



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Diagonalización del Hamiltoniano para  
sistemas atómicos de 2 y 3 niveles en  
presencia de radiación en el límite  
termodinámico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

WILLIAM EDUARDO ÁLVAREZ GIRÓN

TUTOR

DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA



México, D.F., 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del Alumno

Álvarez  
Girón  
William Eduardo  
967 130 7363  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
412001703

### 2. Datos del Tutor

Dr.  
Ramón  
López  
Peña

### 3. Datos del Sinodal 1

Dr.  
Jorge Gustavo  
Hirsch  
Ganievich

### 4. Datos del Sinodal 2

Dr.  
Pablo  
Barberis  
Blostein

### 5. Datos del Sinodal 3

Dr.  
Carlos  
Villarreal  
Luján

### 6. Datos del Sinodal 4

Dr.  
Carlos Francisco  
Pineda  
Zorrilla

### 7. Datos del Trabajo Escrito

Diagonalización del Hamiltoniano para sistemas atómicos de 2 y 3 niveles en presencia de radiación en el límite termodinámico

53 p.

2015





# Índice general

Agradecimientos	XIII
Introducción	XV
<b>1. Modelo teórico de la interacción radiación-materia</b>	<b>1</b>
1.1. Procedimiento de acoplamiento mínimo . . . . .	1
1.1.1. Invariancia de norma para la ecuación de Schrödinger . . . . .	1
1.1.2. Interacción de un átomo con el campo . . . . .	4
1.1.3. Cuantización del potencial vectorial . . . . .	5
1.1.4. Tratamiento cuántico para el Hamiltoniano $\hat{H}$ . . . . .	6
1.1.5. Aproximación de onda rotante . . . . .	8
1.2. Procedimiento de acoplamiento directo . . . . .	9
1.2.1. Motivación del acoplamiento directo . . . . .	9
1.2.2. Tratamiento cuántico para el Hamiltoniano $\tilde{H}$ . . . . .	10
1.3. Transiciones de fase en la interacción radiación-materia . . . . .	11
<b>2. Estudio del sistema atómico de dos niveles</b>	<b>13</b>
2.1. Tratamiento del Hamiltoniano de Dicke en el límite termodinámico . . . . .	14
2.2. Transformaciones de Bogoliubov para el Hamiltoniano efectivo $\hat{H}^{(2)}$ . . . . .	17
2.3. Cálculo de algunos observables . . . . .	21
2.4. Soluciones para un caso particular . . . . .	22
<b>3. Estudio del sistema atómico de tres niveles</b>	<b>27</b>
3.1. Tratamiento del Hamiltoniano para el sistema de tres niveles en el límite termodinámico . . . . .	27
3.2. Estudio sobre la configuración $\Xi$ . . . . .	29
3.3. Transformaciones de Bogoliubov para el Hamiltoniano efectivo $\hat{H}^{(3)}$ . . . . .	32
3.4. Cálculos numéricos para un caso particular . . . . .	39
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Apéndice</b>	<b>47</b>
A. Transformación de Bogoliubov para el sistema de dos niveles . . . . .	47

B. Transformación de Bogoliubov para el sistema de tres niveles en configuración $\Xi$ . . . . .	48
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



# Índice de figuras

1.	Esquema de un sistema de $N$ átomos y un modo del campo de radiación cuantizado confinados en una cavidad. . . . .	XV
1.1.	Transiciones de fase cuánticas (a) Para un sistema finito donde se observa un cruce entre niveles en $g = g_c$ , en este caso entre el estado base y el primer estado excitado. (b) Para un sistema con un número de componentes muy grande. Aunque no exista un cruce de niveles, puede haber un punto no analítico ( $g = g_c$ ) cuando el número de componentes tiende a infinito (línea continua). . . . .	12
2.1.	Esquema de un átomo de dos niveles ( $ 1\rangle$ y $ 2\rangle$ ) interactuando con un modo de radiación $\Omega_k$ . Se tiene un acoplamiento entre el campo y el átomo de valor $\mu$ . . . . .	13
2.2.	Comportamiento de los coeficientes $\alpha$ y $\beta$ como función de $\mu$ . Se ha calculado para los valores $\Omega_k = \omega = 1$ . Se observa el punto crítico en $\mu_c = 0,5$ . . . . .	23
2.3.	Energías de excitación en el límite termodinámico como función de $\mu$ . Se ha usado el caso de resonancia $\Omega_k = \omega = 1$ . Se observa la transición de fase en $\mu_c = 0,5$ y que $\epsilon$ es el término de menor energía, siendo igual al gap entre la energía base y la energía del primer estado excitado. . . . .	23
2.4.	Energía del estado base en el límite termodinámico como función de $\mu$ . Se ha usado el caso de resonancia $\Omega_k = \omega = 1$ , usando valores para $N$ , el número de átomos, de 10, 30 y 50. Se observa la transición de fase en $\mu_c = 0,5$ y un comportamiento asintótico al incrementar $N$ . . . . .	24
2.5.	Comportamiento del valor promedio de fotones por átomo en el límite termodinámico como función de $\mu$ . Se ha usado el caso de resonancia $\Omega_k = \omega = 1$ . Se observa la transición de fase en $\mu_c = 0,5$ . Cerca del punto crítico se observa la singularidad debido al mal comportamiento de la aproximación cerca del punto crítico el cual tiende a desaparecer al incrementarse $N$ . . . . .	24
2.6.	Comportamiento del valor promedio del número de excitaciones atómicas $J_z$ por átomo en el límite termodinámico como función de $\mu$ . Se ha usado el caso de resonancia $\Omega_k = \omega = 1$ . Se observa la anomalía de la aproximación en el punto crítico $\mu_c = 0,5$ . . . . .	25

3.1.	Configuraciones posibles en el átomo de tres niveles (a) Esquema de la configuración $\Xi$ donde no se presenta la transición entre el estado $ 1\rangle$ y el estado $ 3\rangle$ . (b) Para el caso de la configuración $\Lambda$ se tiene prohibido la transición entre los estados $ 1\rangle$ y $ 2\rangle$ . (c) En la configuración $V$ no existe transición entre $ 2\rangle$ y $ 3\rangle$ . . . . .	30
3.2.	Gráfica 3D del comportamiento de $\alpha$ en función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso de doble resonancia $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . En esta gráfica se puede identificar claramente el contorno de la separatriz de la transición de fase.	40
3.3.	Gráfica de densidad para $\alpha$ en función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso de doble resonancia $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . . . . .	40
3.4.	Gráfica 3D del comportamiento de $\beta_1$ en función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso de doble resonancia $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Podemos observar cierto comportamiento anómalo en algunas partes de la zona de transición	41
3.5.	Gráfica de densidad para $\beta_1$ en función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso de doble resonancia $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Se puede identificar claramente el contorno de la separatriz en la transición de fase y el comportamiento anómalo cerca de la transición. . . . .	41
3.6.	Gráfica de densidad para $\beta_2$ como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso de doble resonancia $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Se observa un comportamiento parecido al del coeficiente $\beta_1$ . . . . .	41
3.7.	Gráfica de densidad para $\beta_2$ como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Nuevamente se puede identificar el contorno de la separatriz en la transición de fase y el comportamiento anómalo cercano a la transición. . . . .	41
3.8.	Gráfica 3D del termino constante en el Hamiltoniano $\hat{H}^{(3)}$ (denotado $h_9$ ) como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Aunque no se observe de manera clara la separatiz el comportamiento asemeja a lo reportado en [13] para la energía base del sistema. También se puede observar el comportamiento anómalo presentado en $\beta_1$ y en $\beta_2$ .	42
3.9.	Gráfica de densidad del termino constante en el Hamiltoniano $\hat{H}^{(3)}$ (denotado $h_9$ ) como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Se presenta la separatriz de la transición aunque no manera clara por un comportamiento más suave de la función. . . . .	42
3.10.	Gráfica 3D de la energía base del sistema por número de átomos como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Su comportamiento no difiere mucho de lo encontrado para $h_9$ salvo un crecimiento de la anomalía. . . . .	42
3.11.	Gráfica de densidad del estado base por número de átomos como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . No se observa mucha diferencia con lo mostrado en 3.9 salvo una mayor anchura de la anomalía. . . . .	42

ÍNDICE DE FIGURAS

3.12. Gráfica 3D de la energía de excitación $e_1$ como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Compárese con el comportamiento de la energía de excitación $\epsilon_1$ (Figura 2.3) del caso de 2 niveles con el que tiene cierta semejanza. . . . .	43
3.13. Gráfica de densidad de la energía de excitación $e_1$ como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Aunque en la gráfica 3D la anomalía se confunda con el comportamiento de la transición se puede apreciar aquí su presencia. . . . .	43
3.14. Gráfica 3D de la energía de excitación $e_3$ como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Se observa una semejanza con el comportamiento de la energía de excitación $\epsilon_2$ de la Figura 2.3 salvo en la transición dónde se tiene la singularidad por la aproximación. . . . .	43
3.15. Gráfica de densidad de la energía de excitación $e_2$ como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . . . . .	43
3.16. Gráfica 3D de la energía de excitación $e_3$ como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . Se tiene un comportamiento parecido a la energía de excitación $e_1$ . . . . .	44
3.17. Gráfica de densidad de la energía de excitación $e_3$ como función de $\mu_{12}$ y $\mu_{23}$ para el caso $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$ y $\omega_1 = 0$ . . . . .	44



# Agradecimientos

En primer lugar a mi familia, pieza fundamental de mi vida. Gracias por todo el amor y el apoyo.

Agradecimientos especiales a los profesores que me han abierto las puertas a la investigación. Al Dr. Ramón López por aceptarme para realizar el presente trabajo, al Dr. Pablo Barberis que desde el servicio social me ha aceptado en otros proyectos y al Dr. Alfred U'ren que me ha dado puertas abiertas a su laboratorio.

Muchas gracias al Dr. Carlos Pineda, al Dr. Carlos Villarreal y al Dr. Jorge Hirsch por aceptar evaluar este trabajo.

Por último quiero agradecer a Erik y a todos los compañeros y amigos de la facultad. Y a todos los miembros de la “Cochera de Paco” que ha sido mas que una casa para mí, especialmente a Tayde.

## AGRADECIMIENTOS

# Introducción

Debido a la naturaleza poco intuitiva de la mecánica cuántica, el tener sistemas que puedan ser modelados de manera simple, permitan su realización experimental y tengan un pequeño número de grados de libertad de forma que sean posibles soluciones numéricas sin muchos recursos computacionales es de gran ayuda en el entendimiento de la materia. Uno de estos sistemas, y sin duda de los más exitosos, es la electrodinámica cuántica en cavidades, llamada de manera corta *CQED*.

La CQED trata sobre la interacción de la luz y la materia cuando ambos están confinados en una “caja”. De forma precisa, trata sobre sistemas atómicos (o moleculares) que se logran aislar mediante paredes altamente reflectantes interactuando con el campo electromagnético cuantizado (modelado como conjunto de osciladores armónicos), estando algunos de los modos del campo en resonancia, o cerca de la resonancia, con la energía de transición entre dos niveles atómicos.

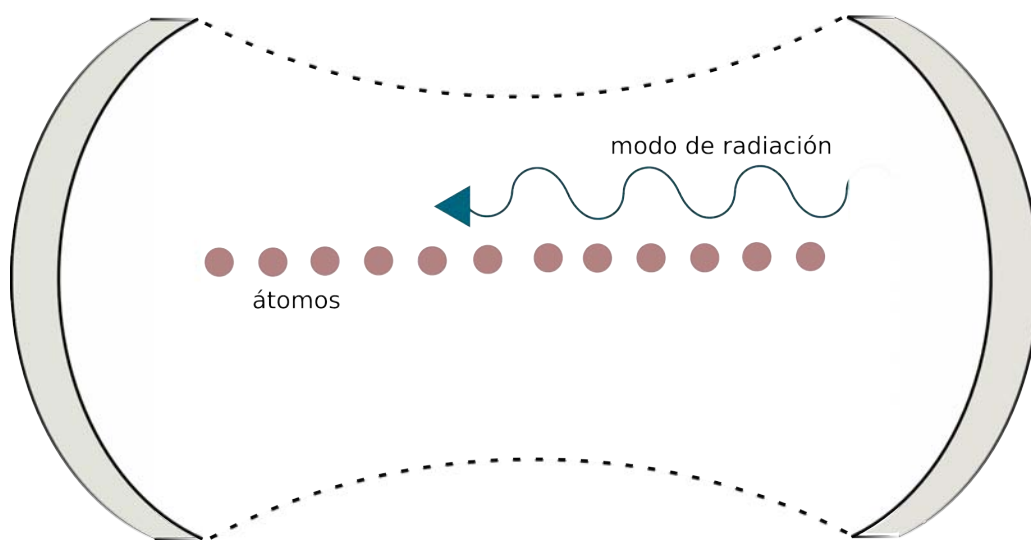


Figura 1: Esquema de un sistema de  $N$  átomos y un modo del campo de radiación cuantizado confinados en una cavidad.

Además de la importancia teórica por las predicciones hechas como los fenómenos

de colapso-revivamiento [1] o los estados comprimidos [2], la CQED ha tenido una gran relevancia en el área experimental y en el área de las aplicaciones. Por un lado, porque muchos conceptos elementales de la mecánica cuántica como la paradoja EPR o del gato de Schrödinger han podido ser investigados en experimentos de CQED [3, 4]. En segunda por la aplicación de la teoría al desarrollo del láser [5] y su potencial aplicación al campo de la computación e información cuánticas [6].

Entre los modelos teóricos que tratan el acoplamiento entre átomos y el campo de radiación cuantizado se encuentra el modelo de Jaynes-Cummings [7]. Este modelo estudia la interacción entre un átomo de dos niveles y un modo del campo de radiación. A pesar de las simplificaciones que presenta, describe con cierto éxito los fenómenos observados en el experimento [8]. El modelo de Jaynes-Cummings es caso particular del modelo de Tavis-Cummings [9] que describe sistemas de  $N$  átomos de 2 niveles. Para ambos modelos se han logrado obtener soluciones analíticas exactas.

Una generalización de los modelos mencionados es el modelo de Dicke [10], el cual estudia sistemas de  $N$  átomos incorporando términos de interacción despreciados en la aproximación de onda rotante (aproximación usada en el modelo de Jaynes-Cummings y en el de Tavis-Cummings). No existe una solución analítica exacta para el modelo de Dicke considerando un número finito  $N$  de partículas. Sin embargo el Hamiltoniano de Dicke puede ser diagonalizado en el límite termodinámico [11] (considerando  $N \rightarrow \infty$ ) con lo cual es posible obtener una descripción de los primeros estado energéticos del Hamiltoniano.

Otro de los sistemas estudiados en la actualidad es el que describe los átomos de tres niveles. Entre los tipos más populares de estudio están los clasificados como  $\Lambda$ ,  $V$  o  $\Xi$  dependiendo de las transiciones realizadas en el átomo. Estos sistemas se han podido estudiar en distintos casos, por ejemplo usando la aproximación de onda rotante [12, 13]. También se ha investigado tomando en cuenta los términos contra-rotantes pero considerando dos modos del campo electromagnético [14] o tomando en cuenta el término diamagnético y usando la regla de la suma de Thomas-Reich-Kuhn (TRK) [15].

Entre los casos poco tratados en la literatura científica se tiene el sistema atómico de 3 niveles en la configuración  $\Xi$  interactuando con un modo del campo de radiación. Se han encontrado soluciones usando la aproximación de onda rotante, cosa no hecha sin usar tal aproximación. En este trabajo se quiere tratar este problema mediante la diagonalización del Hamiltoniano en el límite termodinámico.

## Estructura de la Tesis

En el capítulo 1 se introduce la teoría de la interacción radiación-materia en la mecánica cuántica. Se presenta el Hamiltoniano del sistema mostrando las dos formas de modelar el término de interacción: el *procedimiento de acoplamiento mínimo* y el



## INTRODUCCIÓN

*procedimiento de acoplamiento directo.*

En el capítulo 2 se trabaja en la diagonalización del Hamiltoniano de Dicke en el límite termodinámico. Esto se hará introduciendo las transformaciones de Holstein-Primakoff al sistema para escribir los operadores atómicos en términos de operadores bosónicos. Para la diagonalización se hará uso de las transformaciones de Bogoliubov. Se concluye calculando algunos valores esperados y aplicando lo desarrollado a un caso particular.

El capítulo 3 se centra en la diagonalización del Hamiltoniano de un sistema de  $N$  átomos de 3 niveles interactuando con un modo del campo de radiación en el límite termodinámico. Para ello se usará la generalización de las transformaciones de Holstein-Primakoff y, de nueva cuenta, mediante las transformaciones de Bogoliubov. Se mostrarán las soluciones numéricas para un caso particular.



# Capítulo 1

## Módulo teórico de la interacción radiación-materia

Como todo problema en mecánica cuántica no-relativista, nuestro punto de partida es obtener el Hamiltoniano que describa al fenómeno. Para un sistema involucrando radiación y materia, los primeros términos que podemos reconocer del Hamiltoniano son: el término de energía cinética para los átomos y el término de energía libre para los campos, que son descritos cuánticamente mediante operadores de momento y operadores de creación y aniquilación, respectivamente. Pero, ¿cómo podemos modelar la interacción radiación-materia?

En el presente capítulo estudiaremos dos formas de tratar el problema. El primero de los métodos trata con el reemplazo del momento  $\mathbf{p}$  por el momento  $\mathbf{p} - e\mathbf{A}$  en el término cinético. Este método es conocido como *procedimiento de acoplamiento mínimo* o interacción  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ . El otro método involucra la introducción del término de interacción dipolar  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ , siendo el momento dipolar atómico  $\mathbf{d}$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Este método es conocido como *acoplamiento directo*.

### 1.1. Procedimiento de acoplamiento mínimo

#### 1.1.1. Invariancia de norma para la ecuación de Schrödinger

En mecánica cuántica, la física está dada por las probabilidades de los resultados al realizar mediciones. Estas probabilidades están relacionadas con el cuadrado del valor absoluto de la función de onda ( $|\psi|^2$ ). Debido a esto la función de onda está determinada hasta una fase total. Como ejemplo, consideremos la función  $\psi(\mathbf{r}, t)$  la cual satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

donde  $U(\mathbf{r})$  corresponde a un potencial exterior y  $\hat{\mathbf{p}}$  es el operador de momento. Ahora consideremos la función

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = e^{i\alpha}\psi(\mathbf{r}, t)$$

siendo  $\alpha$  una constante real. Definida de esta forma la función de onda  $\tilde{\psi}$  seguirá cumpliendo la ecuación (1.1). Transformaciones de este tipo son conocidos como *transformaciones globales*.

Por otro lado, la fase puede depender de la posición y del tiempo, tal transformación es conocida como *transformación local*. Ejemplo de esto es

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}e\Lambda(\mathbf{r}, t)\right]\psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.2)$$

La función  $\tilde{\psi}$  no cumple la ecuación (1.1) sino que satisface la siguiente

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\nabla - e\nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)\right]^2\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) + \left[U(\mathbf{r}) - e\frac{\partial\Lambda(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (1.3)$$

Pero, ¿bajo qué transformaciones la ecuación (1.3) será invariante?

Antes de continuar recordemos las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}, t), \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (1.7)$$

Las ecuaciones (1.5) y (1.6) permiten escribir a los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  de la forma [16]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (1.8)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla\phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.9)$$

Al campo  $\mathbf{A}$  se le llama *potencial vectorial* y al campo  $\phi$  *potencial escalar*, y en su conjunto son llamados *potenciales electromagnéticos*. De las relaciones anteriores observamos que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  también son obtenidos con los potenciales

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}. \end{aligned}$$

Por tanto vemos que hay una libertad al determinar los potenciales electromagnéticos al escoger la función  $\Lambda$ .

La elección de  $\Lambda$  permite en ciertos casos simplificar las ecuaciones para nuestros campos electromagnéticos. Por ejemplo podemos escogerlo de forma que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Tal

elección es conocida como *norma de Coulomb*. Es importante recalcar que en ausencia de cargas, la norma de Coulomb junto a la ecuación (1.4) implican que  $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$ .

Postulemos que la ecuación de Schrödinger deba ser invariante ante las transformaciones locales, como (1.2) [17]. Así podemos introducir los potenciales electromagnéticos en la ecuación de Schrödinger, obteniendo

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar \nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + U(\mathbf{r}) + e\phi(\mathbf{r}, t) \right\} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.10)$$

Ahora, al aplicar la transformación (1.2), la nueva función de onda  $\tilde{\psi}$  cumplirá

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar \nabla - e\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) \right]^2 + U(\mathbf{r}) + e\phi'(\mathbf{r}, t) \right\} \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (1.11)$$

Hemos conseguido que la forma de la ecuación sea invariante. Este Hamiltoniano es el que debemos de tratar al considerar partículas inmersas en campos electromagnéticos.

El desarrollo hecho nos ha conducido a considerar un Hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[ \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + U(\mathbf{r}) + e\phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \int d^3r \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right],$$

donde hemos introducido la contribución de la energía del campo libre. Recordemos que en CQED queremos considerar campos en el vacío (descritos por osciladores armónicos), al considerar la norma de Coulomb tendremos que  $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$ , por lo que el Hamiltoniano queda expresado como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[ \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right].$$

Finalmente desarrollemos el primer término del Hamiltoniano anterior

$$(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 = \hat{\mathbf{p}}^2 + e^2 \mathbf{A}^2 - e(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}).$$

Debido a que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})] &= -i\hbar \nabla \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})] \\ &= -i\hbar [\psi(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r})] \end{aligned}$$

se satisface para cualquier función  $\psi(\mathbf{r})$ , y usando la norma de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , llegamos a que

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

La forma del Hamiltoniano a considerar es

$$\hat{H} = \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t) - \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}} \right] + U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right].$$

Para lo que sigue consideraremos un campo de radiación débil ( $|\mathbf{p}| \gg |e\mathbf{A}|$ ) de tal forma que el Hamiltoniano pueda tratarse perturbativamente. Esto nos permite despreciar el término  $\mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t)$  que es conocido como *término diamagnético* [18], quedándonos con

$$\hat{H} = \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}} \right] + U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right]. \quad (1.12)$$

### 1.1.2. Interacción de un átomo con el campo

Para continuar el desarrollo consideremos un átomo, que por simplicidad será de Hidrógeno. Si  $\mathbf{r}_p$  y  $m_p$  denotan la posición y la masa del protón y  $\mathbf{r}_e$ ,  $m_e$  los del electrón, tendremos

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}_e^2}{2m_e} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_p^2}{2m_p} + \frac{e}{m_p} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}_p - \frac{e}{m_e} \mathbf{A}(\mathbf{r}_e, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}_e \right] + U(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e|) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3r \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right], \end{aligned}$$

donde  $U(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e|)$  denota el potencial que experimenta el electrón debido al núcleo. Denotemos al término del campo libre como

$$H_{rad} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right]. \quad (1.13)$$

Sea  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e$ , las coordenadas relativas, e introduzcamos las coordenadas del centro de masa, entonces el Hamiltoniano queda expresado como

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{e}{\mu} \left[ \frac{\mu}{m_e} \mathbf{A} \left( \mathbf{R} + \frac{m_p}{M} \mathbf{r}, t \right) + \frac{\mu}{m_p} \mathbf{A} \left( \mathbf{R} - \frac{m_e}{M} \mathbf{r}, t \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ & - \frac{e}{M} \left[ \mathbf{A} \left( \mathbf{R} + \frac{m_p}{M} \mathbf{r}, t \right) - \mathbf{A} \left( \mathbf{R} - \frac{m_e}{M} \mathbf{r}, t \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{P}} + U(|\mathbf{r}|) + H_{Rad}. \end{aligned}$$

Aquí  $\mu$  denota la masa reducida del sistema,  $M$  la masa total,  $\mathbf{P}$  el momento asociado al centro de masa y  $\mathbf{p}$  el momento asociado a la coordenada relativa.

