UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRIA EN DOCENCIA PARA LA
EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

Estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de dos tipos de cónicas: la parábola y la elipse

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO
DE MAESTRO EN DOCENCIA PARA
LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR,
EN EL ÁREA DE CONOCIMIENTO
MATEMÁTICAS.

P R E S E N T A

Antonio García Flores

Comité Tutoral

Director de tesis: Dr. Carlos Torres Alcaraz. F. Ciencias

M. en C. Agustín Ontiveros Pineda. F. Ciencias

Dr. Juan Eduardo Esquivel Larrondo. IISUE UNAM

México, D.F., Noviembre de 2015

ÍNDICE

Resumen

Este trabajo propone una estrategia didáctica de enseñanza aprendizaje de dos tipos de cónicas en el bachillerato. Como marco de referencia se considera la teoría de Van Hiele en dos de sus vertientes, una para organizar las unidades de enseñanza y otra para evaluar el progreso de los estudiantes.

En gran medida, los conceptos de elipse y parábola son difíciles de comprender para los alumnos pues no logran entender y manejar el método analítico como una herramienta en la solución de problemas matemáticos, y específicamente en el planteamiento y solución de problemas geométricos referidos a un sistema de coordenadas. Uno de los propósitos es enfrentar las dificultades que tienen los alumnos al estudiar las propiedades geométricas de esta familia de curvas, al no comprender la representación algebraica y desconocer el modo en que la geometría y el álgebra se vinculan en la solución de problemas geométricos. En este sentido, el presente trabajo intenta facilitar dicha comprensión y conocimiento con base en el método analítico.

Con la estrategia se pretende que el alumno organice y estructure la información que aparece en cada problema, identifique los aspectos matemáticos relevantes, y descubra regularidades, relaciones y estructuras a través de actividades diseñadas para brindarle la oportunidad de razonar, crear, manipular, construir, proponer y contrastar sus propios resultados.

La propuesta didáctica encierra dos aspectos de importancia. Por una parte, un marco teórico (psicopedagógico) que fundamenta el marco teórico de enseñanza-aprendizaje que guiará la línea de trabajo del docente (planeación, aplicación de estrategias de enseñanza, enseñanza de estrategias de aprendizaje, evaluación) y la línea de trabajo del estudiante (estrategias de aprendizaje). Por la otra parte, una metodología matemática consistente en combinar los modos de razonamiento sintético y analítico a fin de entender cómo se utiliza el método analítico en la solución de problemas.

Los resultados alcanzados en la práctica muestran que la estrategia proporciona alternativas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en los temas de Elipse y Parábola, pues el alumno se involucra en dicho proceso, logrando con ello un cambio de actitud y de interés hacia la matemática.

Abstract

This paper proposes a teaching strategy for learning two types of conics in the high school level taking as reference two aspects of Van Hiele's theory, one to organize the teaching units and the other to assess student progress.

To a large degree, the concepts of Ellipse and Parabola are difficult to understand for students because they cannot understand and manage the analytical method as a tool in solving mathematical problems, and specifically in the statement and solution of geometric problems related to a coordinate system. One purpose is to confront the difficulties that students have when dealing with the geometric properties of this family of curves, sucha as not understanding the algebraic representation or ignoring how geometry and algebra are linked in solving geometric problems. In this sense, this paper attempts to facilitate such understanding and knowledge based on the analytical method.

The strategy is intended for students to organize and structure the information in each issue, identify the relevant mathematical aspects, and discover regularities, relationships and structures through activities designed to give them the opportunity to think, create, manipulate, construct, propose and compare their own results.

The didactic proposal contains two important aspects. On the one hand, a (psycho) theoretical framework underlying the theoretical framework of teaching and learning that will serve as a guide to the teacher (planning, implementing teaching strategies, teaching learning strategies, assessment) and to the student (learning strategies). On the other hand, a mathematical methodology of combining synthetic and analytical modes in order to understand how the analytical method is used in solving mathematical problems.

The results achieved in practice show that the strategy provides alternatives for improving the teaching-learning issues of the ellipse and the parabola, as the student becomes involved in the process, thereby achieving a change in attitude and interest towards mathematics.

Introducción

Este trabajo se apoya en mi experiencia como profesor adjunto en la Facultad de Ciencias de la UNAM durante más de once años, y como profesor de asignatura en los últimos diez años, tiempo durante el cual observé los pocos conocimientos previos de los alumnos sobre el tema de las cónicas en los cursos de Geometría Analítica que se imparten en los dos primeros semestres de las carreras de matemática, actuaría y física de la Facultad.

Como consecuencia de este hecho, los estudiantes se ven en desventaja cuando necesitan el conocimiento de las propiedades de estas curvas en cursos posteriores. Lo más grave es observar cómo los alumnos carecen del conocimiento de lo que es el método analítico, procedimiento fundamental en el desarrollo de la geometría analítica. Aunado a lo anterior se halla el escaso conocimiento de la geometría euclidiana, lo cual provoca en los estudiantes desánimo, inseguridad e incertidumbre, tres factores que suelen influir en los índices de deserción.

Lo cierto, es que los alumnos que egresan del bachillerato arriban al nivel superior con carencias en el conocimiento de cónicas, lo cual se debe en gran medida a la manera en que se enseña y aprende el tema. Ante este panorama nuestra propuesta consiste en promover un enfoque de enseñanza-aprendizaje en matemáticas que haga hincapié en los procesos asociados al planteamiento de situaciones problemáticas. En nuestro caso centramos nuestra atención en el aprendizaje de las propiedades y características de las cónicas en los cursos de geometría analítica del bachillerato. En particular, el tema se presta para que el alumno, a través de la resolución de problemas, cultive la habilidad de aplicar el método analítico (que le da su nombre a la materia) utilizando el conocimiento previamente adquirido para resolverlos. De esta forma la propuesta se estructura de modo tal que el docente puede optar por cualquier método de construcción de las cónicas, analítico o sintético, siendo lo importante evaluar qué tanto el alumno puede identificar los elementos aprendidos en el contexto de la solución de problemas.

Un objetivo es que el alumno solucione problemas relativos a las cónicas recurriendo a la geometría analítica, comprendiendo y entendiendo las propiedades geométricas de esta familia de curvas, su representación algebraica y el vínculo existente entre la geometría y el álgebra.

La idea fundamental es desarrollar una estrategia didáctica que tome como punto de partida situaciones y problemas dentro del contexto de la geometría misma. El énfasis se pone en que el alumno comprenda la manera en que tales situaciones se representan mediante curvas (en este caso cónicas) y cómo es que con el método de coordenadas podemos estructurar la información facilitando la solución de tales problemas. Esto ayudará al alumno a desarrollar el proceso que nosotros llamamos *matematización*. Matematizar es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras. Algo esencial en este proceso es que el alumno desarrolle habilidades como, por ejemplo, identificar los conceptos matemáticos que pueden ser relevantes para el problema, encontrar regularidades, relaciones y patrones, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y dar sentido a las operaciones geométricas y algebraicas.

La propuesta se estructura en torno a tres ejes: (a) un marco psicopedagógico que le sirve como base; (b) un marco disciplinario, el modelo de Van Hiele, que apoya la organización de las secuencias en la práctica docente y muestra el nivel de desarrollo del razonamiento del estudiante durante el proceso de enseñanza aprendizaje de las cónicas; y (c) una metodología de la disciplina, la cual combina los modos de razonamiento sintético y analítico a fin de resolver las situaciones problemáticas que se proponen.

El trabajo consta de cinco capítulos y dos anexos. En el *Capítulo I* se describe la situación actual de la problemática de la educación matemática en nuestro país, los resultados de México en el examen PISA y los propósitos de esta evaluación.

En el *Capítulo II* se presenta la propuesta, su estructura, el lugar donde se aplicó (el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM plantel sur) y la validación y justificación de la estrategia didáctica.

En el *Capítulo III* se explica el marco teórico en que se fundamenta la estrategia didáctica compuesta, como ya lo hemos dicho, por tres elementos: el marco teórico psicopedagógico, un modelo didáctico de la disciplina y la metodología de la disciplina.

En el *Capítulo* IV se desarrolla la propuesta didáctica. Para ello se toma un tema del programa de matemáticas y se muestra cómo se aplica la estrategia y los momentos que la conforman. Posteriormente se aplica esta misma estrategia al tema de la elipse y la parábola mediante una secuencia didáctica formada por 45 prácticas y la aplicación de un examen como evaluación final.

En el Capítulo V se analizan la evaluación de la propuesta y los resultados obtenidos, y se externan algunas conclusiones.

En la última parte del trabajo se presentan los anexos que muestran las evidencias de la aplicación de la estrategia didáctica.

Cabe mencionar que la propuesta fue elaborada desde el primer semestre de la maestría, seleccionando los problemas, dándole contexto, justificándola, fundamentándola y finalmente llevándola a la práctica durante las prácticas docentes I, II y III. En total se hicieron tres aplicaciones en el CCH Sur, una en la preparatoria número 2 de la UNAM y, finalmente, una en el CCH Sur como profesor interino.

Capítulo I

CONTEXTO Y PROBLEMÁTICA

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), con el objetivo de comparar la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes a nivel internacional, impulsó desde el 2000 el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés) en el cual México, como país miembro de la OCDE, ha participado en sus cinco emisiones: 2000, 2003, 2006, 2009 y 2012. PISA pretende medir hasta qué punto los alumnos de 15 años están preparados para enfrentar los retos de la sociedad actual en cuanto al manejo del conocimiento. La evaluación se centra en la capacidad de los jóvenes de utilizar sus conocimientos y sus habilidades para hacer frente a los desafíos de la vida real, sin tomar en cuenta hasta qué punto dominan un programa escolar concreto. (PISA, 2003)

Esta orientación refleja un cambio con relación a los objetivos y propósitos de los programas, invitando a que éstos se ocupen más por lo que pueden hacer los alumnos con lo que aprenden en la escuela, en vez de limitarse a ver si son capaces de reproducir lo ya aprendido.

PISA 2012 informa sobre los niveles de competencia en matemáticas mostrando los resultados obtenidos por los alumnos en diversas áreas de contenido de las matemáticas.

Consideremos lo anterior en detalle. En el caso que nos ocupa PISA busca evaluar la capacidad de identificar, entender y ocupar las matemáticas y emitir juicios fundamentados sobre el papel de éstas, tanto en la existencia futura individual como en la vida laboral o social. En otras palabras, PISA pretende identificar la capacidad de los alumnos para establecer la conexión entre una situación y el conocimiento matemático e integrarlo para la resolución de un problema, comunicar sus resultados y generalizarlos también matemáticamente.

Los resultados de PISA 2012 en matemáticas fueron desalentadores. México obtuvo 413 puntos, quedando en el lugar 53, cuando la media de los países de la OCDE fue de 494 (los países que obtuvieron puntajes más favorables fueron Shanghái (613 puntos), Singapur (573), Hong Kong (561), Taipei (560) y Corea del sur (554).

La evaluación de PISA establece seis niveles de desempeño [Ver APÉNDICE A1]: el nivel más alto corresponde a 6 y el nivel más bajo es 1, donde el alumno sólo es capaz de responder preguntas que involucran contextos familiares, en los que toda la información relevante está presente y las preguntas se encuentran definidas de manera clara; los estudiantes en este nivel pueden llevar a cabo acciones que son obvias y consecuencia inmediata del estímulo presentado. En promedio, el número de aciertos obtenidos por los estudiantes mexicanos corresponde al nivel 1.

En promedio, el 67 por ciento de los alumnos de los países de la OCDE demostraron la capacidad de responder una pregunta con múltiples pasos. México, por su parte, tuvo en promedio el equivalente a un estudiantado que sólo contesta una pregunta de un paso y recuerda únicamente los procedimientos más simples. Esto quiere decir que la mitad de los estudiantes mexicanos, en promedio, no llega ni siquiera a poder realizar la más básica y simple de las tareas en capacidad matemática, o experimentan muchas dificultades para lograrlo.

