Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

El programa de Nash: una perspectiva histórica

Tesis Profesional para obtener el grado de
LICENCIADO EN ACTUARÍA

Presenta:

Camilo Abboud Schael

Director de Tesis:

M. en C. María de la Paloma Carmen Zapata Lillo

Ciudad Universitaria. México. Septiembre 2015.

Contenido

INTRODUCCIÓN

“Un modelo de negociación es un juego en el cuál dos o más jugadores tienen la oportunidad de cooperar para beneficiarse conjuntamente, pero deben negociar un procedimiento aceptable para repartir los beneficios de dicha cooperación. El modelo de negociación especifica si se alcanzará un acuerdo, cuándo se alcanzará y cómo se repartirán las ganancias obtenidas, dependiendo de las reglas de la negociación y las características de los negociadores. En este contexto, un problema de negociación se describe mediante un conjunto de pagos o utilidades posibles y un punto que representa las consecuencias del desacuerdo. Una solución para este problema especifica el pago en el que jugadores racionales se pondrían de acuerdo si se enfrentaran al problema de negociación”[1].

Imaginemos a dos personas que recibirán un monto de dinero en caso de que puedan acordar como dividirlo. ¿Cuál es la proporción en la que acordarán? Un punto de partida natural es cincuenta-cincuenta. Sin embargo en la vida real esto no es así. La gente difiere en sus necesidades, contribuciones, habilidades, preferencias y muchas otras características que puedan justificar divisiones diferentes.

Un caso particular podría ser la relación existente entre un abogado y su cliente. Supongamos que lo que está en negociación es dinero, producto de una demanda a favor del cliente. Es evidente que las partes colaboran de diferente manera en la relación, por lo que no hay un argumento claro para suponer una distribución equitativa, lo mismo ocurre con otros profesionistas, como ingenieros o arquitectos que remodelan una obra. También las propinas en un restaurante pueden considerarse una repartición de una negociación. En muchos países estas proporciones se han convertido en una convención. Por ejemplo, en los Estados Unidos, existe la convención en la cual el abogado recibe un tercio del monto de las demandas y el cliente los dos tercios restantes. La propina del 15 por ciento es una convención en gran parte del mundo.

Convenciones de este tipo tienen valor económico, ya que al coordinar las expectativas de cada jugador, se reducen costos de transacción y el riesgo de que la negociación no se lleve a cabo. En cambio, si no existe dicha convención, uno esperaría que los costos aumentaran.

Pero ¿por qué se establecen estas convenciones? ¿Cómo saber cuál repartición se establecerá? Estas preguntas son abordadas por la teoría de juegos. El primero en interesarse en este problema fue John Nash que propone la primera solución al problema, respondiendo a la siguiente pregunta: ¿Qué características debe tener el pago en el que jugadores racionales se pondrían de acuerdo si se enfrentaran al problema de negociación? Nash propone una colección de axiomas que debe cumplir dicha solución, encuentra cuál es y se demuestra su unicidad.

Además, plantea el problema de la necesidad de fundamentar esta solución como una resultante de una serie de ofertas y contraofertas de los negociadores en un contexto de juegos no cooperativos. A este proyecto se le conoce como el *Programa de Nash para los juegos de negociación.*

---

[1] Mármol A.M., Monroy L., Rubiales V. Soluciones Maxmin en Juegos de Negociación n-Personales [PDF] Universidad de Sevilla. Departamento de Economía Aplicada III [Fecha de Consulta: 01 de julio 2015] _Disponible en: http://www.uv.es/asepuma/X/B46C.pdf

Existen avances posteriores en economía para resolver problemas de negociación, entre muchos otros problemas, gracias al desarrollo de Diseño de Mecanismos, como lo describe Myerson[2] en su exposición para recibir el Novel de Economía 2007. Sin embargo lo que tenemos sobre la mesa es la posibilidad de aceptar "El Resultado" de los juegos de negociación.

[2] Myerson R,B. Perspectivas Sobre de Diseño de Mecanismos en la teoría Económica [PDF] Universidad de Chicago. Revista Asturiana de Economía N.44 2009 [Fecha de Consulta: 01 de agosto _2015] Disponible en: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4008585.pdf

Metodología

El presente trabajo hará un recorrido en orden cronológico a través de los sucesos más significativos en el *Programa de Nash*. La estructura general del estudio presenta definiciones relevantes al principio de los capítulos, para un desarrollo cabal de una discusión posterior.

El contenido será el siguiente:

En el capítulo 1 se presenta *la Solución de Nash* (unicidad y caracterización) y su contexto en un *problema de negociación*. Adicionalmente se hará una crítica a los axiomas de Nash. El cuerpo axiomático de Nash es desafiado y se presentan axiomas alternativos.

No es sino hasta el capítulo 2 que se abordan los primeros intentos por afirmar/rechazar que, en un juego no-cooperativo de negociación, se obtendrá *el Producto de Nash* como solución. Dicho intento requerirá de una amplia descripción de *teoría de juegos no-cooperativa*, pues hasta este punto, debido al espíritu cooperativo de los jugadores, no era requerida una descripción del *juego*, pues el conflicto encuentra una solución *a priori*.

Es en este momento que se entiende que la solución que encuentran los juegos cooperativos, es única y depende de los axiomas establecidos, mientras que en los no-cooperativos, el resultado depende enteramente de la mecánica del juego, que dicho sea de paso, busca retratar de la manera más fiel un conflicto de negociación real.

Se enuncia el Juego de Demanda de Nash, diseño que en principio arroja infinidad de soluciones (Equilibrios de Nash), y que requiere de un proceso de selección de soluciones. El grueso del contenido del presente trabajo retrata mecanismos que convergen a una única solución, al igual que lo hacen los axiomas de Nash desde la teoría cooperativa.

Se propone que la manera natural de negociar es en forma de ofertas y contraofertas, por lo que se introduce un modelo de *juego extensivo (árbol)*. Para ello, se resuelve un modelo simple el cuál se irá modificando hasta llegar al modelo de Stahl & Rubenstein.

El capítulo 3 presenta un tercer intento por modelar el problema de negociación, ya que las exigencias de *información* de los jugadores motivan la continuación en la búsqueda de un retrato verosímil de una negociación.

El enfoque *evolutivo* del juego modela a los negociantes como personas comunes y corrientes y pone a prueba si el resultado al que llegarían es efectivamente la solución de Nash. Esto lo hacen en dos sentidos. El primero, al suponer que las personas que negocian tienen limitaciones de información y racionalidad. Además, realizan acciones que son erróneas, aún desde el punto de vista de la racionalidad e información limitadas supuestas. En segundo lugar, a diferencia de los otros enfoques, los juegos evolutivos consideran a los negociadores dentro de la sociedad y son influidos por ella. En lugar de que el juego se repita siempre por los mismos dos negociantes, éstos están inmersos en una población, se enfrentan a diversos individuos y toman en cuenta, la experiencia de esta población. La acción de la “sociedad” en su conjunto influye sobre los negociantes. Es más, el equilibrio de la dinámica con la que los negociantes cambian su estrategia es un patrón de conducta social, por ejemplo, una convención social.

Invito a que se tome especial atención al “hilo negro” del trabajo, que si bien es claro que se trata del Programa de Nash en sí mismo, más particularmente se puede rastrear el concepto de *poderes de negociación* (parámetros de la solución), ya que éste está presente en todo modelo concluido, pero su interpretación económica cambiará según el contexto del juego en cuestión. Así, en teoría de juegos cooperativa (capítulo 1) hablaremos de *poder de negociación* de forma genérica, mientras que en el juego extensivo (capítulo 2) se hablará de *impaciencia* y en el juego evolutivo (capítulo 3) se reinterpretará como *cantidad de información*.

En el capítulo 4, se presentan una serie de experimentos realizados en materia de negociación. Dichos experimentos dan una dimensión más a la investigación, puesto que buscan la justificación última del planteamiento de un cuerpo axiomático: La consecuencia más relevante tendría que ser la obtención del Producto de Nash como solución de experimentaciones reales. Las vicisitudes de los resultados exponen material de investigación ulterior.

Por último, comparto mis reflexiones acerca del uso de Producto de Nash y su posible aplicación en instituciones que resuelvan problemas de negociación.

CAPÍTULO 1
El Problema de Negociación y la Solución de Nash

Problemas de Negociación

A continuación presentamos una serie de definiciones, que nos permitirán trabajar formalmente con el problema de negociación. Sólo se tratarán problemas de negociación entre dos personas que tienen funciones de utilidad crecientes.

> Definición: Un *problema de negociación* es una pareja (X, d) donde $X \subseteq \mathbb{R}^2$ y $d \in X$ tales que en *X* existe al menos un elemento *x* tal que *x*>*d* y que cumplen:
> PN1. El conjunto *X* es convexo.
> PN2. El conjunto *X* es cerrado y acotado superiormente.
> PN3. Se permite la eliminación libre.

X es el conjunto de soluciones factibles. Cada elemento de *X* se interpreta como una pareja de valores posibles de cada una de las dos funciones de utilidad. d es el punto de desacuerdo que representa las consecuencias de no llegar a un acuerdo, por lo que el punto de desacuerdo es una solución factible.

A la colección de problemas de negociación la denotamos como B. Es decir, la colección de parejas de un conjunto *X* que cumpla con estas condiciones y un elemento de desacuerdo *d* en *X*.

$$B = \{(X, d) \mid X \text{ cumple PN1, PN2 y PN3 y } d \in X\}.$$

Soluciones de Negociación

“Una solución de negociación es una función $G: B \to \mathbb{R}^2$ con la propiedad que *G(X, d)* pertenece al conjunto *X*. *G(X, d)* se interpreta como el par de pagos en el que un par de jugadores *racionales* se pondrían de acuerdo si se enfrentaran al problema de negociación *(X, d)*.”[3]

En este capítulo, veremos qué condiciones deben cumplir los pagos en que dos jugadores racionales se pondrían de acuerdo, bajo la formalización de Nash (*Axiomas de Nash)*.

Los Axiomas de Nash

El primero en abordar el problema de modelar los problemas de negociación es Nash, quién propone una solución axiomática, al estilo de los juegos cooperativos. Nash encuentra que existe una solución única que satisfaga sus axiomas. A continuación presentamos los axiomas que debe cumplir una función $G: B \to \mathbb{R}^2$ para ser una solución de Nash.

---
[3] *Ken Binmore, Teoría de Juegos, Pág.179*

Definición: Una función G:$B \rightarrow \mathbb{R}^2$ es **una solución de negociación de Nash** si cumple:

Ax 1) Racionalidad Individual

La solución del juego de negociación $G(X,d)$ debe ser mayor o igual que el pago de desacuerdo para cada jugador y mayor estricto para uno de ellos, i.e.:

$$G(X,d) \geq d$$

Ax 2) Pareto Eficiencia

$$y > G(X,d) \Rightarrow y \notin X$$

Ax.3) Independencia de transformaciones afines.

Es decir,

$$G(\tau(X)), \tau(d)) = \tau(G(X,d)),$$

donde τ es una transformación afín estrictamente creciente.

Ax.4) Las alternativas irrelevantes no influyen en la resolución de juego. Es decir,

si $d \in Y \subseteq X$, entonces:

$$G(X,d) \in Y \Longrightarrow G(X,d) = G(Y,d)$$

Ax.5) En situaciones simétricas los jugadores reciben lo mismo.

Observaciones Sobre los Axiomas de Nash

Axioma 1 Sobre la Racionalidad individual

El supuesto de *racionalidad individual* nos dice que los jugadores no llevarán a cabo ninguna negociación, si esta genera un pago menor al obtenido para alguno de los jugadores en el caso de evitar la negociación.

Axioma 2 Sobre la Eficiencia de Pareto

La propiedad de *pareto-eficiencia* establece que de existir una mejor solución es porque no es factible. La noción de "mejor solución" implica que el pago para un jugador puede ser mayor, sin disminuir el pago del otro jugador.

Es interesante notar que la concentración del pago en un solo jugador (todo para uno, nada para el otro) es pareto-eficiente. Recordemos que estamos hablando de *eficiencia,* por lo que solo interesa el aprovechamiento de los recursos, y no la forma en que estos se distribuyen.

Es por este motivo que la *pareto-eficiencia*, usada como propiedad en solitario, no retrata la ambición (racionalidad) de los jugadores por mejorar (o incluso, evitar empeorar) sus pagos, tan solo porque los recursos ya han sido dispuestos en su totalidad, sin importar su distribución. Esta desafortunada carencia de la pareto-eficiencia generará resultados poco intuitivos durante el desarrollo del juego extensivo (Sección 2.2). Sin embargo, ante la opción de los jugadores de plantear una redistribución de los pagos (contra-oferta) y una sanción individualizada relativa al tiempo de resolución (poderes de negociación: impaciencia), es que la negociación extensiva encontrará la *solución de Nash*.

Si sólo se pidieran los axiomas de racionalidad y de *pareto eficiencia* se genera un conjunto de soluciones factibles al que llamamos conjunto de negociación y que en soluciones como la de la *caja de Edgeworth*, recibe el nombre de *curva de contrato*, y no una solución única. Sin embargo, dadas todas las restricciones simultáneamente, se llegará a la conclusión de que la solución es única y que además quedará determinada.

Como ya se mencionó, es muy discutible el uso de la *eficiencia de pareto* como axioma. Pareciera que restringe demasiado las soluciones factibles, evitando la descripción de posibles escenarios, que bien podrían aparecer en el caso de una negociación real. No obstante, opino que el uso del axioma de *pareto-eficiencia*, usado en un contexto cooperativo, como lo hace Nash, tiene completa validez, pues cualquier punto interior del conjunto de soluciones factibles ($\subseteq \mathbb{R}^2$), puede ser susceptible de mejora por lo menos para un jugador, sin mermar la utilidad del otro, por lo que no hay motivo para pensar que se llegará al punto de desacuerdo. Obsérvese que se está abogando el uso de la eficiencia paretiana junto con la existencia de otro axioma: *axioma de alternativas irrelevantes*. El axioma de *eficiencia de pareto* puede ser discutible en sí mismo, pero el cuerpo axiomático, en mi opinión, es sólido.

Quien siga teniendo sus reservas, tiene sus razones para tenerlas, pues de eso se trata este trabajo, probar la plausibilidad (o no) de los *axiomas de Nash*.

Conjuntos de Negociación

Los *conjuntos de negociación* son un subconjunto de las *soluciones factibles X* del *problema de negociación* (X, d), que satisfacen los axiomas 1 y 2.

Axioma 3: Sobre el cambio de escala en la función de utilidad

La propiedad, simplemente reconoce que la elección de un origen y una unidad para la escala de utilidad es arbitraria.

Como el conjunto de soluciones factibles es convexo (ver PN1), se puede aplicar una transformación lineal (cambio de escala), más precisamente, una *función afín estrictamente creciente*, y se siguen conservando las relaciones con respecto a la función de utilidad, y por ende, efectivamente sea equivalente el uso de una escala sobre otra.

Recordemos lo que es una función afín:

Definición: Función Afín

$$f\,(ax + by) = af(x) + bf(y),$$

donde $a + b = 1.$

Axioma 4 Independencia de Alternativas Irrelevantes

Para ilustrar el axioma de *independencia de alternativas irrelevantes*, Ken Binmore, en su libro *Teoría de Juegos*, cuenta la siguiente historia:

> "Dos personas eligen un plato para compartir en un restaurante chino. El menú ofrece tres alternativas: Chow Mein, Chop Suey y Egg Foo Young. ..., escogen Chop Suey. El camarero aparece entonces y les informa de que se les ha terminado el Chow Mein. Si esto hace que las dos personas cambien de decisión y escojan Egg Foo Young, entonces se habrá violado el principio de alternativas irrelevantes."

A pesar de ser muy intuitivo, el axioma de independencia de alternativas irrelevantes es el que se ha considerado más discutible. Por ejemplo, Luce y Raifa, en su famoso libro *Games and Decisions* lo critican. Kalai y Smorodinsky proponen substituirlo por uno de monotonía. Al final de este capítulo resumimos las ideas de estos últimos autores.

Axioma 5 Sobre la simetría

El axioma de *Simetría* dice que, si los *poderes de negociación* son iguales, la solución de negociación de Nash regular trata a los jugadores simétricamente.

Poderes de Negociación: No hay motivo para suponer que las partes aportan a la relación lo mismo, es decir, que tienen el mismo poder. Para implementar esta idea, introducimos el concepto de poderes de negociación como una pareja de números reales α y β no negativos y tales que $\alpha + \beta = 1$. Lo que se requiere es encontrar una solución de negociación $G(X, d)$ con poderes de negociación α y β de los jugadores 1 y 2, respectivamente. Buscamos una solución dentro del conjunto de negociación, es decir, que se encuentre en la frontera del conjunto de soluciones factibles, debido a la propiedad llamada pareto eficiencia y que cumpla los demás axiomas.

Dados los axiomas de solución de un problema de negociación, en particular la Eficiencia de Pareto, la solución se encuentra sobre una trayectoria parametrizable. Sin embargo, diferentes *puntos de desacuerdo* pueden ser considerados para el problema, y por ende afectar los límites de la trayectoria en cuestión. Es por eso que la solución la expresaremos como combinación lineal del segmento de recta tangente a X, cuyos extremos son:

$$(r,t) = \{(r_1, r_2), (t_1, t_2)\} = \{(r_1, d_2), (d_1, t_2)\}$$

Sea $\varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, donde φ simplemente es una función que invierte los pagos de los jugadores y en consecuencia:

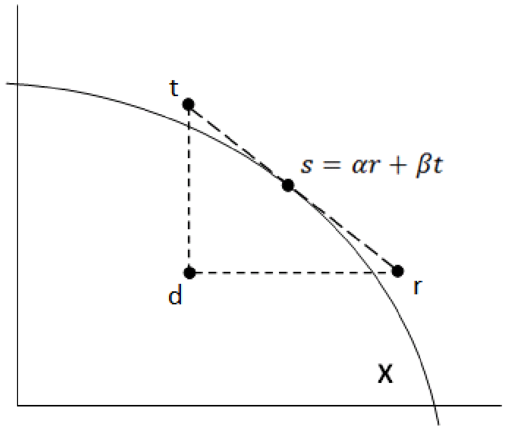
$$G(\varphi(X), \varphi(d)) = \varphi(G(X, d))$$

Se sigue que, de no cumplirse con la simetría de los poderes de negociación ($\alpha \neq \beta \neq$ ½), al intercambiar los pagos, pero conservando cada uno su respectivo poder de negociación,$G(\varphi(X), \varphi(d))$, el pago será distinto a cambiar los pagos y los poderes, $\varphi(G(X, d))$.

Aunque Nash haya resuelto el problema para este caso particular (solución regular), es fácil demostrar, como se hará a continuación, que no es necesaria dicha restricción. No hará falta restringir los poderes de negociación a $\alpha = \beta =$ ½, por lo que el quinto axioma sólo contribuirá en forma de anecdótica, como parte de la evolución histórica del *Programa de Nash*. Y se cambia por uno que especifique los poderes de negociación.

Ejemplo de una solución de Nash

Sea el problema de negociación (X, d) y los poderes de negociación α y β, tales que: $\alpha \geq 0, \beta \geq 0 \; y \; \alpha + \beta = 1$. Consideramos una recta soporte de *X* tal que sólo toca a dicho conjunto en s y pasa por los puntos ***r* = (*r*,*d*$_2$)** y ***t* = (*d*$_1$,*t*)** y, además, s corta al segmento $\overline{rt}$ en las proporciones α y β. Es decir, $s = \alpha \boldsymbol{r} + \beta \boldsymbol{t}$.
Definimos $\mathrm{F}(X, d) = s = \alpha r + \beta t$. Es fácil probar que la función F cumple los axiomas Ax1-Ax4. De ahora en adelante, a la función F la llamaremos la Solución de Negociación de Nash Generalizada para los poderes de negociación α y β.



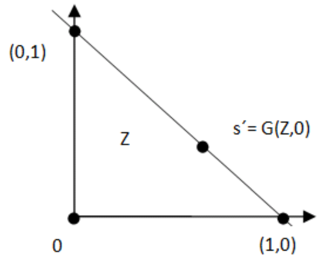
Gráfica 1.1

Teorema (Nash) *La solución $G: B \to \mathbb{R}^2$ satisface los axiomas Ax1-Ax4, si y sólo si G es la solución de negociación de Nash generalizada para algunos poderes de negociación α y β.*

El ejemplo anterior es la demostración de que la solución generalizada de Nash para poderes α y β tales que $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ cumple con los axiomas Ax1-Ax4.
Ahora lo que se trata de demostrar es que, para $G: B \to \mathbb{R}^2$ que satisface los axiomas Ax1-Ax4 existen α y β tales que $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, de tal manera que $G(X, d) = F(X, d)$, con *F* la solución generalizada de negociación de Nash correspondiente a dichos poderes de negociación α y β. Con ello, se demostrará que, para el problema de negociación (X, d), la solución es única si se tienen fijados los poderes de negociación α y β.

Demostración:

Sea el problema de negociación simple $(Z, 0)$, donde 0 es el vector nulo (0,0) y
$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \, x_1 + x_2 \leq 1\}$.



Gráfica 1.2

Por el axioma Ax2, la solución s´= G(Z,0) se encuentra en algún punto del segmento r´(1,0) y t´(0,1).

Entonces existen α y β tales que $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ y s' es de la forma s´ = α r´+ βt´. Entonces, $G(Z,0) = F(Z,0)$, donde F es la función de negociación de Nash generalizada correspondiente a los poderes α y β encontrados. Obsérvese que se cumplen tanto la eficiencia de Pareto, como la racionalidad individual.

Ahora considérese un problema de negociación cualquiera (*X*,*d*). Consideramos la trasformación afín estrictamente creciente $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\tau(d) = 0$ y $\tau(X) \subseteq Z$.

Por los axiomas Ax3 y Ax4, existen α y β tales que $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ $G(\tau(X), \tau(d)) = F(Z,0)$, donde *F* es la función de negociación de Nash generalizada correspondiente a los poderes α y β encontrados.

Pero $G(\tau(X), \tau(d)) = \tau(G(X,d))$.

Entonces $F(Z,0) = \tau(G(X,d))$.

Puesto que $\tau(X) = X'$ y que $\tau(d) = 0$, y observando que $X' \subseteq Z$, por Ax4 se sigue que:

$$F(Z,0) = F(X',0)$$

Por el axioma Ax3:

$$F(\tau(X)), \tau(d)) = \tau(G(X,d)) \quad (1.1)$$

Claramente τ es una función biyectiva, por lo que:

$$G(X,d) = \tau^{-1}(F(\tau(x), \tau(d))) \quad (1.2)$$

Usando el axioma Ax3 para τ-1 en el lado derecho de la ecuación (1.2):

$$G(X,d) = F(\tau^{-1}(\tau(x)), \tau^{-1}(\tau(d))) = F(X,d) \quad (1.3)$$

Recordemos que F es la función de negociación generalizada correspondiente a los poderes de negociación α y β encontrados.

q.e.d

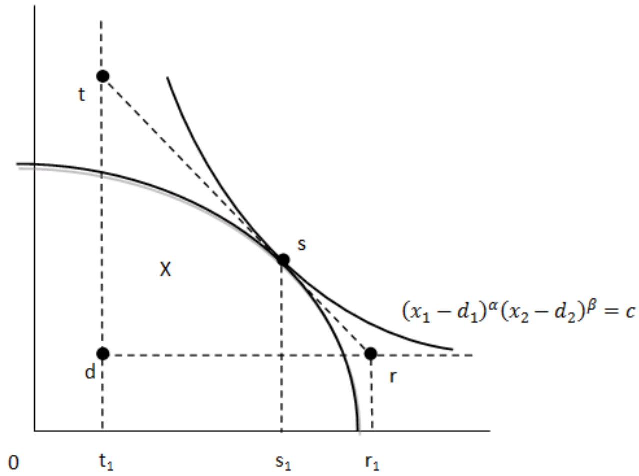
Ahora sabemos que la solución es única, pero también es posible caracterizarla.

Producto de Nash

La solución de negociación de Nash generalizada $G(X, d)$ correspondiente a los poderes de negociación α y β se puede caracterizar como aquel punto $s \in X$, tal que:

$$\max_{\{x \in X | x \geq d\}} \{(x_1 - d_1)^{\propto}(x_2 - d_2)^{\beta}\} \quad (1.4)$$

A este producto se le conoce como producto de Nash generalizado.



Gráfica 1.3

Es necesario confirmar que, si r y t se encuentran sobre la tangente a $(x_1 - d_1)^{\propto}(x_2 - d_2)^{\beta} = c$ en s, entonces $s = \alpha r + \beta t$, según la definición de G. Lo que significa que el producto de Nash alcanza su máximo en s, donde s es la solución del problema de negociación G.

