicos:

- Proporcionar el marco teórico en el que se fundamenta esta investigación.
- Aplicar la metodología en la práctica docente.
- Tomar en cuenta los conocimientos previos que el estudiante debe tener para abordar el tema objetivo.
- Conocer los resultados que se obtienen al aplicar la metodología en la práctica docente.

Hipótesis:

Dada la trayectoria de aprendizaje en matemáticas que ha formado al alumno en su vida académica, la mayoría ha sido a través del aprendizaje por recepción, por lo tanto se espera que los temas impartidos en dicha forma tengan mejores resultados.

Preguntas de Investigación:

¿Es escaso el rigor, el formalismo y la secuencia que guardan las matemáticas lo que impide al estudiante, seguir avanzando en su estudio?

¿Cuentan los docentes con la pedagogía necesaria para trasmitir ese conocimiento?

CAPÍTULO I. LA DELIMITACIÓN DEL TEMA Y EL ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Un porcentaje importante de los jóvenes que ingresan al ciclo del Bachillerato acarrean grandes deficiencias en el área de matemáticas. De acuerdo con Muñoz y Ávila (2012) en el Colegio de Ciencias y Humanidades, durante los primeros 2 semestres que cursan, los estudiantes presentan un escaso o casi nulo manejo de aritmética y geometría elemental, números (naturales, enteros, racionales, irracionales) y un dominio deficiente de las operaciones elementales: suma, resta, multiplicación y división de quebrados.

Por su parte la Secretaria de Informática de la Dirección General del CCH reporta en su Examen de Diagnóstico Institucional, por sus siglas EDI, durante la generación 2011, que el promedio de los estudiantes que cursan matemáticas los resultados fueron: La calificación más baja obtenida fue de 4.3 (en una escala del 1-10) y el más alto de 4.9.

Estos datos resultan relevantes y ameritan atención ya que posiblemente el estudiante mantendrá dichas deficiencias al enfrentarse a los cursos subsecuentes que demandan su dominio. En temas como álgebra, geometría plana, geometría analítica, funciones, cálculo diferencial e integral y desde luego el tema de interés en esta tesis, que corresponde a la función racional.

En otras palabras, sin la comprensión y el manejo adecuado de la aritmética, la geometría plana y el álgebra, difícilmente se llegará a comprender y analizar qué es una ecuación; entender el concepto de función, y lo que ella involucra, como la tabulación, la representación gráfica de una función en el plano cartesiano, el comportamiento en sus intervalos, el concepto de infinito, etc.

Gran parte del rezago al que se enfrenta el CCH está cimentado en este problema. A partir de los estudios de egreso realizados por el área de estadísticas del CCH, solo el 30% de los alumnos concluyen su ciclo de bachillerato en un periodo de tres años (Población Estudiantil del CCH ingreso, tránsito y egreso).

En pláticas y entrevistas formales e informales, con profesores de más de 30 años en la docencia, con el autor de esta tesis, le comentan que han notado que esos estudiantes no solo muestran una gran deficiencia en habilidades básicas en matemáticas a nivel bachillerato, sino además, un bajo nivel de *memoria,* *comprensión y análisis*, (ver marco teórico). Para un desarrollo apropiado del pensamiento abstracto, así como en información suficiente y adecuada para el ingreso a cualquier licenciatura.

A pesar de su atención, algunas reformas de los planes de estudio del CCH no han logrado su cometido. El aprendizaje de la matemática que se imparte en el bachillerato carece de continuidad y conexión entre tema y tema.

Por otra parte, esta forma de educación matemática, no fomenta la imaginación ni el pensamiento abstracto, siendo esto parte elemental de la naturaleza humana.

Y tan solo se ha reducido a un vacío de entrenamiento con resolución de problemas, que en algo fomentan el desarrollo formal, pero no conducen a una comprensión efectiva ni a una mayor independencia intelectual del individuo. (Courant & Hebert, 1979)

Por tales motivos, es deseable, que el profesor de CCH cuente con la mayor claridad en los objetivos de su labor, que *~~L~~as escuelas deben de fomentar la inteligencia y la percepción y hacer mejores individuos dentro de su propia sociedad, sacando lo mejor de cada uno"* (Palacios, 2006, pág. 13), así como fomentar y hacer valer la filosofía del Colegio por medio de los tres pilares que lo rigen (Colegio de Ciencias y Humanidades, 1996):

En donde el alumno, al inicio, solo de momento se vuelva un imitador del profesor, y resuelva problemas parecidos y/o copiando los que el maestro resuelve. En forma simultánea, el profesor, a su vez que enseña a resolver problemas, debe con preguntas bien argumentadas inducir a la independencia intelectual. Es decir como lo menciona (Polya, 2010). Todos aprendemos a hacer las cosas inicialmente viendo a los demás hacerlas, por ejemplo a nadar, pero al practicarlo instruido y guiado por un maestro, uno mismo así aprende y va haciendo ese conocimiento suyo y parte de él. De igual forma hay que inducir a los alumnos a que ellos lo hagan, lo digieran y hagan de este conocimiento parte de ellos y forje su propia personalidad. Que a su vez se confirma la filosofía del CCH.

- **Aprender a aprender:** Los alumnos del Colegio serán capaces de adquirir nuevos conocimientos por cuenta propia, (ligándolos a los ya aprendidos). Aprender a aprender implica la capacidad de reflexionar en la forma en que se aprende y actúa en consecuencia, él mismo regula el propio proceso de aprendizaje mediante el uso de estrategias flexibles y apropiadas que se transfieren y adaptan a nuevas situaciones.
- **Aprender a hacer:** El aprendizaje incluye el desarrollo de habilidades que les permita poner en práctica sus conocimientos, (el alumno debe de preocuparse por saber hacer las cosas y no solo ser un mero receptor y/o repetidor).
- **Aprender a ser:** Donde se enuncia el propósito de atenderlos no sólo en el ámbito de los conocimientos, sino también en el desarrollo como un individuo social, con valores humanos, particularmente los sociales, los éticos, los cívicos y la sensibilidad artística (el alumno debe de preocuparse por tener una identidad propia, tanto en el ámbito social como en el de sí mismo).

Es por esto que el CCH, requiere un docente, que debe de ser un guía, un acompañante y facilitador del aprendizaje, un mediador y regulador del mismo. Y no alguien que fomente una dolorosa frustración y rechazo del conocimiento. Es el docente el que debe de socializar el conocimiento entre sus alumnos para así hacerlo significativo. (Palacios, 2006), (Diaz Barriga, Hernandez;, 1999)

Objetivo

El objetivo que dirige esta tesis se centró en:

Hacer un comparativo entre el aprendizaje por recepción (basado en la enseñanza explicativa) y el aprendizaje por recepción-descubrimiento (basado en que los alumnos realicen una serie de cinco prácticas), en un grupo de estudiantes de cuarto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Azcapotzalco.

Se pretende aportar al aprendizaje los recursos pedagógicos válidos y apropiados situados en el continuo ***repetición-significativo y recepción-descubrimiento,*** suministrando el sentido a que el aprendizaje no solo se memorice, inducir al alumno a que el aprendizaje debe de ser entendido, bien comprendido y además, lo más importante, sometido a la reflexión y el análisis.

Con estos argumentos se espera que el alumno identifique, desde las bases, los elementos que componen una función matemática en forma general, y esto le proporcione las herramientas para un mejor aprendizaje de los temas de funciones abajo mencionadas, que se imparten en matemáticas IV:

I) La función polinomial
II) La función racional
III) Las funciones trigonométricas, y
IV) La función logaritmo y la exponencial.

(Colegio de Ciencias y Humanidades, 1996).

Se espera además, que el estudiante reconozca el origen y lo que da lugar a los diferentes tipos de funciones que existen, porque y cuál es el comportamiento gráfico de cada una de ellas en el plano cartesiano, así como en cada una de las regiones donde sus ramas se desplazan. Pero además, entre otras actividades, inducir el aprendizaje significativo en forma tanto individual como colectiva de los alumnos, para los temas del programa de las asignaturas de Matemáticas I, II, III y IV.

Es por esto, que el profesor, debe cambiar su mentalidad y a su vez la de sus alumnos, formándose y formando personas que cuestionen sus propios conocimientos, volverlos autónomos. Proporcionarles las herramientas que a lo largo de su vida les permitan buscar en forma continua su propio aprendizaje, y como ya se mencionó, su propia independencia intelectual. Desde luego en todos los ámbitos de vida privada y social de cada individuo.

La experiencia ha mostrado, que tanto enseñar como aprender, es una necesidad propia de cada sujeto, así como de la sociedad donde cohabita. La convivencia y sobrevivencia le permite ser un receptor y/o un transmisor. Es un proceso que educa y enriquece a la vez que estimula al crecimiento propio como social. Es la razón por la que la enseñanza y el aprendizaje deben de caminar juntos y cada uno de ellos retroalimentarse continuamente por sí mismo y en cooperación del otro para continuar creciendo, ya que no es posible el avance de cada uno de ellos por separado. Al efectuar esta tarea, debemos considerar que: Sea cual fuere el método de enseñanza/aprendizaje, que se aplique, —si éste, está bien planeado debe de rendir buenos frutos”.

Hipótesis

La hipótesis de este trabajo, radica en que dada la trayectoria de aprendizaje en matemáticas que ha formado al alumno en su vida académica, la mayoría ha sido el *aprendizaje por recepción*, ya que según (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010): *—La exposición por parte del docente ha constituido y es el núcleo de todo sistema pedagógico, pues hasta ahora ha sido y es una manera eficaz de transmitir grandes volúmenes de conocimiento en poco tiempo”.*

Desde esta perspectiva de haber obtenido el conocimiento, el alumno está más habituado a recibir la información por parte del profesor, él sólo tiene que poner atención y entender lo que el profesor dice y enseña, cumplir con sus tareas y exámenes. Entonces en las pruebas de este material los temas que son impartidos por el método exposición recepción se cree que darán mejores resultados.

Por otro lado en el método aprendizaje por descubrimiento, --tal vez por su innovación-- el alumno se verá obligado de esforzarse más y aprender por cuenta y motivación propia, ya que según (Bruner, 2001): El descubrimiento que el alumno va haciendo, genera libertad en sí mismo, es una estimulación intelectual y genera motivación para el pensamiento creativo, las experiencias de descubrimiento exitosas mejoran sus actitudes, convicciones y dan confianza en sus propias capacidades al alcanzar los conocimientos deseados para obtener una calificación aprobatoria.

Lo que sí es un hecho es que en cualquiera de las dos teorías antes mencionadas, debe de existir un docente que regule y conduzca adecuadamente el conocimiento, pues la inexperiencia del alumno lo puede inducir a perderse y divagar. Sobre todo en el conocimiento por descubrimiento, (y considerando que la matemática es una ciencia escabrosa) como lo señala (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010): puede ser un ―Descubrimiento Guiado". Aunque como ya se mencionó; Sea cual fuere la teoría que se aplica, si ésta es bien diseñada, bien planeada y bien aplicada, habrá buenos resultados, pues no hay una teoría que se pueda afirmar que es mejor a otra (Bigge, 2007).

CAPÍTULO II. MARCO TEORICO

Aproximación al aprendizaje

Ausubel y otros autores consideran que todo aprendizaje en el salón de clases puede ser situado a lo largo de dos dimensiones independientes: la dimensión ***repetición-aprendizaje significativo*** y por otro lado la ***dimensión descubrimiento*** (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010). Así mismo, otros estudiosos de la enseñanza-aprendizaje, como Vigotsky considera que existe otra postura, ésta radica en que el conocimiento es social y, gracias al contacto que tienen los individuos con su entorno, se amplían sus habilidades mentales, de las cuales las que tienen mayor desarrollo son: la atención, la memoria y la concentración, sobresaliendo de todos ellos el lenguaje (Jaques & Triphon, 2009).

Estas herramientas, gracias a la palabra memorizada, (memoria: facultad del cerebro para almacenar y recuperar información, RALE 2012), fomentan el pensamiento y una vez interiorizada y entendida, lo conduce a actividades mentales cada vez mejor elaboradas y más complejas. Estas ideas y pensamientos, en su misma sofisticación van induciendo al sujeto, a un proceso de análisis e influyendo en el pensamiento abstracto que el individuo puede alcanzar conforme a sus intereses e inquietudes tanto internas como externas. Internas por la satisfacción personal y externas por complacer a sus padres o tener un lugar en la sociedad. (Bigge, 2007).

Desafortunadamente, el enseñar no forzosamente implica que se va a aprender ya que enseñar es tan sólo una de las condiciones que pueden influir en el aprender. Si bien es de todos sabido que hay muchos alumnos que pueden aprender sin ser enseñados por un docente. Por otro lado, se presenta la situación y se dan casos que, aun cuando el maestro se esfuerza para que los alumnos aprendan, si estos últimos no están motivados ni cooperan, es muy probable que no se logre nada del aprendizaje. De igual forma, si el maestro no viene motivado, también desmotivara a los alumnos. Esto nos dice que es un hecho que para aprender y enseñar, o enseñar y aprender, debe de haber disponibilidad de ambas partes: maestro-alumno, alumno-maestro. (Palacios, 2006) (Bigge, 2007) (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010) (Courant & Hebert, 1979).

De lo anterior podemos partir y afirmar que si los alumnos no están motivados para aprender, no les interesa, o los desmotiva la razón y desengaño de que no cuentan con los conocimientos suficientes y adecuados para entender. Esto último puede causar desaliento, frustración y enojo. Dando como consecuencia, poco a poco el abandono de la materia, y en el peor de los casos hasta de la misma escuela.

Es recomendable que el docente infunda confianza y platique con sus alumnos, si percibe esta situación, tome las medidas necesarias y suficientes, donde el profesor debe de averiguar y seleccionar los conocimientos para estructurar, corregir y direccionar el aprendizaje. En caso de ser necesario, regresar hasta donde sea posible corregir las deficiencias, para así lograr un conocimiento bien cimentado y estructurado, basado en el entendimiento y la comprensión. De esta forma, se evitará el ausentismo de los estudiantes y se les podrá guiar a aprender de una manera más significativa sólida y reflexiva.

El docente al exponer su clase, (Polya recomienda) debe hacer preguntas y conjeturas bien estructuradas e intencionadas en las que pueda indagar qué es lo que saben o no los alumnos, darse una idea clara de lo que están listos para aprender. De esta forma podrá conducir la enseñanza a un ritmo apropiado a cada grupo, y así decidir la magnitud y el nivel propios de las tareas de aprendizaje. (Polya, 2010).

Ya que la tarea del docente es fungir como un ser motivador, alguien que da confianza, seguridad y brinda el apoyo para romper con los miedos y prejuicios al conocimiento que los alumnos vienen arrastrando. Detecta las deficiencias y da los pasos a seguir para corregirlas. El buen docente es el que se vale de todas las estrategias y recursos para enseñar a su vez que él aprende, tanto técnicas conocidas como desconocidas, ya que su objetivo es que los alumnos aprendan, y obtener buenos resultados en la enseñanza-aprendizaje. Eso es lo que más importa.

Todo profesor debe comprometerse con su trabajo y tener muy claro que la educación es un proceso de dedicación, disciplina, motivación y gusto. Saber que el aprendizaje significativo, no es una tarea fácil. Por lo cual, la escuela y los docentes deben de hacer conscientes a los alumnos que para aprender es necesaria la disciplina, que educar, es motivar y mostrar el gusto y la satisfacción por aprender. No desanimarse si el alumno es apático e indiferente. Partiendo de esta filosofía, es relevante conocer a quien se educa, saber de los alumnos cuáles son sus motivaciones, sus sentires e intereses, a que aspiran, y lo más importante, tomarlos muy en cuenta.

Se da el caso que la institución y él profesor, al enseñar no considera qué pasa con el alumno, ¿qué es esté como un individuo?, ¿la persona, el ser humano?, ¿qué hay de sus inquietudes, motivaciones e intereses?, en sí, lo que estriba en la vida. Ya que se da el caso de que, si los alumnos notan la indiferencia del profesor o de la escuela para con ellos. Como cualquier ser humano que se siente ignorado y desagraviado, donde, no se les considera. Es muy probable que pierdan el interés y la motivación por asistir y/o estudiar. (No por ser adolescentes no piensan ni sienten) Se les inducirá a que venga la apatía por la educación y el aprender, desde luego entrará la tentación del abandono del salón de clases, y en casos extremos hasta la misma escuela. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010), (Kline, El fracaso de la matemática moderna, por qué Juanito no sabe sumar, 2007).

El objetivo de las escuelas es transmitir conocimientos por medio de la educación; Hacer de cada individuo un mejor ser humano, prepararlo para el entorno que habita. Es además forjar una sociedad, donde se pueda alcanzar la democracia, la libertad, la igualdad y la fraternidad para un mundo mejor y más justo para todos. Generar la posibilidad de hacer de cada individuo, un ser preparado para el trabajo, lograr que aporte lo mejor de sí para con la sociedad que habita, ser feliz, disfrutando del conocimiento y los beneficios que éste acarrea, además del entendimiento del entorno del mundo natural como el social y el de sí mismo (Palacios, 2006).

Por otro lado, aunque siguiendo con el mismo tema: El aprendizaje no puede ni debe de quedarse a nivel enciclopédico. Pues al conocer o saber algo sin someterlo a un juicio de análisis ni reflexión, este “*conocimiento*” que se “*tiene*”, carece de sentido.

Es por eso que la labor de las escuelas por medio de la educación, estimular para desarrollar el potencial de cada ser humano:

i) Como un primer paso, iniciando con el estímulo a desarrollar la memoria (repitiendo las cosas).

ii) Posteriormente, continuar con inducir al grupo de alumnos, a que lo memorizado sea bien entendido pues, según Vigotsky (Jaques & Triphon, 2009), el conocimiento es social y si se induce al grupo de alumnos a la discusión, platicando y criticando el tema que se aborda, cada uno externando su propia opinión, se enriquecerá cada integrante escuchando las observaciones y opiniones de los demás. Y conjuntamente, se fomentara la tolerancia y convivencia.

iii) Esto, desde luego, mediado, conducido y cuestionado por un docente, el cual debe de estar preparado para cualquier situación, cuidando que no sea mal entendido o se tergiverse un concepto y una idea sea entendida por otra. Usando contraejemplos que haga al alumno cuestionarse si lo que acaba de conocer tiene o no sentido. El docente una vez que capte que se ha entendido, debe inducir pasar a la fase del análisis. Es entonces cuando el individuo notará que el conocimiento se volverá significativo y podrá encontrar el sentido del saber.

Así, si en el conocimiento adquirido, sea cual fuere su origen, si es por la relación que tiene un individuo con sus familiares, amigos o conocidos, o por asistir a una escuela y tener contacto con sus profesores y compañeros con los que se relaciona, o por otros medios, lo que él alumno lee, escucha y platica, se destaca lo fundamental de ese conocimiento, entonces se estará en mejores condiciones de apreciar y valorar lo más importante del mundo que le rodea, de su propia vida y de la vida de los demás, (Palacios, 2006), (Bigge, 2007).

El aprendizaje se entiende como un proceso donde paulatinamente se van adquiriendo, conocimientos, habilidades y actitudes con significado. Este conocimiento se consigue viviéndolo en la experiencia propia y/o de la interrelación con los demás individuos que lo rodean. Pero, además, como ya se mencionó, también con la consulta de libros, revistas, disquetes, el internet y todo aquello que pueda contener algún tipo de información. Entonces el sujeto lo refleja a partir de las conductas adquiridas, mostrando los significados y potenciales expuestos en el material de aprendizaje y hacerlos más disponibles para él mismo. Entre otras cosas, va aprendiendo a ser selectivo y discrimina el conocimiento chatarra, de poco valor y contenido. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010), (Palacios, 2006), (Bigge, 2007), (Kline, 1972), (Polya, 2010), (Garcia, 1999).

Según (Bigge, 2007), una vez adquirido el conocimiento, éste puede atravesar por tres fases: El primero a nivel memorístico, el segundo a nivel de razonamiento y por último el tercero, a nivel reflexión, lo más recomendable es llegar a este último nivel, aunque eso ya es cuestión de interés o necesidad propia de cada sujeto, la madurez que tenga en el momento de adquirirlo y en su propia personalidad.

El aprendizaje a nivel de memoria

El aprendizaje a nivel de memoria se refiere al proceso Aprendizaje a Nivel de Memoria de *mantener en existencia* una reproducción de los nuevos significados adquiridos, en donde el olvido no es más que el descenso de la disponibilidad, lo que muestra la diferencia entre un establecimiento de un significado con la reproducción del mismo. (Diaz Barriga, Hernandez;, 1999). En este nivel de aprendizaje no existen niveles intermedios y tan sólo lo aprendido se repite textualmente para evitar el olvido. Se recomienda para una mayor retención que se relacione con contextos que son conocidos o familiares para el alumno y su recuerdo por la relación con lo que conoce es mucho mejor. (Garcia Cortes, 1999)

De acuerdo con algunos autores, es frecuente que los estudiantes se enfrenten con una variedad desconcertante de procedimientos y algoritmos, para los cuales se ven en la necesidad de asimilar de memoria a fin de dominarlos. Por costumbre o educación, casi siempre el aprendizaje es completamente memorístico (Kline, 1972). Una de las criticas fundamentales al plan de estudio tradicional es que los alumnos aprendían a hacer las matemáticas maquinalmente, memorizando procedimientos y demostraciones (Kline, 2007). Esta manera de manejar el aprendizaje y la enseñanza a nivel de memoria, adopta una forma de un proceso factual mentalista o conductual fisicalista.

La corriente empirista se refiere a realidades físicas, por lo que la ciencia fundamental será la física. Más aún, creerán que todas las demás ciencias -también la psicología- deben construirse tomando como modelo a la física. En el conductismo se ve la influencia del fisicalismo en su afán por hacer de la psicología una disciplina perteneciente a la ciencia natural. ((Ferrater Mora, 2014).

Este proceso factual mentalista adopta una disciplina mental deísta o humanista que efectúa el aprendizaje, según el condicionamiento Estimulo-Respuesta (E-R en adelante). En este proceso se manejan los recuerdos, que se estimulan mediante enlaces de estímulos y respuestas o conexiones por medio del reforzamiento Respuesta-Estimulo (R-E en adelante). Estas son utilizadas en preguntas similares a las antes hechas (Bigge, 2007). El alumno se vuelve una máquina que solo responde al estímulo respuesta. Si la pregunta varía en algo donde se requiera de la comprensión, el resultado será un fracaso. Por este motivo, se considera que el conocimiento no debe quedarse solo a este nivel.

De lo anterior, es un hecho que estos conocimientos los adquirirá el sujeto por medio del contacto con la sociedad con la que cohabita. Aunque, desde luego, habrá individuos capaces, autodidactas los cuales, con o sin ayuda de los maestros, podrán lograr los más y mejores conocimientos de acuerdo a lo que sus intereses o gustos decidan aprender.

Por otro lado, los que no se encuentren en esta situación, recurrirán al profesor y/o a su escuela para adquirirlos. En este caso, la labor del docente, como la de la escuela consistirá en planificar, orientar, apoyar y dar al alumno los consejos y recursos necesarios, mostrarle y explicarle como está estructurado el conocimiento y la forma secuencial como deben ir aprendiéndose.

Así el alumno puede iniciar y trabajar en lo que fomente y mejore su memoria, y esto será un buen inicio para pasar a la siguiente fase, persiguiendo el objetivo de entender, y comprender de qué trata cada tema. Contando con estas dos herramientas podrá pasar a la siguiente fase. Desde luego este último paso,

que es la reflexión y el análisis del conocimiento adquirido, es la fase más importante, y ésta se consigue trabajando mucho en las dos fases anteriores.
Para llegar hasta aquí se requiere tiempo, el tiempo que da la asimilación del conocimiento significativo, la madurez y mucho interés por parte del sujeto que estudia. Este proceso es personal, pues cada individuo lo alcanza en su momento. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010), (Palacios, 2006), (Bigge, 2007), (Kline, 1972), (Polya, 2010), (Garcia, 1999).