Estos hechos confirman que el problema apunta a la existencia de una brecha considerable entre el cumplimiento escolar acreditado por las escuelas de nivel medio y medio superior en México, y los desempeños que según criterios mexicanos del INEE e internacionales de PISA logran los alumnos. (Zorrilla, 2010)

Esta brecha muestra la importancia que tiene entender de qué forma se genera los mecanismos que conducen a tales resultados. Por un lado PISA muestra en sus resultados que en México la mayoría de los alumnos pueden realizar las tareas más fáciles, las cuales corresponden a operaciones matemáticas sencillas en contextos conocidos. Sin embargo estos resultados de PISA contrastan con las calificaciones en las escuelas mexicanas. Mientras que menos de la mitad del total de alumnos mostraron que su capacidad de resolución de problemas matemáticos se encuentra en el nivel I o por debajo de éste, es mayor el porcentaje de estudiantes que reportaron haber obtenido en México una calificación aprobatoria o superior. Por lo tanto, a pesar de los pobres resultados de acuerdo con los estándares internacionales, un alto porcentaje de ellos satisfacen o exceden las expectativas de sus profesores. (Zorrilla 2007)

Esto es un reflejo de lo que está sucediendo en el sistema educativo nacional.

Actualmente en los centros de enseñanza el contenido matemático se transmite y evalúa frecuentemente de forma que se abstrae de los contextos reales. Por ejemplo, a los alumnos se les enseñan técnicas de aritmética y luego se les presenta una operación aritmética para que la completen; se les enseña a resolver un determinado tipo de ecuaciones y luego se les presentan ecuaciones similares para que las resuelvan; se les enseñan las propiedades y relaciones geométricas y luego se les pide que demuestren un teorema. Una vez aprendidos los conceptos en cuestión, se les suele pedir que resuelvan problemas matemáticos inventados que exigen la aplicación de dicho conocimiento. Las matemáticas requeridas son, por lo general, evidentes. Puede que los alumnos dominen las técnicas requeridas o no. Probablemente no se presta la atención suficiente a la utilidad de las matemáticas en el mundo real. (Informe PISA 2003)

Este hecho tiene un doble alcance. En primer lugar, evidencia la falta de eficacia del sistema nacional educativo para formar alumnos con la capacidad de abordar problemas que involucren habilidades matemáticas en la vida real; en cambio, fomenta la solución de problemas artificiales. En segundo lugar, remite a distinguir entre el cumplimiento escolar tradicional y los desempeños demandados por el mundo moderno, como es el enfoque en la capacidad matemática (mathematical literacy).

El dominio que se evalúa en el estudio PISA/OCDE se denomina *alfabetización matemática* (Mathematical Literacy). Dicha alfabetización o competencia matemática general se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Dadas las inercias que se han generado desde el nivel básico en el proceso de aprendizaje de los estudiantes que hoy se encuentran en el bachillerato, es poco realista presentar una propuesta que rompa definitivamente con los esquemas establecidos. Se apostará entonces por cambios dentro del proceso enseñanza aprendizaje que permitan un incremento dosificado en el desarrollo de habilidades matemáticas de los estudiantes, con el propósito de alcanzar los niveles marcados en Pisa como 2 y 3. (Ver apéndice A_1)

Capítulo II

Propuesta metodológica y validación de la estrategia didáctica

La problemática anterior es la principal motivación para realizar un proyecto de tesis cuya intención sea promover un enfoque de enseñanza-aprendizaje en matemáticas que haga hincapié en los procesos asociados al planteamiento de situaciones problemáticas. En nuestro caso centramos nuestra atención en el caso específico del aprendizaje de las propiedades y características de las cónicas en los cursos de geometría analítica del bachillerato. En particular, el tema se presta para que el alumno, a través de la resolución de problemas, cultive la habilidad de aplicar el método analítico (que le da su nombre a la materia) utilizando el conocimiento previo para resolverlos. En particular, la propuesta se estructura de modo tal que el docente puede optar por cualquier método de construcción de las cónicas, analítica o sintética, siendo lo importante evaluar qué tanto el alumno puede identificar los elementos aprendidos en el contexto de la solución de problemas.

Para realizar la estrategia didáctica se eligió el programa de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM del nivel medio superior, en la materia de Matemáticas III, la cual se ubica en el tercer semestre del programa, unidad IV, donde se trata el tema de la *elipse, la circunferencia y sus ecuaciones cartesianas* y la unidad V, donde se trata el tema de *la parábola y su ecuación cartesiana*.

Trabaje la propuesta sobre los siguientes tópicos que marca el programa.

UNIDAD IV. ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

- Estudio de la Elipse

La elipse como lugar geométrico.
a) Trazo de la elipse y sus propiedades de simetría.
b) Definición geométrica de la elipse.
c) Elementos que definen a la elipse: distancia focal, eje mayor y eje menor. Relación entre ellos.

Ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas:
a) Ecuación ordinaria con centro fuera del origen.
b) Ecuación ordinaria con centro en el origen.
c) Ecuación general.

Aplicaciones:

a) La tangente a la elipse en un punto que pertenece a ésta
b) Intersecciones de rectas con la elipse.

- Estudio de la Circunferencia

La circunferencia como lugar geométrico:
a) Definición geométrica de la circunferencia.
b) Elementos que definen a la circunferencia.

Ecuación de la circunferencia.
a) Ecuación ordinaria, con centro fuera del origen.
b) Ecuación ordinaria con centro en el origen.
c) Ecuación general.

Aplicaciones:
a) La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos.
b) Ecuación de la recta tangente a una circunferencia, en uno de sus puntos.
c) Intersecciones de rectas con una circunferencia.

UNIDAD V. LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA.

- Estudio de la parábola

La parábola como lugar geométrico
a) Trazo de la parábola y sus propiedades.
b) Definición geométrica de la parábola.
c) Elementos que definen a la parábola: foco, directriz, eje de simetría, lado recto. Relación entre ellos.
d) Definición de parábola como lugar geométrico.

Ecuación de la parábola con eje paralelo a alguno de los ejes de coordenadas:
a) Ecuación ordinaria con vértice en el origen.
b) Ecuación ordinaria con vértice fuera del origen.
c) Ecuación general.

Aplicaciones:
a) Problemas de corte geométrico
b) Problemas diversos, que surgen de las características de esta curva.

Ambas unidades tienen como propósito que el alumno reafirme el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse, la circunferencia y la parábola, así como el avance en el reconocimiento de formas, estructuras y procedimientos, al resolver diversos problemas que involucren a la elipse, circunferencia y parábola.

Con relación al uso del método analítico, los objetivos trazados en estas unidades consisten en que, a través de estrategias generales, las cuales se plantean en el programa como sugerencias de cómo favorecer la adquisición de los aprendizajes descritos, “el alumno maneje el método de las coordenadas para obtener una ecuación algebraica que represente el lugar geométrico estudiado. Además, se busca que cuente con diversas formas de representación que ayuden en la comprensión y resolución de problemas planteados” (Programa de Estudios de Matemáticas. Semestres del I al IV. CCH. UNAM).

Ahora bien, en la práctica los profesores debemos enfrentar el grave problema de que los alumnos no logran comprender y manejar el método analítico como algo indispensable en la solución de problemas matemáticos, y específicamente en el planteamiento y solución de problemas geométricos referidos a un sistema de coordenadas. Esto tiene como consecuencia la dificultad de entender las propiedades geométricas de esta familia de curvas, la incomprensión de su representación algebraica y el desconocimiento del vínculo existente entre la geometría y el álgebra como elemento central en la solución de problemas geométricos.

Lo común es que el profesor deduce algebraicamente las ecuaciones generales de las cónicas, a la vez que explica sus propiedades mediante la exposición verbal. Acto seguido, procede a la resolución de problemas y ejercicios por parte del alumno un tanto mecánica, sin un contexto real o mediante la simple substitución de valores en una ecuación o fórmula general. En otras palabras, los estudiantes pueden responder preguntas que involucran contextos familiares y en los que está presente la información relevante y las preguntas tienen un sentido directo. Asimismo, pueden identificar la información y realizar procedimientos rutinarios según instrucciones directas en situaciones explícitas, o realizar acciones que son obvias y que se desprenden directamente de los estímulos dados.

Ante este panorama surge la necesidad de una propuesta didáctica que permita mejorar tal situación.

¿Cómo acercar a los jóvenes a la geometría analítica en general? ¿Cómo acercarlos al estudio de las cónicas en particular? ¿Cómo sensibilizarlos en la importancia del método analítico en el estudio de la geometría analítica? ¿Cómo hacer que los estudiantes reconozcan un lugar geométrico a partir de su ecuación? ¿Cómo a partir de la gráfica del lugar geométrico deduzcan su ecuación?

Los retos que plantea la necesidad de que el alumno comprenda y maneje el método analítico como parte fundamental de la geometría analítica a partir de situaciones problemáticas de las cónicas es lo que pretendo abordar dentro del Programa de Posgrado de la Maestría en docencia para la Educación Media Superior dentro del campo de conocimiento de las Matemáticas.

Teniendo en mente lo anterior, me trazo el siguiente objetivo general: Que el alumno solucione problemas relativos a las cónicas recurriendo a la geometría analítica, comprendiendo y entendiendo las propiedades geométricas de esta familia de curvas, su representación algebraica y el vínculo existente entre la geometría y el álgebra.

La tesis o, más bien, la idea fundamental es desarrollar una estrategia didáctica que tome como punto de partida situaciones y problemas dentro del contexto de la geometría misma. El énfasis se pone en que el alumno comprenda la manera en que tales situaciones se representan mediante curvas (en este caso cónicas) y cómo es que con el método de coordenadas podemos estructurar la información facilitando la solución de tales problemas. Esto ayudará al alumno a desarrollar el proceso que nosotros llamamos *matematización*, el cuál como lo menciona Juan García Cruz, "Las matemáticas como actividad poseen una característica fundamental: la matematización. Matematizar es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras" (D. Juan Antonio García Cruz, "La didáctica de las matemáticas: una visión general")

La idea es ayudar a los alumnos a que reflexionen sobre el proceso completo de matematización y sus resultados, interpretando estos últimos con actitud crítica y validando el proceso completo.

La tesis es la matematización, organización y reflexión de problemas matemáticos para el aprendizaje de la geometría analítica en el caso de la elipse y la parábola.

Algo esencial en este proceso es que el alumno vaya desarrollando habilidades matemáticas como, por ejemplo, identificar las ideas matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema (v. gr., ¿qué propiedades de las cónicas pueden ser de utilidad?, ¿cuáles de sus elementos pueden intervenir?), encontrar regularidades, relaciones y patrones, utilizar el lenguaje simbólico y dar sentido a las operaciones geométricas y algebraicas.

Por lo tanto, la propuesta presenta una alternativa basada en la revisión del programa del CCH en el tema de las cónicas y en el desarrollo de habilidades matemáticas. Dicha propuesta crea situaciones de aprendizaje debido al contexto inducido, que le permiten al estudiante involucrarse directa y permanentemente en la construcción de sus aprendizajes a través de actividades diseñadas para brindarle la oportunidad de razonar, crear, manipular, construir, proponer y contrastar sus propios resultados.

La estrategia didáctica también permite fortalecer el vínculo entre la geometría euclidiana y el álgebra a través del método de coordenadas, de modo que el estudiante puede valorar el papel que desempeña el método analítico y sus conocimientos previos de geometría euclidiana (y su método sintético) en la resolución de problemas de las cónicas.

La propuesta está constituida por sesiones y cada sesión consta de una o varias actividades de aprendizaje diseñadas específicamente para que sean los estudiantes quienes adquieran su propio conocimiento, al analizar y resolver situaciones problemáticas. Se trata de que el estudiante organice y estructure la información, encuentre regularidades y relaciones entre los elementos de las cónicas y comunique matemáticamente los resultados.