En el Hamiltoniano anterior observamos términos de la forma  $\mathbf{A}(\mathbf{R} + \delta\mathbf{r})$ . Expandiendo este término en serie de Taylor alrededor de  $\mathbf{R}$  obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{R} + \delta\mathbf{r}) \simeq \mathbf{A}(\mathbf{R}) + (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{R}}) \mathbf{A}(\mathbf{R}) + \dots$$

Estimemos la contribución del segundo término relativo al primero [19]

$$\frac{|\delta\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\mathbf{R})|}{|\mathbf{A}(\mathbf{R})|} \leq \frac{|\delta\mathbf{r}| |\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\mathbf{R})|}{|\mathbf{A}(\mathbf{R})|} \simeq |\delta\mathbf{r}| |\mathbf{k}|.$$

Para lo anterior hemos considerado al potencial vectorial descrito por ondas planas (ver sección 1.1.3) por lo que el cambio del potencial está relacionado con el vector de onda

k. Recordemos que  $\delta\mathbf{r}$  puede ser  $-(m_e/M)\mathbf{r}$  o  $(m_p/M)\mathbf{r}$ , además la magnitud de  $\mathbf{r}$ , el vector relativo, es del orden del tamaño del átomo. Por tanto

$$\frac{|\delta\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{A}(\mathbf{R})|}{|\mathbf{A}(\mathbf{R})|} \leq 2\pi \frac{\text{tamaño del átomo}}{\text{longitud de onda de la luz}}.$$

Concluyendo que si consideramos longitudes de onda mucho mayores al tamaño del átomo (caso al considerar el espectro visible) podemos aproximar

$$\mathbf{A}(\mathbf{R} + \delta\mathbf{r}) \simeq \mathbf{A}(\mathbf{R}).$$

El planteamiento anterior es conocido como *aproximación del dipolo* y consiste en considerar el valor del potencial como constante dentro de la región atómica, implicando

$$\mathbf{A}(0) \simeq \mathbf{A}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{A}(\mathbf{r}_e) \simeq \mathbf{A}(\mathbf{r}_p).$$

Esto hace que

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{e}{\mu}\mathbf{A}(0) \cdot \hat{\mathbf{p}} + U(|\mathbf{r}|) + H_{Rad}, \quad (1.14)$$

donde observamos que tenemos incluido el Hamiltoniano del átomo en ausencia de campo electromagnético

$$H_{atom} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + U(|\mathbf{r}|). \quad (1.15)$$

Por tanto el término de interacción es

$$H_{int} = -\frac{e}{\mu}\mathbf{A}(0) \cdot \hat{\mathbf{p}}. \quad (1.16)$$

La generalización del término de interacción para un sistema de N partículas es directa y se obtiene

$$H_{int} = -\sum_i \frac{e_i}{\mu_i}\mathbf{A}(0) \cdot \hat{\mathbf{p}}_i,$$

donde  $i$  denota los distintos átomos en la cavidad.

### 1.1.3. Cuantización del potencial vectorial

Considerando el campo electromagnético en el vacío y recordando que trabajamos con la norma de Coulomb, tenemos de las ecuaciones (1.8) y (1.9)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.18)$$

Además la ecuación (1.7) se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Todo lo anterior implica que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2};$$

y dada la relación  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$  por la elección de la norma de Coulomb, obtenemos la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Especialmente podemos expandir el potencial vectorial en términos de ondas planas.

La cuantización del potencial vectorial está directamente dada por la cuantización de las ondas planas mediante operadores de creación y aniquilación, teniendo (en el esquema de Schrödinger)

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k},j} \lambda_{\mathbf{k},j} \mathbf{e}_{\mathbf{k},j} [a_{\mathbf{k},j} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} + a_{\mathbf{k},j}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}], \quad (1.19)$$

donde se tienen los operadores de creación y aniquilación  $a_k$  y  $a_k^\dagger$  y los vectores unitarios  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},j}$ . Es necesario comentar que la constante  $\lambda_{\mathbf{k},j}$  está en función de la frecuencia del modo y del volumen de la cavidad. Además, estos mismos operadores son los que aparecen al cuantizar el término del campo libre  $H_{rad}$  pues por las ecuaciones (1.17) y (1.18) vemos la relación entre el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  y los campos electromagnéticos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ .

#### 1.1.4. Tratamiento cuántico para el Hamiltoniano $\hat{H}$

El Hamiltoniano completo a considerar para un átomo es

$$\hat{H} = H_{atom} + H_{rad} - \frac{e}{\mu} \mathbf{A}(0) \cdot \hat{\mathbf{p}}. \quad (1.20)$$

En el esquema de Schrödinger consideremos la ecuación de eigenvalores para el Hamiltoniano del átomo libre

$$H_{atom}|j\rangle = E_j|j\rangle \quad (1.21)$$

donde  $E_i \leq E_j$  si  $i \leq j$ . Introduzcamos un conjunto de operadores atómicos generalizados como

$$A_{nm} = |n\rangle\langle m|. \quad (1.22)$$



Obsérvese que la acción de un operador atómico  $A_{nm}$  es la de llevar un estado  $|m\rangle$  a un estado  $|n\rangle$ . Estos operadores satisfacen la relación

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{jk}A_{il} - \delta_{il}A_{kj}. \quad (1.23)$$

En la representación de los eigenvectores  $\{|j\rangle\}$ , el Hamiltoniano del átomo puede ser expresado como

$$H_{atom} = \sum_n E_n A_{nn}. \quad (1.24)$$

En general cualquier operador  $\hat{O}$  que describa el comportamiento del átomo, como el momento  $\hat{\mathbf{p}}$  y la posición  $\mathbf{r}$ , puede escribirse como

$$\hat{O} = \sum_{n,m} \langle n|\hat{O}|m\rangle A_{nm}. \quad (1.25)$$

Particularmente para el momento tendremos

$$\hat{\mathbf{p}} = \sum_{n,m} \langle n|\hat{\mathbf{p}}|m\rangle A_{nm}.$$

Al satisfacerse la relación

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}}{\mu} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{r}, H_{atom}] = -\frac{i}{\hbar} (\mathbf{r}H_{atom} - H_{atom}\mathbf{r}),$$

podemos calcular los elementos de matriz de  $\hat{\mathbf{p}}$  en termino de los elementos de matriz del momento dipolar  $e\mathbf{r}$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{\mathbf{p}}|m\rangle &= -\frac{i\mu}{\hbar} (E_m - E_n) \langle n|\mathbf{r}|m\rangle = \frac{i\mu\omega_{nm}}{e} \langle n|e\mathbf{r}|m\rangle, \\ \langle m|\hat{\mathbf{p}}|n\rangle &= -\frac{i\mu\omega_{nm}}{e} \langle m|e\mathbf{r}|n\rangle. \end{aligned}$$

asumiendo  $\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m$  e identificando el momento dipolar atómico  $e\mathbf{r}$  que en general tendrá elementos de matriz complejos. Si definimos que

$$\langle n|e\mathbf{r}|m\rangle = i\mathbf{D}_{nm}$$

donde suponemos que  $\mathbf{D}_{nm}$  es un vector real [21], el momento puede ser expresado como

$$\hat{\mathbf{p}} = \sum_{n<m} \frac{\mu\omega_{nm}}{e} \mathbf{D}_{nm} (A_{nm} + A_{mn}).$$

Así,  $H_{int}$  de la ecuación (1.16) queda expresado de la forma

$$H_{int} = \sum_k \sum_{n<m} \mu_{k,nm} (a_k + a_k^\dagger) (A_{nm} + A_{mn}), \quad (1.26)$$

siendo la constante de acoplamiento

$$\mu_{k,nm} = -\omega_{nm} \mathbf{D}_{nm} \cdot \mathbf{e}_k,$$

donde hemos denotado  $k = \mathbf{k}, j$ .

Por tanto el Hamiltoniano total es

$$\hat{H} = \hbar \sum_k \Omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_n E_n A_{nn} + \sum_k \sum_{n < m} \mu_{k,nm} (a_k + a_k^\dagger) (A_{nm} + A_{mn}). \quad (1.27)$$

Lo anterior describe al sistema con un solo átomo. La generalización es directa para un sistema con  $N$  átomos y conlleva poner a los operadores  $A_{nm}$  como operadores colectivos descritos por

$$A_{nm} = \sum_{r=1}^N A_{nm}^{(r)} \quad (1.28)$$

donde los  $A_{nm}^{(r)}$  corresponden a los operadores definidos en (1.22) para cada átomo  $r$ . Para el caso de  $N$  átomos también es común escribir la constante de acoplamiento  $\mu_{k,nm}$  de tal forma que se tenga una constante sobre  $\sqrt{N}$ , i.e.,

$$\mu_{k,nm} \rightarrow \frac{\mu_{k,nm}}{\sqrt{N}}.$$

Para el caso a tratar, donde consideraremos un modo nuestro Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H} = \hbar \Omega_k a^\dagger a + \sum_n E_n A_{nn} + \sum_{n < m} \frac{\mu_{nm}}{\sqrt{N}} (a + a^\dagger) (A_{nm} + A_{mn}). \quad (1.29)$$

Finalmente, un caso especial, y que se tratará en el presente trabajo, es el de un sistema atómico de dos niveles, para el cual los operadores de (1.22) son los operadores de pseudo-espín  $J_\pm$ ,  $J_z$ , y el Hamiltoniano para el caso de  $N$  átomos queda descrito como

$$\hat{H} = \hbar \Omega_k a^\dagger a + E J_z + \frac{\mu}{\sqrt{N}} (a + a^\dagger) (J_+ + J_-).$$

### 1.1.5. Aproximación de onda rotante

Observando la parte de interacción del Hamiltoniano podemos apreciar, dentro de la suma, cuatro términos. Estos son

- $a_k^\dagger A_{nm}$  donde el átomo pasa del nivel  $m$  al nivel  $n$  (baja de nivel pues observemos se realiza con  $n < m$ ) creando un cuanto del modo  $k$  de radiación.
- $a_k A_{mn}$  donde el átomo pasa del nivel  $n$  al nivel  $m$  (sube de nivel) aniquilando un cuanto del modo  $k$  de radiación.

- $a_k^\dagger A_{mn}$  donde el átomo pasa del nivel  $n$  al nivel  $m$  creando un cuanto del modo  $k$  de radiación.
- $a_k A_{nm}$  donde el átomo pasa del nivel  $m$  al nivel  $n$  aniquilando un cuanto del modo  $k$  de radiación.

Especialmente los últimos dos casos (llamados *términos contra-rotantes*) violan la conservación de energía. Estos términos pueden eliminarse de la siguiente forma. Consideremos el esquema de interacción (consideremos la dependencia temporal de los operadores). En el producto de los operadores de la ecuación (1.26) tendremos

$$A_{mn}a_k^\dagger e^{i\hbar(\Omega_k+\omega_{nm})t} + A_{nm}a_k^\dagger e^{i\hbar(\Omega_k-\omega_{nm})t} + A_{mn}a_k e^{-i\hbar(\Omega_k-\omega_{nm})t} + A_{nm}a_k e^{-i\hbar(\Omega_k+\omega_{nm})t},$$

donde  $\Omega_k$  es la frecuencia del modo y  $\omega_{nm}$  es la frecuencia de transición entre el nivel  $|n\rangle$  y el  $|m\rangle$ . Cuando se tienen valores cercanos a la resonancia ( $\Omega_k \approx \omega_{nm}$ ) los valores con  $\Omega_k + \omega_{nm}$  pueden despreciarse pues oscilan rápidamente en el tiempo. Esta acción es llamada *aproximación de onda rotante* y bajo tal aproximación el término (1.26) toma la forma

$$H_{int} = \sum_k \sum_{n < m} \mu_{k,nm} (a_k A_{mn} + a_k^\dagger A_{nm}).$$

## 1.2. Procedimiento de acoplamiento directo

Como mencionamos en la introducción del capítulo, además de la descripción de la interacción radiación-materia basado en el término  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$  existe otro esquema que reside en el acoplamiento de un dipolo al campo eléctrico, y en esta sección nos enfocaremos a ella.

### 1.2.1. Motivación del acoplamiento directo

Recordemos que un átomo de hidrógeno consiste en un electrón y un protón separados por un vector  $\mathbf{r}$ . Esto induce un momento dipolar  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ .

Nuevamente recordemos la aproximación del dipolo. Al considerar longitudes de onda del campo electromagnético mucho mayores al tamaño del átomo podemos considerar al potencial  $\mathbf{A}$  como constante en la región atómica. Ya que el campo eléctrico está relacionado con el potencial vectorial podemos aproximar como constante al campo en la misma región; es decir

$$\mathbf{E}(0, t) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{r}_e, t) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t).$$

El dipolo en presencia del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  experimenta un potencial

$$H_{dipolo} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t); \quad (1.30)$$

por tanto el Hamiltoniano total del sistema átomo de hidrógeno y campo es

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(|\mathbf{r}|) - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + H_{rad} \\ &= H_{rad} + H_{atom} - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0, t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

### 1.2.2. Tratamiento cuántico para el Hamiltoniano $\tilde{H}$

Todo lo que sigue hará uso del desarrollo de la sección 1.1.4. Primeramente recalquemos la ecuación (1.17) en donde vemos la relación entre el campo eléctrico y el potencial vectorial. Tal relación conlleva a que el campo pueda ser expresado mediante ondas planas y su cuantización sea de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}, j} i\varepsilon_{\mathbf{k}, j} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, j} [a_{\mathbf{k}, j} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} - a_{\mathbf{k}, j}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}]. \quad (1.32)$$

Podemos usar el desarrollo de 1.1.4 para llegar a la ecuación (1.26), es decir,

$$\langle n | e\mathbf{r} | m \rangle = i\mathbf{D}_{nm},$$

con  $\mathbf{D}$  un vector real. Así nos es permitido expresar el operador de momento dipolar como

$$\mathbf{d} = \sum_{m \leq n} i\mathbf{D}_{nm} (A_{nm} - A_{mn}).$$

Tomemos en cuenta que las funciones de onda de estados estacionarios para el caso atómico tienen paridades bien definidas, por lo que los elementos de la diagonal son cero [19]

$$\langle n | \mathbf{r} | n \rangle = \int d^3r |\psi_n(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r} = 0.$$

Por tanto

$$\mathbf{d} = \sum_{m < n} i\mathbf{D}_{nm} (A_{nm} - A_{mn}). \quad (1.33)$$

De la ecuación (1.32) y (1.33) tenemos para el término de la interacción dipolar

$$H_{dipolo} = \sum_k \sum_{n < m} g_{k, nm} (a_k - a_k^\dagger) (A_{nm} - A_{mn}),$$

donde

$$g_{k, nm} = \varepsilon_{k, nm} \mathbf{D}_{nm} \cdot \mathbf{e}_k.$$

El Hamiltoniano total es

$$\tilde{H} = \hbar \sum_k \Omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_n E_n A_{nn} + \sum_k \sum_{n < m} g_{k, nm} (a_k - a_k^\dagger) (A_{nm} - A_{mn}). \quad (1.34)$$

Vemos los términos de de interacción encontrados mediante el acoplamiento mínimo (1.26) y el acoplamiento directo (1.34) difieren por una transformación canónica (por ejemplo  $a_k \rightarrow ia_k$ ,  $A_{nm} \rightarrow iA_{nm}$ ) por lo que ambas descripciones son equivalentes. Esto, considerando las aproximaciones expresadas en el desarrollo, enfatizando el desprecio al término diamagnético. Aún sin despreciar tal término se puede demostrar la equivalencia entre ambas descripciones [22].

### 1.3. Transiciones de fase en la interacción radiación-materia

Uno de los fenómenos importantes observados en los sistemas átomos-radiación es la existencia de transiciones de fases cuánticas.

Estas transiciones se presentan al variar algún parámetro físico a temperatura absoluta cero ( $0\text{ K}$ ) y describen cambios abruptos en la energía del estado base del sistema.

Para entender un poco este fenómeno, consideremos un Hamiltoniano  $H(g)$ . Para un sistema finito la energía del estado base generalmente varía de manera suave, como función analítica de  $g$  [23]. Una posibilidad de excepción ocurre cuando  $g$  acopla sólo una cantidad conservada

$$H(g) = H_0 + gH_1,$$

donde  $[H_0, H_1] = 0$ . En este caso  $H_0$  y  $H_1$  pueden diagonalizarse simultáneamente por lo que las eigenfunciones son independientes de  $g$  aún cuando los eigenvalores varíen con  $g$ . Esto permite que exista un cruce de niveles donde un estado excitado se convierte en el estado base del sistema a partir de un cierto valor  $g = g_c$ , creando un punto donde el estado base no sea función analítica de  $g$ .

Para el caso de un sistema cuyos número de componentes sea muy grande puede no presentarse un cruce de niveles, pero el comportamiento del estado base y el estado excitado pueden tender a ser no-analíticas en  $g = g_c$  al tomar el límite de las componentes como infinitas.

En particular para el caso de la interacción radiación-materia se hace presente una transición de un *régimen normal* a un *régimen superradiante* siendo la magnitud del acoplamiento campo-materia  $\mu_{k, nm}$  (1.27) el parámetro  $g$ . Mientras que en el régimen normal la razón de emisión de los átomos es proporcional a  $N$  (el número de átomos en el sistema) en el régimen superradiante es proporcional a  $N^2$  [24].

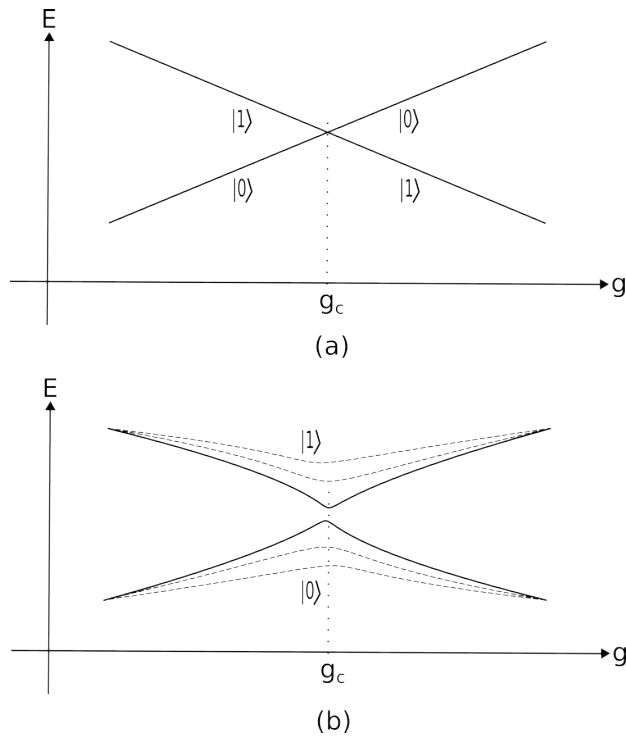


Figura 1.1: Transiciones de fase cuánticas (a) Para un sistema finito donde se observa un cruce entre niveles en  $g = g_c$ , en este caso entre el estado base y el primer estado excitado. (b) Para un sistema con un número de componentes muy grande. Aunque no exista un cruce de niveles, puede haber un punto no analítico ( $g = g_c$ ) cuando el número de componentes tiende a infinito (línea continua).

## Capítulo 2

# Estudio del sistema atómico de dos niveles

En el estudio de la interacción entre átomos y radiación, el sistema más simple involucra átomos de dos niveles interactuando con un modo del campo electromagnético. Aunque en la naturaleza no se encuentren sistemas atómicos de dos niveles (o de un número finito) es posible inducir con muy buena aproximación este tipo de comportamiento a través de técnicas como el bombeo óptico [25].

Aunque una realización experimental de los términos contra-rotantes en el Hamiltoniano sea imposible [26] existen propuestas experimentales para la observación de las transiciones de fase en el modelo de Dicke [27]. Recientemente, observaciones de transiciones de Dicke se han reportado en gases superfluidos [28]. En este capítulo nos avocaremos a resolver el modelo a través de la diagonalización del Hamiltoniano en el límite termodinámico y observar las transiciones de fase del sistema en los niveles más bajos de energía.

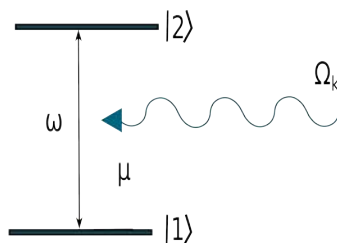


Figura 2.1: Esquema de un átomo de dos niveles ( $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ ) interactuando con un modo de radiación  $\Omega_k$ . Se tiene un acoplamiento entre el campo y el átomo de valor  $\mu$ .

## 2.1. Tratamiento del Hamiltoniano de Dicke en el límite termodinámico

Consideremos un sistema de  $N$  átomos de 2 niveles, todos con la misma frecuencia atómica  $\omega$ . El sistema se encuentra en una cavidad con un solo modo del campo electromagnético de frecuencia  $\Omega_k$ . Partiendo del modelo de Dicke, tenemos el Hamiltoniano ( $\hbar = 1$ )

$$\hat{H} = \Omega_k a^\dagger a + \omega J_z + \frac{\mu}{\sqrt{N}} (J_+ + J_-) (a^\dagger + a), \quad (2.1)$$

para el cual  $\mu$  corresponde a la constante de acoplamiento. El operador  $J_z$  es componente del operador de momento angular mientras que los operadores  $J_+$ ,  $J_-$ , operadores escalera, están dados por

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y$$

donde  $J_x$  y  $J_y$  son los otros dos componentes del operador  $\mathbf{J}$  [29]. Las componentes satisfacen las reglas de conmutación

$$[J_k, J_l] = i\varepsilon_{klm} J_m$$

No existe una solución analítica exacta para el Hamiltoniano (2.1) con un número finito  $N$  de partículas, pero se puede tratar el problema en el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ), cosa que se hará en este capítulo siguiendo el desarrollo mostrado en [11].

