Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS SISTEMAS ESTRATIFICANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

TEKPANI KOAMITZIN PÉREZ ALVARADO

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. EDITH CORINA SÁENZ VALADEZ

2015

1.Datos del alumno:
Pérez
Alvarado
Tekpani Koamitzin
53 55 19 00
Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias
Matemáticas
410016217

2. Datos del tutor
Dra.
Edith Corina
Sáenz
Valadez

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Octavio
Mendoza
Hernández

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Valente
Santiago
Vargas

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Diana
Avella
Alaminos

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Daniel
Labardini
Fragoso

7.Datos del trabajo escrito.
Propiedades fundamentales de los sistemas estratificantes
64p
2015

Índice general

Introducción

La noción de Sistema estratificante fue introducida en 2002 por K. Erdmann y C. Sáenz (ver [10]). Dicho concepto generaliza la noción de módulo estándar y de módulo inclinante característico asociados a las álgebras casi-hereditarias y a una generalización de ellas, las llamadas álgebras estándarmente estratificadas. Dichas álgebras han sido ampliamente estudiadas desde finales de los años 80 y aparecen en el contexto de los grupos algebraicos, álgebras de Lie y categorias de peso máximo. Estas últimas categorias fueron introducidas por E. Cline, B. Parshall y L. Scott en [7].

Las álgebras casi-hereditarias se definen mediante una cadena de ideales idempotentes, que resultan difíciles de encontrar, por ello, era deseable tener una mejor manera de estudiar dichas álgebras. Esta nueva forma fue introducida por V. Dlab y C. M. Ringel en [9]; en dicho artículo se introduce por primera vez la clase de módulos estándar ${}_{\Lambda}\Delta$ asociada a una K-álgebra de dimension finita Λ, que son Λ-módulos cocientes de los Λ-módulos proyectivos ${}_{\Lambda}P(i)$ de esta álgebra Λ.

Una de las propiedades más importantes de las álgebras estándarmente estratificadas es su conexión con los módulos inclinantes, y fue introducida en 1991 por C.M.Ringel (ver [13]). En dicho artículo se estudian las propiedades homológicas de la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ de los módulos ${}_{\Lambda}\Delta$-filtrados de un álgebra casi-hereditaria Λ y se construye el llamado módulo característico T asociado a a $\mathcal{F}(\Delta)$. C. M. Ringel mostró que el módulo T resulta ser un módulo inclinante y además, el álgebra de endomorfismos $A = \mathrm{End}_{\Lambda}(T)$ es de nuevo casi-hereditaria. Varios de estos resultados fueron generalizados por I. Agoston, D. Happel, E. Lukacs y L. Unger en [2].

En la noción de sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$, el conjunto Θ generaliza la noción del conjunto de los módulos estándar, el módulo $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ el concepto del módulo característico T y $\leq$ es el orden natural en el conjunto $1, 2, \ldots, t$ que indexa a los módulos del conjunto Θ.

El objetivo de esta tesis es estudiar las propiedades generales del concepto de sistema estratificante. Dichas propiedades fueron dadas por K. Erdmann y C. Sáenz en [10]. El contenido temático del trabajo está distribuido en tres capítulos. En el primero, estudiamos las nociones básicas: álgebra de dimension finita, álgebras de carcaj y módulos estándar. En el segundo, se estudia la definición de sitema estratificante y sus principales propiedades. En estas se muestra claramente como el nuevo concepto, es una generalización de las nociones previamente introducidas para las álgebras casi-hereditarias y estándarmente estratificadas. Además, se muestra que cada sistema estratificante produce un álgebra estándarmente estratificada (a la derecha); a saber, dado el sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$, se demuestra que el álgebra $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$ es un álgebra estándarmente estratificada (a la derecha). Ver Teorema 2.2.24. En la última sección de este capítulo se dan varios ejemplos que ilustran el resultado anterior.

Por último, en el tercer capítulo, se muestra que dado un sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$, la categoría $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \Lambda$-mod (de los Θ-módulos filtrados) y la categoría $\mathcal{F}(\Delta_A) \subseteq$ mod-A (de los Δ_A-módulos filtrados) son contravariantemente equivalentes.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo abordaremos la definición de K-álgebra de dimensión finita, de K-álgebra de carcaj y de los módulos estándar. Además, proporcionaremos los resultados relevantes relacionados con dichos conceptos. Hemos intentado hacer esto de una forma concisa, por lo que hemos omitido varias demostraciones.

Cabe señalar que es importante entender el concepto de módulo estándar, ya que es éste el que motiva la noción de Sistema estratificante.

1.1. Álgebras

Como su nombre lo indica, en esta sección estudiaremos el concepto de K-álgebra básica, conectada de dimensión finita. En este trabajo, K denotará un campo, los anillos que consideraremos serán anillos asociativos con uno, pero nos referiremos a ellos como anillos únicamente.

Definición 1.1.1. *Sea K un campo y Λ un anillo asociativo con uno, denotado por* 1_Λ.

1. *Decimos que Λ es una K-álgebra si Λ tiene estructura de K-espacio vectorial de forma tal que el producto por escalares es compatible con la multiplicación del anillo Λ.*

   Es decir, que $\forall\, k \in K$ y $\forall\, a, b \in \Lambda$, se tiene que $k \cdot (ab) = (k \cdot a)b = a(k \cdot b)$

2. *Decimos que Λ es una K-álgebra de dimensión finita cuando Λ es de dimensión finita como K-espacio vectorial.*

Los siguientes anillos son ejemplos de K-álgebras. En cada uno de los ejemplos, la estructura de K-espacio vectorial es la usual.

Ejemplo 1.1.2.

1. *Todo campo K es una K-álgebra de dimensión uno.*
2. *$\mathbb{M}_n(K)$, el anillo de las matrices de $n \times n$ con coeficientes en K, es una K-álgebra de dimensión n^2.*
3. *$K[x]$, el anillo de los polinomios con coeficientes en K, es una K-álgebra de dimensión infinita.*

Definición 1.1.3. *Se dice que un campo K es algebraicamente cerrado si todo polinomio no constante $f(x)$ en $K[x]$ tiene una raíz en K.*

Se sabe que la definición anterior es equivalente a pedir que todo polinomio no constante $f(x)$ en $K[x]$ tenga todas sus raíces en K. En particular, se tiene la siguiente observación.

Observación 1.1.4. *Si K es algebraicamente cerrado y $f(x) \in K[x]$ (no constante), entonces $f(x) = a_0(x - k_1)\dots(x - k_n)$ donde $k_1, \dots, k_n$ son las raíces, no necesariamente distintas, de $f(x)$, y $a_0 \in K$.*

Ejemplo 1.1.5.

1. *El campo $\mathbb{C}$ de los números complejos es algebraicamente cerrado.*

Las K-álgebras que consideraremos a partir de ahora serán siempre K-álgebras de dimensión finita. Por comodidad nos referiremos a ellas, a menudo, únicamente como K-álgebras y supondremos siempre que K es un campo algebraicamente cerrado.

Ahora bien, se sabe que Λ-Mod es la categoría de los Λ-módulos izquierdos, y también que, si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, entonces Λ-mod la subcategoría plena de Λ-Mod cuyos objetos son los Λ-módulos finitamente generados, consta de los Λ-módulos que tienen estructura de K-espacio vectorial de dimensión finita.

Así, dado un Λ-módulo M en Λ-mod, se tiene que M es artiniano y noetheriano (ya que $dim_k M < \infty$). Por ello, por el Teorema de Krull-Schmidt, M tiene una descomposición única (salvo isomorfismo) en suma directa de Λ-módulos inescindibles:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_t.$$

Ahora, si consideramos al Λ-módulo regular ${}_\Lambda\Lambda$, tenemos que ${}_\Lambda\Lambda = \Lambda 1_\Lambda$, de donde vemos que ${}_\Lambda\Lambda$ es finitamente generado, y por lo anterior,

$$ {}_\Lambda\Lambda = P(1) \oplus \cdots \oplus P(n) \qquad (1)$$

con $P(1), \ldots, P(n)$ Λ-módulos inescindibles, y por el Teorema de Krull-Schmidt, esta descomposición es única salvo isomorfismo. Además, como ${}_\Lambda\Lambda$ es un Λ-módulo libre, se tiene que cada $P(i)$ es un Λ-módulo proyectivo para toda $i = 1, \ldots, n$.

Nos referiremos a la descomposición (1) de ${}_\Lambda\Lambda$ como la descomposición de ${}_\Lambda\Lambda$ en suma directa de Λ-módulos proyectivos inescindibles.

Por otra parte, también se sabe que si $P \in \Lambda$-mod es un Λ-módulo proyectivo e inescindible, entonces, $P \simeq P(i)$ para alguna $i = 1, \ldots, n$.

Esto es, que $\{P(1), \ldots, P(n)\}$ es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de los Λ-módulos finitamente generados proyectivos e inescindibles, (no necesariamente no isomorfos).

Más aún, se sabe que cada Λ-módulo $P(i)/radP(i)$ es un Λ-módulo simple para toda $i = 1, \ldots, n$. Y si S es un Λ-módulo simple, entonces $S \simeq P(i)/radP(i)$ para alguna $i = 1, \ldots, n$.

Lo que implica que el conjunto $\{P(1)/radP(1), \ldots, P(n)/radP(n)\}$ es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de los Λ-módulos simples, (no necesariamente no isomorfos). Ver por ejemplo en [6]

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.6. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, se dice que Λ es básica, si los Λ-módulos proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición "no se repiten".*

Es decir, si ${}_\Lambda\Lambda = P(1) \oplus \cdots \oplus P(n)$ donde $P(1), \ldots, P(n)$ son Λ-módulos proyectivos e inescindibles, se tiene que $P(i) \simeq P(j)$ implica $i = j$.

Ejemplo 1.1.7.

1. *La $\mathbb{C}$-álgebra $\Lambda = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{C}\}$, donde $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$ no es básica, ya que $\Lambda = \Lambda(1, 0) \oplus \Lambda(0, 1)$ y se puede ver fácilmente que $\Lambda(1, 0) \simeq \Lambda(0, 1)$.*
2. *La $\mathbb{C}$-álgebra $\Lambda = \mathbb{C}$, es una $\mathbb{C}$-álgebra básica.*

Definición 1.1.8. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, decimos que Λ es conectada o inescindible si Λ no es suma directa de dos K-álgebras. Equivalentemente, Λ es conectada si 0_Λ y 1_Λ son los únicos idempotentes centrales de Λ.*

Ejemplo 1.1.9.

1. *La $\mathbb{C}$-álgebra $\Lambda = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{C}\}$, donde $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$ no es conectada, ya que $\Lambda = \Lambda(1, 0) \oplus \Lambda(0, 1)$ con $\Lambda(1, 0)$ y $\Lambda(0, 1)$ $\mathbb{C}$-álgebras.*
2. *$\Lambda = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ es conectada, ya que 0_Λ y 1_Λ son los únicos idempotentes centrales de Λ. Ver [4]*

En este trabajo supondremos, a menos que indiquemos de otro modo, que Λ es una K-álgebra básica, de dimensión finita e inescindible y que K es un campo algebraicamente cerrado. Una K-álgebra con las propiedades antes mencionadas puede ser caracterizada mediante una K-álgebra de carcaj módulo un ideal admisible, ver el Teorema 1.2.18, que es un resultado del matemático P. Gabriel; por ello, en la siguiente sección estudiaremos estas álgebras.

1.2. Álgebras de Carcaj

En esta sección estudiaremos la noción de álgebra de carcaj. Dichas álgebras son importantes ya que se sabe que toda K-álgebra Λ de dimensión finita, básica e inescindible es isomorfa a un álgebra de carcaj módulo un ideal admisible. Ver Teorema 1.2.18

Definición 1.2.1. *Un carcaj C es una gráfica orientada, conexa y finita. Denotamos por C_0 al conjunto de vértices de C y por C_1 al conjunto de flechas de C.*

Como C es finita, se tiene que $\mid C_0 \mid < \infty$ y que $\mid C_1 \mid < \infty$; dado que C es conexa, para cada par de vértices en C existe un camino (no necesariamente dirigido, ver la Definición 1.2.3) que los une, y puede haber lazos y aristas múltiples.
Si $\alpha \in C_1$, es decir, α es una flecha de C, denotaremos $\alpha : i \to j$ para indicar que α inicia en el vértice i y termina en el vértice j.

Ejemplo 1.2.2. *Los siguientes son ejemplos de carcajes:*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "\beta"] & 2 \arrow[d, "\alpha"] & \\ 4 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & 1 & 6 \\ & 5 \arrow[ur, "\epsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & 3 \arrow[r, "\beta"] & 4 \\ 2 \arrow[ur, "\gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

El concepto de camino dirigido es esencial en el desarrollo de este capítulo. A continuación damos la definición.

Definición 1.2.3. *Dado un carcaj C, un camino dirigido de i a j de longitud n, es una sucesión de vértices y flechas $(i/\alpha_1, \ldots, \alpha_n/j)$ con $n \geq 1$, que satisface que :*

$$\begin{gathered} \alpha_1 \text{ inicia en } i \\ \text{vértice final de } \alpha_1 = \text{vértice inicial de } \alpha_2 \\ \text{vértice final de } \alpha_2 = \text{vértice inicial de } \alpha_3 \end{gathered}$$

$$\vdots$$
$$v\acute{e}rtice\ final\ de\ \alpha_n = j$$

Si $n = 0$ pedimos que $i = j$ y en este caso asociamos a cada vértice su camino trivial (o de longitud 0), que denotamos por $\tau_i := (i//i)$.

Definición 1.2.4. *Denotaremos por KC el K-espacio vectorial cuya base es el conjunto de todos los caminos dirigidos del carcaj C.*

Al K-espacio vectorial KC se le da estructura de K-álgebra, definiendo primero el producto en los elementos de la base. Es decir, el producto de los caminos dirigidos $(i/\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n/j)$ y $(h/\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p/m)$ se define por:

$(i/\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n/j) \bullet (h/\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p/m) = 0$ *si* $h \neq j$.
$(i/\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n/j) \bullet (h/\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p/m) = (i/\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_p/m)$
si $h = j$.

El producto anterior se extiende bilinealmente a todo KC de tal forma que se obtiene una K-álgebra cuyo uno es

$$1_{KC} = \sum_{i \in C_0} \tau_i$$

Por comodidad, denotaremos $(h/\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p/m)$ por $\beta_1 \ldots \beta_{p-1}\beta_p$.

A esta K-álgebra se le llama la K-álgebra de carcaj asociada a C.

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.5. *Consideremos el siguiente carcaj.*

$$C: \quad \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

La base ξ de la K-álgebra KC es $\xi = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta, \gamma\delta\}$. Por lo tanto, $dim_K KC = 10$.