Capítulo III

Marco Teórico

La propuesta didáctica está dividida en tres partes:

(a) Una parte psicopedagógica que fundamenta el marco teórico de enseñanza y aprendizaje sobre la cual guiará la línea de trabajo del docente (planeación, aplicación de estrategias de enseñanza, enseñanza de estrategias de aprendizaje, evaluación) y el aprendizaje del estudiante (estrategias de aprendizaje).
(b) Una parte didáctica de la disciplina, la cual se apoya en el modelo de Van Hiele, en él se favorece el desarrollo del razonamiento geométrico en el alumno; y
(c) Una metodología de la disciplina, la cual consiste en combinar los modos de razonamiento sintético y analítico a fin de traducir los problemas geométricos al álgebra (donde prevalece el método analítico), y "leer" geométricamente las cuestiones algebraicas (donde prevalece el método sintético) con el propósito de encontrar posibles caminos para resolver los problemas en forma analítica (es decir, en el álgebra).

MARCO TEÓRICO PSICOPEDAGÓGICO

Esta propuesta tiene como núcleo la idea de que alumno aprenda a resolver en forma comprensiva problemas relacionados con las propiedades geométricas de las cónicas. Al respecto, el profesor sólo actúa como guía durante este proceso, lo cual incluye regular las acciones, orientar en la búsqueda de soluciones y ayudar a simbolizar lo propuesto, para finalmente llegar a la necesidad de resolver y validar problemas de las cónicas.
La propuesta está sustentada en la visión constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizajes escolares que, como menciona Coll (2001), se sustenta en la psicología genética piagetiana, el cognitivismo de Ausubel y de la teoría sociocultural de Vygotsky. De ellas derivan distintos planteamientos, reconociendo que no existe una sola mirada constructivista en la educación, al tiempo que identificamos algunos planteamientos comunes. Uno de ellos es el principio de la importancia de la actividad mental constructiva del alumno para la realización de los aprendizajes escolares. Dicho principio consiste en lo que Coll llama la idea fuerza constructivista: "[la idea fuerza constructivista] es la idea fuerza más potente y también la más ampliamente compartida […] conduce a concebir el aprendizaje escolar como un proceso de construcción del conocimiento a partir de los conocimientos y las experiencias previas y la enseñanza como una ayuda a este proceso de construcción." [Coll, 1996: 161] En otras palabras, emplearemos el enfoque constructivista del aprendizaje, el cual sostiene que todo nuevo

concepto se adquiere desde las estructuras conceptuales significativas, construyéndolo a partir de las ideas que ya se tienen.
Entre las tres propuestas ya mencionadas, la sicología instruccional cognitiva es la que mayor influencia ha tenido en este trabajo. Dentro de esta corriente, una de las líneas de investigación más significativas es la desarrollada por David Ausubel.

David P. Ausubel (1918-2008)
El Psicólogo estadounidense David Ausubel, como otros teóricos cognoscitivistas, postula que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz posee en su estructura cognitiva.
Podemos caracterizar su postura como constructivista (el aprendizaje no es una simple asimilación pasiva de información literal, ya que el sujeto la transforma, estructura e interacciona con los materiales de estudio. La información exterior se relaciona con los esquemas de conocimiento previo y con las características personales del aprendiz). Ausubel concibe al alumno como un procesador activo de la información, y dice que el aprendizaje es sistemático y organizado, pues en su forma más elaborada consiste en un fenómeno complejo que no se reduce a simples asociaciones memorísticas.(Frida Díaz, 2010)

Según Ausubel (1978) no todos los tipos de aprendizaje humano son iguales; por el contrario, existen diferentes tipos de aprendizaje que ocurren dentro del aula, los cuales dependen de dos factores o dimensiones básicas:
1°) ¿cómo incorpora el alumno la nueva información en su estructura o sus esquemas cognitivos?
2°) ¿cuál es el tipo de estrategia o metodología de enseñanza que se sigue?

En la primera dimensión se distinguen dos modalidades de aprendizaje:

- *El repetitivo o* memorístico, el cual consiste en aprender la información de forma literal o al pie de la letra. Su incorporación en la estructura cognitiva es arbitraria.
- *El significativo*, el cual consiste en la adquisición de la información de forma sustancial (lo esencial).Su incorporación en la estructura cognitiva no es arbitraria, porque se hace relacionando dicha información con el conocimiento previo.

A su vez el aprendizaje significativo se puede dar de dos maneras:

❖ Por recepción de productos acabados de información, en la que la participación del alumno consiste en internalizar dicha información.

- Por descubrimiento, donde el que el contenido principal de la información que se va a aprender no se presenta en su forma final, sino que ésta debe ser descubierta previamente por el alumno para que luego la pueda aprender.

Ausubel considera que a partir de los últimos años de educación básica y hasta la educación superior, el aprendizaje significativo por recepción es el más valioso, incluso por encima del aprendizaje significativo por descubrimiento (dado que los alumnos no pueden estar "descubriendo" conocimientos continuamente, sobre todo los de gran complejidad conceptual que se enseñan en los currículos, lo cual mucho más costoso didácticamente). Dado que la mayor parte de la información que aprendemos está expresada en el lenguaje oral o escrito, el profesor debe exponerla o prepararla adecuadamente. (Hernández G, 1998)

Según Ausubel, el aprendizaje significativo se basa en la concepción de tres instancias fundamentales: memoria sensorial (MS), memoria a corto plazo (MCP), y memoria a largo plazo (MLP), y dos clases de procesos (interpretativo y de control). En forma muy breve, esto se puede explicar de la siguiente manera (Quesada, 1988):

- Memoria sensorial es la que nos permite percibir los estímulos del ambiente: visuales, auditivos, olfativos, táctiles, etc.
- Memoria a corto plazo, la cual se pone en juego cuando necesitamos usar la información que hemos recibido. La información se mantiene en la memoria el tiempo necesario para ser usada, pero si no se emplea, la información se queda sólo al nivel de la memoria sensorial, a menos que sea ejercitada o procesada. Si es así puede ocupar la memoria a largo plazo.
- Memoria a largo plazo incluye aquella información que es perdurable. Todo lo que sabemos y hemos aprendido durante nuestra vida ocupa la memoria a largo plazo.

  Como maestros estamos interesados que los alumnos lleven el contenido de la enseñanza a su memoria de largo plazo.

  En cuanto a los procesos, Posner (1979) describe al interpretativo como aquel que dirige la búsqueda de la información en la estructura cognitiva. Por este proceso sabemos dónde buscar en la memoria lo que queremos evocar y, también, donde integrar el nuevo aprendizaje. Describe al control como el que nos permite percatarnos de que sabemos o ignoramos algo.

  Si aprender es llevar el conocimiento nuevo a ocupar un lugar en la memoria a largo plazo y relacionarlo con la estructura cognitiva existente, tal relación puede darse por medio del aprendizaje significativo. El nuevo conocimiento se integrará en la estructura cognoscitiva si se le da un significado personal, para lo cual se requieren antecedentes necesarios que propicien la comprensión y la construcción de significados. Entonces se dice que un aprendizaje es significativo cuando se encuentra en la memoria a largo plazo, integrado de manera significativa y no arbitraria a la estructura cognoscitiva. (Quesada 2009)

Siguiendo en esta línea, éste trabajo procura el aprendizaje significativo por recepción y un tipo de estrategia o metodología de enseñanza que facilite el aprendizaje significativo. Con base en esto el trabajo se realizó siguiendo el siguiente proceso.

DIDÁCTICA DE LA DISCIPLINA

Una propuesta que aborda aspectos geométricos y que surge debido a la problemática que existe con respecto al aprendizaje y enseñanza de la geometría, es el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

Este modelo nos parece idóneo para la estrategia de enseñanza-aprendizaje en el estudio de la geometría de las cónicas. Enseguida explicaremos las características del modelo, así como su validación.

Por los años cincuenta, en Holanda dos profesores de geometría llamados Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldolf, preocupados porque sus alumnos no entendían lo que se les explicaba, decidieron realizar una investigación que les permitiera, primero, determinar la forma como se produce la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes y, segundo, buscar la manera de ayudar a los alumnos a mejorar la calidad de sus razonamiento (Gutiérrez y Jaime, 1990).

El modelo de Van Hiele está integrado por dos componentes. La primera primero está compuesta por cinco niveles (llamados niveles de razonamiento) que indican distintos alcances en el proceso de comprensión geométrica de pensamiento de los alumnos en la construcción de conceptos geométricos. Se parte un nivel uno -netamente perceptual- hasta llegar un nivel cinco de alto grado de abstracción. La segunda componente está constituida por cinco fases que permiten al docente organizar el aprendizaje de sus alumnos y las actividades que van a proponerse.

El modelo de Van Hiele explica, desde una perspectiva cognitiva, cómo se desarrolla el pensamiento geométrico de los estudiantes, y desde una perspectiva didáctica la manera en que el profesor puede guiar este desarrollo para alcanzar niveles de razonamiento más altos.

De esta forma los componentes principales del modelo Van Hiele son la "teoría de los niveles de razonamiento", que explica cómo se produce el desarrollo en la calidad de razonamiento geométrico de los estudiantes cuando éstos estudian geometría, y las "fases de aprendizaje", que constituye su propuesta didáctica para la secuenciación de actividades de enseñanza-aprendizaje en el aula, con el objeto de facilitar el ascenso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediato superior.

Las ideas básicas del modelo son particularmente significativas, porque ofrecen una guía para planificar la enseñanza. Jaime y Gutiérrez (1990) describen las ideas centrales del Modelo de Van Hiele de la siguiente manera:

• Se pueden encontrar diferentes niveles de perfección en el razonamiento geométrico de los estudiantes.

• Un estudiante sólo podrá comprender aquellos conceptos que correspondan a su nivel de razonamiento geométrico.
• Si una noción matemática no puede ser presentada a un estudiante de acuerdo a su nivel actual de razonamiento geométrico, entonces se deberá esperar a que alcance el adecuado para abordarla.
• No se puede enseñar a una persona a razonar de determinada manera. Pero sí se puede, mediante actividades diseñadas para ello, ayudarla a que lo haga.

Esta última idea representa una similitud entre las teorías del aprendizaje constructivista y de Van Hiele.

Van Hiele formula una propuesta, desde una perspectiva constructivista, en cuanto que incluye la idea de que el alumno participa activamente en la construcción de su conocimiento. Para cada una de las cinco "fases de aprendizaje" que propone, indica cómo deben ser las actividades propuestas, la intervención del profesor, etc., para ayudar al estudiante a avanzar desde el nivel en el que se encuentra hasta el nivel siguiente. Es importante tener en cuenta que el paso de un nivel al siguiente requiere tiempo. Por tanto, no se puede pensar que una secuencia de actividades que recorra ordenadamente las fases asegurará la adquisición del nivel correspondiente en un período limitado de tiempo, aunque esté bien organizada, con suficientes actividades. Los estudiantes necesitan comprender cada uno de los objetivos que se proponen, lo cual puede ser lento.

El nivel 1 es denominado nivel de *reconocimiento o visualización*; el nivel 2, *nivel de análisis*; el nivel 3 *clasificación*; el nivel 4 *deducción formal*, y el nivel 5 *rigor*.

Los niveles de razonamiento de Van Hiele son los siguientes:

Nivel 1. *Reconocimiento o visualización*: Las figuras se describen por su aspecto general y no se reconocen en ellas propiedades que puedan generalizarse. En este nivel las descripciones suelen ser comparaciones con otras formas y en ellas suele hacerse alusión a características irrelevantes. No se reconocen partes o componentes de las figuras.

Nivel 2.*Análisis*: Se reconocen y describen las partes que conforman una figura y sus propiedades matemáticas, aunque de manera informal. Tal reconocimiento se logra a través de la observación, la experimentación y la deducción de otras propiedades; sin embargo, no se pueden clasificar familias de figuras, pues unas propiedades no se relacionan con otras.

Nivel 3. Clasificación: Se relacionan unas propiedades con otras por lo que pueden reconocerse familias de figuras; no obstante, el razonamiento se sigue apoyando en la manipulación. Puede elaborarse un enunciado formal pero no construirse una demostración, aunque puede seguirse y entenderse cuando el profesor la hace en el pizarrón.