Aprendizaje a Nivel de Comprensión

El ser humano por su propia naturaleza, es un sujeto que vive en forma consciente e inconsciente en su entorno social como individual, aunque de acuerdo a su idiosincrasia y educación acostumbra o no a razonar y entender las cosas que va aprendiendo en el transcurso de su vida. En otros casos las da por hechas según su momento de importancia para con él.

En el caso del conocimiento consciente, puede ser aprendido en la escuela, bajo el cuidado de expertos en el estudio y programado de la mejor manera en cada tipo de materia e impartido por un docente que ha sido preparado para impartirlo, es decir que conoce y domina la materia. Por otro lado, está el conocimiento empírico que se adquiere al contacto y en la relación con familiares, en la mayoría de los casos con su mamá y papá, posteriormente con familiares y amigos o la sociedad del lugar en que habita, donde, según quien lo transmita, puede ser de alguna manera bien estructurado o tan solo transmitido y en muchos de los casos ―las cosas son así, pues porque si, y ya”.

Dado que es en la escuela, donde el conocimiento se formaliza, donde se planea y establecen las reglas, además de la forma y estructura secuencial en que debe de irse aprendiendo, por ejemplo la matemática. Es en ella donde el alumno logra hilvanar y relacionar lo que ha aprendido con lo nuevo que está aprendiendo, cuando la enseñanza comienza a volverse significativa, a tomar el sentido deseable. Es entonces que se llega a la fase que cae en el nivel comprensión.
Este aprendizaje ya entendido y no solo memorizado, equipa al alumno e integra al individuo, reafirma su personalidad de tal forma que lo puede aplicar para

resolver las situaciones problemáticas que en su vida diaria se le presenten, tanto dentro como fuera de la escuela. Cuando empieza a comprender y entender se logran identificar con mayor facilidad los problemas y una o varias soluciones posibles.

Lamentablemente, uno de los temas que más se les dificultan para entender, es la matemática, aunque esta materia, junto con la lengua materna de cada sociedad, son a las que las instituciones de estudio les dedican más tiempo e interés dadas las necesidades de la sociedad. Debemos tener presente que la matemática, desde sus inicios, fue creada por la necesidad del hombre a comprender y dominar el mundo físico y social que le rodea.

De esta forma, al volverse las sociedades más grandes y complejas, la necesidad obligó a aplicar y desarrollar más la matemática, para enfrentar los cambios que la sociedad requería tanto en el mundo físico, como también el mundo económico y social (Kline, 2007).

Se entendió que la matemática es una ciencia deductiva, que guarda una gran relación con un universo abstracto así como un universo físico. Que es una herramienta que ayuda al hombre a comprender y dominar estos mundos. Es decir, por un lado, el mundo creado por el hombre mismo, que es el mundo social, y abstracto y por otro lado, el mundo físico que habita, (Kline, 2007).

Al vivir en ellos e intentar dominarlos para su propia conveniencia y sobrevivencia, el humano es donde pone en juego la imaginación, la intuición, la inventiva es cuando encuentra que no se requiere ni es indispensable una gran memoria, pero eso sí, es indispensable no desanimarse, gozar de un gran carácter, sentido común y capacidad de discernimiento aceptables (Courant & Hebert, 1979).

Con estos antecedentes, y por tal motivo, el docente y la escuela con sus planes y programas de estudio resultan relevantes para que induzcan a los estudiantes a comprender la estructura y las reglas de la matemática, los principios y la relación con sus conocimientos previos de la misma. Es labor del docente cuidar que este conocimiento el alumno lo obtenga bien estructurado en forma secuencial y, como se ha mencionado, además de bien entendido, hay que mostrarle al alumno, que en la medida que él pueda entender y explicar un conocimiento y darlo a entender ya sea con sus propias palabras o por escrito, entonces, lo habrá entendido.

Por otro lado, es deber y labor del docente vigilar que el alumno no caiga en un verbalismo confuso, que se haya engañado a sí mismo, haciéndolo creer que ya domina y comprende algo y que no fue así. Sin lugar a hacerlo sentir mal o ridiculizarlos, hay que enseñarle el camino correcto. (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010).

Aprendizaje a Nivel de reflexión

El aprendizaje centrado en la reflexión se caracteriza por buscar una idea o un concepto que la comprensión y el entendimiento de ese conocimiento hace saber que existe. La reflexión está condicionada a saber que este conocimiento ya se ha entendido, entonces el alumno, apoyado y auxiliado por el profesor, debe alcanzar la siguiente fase, y mostrar que en una situación problemática él centra su pensamiento en un proceso que examina los hechos y las generalizaciones existentes entre ellos, para lo cual busca otros nuevos, iniciando de esta forma su propia creación y aplicación de lo aprendido. (Bigge, 2007)

Este proceso antes mencionado se da cuando el conocimiento en el alumno se vuelve significativo, cuando él le encuentra sentido y el nuevo saber adquiere un significado con los elementos existentes en la mente del alumno, digamos pues con lo ya conocido; el alumno ya reconoce la organización y la naturaleza de que es primero y que es lo que sigue. Es así como el conocimiento se ha convertido en un proceso de desarrollo interno en la mente del individuo, dentro del cual se han cultivado y organizado procesos tales como la memoria, el entendimiento, la imaginación, la voluntad y el pensamiento.

Se forja y reafirma la personalidad del sujeto cuando la educación se transforma en un proceso de disciplina mental. Lo que debe de quedar es que para llegar a este proceso, el alumno debe estar lo suficientemente motivado e interesado para aprender, esto lo inducirá al proceso de análisis y organización del conocimiento. La labor del profesor debe consistir en mantener al alumno motivado, conducirlo, inducir y vigilar que este proceso no se pierda.

El aprendizaje demanda contemplar el tiempo en que se logra asimilar y cada individuo lo logrará a su tiempo, según su propia personalidad, su capacidad, e intereses o las circunstancias que valore de su propia vida que lo induzcan a conseguirlo, la madurez que su propia vida le demande. Entonces la escuela, el profesor y la sociedad habrán logrado su objetivo (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010) (Bigge, 2007).

El aprendizaje por recepción

En esta clase de conocimientos, la institución elabora los planes y programas de estudio y el profesor se encarga de impartirlos a los alumnos, el cómo deben de aprender. El profesor, basado en el programa de estudios, es el que prepara y expone el material a aprender, el alumno solo debe de poner atención. En este tipo de aprendizaje al alumno solo se le exige que internalice en el aspecto de memoria comprensiva, lo entienda e incorpore el material hilvanándolo con lo que él ya conoce. El alumno solo tiene que entenderlo y recuperarlo o reproducirlo en fecha futura y reafírmalo con sus tareas. La ventaja de esta forma de aprender es que es potencialmente significativo cuando se logra el proceso de internalización.

Para muchos estudiosos de la educación tiene grandes ventajas, ya que es la mejor manera de impartirle al alumno muchos conocimientos en corto tiempo. Se dice que el profesor para impartirlos, ya logró internalizarlos para sí mismo y hacerlos significativos, lo cual también trasmite al alumno como parte del conocimiento. El mismo profesor pudo haberlo aprendido así de sus profesores.

La controversia es que, para muchos otros, este tipo de conocimiento es sinónimo de memorización, es un conocimiento ya digerido, que poco induce al alumno a un mayor esfuerzo y al verdadero conocimiento significativo, reduciéndolo a tan solo un mero repetidor del profesor (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010), (Diaz Barriga, Hernandez;, 1999), (Bigge, 2007).

El aprendizaje por descubrimiento

En esta fase de aprendizaje, ahora la tarea del alumno consiste en descubrir ese conocimiento, determinar cuál es la meta a conseguir. Aquí el alumno debe tomar la iniciativa, analizar la información e integrarla con su estructura cognoscitiva existente, reorganizarla, estructurarla y transformarla. Haciendo una combinación integrada de manera que se logre el producto final deseado o se descubra la relación entre medios y fines que hacía falta (Guevara, 1985).

El alumno es el que toma la decisión y mantiene la motivación, desde luego, este tipo de conocimiento debe de ser producido por una institución, el profesor es el que conduce, guía, vigila e inspecciona, dando las debidas pautas e instrucciones, “*No olvidar que el alumno es un aprendiz*”. Y que en muchos de los casos se puede inducir a un falso concepto y entender una cosa por otra. Como ya se mencionó anteriormente, el docente debe de tener la suficiente capacidad para cuidar que el alumno no se engañe, pues en la mayoría de los casos es un adolescente y/o un principiante, esto propicia que su misma novatez lo pueda conducir a equivocarse. Entonces es donde debe aparecer el docente vigilante y no perder de vista que el estudiante vaya por el camino correcto (Courant & Hebert, 1979).

En sus observaciones, Polya recomienda al profesor no contestar las preguntas de los alumnos directamente, más bien él opina, que el profesor debe de contestar haciendo preguntas inducidas y bien intencionadas, planeadas y estructuradas, de tal forma que estas conduzcan e influyan en el alumno a lograr sus propios descubrimientos. Entre otras recomendaciones, vigilar, como ya se mencionó, que estos conocimientos nuevos no sean equívocos, conducir al alumno a su propio aprendizaje por descubrimiento, que logre entenderlo y analizarlo y no tan solo lo memorice, hay que inducirlo a que haga del contenido descubierto, un conocimiento significativo (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010), (Diaz Barriga, Hernandez;, 1999), (Bigge, 2007), (Guevara, 1985)

CAPÍTULO III. CONOCIMIENTOS CON LOS QUE DEBE DE CONTAR EL ALUMNO

Ejemplos de preparación al objetivo y definiciones encontradas

Ejemplos de una función lineal

Ejemplo 1: Se mostró un ejemplo ya visto. En la tabla del 2, donde al tabularla y graficarla se encontró:

x	f(x)=2x
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

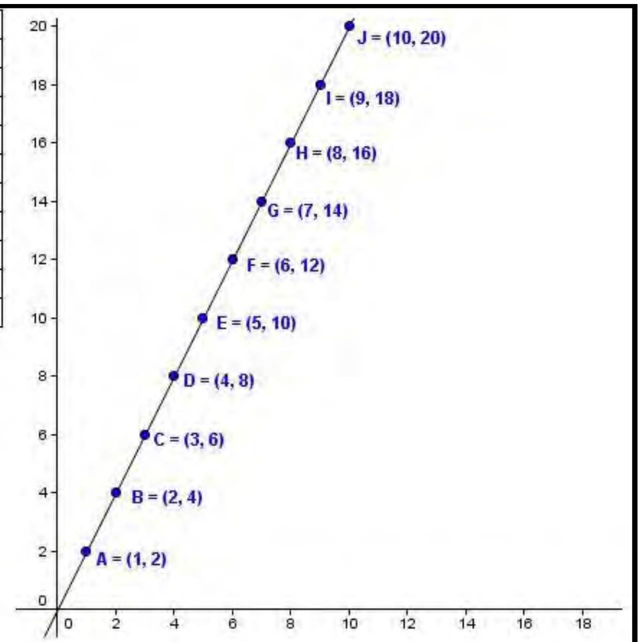


Figura 1. Gráfica función lineal de la tabla del 2

Al analizar este ejemplo, y revisar la definición de función ―Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna exactamente un elemento y de E a cada elemento x de D (Swocowski & Cole, 2002) p. 176), se vio que:

i) En el ejemplo, a cada elemento de x se le asocia el elemento $2x$.

ii) *Dominio:* Es el conjunto de valores de x que están evaluados en $f(x)$.

iii) *Rango*: Es el conjunto de valores de $f(x)$.

Para reafirmar, diremos que el *dominio* es el conjuntos de las "x": 1, 2,…,10. Es decir, “los valores que toma la variable independiente”.

Rango son los valores de las "y_s" ó $f(x)$: 2, 4,…, 20. “Los valores que toma la variable dependiente”.

Otro ejemplo de función lineal con el que el alumno ya ha estado familiarizado, y se trató, fue el siguiente:

Ejemplo 2: Al abordar un taxi, el banderazo es de \$ 7.80, y se paga \$ 0.90 por cada 250 m recorridos.

i) Tabule y grafique 7 puntos.

Para este ejercicio se explicó a detalle que antes de emprender la marcha, es decir al metro cero, ya se deben \$ 7.80 y al realizar la tabla, entonces el primer punto ya no estará en el origen del plano cartesiano, por lo tanto, la ordenada al origen tendrá ese valor. Suponiendo que el pasajero sólo contaba con \$50.00, la pregunta es:

¿Para cuántos metros le durará ese dinero? Se inició tabulando de la siguiente manera:

Tabla 1. Tabla que expresa la tabulación del Ejemplo 2

x	f(x)
0	7.80
1	8.70
2	9.60
3	10.50
4	11.40
5	12.30
6	13.20
7	14.10

En este punto –7” se les pidió parar, y el siguiente paso fue deducir, con los puntos ya calculados, el modelo matemático que la tabla determina, pidiéndoles recordar el postulado de Euclides; *“Por dos puntos pasa una y solo una recta”*. Los pasos a seguir fueron:

Se toman 2 puntos, el 2: $A(1, 8.70)$ y el 5: $B(4, 11.40)$ y se calcula la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1} =>$$

$$m = \frac{11.40 - 8.70}{4 - 1} = \frac{2.70}{3} = 0.90$$

Ya con la pendiente, se toma como punto $A(1, 8.70)$ y con la ecuación de la recta punto - pendiente:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

$$\boldsymbol{y} - 8.70 = 0.90(\boldsymbol{x} - 1)$$

$$y = 0.90x + 7.80$$

La explicación consistió en que ahora la ordenada al origen, o lugar donde la recta corta al eje —“y es donde inicia la recta, y es el punto $A(0,\ 7.70)$. La ventaja de tener un modelo matemático de este problema es que, sin graficar, podemos saber hasta dónde llegaremos con esos $ 50.00.

Explicación; El eje “x” es el de la distancia y el eje “y” el del dinero; tomamos la función, como una ecuación y sustituimos los $ 50.00 y nos resulta:

$$y = 0.90x + 7.80$$

$$50 = 0.90x + 7.80$$

$$=> x = 46.88$$

Aproximadamente para 46.88 veces 250 metros (11.72 km), a partir de donde subió.

i) *Dominio:* Es el conjunto de valores de x que van desde cero (0) a los 46.88 veces que cambia el costo en el taxímetro en el recorrido (los valores que toma la variable independiente en el eje "x")

ii) *Rango*: Es el conjunto de valores de $f(x)$ que son de (cero) \$0.00 a \$50.00 (los valores que toma la variable dependiente en el eje "y").

Con explicaciones como está, el alumno tendrá una mejor idea de lo que es una función, y cuando se hace ecuación, lo que la complementa, y para qué sirve un modelo matemático.

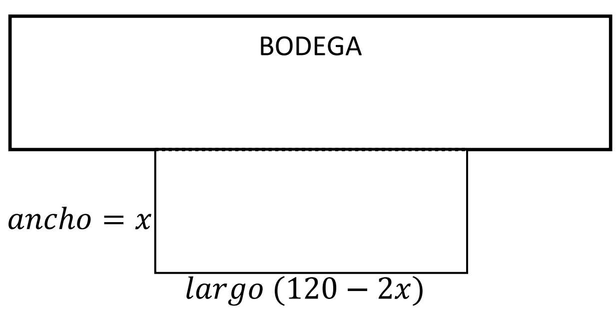
Continuando con el repaso, se procedió a retomar el problema clásico de Matemáticas II. Este es el de la cerca de un terreno.

Ejemplos de una función cuadrática

Ejemplo 1: Un granjero desea construir un corral rectangular de área máxima. Cuenta con una cerca con 120 m lineales, usando su bodega como una de las paredes, es decir sólo construirá 3 paredes, ¿cuáles son las dimensiones óptimas del corral?

Solución:

Como primer paso se procedió a hacer un esbozo del problema en forma grafica, rá de la siguiente forma:



Se sabe que el área de un rectángulo viene dada por:

$$\boldsymbol{A = largo \cdot ancho}$$

Esto implica

$$\boldsymbol{A(x)} = (120 - 2x)x$$

$$\boldsymbol{A(x)} = -2x^2 + 120x \qquad \textbf{(1)}$$

Con el modelo matemático o la función (1), se construyó la siguiente tabla

Tabla 2. Tabla que describe la función Cuadrática (1)

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
120-2x	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
A(x)	0	550	1000	1350	1600	1750	1800	1750	1600	1350	1000	550	0

Se puede observar en la Tabla 1, dentro del recuadro marcado en negrita, que cuando $x = 30$ la función alcanza su valor máximo, esto es: $A(x) = 1800$, Su grafica se muestra abajo, donde x es la variable independiente (eje "x") y $A(x)$ es la variable dependiente (eje "y").

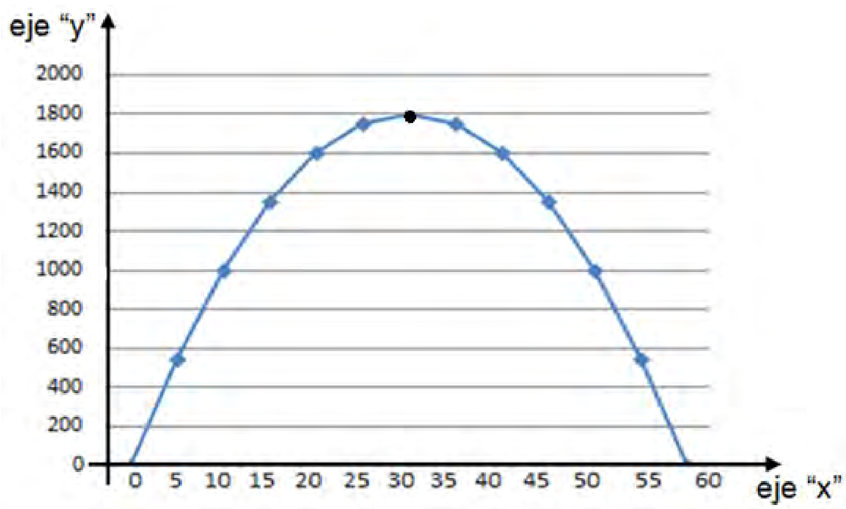


Figura 2. Gráfico que describe la función cuadrática (1)

i) *Dominio:* Es el conjunto de valores de x que van desde cero (0) hasta 60 m, o los valores que toma la variable independiente en el eje "x".

ii) *Rango*: Es el conjunto de valores de $f(x)$ es decir de 0 a 1800 m^2, o también los valores que toma la variable dependiente en el eje "y".

Ejemplo 2: Otro ejercicio, en que se hicieron más observaciones, es donde la gráfica corta los ejes. Como se sabe, estos valores de x son llamados soluciones o raíces de la ecuación cuadrática ya que al evaluar en la función el resultado es cero, pero además, también son donde la gráfica de la función cuadrática corta al eje "x"; Por otro lado el término independiente, o "b", es donde la gráfica corta al eje "y".

Durante la clase, se solicitó a los alumnos que dibujaran un plano cartesiano y posteriormente que dieran 2 números enteros, uno del lado izquierdo y otro del lado derecho del eje "y". Los números fueron: $\boldsymbol{r_1 = -3}$ y $\boldsymbol{r_2 = 2}$**,** se les propuso llamar raíces porque les afirmó el autor que eran raíces o soluciones de la siguiente ecuación.

$$(\boldsymbol{x-2})(\boldsymbol{x+3}) = 0, \text{ y obtuvieron } x^2 + x - 6 = 0$$

Cuando a esta ecuación cuadrática se le agrega la variable "y"; es decir la forma:

$$\boldsymbol{y = x^2 + x - 6}$$

Ahora se le llamo, "***función cuadrática***"

Posteriormente, se le sugirió a los estudiantes elaborar una tabla con la variable independiente eje "x", tomar los valores enteros de "x" desde -4 a 3, (dominio) y el resultado fue el siguiente:

Tabla 3. Tabla de la función cuadrática: $\boldsymbol{y = x^2 + x - 6}$

$\boldsymbol{x}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\boldsymbol{y = x^2 + x - 6}$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

Posterior a la tabla, se desarrolló un gráfica, esto con el fin de que los estudiantes observaran que al evaluar la **función**, en los puntos con los que se generó; $x = -3$ y $x = 2$, identificaran que es donde la función cuadrática corta al eje "x", y además cómo el termino independiente "$b = -6$" corta al eje "y".

Estos puntos, como es obvio, son para nuestra tabla $P_1(-3,0)$, $P_7(2,0)$ en el eje "x" y $P_5(0,-6)$ en el eje "y". Se comentó que por ahora no buscaríamos el vértice por ser asunto de otro tema, lo que interesaba era que observaran cómo la gráfica corta los ejes. Este recordatorio sería fundamental para el siguiente tema de **función polinomial,** pues en este tema veríamos cómo se grafican un polinomio de grado tres y otro de grado cuatro, para lo cual es recomendable tener presente el cómo, al factorizar un polinomio, se encuentran las raíces o puntos donde la gráfica corta al eje x.

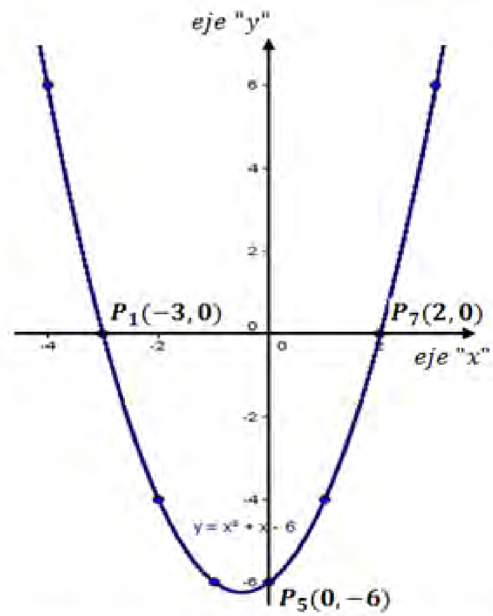


Figura 6. Gráfica da la función $y = x^2 + x - 6$

Con este ejemplo fue posible identificar ciertas expresiones de asombro por parte de los estudiantes, en especial de la forma en la que se generó la ecuación con los números -3 y 2 que ellos sugirieron. En consecuencia se les comentó que uno de los objetivos principales era que un polinomio de grado "n"

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x^1 + a_0$$

Se pudiera factorizar y expresarlo como:

$$P(x) = \boldsymbol{a_n (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)}$$

Por esta razón fue que se inició el tema pidiendo los valores $\boldsymbol{r_1} = -3$ y $\boldsymbol{r_2} = 2$, para formar un polinomio de grado 2.

De esta forma es que se puede retroceder a partir de:

$$\boldsymbol{P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)}$$

Y al operar se encuentra:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_n x^n} + \boldsymbol{a_{n-1} x^{n-1}} + \ldots \boldsymbol{a_1 x^1} + \boldsymbol{a_0}$$

O irnos al revés. Para eso se mostró el punto de donde se parte y al que se pretende llegar.

Por otra parte también mostraron asombro al ver que al evaluar la función en estos puntos daba como resultado cero (0). Es decir, como: $f(x) = x^2 + x - 6$ evaluando en la raíz, $\boldsymbol{r_1} = 2$

$$2^2 + 2 - 6 = 6 - 6 = 0.$$

Uno de los estudiantes comentó que si esa era la razón por la que existía la regla de que el polinomio $x^2 + x - 6$, se pudiera expresar buscando dos números que sumados dieran 1 y multiplicados dieran -6. Efectivamente, comentó el profesor

$-2 + 3 = 1$ Es el coeficiente de la x y

$(-2)(3) = -6$ Es el término independiente.

Esta es la regla y forma rápida de factorizar una ecuación de grado 2 o cuadrática. El pensamiento matemático y las habilidades de razonamiento, incluyendo formular conjeturas y desarrollar sólidos argumentos deductivos, tienen importancia porque sirven de base a nuevas ideas y promueven un estudio posterior. La excelencia en la educación matemática requiere igualdad: grandes expectativas y sólido apoyo para todos los estudiantes" (National Council of teachers of Mathematics , 1989).