Algunas de las propiedades de la K-álgebra KC serán enunciadas en el siguiente teorema. Para su demostración ver por ejemplo en [6].

Teorema 1.2.6. *Sea C un carcaj. Entonces:*

1. *El conjunto $\{\tau_i \, : i \in C_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de la K-álgebra KC.*

2. *La K-álgebra KC es inescindible y básica.*

3. *La K-álgebra KC es de dimensión finita si sólo si C no tiene ciclos dirigidos. (Es decir, caminos dirigidos de longitud $n > 0$ que empiezan y terminan en el mismo vértice.)*

Demostración. Ver por ejemplo en [6, Proposición 2.2.1, Proposición 2.2.2 y Proposición 2.2.3]. □

Ejemplo 1.2.7. *Para ilustrar el inciso 3. del teorema anterior veamos cómo los ciclos dirigidos en un carcaj provocan que el álgebra de caminos KC sea de dimensión infinita.*

Consideremos el carcaj $1 \circlearrowright_{\beta}$. *La base de la K-álgebra KC es $\gamma = \{\tau_1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots, \beta^n, \dots\}$, por lo que la dimensión de KC es infinita.*

Dado que nos interesa estudiar sólo álgebras de dimensión finita, será necesario estudiar cocientes del álgebra KC. Para ello, será indispensable considerar ciertos ideales (bilaterales) de KC.

Empezaremos estudiando el ideal F generado por todas las flechas del carcaj.

Definición 1.2.8. *Denotaremos por F el ideal de la K-álgebra KC generado por todas las flechas del carcaj C.*

Observación 1.2.9. *Se puede probar que F es un ideal bilateral.*

Observación 1.2.10. *El ideal F coincide con el K-subespacio vectorial de KC que tiene por base los caminos dirigidos no triviales, es decir, los caminos dirigidos de longitud $n \geq 1$.*

La importancia del ideal F de KC nos la da la siguiente proposición.

Proposición 1.2.11. *El radical de la K-álgebra KC coincide con el ideal F cuando el carcaj C no tiene ciclos dirigidos.*

Demostración. Ver por ejemplo en [6]. □

Cosideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.12. *Sea el carcaj*

$$
C: \quad \begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "\gamma"] & & & 6 \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & 4 \arrow[r, "\epsilon"] & 5 \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
 & 3 \arrow[ur, "\delta"'] & & & 7
\end{tikzcd}
$$

F es el ideal bilateral generado por las flechas del carcaj C, de donde
$F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \varphi, \alpha\gamma, \beta\delta, \gamma\epsilon, \delta\epsilon, \epsilon\varphi, \epsilon\eta, \alpha\gamma\epsilon, \beta\delta\epsilon, \gamma\epsilon\varphi, \delta\epsilon\eta, \gamma\epsilon\eta, \delta\epsilon\varphi,$
$\alpha\gamma\epsilon\varphi, \beta\delta\epsilon\eta, \alpha\gamma\epsilon\eta, \beta\delta\epsilon\varphi\}$

Para avanzar en el desarrollo de la sección, necesitamos esta definición.

Definición 1.2.13. *Sea KC una K-álgebra de carcaj y R un ideal bilateral de KC. Decimos que R es admisible si:*

1. *R está contenido en F^2.*

2. *R contiene alguna potencia de F. Es decir, existe $t \geq 2$ tal que $F^t \leq R$.*

Ejemplo 1.2.14. *Sea el carcaj*

$$C: \quad \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & & 5 \arrow[dl, "\gamma"'] \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & 4 \arrow[dr, "\eta"'] & \\ & 3 \arrow[ur, "\zeta"'] & & 6 \arrow[uu, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

y $R =< \alpha\beta - \epsilon\zeta, \beta\eta, \eta\delta\gamma >$ en KC. Es claro que $R \subseteq F^2$ ya que todos sus generadores tienen longitud mayor o igual a 2, y $F^5 \subseteq R$ ya que $F^5 =< \alpha\beta\eta\delta\gamma, \epsilon\zeta\eta\delta\gamma, \eta\delta\gamma\eta\delta >$

Las propiedades más importantes de la K-álgebra cociente KC/R, con R un ideal admisible, son enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.15. *Consideremos la K-álgebra cociente KC/R, con R un ideal admisible. Entonces :*

1. *El conjunto $\{\bar{\tau}_i \ : i \in C_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de la K-álgebra KC/R, donde $\bar{\tau}_i$ es la clase de τ_i en KC/R*

2. *KC/R es una K-álgebra inescindible.*

3. *KC/R es de dimensión finita.*

4. *KC/R es básica.*

Demostración. Ver por ejemplo en [6, Proposición 2.3.1, Proposición 2.3.2, Proposición 2.3.3 y Proposición 2.3.6]. □

Ejemplo 1.2.16. *Consideremos la K-álgebra de carcaj del Ejemplo 1.2.14., y veamos la importancia de que el ideal R, con el que se hace la K-álgebra cociente, sea admisible para poder obtener una K-álgebra de dimensión finita.*

Sea $R =< \alpha, \beta >$. Es claro que $R \nsubseteq F^2$; por lo tanto, R no es admisible, ya que no cumple con el inciso 1. de la definición 1.2.12.

Ahora, si calculamos la K-álgebra cociente KC/R, obtenemos que ésta contiene al menos un ciclo dirigido ya que $\bar{\eta}\bar{\delta}\bar{\gamma} \in KC/R$ y $\bar{\eta}\bar{\delta}\bar{\gamma} \neq 0$, por lo tanto, por el inciso 3. del Teorema 1.2.6., la K-álgebra KC/R es de dimensión infinita.

Dada una K-álgebra KC y un ideal admisible R, podemos considerar la proyección canónica $\Pi : KC \to KC/R$.

El siguiente resultado establece que el radical de KC/R es igual a $\Pi(F)$.

Teorema 1.2.17. *Denotemos por $\bar{F}$ a la imagen del ideal F bajo la proyección canónica $\Pi : KC \to KC/R$. Se tiene que $rad(KC/R) = \bar{F}$ y entonces $rad^m(KC/R) = \bar{F}^m \quad para \quad m \geq 1$.*

Demostración. Ver por ejemplo en [6, Proposición 2.3.4]. □

El teorema que se presenta a continuación es el resultado más importante de esta sección y es un resultado del matemático P. Gabriel. Su importancia radica en que, gracias a este resultado, podemos remitirnos a estudiar sólo las álgebras cocientes de caminos KC/R.

Teorema 1.2.18. *Toda K-álgebra Λ de dimensión finita, básica e inescindible sobre un campo algebraicamente cerrado es isomorfa al cociente de un álgebra de carcaj módulo un ideal admisible R.*

Demostración. Ver por ejemplo en [6, Sección 3.2]. □

Definición 1.2.19. *Sea R un ideal admisible del álgebra KC. Una relación ρ es un elemento no nulo de R. Es decir, ρ es una combinación K-lineal de caminos de longitud mayor o igual a dos.*
En caso de que los caminos que constituyen a ρ tengan todos el mismo vértice inicial y el mismo vértice final, por ejemplo s y t, se dice que la relación ρ es legible o que es una relación legible de s a t.

Ejemplo 1.2.20. *Sea el carcaj*

$$C: \quad \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & & 5 \arrow[dl, "\gamma"'] \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & 4 \arrow[dr, "\eta"] & \\ & 3 \arrow[ur, "\zeta"'] & & 6 \arrow[uu, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

y el ideal admisible $R = < \alpha\beta - \epsilon\zeta, \beta\eta, \eta\delta\gamma >$ de KC.

Consideremos $\rho = \alpha\beta - \epsilon\zeta$, es claro que es un elemento de R ya que es uno de sus generadores.

Se tiene también que $\alpha\beta$ comienza en 1 y termina en 4, al igual que $\epsilon\zeta$, por lo que se tiene que $\rho = \alpha\beta - \epsilon\zeta$ es una relación legible de 1 a 4 de KC.

Por otro lado, si consideramos $\rho = \beta\eta + \eta\delta\gamma$, ésta no es una relación legible, ya que $\beta\eta$ comienza en 2 y termina en 6, mientras que $\eta\delta\gamma$ comienza en 4 y termina en 4.

Proposición 1.2.21. *Sea R un ideal admisible del álgebra de carcaj KC, entonces R posee un sistema legible de generadores, es decir, un conjunto finito de KC-generadores que son relaciones legibles.*

Demostración. Ver por ejemplo en [6, Proposición 4.1.2]. □

1.3. Módulos Estándar

Como ya se dijo, en esta sección Λ denotará una K-álgebra de dimensión finita, básica e inescindible sobre un campo algebraicamente cerrado. Por comodidad, nos referiremos a Λ sólo como una K-álgebra o como un álgebra. Además trabajaremos con Λ-módulos derechos finitamente generados. Por el Teorema de Krull-Schmidt, ver [3, Teorema 12.9], sabemos que Λ tiene una única descomposición (salvo isomorfismo) de la forma

$$\Lambda_\Lambda = e_1\Lambda \bigoplus e_2\Lambda \bigoplus \cdots \bigoplus e_n\Lambda \qquad (1)$$

donde $e_i\Lambda$ es un Λ-módulo proyectivo inescindible para toda $i = 1, ..., n$ y $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.

Nos referimos a la descomposición (1) como la descomposición de Λ_Λ en suma directa de Λ-módulos proyectivos inescindibles.

Dada la descomposición (1) de Λ_Λ, se sabe que:

1. Los Λ-módulos derechos $S(i) = e_i\Lambda/rad(e_i\Lambda)$ para $i = 1, ..., n$ forman una lista completa de todos los Λ-módulos simples (salvo isomorfismo).

2. El Λ-módulo proyectivo $e_i\Lambda$ es la cubierta proyectiva del simple $S(i)$ para $i = 1, ..., n$. Se acostumbra denotar a $e_i\Lambda$ por $P(i)$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

3. El radical de cada Λ-módulo $e_i\Lambda$, $rad(e_i\Lambda)$, es un submódulo maximal de $e_i\Lambda$, y por tanto, $rad(e_i\Lambda)$ es el único submódulo maximal de $e_i\Lambda$ para toda $i = 1, ..., n$, ya que $e_i\Lambda$ es inescindible.

Además:

1. La envolvente inyectiva de cada simple $S(i)$ será denotada por $I(i)$ para toda $i = 1, ..., n$.

2. Fijamos el orden natural $\leq$ en el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, que por comodidad denotaremos por $[1, n]$.

Para construir los módulos estándar necesitamos la siguiente definición .

Definición 1.3.1. *Sea $M \in$ mod-Λ y $\mathcal{U}$ una familia de objetos en mod-Λ. La traza de $\mathcal{U}$ en M, $Tr_{\mathcal{U}}(M)$, es el submódulo de M generado por el conjunto*

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \bigcup_{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(U,M)} Im(f)$$

Los siguientes lemas establecen propiedades fundamentales de la traza de un módulo proyectivo P en ciertos módulos cocientes.

Lema 1.3.2. *Sean $M, N, P \in$ mod-Λ con P proyectivo, entonces:*

1. $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M/Tr_P(M)) = 0$.

2. *Si N es un submódulo de M y $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M/N) = 0$, entonces $Tr_P(M) \subseteq N$.*

Demostración. Ver por ejemplo en [12, Lema 2.2.]. □

Lema 1.3.3. *Sean Λ una K-álgebra y $Y, Z \in$ mod-Λ. Entonces $Tr_Y(Z)$ es el mayor submódulo de Z tal que existe un epimorfismo $\varphi : Y^m \to Tr_Y(Z)$ para algún $m \geq 1$.*

Demostración. Notemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(Y,Z) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(Y, Tr_Y(Z))$. Consideremos una base $\{f_1, ..., f_m\}$ del K-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_\Lambda(Y, Tr_Y(Z))$ y el morfismo $\varphi : Y^m \to Tr_Y(Z)$ dado por $\varphi(y_1, ..., y_m) := \sum_{i=1}^{m} f_i(y_i)$.

Veamos que φ es un epimorfismo. En efecto, dado $x \in Tr_Y(Z)$, existe un morfismo $f : Y \to Z$ tal que $f(y) = x$ para algún $y \in Y$. Como $f = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$ se sigue que $x = f(y) = \sum_{i=1}^{m} f_i(a_i y) = \varphi(a_1 y, ..., a_m y)$. Probando que $\varphi : Y^m \to Tr_Y(Z)$ es un epimorfismo.

Por otro lado, si $N \leq Z$ es tal que existe un epimorfismo $f : Y^m \to N$, entonces tenemos el morfismo $if : Y^m \to Z$, donde $i : N \to Z$ es la inclusión canónica. De donde $N = Im(if) \subseteq Tr_Y(Z)$.

Esto muestra que $Tr_Y(Z)$ es el mayor submódulo de Z con la propiedad mencionada. $\square$

Teniendo lo anterior, estamos listos para definir los módulos estándar.

Definición 1.3.4. *Sea Λ una K-álgebra y sea $\Lambda_\Lambda = e_1\Lambda \bigoplus e_2\Lambda \bigoplus \cdots \bigoplus e_n\Lambda$ su descomposición en suma directa de proyectivos inescindibles.*

1. *Para cada $i = 1, ..., n$, denotamos $U(i) := Tr_{P^{>i}}(P(i))$, donde $P^{>i} := \bigoplus_{j>i} P(j)$. Es decir, $U(i) = \sum_{f:\, \bigoplus_{j>i} P(j) \to P(i)} Imf$.*

2. *Para cada $i \in [1, n]$, definimos al i-ésimo módulo estándar derecho por:*
$$\Delta(i) = P(i)/U(i).$$

3. *Al conjunto $\Delta = \{\Delta(1), \Delta(2), ..., \Delta(n)\}$ se le conoce como el conjunto de los Λ-módulos estándar derechos.*

4. *Denotamos por $\mathcal{F}(\Delta)$ la subcategoría plena de mod-Λ que consta del Λ-módulo cero, y de todos los $M \in$ mod-Λ no cero que tienen una Δ-filtración, esto es, una cadena finita de Λ-submódulos:*

$$F : M = M_0 > M_1 > .... > M_{m-1} > M_m = 0.$$

donde $M_i/M_{i+1} \simeq \Delta(j_i)$ *para* $i = 0, ..., m-1$.

A la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ *se le conoce como la categoría de los* ***módulos buenos derechos****.*

Observación 1.3.5.

1. *Es claro de la definición de módulo estándar que* $\Delta(n) = P(n)$.
2. *El* Λ*-submódulo* $U(i)$ *es un submódulo propio de* $P(i)$ *para todo* $i \in [1, n]$.