Para ver que lo anterior es cierto, obsérvese que:

$$f_{x_1}(s)(x_1 - s_1) + f_{x_2}(x_2 - s_2) = 0 \quad (1.5)$$

La ecuación (1.5) no es otra cosa que el producto del gradiente de f valuado en s multiplicado escalarmente por (x-s), es decir:

$$\nabla \mathrm{f}(\mathrm{s})^{\mathrm{T}}(\mathrm{x} - \mathrm{s}) = 0 \quad (1.6)$$

Evaluando las derivadas parciales obtenemos:

$$\alpha\left(\frac{x_1 - s_1}{s_1 - d_1}\right) + \beta\left(\frac{x_2 - s_2}{s_2 - d_2}\right) = 0 \quad (1.7)$$

Esto se puede escribir como:

$$\alpha\left(\frac{x_1 - s_1}{s_1 - t_1}\right) + \beta\left(\frac{x_2 - s_2}{s_2 - r_2}\right) = 0, \quad (1.8)$$

…porque $d = (d_1, d_2) = (t_1, r_2)$. Y puesto que r y t se encuentran en la recta tangente, se cumple en particular que:

$$\alpha\left(\frac{r_1 - s_1}{s_1 - t_1}\right) + \beta\left(\frac{t_2 - s_2}{s_2 - t_2}\right) = 0 \qquad (1.9)$$

Resolviendo para $s_1 = \alpha r_1 + \beta t_1$ y $s_2 = \alpha r_2 + \beta t_2$, se sigue que $s = \alpha r + \beta t$, que era lo que se quería demostrar.

La definición dada hasta el momento de una solución de negociación de Nash generalizada con poderes de negociación a y b requiere que a + b =1, la cual es una restricción inconveniente. Sin embargo si hacemos la siguiente transformación:
α = a/(a+b) , β = b/(a+b), sólo tenemos que pedir que *a≥0, b≥0*, y se sigue que:

$$\left\{(x_1 - d_1)^{\alpha}(x_2 - d_2)^{\beta}\right\}^{(a+b)} = (x_1 - d_1)^{a}(x_2 - d_2)^{b} \qquad (1.10)$$

Nótese que *a/b* = *α/β*, por lo que el resultado del problema de negociación de Nash sólo depende de la *razón* de los poderes de negociación, por lo que:

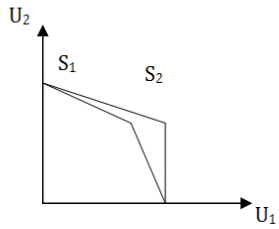
$(x_1 - d_1)^{\alpha}(x_2 - d_2)^{\beta}$ se maximiza siempre que $(x_1 - d_1)^{a}(x_2 - d_2)^{b}$ se maximiza.

Alternativas Irrelevantes: Axioma en tela de juicio

Existe una literatura amplia discutiendo los axiomas de Nash. Uno de los artículos más comentados es el de Kalai y Smorodinsky. Ellos consideran que el axioma 4, el de alternativas irrelevantes es discutible. El argumento intuitivo que manejan es el siguiente:

Ejemplo K-S
Consideremos el par de juegos de negociación (S_1,0) y (S_2,0), tal que:

S_1= cerradura convexa de {(0,1); (1,0) ; (3/4, 3/4)}
S_2= cerradura convexa de {(0,1); (1,0) ; (1, .7)}



Gráfica 1.4

Lo que se puede apreciar es que efectivamente $S_1 \subset S_2$. Para cualquier demanda x en (0,1) del jugador 1, el jugador 2 puede exigir una cantidad mayor si el problema de negociación es (S_2, 0) y no (S_1, 0). Entonces, es intuitivo esperar que la ganancia del jugador 2 en la solución de (S_2, 0) sea mayor o igual a la ganancia de 2 en la solución de (S_1, 0). Sin embargo, la solución de Nash de (S_2, 0) es (1, .7) y la solución de (S_1, 0) es (¾, ¾) .

Es por ello que el cuerpo axiomático que proponen Kalai y Smorodinsky busca que esto que les parece tan intuitivo esté reflejado dentro de éste. Entonces, contemplan los mismos axiomas que antes, salvo el de alternativas irrelevantes, que es sustituido por el axioma de monotonía.

La función $g_S(x)$

Antes de enunciar el axioma, familiaricémonos primero con un par de conceptos.

$$b_1(S) = sup\{x \in \mathbb{R} | (x, y) \in S\}$$
$$b_2(S) = sup\{y \in \mathbb{R} | (x, y) \in S\}$$

$$g_S(x) = \begin{cases} y & si\ (x, y)\ es\ eficiente\ de\ Pareto\ de\ (X, d) \\ b_2(S) & E.O.C. \end{cases}$$

Por lo que se sigue que $g_S(x)$ es el máximo que el jugador 2 puede conseguir, si el jugador 1 obtiene *x*.

Axioma de Monotonía

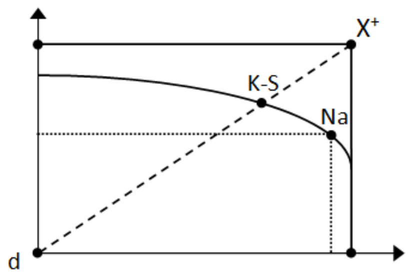
Si (S_1, d) y (S_2, d) son un par de problemas de negociación tales que

(i) $b_1(S_1) = b_1(S_2)$
(ii) $g_{S_1} \leq g_{S_2}$

$\Rightarrow G_2(S_1, d) \leq G_2(S_2, d)$, donde G$(S, d) = \big(G_1(S, d), G_2(S, d)\big)$.

Si tomamos la colección de axiomas que proponen Kalai y Smorodinsky también se llega a una solución única que es la siguiente: Dado el problema de negociación (S,d), consideramos la recta que une al punto de desacuerdo d con el punto $b(S) = (b_1(S), b_2(S))$. A lo largo de la recta los pagos de los jugadores van creciendo, la solución es el punto de la recta que está en S y que tiene pagos máximos.

Otra forma de considerar la solución la solución K-S es el único vector (x^*, y^*) tal que se cumple $\frac{x^*}{b_1(S)} = \frac{y^*}{b_2(S)}$ y dicha razón tiene valor máximo.



Gráfica 1.5

Si la solución se encuentra sobre la recta que une *d* con $b(S)$, y si además, la solución se encuentra sobre la frontera de un conjunto convexo acotado superiormente, la razón antes mencionada alcanza su máximo.

Se puede apreciar que el resultado no es necesariamente el mismo respecto a la solución de Nash. Por ejemplo, en el problema de negociación (S_1, 0) del ejemplo K-S, la solución K-S es (¾, ¾) que es la misma de Nash. En cambio, en (S_2, 0), la solución es (1/1.3, 1/1.3), mientras que la de Nash es (1, .7) . En la solución K-S se cumple la intuición de los autores de que el jugador 2 gana más en el problema (S_2, 0) que en el (S_1, 0).

Este análisis nos hace reflexionar acerca de la importancia de un axioma y su trascendencia. Un axioma que pareciera ser totalmente legítimo, puede encontrar rápidamente argumentos intuitivos que lo contradicen.

Llevémonos pues el recordatorio de que ningún cuerpo axiomático económico tiene que satisfacer a todos, pero no por ello se debe de dejar de hacer teoría económica utilizando alguno de ellos, o en nuestro caso, dejar se seguir los pasos del programa de Nash.

Nota personal sobre Kalai y Smorodinsky vs. Nash

En lo personal, no concuerdo con la objeción intuitiva que Kalai y Smorodinsky presentan: La falta de monotonía. La razón es que lo que realmente se está dando por hecho, no es solo que la función de utilidad debe ser no-decreciente respecto al conjunto de negociación (lo que está bien), sino también que la monotonía se debe de cumplir sin importar el impacto que pudieran tener las nuevas estrategias disponibles para el jugador complementario, lo cual pudiera traducirse directamente en pérdida para el primer jugador, si suponemos que la eficiencia de Pareto aplica como parte del marco axiomático. La ampliación de estrategias puede resultar desproporcional en favor de uno u otro jugador, al contrario que lo se hace al unir dos puntos con una recta (d con X^+), una misma pendiente, una misma proporción. Más bien, la relación no tiene por qué ser monótona creciente en juegos de negociación real.

Ejemplo: El juego de la jaula

Para ilustrar mi punto, usemos un juego un tanto sangriento que se me ocurrió al que llamaré "La jaula". El juego radica en sobrevivir dentro de una mansión donde la única forma de supervivencia implica la muerte del otro jugador. Los jugadores inician el juego en cuartos separados y pueden usar cualquier objeto disponible para lograr su misión. Imaginemos que las estrategias están determinadas por las armas disponibles en cada cuarto. Y que un primer conjunto de negociación es $S_1=(X_{PB},d)$ donde X_{PB} son el conjunto de armas de la planta baja y d el punto de desacuerdo donde ambos jugadores toman la cicuta. La utilidad bien puede estar dada por una tabla que asigna probabilidades conjuntas de supervivencia para cada par de "combinaciones" de armas al momento del enfrentamiento. Ahora, si ampliamos el campo de acción de los jugadores y se les permite acceder al primer piso $S_1 \subseteq S_2$, y digamos que por su posición inicial, el jugador I accede al cuarto de armas de la mansión y se hace de un rifle, mientras que el jugador II accede al baño y accede a una secadora de pelo ($\sigma_1(X_{PB+1er},d) \neq \sigma_2(X_{PB+1er},d)$). Es evidente que el nuevo conjunto de estrategias amplificado sólo favorece a un jugador y que la función de utilidad del jugador II se verá reducida, incluso con la ayuda de su letal secadora de pelo, concluyendo que en un juego de negociación, la utilidad no tiene por qué ser monótona en relación al conjunto de negociación y que no se debe de suponer que el jugador complementario no puede mejorar su posición en detrimento del primero.

Reitero que estas observaciones tan sólo respaldan una opinión. Al fin y al cabo, la preferencia de un axioma sobre otro, no se puede justificar al 100%, y si así lo fuera, sería porque dicho "axioma" es en realidad una propiedad derivada un cuerpo axiomático. A mí me parece que las consecuencias de un campo axiomático son el criterio que debe justificar la implementación de un axioma. Es por ello que quise introducir un juego intuitivamente desfavorable al uso del axioma de monotonía. Una primera objeción que se puede hacer contra "la jaula", es que no cumple con el resto del cuerpo axiomático. En efecto, mi intención no es desechar la monotonía, sino mostrar lo subjetivo que puede ser la predilección de un axioma sobre otro. Irónicamente, el objeto de este trabajo, es estudiar un método de justificación de axiomas. Espero que estas observaciones sirvan para redondear la discusión y sugerir temas colaterales de estudio.

CAPÍTULO 2
Fundamentación no cooperativa de la solución de Nash

Introducción a la fundamentación no-cooperativa de la solución de Nash

Nash considera que para que sus axiomas sean satisfactorios, es necesario construir un juego donde los jugadores hacen ofertas y contraofertas y al acuerdo que lleguen, en un contexto de juegos no-cooperativos, sea el mismo que se deriva de sus axiomas.

Tras la publicación de su primer artículo en el que propone su solución para juegos de negociación, Nash desarrolló las ideas básicas de los juegos no cooperativos, introduciendo su concepto de equilibrio en juegos rectangulares como concepto de solución de dichos juegos. Por ello consideró que la solución que había propuesto para los juegos de negociación debía fundamentarse no cooperativamente.

El primero en intentar fundamentar no cooperativamente el *Producto de Nash*, como solución del juego de negociación, fue del mismo Nash. Con un juego rectangular al que llaman "Juego de Demanda de Nash". Dicho juego tiene una infinidad de soluciones. Nash propone un procedimiento de selección de equilibrios para fundamentar que la solución axiomática sería la elegida. Sin embargo, las exigencias de racionalidad serían muchas, por lo que el problema planteado continuó abierto.

A esta línea de investigación de fundamentar no-cooperativamente la solución de Nash se le conoce como *Programa de Nash*. Entendemos que, una motivación de este programa, es que la solución corresponda a la que se daría entre personas reales.

En este trabajo, seguiremos a muy grandes rasgos los avances más importantes que se fueron dando en esta línea de investigación. Seguiremos el orden histórico. El juego de negociación puede llevarse entre n personas. Aquí sólo abordaremos el problema para dos jugadores.

Conceptos básicos de teoría de juegos no-cooperativa

Conocimiento Mutuo o "*Common Knowledge*"

Status de un juego en el que los jugadores tienen información, además de la información misma, acerca de la información disponible… "se sabe que *se sabe la información*". A su vez, "se sabe que se sabe *la información*" es información, por lo que también se sabe que: *"se sabe que se sabe la información"*… y *ad infinitum*.

En nuestro caso, la información primigenia serán las funciones de utilidad y las estrategias disponibles de todo jugador por todo jugador, y que cumplen con la característica de "ser sabidas por alguien"… propiedad que parece redundante, que sin embargo permite que la meta-información sea a su vez información, pudiéndose conformarse así el bucle, y con él, información adicional. Saber que un jugador está informado o desinformado, cambia la forma de juego de los participantes.

Información completa

Es un atributo que puede presentar un juego, en el que tanto las funciones de utilidad de los jugadores, como sus estrategias, son de “conocimiento mutuo” (*common knowledge).*

Las estrategias son conocidas, sin embargo, los movimientos hasta ahora realizados son información de otra índole.

Información Perfecta

En cada momento del juego, los jugadores cuentan con toda la información acerca de los movimientos realizados hasta ahora.

Durante el desarrollo de las definiciones relativas a los juegos extensivos se profundiza en el concepto de *conjuntos de información*. La idea principal es que si dichos conjuntos están conformados por un único punto, sabremos *perfectamente* en que nodo de la gráfica (Juego en forma de árbol) estamos parados. En contraste, en el juego del dilema del prisionero, cada jugador no sabe en qué vértice se encuentra, porque no sabe si está parado en el vértice “Me han traicionado" o en el vértice “Este policía no sabe nada”.

Juego Rectangular

En la representación rectangular (o forma normal) del juego, cada jugador escoge una *estrategia* simultáneamente y es la combinación de estrategias seleccionadas, la que determina un pago para cada jugador. A este tipo de juegos, que se resuelven en un solo tiempo, se les llama *juegos estáticos.* Eso no quiere decir que la toma de decisiones (selección de estrategias) tenga que ser estrictamente simultánea. Basta que los jugadores no sepan cuál fue/será la selección de estrategia de los otros jugadores (*información imperfecta)*.

Un juego rectangular

Un juego rectangular G (game) se define de la siguiente manera:

$G = \{ S_1, \dots, S_n;\ u_1, \dots, u_n \}$,

donde *n* es la cantidad de jugadores, S_i denota el *conjunto de estrategias disponibles* del jugador *i*, mientras que u_i representa la *función de utilidad* de dicho jugador. $i \in \{1, \in n\}$.

Observación: La diferencia entre un juego rectangular y uno extensivo, es que en el segundo, se puede representar información acerca de los conjuntos de información, en caso de requerirse, una gráfica (un árbol más precisamente) será pues, más conveniente.

Por otro lado, en los juegos de representación rectangular, no existe este tipo de discriminación, dando como resultado, el producto cartesiano de las estrategias de todos los jugadores, sin interesar si ciertas combinaciones de movimientos son factibles, dado un juego específico.

Por lo tanto, para fines prácticos del discurso, hablaremos de un *juego rectangular*, cuando se trate de un juego de *información completa* e *información imperfecta.*

Forma de Representación Normal de un juego

Satisface:

1) Los jugadores en el juego
2) Las estrategias disponibles a cada jugador
3) La función de pagos asociada a todo el perfil de estrategias

Equilibrio de Nash

Una manera de motivar el concepto de equilibrio de Nash es pensar que lo que realmente se busca es una única solución del problema. ¿Cómo debe de ser esa solución? Supongamos que se hace una predicción de la solución. Con el fin de que la predicción sea correcta, cada jugador debe de estar de acuerdo en escoger la estrategia predicha. Por ello, cada estrategia debe de ser la mejor respuesta a las otras respuestas predichas. Se dice que dicha predicción es estratégicamente estable, pues ningún jugador va querer dejar de dar su mejor respuesta ante dicha predicción, a la cual llamaremos equilibrio de Nash.
Definición: En un juego n-personal rectangular $G = \{ S_1, \dots, S_n;\ u_1, \dots, u_n \}$, las estrategias $(s^*{}_1, \dots, s^*{}_n)$ son **equilibrio de Nash** si, para todo jugador *i,* $s^*{}_i$ es la mejor respuesta a $\{(s^*{}_1, \dots, s^*{}_n) \setminus s^*{}_i\}$ de los otros n-1 jugadores:

$$u(s^*{}_1, \dots, s^*{}_n) \geq u(s^*{}_1, \dots, s^*{}_{i-1}, s_i, s^*{}_{i+1}, \dots, s^*{}_n)$$

La definición anterior nos permite encontrar un subconjunto de posibles soluciones, alguna (dependiendo el criterio de selección) ha de ser designada como solución. La utilidad ahora radica en que podemos saber con certeza cuales definitivamente no son una solución. El equilibrio de Nash es entonces, una primera selección de la posible solución.

Equilibrio de Nash Estricto

$$u(s^*{}_1, \dots, s^*{}_n) > u(s^*{}_1, \dots, s^*{}_{i-1}, s_i, s^*{}_{i+1}, \dots, s^*{}_n)$$

CAPÍTULO 2.1 El juego de Demanda de Nash: El Primer Intento

Planteamiento del Juego de Demanda de Nash

Resumamos brevemente la fundamentación no cooperativa de Nash para su solución, antes de exponer uno de los desarrollos más interesantes en el programa de Nash, que es el de Stahl-Rubinstein.

El juego de demanda de Nash es un juego bipersonal de negociación con punto de desacuerdo en $d = (0{,}0)$. Con funciones de utilidad crecientes, tales que $u(d) = (0{,}0)$ y $u(1{,}1) = (1{,}1)$. $u(x, y) = \big(u_1(x), u_2(y)\big)$

La descripción del juego es simple: si los jugadores logran acordar una repartición tal que la suma de las demandas no exceda de 1 (del total), los jugadores reciben el pago demandado. Si se excede del monto total disponible, $x + y > 1,$ entonces el pago será el mismo que el punto de desacuerdo d.

Demandas	Pagos	Utilidad
$x + y \leq 1$	x, y	$u_1(x), u_2(y)$
$x + y > 1$	0,0	0,0

La elección de estrategias de los jugadores sucede simultáneamente, por lo que se trata de un juego de información incompleta. Ningún jugador sabe cuál será la estrategia que tomará el otro.

Supongamos que la jugadora II opta por una posición rígida, en la cual decide no aceptar menos de $1 - x_0$, con $x_0 \in (0{,}1)$. Entonces, la estrategia $(x_0, 1 - x_0)$ es un equilibrio de Nash estricto.

Supongamos que el jugador I elige la estrategia x_0. La estrategia que maximiza la función de utilidad de la jugadora II será entonces $1 - x_0$.

$$u_1(\mathrm{x}_0, 1 - \mathrm{x}_0) > u_1(\mathrm{x}_0, 1 - \mathrm{x}_0)$$

Lo análogo sucede con el jugador I, si la jugadora II decide jugar $1 - x_0$, entonces estrategia que maximiza la función de utilidad del jugador I será x_0.

$$u_2(\mathrm{x}_0, 1 - \mathrm{x}_0) > u_2(\mathrm{x}_0, 1 - \mathrm{x}_0)$$

Por lo tanto:

$$u({s^*}_1, \dots, {s^*}_n) > u({s^*}_1, \dots, {s^*}_{i-1}, s_i, {s^*}_{i+1}, \dots, {s^*}_n)$$

Este juego tiene una infinidad de equilibrios de Nash.

Como se pudo ver, la elección de x_0 fue arbitraria en el intervalo (0,1). Se sigue que la cantidad de Equilibrios de Nash estrictos sea no numerable.

La elección de la estrategia x_0, para que éste genere el producto de Nash, requiere de suposiciones adicionales y de un tratamiento particular. En esta ocasión nos contentaremos en el hecho de saber que dicho procedimiento existe.

Juegos Extensivos

La característica más importante de los juegos extensivos, es que pueden ser representados gráficamente con un árbol, cuyos vértices representan estados del juego y las aristas simbolizan las alternativas o acciones que puede seguir alguno de los jugadores y, que al efectuarse, llevan al siguiente estado. La raíz del árbol es la posición inicial del juego, donde uno de los jugadores elige de sus primeras alternativas. En un juego extensivo no hay "jugadas simultáneas", al menos en el caso de juegos de información perfecta, y los jugadores se alternan para ir decidiendo sus alternativas. Las hojas del árbol, a diferencia del resto de aristas, de efectuarse las elecciones que encaminan a la raíz con ese vértice final, tienen asociados los pagos de los jugadores.

Características adicionales, como la imperfección de la información o como jugadas de azar pueden ser representadas en la misma gráfica (árbol) con ayuda de los conceptos de conjuntos de información y de vértices de azar, pero son opciones que no requeriremos, dadas las características del modelo en cuestión: Un juego de información perfecta.

Presentaremos un juego extensivo de negociación al que le iremos imputando ciertas características, de tal forma que al final, el resultado sea el esperado: El Producto de Nash maximizado como solución. Sin embargo antes introduciremos algunas definiciones básicas de juegos extensivos de información perfecta, como lo son el concepto de estrategia de un jugador en estos juegos, el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos y el algoritmo de Zermelo o de inducción hacia atrás con el que se construyen los equilibrios perfectos en subjuegos para los juegos finitos.

Definiciones Básicas de Juegos Extensivos

A continuación se enuncian una serie de conceptos necesarios para proseguir con el desarrollo del presente trabajo. La mayoría de ellos vinculados directamente a los juegos extensivos.

Definición: Juego Extensivo[4]

Un juego extensivo consta de:

a) Un conjunto N de jugadores
b) Un árbol con raíz (Γ, U), tal que para cada vértice *v*, Alt(v) o tiene más de un elemento o es vacío.
c) Una partición de los vértices no finales en una colección de subconjuntos $S^0, \{S^j\}_{j \in \mathbb{N}}$, de tal manera que existe una biyección entre dichas colecciones de subconjuntos y el conjunto $N \cup \{0\}$, el conjunto S^j es el conjunto de **vértices del jugador *j*** en *N* y S^0 es el conjunto de **vértices de azar**.

[4] Zapata,P., "Economía Política y otros juegos", Facultad de Ciencias UNAM, 1997, pág. 64.

d) Para cada vértice *v* de S^0, una distribución de probabilidad positiva definida en $Alt(v)$, y que la denotaremos como $P(|v)$.

e) Para $j \neq 0$, una partición de S^j en una colección de subconjuntos$\{S_k^j\}$ tales que

e1) para S_k^j existe I_k^j y para todo *v* en S_k^j una biyección $i\colon Alt(v) \to I_k^j$.

e2) si *v* y *z* están en S_k^j, entonces *v* no es mayor que *z* y *z* no es mayor que *v.*

Dichos subconjuntos S_k^j se llaman los **conjuntos de información** del jugador *j*.

f) Para cada $j \in N$, una **función de pago** $\boldsymbol{\pi_j}$ definida en un conjunto de partidas de *R*. El conjunto de partidas de Γ se denota como Y.

En este trabajo sólo aparecen juegos de información perfecta. Un juego de información perfecta es tal que todos los conjuntos de información S_k^j contienen un solo vértice. Por lo que cada vértice v de S^j tiene asociado un conjunto I_v^j.

Estrategia en Juego Extensivo[5]

Una estrategia para el jugador j en el juego Γ es una función σ^j que a cada conjuntos de información S_k^j le asocia un elemento de I_k^j.

Al conjunto de estrategias del jugador *j* en el juego n , lo denotamos como Σ_j y al conjunto de perfiles como Σ. Es decir, $\Sigma = \prod \Sigma_j$.

Las estrategias del jugador j en un juego de información perfecta son funciones que a cada *v* de S^j le asocian un elemento de I_v^j.

Subjuego

Parte de la forma extensiva; una colección de ramas y nodos que satisfacen tres propiedades.

1) Comienza en un solo nodo de decisión, que es a su vez, todo un conjunto de información.
2) Contiene a todo sucesor de este nodo, y sólo éstos.
3) Si un nodo es elemento de un conjunto de información y de un subjuego, entonces el conjunto de información está contenido en el subjuego.

Algoritmo de Zermelo

4) Identificar todos los subjuegos más pequeños (Subjuegos que no contienen subjuegos a su vez) que contengan a los nodos finales.
5) Sustituir cada uno de estos subjuegos por **alguno** de sus equilibrios de Nash.
6) Repetir (1) para el nuevo juego truncado obtenido en 2), tras incrustar los equilibrios de Nash en la raíz de los subjuegos, obteniendo así, una sub-selección de pagos que responden intuitivamente a pagos “realistas”, puesto que

[5] Zapata,P., "Economía Política y otros juegos", Facultad de Ciencias UNAM, 1997, pág. 101.

se supone racionalidad por parte de los jugadores con la opción de movimiento, por lo que se escogerá la *mejor respuesta.*

Equilibrio de Nash de Subjuego Perfecto

Un equilibrio de Nash es subjuego perfecto, si las estrategias constituyen un equilibrio de Nash en todo subjuego.