Los operadores colectivos atómicos  $\{J_\pm, J_z\}$  pueden describirse mediante operadores bosónicos  $\{b, b^\dagger\}$ , los cuales satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$[b, b] = 0, \quad [b^\dagger, b^\dagger] = 0, \quad [b, b^\dagger] = 1.$$

Tal descripción es realizada mediante la transformación de Holstein-Primakoff [31] realizada de la forma

$$J_+ = b^\dagger \sqrt{N - b^\dagger b}, \quad J_- = \left( \sqrt{N - b^\dagger b} \right) b, \quad J_z = b^\dagger b - \frac{N}{2},$$

recalcando que  $N$  denota el número de átomos que se encuentran en el sistema. Por lo tanto el Hamiltoniano de (2.1) queda como

$$\hat{H} = \Omega_k a^\dagger a + \omega \left( b^\dagger b - \frac{N}{2} \right) + \frac{\mu}{\sqrt{N}} \left\{ b^\dagger \sqrt{N - b^\dagger b} + \left( \sqrt{N - b^\dagger b} \right) b \right\} (a^\dagger + a). \quad (2.2)$$

Para facilitar el estudio de las transiciones de fase en el sistema consideremos una alteración del Hamiltoniano a través de la perturbación de los operadores bosónicos (atómicos y de radiación) [30]. Tal alteración nos ayudará a eliminar futuros términos con lo cual la diagonalización será más fácil.

$$a^\dagger \rightarrow a^\dagger + \alpha \sqrt{N}, \quad (2.3)$$

$$b^\dagger \rightarrow b^\dagger + \beta \sqrt{N}, \quad (2.4)$$



donde hemos tomado los coeficientes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . De esta forma los operadores  $J_+, J_-$  se transforman como

$$\begin{aligned}
 J_+ &\rightarrow \left(b^\dagger + \beta\sqrt{N}\right) \sqrt{N - b^\dagger b - \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger) - \beta^2 N} \\
 &= \sqrt{N - \beta^2 N} \left(b^\dagger + \beta\sqrt{N}\right) \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{N - \beta^2 N}} \\
 &= \sqrt{N^*} \left(b^\dagger + \beta\sqrt{N}\right) \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{N^*}}, \\
 J_- &\rightarrow \left(\sqrt{N - b^\dagger b - \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger) - \beta^2 N}\right) \left(b + \beta\sqrt{N}\right) \\
 &= \sqrt{N - \beta^2 N} \left(\sqrt{1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{N - \beta^2 N}}\right) \left(b + \beta\sqrt{N}\right) \\
 &= \sqrt{N^*} \left(\sqrt{1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{N^*}}\right) \left(b + \beta\sqrt{N}\right),
 \end{aligned}$$

donde  $N^* \equiv N(1 - \beta^2)$ . Sustituyendo las transformaciones anteriores en la expresión (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \Omega_k \left(a^\dagger + \alpha\sqrt{N}\right) \left(a + \alpha\sqrt{N}\right) + \omega \left(b^\dagger + \beta\sqrt{N}\right) \left(b + \beta\sqrt{N}\right) - \frac{N\omega}{2} \\
 &\quad + \mu \sqrt{\frac{N^*}{N}} \left\{ b^\dagger \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{N^*}} + \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{N^*}} b \right. \\
 &\quad \left. + 2\beta\sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{N^*}} \right\} \left(a + a^\dagger + 2\alpha\sqrt{N}\right).
 \end{aligned}$$

Tomando el límite termodinámico en la expresión anterior podemos quedarnos hasta orden cero en  $N$ , logrando un Hamiltoniano efectivo  $\hat{H}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^{(2)} &= \Omega_k \left(a^\dagger + \alpha\sqrt{N}\right) \left(a + \alpha\sqrt{N}\right) + \omega \left(b^\dagger + \beta\sqrt{N}\right) \left(b + \beta\sqrt{N}\right) - \frac{N\omega}{2} \\
 &\quad + \mu \sqrt{\frac{N^*}{N}} \left\{ b^\dagger \left(1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{2N^*}\right) + \left(1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{2N^*}\right) b \right. \\
 &\quad \left. + 2\beta\sqrt{N} \left(1 - \frac{b^\dagger b + \beta\sqrt{N}(b + b^\dagger)}{2N^*}\right) \right\} \left(a + a^\dagger + 2\alpha\sqrt{N}\right).
 \end{aligned}$$

Para continuar expandamos lo obtenido y, teniendo nuevamente en cuenta el límite

termodinámico, eliminamos los términos con potencias de  $N$  en el denominador

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & \Omega_k \left[ a^\dagger a + \alpha \sqrt{N} (a^\dagger + a) + N\alpha^2 \right] + \omega \left[ b^\dagger b + \beta \sqrt{N} (b^\dagger + b) + N\beta^2 \right] \\ & - \frac{N\omega}{2} + \mu \left[ -4\alpha\beta \sqrt{\frac{N}{N^*}} b^\dagger b + 2\sqrt{N^*}\beta(a + a^\dagger) + 2\alpha \left( \sqrt{N^*} - \frac{N\beta^2}{\sqrt{N^*}} \right) \times \right. \\ & \times (b + b^\dagger) + \left. \left( \sqrt{\frac{N^*}{N}} - \beta^2 \sqrt{\frac{N}{N^*}} \right) (b + b^\dagger)(a + a^\dagger) - \alpha\beta \sqrt{\frac{N}{N^*}} (b^2 + (b^\dagger)^2) \right. \\ & \left. + 4\alpha\beta \sqrt{NN^*} \right]. \end{aligned}$$

Para mayor claridad agrupemos en términos de los operadores bosónicos  $\{a, b\}$

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & \Omega_k a^\dagger a + \left[ \omega - 4\mu\alpha\beta \sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] b^\dagger b + \left[ \Omega_k \alpha \sqrt{N} + 2\mu\beta \sqrt{N^*} \right] (a + a^\dagger) \\ & + \left[ \omega\beta \sqrt{N} + 2\mu\alpha \left( \sqrt{N^*} - \frac{N\beta^2}{\sqrt{N^*}} \right) \right] (b + b^\dagger) + \mu \left[ \sqrt{\frac{N^*}{N}} - \beta^2 \sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] \times \\ & \times (b + b^\dagger)(a + a^\dagger) - \left[ \mu\alpha\beta \sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] (b^2 + (b^\dagger)^2) + \left[ \Omega_k N\alpha^2 + \omega N\beta^2 - \right. \\ & \left. \frac{N\omega}{2} + 4\mu\alpha\beta \sqrt{NN^*} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Al ser  $\alpha, \beta$  parámetros libres, los podemos escoger de tal forma que los términos lineales en los operadores bosónicos desaparezcan, con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Omega_k \alpha \sqrt{N} + 2\mu\beta \sqrt{N^*} = 0, \quad (2.6)$$

$$\omega\beta \sqrt{N} + 2\mu\alpha \sqrt{N^*} - 2\mu\alpha \frac{N\beta^2}{\sqrt{N^*}} = 0. \quad (2.7)$$

A primera vista podemos identificar la solución trivial  $\alpha, \beta = 0$ . La solución no trivial para el sistema es

$$\alpha = -\frac{\mu}{\Omega_k} \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega_k \omega}{4\mu^2} \right)^2}, \quad (2.8)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Omega_k \omega}{4\mu^2} \right)}. \quad (2.9)$$

Por tanto, si  $\frac{\Omega_k \omega}{4\mu^2} \geq 1$  tendremos para el sistema el caso trivial con  $\alpha, \beta = 0$  que corresponde al régimen radiante, de otro modo tendremos la solución no trivial correspondiente al caso superradiante. De todo esto se tiene que el punto crítico de la

transición en

$$\mu_c = \sqrt{\frac{\Omega_k \omega}{4}}. \quad (2.10)$$

Para la región superradiante, el Hamiltoniano (2.5) toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & \Omega_k a^\dagger a + \left[ \frac{4\mu^2}{\Omega_k} \right] b^\dagger b + \left[ \frac{\Omega_k \omega}{4} \sqrt{\frac{8}{4\mu^2 + \Omega_k \omega}} \right] (b + b^\dagger)(a + a^\dagger) \\ & + \left[ \frac{\mu^2}{\Omega_k} \left( 1 - \frac{\Omega_k \omega}{4\mu^2} \right) \right] (b^2 + (b^\dagger)^2) - N \left[ \frac{\mu^2}{\Omega_k} + \frac{\Omega_k \omega^2}{16\mu^2} \right]; \end{aligned}$$

mientras que en la región normal la forma del Hamiltoniano efectivo  $\hat{H}^{(2)}$  será

$$\hat{H}^{(2)} = \Omega_k a^\dagger a + \omega b^\dagger b + \mu(b + b^\dagger)(a + a^\dagger) - \frac{N\omega}{2}.$$

Es necesario recalcar lo siguiente para el tratamiento del caso de tres niveles. El sistema de ecuaciones (2.6) y (2.7) puede ser obtenido al diferenciar la parte constante del  $\hat{H}^{(2)}$  (expresión (2.5)) respecto a  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente e igualando a cero. Por tanto buscamos puntos críticos (en su sentido matemático) para  $\alpha$  y  $\beta$ . Nuestro propósito es buscar valores que minimicen la parte constante de  $\hat{H}^{(2)}$  ya que está relacionada con la energía base del sistema.

## 2.2. Transformaciones de Bogoliubov para el Hamiltoniano efectivo $\hat{H}^{(2)}$

En esta sección se mostrará una metodología diferente a lo realizado en [11] para diagonalización del Hamiltoniano (2.5) a través de transformaciones de Bogoliubov.

Las transformaciones de Bogoliubov son transformaciones lineales canónicas (isomorfismos) entre conjuntos de operadores bosónicos [32]. Tales transformaciones han sido introducidas también para operadores fermiónicos [33].

Definamos los operadores  $c_1, c_1^\dagger, c_2$  y  $c_2^\dagger$ , llamados operadores de cuasi-partículas, definidas como combinación lineal de los operadores  $a, a^\dagger, b$  y  $b^\dagger$ . Debido a que tal relación es invertible, podemos expresar los operadores  $a, a^\dagger, b$  y  $b^\dagger$  como combinación lineal de los operadores de cuasi-partículas. Así propongamos que tales relaciones sean

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \pi_1 c_1^\dagger + \pi_2 c_2^\dagger, \quad (2.11)$$

$$a^\dagger = \gamma_1 c_1^\dagger + \gamma_2 c_2^\dagger + \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2, \quad (2.12)$$

$$b = \gamma_3 c_1 + \gamma_4 c_2 + \pi_3 c_1^\dagger + \pi_4 c_2^\dagger, \quad (2.13)$$

$$b^\dagger = \gamma_3 c_1^\dagger + \gamma_4 c_2^\dagger + \pi_3 c_1 + \pi_4 c_2, \quad (2.14)$$

donde por comodidad escojemos los parámetros  $\gamma_i, \pi_i \in \mathbb{R}$ . Dado que deseamos que los operadores definidos sean operadores de creación y aniquilación deberán satisfacer las relaciones de conmutación

$$\left[ c_i, c_j \right] = 0, \quad \left[ c_i^\dagger, c_j^\dagger \right] = 0, \quad \left[ c_i, c_j^\dagger \right] = \delta_{ij}. \quad (2.15)$$

Aprovechando las reglas de conmutación de los operadores  $c_i, c_i^\dagger$  en los siguientes conmutadores obtendremos

$$\begin{aligned}
 [a, a^\dagger] &= [\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \pi_1 c_1^\dagger + \pi_2 c_2^\dagger, \gamma_1 c_1^\dagger + \gamma_2 c_2^\dagger + \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2] \\
 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2, \\
 [b, b^\dagger] &= [\gamma_3 c_1 + \gamma_4 c_2 + \pi_3 c_1^\dagger + \pi_4 c_2^\dagger, \gamma_3 c_1^\dagger + \gamma_4 c_2^\dagger + \pi_3 c_1 + \pi_4 c_2] \\
 &= \gamma_3^2 + \gamma_4^2 - \pi_3^2 - \pi_4^2, \\
 [a, b] &= [\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \pi_1 c_1^\dagger + \pi_2 c_2^\dagger, \gamma_3 c_1^\dagger + \gamma_4 c_2^\dagger + \pi_3 c_1 + \pi_4 c_2] \\
 &= \gamma_1 \pi_3 + \gamma_2 \pi_4 - \gamma_3 \pi_1 - \gamma_4 \pi_2, \\
 [a, b^\dagger] &= [\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \pi_1 c_1^\dagger + \pi_2 c_2^\dagger, \gamma_3 c_1^\dagger + \gamma_4 c_2^\dagger + \pi_3 c_1 + \pi_4 c_2] \\
 &= \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_4 - \pi_1 \pi_3 - \pi_2 \pi_4.
 \end{aligned}$$

Ya que los operadores  $a, a^\dagger, b$  y  $b^\dagger$  satisfacen

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [b, b^\dagger] = 1, \quad [a, b^\dagger] = 0, \quad [a, b] = 0,$$

al igualar las relaciones de conmutación obtendremos 4 ecuaciones

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2 = 1, \quad (2.16)$$

$$\gamma_3^2 + \gamma_4^2 - \pi_3^2 - \pi_4^2 = 1, \quad (2.17)$$

$$\gamma_1 \pi_3 + \gamma_2 \pi_4 - \gamma_3 \pi_1 - \gamma_4 \pi_2 = 0, \quad (2.18)$$

$$\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_4 - \pi_1 \pi_3 - \pi_2 \pi_4 = 0. \quad (2.19)$$

Para determinar los coeficientes  $\gamma_i, \pi_i$  necesitamos 4 ecuaciones más. Éstos los podemos encontrar al considerar nuestro Hamiltoniano. Primeramente, por simplicidad, representemos los coeficientes del Hamiltoniano (2.5) de la forma

$$\hat{H}^{(2)} = h_1 a^\dagger a + h_2 b^\dagger b + h_3 (b + b^\dagger)(a + a^\dagger) + h_4 (b^2 + (b^\dagger)^2) + h_5. \quad (2.20)$$

Tomando en cuenta el comportamiento de los coeficientes  $h_i$ , en la región radiante y superradiante, tendremos

$$h_1 = \Omega_k \quad (2.21)$$

$$h_2 = \begin{cases} \omega & \text{si } \mu \leq \mu_c \\ \frac{4\mu^2}{\Omega_k} & \text{si } \mu > \mu_c \end{cases} \quad (2.22)$$

$$h_3 = \begin{cases} \mu & \text{si } \mu \leq \mu_c \\ \frac{\Omega_k \mu}{4} \sqrt{\frac{8}{4\mu^2 + \Omega_k \omega}} & \text{si } \mu > \mu_c \end{cases} \quad (2.23)$$

$$h_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \leq \mu_c \\ \frac{\mu^2}{\Omega_k} \left(1 - \frac{\Omega_k \omega}{4\mu^2}\right) & \text{si } \mu > \mu_c \end{cases} \quad (2.24)$$

$$h_5 = \begin{cases} -\frac{N\omega}{2} & \text{si } \mu \leq \mu_c \\ -N \left[ \frac{\mu^2}{\Omega_k} + \frac{\Omega_k \omega^2}{16\mu^2} \right] & \text{si } \mu > \mu_c \end{cases} \quad (2.25)$$

Sustituyendo las expresiones (2.11), (2.12), (2.13) y (2.14) en la expresión (2.20) y agrupando en términos de los operadores de cuasi-partículas obtenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^{(2)} = & \left[ 4\gamma_3\pi_3h_4 + h_1(\gamma_1^2 + \pi_1^2) + h_2(\gamma_3^2 + \pi_3^2) + 2h_3(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\pi_3 + \gamma_3\pi_1 + \pi_1\pi_3) \right] \times \\
 & \times c_1^\dagger c_1 + \left[ 4\gamma_4\pi_4h_4 + h_1(\gamma_2^2 + \pi_2^2) + h_2(\gamma_4^2 + \pi_4^2) + 2h_3(\gamma_2\gamma_4 + \gamma_2\pi_4 + \gamma_4\pi_2 + \right. \\
 & \left. \pi_2\pi_4) \right] c_2^\dagger c_2 + \left[ h_1(\gamma_1\gamma_2 + \pi_1\pi_2) + h_2(\gamma_3\gamma_4 + \pi_3\pi_4) + h_3(\gamma_1\gamma_4 + \gamma_1\pi_4 + \gamma_2\gamma_3 \right. \\
 & \left. + \gamma_2\pi_3 + \gamma_3\pi_2 + \gamma_4\pi_1 + \pi_1\pi_4 + \pi_2\pi_3) + 2h_4(\gamma_3\pi_4 + \gamma_4\pi_3) \right] (c_2^\dagger c_1 + c_1^\dagger c_2) + \\
 & + \left[ h_1(\gamma_1\pi_2 + \gamma_2\pi_1) + h_2(\gamma_3\pi_4 + \gamma_4\pi_3) + h_3(\gamma_1\gamma_4 + \gamma_1\pi_4 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\pi_3 + \gamma_3\pi_2 \right. \\
 & \left. + \gamma_4\pi_1 + \pi_1\pi_4 + \pi_2\pi_3) + 2h_2(\gamma_3\gamma_4 + \pi_3\pi_4) \right] (c_1c_2 + c_1^\dagger c_2^\dagger) + \left[ \gamma_1\pi_1h_1 + \right. \\
 & \left. \gamma_3\pi_3h_2 + h_3(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\pi_3 + \gamma_3\pi_1 + \pi_1\pi_3) + h_4(\gamma_3^2 + \pi_3^2) \right] (c_1^2 + (c_1^\dagger)^2) + \\
 & \left[ \gamma_2\pi_2h_1 + \gamma_4\pi_4h_2 + h_3(\gamma_2\gamma_4 + \gamma_2\pi_4 + \gamma_4\pi_2 + \pi_2\pi_4) + h_4(\gamma_4^2 + \pi_4^2) \right] (c_2^2 + \\
 & (c_2^\dagger)^2) + h_5 + h_3(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\pi_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_2\pi_4 + \gamma_3\pi_1 + \gamma_4\pi_2 + \pi_1\pi_3 + \pi_2\pi_4) + \\
 & 2h_4(\gamma_3\pi_3 + \gamma_4\pi_4) + h_1(\pi_1^2 + \pi_2^2) + h_2(\pi_3^2 + \pi_4^2).
 \end{aligned}$$

Siendo los  $\gamma_i, \pi_i$  coeficientes a definir los podemos elegir de forma que solo tengamos los términos  $c_1^\dagger c_1, c_2^\dagger c_2$  y constante. Para que esto ocurra debemos de tener

$$\begin{aligned}
 h_1(\gamma_1\gamma_2 + \pi_1\pi_2) + h_2(\gamma_3\gamma_4 + \pi_3\pi_4) + h_3(\gamma_1\gamma_4 + \gamma_1\pi_4 + \gamma_2\gamma_3 + \\
 \gamma_2\pi_3 + \gamma_3\pi_2 + \gamma_4\pi_1 + \pi_1\pi_4 + \pi_2\pi_3) + 2h_4(\gamma_3\pi_4 + \gamma_4\pi_3) = 0, \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_1(\gamma_1\pi_2 + \gamma_2\pi_1) + h_2(\gamma_3\pi_4 + \gamma_4\pi_3) + h_3(\gamma_1\gamma_4 + \gamma_1\pi_4 + \gamma_2\gamma_3 + \\
 \gamma_2\pi_3 + \gamma_3\pi_2 + \gamma_4\pi_1 + \pi_1\pi_4 + \pi_2\pi_3) + 2h_4(\gamma_3\gamma_4 + \pi_3\pi_4) = 0, \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_1\pi_1h_1 + \gamma_3\pi_3h_2 + h_3(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\pi_3 + \gamma_3\pi_1 + \pi_1\pi_3) + h_4(\gamma_3^2 + \pi_3^2) = 0, \quad (2.28)$$

$$\gamma_2\pi_2h_1 + \gamma_4\pi_4h_2 + h_3(\gamma_2\gamma_4 + \gamma_2\pi_4 + \gamma_4\pi_2 + \pi_2\pi_4) + h_4(\gamma_4^2 + \pi_4^2) = 0. \quad (2.29)$$

Lo anterior nos provee de 4 ecuaciones más a fin de determinar los coeficientes para la transformación de Bogoliubov. Como los coeficientes que acompañan a los terminos  $c_i^\dagger c_i$  son las energías de excitación definamos

$$\epsilon_1 \equiv 4\gamma_3\pi_3h_4 + h_1(\gamma_1^2 + \pi_1^2) + h_2(\gamma_3^2 + \pi_3^2) + 2h_3(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\pi_3 + \gamma_3\pi_1 + \pi_1\pi_3), \quad (2.30)$$

$$\epsilon_2 \equiv 4\gamma_4\pi_4h_4 + h_1(\gamma_2^2 + \pi_2^2) + h_2(\gamma_4^2 + \pi_4^2) + 2h_3(\gamma_2\gamma_4 + \gamma_2\pi_4 + \gamma_4\pi_2 + \pi_2\pi_4). \quad (2.31)$$

Propongamos los coeficientes

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_1\epsilon_1}}(h_1 + \epsilon_1), & \pi_1 &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_1\epsilon_1}}(h_1 - \epsilon_1), \\ \gamma_2 &= \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_1\epsilon_2}}(h_1 + \epsilon_2), & \pi_2 &= \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_1\epsilon_2}}(h_1 - \epsilon_2), \\ \gamma_3 &= \frac{-\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_2\epsilon_1}}(h_2 + \epsilon_1), & \pi_3 &= \frac{-\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_2\epsilon_1}}(h_2 - \epsilon_1), \\ \gamma_4 &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_2\epsilon_2}}(h_2 + \epsilon_2), & \pi_4 &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_2\epsilon_2}}(h_2 - \epsilon_2).\end{aligned}$$

Estos coeficientes satisfacen las relaciones (2.16), (2.17), (2.18) y (2.19). Por otro lado de las ecuaciones (2.28) y (2.29) obtenemos las siguientes expresiones para las energías de excitación en términos de los coeficientes  $h_i$  y del ángulo  $\gamma$  de la forma

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2h_4}{h_2}\text{sen}^2(\gamma)\right)\epsilon_1^2 &= 2h_4h_2\text{sen}^2(\gamma) + h_1^2\cos^2(\gamma) + h_2^2\text{sen}^2(\gamma) \\ &\quad - 4h_3\text{sen}(\gamma)\cos(\gamma)\sqrt{h_1h_2},\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2h_4}{h_2}\cos^2(\gamma)\right)\epsilon_2^2 &= 2h_4h_2\cos^2(\gamma) + h_1^2\text{sen}^2(\gamma) + h_2^2\cos^2(\gamma) \\ &\quad + 4h_3\text{sen}(\gamma)\cos(\gamma)\sqrt{h_1h_2}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Las mismas relaciones se obtienen de las definiciones (2.30) y (2.31) respectivamente.