Nivel 4. *Deducción formal*. Se realizan razonamientos lógicos formales y las demostraciones se vislumbran como único medio para validar una afirmación.
En este nivel los teoremas o axiomas adquieren sentido y se entiende su utilidad.

Nivel 5. Rigor. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar diferentes geometrías. Se trabaja de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos.
En la estrategia de enseñanza- aprendizaje que abordaremos sólo trabajaremos con los tres primeros niveles, y en alguna ocasión con el cuatro. El no considerar el quinto nivel se debe a que en éste se trabaja la geometría en abstracto y no es la finalidad de este trabajo. Por tal razón la propuesta didáctica se limita a desarrollar actividades de la enseñanza aprendizaje de las cónicas hasta el cuarto nivel del modelo de Van Hiele.
Como explican Jaime y Gutiérrez (1990) a cada nivel de razonamiento geométrico corresponde un tipo de lenguaje específico: existe una estrecha relación entre los niveles y el lenguaje. Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada nivel no solo se reflejan en la forma de resolver problemas sino también en la forma de expresarse o de interpretar el vocabulario.
Esto implica que una palabra puede entenderse de distinta forma en los distintos niveles de razonamiento y este hecho debe ser tomado muy en cuenta por el profesor. Dado que el lenguaje es la vía de comunicación entre docente alumno, si el primero quiere ser comprendido deberá dirigirse a sus alumnos con palabras adecuadas a su nivel de razonamiento y a partir de ahí transitar con ellos por cada etapa hasta alcanzar un nivel superior.
La progresión en y entre los niveles va muy unida a la mejora del lenguaje matemático necesario en el aprendizaje. No sé trata sólo de adquirir conocimientos matemáticos sino también de mejorar y ampliar las capacidades referidas al lenguaje necesario en cada nivel. En este modelo es muy importante que los alumnos expliquen lo que saben y cómo lo saben, no sólo que lo escriban como respuesta a un problema.
De acuerdo al modelo de Van Hiele, para pasar de un nivel de razonamiento geométrico al nivel inmediato superior es necesario que el estudiante realice distintas actividades, las cuales deben ser diseñadas para que transite por el nivel en el que se encuentra hacia el siguiente pasando localmente por cinco fases a las que se les llama *fases de aprendizaje*. Las fases no están asociadas a un nivel determinado, sino que, en cada nivel, el aprendizaje de un terminado contenido debe ser pensado con actividades de la fase 1 y continuar con actividades de las siguientes fases (Fernando Fouz, Berritzegune de Donosti 2004/2005).
Las características generales de las actividades en cada fase de aprendizaje son:

1. ***Información.*** En esta fase el docente realizará un diagnóstico sobre los conocimientos previos de sus alumnos con relación al nuevo saber que propondrá y el nivel de razonamiento por parte de los mismos. Además, las actividades deben revelar a los estudiantes el área de la geometría a estudiar; también tienen como objetivo que conozcan el material a utilizar y dirigir su atención hacia una nueva problemática. Los problemas que aquí se plantean, si se hace, no deben necesariamente ser resueltos; más bien, su función es hacer ver la necesidad del conocimiento matemático.
2. ***Orientación dirigida.*** En esta etapa las actividades deben enfocarse a delimitar los elementos principales –conceptos, propiedades, etc.– que los estudiantes deben reconocer y utilizar en el

razonamiento, es decir, los alumnos deben descubrir y comprender los conceptos y propiedades deseados. Los problemas deberán plantear una situación en cuya resolución aparezcan dichos elementos. Los conceptos y estructuras deben presentarse en forma progresiva.

3. ***Explicitación.*** Aquí los estudiantes deberán intercambiar sus experiencias, explicar cómo ha desarrollado sus actividades y justificar sus resultados. Es una fase de revisión del trabajo realizado y de perfeccionamiento del lenguaje (entendiéndose como el vocabulario correspondiente al nuevo nivel de razonamiento al que se desea acceder).

4. ***Orientación libre.*** En esta fase se plantean problemas más complejos donde los estudiantes puedan combinar sus conocimientos, aplicándolos a situaciones diferentes a las iniciales, donde deben emplear una nueva forma de razonamiento. Si en la primera fase no se resolvió algún problema, aquí se le puede reformular.

5. ***Integración.*** En esta etapa final las situaciones se revisan a fin de comparar y combinar los conceptos adquiridos. En esta fase conviene comprobar si el conocimiento fue adquirido.

Lo que Van Hiele llama *fases de aprendizaje* son etapas en las que se gradúan y organizan las actividades que deben realizar los estudiantes para que transiten por las experiencias que los llevarán a un nivel superior de razonamiento. A lo largo de estas fases el profesor debe procurar que los alumnos construyan la red mental de relaciones correspondientes al nivel de razonamiento al que deberán acceder, creando primero los vértices de la red y después las conexiones entre ellos. Dicho de otra manera: lo primero es que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que habrán de trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos (Jaime, A. y Gutiérrez, A. 1990).

El modelo Van Hiele de pensamiento geométrico puede ser usado como guía para la instrucción, así como una pauta para evaluar las habilidades de los alumnos (Van Hiele, P. 1986).

Es decir, el modelo de Van Hiele es una guía que orienta el proceso de instrucción y evaluación. Por naturaleza, las fases de aprendizaje ayudan a determinar las actividades que deben desarrollar los alumnos para potenciar la comprensión y el avance de un nivel de razonamiento al siguiente.

Por lo que a nosotros respecta, nos basaremos en el modelo de Van Hiele para estructurar los procesos didácticos empleados en el aprendizaje de las cónicas.

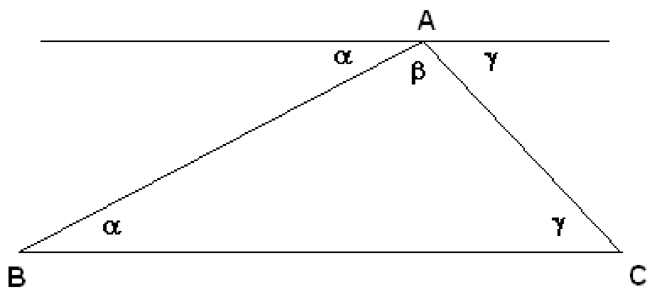
Por otra parte, considero que la experiencia personal en situaciones idóneas ayuda al alumno a lograr una adecuada representación simbólica de los problemas, y a relacionar la "geometría de las cónicas" con el álgebra, lo cual lo conduce al uso comprensivo de los razonamientos algebraicos.

La idea central del modelo de Van Hiele es, precisamente, que la adquisición de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de la experiencia del alumno. Desde nuestra perspectiva, este modelo proporciona la posibilidad de esas experiencias, a través de las "*fases de aprendizaje*".

METODOLOGÍA DE LA DISCIPLINA

Para lograr tales objetivos emplearemos la metodología ya señalada, la cual ofrece una propuesta integradora de las visiones sintética y analítica. Intento mostrar la posibilidad –y quizás la conveniencia- de abordar dicho tema combinando ambas visiones, las cuales se complementan entre sí.

En general, la síntesis consiste en la composición de elementos dados para obtener el conocimiento del conjunto. En geometría encontramos un ejemplo de esto en la prueba de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. Para ello, se componen los tres ángulos en un mismo vértice trazando por él una paralela al tercer lado.



Por análisis se entiende la descomposición del problema que se estudia a fin de conocer y examinar cada una de sus partes. En geometría podemos citar los procedimientos de obtención de áreas, por ejemplo, para el trapecio, descomponiéndolo en dos triángulos por medio de una diagonal.

“Queremos acabar reivindicando la necesidad imperiosa de seguir investigando como deberían conectarse, en la geometría de secundaria, las técnicas sintéticas con las analíticas” (Gascón, 2001, p.18). Es decir, las interrelaciones entre geometría sintética y geometría analítica son necesarias en la enseñanza de la geometría. Quién piense lo contrario, aduciendo que se trata de un cuerpo de conocimientos teóricos separados entre sí, ignora incluso la historia de la geometría, en la cual ambas facetas aparecen mezcladas tanto en la geometría griega como en la llamada geometría analítica. No debemos olvidar que cuando se utilizan modelos de representación, para interpretarlos es necesario distinguir entre objetos y relaciones geométricas, que son de naturaleza teórica, de sus manifestaciones en los diversos sistemas que conducen a realidades de tipo espacio-gráfico. La exposición teórica se organiza de manera sintética, mientras que el uso práctico de la geometría requiere del método analítico para reconocer los elementos implicados en los problemas bajo consideración.

Por otra parte, como a continuación se muestra, en la solución de problemas suele recurrirse indistintamente a ambos métodos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Circunferencia que pasa por tres puntos dados.

Solución sintética.

Se considera que P, Q, R son los tres puntos dados.

Con estos puntos se construye un triángulo PQR. Trazando las mediatrices de sus lados se halla un punto especial, el circuncentro *O*, que es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Por tanto, para resolver el problema basta con trazar las tres mediatrices para determinar *O* y dibujar la circunferencia de centro *O* y radio *OR*.

<u>*Solución Analítica*</u>.

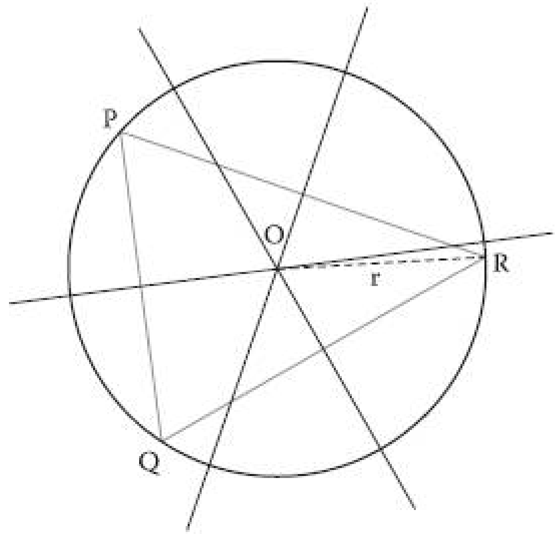


Figura 1. Circunferencia definida por tres puntos

Considerando los puntos de coordenadas $P= (p_1, p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$, y $R=(r_1,r_2)$, es usual hallar la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ que pasa por los tres puntos dados resolviendo el sistema:

dist(O, P)= dist(O, Q)
dist(O, P)= dist (O,R)

La solución es considerar que el centro, $O = (x, y)$, equidista de los puntos *P*, *Q*, *R* y resolver el sistema de las ecuaciones métricas correspondientes:
dist (O, P)= dist(O, Q)
dist(O, P)= dist (O,R)

La primera ecuación representa a la mediatriz del lado *PQ* y la segunda a la mediatriz del lado *PR*. La solución del sistema, que es la intersección de las dos mediatrices, es el centro de la circunferencia. Una vez determinado este punto el radio se halla calculando la distancia de *O* a cualquiera de los puntos dados.

Sin importar que en este caso haya resultado más sencillo aplicar el método sintético, lo que me interesa resaltar es la diferencia que hay en el razonamiento en ambos casos, pues éste se basa en dos ideas diferentes: en el caso sintético se utiliza una construcción basada en el concepto de mediatriz, mientras que en el analítico se supone dado el centro de la circunferencia y, por análisis, se concluye que sus coordenadas deben satisfacer cierto sistema de ecuaciones, el cual se resuelve mediante manipulación simbólica siguiendo las reglas del álgebra. La riqueza en el aprendizaje consiste en dominar ambas técnicas y comprender la relación entre ellas.

Para lograr lo anterior el profesor debe alejarse de lo que supone una secuenciación rígida de los contenidos geométricos. De no hacerlo, la empresa de enseñar geometría" puede resultar poco menos que inviable. De aquí que la conveniencia de abordar los problemas desde ambas perspectivas, la cual ayuda a construir situaciones de enseñanza capaces de interesar e integrar a los estudiantes en el discurso geométrico.