Observación: Dada la definición anterior, es fácil apreciar que toda solución obtenida por medio del algoritmo de Zermelo es un *equilibrio de Nash de subjuego perfecto*, sin embargo, para aplicar el algoritmo, es necesario pedir que el juego sea finito, con el fin de poder garantizar la existencia de un equilibrio de Nash (en cada subjuego del algoritmo), inconveniente que no presenta la definición de *equilibrio de Nash de subjuego perfecto.*

CAPÍTULO 2.2 EL Juego de Negociación de Stahl-Rubinstein

Stahl y Rubinstein, para llevar a cabo las ideas de Nash, consideraron que una herramienta más adecuada que los juegos rectangulares eran los juegos extensivos de información perfecta. Con ellos se puede modelar la negociación como una serie de ofertas y contraofertas de los participantes como proceden los negociadores reales. Había que estudiar la relación del producto de Nash con el resultado del único equilibrio perfecto en subjuegos de un juego extensivo, en donde los negociadores se alternan haciendo ofertas y contraofertas. Stahl abordó el caso del horizonte finito, un número finito de periodos de negociación y Rubinstein el caso del horizonte infinito. En 8795este último caso, se toma en cuenta el lapso que pasa entre un periodo de negociación y otro y se introduce el límite de equilibrios perfectos en subjuegos de juegos en donde el lapso entre negociaciones es cada vez más corto.

Consideraciones generales

En un caso de compra-venta de un inmueble, en general, si p_C el precio máximo que está dispuesto a pagar el comprador es mayor que p_V el precio mínimo al que el vendedor está dispuesto a llevar la venta a cabo (si es menor no habría negociación, pues ninguno estaría dispuesto a fijar un precio entre estos precios). Nos encontramos con un juego de negociación, puesto que queda pendiente la definición del precio exacto de compra-venta. El juego es el de la demanda de Nash de la sección anterior, pues el establecimiento del precio determina una repartición de la diferencia p_C-p_V. En general, el juego que suele plantearse en la literatura es conocido como la repartición de un pastel o de un dólar. Sirve para negociar con excedentes, los cuales nacen de manera natural de múltiples formas.

Vemos pues que los juegos de negociación tienen gran potencial de aplicación en la vida real. La pregunta es ahora ¿Qué precio se fijará para la compra-venta? O bien ¿En qué proporción se dividirá el excedente, el pastel o el dólar? En lo que sigue hablaremos resumidamente de la repartición del dólar (o del excedente) para hablar del problema de negociación como un juego extensivo.

Sea $\mathrm{m} = (\mathrm{m1}, \mathrm{m2})$ el par de demandas que hacen los jugadores 1 y 2 respectivamente.

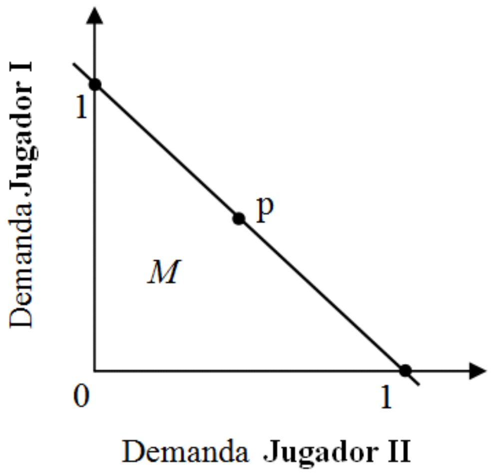
Donde $\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 \leq 1$, ya que de ser mayores las demandas al total disponible, la negociación no se llevaría a cabo, y por lo tanto, el pago será de 0 para ambos jugadores (el juego de la demanda de Nash).

Nótese que hay una equivalencia entre el 1 con el 100% de la demanda, por lo que si m_1, por ejemplo, es igual a ½, en el caso del inmueble equivaldría al punto medio de posibles precios de venta, o sea, (precio máximo del comprador + precio mínimo del vendedor) / 2.

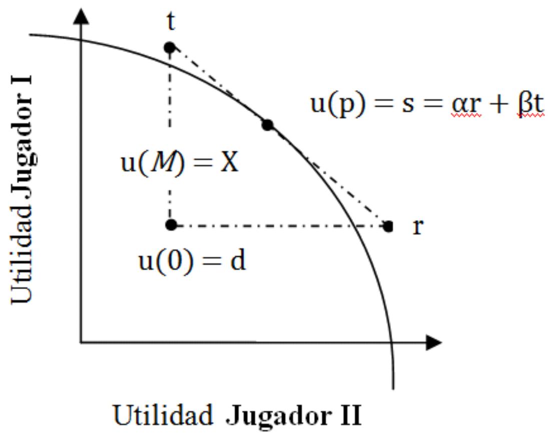
Denotemos como v_i las funciones de utilidad de los jugadores que modelan la “satisfacción” que el jugador i obtiene por recibir m_i del excedente. Las funciones de utilidad dependen sólo del resultado de la negociación, sin importar lo que el otro jugador haya obtenido, por lo que son de la siguiente forma: $u_i(m) = v_i(m_i)$.

Tal que $v_i : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de utilidad. Suponemos que $v_i(0) = 0$, $M = \{m |\ m_1 + m_2 \leq 1\}$ es el conjunto de parejas de estrategias y $u_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de pago del juego.

Supondremos que los jugadores son adversos al riesgo, por lo que u_1, u_2 son funciones cóncavas, y por ende, el conjunto *u(M)* es convexo.



Gráfica 2.2.1



Gráfica 2.2.2

Sea *X* = *u(M)* y *d* = *u(0)*, por lo que nuestro problema de negociación es *(X,d)* y consideramos la solución de negociación generalizada de Nash *s* = *G(X,d)*, donde *s* = *u(p)* con p partes de "dólar".

Compararemos dicha solución con los equilibrios de subjuego perfecto de algunos juegos extensivos que plantearemos.

Ejemplo de división del pastel

Sean las funciones de utilidad $v_i\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definidas por $v_1(z) = z^{\gamma}$ y $v_2(z) = z^{\delta}$.

Si $z > 0$ y $0 < \gamma, \delta \leq 1$, entonces v_1, v_2 son estrictamente crecientes y cóncavas.

Para respetar la propiedad de eficiencia de Pareto, los pares de utilidades deben ser de la forma $\left(z^{\gamma}, (1-z)^{\delta}\right)$ y el punto de desacuerdo es d = (0,0). Así, el producto generalizado de Nash es: $(x_1 - d_1)^{\alpha}(x_2 - d_2)^{\beta}$, donde $x_1 = z^{\gamma}$ y $x_2 = (1-z)^{\delta}$, por lo que el producto es: $z^{\alpha\gamma}(1-z)^{\beta\delta}$, que se maximiza cuando:

$$z = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta}\ ;\ 1 - z = \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma + \beta\delta}.$$

El juego del ultimátum

Este juego toma la forma de negociación extensiva de información perfecta más simple posible, donde el jugador I hace una oferta, y queda en la jugadora II aceptar o rechazar la oferta. Si la oferta es rechazada, los pagos correspondientes serán $u(d) = u(d_1, d_2) = (0,0)$.

Podría parecer demasiado simple el modelo, pero no impide que tenga aplicación real. De hecho, cuando hacemos una compra en una tienda en la cual no existe el regateo, nos encontramos ante esta situación. Queda en nuestras manos aceptar o rechazar el precio impuesto.

El juego del ultimátum y no el de la demanda de Nash es el que tanto Stahl como Rubinstein consideran que se repite, aunque alternando el jugador que hace las demandas.

Equilibrio de Nash en el juego del ultimátum

Examinemos, primero, algunos de los equilibrios del juego del ultimátum de una sola tirada.

Sea t la estrategia pura de la jugadora II, en la cual rechaza toda propuesta del jugador I, si no se le ofrece el dólar completo y aceptar en caso contrario. Sea s la estrategia del jugador I, en la que ofrece el dólar completo a la jugadora II, es decir, (s,t) = (0,1).

El resultado de (s,t) es poco intuitivo, puesto que I demanda cero y deja todo a II. Sin embargo (s,t) es un equilibrio de Nash. Veamos que la jugadora II no recibirá más que el dólar entero y preferirá aceptar el dólar a rechazarlo, por lo que t es respuesta óptima a s. Si II cambia pensando en aceptar otras cantidades, y no sólo el dólar completo, su pago no cambia, pues para dicho pago solo importa la reacción que tendría ante el ofrecimiento del dólar. Desde el punto de vista del jugador I el escenario no es tan atractivo, ya que si la jugadora II va a responder con t y I cambia su oferta, por una parte no completa del dólar, nadie recibe nada, en particular, él no recibe nada, por lo que queda indiferente entre ceder todo el dólar, no recibir nada; o tratar de ceder sólo parte del dólar, ser rechazado...y recibir nada. Sin embargo, no es un equilibrio de subjuego perfecto, pues en los vértices en los que I ha ofrecido otra división, no es óptimo para II rechazar la proposición y no obtener nada en lugar de quedarse con algo positivo por pequeño que sea.

También son equilibrios de Nash las parejas de estrategias tales que la jugadora II decide aceptar cualquier cantidad mayor o igual a 1-$\tilde{x}$ con $\tilde{x}$ en [0, 1] y rechazar pagos menores, cuando el jugador I demanda $\tilde{x}$. Entonces, el juego tiene muchos equilibrios.

Sin embargo, ninguno de estos equilibrios, excepto cuando $\tilde{x} = 1$, es equilibrio de subjuego perfecto, ya que requiere que la jugadora II juegue de forma irracional cuando se alcanzan subjuegos donde I ofreció una división distinta.

Equilibrio de Nash de Subjuego Perfecto en el Juego del Ultimátum Finito

Digamos por ejemplo que el jugador I demanda $x \leq 99$ centavos a su oponente, si la jugadora II rechaza dicha cantidad, se quedará con nada, en vez de $1 - x$. No interesan vendettas, u otro tipo motivaciones que justifiquen el rechazo del monto, como querer ganar reputación de “duro”, ya que el juego ni siquiera se va a repetir. Así pues, se puede observar que los equilibrios de subjuego perfecto son regidos por el concepto de *racionalidad*, es decir, todo jugador prefiere un mayor pago, sin importar como sea el de los otros jugadores.

Se puede apreciar que el concepto de equilibrio de Nash no es lo suficientemente efectivo en el caso del juego del ultimátum, en el sentido que permite soluciones como lo es el par de estrategias (s,t).

Parece razonable buscar este tipo de solución, equilibrios perfectos en subjuegos, que no son otra cosa que un subconjunto de los equilibrios de Nash de los juegos extensivos (y de su forma normal).

El Algoritmo de Zermelo en el Juego del Ultimátum

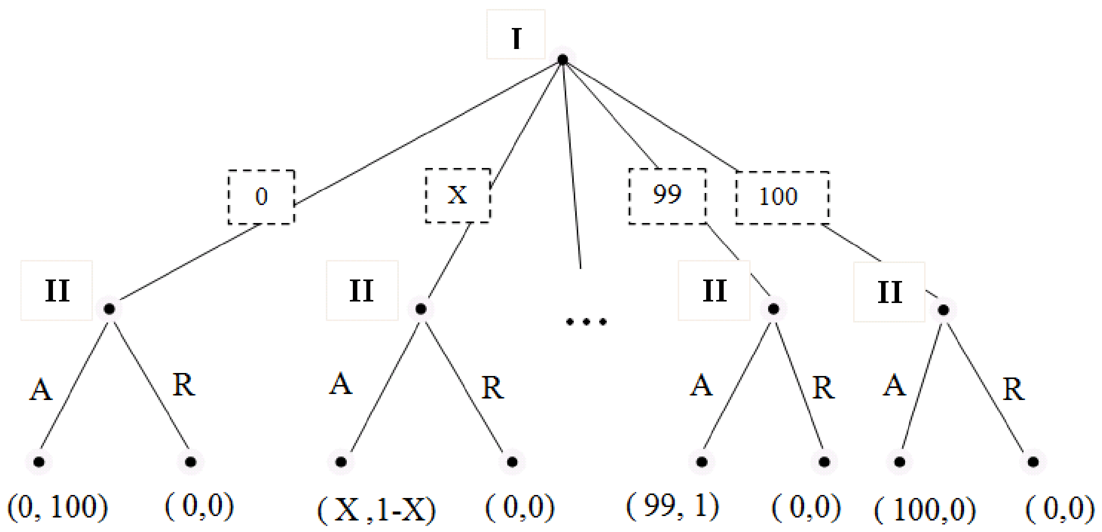
Estamos trabajando con un juego infinito, pues el jugador 1 tiene una cantidad infinita de estrategias, $x \in [0,1]$, pero nos disponemos a utilizar el algoritmo de Zermelo para encontrar los equilibrios perfecto en sub-juego.

La idea de solución que plantearemos para juegos extensivos infinitos, cuando es posible, es la del límite de equilibrios perfectos en subjuegos de juegos finitos cada vez más "cercanos" al juego infinito original.

Veamos en el juego del ultimátum como resulta el procedimiento. Trabajemos casos finitos y apliquemos un proceso límite, y en nuestro caso, existirá el límite.

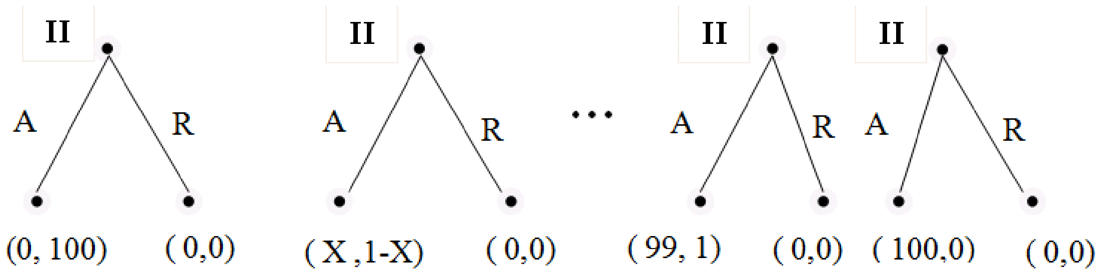
Pensemos, por ejemplo, que el dólar se divide en centavos y, por el momento no podemos manejar fracciones monetarias más pequeñas. Es decir, el jugador I podrá exigir una cantidad entera de centavos, por ejemplo: 49 centavos será una demanda posible, pero 37.5 centavos no. Aplicando el algoritmo de Zermelo, como se hará a continuación, se puede demostrar que en este juego hay dos equilibrios perfectos en subjuego. El primero consiste, como antes, en que el jugador I demande 1 y la jugadora II acepta todas las demandas. El segundo en que I demanda 99 centavos y la jugadora II acepta todas las demandas menos la de 1. Si aumentamos la precisión con la que le es permitido al jugador I hacer demandas, vemos que de nuevo construiríamos un juego con dos equilibrios perfectos en subjuegos.

Siguiendo el proceso al límite, las dos sucesiones de equilibrios tienden al que aparece en todos los juegos, tienden a que I demanda el dólar completo y II acepta. Caso antagónico de (s,t), equilibrio que se describe en la sección anterior.



Gráfica 2.2.3

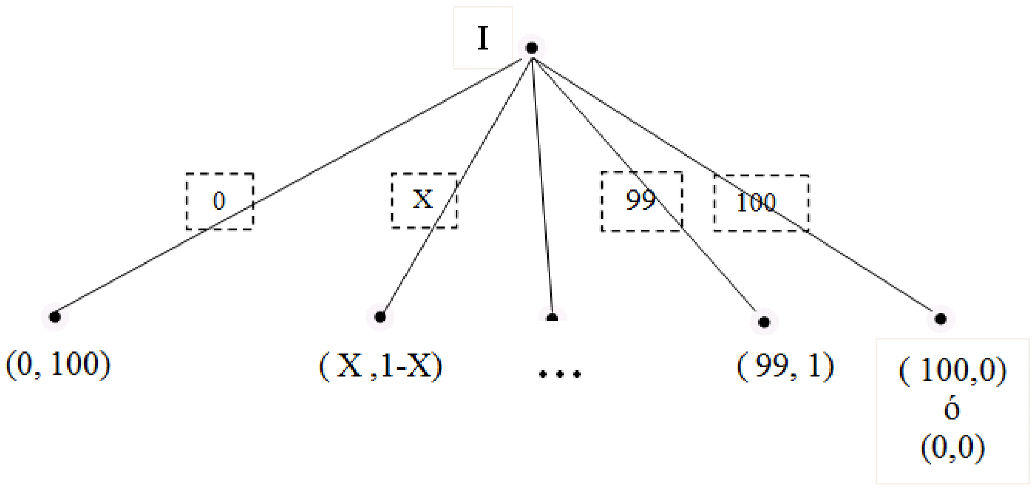
1) Identificar todos los subjuegos más pequeños (Subjuegos que no contienen subjuegos a su vez) que contengan a los nodos finales



Gráfica 2.2.4

En cualquier caso, "rechazar" no es una mejor respuesta para la jugadora II, salvo que el jugador I reclamara todo para si, que en cuyo caso, será indiferente antes sus opciones de movimiento. Por eso es que afirmamos que la jugadora II aceptará cualquier oferta, siguiendo la hipótesis de racionalidad, reacción que puede ser prevista por el jugado I, gracias a que el juego es de información completa.

2) Sustituir cada uno de estos subjuegos por alguno de sus equilibrios de Nash.



Gráfica 2.2.5

Ahora el jugador I está en posición de elegir su mejor respuesta, que es $x = 99$ centavos, y asegurar así, que la jugadora II prefiera 1 centavo sobre nada.

La otra solución podría ser demandar 100 centavos, y dejar a la jugadora II indiferente. Sin embargo, dicha situación se tendría que retratar con vértice de azar. De asignar una distribución equiprobable, es decir, que la mitad de las veces elegirá aceptar y la otra mitad rechazar, dará como resultado una esperanza matemática de 50 centavos, que es menor a 99. Binmore considera que la jugadora II siempre aceptará la demanda de 100 centavos, obteniendo así un segundo equilibrio de subjuego perfecto.

Así pues, el equilibrio en subjuego perfecto es (99 centavos, aceptar), que genera un pago de (99,1).

Observación: Haciendo un proceso límite para poder encontrar la solución del problema original, que es un juego con infinidad de estrategias para el jugador I, vemos que la solución es $\lim_{\epsilon\to 0}(1-\varepsilon,\varepsilon)=(1{,}0)$, donde ε es la precisión con la que el jugador hace sus demandas y que en el ejemplo anterior era de 0.01 unidades monetarias.

Con los argumentos anteriores vemos que los dos equilibrios de cada juego finito del ultimátum, en donde el conjunto de alternativas de I es {0, $\delta, 2\delta, \dots, 1\}$ convergen al equilibrio donde II acepta nada, en la medida de que δ converge a cero. Si directamente pensamos en el juego infinito, es claro que no puede haber un equilibrio de subjuego perfecto en el que el jugador II rechace cuando I pide todo para él, pues I no podría maximizar, para cualquier demanda que eligiera siempre existiría una opción mejor.

Mismo juego, dos etapas

Ahora pensemos que no estamos en la situación de “lo toma o lo deja” del juego del ultimátum, sino que ambos jugadores hacen ofertas y contraofertas a lo largo de varias etapas.

Como prometimos, empezaremos a complicar el modelo. Ahora la jugadora II tendrá más opciones de negociación, a saber, podrá aceptar lo que ofrezca el jugador I o podrá hacer una contraoferta, dejando al jugador dos con las opciones de aceptar o rechazar. El punto de desacuerdo, después de las dos etapas, permanecerá el mismo (0,0) durante el resto de la discusión.

Pensemos el juego con un número finito de alternativas.

Ahora la jugadora II será quién pueda plantear la última oferta. El jugador I tendrá que tener en mente que no le conviene hacer una demanda demasiado ambiciosa, porque la jugadora II estará en posición de rechazar y contra ofertar.

Se puede ver que los papeles de los jugadores se invierten. Si la jugadora II rechaza cualquier oferta de I, se alcanzará el nodo de la raíz de un subjuego, el cual es idéntico al juego de ultimátum, salvo la inversión de los jugadores, generando, en el equilibrio de subjuego perfecto, los pagos (0.01, 0.99).

Otro equilibrio subjuego perfecto posible que genera el mismo pago que el caso anterior es aquel donde el jugador I ofrece 99 centavos a la jugadora II y esta acepta, sin embargo quiero hacer hincapié en que no es el mismo equilibrio, pues éstos están determinados por las estrategias empleadas y no por el pago que las mismas generan.

Dos etapas con impaciencia

Debido a que la duración del juego debe tener un costo, pues no es lo mismo, casi para ninguna persona, obtener una cantidad de dinero en el tiempo τ que α periodos después, tiene sentido introducir factores de descuento δ_1 y δ_2, que satisfacen $0 < \delta_i < 1$. Con ello la utilidad del jugador i por conseguir \$x en el instante t es: $v_i(x)\delta^t$.

La motivación que lleva a usar los factores de descuento es modelar el grado de impaciencia de los jugadores. Mientras más cercano a 1 sea el factor, más paciente éste será.

Haciendo un razonamiento como el que hicimos para el límite de la sucesión de juegos del ultimátum finitos y también para el juego del ultimátum con infinitas alternativas, el algoritmo de Zermelo establece que: Cada persona al hacer la oferta debe dejar en una posición indiferente al otro jugador. Así, en el juego de dos etapas, haciendo el análisis hacia atrás, es decir, aplicando el algoritmo de Zermelo, vemos que la oferta de II debe ser una x tal que $v_1(1-x) = \delta_1; v_1(0) = 0$, por lo que el ofertante final, la jugadora II, se llevará la mejor parte en la negociación si ésta rechaza cualquier oferta del jugador I. De ser así, el subjuego en el que nos encontramos es el mismo que en el juego del ultimátum, sólo que los papeles cambian. La diferencia es que la utilidad ya no será de $v_2(1)$ sino de $\delta_2 v_2(1)$. Entonces, ya sabemos cómo actuaría la jugadora II después de rechazar cualquier cantidad *x* y por lo tanto, cuanto ganarían los jugadores 1 y 2. El jugador I ganaría 0 y la jugador II ganaría $\delta_2 v_2(1)$. Entonces el jugador I preferirá jugar una estrategia que deje a la jugadora II indiferente entre aceptar ó rechazar. A saber, debe pedir *x* tal que $v_2\,(1-\mathrm{x}) = \delta_2 v_2(1)$. Como la negociación se llevará a cabo al tiempo 0, el jugador I recibe $v_1(x)$ y la jugadora II $\delta_2 v_2(1)$.

Observación: Estamos trabajando con juegos extensivos que son juegos de información completa, es decir se supone que los jugadores están bien informados acerca de las funciones de utilidad del otro, entonces, el jugador I puede saber cómo dejar a la jugadora II ante una posición indiferente y viceversa.

Sean las funciones de utilidad tales que $v_1(x) = x$. En el juego de dos etapas I recibiría $(1-\delta_2)$ y II recibiría δ_2. Por lo que a la jugadora II le convendría ser lo más paciente posible, aunque eso radica en su naturaleza, no en una estrategia que decida tomar.

Un aspecto importante de negociaciones con ofertas y contraofertas que ocurren repetidamente, es que tan rápido se realizan las etapas de ese proceso. Para incorporar esto al modelo, pensaríamos que en la forma del modelo de repetición en dos etapas que acabamos de presentar las etapas ocurren en una unidad de tiempo. Para poder hablar de un proceso de negociación más rápido, podemos hablar que las etapas ocurren cada fracción $\tau < 1$ ¿Cómo afecta al proceso este cambio?
Lo que ganaría II sería δ_2^τ, mientras que I ganaría $1 - \delta_2^\tau$. Sabemos que $\delta_2^\tau \to 1$ cuando $\tau \to 0$. Por lo que si las negociaciones se efectúan rápidamente, la jugadora II tendrá una mejor posición sobre la negociación.

Si el juego se repite durante t periodos, haciendo un análisis semejante, se verá quien tendría ventaja sería el jugador que hace la última oferta, por lo que dependería de la paridad de *t* para determinar cuál de los dos jugadores tiene ventaja. Al pasar a horizonte infinito no habrá ese tipo de ventaja.

Observación: Habrá que hacer la distinción entre τ y t, donde τ es la velocidad en la que ocurren las negociaciones y t simboliza el número de periodos transcurridos en la negociación. De este modo, para el juego del ultimátum, t=1 y en el juego de 2 etapas t= 1,2. Si no se desea retratar la impaciencia, τ = 1 y de lo contrario, 0 < τ < 1.

El Juego de Negociación con Horizonte Infinito

Supondremos que el número de etapas o periodos es infinito. Entonces, no existirá un periodo que sea la última etapa, en donde el jugador que hubiese hecho la última oferta toma la ventaja.