Lo único que nos falta determinar es el valor de  $\gamma$ . Esto lo podemos hacer fácilmente sumando las ecuaciones (2.26) y (2.27) obteniendo la relación

$$\text{sen}(\gamma)\cos(\gamma)(h_1^2 - h_2^2) - 2h_4h_2\text{sen}(\gamma)\cos(\gamma) + 2h_3\sqrt{h_1h_2}(\cos^2(\gamma) - \text{sen}^2(\gamma)) = 0,$$

es decir,

$$2h_3\sqrt{h_1h_2}\tan^2(\gamma) + (2h_4h_2 + h_2^2 - h_1^2)\tan(\gamma) - 2h_3\sqrt{h_1h_2} = 0.$$

Al tener una ecuación de segundo grado para  $\tan(\gamma)$  tendremos la solución

$$\tan(\gamma) = \frac{h_1^2 - h_2^2 - 2h_4h_2 \pm \sqrt{(2h_4h_2 + h_2^2 - h_1^2)^2 + 16h_3^2h_1h_2}}{4h_3\sqrt{h_1h_2}}.$$

Cabe mencionar que la elección del signo en la ecuación anterior solo intercambia el comportamiento entre  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , por tanto para lo siguiente tomaremos el signo positivo

$$\tan(\gamma) = \frac{h_1^2 - h_2^2 - 2h_4h_2 + \sqrt{(2h_4h_2 + h_2^2 - h_1^2)^2 + 16h_3^2h_1h_2}}{4h_3\sqrt{h_1h_2}}.\tag{2.34}$$

Podemos reescribir las expresiones (2.32) y (2.33) de manera que se expresen por

medio de  $\tan(\gamma)$

$$\epsilon_1^2 = \frac{2h_4h_2\tan^2(\gamma) + h_1^2 + h_2^2\tan^2(\gamma) - 4h_3\tan(\gamma)\sqrt{h_1h_2}}{1 + \tan^2(\gamma) - \frac{2h_4}{h_2}\tan^2(\gamma)}, \quad (2.35)$$

$$\epsilon_2^2 = \frac{2h_4h_2(\gamma) + h_1^2\tan^2(\gamma) + h_2^2 + 4h_3\tan(\gamma)\sqrt{h_1h_2}}{1 + \tan^2(\gamma) - \frac{2h_4}{h_2}}. \quad (2.36)$$

Por todo lo anterior hemos podido definir el Hamiltoniano  $\hat{H}^{(2)}$  como

$$\hat{H}^{(2)} = \epsilon_1 c_1^\dagger c_1 + \epsilon_2 c_2^\dagger c_2 + \epsilon_0. \quad (2.37)$$

La importancia de la diagonalización del Hamiltoniano radica en que podemos usar las eigenfunciones de los operadores  $c_1^\dagger c_1, c_2^\dagger c_2$  para obtener las eigenfunciones del Hamiltoniano y, así, tener los estados de energía y los observables que deriven de ella. En la expresión anterior denotamos como  $\epsilon_0$  el nuevo termino constante del Hamiltoniano el cual representa la energía base del sistema, definido de la forma

$$\begin{aligned} \epsilon_0 = & h_6 + h_3\sqrt{h_1h_2}\text{sen}(\gamma)\text{cos}(\gamma)\left[\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right] + \frac{h_4}{2h_2}\left[\frac{h_2^2 - \epsilon_1^2}{\epsilon_1}\right]\text{sen}^2(\gamma) + \\ & \frac{h_4}{2h_2}\left[\frac{h_2^2 - \epsilon_2^2}{\epsilon_2}\right]\text{cos}^2(\gamma) + \left[\frac{(h_1 - \epsilon_1)^2}{\epsilon_1} + \frac{(h_2 - \epsilon_2)^2}{\epsilon_2}\right]\frac{\text{cos}^2(\gamma)}{4} + \\ & \left[\frac{(h_1 - \epsilon_2)^2}{\epsilon_2} + \frac{(h_2 - \epsilon_1)^2}{\epsilon_1}\right]\frac{\text{sen}^2(\gamma)}{4}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

### 2.3. Cálculo de algunos observables

Consideremos el caso más simple en donde el sistema se encuentra en el estado base de los operadores  $c_1$  y  $c_2$ , en decir, tomando los estados  $|0_1\rangle$  y  $|0_2\rangle$  tal que  $c_1|0\rangle = 0$  y  $c_2|0\rangle = 0$ , construimos el estado producto  $|0\rangle = |0_2\rangle|0_1\rangle$ .

Primeramente tendremos que la energía del estado base será

$$\langle 0|\hat{H}^{(2)}|0\rangle = \epsilon_0. \quad (2.39)$$

Para calcular el promedio de fotones en la cavidad recordemos la ecuación (2.3). Lo que nos interesa calcular es el valor usando los operadores de antes de la transformación. Abusando de la notación tendremos

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a \rangle & = \langle (a^\dagger + \alpha\sqrt{N})(a + \alpha\sqrt{N}) \rangle = \langle a^\dagger a \rangle + N\alpha^2 \\ & = \langle 0|(\gamma_1 c_1^\dagger + \gamma_2 c_2^\dagger + \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2)(\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \pi_1 c_1^\dagger + \pi_2 c_2^\dagger)|0\rangle + N\alpha^2 \\ & = \pi_1^2 \langle 0_1|c_1 c_1^\dagger|0_1\rangle + \pi_2^2 \langle 0_2|c_2 c_2^\dagger|0_2\rangle + N\alpha^2 = \pi_1^2 + \pi_2^2 + N\alpha^2 \\ & = \frac{\text{cos}^2(\gamma)}{4h_1\epsilon_1}(h_1 - \epsilon_1)^2 + \frac{\text{sen}^2(\gamma)}{4h_1\epsilon_2}(h_1 - \epsilon_2)^2 + N\alpha^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Otro de los observables que nos interesa es el promedio de excitaciones dado por el promedio de  $J_z$ . Siguiendo el razonamiento para el caso del promedio de fotones obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle J_z \rangle &= \langle b^\dagger b \rangle - \frac{N}{2} = \langle (b^\dagger + \beta\sqrt{N})(b + \beta\sqrt{N}) \rangle - \frac{N}{2} = \langle b^\dagger b \rangle + N\beta^2 - \frac{N}{2} \\
 &= \langle 0 | (\gamma_3 c_1^\dagger + \gamma_4 c_2^\dagger + \pi_3 c_1 + \pi_4 c_2) (\gamma_3 c_1 + \gamma_4 c_2 + \pi_3 c_1^\dagger + \pi_4 c_2^\dagger) | 0 \rangle + N\beta^2 - \frac{N}{2} \\
 &= \pi_4^2 + \pi_3^2 + N\beta^2 - \frac{N}{2} \\
 &= \frac{\cos^2(\gamma)}{4h_2\epsilon_2} (h_2 - \epsilon_2)^2 + \frac{\sin^2(\gamma)}{4h_2\epsilon_1} (h_2 - \epsilon_1)^2 + N\beta^2 - \frac{N}{2}. \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

## 2.4. Soluciones para un caso particular

Consideremos el caso particular  $\Omega_k = \omega = 1$ . En la Figura 2.2 observamos el comportamiento de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  donde se aprecia la transición a partir del punto crítico  $\mu_c = 0,5$ . Las energías de excitación mostradas en la Figura 2.2 reproducen lo encontrado en [11, 26]. El comportamiento de la energía base y del promedio de fotones también se asemeja con lo trabajado en [11] al igual que con el uso de estados atómicos coherentes descritos en [34] pero se encuentra un comportamiento anómalo (una singularidad) cerca del punto crítico  $\mu_c$ . Este comportamiento ha sido reportado para el Hamiltoniano de Lipkin usando el mismo desarrollo mostrado [35] y se debe al mal comportamiento de la transformación truncada de Holstein-Primakoff cerca de la transición de fase.

Recalquemos de la Figura 2.3 el hecho que  $\epsilon_1$  es el de menor energía. Por tanto el primer estado excitado del sistema es  $|1\rangle = |0_2\rangle|1_1\rangle$  con la energía correspondiente  $E_1 = \epsilon_1 + \epsilon_0$ . Así el gap entre la energía base del sistema y la energía del primer estado excitado esta dado por  $\epsilon_1$ . Observando el comportamiento de  $\epsilon_1$  vemos que no se hace negativo sino que llega a su mínima expresión ( $\epsilon_1 = 0$ ) en el punto crítico, es decir, no hay un cruce entre niveles.



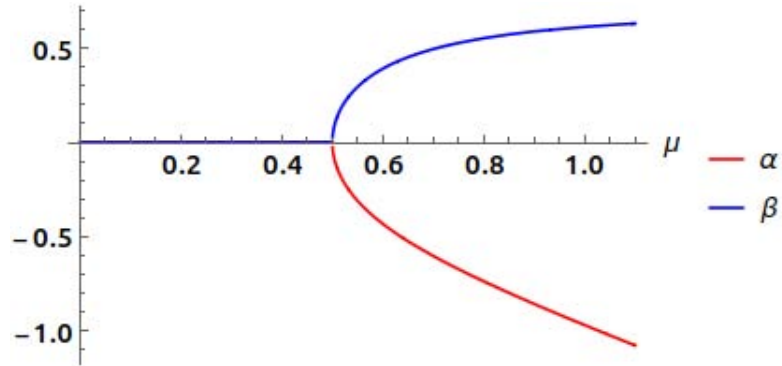


Figura 2.2: Comportamiento de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  como función de  $\mu$ . Se ha calculado para los valores  $\Omega_k = \omega = 1$ . Se observa el punto crítico en  $\mu_c = 0,5$ .

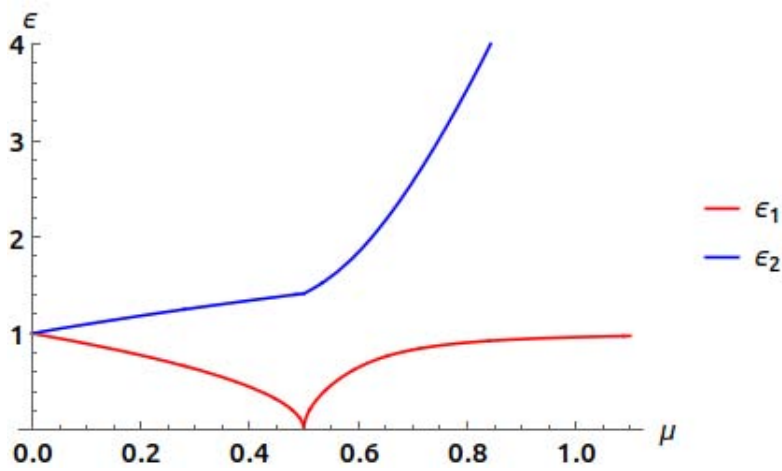


Figura 2.3: Energías de excitación en el límite termodinámico como función de  $\mu$ . Se ha usado el caso de resonancia  $\Omega_k = \omega = 1$ . Se observa la transición de fase en  $\mu_c = 0,5$  y que  $\epsilon$  es el término de menor energía, siendo igual al gap entre la energía base y la energía del primer estado excitado.

## 2.4. SOLUCIONES PARA UN CASO PARTICULAR

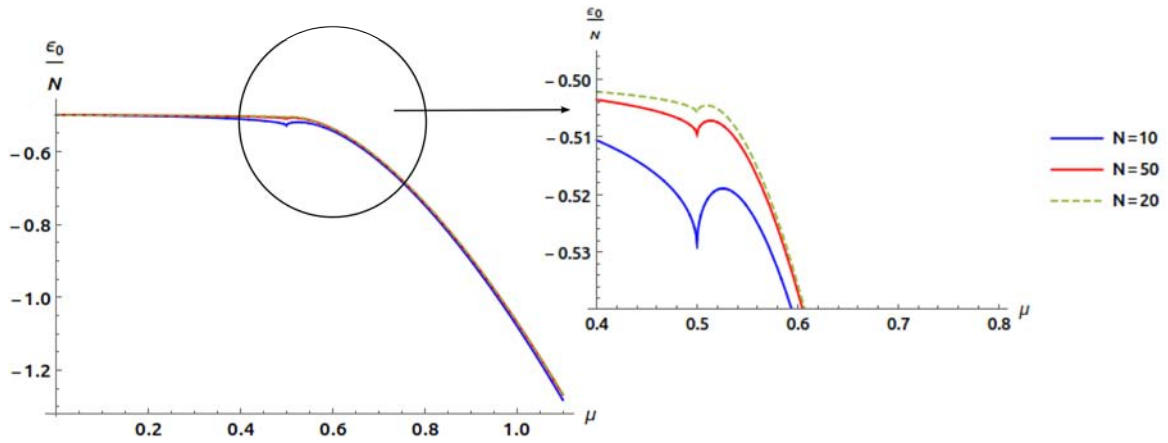


Figura 2.4: Energía del estado base en el límite termodinámico como función de  $\mu$ . Se ha usado el caso de resonancia  $\Omega_k = \omega = 1$ , usando valores para  $N$ , el número de átomos, de 10, 30 y 50. Se observa la transición de fase en  $\mu_c = 0,5$  y un comportamiento asintótico al incrementar  $N$ .

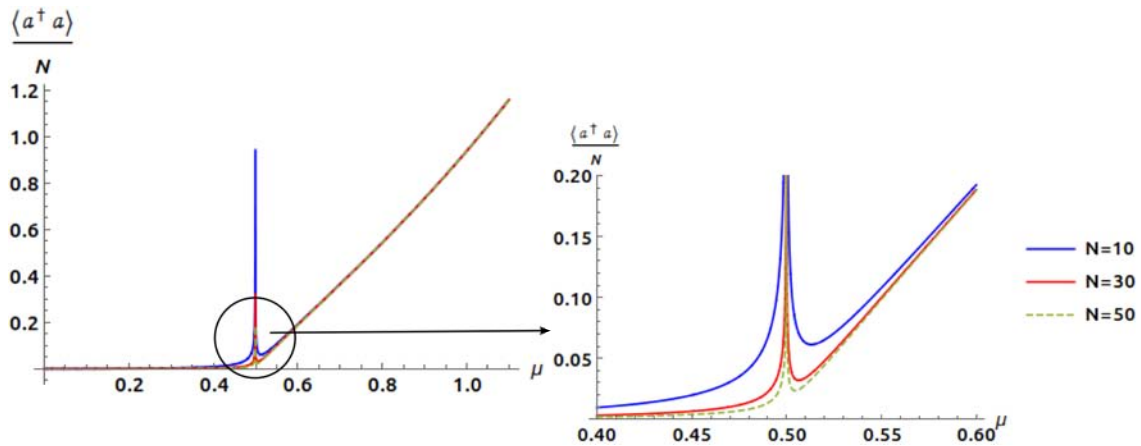


Figura 2.5: Comportamiento del valor promedio de fotones por átomo en el límite termodinámico como función de  $\mu$ . Se ha usado el caso de resonancia  $\Omega_k = \omega = 1$ . Se observa la transición de fase en  $\mu_c = 0,5$ . Cerca del punto crítico se observa la singularidad debido al mal comportamiento de la aproximación cerca del punto crítico el cual tiende a desaparecer al incrementarse  $N$ .

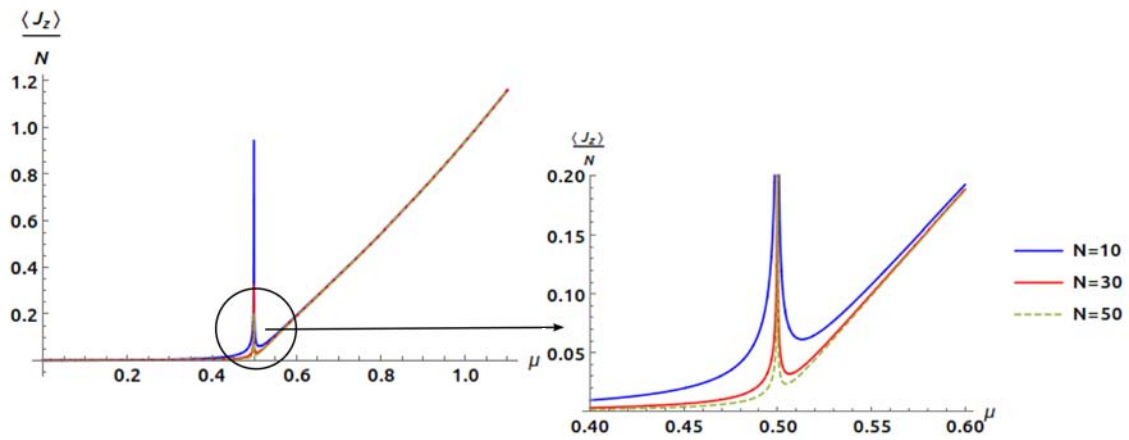


Figura 2.6: Comportamiento del valor promedio del número de excitaciones atómicas  $J_z$  por átomo en el límite termodinámico como función de  $\mu$ . Se ha usado el caso de resonancia  $\Omega_k = \omega = 1$ . Se observa la anomalía de la aproximación en el punto crítico  $\mu_c = 0,5$ .

#### 2.4. SOLUCIONES PARA UN CASO PARTICULAR

## Capítulo 3

# Estudio del sistema atómico de tres niveles

En el argot de la computación e información cuánticas un sistema que posee solo tres niveles energéticos es llamado *qutrit*. Ejemplo de esto es un átomo con tres niveles de excitación. En este capítulo usaremos de receta todo lo desarrollado en el capítulo 2 para diagonalizar el Hamiltoniano de un sistema de  $N$  átomos de tres niveles en configuración  $\Xi$ , tomando en cuenta los términos contra-rotantes del Hamiltoniano.

### 3.1. Tratamiento del Hamiltoniano para el sistema de tres niveles en el límite termodinámico

Consideremos el Hamiltoniano de un sistema de  $N$  átomos de tres niveles interactuando con un modo del campo electromagnético cuantizado. Este está descrito por

$$\hat{H} = \Omega a^\dagger a + \sum_{i=1}^3 \omega_i A_{ii} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i<j}^3 \mu_{ij} (A_{ij} + A_{ji}) (a^\dagger + a),$$

donde  $a^\dagger, a$  son los operadores de creación y aniquilación del campo electromagnético y los  $A_{ij}$  son los operadores colectivos atómicos introducidos en el capítulo 1. De manera más explícita, el Hamiltoniano anterior se escribe

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \Omega a^\dagger a + \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} + \frac{1}{\sqrt{N}} \{ \mu_{12} (A_{21} + A_{12}) + \mu_{13} (A_{31} + A_{13}) \\ & + \mu_{23} (A_{32} + A_{23}) \} (a^\dagger + a). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Los operadores atómicos  $A_{ij}$  pueden expresarse mediante operadores bosónicos  $b_i, b_j^\dagger$

usando la generalización de las transformaciones de Holstein-Primakoff [36] siguiente

$$\begin{aligned} A_{r+1,s+1} &= b_r^\dagger b_s; \quad r, s = 1, \dots, n-1, \\ A_{r+1,1} &= (A_{1,r+1})^\dagger = b_r^\dagger \Theta(N), \\ A_{1,1} &= (\Theta(N))^2, \\ \Theta(N) &= \left[ N - \sum_{r=1}^{n-1} b_r^\dagger b_r \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Omitiendo las comas en nuestra notación, los operadores colectivos atómicos en términos de los operadores bosónico  $\{b_1, b_2\}$  son

$$\begin{aligned} A_{11} &= N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2, \\ A_{22} &= b_1^\dagger b_1, \\ A_{33} &= b_2^\dagger b_2, \\ A_{21} &= b_1^\dagger [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2}, \quad A_{12} = [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2} b_1, \\ A_{31} &= b_2^\dagger [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2}, \quad A_{13} = [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2} b_2, \\ A_{32} &= b_2^\dagger b_1, \quad A_{23} = b_1^\dagger b_2. \end{aligned}$$

Así el Hamiltoniano (3.1) se reescribe como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \Omega a^\dagger a + \omega_1 [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2] + \omega_2 b_1^\dagger b_1 + \omega_3 b_2^\dagger b_2 + \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \mu_{12} \left( b_1^\dagger [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2} + [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2} b_1 \right) + \mu_{13} \left( b_2^\dagger [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2} + [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2} b_2 \right) + \mu_{23} \left( b_2^\dagger b_1 + b_1^\dagger b_2 \right) \right\} (a^\dagger + a) \\ &= \Omega a^\dagger a + (\omega_2 - \omega_1) b_1^\dagger b_1 + (\omega_3 - \omega_1) b_2^\dagger b_2 + \omega_1 N + \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ (\mu_{12} b_1^\dagger + \mu_{13} b_2^\dagger) [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2} + [N - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2]^{1/2} (\mu_{12} b_1 + \mu_{13} b_2) + \mu_{23} \left( b_2^\dagger b_1 + b_1^\dagger b_2 \right) \right\} (a^\dagger + a). \end{aligned}$$

Estamos interesados en estudiar las transiciones de fase en el sistema de tres niveles. Para facilitarnos esto necesitamos perturbar al Hamiltoniano anterior. Así que realicemos las siguientes transformaciones a los operadores bosónicos

$$a^\dagger \rightarrow a^\dagger + \alpha \sqrt{N}, \quad (3.2)$$

$$b_1^\dagger \rightarrow b_1^\dagger + \beta_1 \sqrt{N}, \quad (3.3)$$

$$b_2^\dagger \rightarrow b_2^\dagger + \beta_2 \sqrt{N}, \quad (3.4)$$

donde hemos considerando  $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . Para mayor facilidad en los cálculos definamos  $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_1$ , con lo que el Hamiltoniano (3.1) al insertar las transformaciones de los operadores bosónicos toma la forma

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \Omega \left[ a^\dagger a + \alpha \sqrt{N}(a^\dagger + a) + N\alpha^2 \right] + \tilde{\omega}_2 \left[ b_1^\dagger b_1 + \beta_1 \sqrt{N}(b_1^\dagger + b) + N\beta_1^2 \right] + \omega_1 N \\
 & + \tilde{\omega}_3 \left[ b_2^\dagger b_2 + \beta_2 \sqrt{N}(b_2^\dagger + b_2) + N\beta_2^2 \right] + \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \left( \mu_{12} b_1^\dagger + \mu_{13} b_2^\dagger + \sqrt{N}(\mu_{12}\beta_1 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu_{13}\beta_2) \right) \left[ N - b_1^\dagger b_1 - \beta_1 \sqrt{N}(b_1^\dagger + b_1) - N\beta_1^2 - b_2^\dagger b_2 - \beta_2 \sqrt{N}(b_2^\dagger + b_2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. N\beta_2^2 \right]^{1/2} + \left[ N - b_1^\dagger b_1 - \beta_1 \sqrt{N}(b_1^\dagger + b_1) - N\beta_1^2 - b_2^\dagger b_2 - \beta_2 \sqrt{N}(b_2^\dagger + b_2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. N\beta_2^2 \right]^{1/2} \left( \mu_{12} b_1 + \mu_{13} b_2 + \sqrt{N}(\mu_{12}\beta_1 + \mu_{13}\beta_2) \right) + \mu_{23} \left( b_2^\dagger b_1 + b_1^\dagger b_2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. \beta_1 \sqrt{N}(b_2^\dagger + b_2) + \beta_2 \sqrt{N}(b_1^\dagger + b_1) + 2N\beta_1\beta_2 \right) \right\} (a^\dagger + a + 2\sqrt{N}\alpha).
 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta el límite termodinámico, podemos quedarnos con las raíces cuadradas que aparecen en el Hamiltoniano a orden cero obteniendo un Hamiltoniano efectivo  $\hat{H}^{(3)}$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^{(3)} = & \Omega \left[ a^\dagger a + \alpha \sqrt{N}(a^\dagger + a) + N\alpha^2 \right] + \tilde{\omega}_2 \left[ b_1^\dagger b_1 + \beta_1 \sqrt{N}(b_1^\dagger + b) + N\beta_1^2 \right] + \omega_1 N \\
 & + \tilde{\omega}_3 \left[ b_2^\dagger b_2 + \beta_2 \sqrt{N}(b_2^\dagger + b_2) + N\beta_2^2 \right] + \sqrt{\frac{N^*}{N}} \left\{ \left( \mu_{12} b_1^\dagger + \mu_{13} b_2^\dagger + \sqrt{N}\tilde{\mu} \right) \times \right. \\
 & \times \left[ 1 - \frac{b_1^\dagger b_1 + \beta_1 \sqrt{N}(b_1^\dagger + b_1)}{2N^*} - \frac{b_2^\dagger b_2 + \beta_2 \sqrt{N}(b_2^\dagger + b_2)}{2N^*} \right] + \left[ 1 - \frac{b_1^\dagger b_1 - \right. \\
 & \left. \frac{\beta_1 \sqrt{N}(b_1^\dagger + b_1)}{2N^*} - \frac{b_2^\dagger b_2 + \beta_2 \sqrt{N}(b_2^\dagger + b_2)}{2N^*} \right] \left( \mu_{12} b_1 + \mu_{13} b_2 + \sqrt{N}\tilde{\mu} \right) \\
 & \left. + \frac{\mu_{23}}{\sqrt{N^*}} \left( b_2^\dagger b_1 + b_1^\dagger b_2 + \beta_1 \sqrt{N}(b_2^\dagger + b_2) + \beta_2 \sqrt{N}(b_1^\dagger + b_1) + 2N\beta_1\beta_2 \right) \right\} \times \\
 & \times (a^\dagger + a + 2\sqrt{N}\alpha), \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

donde se ha definido  $\tilde{\mu} \equiv \mu_{12}\beta_1 + \mu_{13}\beta_2$  y  $N^* \equiv N(1 - \beta_1^2 - \beta_2^2)$ .