Una vez que hemos definido los módulos estándar, estamos listos para dar la definición de un álgebra estándarmente estratificada a la derecha. Para ello, recordemos que hemos fijado el orden de los Λ-módulos simples $S(1), S(2), \dots, S(n)$, y que hemos fijado el orden natural $\leq$ en el conjunto $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Para hacer énfasis en lo anterior, en la siguiente definición denotaremos la K-álgebra Λ por $(\Lambda, \leq)$.

Definición 1.3.6. *Sea* $(\Lambda, \leq)$ *una* K*-álgebra. Se dice que* Λ *es un álgebra estándarmente estratificada a la derecha si* $\Lambda_\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$ *esta definición es la que se da en [2].*

Procederemos ahora a dar una caracterización de los Λ-módulos estándar, ésta nos será muy útil más adelante. Para ello, recordemos las siguientes definiciones.

Definición 1.3.7. *Sea* $M \neq 0$ *un* Λ*-módulo derecho. Se dice que una cadena finita*

$$M = M_0 > M_1 > \cdots > M_m = 0$$

de submódulos de M *es una serie de composición de longitud* m *para* M*, si* M_{i-1}/M_i *es simple* $\forall\ i \in [1, m]$.

Los módulos simples M_{i-1}/M_i *se llaman los factores de composición de la serie o factores de composición de* M, $\forall\ i \in [1, m]$.

Como es bien sabido, el Teorema de Jordan-Hölder establece que el número de veces que aparece cada módulo simple como factor de composición de M es independiente de la serie de composición de M si $dim_K(M) < \infty$, y por ende la longitud también.

Así pues, podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.3.8. *Sea Λ una K-álgebra , $M \in$ mod-Λ y $S \in$ mod-Λ simple. La multiplicidad de S en M, es decir, el número de veces que aparece S como factor de composición de M, será denotada por $[M : S]$.*

El siguiente resultado es bien conocido.

Proposición 1.3.9. *Sea Λ una K-álgebra, $i \in [1, n]$ y $M \in$ mod-Λ, entonces* $\mathrm{Hom}_\Lambda(P(i), M) \neq 0$ *si y sólo si* $[M : S(i)] \neq 0$.

Demostración. Ver por ejemplo en [12, Proposición 2.5.]. □

Procedemos ahora a dar la caracterización de los módulos estándar. Para cada $i \in [1, n]$ definimos el conjunto:

$$Q^i = \{P(i)/L : L \leq P(i) \; y \; [P(i)/L : S(j)] = 0 \; para \; j > i\}.$$

Es decir, Q^i es el conjunto de todos los módulos cocientes de $P(i)$ que tienen sólo factores de composición $S(k)$ *con* $k \leq i$. Nótese que $S(i) = P(i)/rad(P(i)) \in Q^i$.

En Q^i definimos el orden parcial $\subseteq$ dado por $P(i)/L \subseteq P(i)/T$ *si* $L \supseteq T$. Con la notación anterior tenemos la siguiente caracterización de los Λ-módulos estándar.

Proposición 1.3.10. *Para cada $i \in [1, n]$, se tiene que el i-ésimo módulo estándar derecho $\Delta(i)$ es el único elemento maximal de Q^i con respecto al orden parcial $\subseteq$.*

Es decir, $\Delta(i)$ es el cociente maximal de $P(i)$ que tiene sólo factores de composición $S(k)$ con $k \leq i$.

Demostración. Primero veamos que $\Delta(i) \in Q^i$ para toda $i \in [1, n]$.

Sea F una serie de composición de $\Delta(i) = P(i)/U(i)$, es decir,

$$F : P(i)/U(i) = M_0/U(i) > M_1/U(i) > \cdots > M_s/U(i) = 0.$$

donde $\{M_l\}_{l=0}^{s}$ son Λ-submódulos de $P(i)$ y que contienen a $U(i)$ (por el teorema de la correspondencia). Supongamos, para llegar a una contradicción, que $S(j)$, con $j > i$, es un factor de composición de $\Delta(i)$, es decir, para algún $k \in \{0, ..., s-1\}$ tenemos:

$$(M_k/U(i))/(M_{k+1}/U(i)) \simeq S(j).$$

Consideremos las proyecciones canónicas
$\Pi_1 : M_k \longrightarrow M_k/U(i)$, $\Pi_2 : M_k/U(i) \longrightarrow (M_k/U(i))/(M_{k+1}/U(i))$, y la proyección canónica $\Pi_{rad(P(j))} : P(j) \longrightarrow S(j)$.

Dado que $P(j)$ es un Λ-módulo proyectivo, tenemos que existe $f : P(j) \to M_k$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & P(j) \arrow[d, "\Pi_{rad(P(j))}"] \arrow[dll, dashed, "f"'] & \\
M_k \arrow[r, "\Pi_1"'] & M_k/U(i) \arrow[r, "\Pi_2"'] & S(j) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $M_k \leq P(i)$, podemos considerar a $f : P(j) \to P(i)$ y dado que $j > i$, tenemos que $Imf \leq U(i)$. De donde, $\Pi_1 f = 0$. Por lo que $0 = \Pi_2\Pi_1 f = \Pi_{rad(P(j))}$. Lo que lleva a una contradicción, ya que $P(j)/rad(P(j) = S(j) \neq 0$ por ser $S(j)$ simple, y $\Pi_{rad(P(j))}$ un epimorfismo.

Por lo tanto, $\Delta(i) = P(i)/U(i)$ tiene sólo factores de composición $S(j)$ con $j \leq i$.

La demostración de que $\Delta(i)$ es el cociente maximal de $P(i)$ que tiene factores de composición $S(k)$ *con* $k \leq i$ es análoga y la omitiremos.

$\square$

En los siguientes resultados enunciaremos algunas de las principales propiedades que satisfacen los módulos estándar y la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$.

Proposición 1.3.11. *Sean* Λ *una* K*-álgebra ,* $M \in$ *mod-*Λ *y* $\leqslant$ *el orden natural en* $[1, n]$ *, entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. $[M : S(i)] \neq 0$ *si* $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Delta(i), M) \neq 0$.
2. $\operatorname{Hom}_\Lambda(Tr_{P^{>i}}(P(i)), M) = 0$ *si y sólo si* $[M : S(j)] = 0$ *para* $j > i$.
3. *Existe* $j > i$ *tal que* $[M : S(j)] \neq 0$ *si* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Delta(i), M) \neq 0$.

Demostración. Ver por ejemplo en [12, Proposición 2.8.]. □

Proposición 1.3.12. *Sean* Λ *una* K*-álgebra y* $\leqslant$ *el orden natural en* $[1, n]$*. Entonces:*

1. $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Delta(i), \Delta(j)) = 0$, *si* $i > j$.
2. $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Delta(i), \Delta(j)) = 0$, *si* $i \geq j$.
3. *El* Λ*-módulo estándar* $\Delta(i)$ *es inescindible para cada* $i \in [1, n]$.

Demostración. Ver por ejemplo en [1, Lema 3.4.10 y Lema 3.4.11]. □

Definición 1.3.13. *Dada una subcategoría* $\mathcal{Y}$ *de mod-*Λ *y* $X \in$ *mod-*Λ*. Se dice que* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{Y}, X) = 0$ *si* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(Y, X) = 0$ *para toda* $Y \in \mathcal{Y}$.

Lema 1.3.14. *Sea* $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^n$ *el conjunto de los* Λ*-módulos estándar derechos. Si* $X \in$ *mod-*Λ*, entonces* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), X) = 0$ *si y sólo si* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Delta(i), X) = 0$ *para* $i \in [1, n]$.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Delta(i), X) = 0$ *para toda* $i \in [1, n]$. Sea $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ y F una Δ-filtración de M, es decir:

$$F : M = M_0 > M_1 > \ldots. > M_{m-1} > M_m = 0.$$

donde $M_i/M_{i+1} \simeq \Delta(j_i)$ para $i \in [1, m-1]$. Consideremos la sucesión exacta corta:

$$0 \to M_{m-1} \to M_{m-2} \to M_{m-2}/M_{m-1} \to 0.$$

Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\square, X)$ a esta sucesión exacta y obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{m-2}/M_{m-1}, X) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{m-2}, X) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{m-1}, X) \to \\ \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_{m-2}/M_{m-1}, X) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_{m-2}, X) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_{m-1}, X) \to \ldots \end{gathered}$$

Como $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_{m-2}/M_{m-1}, X) = 0$ *y* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_{m-1}, X) = 0$ pues $M_{m-1} \simeq \Delta(j_{m-1})$, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_{m-2}, X) = 0$. Se sigue inductivamente que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, X) = 0$.

Por otra parte, si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), X) = 0$, entonces, en particular, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Delta(i), X) = 0 \quad \textit{para} \quad \textit{toda} \quad i \in [1, n]$. □

Como Corolario del siguiente Teorema, podemos determinar con mayor facilidad cuando un álgebra $(\Lambda, \leq)$ es estándarmente estratificada.

Teorema 1.3.15. *La subcategoría $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada por extensiones y sumandos directos.*

Demostración. Ver [13, Teorema 2]. □

El siguiente Corolario establece, en particular, que una K-álgebra $(\Lambda, \leq)$ es estándarmente estratificada a la derecha si y solamente si los Λ-módulos derechos $e_i\Lambda$ están en $\mathcal{F}(\Delta)$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

Corolario 1.3.16. *Sea Λ una K-álgebra, $\Lambda_\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$ si y solamente si $e_i\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$ para toda $i \in [1, n]$.*

A continuación, se presentan dos ejemplos de álgebras de carcaj en las que se calculan los módulos estándar.

Dado que necesitamos trabajar en la categoría mod-Λ de los Λ-módulos derechos, escribiremos los caminos usando la composición de flechas a la derecha.

Ejemplo 1.3.17. *Sea $\Lambda \simeq KC/I$ donde C es el carcaj*

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

e I el ideal admisible $I =< \beta^2 >$ de KC.

En nuestro caso, $P(1) = \overline{e_1}\Lambda = K\overline{e_1} \bigoplus K\overline{\alpha} \bigoplus K\overline{\alpha\beta}$, y es en este punto en donde introduciremos otra notación para representar estos Λ-módulos derechos proyectivos, que nos facilitará tanto su representación, como el cálculo posterior de los módulos estándar.

Para $P(1) = K\overline{e_1} \bigoplus K\overline{\alpha} \bigoplus K\overline{\alpha\beta}$, lo que hacemos es representarlo como

$$P(1) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha"] \\ 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 2 \end{tikzcd}$$

Procedemos de la misma manera con $P(2) = \overline{e_2}\Lambda = K\overline{e_2} \bigoplus K\overline{\beta}$, con lo que obtenemos que :

$$P(2) = \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 2 \end{tikzcd}$$

Ahora, para calcular los Λ-módulos estándar, usamos la Proposición 1.3.10., con lo que obtenemos que : $\Delta(1) = S(1)$ *y* $\Delta(2) = P(2)$.

Ejemplo 1.3.18. *Sea $\Lambda \simeq KC/I$ donde C es el carcaj*

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

e I el ideal admisible $I =< \alpha_1\alpha_2,\ \beta_2\beta_1,\ \beta_1\alpha_1 - \alpha_2\beta_2,\ \beta_2\alpha_2 >$.

Calculamos los Λ-módulos proyectivos asociados a los vértices y los Λ-módulos estándar como en ejemplo precedente y obtenemos:

$$P(1) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd} \quad \textit{de donde } \Delta(1) = S(1).$$

$$P(2) = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ 1 \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & 3 \arrow[dl, "\beta_2"] \\ & 2 & \end{tikzcd} \quad \textit{de donde, } \Delta(2) = \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd}$$

$$P(3) = \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 2 \end{tikzcd} \quad \textit{de donde, } \Delta(3) = P(3).$$

Capítulo 2

Sistemas Estratificantes

En este capítulo daremos primero la definición de sistema estratificante y estudiaremos sus propiedades principales. Después veremos que los sistemas estratificantes nos proporcionan álgebras estándarmente estratificadas. Para esto, es necesario recordar algunos conceptos que se presentaron en el capítulo anterior.

Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, básica e inescindible sobre un campo algebraicamente cerrado, denotamos por Λ-Mod a la categoría de todos los módulos izquierdos sobre Λ, y denotamos por Λ-mod, a la categoría de todos los módulos izquierdos finitamente generados sobre Λ. Durante todo el capítulo, trabajaremos únicamente en la categoría Λ-mod, por lo que, por comodidad, diremos que M es un Λ-módulo o un módulo, en lugar de decir que M es un Λ-módulo izquierdo finitamente generado.

Por otra parte, también se sabe que si Λ es una K-álgebra de dimensión finita y $M \in \Lambda$-mod, entonces M es un K-espacio vectorial de dimensión finita, y por lo tanto, M es de longitud finita. Esto es, M tiene una serie de composición.

Teniendo esto claro, podemos comenzar con la noción de sistema estratificante.

2.1. Sistemas Estratificantes

Como su nombre lo indica, en esta sección estudiaremos el concepto de sistema estratificante. Para esto, necesitamos definir la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ de los módulos filtrados por una clase $\mathcal{C}$ de Λ-módulos.

Definición 2.1.1. *Dada una clase $\mathcal{C}$ de Λ-módulos, denotamos por $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ a la subcategoría plena de Λ-mod cuyos objetos son el módulo cero, y todos los Λ-módulos que son filtrados por módulos en $\mathcal{C}$.*

Es decir, un Λ-módulo no cero M está en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ si existe una cadena finita

$$M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{m-1} > M_m = 0$$

de Λ-submódulos de M tales que M_i/M_{i+1} es isomorfo a un módulo en $\mathcal{C}$, para toda $i = 0, 1, \ldots, m-1$. En particular, si $\mathcal{C} = \emptyset$, entonces, $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{0\}$.

A una cadena finita como la anterior se le conoce como una $\mathcal{C}$-filtración de M y se denota:

$$F : M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{m-1} > M_m = 0$$

Esto es, $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{X \in \Lambda\text{−mod: } X \quad \text{tiene una} \quad \mathcal{C}\text{−filtración}\}$.

En el desarrollo del capítulo también usaremos la siguiente notación: Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos subcategorías plenas de Λ-mod. Escribimos

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X, Y) = 0 \quad \forall \quad X \in \mathcal{X} \quad \text{y} \quad \forall \quad Y \in \mathcal{Y}.$$

A continuación damos la definición de sistema estratificante de talla t.

Definición 2.1.2. *La definición de sistema estratificante que se utiliza en este trabajo, es la dada en [10]. Sean $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de Λ-módulos (no cero), $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de Λ-módulos inescindibles, y $\leq$ el orden total natural en el conjunto $[1, n] = \{1, \ldots, t\}$ de números naturales.*

Decimos que el sistema $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratificante de talla t si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j > i$.