Para construir el modelo de horizonte infinito, abandonaremos la simplificación de que $v_i(x) = x$ y supondremos que la función de utilidad v_i de cada jugador i en el instante *t* es cóncava. Más aún, pediremos que $v_i(0) = 0$ y que $v_i(1) = 1$, para asegurar que el

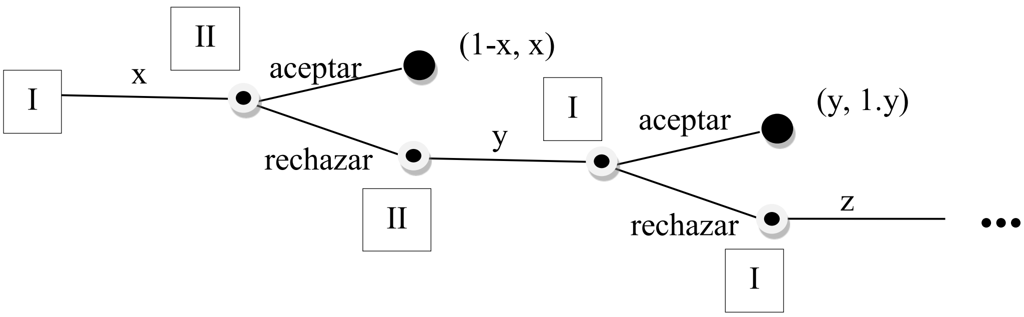
jugador *i* es indiferente en aceptar o rechazar la cantidad nula y poder seguir hablando en términos porcentuales.
Debido a las especificaciones en v_i, podemos redefinir las funciones de utilidad de la siguiente manera:

$u_i(m,t) = v_i(m_i)\delta_i{}^t$ con $m = (m_1, m_2)$ y $m_1 + m_2 \leq 1$.

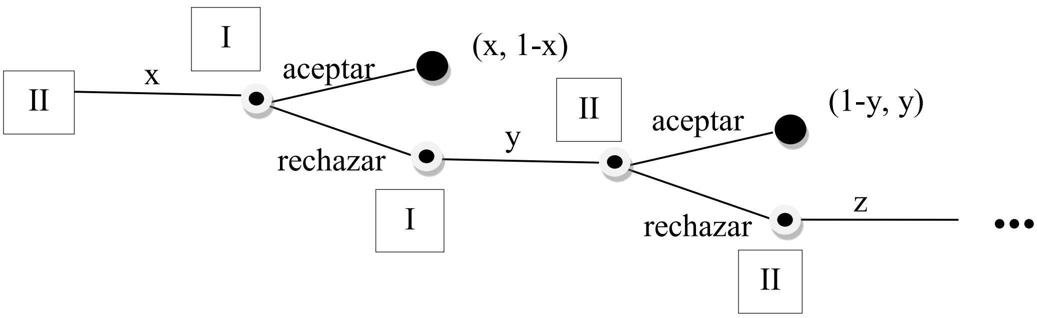
La mecánica del juego será la misma que anteriormente, sólo que ahora los jugadores siempre tendrán la opción de la contraoferta, sin importar cuantos periodos hayan transcurrido. Supondremos que el juego empieza en el instante 0, de ser rechazada la primera oferta, el otro jugador puede hacer una contraoferta al tiempo 1τ, seguida de una posible contra-contraoferta al tiempo $2\,\tau$, etc. Por simplicidad, por el momento, supongamos que $\tau = 1$. Es decir, se hace una sola oferta en cada periodo.

Diferenciaremos los juegos infinitos G1 y G2, donde en el primero, será el jugador I quien haga la primera oferta. Análogamente, la jugadora II iniciará el juego G2.

Esquema del juego G1:



Esquema del juego G2:



Debido a los factores de descuento, las utilidades factibles se irán reduciendo con el tiempo. Podemos caracterizar dichas utilidades de la siguiente manera:

$$X_t = u(M,t)$$

Buscaremos equilibrios en donde las estrategias de cada jugador *j* que son estacionarias (no dependen del periodo t) y consisten en fijar una **cantidad de reserva** l_j tal que si se le ofrecen l_j o más aceptará la oferta y si le ofrecen menos la rechazará. Supongamos, por ejemplo, que el jugador I ha decidido aceptar una oferta de "*n*" o mejor, análogamente, la jugadora II aceptará una oferta de "*m*" o mayor. Quiere decir que nuestros jugadores tomarán una posición rígida durante todo el juego, es decir, jugarán con estrategias fijas.

Definamos los vectores *a* y *b*, de tal forma que:

$$a = u(m, 0) \quad \text{y} \tag{2.2.1}$$
$$b = u(n, 0), \tag{2.2.2}$$

donde $u = (u_1, u_2)$

En el juego G1, donde la primera oferta la hace el jugador I, si éste propone el acuerdo de que a II le toque m al tiempo 0, entonces si II acepta, I recibirá $m_1=1-m$, mientras que la jugadora II recibirá *m*. El valor de la función de utilidad para la jugadora II será $a_2 = u_2(m,0)$, si acepta, y $b_2\delta_2$ si hace una contraoferta de *n* al tiempo 1 y es aceptada. Por lo que el jugador I procurará, por el principio de equilibrio que hemos encontrado, escoger una cantidad de reserva *n* que deje indiferente, a la jugadora II, entre aceptar y rechazar bajo el supuesto de que II ha elegido ~~a~~ *m como cantidad de reserva*. Se tiene en el equilibrio:

$$u_2(m, 0) = u_2(n, 0)\delta_2 \tag{2.2.3}$$

En general para cualquier periodo, para que *m* y *n* formen parte de un equilibrio, debe cumplirse:

$$u_2(m, 0){\delta_2}^{(t)} = u_2(n, 0){\delta_2}^{(t+1)} \tag{2.2.4}$$

Si pensamos ahora en el juego G2, los papeles se invierten, *m* y *n* también deben cumplir:

$$u_1(m, 0){\delta_1}^{(t)} = u_1(n, 0){\delta_1}^{(t+1)} \tag{2.2.5}$$

Por comodidad, tomemos $\delta_i = e^{-\rho_i}$.

Escribiendo las expresiones anteriores en términos de *a* y *b* obtenemos:

$$a_2 = b_2 e^{-\rho_2 t} \tag{2.2.6}$$

$$b_1 = a_1 e^{-\rho_1 t} \tag{2.2.7}$$

Si hacemos $\alpha = 1/\rho_1$, $\beta = 1/\rho_2$,

Se sigue que:

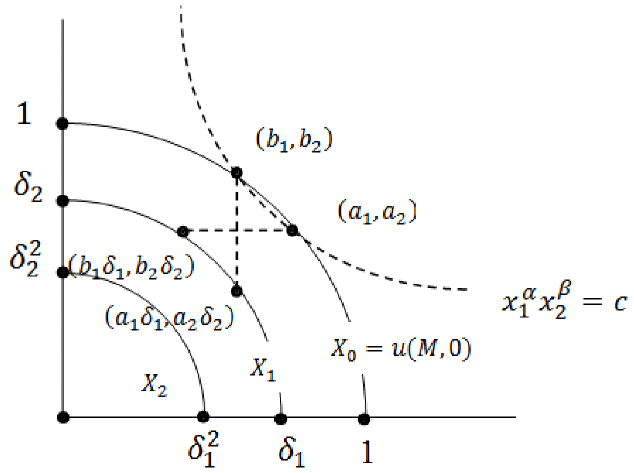
$$(a_2/b_2)^\beta = (b_1/a_1)^\alpha = e^{-t} \tag{2.2.8}$$

$${a_1}^\alpha {a_2}^\beta = {b_1}^\alpha {b_2}^\beta = e^{-t}{a_1}^\alpha {b_2}^\beta \tag{2.2.9}$$

Lo que quiere decir que los puntos $a = (a_1,a_2)$ y $b = (b_1,b_2)$, que están determinados por las estrategias de los jugadores, pertenecen, en el equilibrio de subjuego perfecto, a la misma curva $x_1^\alpha x_2^\beta = c$, para $c=0$. Y no sólo eso, sino que a y b son iguales.

¿Pero qué c es la que se está encontrando? ¿Genera la curva óptima dentro de la familia de curvas $x_1^\alpha x_2^\beta = c$?

La curva que logra el mejor reparto de utilidades es la que está asociada al conjunto de soluciones más grande: $X_0 = u(M, 0)$.



Gráfica 2.2.6

a y b son iguales y pertenecen a la misma curva, pero ¿a qué curva? Para que las negociaciones transcurran rápidamente y se evite el desgaste por impaciencia, el tiempo de ejecución de cada negociación τ debe tender 0.

Seguimos con este el desarrollo a continuación.

Consideramos que $\tau \neq 1,\ (a_2/b_2)^\alpha = \ (a_1/b_1)^\alpha = e^{-t\tau}$
Recordemos que *t* y τ no son lo mismo, *t* cuenta la cantidad de periodos y τ describe la que tan rápido suceden éstos.

Cuando $\tau \to 0$, $e^{-t\tau} \to 1$, por lo que $a_2/b_2 \to 1$ y $b_1/a_1 \to 1$. De aquí se sigue que a y b convergen al mismo valor s, como solución del juego de negociación (X_0, 0).

Lo anterior se puede resumir como:

Teorema: Supongamos que el equilibrio estacionario y subjuego-perfecto determinado por $a_2 = b_2 e^{-\rho_2 t}$ y $b_1 = a_1 e^{-\rho_1 t}$ conduce al par de pagos s(τ). Entonces

$$s(\tau) \to s\ cuando\ \tau \to 0,$$

donde *s* es la solución de negociación de Nash generalizada correspondiente a los poderes de negociación $\alpha = 1/\rho_1$ y $\beta = 1/\rho_2$.

Hemos encontrado un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, al suponer que las estrategias de los jugadores son de la forma: Cada uno escoge una cantidad debajo de la cual no aceptará una oferta. De hecho es claro de la construcción del equilibrio que es el único equilibrio perfecto en subjuegos, donde las estrategias son de esa forma. Falta demostrar que no hay otro equilibrio perfecto en subjuegos, cuando se permite que las estrategias sean cualquiera de las posibles.

Unicidad del Subjuego Perfecto En Subjuegos

Supongamos que existe más de un equilibrio perfecto en subjuegos para el jugador I, cuyos pagos relacionados son a1 y A1, para el pago mínimo y máximo respectivamente. Rubinstein demuestra que el máximo pago y el mínimo son el mismo.

Si se supone que hay varios equilibrios perfectos en subjuegos, entre los pagos del jugador I correspondientes a dichos equilibrios habría uno máximo al que llamaremos a1 y uno máximo al que llamaremos. Rubinstein demuestra que el máximo pago y el mínimo son el mismo.

La demostración se hará enseguida, pero antes quisiera hacer notar que de existir más de un equilibrio de subjuego perfecto, tendría haber al menos un pago relacionado a dicha estrategia menor al máximo de ellos, por lo que si el jugador I pide x < A1, no se dejará indiferente al jugador II, sino que aceptará con gusto, ya que dicha oferta es mayor que la oferta que II haría, tomando en cuenta el decremento un tiempo después, por lo que dicha estrategia, no sería un equilibrio de subjuego perfecto.

Teorema (Rubinstein): El juego de negociación de horizonte infinito G tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos.

Demostración:

Supongamos que hay más de un equilibrio perfecto en subjuegos. Sea A1 el mayor de los pagos obtenidos por el jugador 1 y a_1 el mínimo, obtenidos en equilibrios perfectos en subjuegos en el juego G.

Sea B1 el mayor de los pagos obtenidos por la jugadora 2 y b1 el mínimo, obtenidos en equilibrios de perfectos en subjuegos en el juego H.

Demostraremos que:

$$a_1 = A_1 \text{ y } b_2 = B_2 \tag{2.2.10}$$

Partamos del hecho de que la suma de las ofertas es, a lo más, 1.

Se afirma que:

$$A_1 \leq 1 - b_2\delta_2 \tag{2.2.11}$$

Para hacerlo notar, vasta tomar la mínima de las ofertas que aceptará la jugadora 2. En el juego G, la jugadora 2 no aceptará nada peor que $b_2\delta_2$, ya que puede rechazar cualquier oferta y proponer $b_2\delta_2$ que dejará indiferente al jugador 1. En el juego H, ella puede ofrecer 1-x al tiempo 0. Si x es insuficiente para el jugador 1, éste podría hacer la contra-oferta 1 - $b_2\delta_2$ al tiempo 1, que dejará a la jugadora 2 con $b_2\delta_2$. Éste es el peor de los escenarios para la jugadora 2, que no aceptará algo peor, entonces es el mejor escenario para 1. Es decir, $A_1 \leq 1 - b_2\delta_2$.

Ahora afirmamos que:

$$a_1 \geq 1 - B_2\delta_2$$

Supongamos que no. Entonces sea $x < 1 - B_2\delta_2$.

Demostraremos que x no puede ser el pago para 1 en un equilibrio perfecto en subjuegos.

Sea $x < y < 1 - B_2\delta_2$.

$$B_2\delta_2 < 1 - y \qquad (2.2.13)$$

Si el jugador 1 exige *y* en su primera oportunidad en el juego G, la jugadora II aceptaría, ya que 1-y es más que lo máximo que obtendría si rechaza y. Ya que si II rechaza lo máximo que podría obtener es $B_2\delta_2$. Por lo que si el jugador I cambiara la estrategia que le proporciona x por una que le de *y,* mejoraría su pago. Es decir, x no puede ser equilibrio perfecto en subjuegos. Se sigue que se cumple:

$$a_1 \geq 1 - B_2\delta_2 \qquad (2.2.14)$$

Haciendo un proceso similar, obtenemos en analogía:

$$B_2 \leq 1 - a_1\delta_1 \qquad (2.2.15)$$
$$b_2 \geq 1 - A_1\delta_1 \qquad (2.2.16)$$

Usando (2.2.15) y (2.2.16)

$$A_1 \leq 1 - \delta_2(1 - A_1\delta_1) \qquad (2.2.17)$$

$$A_1 \leq (1 - \delta_2)/(1 - \delta_1\delta_2) \qquad (2.2.18)$$

Análogamente usando (2.2.14) y (2.2.15) se sigue que:

$$a_1 \geq (1 - \delta_2)/(1 - \delta_1\delta_2) \qquad (2.2.19)$$

Pero, $a_1 \leq A_1$, y por (2.2.18) y (2.2.19), $a_1 \geq A_1$. Entonces:

$$a_1 = A_1 = (1 - \delta_2)/(1 - \delta_1\delta_2). \qquad (2.2.20)$$

Un desarrollo equivalente para b_2, B_2 muestra que $b_1 = B_1 = (1 - \delta_2)/(1 - \delta_1\delta_2)$. ■

Es interesante ver qué pasa cuando τ no es 1, sino que los periodos transcurren cada vez más rápido. Es decir, ¿qué pasa en el límite cuando $\tau \to 0$?

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1 - \delta_2^t}{1 - \delta_1^t\delta_2^t} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1 - e^{-\tau\rho_2}}{1 - e^{-\tau(\rho_1+\rho_2)}} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\tau\rho_2}{\tau(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)}$$

En el límite, el pago para el jugador I es $\frac{\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)}$ y para II es $\frac{\rho_1}{(\rho_1+\rho_2)}$.

Entonces la división del dólar es $(a_1, 1 - a_1) = \left[\frac{\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)}, \frac{\rho_1}{(\rho_1+\rho_2)}\right]$. El dólar se divide en proporción $\rho_1:\rho_2$. Esto es exactamente el resultado predicho en la solución generalizada de Nash con poderes de negociación $\alpha = 1/\rho_1$, $\beta = 1/\rho_2$.

CAPÍTULO 2.3 Algunas Observaciones al Modelo de Rubinstein

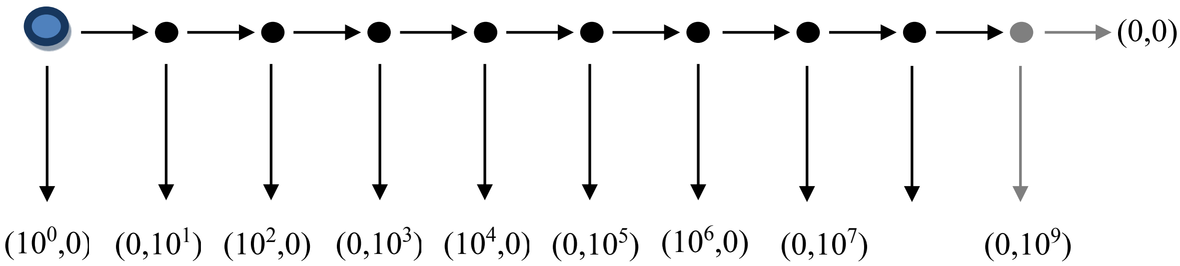
Discusión del Algoritmo de Zermelo. El Juego del Ciempiés

El método de inducción hacia atrás está, como se ha visto, muy relacionado con el análisis del modelo de Rubinstein. Aunque requiere de supuestos de una fuerte racionalidad perfecta, como jugadores de ajedrez ideales, se consideraba un método que siempre llevaba a resultados plausibles, el sencillo ejemplo de Rosenthal al que llaman el juego del ciempiés da al traste con esa idea.
A continuación se desarrolla este juego extensivo para el que el método de inducción hacia atrás no arroja un resultado intuitivamente correcto. Este será, además de la excesiva información con la que cuentan los jugadores en el modelo de Rubinstein, una de las razones más importantes para no dar por resuelto el programa de Nash.

El juego del ciempiés de Rosenthal

Un filántropo excéntrico está dispuesto a donar hasta mil millones de pesos a una Universidad. Invita a los rectores de la UNAM y de la UAG a su habitación en el Waldorf Astoria donde tiene los mil millones en un maletín y, explica a los rectores, que le gustaría que éstos jugaran un juego para decidir a qué Universidad le dará el dinero. La primera jugada consiste en que el filántropo ofrece 1 peso al rector de la UNAM, quien puede aceptarlo o rechazarlo. Si lo rechaza ofrece 10 pesos a la UAG. Sí el rector de la UAG los rechaza, ofrece 100 al rector de la UNAM y así sucesivamente. Después de cada rechazo se ofrece una cantidad 10 veces mayor al otro rector. Si se dan diez rechazos, al rector de la UAG le serán ofrecidos los mil millones. Sí los rechaza, el filántropo coge el dinero y se los vuelve a llevar al banco. Veamos su forma extensiva:

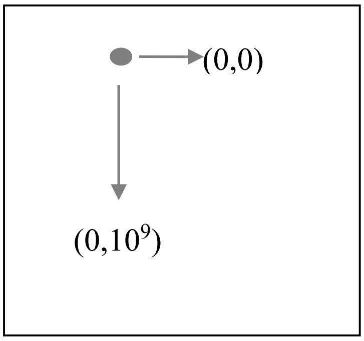
El primer paso del algoritmo de Zermelo dicta: “Identificar todos los subjuegos más pequeños que contengan a los nodos finales”.



Como se muestra en la siguiente figura, inicialmente solamente existe un subjuego “más pequeño” que contenga vértices finales. El concepto de más pequeño está ligado a la longitud de la partida más larga del subjuego. En el caso de juegos de información perfecta (como todos los utilizados en este trabajo) cada subjuego está asociado a un vértice no final. El subjuego encontrado es el que se genera después de 9 rechazos alternados entre el jugador I y II.

1 = $((R_1,R_3,R_5,R_7,R_9),(R_2,R_4,R_6,R_8))$.

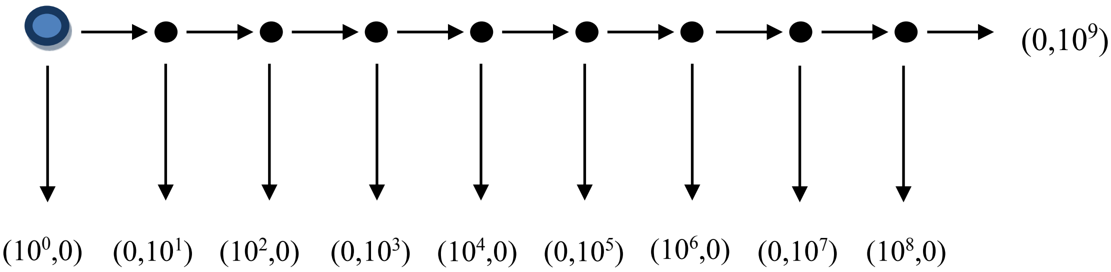
Donde R_i es la estrategia "Rechazar" tras i-1 rechazos previos.



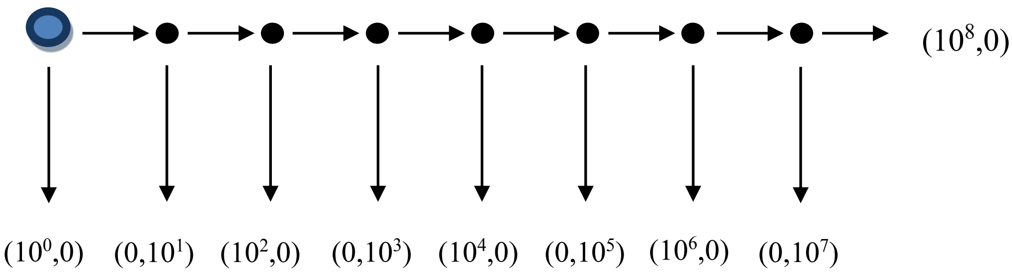
El segundo paso pide obtener el equilibrio de Nash del subjuego en cuestión, que para el caso de un único vértice de decisión, es el mismo que la mejor respuesta a dicha posición.

El tercer paso consiste en substituir el subjuego por el pago generado con el equilibrio de Nash, $(0,10^9)$, que en el contexto de la historia significaría que el rector de la UAG aceptará el billón de pesos antes que el magnate los regrese al banco.

Con esto habremos terminado la primera iteración. Por lo que queda volver a aplicar el primer paso.



El subjuego a elegir será muy similar, pero ahora será el rector de la UNAM quién elija la suerte de ambos convocados, quién podrá prever el uso de una muy lucrativa estrategia del rector de Guadalajara: "Aceptar", por lo que antes de que esto suceda, será el quién de el primer paso y acepte la tampoco despreciable cantidad de 10^8 pesos. Por lo que tras la segunda iteración del algoritmo de Zermelo, el juego queda así:

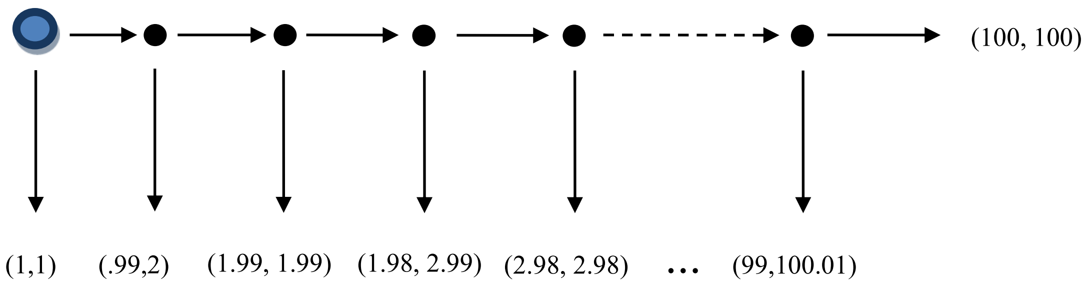


El resultado del juego (final del cuento) es que el primer rector al que se le hace la oferta de 1 peso, acepta.

El gran problema que enfrentan los jugadores en este juego es arriesgarse a perderlo todo, pues así están definidos los pagos.

Sin embargo, podríamos introducir pagos al modelo que generen una selección de estrategias análogas a su predecesor, donde el argumento de "arriesgarlo todo" no es aceptable. Por lo que no quedarán más argumentos para rebatir el hecho de que el Algoritmo de Zermelo puede arrojar resultados poco intuitivos.

Entonces, imaginemos ahora que los pagos del juego del ciempiés se asignan de la siguiente manera:



En esta versión del ciempiés, la dinámica de los pagos transcurre de la siguiente manera:

En el nodo de decisión inicial, que es del jugador I, puede aceptar el pago (1,1), o rechazar y dar oportunidad a la jugadora II de decidir.

Sin importar en nodo en el que nos encontremos, en caso de que el jugador o jugadora rechace el pago correspondiente, verá afectadas sus ganancias en un centavo, mientras que el otro jugador aumentará en 1 peso, si son aceptados los pagos correspondientes del nodo siguiente.

Por un centavo, el jugador en turno decidirá adelantarse al siguiente jugador para evitar el decremento de su pago, generado una reacción en cadena que evita que el juego se desarrolle más allá del primer vértice de decisión.

¿Es Intuitivamente correcto?

Este contra-ejemplo y la elevada exigencia de racionalidad mantienen abierto el Programa de Nash. Será Young quien dé el siguiente paso.

CAPÍTULO 3
Un Enfoque Evolutivo de los Juegos de Negociación

Motivaciones del enfoque evolutivo

En el capítulo anterior vimos como jugadores, siguiendo el algoritmo de Zermelo (método del ajedrecista), llegaron a la solución cooperativa propuesta por Nash. Éste, que es el enfoque de Rubenstein y Sthal para efectuar el programa de Nash, ha tenido gran trascendencia. Toda una línea de investigación se ha desarrollado a partir de dicho trabajo que busca dar una fundamentación no cooperativa a diversos conceptos de solución de los juegos cooperativos, como son el concepto de núcleo o el valor de Shapley, entre otros. Sin embargo, para llevar a cabo el enfoque de Rubenstein-Stahl hubo que crear un escenario particular, además de suponer un proceso límite, información perfecta y completa. Para los juegos de negociación entre gente común y corriente es muy poco realista suponer que actúan con una capacidad de análisis aun mayor que la de los jugadores de ajedrez, utilizando un análisis de inducción hacia atrás y actuando de acuerdo al límite de una sucesión de equilibrios de una sucesión de juegos.