### 3.2. Estudio sobre la configuración $\Xi$

En los sistema atómicos pueden no ser permitidos todas las transiciones posibles entre los distintos niveles. Para el caso de un sistema atómico de tres niveles se tienen las configuraciones  $\Lambda$ ,  $V$  y  $\Xi$ , los cuales son representados esquemáticamente en la Figura 3.1

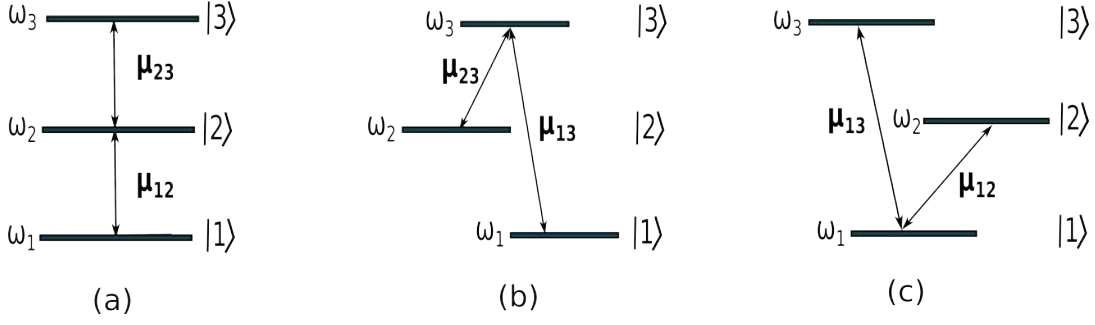


Figura 3.1: Configuraciones posibles en el átomo de tres niveles (a) Esquema de la configuración  $\Xi$  donde no se presenta la transición entre el estado  $|1\rangle$  y el estado  $|3\rangle$ . (b) Para el caso de la configuración  $\Lambda$  se tiene prohibido la transición entre los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ . (c) En la configuración  $V$  no existe transición entre  $|2\rangle$  y  $|3\rangle$ .

Para el trabajo consideremos átomos en la configuración  $\Xi$ . En tal sistema no es posible una transición entre el estado  $|1\rangle$  y el estado  $|3\rangle$ , por lo que se tiene  $\mu_{13} = 0$ . Para los sistemas en la configuración  $\Xi$  el Hamiltoniano (3.5) toma la forma

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^{(3)} = & \Omega \left[ a^\dagger a + \alpha \sqrt{N} (a^\dagger + a) + N \alpha^2 \right] + \tilde{\omega}_2 \left[ b_1^\dagger b_1 + \beta_1 \sqrt{N} (b_1^\dagger + b_1) + N \beta_1^2 \right] + \omega_1 N \\
 & + \tilde{\omega}_3 \left[ b_2^\dagger b_2 + \beta_2 \sqrt{N} (b_2^\dagger + b_2) + N \beta_2^2 \right] + \sqrt{\frac{N^*}{N}} \left\{ \left( \mu_{12} b_1^\dagger + \sqrt{N} \mu_{12} \beta_1 \right) \left[ 1 - \frac{b_1^\dagger b_1 + \beta_1 \sqrt{N} (b_1^\dagger + b_1)}{2N^*} - \frac{b_2^\dagger b_2 + \beta_2 \sqrt{N} (b_2^\dagger + b_2)}{2N^*} \right] \right. \\
 & \left. + \left[ 1 - \frac{b_1^\dagger b_1 + \beta_1 \sqrt{N} (b_1^\dagger + b_1)}{2N^*} - \frac{b_2^\dagger b_2 + \beta_2 \sqrt{N} (b_2^\dagger + b_2)}{2N^*} \right] \left( \mu_{12} b_1 + \sqrt{N} \mu_{12} \beta_1 \right) + \frac{\mu_{23}}{\sqrt{N^*}} \times \right. \\
 & \left. \times \left( b_2^\dagger b_1 + b_1^\dagger b_2 + \beta_1 \sqrt{N} (b_2^\dagger + b_2) + \beta_2 \sqrt{N} (b_1^\dagger + b_1) + 2N \beta_1 \beta_2 \right) \right\} (a^\dagger + a + 2\sqrt{N} \alpha). \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Como nos interesa el caso termodinámico expandamos los terminos del Hamiltoniano



y eliminemos aquellos que tengan alguna potencia de  $N$  en el denominador obteniendo

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^{(3)} = & \Omega \left[ a^\dagger a + \alpha \sqrt{N} (a^\dagger + a) + N \alpha^2 \right] + \tilde{\omega}_2 \left[ b_1^\dagger b_1 + \beta_1 \sqrt{N} (b_1^\dagger + b) + N \beta_1^2 \right] + \omega_1 N \\
 & + \tilde{\omega}_3 \left[ b_2^\dagger b_2 + \beta_2 \sqrt{N} (b_2^\dagger + b_2) + N \beta_2^2 \right] - \frac{2N}{\sqrt{N^*}} \alpha \beta_1^2 \mu_{12} (b_1 + b_1^\dagger) - \frac{2N}{\sqrt{N^*}} \alpha \beta_1 \times \\
 & \times \beta_2 \mu_{12} (b_2 + b_2^\dagger) + 2\alpha \mu_{12} \sqrt{N^*} (b_1 + b_1^\dagger) + 2\beta_1 \mu_{12} \sqrt{N^*} (a + a^\dagger) - \sqrt{\frac{N}{N^*}} \alpha \beta_2 \times \\
 & \times \mu_{12} (b_1 + b_1^\dagger) (b_2 + b_2^\dagger) - \alpha \beta_1 \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} (4b_1^\dagger b_1 + 2b_2^\dagger b_2 + (b_1^\dagger)^2 + b_1^2) + 4\alpha \times \\
 & \times \beta_1 \mu_{12} \sqrt{N N^*} - \beta_1^2 \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} (b_1 + b_1^\dagger) (a + a^\dagger) - \beta_1 \beta_2 \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} (b_2 + b_2^\dagger) \times \\
 & \times (a + a^\dagger) + \mu_{12} \sqrt{\frac{N^*}{N}} (b_1 + b_1^\dagger) (a + a^\dagger) + 2\alpha \beta_1 \mu_{23} \sqrt{N} (b_2 + b_2^\dagger) + 2\alpha \beta_2 \mu_{23} \times \\
 & \times \sqrt{N} (b_1 + b_1^\dagger) + 2\alpha \mu_{23} (b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1) + 2\beta_1 \beta_2 \mu_{23} \sqrt{N} (a + a^\dagger) + \beta_1 \mu_{23} \times \\
 & \times (b_2 + b_2^\dagger) (a + a^\dagger) + \beta_2 \mu_{23} (b_1 + b_1^\dagger) (a + a^\dagger) + 4N \alpha \beta_1 \beta_2 \mu_{23}.
 \end{aligned}$$

Como nos interesa eliminar las dependencias lineales en los operadores bosónicos agrupemos la expresión anterior en término de los operadores  $\{a, b_1, b_2\}$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^{(3)} = & \Omega a^\dagger a + \left[ \tilde{\omega}_2 - 4\alpha \beta_1 \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] b_1^\dagger b_1 + \left[ \tilde{\omega}_3 - 2\alpha \beta_1 \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] b_2^\dagger b_2 + \left[ \Omega \alpha \sqrt{N} \right. \\
 & \left. + 2\beta_1 \mu_{12} \sqrt{N^*} + 2\beta_1 \beta_2 \mu_{23} \sqrt{N} \right] (a + a^\dagger) + \left[ \tilde{\omega}_2 \beta_1 \sqrt{N} - \frac{2N}{\sqrt{N^*}} \alpha \beta_1^2 \mu_{12} + 2\alpha \times \right. \\
 & \left. \times \mu_{12} \sqrt{N^*} + 2\alpha \beta_2 \mu_{23} \sqrt{N} \right] (b_1 + b_1^\dagger) + \left[ \tilde{\omega}_3 \beta_2 \sqrt{N} - \frac{2N}{\sqrt{N^*}} \alpha \beta_1 \beta_2 \mu_{12} + 2\alpha \times \right. \\
 & \left. \times \beta_1 \mu_{23} \sqrt{N} \right] (b_2 + b_2^\dagger) + \left[ -\alpha \beta_1 \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] (b_1^2 + (b_1^\dagger)^2) + \left[ \beta_2 \mu_{23} - \beta_1^2 \times \right. \\
 & \left. \times \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} + \mu_{12} \sqrt{\frac{N^*}{N}} \right] (b_1 + b_1^\dagger) (a + a^\dagger) + \left[ -\beta_1 \beta_2 \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} + \beta_1 \mu_{23} \right] \times \\
 & \times (b_2 + b_2^\dagger) (a + a^\dagger) + \left[ -\alpha \beta_2 \mu_{12} \sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] (b_1 + b_1^\dagger) (b_2 + b_2^\dagger) + \left[ 2\alpha \mu_{23} \right] \times \\
 & \times (b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1) + \left[ \Omega \alpha^2 N + \tilde{\omega}_2 \beta_1^2 N + \tilde{\omega}_3 \beta_2^2 N + 4\alpha \beta_1 \mu_{12} \sqrt{N N^*} + \omega_1 N + \right. \\
 & \left. 4N \alpha \beta_1 \beta_2 \mu_{23} \right].
 \end{aligned}$$

Ya que  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  son parámetros libres, podemos seleccionarlos de tal forma que no haya términos lineales en los operadores bósónicos. Con esto obtenemos el siguiente

sistema de ecuaciones

$$\Omega\alpha\sqrt{N} + 2\beta_1\mu_{12}\sqrt{N^*} + 2\beta_1\beta_2\mu_{23}\sqrt{N} = 0, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\omega}_2\beta_1\sqrt{N} - \frac{2N}{\sqrt{N^*}}\alpha\beta_1^2\mu_{12} + 2\alpha\mu_{12}\sqrt{N^*} + 2\alpha\beta_2\mu_{23}\sqrt{N} = 0, \quad (3.8)$$

$$\tilde{\omega}_3\beta_2\sqrt{N} - \frac{2N}{\sqrt{N^*}}\alpha\beta_1\beta_2\mu_{12} + 2\alpha\beta_1\mu_{23}\sqrt{N} = 0. \quad (3.9)$$

Primeramente el sistema de ecuaciones tiene la solución trivial  $\alpha = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$  que corresponde tener al sistema en el régimen radiante. Es posible factorizar en el sistema de ecuaciones el número de partículas  $N$  por lo que los coeficientes  $\alpha, \beta_1$  y  $\beta_2$  son independientes de este parámetro. Es imposible obtener una solución analítica del sistema de ecuaciones pues equivale a un sistema de 8<sup>vo</sup> grado, por tanto la obtención de las raíces de las ecuaciones se logra de manera numérica. Al hacer esto tenemos que considerar lo expuesto en el caso de dos niveles, donde observamos que los coeficientes  $\alpha, \beta_i$  tienen que minimizar el valor del término constante del Hamiltoniano efectivo. Al introducir las soluciones de los coeficientes  $\alpha, \beta_i$  eliminamos los términos lineales en los operadores bosónicos quedandonos con en el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(3)} = & \Omega a^\dagger a + \left[ \tilde{\omega}_2 - 4\alpha\beta_1\mu_{12}\sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] b_1^\dagger b_1 + \left[ \tilde{\omega}_3 - 2\alpha\beta_1\mu_{12}\sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] b_2^\dagger b_2 + \left[ -\alpha \times \right. \\ & \times \beta_1\mu_{12}\sqrt{\frac{N}{N^*}} \left. \right] (b_1^2 + (b_1^\dagger)^2) + \left[ \beta_2\mu_{23} - \beta_1^2\mu_{12}\sqrt{\frac{N}{N^*}} + \mu_{12}\sqrt{\frac{N^*}{N}} \right] (b_1 + b_1^\dagger)(a \\ & + a^\dagger) + \left[ -\beta_1\beta_2\mu_{12}\sqrt{\frac{N}{N^*}} + \beta_1\mu_{23} \right] (b_2 + b_2^\dagger)(a + a^\dagger) + \left[ -\alpha\beta_2\mu_{12}\sqrt{\frac{N}{N^*}} \right] \times \\ & \times (b_1 + b_1^\dagger)(b_2 + b_2^\dagger) + \left[ 2\alpha\mu_{23} \right] (b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1) + \left[ \Omega\alpha^2 N + \tilde{\omega}_2\beta_1^2 N + \tilde{\omega}_3\beta_2^2 N \right. \\ & \left. + 4\alpha\beta_1\mu_{12}\sqrt{NN^*} + \omega_1 N + 4N\alpha\beta_1\beta_2\mu_{23} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Obsérvese que solo en el término constante tenemos una dependencia con el número de partículas de la misma forma que en el sistema de 2 niveles.

### 3.3. Transformaciones de Bogoliubov para el Hamiltoniano efectivo $\hat{H}^{(3)}$

Denotemos los coeficientes en el Hamiltoniano (3.10) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(3)} = & h_1 a^\dagger a + h_2 b_1^\dagger b_1 + h_3 b_2^\dagger b_2 + h_4 (b_1 + b_1^\dagger)(a + a^\dagger) + h_5 (b_2 + b_2^\dagger)(a + a^\dagger) + \\ & h_6 (b_1 + b_1^\dagger)(b_2 + b_2^\dagger) + h_7 (b_1^2 + (b_1^\dagger)^2) + h_8 (b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1) + h_9, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde sólo tenemos dependencia de  $N$  en  $h_9$ .

Para realizar la diagonalización del Hamiltoniano (3.11) introduzcamos los operadores de cuasi-partículas  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ , con sus respectivos adjuntos, los cuales son operadores bosónicos. Propongamos la relación entre estas y los operadores  $\{a, b_1, b_2\}$  de la siguiente forma

$$a = \gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 + \pi_1 d_1^\dagger + \pi_2 d_2^\dagger + \pi_3 d_3^\dagger, \quad (3.12)$$

$$a^\dagger = \gamma_1 d_1^\dagger + \gamma_2 d_2^\dagger + \gamma_3 d_3^\dagger + \pi_1 d_1 + \pi_2 d_2 + \pi_3 d_3, \quad (3.13)$$

$$b_1 = \gamma_4 d_1 + \gamma_5 d_2 + \gamma_6 d_3 + \pi_4 d_1^\dagger + \pi_5 d_2^\dagger + \pi_6 d_3^\dagger, \quad (3.14)$$

$$b_1^\dagger = \gamma_4 d_1^\dagger + \gamma_5 d_2^\dagger + \gamma_6 d_3^\dagger + \pi_4 d_1 + \pi_5 d_2 + \pi_6 d_3, \quad (3.15)$$

$$b_2 = \gamma_7 d_1 + \gamma_8 d_2 + \gamma_9 d_3 + \pi_7 d_1^\dagger + \pi_8 d_2^\dagger + \pi_9 d_3^\dagger, \quad (3.16)$$

$$b_2^\dagger = \gamma_7 d_1^\dagger + \gamma_8 d_2^\dagger + \gamma_9 d_3^\dagger + \pi_7 d_1 + \pi_8 d_2 + \pi_9 d_3, \quad (3.17)$$

donde hemos considerado por facilidad  $\gamma_i, \pi_i \in \mathbb{R}$ . De las reglas de conmutación de ambos conjuntos de operadores bosónicos obtenemos

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= [\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 + \pi_1 d_1^\dagger + \pi_2 d_2^\dagger + \pi_3 d_3^\dagger, \gamma_1 d_1^\dagger + \gamma_2 d_2^\dagger + \gamma_3 d_3^\dagger \\ &\quad + \pi_1 d_1 + \pi_2 d_2 + \pi_3 d_3] \\ &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2 - \pi_3^2 = 1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} [b_1, b_1^\dagger] &= [\gamma_4 d_1 + \gamma_5 d_2 + \gamma_6 d_3 + \pi_4 d_1^\dagger + \pi_5 d_2^\dagger + \pi_6 d_3^\dagger, \gamma_4 d_1^\dagger + \gamma_5 d_2^\dagger + \gamma_6 d_3^\dagger \\ &\quad + \pi_4 d_1 + \pi_5 d_2 + \pi_6 d_3] \\ &= \gamma_4^2 + \gamma_5^2 + \gamma_6^2 - \pi_4^2 - \pi_5^2 - \pi_6^2 = 1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} [b_2, b_2^\dagger] &= [\gamma_7 d_1 + \gamma_8 d_2 + \gamma_9 d_3 + \pi_7 d_1^\dagger + \pi_8 d_2^\dagger + \pi_9 d_3^\dagger, \gamma_7 d_1^\dagger + \gamma_8 d_2^\dagger + \gamma_9 d_3^\dagger \\ &\quad + \pi_7 d_1 + \pi_8 d_2 + \pi_9 d_3] \\ &= \gamma_7^2 + \gamma_8^2 + \gamma_9^2 - \pi_7^2 - \pi_8^2 - \pi_9^2 = 1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} [a, b_1] &= [\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 + \pi_1 d_1^\dagger + \pi_2 d_2^\dagger + \pi_3 d_3^\dagger, \gamma_4 d_1 + \gamma_5 d_2 + \gamma_6 d_3 + \\ &\quad \pi_4 d_1^\dagger + \pi_5 d_2^\dagger + \pi_6 d_3^\dagger] \\ &= \gamma_1 \pi_4 + \gamma_2 \pi_5 + \gamma_3 \pi_6 - \pi_1 \gamma_4 - \pi_2 \gamma_5 - \pi_3 \gamma_6 = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} [a, b_2] &= [\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 + \pi_1 d_1^\dagger + \pi_2 d_2^\dagger + \pi_3 d_3^\dagger, \gamma_7 d_1 + \gamma_8 d_2 + \gamma_9 d_3 + \\ &\quad \pi_7 d_1^\dagger + \pi_8 d_2^\dagger + \pi_9 d_3^\dagger] \\ &= \gamma_1 \pi_7 + \gamma_2 \pi_8 + \gamma_3 \pi_9 - \pi_1 \gamma_7 - \pi_2 \gamma_8 - \pi_3 \gamma_9 = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} [b_1, b_2] &= [\gamma_4 d_1 + \gamma_5 d_2 + \gamma_6 d_3 + \pi_4 d_1^\dagger + \pi_5 d_2^\dagger + \pi_6 d_3^\dagger, \gamma_7 d_1 + \gamma_8 d_2 + \gamma_9 d_3 + \\ &\quad \pi_7 d_1^\dagger + \pi_8 d_2^\dagger + \pi_9 d_3^\dagger] \\ &= \gamma_4 \pi_7 + \gamma_5 \pi_8 + \gamma_6 \pi_9 - \pi_4 \gamma_7 - \pi_5 \gamma_8 - \pi_6 \gamma_9 = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 [a, b_1^\dagger] &= [\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 + \pi_1 d_1^\dagger + \pi_2 d_2^\dagger + \pi_3 d_3^\dagger, \gamma_4 d_1^\dagger + \gamma_5 d_2^\dagger + \gamma_6 d_3^\dagger \\
 &\quad + \pi_4 d_1 + \pi_5 d_2 + \pi_6 d_3] \\
 &= \gamma_1 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_5 + \gamma_3 \gamma_6 - \pi_1 \pi_4 - \pi_2 \pi_5 - \pi_3 \pi_6 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 [a, b_2^\dagger] &= [\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 + \pi_1 d_1^\dagger + \pi_2 d_2^\dagger + \pi_3 d_3^\dagger, \gamma_7 d_1^\dagger + \gamma_8 d_2^\dagger + \gamma_9 d_3^\dagger \\
 &\quad + \pi_7 d_1 + \pi_8 d_2 + \pi_9 d_3] \\
 &= \gamma_1 \gamma_7 + \gamma_2 \gamma_8 + \gamma_3 \gamma_9 - \pi_1 \pi_7 - \pi_2 \pi_8 - \pi_3 \pi_9 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
 [b_1, b_2^\dagger] &= [\gamma_4 d_1 + \gamma_5 d_2 + \gamma_6 d_3 + \pi_4 d_1^\dagger + \pi_5 d_2^\dagger + \pi_6 d_3^\dagger, \gamma_7 d_1^\dagger + \gamma_8 d_2^\dagger + \gamma_9 d_3^\dagger \\
 &\quad + \pi_7 d_1 + \pi_8 d_2 + \pi_9 d_3] \\
 &= \gamma_4 \gamma_7 + \gamma_5 \gamma_8 + \gamma_6 \gamma_9 - \pi_4 \pi_7 - \pi_5 \pi_8 - \pi_6 \pi_9 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

De esta forma obtenemos 9 ecuaciones para determinar los coeficientes  $\gamma_i, \pi_i$ .