Comparación de dos definiciones de función

Durante la sesión se mencionaron a los estudiantes dos de las definiciones de función que al menos dos autores consultados exponen, se identificaron sus convergencias y divergencias y se dio una explicación de lo que cada uno plantea. Posteriormente se abordaron las definiciones que cada equipo encontró, a continuación las vemos:

a) Una $\boldsymbol{función}$ $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$ es un conjunto de parejas ordenadas de $\boldsymbol{AxB}$ con la siguiente propiedad: para cada $\boldsymbol{x \, \varepsilon \, A}$ hay exactamente un $\boldsymbol{y \, \varepsilon \, B}$ tal que la pareja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ está en $\boldsymbol{f}$ (Torres, 1999, pág. 58).

b) Una $\boldsymbol{funci\acute{o}n}$ de un conjunto $\boldsymbol{A}$ en un conjunto $\boldsymbol{B}$ es una relación con dominio $\boldsymbol{A}$ e imagen contenida en $\boldsymbol{B}$ tal que la regla de correspondencia $\boldsymbol{f}$ asocia a cada elemento $\boldsymbol{x}$ del conjunto $\boldsymbol{A}$ un único elemento $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ en $\boldsymbol{B},$ Es decir, al presentar a este tipo de relaciones por una tabla, sin repeticiones en la primera columna, esta tiene exactamente dos columnas (De Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, & Ramírez, 2001, pág. 94).

En esencia ambas definiciones refieren lo mismo, no obstante los estudiantes comentaron lo contrario. En consecuencia se les aclaró que la segunda definición, quizá es más completa, pues hace aclaraciones del dominio e imagen, de lo que carece la primera. Los estudiantes refieren:

> ***Los matemáticos están locos, parece ser que quisieran que ellos (los alumnos) no aprendieran matemáticas pues esconden la esencia de las cosas, las complican demasiado y cada vez tienen „nuevas"cosas que agregar" (Grupo de prueba de Matemáticas IV)***

Por otra parte se identificó que los alumnos solo se enfocan a la definición (la memorizan), no leen la explicación siguiente que cada autor le da a su definición. Por ejemplo en la 1ª el autor aclara que toda *función* es una relación (un conjunto de parejas ordenadas da AxB (el alumno, no sabe a qué se refiere)*,* pero con una propiedad especial: ningún elemento de su dominio se relaciona con más de un elemento de su rango. (Torres, 1999). En este caso no se profundiza sobre los términos *dominio, rango* o *imagen,* mismos que son relevantes por su carácter medular en una función. En este sentido, si un profesor no logra captar estos problemas y aclararlos, se pueden generar confusiones en el estudiante como se señala a continuación:

> Enseñar no es sólo proporcionar información, sino ayudar a entender, y para ello, el docente debe de tener un buen conocimiento de sus alumnos; Es decir, cuáles son sus ideas previas, qué son capaces de aprender en un momento determinado, su estilo de aprendizaje (…) La clase no puede ser ya (…) unidireccional, sino interactiva, donde el manejo de la relación con el

alumno y de los alumnos entre ellos forme parte de la calidad de la docencia misma (Cruz, 2002, pág. 6)

Por experiencia propia el autor puede mencionar que en sus tiempos de asesoría, en el club de matemáticas y en clases particulares, ***"bien se podría tratar este problema y muchos más como un trabajo de tesis"***

El grupo de MADEMS con quien estudie la maestría, estaba formado por 9 alumnos del área de matemáticas y por 2 de historia; la Profesora: ***Asela Carlón***, pregunto a cada uno de los integrantes del grupo **cuál era la definición de ecuación**. Fueron tan diferentes y tan variadas las definiciones que cada alumno dio que la profesora sugirió que analizáramos nosotros, los -**expertos**", qué pensarían los alumnos de nuevo ingreso si nos viera en el debate.

A continuación se enlistan algunos ejemplos de las definiciones de función que los alumnos recabaron:

- Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna exactamente un elemento y de E a cada elemento x de D (Swocowski & Cole, 2002), p. 176.
- Una **función** es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto (llamado el **dominio** de la función) exactamente un valor de otro conjunto. El conjunto de todos los valores asignados se llama el **rango** de la función (Fleming & Varberg, 1991), p. 206.
- 1ª. Una **función** es una colección de pares ordenados con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe de contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.
- 2ª. Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe un b tal que (a, b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función existe, en efecto, un numero b $único$ tal que (a, b) está en f. Este b único se designa por $\boldsymbol{f(a)}$ (Spivak, 1978)**,** *p. 58.*

- Una función es una regla de correspondencia entre la variable o las variables independientes y la variable dependiente. Donde a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente (Briseño & Verdugo, 1997).

En cada una de las definiciones antes mencionadas se les pidió a los alumnos leerlas y comprender su contenido, desde luego en cada una de ellas el profesor fue aclarando a qué se refería cada nuevo vocablo mencionado. La discusión se prolongó durante toda la segunda clase, pero al final casi todos los alumnos afirmaron saber qué es una función, y en sí qué trataba de decir cada autor con su particular estilo (Las siguientes definiciones mencionadas los alumnos las trajeron y algunos ignoraron la fuente) *se integran por ser parte de su trabajo*.

Sobre la definición de Ecuación

- Igualdad que contiene una o más incógnitas ((RALE)).
- Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple solamente para algunos valores de las letras. (http://www.aularagon.org/files/espa/ON_Line/matematicas/Ecuaciones/CMMC2_texto1.htm)
- Igualdad que contiene una o más incógnitas además de uno o más elementos conocidos, las incógnitas se pueden conocer a partir de los elementos conocidos aplicando las operaciones correspondientes.
- Se puede considerar a una ecuación como un caso específico de una función, esto es cuando en un determinado punto o par ordenado de la función se desea conocer el valor de alguna de las incógnitas "x" o "y".

  En matemáticas, una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes y también variables cuya magnitud se haya establecido como resultado de otras operaciones. Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar. Por ejemplo, en la ecuación

$$3x - 1 = 9 + x$$

la variable $\boldsymbol{x}$ representa la incógnita, mientras que el coeficiente 3 y los números 1 y 9 son constantes conocidas. La igualdad planteada por una ecuación será cierta o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen ambos miembros; se puede afirmar entonces que una ecuación es una *igualdad condicional*, en la que solo ciertos valores de las variables la hacen cierta.
(http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n)

CAPITULO IV. RESEÑA HISTORICA, EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Funciones matemáticas

Por los documentos históricos con los que se cuenta, las funciones matemáticas tienen antecedentes de su concepto y aplicación desde hace aproximadamente 1000 años. Es desde entonces que, a pesar de ser una idea vaga y arcaica, en sus vestigios primarios ya se contaba con una idea rudimentaria, pero en sí el concepto de función se entendía como: *La noción de incógnita de una cantidad algebraica desconocida que se puede elevar al cuadrado, al cubo, etc.* (Kline, 1972), (Sestier, 1983).

Pero esta idea se fue trabajando, y fue la que dio lugar a que posteriormente, cuando el álgebra y la geometría se fusionaron, en la Europa medieval se efectuaran los primeros trabajos matemáticos relevantes. Así fue como se encontraron como base los trabajos efectuados sobre el álgebra, la cual ya había sido desarrollada tanto por árabes como por hindúes quienes, entre otras cosas, la utilizaron en la resolución de ecuaciones lineales, cuadráticas, etc. (Kline, 1972), (Cruz, 2002), (Sestier, 1983).

Desde esos tiempos y también hoy en día, al parecer desde que la idea de función se consideró en las matemáticas, se puede decir que el concepto de función es de los más importantes (*sino es que el más*), y también para muchos, sumamente complejo.

Como ejemplo podemos mencionar que muy a pesar de que los matemáticos de los inicios de la matemática moderna (siglo XVI), según los trabajos encontrados y los antecedentes de los problemas que enfrentaban, sospechaban que debía de existir tal concepto. *El de función*, no lograban visualizarlo del todo. En esos tiempos, para mediados del siglo XVI, las necesidades cada vez más crecientes en las aplicaciones científicas en Europa requerían de mejores avances matemáticos en aritmética y algebra, su uso en la tecnología y la aplicación en el trabajo científico y social se consideraba cada vez más necesario y las nuevas prácticas de la sociedad lo requerían, pues se esperaban buenos y mejores resultados.

Ejemplo de ello es la navegación. Las largas y lejanas travesías de exploraciones geográficas, los inventos tales como la pólvora, la brújula y el alambique, además de la extensión cada vez mayor del comercio, el conectar las nuevas teorías astronómicas con las cada vez más precisas observaciones, el desarrollo de la actividad bancaria y comercial, esto, entre otras cosas, requería de una mejor matemática.

La respuesta era necesaria y los matemáticos de la época tales como Pacioli, Tartaglia y Steven, ya contemplaban un inmenso número de problemas de aritmética mercantil. Finalmente las guerras, el trabajo técnico, la fabricación de nuevas y mejores armas mucho más precisas, tales como los cañones en su aplicación al movimiento de proyectiles, necesitaban un nuevo pensamiento cuantitativo. (Kline, El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, 1972), (Sestier, 1983).

Desde entonces y en la actualidad ya se conocen diversas aplicaciones del concepto de función. Un ejemplo muy común es el movimiento de un proyectil. Es posible visualizarlo tabulando y graficando una función cuadrática. Lo que más comúnmente es conocido como tiro parabólico. El uso de las cónicas, tuvo un mayor auge y esto lo vemos en la construcción de puentes, ferrocarriles, barcos, edificios, telescopios, microscopios y todo tipo de instrumentos ópticos, etc.

Por otro lado, cabe destacar que en el año 1500, de nuestra era. Se produce la universalización de los números indo arábigos $1, 2, 3, 4, \ 5, 6, 7, 8, 9,$ y se acepto al cero (0) como un número operador y no tan solo como un numero de referencia. Se dio más libertad a la utilización de los números racionales, Ya se pudieron usar raíces cúbicas y proporcionar el simbolismo de la ciencia moderna.

Para esas fechas ya se sabía del método de completar cuadrados, y que fue usado desde la época de los babilonios. No obstante, para estas fechas el desafío que enfrentaban los matemáticos de la época era el de resolver ecuaciones de grado 3, 4 y más, por medio de una serie de pasos finitos. (Sestier, 1983), (Kline, 1972).

Como una muestra, veamos un ejemplo que robaba la atención de los matemáticos de la época, entre los más famosos Cardano y Tartaglia, quienes estaban empeñados en resolver ecuaciones cada vez más complejas, por lo que decidieron enfocarse en la resolución de ecuaciones particulares de los tipos:

$$x^3 = mx + n, \qquad x^3 + mx + n = 0, \qquad x^3 + n = mx$$

Con el álgebra que se contaba en esos tiempos.

Desde luego ésta era insuficiente para esa clase de problemas. Por ese motivo se ha de tratar a cada uno de dichos casos separadamente y, todos ellos, independientemente de la ecuación $x^3 + mx = n$ ya que, en primer lugar, hasta esta época las ecuaciones que escribían los europeos, sólo contenían términos con números positivos y, en segundo lugar, Cardano tenían que dar una justificación independiente para cada caso. Él sabía cómo resolver ecuaciones de la forma $x^3 + 6x^2 = 100$. Sabia como eliminar el termino x^2: como el coeficiente es 6, sustituye x por $y - 2$ y obtiene $y^3 = 12y + 84$. También observó que una ecuación como $x^6 + 6x^4 = 100$ puede tratarse como una cúbica haciendo $x^2 = y$. A lo largo de su libro él da raíces positivas y negativas, a pesar de llamar <<Ficticios>> a los números negativos. No tenía en cuenta, sin embargo, las raíces complejas. Él las llamaba raíces <<falsas>>, pues contemplaba que no eran ni positivas ni negativas, ni verdaderas ni ficticias (Kline, 1972, pág. 337) .

No sería nada fácil establecer métodos de solución de ecuaciones de grados cada vez mayores, y pensar en otras cosas como su forma de solución. Los matemáticos del inicio de la estructuración y análisis del formalismo de la matemática que hoy en día se conoce deseaban encontrar un método de solución con una serie de pasos finitos con las bases establecidas, las cuales estaban sumamente limitadas. No fue sino hasta la llegada del genio de René Descartes, **(**La Haye, Francia, 1596 - Estocolmo, Suecia, 1650) que se pudo vislumbrar una nueva forma de ampliar y resolver los problemas que se presentaban en esa época (Siglo XVI) (Kline, 1972), (Sestier, 1983).

El término —análisis” fue introducido por Teon de Alejandría, quien lo definió como un proceso que comienza con la presunción de lo que se busca y llega por deducción a una verdad conocida. Esta es la razón por la cual Vieta llamó al álgebra <<arte analítico>>, pues llevaba a cabo el proceso de análisis, en problemas geométricos. Este fue el motivo de inspiración en el pensamiento de Descartes sobre la geometría analítica, pues su trabajo en la teoría de ecuaciones estuvo motivado por el deseo de emplearlas mejor en la solución de problemas geométricos.

Fermat y Descartes, los dos principales responsables de la gran creación matemática moderna, estaban interesados, tanto como muchos hombres de su época, en hallar métodos generales para el estudio de curvas. Es la razón por la que crearon lo que actualmente se conoce como *Geometría Analítica* o de Coordenadas, y su idea central fue asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies. Es decir, mostrar el propósito fundamental de la geometría analítica; ¿*Qué es un lugar geométrico*?, ¿Qué se entiende por —*La ecuación de un lugar geométrico*?, cómo representar las diferentes formas de curva plana y la ecuación algebraica en dos variables. La geometría analítica muestra un método para estudiar los objetos geométricos por medio del álgebra, y la ecuación de la recta da la entrada a curvas más complejas tales como la circunferencia, la parábola y en sí, todas las curvas cónicas (Torres, 1999), (Kline, 1972).

Este trabajo de investigación, aborda los conceptos de ecuación y función, por lo cual amerita aclarar sus divergencias y convergencias, de tal manera que sea posible que el docente explique y aclare a los estudiantes cuál es cuál y el por qué. En consecuencia prevenir que los estudiantes caigan en falsos conceptos que los lleven a formarse juicios equivocados. Esta clase de situaciones no hace más que inducirlos a pensar, como con frecuencia se escucha, que la matemática es una ciencia —inaccesible” o —árida”: “***No se hizo para todos***”.

Desde luego que, para el profesor que enfrenta a jóvenes y adultos prejuiciados. Como docente, enfrentar a alumnos con estas ideas influidos desde su casa y luego por la sociedad donde habitan, es una tarea difícil y resulta muy árido romper con estas ideas.

Es cierto que a los estudiantes les resulta difícil entender el concepto de *función,* y más aún su estrecha relación con el de *ecuación* -pero todavía más, la fusión entre ambas-. Hoy en día, aun para los “expertos”, es difícil saber explicar con detalle a los alumnos de bachillerato y estudios anteriores “qué es una ecuación” y “qué es una función”. Cuándo y bajo qué condiciones se fusionan para hallar un resultado específico. Se opera de función a ecuación en forma indiscriminada sin aclaración y solo se logra confundir al alumno, el cual se pregunta, ¿***Cuándo es cuál y en qué momento regresó a ser la que era***?

Función o Ecuación

Como una muestra: En el libro de (Swocowski & Cole, 2002), p. 265, vemos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3 **Trazo de la gráfica de una función polinomial de grado 3**

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$. Halla todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, y toda x tal que $f(x) < 0$ y traza la gráfica de f.

SOLUCIÓN Podemos factorizar $f(x)$ de esta forma:.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 && \text{dado} \\
&= (x^3 + x^2) + (-4x - 4) && \text{agrupar términos} \\
&= x^2(x+1) - 4(x+1) && \text{factorizar } x^2 \text{ y } -4 \\
&= (x^2 - 4)(x+1) && \text{factorizar } (x+1) \\
&= (x+2)(x-2)(x+1) && \text{diferencia de cuadrados}
\end{aligned}
$$

A partir de la última ecuación vemos que los ceros de $f(x)$ (las intersecciones en x de la gráfica) son -2, -1 y 2. Los puntos correspondientes de la gráfica (Fig. 7) dividen el eje x en cuatro partes y consideramos los intervalos abiertos

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, \infty)$$

Dice: graficar la siguiente función polinomial, y sin preámbulo alguno factoriza y aplica los pasos que vemos. Luego comenta: “A partir de la última ecuación vemos que los ceros de $f(x)$" (la función). Entonces; ¿***Cuándo es función y cuándo ecuación***?

Un profesor por sus conocimientos y años de experiencia, sabe distinguir qué es una y que es la otra, y cuándo, pero un alumno (o aprendiz) no. Por tal motivo, como docente comprometido, hay que ser especifico y comentar cómo de una función, al tratar de buscar uno o varios resultados específicos, tales como encontrar los puntos donde se interseca la gráfica de la función en el eje "x" del plano cartesiano, la expresamos como una ecuación omitiendo $f(x)$ e igualando la expresión a cero.

Cabe aclarar que una ecuación se entiende como:

Definición de Ecuación y Función

Es una expresión que contiene valores conocidos y una o más incógnitas (o valores desconocidos) en la cual, por medio de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada o cúbica, logaritmo, exponencial etc. se puede encontrar el valor de esa(s) incógnita(s) que, al sustituir en la ecuación original, debe(n) de cumplir con ella, o ser solución. O quizá no, si no es compatible, es decir si no tiene solución (Profesores del área de matemáticas, CCH Azcapotzalco).

Por otra parte, una función es —Una expresión que contiene 2 variables donde los valores de la segunda dependen de los que tome la primera (Profesores del área de matemáticas, CCH Azcapotzalco).

Lo que lleva a pensar, que los libros están hechos, tan solo para los que ya saben matemáticas a un nivel superior o, aún peor, —Para los más inteligentes" dejando de lado a la gran mayoría de la población.

A continuación se detalla quiénes integran el grupo de estudio. Posteriormente en las prácticas se da una posible solución a estos problemas que se mencionan entre ecuación y función.

GRUPO DE ESTUDIO

El estudio se realizó en el periodo 2011-2012 (semestre par), a un grupo de 49 estudiantes recursadores de la asignatura de Matemáticas IV, del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Azcapotzalco.

Como una forma de exploración de la población del grupo de prueba, se realizó una encuesta a los participantes. Sus resultados se muestran a continuación.

Se identificó que el 80% cursaban por segunda ocasión la asignatura, el 10% por tercera ocasión y el otro 10% por cuarta ocasión. El grupo de prueba está compuesto por 49 alumnos en lista, de los cuales la mayoría viven en el Estado de México, son de sexo masculino y tienen entre 18 y 19 años, como lo muestran los siguientes gráficos;

Lugar donde habitan	
44%	D.F.
56%	Edo. Mexico
1	

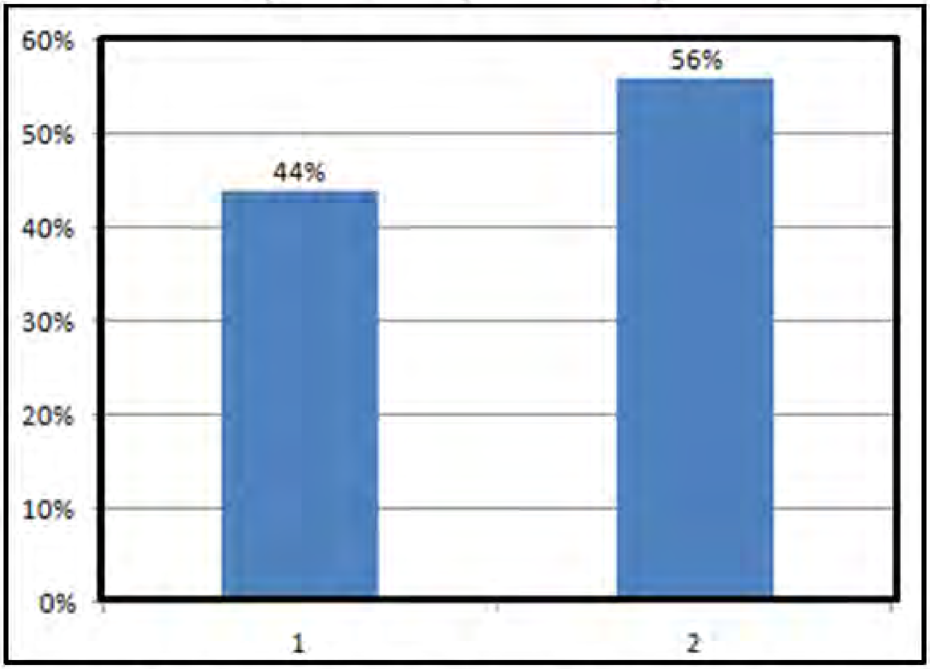


Figura 1. Encuesta de exploración, lugar donde viven los participantes

Sexo	
69%	Hombres
31%	Mujeres
100%	

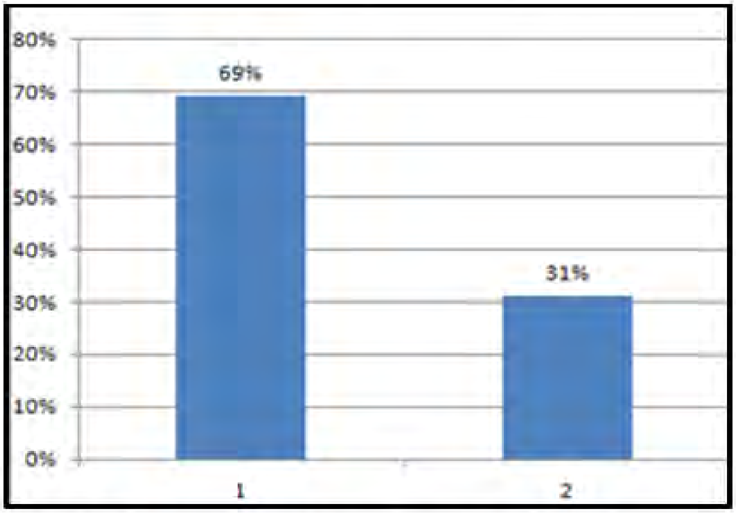


Figura 2. Encuesta de exploración, sexo de los alumnos participantes

Edades	
32%	18 años
22%	17 años
28%	19 años
6%	21 años
6%	22 años
6%	23 años
100%	

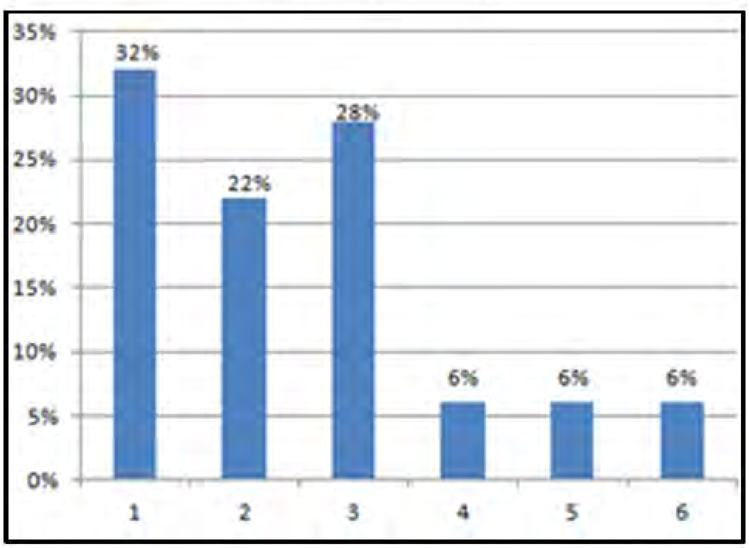


Figura 3. Encuesta de exploración, edad de los estudiantes participantes

Las razones expresadas por los participantes para el abandono de la asignatura son diversas, entre las más relevantes figuran:

- Por no entender los temas antes mencionados de Matemáticas IV, o por un historial de asignaturas no acreditadas que anteceden a Matemáticas IV, tales como Matemáticas I, II y III.
- La mayoría abandonó el curso en la tercera o cuarta semana, esto es cuando se cubría el Tema I —La Función Polinomial”, lo cual refieren como motivo de su reprobación.
- Los alumnos indican que no le entienden al maestro, no saben de qué habla, captan algunas cosas y otras a medias; eso les causa frustración, lo cual consideran también otro motivo para abandonar el curso.