Además, bastó mostrar un juego extensivo diseñado por Rosenthal, el juego del ciempiés, para ver que el método del ajedrecista puede arrojar un resultado que no es intuitivamente aceptable. Para varios autores, como Binmore, Samuelson y Young, este ejemplo reabrió el debate y el estudio de los juegos de negociación que aparentemente había cerrado el modelo Stahl-Rubinstein.

Es por eso que la búsqueda por encontrar un modelo más apegado a la realidad sigue en pie. Ya se han usado juegos rectangulares y juegos extensivos. Es ahora tiempo de dar lugar a los juegos evolutivos.

A diferencia de las otras clases de juegos, en los que se estudia la conducta de un grupo fijo de individuos, en los juegos evolutivos se estudian patrones de conducta social, alcanzada a través de las acciones de individuos que se ven influidos por la colectividad. Por ejemplo, cuáles son las estrategias adecuadas para un jugador en un momento dado en los juegos evolutivos dependerá de una memoria colectiva. “Memoria” porque los jugadores mirarán atrás en el tiempo para informarse acerca de las estrategias que han sido seleccionadas en iteraciones anteriores del juego en cuestión, y “colectiva”, porque los participantes no dependerán únicamente de su propia experiencia sino que harán un sondeo entre otros de los participantes, quizá los más cercanos.

De este modo, cuando nos referimos a un jugador I, en realidad nos estaremos refiriendo a un jugador Clase I o Tipo I. Los jugadores se definen por tomar un rol específico, que los identifica con un grupo de agentes, pues comparten una misma posición dentro de un juego. Así, no es lo mismo ser el consumidor, que el vendedor, pero si es indiferente estar en los zapatos de un consumidor u otro, porque ambos tienen el mismo abanico de acciones disponibles, así como una función de utilidad en común.

Si se entiende a los jugadores como agentes económicos, y si se mira dentro de alguna de las dos clases (compra-venta), no serán diferenciables unos de otros, ya que comparten una misma función de utilidad y un mismo conjunto de estrategias.

Los juegos evolutivos fueron introducidos por el biólogo Maynard Smith y son procesos dinámicos deterministas. En este trabajo utilizamos ciertos juegos evolutivos que son procesos estocásticos diseñados por Peyton Young. Estos son procesos de adaptación que se basan en la historia de las estrategias utilizadas para establecer la mecánica con que los jugadores eligen sus nuevas estrategias. Entender dichas historias como estados dentro de un proceso de Markov, es lo que distingue a estos juegos evolutivos de adaptación, por lo que desarrollaremos es un juego de negociación evolutivo con mecánica adaptativa.

La mecánica de una negociación con un juego evolutivo adaptativo es la siguiente:

Suponemos que en una colectividad, compuesta por dos clases de agentes, se realizan repetidamente, a lo largo del tiempo, negociaciones entre dos personas, uno de cada tipo de los dos posibles, por ejemplo los vendedores y los compradores. Una negociación se lleva a cabo en cada periodo y la colectividad lleva registro de las elecciones que hicieron el comprador y el vendedor en los últimos *m* periodos o turnos, pues tiene limitaciones en el tamaño de su memoria. A este registro de m turnos le llamamos una historia y cuando una nueva negociación va a realizarse suponemos que existe una historia *h*. Para un nuevo periodo, dos agentes con naturaleza de negociación diferente (un vendedor y un comprador) son elegidos de forma aleatoria, aunque esta elección resulte indiferente, en cuanto a su función de utilidad, por formar parte de su correspondiente clase. Los elegidos podrán observar solo una parte de los "*m*" turnos atrás en el tiempo registrados en la memoria colectiva. O sea tomarán una muestra de esa historia y, si no cometen errores, escogerán la estrategia de "mejor respuesta" dada la muestra. Las estrategias utilizadas escribirán un nuevo *registro histórico* y, debido a las limitaciones de la memoria colectiva, el registro más antiguo se olvidará. Si las mismas estrategias son elegidas m veces seguidas y si las estrategias elegidas conforman un equilibrio de Nash estricto, diremos que una *convención* ha sido alcanzada. Que exista una convención no significa que ésta sea única e inamovible.

El desarrollo formal de los conceptos se presentará en el próximo apartado, hasta entonces, contentémonos con terminar con la introducción a dichos conceptos.

Concepto de Solución en Juegos Evolutivos

Una distinción de los juegos evolutivos es que están sometidos a perturbaciones. El factor riesgo está presente. En los procesos que introdujo Maynard Smith, estas perturbaciones se deben a mutaciones que se presentan, con una pequeña probabilidad, cuando la población está ya en un equilibrio. Los equilibrios que resisten a las mutaciones que los empujan a salirse se llaman *evolutivamente estables* y son la solución en esos juegos evolutivos. En cambio, en los procesos de Young, las perturbaciones se deben a errores que cometen los agentes, también con una pequeña probabilidad, pero en cada periodo. Los errores hacen que los agentes se desvíen de sus mejores respuestas que ya de por sí tenían la limitación de ser "buenas" respecto a una pequeña muestra de información. Entonces, lo que se estudian son los equilibrios de estas dinámicas perturbadas a los que Young llama *equilibrios estocásticamente estables*.

En los juegos de negociación, una convención "cercana" a la solución de Nash será el equilibrio estocásticamente estable de cada negociación con un juego de demanda. En el caso del juego de demanda de Rubinstein, los jugadores fueron dotados de las herramientas necesarias para encontrar "La solución", no siendo este el caso de los juegos evolutivos. En ellos, una colectividad de personas que negocian con limitaciones de información y de racionalidad alcanza un equilibrio con el que se establece una convención social que es cercana a la solución de Nash. Es decir, se modela a personas más realistas, pues tienen muchas limitaciones y se establece una dinámica social estocástica derivada de estas limitaciones y así es como se alcanza con la mayor probabilidad la “convención de Nash”.

Una convención permite a los negociadores saber que esperar de su contraparte, y evitar así, el costo relativo del desacuerdo. Sin embargo la realidad es distinta. Las normas cambian y la gente llega a desacuerdos. Es por eso que un proceso estocástico será conveniente para ilustrar este modelo.

Resulta natural preguntarse si una vez alcanzada una convención, es posible salir de la misma. En la vida real así sucede. Pero si en determinado momento la muestra de la historia es constante, siempre la misma, ¿cómo salir de la norma sin salir perjudicado? ¿Es posible? ¿Por qué deja de existir dicha convención para ser suplantada por otra? ¿Efectivamente se llegará a otra convención?

La conclusión será que habrá un costo de transición, pero no por ello dejan de *evolucionar* las convenciones. Tras una serie de negociaciones con resultados desfavorables los jugadores intentarán encontrar otra (o la misma) convención.

Agentes Caóticos

Para poder llegar a las conclusiones anteriores una clave importante es la propiedad de estos juegos evolutivos, que es la presencia de incertidumbre.

La indeterminación del juego evolutivo se presenta en dos formas distintas. La primera es que los jugadores sólo captan aleatoriamente una pequeña cantidad de información disponible (muestra aleatoria de la historia). Los jugadores recabarán información de la memoria social sin preferencia particular de un elemento sobre otro.

Segunda, una vez obtenida una muestra, es posible que los jugadores no jueguen la mejor respuesta. Las interpretaciones del fenómeno anterior pueden ser varias: Los jugadores aspiran a una negociación más fructífera, error humano, distorsión de las condiciones actuales para la negociación, etc.

De haber varias convenciones posibles, ¿cómo leer un resultado? Recordemos que el juego se modelará con procesos estocásticos, por lo que la historia, que se actualiza tras cada resolución, representa un estado dentro de un proceso de Markov. Interesa la frecuencia relativa de la elección de estrategias. Por lo que si se expone el juego a una infinidad de negociaciones, las estrategias más socorridas tendrán mayor peso dentro de la función de densidad.

Finalmente, resultados concretos sobre la distribución dependerán de la forma de modelar las variables aleatorias, a las cuales se les imputará un comportamiento con base en *la resistencia* que muestren de pasar de un estado a otro.

Un aspecto interesante de estos procesos estocásticos es que se puede asociar una gráfica dirigida a cada uno de ellos. La presencia de una resistencia para transitar de un estado a otro permite asociarle a cada flecha de la gráfica un peso o costo y así el problema de encontrar equilibrios de un proceso dinámico estocástico se convertirá en un problema de teoría de redes. Nos limita a entender la gráfica como un conjunto de clases de árboles, o simplemente como un conjunto de árboles, dependiendo respectivamente, de si nos referimos al proceso no perturbado o al perturbado.

En resumen:

- Los jugadores no son fijos, sino que son tomados de un gran “pool” de jugadores potenciales. Para que dos jugadores en particular se enfrenten, depende sólo de factores exógenos al juego.

- Los jugadores no son híper-racionales, aunque intentarán optimizar su posición dada la información con la que cuentan, que es acerca de los resultados obtenidos en negociaciones anteriores.

- Los jugadores cometen errores frecuentemente lo que propicia que el juego es sometido a perturbaciones constantemente. Procesos estocásticos como marco teórico.

- Se modela, además, el problema con gráficas de peso dirigido. Resistencias de transición como forma de medición.

Un desarrollo bajo esta perspectiva evolutiva nos regalará características comprobables e interpretables con mayor apego a la realidad, pues toma en cuenta factores como: nivel de racionalidad, nivel de información y un ambiente dinámico.

Reiteremos que el objetivo último del presente trabajo es justificar el cuerpo axiomático que genera al máximo del Producto de Nash como solución. ¿Cómo? Con un ejemplo más de que, en condiciones más realistas, también se alcanza el resultado antes mencionado.

3.1 Definiciones y descripción formal del modelo

A. Juegos de Adaptación

Los juegos adaptativos presentan las siguientes características:

A.1 Sea un juego $J = (N, \{D_j\}, \{\varphi_j\})$finito.

Una gran población K que se enfrenta repetidamente en el juego rectangular $J = (N, \{D_j\}, \{\varphi_j\})$. La población está partida en n sub-poblaciones, n = #(N). En cada periodo hay una sola partida o encuentro del juego J y participan en ésta n jugadores, uno de cada sub-población, elegidos al azar.

En la sección anterior dimos ejemplos de juegos con dos sub-poblaciones, como lo son la población de compradores y la de vendedores. Será indiferente entre elegir entre un comprador y otro; mismas consideraciones para la sub-población de vendedores.

A.2 Los estados del proceso

Los estados del proceso son los registros de tamaño *m* sobre las acciones que llevaron a cabo los jugadores en los últimos *m* encuentros. El conjunto de estados es $(D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n)^m$. Cada elemento se llama “historia” y representa lo que recuerda la población K en su conjunto de lo que ha ocurrido en los encuentros del juego. *m* es el tamaño de la memoria social.

Las acciones tomadas por el jugador *j* son elementos del conjunto (total) de estrategias $\{D_j\}$. Las acciones tomadas por todos los jugadores son elementos del producto cartesiano de las D_j (*n*-adas de acciones). La repetición del juego es esencial para poder hablar de una historia, la cual se actualizará con la llegada de información nueva. Sin embargo sólo *m* *n*-adas de acciones serán recordadas, por lo que el resultado más antiguo se despedirá definitivamente de la nueva historia.

A.3 Transiciones dentro de los estados del proceso

En cualquier periodo, el proceso está en una historia *h* en $(D_1 \times \ldots \times D_n)^m$. Cada persona k de K logra conseguir una muestra de información de *s* periodos de los *m* que constituyen *h*, $m \geq s$, y elige una mejor respuesta a dicha muestra. La dinámica entre los estados del proceso ($h \rightarrow h'$) toma en cuenta que sólo puede recordar los últimos *m* periodos respetando la lógica de la memoria, es decir, $h_i' = h_{i+1}$, para i=1, 2, ..., *m*-1, y h_m' es la mejor respuesta a las muestras de los que fueron elegidos para jugar.

Lo anterior quiere decir que la probabilidad de una historia al tiempo *t*+1 puede ser pronosticada si se considera que el adversario jugará la mejor respuesta a una muestra (si hay más de una mejor respuesta, se escogerá una de ellas al azar) y la mecánica de selección de estrategias depende sólo de ello (es un proceso de Markov). De ocurrir lo anterior, se estará hablando de una mecánica sin errores. Sin embargo, no por ello el juego queda totalmente determinado, ya que como se dijo, la muestra de "s" elementos es aleatoria, por lo que la mejor respuesta queda definida en términos de una función de densidad, que representa la frecuencia de apariciones de una mejor respuesta u otra (dependiendo del vector aleatorio de dimensión s) (también la elección de una de las mejores respuestas, si hay varias de ellas, se da al azar).

A.4 Función de Densidad: Resultado de un Proceso Aleatorio

La dinámica sin errores es un proceso estocástico, pues los jugadores son elegidos al azar y eligen una muestra al azar.

Lo que ocurre en un periodo sólo depende de lo que pasó el periodo anterior por lo que la dinámica se expresa como un proceso de Markov finito, es decir, con una matriz P donde el término $P_{hh'}$ es la probabilidad de que estando en el periodo anterior en h se pase en el siguiente a h'. Los vectores propios de P asociados al valor propio 1 (uP=u; cuyas coordenadas suman 1) son las distribuciones estacionarias del proceso.

En efecto, una transformación lineal aplicada a la matriz de estados (por ejemplo un cambio de calibración a las funciones de utilidad) debería mantener inalterada la función de densidad con la que se elige una estrategia sobre otra, misma cualidad que presentan los vectores propios con valor propio 1.

A.5 El Error r(h,h')

El error r(h,h') se define simplemente como la cardinalidad del subconjunto de jugadores de J, $0 \leq r(h,h') \leq N$, con $\#J \leq N$, tal que NO eligieron una mejor respuesta, respecto a ninguna posible muestra de tamaño s.

Este error nos concederá la posibilidad de salir de cualquier estado, incluso de una convención, como se explicará más adelante.

Perturbaciones estocásticas del proceso P

Se considera que cada persona de K, en forma independiente, se equivoca o experimenta desviándose de su mejor réplica. De ser así, para cada ε positivo□positivoera que cada persona de KP^{ε}, que es una perturbación del original.

Si bien es cierto que el proceso original es aleatorio, no por ello deja de depender del estado inicial con el que se comienza.

Suponemos que cada persona se equivoca en forma independiente de los otros con una pequeña probabilidad ε. Eso da lugar a un **proceso de adaptación perturbado** P^{ε}, es decir, un proceso de Markov que es una perturbación del proceso P y que tiene la siguiente forma:

Supongamos que el proceso está en el estado *h* al tiempo *t*. Sea λ_j la probabilidad con la que el jugador *j* se desvía de la mejor respuesta en una cantidad fija ε (experimenta). Sea *J* un subconjunto de jugadores *j*, $1 \leq j \leq n$.
La probabilidad de que los jugadores en *J* experimenten (y que *N*- *J* no lo hagan) es de: $\varepsilon^{|J|}\left(\prod_{j\in J}\lambda_j\right)\left(\prod_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j)\right)$.

Ahora bien, si condicionamos el evento anterior al hecho de que al tiempo *t* nos encontramos en *h*, la matriz de transición Q de *h* a *h´*, cuando solo los miembros de *J* se equivocan es:

$Q_{hh'}{}^{J} = \prod_{j\in J} q_j\left((s_j)\middle|h\right)\prod_{j\notin J} p_j\left((s_j)\middle|h\right)$, si *h ´*es sucesor de *h*.

$Q_{hh'}{}^{J} = 0,$ si *h´* **no** es sucesor de *h*.

Donde *s* es la última entrada del vector *h´*.

Se sigue que, si ningún jugador experimenta, la probabilidad de transición de *h* a *h´* es de misma que en el proceso no perturbado $P_{hh'}{}^{0}$, evento cuya probabilidad es de $\prod_{i=1,\dots,n}(1-\lambda_i)$.

El proceso perturbado de Markov tiene la siguiente función de transición:

$$P_{hh'}{}^{\varepsilon} = \left(\prod_{i=1,\dots,n}(1-\varepsilon\lambda_i)\right)P_{hh'}{}^{0} + \sum_{J\subseteq N, J\neq\emptyset}\varepsilon^{|J|}\left(\prod_{j\epsilon J}\lambda_j\right)\left((1-\varepsilon\lambda_j)\right)Q_{hh'}{}^{J}$$

Es decir, el estado h´ es alcanzado desde *h* con una probabilidad de tamaño $P^{\varepsilon}_{hh'}$.

Con ello habremos logrado garantizar un *proceso ergódico*, es decir, el resultado final alcanzado independientemente del estado inicial. El proceso convergerá de forma independiente del estado inicial h_0. Por lo que se acepta una tolerancia lo suficientemente grande para garantizar un estado de recurrencia, concepto desarrollado en breve.

Consideraciones necesarias del modelo perturbado se enuncian a continuación.

PR. Perturbación Regular

Una perturbación del proceso P = P^0 se llama regular si:

PR.1) $P^\varepsilon \to P^0$**, cuando** $\boldsymbol{\varepsilon}$ **tiende a cero**; El proceso perturbado converge al proceso sin errores.

PR.2) Para toda ε **positivo,** P^ε **es irreducible.** Dados dos estados h y h', existe una sucesión de estados $\{h_1 = h, h_2, \dots, h_l = h'\}$ tales que, para toda *i*=1,2,…, *l*-1, $P^\varepsilon_{h_i h_{i+1}} > 0$.
Donde $l = \#\{h_i \in P^\varepsilon\}$

PR.3) Si el término *hh'* de la matriz P^ε es positivo, existe un número entero no negativo $v_{hh'}$ tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P^\varepsilon_{hh'}}{\varepsilon^{v_{hh'}}}$ **existe y es positivo.**

Proposición 3.0.1: *El proceso de adaptación perturbado* P^ε *es regular.*

PR.1 $P^\varepsilon \to P^0$**, cuando** $\boldsymbol{\varepsilon}$ **tiende a cero**.

Dada la forma del proceso P^ε, resulta inmediato.

$$P_{h'h}{}^{\varepsilon} = \left(\prod_{i=1,\dots,n} (1 - \varepsilon\lambda_i) \right) P_{hh'}{}^{0} + \sum_{J \subseteq N, J \neq \emptyset} \varepsilon^{|J|} \left(\prod_{j \epsilon J} \lambda_j \right) \left((1 - \varepsilon\lambda_j) \right) Q_{hh'}{}^{J}$$

Esto significa que cuando la probabilidad de equivocarse es muy pequeña, el proceso perturbado es muy parecido al original. El límite de μ^ε cunado ε tiende a cero converge a la distribución estacionaria de P, lo que nos habla de que con una pequeña perturbación de P, se obliga a que el proceso se comporte de acuerdo a su potencialidad esencial .
Se entenderá mejor lo que es un *proceso irreducible*, al asociar a los procesos P y P^ε una gráfica dirigida. Volveremos a ellos.

PR.2 $\mathbf{P}^\varepsilon$ **es un Proceso Irreducible**

> Definición: Un *proceso* es *irreducible* si, y sólo si, existe una probabilidad positiva de pasar de un estado cualquiera a otro en una cantidad finita de periodos.

El proceso original P no es necesariamente irreducible y las distribuciones estacionarias de P pueden ser muchas. En contraste P^ε tiene una sola distribución estacionaria. De las propiedades de las matrices no negativas, conocemos que una matriz no negativa irreducible tiene un solo vector propio, excepto múltiplos por escalares, asociado al valor propio de mayor magnitud. P^ε es una matriz no negativa irreducible con valor propio de magnitud máxima igual a 1, por lo que tiene un solo vector de distribución estacionaria μ^ε, es decir, tal que $\mu^* P^* = \mu^*$.

Dado P^{ε}, μ^{ε}nos habla de la probabilidad con que se presenta cada uno de los estados. Los equilibrios de estos procesos (equilibrios estocásticamente estables) son aquellos que sobreviven en el límite cuando la probabilidad de equivocarse ε tiende a cero. Es decir, tienen probabilidad positiva en dicho límite.
Entonces, lo que nos interesa es hacer ver que existe el límite de μ^{ε} y estudiar sus coordenadas positivas.

Para convencernos de que efectivamente que el proceso con errores P es irreducible, basta hacer ver que, dadas dos historias h=($\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(m)$) y h´=($\sigma'(1), \sigma'(2), ..., \sigma'(m)$) se puede pasar de *h* a *h´* en una cantidad finita de pasos, ya que se pueden cometer errores de tamaño ε, por lo que en una cantidad finita de pasos, se puede alcanzar el estado ($\sigma(2), \sigma(3)..., \sigma(m), \sigma'(1)$). Por lo tanto el estado ($\sigma(3)..., \sigma(m), \sigma'(1), \sigma'(2)$) también puede ser alcanzado en una cantidad fintita de pasos y finalmente hasta llegar a ($\sigma'(1), \sigma'(2), ..., \sigma'(m)$).

PR.3 Factibilidad y Velocidad de Convergencia

La propiedad R.3 asegura que si el término hh' de la matriz P es positivo, existe un número entero no negativo $v_{hh'}$ tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P^{\varepsilon}_{hh'}}{\varepsilon^{v_{hh'}}}$ existe y es positivo. $v_{hh'}$ es la resistencia de pasar de h a h´. Es decir, desde la forma de $P^{\varepsilon}_{hh'}$ es fácil demostrar que $v_{hh'}$ es igual al mínimo número de errores r(h,h´) que se tienen que cometer para pasar de h a h´ lo que se había definido como la resistencia de pasar de h a h´.

Analicemos un segundo la expresión $0 < \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P^{\varepsilon}_{hh'}}{\varepsilon^{v_{hh'}}} < \infty$.
El primer ejercicio mental que podemos hacer es pensar en qué pasaría si $v_{hh'} = 0$.
Si la resistencia por pasar de h a h´ es cero, es porque los n jugadores planean jugar su mejor respuesta, dada la posición histórica h, es decir, no cometerán errores dadas las muestras que recaben. El límite de la expresión anterior, con $v_{hh'} = 0$, converge a $P_{hh'}^{0}$, claro, el proceso sin errores.

¿Qué subyace bajo la propiedad PR.3?

La velocidad con la que se acerca P^{ε} a P^{0} es del orden de la probabilidad de experimentar de cada jugador ε elevado por el mínimo de errores $v_{hh'}$ que se necesitan cometer para hacer la transición $P_{hh'}$ posible.

La expresión $\varepsilon^{v_{hh'}}$ la podemos entender como la probabilidad de error global mínima necesaria para hacer la transición posible. Siendo así, la probabilidad de transición y el error global mínimo de transición, mantienen una estrecha relación.

Como decíamos antes, la pregunta fundamental que tenemos es si μ^{ε} tiene límite cuando ε tiende a cero y cuál es. Un teorema de Young responde que sí y caracteriza dicho límite.

Antes de enunciarlo necesitamos hablar de las gráficas dirigidas asociadas a los juegos de adaptación.

Si nos dispusiéramos a entender los estados del proceso perturbado regularmente, como vértices de una gráfica, la intuición nos dice que se obtendría una gráfica dirigida, con peso y conexa; incuso completa si nos permitimos asignar un peso infinito a las transiciones imposibles, al fin y al cabo, el problema se resolverá por medio de árboles de peso mínimo, por lo que las transiciones imposibles, nunca serían candidatas a solución. Esta idea nos permite evitar buscar resultados bajo la consigna de factibilidad.

La teoría de gráficas será una de las herramientas que utilizaremos para resolver el problema, por lo que a continuación nos damos a la tarea de re-expresar los elementos de los juegos de adaptación en términos de la teoría de gráficas.

G. Gráficas dirigidas asociadas a los juegos de adaptación

A continuación se enuncian una serie de definiciones y conceptos previamente desarrollados, pero ahora, en términos de gráficas.

G.1 Clase de comunicación recurrente

Consideramos la gráfica dirigida Γ = (V, A) donde V= $(D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n)^m$, es decir, el conjunto de estados del proceso, las historias de tamaño m; y A = {(h, h') tal que $P_{hh'}$ >0}.

1-Def. Un *estado* h´es *accesible* desde h (h $\rightarrow$h´), si existe una probabilidad positiva de pasar del estado h al h´ en una cantidad finita de periodos.

2-Def. Una *Clase de comunicación* es un conjunto de estados que son mutuamente *accesibles.*

3-Def. Una *clase de recurrencia* de P es una *clase de comunicación* donde ningún estado fuera de clase puede ser alcanzado.

4- Def. La cuenca de una clase de *comunicación recurrente* H es el conjunto de vértices h tales que un vértice de H es accesible desde h.

Proposición 3.0.2: Un *proceso* es *irreducible* si y solo si tiene como única *clase de recurrencia a V.*

Una consecuencia de que un proceso estocástico P tenga una *única* clase de recurrencia, es que la *distribución estacionaria* u, que describe el tiempo promedio en el que se está en un estado, es independiente del estado inicial z^0, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} u^t(h|h^0) = u^\infty(h|h^0) = u(h)$$

G.2 Convención

Cuando en el juego de adaptación, una clase de comunicación recurrente consta de la repetición de una misma n-ada de estrategias y esta n-ada es un equilibrio de Nash estricto, hablamos de una convención. Es una historia que consta de un mismo equilibrio de Nash estricto repetido m veces.