2. *Para cada* $i \in [1, t]$, *existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \Theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \xrightarrow{\beta_i} Z(i) \longrightarrow 0$$

   tal que $Z(i) \in \mathcal{F}\{\Theta(j) : j < i\}$.

3. $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), Y) = 0,$ *donde* $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i).$

Nota 2.1.3. *La definición anterior es lo que llamaron sistema estratificante* Ext-*inyectivo los autores en [11]*

En los dos ejemlos que siguen se componen las flechas como funciones.

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos el Ejemplo 1.3.17. Es decir, sea C el carcaj:*

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

e I el ideal admisible $I =< \beta^2 >$.

Tenemos que los Λ-módulos proyectivos son $P(1) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha"] \\ 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 2 \end{tikzcd}$ *y* $P(2) = \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 2 \end{tikzcd}$.

Sabemos que los módulos estándar son $\Delta(1) = S(1) = I(1)$, $\Delta(2) = P(2)$. Además el módulo inyectivo $I(2)$ coincide con $P(1)$.

Sea $\Theta = \Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^{2}$ y $\underline{Y} = \{\Delta(1), P(1)\}$, veamos que $(\Delta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratificante de talla 2.

Verifiquemos las tres propiedades antes mencionadas:

1. $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Delta(2), \Delta(1)) = 0.$

Se cumple por la Proposición 1.3.12 y del hecho que estamos considerando módulos estándar.

2. Veamos que existen las sucesiones exactas cortas enunciadas en la Definición 2.1.2

Es directo de la definición de sistema estratificante, que para $\Delta(1)$ la sucesión exacta corta es $0 \longrightarrow \Delta(1) \longrightarrow \Delta(1) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$.

Para $\Delta(2)$ la sucesión exacta corta es $0 \longrightarrow \Delta(2) \longrightarrow P(1) \longrightarrow \Delta(1) \longrightarrow 0$, donde $P(1)$ es inescindible y $\Delta(1) \in \mathcal{F}\{\Delta(\mathrm{j}) : j < 2\}$.

Por lo tanto, se cumple la condición 2.

3. Veamos que $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), Y) = 0$ con $Y = \Delta(1) \bigoplus P(1)$.

Se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), Y) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), \Delta(1) \bigoplus P(1)) =$ $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), \Delta(1)) \bigoplus \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), P(1))$.

De donde, basta probar que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), \Delta(1)) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), P(1)) = 0$.

Dado que $\Delta(1) = I(1)$ *y* $P(1) = I(2)$ *son módulos inyectivos, se tiene que* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), \Delta(1)) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), I(1)) = 0$ *y* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), P(1)) = 0$.

Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), Y) = 0$ *y se cumple la condición 3.*

Con esto se concluye que $(\Delta, \underline{Y}, \leq)$ *es un sistema estratificante de talla 2.*

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 2.1.5. *Sea* $\Lambda \simeq KC/I$ *donde* C *es el carcaj*

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "x"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[loop right, "y"] \end{tikzcd}$$

e I *el ideal admisible* $I =< x^3, y^3, x^2 - \alpha\beta, y^2 - \beta\alpha, \beta x, \alpha y, y\beta, x\alpha >$.

Tenemos que los Λ*-módulos poyectivos son* $P(1) =$
$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ 1 \arrow[dr, "x"'] & & 2 \arrow[dl, "\beta"] \\ & 1 & \end{tikzcd}$$

y $P(2) =$
$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "y"] & \\ 1 \arrow[dr, "\alpha"'] & & 2 \arrow[dl, "y"] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

Definimos los módulos $\Theta(1) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "x"] \\ 1 \end{tikzcd}$ *y* $\Theta(2) = \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \end{tikzcd}$

Considerando lo anterior tenemos que $P(1) = I(1)$, $P(2) = \Delta(2) = I(2)$, $\Theta(1) = \Delta(1)$ *y* $\Theta(2) \neq \Delta(2)$.

Sea $\Theta = \{\Theta(1), \Theta(2)\}$ *y* $\underline{Y} = \{\Theta(1), P(1)\}$*, veamos que* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *es un sistema estratificante de talla 2.*

Verifiquemos las tres propiedades de la Definición 2.1.2.

1. $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(2), \Theta(1)) = 0$.

Por contradicción, supongamos que existe un homomorfismo $0 \neq f : \Theta(2) \longrightarrow \Theta(1)$.

Como $Im(f) \leq \Theta(1)$ *se tienen dos casos.*

Caso 1: Si $Im(f) = \Theta(1)$ *entonce* f *es un epimorfismo, y como* $\Theta(1)$ *y* $\Theta(2)$ *son* K*-espacios vectoriales de dimensión 2, se tiene que* f *es isomorfismo. De donde,* $\Theta(2) \simeq \Theta(1)$*, lo que es una contradicción.*

Caso 2: Si $Im(f) \lneqq \Theta(1)$ *se procede análogamente al caso anterior y tendríamos que* $S(2) \simeq S(1)$*, lo que es una contradicción.*

En los dos casos se llega a una contradicción, por lo tanto, se concluye que $f = 0$ *y se cumple la condición 1.*

2. Veamos que existen las sucesiones exactas cortas enunciadas en la Definición 2.1.2

Es directo de la definición de sistema estratificante, que para $\Theta(1)$ *la sucesión exacta corta es* $0 \longrightarrow \Theta(1) \longrightarrow \Theta(1) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$.

Para $\Theta(2)$ *la sucesión exacta corta es* $0 \longrightarrow \Theta(2) \longrightarrow P(1) \longrightarrow \Theta(1) \longrightarrow 0$*, por lo que se cumple la condición 2.*

3. Veamos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), Y) = 0$ *con* $Y = \Theta(1) \bigoplus P(1)$.

Se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), Y) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), \Theta(1) \bigoplus P(1)) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), \Theta(1)) \bigoplus \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), P(1))$.

De donde, basta probar que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), \Theta(1)) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), P(1)) = 0$.

Recordemos que $P(1) = I(1)$*, por lo que es inmediato que* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), P(1)) = 0$.

Para probar que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), \Theta(1)) = 0$*, basta probar que* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(1), \Theta(1)) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(2), \Theta(1)) = 0$.

Consideremos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow \Theta(2) \longrightarrow P(1) \longrightarrow \Theta(1) \longrightarrow 0$.

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\square, \Theta(1))$ *se obtiene la sucesión exacta larga*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(1), \Theta(1)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P(1), \Theta(1)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(2), \Theta(1)) \longrightarrow \\ \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(1), \Theta(1)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P(1), \Theta(1)) \longrightarrow \dots$$

como $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(2), \Theta(1)) = 0$ *y* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P(1), \Theta(1)) = 0$ *por ser* $P(1)$ *proyectivo obtenemos la sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(1), \Theta(1)) \longrightarrow 0$ *lo que nos dice que* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(1), \Theta(1)) = 0$.

Procediendo de manera análoga a la anterior, se obtiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(2), \Theta(1)) = 0$.

Por lo anterior podemos concluir que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), \Theta(1)) = 0$, *y por lo tanto* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), Y) = 0$.

Se cumple la condición 3, por lo tanto, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *es un sistema estratificante de talla 2.*

2.2. Propiedades fundamentales de los Sistemas Estratificantes

En esta sección, enunciaremos las principales propiedades de los sistemas estratificantes. Con referencia a lo mencionado, necesitamos recordar la definición de algunas categorías relacionadas a la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ y también algunos conceptos de álgebra homológica.

Definición 2.2.1. *Sea* $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ *la categoría de los* Λ*-módulos filtrados por la clase* $\mathcal{C}$.

Se definen $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ *y* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$*, las subcategorías plenas de* Λ*-mod, de la siguiente manera:*

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \{X \in \Lambda - mod\ : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\mathcal{C}), X) = 0\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{X \in \Lambda - mod\ : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X, \mathcal{F}(\mathcal{C})) = 0\}.$$

Recordemos la definición de funtor covariante (contravariante respectivamente) exacto. Esta definición será utilizada en el desarrollo del capítulo.

Definición 2.2.2. *Sean* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$ *categorías abelianas,* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un funtor covariante y* $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un funtor contravariante. Se dice que:*

1. F *es exacto si para cada sucesión exacta* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *en* $\mathcal{C}$*, la sucesión* $0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$ *es exacta en* $\mathcal{D}$.

2. G *es exacto si para cada sucesión exacta* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *en* $\mathcal{C}$*, la sucesión* $0 \longrightarrow GZ \xrightarrow{Gg} GY \xrightarrow{Gf} GX \longrightarrow 0$ *es exacta en* $\mathcal{D}$.

Comencemos entonces con la primera propiedad de los sistemas estratificantes, a este efecto, necesitamos definir la multiplicidad de cada $\Theta(i)$ en un Λ-módulo M.

Definición 2.2.3. *Sean* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un sistema estratificante de talla* t*,* $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ *y* F *una* Θ*-filtración de* M

$$F : M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{m-1} > M_m = 0.$$

Para $i \in [1, t]$ *definimos la multiplicidad de* $\Theta(i)$ *en* M *con respecto a* F*,* $[M : \Theta(i)]_F$*, como el número de cocientes en la* Θ*-filtración* F *de* M *isomorfos a* $\Theta(i)$*.*

Probaremos que, para cada $i \in [1, t]$ y para cada $M \in \mathcal{F}(\Theta)$, la multiplicidad $[M : \Theta(i)]_F$ no depende de la Θ-filtración de M, ver Teorema 2.2.8. Sin embargo, para poder llegar a este resultado necesitamos los siguientes lemas que probaremos a continuación.

Cabe señalar que en los siguiente resultados estaremos utilizando la notación introducida en la Definición 2.1.2

Lema 2.2.4. *Sea* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un sistema estratificante de talla* t*. Entonces* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Z(i)) = 0$ *para todo* $s \in \{0, ..., t-i\}$*.*

Demostración. Sean $f : \Theta(i+s) \to Z(i)$ un Λ-homomorfismo, $s \in \{0, ..., t-i\}$ y F una Θ-filtración de $Z(i)$

$$F : Z(i) = M_0 > M_1 > \cdots > M_{m-1} > M_m = 0.$$

Consideremos $\Pi_{M_i} : M_{i-1} \to M_{i-1}/M_i$ la proyección canónica para toda $i = 1, \ldots, m$.

Dado que $Z(i)/M_1 \simeq \Theta(j_1)$ para algún $j_1 < i$, consideremos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Theta(i+s) \arrow[r, "f"] & Z(i) \arrow[d, "\Pi_{M_1}"] \\
 & Z(i)/M_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
 & \Theta(j_1)
\end{tikzcd}$$

Donde φ_1 es un isomorfismo de $Z(i)/M_1$ a $\Theta(j_1)$. Por la definición de sistema estratificante, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ para $j > i$, y $j_1 < i < i+s$ por lo que $0 = \varphi_1 \Pi_{M_1} f : \Theta(i+s) \to \Theta(j_1)$. Además φ_1 es un isomorfismo , de donde $\Pi_{M_1} f = 0$, lo que implica que $Imf \leq Ker \Pi_{M_1} = M_1$.

Dado que $M_1/M_2 \simeq \Theta(j_2)$ para algún $j_2 < i$, podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Theta(i+s) \arrow[r, "f"] & M_1 \arrow[d, "\Pi_{M_2}"] \\ & M_1/M_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ & \Theta(j_2) \end{tikzcd}$$

Donde φ_2 es un isomorfismo de M_1/M_2 a $\Theta(j_2)$. Por el argumento anterior, se tiene que $Imf \leq M_2$. Se sigue inductivamente, que $Imf \leq M_m = 0$ y por lo tanto $f = 0$. Por tanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Z(i)) = 0$. $\square$

Lema 2.2.5. *Sea* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un sistema estratificante de talla t. Entonces* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(i)) = 0$ *para todo* $s \in \{0, ..., t-i\}$.

Demostración. Por ser $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t, se tiene la sucesión exacta corta $0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0$ para toda $i \in [1, t]$.

Consideramos entonces esta sucesión y le aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), \square)$. Con lo que se obtiene la sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Y(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Z(i)) \to \\ \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(i)) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), Y(i)) \to \dots$$

Por el inciso 3 de la Definición 2.1.2, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), Y(i)) = 0$ y por el Lema 2.2.4, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Z(i)) = 0$, de donde, por ser sucesión exacta, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(i)) = 0$ para todo $s \in \{0, ..., t-i\}$. $\square$

Lema 2.2.6. *Sea* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un sistema estratificante de talla t. Entonces* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Y(i)) = 0$ *para todo* $s \in \{1, ..., t-i\}$.

Demostración. Por ser $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t, se tiene la sucesión exacta corta $0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0$ para toda $i \in [1, t]$.

Consideramos entonces esta sucesión y le aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), \Box)$. Con lo que se obtiene la sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Y(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Z(i)) \to \\ \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(i)) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), Y(i)) \to \dots$$

Por hipótesis, $i + s > i$ ya que $s \geq 1$, de donde, por el inciso 1 de la Definición 2.1.2, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(i)) = 0$ y por el Lema 2.2.4 se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Z(i)) = 0$, de donde, por ser sucesión exacta, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), Y(i)) = 0$. □

Lema 2.2.7. *Sea $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t. Entonces* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Box, Y(i))$ *es un funtor exacto en $\mathcal{F}(\Theta)$. Es decir, para toda sucesión exacta corta cuyos Λ-módulos estén todos en $\mathcal{F}(\Theta)$ el funtor es exacto.*

Demostración. Sea $0 \to N \to M \to K \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\Theta)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Box, Y(i))$, se obtiene la sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(K, Y(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(N, Y(i)) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, Y(i))$$

Como por el inciso 3 de la Definición 2.1.2 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, Y) = 0$ se sigue que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, Y(i)) = 0$.

De donde, se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(K, Y(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(N, Y(i)) \to 0.$$

Por tanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Box, Y(i))$ es un funtor exacto en $\mathcal{F}(\Theta)$. □

En este punto, contamos ya con todos los resultados necesarios para demostrar la propiedad que se enuncia a continuación.

Teorema 2.2.8. *Sea $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t. Para $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ la multiplicidad de $\Theta(i)$ en una Θ-filtración es independiente de la filtración para todo $i \in [1, t]$.*

Demostración. Como $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \Lambda$-mod y Λ es una K-álgebra de dimensión finita, entonces si $M \in \mathcal{F}(\Theta)$, M es un K-espacio vectorial de dimensión finita, y por tanto $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(i))$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita.