Algunos estudiantes, que son considerados —malos alumnos” en determinadas asignaturas, podrían haberlas asimilado y superado si se les hubiese llevado por otro camino en su aprendizaje. Lo relevante como docente es no perder el contacto visual y la comunicación con sus discípulos. El profesor al percibir a algún(os) alumno(s), que no cuenta(n) con conocimientos necesarios, no asimila(n) con la misma rapidez que sus compañeros o sea la razón que fuese, para sanear estas deficiencias, de ser necesario, debe ocupar un tiempo extra, ya sea fuera o dentro del salón de clase y no permitir que el(los) estudiante(s) caiga(n) en frustración y/o deserción (Palacios, 2006).

La intención del presente trabajo fue crear condiciones para sanear estas deficiencias en el tema I del programa oficial de Matemáticas IV del CCH, **Función Polinomial**, dados los antecedentes antes mencionados en la entrevista al grupo de prueba. A lo largo de la tesis se hace mención de la importancia para el docente de que, al percatarse de las deficiencias de sus estudiantes y en apoyo a lo que este trabajo integra, como menciona Ausubel: *“Pregunta a tus alumnos qué es lo que saben y parte de allí”.*

Para que el grupo de prueba contara con los conocimientos suficientes y necesarios para su mejor entendimiento se inició con un repaso de lo previo con lo que debe de contar el alumno. Posteriormente se abordó el tema II, **Función**

racional, a partir del *“**Aprendizaje por descubrimiento**”*. Una vez que se atendió dicha temática se trabajó con los siguientes temas, El III, ***Función Exponencial y logarítmica***, así como el tema IV, ***Función Trigonométrica,*** estos últimos desde una perspectiva de ~~“~~***aprendizaje por recepción”***.

La organización de los temas y la elección del paradigma con el que se abordaría, como ya se hizo mención en el Marco Teórico, se debieron a la intención de evitar que el aprendizaje se quedara en un nivel memorístico, así como integrar en un todo las expectativas y filosofía del CCH: que el alumno aprenda a aprender, posteriormente, a hacer y eso lo hará ser. Si el alumno logra entender y no solo memorizar, podrá pasar a la siguiente fase que es la reflexión y el análisis (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010).

Como parte de la ruta crítica, se sugirió al grupo de estudiantes visitar la biblioteca del plantel y, por equipo de tres integrantes, buscar las definiciones de función y ecuación, para luego explicar lo comprendido de cada concepto en el salón de clase.

CAPÍTULO V. METODOLOGÍA

La organización de esta tesis estuvo enmarcada o guiada por las recomendaciones de (Hernández, Fernández & Pilar 1997) y Álvarez_Gayou, (2010):

1. Si un número es menor de 10 se escribe con letra.
2. Las gráficas y tablas fueron realizados en Excel y por el software Geogebra.
3. ~~"~~*Geogebra es un software dinámico de código abierto para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ofrece un entorno donde el álgebra y la geometría se conectan de forma plena*"

Ruta metodológica

La intención de este estudio se centró en comparar qué método de enseñanza daba mejores resultados en el aprendizaje de los alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Azcapotzalco, al estudiar cuatro de los temas que se imparten en el curso de Matemáticas IV en el cuarto semestre:

1. Función polinomial
2. Función racional
3. Función exponencial y logarítmica
4. Funciones trigonométricas

Los temas 1, 3 y 4 se abordaron de forma *tradicional*, a lo que se entenderá como *Aprendizaje por recepción* (basado en la enseñanza explicativa) es decir, el profesor será el conferencista, y los alumnos solo receptores.

El comparativo es que el tema 2, *Función racional*, se impartió aplicando la metodología por *recepción-descubrimiento,* en el cual, a los alumnos se les proporcionaron cinco prácticas elaboradas por el docente, con la intención que al trabajarlas por equipos de 3 alumnos, ellos mismos descubrieran y aprendieran el contenido de este tema.

Desde luego, como ya se mencionó, esto con la inspección y guía del profesor, cuidando que el objetivo se cumpla y no se desvirtúe, que cada alumno logre relacionar este tema con sus conocimientos previos. Se tomaron como apoyo las cinco prácticas que adelante se contemplan, dos de ellas incluidas en el cuerpo de esta tesis y las otras tres en el anexo I.

Hubo momentos para los temas impartidos en forma tradicional, en que cada integrante del grupo resolvió sus propios ejercicios, es decir, cada alumno por sí solo. Pero también se trabajó en la resolución por equipo. Aun así, como ya se mencionó previamente, algunos autores recomiendan que al impartir cada clase el profesor no deje de observar el trabajo de los jóvenes y basado en eso. Hacer preguntas y observaciones con sentido e intencionadas para todos –inducir a que el grupo esté activo y no tan solo sean meros receptores—y por otro lado, atender a cada alumno acorde a sus propias necesidades. (Polya, 2010).

Diseño del ambiente de aprendizaje

Se espera que los estudiantes del CCH donde se llevó a cabo este trabajo cuenten con los antecedentes necesarios y suficientes, dominen temas tales como F*unción en forma general,* ya que desde la educación básica (Secundaria) es donde, de acuerdo al plan de estudios de la Secretaría de Educación Pública (SEP), se inician y atienden temáticas como *función lineal* y *función cuadrática.*
Posteriormente en bachillerato, y específicamente en el CCH, durante el primer semestre en el TEMA II, los alumnos retoman el tema de *Función lineal o Variación directamente proporcional* y, en segundo semestre, el TEMA I es *La función cuadrática*.

A partir de la experiencia del autor, al cuestionar al grupo de prueba sobre sus conocimientos respecto a dichos temas, los estudiantes manifestaron diversos comentarios, conceptos confusos, una idea vaga o su total desconocimiento.
Con este antecedente, se pretendió atender dichas deficiencias, entre otras aclarar la diferencia que hay entre *función* y *ecuación*. Además de las bases aritméticas y algebraicas, la tabulación y graficación de puntos en el plano cartesiano, y los temas de geometría analítica que señala el plan de estudios del Colegio. Todos estos materiales son indispensables y el alumno debe de contar con el conocimiento de ellos con el fin último de facilitar un aprendizaje significativo, en el que los contenidos de un nuevo conocimiento, se puedan ligar y relacionar con los previos (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010).

Por otra parte, se plantearon preguntas intencionadas, esto es, cuestionamientos que dirijan las respuestas y soluciones por parte del propio estudiante y de esta forma se conduzca al entendimiento, al análisis y a la reflexión del material que estudia (Polya, 2010). En otras palabras: –Ayudar a sus alumnos a formular conjeturas partiendo de evidencias" (National Council of teachers of Mathematics , 1989, pág. 3).

Es así como el objetivo radicó en traer al momento esos conocimientos pasados guardados, ya que a partir de la experiencia, se ha identificado que los estudiantes tienden a *aprender* en vísperas de una prueba. De esta forma, la escuela tradicional olvida que su fin es la formación de los alumnos en el método de trabajo y no en el triunfo de una prueba final, que se basa únicamente en una acumulación momentánea de conocimientos (Palacios, 2006).

Para este tipo de actividades se utilizaron recursos como: calculadora, lápiz o pluma, cuaderno de cuadricula y juego de geometría.

En la primera sesión de clase con este grupo, como primer paso, el autor hizo remembranzas de ejemplos que contienen funciones lineales y cuadráticas, éstas se encuentran con mucha frecuencia en situaciones de la vida cotidiana. Como ya se mencionó, a su ver, el primer contacto que se tiene de funciones son las tablas matemáticas.

PRACTICA 1:

MATEMATICAS IV

UNIDAD 2

Funciones Racionales

De acuerdo con el aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionándolos con los anteriormente ya adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido.

La nueva información al ser relacionada con la anterior, y a la vez ya entendida, es guardada en la memoria a largo plazo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno. Es decir, es un proceso personal, ya que la significación de aprendizaje, depende de los intereses y recursos cognitivos que tenga el estudiante (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010).

Preparación para el tema de Función Racional (Conocimientos previos)

Con este antecedente, al abordar la asignatura de Matemáticas IV, la intención fue preparar al alumno y aportarle los elementos que le fueran útiles respecto al tema de *Función Racional*. Parte de lo que el alumno sabe y continúa para hacer de su conocimiento un conocimiento significativo (Ausubel, Novak, & Hanesian, 2010).

Por tal motivo, el tema de *función Polinomial,* se inició recordándole el algoritmo de la división aritmética, que es muy similar al de la división Polinomial larga, e induciéndolo a los puntos importantes tales como:

1. La multiplicación es la operación inversa de la división y viceversa.

$$\mathrm{P(x)} \quad = \mathrm{Q(x)} \quad \cdot \quad \mathrm{C(x)} \quad + \quad \mathrm{R(x)}$$

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \cdot \text{Cociente} + \text{Residuo}$$

2. Si el residuo toma un valor de cero, entonces $\mathrm{P(x)} = \mathrm{Q(x)} \cdot \mathrm{C(x)}$

Teorema del Factor

3. Aprovechar lo que los alumnos ya saben, por ejemplo:

   Estarán de acuerdo que

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

   Y que $\frac{60}{3} = 20$, *pues tenemos que* $4 \cdot 5 = 20$

   y $\frac{60}{4} = 15$ *ya que* $3 \cdot 5 = 15$ y además

   $\frac{60}{5} = 12$ Pues $3 \cdot 4 = 12$

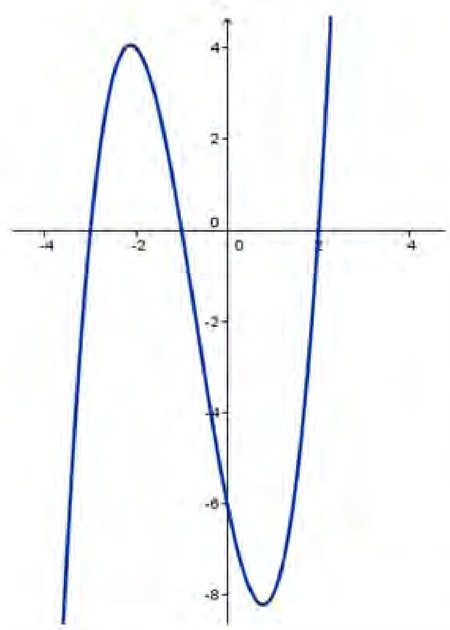
De esto, el alumno no tiene la menor duda, entonces hay que mostrarle que:

$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x+1} = x^2 + x - 6$ y este último se puede escribir como $(x+3)(x-2)$

Entonces, el polinomio $\mathrm{P(x)}$ lo podemos expresar como:

$P(x) = (x+1)(x+3)(x-2)$ *y su gráfica*

Fig. 1



$\boldsymbol{P(x) = (x+1)(x+3)(x-2)}$ ***y su gráfica***

Posteriormente se escribió como se hizo previamente, recomendando a los estudiantes que lo elaboraran de tarea:

4. Los ceros de un Polinomio P(x), son aquellos números "r_i" tales que $P(r_i) = 0$, esto es; si evaluamos el polinomio en r_i (Solución o raíz del polinomio) tendremos los puntos en el plano cartesiano, $A(r_i,\ 0)$ es decir los puntos donde la gráfica del polinomio corta el eje "x".
5. Definición del concepto de función, Dominio y Rango.

Las siguientes 5 prácticas, fueron las que se aplicaron en el desarrollo de este trabajo. A continuación se muestran las dos primeras prácticas y se hace mención de los principales hallazgos, mientras que en el ANEXO 2 se incluyen las tres restantes prácticas. Los tiempos que se mencionan son los que en promedio se llevaron los equipos en elaborar cada tarea, a algunos equipos les tomo más tiempo y a otros menos. Dependiendo del tiempo que demandaba cada temática, se posponía para tarea fuera del salón y para futuras sesiones cuando quedaba inconclusa.

EL PLAN DE CLASE

Sesión 1 lunes 13/02/12

<table>
<tr><td colspan="2">Tema a tratar: Aplicación y deducción de la Función Racional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo del tema: El alumno deducirá a partir de un problema, una expresión matemática que es una Función Racional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo del Subtema: Cada alumno con su equipo elaborará una tabla y una gráfica con la función racional encontrada en el problema mencionado y analizara el contenido de la gráfica</td></tr>
<tr><td>Aprendizajes a lograr
Que el alumno aprenda a traducir un problema en un gráfico, y en una expresión matemática y,</td><td>Conocimientos previos: Plano cartesiano, tabular y graficar, álgebra y despejes.</td></tr>
</table>

posteriormente, a analizar los datos graficados.	

Inicio del tema tiempo: 20 a 25 minutos

Ej. 1.- Unos ejidatarios desean construir un balneario en un terreno que tienen a la orilla de un rio, la Secretaría a cargo, les sugiere que el terreno debe de ser rectangular y como mínimo tener un área de 6000 m^2. Por falta de recursos pretenden enrejarlo al menor costo posible, quedando sin reja el lado hacia el rio. a) Haga un esbozo del dibujo del problema b) Deduzca una expresión matemática con este problema c) Tabule y grafique

1. Discusión en equipo Los alumnos analizarán y discutirán el contenido del problema, harán un esbozo del dibujo y deducirán la formula a tabular y graficar	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: Papel, lápiz y calculadora Recomendaciones: Hacer un dibujo y analizar el contenido del problema y deducir qué es lo que se busca

El problema indica que es un rectángulo y hay que cercar tres lados. Ver fig. 1

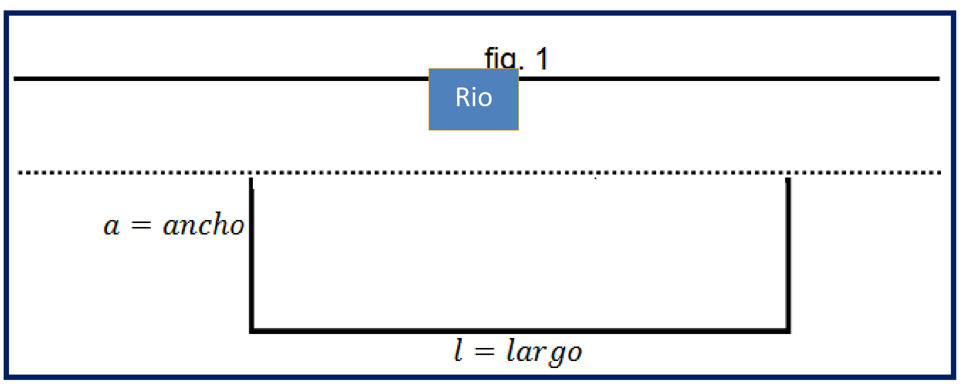


fig. 1

Dado que es el área de un rectángulo lo que se pretende cercar, representaremos como $a = ancho$ y $l = largo$, y lo que pretendemos es *optimizar* el perímetro para un menor costo del enrejado.

Una vez que cada equipo tuvo el esbozo del dibujo, ¿Cuál será la fórmula del Perímetro a calcular?

$$\underline{P = 2a + l} \qquad (1)$$

La intención es expresar el perímetro P como una función de una sola variable. Sea pues el $largo(l)$, se sabe que el Área de un rectángulo es $\underline{largo}$ por $\underline{ancho}$, en nuestras variables queda como

$$\underline{A = l \cdot a} \qquad (2)$$

Sustituyendo el área pedida

$$6000 = l \cdot a$$

Expresado en términos de a: $a = \frac{6000}{l}$

Y sustituyendo en (1) la función $P(l)$ queda como:

$$P(l) = 2\left(\frac{6000}{l}\right) + l$$

$$P(l) = \frac{l^2 + 12000}{l} \qquad (3)$$

Consenso grupal tiempo 15 minutos

Análisis por parte del profesor y el grupo: inducirlos a lo que se busca, averiguar si cada equipo entendió y encontró lo que se espera.

La fórmula (3) se dedujo por parte de cada equipo, algunos no llegaron del todo a ella, pero en el consenso todos los equipos estuvieron de acuerdo.

2. Acuerdo con el grupo Se tabulará para la función (3). Como es un área, se toman valores positivos en un rango digamos de 10 a 200 en intervalos 10 en 10, (Cuestionarle al grupo de dónde a dónde creen conveniente el rango) para determinar cuál sería el perímetro menor requerido para bordear el área.	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: Marcadores y pizarrón blanco Recomendaciones: Hacer un dibujo del problema, expresarlo como un concepto matemático y encontrar la función pedida en el problema

Desarrollo del tema tiempo 10/15 minutos

3. Primer acuerdo Una vez encontrada la expresión $P(l) = \frac{l^2+12000}{l}$, tabular y graficar de 0 a 200 de 10 en 10, El profesor cuestiona por qué en este rango [0, 200] Al hacer esta pregunta hubo varias respuestas, la más acertada fue: -Por el número de metros con los que se cuenta para hacer la reja”	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: Lápiz, goma, cuaderno y calculadora Recomendaciones: Hacer una tabla y graficar los datos

Tabla 4. Tabla que resume el resultado de la función: $P(l) = \frac{l^2+12000}{l}$

N°	l	$P(l)$	$P(x, y)$
1	10	1210	P1(10, 1210)
2	20	620	P2(20, 620)
3	30	430	P3(30, 430)
4	40	340	P4(40, 340)
5	50	290	P5(50, 290)
6	60	260	P6(60, 260)
7	70	241	P7(70, 241)
8	80	230	P8(80, 230)
9	90	223	P9(90, 223)
10	100	220	P10(100, 220)
11	**110**	**219**	**P11(110, 219.8)**
12	120	220	P12(120, 220)
13	130	222	P13(130, 222)
14	140	226	P14(140, 226)
15	150	230	P15(150, 230)
16	160	235	P16(160, 235)
17	170	241	P17(170, 241)
18	180	247	P18(180, 247)
19	190	253	P19(190, 253)
20	200	260	P20(200, 260)

Consenso grupal 2 tiempo 15 minutos

4. Segundo acuerdo El profesor junto con el grupo, apoyado con Excel y Geogebra, pidió le dictaran los puntos encontrados. Una vez graficados escribió la formula y comprobó que todos los puntos graficados pertenecen a ella.	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: LapTop, cañón y pizarrón blanco Recomendaciones: graficar cada punto y al final dar la función encontrada.

Se trazó cada uno de los puntos encontrados y después se mostro cómo cada uno de ellos pertenecía a la curva mostrada abajo.

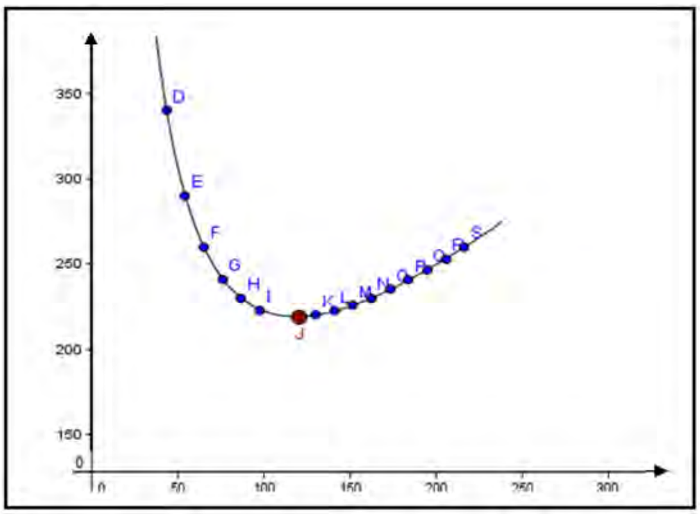


Figura 3. Gráfica de la función: $P(l) = \frac{l^2+12000}{l}$

1ª Fase de cierre tiempo 15 minutos

5. Primera conclusión Una vez terminados de graficar los puntos y corroborar que pertenecen a la gráfica, viene el análisis del comportamiento de la función: dónde tuvo su máximo valor, su mínimo valor,	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: LapTop, cañón y pizarrón blanco Recomendaciones: Al analizar la gráfica el profesor debe de inducir a encontrar el punto donde se optimiza el

dónde creció y dónde decreció, ¿Qué hay con el valor mínimo de la función	material

Nota: En el cuestionamiento de hasta dónde y por qué graficar hasta allí: Los comentarios de algunos equipos fueron: ―Es que en ese punto se encontró el vértice", y aunque no es una parábola como tal, dedujeron que allí se encontraba el punto donde se usaría menos material.

El grupo ya había graficado y se concretó a comentar que el punto óptimo era $P_{11}(110,\ 219)$, pues en el punto P_{10}, que le antecede, el valor de la función es mayor, y en el punto P12 también, por lo cual dedujeron que allí estaba el vértice.

2ª Fase de cierre tiempo 15 minutos

6. Conclusión final, Propósito: El profesor, con preguntas, sugerencias y cuestionamientos, indujo al grupo al cierre del problema, verificando y comprobando por qué el punto mínimo encontrado en la gráfica es el buscado, que nos da el mínimo material para enrejar el rectángulo.	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: pizarrón blanco y marcadores Recomendaciones: Al cierre, el profesor debe de comprobar y corroborar lo encontrado en las ecuaciones y verificar sus resultados.

Análisis de la gráfica en la función encontrada

Cabe resaltar que en Matemáticas 2, al graficar una función cuadrática el vértice puede ser el punto más alto o el punto más bajo, según el caso, esto nos dice que hay un punto máximo o un punto mínimo, respectivamente. En la tabla y gráfica ya fue localizado.

¿Qué se nota al evaluar con los primeros valores? ¿Sube o baja el valor encontrado al evaluar en la función? Que la gráfica baja

¿En qué punto alcanzó un máximo o un mínimo? De acuerdo con la tabla en el punto P_{11} (110, 219)

¿Por qué lo notaste? Porque los puntos $\boldsymbol{P_{10}}$ y $\boldsymbol{P_{12}}$ que están antes y después respectivamente tiene un $P(l)$ igual es decir $\boldsymbol{P_{10}}$ **(110, 220) y** $\boldsymbol{P_{12}}$ **(110, 220).** Alli es donde la función $P(l)$ se optimiza y es el mínimo valor para alcanzar el máximo.

Entonces en la tabla de valores el punto, $\boldsymbol{P_{11}}(110\,,219)$ (remarcado en tu tabla) es donde el valor de $P(l)$ alcanza un valor mínimo, esto es, cuando l, o sea el largo, es de 110 m se estará encontrando el valor óptimo.

Para comprobar, se sustituye $l = \ 110$ m en la relación del área $6000 = \ l \cdot a$

$6000 = 110 \cdot a$ => y se despeja para encontrar el valor del ancho. Se tiene

$$a = \frac{6000}{110} \approx 54.54$$

Por tanto, el balneario tendrá un $\underline{largo = 110\, mts}$ y un $\underline{ancho\ de\ 54.54\, mts}$

Entonces el perímetro mínimo para cercar el balneario será de:

$$P = 110 \ + 2(54.54) = 219.80 \text{ Metros lineales.}$$

Como comprobación final del Área.

$$A = (110)(54.54) = 5999.4 \text{ m}^2$$

Cabe señalar que cuando se cuestionó a los equipos, ninguno notó que los 219.80 metros encontrados en el perímetro, coincidían con la segunda coordenada del punto $\underline{\boldsymbol{P_{11}}}$. En consecuencia se explicó que ese era el objetivo de la función.

Uno de los equipos comentó qué pasaría si se hubiera despejado la otra variable, es decir $l = \frac{6000}{a}$.

Al profesor le pareció interesante la pregunta y se procedió a trabajar con ella.

Se encontró con:

$$P(a) = \frac{2a^2 + 6000}{a}$$

En los puntos $P_5(50,\ 220)$ y $P_6(60,\ 220)$ la curva bajaba hasta ellos y luego subia.

Con los antecedentes ya vistos anteriormente el grupo dedujo que:

Sustituyendo $\underline{a = \ 50}$ mts. En la relación del área $\underline{6000 = \ l \cdot a}$

$$l = \frac{6000}{50} = 120$$

Por tanto el balneario tendrá un $\underline{largo = 120\ mts}$ y un $\underline{ancho\ de\ 50\ mts}$

Entonces el perímetro mínimo para cercar el balneario será de:

$P = 120\ + 2(50) = 220$ Metros lineales.