Para el caso de un juego bi-personal, una convención *h* tiene la siguiente forma:

$$h^* = \big((x^*, y^*), (x^*, y^*), \ldots, (x^*, y^*)\big)$$

Donde (x^*, y^*) es Equilibrio de Nash estricto del juego.

Proposición 3.0.3: *Una historia es una convención si y solo si es una clase de comunicación recurrente con solo un elemento.*

G.3 Peso de la Gráfica Dirigida Conexa

Consideramos la gráfica dirigida (V, A*) donde V= $(D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n)^m$ y
A* = {(h, h') tal que $P^{\varepsilon}{}_{hh'} \geq 0, con\ \varepsilon > 0$. La gráfica dirigida (V,A*) es conexa, es decir, dadas dos historias h y h' siempre hay una trayectoria finita de flechas que las unen. Para cualquier $\varepsilon > 0$, la gráfica (V,A*) es la misma. Construimos la función de costo que a cada flecha (h, h') de A* le asocia $v_{hh'}$.

G.4 h-Árbol

Para cada historia h, un h-árbol es una sub-gráfica dirigida de (V,A*), donde el conjunto de vértices es V= $(D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n)^m$ y el conjunto de flechas es un subconjunto de A* tal que desde cada h' distinta de h hay una única trayectoria dirigida de flechas del árbol que une a h' con h.

El costo de un h-árbol es la suma de los costos de todas las flechas que pertenecen al h-árbol.

G.5 Resistencia

La resistencia asociada a cada h-árbol es el peso asignado a cada árbol.

Sea Γ* la gráfica dirigida completa cuyos vértices son el conjunto de historias Z.
Sea τ_h* el conjunto de todos los h-árboles en Z.

Para todo h-árbol T* en T_h*, la resistencia de T* es:

$$r(T^*) = \sum_{(h',h'')\in T^*} r(h', h'')$$

G.6 Potencial Estocástico

En primera instancia, podemos preguntarnos cuál es el árbol de resistencia (peso) mínimo, dado el conjunto de h-árboles, para un estado h en particular.

Una vez obtenida la resistencia mínima para cada estado *h*, dado un conjunto de árboles (T_h^*) podemos preguntarnos qué z-árbol es que tiene la menor resistencia.

Se define la función γ: Z→R como:

$$\gamma(h) = \min_{(T^* \in \tau_h^*)} \sum_{(h',h'')\in T^*} r(h', h'')$$

Llamamos potencial estocástico Γ(h) de una historia *h* al mínimo de los pesos de todos los h-árboles.

Proposición 3.1:

a) *Todos los estados de una clase de comunicación recurrente tienen el mismo potencial estocástico.*

b) Los estados de mínimo potencial estocástico pertenecen a alguna de las clases de comunicación recurrente (ccr).

Demostración: Sea z en H_j y sea T* un z-árbol en Z con resistencia $\gamma(z)$. Sea *y* otro estado en E_j. Elíjase un camino de resistencia cero de z a *y*.

La unión de T* y este camino contienen un y-árbol T´ con la misma resistencia. Como T´ tiene mayores combinaciones para formar un árbol de peso mínimo que T*, se sigue que $\gamma(y) \leq \gamma(z)$. Una construcción análoga demuestra que $\gamma(z) \leq \gamma(y)$. ■

Construiremos una nueva gráfica dirigida con vértices en las clases de comunicación recurrente que por ser mucho menor facilitará encontrar los estados de menor potencial estocástico.

G.7- La grafica bonsái

Siguiendo a Binmore, Samuelson y Young, llamaremos **gráfica bonsái** a la gráfica dirigida completa que tiene como vértices a las clases de comunicación recurrente (ccr) del proceso P, es decir, hay una flecha entre cualesquiera dos vértices. Denotémosla como Γ^0 y como V^0 al conjunto de ccrs. Definimos el costo de la flecha que une a la ccr H con la ccr H´ como el mínimo costo entre todos los de las trayectorias que unen a un vértice de H con un vértice de H´. Podemos definir potencial estocástico en esta gráfica como lo hicimos antes. Para distinguir el potencial estocástico de ambas gráficas, denotamos como γ_j al potencial estocástico de la ccr H_j. La ccr de mínimo potencial estocástica en esta gráfica bonsai tendrá la propiedad de que todos sus vértices son de mínimo potencial estocástico en la gráfica de todos los estados, como establecemos en la siguiente proposición que se demuestra en el apéndice.

LEMA 3.3 *Para cada clase de recurrencia $H_j \in V^0$, $\gamma(z) = \gamma_j$ para toda $z \in H_j$.*

Con esta proposición se justifica el poder trabajar con una gráfica ccr´s como aaristas para buscar el vértice de menor potencial estocástico.

G.8- Equilibrios estocásticamente estables

Teorema B de Young. *Para un juego de adaptación sobre un juego $J = (N, \{D_j\}, \{\varphi_j\})$ finito si P^ε es una **perturbación regular** de P correspondiente a ε, entonces μ^*, el límite de μ^ε cuando ε tiende a cero existe. Además, $\mu^* P^* = \mu^*$ y las coordenadas positivas de μ^* corresponden a los estados que están en las clases de comunicación recurrente de mínimo potencial estocástico en la gráfica bonsai.*

El desarrollo de la demostración está en el *apéndice al capítulo 3.*

Definición: Diremos que h es un **equilibrio estocásticamente estable** si μ_h^* es positivo.

Es decir, h es un **equilibrio estocásticamente estable** si y solo si pertenece a alguna ccr de menor potencial estocástico.

Con ello hemos concluido la presentación de los conceptos preliminares para aterrizarlos en el juego adaptativo de negociación evolutiva.

Capítulo 3.2
Juego de Negociación Evolutivo con mecánica adaptativa

Ruta crítica

Contamos con las herramientas básicas para iniciar el planeamiento de nuestro tercer paso en el Programa de Nash, que es:

"El juego de Demanda de Nash, jugado adaptativamente, arroja como resultado el producto de Nash maximizado."

En la siguiente sección desarrollaremos el modelo del juego en cuestión. Por ahora podemos anticipar la utilización del teorema B. Lo que quizás haga falta mencionar son las proposiciones y/o lemas necesarios para la utilización del teorema.
Ciertas premisas ya han sido enunciadas, mientras que otras faltan por desarrollarse, la justificación de la fragmentación del hilo demostrativo responde a la preferencia por un orden contextual.

Los resultados necesarios para la demostración del Teorema B son:

LEMA 3.1: Freidlin y Wenzel, 1984. *Sea P un proceso de Markov irreducible finito. La única distribución estacionaria μ de P tiene la propiedad de que la probabilidad de cada estado es proporcional a la suma de la probabilidad de sus z-árboles, es decir,*

$\mu(z) = v(z)/\sum_{w \in Z} v(w)$, donde $v(z) = \sum_{T \in T_z} P(T)$ y $P(T) = \prod_{(z,z')\in T} P_{zz'}$

LEMA 3.2: Sea P^{ε} un proceso de Markov regular perturbado. Sea μ^{ε} la única distribución estacionaria para cada ε elemento del $[0,\varepsilon^*]$. Entonces, $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu^{\varepsilon} = \mu^0$ existe, μ^0 es distribución estacionaria de P^0 y $\mu^0(z) > 0 \Leftrightarrow \gamma = \min_z \gamma(z)$

LEMA 3.3 Para cada clase de recurrencia $H_j \in V^0$, $\gamma(z) = \gamma_j$ para toda $z \in H_j$.

Las demostraciones de los tres lemas se encuentran en el Apéndice al capítulo 3.

El juego de adaptación para el problema de negociación

Supongamos que tenemos dos poblaciones (clientes / abogados), donde cada una queda determinada por una misma función de utilidad $u(x), v(y)$ respectivamente. Las funciones u y v son crecientes y posteriormente les pediremos también concavidad como es usual dentro de la teoría de utilidad de los agentes. Supongamos también que el punto de desacuerdo es d = (0,0). Sean x, y las partes que demandan los jugadores de su respectiva clase. Sin pérdida de generalidad, normalicemos las funciones de utilidad de tal manera que:

$$u(0) = v(0) = 0$$
$$u(1) = v(1) = 1$$

Al principio de cada periodo, un jugador tipo 1 y un jugador tipo 2 son escogidos de manera aleatoria dentro de sus poblaciones. Luego, los jugadores demandan una cierta cantidad dentro del intervalo (0,1] simultáneamente. Los resultados y los pagos se comportan de la siguiente manera:

Demandas	Pagos
$x + y \leq 1$	$u(x), v(y)$
$x + y > 1$	0,0

Obsérvese que existen dos casos. Cuando las demandas exceden a 1, es decir, al 100% factible, el pago es 0 para ambos jugadores, y cuando no, se logra un acuerdo conformado por las funciones de pago asociadas a las demandas solicitadas. En esta forma de modelar el hecho de que entre los dos pidan más que 1 equivale a que hubo un desacuerdo y se da el pago d.

Este el llamado “Juego de Demanda de Nash” que presentamos en el capítulo 2. Como allí hicimos con el fin de *convertir al conjunto de estrategias en finito* se le considera de la siguiente manera:

Sea $X_\delta = \{\delta, 2\delta, \ldots, 1-\delta, 1\}$, donde δ puede ser tan pequeño como se desee.
Al juego de demanda con conjuntos de estrategias igual a X_δ, le llamamos G_δ

El proceso evolutivo es un juego adaptativo de memoria *m* y con una probabilidad cometer de error ε.

Sean $0 < \mathrm{a}, \mathrm{b} \leq 1$, donde a, b son las proporciones respectivas de muestra con las que cuenta cada jugador, de tal manera que am, bm son el tamaño de la muestra tomada por los jugadores de su respectiva población.

Sea (x^t, y^t) el monto de las demandas realizadas por los jugadores al tiempo t.

Al final del periodo t, *el estado* es:

$$\boldsymbol{h}^t = \{(x^{t-m+1}, y^{t-m+1}), \ldots, (x^t, y^t)\}$$

Al principio del periodo t+1, el jugador tipo 1 seleccionado toma una muestra de tamaño *am* de los valores-*y* ¡sólo la información de la población adversaria![6] Simultánea e independientemente, el jugador tipo 2 toma una muestra de tamaño *bm* de los valores-*x* en $\boldsymbol{h}^t$.

[6] Más que adversario, complemento del jugador j, j∊N.

Sea *g(y)* la función de distribución de demandas-*y* en la muestra del jugador 1 al tiempo t.

Por lo tanto, $G^t(y) = \int_0^y g^t(z)dz$

Por lo que con probabilidad 1-ε, el jugador 1 escoge la mejor respuesta dado $G^t(y)$, que es:

$$x^{t+1} = \underset{x \epsilon X_\delta}{\operatorname{argmax}}\{u(x)G^t(1-x)\}$$

Donde:

$$\underset{\mathrm{x}\epsilon\mathrm{X}_\delta}{\operatorname{argmax}} \mathrm{f(x)} = \left\{\mathrm{x}^*\epsilon\mathrm{X}_\delta \middle| \mathrm{f}(\mathrm{x}^*) = \max_{\mathrm{x}\epsilon\mathrm{X}_\delta} \mathrm{f(x)}\right\}$$

A modo de ejemplo se puede pensar en la función f(x) = $-x^2$, que se maximiza para $x = 0$, entonces argmax($-x^2$)=0.

Vemos también que la función a maximizar es $u(x)G^t(1\text{-}x)$, que depende sólo de *x*, dado *t*. La interpretación de la misma es que se quiere maximizar la función de utilidad, sin sobrepasar el límite, recordemos que si *x + y ≥ 1*, implica que la utilidad es 0. Es por eso que a la función de utilidad la multiplicamos por la probabilidad de que *y ≤ (1 - x)*.

Convención: Forma de solución de juego

Proposición 3.3 Para cada δ, un *estado* $\boldsymbol{h}$ es una convención si y sólo si es de la forma: $\boldsymbol{h} = \{(x, 1-x), (x, 1-x), \ldots, (x, 1-x)\}$, de tamaño m y donde *x* está en $\{\delta, 2\delta, \ldots, 1-\delta, 1\}$.

Demostración: Cada pareja de estrategias es un equilibrio de Nash estricto del juego de demanda con conjuntos de estrategias X_δ si y solo si es de la forma $(x, 1-x)$, con *x* en $\{\delta, 2\delta, \ldots, 1\text{-}\delta, 1\}$. Por lo tanto $\boldsymbol{h}$ es una convención si y solo si es de la forma $\{(x, 1-x), (x, 1-x), \ldots, (x, 1-x)\}$. □

Entonces, en las convenciones, hay un aprovechamiento del 100% de los recursos, *x + (1 – x)*=1.

Obsérvese que el nombre de convención está justificado, pues es un estado en donde cualquier miembro de la sociedad que pertenezca a la primera población y participe en la negociación en ese estado, obtendrá como información, a través de cualquier muestra que tome, que todas las personas de la primera población han elegido *1 - x*, entonces con probabilidad *1 - ε*, elegirá de nuevo *x* ya que cualquier repartición *(x, 1-x)* con *x* en (0, 1) es un equilibrio de Nash estricto. Lo análogo es cierto para el jugador de la población 2. Sólo se desviarán los participantes de la convención con una pequeña probabilidad. Entonces si $\boldsymbol{h}_x$ se ha alcanzado, casi seguramente la sociedad permanecerá en ese estado.

Otra propiedad importante de las convenciones en el juego de negociación es que cuando los jugadores no cometen errores, es decir cuando ε =0, y las muestras son suficientemente incompletas, entonces el proceso converge a alguna de las convenciones, lo que se prueba en el siguiente teorema:

TEOREMA A *Sea el juego de adaptación en el juego de demanda de Nash G_δ, cuando ε=0, la memoria m y los tamaños de muestra son am y bm, para las poblaciones 1 y 2 respectivamente, con a y b positivos menores o iguales que ½. Todas las clases de comunicación recurrente son convenciones y son todas las historias con reparticiones de la forma (x, 1-x) que se repiten los m periodos y donde x es factible de acuerdo a G_δ.*

Prueba. La prueba consiste en encontrar un entero positivo *N* y una probabilidad positiva *p* (independientes del tiempo *t*), tal que desde cualquier estado inicial *s*, la probabilidad de converger a una convención con a lo más *N* pasos es al menos *p*.

Se sigue que la probabilidad de NO alcanzar una convención en rN pasos es, a lo más, $(1-p)^r$, que tiende a cero cuando $r \to \infty$. Por lo que el conjunto de caminos que NO converge a un estado absorbente tiene probabilidad cero, que es lo que se quiere demostrar.

Consideremos a la población K dividida en dos clases A y B. Tomemos al azar dos agentes α y β, los cuales cuentan con información mínima dentro de las clases A y B respectivamente.
Sean $\frac{k}{m} \leq \frac{1}{2}$ *y* $\frac{k^*}{m} \leq \frac{1}{2}$ la proporción de la información de α y β respectivamente. Sin pérdida de generalidad, sea $k^* \leq k$. Supongamos que en un tiempo $t \geq m$ el proceso se encuentra en un estado:

$$\boldsymbol{s_t} = \big((\boldsymbol{x_{t-m+1}}, \boldsymbol{y_{t-m+1}}), \dots, (\boldsymbol{x_t}, \boldsymbol{y_t})\big)$$

Existe una probabilidad positiva de que los agentes α y β sean seleccionados en cada periodo desde t+1, hasta t+k. También existe una probabilidad positiva de que α tome una muestra específica durante todos estos periodos.

$$\boldsymbol{\sigma} = \big((\boldsymbol{x_{t-k+1}}, \boldsymbol{y_{t-k+1}}), \dots, (\boldsymbol{x_t}, \boldsymbol{y_t})\big)$$

y β otra muestra (posiblemente menor)

$$\boldsymbol{\sigma} *= \big((\boldsymbol{x_{t-k^*+1}}, \boldsymbol{y_{t-k^*+1}}), \dots, (\boldsymbol{x_t}, \boldsymbol{y_t})\big)$$

Sean *x** y *y** las *mejores respuestas* a σ y σ* respectivamente.

Para los periodos del *t*+1 al *t+k*, existe una probabilidad positiva de que, efectivamente, α y β hayan demandado sus respectivas mejores respuestas (*x*, y**) a σ y a σ^*.

Por lo que se tiene con probabilidad positiva un estado al tiempo *t+k* de la forma:

$$s_{t+k} = \big((x_{-m+t+k}, y_{-m+t+k}), \dots, (x_t, y_t), (x^*, y^*), \dots, (x^*, y^*)\big)$$

$$s_{t+k} = \big((x_{-m+t+k}, y_{-m+t+k}), \dots, (x_t, y_t), \boldsymbol{\rho}\big)$$

donde
$[(x_{-m+t+k}, y_{-m+t+k}), \dots, (x_t, y_t)]$ tiene dimensión (m-k)
y
$\boldsymbol{\rho} = [(x^*, y^*), \dots, (x^*, y^*)]$ tiene dimensión (k).

Para los periodos *t+k+1* al *t+2k*, existe una probabilidad positiva de que los jugadores *α* y *β*, o jugadores indistinguibles[7], seleccionen una muestra de ρ, que en el caso de α será todo el conjunto ρ y para β una sub-muestra de ρ. También es posible que se seleccionen las mejores respuestas, dadas las muestras, $\left((1-y^*),(1-x^*)\right)$, lo que genera la corrida:

$\boldsymbol{\rho}' = [(1-y^*, 1-x^*), \dots, (1-y^*, 1-x^*)]$ de dimensión (k).

Por lo que al tiempo t+2k, con probabilidad positiva, el estado sea:
Si 2k <m

$$s_{t+2k} = \left((x_{-m+t+2k}, y_{-m+t+2k}), \dots, (x_t, y_t), \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'\right) Correcion$$

La suma de los tamaños de $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'$ puede ser igual a m.
A partir de ahora, al tiempo t + 2k +1, con probabilidad positiva, el jugador tipo *α* tomará su muestra de ρ, mientras que β escogerá de la muestra ρ'. Los términos de ρ se pueden ir olvidando si 2k = m, pero parece que se puede ir completando la muestra adecuada con los nuevos que se van generando.

Un jugador tipo α escogerá como mejor respuesta, 1-*y*, tras observar *y* como única demanda, tras *k* movimientos idénticos de parte del jugador tipo β, etc.

A partir de este momento, 2k periodos después, podrían haberse olvidado todo lo que se sabía en el estado inicial, si $\frac{k}{m} = \frac{1}{2}$, lo cual será indiferente, ya que con probabilidad positiva, los jugadores *α* y *β* tomarán muestras exclusivamente de los estados generados con las mejores respuestas al estado inicial ρ, o las mejores respuestas dado ρ, que son los estados de ρ'.

Al tiempo t + 2k +1, con probabilidad positiva se puede obtener como muestra, para el jugador α, toda la muestra ((x*,y*), (x*, y*), …, (x*, y*)) de tamaño k, análogamente, una sub-muestra de ((1-y*,1-x*), (1-y*, 1-x*), …, (1-y*, 1-x*)) de tamaño k, para el jugador β, por lo que la pareja de mejores respuestas sería (1-y*, y*).

Si *2k ≤ m*

$$\boldsymbol{s_{t+2k+1}} = \left((x_{-m+t+2k+1}, y_{-m+t+2k+1}), \dots, (x_{t+2k+1}, y_{t+2k+1}), \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', (1-y^*, y^*)\right)$$

si *2k = m+1*

$$\boldsymbol{s_{t+2k+1}} = (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', (1-y^*, y^*)),$$

si *2k = m*

Al tiempo t+2k+2, sólo podemos asegurar que un jugador tipo α, podrá tomar las (k-1) muestras más recientes de ρ, puesto que la muestra más antigua pudo haber sido olvidada. Sin embargo, con probabilidad positiva, dicho jugador puede tomar la muestra $\left((x^*, y^*), \dots, (x^*, y^*), (1-y^*, y^*)\right)$ de dimensión (k). Para fines de elección de una mejor respuesta, α observará y^* única como demanda por parte del oponente.

[7] Son indistinguibles los jugadores con una misma muestra, si pertenecen a la misma clase, puesto que se comportan del mismo modo por compartir la misma función de utilidad.

Por su parte, el jugador β podrá seguir tomando, con probabilidad positiva, una sub-muestra de ρ', por lo que la mejor respuesta será: (1- y^*, y^*).

A partir del periodo t + 2k +1 fue posible generar el primer elemento de la que será la convención (1- y^*, y^*). Se ha demostrado que es factible seguir obteniendo el mismo registro en lo subsiguiente, por lo que se afirma que se alcanzará la convención al tiempo t+2k+m, que será cuando la historia sea de la forma ((1- y^*, y^*),…,(1- y^*, y^*)). ■

Se sigue que desde cualquier posición inicial, tras *N=2k + m* periodos, es posible alcanzar una convención de forma casi segura.
Este teorema es particularmente importante porque nos dice que las únicas clases de comunicación recurrente son las convenciones y, entonces, delimita el conjunto de posibles estados que pueden ser los equilibrios estocásticamente estables. Es decir, considerando el límite del proceso P^ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se puede determinar cuál de todos los estados es el de menor potencial estocástico que será como dice el teorema B el de mayor peso dentro de la función de densidad μ(x) descartando los otros candidatos.

Potencial estocástico como solución del juego

Para caracterizar la convención de mínimo potencial estocástico de este proceso recurrimos a la gráfica BONSÁI donde los vértices son las convenciones. Cada convención se puede identificar con una de las *x* factible de acuerdo a G_δ.

Por el teorema de Young que es la culminación de la sección 3.2, basta encontrar la convención de mínimo potencial estocástico para obtener los equilibrios estocásticamente estables del proceso evolutivo de adaptación de la negociación.

Tenemos, entonces:

1) Las clases de comunicación recurrente de P^0 son las convenciones [Teorema A]

2) Si P^ε es regular (substituyendo la hipótesis de irreductibilidad por la de que, para cada $\varepsilon > 0$, P^ε tiene una única clase de recurrencia), entonces $\mu^*(x^*) > 0 \leftrightarrow x^*$ *es una convención de mínimo potencial estocástico.*
[Teorema B]

Con lo anterior en mente, nos disponemos a replantear el resultado que aboga por el uso de los *Axiomas de Nash* y su resultado consecuente.

A continuación enunciamos el teorema fundamental de los procesos de adaptación de Young que es la versión para el caso finito de un teorema de procesos de Markov debido a Friedlin y Wentzel.

TEOREMA C: *Sea G_δ el juego discreto de demanda con precisión δ jugado adaptativamente con memoria m y tamaños de muestra am y bm, para las poblaciones 1 y 2 respectivamente, donde $0 < a, b \leq ½$. Los equilibrios estocásticamente estables de los juegos G_δ convergen a la convención correspondiente a la solución asimétrica de*

Nash en juegos de negociación, a saber, la única división que maximiza $u(x)^a v(1-x)^b$, *cuando* δ *converge a cero.*

La interpretación de los poderes de negociación, en este caso, es que si ambas partes tienen la misma función de utilidad (u=v), pero diferentes cantidades de información (a≠b), entonces la solución favorece al mejor informado. Con ello podemos interpretar a dichos poderes de negociación α, β de los que se habló en el primer capítulo como la cantidad de información a, b. La proporción de información juega, en este proceso de adaptación, el papel de los poder de negociación.

La demostración general del teorema la hizo Young en su artículo de 1993, nosotros nos apegamos a su versión de 1998 que es más particular, pero resulta mucho más didáctica.

Para demostrar el teorema en la versión sencilla, hacen falta introducir dos supuestos:

(i) Las funciones u y v deben de ser de Clase C1 y cóncavas.
(ii) Todos los errores son locales, en el sentido de que cuando un jugador no escoge su mejor repuesta, dada una muestra, el error aleatorio que comete no puede diferir de dicha mejor respuesta por más de δ.

Como explicamos en la sección 3.2, los equilibrios estocásticamente estables son las historias con mínimo potencial estocástico que tienen que estar en alguna de las clases de comunicación recurrente. En nuestro caso, debido al teorema A, sólo pueden ser algunas de las convenciones, es decir las historias que repiten m veces alguna de las divisiones de la forma (x, 1-x). Trabajaremos entonces con la gráfica que tiene como únicos vértices a todas las convenciones, es decir, a cada una de dichas reparticiones (la gráfica bonsái) para ver cuál de todas es la que tiene asociado el árbol de mínimo costo (o potencial estocástico mínimo).

Veamos cómo se calculan las resistencias r(h,h´) de dicha gráfica. Obsérvese que las resistencias r(h,h´) se calculan entre un par de estados, como su nomenclatura lo especifica, por lo que calcular resistencias entre conjuntos (de comunicación recurrente) como sería meritorio para el caso de las gráficas Bonsái, requiere de un proceso de asignación previa, lo cual es inmediato puesto que sólo se necesita utilizar el estado absorbente del ccr en cuestión.