En resumen se espera que los alumnos desarrollen un mejor razonamiento geométrico y con ello una mejor manera de comprender la forma en que se relacionan la geometría y el álgebra en la resolución de problemas geométricos, en este caso los relacionados con las cónicas. Tener a su alcance métodos analíticos y sintéticos bien fundamentados les permite experimentar la geometría analítica desde una perspectiva diferente.

Capítulo IV

DESARROLLO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

El desarrollo de la estrategia didáctica se basa, como ya lo hemos mencionado, en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele del cual incluimos tres momentos.

El primero consiste en que el alumno construya con diversos medios las cónicas (regla y compás, material didáctico, software geogebra), con el objetivo de que conozca sus elementos así como sus propiedades geométricas.

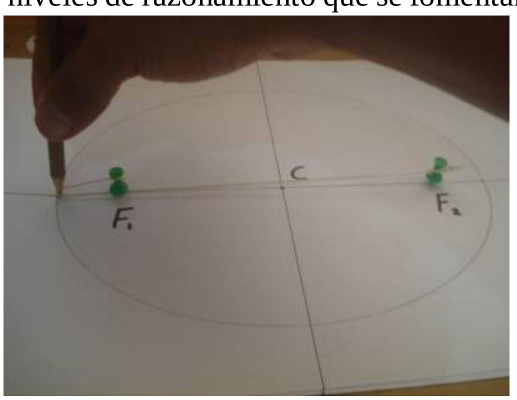
El segundo consiste en que el docente plantee situaciones problemáticas sobre las cónicas que involucren propiedades de las mismas, a fin de que el alumno pueda elaborar sus propias conjeturas. Esto permite relacionar las propiedades de estas curvas con el álgebra que se debe emplear para la resolución de los problemas.

El tercero consiste en que el alumno analice los resultados obtenidos a fin de que reflexione sobre el proceso de validación; esto, durante y al final del proceso.

EL reto es: (a) que los alumnos identifiquen y conozcan los elementos y propiedades de las cónicas mediante diferentes medios de construcción, (b) elaboren sus propias conjeturas y (c) relacionen las propiedades de las curvas con su representación algebraica a fin de resolver los problemas plateados. Finalmente, una vez obtenidos los resultados, el alumno reflexionará sobre ellos y podrá validarlos o no.

Veamos un ejemplo donde se desarrolla la estrategia didáctica y los momentos que la conforman.

El tema es “Definición de la elipse como lugar geométrico”. Se espera que el estudiante logre deducir la definición de elipse como lugar geométrico. Para que el aprendizaje sea significativo para el estudiante, la propuesta es que el mismo realice la construcción mecánicamente y a partir del concepto de distancia entre dos puntos deduzca la definición métrica de la elipse. Los niveles de razonamiento que se fomentan en las actividades son el **reconocimiento** y el **análisis** de los elementos que intervienen en la definición.



En la fase de información se realiza un diagnóstico sobre los conocimientos previos del estudiante con relación a la distancia entre dos puntos. Para tal propósito se le presentan diversas situaciones donde se presenta el concepto de distancia entre dos puntos. Posteriormente, en la fase de orientación dirigida, el estudiante construye la elipse con base en el método del jardinero. Esto constituye una construcción sintética que le permite visualizar las propiedades de los puntos de la elipse. De esta manera llegar a su definición como lugar geométrico. La siguiente imagen muestra ese método

En un **segundo momento** se pide al estudiante que observe el modelo de construcción, que describa la curva que se genera, que reflexione sobre si los puntos de la elipse tiene alguna propiedad métrica especial a fin de que lleguen a la cuestión de la suma de distancias a esos dos puntos fijos llamados focos. Esto se debe lograr a través de la investigación del proceso mismo de construcción.

En un **tercer momento,** en la fase de explicitación, los estudiantes intercambian (por parejas) los resultados obtenidos respecto a la suma de distancias de los puntos de la elipse con respecto a los focos. El propósito es verificar que la suma de distancias de los puntos de la elipse a los focos es una constante. La justificación del resultado se basa en el hecho de que la longitud del hilo es constante. De este modo se llega al concepto de la elipse como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante.

Como se ve, en esta fase entran en juego el método sintético (construcción de la curva) y el método analítico (por ejemplo, al responder a la pregunta ¿por qué todos los puntos tienen la misma suma de distancias a los focos?). Esto conduce al estudiante de EMS a adquirir el conocimiento conforme a las pautas del método que proponemos.

El siguiente cuadro muestra las etapas de la estrategia didáctica propuesta. Esto incluye el marco teórico, las estrategias de enseñanza-aprendizaje y los materiales didácticos utilizados.

Desarrollo de la estrategia didáctica	Marco teórico didáctico	Marco teórico disciplinario	Estrategias de enseñanza aprendizaje	Materiales Didácticos y su empleo
Información Orientación dirigida Explicitación Orientación libre Proceso de validación Integración	Aprendizaje significativo Enfoque constructivista Modelo de Van Hiele.	Método Analítico, método sintético. Contexto histórico de las Cónicas. Método de las coordenadas.	Actividad introductoria Discusiones guiadas. Objetivos claros. Construcción de las cónicas Mapas conceptuales. Trabajo cooperativo. Problemas propuestos sobre cónicas situados dentro de la misma disciplina.	Uso de regla y compás, graficación por medio del software geogebra.
Evaluación	Evaluación del aprendizaje significativo. Metacognición y autorregulación del aprendizaje. Evaluación del razonamiento geométrico por	Validación a través de las definiciones, teoremas, algoritmos y procedimientos que se desarrollan alrededor del	Identificar las características básicas del problema. Expresar la comprensión del problema. Cotejar la comprensión	Exposición del proceso y resultado de situaciones problemáticas planteadas por medio del pizarrón, o con

	medio de las fases de aprendizaje. Modelo de Van Hiele.	tema de las cónicas.	lograda con otros compañeros	un proyector y computadora

Propósitos generales de la secuencia sobre el tema: Elipse, circunferencia y sus ecuaciones cartesianas.

Que el estudiante reafirme el método analítico en la obtención de las ecuaciones de la elipse y la circunferencia, y que avance en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano.

Aprendizajes esperados

Se espera que el estudiante:

1) conozca cómo se genera una superficie cónica e identifique los elementos que la definen a partir de observar un experimento.
2) describa el aspecto general de la elipse y comprenda el tipo de corte que debe hacerse para obtener la elipse al efectuar cierto corte a un cono.
3) reconozca que la curva construida es una elipse, obtenga la definición de elipse como lugar geométrico, reconozca los tipos de simetría de esta curva e identifique los elementos que la definen mediante una construcción mecánica de la curva. Asimismo, se espera que deduzca la expresión con radicales que expresa la propiedad de los puntos de dicho lugar geométrico.
4) A partir de lo anterior, se espera que el estudiante comprenda cómo se obtiene la ecuación ordinaria de la elipse fuera del origen.
Los puntos anteriores están relacionados con los siguientes puntos del programa del CCH:

- Obtención de las otras formas de la elipse a partir de su ecuación ordinaria.
- Tránsito de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria y viceversa (con el método de la completación del cuadrado).
- Determinación de los elementos esenciales de una elipse a partir de su ecuación (dada en la forma ordinaria o general), y el uso de éstos al bosquejar su gráfica.
- Ayuda al alumno al concatenar con coherencia sus argumentos y deducciones en todo el proceso, y
- Aplicación de los conocimientos adquiridos en la resolución de diversos problemas.

5) Con relación a la circunferencia se espera que el estudiante:

- reconozca a la circunferencia como un lugar geométrico de gran frecuencia en su entorno,

- obtenga el lugar geométrico de la circunferencia como caso límite de la elipse,
- identifique los elementos que determinan una circunferencia,
- obtenga la definición de circunferencia como lugar geométrico,
- deduzca la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen, a partir de la ecuación ordinaria de la elipse,
- transite de la forma ordinaria a la forma general y viceversa utilizando el método de completación de cuadrados,
- determine el centro y el radio de una circunferencia a partir de su ecuación, tanto en la forma general como en la ordinaria y la utilización de estos elementos para construir la gráfica,
- identifique si la ecuación ordinaria de una elipse corresponde a un caso límite como el de la circunferencia; en caso contrario, indique a cuál de los ejes de coordenadas es paralelo el eje mayor, y
- aplique los conocimientos adquiridos en la resolución de diversos problemas.

Secuencia didáctica sobre los temas de la elipse y la circunferencia.

Sesión 1

Tema: Superficie Cónica

El **aprendizaje esperado** es que el estudiante conozca cómo se genera una superficie cónica, e identifique los elementos que la definen mediante un experimento.
El ***aprendizaje significativo*** esperado es que el estudiante conozca como se forma una superficie cónica a partir de la *construcción de un modelo de la superficie con material didáctico* y ***observe, identifique*** *y* ***analice*** *los elementos que la generan*.
Los ***niveles de razonamiento*** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, dado que el estudiante visualiza la superficie cónica al generarse mediante el experimento; 2) el del **análisis**, donde el estudiante reconoce y describe los elementos que intervienen en la formación de la superficie cónica como son el eje, el vértice, la generatriz, y la manera en que se genera.

Material: Dos palos de madera para papalote de 45 cm aproximadamente, resistol, pintura morada y negra.

Inicio

Orientación dirigida.- Para propiciar que el estudiante experimente cómo se genera una superficie cónica, se le pide que corte 5 cm uno de los palos y lo pinte de morado, pintando de negro el otro palo. A continuación se define como *eje* al palo mayor (color negro) y como *generatriz* al palo menor (color morado). Se pide que peguen los dos palos en forma de "X". El punto donde se pegan se define como el *vértice* del cono.

Desarrollo

Posteriormente, el estudiante toma el palo negro por los extremos y lo hace girar con la mano derecha, mientras que con la izquierda sólo lo sostiene, como lo muestran las siguientes imágenes.

Explicitación. En esta fase se pide al estudiante que explique cómo se genera la superficie cónica. Para tal propósito se emplea como estrategia un *diálogo guiado* por parte del docente por medio de preguntas y respuestas, de tal manera que las preguntas tengan como finalidad que el estudiante explique por sí mismo el proceso.

- ¿Qué elementos intervienen al generarse la superficie cónica?
- Realiza un dibujo y explica con tus propias palabras, ¿cómo se genera una superficie cónica?

Cierre

Integración. En esta fase se les pide a los estudiantes que en pareja revisen sus respuestas con la finalidad de compararlas y redactar entre ambos la mejor explicación sobre cómo se genera la superficie cónica, pidiéndoles que utilicen los términos de los elementos que intervienen. Al final, se hace una revisión grupal para llegar a una definición general como la siguiente:
"Una superficie cónica se genera por la rotación de una recta "**g**" llamada generatriz alrededor de otra recta fija "**e**" llamada eje, a la que corta en un punto "**v**" llamado vértice en forma oblicua"

Sesión 2

Tema: Secciones Cónicas

Los ***aprendizajes esperados*** son que el estudiante

- conozca el contexto que rodeaba a Apolonio de Perga y su descubrimiento de las secciones cónicas a partir de la intersección de una superficie cónica y un plano,
- efectúe un corte a un cono de papel esperando que describa el aspecto general de la elipse y aprenda qué tipo de corte debe hacerse para obtener la elipse.

El ***aprendizaje significativo*** que se espera es que el estudiante, después de conocer el contexto histórico sobre el descubrimiento de la elipse y de hacer un tipo de corte a un cono de papel, comprenda el significado geométrico de obtener una elipse al intersectar un cono con un plano.
Los ***niveles de razonamiento*** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, dado que el estudiante visualiza la elipse al hacer un tipo de corte a un cono; 2) el del **análisis**, donde el estudiante reconoce la forma de la elipse, la describe y reflexiona sobre el tipo de corte que realizó para poder obtenerla.
Material: Un vaso cónico de papel, un lápiz, plumón de color negro, tijeras, escuadras.