Como comprobación final del área.

$A = (120)(50) = 6000$ m^2

Como era de esperarse, el grupo comentó que la segunda coordenada del punto 5 correspondía a los 220 metros que da la reja del perímetro. En el punto $P_6(60, 220)$ la conclusión fue similar con sus respectivas variantes, no sin antes comentar que, como se trata de optimizar, era mejor escoger el largo.

Volviendo a las funciones encontradas:

$$P(l) = \frac{l^2+12000}{l} \qquad P(a) = \frac{2a^2+6000}{a}$$

En ambos casos el numerador es un polinomio de grado *dos* y el denominador es de grado *uno.* Es así como se encontró una función que es el cociente de dos polinomios. A este tipo de funciones se les conoce como *Función Racional.*

3ª Fase de cierre y fin tiempo 30 minutos

8. Conclusión final Cierre por parte del profesor Propósito: El profesor, con preguntas, sugerencias y cuestionamientos, inducirá al grupo a analizar qué es y cómo está formada la función	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: pizarrón blanco y marcadores Recomendaciones: Al cierre el profesor debe de comprobar y corroborar lo encontrado en las ecuaciones y

encontrada, con el fin de justificar qué es una función racional y qué la conforma	verificar sus resultados.

Definición. Función Racional:

Si tenemos dos funciones polinomiales P(x) y Q(x), donde $Q(x) \neq 0$ y efectuamos un cociente de ellas, tal que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + a_0}$$

Este cociente es lo que conocemos como: Función Racional.

Para abordar y entender de mejor manera, este tema, es recomendable contar con el antecedente de conocer conceptos referentes a *Función Polinomial* (raíces, factores, intersecciones con los ejes ―x" y ―y" etc.). Es así como amerita hacer una pausa y retomar el tema de *Funciones Racionales*.

- *Función:* Es la regla de correspondencia que asocia a cada elemento del *Dominio* (Eje x, variable independiente) un único elemento del *Contra-dominio ó Rango* (Eje y, Variable independiente).
- *Dominio*: Es el conjunto de todos los números que están definidos en la función para el eje ―x" que es la Variable dependiente.
- *Contra-dominio*: Es el conjunto de todos los números que están definidos en la función para el eje ―y" que es la Variable dependiente. (Smith, Charles, Dossey, Keedy, & Bittinger, 1998)

Tarea: Como cierre y tarea, el equipo elaborará el reporte en limpio, sin el formato dado y remarcará los puntos importantes mencionados, además de una bitácora que contenga las actividades principales de la sesión 1. Se les solicitó llevar a la siguiente clase papel milimétrico.

PRÁCTICA 2

EL PLAN DE CLASE

Sesión 1 miércoles 15/02/12

Tema a tratar: Gráfica de la Función Racional $f(x) = \frac{1}{x}$	
Objetivo del tema: Graficar y analizar en equipo una Función Racional	
Objetivo del Subtema: Graficará la función racional y analizará su comportamiento con números infinitamente pequeños e infinitamente grandes, deducirá conceptos tales como: infinito, asíntota y simetría.	
Aprendizajes a lograr: Que el alumno al graficar deduzca, basado en el comportamiento de la función racional, las definiciones mencionadas.	Conocimientos previos: Plano cartesiano, tabular y graficar, y simetría

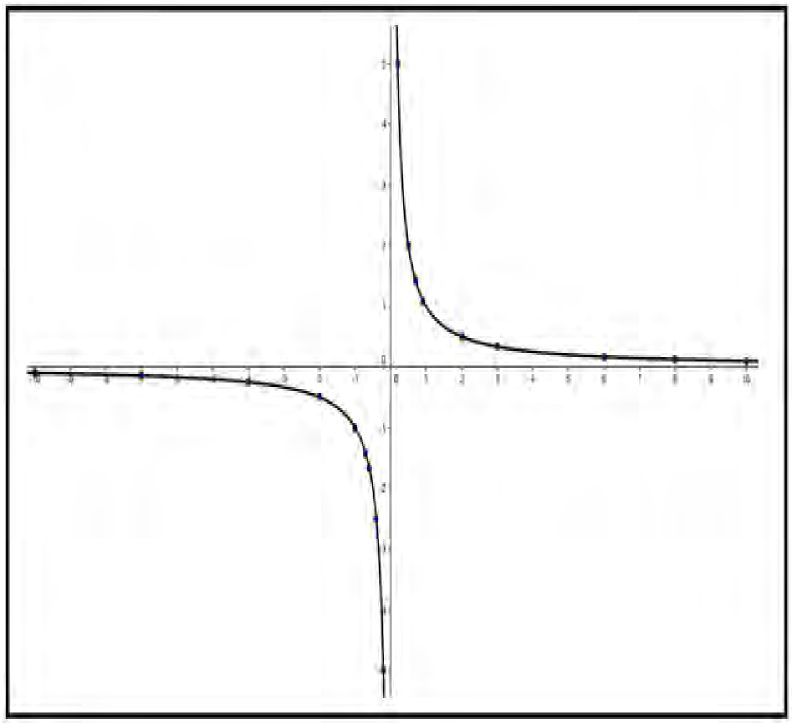
Inicio del tema tiempo 20 minutos

Ejercicio 2.- $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{funcion\ Pol.\ de\ grado\ cero}{funcion\ Pol.\ de\ grado\ uno}$ Tabular de -10 a 10 de 1 en 1.	
1. Trabajo en equipo Los alumnos harán los cálculos tabularán en sus prácticas y graficarán, en papel milimétrico.	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: Papel milimétrico, lápiz y calculadora Recomendaciones: Hacer una tabla y graficar, observar el comportamiento de la gráfica, ¿Qué pasa con valores muy pequeños o muy grandes, positivos y negativos.

Tabla y gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo mencionado: -10 a 10.

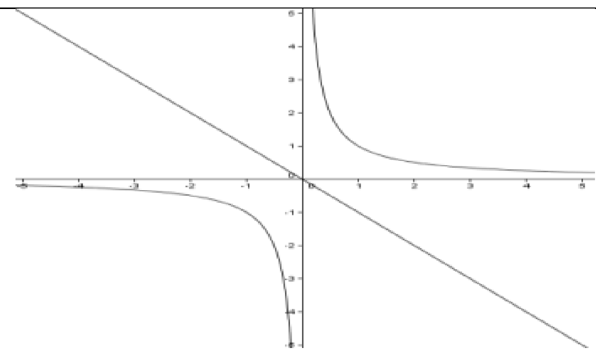
x	f(x) = 1/x
-10	-0.1
-9	-0.11
-8	-0.13
-7	-0.14
-6	-0.17
-5	-0.20
-4	-0.25
-3	-0.33
-2	-0.50
-1	-1.00
0	#¡DIV/0!
1	1.00
2	0.50
3	0.33
4	0.25
5	0.20
6	0.17
7	0.14
8	0.13
9	0.11
10	0. 0

fig. 4



En la hoja milimétrica trazar una recta que cruce por los puntos $A(-1,1)$ y $B(1,-1)$, doblar la hoja sobre esa recta y verificar que la gráfica es *simétrica*.

El equipo debe de dar una definición de simetría.



Consenso en equipo

tiempo 15 minutos

2. Discusión con equipo

Análisis entre el equipo, ¿Cómo se comporta la gráfica?, ¿Creen que con valores mucho muy pequeños o mucho

Técnica: Verbal y simbólica

Materiales: Papel milimétrico, lápiz y calculadora

Recomendaciones: Graficar con las

muy grandes el signo de $f(x)$ cambie? ¿si no, por qué?.	siguientes tablas y analizar qué pasa

Tabla 5. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ De (0.01 a 0.0000001)

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
0.01	100
0.001	1,000
0.0001	10,000
0.00001	100,000
0.000001	1,000,000
0.0000001	10,000,000

Tabla 6. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ De (100 a 10, 000,000)

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
100	0.01
1,000	0.001
10,000	0.0001
100,000	0.00001
1,000,000	0.000001
10,000,000	0.0000001

Las Tablas 2 y 3, son para la gráfica que cae dentro del cuadrante I. Toca al equipo proponer, con los mismos valores de las tablas, qué signos tendrán en el cuadrante 3.

Tabla 7. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ De (-0.01 a -0.0000001)

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-0.01	-100
-0.001	-1,000
-0.0001	-10,000
-0.00001	-100,000
-0.000001	-1,000,000
-0.0000001	-10,000,000

Tabla 8. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ De (-100 a -10, 000,000)

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-100	-0.01
-1,000	-0.001
-10,000	-0.0001
-100,000	-0.00001
-1,000,000	-0.000001
-10,000,000	-0.0000001

Consenso grupal y equipo 1 tiempo 40 minutos

3. Discusión con todo el grupo Análisis de conclusiones de cada equipo, ¿Cómo se comporta la gráfica?, ¿Creen que con valores mucho muy pequeños o mucho muy grandes; el signo de $f(x)$ cambie? ¿Si no, por qué?	Técnica: Verbal y simbólica Materiales: Papel milimétrico, lápiz y calculadora Recomendaciones: Inducir al equipo y al grupo a encontrar la definición de asíntota. Al final, el profesor formalizará la definición.

Al dar inicio con las preguntas sobre el comportamiento de $f(x)$, dado el valor que toma x, los equipos llegaron al acuerdo de que, según las tablas:

Tabla 2. Cada vez que x se hace más pequeño $f(x)$ se hace más grande.

Tabla 3. Cada vez que x se hace más grande $f(x)$ se hace más pequeño.

Tabla 4. Cada vez que x se hace más pequeño negativo $f(x)$ se hace más grande negativo.

Tabla 5. Cada vez que x se hace más grande negativo $f(x)$ se hace más pequeño negativo.

Todos los equipos coincidieron que en ningún caso $f(x)$ cambiaría de signo, pues no habría alguna razón para que esto pasara. Algunos estudiantes marcaron en su calculadora los dígitos posibles e indicaban que su afirmación era correcta. El profesor comentó: ¿Están muy seguros? y continuó. Algunos comenzaron a dudar.

Análisis de la gráfica.

En la intervención del profesor para formalizar lo encontrado, se estableció:

A la parte de la gráfica que quedó del lado izquierdo, al eje ~~y~~” le llamaremos región 1, (R1) se mueve de $(-\infty, 0)$.

Pregunta: ¿Crees que la curva cruce los ejes con los que colinda al evaluar en los valores dados en las tablas? ¿Por qué?

Respuesta: No. Si esto pasara al tomar un solo caso y hacer la ecuación no cambiaría de signo, por muy grande que sea el valor obtenido o muy chico, según el caso. Y esto no pasa.

La del lado derecho le llamaremos región 2 (R2) se mueve de $(0, \infty)$

Pregunta: ¿Crees que la curva cruce los ejes con los que colinda?

Respuesta: No. La razón es como en el anterior caso.

En las dos preguntas anteriores: ¿Qué comportamiento crees que tenga la curva con los ejes donde se mueve? Que se acerca mucho a la asíntota. Se identificó que a los estudiantes les resultó complejo comprender el infinito, no obstante, el acuerdo más simple que se encontró fue: Se hace pequeño o grande pero no tiene fin.

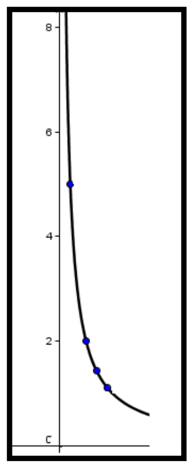


Figura 4. Gráfica que demuestra f(x) = 1/x cuando x tiende a cero por la izquierda

Como se puede notar en la Figura 3, en la R2, en los valores de x que se acercan a $x = 0$, cuando se evalúa con estos valores, los de la función $f(x)$ se alejan cada vez más del origen. Conforme x se aproxima a cero por la derecha en el plano xy, entonces los valores de $f(x)$ son cada vez mayores.

- Es decir, la curva se pega cada vez más al eje"x" por la parte derecha, como lo vemos en el siguiente segmento de la gráfica. Posteriormente se cuestionó. ¿Crees que al tomar valores cada vez más pequeños en x, alguna vez $f(x)$ cambie de signo?

Se puede observar en la gráfica que cada vez se acerca más al cero.

- ¿Crees que lo rebase y esto haga que cambie de signo?

Los alumnos se sintieron algo confusos, ¿Sí lo podrá cortar?, pero con su calculadora identificaron que no es así. En consecuencia se les sugirió tomar un solo caso; esto es ahora ver la función como una ecuación.

Se tomó: $x = 0.0000001$ y $f(x) = 10{,}000{,}000$

$$\frac{1}{0.0000001} = 10{,}000{,}000$$

El consenso del grupo fue que lo que sucedía al cambiar de signo, contradecía a las reglas de las matemáticas y leyes de los signos. *Positivo entre positivo da positivo*. Y que $f(x)$ se haría infinitamente grande pero no cambia de signo. En la tabla observaron (además de que los valores de ambas coordenadas no cambian de signo) que si x se acerca más al eje —’ypor la derecha, entonces f(x) se va, o tiende, a más infinito. En este caso se sugiere que se utilice la formalidad de las matemáticas. En símbolos matemáticos esto se escribe:

$$\boxed{\boldsymbol{si\ x} \to 0^{+}\ \boldsymbol{por\ la\ derecha} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \to +\infty\ \boldsymbol{por\ arriba}}$$

Nota: (La flecha → significa *tiende*, y 0^{+} y el cero + implica que tiende por la derecha)

A este comportamiento de la rama de una gráfica que se acerca a una recta pero no la toca, se le llama asíntota. El profesor comenta: estarán de acuerdo, que el eje —’yes una recta vertical, por tal motivo a la curva que se le acerque le formara una *asíntota vertical*. Por asíntota en forma general se entiende:

i) Una recta tangente a una curva en el infinito

ii) Una recta que se aproxima indefinidamente a las ramas de la función.

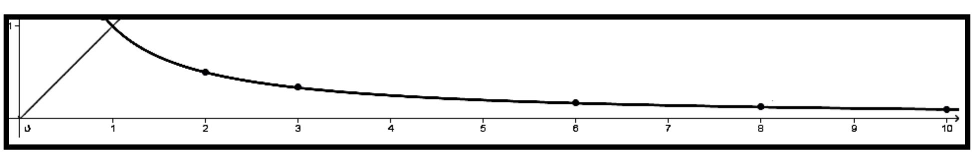


Figura 5. Grafica que explica, si los valores de x son cada vez más grandes por la parte derecha del origen, los valores de f(x), son cada vez más pequeños, y la curva se pega cada vez más al eje "x".

Entonces; ¿Qué pasa con la curva?, ¿Cruza a los ejes con los que colinda, ¿Sí o no y por qué? ¿Podrás dar una definición como la anterior de esto que está pasando?

Las preguntas fueron respondidas en el consenso como:

¿Qué pasa con la curva?

Igual que en la tabla 1, pero ahora si los valores de x son cada vez más grandes, los de $f(x)$ son cada vez más chicos.

¿Cruza a los ejes con los que colinda?

No, no los cruza. También al ver un solo caso como ecuación, pero ahora con este caso ocurre lo mismo, el signo no cambia. Si se toman los valores: $x = 10{,}000{,}000$ entonces se obtiene $f(x) = 0.0000001$

$$\frac{1}{10{,}000{,}000} = 0.0000001$$

¿Podrás dar una definición como la anterior de lo que está pasando?

Por el antecedente de la tabla 1, en la tabla 2 podemos decir que queda como:

$$\boxed{\boldsymbol{si\ x} \to +\infty\ \boldsymbol{por\ la\ derecha} => f(\boldsymbol{x}) \to 0^{+}\ \boldsymbol{por\ arriba}}$$

Ante esta situación se comenta a los alumnos que el eje "x" es ahora la asíntota y es una asíntota horizontal, por tal motivo a la curva que se le acerque en esta forma se le llamará, *asíntota horizontal.*

RESULTADOS

De los 49 alumnos que se inscribieron al curso, 17 de ellos, desertaron, tres o cuatro se presentaron la 1ª semana, los demás nunca se presentaron. Es decir el grupo de prueba estuvo compuesto por 32 alumnos, de los cuales solo 20 acreditaron los otros 12 no acreditaron.

Al hacer un balance de las calificaciones que abajo se muestran, se notó que tan solo seis de ellos mantuvieron sus calificaciones con la misma tendencia, estos fueron los alumnos que en número de lista son: el 26, 31, 35, 37, 44 y 46, los cuales, al cuestionarles a qué le adjudicaban su regularidad, los seis contestaron que tan solo debían esa materia, no trabajaban y vivían con sus padres.

Los 14 restantes comentaron que su irregularidad se debía a que tenían que trabajar, pues ellos dependían de sí mismos y no siempre tenían ni trabajo ni dinero para acudir a la escuela, o a veces conseguían un trabajo informal, eso evitaba que fueran a la escuela.

De los métodos aplicados no se les comentó nada, tan solo hasta terminar el curso el profesor les cuestionó si había algo que decir sobre la forma en que se trató cada tema.

La mayoría opinó, que en el CCH así se trabaja en otras materias o en la misma materia de matemáticas, pero en otros grados, lo cual no se les causó novedad ni extrañeza.

Por lo cual la hipótesis vertida: **Si en su trayectoria como estudiantes los alumnos del Colegio están mucho más habituados a la enseñanza por recepción, por lo cual es de esperarse que en los temas impartidos de dicha forma se obtengan mejores resultados,** queda descartada, y en los resultados se observó que las calificaciones en los cuatro temas vistos son extremas y, sin importar cuál método se vio, unas son muy buenas y otros muy malas.

Lo rescatable es que explicaron que sí tuvieron que esforzarse más, ya que tenían el interés de acreditarla. En sí, su comentario generalizado fue que: "*ya no tenían mucho mañana*" y solo les quedaba pasar la materia.

Los otros 12, que no acreditaron, consideraron que sus conocimientos no les permitían avanzar, y que no entendían muchas cosas. Unos comentaban que nunca habían visto los temas que se les trató de enseñar y otros comentaron que sus maestros pasados nunca se los enseñaron.

El autor de esta tesis se tomó con reserva estos últimos comentarios y considera tan diversas y múltiples las razones, que bien podrían ser tema de una o varias tesis. Y no se ahonda más porque este no es el objetivo de esta tesis.

A continuación, se muestran las calificaciones de los cuatro temas vistos en todo el grupo. En la primera columna está la calificación final, las otras cuatro corresponden a la calificación de los temas ya enumerados anteriormente.

Estas calificaciones fueron sumativas, y no tan solo se consideró la calificación del examen. El acuerdo con el grupo fue de la siguiente forma:

Tabla sobre porcentaje de evaluación

Examen	50%
Actividades en el salón de clase	25%
Tareas en casa	25%

Desde luego que también se consideró la asistencia y puntualidad, pues el profesor pasaba lista 15 minutos después de iniciada la clase y las tareas se recogían en ese momento. Esto se reflejaba en las calificaciones antes mencionadas.

En lo que respecta a la evaluación final, se considera todo lo hecho por cada alumno dentro y fuera del salón, ya que según (Diaz Barriga, Hernandez;, 1999), sin evaluación difícilmente nos daríamos cuenta si hay algún tipo de aprendizaje, de los resultados y la eficacia de la acción de enseñar. Por tal motivo el examen tuvo ese porcentaje antes marcado.

Al evaluar, el docente se percata dónde están fallando tanto él como el alumno, y se tienen argumentos para proporcionar las correcciones necesarias. Los demás porcentajes se consideraron así pues la evaluación incluye actividades de estimación, tanto cualitativa como cuantitativa.

Se consideró la representación más fidedigna posible del objeto de evaluación. En la emisión del juicio que evalué, las actividades que no comprenden el examen son las de tipo cualitativo y el examen es de tipo cuantitativo. En el aspecto cualitativo, la educación es una actividad social y socializadora que implica que los alumnos acudan a las escuelas con el fin de que se llenen de cultura y socialicen, para su inserción en la sociedad y puedan participar en el progreso de está, y en la medida de sus recursos y posibilidades, transformarla.

En el aspecto cuantitativo, la educación es una actividad personal, y en la medida que una persona esté mejor instruida puede hacer mejores aportaciones a sí mismo como a su entorno social.

Tabla de Nombres de los alumnos sus calificaciones finales

Tabla sobre los nombres de los alumnos su calificación final y calificaciones de cada examen, de los cuatro que comprende matemáticas IV.

1	NOMBRE DEL ALUMNO	CALIFICACION	Examan I	Examan II	Examan III	Examan IV
2	AGUILAR GERMAN JAIR DE JESUS	NP	NP	NP	NP	NP
3	ARCHUNDIA GOMEZ JAVIER	5	9	9	NP	NP
4	ARENAS CEDILLO JONATHAN ISAI	NP	NP	NP	NP	NP
5	ARREDONDO MARTINEZ MARISOL	NP	NP	NP	NP	NP
6	BARRAGAN DIAZ ALAN GUSTAVO	5	7	NP	NP	NP
7	BUCIO HERNANDEZ PAMELA	NP	NP	NP	NP	NP
8	CANO MEDINA SERGIO	6	8	8	4	4
9	CISNEROS MIRELES ADAN	5	NP	7	NP	NP
10	CRUZ SEGUNDO MARLET	7	10	10	4	6
11	CHAVEZ HERNANDEZ EVELIN GABRIELA	8	10	10	4	7
12	DE LOS SANTOS USCANGA VICTOR ANDRES	NP	NP	NP	NP	NP
13	ESPINOSA CANO SAIR	5	8	NP	NP	NP
14	ESPINOSA GARCIA EMILIANO	5	NP	NP	5	NP
15	ESPINOZA ORTEGA ALMA ROSA	7	8	8	5	7
16	GARCIA MATEHUALA RICARDO	5	NP	NP	1	2
17	GONZALEZ GALICIA OSCAR	8	8	10	4	5
18	GUZMAN RUIZ RAUL RODRIGO	6	6	9	3	6
19	HERNANDEZ SANCHEZ OMAR	5	NP	NP	3	0
20	LARA APARICIO DAVID	NP	NP	NP	NP	NP
21	LOPEZ PADILLA JOEL ABRAHAM	6	10	8	4	4
22	MAGAÑA MARTINEZ ERICK JOSUE	NP	NP	NP	NP	NP
23	MARTINEZ CRUZ NATALIA PAOLA	NP	NP	NP	NP	NP
24	MARTINEZ GARCIA LUIS OSVALDO	10	10	10	10	10
25	MARTINEZ MARTINEZ ALEXANDER RAFAEL	5	NP	6	4	0

26	MARTINEZ SUAREZ SANDRA VALERIA	10	9	10	9	10
27	MARTINEZ VIQUEZ PAOLA SELENE	5	9	7	NP	NP
28	MEDINA SALAS RAUL YONATAN	7	10	10	1	7
29	MENDOZA PEREZ ISAAC	5	8	8	NP	NP
30	MONREAL NAVA FRANCISCO JAVIER	7	9	9	3	7
31	ORDAZ DE JESUS SHARELY STEPHANY	8	9	9	3	8
32	ORTEGA GUTIERREZ GUSTAVO ANGEL	7	10	9	5	5
33	OSORIO PELCASTRE LUIS ENRIQUE	9	8	10	5	10
34	OSORNIO MATA ALEXIS GIOVANNI	NP	NP	NP	NP	NP
35	RAMOS RAMOS JUAN	7	10	9	2	8
36	ROJAS HUERTA CARLOS DANIEL	NP	NP	NP	NP	NP
37	ROJO LOYOLA MARIA FERNANDA	10	10	10	9	10
38	RUBIO GARCIA ROSA ISELA	NP	NP	NP	NP	NP
39	SANCHEZ TREJO GABRIELA	5	9	NP	4	NP
40	SANDOVAL SANCHEZ ITZEL AMEYALLI	NP	NP	NP	NP	NP
41	TREJO CUEVAS JAVIER	NP	NP	NP	NP	NP
42	VASQUEZ ARANGO VALERIA	NP	NP	NP	NP	NP
43	VAZQUEZ ROMERO JUAN FRANCISCO	NP	NP	NP	NP	NP
44	VEGA LOPEZ JAIME CRISTIAN	9	10	10	7	9
45	VEGA VAZQUEZ EDUARDO	5	5	8	NP	NP
46	VILLAFRANCO CONTRERAS YAEL AXCAN	10	10	10	9	10
47	VILLARREAL HERNANDEZ ALFREDO EDGAR	6	5	7	1	7
48	VIVEROS NIETO ALFREDO	NP	NP	NP	NP	NP
49	ZAMORA PEREZ IRVING YAIR	NP	NP	NP	NP	NP

En las tablas de calificaciones, se nota que cada alumno en los diferentes temas y la forma en que le fue impartido, no tuvieron un impacto relevante en su variación, pues sus calificaciones fueron buenas y malas en unos y otros temas, sin que hubiera alguna carga de aumento o disminución de la calificación por la forma de haber aprendido el tema. Más bien un cuanto tanto contradictorias pues hay varios alumnos que de un tema con una calificación de 8 o 9, después obtuvieron un 2 o 1. Al cuestionarles eso, la mayoría comento que no habían podido estudiar bien ese tema. Por diversas otras actividades.