Usemos un ejemplo con el fin de ilustrar el cálculo de la resistencia de pasar de una convención a otra. Sea δ = .1, y supóngase que partimos de la convención que repite a la repartición (.2, .8). Si nos encontramos en tal convención es porque las últimas m demandas han sido iguales, a (.2, .8). Para pasar a una convención distinta y dado que los errores son locales, los estados posibles son (.1, .9) y (.3,.7).

Supongamos que el jugador 1 comete el error de demandar .3 por varios periodos. Una vez que los errores se acumulen, estos van a cambiar las expectativas del jugador 2. La pregunta es:

¿Durante cuántos periodos el jugador 1 debe cometer ese error, para que se engendre una muestra para el jugador 2 tal que ya sea una mejor respuesta el elegir .7?

Dicho de otro modo, cuantos errores seguidos "*i*" provocan el cambio de la mejor respuesta, frente a una muestra existente que contiene dichos errores en *i* de los *m* posibles registros.

Si *i* es el número de errores que comete el jugador 1, cambiar a la convención (.3,.7) con este tipo de errores es conveniente (para jugador 2) cuando:

$$v(.7) \geq (1 - i/bm) * v(.8)$$
$$v(1 - (x + \delta)) \geq (1 - i/bm) * v(1 - x)$$

La desigualdad anterior se justifica argumentando que la utilidad esperada del jugador 2, si demanda .7, va a ser mayor a que si pide .8, dado que existe una muestra que contiene *i* errores. En consecuencia, considerando esta muestra, la utilidad esperada de 2, al demandar .7, es de *v(.7)*. Mientras que si demanda .8, la utilidad esperada es v(.8) (1-i/m) + v(0)(i/m).

Despejando a *i* de la expresión anterior, se obtiene:

$$i \geq bm * [(v(.8) - v(.7))/v(.8)]$$

Un procedimiento similar se puede hacer para pasar desde (.2,.8) a (.3,.7) mediante errores del jugador 2 ¿Cuántos errores seguidos tiene que cometer 2 para engendrar una muestra tal que 1 decida elegir .4 frente a esa muestra? Si denotamos como *j* el número de errores del jugador 2, la desigualdad obtenida es la siguiente:

$$(j/am)*u(.3) \geq u(.2)$$

...que se puede interpretar como que al jugador 1 le conviene empezar a demandar .3, en vez de su habitual .2. Despejando la ecuación anterior para j, tenemos:

$$j \geq [am * u(.2)/u(.3)]$$

Entonces, la resistencia de pasar de la convención que repite (.2, .8) a la que repite (.3, .7) es el mínimo entre $am * [u(.2)/u(.3)]$ y $bm * [1 - v(.7)/v(.8)]$.

En general, si $x \in X_\delta$, la *resistencia* de pasar de la convención correspondiente a (x, 1-x) a la correspondiente a (x +δ, 1-(x +δ)) se denota como r(x, x+δ) y es igual a:

$$r(x, x + \delta) = min\left\{bm\left(1 - \frac{v(1 - (x + \delta))}{v(1 - x)}\right), am\left(\frac{u(x)}{u(x + \delta)}\right)\right\}$$

Para δ suficientemente pequeña, $bm\left(1 - \frac{v(1-(x+\delta))}{v(1-x)}\right)$ es menor que $am\left(\frac{u(x)}{u(x+\delta)}\right)$ y una buena aproximación es:

$$r(x, x + \delta) \approx \delta * bm^{\,v'(1-x)}\big/_{v(1-x)}$$

La aproximación se deduce de la definición de la derivada de una función.

Observemos que v es una función creciente, entonces si x crece, entonces 1-x decrece y lo mismo ocurre con v(1-x). Por otro lado como v es cóncava, entonces v´ es decreciente y v´(1-x) crece al crecer x. Es decir, r(x, x +δ) es creciente.

Por otro lado, la resistencia de pasar de $(x, 1 - x)$ a $(x - \delta, 1 - (x - \delta))$ se denotará como $r(x, x - \delta)$ y es igual a:

$$r(x, x-\ \delta) = min\left\{am\left(1 - \frac{u(\ (x-\ \delta))}{u(x)}\right), \qquad bm\left(\frac{v(1-x)}{v(1-(x+\delta))}\right)\right\}$$

Por analogía, para δ suficientemente pequeña, $am\left(1 - \frac{u(\ (x-\ \delta))}{u(x)}\right)$ es menor que $bm\left(\frac{v(1-x)}{v(1-(x+\delta))}\right)$ y una buena aproximación es:

$$r(x, x-\delta) \approx \delta * am^{u\acute{}(x)}/_{u(x)}$$

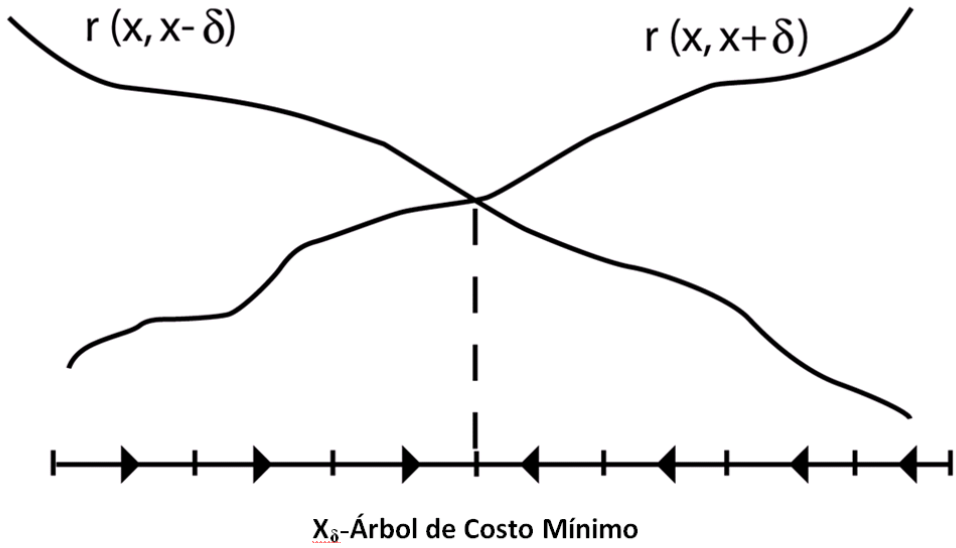
$r(x, x-\ \delta)$ es decreciente pues u es creciente y u´ es decreciente.

La resistencia de pasar de *x* a un vértice no vecino, es mayor, que pasar al vértice vecino en la misma dirección, esto debido a que los errores son locales, y para pasar al vértice no vecino, hay que pasar por el vecino primero y las resistencias son no negativas, por lo que podemos ignorar dichas transiciones. Entonces, para cada vértice el árbol que une a cada vértice a través de vecinos es el de mínimo costo.

Podemos observar las funciones r(x, x+δ) y r(x, x-δ) en la gráfica 3.1. Podemos asociarle a cualquier x no negativa la convención que repite el equilibrio de Nash estricto (x,1-x) y recíprocamente.

Es claro que cada x´ tiene asociado como árbol de mínimo costo o potencial estocástico aquel que dirige a las convenciones con una x mayor que x' hacia la izquierda con resistencia $r(x\acute{}\ - \delta, x\acute{})$ y las que parten de una x menor que x´ tendrían un costo $r(x\acute{} + \delta, x')$.

La gráfica se muestra a continuación:



Gráfica 3.1

Construyamos la gráfica dirigida, cuyos vértices son las convenciones correspondientes a x, para toda *x* $\in X_\delta$, los pesos de las aristas quedarán determinados por las resistencias.

Consideremos la función:

$f_\delta(x) = \min \{ r(x, x +\delta), r(x, x -\delta)\}$

Ahora fijémonos en el máximo de f_δ. La función $r(x, x +\delta)$ es creciente y la función $r(x, x -\delta)$ es decreciente en x, entonces el máximo se alcanza en la $\hat{x}$ que iguala a $r(x, x +\delta)$ con $r(x, x -\delta)$, si $\hat{x}$ pertenece a X_δ, si no es así serían los dos puntos de X_δ más cercanos a $\hat{x}$. Claramente las convenciones que tienen asociado árboles de mínimo costo son las que corresponden a las x* en X_δ que maximizan a f_δ, ya que esos puntos siempre tienen las flechas dirigidas de tal manera que usan la resistencia menor posible. Cada una de estas flechas tiene menor resistencia que cualquier flecha que salga desde $\hat{x}$. Como el dominio de f_δ es discreto, tendremos a lo más dos máximos, y de existir más de uno, la función alcanza su valor más alto para convenciones vecinas. Supongamos que en x_δ es que f_δ alcanza su máximo.
Entonces el máximo se alcanza en el punto $\hat{x}$ (o en los dos más cercanos a éste de X_δ)

La intersección de las funciones de resistencia garantiza que ningún jugador se verá tentado a mejorar su porción dentro de la negociación.

En resumen:
- Las soluciones son en forma de convención.
- Las únicas transiciones "candidatas" son entre convenciones vecinas.
- La raíz del árbol con potencial estocástico está lo más cercano posible (versión discreta X_δ) a la x* tal que el máximo de la función $f_\delta = f_\delta(x^*)$.

Hacer una transición que no sea en la dirección indicada por f_δ implica costos de transición mayores, a saber $F_\delta(x) = \max\{r(x, x +\delta), r(x, x -\delta)\}$ y $F_\delta(x) \geq f_\delta(x)$ para toda x є X_δ.

Se sigue que x_δ es la convención con mínimo potencial estocástico, es decir es un equilibrio estocásticamente estable del proceso adaptativo con juego G_δ. Podría haber dos equilibrios estocásticamente estables si existen dos máximos de f_δ.

Veamos ahora la relación de los equilibrios estocásticamente estables del proceso con la solución de negociación de Nash.

Si δ es pequeño, podemos usar las aproximaciones de las resistencias, y el máximo de f_δ está en la intersección de dichas funciones, a saber:

En el punto de intersección x_δ se da la igualdad:

$$\delta * bm\frac{v'(1-x)}{v(1-x)} = \delta * am\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$am\frac{u'(x)}{u(x)} - bm\frac{v'(1-x)}{v(1-x)} = 0$$

Que no es otra cosa que la condición de primer orden para maximizar:

$$a * \ln\big(u(x)\big) + b * \ln(v(1-x))$$

Como la función logaritmo de una función cóncava es cóncava, basta esta condición para que x_δ sea el máximo de la función.

Que es equivalente a maximizar:

$$a * u(x) + b * v(1 - x)$$

Es decir, hemos encontrado que los equilibrios estocásticamente estables de los procesos adaptativos en los juegos de negociación, cuando δ tiende a cero convergen a la misma solución que haber jugado cooperativamente un juego de negociación, bajo los axiomas de Nash. La metodología de trabajo dicta que la coincidencia de resultados es un paso más en la fundamentación que lo que se espera de poblaciones reales que negocian repetidamente es que se comporten de acuerdo a lo previsto por Nash.

Para complementar nuestra discusión, será interesante introducir un ejemplo experimental de una negociación y sus respectivos resultados para reforzar la relevancia del *Producto de Nash*.

Apéndice (Capítulo 3)

LEMA 3.1 Freidlin y Wenzel, 1984. *Sea P un proceso de Markov irreducible finito. La única distribución estacionaria μ de P tiene la propiedad de que la probabilidad de cada estado es proporcional a la suma de la probabilidad de sus z-árboles, es decir,*

$\mu(z) = v(z)/\sum_{w \in Z} v(w)$, donde $v(z) = \sum_{T \in T_z} P(T)$ y $P(T) = \prod_{(z,z') \in T} P_{zz'}$

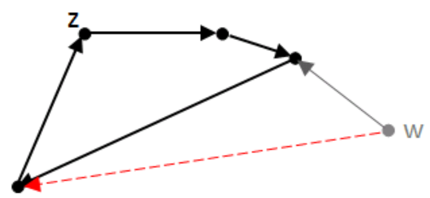
Demostración:

Imaginemos los estados como vértices de la gráfica. Para cualesquiera dos estados z y z´ distintos, denotemos la flecha dirigida de z a z´ con el par ordenado (z, z´).

Def. : z- ciclo:

Un z-ciclo es un subconjunto C de flechas tal que:

i) C contiene un único ciclo dirigido que contiene a z
ii) Para todo w que no es elemento del ciclo, existe una única ruta en C que vaya de w al ciclo.



Gráfica Ap.1

Sea Cz el conjunto de todos los z-ciclos.

Sea w en el z-ciclo tal que pertenece al único ciclo y (w, z) pertenece a la gráfica C, entonces se sigue, gracias a las dos definiciones anteriores que:

Un z-ciclo C puede ser descrito de la forma:

$$C = T \cup \{(w,z)\} \qquad (a)$$

donde T es w-árbol con w≠z.

En efecto, al agregar una arista dirigida (w,z) al w-árbol obtenemos:

i) Un único ciclo
ii) Por definición de w-árbol, toda trayectoria dirigida hacia el ciclo (w es elemento del ciclo), es única.

De igual forma, si w pertenece al ciclo y (z, w) es parte de la gráfica C se puede construir C con un z-árbol,

$$C = T \cup \{(z, w)\} \qquad (b)$$

usando el argumento de que toda trayectoria a z es única y que z es elemento del ciclo.

Sea P un proceso de Markov irreducible sobre Z.

Con la igualdad $P(S) = \prod_{(z,z')\in S} P_{zz'}$ tenemos definida la probabilidad de un conjunto de estados.

Denotemos como $v(z)$ a:

$$v(z) = \sum_{T\in T_z} P(T)$$

La definición e interpretación de $v(z)$ son más que idóneas para describir las siguientes propiedades:

$$\sum_{C\in C_z} P(C) = \sum_{w:w\neq z} v(w)P_{wz}$$

Recordando la ecuación (a), vemos que se trata de la probabilidad de estar en la raíz de w-árbol (soporte de árboles) y pasar después a z, para toda w distinta de z.

Análogamente, recordado (b):

$$\sum_{C\in C_z} P(C) = v(z) \sum_{w:w\neq z} P_{zw}$$

Se sigue que:

$$\sum_{w:w\neq z} v(w)P_{wz} = v(z) \sum_{w:w\neq z} P_{zw}$$

Como: $\sum_{w:w\neq z} P_{zw} = 1 - P_{zz}$

$$v(z) \sum_{w:w\neq z} P_{zw} = v(z) * (1 - P_{zz})$$

Finalmente:

$$v(z) = v(\, z) \sum_{w\in Z} P_{zw}$$

Se concluye que $v(z)$ es un vector propio de P asociado a 1.

Además,

$$v(z) = \sum_{\mathrm{w:w\neq z}} v(w)P_{wz}$$

Para llegar al resultado del teorema sólo falta normalizar.

$$\mu(z) = \sum_{w \in Z} v(w) P_{wz} \Big/ \sum_{w \in Z} v(w)$$

Esto es cierto porque *avP=av*, para toda *a*, en particular cuando $a = \sum_{w \in Z} v(w)$

$$\mu(z) = v(z) \Big/ \sum_{w \in Z} v(w), \qquad \text{donde } v(z) = \sum_{T \in T_z} P(T)$$

LEMA 3.2 *Sea P^{ε} un proceso de Markov regular perturbado. Sea μ^{ε} la única distribución estacionaria para cada ε elemento del [0,ε*]. Entonces, $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu^{\varepsilon} = \mu^{0}$ existe, μ^0 es distribución estacionaria de P^0 y $\mu^0(z) > 0 \Leftrightarrow \gamma = \min_z \gamma(z)$*

Demostración:

Sea para todo z en Z,

$$v^{\varepsilon}(z) = \sum_{T^* \in T_z^*} \prod_{(z',z'') \in T^*} P^{\varepsilon}_{(z',z'') \in T^*}$$

Por el Lema 3.1 la distribución estacionaria μ^{ε} tan sólo es una normalización de *v(z)* que satisface $\sum \mu^{\varepsilon}(z) = 1$.

Sea $\bar{\gamma} = \min_z \gamma(z)$

Por demostrar:

$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu^{\varepsilon}_z > 0 \Leftrightarrow \gamma(z) = \bar{\gamma}$

Para todo z-árbol T* en T_z*, la resistencia de T* es:

$$r(T^*) = \sum_{(z',z'') \in T^*} r(z', z'')$$

Dada una z en Z, existe (por definición de γ) un z-árbol T* tal que r(T*) = γ(z).
En efecto, al menos un árbol de la clase de árboles, con raíz en z, tiene el mínimo peso.

Considere la identidad:

$$\varepsilon^{-\bar{\gamma}} \prod_{(z',z'') \in T^*} P^{\varepsilon}_{z',z''} = \varepsilon^{r(T^*) - \bar{\gamma}} \prod_{(z',z'') \in T^*} \varepsilon^{-r(z',z'')} P^{\varepsilon}_{z',z''}$$

La propiedad anterior puede ser justificada, si se considera que:

$\prod_{(z',z'') \in T^*} \varepsilon^{r(z',z'')} = \varepsilon^{r(T^*)}$, consecuencia de la definición r(S), S⊆Z.

Dado que γ(z) es finito, se obtiene que:

$$0 < \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-r(z',z'')} P^{\varepsilon}_{z',z''} < \infty$$

Por un lado, si $r(T^*) > \bar{\gamma}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{r(T^*)-\bar{\gamma}} = 0,$$

Por otro lado, si $r(T) \geq \gamma(z) > \bar{\gamma}$, $\forall\, T \in T_z^*$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-\bar{\gamma}} v^{\varepsilon}(z) = 0$$

En efecto, la cantidad de errores tamaño ε que hay que cometer para terminar parados en z, dado que z no es quien minimiza γ(z), es mayor al mínimo de errores $\bar{\gamma}$ que se cometen si se transita en dirección a un estado estacionario. Es decir, *v(z)* es de orden mayor a $\varepsilon^{\bar{\gamma}}$, por lo que el límite converge a cero.

Ahora, si r(T) = γ(z) = $\bar{\gamma}$

$$0 < \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-\bar{\gamma}} v^{\varepsilon}(z) < \infty$$

Por el lema 3.1:

$$\mu(z) = \varepsilon^{-\bar{\gamma}}\, v(z) \Big/ \sum_{w\, \in Z} \varepsilon^{-\bar{\gamma}}\, v(w), \qquad donde\; v(z) = \sum_{T\, \in T_z} P(T)$$

Se concluye que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu^{\varepsilon}(z) = 0 \;\; si \;\; \gamma(z) > \bar{\gamma}$$

y

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu^{\varepsilon}(z) > 0 \;\; si \;\; \gamma(z) = \bar{\gamma}$$

Se demostró que en particular, $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu^{\varepsilon}(z) = \mu^0$ existe y que su soporte es exactamente aquel conjunto de estados z que minimizan γ(z), el potencial estocástico.

Al tratarse de un proceso perturbado regularmente, $P^{\varepsilon} \to P^0$, y como μ^{ε} satisface la ecuación $\mu^{\varepsilon} P^{\varepsilon} = \mu^{\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$, se concluye que $\mu^0 P^0 = \mu^0$, en otras palabras, μ^0 es distribución estacionaria de P^0.

Con esto hemos terminado la demostración del lema 3.2

Como μ^0 es una distribución estacionaria de P^0, μ^0_z= 0 para todo estado z que no pertenece a una ccr, por lo que es suficiente calcular γ sobre las clases de comunicación recurrente, que como ya vimos γ es constante sobre cada clase de recurrencia H_j de P^0.

LEMA 3.3 Para cada clase de recurrencia $H_j \in V^0$, $\gamma(z)=\gamma_j$ para toda $z \in H_j$.

Fíjese un estado $\mathbf{z_j}$ en cada clase de recurrencia $\mathbf{H_j}$.

P.D. $\gamma(z_j) \leq \gamma_j$

1) Fíjese una clase H_j y T_j un j-árbol en Γ^0 tal que su resistencia sea $\mathbf{r(T_j) = \gamma_j}$.
   Construiremos un z_j-árbol en la gráfica perturbada de los estados $\mathbf{\Gamma^*}$ cuya resistencia sea γ_j.
2) Para toda $i \neq j$, existe una única flecha $(i,i') \in \mathbf{T_j}$ cuyo peso es $r_{i,i'}$.
3) Sea $\zeta_{ii'}^* \subseteq \Gamma^*$ la trayectoria que une a z_i con $z_{i'}$ de peso mínimo (es decir $r_{ii'}$). Esta trayectoria de peso mínimo que une a H_i con $H_{i'}$.
4) Considérese $\mathbf{T_i^*} \subseteq H_i$ un z_i-árbol.
   T_i^* tiene $|H_i|$-1 flechas dirigidas; y por ser H_i una clase de recurrencia de P^0, $r(T_i^*) = 0$.
5) Para todo estado $z \notin \cup H_i \cup \zeta_{ii'}^*$, sea ξ_z una trayectoria dirigida de z a $\cup H_i$ tal que su resistencia es cero. De no existir dicha transición nula, z sería elemento de una clase de recurrencia. Finalmente, sea T_{z_j} la unión de flechas de:

a) T_i^*, $i \neq j$
b) $\zeta_{ii'}^*$ $(i,i') \in T_j$
c) ξ_z, $z \notin \cup H_i \cup \zeta_{ii'}^*$

Por construcción, para todo vértice en Z, existe una única trayectoria dirigida en T_{z_j} al previamente fijado z_j. Por lo tanto, T_{z_j} es un z_j-árbol y tiene resistencia igual a γ_j.

Tomando en cuenta la definición de la resistencia de un estado z_j ($\gamma(z_j)$) que es la resistencia mínima de todos los z_j – árboles llegamos a que $\gamma(z_j) \leq \gamma_j$.

P.D. $\gamma(z_j) \geq \gamma_j$

Para demostrar que $\gamma(z_j) \geq \gamma_j$, fijemos una clase de recurrencia H_j cualquiera y el z_j-árbol de peso mínimo T_{zj}^* de todos los z_j-árboles en Γ^*. T_{zj}^* tiene resistencia igual a $\boldsymbol{\gamma(z_j)}$.

Con base en T_{zj}^*, construiremos un H_j-árbol con resistencia igual a $\boldsymbol{\gamma(z_j)}$ en la gráfica bonsái.

Para lograrlo, primero etiquetamos algunos de los vértices de T_{zj}^*.

1) Vértices especiales:

Para cada clase de comunicación recurrente H_i, pongamos una etiqueta "i" a cada vértice perteneciente a dicha clase. A estos vértices que pertenecen a alguna de las clases, les llamamos especiales.

2) *Vértices delta:*

Los vértices delta $\in T_{zj}^*$, son aquellos, a los que llegan dos o más flechas. Procedamos a *etiquetar* aquellos vértices delta, con la etiqueta "i" si se cumplen las dos propiedades siguientes:

2.a) El vértice delta "y" no está en H_j, $\forall$ $H_j \subseteq Z$ (por lo que actualmente no tiene etiqueta) y
2.b) Existe un camino de resistencia cero desde y hasta H_i. Si existe más de una ccr tal que existe una trayectoria de resistencia cero que una a y con cada una de estas clases, la "i" es la etiqueta correspondiente a cualquiera de ellas, por ejemplo, eligiendo al azar.

Obsérvese que el camino de resistencia cero tiene que existir, para alguna "i", porque H_i es una clase de recurrencia de P^0, por lo que la convergencia es casi segura a algún elemento de dicha clase, para lo cual, es necesario que exista el camino de resistencia cero.

3) Predecesor especial de z:

Un predecesor especial “z_i” de z, es aquel vértice especial que cumpla con las siguientes propiedades:

3.a) ∃ un camino de z_i a z en $T_{zj}*$
3.b) ∄ otro predecesor especial $z_{i'}$ en el camino de z_i a z

Propiedad P1:

Si z_i es un predecesor especial de z, entonces es el único camino desde z_i a z, y tiene una resistencia r_{ik} … como mínimo. Donde “k” es la etiqueta de z.

i.e. $r(z_i,z) \geq r_{ik}$, lo cual es claro puesto que, cuando menos hay pasar de un elemento de H_i a otro en H_k.

A continuación procederemos a aplicar ciertas operaciones sobre $T_{zj}*$ que mantendrán la propiedad P1, y que a su vez, harán que se pueda construir el árbol buscado en la gráfica Γ^0, con el fin de poder comparar el potencial estocástico con el soporte de la gráfica Γ^0 y el de la gráfica Γ^*, respectivamente.

La iteración de dichas operaciones tendrá como resultado eliminar todos los vértices delta.

Operación: “Corta y Pega” Consideramos en $T_{zj}*$ un vértice especial z y un vértice delta y con la misma etiqueta que z. Tenemos dos casos:

1- z no es predecesor de **y**.
2- z es predecesor de **y**.

En el primer caso, cortamos las ramas que llegan a **y**. Posteriormente las pegamos de tal manera que lleguen a z, obtenemos un árbol en el que **y** es un vértice final y deja de ser delta.

En el segundo caso, de nuevo cortamos las ramas que llegan a **y**, excepto la que pasa por z. Posteriormente las pegamos de tal manera que lleguen a z, obtenemos un árbol en el que **y** ya no es un vértice delta. A pesar de que a z pueden llegar dos o más flechas, eso no lo convierte en vértice delta, pues pertenece a una ccr.