Sustituyendo las transformaciones (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) y (3.17) en el Hamiltoniano (3.11) y agrupando en términos de los operadores de cuasi-partículas obtenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^{(3)} &= e_1 d_1^\dagger d_1 + e_2 d_2^\dagger d_2 + e_3 d_3^\dagger d_3 + H_1 (d_1^\dagger d_2 + d_2^\dagger d_1) + H_2 (d_1^\dagger d_3 + d_3^\dagger d_1) + H_3 (d_2^\dagger d_3 \\
 &\quad + d_3^\dagger d_2) + H_4 (d_1 d_2 + d_2^\dagger d_1^\dagger) + H_5 (d_1 d_3 + d_3^\dagger d_1^\dagger) + H_6 (d_2 d_3 + d_3^\dagger d_2^\dagger) + H_7 (d_1^2 + \\
 &\quad (d_1^\dagger)^2) + H_8 (d_2^2 + (d_2^\dagger)^2) + H_9 (d_3^2 + (d_3^\dagger)^2) + e_0,
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde se ha definido los coeficientes

$$\begin{aligned}
 H_1 &= h_1(\gamma_1 \gamma_2 + \pi_1 \pi_2) + h_2(\gamma_4 \gamma_5 + \pi_4 \pi_5) + h_3(\gamma_7 \gamma_8 + \pi_7 \pi_8) + h_4(\gamma_1 \gamma_5 + \gamma_1 \pi_5 + \gamma_2 \gamma_4 \\
 &\quad + \gamma_2 \pi_4 + \gamma_4 \pi_2 + \gamma_5 \pi_1 + \pi_1 \pi_5 + \pi_2 \pi_4) + h_5(\gamma_1 \gamma_8 + \gamma_1 \pi_8 + \gamma_2 \gamma_7 + \gamma_2 \pi_7 + \gamma_7 \pi_2 + \\
 &\quad \gamma_8 \pi_1 + \pi_1 \pi_8 + \pi_2 \pi_7) + h_6(\gamma_4 \gamma_8 + \gamma_4 \pi_8 + \gamma_5 \gamma_7 + \gamma_5 \pi_7 + \gamma_7 \pi_5 + \gamma_8 \pi_4 + \pi_4 \pi_8 + \\
 &\quad \pi_5 \pi_7) + 2h_7(\gamma_4 \pi_5 + \gamma_5 \pi_4) + h_8(\gamma_4 \gamma_8 + \gamma_5 \gamma_7 + \pi_4 \pi_8 + \pi_5 \pi_7),
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= h_1(\gamma_1 \gamma_3 + \pi_1 \pi_3) + h_2(\gamma_4 \gamma_6 + \pi_4 \pi_6) + h_3(\gamma_7 \gamma_9 + \pi_7 \pi_9) + h_4(\gamma_1 \gamma_6 + \gamma_1 \pi_6 + \gamma_3 \gamma_4 \\
 &\quad + \gamma_3 \pi_4 + \gamma_4 \pi_3 + \gamma_6 \pi_1 + \pi_1 \pi_6 + \pi_3 \pi_4) + h_5(\gamma_1 \gamma_9 + \gamma_1 \pi_9 + \gamma_3 \gamma_7 + \gamma_3 \pi_7 + \gamma_7 \pi_3 + \\
 &\quad \gamma_9 \pi_1 + \pi_1 \pi_9 + \pi_3 \pi_7) + h_6(\gamma_4 \gamma_9 + \gamma_4 \pi_9 + \gamma_6 \gamma_7 + \gamma_6 \pi_7 + \gamma_7 \pi_6 + \gamma_9 \pi_4 + \pi_4 \pi_9 + \\
 &\quad \pi_6 \pi_7) + 2h_7(\gamma_4 \pi_6 + \gamma_6 \pi_4) + h_8(\gamma_4 \gamma_9 + \gamma_6 \gamma_7 + \pi_4 \pi_9 + \pi_6 \pi_7),
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
 H_3 &= h_1(\gamma_2 \gamma_3 + \pi_2 \pi_3) + h_2(\gamma_5 \gamma_6 + \pi_5 \pi_6) + h_3(\gamma_8 \gamma_9 + \pi_8 \pi_9) + h_4(\gamma_2 \gamma_6 + \gamma_2 \pi_6 + \gamma_3 \gamma_5 \\
 &\quad + \gamma_3 \pi_5 + \gamma_5 \pi_3 + \gamma_6 \pi_2 + \pi_2 \pi_6 + \pi_3 \pi_5) + h_5(\gamma_2 \gamma_9 + \gamma_2 \pi_9 + \gamma_3 \gamma_8 + \gamma_3 \pi_8 + \gamma_8 \pi_3 + \\
 &\quad \gamma_9 \pi_2 + \pi_2 \pi_9 + \pi_3 \pi_8) + h_6(\gamma_5 \gamma_9 + \gamma_5 \pi_9 + \gamma_6 \gamma_8 + \gamma_6 \pi_8 + \gamma_8 \pi_6 + \gamma_9 \pi_5 + \pi_5 \pi_9 + \\
 &\quad \pi_6 \pi_8) + 2h_7(\gamma_5 \pi_6 + \gamma_6 \pi_5) + h_8(\gamma_5 \gamma_9 + \gamma_6 \gamma_8 + \pi_5 \pi_9 + \pi_6 \pi_8),
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 H_4 = & h_1(\gamma_1\pi_2 + \gamma_2\pi_1) + h_2(\gamma_4\pi_5 + \gamma_5\pi_4) + h_3(\gamma_7\pi_8 + \gamma_8\pi_7) + h_4(\gamma_1\gamma_5 + \gamma_1\pi_5 + \gamma_2\gamma_4 \\
 & + \gamma_2\pi_4 + \gamma_4\pi_2 + \gamma_5\pi_1 + \pi_1\pi_5 + \pi_2\pi_4) + h_5(\gamma_1\gamma_8 + \gamma_1\pi_8 + \gamma_2\gamma_7 + \gamma_2\pi_7 + \gamma_7\pi_2 + \\
 & \gamma_8\pi_1 + \pi_1\pi_8 + \pi_2\pi_7) + h_6(\gamma_4\gamma_8 + \gamma_4\pi_8 + \gamma_5\gamma_7 + \gamma_5\pi_7 + \gamma_7\pi_5 + \gamma_8\pi_4 + \pi_4\pi_8 + \\
 & \pi_5\pi_7) + 2h_7(\gamma_4\gamma_5 + \pi_5\pi_4) + h_8(\gamma_4\pi_8 + \gamma_5\pi_7 + \gamma_7\pi_5 + \gamma_8\pi_4), \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_5 = & h_1(\gamma_1\pi_3 + \gamma_3\pi_1) + h_2(\gamma_4\pi_6 + \gamma_6\pi_4) + h_3(\gamma_7\pi_9 + \gamma_9\pi_7) + h_4(\gamma_1\gamma_6 + \gamma_1\pi_6 + \gamma_3\gamma_4 \\
 & + \gamma_3\pi_4 + \gamma_4\pi_3 + \gamma_6\pi_1 + \pi_1\pi_6 + \pi_3\pi_4) + h_5(\gamma_1\gamma_9 + \gamma_1\pi_9 + \gamma_3\gamma_7 + \gamma_3\pi_7 + \gamma_7\pi_3 + \\
 & \gamma_9\pi_1 + \pi_1\pi_9 + \pi_3\pi_7) + h_6(\gamma_4\gamma_9 + \gamma_4\pi_9 + \gamma_6\gamma_7 + \gamma_6\pi_7 + \gamma_7\pi_6 + \gamma_9\pi_4 + \pi_4\pi_9 + \\
 & \pi_6\pi_7) + 2h_7(\gamma_4\gamma_6 + \pi_4\pi_6) + h_8(\gamma_4\pi_9 + \gamma_9\pi_4 + \gamma_6\pi_7 + \gamma_7\pi_6), \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_6 = & h_1(\gamma_2\pi_3 + \gamma_3\pi_2) + h_2(\gamma_5\pi_6 + \gamma_6\pi_5) + h_3(\gamma_8\pi_9 + \gamma_9\pi_8) + h_4(\gamma_2\gamma_6 + \gamma_2\pi_6 + \gamma_3\gamma_5 \\
 & + \gamma_3\pi_5 + \gamma_5\pi_3 + \gamma_6\pi_2 + \pi_2\pi_6 + \pi_3\pi_5) + h_5(\gamma_2\gamma_9 + \gamma_2\pi_9 + \gamma_3\gamma_8 + \gamma_3\pi_8 + \gamma_8\pi_3 + \\
 & \gamma_9\pi_2 + \pi_2\pi_9 + \pi_3\pi_8) + h_6(\gamma_5\gamma_9 + \gamma_5\pi_9 + \gamma_6\gamma_8 + \gamma_6\pi_8 + \gamma_8\pi_6 + \gamma_9\pi_5 + \pi_5\pi_9 + \\
 & \pi_6\pi_8) + 2h_7(\gamma_5\gamma_6 + \pi_5\pi_6) + h_8(\gamma_5\pi_9 + \gamma_6\pi_8 + \gamma_8\pi_6 + \gamma_9\pi_5), \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_7 = & h_1(\gamma_1\pi_1) + h_2(\gamma_4\pi_4) + h_3(\gamma_7\pi_7) + h_4(\gamma_1\gamma_4 + \gamma_1\pi_4 + \gamma_4\pi_1 + \pi_1\pi_4) + h_5(\gamma_1\gamma_7 + \\
 & \gamma_1\pi_7 + \gamma_7\pi_1 + \pi_1\pi_7) + h_6(\gamma_4\gamma_7 + \gamma_4\pi_7 + \gamma_7\pi_4 + \pi_4\pi_7) + h_7(\gamma_4^2 + \pi_4^2) + h_8(\gamma_4\pi_7 \\
 & + \gamma_7\pi_4), \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_8 = & h_1(\gamma_2\pi_2) + h_2(\gamma_5\pi_5) + h_3(\gamma_8\pi_8) + h_4(\gamma_2\gamma_5 + \gamma_2\pi_5 + \gamma_5\pi_2 + \pi_2\pi_5) + h_5(\gamma_2\gamma_8 + \\
 & \gamma_2\pi_8 + \gamma_8\pi_2 + \pi_2\pi_8) + h_6(\gamma_5\gamma_8 + \gamma_5\pi_8 + \gamma_8\pi_5 + \pi_5\pi_8) + h_7(\gamma_5^2 + \pi_5^2) + h_8(\gamma_5\pi_8 \\
 & + \gamma_8\pi_5), \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_9 = & h_1(\gamma_3\pi_3) + h_2(\gamma_6\pi_6) + h_3(\gamma_9\pi_9) + h_4(\gamma_3\gamma_6 + \gamma_3\pi_6 + \gamma_6\pi_3 + \pi_3\pi_6) + h_5(\gamma_3\gamma_9 + \\
 & \gamma_3\pi_9 + \gamma_9\pi_3 + \pi_3\pi_9) + h_6(\gamma_6\gamma_9 + \gamma_6\pi_9 + \gamma_9\pi_6 + \pi_6\pi_9) + h_7(\gamma_6^2 + \pi_6^2) + h_8(\gamma_6\pi_9 \\
 & + \gamma_9\pi_6) \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 e_0 = & h_9 + h_1(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2) + h_2(\pi_4^2 + \pi_5^2 + \pi_6^2) + h_3(\pi_7^2 + \pi_8^2 + \pi_9^2) + h_4(\gamma_1\gamma_4 + \\
 & \gamma_1\pi_4 + \gamma_2\gamma_5 + \gamma_2\pi_5 + \gamma_3\gamma_6 + \gamma_3\pi_6 + \gamma_4\pi_1 + \gamma_5\pi_2 + \gamma_6\pi_3 + \pi_1\pi_4 + \pi_3\pi_6 + \\
 & \pi_5\pi_2) + h_5(\gamma_1\gamma_7 + \gamma_1\pi_7 + \gamma_2\gamma_8 + \gamma_2\pi_8 + \gamma_3\gamma_9 + \gamma_3\pi_9 + \gamma_7\pi_1 + \gamma_8\pi_2 + \gamma_9\pi_3 + \\
 & \pi_1\pi_7 + \pi_3\pi_9 + \pi_8\pi_2) + h_6(\gamma_4\gamma_7 + \gamma_4\pi_7 + \gamma_5\gamma_8 + \gamma_5\pi_8 + \gamma_6\gamma_9 + \gamma_6\pi_9 + \gamma_7\pi_4 + \\
 & \gamma_8\pi_5 + \gamma_9\pi_6 + \pi_4\pi_7 + \pi_5\pi_8 + \pi_6\pi_9) + 2h_7(\gamma_4\pi_4 + \gamma_5\pi_5 + \gamma_6\pi_6) + 2h_8(\pi_4\pi_7 + \\
 & \pi_5\pi_8 + \pi_6\pi_9), \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_1 = & h_1(\gamma_1^2 + \pi_1^2) + h_2(\gamma_4^2 + \pi_4^2) + h_3(\gamma_7^2 + \pi_7^2) + 2h_4(\gamma_1\gamma_4 + \gamma_1\pi_4 + \gamma_4\pi_1 + \pi_1\pi_4) \\
 & + 2h_5(\gamma_1\gamma_7 + \gamma_1\pi_7 + \gamma_7\pi_1 + \pi_1\pi_7) + 2h_6(\gamma_4\gamma_7 + \gamma_4\pi_7 + \gamma_7\pi_4 + \pi_4\pi_7) + 4h_7 \times \\
 & \times (\gamma_4\pi_4) + 2h_8(\gamma_4\gamma_7 + \pi_4\pi_7), \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_2 = & h_1(\gamma_2^2 + \pi_2^2) + h_2(\gamma_5^2 + \pi_5^2) + h_3(\gamma_8^2 + \pi_8^2) + 2h_4(\gamma_2\gamma_5 + \gamma_2\pi_5 + \gamma_5\pi_2 + \pi_2\pi_5) \\
 & + 2h_5(\gamma_2\gamma_8 + \gamma_2\pi_8 + \gamma_8\pi_2 + \pi_2\pi_8) + 2h_6(\gamma_5\gamma_8 + \gamma_5\pi_8 + \gamma_8\pi_5 + \pi_5\pi_8) + 4h_7 \times \\
 & \times (\gamma_5\pi_5) + 2h_8(\gamma_5\gamma_8 + \pi_5\pi_8), \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_3 = & h_1(\gamma_2^2 + \pi_2^2) + h_2(\gamma_5^2 + \pi_5^2) + h_3(\gamma_8^2 + \pi_8^2) + 2h_4(\gamma_2\gamma_5 + \gamma_2\pi_5 + \gamma_5\pi_2 + \pi_2\pi_5) \\
 & + 2h_5(\gamma_2\gamma_8 + \gamma_2\pi_8 + \gamma_8\pi_2 + \pi_2\pi_8) + 2h_6(\gamma_5\gamma_8 + \gamma_5\pi_8 + \gamma_8\pi_5 + \pi_5\pi_8) + 4h_7 \times \\
 & \times (\gamma_5\pi_5) + 2h_8(\gamma_5\gamma_8 + \pi_5\pi_8). \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

De esta forma podemos ver que buscamos parámetros  $\gamma_i, \pi_i$  que hagan a los coeficientes  $H_i = 0$ . Esto nos proveerá 9 ecuaciones más que sumadas a las anteriores nos permitirán definir la transformación de Bogoliubov.

Introduzcamos los parámetros  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ . Denotemos por  $c_i = \cos(\theta_i)$  y  $s_i = \text{sen}(\theta_i)$ . Consideremos la matriz de rotación

$$A = \begin{pmatrix} c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -c_2s_1 & c_1s_3 + c_3s_1s_2 \\ c_3s_1 + c_1s_2s_3 & c_1c_2 & s_1s_3 - c_1c_3s_2 \\ -c_2s_3 & s_2 & c_2c_3 \end{pmatrix}$$

donde hemos considerado los parámetros  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  en la representación de los ángulo de Euler por lo que satisfacen [37]

$$-\pi \leq \theta_1, \theta_3 \leq \pi \tag{3.41}$$

$$0 \leq \theta_2 \leq \pi \tag{3.42}$$

Consideremos el siguiente ansatz para los coeficientes  $\gamma_i, \pi_i$  de la transformación de Bogoliubov

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{A_{11}}{2\sqrt{h_1e_1}}(h_1 + e_1); & \gamma_2 &= \frac{A_{21}}{2\sqrt{h_1e_2}}(h_1 + e_2); & \gamma_3 &= \frac{A_{31}}{2\sqrt{h_1e_3}}(h_1 + e_3), \\
 \gamma_4 &= \frac{A_{12}}{2\sqrt{h_2e_1}}(h_2 + e_1); & \gamma_5 &= \frac{A_{22}}{2\sqrt{h_2e_2}}(h_2 + e_2); & \gamma_6 &= \frac{A_{32}}{2\sqrt{h_2e_3}}(h_2 + e_3), \\
 \gamma_7 &= \frac{A_{13}}{2\sqrt{h_3e_1}}(h_3 + e_1); & \gamma_8 &= \frac{A_{23}}{2\sqrt{h_3e_2}}(h_3 + e_2); & \gamma_9 &= \frac{A_{33}}{2\sqrt{h_3e_3}}(h_3 + e_3), \\
 \pi_1 &= \frac{A_{11}}{2\sqrt{h_1e_1}}(h_1 - e_1); & \pi_2 &= \frac{A_{21}}{2\sqrt{h_1e_2}}(h_1 - e_2); & \pi_3 &= \frac{A_{31}}{2\sqrt{h_1e_3}}(h_1 - e_3), \\
 \pi_4 &= \frac{A_{12}}{2\sqrt{h_2e_1}}(h_2 - e_1); & \pi_5 &= \frac{A_{22}}{2\sqrt{h_2e_2}}(h_2 - e_2); & \pi_6 &= \frac{A_{32}}{2\sqrt{h_2e_3}}(h_2 - e_3), \\
 \pi_7 &= \frac{A_{13}}{2\sqrt{h_3e_1}}(h_3 - e_1); & \pi_8 &= \frac{A_{23}}{2\sqrt{h_3e_2}}(h_3 - e_2); & \pi_9 &= \frac{A_{33}}{2\sqrt{h_3e_3}}(h_3 - e_3).
 \end{aligned}$$

Con esto tendremos satisfecho las primeras 9 ecuaciones (3.18)-(3.26) . Usando las 9 ecuaciones restantes podemos determinar los valores para  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ .

De  $H_1 = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 0 = & A_{11}A_{21}(h_1^2 + e_1e_2) + A_{12}A_{22}(h_2^2 + e_1e_2) + A_{13}A_{23}(h_3^2 + e_1e_2) + 2h_4\sqrt{h_1h_2}(A_{11}A_{22} \\
 & + A_{21}A_{12}) + 2h_5\sqrt{h_1h_3}(A_{11}A_{23} + A_{21}A_{13}) + 2h_6\sqrt{h_2h_3}(A_{12}A_{23} + A_{13}A_{22}) + 2 \times \\
 & \times \frac{h_7}{h_2}A_{12}A_{22}(h_2^2 - e_1e_2) + \frac{h_8}{\sqrt{h_2h_3}}(h_2h_3 + e_1e_2)(A_{13}A_{22} + A_{12}A_{23}). \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

De  $H_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 0 = & A_{11}A_{31}(h_1^2 + e_1e_3) + A_{12}A_{32}(h_2^2 + e_1e_3) + A_{13}A_{33}(h_3^2 + e_1e_3) + 2h_4\sqrt{h_1h_2}(A_{11}A_{32} \\
 & + A_{31}A_{12}) + 2h_5\sqrt{h_1h_3}(A_{11}A_{33} + A_{31}A_{13}) + 2h_6\sqrt{h_2h_3}(A_{12}A_{33} + A_{13}A_{32}) + 2 \times \\
 & \times \frac{h_7}{h_2}A_{12}A_{32}(h_2^2 - e_1e_3) + \frac{h_8}{\sqrt{h_2h_3}}(h_2h_3 + e_1e_3)(A_{13}A_{32} + A_{12}A_{33}). \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

De  $H_3 = 0$

$$\begin{aligned}
 0 = & A_{21}A_{31}(h_1^2 + e_2e_3) + A_{22}A_{32}(h_2^2 + e_2e_3) + A_{23}A_{33}(h_3^2 + e_2e_3) + 2h_4\sqrt{h_1h_2}(A_{21}A_{32} \\
 & + A_{31}A_{22}) + 2h_5\sqrt{h_1h_3}(A_{21}A_{33} + A_{31}A_{23}) + 2h_6\sqrt{h_2h_3}(A_{22}A_{33} + A_{23}A_{32}) + 2 \times \\
 & \times \frac{h_7}{h_2}A_{22}A_{32}(h_2^2 - e_2e_3) + \frac{h_8}{\sqrt{h_2h_3}}(h_2h_3 + e_2e_3)(A_{23}A_{32} + A_{22}A_{33}). \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

De  $H_4 = 0$

$$\begin{aligned}
 0 = & A_{11}A_{21}(h_1^2 - e_1e_2) + A_{12}A_{22}(h_2^2 - e_1e_2) + A_{13}A_{23}(h_3^2 - e_1e_2) + 2h_4\sqrt{h_1h_2}(A_{11}A_{22} \\
 & + A_{21}A_{12}) + 2h_5\sqrt{h_1h_3}(A_{11}A_{23} + A_{21}A_{13}) + 2h_6\sqrt{h_2h_3}(A_{12}A_{23} + A_{13}A_{22}) + 2 \times \\
 & \times \frac{h_7}{h_2}A_{12}A_{22}(h_2^2 + e_1e_2) + \frac{h_8}{\sqrt{h_2h_3}}(h_2h_3 - e_1e_2)(A_{13}A_{22} + A_{12}A_{23}). \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

De  $H_5 = 0$

$$\begin{aligned}
 0 = & A_{11}A_{31}(h_1^2 - e_1e_3) + A_{12}A_{32}(h_2^2 - e_1e_3) + A_{13}A_{33}(h_3^2 - e_1e_3) + 2h_4\sqrt{h_1h_2}(A_{11}A_{32} \\
 & + A_{31}A_{12}) + 2h_5\sqrt{h_1h_3}(A_{11}A_{33} + A_{31}A_{13}) + 2h_6\sqrt{h_2h_3}(A_{12}A_{33} + A_{13}A_{32}) + 2 \times \\
 & \times \frac{h_7}{h_2}A_{12}A_{32}(h_2^2 + e_1e_3) + \frac{h_8}{\sqrt{h_2h_3}}(h_2h_3 - e_1e_3)(A_{13}A_{32} + A_{12}A_{33}). \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

De  $H_6 = 0$

$$\begin{aligned}
 0 = & A_{21}A_{31}(h_1^2 - e_2e_3) + A_{22}A_{32}(h_2^2 - e_2e_3) + A_{23}A_{33}(h_3^2 - e_2e_3) + 2h_4\sqrt{h_1h_2}(A_{21}A_{32} \\
 & + A_{31}A_{22}) + 2h_5\sqrt{h_1h_3}(A_{21}A_{33} + A_{31}A_{23}) + 2h_6\sqrt{h_2h_3}(A_{22}A_{33} + A_{23}A_{32}) + 2 \times \\
 & \times \frac{h_7}{h_2}A_{22}A_{32}(h_2^2 + e_2e_3) + \frac{h_8}{\sqrt{h_2h_3}}(h_2h_3 - e_2e_3)(A_{23}A_{32} + A_{22}A_{33}). \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

De  $H_7 = 0$  al igual que de la expresión (3.38)

$$\begin{aligned}
 \left[ 1 + \frac{2h_7}{h_2}A_{12}^2 - \frac{2h_8}{\sqrt{h_2h_3}}A_{12}A_{13} \right] e_1^2 = & A_{11}^2h_1^2 + A_{12}^2h_2^2 + A_{13}^2h_3^2 + 4h_4\sqrt{h_1h_2}A_{11}A_{12} + \\
 & 4h_5\sqrt{h_1h_3}A_{11}A_{13} + 4h_6\sqrt{h_2h_3}A_{12}A_{13} + 2h_7h_2A_{12}^2 \\
 & + 2h_8\sqrt{h_2h_3}A_{12}A_{13}. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

De  $H_8 = 0$  al igual que de la expresión (3.39)

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \frac{2h_7}{h_2} A_{22}^2 - \frac{2h_8}{\sqrt{h_2 h_3}} A_{22} A_{23} \right] e_2^2 &= A_{21}^2 h_1^2 + A_{22}^2 h_2^2 + A_{23}^2 h_3^2 + 4h_4 \sqrt{h_1 h_2} A_{21} A_{22} + \\ &4h_5 \sqrt{h_1 h_3} A_{21} A_{23} + 4h_6 \sqrt{h_2 h_3} A_{22} A_{23} + 2h_7 h_2 A_{22}^2 \\ &+ 2h_8 \sqrt{h_2 h_3} A_{22} A_{23}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

De  $H_9 = 0$  al igual que de la expresión (3.40)

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \frac{2h_7}{h_2} A_{32}^2 - \frac{2h_8}{\sqrt{h_2 h_3}} A_{32} A_{33} \right] e_3^2 &= A_{31}^2 h_1^2 + A_{32}^2 h_2^2 + A_{33}^2 h_3^2 + 4h_4 \sqrt{h_1 h_2} A_{31} A_{32} + \\ &4h_5 \sqrt{h_1 h_3} A_{31} A_{33} + 4h_6 \sqrt{h_2 h_3} A_{32} A_{33} + 2h_7 h_2 A_{32}^2 \\ &+ 2h_8 \sqrt{h_2 h_3} A_{32} A_{33}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

De las ecuaciones (3.49), (3.50) y (3.51) vemos que tenemos definidos las energías de excitación del sistema en términos de los  $h_i$  que a su vez están definidas por los coeficientes  $\alpha, \beta_i$  y los ángulos  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ . Solamente nos falta encontrar los valores de los ángulos para poder tener definidas nuestra transformación de Bogoliubov.