Lo que confirma la idea de algunos autores que afirman que no hay una teoría que supere a otra (Bigge, 2007). Esto permite asumir que los estudiantes pueden aprender y llegar a dominar su aprendizaje y este volverse significativo, ya sea por exposición del maestro, o porque los mismos alumnos desarrollen la habilidad de estudiar por si solos, y logren cada vez más la independencia intelectual para volverse más autodidactas, que, finalmente, es una de las metas a seguir.

CONCLUSIONES

Al concluir este trabajo de investigación, cuyo objetivo fue hacer un comparativo entre lo que es el aprendizaje por recepción, que está basado en la enseñanza explicativa, y por otro lado el aprendizaje por recepción-descubrimiento. Se llevó a cabo con estudiantes de cuarto semestre del CCH, plantel Azcapotzalco, encontrándose que, en la evaluación de los cuatro temas impartidos se presentaron variantes raras y significativas.

Se sabe que no hay teoría que supera a otra (Bigge, 2007). Esto permite asumir que los estudiantes pueden aprender y llegar a dominar su propio aprendizaje, ya sea por exposición del maestro o por cuenta propia, mediante la asesoría y supervisión del docente, de cualquier forma en la que el conocimiento sea adquirido, la importancia está en lograr avanzar y tender hacia la independencia intelectual, siendo más autodidacta, con esto se logra alcanzar una de las meta a seguir. La exposición de la clase y las prácticas estarán bajo la responsabilidad del docente para tal fin, sin importar el método que se aplique.

El papel del docente es guiar, aconsejar, cuestionar, educar y saber abrir las brechas provechosas para que en el rol final, tanto el alumno como el profesor, como seres humanos que son, piensen que ―La naturaleza me ha convertido en ese individuo, la sociedad en este actor de roles; pero yo mismo me constituyo y realizo como persona". (Böhn, p. 15, 1995). He aceptado y buscado este trabajo y como tal, acato las responsabilidades que con él llevan, me comprometo a dar lo mejor de mí y pondré todo de mi parte para con él.

Por otra parte, los cuatro temas de funciones matemáticas que forman parte del programa oficial de la asignatura de Matemáticas IV, en el CCH, se vieron con las dos diferentes metodologías y se compararon, fue a través de un grupo de estudiantes que cursan por segunda ocasión o más veces la asignatura. Tres de dichos temas se abordaron en forma tradicional (exposición por el profesor) y el otro por descubrimiento, desarrollado en una serie de cinco prácticas. La intención fue explorar si el resultado tiene alguna relevancia o algo que pueda servir para la práctica docente, formar una estrategia para mejorar la enseñanza/aprendizaje. Se trata de inducir al alumno, por cualquier método de aprendizaje, a obtener conocimiento, que no sólo se queda a nivel memoria sino que pase a las siguientes fases como es el entendimiento y a la comprensión, hasta lograr la reflexión y el análisis.

"La formación del hombre no es obra exclusiva de la naturaleza, ni de la sociedad, como lo postulan las pedagogías científicas que conciben la educación como una poiesis sino que son esencialmente obra del hombre mismo".

En la detenida exposición de la educación entendida como praxis, se destacan como ingredientes esenciales de la construcción personal tanto el poder de la conciencia, como la aceptación de una moralidad que se lleva a la práctica y se realiza a través de la libertad y la fuerza de la voluntad. (Böhn, p. 12, 1995).

El hecho de que los alumnos realicen sus prácticas por sí solos, con la asesoría, supervisión, cuestionamiento y dirección del profesor, induciéndolos a encontrar las conexiones de las prácticas con los conocimientos que ellos tienen, lleva a pensar que el alumno logró el grado de entendimiento y reflexión que se buscaba. Esta situación puede ser un indicio de que los alumnos estaban motivados a continuar el curso. Esta exaltación, considerada como auténtica, además les permite comprender el verdadero significado de la matemática, lograr los objetivos buscados, así como la independencia intelectual y la autonomía (Kline, 2007).

Los estudiantes manifestaron ciertas limitaciones al plantear cuestionamientos como: ¿y ahora qué sigue?, especialmente en temas de álgebra y aritmética. Entre esas observaciones, el concepto de función no quedaba muy claro pero fue disminuyendo cuando tuvieron la necesidad de tabular en las primeras prácticas y luego, al graficar los datos, notando que la primera variable —"x nunca puede estar ligada a más de una sola —"y

Otra limitación observada en el grupo fue que no se entendía que la división entre cero no está definida. Varios de ellos afirmaron que el maestro les había dicho que $\frac{1}{0} = \infty$, otro que $\frac{1}{0} = 0$, lo cual en ambos casos es totalmente falso. No es lo mismo que la división entre cero sea indefinida a que el límite de la expresión b/a tienda a infinito cuando el valor de a tiende a cero. Una vez entendido esto, se dieron cuenta que en donde el denominador se hace cero, es en ese valor del eje —x" donde se forma la asíntota vertical. Se reafirmó cuando vieron las gráficas generadas con el programa de Geogebra.

Superada esta parte, los alumnos mostraron cierta claridad ante el concepto de función y en consecuencia con el de dominio y rango.

Con los logros obtenidos en este trabajo se concluye también que el profesor debe contar con un título de matemático y contar con una cultura general aceptable para el nivel en el que imparte su docencia, para lograr transmitir conceptos importantes y procedimientos matemáticos en otras áreas de conocimiento donde se requieran, a un nivel de educación media superior. (NCTM, 1989; 2000).

El trabajo en equipo se fomentó en todo momento, así como la tolerancia y el respeto entre ellos. Los temas fueron expuestos por cada uno de los integrantes del grupo, haciéndolo con sus propios argumentos y recursos. Algunos autores consideran que un trabajo que no vaya acompañado de una formación política y social carecerá de todo valor educativo y no pasará de ser un proceso neutro (Palacios, 2008). El individuo debe buscar tener un sentido crítico y analítico de lo que aprende.

El exponer ideas verbales y por escrito, frente a un público crítico, da confianza en sí mismo, mejora el entendimiento del tema, enriquece el lenguaje y fomenta la integración social y la formación de la personalidad. La transferencia del aprendizaje se produce cuando el aprendizaje de una persona en una situación influye en su aprendizaje y su ejecución en otras (Bigge, 2007).

Una pregunta que siempre estuvo latente en el trascurso de este trabajo fue si el problema fundamental de la transferencia es: ¿De qué modo y hasta qué punto influirá la adquisición de capacidades, conocimientos, comprensión y actitudes en relación a un tema o una situación de aprendizaje, con los de otros temas o situaciones? Las preguntas obligadas que hay que hacer son: ¿Fomenta este conocimiento su inteligencia?, ¿Estimula el desarrollo de sus habilidades mentales?, ¿Mejora su proceso de disciplina mental en general?, ¿Es posible mejorar la percepción personal y social?, ¿Fomenta la retención de lo aprendido?, ¿Da pauta a la imaginación en todos los campos del saber? Es un hecho que de la serie de problemas ficticios que envuelve la matemática, difícilmente un alumno se va a encontrar con una situación así en su vida. No obstante, puede fomentar en el alumno la reflexión y análisis, saber que es una herramienta que fomenta su inteligencia y su sentido común lo que le hará saber cómo tomar una mejor decisión en situaciones de su vida personal.

Desde luego no se puede pasar de largo los casos como el que el alumno solo acató y fue un requerimiento a cumplir y nada más, —después lo olvida” y se acabó. Era algo necesariamente desagradable (Bigge, 2007). Podría el alumno hacer el comentario: Era un requisito para obtener mi título o diploma, —el que sea”. Pero ya se acabó y fin.

Este trabajo queda abierto para futuras investigaciones en las que se quiera profundizar, sobre todo en las preguntas y observaciones hechas anteriormente, ya que no se cubrieron en su totalidad por salirse del objetivo e hipótesis planeados.

BIBLIOGRAFÍA

Población Estudiantil del CCH ingreso, tránsito y egreso

(s.f.).

(s.f.).

(s.f.).

(41), f. (s.f.). *fp.educarex.es/fp/pruebas_acceso/...matematicas/U6_Funciones.pdf (41)*.

(RALE). (s.f.). (Real Academia Española © Todos los derechos reservados).

www.suagm.edu/umet/biblioteca/pdf/GuiaRevMarzo2012APA6taEd.pdf. (03 de 12).

Alvarez_gayou, J. L. (2010). *Como hacer investigación cualitativa fundamentos y metodología.* Mexico, D.F.: Paidos Educador.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (2010). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo.* Trillas.

Bigge, M. (2007). *Teorías del aprendizaje para maestros.* México D.F.: Trillas.

Böhn, F. (1995). *TEORIA Y PRACTICA, EL PROBLEMA BASICO DE LA PEDAGOGIA.* Madrid, España: DYKINSON.

Böhn, W. (1995). *TEORIA Y PRACTICA, El problema básico de la pedagogía.* Madrid España: DYKINSON.

Briseño, L. A., & Verdugo, J. d. (1997). *Matemáticas 3.* México, D.F.: Santillana.

Bruner. (2001). *Un proceso mental de aprendizaje.* Madrid, España: Narcea.

Colegio de Ciencias y Humanidades. (1996). *Plan de Estudios Actualizado.* México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México.

Courant, R., & Hebert, R. (1979). *¿Qué es la matemática? una exposición elemental de sus ideas y métodos.* México D.F.: Aguilar.

Cruz, D. (2002). *Tesis de Maestría*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, Á., & Ramírez, A. (2001). *Geometría analítica y trigonometría.* Estado de México, México: Prentice Hall.

Diaz Barriga, Hernandez;. (1999). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo.* México, D.F.: Macgraw-Hill.

Ferrater Mora, J. (2014). *DICCIONARIO DE FILOSOFIA 5a, Edición.* Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Fleming, W., & Varberg, D. (1991). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica .* Naucalpan de Juárez Edo. de México: Pearson Prentice Hall.

Garcia Cortes, F. (1999). *Aprendizaje y Evaluación de Contenidos Escolares.* México, D.F.: Santillana.

Garcia, C. (1999). *Aprendizaje y Evaluación de Contenidos Escolares.* México, D.F.: Santillana.

GeoGebra. (s.f.). *http://www.geogebra.es/.*

Guevara, G. (1985). *LA EDUCACIÓN SOCIALISTA EN MÉXICO (1934-1945).* México, D.F.: El Caballito SEP.

Hernández, Fernandez, & Baptista. (1997). *Metodología de la Investigación.* Naucalpan, Edo. de México: DYKINSON.

http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n. (s.f.).

http://www.aularagon.org/files/espa/ON_Line/matematicas/Ecuaciones/CMMC2_texto1.htm. (s.f.). http://www.aularagon.org/files/espa/ON_Line/matematicas/Ecuaciones/CMMC2_texto1.htm.

Jaques, V., & Triphon, A. (2009). *Pyaget-Vygotsky: la génesis social del pensamiento.* Ecuador: Paidós.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* México D.F.: Alianza .

Kline, M. (2007). *El fracaso de la matemática moderna, por qué Juanito no sabe sumar.* Distrito Federal : Siglo XXI Editores .

Luis, Alvarez_gayou Jurenson Juan;. (2010). *Como Hacer Investiggación Cualitativa fundamentos y metodologia.* Mexico, D.F.: Paidos Educador.

National Council of teachers of Mathematics . (1989).

Palacios, J. (2006). *La educación en el siglo XX.* Caracas, Venezuela: Laboratorio Educativo .

Polya, G. (2010). *Cómo plantear y resolver problemas.* Distrito Federal : Trillas.

Sestier, A. (1983). *Historia de la Matemáticas.* MÉXICO, D.F.: Limusa, S.A.

Smith, S. A., Charles, R. I., Dossey, J. A., Keedy, M. L., & Bittinger, M. L. (1998). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica* . Naucalpan de Juárez Edo. de México: Pearson Wesley.

Spivak, M. (1978). *Calculus, Calculo Infinitesimal.* Barcelona España: Reverté S.A.

Swocowski, E. W., & Cole, J. A. (2002). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México, D.F.: Thomsong.

Torres, C. (1999). *Geométría Analítica* . México D.F. : Santillana.

www.magisteriolalinea.com/.../MANUAL_APA_ULACIT_actualizado_2... (s.f.).

ANEXOS

ANEXO I

PRÁCTICA 3: EL PLAN DE CLASE

Sesión 1 lunes 21/02/12

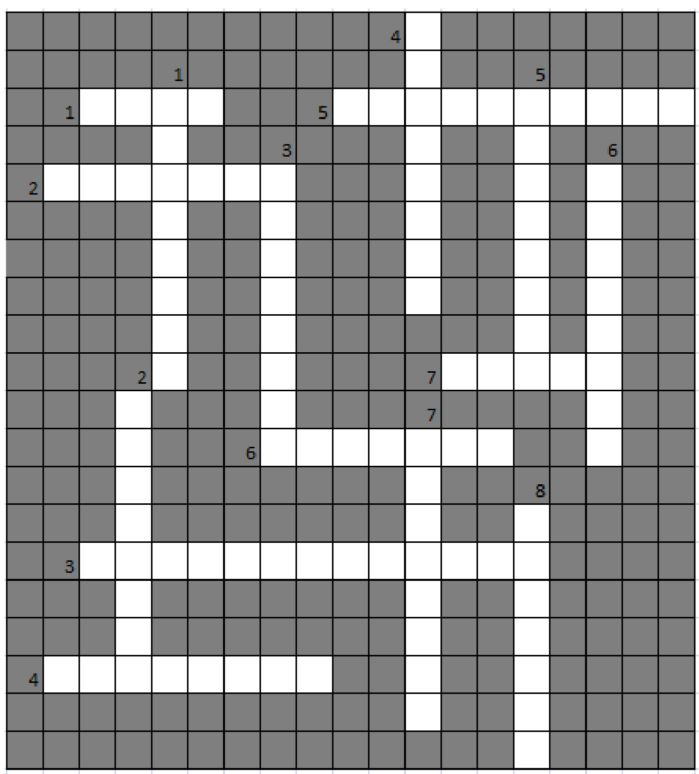
Tema a tratar: Repaso de las prácticas anteriores.
Objetivo del tema: Remarcar y analizar en equipo una La Función Racional
Objetivo del Subtema: En equipo con su material en mano de las prácticas anteriores, someterá a discusión los puntos relevantes, y se comenzara a resolver el siguiente crucigrama, propuesto por el profesor.

Aprendizajes a lograr: Que cada alumno apoyado y en cuerdo con su equipo y después con el grupo lleguen a un acuerdo acerca de las definiciones usadas en el transcurso de las prácticas 1 y 2.	**Conocimientos previos:** Lo mencionado ya en las prácticas 1 y 2 y los acuerdos a llegar para esta práctica 3.

Inicio del tema **tiempo 30 minutos**

HORIZONTALES	VERTICALES
1. Las funciones racionales están definidas en todos los reales excepto cuando el denominador vale. Respuesta:	UNO. Es una función que está compuesta por el cociente de 2 polinomios y el denominador no es cero, esta se llama. Respuesta:
2. Es la regla de correspondencia que asocia a cada elementó del dominio ―ejex" un único elementó de contra dominio ―ejey", su nombre es. Respuesta:	DOS. En el Plano XY, cuando una recta vertical, que no es el eje de las "y" (pero también puede serlo) divide al plano cartesiano en partes, a estas partes se les llama. Respuesta:
3. En una función solo está definido en el eje ―y" y también es conocido como el rango de una función. Respuesta:	TRES. La curva se acerca a la asíntota vertical, por abajo por la derecha o por la izquierda se trata de una asíntota. Respuesta:
4. La curva se acerca a la asíntota vertical, por arriba por la derecha o por la izquierda se trata de una asíntota. Respuesta:	CUATRO. Si es una recta que corta en algún punto al eje "x", incluyendo el cero entonces es una asíntota. Respuesta:
5. Si es una recta que corta en algún punto al eje ―y" incluyendo el cero entonces es una asíntota.	CINCO. Cuando una asíntota es vertical, y vale cero. Podemos decir que de todos modos el plano queda dividido en regiones.

Respuesta:	Y la asíntota es entonces la. Respuesta:
6. Cuando los exponentes de P(x) y Q(x) son **n** y **k** respectivamente y **n** < **k**, la asíntota horizontal es. Respuesta:	SEIS. Es la que divide el plano en regiones y la función en ella no está definida se trata de una. Respuesta:
7. Se le adjudica a Descartes su invención pero en realidad el primero en usarlo fue Fermat, nos referimos al. Respuesta:	SIETE. Si la curva de la función se acerca a la asíntota horizontal o vertical por la derecha o izquierda, pero nunca la toca decimos que esta tiende al. Respuesta:
	OCHO. Es en una función lo más importante pues de él depende de sus valores y solo está definido en el eje —"x Respuesta:

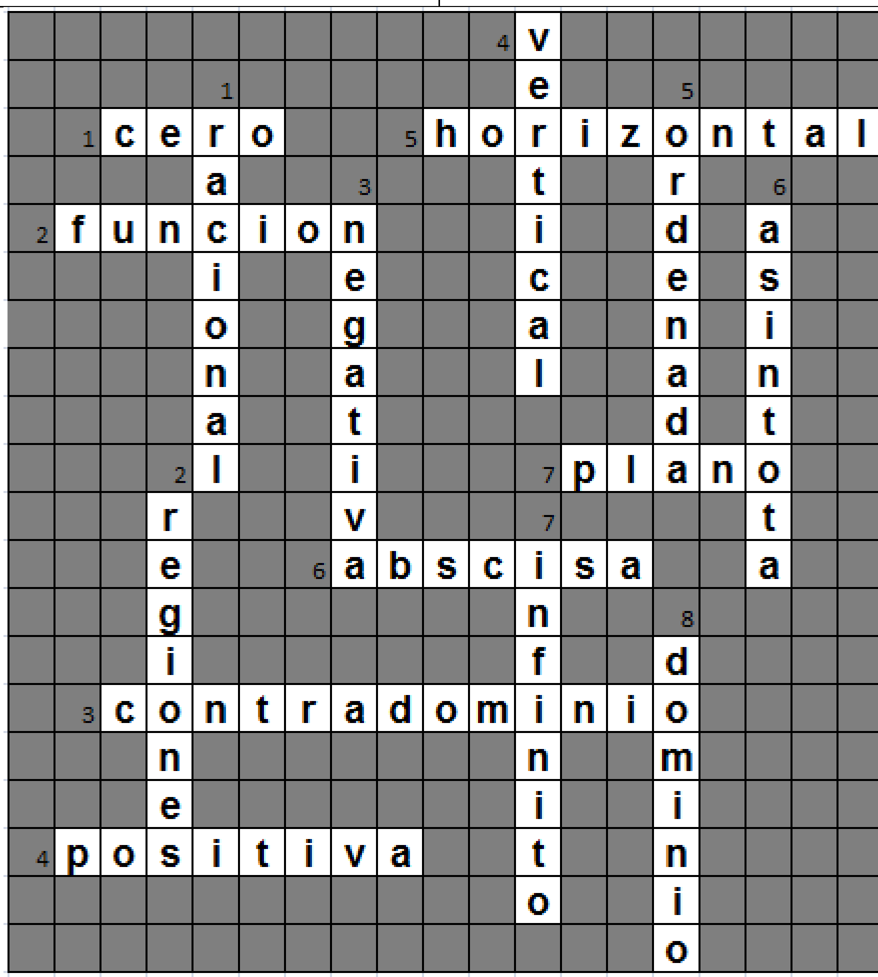


Las respuestas fueron contestadas de la siguiente forma que vemos y el crucigrama igual

CRUCIGRAMA SOBRE FUNCIONES RACIONALES

HORIZONTALES	VERTICALES
1) Las funciones racionales están definidas en todos los reales excepto cuando el denominador vale. Respuesta: **Cero**	UNO. Es una función que está compuesta por el cociente de 2 polinomios y el denominador no es cero, esta se llama. Respuesta: **Función Racional**
2) Es la regla que asocia a cada elementó del dominio —eje x” un único elementó del contra dominio —eje y”, su nombre es. Respuesta: **Función**	DOS. En el Plano XY, cuando una recta o más verticales, que no es el eje de las —y” (pero también puede serlo) divide al plano cartesiano en partes, a estas partes se les llama. Respuesta: **Regiones**
3) En una función solo está definido en el eje —y” y también es conocido como el rango de una función. Respuesta: **Contradominio**	TRES. La curva se acerca a la asíntota vertical, por abajo por la derecha o por la izquierda se trata de una asíntota. Respuesta: **Negativa**
4) La curva se acerca a la asíntota vertical, por arriba por la derecha o por la izquierda se trata de una asíntota. Respuesta: **Positiva**	CUATRO. Es en el punto (o los puntos) donde el denominado de la función racional vale cero, nos referimos a Respuesta: **Vertical**
5) Si es una recta que corta en algún punto al eje —y” incluyendo el cero entonces es una asíntota. Respuesta: **Horizontal**	CINCO. Cuando una asíntota es vertical, vale cero podemos decir que de todos modos el plano queda dividido en regiones. Y la asíntota es entonces la. Respuesta: **Ordenada**
6) Cuando los exponentes de P(x) y Q(x) son **n** y **m** respectivamente y **n** < **m**, la asíntota horizontal es. Respuesta: **El eje de las “x” o abscisa**	SEIS. Es una recta tangente a una curva en el infinito Respuesta: **Asíntota**
7) Es la intersección de dos rectas reales una horizontal y la otra vertical	SIETE. Si la curva de la función se acerca a la asíntota horizontal o

en el cero de cada una de ellas y al ocurrir el cruce se forman 4 cuadrantes se trata del Respuesta: **El Plano**	vertical por la derecha o izquierda, pero nunca la toca decimos que esta tiende al. Respuesta: **Infinito**
	OCHO. En una función lo más importante pues de él depende de sus valores y solo está definido en el eje —"x Respuesta: **Dominio**



Fase de cierre **tiempo 20 minutos**

5. Conclusiones y acuerdo grupal Cada equipo mostrara su crucigrama resuelto y acordara con el grupo sus respuestas hasta que el grupo en	**Técnica:** Verbal y simbólica **Materiales**: papel normal y lápiz. **Recomendaciones**: Analizar cada una de las respuestas y en acuerdo grupo y

conceso grupal tenga los acuerdos para la solución del crucigrama.	profesor auxiliado con el cañón y lap top tengan una solución para todos.

Como cierre y tarea el equipo entregara el reporte del crucigrama acordado por todo el grupo así como el de su equipo y una bitácora que contenga las actividades principales de la sesión 3.