Denotaremos por $d_{ij} = dim\, \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y(j))$ como K-espacio vectorial. Sea $D = (d_{ij})$ la matriz con entradas d_{ij}. ($D \in \mathbb{M}_{txt}(K)$)

Por el Lema 2.2.6, se tiene que D es una matriz triangular superior, y $d_{ii} \neq 0$ ya que, por el inciso 2 de la Definición 2.1.2, existe $\alpha_i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y(i))$ no cero para todo $i \in [1, t]$. Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ y F una Θ-filtración de M

$$F : M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to M_{n-1} \to M_{n-2} \to M_{n-2}/M_{n-1} \to 0$$

Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Box, Y(i))$ a la sucesión anterior. Por el Lema 2.2.7 se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{n-2}/M_{n-1}, Y(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{n-2}, Y(i)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{n-1}, Y(i)) \to 0$$

se sigue que

$$dim\, \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{n-2}, Y(i)) = dim\, \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{n-2}/M_{n-1}, Y(i)) + dim\, \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{n-1}, Y(i))$$

Y como $M_{n-1} \simeq \Theta(j_1)$ y $M_{n-2}/M_{n-1} \simeq \Theta(j_2)$ con $j_1, j_2 \in [1, t]$ se tiene que

$$dim\, \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{n-2}, Y(i)) = d_{j_1 i} + d_{j_2 i}.$$

Consideremos ahora la sucesión exacta corta

$$0 \to M_{n-2} \to M_{n-3} \to M_{n-3}/M_{n-2} \to 0$$

Por el argumento anterior se obtiene que

$$dim\, \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{n-3}, Y(i)) = d_{j_1 i} + d_{j_2 i} + d_{j_3 i}.$$

Se sigue inductivamente, denotando por m_j al número de cocientes isomorfos a $\Theta(j)$ en la Θ-filtración F que

$$dim\, \mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(i)) = \sum_{j=1}^{t} m_j d_{ji} = (m_1\, m_2\, \ldots\, m_n) D_i$$

(con la multiplicación de matrices usual).

donde D_i es la i-ésima columna de D.

Para $i = 1$, se tiene que $dim\,\mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(1)) = \sum_{j=1}^{t} m_j d_{j1} = m_1 d_{11}$, ya que $d_{ji} = 0$ para todo $j > 1$.

Ahora bien, $dim\,\mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(1))$ y $d_{11} \neq 0$ son fijos, de donde, despejando m_1 se obtiene que

$$m_1 = dim\,\mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(1))/d_{11} \text{ es fijo.}$$

Continuando por inducción en el conjunto de índices, se tiene que

$$dim\,\mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(k)) = \sum_{j=1}^{t} m_j d_{jk} = m_k d_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} m_j d_{jk}$$

como m_j está determinado para $1 \leq j \leq k-1$ y $d_{kk} \neq 0$ se tiene que

$$m_k = [dim\,\mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y(k)) - \sum_{j=1}^{k-1} m_j d_{jk}]/d_{kk}.$$

Por lo tanto, m_k no depende de la Θ-filtración para todo $k \in [1, t]$. □

Del resultado anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.9. *Sea* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un sistema estratificante de talla t. Entonces:*

1. $[Y(i) : \Theta(i)] = 1$.

2. $[Y(i) : \Theta(j)] = 0$ *para* $j > i$.

3. $Y(i) \not\simeq Y(j)$ *si* $i \neq j$.

Demostración. Por el inciso 2 de la Definición 2.1.2, se tiene que para cada $\Theta(i)$ existe la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \xrightarrow{\beta_i} Z(i) \longrightarrow 0$$

donde $Z(i) \in \mathcal{F}\{\Theta(j) : j < i\}$. Además, por ser sucesión exacta corta, se tiene que $Z(i) \simeq Y(i)/\Theta(i)$. Por lo que consideraremos la sucesión exacta corta

$$0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Y(i)/\Theta(i) \to 0.$$

Sea F una Θ-filtración de $Y(i)/\Theta(i)$

$$F : Y(i)/\Theta(i) = Y_0/\Theta(i) > Y_1/\Theta(i) > \cdots > Y_{s-1}/\Theta(i) > Y_s/\Theta(i) = 0.$$

con $Y_p/\Theta(i)\diagup Y_{p+1}/\Theta(i) \simeq Y_p/Y_{p+1} \simeq \Theta(j_p)$ con $j_p < i$ para todo $p = 0, \dots, s-1$.

Por el teorema de la correspondencia, se tiene que la Θ-filtración F induce una Θ-filtración H de $Y(i)$

$$H : Y(i) = Y_0 > Y_1 > \cdots > Y_{s-1} > Y_s = \Theta(i) > 0.$$

donde $Y_p/Y_{p+1} \simeq \Theta(j_p)$ con $j_p < i$ para todo $p = 0, \dots, s-1$ y $Y_s \simeq \Theta(i)$.

De donde, por el Teorema 2.2.8, se tiene que $[Y(i) : \Theta(i)] = 1$ y que
$[Y(i) : \Theta(j)] = 0$ para $j > i$.

Para demostrar el inciso 3, suponemos sin pérdida de generalidad que $i < j$. Por los incisos 1 y 2 de este corolario, se tiene que $[Y(i) : \Theta(i)] = 1$, $[Y(i) : \Theta(j)] = 0$ y que $[Y(j) : \Theta(j)] = 1$ por lo que $Y(i) \not\simeq Y(j)$ dado que $\Theta(j)$ es factor de composición de $Y(j)$ pero no lo es de $Y(i)$. □

Definición 2.2.10. *Sean $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Definimos la Θ-longitud de M como:*

$$l_\Theta(M) = \sum_{i=1}^{t} [M : \Theta(i)]$$

Los siguientes resultados y definiciones son necesarios para probar que para un sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ de talla t y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$, existe una sucesión exacta

$$0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_k \to 0$$

donde $Y_r \in add(Y)$ para todo $r \in [0, k]$ y $k < max(M)$. Ver Teorema 2.2.18

Definición 2.2.11. *Sean $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Definimos $max(M)$ como el mayor índice j tal que $[M : \Theta(j)] \neq 0$.*

Lema 2.2.12. *Sean $(\Theta, \underline{Y} \leq)$ un sistema estratificante de talla t y $M, N, K \in \mathcal{F}(\Theta)$ tales que existe la sucesión exacta corta*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

Entonces $max(M) = máximo\{max(K), max(N)\}$.

Demostración. Como consideramos una sucesión exacta corta, se tiene que $N \simeq M/K$, por lo que, demostraremos el lema para la sucesión exacta corta

$$0 \to K \to M \to M/K \to 0.$$

Sea F una Θ-filtración de K

$$F : K = K_0 > K_1 > \cdots > K_{s-1} > K_s = 0.$$

donde $K_p/K_{p+1} \simeq \Theta(j_p)$ con $j_p \leq max(K)$ para $p = 0, \ldots, s-1$.

Sea G una Θ-filtración de M/K

$$G : M/K = M_0/K > M_1/K > \cdots > M_{n-1}/K > M_n/K = 0.$$

donde $M_q/K \diagup M_{q+1}/K \simeq \Theta(j_q)$ con $j_q \leq max(M/K)$ para $q = 0, \ldots, n-1$.

Consideremos H la Θ-filtración de M inducida por las filtraciones anteriores

$$H : M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = K > K_1 > \cdots > K_{s-1} > K_s = 0.$$

donde $M_q/M_{q+1} \simeq \Theta(j_q)$ para $q = 0, \ldots, n-1$. y $K_p/K_{p+1} \simeq \Theta(j_p)$ para $p = 0, \ldots, s-1$.

Por lo tanto $max(M)$ =máximo$\{max(K), max(N)\}$. □

Lema 2.2.13. *Sean* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un sistema estratificante de talla* t *y* $M \in \mathcal{F}(\Theta)$*. Si* $max(M) = i$*, entonces* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), M) = 0$ *para* $s \in \{0, ..., t-i\}$.

Demostración. Sea F una Θ-filtración de M

$$F : M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0.$$

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to M_{n-1} \to M_{n-2} \to M_{n-2}/M_{n-1} \to 0$$

donde $M_{n-1} \simeq \Theta(j_1)$ y $M_{n-2}/M_{n-1} \simeq \Theta(j_2)$ con $j_1, j_2 \leq i$.

Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), \square)$ a la sucesión exacta corta anterior, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-1}) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-2}) \to$$
$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-2}) \to$$
$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \to \dots$$

Como $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-1}) \simeq \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(j_1)) = 0$ por el Lema 2.2.5, y $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \simeq \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), \Theta(j_2)) = 0$ por el Lema 2.2.5, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), M_{n-2}) = 0$.

Inductivamente se llega a que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(i+s), M) = 0$ para $s \in \{0, ..., t-i\}$. □

Del resultado anterior tenemos la siguiente observación.

Observación 2.2.14. *En la Θ-filtración F de M, se tiene que $M_{n-1} \simeq \Theta(i)$, donde $i = max(M)$.*

Proposición 2.2.15. *Sean $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Entonces existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to \Theta(i)^n \to M \to N \to 0$$

donde $i = max(M)$, $N \in \mathcal{F}\{\Theta(j) : j < i\}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre $l_\Theta(M)$.

Si $l_\Theta(M) = 1$ se tiene que $M \simeq \Theta(i)$ para alguna $i \in [1, t]$, y la sucesión exacta corta buscada es

$$0 \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Supongamos que el lema es cierto para Λ-módulos $N' \in \mathcal{F}(\Theta)$ tales que $l_\Theta(N') < n$. Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ un Λ-módulo tal que $l_\Theta(M) = n$. Esto es, existe F una Θ-filtración de M tal que

$$F : M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0.$$

donde $M_p/M_{p+1} \simeq \Theta(j_p)$ para todo $p \in [0, n-1]$.

Consideremos al Λ-módulo M_1, que tiene una Θ-filtración con $n-1$ factores de composición, de donde, por hipótesis de inducción existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \Theta(j)^{n_1} \to M_1 \to M' \to 0$$

donde $j = max(M_1)$ y $M_1/\Theta(j)^{n_1} \simeq M' \in \mathcal{F}\{\Theta(l) : l < j\}$.

Se tienen tres casos posibles:

1. $M/M_1 \simeq \Theta(j_0)$ donde $j_0 < j$.

   Como $j_0 < j$, se tiene que $max(M) = j = max(M_1)$. Consideremos las sucesiones exactas cortas

   $$0 \to \Theta(j)^{n_1} \to M \to M/\Theta(j)^{n_1} \to 0 \qquad (1)$$

   $$0 \to M_1/\Theta(j)^{n_1} \to M/\Theta(j)^{n_1} \to M/M_1 \to 0 \qquad (2)$$

   En (2), como $max(M_1/\Theta(j)^{n_1}) < j$ y $max(M/M_1) = j_0 < j$, por el Lema 2.2.12, se tiene que $max(M/\Theta(j)^{n_1}) < j$ de donde $M/\Theta(j)^{n_1} \in \mathcal{F}\{\Theta(l) : l < j\}$. Y por lo tanto, (1) es la sucesión buscada.

2. $M/M_1 \simeq \Theta(j_0)$ donde $j_0 = j$.

   Como $j_0 = j$, se tiene que $max(M) = j = max(M_1)$. Consideremos la sucesión exacta corta

   $$0 \to M_1 \to M \to M/M_1 \to 0$$

   por el Lema 2.2.13, la sucesión se escinde, de donde $M = M_1 \bigoplus M/M_1 \simeq M_1 \bigoplus \Theta(j)$ y $M/\Theta(j)^{n_1+1} \simeq (M_1 \bigoplus \Theta(j))/\Theta(j)^{n_1+1} \simeq M_1/\Theta(j)^{n_1} \in \mathcal{F}\{\Theta(l) : l < j\}$.

   De donde, la sucesión exacta corta buscada es

   $$0 \to \Theta(j)^{n_1+1} \to M \to M/\Theta(j)^{n_1+1} \to 0$$

3. $M/M_1 \simeq \Theta(j_0)$ donde $j_0 > j$.

   Como $j_0 > j$, se tiene que $max(M) = j_0$, y como $max(M_1) = j < j_0$ se tiene que , por el Lema 2.2.13, la siguiente sucesión exacta corta se escinde.

   $$0 \to M_1 \to M \to M/M_1 \to 0$$

De donde, $M = M_1 \bigoplus M/M_1 \simeq M_1 \bigoplus \Theta(j_0)$ y $M/\Theta(j_0) \simeq (M_1 \bigoplus \Theta(j_0))/\Theta(j_0) \simeq M_1$ (por el Segundo Teorema de Isomorfismo) y $M_1 \in \mathcal{F}\{\Theta(l) : l < j_0\}$.

Por lo que, la sucesión exacta corta buscada es

$$0 \to \Theta(j_0) \to M \to M/\Theta(j_0) \to 0$$

la proposición queda demostrada. □

Definición 2.2.16. *Sea $M \in \Lambda$-mod. Definimos $add(M)$ como*

$$add(M) = \{X \in \Lambda - mod : \exists\, n \in \mathbb{N} \; y \; L \in \Lambda - mod \quad tal\; que \quad X \bigoplus L = M^n\}.$$

Lema 2.2.17. *Sean $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Entonces existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to M \to Y' \to M' \to 0$$

donde $M' \in \mathcal{F}(\Theta)$, $max(M') < max(M)$ y $Y' \in add(Y)$, donde $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$.

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre $i = max(M)$.

Supongamos que $max(M) = 1$. Esto es, si F es una Θ-filtración de M.

$$F : M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0.$$

se tiene que $M_j/M_{j+1} \simeq \Theta(1)$ para todo $j \in [0, n-1]$.

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to M_{n-1} \to M_{n-2} \to M_{n-2}/M_{n-1} \to 0$$

por el Lema 2.2.13, esta sucesión se escinde, por lo que $M_{n-2} \simeq \Theta(1) \bigoplus \Theta(1)$. Se sigue inductivamente que $M \simeq \Theta(1)^n$ donde n es el número de cocientes que tiene F, la Θ-filtración de M. Ahora bien, por el inciso 2 de la Definición 2.1.2 se tiene que $\Theta(1) = Y(1)$, de donde $M \simeq Y(1)^n$. Por lo que se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \to M \to Y(1)^n \to 0 \to 0.$$

donde $Y(1)^n \in add(Y)$ y $0 \in \mathcal{F}(\Theta)$ con $max(0) = 0 < 1$. Por lo tanto esta sucesión es la buscada.