En orden de resolver los valores para  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , sumemos la ecuación (3.43) con (3.44) obteniendo

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11} A_{21} h_1^2 + A_{12} A_{22} h_2^2 + A_{13} A_{23} h_3^2 + 2h_4 \sqrt{h_1 h_2} (A_{11} A_{22} + A_{21} A_{12}) + 2h_5 \times \\ &\times \sqrt{h_1 h_3} (A_{11} A_{23} + A_{21} A_{13}) + 2h_6 \sqrt{h_2 h_3} (A_{12} A_{23} + A_{13} A_{22}) + 2h_7 h_2 A_{12} A_{22} + \\ &h_8 \sqrt{h_2 h_3} (A_{13} A_{22} + A_{12} A_{23}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Sumando (3.45) con (3.46)

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11} A_{31} h_1^2 + A_{12} A_{32} h_2^2 + A_{13} A_{33} h_3^2 + 2h_4 \sqrt{h_1 h_2} (A_{11} A_{32} + A_{31} A_{12}) + 2h_5 \times \\ &\times \sqrt{h_1 h_3} (A_{11} A_{33} + A_{31} A_{13}) + 2h_6 \sqrt{h_2 h_3} (A_{12} A_{33} + A_{13} A_{32}) + 2h_7 h_2 A_{12} A_{32} + \\ &h_8 \sqrt{h_2 h_3} (A_{13} A_{32} + A_{12} A_{33}). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Y finalmente de sumar (3.47) con (3.48) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= A_{21} A_{31} h_1^2 + A_{22} A_{32} h_2^2 + A_{23} A_{33} h_3^2 + 2h_4 \sqrt{h_1 h_2} (A_{21} A_{32} + A_{31} A_{22}) + 2h_5 \times \\ &\times \sqrt{h_1 h_3} (A_{21} A_{33} + A_{31} A_{23}) + 2h_6 \sqrt{h_2 h_3} (A_{22} A_{33} + A_{23} A_{32}) + 2h_7 h_2 A_{22} A_{32} + \\ &h_8 \sqrt{h_2 h_3} (A_{23} A_{32} + A_{22} A_{33}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Con el sistema de ecuaciones (3.52), (3.53) y (3.54) podemos determinar los ángulos en la transformación de Bogoliubov pues solo implican a los coeficientes  $h_i$ . Aunque tal sistema pueda no tener una solución analítica es posible lograr una solución numérica que se facilita al recordar que

$$\text{sen}(\theta_i) = \sqrt{1 - \text{cos}^2(\theta_i)}$$



con lo que conseguimos un sistema de ecuaciones polinomiales para  $\cos(\theta_1)$ ,  $\cos(\theta_2)$  y  $\cos(\theta_3)$ .

La representación de la energía base del sistema en función de los ángulos  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  y los coeficientes  $h_i$  es

$$\begin{aligned}
 e_0 = & \frac{A_{11}^2}{4e_1}(h_1 - e_1)^2 + \frac{A_{12}^2}{4e_1}(h_2 - e_1)^2 + \frac{A_{13}^2}{4e_1}(h_3 - e_1)^2 + \frac{A_{21}^2}{4e_2}(h_1 - e_2)^2 + \frac{A_{22}^2}{4e_2}(h_2 - e_2)^2 \\
 & + \frac{A_{23}^2}{4e_2}(h_3 - e_2)^2 + \frac{A_{31}^2}{4e_3}(h_1 - e_3)^2 + \frac{A_{32}^2}{4e_3}(h_2 - e_3)^2 + \frac{A_{33}^2}{4e_3}(h_3 - e_3)^2 + h_4\sqrt{h_1h_2} \times \\
 & \times \left[ \frac{A_{11}A_{12}}{e_1} + \frac{A_{21}A_{22}}{e_2} + \frac{A_{31}A_{32}}{e_3} \right] + h_5\sqrt{h_1h_3} \left[ \frac{A_{11}A_{13}}{e_1} + \frac{A_{21}A_{23}}{e_2} + \frac{A_{31}A_{33}}{e_3} \right] + \\
 & h_6\sqrt{h_2h_3} \left[ \frac{A_{12}A_{13}}{e_1} + \frac{A_{22}A_{23}}{e_2} + \frac{A_{32}A_{33}}{e_3} \right] + \frac{h_7}{2h_2} \left[ \frac{A_{12}^2}{e_1}(h_2^2 - e_1^2) + \frac{A_{22}^2}{e_2}(h_2^2 - e_2^2) + \right. \\
 & \left. \frac{A_{32}^2}{e_3}(h_2^2 - e_3^2) \right] + \frac{h_8}{2\sqrt{h_2h_3}} \left[ \frac{A_{12}A_{13}}{e_1}(h_2 - e_1)(h_3 - e_1) + \frac{A_{22}A_{23}}{e_2}(h_2 - e_2)(h_3 - e_2) \right. \\
 & \left. + \frac{A_{32}A_{33}}{e_3}(h_2 - e_3)(h_3 - e_3) \right] + h_9. \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

Todo lo trabajado en esta sección nos ha llevado a lograr llevar nuestro Hamiltoniano a la forma

$$\hat{H}^{(3)} = e_1 d_1^\dagger d_1 + e_2 d_2^\dagger d_2 + e_3 d_3^\dagger d_3 + e_0, \tag{3.56}$$

con lo cual obtenemos las eigenfunciones del sistema así como todos los observables que pueden calcularse con ella. Cabe recalcar que todas las transformaciones realizadas solo son aplicables a los estados más bajos de energía, en especial para el estado base.

### 3.4. Cálculos numéricos para un caso particular

Todo lo desarrollado en este capítulo nos ha llevado a definir todos los parámetros necesarios para diagonalizar el Hamiltoniano del sistema de 3 niveles en la configuración  $\Xi$ . A continuación se presenta la aplicación para el caso de doble resonancia  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega_k = 1$  y  $\omega_1 = 0$  (esto último equivale a tomar  $\omega_1$  como energía de referencia cero).

Al resolver las ecuaciones (3.7) - (3.9) obtenemos las gráficas de las figuras 3.2 - 3.7. Lo primero que resalta es el contorno de la separatriz entre las distintas fases, el cual ya ha sido reportado para el sistema en la aproximación de onda rotante [13]. En el comportamiento de los coeficientes  $\beta_1$  y  $\beta_2$  (coeficientes en la perturbación de los operadores bosónicos atómicos) se observa una singularidad en algunas porciones cercanas a la transición de fase que no se observa en  $\alpha$ . Este comportamiento que no se encuentra presente en los coeficientes de 2 niveles puede deberse al cálculo numérico pues al refinar el enmallado de la gráfica puede observarse una disminución en el ancho de la singularidad.

En las figuras 3.8 - 3.9 se grafica el comportamiento del término constante del Hamiltoniano (3.10) por número de átomos ( $h_9/N$ ) el cual se pretende minimizar con los

### 3.4. CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA UN CASO PARTICULAR

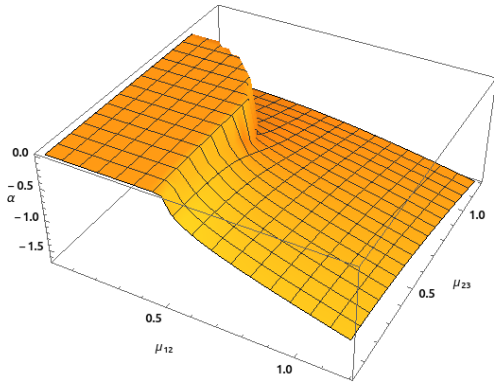


Figura 3.2: Gráfica 3D del comportamiento de  $\alpha$  en función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso de doble resonancia  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . En esta gráfica se puede identificar claramente el contorno de la separatriz de la transición de fase.

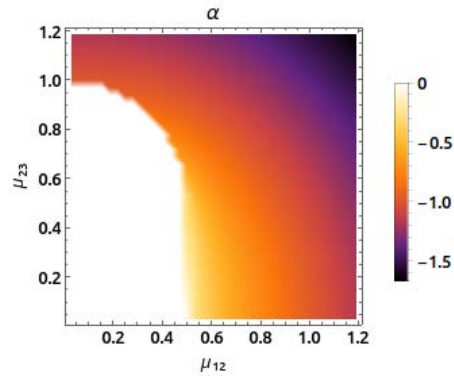


Figura 3.3: Gráfica de densidad para  $\alpha$  en función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso de doble resonancia  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ .

coeficientes  $\alpha, \beta_1, \beta_2$ . Se alcanza a distinguir la separatriz de la transición de fase y el comportamiento anómalo heredado de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Este término que está relacionado con la energía base del sistema es muy parecido al caso con aproximación de onda rotante [13] obviando la anomalía.

Finalmente se calcularon las energías de excitación  $e_1, e_2$  y  $e_3$  en base a las ecuaciones (3.49) - (3.51) y la energía del estado base dado por (3.55). Debido a que el sistema de ecuaciones (3.52) - (3.54) admite varias soluciones para  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ , se tomaron aquellas que minimizarán la energía del estado base. Las distintas soluciones que minimizan la energía del estado base solamente intercambian el comportamiento entre las energías de excitación de la misma forma que en el caso de 2 niveles. Las gráficas obtenidas se muestran en las Figuras 3.10 - 3.17. Aunque la singularidad es propia del estado base no así en las energías de excitación. Se adjudica nuevamente este comportamiento al cálculo numérico, señalando de nuevo la disminución de la anchura de la singularidad al tener un enmallado más fino en el cómputo.

Finalmente resaltemos que al igual que en el caso de 2 niveles, la energía de excitación  $e_1$  es igual al gap entre la energía del estado base y la energía del primer estado excitado. Aunque se observa la presencia de la singularidad no se observan valores negativos en  $e_1$  por lo que no hay un cruce entre el estado base y el primer estado excitado.

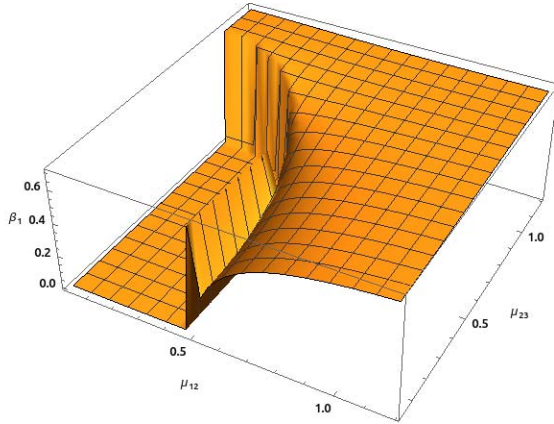


Figura 3.4: Gráfica 3D del comportamiento de  $\beta_1$  en función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso de doble resonancia  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Podemos observar cierto comportamiento anómalo en algunas partes de la zona de transición

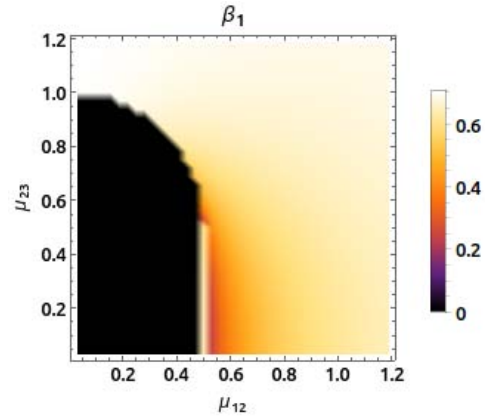


Figura 3.5: Gráfica de densidad para  $\beta_1$  en función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso de doble resonancia  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Se puede identificar claramente el contorno de la separatriz en la transición de fase y el comportamiento anómalo cerca de la transición.

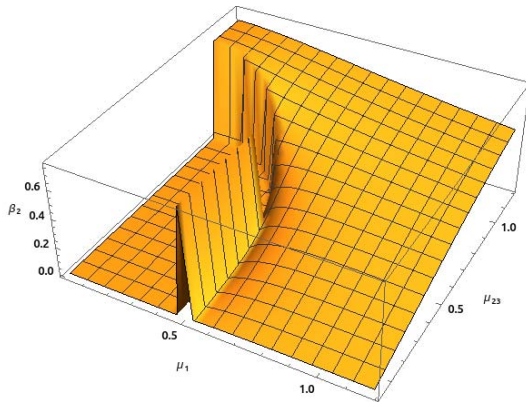


Figura 3.6: Gráfica de densidad para  $\beta_2$  como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso de doble resonancia  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Se observa un comportamiento parecido al del coeficiente  $\beta_1$ .

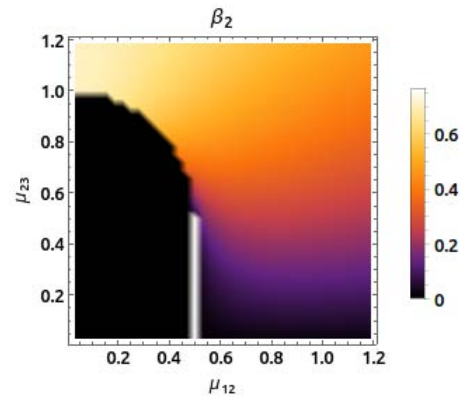


Figura 3.7: Gráfica de densidad para  $\beta_2$  como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Nuevamente se puede identificar el contorno de la separatriz en la transición de fase y el comportamiento anómalo cercano a la transición.

### 3.4. CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA UN CASO PARTICULAR

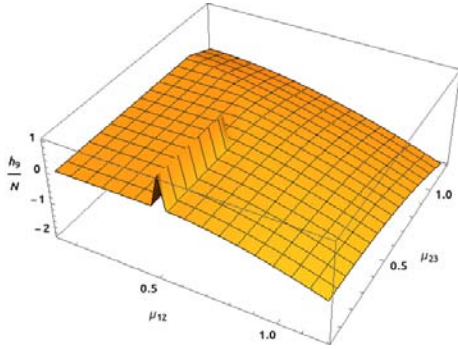


Figura 3.8: Gráfica 3D del termino constante en el Hamiltoniano  $\hat{H}^{(3)}$  (denotado  $h_0$ ) como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Aunque no se observe de manera clara la separatriz el comportamiento asemeja a lo reportado en [13] para la energía base del sistema. También se puede observar el comportamiento anómalo presentado en  $\beta_1$  y en  $\beta_2$ .

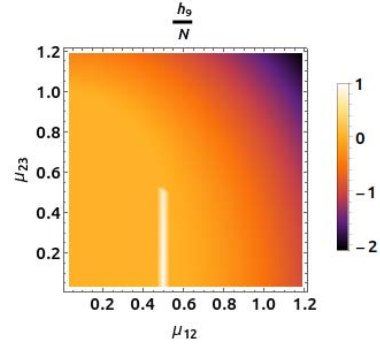


Figura 3.9: Gráfica de densidad del termino constante en el Hamiltoniano  $\hat{H}^{(3)}$  (denotado  $h_0$ ) como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Se presenta la separatriz de la transición aunque no manera clara por un comportamiento más suave de la función.

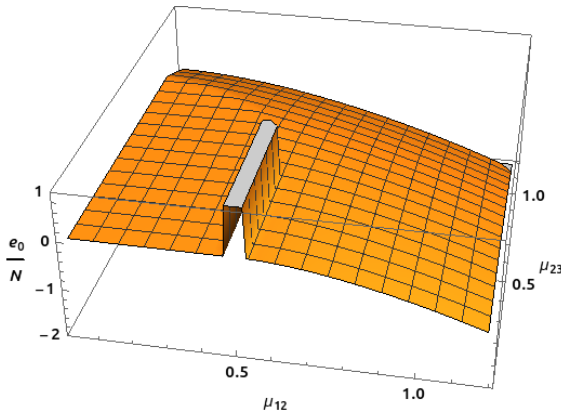


Figura 3.10: Gráfica 3D de la energía base del sistema por número de átomos como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Su comportamiento no difiere mucho de lo encontrado para  $h_0$  salvo un crecimiento de la anomalía.

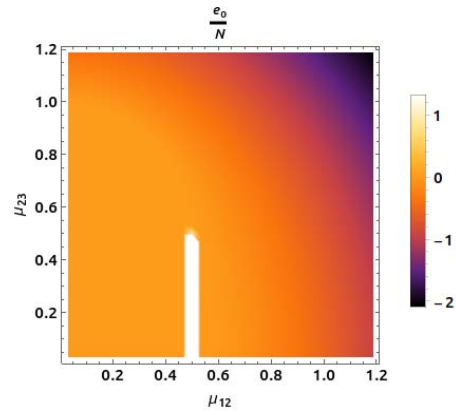


Figura 3.11: Gráfica de densidad del estado base por número de átomos como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . No se observa mucha diferencia con lo mostrado en 3.9 salvo una mayor anchura de la anomalía.

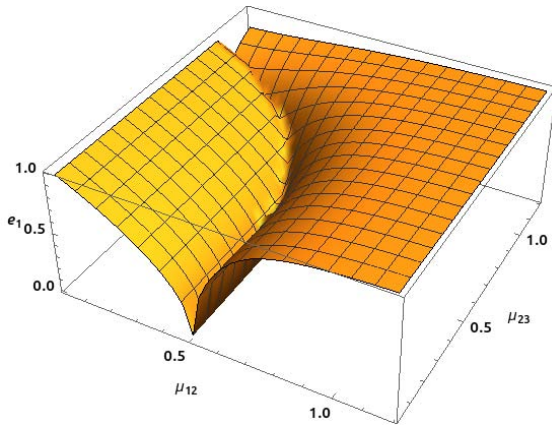


Figura 3.12: Gráfica 3D de la energía de excitación  $e_1$  como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Compárese con el comportamiento de la energía de excitación  $e_1$  (Figura 2.3) del caso de 2 niveles con el que tiene cierta semejanza.

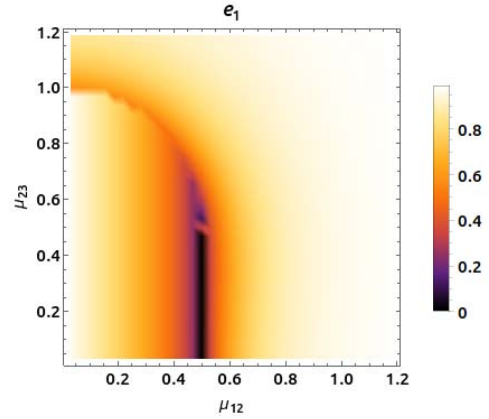


Figura 3.13: Gráfica de densidad de la energía de excitación  $e_1$  como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Aunque en la gráfica 3D la anomalía se confunde con el comportamiento de la transición se puede apreciar aquí su presencia.

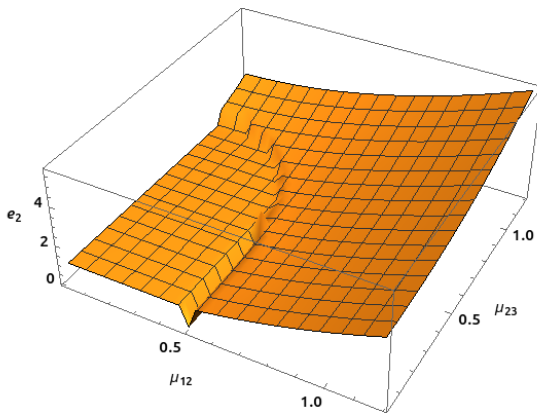


Figura 3.14: Gráfica 3D de la energía de excitación  $e_3$  como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Se observa una semejanza con el comportamiento de la energía de excitación  $e_2$  de la Figura 2.3 salvo en la transición dónde se tiene la singularidad por la aproximación.