PRACTICA 4:

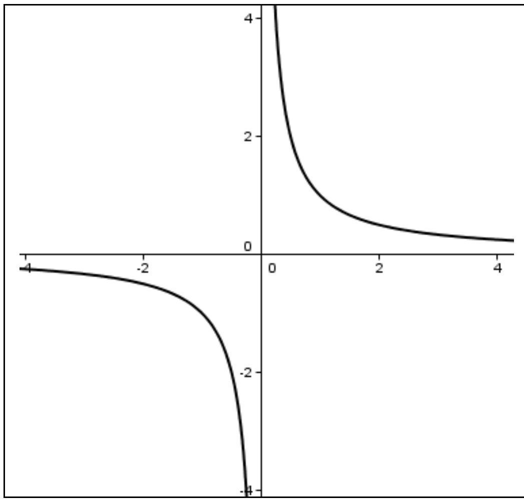
EL PLAN DE CLASE

Sesión 1 lunes 20/02/12

Tema a tratar: Traslación de ejes —Asíntotas verticales y horizontales”	
Objetivo del tema: Analizar en equipo como y que con los parámetros a, b y c dan lugar a las Asíntotas verticales y horizontales en la función $f(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{b}}{(\mathrm{x}-a)} + \mathrm{c}$.	
Objetivo del Subtema: En equipo, elaborar la tabla y graficar el ejercicio a), posteriormente graficar hasta el ejercicio **e)**. Usar lo anteriormente visto, para sin tabular deducir la forma de la gráfica.	
Aprendizajes a lograr: Que cada alumno y su equipo analicen e intuyan que hace cada parámetro aumentado en la función racional basado en los ejemplos ya hechos.	**Conocimientos previos:** Todo lo visto en las prácticas anteriores.

Inicio del tema **tiempo 30 minutos**

1. Recordaras lector, que el ejemplo 1) la función racional $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}}$ dio la grafica

	Con la tabla,

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
- 0.25	- 0.33	- 0.50	- 1.00	indef	1.00	0.50	0.33	0.25

Bien, ahora a estos valores, hay que agregarles el valor del parámetro "c" es decir la función $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}}$, ahora será $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}} + 1$

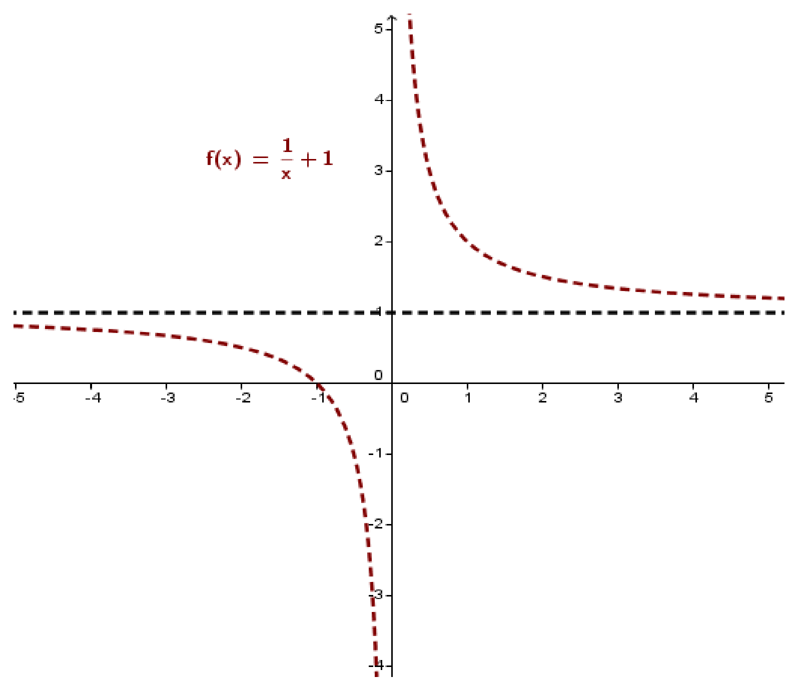
Nota: No en todos los ejercicios esto es factible.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} + 1}: \frac{\boldsymbol{funcion\ Pol.\ de\ grado\ cero}}{\boldsymbol{funcion\ Pol.\ de\ grado\ uno}}$$

Tabular de -10 a 10 de 1 en 1

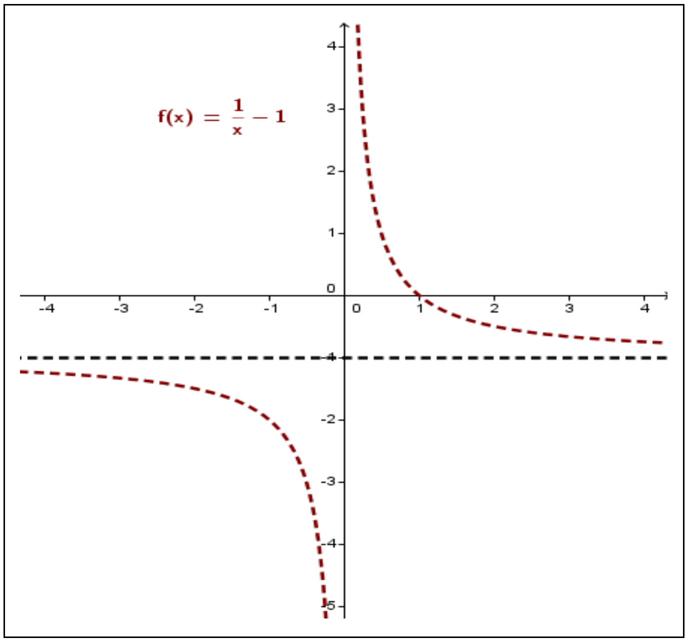
Tabla | Grafica

x	$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}} + 1$
-10	**0.90**
-9	**0.89**
-8	**0.88**
-7	**0.86**
-6	**0.83**
-5	**0.80**
-4	**0.75**
-3	**0.67**
-2	**0.50**
-1	**-**
0	**Indef**
1	**2.00**
2	**1.50**
3	**1.33**
4	**1.25**
5	**1.20**
6	**1.17**
7	**1.14**
8	**1.13**
9	**1.11**
10	**1.10**



Una vez elaborado el ejercicio anterior, el equipo debe deducir la gráfica de la función **b)** $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, Hacer un esbozo de la gráfica usando solo la intuición, proceder con todos los pasos como con la función anterior.

Como es obvio el grupo ya con lo anteriormente visto dedujo que la gráfica seria:



A continuación, a los ejercicios siguientes se les aumentaran los parámetros a, b y c, y la pregunta: ¿Qué pasa ahora con la función Racional?

En equipo realicen los siguientes ejercicios, utilice cada uno los conocimientos adquiridos de los ejemplos antes vistos. Si el equipo, lo considera necesario, elabore una tabla, pero es recomendable que cada integrante deba de utilizar la intuición y el análisis, aprenda a discernir y lo aplique. Para la graficación, hágase por partes.

i. Primero vea que hace el parámetro a. Sí hay b vea lo de ambos, determine que asíntotas forman.

ii. Una vez encontrado lo que hacen los parámetros a y b, proceda a encontrar que hace el parámetro c.

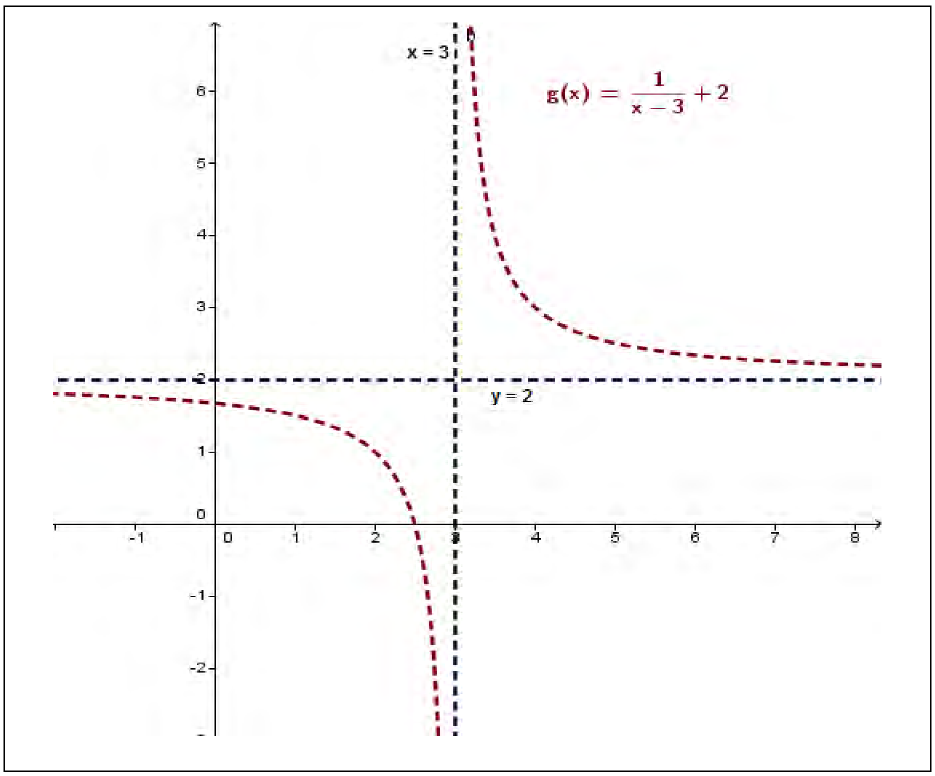
b) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$, **c)** $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ e**)** $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + 2$

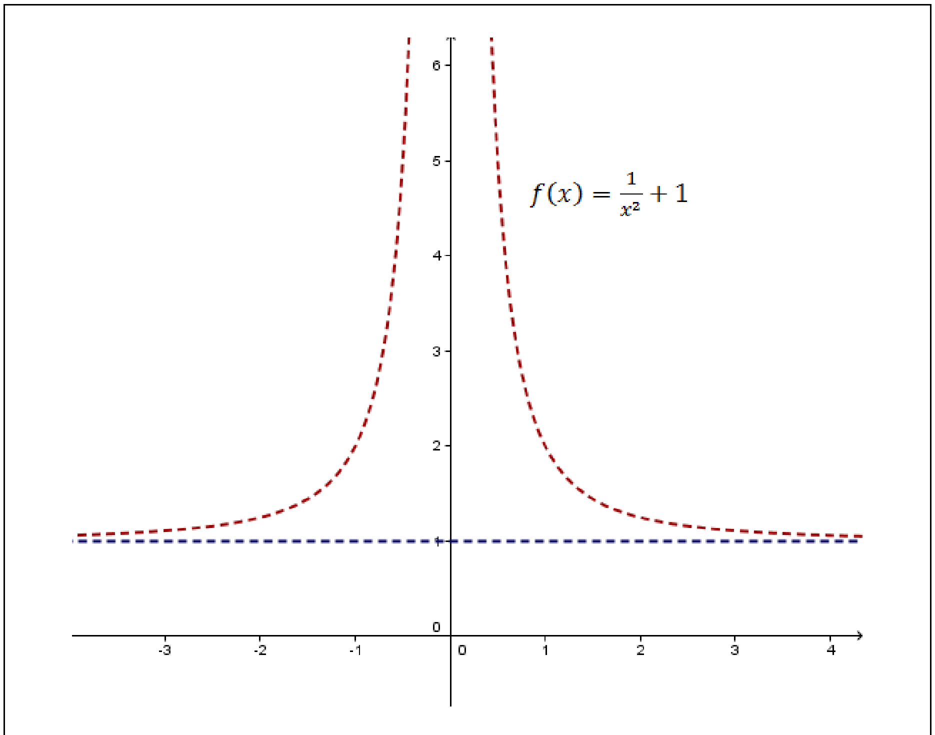
Como resultaba obvio, los equipos ya una vez experimentados, no les dio ningún trabajo encontrar la gráfica de cada una de las funciones, solo pequeños incidentes, pero con la atención y asesoramiento adecuado tanto de todo el grupo así como del profesor, en consenso las gráficas encontradas fueron las siguientes

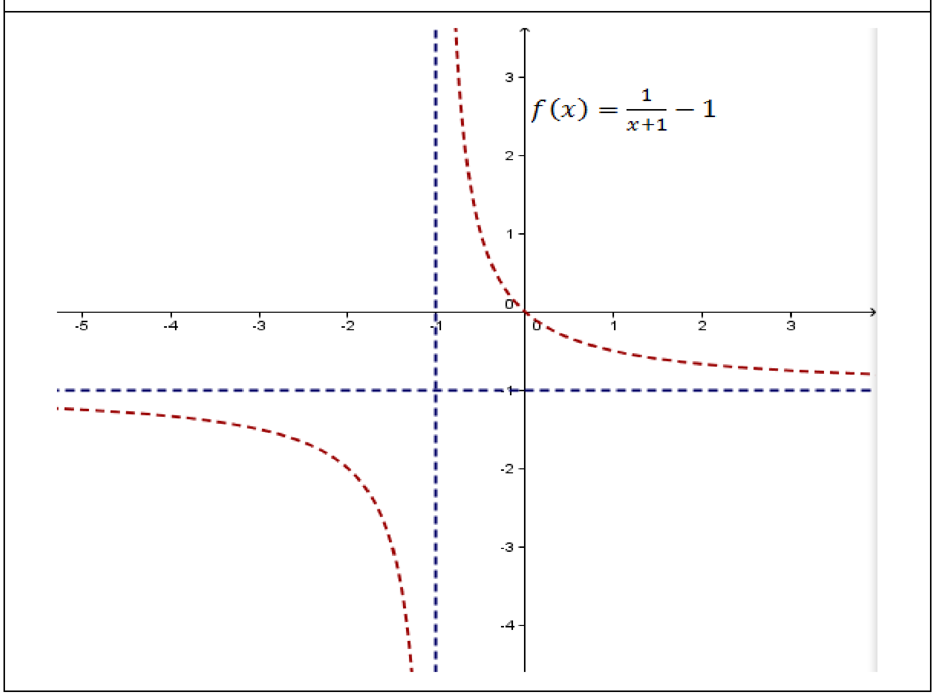
Consenso en grupo **tiempo 20/30 minutos**

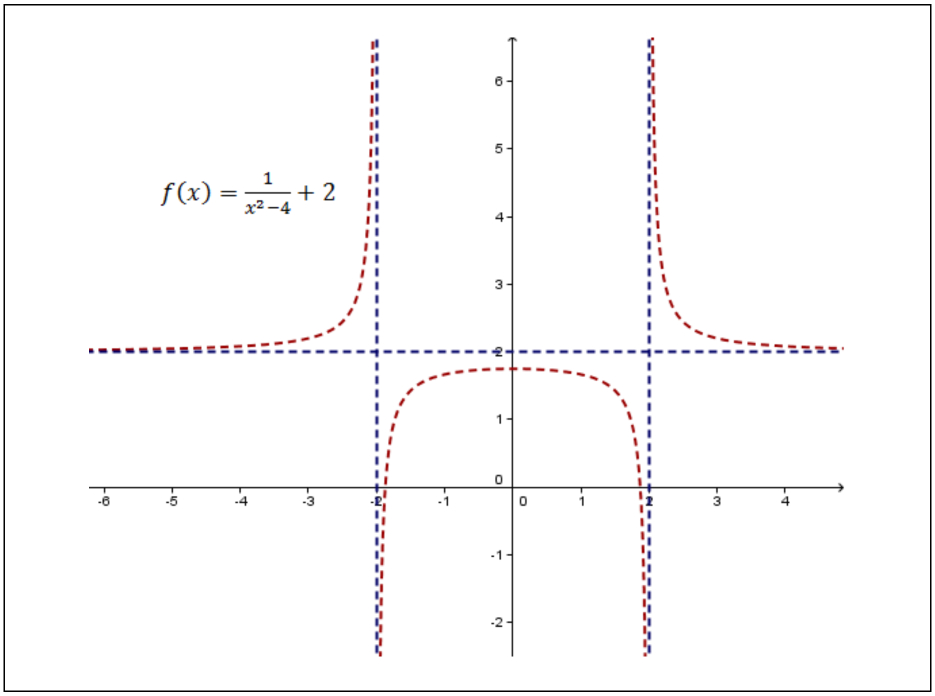
Técnica: Verbal y simbólica **Materiales**: Papel milimétrico, lápiz y calculadora, pizarrón blanco y marcadores, lap top, después del consenso grupal el profesor mostrará con geogebra si la gráfica es correcta. **Recomendaciones**: Graficar, cada uno con sus diferentes datos y tablas hacer hincapié en donde van las asíntotas tanto horizontal como vertical.	**2. Discusión con el grupo** De cada equipo paso un representante y mostró cada uno una de las gráficas de la a) a la e). Que elaboraron. El profesor pregunto y cuestiono junto con los demás equipos si su grafica coincide con la mostrada. Al final de cada acuerdo el profesor la mostro con el cañón en el programa geómetra.

Consenso en equipo **tiempo 30 minutos**




$f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$


$f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$



La conclusión: Con respecto a estas graficas todos los equipos comentaron por acuerdo unánime:

i. Los parámetros a y b, daban lugar a las asíntotas verticales
ii. Y el parámetro c, daba lugar a la asíntota horizontal.

Funciones racionales con mayor grado de complejidad

La siguiente práctica, consiste en determinar qué tipo de gráfica se forma al involucrar funciones racionales con mayor grado de complejidad.

3. Discusión entre el equipo Cada equipo estudiara lo que a continuación se muestra con relación a las asíntotas horizontales. Después de discutir los ejemplos procederán a resolver los 10 ejercicios de la práctica. Ya concluidos se llevara a cabo una	**Técnica:** Verbal y simbólica **Materiales**: Papel, lápiz y calculadora, pizarrón blanco y marcadores. Después del consenso grupal el profesor escribirá con geogebra si la gráfica es correcta.

discusión y un consenso grupal dirigido por el profesor	

Recomendaciones: Graficar, cada función con sus diferentes datos, siguiendo las instrucciones dadas en los ejemplos mostrados. Dado que ya sabemos que al graficar una función racional, ésta es limitada por regiones con asíntotas verticales y asíntotas horizontales; tenemos entonces, que cada una tiene una justificación del por qué. Al final de los ejercicios habrá un consenso grupal, coordinado por el profesor y auxiliado por todo el grupo.

Caracterización que definen a las asíntotas horizontales

Teorema 1: Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + a_0}$ donde $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$

(1) Si n < m, entonces el eje —x(la recta y = 0) es la asíntota horizontal para la gráfica de f. (n y m se refiere al grado del polinomio dado)

(2) Si n = m, entonces la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ el cociente de los coeficientes de grado mayor de $P(x)$ numerador y $Q(x)$ denominador, es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

(3) Si n > m, la gráfica de f carece de asíntota horizontal y puede darse una asíntota oblicua.

Tres ejemplos de asíntotas horizontales

Resolvamos 3 ejemplos que involucren este resultado.

Ej. a) Encuentre la asíntota horizontal si la hay para la gráfica de f

$$f(x) = \frac{7x - 2}{x^2 - x - 2}$$

Sol. Por el teorema de asíntotas horizontales inciso (1), $n = 1$ y $m = 2$, => $n < m$, de aquí afirmamos que el eje —x es la asíntota horizontal. ***(Recuerden el ej. 1*** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ ***numerado grado cero y denominador grado 1)*** Para justificar esta afirmación, dividimos entre x^2 tanto el numerador como el denominador, por ser este el de la potencia mayor.

$$f(x) = \frac{\frac{7x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}$$

Desde luego $x \neq 0$ que además x toma un valor muy grande positivo o negativo (Ej. 1), tenemos en cada caso $\frac{7}{x}, \frac{2}{x^2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2},$ todos estos tienden a cero, por tanto la función queda

$$f(x) \approx \frac{0 - 0}{1 - 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Dado que $f(x) \to 0$ a medida que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ afirmamos que por esta última expresión la recta $y = 0$, esto es el eje —"xes la asíntota horizontal.

Ej. b) Encuentre la asíntota horizontal, si la hay, para la gráfica de f

$$f(x) = \frac{7x^3 + 3}{5x^3 - 7}$$

Sol. Por el teorema de asíntotas horizontales inciso (2), $n = 3$ y $m = 3 => n = m$ y los coeficientes iníciales son 7 del numerador y 5 del denominador, por lo tanto la asíntota horizontal es $\frac{7}{5}$. Como en inmediato anterior ejercicio, para justificar nuestro resultado, dividimos entre x^3

$$f(x) = \frac{\frac{7x^3}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{7}{x^3}} = \frac{7 + \frac{3}{x^3}}{5 - \frac{7}{x^3}}$$

Desde luego $x \neq 0$ y x muy grande positivo o negativo, tenemos en cada caso $\frac{3}{x^3}$, y $-\frac{7}{x^3}$, estos 2 cocientes tienden a cero cuando x es muy grande positivo o negativo, por tanto la función queda

$$f(x) \approx \frac{7 + 0}{5 - 0} = \frac{7}{5}$$

Dado que $f(x) \to \frac{7}{5}$ a medida que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, por tanto afirmamos que la recta $y = \frac{7}{5}$, es la asíntota horizontal.

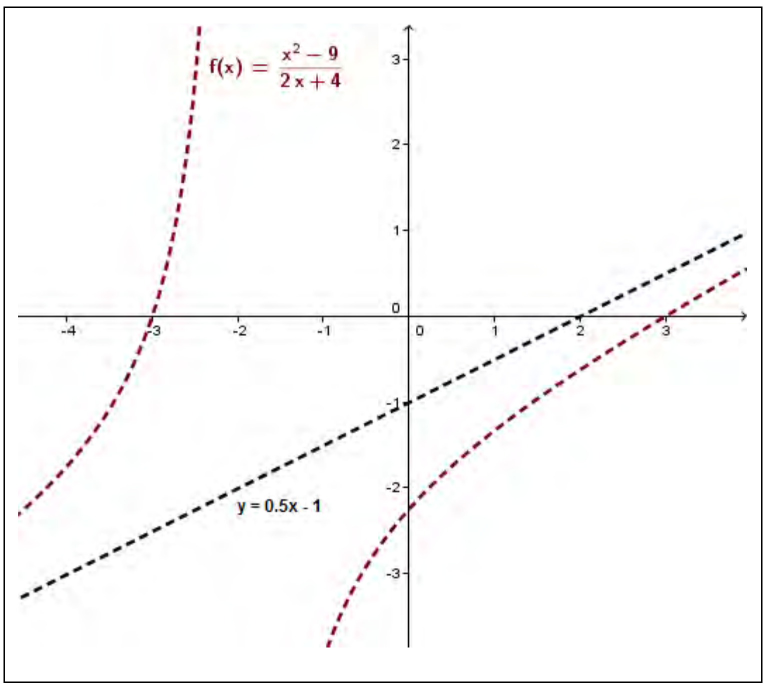
Ej. c) Encuentre la asíntota horizontal, si la hay, para la gráfica de f

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x + 4}$$

Sol. Por el teorema de asíntotas horizontales inciso (3), $n = 2$ y $m = 1$ => $n > m$ entonces la grafica carece de asíntota horizontal. Y esto da lugar a una asíntota oblicua, para justificar nuestro resultado y por la división larga tenemos.

$$f(x) = \frac{x^2 \; - \; 9}{2x \; + \; 4} = \left(\frac{x}{2} - 1\right) - \frac{5}{2x + 4}$$

Cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$, el cociente $\frac{x}{2} - 1$ aumenta cada vez más, sin limite y $-\frac{5}{2x+4} \to 0$; (ya visto como en el Ej. 1) por tanto, $f(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$ o a medida que $x \to -\infty$. Su grafica en geogebra es así: Con asíntotas oblicuas.



Ejercicios 2. Aplique las condiciones de las asíntotas verticales y horizontales y haga un esbozo de la gráfica.