Supongamos que el lema se cumple para $L \in \mathcal{F}(\Theta)$ tal que $max(L) < i$. Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ tal que $max(M) = i$. Por el Lema 2.2.15, existe la sucesión exacta corta

$$0 \to \Theta(i)^n \to M \to N \to 0$$

donde $N \in \mathcal{F}\{\Theta(l) : l < i\}$, por lo que $max(N) < i$ de donde, por hipótesis de inducción, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} \overline{Y} \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow 0$$

donde $\overline{Y} \in add(Y), \quad \overline{N} \in \mathcal{F}(\Theta), \quad y \quad max(\overline{N}) < max(N)$.

Consideremos el diagrama conmutativo push-out

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Theta(i)^n \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y(i)^n \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & Z(i)^n \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z(i)^n \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $N \in \mathcal{F}(\Theta)$ y por el inciso 3 de la Definición 2.1.2, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Theta), Y) = 0$, se tiene que el segundo renglón se escinde. De donde $W \simeq Y(i)^n \bigoplus N$.

Consideremos ahora los monomorfismos f y g con los que obtenemos el homomorfismo

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ fg_2 \end{pmatrix} : M \longrightarrow Y(i)^n \oplus \overline{Y}$$

donde

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} : M \longrightarrow Y(i)^n \oplus N$$

y $Y(i)^n \bigoplus \overline{Y} \in add(Y)$.

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to W/M \to (Y(i)^n \bigoplus \overline{Y})/M \to (Y(i)^n \bigoplus \overline{Y})/W \to 0$$

Como, por el diagrama de push-out, $W/M \simeq Z(i)^n$ y $max(Z(i)^n) < i$ y $(Y(i)^n \bigoplus \overline{Y})/W \simeq \overline{Y}/N \simeq \overline{N}$ y $max(\overline{N}) < i$, se tiene, por el Lema 2.2.12, que $max((Y(i)^n \bigoplus \overline{Y})/M) < i$. Por lo que la sucesión exacta corta buscada es

$$0 \to M \to Y(i)^n \bigoplus \overline{Y} \to (Y(i)^n \bigoplus \overline{Y})/M \to 0$$

el lema queda demostrado. □

En este punto, contamos ya con todos los resultados necesarios para demostrar la propiedad que se enuncia a continuación.

Teorema 2.2.18. *Sean* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un sistema estratificante de talla* t *y* $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. *Entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_k \to 0$$

donde $Y_r \in add(Y)$ *para todo* $r \in [0, k]$ *y* $k < max(M)$.

Demostración. Por el Lema 2.2.17, existen las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h} Y_0 \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{g} Y_1 \xrightarrow{h'} M'' \longrightarrow 0$$

donde $Y_0, Y_1 \in add(Y)$, $M', M'' \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $max(M'') < max(M') < max(M)$.

Veamos ahora que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h} Y_0 \xrightarrow{gf} Y_1 \xrightarrow{h'} M'' \longrightarrow 0$$

Como $Imf = M'$, se tiene que $Imgf = Img = Kerh'$. Sea $x \in Kergf$, como g es un monomorfismo, se sigue que $f(x) = 0$, de donde, $x \in Kerf = Imh$. Además, se tiene que $Imh = Kerf \leq Kergf$, por lo que $Imh = Kergf$.

Como h' es un epimorfismo y h es un monomorfismo, se tiene que la sucesión anterior es exacta. Se sigue inductivamente que existe una sucesión exacta

$$0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_k \to 0$$

donde $Y_r \in add(Y)$ para todo $r \in [0,k]$ y $k < max(M)$. □

Finalmente, probaremos la última y más importante propiedad de los sistemas estratificantes. Es decir, probaremos que, dado un sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ de talla t, la K-álgebra $A = \operatorname{End}_\Lambda(\bigoplus_{j=1}^{t} Y(j))$ es una K-álgebra estándarmente estratificada a la derecha (ver el Teorema 2.2.24). Para poder llegar a este resultado necesitamos las siguientes definiciones y los siguientes lemas que probaremos a continuación.

El siguiente resultado es un corolario del Lema 1.3.14 del capítulo 1.

Corolario 2.2.19. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita y $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^{n}$ el conjunto de los Λ-módulos estándar derechos. Si $\Delta(i) = P(i)$ para toda $i \in [1.n]$. Entonces $\mathcal{I}(\Delta) = mod - \Lambda$.*

Demostración. Sea $X \in$ mod-Λ, como $P(i)$ es proyectivo, se tiene que $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(P(i), X) = 0$ para toda $i \in [1,n]$, y como $\Delta(i) = P(i)$ para toda $i \in [1,n]$, se sigue que $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Delta(i), X) = 0$ para toda $i \in [1,n]$, de donde, por el Lema 1.3.14, se tiene que $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathcal{F}(\Delta), X) = 0$. Por lo tanto, $X \in \mathcal{I}(\Delta)$. □

Corolario 2.2.20. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita y $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^{n}$ el conjunto de los Λ-módulos estándar derechos. Si $\Delta(i) = P(i)$ para toda $i \in [1,n]$ entonces $\Delta(i) = Y(i)$ para toda $i \in [1,n]$.*

Demostración. Se sigue de la caracterización 1.6 en [11] y del Corolario 2.2.19. □

Lema 2.2.21. *Sean $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t y $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$. Si $(\operatorname{Hom}_\Lambda(Y(i), Y))_A \simeq (\operatorname{Hom}_\Lambda(Y(j), Y))_A$ entonces $Y(i) \simeq Y(j)$, donde $A = \operatorname{End}_\Lambda(Y)$.*

Demostración. Si $h : \operatorname{Hom}_\Lambda(Y(i), Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Y(j), Y)$ es un A-isomorfismo, se tiene que existe $h' : \operatorname{Hom}_\Lambda(Y(j), Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Y(i), Y)$ tal que $hh' = I_{\operatorname{Hom}_\Lambda(Y(i),Y)}$ y $h'h = I_{\operatorname{Hom}_\Lambda(Y(j),Y)}$. Se sabe (ver [8, 1.1.3]) que $\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_\Lambda(Y(i), Y), \operatorname{Hom}_\Lambda(Y(j), Y)) \simeq \operatorname{Hom}_\Lambda(Y(j), Y(i))$, por lo que existen g :

$Y(j) \longrightarrow Y(i)$ y $g' : Y(i) \longrightarrow Y(j)$ Λ-homomorfismos tales que $F(g) = h$ y $F(g') = h'$ con $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(\square, Y)$.

Como $hh' = F(g)F(g') = F(g'g) = I_{\mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i),Y)}$ entonces

$$F(g'g) : \mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i), Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i), Y)$$
$$F(g'g)(f) \longmapsto g'gf = f$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i), Y)$.

En particular, para $i_i : Y(i) \longrightarrow Y$, la i-ésima inclusión natural, se tiene que $F(g'g)(i_i) = g'gi_i = i_i = I_{Y(i)}i_i$ y, como i_i es monomorfismo, se sigue que $g'g = I_{Y(i)}$.

Análogamente, se obtiene que $gg' = I_{Y(j)}$. Por lo tanto $g' : Y(i) \longrightarrow Y(j)$ es isomorfismo y $Y(i) \simeq Y(j)$. $\square$

Lema 2.2.22. *Sean* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un sistema estratificante de talla t,* $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ *y* $F(M) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y)$*. Entonces* $F(M)$ *tiene una* $F(\Theta)$*-filtración de* A*-módulos donde* $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$*. Además, si* $max(M) = i$*, se tiene que* $max(F(M)) = i$*.*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre el $max(M)$.

Si $max(M) = 1$, por la Proposición 2.2.15 existe la sucesión exacta corta

$$0 \to \Theta(1)^n \to M \to M' \to 0$$

donde $M' \in \mathcal{F}\{\Theta(j) : j < 1\}$ de donde, $M' = 0$ por lo que $M = \Theta(1)^n$. Consideremos la cadena de A-módulos derechos

$$F(M) > F(\Theta(1)^{n-1}) > \cdots > F(\Theta(1)) > 0$$

donde cada cociente es isomorfo $F(\Theta(1))$, con lo que queda demostrado el caso para $max(M) = 1$.

Supongamos que el lema se cumple para $N \in \mathcal{F}(\Theta)$ y tal que $max(N) < i$. Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ tal que $max(M) = i$, por la Proposición 2.2.15 existe la sucesión exacta corta

$$0 \to \Theta(i)^n \to M \to M' \to 0$$

donde $M' \in \mathcal{F}\{\Theta(j) : j < i\}$. Aplicando $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(\square, Y)$ a la sucesión anterior, se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \to F(M') \to F(M) \to F(\Theta(i)^n) \to 0$$

Y como, por hipótesis de inducción, $F(M')$ tiene una $F(\Theta)$-filtración y $F(\Theta(i)^n)$ también tiene una $F(\Theta)$-filtración, se sigue que $F(M)$ también la tiene.

Además, por el Lema 2.2.12 se tiene que
$max(F(M))$ =máximo$\{max(F(M')), max(F(\Theta(i)^n))\} = i$. Con lo que queda demostrada la propiedad. $\square$

En este punto, ya podemos demostrar la propiedad fundamental que se enuncia a continuación.

Comentario 2.2.23. *En el siguiente resultado estaremos trabajando con el álgebra $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$ que es un álgebra a la derecha, por lo que, en ciertos puntos de la demostración, se compondrán las funciones a la derecha.*

Es decir, si $f : M \to N$ y $g : N \to L$, entonces $f \circ g : M \to L$.

Teorema 2.2.24. *Sea $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t. Entonces $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$ es estándarmente estratificada a derecha, con $\Delta(i)_A = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y)$ con respecto a $\leq^{op}$, el orden natural opuesto.*

Demostración. Denotamos por $P(i) = \mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i), Y)$ a los A-módulos proyectivos inescindibles derechos. Por el Lema 2.2.21 se tiene que A es básica. Por el inciso 2 de la Definición 2.1.2 tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \xrightarrow{\beta_i} Z(i) \longrightarrow 0$$

donde $Z(i) \in \mathcal{F}\{\Theta(j) : j < i\}$. Aplicando el funtor $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(\square, Y)$ a la sucesión exacta corta anterior, obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Z(i), Y) \xrightarrow{l} \mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i), Y) \xrightarrow{F(\alpha_i)} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y) \longrightarrow 0$$

Por el Lema 2.2.22 se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(Z(i), Y)$ tiene una $F(\Theta)$-filtración y por lo tanto $P(i)$ tiene una $F(\Theta)$-filtración. Así que es suficiente probar que $F(\Theta(i)) = \Delta(i)_A$ con respecto al orden opuesto. Es decir, se probará que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y)$ es el cociente maximal de $P(i)$ con factores de composición $S(j)$ con $j \geq i$.

Como $\mathrm{Hom}_\Lambda(P(j), F(\Theta(i))) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y(j))$, (en [8, 1.1.3]), por el Lema 2.2.6 se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P(j), F(\Theta(i))) = 0$ para $j < i$. Por lo tanto, por la Proposición 1.3.9 se tiene que $[F(\Theta(i)) : S(j)] = 0$ para $j < i$. Consideremos ahora la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U(i) \longrightarrow P(i) \longrightarrow \Delta(i) \longrightarrow 0$$

donde $U(i) = \sum_{f:P(j)\to P(i)} Imf$ donde $j < i$.

Sea $j < i$ y $g := P(j) \to P(i)$. Mostraremos que $Img \subseteq F(Z(i))$.

Como $\mathrm{Hom}_\Lambda(P(j), P(i)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i), Y(j))$(ver [8], existe $h : Y(i) \to Y(j)$ tal que $F(h) = g$.

Por el Lema 2.2.6, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y(j)) = 0$. Por lo que $\alpha_i h = 0$ y $0 = F(\alpha_i h) = F(h)F(\alpha_i) = gF(\alpha_i)$ y se sigue que $Img \subseteq F(Z(i))$ ya que $F(Z(i)) \simeq Iml = KerF(\alpha_i)$. Por lo tanto, $U(i) \subseteq F(Z(i))$, de donde, se tiene que $P(i)/F(Z(i)) \subseteq P(i)/U(i)$ por lo que $F(\Theta(i)) \subseteq \Delta(i)$.

Veamos ahora que $Iml \subseteq U(i)$. Sea G una $F(\Theta)$-filtración de $F(Z(i))$.

$$G : F(Z(i)) = M_0 > M_1 > \cdots > M_{m-1} > M_m = 0$$

donde $M_s/M_{s+1} \simeq F(\Theta(j_s))$ para $s \in [0, m-1]$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(j_{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-1}))}"'] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"'] & P(j_{m-2}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-2}))}"] \arrow[dl, dashed, "\pi_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{m-1} \arrow[r, "i_1"] & M_{m-2} \arrow[r] & M_{m-2}/M_{m-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $M_{m-1} \simeq F(\Theta(j_{m-1}))$, $M_{m-2}/M_{m-1} \simeq F(\Theta(j_{m-2}))$ y
$P_2 = P(j_{m-1}) \bigoplus P(j_{m-2})$ y $P(j_{m-1}, P_2$ y $P(j_{m-2}$ son cubiertas proyectivas de M_{m-1}, M_{m-2} y M_{m-2}/M_{m-1} respectivamente.

Tenemos que $\beta_2 := (\pi_{F(Z(j_{m-1}))} i_1, \pi_2) : P_2 \to M_{m-2}$ es un epimorfismo. Además $j_{m-1} < i$ y $j_{m-2} < i$. De manera análoga obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"'] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"'] & P(j_{m-3}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-3}))}"] \arrow[dl, dashed, "\pi_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{m-2} \arrow[r, "i_2"] & M_{m-3} \arrow[r] & M_{m-3}/M_{m-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $P_3 = P_2 \bigoplus P(j_{m-3})$ y $\beta_3 = (\beta_2 i_2, \pi_3) : P_3 \to M_{m-3}$ es un epimorfismo y $j_{m-3} < i$.

Continuando con este procedimiento se tiene que $P_m = \bigoplus_{k=1}^{m} P(j_{m-k})$ con $j_{m-k} < i$ para toda $k \in [1, m]$ y un epimorfismo $\beta_m : P_m \to F(Z(i))$. Tenemos el morfismo $\beta_m l : P_m \to P(i)$ donde $Im\beta_m l = Iml$, ya que β_m es un epimorfismo, lo cual implica que $Im\beta_m \simeq F(Z(i))$ y como l es monomorfismo, se sigue que $Im\beta_m l \simeq F(Z(i)) \simeq Iml$, por lo que se tiene que $F(Z(i)) \simeq Iml \subseteq U(i)$. Podemos entonces concluir que $F(Z(i)) \simeq U(i)$. Por lo tanto $\Delta(i)_A = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y)$. □

Una observación importante es que dado el conjunto $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^n$, de los Λ-módulos estándar, siempre se pueden encontrar Λ-módulos inescindibles $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^n$ tales que $(\Delta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratificante de talla n. Ver [10, Lema 1.8.2].