Inicio

Información. Al estudiante se le pide que realice la siguiente lectura:

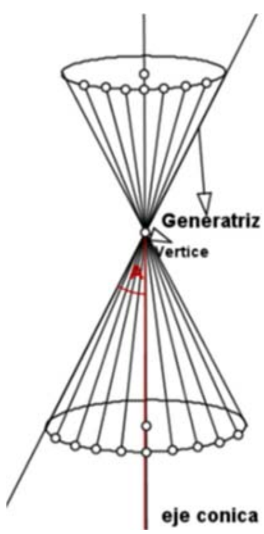
Apolonio de Perga (ciudad al sur de Turquía frente a la costa de Egipcia) vivió entre el 262 a.C. y el 190 a.C. Está considerado entre los más grandes matemáticos griegos junto a Euclides

y Arquímedes. Se sabe, que escribió numerosas obras de geometría las cuales se han perdido, aunque algo sabemos de su contenido gracias a Pappus (siglo IV d.C.) que hizo una recopilación de sus teoremas. Sobresale su magnífico tratado "Secciones Cónicas" que fue referencia obligada para las generaciones posteriores de matemáticos que estudiaron los lugares geométricos del plano. Consta de ocho libros de los que el último se ha perdido. En este tratado Apolonio investiga las propiedades de las curvas llamadas secciones cónicas (circunferencia, elipse, hipérbola y parábola) y demuestra que pueden obtenerse variando la inclinación de un plano que corta a un cono sin necesidad de disponer de un cono distinto para cada sección cónica." (Pérez, 2000, pág. 197).

Para comprender el concepto intuitivo de las cónicas, Apolonio dio a conocer en primera instancia las siguientes definiciones fundamentales.

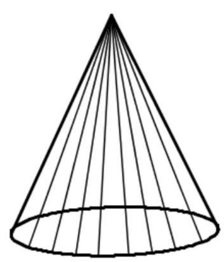
Superficie cónica

Si desde un punto fijo exterior al plano de un círculo, se traza una recta que se prolongue en sus dos direcciones y se le hace recorrer la circunferencia hasta volver a su posición inicial, entonces a la superficie descrita por la recta que se compone de dos superficies opuestas por el vértice y que se extiende hasta el infinito se llamará superficie cónica, la recta se llamará generatriz, al punto fijo vértice y a la recta trazada desde el vértice al centro del círculo se llamará eje como lo muestra la siguiente figura.



A la figura limitada por el círculo y la superficie cónica comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo se llamará cono.

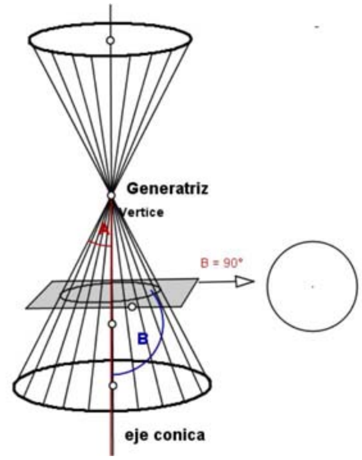
F



Si el eje del cono es perpendicular a la base será un cono recto y si no es perpendicular a la base es un cono oblicuo.

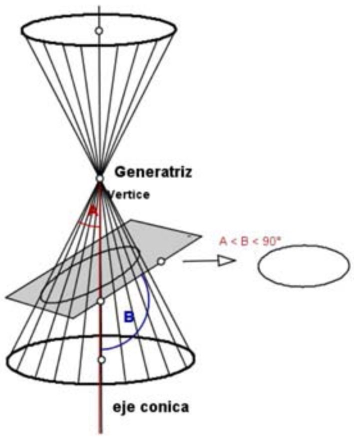
En primera estancia Apolonio se dio cuenta de que al cortar cualquier superficie cónica (recta u oblicua) de diferentes formas con un plano variando su ángulo de corte con respecto al eje, siempre se obtienen los mismos cuatro lugares geométricos que Menecmo había descubierto con anterioridad. A estos lugares geométricos hoy en día se les conoce como secciones cónicas o simplemente cónicas. Además Apolonio bautizó a las cuatro secciones cónicas con el nombre de circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

Circunferencia



Es la curva cerrada que se genera al cortar la superficie cónica con un plano perpendicular al eje del cono, es decir el plano forma un ángulo de 90° con el eje, como se muestra en la siguiente figura.

Círculo de Apolonio.

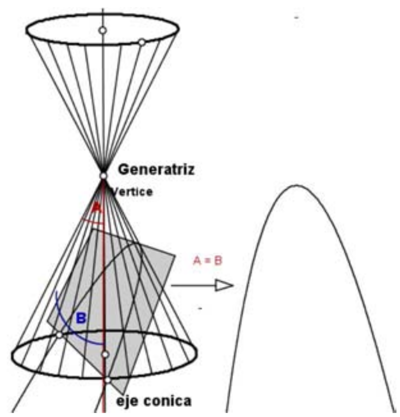


Elipse

Es la curva cerrada que se genera al cortar la superficie cónica con un plano que forma un ángulo superior, al ángulo formado por una generatriz del cono y su eje, e inferior a 90° como se muestra en la siguiente figura.

Elipse de Apolonio

Parábola



Es la curva abierta que se genera al cortar la superficie cónica con un plano que forma un ángulo igual al ángulo formado por una generatriz del cono y su eje, es decir que el plano es paralelo a una generatriz del cono, como se muestra en la siguiente figura.

Parábola de Apolonio

Nota: omitimos el caso de al hipérbola dado que esta curva no es objeto de estudio en este trabajo.

Desarrollo

Orientación dirigida. Por parejas se pide que los estudiantes comenten y reflexionen detalladamente sobre la lectura anterior y realicen un mapa conceptual sobre la lectura. Posteriormente, para que se comprenda a nivel grupal la lectura se pide que se expresen las ideas principalmente de la misma.

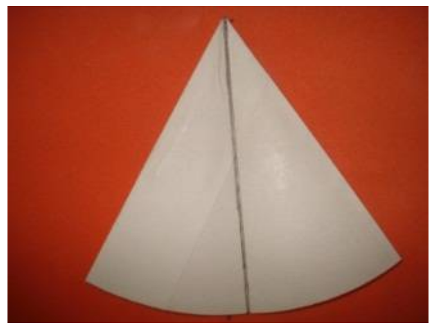
Posteriormente se les solicita a los estudiantes su material didáctico para llevar a cabo la siguiente actividad:

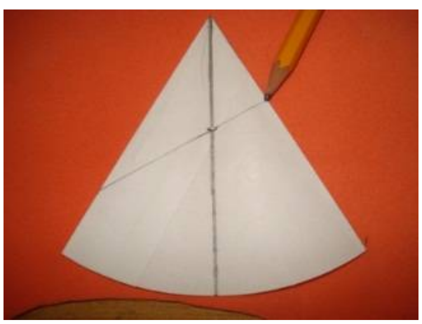
- doblar el cono de papel a la mitad para trazar el eje y remarcarlo con lápiz;
- trazar con lápiz una línea oblicua al eje del cono,
- identificar los ángulos A = α (ángulo formado por la generatriz y el eje del cono, también llamado ángulo de conicidad) y B = β (ángulo formado por el corte y el eje del cono)

  Nota: Por comodidad en la notación utilizaremos α y β.
- Recortar con tijeras la línea oblicua;
- Observar desde arriba el corte realizado en el cono y reconocer de ésta manera la forma de la elipse.

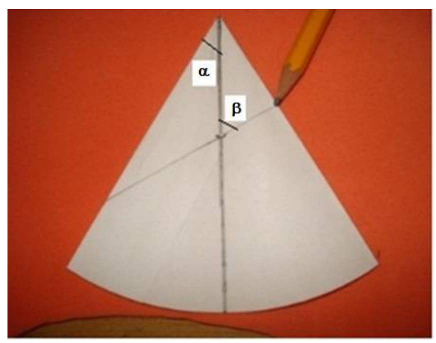
Veamos las siguientes imágenes, las cuales muestran los trazos y el corte que debemos realizar para obtener la elipse.

i)

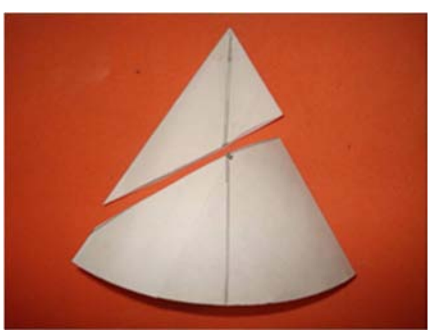




iii)



iv)



v)

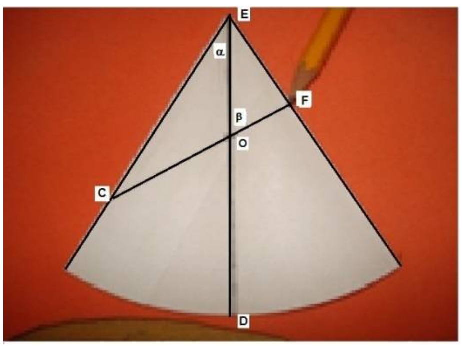
vi)

Cierre

Explicitación. Para lograr que los estudiantes describan con sus propias palabras el aspecto general de la elipse trabajamos las siguientes preguntas y actividades:

- Describe con tus propias palabras como es la figura que encontraste después del corte, ¿a qué se parece la curva?
- Dibuja en el siguiente recuadro la figura que obtuviste al hacer el corte al cono.

- La siguiente figura recrea los ángulos α y β que se forman al trazar la recta oblicua sobre el eje del cono. Mide el ángulo α y el β con el transportador ¿Cómo son los ángulos α y β?



Observa la imagen anterior y completa el siguiente enunciado:
"El corte representado gráficamente por el segmento CF corta a las generatrices de los extremos en los puntos _____ y ______ y al eje en el punto____. De hecho corta a todas las ____________ del cono. Por eso decimos: la sección cónica producida por un plano que interseca a todas las generatrices de un mismo lado del vértice es una elipse."
Para confirmar la definición de elipse dada por Apolonio, se deja la siguiente tarea.
Tarea: Con base en la figura anterior, demuestra que el ángulo de corte con respecto al eje es mayor que el ángulo formado por una generatriz del cono y su eje, pero menor que 90°, es decir, demostrar que $\alpha < \beta < 90°$.

Sesión 3

Tema: Definición de la elipse como lugar geométrico

El **aprendizaje esperado** es que el alumno obtenga la definición de elipse como lugar geométrico.
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno descubra la definición de la elipse como lugar geométrico a partir del concepto de distancia entre dos puntos.
Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza la elipse mediante una construcción mecánica; 2) el del **análisis**, donde el estudiante reconoce y describe los elementos que intervienen en la definición de la

elipse como son los focos, el concepto de distancia entre dos puntos y la propiedad que cumplen los puntos de una elipse.

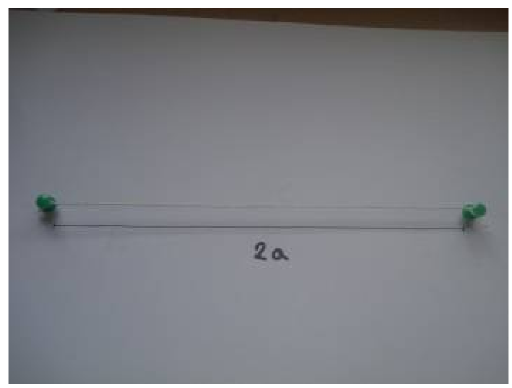
Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, hojas blancas tamaño oficio, plumón negro, lápiz.