En ambos casos, con las operaciones obtenemos un nuevo árbol en la gráfica de los estados que tiene un vértice delta menos y sigue teniendo la misma resistencia que antes, es decir $\gamma(z_j)$.
En un número finito de pasos, habremos construido un árbol $\hat{\tau}$ que no tiene vértices delta vértices. En el nuevo árbol, existen trayectorias que unen a cada una de las ccr con H_j (la ccr que contiene a z_j) a través de trayectorias que unen vértices especiales $z_{ii'}$ de diferentes ccr con z_j. Cada una de estas trayectoria es al menos de valor $r_{ii'}$ y dicho nuevo árbol tiene potencial estocástico $\gamma(z_j)$. Construimos un árbol en la gráfica bonsái que tenga flechas, donde están las trayectorias de $\hat{\tau}$ que unen a los vértices especiales de dos ccr. Este árbol tiene resistencia menor o igual que $\gamma(z_j)$ y es un H_j-árbol que tiene resistencia mayor o igual que la del Hj-árbol de mínima resistencia que es γ_j. Por lo tanto, $\gamma(z_j) \geq \gamma_j$.
Es decir $\gamma_j = \gamma(z_j)$.

***TEOREMA B** de Young . Para un juego de adaptación sobre un juego J= (N, {D_j}, {φ_j}) finito si P^ε es una **perturbación regular** de P correspondiente a ε, entonces u* el límite de u^ε cuando ε tiende a cero existe. Además, u*P=u* y las coordenadas positivas de u* corresponden a las clases de comunicación recurrente de mínimo potencial estocástico.*

Por el lema 3.2, sabemos que el límite de u^ε cuando ε tiende a cero existe y que aquellas coordenadas que son distintas de cero corresponden a clases de comunicación recurrente con mínimo potencial estocástico γ_j, sin embargo, las gráficas Γ^0 que se utilizan para llegar al resultado son las que tienen como vértices a los conjuntos de comunicación recurrente (gráfica Bonsai) y no la gráfica Γ* cuyos vértices son los estados del proceso P^ε, por lo que los potenciales estocásticos $\gamma(z)$ a los que se refiere el resultado no son los mismos. Gracias al lema 3.3 sabemos que $\gamma(z)=\gamma_j$ para toda $z \in H_j$ y para cada clase de recurrencia $H_j \in V^0$. Teniendo en cuenta esta relación entre ambas gráficas el resultado del lema 3.2 se generaliza dando lugar al teorema B.

CAPÍTULO 4 Fundamentación Experimental

El mundo real y el programa de Nash

Hemos interpretado al programa de Nash como la búsqueda de fundamentar la solución axiomática a través de modelos de negociación que representen a las que ocurren en el mundo real, en las que personas con muchas limitaciones de racionalidad e inmersas en una sociedad que influye en ellas llevan a cabo una negociación para hacer una repartición.

Una pregunta muy importante sería ¿Las negociaciones reales se hacen de acuerdo con la solución de Nash o siquiera se le acercan? Hay mucho trabajo realizado en torno a esta problemática y se ha desarrollado en varias direcciones, principalmente en las tres que describimos a continuación:

a) **Aplicaciones de los modelos a situaciones reales.** Por ejemplo, existen aplicaciones del modelo de Stahl-Rubinstein a negociaciones del mundo real, en donde se contrastan exitosamente las previsiones del modelo con las situaciones que se dieron en ellas. Por mencionar un ejemplo, A. Okada desarrolla un modelo para las negociaciones que se hicieron para establecer el protocolo de Kioto y contrasta con los datos estadísticos en que se encontraban los diversos países. Según las conclusiones del autor, el modelo logra prever la posición que tomaron varios de ellos en esta negociación, por ejemplo, la negativa de Estados Unidos a firmar el protocolo.

c) **Simulaciones computacionales.** Por ejemplo**,** el modelo computacional basado en agentes es una de las metodologías utilizadas para analizar a los juegos de negociación. Este modelo trata de responder a la pregunta ¿Cómo pueden las interacciones locales de agentes autónomos heterogéneos generar patrones de la sociedad en su conjunto? Y crea un buen ambiente para experimentar con el modelo de Young. Los agentes de este método no son los agentes agregados o agentes promedio propios de la macroeconomía. Ellos son heterogéneos y cambian a lo largo del tiempo como los existentes en las poblaciones reales. Son autónomos, aunque están condicionados por normas sociales o instituciones que a su vez han tomado forma por la interacción de agentes. Los agentes tienen racionalidad acotada, es decir, información y poder de cómputo limitados.
Dada una regularidad social que debe ser explicada, por ejemplo en una negociación, los experimentos basados en agentes son como sigue: Se considera una población inicial de agentes heterogéneos y autónomos situada en un ambiente espacial relevante que les permite interactuar de acuerdo a reglas locales simples. Se estudia que regularidades se generan desde la situación inicial. Es un camino generativo para responder a la pregunta planteada.

R. Axtell, J. Epstein and P. Young [2001] consideran un juego de negociación con muy pocas opciones y jugadores con el mismo poder y contrastan los equilibrios estocásticamente estables de un proceso de adaptación (al estilo del que expusimos en el capítulo 3 con algunas variantes) con los resultados de las simulaciones correspondientes. Mientras los equilibrios estocásticamente estables prevén, en el largo plazo, una sociedad que se apega a la repartición más igualitaria posible, que sería la que corresponde a la solución de Nash, en dicho caso, lo que describen las simulaciones es que la concentración de la riqueza en una de las partes pueden surgir y permanecer durante un enorme cantidad de periodos, suficiente para que no se vea más que ese patrón durante la mayor parte de la existencia de una sociedad. Se trata de un desequilibrio persistente. Los problemas de determinar cuánto tiempo tarda en alcanzarse el equilibrio que prevé el modelo o la existencia de desequilibrios persistentes tienen gran importancia tanto teórica como práctica.

d) Otro tipo de trabajos están basados en experimentos de juegos de negociación dentro del laboratorio. En estos experimentos, personas que se presentan voluntariamente participan en negociaciones diseñadas, a veces entre ellas mismas, otras contra computadoras programadas. Dos libros muy interesantes, entre otros, que analizan este tipo de experimentos son el de A. Roth y J. Murnighan [1982] y el de K. Binmore [2007]. Este último muestra que las personas que participan en el juego del ultimátum no hacen inducción hacia atrás y, sin embargo, se acercan al equilibrio perfecto en subjuegos, es decir a la solución de Nash. Más parecieran basarse en puntos focales que son producto de experiencias colectivas o creencias sociales de tratos "justos" de acuerdo a la negociación que se realiza. Es lo mismo que ocurre en algunos experimentos analizados en el libro de A. Roth y J. Murnighan.

En las dos siguientes secciones esbozamos brevemente algunos trabajos realizados en las direcciones b y c.

Simulaciones: ¿Qué tan largo es el largo plazo?

La acumulación de riqueza, un estado de desequilibrio persistente

El problema del tiempo en que se alcanza un equilibrio estocásticamente estable, del que el teorema de Young nos asegura su existencia, es muy importante. Si queremos prever los patrones que realmente surgirán en una comunidad sumergida en un conflicto, importa el tiempo en que se alcanzará un estado de equilibrio o por lo menos acercarse a él. Si un equilibrio se alcanzara en un tiempo enorme relativo al de actuación de la sociedad que estudiamos, entonces dicho equilibrio no informa nada importante de dicha sociedad. En este asunto, una buena simulación puede dar mucha luz sobre lo que se puede esperar realmente. Esbozaremos brevemente esta cuestión, introduciendo un modelo muy simplificado de negociación diseñado por Robert Axtell, Joshua Epstein y Peyton Young [2001]. Estos autores contrastan los equilibrios estocásticamente estables de un proceso de adaptación en un juego de negociación con muy pocas opciones y los resultados de las simulaciones correspondientes. Mientras los equilibrios estocásticamente estables prevén, en el largo plazo, una sociedad igualitaria, en las simulaciones, la acumulación de riqueza puede surgir y permanecer durante un enorme periodo de tiempo, suficiente para que no se vea más que ese patrón durante la mayor parte de la existencia de dicha sociedad. Se trata de un desequilibrio persistente. La realidad, llena de sociedades con clases ricas y pobres, nos dice que las simulaciones son más útiles para estudiar el problema. Mejor que responder la pregunta ¿Puede explicar esto? es contestar a ¿Puede hacerlo emerger?

Construyen su proceso específico en una población sumergida en una versión del juego de demanda de Nash. En este juego, partiendo de agentes iguales, en cuanto a riqueza y poder, puede ocurrir que la propiedad se acumule en unas pocas manos. Esta acumulación no ocurre como un estado al que se tiende asintóticamente, es decir, la acumulación no corresponde a la solución de Nash, que es el único equilibrio estocásticamente estable. Sin embargo, en la simulación que llevan a cabo repitiendo el juego de demanda con un proceso adaptativo es un estado que se alcanza desde varias posiciones iniciales tomadas aleatoriamente y al que resulta muy difícil abandonar una vez alcanzado. El tiempo que requiere es enorme considerado relativamente a la vida de la sociedad estudiada.

En la versión del juego de demanda que utilizan Axtell et al, las estrategias de los dos jugadores consisten en la estrategia B que es pedir el 30 por ciento de la riqueza a repartir, M pedir el 50 por ciento y A el 70 por ciento. Los pagos se expresan en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} (.3,.3) & (.3,.5) & (.3,.7) \\ (.5,.3) & (.5,.5) & (0,0) \\ (.7,.3) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}$$

Los equilibrios de Nash estrictos son (M,M), (A,B) y (B,A).

La dinámica de adaptación es como sigue. En primer lugar, cada miembro de la población puede enfrentarse a cualquier otro distinto que él. No hay jugadores columna y renglón. El número de individuos de la población es par y en cada periodo son apareados aleatoriamente (con posibles repeticiones de los jugadores) y se realizan n/2 encuentros. Una persona puede participar más de una vez en un periodo o no participar, respetando la paridad del número de jugadores. Su experiencia le servirá para formar una creencia de cómo es la probabilidad con la que sus oponentes utilizarán sus estrategias. Es decir, cada miembro de la población tiene memoria sobre lo que han elegido sus oponentes en los últimos m encuentros y es lo que será su base para optimizar con una alta probabilidad, mientras que con una pequeña probabilidad se desvían del óptimo eligiendo su respuesta al azar. Cada agente tiene una memoria distinta. Además, la población está partida en dos tipos de agentes. La característica en que se basa esta división no otorga ningún poder dentro del juego. Puede tratarse del color de la piel o del de los ojos o si son hombres o mujeres, o gordos o flacos. A pesar de no otorgar algún tipo de fuerza, la memoria de los agentes recuerda como han actuado frente a él mismo los de cada uno de los tipos y al enfrentarse a un agente utilizará solamente la parte de su memoria relativa a los del tipo al que pertenece su oponente. Si es la primera vez que se enfrenta a alguien de un tipo elegirá azarosamente con la misma probabilidad cada una de las 3 estrategias disponibles.

La dinámica sigue como antes, una restricción que significa que cada persona olvida lo que le pasó en el enfrentamiento más viejo y agrega el más nuevo, puede también ser el mismo. Los equilibrios de este proceso se componen de dos partes que nos dicen cuál es el patrón de conducta (repartición emergente) al enfrentarse, tanto entre agentes de la misma clase, como de tipos distintos. Este proceso resulta ser un proceso de Markov perturbado regularmente y el teorema de Young establece que el único equilibrio estocásticamente estable del proceso es en el que los n participantes tienen memoria de que todos sus oponentes, tanto de su propio tipo como del otro, y han elegido la estrategia M durante los m últimos periodos. Este equilibrio es alcanzado desde cualquier estado, pero ¿lo hace en un tiempo razonable? Resulta que no ocurre así.

Axtell et al llevan a cabo un enfoque computacional basado en agentes. Sitúan a una población inicial de agentes heterogéneos y autónomos en un ambiente espacial relevante permitiéndoles interactuar de acuerdo a reglas micro locales y simples y estudian que regularidades se generan desde esa situación inicial. Los autores reportan que partiendo de varias situaciones iniciales en un número no muy grande de iteraciones se alcanza el equilibrio igualitario tanto frente a los iguales como frente a los diferentes.

Pero también existen muchas situaciones iniciales en las que, a pesar de que en el enfrentamiento entre iguales emerge una situación igualitaria, todos eligen M, se llega a la concentración de la riqueza clases en los enfrentamientos entre desiguales. Esta situación no es esporádica, en el sentido de que se pasa por ella y se abandone rápidamente. Alcanzar el estado de concentración de la riqueza en las manos de los que pertenecen a uno de los tipos de la población implica quedarse en dicho estado por al menos 10^6 iteraciones que es un número enorme en cuanto a la vida de una sociedad. Es decir, lo que se observaría es una sociedad clasista y la tendencia al igualitarismo (solución de Nash) que es propia del equilibrio estocásticamente estable *no se detectaría*.

Economía experimental (Juegos experimentales)

Se conoce con el nombre de economía experimental a los estudios basados en ciertos experimentos económicos, realizados principalmente con la participación de estudiantes de este gremio. La gran mayoría de estos experimentos están diseñados con algún juego. Particularmente, se han usado abundantemente los modelos que podríamos llamar "juegos de negociación" como el juego de demanda de Nash, el juego del ultimátum, simplificaciones del modelo de Rubinstein, etc. Aquí presentamos algunos experimentos tomados del libro de A. Roth y J. Murnighan.

Experimento 1:

A dos personas se les entregaron cien boletos de lotería a repartir. La probabilidad de ganar un premio era proporcional al número de boletos que cada uno recibió tras la negociación, pero los premios diferían según el jugador. El premio, de conseguirlo, para el jugador A, era de $20, mientras que el del jugador B era de $5. Si los boletos se repartiesen en proporción 20:80, la esperanza de pago para ambos jugadores sería de $4. Si asumimos que los jugadores conocen el valor de los premios, esta repartición sería un punto focal. Sin embargo existe un segundo punto focal, que es la división igualitaria de boletos. De hecho existe un tercer punto focal, que es a la mitad de los dos focos anteriores. No obstante, de no tener información acerca de los premios, los boletos tendrían virtualmente el mismo valor, por lo que la única convención posible sería dividir los boletos en proporción 1:1.

En vista de la observación anterior, se llega a la hipótesis de que la información durante el juego puede afectar la resolución del mismo. Es por eso que se diseñaron variantes para el juego. Dentro de los tipos de información, se destacan dos para la experimentación:

Información acerca del valor de los premios. Información referente a la información con la que cuenta cada jugador (meta-información), o conocimiento en común.

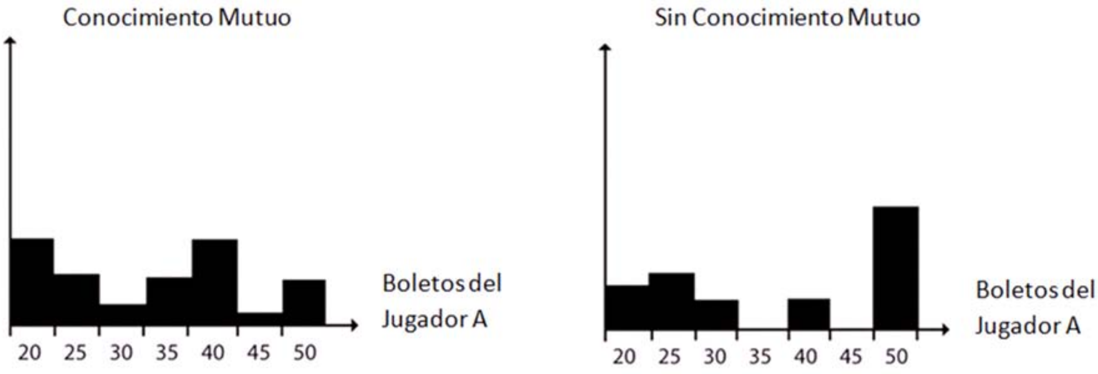
Durante los experimentos efectuados por Roth en 1985, se hicieron pruebas sobre varios escenarios, uno de ellos, el conocimiento común, que se genera al informar a los jugadores que su contraparte, cuenta con la misma información (que ellos mismos).

Es decir, que cada jugador sabe, que el otro jugador sabe, lo que cada uno sabe, etc.

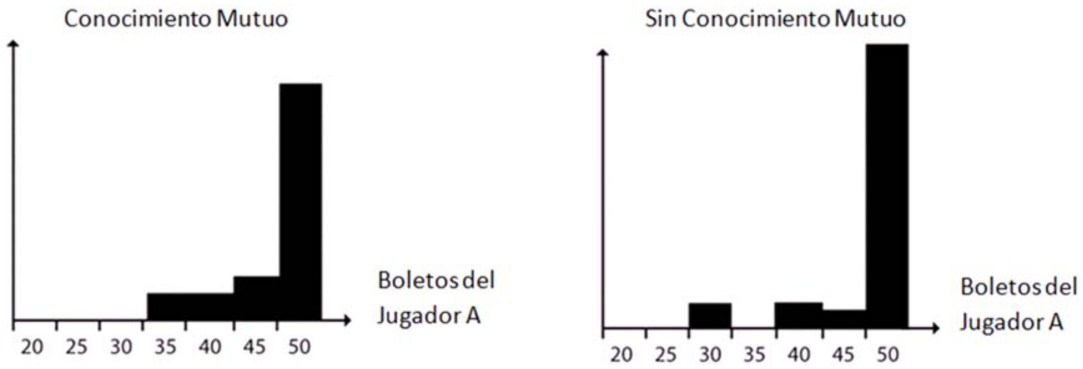
Dados simultáneamente los dos criterios de información, se generan cuatro escenarios, como lo muestra la gráfica a continuación[8].

---

[8] *YOUNG, H.P., "Individual Strategy and Social Structure", Princeton University Press,1998. Pág. 115*



Distribución de valores cuando ambos jugadores conocen el valor de los boletos.



Distribución de Valores cuando ambos jugadores desconocen el valor de los boletos.

Los experimentos refuerzan la hipótesis que afirma que, a mayor cantidad de puntos focales, mayor es la probabilidad de discordancia. En experimentos con dos puntos focales (cuando los jugadores conocen el valor de los premios, independientemente del conocimiento común), la frecuencia con la que no se llegó a un acuerdo, fue del 22%, comparado con un 11%, cuando el punto focal era único. Notable fue también el patrón de dispersión, que en el caso de dos puntos focales, los acuerdos se esparcieron entre las convenciones, mientras que al existir un solo punto, los acuerdos se concentraron cerca del mismo.

Entonces podemos distinguir dos factores que afectan el desarrollo de un problema de negociación: información y puntos focales (convenciones). Sin embargo, no hemos hablado de cómo llegar a dichas convenciones. Para ello partiremos del supuesto de que las acciones pasadas afectan el presente. Es decir, que la solución de las negociaciones, dependen de soluciones anteriores, o bien, que los negociadores pueden ser persuadidos a favor de un punto focal en particular, influidos por las negociaciones anteriores. Este hecho fue confirmado experimentalmente (Roth & Schoumaker 1983) de la siguiente manera:

Experimento 2

El escenario es el mismo que en el experimento 1, sólo que esta vez, los jugadores negociaron 25 veces seguidas un juego con conocimiento común (dos puntos focales). Lo que no sabían era que durante las primeras 15 rondas, jugaban contra computadoras pre-programadas para jugar un punto focal en específico. Tras dichas rondas, se ordenaron a los participantes usando como criterio de pareo, el mismo tipo de punto focal usado por las computadoras con ellos. No sólo eso, sino que una vez pareados los participantes, se publicaron los últimos 5 acuerdos realizados por cada uno.

La conjetura de que los jugadores seguirían jugando el mismo punto focal en las últimas rondas se confirmó experimentalmente, incluso en los casos en los que los jugadores pudieran haber exigido una mayor parte de los boletos a negociar sin haber confrontado una gran resistencia por parte del otro jugador. Por ejemplo, la gran mayoría de jugadores que debió pedir el 80% de los boletos (jugadores tipo B), acordaron un trato de 50:50, tras haber jugado las primeras 15 rondas contra una computadora que demandaba una repartición de este tipo.

En contraste con el primer experimento, la proporción de personas que no lograron un acuerdo fue muy baja. Se tiene entonces evidencia empírica de las siguientes dos proposiciones:

Las normas (convenciones) tienen valor económico, ya que de no haberlas o haber demasiadas (casi lo mismo), habrá más casos en los que no se llegue a un acuerdo, y por ello no se alcance el máximo aprovechamiento de la negociación, esto siempre que el punto de desacuerdo no sea mayor que cualquier solución factible; supuesto que daremos por hecho, o que al menos se cumple la mayoría de las veces.

La elección de la norma puede ser condicionada por precedentes, como ya se había mencionado.

Expresado desde un punto de vista matemático, se podría interpretar este resultado diciendo que el experimento planteado no es un proceso ergódico, puesto que las negociaciones son inducidas por estado inicial (historia inicial).

Al respecto se puede observar que las iteraciones del experimento no son las suficientes como para poder hablar de un proceso ergódico. Responde, más bien al hecho de que el primer equilibrio que se buscará será la convención reinante, mas no tiene por qué ser esta definitiva.

No sólo eso, el 50:50 es una repartición muy especial, es la reina de las convenciones. Se presenta siempre como una opción, incluso aunque no sea lógicamente óptima, ya que los jugadores siempre estarán dispuestos a creer que no tienen información alguna...bueno, al menos, así me lo explico yo.

Conclusiones

Tras varios juegos de negociación, las preguntas quedan en pie: ¿Son los axiomas de Nash plausibles? ¿Debemos aceptarlos o rechazarlos? ¿Tenemos bases suficientes para responder?

Hemos encontrado ejemplos donde el producto de Nash maximizado no siempre es la mejor solución, o que ésta se genera de forma un tanto forzada, sin embargo hay que ser justos y reconocer que tampoco es poca cosa encontrar un mismo resultado en mecánicas tan variadas en diferentes juegos de negociación.

El mismo Nash señala que parte de la metodología del "Programa de Nash" es rechazar el cuerpo axiomático de ser necesario.

Nos encontramos en la encrucijada de pretender "dar el sí" a un cuerpo axiomático, que nunca podrá ser totalmente fiel a una realidad, de hecho, ningún cuerpo axiomático puede jactarse de ello, máxime cuando más se aleja uno de las ciencias exactas, como es el caso de la teoría de juegos aplicada a la economía.

No por ello el ejercicio carece de sentido o validez. El lector podrá compartir con nosotros que no siempre se puede dar uno el lujo de contar con resultados teóricos que favorecen la elección de axioma sobre otro.

Por lo anterior me uno a la aceptación de los axiomas de Nash como válidos, si es que acaso fuera necesario presentar una postura.

Sobre la aplicación del modelo

Si bien los Axiomas de Nash fueron planteados en un contexto cooperativo, su utilidad radicaría, en poder regular negociaciones en un juego real. Para poder dar uso a la Solución de Nash para Juegos de Negociación, se necesita de una institución que pueda medir los poderes de negociación y que pueda fomentar el uso de dicha solución.

Los axiomas, de ser aceptados, tienen gran valor de aplicación, ya que se cuenta con un único resultado que se desea conseguir. Dicho de otro modo, la fórmula para resolver problemas de negociación existe. La aplicación es inmediata si se cuenta con un sistema que pueda preservar la normatividad entre jugadores (instancia de arbitraje). Sería ya solo cuestión de poder tabular valores para los diferentes poderes de negociación y hacer suposiciones acerca de las funciones de utilidad, que tratándose de negociaciones, se puede pensar en dinero, por lo que la estructura de dichas funciones no debe de ser un problema.

Por lo que una institución como la CONDUSEF podría arbitrar conflictos entre particulares e instituciones financieras con una metodología más automatizada.

Estoy consciente de que el cascabel del gato son los poderes de negociación, puesto que sería difícil e inexacto pretender asignar dichos valores a situaciones infinitamente variables en el ámbito competente a la comisión antes mencionada. No obstante, creo que la economía ha resuelto problemas más complejos que este, y que lo mejor del caso es que esta idea se puede extender para cualquier institución con capacidad de arbitraje, conjugando de esta manera la teoría cooperativa y la no cooperativa.

Bibliografía

-YOUNG, H.P., "Individual Strategy and Social Structure", Princeton University Press,1998.

- BINMORE,K., "Teoría de Juegos", McGraw-Hill, 1994.

- ZAPATA,P., "Economía, política y otros juegos", UNAM Facultad de

Ciencas,2007.

- BINMORE,K., L. SAMUELSON and P. Young, "Equilibrium Selection in Bargaining Models". *Games and Economic Behavior 45* (2003, 296-328)

- BINMORE,K., "Playing for Real", Oxford University Press, 2007.

- ZAPATA, P. and C. ABBOUD, "El Programa de Nash para Juegos de Negociación y la Teoría de Redes", *Aportaciones Matemáticas. Memorias 43* (2011, 73-102)

- OSBORN, M.J. and A. RUBINSTEIN, "Bargaining and Markets", Academic Press, Inc., 1990.

- BINMORE,K., "The Bargaining Challenge", The MIT Press, 2007.