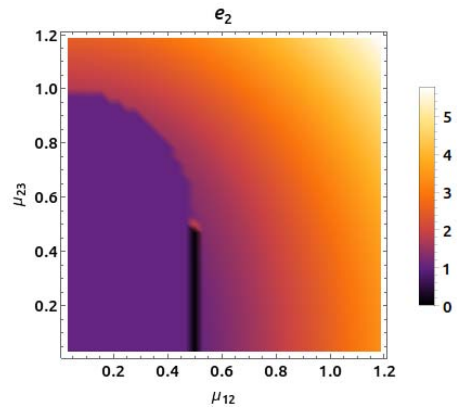


Figura 3.15: Gráfica de densidad de la energía de excitación  $e_2$  como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ .

### 3.4. CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA UN CASO PARTICULAR

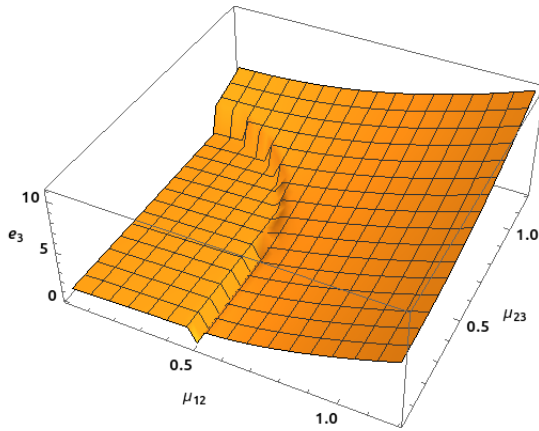


Figura 3.16: Gráfica 3D de la energía de excitación  $e_3$  como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ . Se tiene un comportamiento parecido a la energía de excitación  $e_1$ .

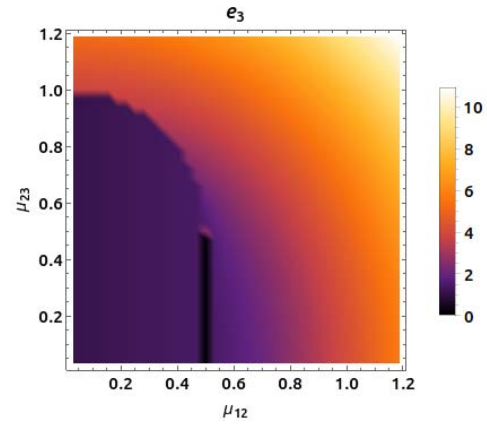


Figura 3.17: Gráfica de densidad de la energía de excitación  $e_3$  como función de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{23}$  para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ .

# Conclusiones

En el presente trabajo se estudiaron los sistemas atómicos de dos niveles y los sistemas atómicos de tres niveles en configuración  $\Xi$  tomando en cuenta los términos contrarotantes en la descripción. Para ello se procedió con la diagonalización del Hamiltoniano tomando en cuenta el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ), con lo cual se logró obtener el comportamiento de los estados más bajos de energía, especialmente del estado base.

Para la diagonalización del sistema de dos niveles se introdujeron la transformación truncada de Holstein-Primakoff para describir a los operadores colectivos atómicos mediante operadores bosónicos. Los operadores bosónicos en el Hamiltoniano fueron perturbados para facilitar el tratamiento del Hamiltoniano. Se encontraron los valores de la perturbación para la cual se eliminaban los términos lineales en los operadores bosónicos. Lo obtenido fue diagonalizado usando las transformaciones de Bogoliubov. En todo el proceso fue posible encontrar soluciones analíticas. Diagonalizado el Hamiltoniano fue posible identificar las expresiones del espectro de bajas energías (teniendo  $\epsilon_1, \epsilon_2$ ) así como la energía del estado base ( $\epsilon_0$ ). También se calcularon los valores esperados para el promedio de fotones y el promedio de excitaciones en el sistema.

Se calcularon los valores para el caso  $\Omega_k = \omega = 1$  donde se localizó el punto crítico de la transición en  $\mu_c = 0,5$ . Entre los resultados a destacar se tiene la observación de singularidades cerca la transición de fase. Estas singularidades han sido observadas tratando el Hamiltoniano de Lipkin de la misma forma en que se presentó en el trabajo [35]. Tales singularidades se deben a la mala aproximación de las transformaciones truncadas de Holstein-Primakoff cerca del punto crítico. Se identificó el comportamiento de  $\epsilon_1$  con el gap entre la energía base y la del primer estado excitado. Se concluye que en el sistema no se presenta un cruce entre el estado base y el primer estado excitado sino que se observa un punto no analítico, como era de esperarse en el caso del límite termodinámico.

Se logró extender lo realizado en el caso de 2 niveles a un sistema de 3 niveles en configuración  $\Xi$ . Para esto se hizo uso de la generalización del mapeo de Holstein-Primakoff truncado por el límite termodinámico. Se obtuvieron ecuaciones algebraicas para los parámetros de la perturbación del sistema así como para los coeficientes de la transformación de Bogoliubov. No se obtuvieron soluciones analíticas para las ecuaciones aunque se logró obtener soluciones numéricas para el caso  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \Omega = 1$  y  $\omega_1 = 0$ .

Entre las novedades que se pudieron introducir en el trabajo están los coeficientes de la transformación de Bogoliubov entre los dos conjuntos de operadores bosónico para el caso de tres niveles. De igual forma se mostraron las energías de excitación del sistema diagonalizado de tres niveles. Ambos resultados, hasta donde se ha buscado no se encuentra en la literatura. Se pudo observar la separatriz de la transición de fase y el comportamiento de la energía base que concuerdan con trabajos realizados usando la aproximación de onda rotante [12]. Es importante recalcar que para el caso de tres niveles se observaron las singularidades de la transformación truncada de Holstein-Primakoff en las energías de excitación cosa que no ocurre en el de 2 niveles y se adjudica tal resultado a errores en el cálculo numérico pues entre más refinado sea el enmallado de las gráficas se puede disminuir el ancho de la singularidad.

El método expuesto en este trabajo ofrece como ventajas el poder describir el Hamiltoniano como oscilador armónico por lo que es factible encontrar los eigenestados del sistema en los niveles más bajos de energía. En desventaja se ha observado singularidades cerca del punto crítico de la transición de fase debido al mal comportamiento de la aproximación de las transformaciones de Holstein-Primakoff truncadas observados en la energía base y los promedios de fotones y de excitaciones.

Es necesario recalcar que el trabajo realizado puede extenderse a los sistemas atómicos de tres niveles en las configuraciones  $\Lambda$  y  $V$ . Además la diagonalización del Hamiltoniano solo es el principio pues es posible el cálculo de valores esperados así como parametros de interés como la fidelidad, útil en la descripción de las transiciones de fase [38].

Por último es importante mencionar que aunque el tratamiento dado no requería de sofisticados métodos matemáticos, pues los cálculos realizados fueron algebraicos, se tenía una enorme cantidad de términos por manipular. Para la investigación mostrada se utilizaron las librerías Sympy y OpenKet, que fueron de gran ayuda en la manipulación y verificación en los cálculos, demostrando gran flexibilidad del software científico no sólo en los cálculos numéricos sino que también en la investigación teórica analítica.



# Apéndice

## A. Transformación de Bogoliubov para el sistema de dos niveles

Las relaciones entre los conjuntos de operadores bosónicos  $\{a, b\}$  y  $\{c_1, c_2\}$  introducidos en el capítulo 2 son los siguientes

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_1\varepsilon_1}} \left[ (h_1 + \varepsilon_1)c_1 + (h_1 - \varepsilon_1)c_1^\dagger \right] + \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_1\varepsilon_2}} \left[ (h_1 + \varepsilon_2)c_2 + (h_1 - \varepsilon_2)c_2^\dagger \right] \\
 a^\dagger &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_1\varepsilon_1}} \left[ (h_1 + \varepsilon_1)c_1^\dagger + (h_1 - \varepsilon_1)c_1 \right] + \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_1\varepsilon_2}} \left[ (h_1 + \varepsilon_2)c_2^\dagger + (h_1 - \varepsilon_2)c_2 \right] \\
 b &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_2\varepsilon_2}} \left[ (h_2 + \varepsilon_2)c_2 + (h_2 - \varepsilon_2)c_2^\dagger \right] - \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_2\varepsilon_1}} \left[ (h_2 + \varepsilon_1)c_1 + (h_2 - \varepsilon_1)c_1^\dagger \right] \\
 b^\dagger &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_2\varepsilon_2}} \left[ (h_2 + \varepsilon_2)c_2^\dagger + (h_2 - \varepsilon_2)c_2 \right] - \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_2\varepsilon_1}} \left[ (h_2 + \varepsilon_1)c_1^\dagger + (h_2 - \varepsilon_1)c_1 \right]
 \end{aligned}$$

Para tener un esquema completo de las transformaciones de Bogoliubov a continuación se presentan las transformaciones inversas de las expresiones anteriores.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_1\varepsilon_1}} \left[ (\varepsilon_1 + h_1)a + (\varepsilon_1 - h_1)a^\dagger \right] - \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_2\varepsilon_1}} \left[ (\varepsilon_1 + h_2)b + (\varepsilon_1 - h_2)b^\dagger \right] \\
 c_1^\dagger &= \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_1\varepsilon_1}} \left[ (\varepsilon_1 + h_1)a^\dagger + (\varepsilon_1 - h_1)a \right] - \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_2\varepsilon_1}} \left[ (\varepsilon_1 + h_2)b^\dagger + (\varepsilon_1 - h_2)b \right] \\
 c_2 &= \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_1\varepsilon_2}} \left[ (\varepsilon_2 + h_1)a + (\varepsilon_2 - h_1)a^\dagger \right] + \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_2\varepsilon_2}} \left[ (\varepsilon_2 + h_2)b + (\varepsilon_2 - h_2)b^\dagger \right] \\
 c_2^\dagger &= \frac{\text{sen}(\gamma)}{2\sqrt{h_1\varepsilon_2}} \left[ (\varepsilon_2 + h_1)a^\dagger + (\varepsilon_2 - h_1)a \right] + \frac{\cos(\gamma)}{2\sqrt{h_2\varepsilon_2}} \left[ (\varepsilon_2 + h_2)b^\dagger + (\varepsilon_2 - h_2)b \right]
 \end{aligned}$$

## B. Transformación de Bogoliubov para el sistema de tres niveles en configuración $\Xi$

Las transformaciones de Bogoliubov entre los conjuntos de operadores bosónicos  $\{a, b_1, b_2\}$  y  $\{d_1, d_2, d_3\}$  introducidos en el Capítulo 3 se presenta nuevamente a continuación

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{A_{11}}{2\sqrt{h_1 e_1}} \left[ (h_1 + e_1)d_1 + (h_1 - e_1)d_1^\dagger \right] + \frac{A_{21}}{2\sqrt{h_1 e_2}} \left[ (h_1 + e_2)d_2 + (h_1 - e_2)d_2^\dagger \right] + \\
 &\quad \frac{A_{31}}{2\sqrt{h_1 e_3}} \left[ (h_1 + e_3)d_3 + (h_1 - e_3)d_3^\dagger \right] \\
 a^\dagger &= \frac{A_{11}}{2\sqrt{h_1 e_1}} \left[ (h_1 + e_1)d_1^\dagger + (h_1 - e_1)d_1 \right] + \frac{A_{21}}{2\sqrt{h_1 e_2}} \left[ (h_1 + e_2)d_2^\dagger + (h_1 - e_2)d_2 \right] + \\
 &\quad \frac{A_{31}}{2\sqrt{h_1 e_3}} \left[ (h_1 + e_3)d_3^\dagger + (h_1 - e_3)d_3 \right] \\
 b_1 &= \frac{A_{12}}{2\sqrt{h_2 e_1}} \left[ (h_2 + e_1)d_1 + (h_2 - e_1)d_1^\dagger \right] + \frac{A_{22}}{2\sqrt{h_2 e_2}} \left[ (h_2 + e_2)d_2 + (h_2 - e_2)d_2^\dagger \right] + \\
 &\quad \frac{A_{32}}{2\sqrt{h_2 e_3}} \left[ (h_2 + e_3)d_3 + (h_2 - e_3)d_3^\dagger \right] \\
 b_1^\dagger &= \frac{A_{12}}{2\sqrt{h_2 e_1}} \left[ (h_2 + e_1)d_1^\dagger + (h_2 - e_1)d_1 \right] + \frac{A_{22}}{2\sqrt{h_2 e_2}} \left[ (h_2 + e_2)d_2^\dagger + (h_2 - e_2)d_2 \right] + \\
 &\quad \frac{A_{32}}{2\sqrt{h_2 e_3}} \left[ (h_2 + e_3)d_3^\dagger + (h_2 - e_3)d_3 \right] \\
 b_2 &= \frac{A_{13}}{2\sqrt{h_3 e_1}} \left[ (h_3 + e_1)d_1 + (h_3 - e_1)d_1^\dagger \right] + \frac{A_{23}}{2\sqrt{h_3 e_2}} \left[ (h_3 + e_2)d_2 + (h_3 - e_2)d_2^\dagger \right] + \\
 &\quad \frac{A_{33}}{2\sqrt{h_3 e_3}} \left[ (h_3 + e_3)d_3 + (h_3 - e_3)d_3^\dagger \right] \\
 b_2^\dagger &= \frac{A_{13}}{2\sqrt{h_3 e_1}} \left[ (h_3 + e_1)d_1^\dagger + (h_3 - e_1)d_1 \right] + \frac{A_{23}}{2\sqrt{h_3 e_2}} \left[ (h_3 + e_2)d_2^\dagger + (h_3 - e_2)d_2 \right] + \\
 &\quad \frac{A_{33}}{2\sqrt{h_3 e_3}} \left[ (h_3 + e_3)d_3^\dagger + (h_3 - e_3)d_3 \right]
 \end{aligned}$$

Los siguiente son las tranformaciones inversas de las transformaciones anteriores

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{A_{11}}{2\sqrt{h_1 e_1}} \left[ (e_1 + h_1)a + (e_1 - h_1)a^\dagger \right] + \frac{A_{12}}{2\sqrt{h_2 e_1}} \left[ (e_1 + h_2)b_1 + (e_1 - h_2)b_1^\dagger \right] + \\
 &\quad \frac{A_{13}}{2\sqrt{h_3 e_1}} \left[ (e_1 + h_3)b_2 + (e_1 - h_3)b_2^\dagger \right]
 \end{aligned}$$

APÉNDICE

$$\begin{aligned}
 d_1^\dagger &= \frac{A_{11}}{2\sqrt{h_1 e_1}} \left[ (e_1 + h_1)a^\dagger + (e_1 - h_1)a \right] + \frac{A_{12}}{2\sqrt{h_2 e_1}} \left[ (e_1 + h_2)b_1^\dagger + (e_1 - h_2)b_1 \right] + \\
 &\quad \frac{A_{13}}{2\sqrt{h_3 e_1}} \left[ (e_1 + h_3)b_2^\dagger + (e_1 - h_3)b_2 \right] \\
 d_2 &= \frac{A_{21}}{2\sqrt{h_1 e_2}} \left[ (e_2 + h_1)a + (e_2 - h_1)a^\dagger \right] + \frac{A_{22}}{2\sqrt{h_2 e_2}} \left[ (e_2 + h_2)b_1 + (e_2 - h_2)b_1^\dagger \right] + \\
 &\quad \frac{A_{23}}{2\sqrt{h_3 e_2}} \left[ (e_2 + h_3)b_2 + (e_2 - h_3)b_2^\dagger \right] \\
 d_2^\dagger &= \frac{A_{21}}{2\sqrt{h_1 e_2}} \left[ (e_2 + h_1)a^\dagger + (e_2 - h_1)a \right] + \frac{A_{22}}{2\sqrt{h_2 e_2}} \left[ (e_2 + h_2)b_1^\dagger + (e_2 - h_2)b_1 \right] + \\
 &\quad \frac{A_{23}}{2\sqrt{h_3 e_2}} \left[ (e_2 + h_3)b_2^\dagger + (e_2 - h_3)b_2 \right] \\
 d_3 &= \frac{A_{31}}{2\sqrt{h_1 e_3}} \left[ (e_3 + h_1)a + (e_3 - h_1)a^\dagger \right] + \frac{A_{32}}{2\sqrt{h_2 e_3}} \left[ (e_3 + h_2)b_1 + (e_3 - h_2)b_1^\dagger \right] + \\
 &\quad \frac{A_{33}}{2\sqrt{h_3 e_3}} \left[ (e_3 + h_3)b_2 + (e_3 - h_3)b_2^\dagger \right] \\
 d_3^\dagger &= \frac{A_{31}}{2\sqrt{h_1 e_3}} \left[ (e_3 + h_1)a^\dagger + (e_3 - h_1)a \right] + \frac{A_{32}}{2\sqrt{h_2 e_3}} \left[ (e_3 + h_2)b_1^\dagger + (e_3 - h_2)b_1 \right] + \\
 &\quad \frac{A_{33}}{2\sqrt{h_3 e_3}} \left[ (e_3 + h_3)b_2^\dagger + (e_3 - h_3)b_2 \right]
 \end{aligned}$$



# Bibliografía

- [1] J.H. EBERLY, N.B. NAROZHNY y J.J. SANCHEZ-MONDRAGON (1980), *Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model*, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323–1326.
- [2] P. MEYSTRE y M.S. ZUBAIRY (1982), *Squeezed states in the Jaynes-Cummings model*, Phys. Rev. Lett. **89**, 390.
- [3] J. PARK, M. SAUNDERS, YONG-IL SHIN, K. AN y H. JEONG (2012), *Bell-inequality tests with entanglement between an atom and a coherent state in a cavity*, Phys. Rev. A **85**, 022120.
- [4] S. DELÉGLISEO et al (2008), *Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence*, Nature **455**, 510-514.
- [5] PETER W. MILLONI y JOSEPH H. EBERLY, *Laser Physics*, (John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2010).
- [6] P. DOMOKOS, J. M. RAIMOND, M. BRUNE y M. BRUNE (1995), *Simple cavity-QED two-bit universal quantum logic gate: The principle and expected performances*, Phys. Rev. A **52**, 3554.
- [7] E. T. JAYNES y F. W. CUMMINGS (1963), *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with applications to the beam maser*, Proc. IEEE **51**, 89-109.
- [8] GERHARD REMPE, HERBERT WALTHER y NORBERT KLEIN (1963), *Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser*, Phys. Rev. Lett. **58**, 353.
- [9] M. TAVIS y F. W. CUMMINGS (1968), *Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian*, Phys. Rev. **170**, 379-84.
- [10] R. H. DICKE (1954), *Coherence in spontaneous radiation process*, Phys. Rev. **93**, 96.
- [11] CLIVE EMMARY y TOBIAS BRANDES (2003), *Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model*, Phys. Rev. E **67**, 066203.
- [12] S. CORDERO, O. CASTAÑOS, R. LÓPEZ PEÑA y E. NAHMAD-ACHAR (2013), *A semi-classical versus quantum description of the ground state of three-level atoms interacting with a one-mode electromagnetic field*, J. Phys. A:Math. Theor. **46**, 505302.

- [13] S. CORDERO, R. LÓPEZ PEÑA, O. CASTAÑOS y E. NAHMAD-ACHAR (2013), *Quantum phase transitions of three-level atoms interacting with a one-mode electromagnetic field*, Phys. Rev. A **87**, 023805.
- [14] MATHIAS HAYN, CLIVE EMMARY y TOBIAS BRANDES (2011), *Phase transitions and dark-state physics in two color superradiance*, Phys. Rev. A **84**, 053856.
- [15] A. BAKSIC, P. NATAF y C. CIUTI (2013), *Superradiant phase transitions with three-level systems*, Phys. Rev. A **87**, 023813.
- [16] JOHN DAVID JACKSON, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 1998).
- [17] H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, (Hirzel, Leipzig, 1928).
- [18] W. E. LAMB JR., R. R. SCHLICHER y M. O. SCULLY (1987), *Matter-field interaction in atomic physics and quantum optics*, Phys. Rev. A **36**, 2763.
- [19] WOLFGANG P. SCHLEICH, *Quantum Optics in Phase Space*, (Wiley - VCH, Berlín, 2001).
- [20] A. B. KLIMOV y S. M. CHUMAKOV, *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics*, (Wiley - VCH, Weinheim, 20019).
- [21] JIN-SHENG PENG y GAO-XIANG LI, *Quantum Phase Transitions*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [22] M. GÖPPERT-MAYER (1931), *Über Elementarakte mit zwei Quantensprüngen*, Ann. Phys. **9**, 273–295.
- [23] S. SACHDEV y GAO-XIANG LI, *Introduction to Modern Quantum Optics*, (World Scientific Publishing, Singapore, 1998).
- [24] K. HEPP y E. H. LIEB (1973), *On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke Maser Model*, Ann. Phys. **76**, 360.
- [25] M. L. CITRON, H. R. GRAY, C. W. GABEL y C. R. STROUD, JR. (1977), *Experimental study of power broadening in a two-level atom*, Phys. Rev. A **16**, 1507.
- [26] P. NATAF y C. CIUTI (2010), *Is there a no-go theorem for superradiant quantum phase transitions in cavity and circuit QED?*, Nat. Commun. **1**, 72.
- [27] F. DIMMER, B. ESTIENNE, A. S. PARKINS y H. J. CARMICHAEL (2007), *Proposed realization of the Dicke-Model quantum phase transition in an optical cavity QED system*, Phys. Rev. A **75**, 013804.
- [28] K. BAUMANN, C. GUERLIN, F. BRENNECKE y T. ESSLINGER (2010), *Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity*, Nature **464**, 1301–1306.

## BIBLIOGRAFÍA

- [29] J. J. SAKURAI, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A., 1994).
- [30] S. DUSSUEL y J. VIDAL (2005), *Continuous unitary transformations and finite-size scaling exponents in the Lipkin-Meshkov-Glick model*, Phys. Rev. B **71**, 224420.
- [31] T. HOLSTEIN y H. PRIMAKOFF (1940), *Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet*, Phys. Rev. **58**, 1098.
- [32] N. N. BOGOLIUBOV (1947), *On the theory of superfluidity*, J. Phys. URSS **11**, 23.
- [33] N. N. BOGOLIUBOV (1947), *On a new method in the theory of superconductivity*, Nuovo Cim. **7**, 794-805.
- [34] E. NAHMAD-ACHAR, S. CORDERO, O. CASTAÑOS y R. LÓPEZ PEÑA (2015), *Phase Diagrams of Systems of 2 and 3 levels in the presence of a Radiation Field*, arXiv:1502.00940, accedido 15 de abril de 2015.
- [35] J. G. HIRSCH, O. CASTAÑOS, R. LÓPEZ PEÑA y E. NAHMAD-ACHAR (2013), *Virtues and limitations of the truncated Holstein-Primakoff description of quantum rotors*, Phys. Scr. **87**, 038106.
- [36] A. KLEIN y E. R. MARSHALEK (1991), *Boson realization of Lie algebras with applications to nuclear physics*, Rev. Mod. Phys. **63**, 375.
- [37] L. C. BIEDENHARN y J. D. LOUCK, *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application. Volumen 8 de Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
- [38] SHI-JIAN GU(2010), *Fidelity approach to quantum phase transitions*, International Journal of Modern Physics B **24** **23**, 4371-4458.