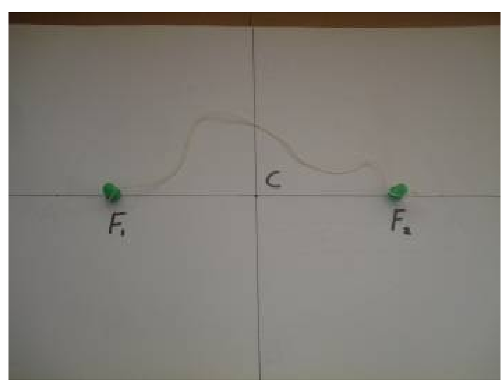
Inicio

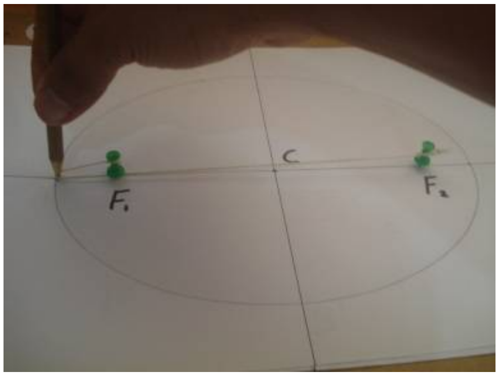
Información. En esta fase se realiza un diagnóstico sobre los conocimientos previos del estudiante con relación a la distancia entre dos puntos. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que consiste en preguntar a los alumnos diversas situaciones donde se presenta el concepto de distancia entre dos puntos. Por ejemplo, ¿si un carro C_1 recorre la distancia de un punto P a otro punto Q y otro carro C_2 recorre la distancia entre los puntos R y S (utilizando coordenadas específicas), ¿cuál de los dos carros recorre mayor distancia? O bien, si tenemos un triángulo de vértices A, B y C (especificado por sus coordenadas), ¿cómo calculas su perímetro? Al respecto, se puede aprovechar el ejemplo para hacer ver al alumno que el triángulo en cuestión verifica la desigualdad del triángulo, es decir, comprobar que la distancia de A a B es menor que la suma de las distancias AC y CB.

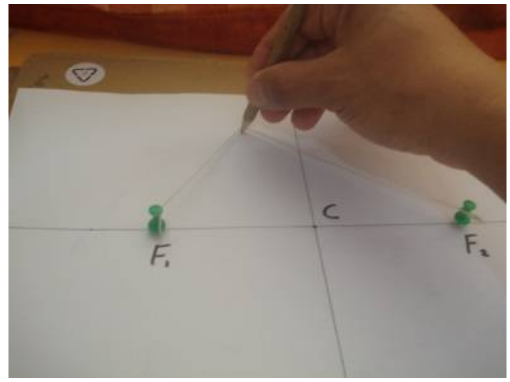
Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase el alumno construye la elipse por el método del jardinero. Tal construcción se basa en una técnica sintética. Lo primero que debe hacer el alumno es dibujar dos líneas rectas, una horizontal (llamado *eje focal*) y otra vertical (*eje normal*), en una tabla de madera o cartón. Al punto de intersección de las rectas se le llama *centro* y se le denota por la letra **C**. Sobre la línea horizontal se marcan dos puntos F1 y F2 que se encuentren a la misma distancia del punto **C**. Después, se toma un valor **a** > CF1 y una cuerda de longitud **2a**. Finalmente, en los puntos F1 y F2, llamados *focos*, se sujetan (clavan) dos chinches o tachuelas.
Enseguida con el lápiz se dibuja la elipse manteniendo el hilo tenso durante todo el trazo, tal
como se ve en la figura siguiente

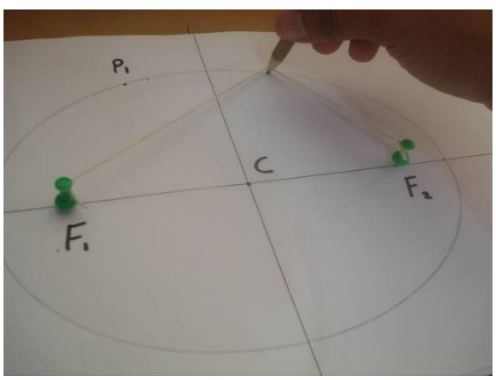


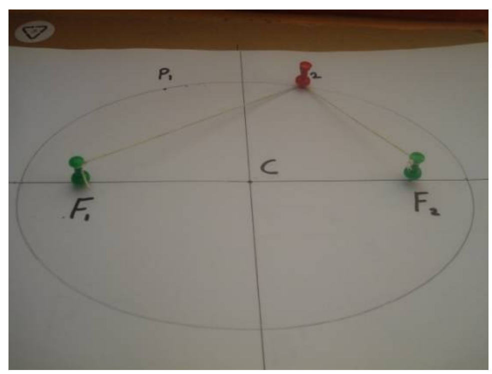


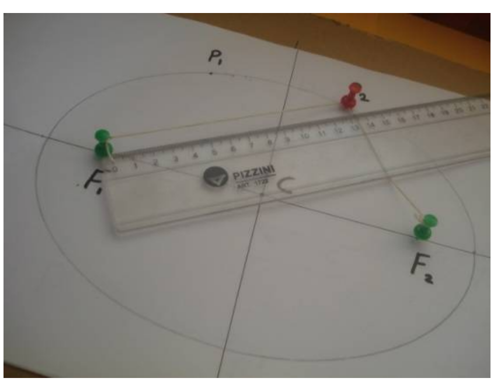


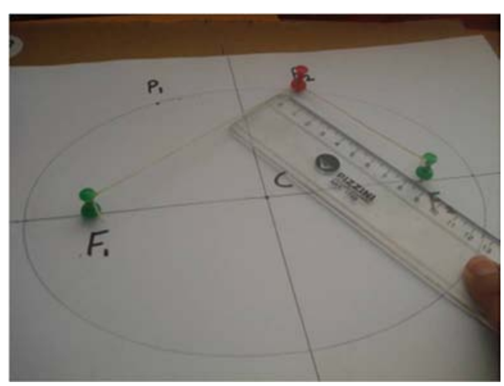


Posteriormente se pide al alumno que observe lo sucedido en la construcción para que logre identificar el tipo de curva que se genera, así como algunos otros aspectos importantes que se quieran remarcar. Para ello se le pide y preguntan cosas como “describe con tus palabras que forma tiene la curva que acabas de trazar”, “si marcamos un punto P_1 en la curva (sujetado por una tachuela), y otro punto cualquiera P_2, ¿cómo es la distancia $F_1P_1 + F_2P_1$ con la distancia $F_1P_2+F_2P_2$?” o bien, “comprueba lo anterior midiendo la suma de distancias con tu regla” o “¿A cuál de las cónicas descubiertas por Apolonio se asemeja esta curva?”. Al respecto, son muchas las cuestiones por atender, las cuales incluyen preguntas como “¿y si marcamos otro punto P_3 y medimos las distancias $F_1P_3 + F_2P_3$, cómo es esta suma de distancias respecto a las anteriores?”







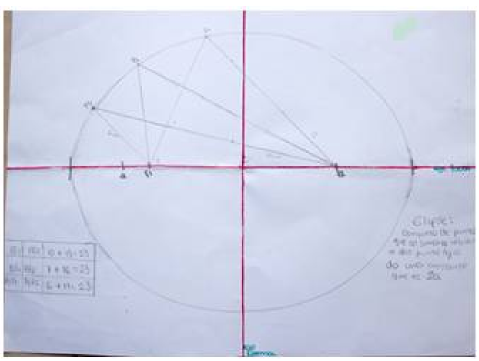


En este caso, para apoyar la definición de la elipse como lugar geométrico en el plano es recomendable que los estudiantes elaboren una tabla para observar con claridad la existencia de un patrón numérico. La tabla contendrá tres columnas. En la primer columna se escribe la distancia del punto P de la elipse al punto F_1, en la segunda la distancia del mismo punto P al punto F_2 y en la tercera columna se escribe el resultado de la suma de estas distancias. A partir del análisis de dicha tabla es muy probable que se compruebe la definición de elipse como lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es una constante.
La tabla tendrá el siguiente aspecto:

Distancia del punto P al foco F_1	Distancia del punto P al foco F_2	Suma de distancia del punto P a los focos F_1 y F_2
P_1F_1 =	P_1F_2 =	$P_1F_1 + P_1F_2$ =
P_2F_1 =	P_2F_2 =	$P_2F_1 + P_2F_1$ =
P_3F_1 =	P_3F_2 =	$P_3F_1 + P_3F_2$ =
P_4F_1 =	P_4F_2 =	$P_4F_1 + P_4F_2$ =

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes intercambian, por parejas, los resultados obtenidos respecto a la suma de distancias de los puntos P considerados de la elipse con respecto a los focos F_1 y F_2. El propósito es verificar que la suma de distancias todos ellos a los focos es constante y vale 2a. Es importante tomar en cuenta que puede haber una variación en las mediciones, esto debido a los errores que se puedan presentar al realizar la medición. La justificación del resultado se basa en el hecho de que la longitud del hilo es igual a 2a.



Integración. Para finalizar, mediante una revisión grupal, se reitera el concepto de "elipse" como el lugar geométrico de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante igual a 2a. Para ello conviene que cada estudiante escriba con sus propias palabras la definición del concepto de elipse al que se llegó.

Tarea: Se deja al estudiante que con geogebra trace una elipse, localice algunos puntos y verifique que se cumple la definición dada de este concepto.

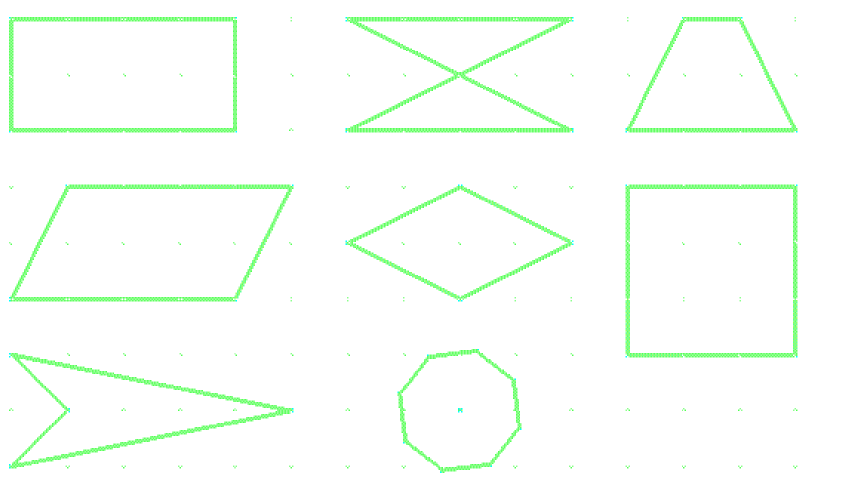
Sesión 4

Tema: Propiedades de simetría y elementos que definen a la elipse.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno comprenda geométricamente las propiedades de simetría de la elipse.
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno recuerde el concepto de simetría axial y central y pueda comprobar las simetrías de la elipse.
Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, que el estudiante visualice las simetrías axial y central de la elipse, 2) el del **análisis**, donde el estudiante reconoce las simetrías de la elipse geométricamente, aplicando las propiedades de simetría axial y central.
Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, hojas blancas tamaño oficio, papel albanene tamaño oficio, escuadras, plumón negro, lápiz

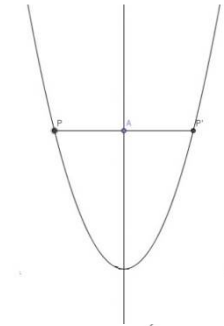
Inicio

Información. En esta fase se investiga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a los conceptos de simetría axial y central. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene situaciones donde se presentan los conceptos de simetría axial y central. Posteriormente, para que la idea de simetría sea comprendida se enuncian las condiciones geométricas que debe cumplir una curva para tener simetría axial y central. Esto con el propósito de que los estudiantes activen, reflexionen y compartan sus conocimientos.
Si se traza una recta (llamada eje de simetría) que divida en dos partes iguales una figura, de manera que si plegamos el plano por ese eje las dos partes coincidan, se dice que la figura tiene simetría axial.
De las siguientes figuras determina cuál de ellas tiene simetría axial, y encuentra todos sus ejes de simetría.