1) $f(x) = \frac{4}{x}$, **2)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$, **3)** $f(x) = \frac{3}{x + 5}$, **4)** $f(x) = \frac{-4}{2x + 5}$, **5)** $f(x) = \frac{-5x}{2x - 14}$,

6) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$, **7)** $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$, **8)** $f(x) = \frac{5x + 3}{2x + 6}$, **9)** $f(x) = \frac{2}{(x-4)^2}$, **10)** $f(x) = \frac{-5x}{2x - 14}$

PRACTICA 5:

EL PLAN DE CLASE

Sesión 1 miércoles 22/02/12

<table>
<tr><td colspan="2">Tema a tratar: Graficar una función racional completa</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo del tema: En equipo, se comentar todo lo visto hasta el momento sobre función racional y se considerara para graficar en forma completa una función racional.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo del Subtema: En equipo los tres últimos problemas vistos donde se trató las asíntotas horizontales se aprovechara para terminar su grafica completa</td></tr>
<tr><td>Aprendizajes a lograr: Que cada alumno y su equipo analicen lo ya visto lo repasen en un intercambio de ideas y conocimientos hasta lograr graficar los 3 ejemplos vistos en el final de la practica 4.</td><td>Conocimientos previos: El manejo adecuado de lo visto hasta ahora, de función racional y los temas resolución de sistemas de ecuaciones lineales y factorización de un polinomio.</td></tr>
</table>

GRAFICAR UNA FUNCIÓN RACIONAL COMPLETA

Aplique los siete pasos, si es necesario y grafique en forma completa las siguientes funciones racionales

Ejemplo 1) Con los elementos ya conocidos y vistos de la función racional, grafica la siguiente función racional con los siete puntos.

$$f(x) = \frac{7x^3 + 3}{5x^3 - 7}$$

Sol.

Paso uno, La asíntota horizontal

Por el teorema de asíntotas horizontales inciso (2), si $n = m$ => la asíntota horizontal es $c = \frac{a_n}{b_m}$, en nuestro ejemplo tenemos, $n = 3$ y $m = 3$ y los coeficientes iníciales son 7 del numerador y 5 del denominador, entonces la asíntota horizontal es:

$$\boldsymbol{c = \frac{7}{5} = 1.4}$$

Paso dos, Asíntota vertical

La asíntota vertical es donde el denominador sé hacer cero, entonces si tenemos $f(x) = \frac{7x^3+3}{5x^3-7}$ el denominador $5x^3 - 7 = 0$ el cual despejamos para x, y tenemos:

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\frac{7}{5}} \;=>\; b = \mathbf{1.12}$$

Paso tres, Intersección con el eje "$\boldsymbol{y}$"

Al evaluar $f(x)$ en $x = 0$ se encuentra la intersección con el eje "y", --si la hay--, entonces tenemos

$$f(x) = \frac{7x^3+3}{5x^3-7} \quad \text{Se evalúa en } x = 0$$

$$f(0) = \frac{7(0)^3 + 3}{5(0)^3 - 7} = -\frac{3}{7}$$

Por tanto el punto $\boldsymbol{A}\left(\mathbf{0},\ -\frac{3}{7}\right)$

Paso cuatro, Intersección con la asíntota horizontal, en este caso el eje "y"

De igual forma que el anterior, pero ahora igualamos $f(x) = 0$ para encontrar la intersección con el eje "x", --si la hay--, se tiene entonces

$$\boldsymbol{\frac{7x^3+3}{5x^3-7} = 0 \;=>\; x = \sqrt[3]{\frac{-3}{7}} \;=\; -0.7539}$$

Por tanto el punto $\boldsymbol{B(-0.7539, 0)}$

Paso cinco, Intersección con la asíntota horizontal

Sabemos que asíntota horizontal es $c = \frac{7}{5}$, para determinar si la gráfica la corta, debemos igualarla con la ecuación, es decir:

$$\frac{7x^3+3}{5x^3-7} = \frac{7}{5} =>$$

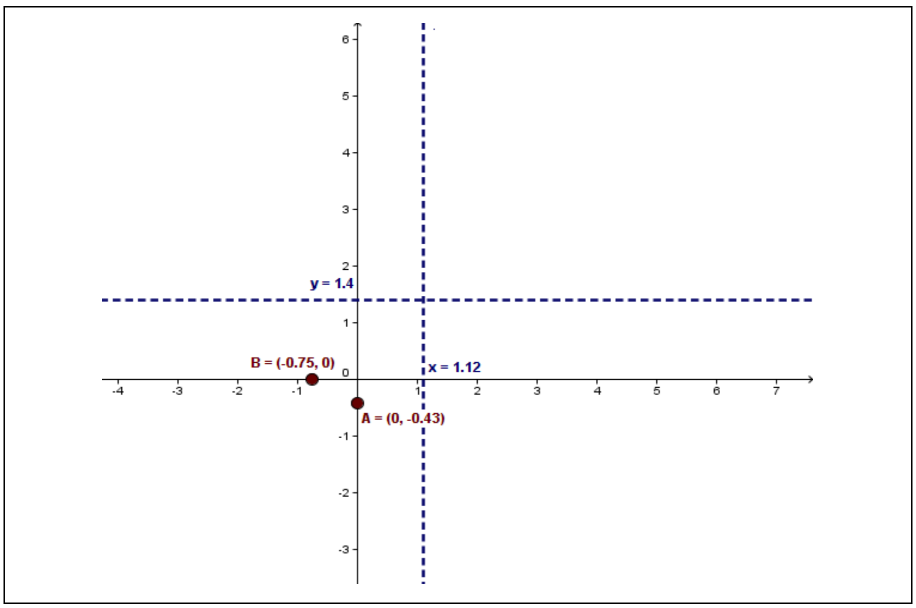
$$\mathbf{5(7x^3+3) = 7(5x^3-7)}$$

$$\mathbf{15 = -49}$$

Como el resultado es un absurdo, deducimos que no hay intersección con la asíntota horizontal.

Ahora, presentaremos un esbozo de lo que es la gráfica hasta el paso cinco.

fig. 8



1. **Para determinar por donde se extienden las ramas de la gráfica, iremos por partes**.

Como resulta obvio la gráfica pasara por los puntos $A(0, -0.43)$ y $B(-0.75, 0)$ que se encuentran en la región $R_1(-\infty, 1.12)$ y se extienda por arriba se acerca a la asíntota horizontal $c = 1.4$ y hacia abajo se acerca a la asíntota vertical $b = 1.12$.

Para reafirmar esta deducción se toman los siguientes valores, sean $x = -10{,}000$ y uno muy cercano a $b = 1.12$, sea pues1. Entonces se tiene:

Para $f(-10{,}000) = 1.4$ lo que nos dice que este punto $P(-10{,}000,\ 1.4)$ se aproxima mucho a la asíntota horizontal por la parte de abajo.

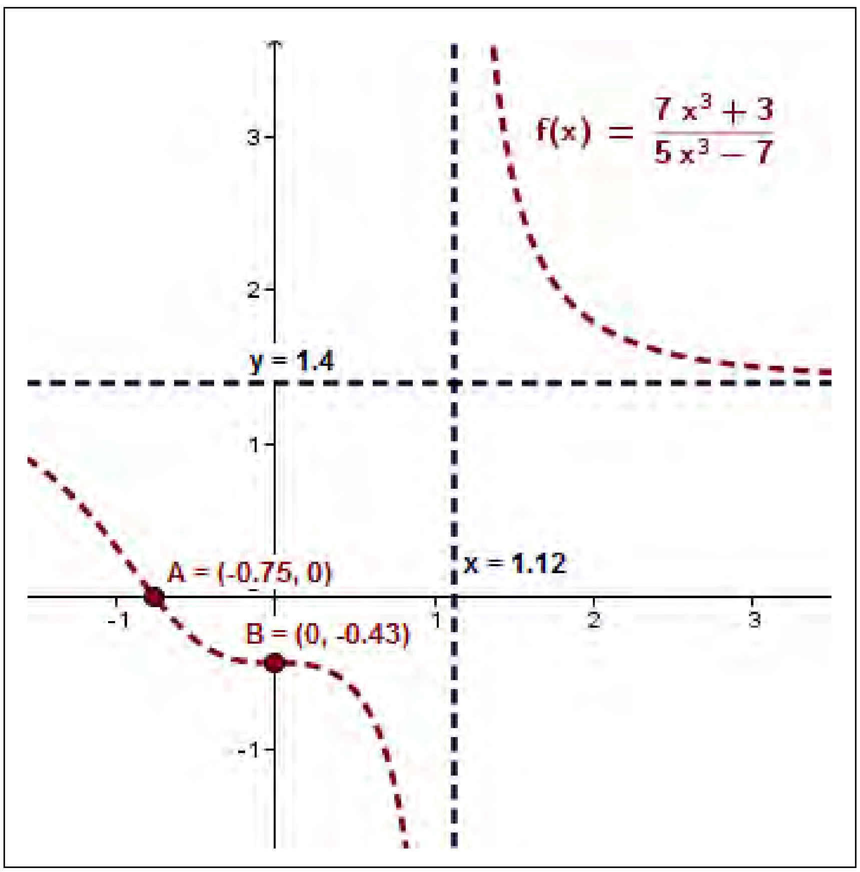
i) Para $f(1) = -5$ lo que nos dice que este punto $Q(1, -5)$ se aproxima mucho a la asíntota vertical.

ii) Para la región $R_2(1.12,\ +\infty)$ es de esperarse que por simetría la curva se extienda por arriba en contra-esquina, para reafirmar esto, tomamos valores como en los puntos i) y ii), digamos 10,000 y 1.3

Para $f(10{,}000) = 1.4$ lo que nos dice que este punto $R(10{,}000,\ 1.4)$ se aproxima mucho a la asíntota horizontal por la parte de arriba.

Para $f(1.3) = 4.61$ lo que nos dice que este punto $S(1.3,\ 4.61)$ se aproxima mucho a la asíntota vertical.

fig. 9



Ejemplo 2) Grafica la siguiente función racional completa con los 7 puntos.

$$f(x) = \frac{7x-2}{x^2-x-2}$$

Paso uno. Asíntota horizontal

Recordaras lector que el ejemplo **a)** $f(x) = \frac{7x-2}{x^2-x-2}$ su asíntota horizontal era el eje "x" que llamaremos "c" de acuerdo a la regla de asíntotas horizontales.

Por el teorema de asíntotas horizontales inciso (1), $n = 1$ y $m = 2$, => $n < m$, de aquí afirmamos que el eje "x" es la asíntota horizontal. Es decir $\boldsymbol{c = 0}$.

Paso dos. Asíntota vertical

Se acordó que asíntota vertical, es donde el denominador sé hacer cero, entonces tenemos que en $f(x) = \frac{7x-2}{x^2-x-2}$ el denominador lo tomamos como $x^2 - x - 2 = 0$ el cual al factorizar, lo podemos escribir como $(x + 1)(x - 2) = 0$ por lo tanto sus asíntotas verticales son

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{a = -1}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{b = 2}$$

Paso tres. Intersección con el eje "$\boldsymbol{y}$"

Recordaras lector, por Sistemas de Ecuaciones No lineales que al evaluar $f(x)$ en $x = 0$ se encuentra la intersección con el eje "y", si es que la hay, entonces tenemos:

$$f(x) = \frac{7x-2}{x^2-x-2} \text{ Se evalúa en } x = 0$$

$$f(0) = \frac{7(0) - 2}{(0)^2 - (0) - 2} = 1$$

y entonces se tiene el punto $\boldsymbol{A(0,\ 1)}$

Paso cuatro. Intersección con la asíntota horizontal, en este caso el eje "y"

De igual forma que el anterior, se iguala $f(x) = 0$ para encontrar la intersección con el eje "x", --si la hay--, se tiene entonces:

$$\frac{7x - 2}{x^2 - x - 2} = 0$$

y tenemos el punto $\boldsymbol{B}\left(\frac{2}{7}, \mathbf{0}\right)$

Paso cinco. Intersección con la asíntota horizontal

Si existe asíntota horizontal, es decir si $y = c$, determinar si corta a la grafica, Estos puntos son soluciones de la ecuación $f(x) = c$, trazarlos siguiendo el orden, C etc.

Nota: En este ejemplo, la Asíntota Horizontal es el eje "x", esto implica que este paso ya se vio en el inciso 4. En otro caso proceda como lo marca aquí.

Ahora se presenta un esbozo de lo que es la gráfica.

Para determinar por donde se extienden las ramas de la gráfica, se ira por partes.

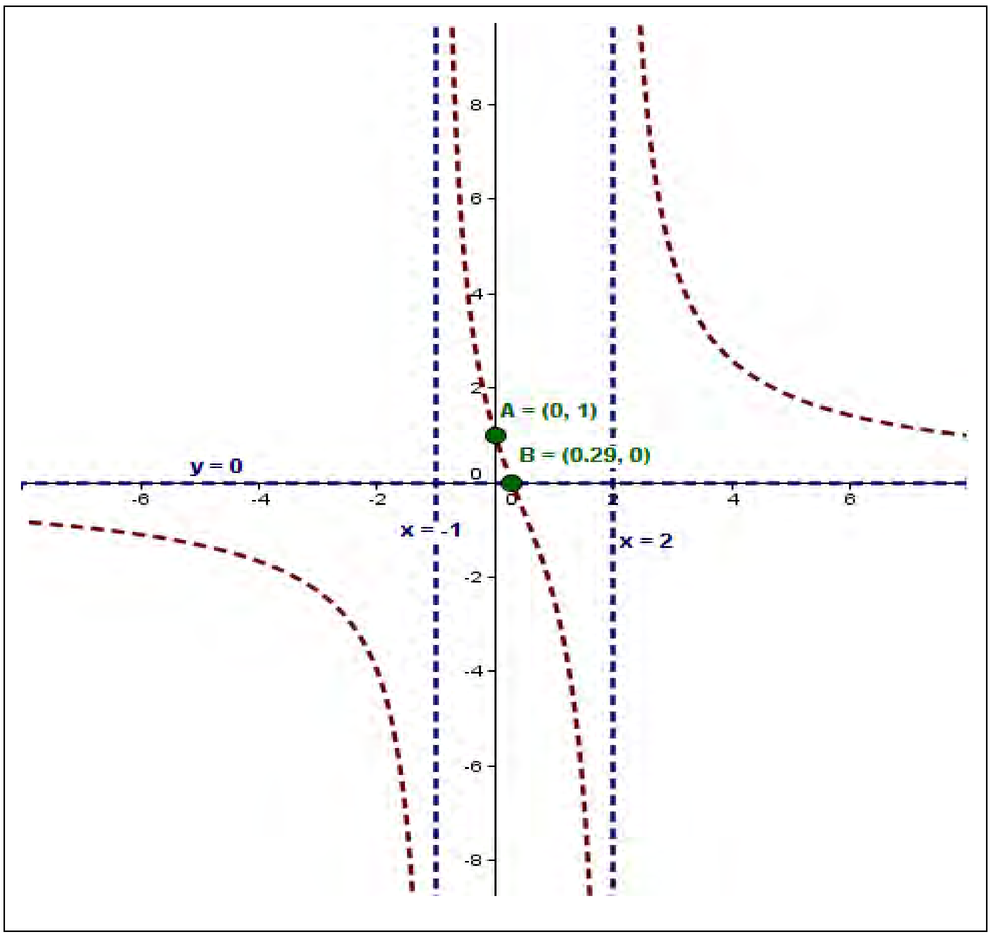
1. Para la región $R_1(-\infty, -2)$ se toman los valores de $-\infty$ a -2 cercanos a cada uno de ellos, en este intervalo, digamos $x_1 = -10{,}000$ y $x_2 = -2.01$
   Entonces para $f(-10{,}000) = -0.00070009$ lo que nos dice que se aproxima al eje "x" o al cero
   Y para $f(-2.01) = -3.96$ lo que nos dice que se aproxima al eje "x" o al cero. Por lo tanto la rama se extiende como se ve en la gráfica.
2. Para la región $R_2(-1,\ 2)$ se toman valores cercanos a -1 por la izquierda y por la derecha a 2; estos son $x_1 = -0.99$ y $x_2 = 1.99$
   Entonces para $f(-0.99) = 298.66$ lo que nos dice que se aproxima a la asíntota vertical $b = -1$ por arriba.
   Y para $f(1.99) = -398.99$ lo que nos dice que se aproxima a la asíntota vertical $a = 2$ por abajo. Por lo tanto la rama se extiende como se observa en la gráfica.

3. Para la región $R_3(2,\ \infty)$ se toman valores cercanos a 2 por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha; digamos $x_1 = 2.01$ y $x_2 = 10{,}000$

   Entonces para $f(2.01\,) = 400.99$ esto dice, que se aproxima a la asíntota vertical $a = 2$ por arriba.

   Y para $f(10{,}000) = 0.0007000$ esto dice que se aproxima a la asíntota horizontal $c = 0$ o eje "x" por arriba. Por lo tanto la rama se extiende como se ve en la gráfica.

Finalmente se concluye que la gráfica de la función $f(x) = \frac{7x-2}{x^2-x-2}$ es:



Ejemplo 3) Grafica la siguiente función racional con los siete pasos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x + 4}$$

Sol.

Paso uno) La Asíntota horizontal

Por el teorema de asíntotas horizontales inciso (3), $n = 2$ y $m = 1$ => $n > m$ entonces la grafica carece de asíntota horizontal. Esto da lugar a una asíntota oblicua, para justificar nuestro resultado y por la división larga tenemos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x + 4} = \left(\frac{x}{2} - 1\right) - \frac{5}{2x + 4}$$

Cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$, el cociente $\frac{x}{2} - 1$ aumenta cada vez más, sin limite y $-\frac{5}{2x+4} \to 0$; (ya visto como en el Ej. 1) por tanto, $f(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$ o a medida que $x \to -\infty$.

Bien, entonces trazaremos la recta $y = \frac{x}{2} - 1$, que pasa por 2 puntos obtenidos

- **i.** Si $x = 0$ => $y = -1$ Por lo tanto tenemos el punto $\boldsymbol{A(0, -1)}$
- **ii.** Si $y = 0$ => $x = 2$ Por lo tanto tenemos el punto $\boldsymbol{B(2,\ 0)}$

Paso uno) La Asíntota vertical

Como ya lo sabemos la asíntota vertical es donde el denominador sé hacer cero, entonces, si tenemos $f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x + 4}$ el denominador $2x + 4 = 0$ el cual despejamos para x, y tenemos:

$$x = -2 \;=>\; \boldsymbol{b = -2}$$

Paso tres) Intersección con el eje "$\boldsymbol{y}$"

Al evaluar $f(x)$ en $x = 0$ se encuentra la intersección con el eje "y", --si la hay--, entonces tenemos $y = \frac{x}{2} - 1$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x + 4} \quad \text{Evalúo en } x = 0$$

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 9}{2(0) + 4} = -\frac{9}{4}$$

Por tanto el punto $\boldsymbol{C\left(0,\ -\frac{9}{4}\right)}$

Paso cuatro) Intersección con la asíntota horizontal, en este caso el eje "y"

De igual forma que el anterior, pero ahora igualamos $f(x) = 0$ para encontrar la intersección con el eje "x", --si la hay--, se tiene entonces

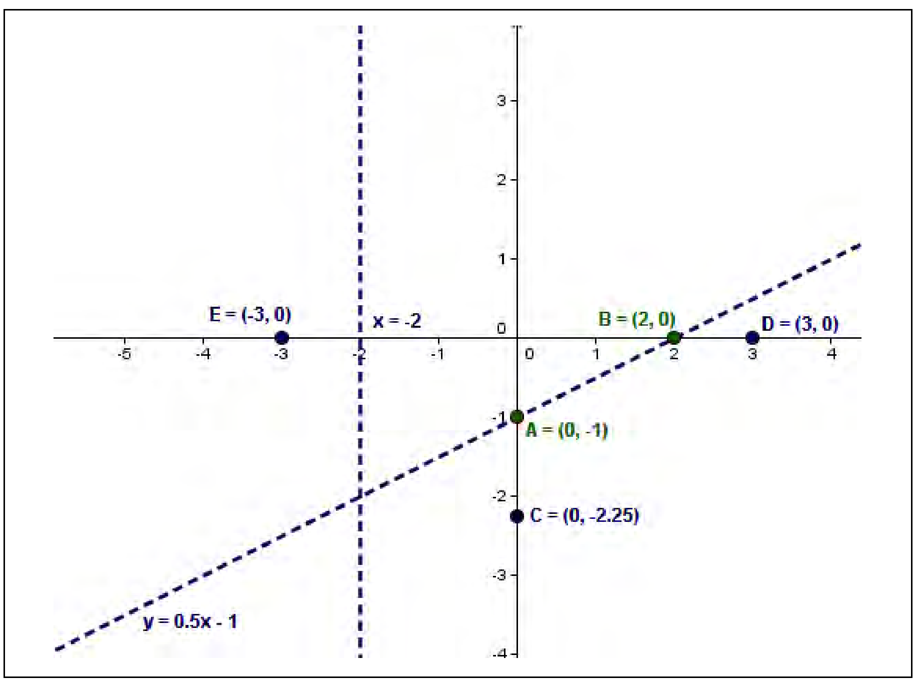
$$\frac{x^2 - 9}{2x + 4} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \pm\mathbf{3} \Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \mathbf{3},\quad \boldsymbol{x_1} = -\mathbf{3}$$

Por tanto el punto $\boldsymbol{D}(\mathbf{3},\mathbf{0}),\quad \boldsymbol{E}(-\mathbf{3},\mathbf{0})$

Paso cinco) Intersección con la asíntota horizontal

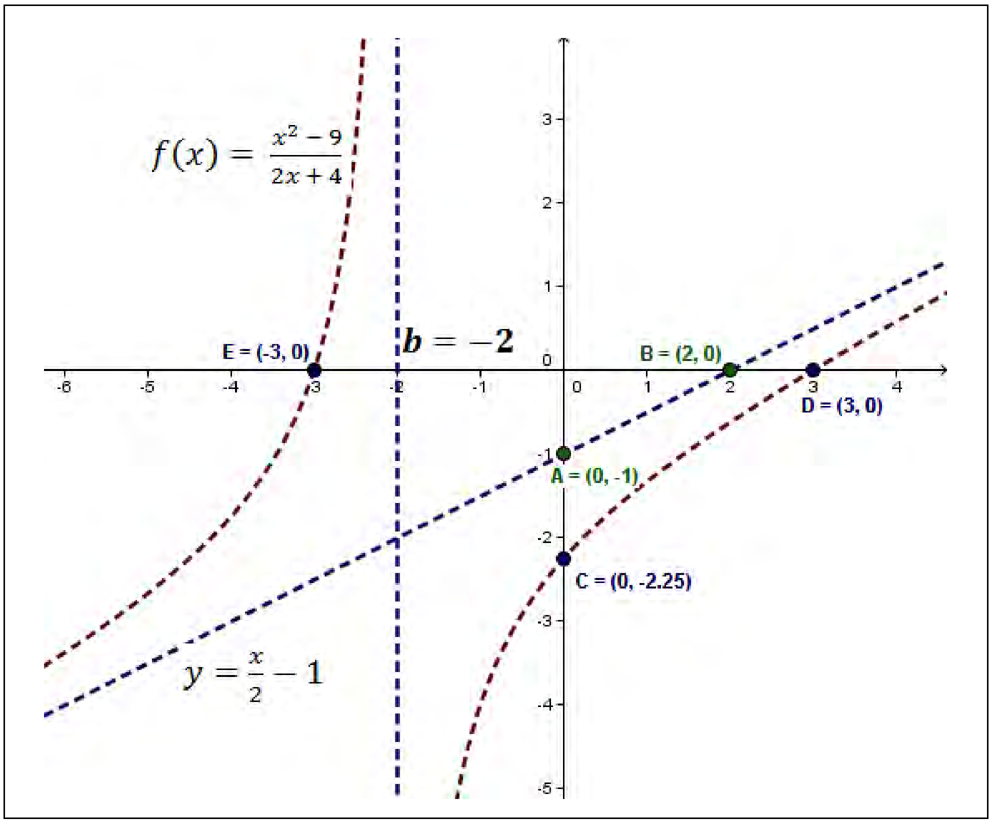
Sabemos que asíntota horizontal en este problema no existe, por lo tanto omitimos este punto.

Ahora, presentaremos un esbozo de lo que es la grafica hasta el punto 5.



Paso seis) Para determinar por donde se extienden las ramas de la grafica iremos por partes.

Como resulta obvio una rama de la gráfica pasara por los puntos $\boldsymbol{C}(\mathbf{0},\ -\mathbf{2.25})$ y $\boldsymbol{D}(\mathbf{3},\mathbf{0})$ y la otra rama por el punto $\boldsymbol{E}(-\mathbf{3},\mathbf{0})$, por lo tanto ya visto en el geogebra la gráfica queda como se observa abajo.



Fin.