2.3. Ejemplos de Álgebras de Endomorfismos

En esta sección se ejemplifica el último teorema de la sección anterior. A partir de sistemas estratificantes de talla t, se calculará el álgebra de endomorfismos A y probaremos que es un álgebra estándarmente estratificada a la derecha.

Ejemplo 2.3.1. *Tomemos el carcaj del Ejemplo 2.1.5 y el mismo ideal admisible, es decir: Sea C el carcaj*

$$C: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "x"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[loop right, "y"] \end{tikzcd}$$

e I el ideal admisible $I =< x^3, y^3, x^2 - \alpha\beta, y^2 - \beta\alpha, \beta x, \alpha y, y\beta, x\alpha >$.

Para este primer ejemplo, consideramos el mismo sistema estratificante de talla 2 que en el Ejemplo 2.1.5. Recordemos rápidamente éste. Sea $\Theta = \{\Theta(1), \Theta(2)\}$ y $\underline{Y} = \{\Theta(1), P(1)\}$ con $\Theta(1) = \begin{matrix} 1 \\ \downarrow x \\ 1 \end{matrix}$ *y* $\Theta(2) = \begin{matrix} 2 \\ \downarrow \beta \\ 1 \end{matrix}$

Se sabe que $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un sistema estratifcante de talla 2, y $Y = \Theta(1) \bigoplus P(1)$.

Se tiene entonces que $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y) = \mathrm{End}_\Lambda(\Theta(1) \bigoplus P(1))$

Se puede ver que el álgebra A *es isomorfa al álgebra* KC'/I*, donde*

$$C':\; \begin{tikzcd} 1 = P(1) \arrow[r, bend left, "\Pi"] & 2 = \Theta(1) \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

e I *es el ideal admisible* $I =< i\Pi i\Pi >$

Tenemos que calcular los A*-módulos proyectivos y estándar de esta álgebra.*

Recordemos que usamos la composición de flechas de izquierda a derecha, ya que en el Teorema 2.2.24 trabajamos con un álgebra a la derecha, es decir, la composición de homomorfismos es de izquierda a derecha.

Los A*-módulos proyectivos son* $P(1)_A = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\Pi"] \\ 2 \arrow[d, "i"] \\ 1 \arrow[d, "\Pi"] \\ 2 \arrow[d, "i"] \\ 1 \end{tikzcd}$ *y* $P(2)_A = \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "i"] \\ 1 \arrow[d, "\Pi"] \\ 2 \arrow[d, "i"] \\ 1 \end{tikzcd}$

de donde, los A*-módulos estándar son* $\Delta(1)_A = S(1)_A$ *y* $\Delta(2)_A = P(2)_A$.

Y A *es un álgebra estándarmente estratificada a la derecha ya que los* A*-módulos proyectivos tienen una* Δ*-filtración. En efecto, las* Δ*-filtraciones son*

$$P(1)_A > P(2)_A > 0$$

y

$$P(2)_A > 0.$$

Ejemplo 2.3.2. *En este ejemplo usaremos otra vez el álgebra de carcaj del ejemplo anterior, pero tomaremos otro sistema estratificante de talla 2.*

Sean $\Theta = \{\Theta(1), \Theta(2)\}$. *y* $\underline{Y} = \{\Theta(1), P(2)\}$ *con* $\Theta(1) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "x"] \\ 1 \end{tikzcd}$ *y* $\Theta(2) = P(2)$.

Se prueba de manera ánaloga al Ejemplo 2.1.5 que $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *es un sistema estratificante de talla 2.*

Se sigue entonces que $A = \mathrm{End}_\Lambda(\Theta(1) \bigoplus P(2))$ *es isomorfa al álgebra* KC'/I *donde*

$$C' : \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "a"] & 2 \arrow[loop right, "b"] \end{tikzcd}$$

Con $a : Ke_2 \bigoplus Ky \to Ky \bigoplus Ky^2$ *dada por* $e_2 \to y$ *y* $y \to y^2$ *y* $b : Ke_1 \bigoplus Kx \to Kx$ *dada por* $e_1 \to x$ *e* I *es el ideal admisible* $I =< a^3, b^2 >$, *obteniendo los* A*-módulos proyectivos derechos*

$P(1)_A = \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow a \\ 1 \\ \downarrow a \\ 1 \end{array}$ *y* $P(2)_A = \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow b \\ 2 \end{array}$.

De donde, los A*-módulos estándar derechos son* $\Delta(1)_A = P(1)_A$ *y* $\Delta(2)_A = P(2)_A$.

Se sigue que A *es un álgebra estándarmente estratificada a la derecha.*

Ejemplo 2.3.3. *Sea* $\Lambda \simeq KC/I$ *donde* C *es el carcaj*

$$C : \; 3 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\gamma} 4$$

e I *el ideal admisible* $I =< \gamma\beta >$.

Los Λ*-módulos proyectivos son* $P(1) = 1$ $\quad P(2) = \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \beta \\ 1 \end{array}$ $\quad P(3) = \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \alpha \\ 1 \end{array}$ *y* $P(4) = \begin{array}{c} 4 \\ \downarrow \gamma \\ 2 \end{array}$

De donde, los Λ*-módulos estándar son* $\Delta(1) = P(1)$, $\Delta(2) = P(2)$, $\Delta(3) = P(3)$ *y* $\Delta(4) = P(4)$.

Ahora bien, como $\Delta(i) = P(i)$ *para toda* $i \in [1, 4]$, *por el Corolario 2.2.20 se tiene que* $\Delta(i) = Y(i)$ *para toda* $i \in [1, 4]$, *y* $(\Delta, \Delta \leq)$ *es un sistema estratificante de talla 4.*

Por lo que, $A = \mathrm{End}_\Lambda(\bigoplus_{i=1}^{4} Y(i)) = \mathrm{End}_\Lambda(\bigoplus_{i=1}^{4} \Delta(i))$ *es isomorfa al álgebra* KC'/I *donde*

$$
C' : \begin{tikzcd} 1 & 2 & 3 \arrow[ll, bend right, "c"'] & 4 \arrow[l, "a"'] \arrow[ll, bend right, "b"'] \end{tikzcd}
$$

e I es el ideal admisible $I =< ac >$, obteniendo los A-módulos proyectivos derechos

$P(1)_A = 1 \quad P(2)_A = 2 \quad P(3)_A = \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow c \\ 1 \end{array} \quad P(4)_A = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 4 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ 3 & & 2 \end{tikzcd}$

De donde, los A-módulos estándar derechos son $\Delta(1)_A = P(1)_A$, $\Delta(2)_A = P(2)_A$, $\Delta(3)_A = P(3)_A$ y $\Delta(4)_A = P(4)_A$. Es evidente que $P(i)_A \in \mathcal{F}(\Delta)$ para toda $i \in [1,4]$, por lo que A es un álgebra estándarmente estratificada a la derecha.

Capítulo 3

Equivalencia contravariante entre las categorías $\mathcal{F}(\Theta)$ en Λ-mod y $\mathcal{F}(\Delta_A)$ en mod-A

3.1. Equivalencia

En este capítulo, como su nombre lo indica, probaremos la existencia de una equivalencia contravariante entre la categoría $\mathcal{F}(\Theta)$ en Λ-mod, de los Λ-módulos izquierdos finitamente generados que tienen una Θ-filtración, y la categoría $\mathcal{F}(\Delta_A)$ en mod-A, de los A-módulos derechos finitamente generados que tienen una Δ_A-filtración. Ver Teorema 3.1.9.

Recordemos primero algunos objetos que hemos utilizado en los capítulos anteriores. Λ denotará un álgebra de dimensión finita, básica e inescindible sobre un campo K algebraicamente cerrado. En la categoría Λ-mod, consideramos un sistema estratificante de talla t denotado por $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ y, por el Teorema 2.2.24 podemos construir el álgebra de endomorfismos $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$ que es un álgebra estándarmente estratificada a la derecha con respecto a $\leq^{op}$ donde $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$.

Los funtores contravariantes que utilizaremos para probar la equivalencia antes mencionada son los funtores $F := \mathrm{Hom}_\Lambda(\square, Y) : mod(\Lambda) \to mod(A)$ y $G :=$

$\mathrm{Hom}_A(\Box, Y) : mod(A) \to mod(\Lambda)$.

Habiendo dicho esto, podemos comenzar a desarrollar la teoría de este capítulo.

Recordemos la definición de transformación natural.

Definición 3.1.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores covariantes, un morfismo funtorial o transformación natural $\varphi : F \to G$ consiste de una familia de morfismos en $\mathcal{D}$, $\{\varphi_X\}_{X\in\mathcal{C}}$ donde $\varphi_X : FX \to GX$ para cada objeto X de $\mathcal{C}$ que satisface lo siguiente:*

Para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "\varphi_Y"'] & GY. \end{tikzcd}$$

Para el caso contravariante se piden las mismas hipótesis y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\varphi_X"] & GX \\ FY \arrow[r, "\varphi_Y"'] \arrow[u, "Ff"] & GY. \arrow[u, "Gf"'] \end{tikzcd}$$

Procedemos ahora a definir la evaluación ϵ que nos permitirá construir la equivalencia.

Definición 3.1.2. *Sea Λ una K-álgebra, $Y \in \Lambda - mod$ y $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$. Consideremos los funtores $F := \mathrm{Hom}_\Lambda(\Box, Y) : \Lambda - mod \to mod - A$ y*
$G := \mathrm{Hom}_A(\Box, Y) : mod - A \to \Lambda - mod$.

La evaluación $\epsilon : 1_{\Lambda-mod} \to GF$ se define como la familia de morfismos $\epsilon = \{\epsilon_X : X \to GF(X)\}_{X\in\Lambda-mod}$ donde $\epsilon_X(x)(f) = f(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$.

Veamos ahora que esta evaluación es una transformación natural.

Lema 3.1.3. *Sea Λ una K-álgebra, la evaluación $\epsilon : 1_{\Lambda-mod} \to GF$ es una transformación natural de funtores.*

Demostración. Primero veamos que $\epsilon_X(x) : \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) \to Y$ es un morfismo en $mod - A$.

En efecto, dados dos morfismos $f, g : X \to Y$ y $a \in A$, se tiene que
$\epsilon_X(x)(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \epsilon_X(x)(f) + \epsilon_X(x)(g)$.
$\epsilon_X(x)(af) = (af)(x) = f(x)a^{op} = a\epsilon_X(x)(f)$.

Ahora veamos que $\epsilon_X : X \to GF(X)$ es un morfismo en $\Lambda - mod$.

Sean $f : X \to Y$, $x, y \in X$ y $\lambda \in \Lambda$, se tiene que
$\epsilon_X(\lambda x + y)(f) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda\epsilon_X(x)(f) + \epsilon_X(y)(f) = (\lambda\epsilon_X(x) + \epsilon_X(y))(f)$.

Finalmente veamos que ϵ es una transformación natural, es decir, que para cada morfismo $\alpha : M \to N$ en $\Lambda - mod$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\epsilon_M"'] & N \arrow[d, "\epsilon_N"] \\ GF(M) \arrow[r, "GF(\alpha)"'] & GF(N) \end{tikzcd}$$

En efecto, sean $m \in M$ y $f \in F(N)$, se tiene que $GF(\alpha) \circ (\epsilon_M(m))(f) = (\epsilon_M(m)(F(\alpha)f) = \epsilon_M(m)(f\alpha) = f\alpha(m) = \epsilon_N(\alpha(m)(f))$ y por lo tanto el diagrama conmuta. $\square$

Observación 3.1.4. *De manera análoga al lema anterior, se tiene otra transformación natural $\epsilon' : 1_{mod-A} \to FG$ definida como la familia de morfismos $\epsilon' = \{\epsilon'_X : X \to FG(X)\}_{X \in mod-A}$ en $mod - A$ donde $\epsilon'_X(x)(f) = f(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$.*

El siguiente lema será necesario.

Lema 3.1.5. *Sean V y W K-álgebras, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ subcategorías plenas de V-mod y W-mod respectivamente; $H, L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores aditivos y exactos y $\eta : H \to L$ una transformación natural de funtores.*

Si $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta corta en $\mathcal{C}$ que se escinde, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\eta_M : H(M) \to L(M)$ es un monomorfismo (respectivamente epimorfismo).*

2. $\eta_{M'} : H(M') \to L(M')$ y $\eta_{M''} : H(M'') \to L(M'')$ son monomorfismos (respectivamente epimorfismos).

Demostración. Sea $\xi : 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en $\mathcal{C}$ que se escinde; de donde, existen los morfismos $f' : M \to M'$ y $g' : M'' \to M$ en $\mathcal{C}$, tales que $f'f = I_{M'}$ y $gg' = I_{M''}$ y que forman la sucesión exacta corta $\xi' : 0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{g'} M \xrightarrow{f'} M' \longrightarrow 0$ que también se escinde.

Ahora bien, por ser η una transformación natural entre los funtores H y L, tenemos los siguientes diagramas conmutativos en $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
H(\xi) : 0 \arrow[r] & H(M') \arrow[r, "H(f)"] \arrow[d, "\eta_{M'}"] & H(M) \arrow[r, "H(g)"] \arrow[d, "\eta_M"] & H(M'') \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M''}"] & 0 \\
L(\xi) : 0 \arrow[r] & L(M') \arrow[r, "L(f)"] & L(M) \arrow[r, "L(g)"] & L(M'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
H(\xi') : 0 \arrow[r] & H(M'') \arrow[r, "H(g')"] \arrow[d, "\eta_{M''}"] & H(M) \arrow[r, "H(f')"] \arrow[d, "\eta_M"] & H(M') \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M'}"] & 0 \\
L(\xi') : 0 \arrow[r] & L(M'') \arrow[r, "L(g')"] & L(M) \arrow[r, "L(f')"] & L(M') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las sucesiones $H(\xi)$, $L(\xi)$, $H(\xi')$ y $L(\xi')$ se escinden dado que los funtores H y L son aditivos.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Aplicamos el Lema de la serpiente al primer diagrama y obtenemos que $Ker(\eta_{M'}) = 0$ y aplicándolo al segundo diagrama se obtiene que $Ker(\eta_{M''}) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Se obtiene también aplicando el Lema de la serpiente al primer diagrama, dado que las sucesiones

$Ker(\eta_{M'}) \longrightarrow Ker(\eta_M) \longrightarrow Ker(\eta_{M''})$ y

$CoKer(\eta_{M'}) \longrightarrow CoKer(\eta_M) \longrightarrow CoKer(\eta_{M''})$ son exactas. □

El siguiente resultado nos será de utilidad para probar el Teorema 3.1.9

Proposición 3.1.6. *Sean Λ una K-álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t, $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$, $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$ y F y G los funtores definidos en la Definición 3.1.2. Entonces el morfismo evaluación $\epsilon_X : X \to GF(X)$ dado por $\epsilon_X(x)(f) = f(x)$ es un isomorfismo para cualquier $X \in \mathcal{F}(\Theta)$.*

Demostración. Sea $X \in \mathcal{F}(\Theta)$, la demostración se hara por casos.

1. Si $X = Y$ el morfismo $\epsilon_Y : Y \to GF(Y)$ es un isomorfismo.

   a) **Monomorfismo**: Sea $x \in Y$, si $\epsilon(x) = 0$ entonces $0 = 0(1) = \epsilon(x)(1) = 1(x) = x$ de donde, $x = 0$.

   b) **Epimorfismo** : Sea $f \in \mathrm{Hom}_A(A, Y)$, se tiene que $f(a) = af(1)$ para toda $a \in A$ de donde, $\epsilon_Y(f(1))(a) = a(f(1)) = af(1)$ de donde, $f = \epsilon_Y(f(1))$ y ϵ_Y es suprayectiva.

2. Si $X \in add(Y)$, observemos primero que, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\epsilon_{Y^m} : Y^m \to GF(Y^m)$ es un isomorfismo.

   En efecto, $F(Y^m) = \mathrm{Hom}_\Lambda(Y^m, Y) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(Y, Y)^m = A^m$ de donde, $GF(Y^m) \simeq G(A^m) = \mathrm{Hom}_A(A^m, Y) \simeq \mathrm{Hom}_A(A; Y)^m = Y^m$.

   De donde, para $X \in add(Y)$ se sabe que existen $m \in \mathbb{N}$ y $K \in mod(\Lambda)$ tales que $X \bigoplus K = Y^m$. Por lo que se tiene que $X \bigoplus Y = Y^m = GF(X \bigoplus K) \simeq GF(X) \bigoplus GF(Y)$.

   Ahora consideramos la sucesión exacta corta que se escinde
   $\xi : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y^m \longrightarrow K \longrightarrow 0$ en $\mathcal{F}(\Theta)$,
   por lo que obtenemos el diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
\xi : 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_X"] & Y^m \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{Y^m}"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_K"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & GF(X) \arrow[r] & GF(Y^m) \arrow[r] & GF(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   y, dado que, ξ se escinde, ϵ es una transformación natural y ϵ_{Y^m} es un isomorfismo, se tiene que, por el Lema 3.1.5 ϵ_X es un isomorfismo.

3. Este es el caso general. Sea $0 \neq X \in \mathcal{F}(\Theta)$, por el Teorema 2.2.18 se tiene la sucesión exacta $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{s-1}} Y_s \longrightarrow 0$ donde $Y_r \in add(Y)$ para toda $r \in [1, s]$ y $s < m = max(X)$, y además $X_i = Imf_i \in \mathcal{F}(\Theta)$.

   De donde, tenemos las sucesiones exactas cortas

   $\epsilon_i : 0 \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow Y_i \longrightarrow X_i \longrightarrow 0$ para todo $i \in [0, s-1]$ donde $X_{-1} = X$ y $X_{s-1} = Y_s$

   Tomando la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow X_{s-2} \longrightarrow Y_{s-1} \longrightarrow Y_s \longrightarrow 0$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_{s-2} \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{X_{s-2}}"] & Y_{s-1} \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{Y_{s-1}}"] & Y_s \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{Y_s}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & GF(X_{s-2}) \arrow[r] & GF(Y_{s-1}) \arrow[r] & GF(Y_s) &
\end{tikzcd}$$

   y dado que $\epsilon_{Y_{s-1}}$ y ϵ_{Y_s} son isomorfismos, ya que $Y_{s-1}, Y_s \in add(Y)$, se sigue que $\epsilon_{X_{s-2}}$ también lo es. Se sigue inductivamente que ϵ_X es un isomorfismo.

$\square$

Proposición 3.1.7. *Sean V y W K-álgebras, $\mathcal{C}$ una clase de objetos en V-mod y $H : V - mod \to W - mod$ un funtor covariante (respectivamente contravariante) exacto. Entonces, $H(\mathcal{F}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que H es covariante.

Sean $M \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ y

$$F : M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{m-1} > M_m = 0 \text{ una } \mathcal{C}\text{-filtración de } M.$$

Como $M_i/M_{i+1} \simeq C_i$ para toda $i \in [0, m-1]$, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$

en V-mod. Aplicando H a esta sucesión y usando el hecho de que H es exacto en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, obtenemos la sucesión exacta en W-mod

$$0 \longrightarrow H(M_{i+1}) \longrightarrow H(M_i) \longrightarrow H(C_i) \longrightarrow 0$$

para cada $i \in [0, m-1]$. Como $H(M_{m-1}) \simeq H(C_{m-1})$ y $\mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$ es cerrado por extensiones, se tiene que $H(M_{m-2}) \in \mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$. Se sigue inductivamente que $M \in \mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$. □

La siguiente proposición nos proporciona los resultados que faltan para probar el teorema principal de esta sección, ver Teorema 3.1.9.

Proposición 3.1.8. *Sean Λ una K-álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t, $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ y $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. $\mathrm{Ext}^1_A(N, Y) = 0$ *para todo $N \in \mathcal{F}(\Delta_A)$.*
2. *La restricción $G|_{\mathcal{F}(\Delta_A)} : \mathcal{F}(\Delta_A) \to \Lambda$-mod es un funtor exacto y además $G(\mathcal{F}(\Delta_A)) \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$.*
3. *La evaluación $\epsilon'_X : X \to FG(X)$ dada por $\epsilon'_X(x)(f) = f(x)$ es un isomorfismo en mod-A para cualquier $X \in \mathcal{F}(\Delta_A)$.*

Demostración. Primero probaremos los incisos 1 y 2.

Veamos que $G := \mathrm{Hom}_A(\square, Y)$ es exacta en $\mathcal{F}(\Delta_A)$. Consideremos la sucesión exacta

$0 \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow Y(i) \longrightarrow Z(i) \longrightarrow 0$ en Λ-mod.

Aplicando el funtor $F := \mathrm{Hom}_\Lambda(\square, Y)$ que es exacto, obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Z(i), Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i), Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y) \longrightarrow 0$$

donde $P(i)_A = \mathrm{Hom}_\Lambda(Y(i), Y)$ y $\Delta(i)_A = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(i), Y)$. Ver Teorema 2.2.24.

De donde, obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow F(Z(i)) \longrightarrow P(i)_A \longrightarrow \Delta(i)_A \longrightarrow 0$$

Aplicamos el funtor G a dicha sucesión y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo, con el isomorfismo ϵ de la Definición 3.1.2

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Theta(i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_{\Theta(i)}", "\simeq"'] & Y(i) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\epsilon_{Y(i)}", "\simeq"'] & Z(i) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{Z(i)}", "\simeq"'] & 0 & \\
0 \arrow[r] & G(\Delta(i)_A) \arrow[r, "f'"] & G(P(i)_A) \arrow[r, "g'"] & GF(Z(i)) \arrow[r, "h'"] & \operatorname{Ext}^1_A(\Delta(i)_A, Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como g es suprayectiva, $\epsilon_{Y(i)}$ y $\epsilon_{Z(i)}$ son isomorfismos, se tiene que g' es suprayectiva, de donde, por el morfismo de conexión se sigue que $\operatorname{Ext}^1_A(\Delta(i)_A, Y) = 0$ para todo $i \in [1, t]$ por lo que, $\operatorname{Ext}^1_A(\mathcal{F}(\Delta_A), Y) = 0$.

Finalmente, la imagen de $\mathcal{F}(\Delta_A)$ bajo G está contenida en $\mathcal{F}(\Theta)$. En efecto, ya que G es un funtor exacto sobre $\mathcal{F}(\Delta_A)$, de donde, por la Proposición 3.1.7, se tiene que
$G(\mathcal{F}(\Delta_A)) \subseteq \mathcal{F}(G(\Delta_A))$ y $G(\Delta_A) = \Theta$ por lo que $G(\mathcal{F}(\Delta_A)) \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$.

Probemos ahora el inciso 3.

Sea $M \in \mathcal{F}(\Delta_A)$, probaremos por inducción sobre la Δ_A-longitud de M que ϵ'_M es isomorfismo.

Primero $\epsilon'_{\Delta(i)_A} : \Delta(i)_A \to FG(\Delta(i)_A)$ es un isomorfismo para toda $i \in [1, t]$. En efecto, ya que, como $\Theta(i) \in \mathcal{F}(\Theta)$, por la Proposición 3.1.6, se tiene que $GF(\Theta(i)) \simeq \Theta(i)$ de donde, $FG(\Delta(i)) = FG(F(\Theta(i))) = F(GF(\Theta(i))) \simeq F(\Theta(i)) = \Delta(i)_A$.

Si $l_{\Delta_A}(M) = 1$ entonces, $M \simeq \Delta_A(j)$ para algún $j \in [1, t]$ y por lo tanto
$\epsilon'_M : M \to FG(M)$ es isomorfismo, por lo hecho anteriormente.

Supongamos que el resultado es cierto para todo módulo $M \in \mathcal{F}(\Delta_A)$ y tal que $l_{\Delta_A}(M) = n$. Sea $N \in \mathcal{F}(\Delta_A)$ tal que $l_{\Delta_A}(N) = n + 1$.

Sea $F : N = N_0 > N_1 > \cdots > N_n > N_{n+1} = 0$ una Δ_A-filtración de N.

con $N_i/N_{i+1} \simeq \Delta(j_i)$ para todo $i \in [0, n]$. En particular, $N/N_1 \simeq \Delta(j_0)$ y $N_1 \in \mathcal{F}(\Delta_A)$ con $l_{\Delta_A}(N_1) = n$. De donde, por hipótesis de inducción, y sabiendo que F y G son funtores exactos, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon'_{N_1}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon'_N"] & \Delta(j_0) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon'_{\Delta(j_0)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & FG(N_1) \arrow[r] & FG(N) \arrow[r] & FG(\Delta(j_0)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y por hipótesis de inducción ϵ'_{N_1} es isomorfismo; y se probó anteriormente que $\epsilon'_{\Delta(j_0)}$ es isomorfismo, de donde, aplicando el Lema de los 3, se tiene que ϵ'_N es isomorfismo. $\square$

Teniendo los resultados anteriores, podemos finalmente demostar el teorema principal de este capítulo

Teorema 3.1.9. *Sean Λ una K-álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un sistema estratificante de talla t, $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ y $A = \mathrm{End}_\Lambda(Y)$. Entonces, la categoría $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \Lambda$-mod es contravariantemente equivalente a la categoría $\mathcal{F}(\Delta_A) \subseteq$ mod-A.*

Demostración. Primero veamos que el funtor $F := \mathrm{Hom}_\Lambda(\square, Y)$ induce una equivalencia entre $\mathcal{F}(\Theta)$ y su imagen; es decir, probaremos que, si $V, W \in \mathcal{F}(\Theta)$ entonces, $\mathrm{Hom}_\Lambda(W, V) \simeq \mathrm{Hom}_A(F(V), F(W))$.

Sean $V, W \in \mathcal{F}(\Theta)$, se tiene que $\mathrm{Hom}_A(F(V), F(W)) = \mathrm{Hom}_A(F(V), \mathrm{Hom}_\Lambda(W, Y))$ y se sabe que $\mathrm{Hom}_A(F(V), \mathrm{Hom}_\Lambda(W, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(W, \mathrm{Hom}_A(F(V), Y)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(W, \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_\Lambda(V, Y), Y))$ (ver ejercicio 4, página 32 de [5]) además, como $V \in \mathcal{F}(\Theta)$, por la Proposición 3.1.6, se tiene que $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_\Lambda(V, Y), Y) \simeq V$ de donde , se sigue que $\mathrm{Hom}_\Lambda(W, \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_\Lambda(V, Y), Y)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(W, Y)$.

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(W, V) \simeq \mathrm{Hom}_A(F(V), F(W))$.

Ahora bien, por la Proposición 3.1.7, se tiene que $F(\mathcal{F}(\Theta)) \subseteq \mathcal{F}(F(\Theta))$ donde $F(\Theta) = \Delta_A$ por el Teorema 2.2.24, por lo que $F(\mathcal{F}(\Theta)) \subseteq \mathcal{F}(\Delta_A)$. De donde, para terminar con la demostración, basta ver que $F(\mathcal{F}(\Theta))$ contiene a todos los A-módulos con Δ_A-filtraciones.

Esto se sigue de la Proposición 3.1.8 ya que, por el inciso 2, se tiene que el funtor $G := \mathrm{Hom}_A(\square, Y)$ es exacto en $\mathcal{F}(\Delta_A)$ y $G(\mathcal{F}(\Delta_A)) \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$; y, por el inciso 3 de la misma proposición, se tiene que $\epsilon'_X : X \to FG(X)$ es un isomorfismo para toda $X \in \mathcal{F}(\Delta_A)$.

De donde, se sigue que todo módulo $X \in \mathcal{F}(\Delta_A)$ está contenido en $F(\mathcal{F}(\Theta))$. $\square$

Bibliografía

[1] Jorge Enrique Vega Acevedo. *El conjunto de los módulos estándar es un sistema estratificante*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Distrito Federal México, 2014.

[2] I. Agoston, D. Happel, E. Lukacs, y L. Unger. Standarly stratified algebras and tilting. *Journal of Algebra*, 226:144–160, 2000.

[3] Frank W. Anderson y Kent R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag, New York USA, 1992.

[4] I. Assem, D.Simson, y A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press, New York USA, 2006.

[5] H. Cartan y S.Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, New Jersey USA, 1956.

[6] C. Cibils, F. Larrión, y L. Salmerón. *Métodos Diagramáticos en Teoría de Representaciones*. Instituto de Matemáticas UNAM, Distrito Federal México, 1982.

[7] E. Cline, B. Parshall, y L. Scott. Finite dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine Angew. Math*, 391:85–99, 1988.

[8] E. Cline, B. Parshall, y L. Scott. Stratifying endomorphism algebras. *AMS memoirs*, 1996.

[9] V. Dlab y C. M. Ringel. The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras. *Repr. Theory and Related Topics, London Math. Soc. LNS*, 168:200–224, 1992.

[10] K. Erdmann y C. Sáenz. On standarly stratified algebras. *Communications in Algebra*, 31(7), 2003.

[11] E. Do N. Marcos, O. Mendoza, y C. Sáenz. Stratifying systems via relative simple modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2004.

[12] Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda. *Sistemas Estratificantes Lineales.* Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Distrito Federal México, 2011.

[13] C. M. Ringel. The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. *Mat Z*, 208:209–223, 1991.