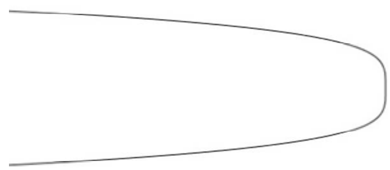


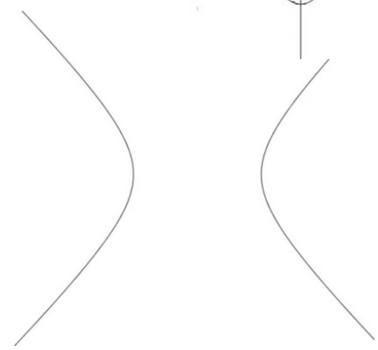
Condición geométrica de simetría axial.

Decimos que una curva C es simétrica respecto a una recta L cuando para cada punto P de la curva hay un punto P’ al otro lado de L de modo que el segmento PP’ es perpendicular a L y L pasa por su punto medio.



Di, utilizando la definición anterior de simetría axial, ¿cuáles curvas de las siguientes tienen simetría axial?

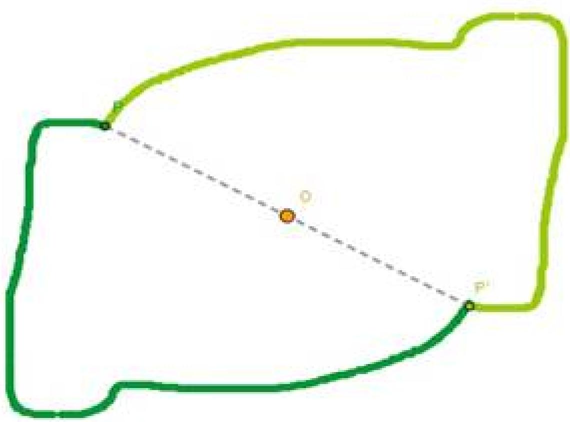




Se dice que una figura geométrica F tiene simetría central en un punto O, si al trazar desde un punto P cualquiera de la figura una recta L que pase por O, a P le corresponderá otro punto P’ de L y F tal que O es el punto medio del segmento PP’.

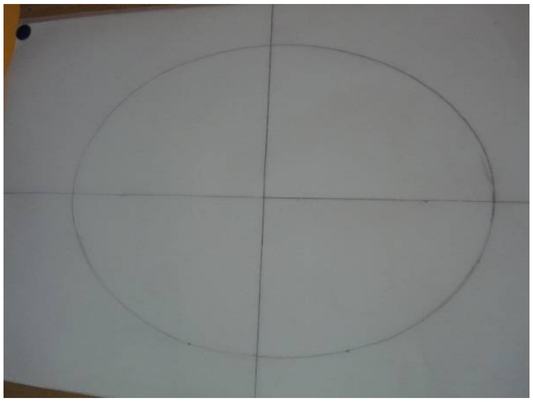
Ejemplo.

La siguiente figura tiene simetría central. Compruébalo con una regla graduada viendo que la condición geométrica anterior se cumple para tres o más de sus puntos.



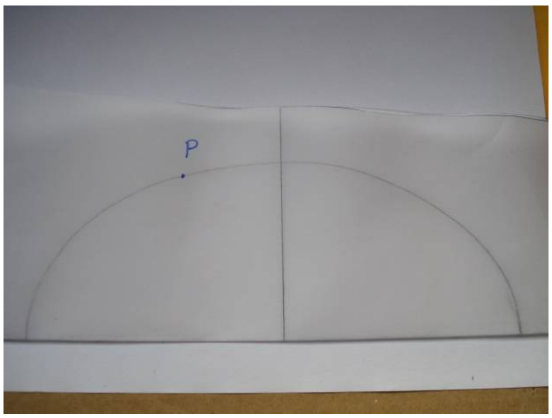
<u>Desarrollo</u>

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que trace con el método del jardinero una elipse y que compruebe si tiene simetría axial y central, mediante la siguiente actividad. Coloca el cartón rectangular y sobre él una hoja blanca tamaño oficio y encima una hoja de papel albanene. Traza la elipse con el método del jardinero y su eje normal y focal como lo muestra la siguiente figura



Localiza un punto P en la elipse, realiza un pliegue sobre el eje focal, ¿coinciden las dos partes de la curva?

Localiza el punto correspondiente a P al hacer el pliegue y llámalo P'. Traza el segmento PP'.



Mide con el transportador el ángulo entre el segmento PP' y al eje focal, ¿cómo es el ángulo?

Verifica con la regla si el eje focal pasa por el punto medio de la cuerda PP'.

Esto es, define como O al punto de intersección de la cuerda y comprueba si el punto O es punto medio de la cuerda PP'. Cuál es tu conclusión: ¿Es simétrica la elipse respecto al eje focal?

De la misma manera se le pide al estudiante que pruebe si la elipse tiene simetría respecto a al eje normal utilizando el mismo procedimiento.

Posteriormente se le pide que pruebe si la elipse tiene simetría central respecto al punto C. El procedimiento es el siguiente:

Localiza un punto Q en la elipse, traza una línea recta que parta del punto Q y que pase por el punto C de la elipse de tal manera que intersecte a la elipse en otro punto Q'.

Mide con la regla el segmento QC y CQ' ¿cómo son sus medidas? La conclusión a la que deberás llegar es que C es el punto medio de QQ', es decir, QC = CQ' y como consecuencia la elipse tiene simetría central respecto a este punto.

Cierre

Explicitación. En esta fase se examina el trabajo realizado de la siguiente manera. En parejas revisan que se cumplan las propiedades de simetría axial (con respecto al eje focal y normal) y central en el trabajo de su compañero. Posteriormente en discusión grupal los estudiantes explican cómo se comprobó la simetría axial y central en la elipse.

Tarea. Se les pide que realicen un mapa conceptual sobre los temas de simetría axial y central, donde expliquen las propiedades y hablen de las simetrías de la elipse como ejemplo.

Sesión 5

Tema: Elementos que definen a la elipse.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca los elementos que definen a la circunferencia.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno con base en las propiedades de simetría de la elipse, defina los elementos que forman la elipse.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza todos los elementos que componen a la elipse y 2) el del **análisis**, donde el estudiante examina las propiedades que tienen cada uno de los elementos que integran a una elipse.

Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, hojas blancas tamaño oficio, escuadras, plumón negro, lápiz, color rojo.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase se le pide al estudiante que nuevamente trace la elipse por el método del jardinero, y que localice en la gráfica los elementos ya conocidos como son los focos F_1, F_2, el centro C punto de intersección del eje focal L y su normal L'. Asimismo, se le pide que escriba las propiedades de los elementos que se generan. Para que el estudiante comprenda mejor éstas propiedades, se le pide que elabore una tabla donde aparezcan los elementos de la elipse por un lado y las propiedades de estos por el otro. Ver tabla 2. Por ejemplo, como por construcción F_1 y F_2 se localizan a la misma distancia del centro C, entonces C es punto medio del segmento $F_1 F_2$. Definimos la distancia CF_1 con la letra c, por lo cual la distancia entre los focos es igual a 2c.

TABLA 2

Elemento de la elipse	**Propiedades y relaciones con otros elementos**
Focos F_1 y F_2	$F_1F_2=2c$ (distancia entre los focos) C es el punto medio de F_1F_2, esto implica $F_1C=CF_2$. La distancia de C a cualquier foco es c. Se escribe $F_1C=CF_2 = c$
Eje focal L	
Eje normal L'	
Centro C	
Vértices V_1 y V_2	
Eje mayor V_1V_2	
Eje menor B_1B_2	
Extremos del eje menor B_1 y B_2	
Cuerda	
Lado recto	
Diámetro	

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se definen otros elementos de la elipse. Se pide al estudiante que localice en la elipse construida tales elementos, cómo se denotan y nombran, que escriba sus propiedades en la tabla 2 y conteste algunas preguntas.

Localiza con rojo los puntos donde el eje focal corta a la elipse, denótalos con V_1 y V_2 y llámalos *vértices*. Como la elipse es simétrica respecto al eje normal, entonces C también es punto medio del segmento V_1V_2 el cual es llamado *eje mayor*. Remárcalo con color rojo. Definimos la distancia CV_1 con la letra a, por lo tanto la distancia entre los vértices es 2a. Dicha cantidad es la constante que define a la elipse, como ya lo habíamos comprobado.

Localiza con azul los puntos donde el eje normal corta a la elipse en dos puntos B_1 y B_2. Como la elipse es simétrica respecto al eje focal, entonces también C es punto medio del segmento B_1B_2 el cual es llamado *eje menor*. Remarca el eje menor con color azul. Definimos la distancia CB_1 con la letra b, por lo cual la distancia entre B_1 y B_2 es 2b.

Une dos puntos D_1 y D_2 cualesquiera de la elipse. Al segmento D_1D_2 se le llama cuerda. Remarca la cuerda con color verde.

Traza una cuerda que pase por uno de los focos de la elipse, denota a la cuerda como E_1E_2. A esta cuerda se le llama *cuerda focal*. Remarca la cuerda focal con color café.Traza la cuerda focal que sea perpendicular al eje focal y denota la cuerda focal como G_1G_2; a tal cuerda se le llama *lado recto*. Remarca el lado recto con color anaranjado. ¿Cuántos lados rectos hay en una elipse?

Traza una cuerda que pase por el centro C, denotar a la cuerda con H_1H_2. A una cuerda que pasa por el centro de la elipse se le llama *diámetro*.

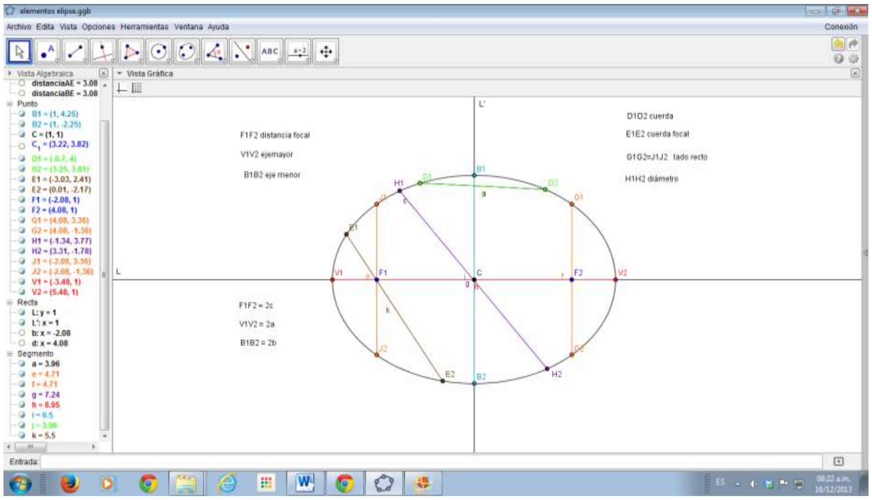
Cierre

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen sus tablas de elementos, con el objetivo de mejorar la información de las mismas.

Integración. Al terminar, se revisa el trabajo de cada equipo en forma grupal, con el fin de que todo el grupo obtenga los conocimientos sobre los elementos de la elipse y sus propiedades.

Tarea: Se deja al estudiante que con geogebra trace una elipse, localice todos sus elementos, denotando cada uno de ellos con letras y escriba explícitamente sus nombres.

Ejemplo.



Sesión 6

Tema: Ecuación ordinaria de la elipse con centro el origen y cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno deduzca la ecuación ordinaria de la elipse con centro el origen y cuyos ejes focal y normal coincidan con los ejes coordenados X e Y.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno deduzca, con base en la definición de elipse, la ecuación ordinaria de una elipse con centro el origen y cuyos ejes coincidan con los ejes coordenados y además indique el tipo de curva de que se trata según que el eje focal coincida con el eje X o Y.

Los niveles de razonamiento que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza a la elipse según la posición que presente en el plano cartesiano, 2) el de **síntesis y deducción formal**, donde el estudiante deduce la ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen y ejes coincidentes con los coordenados, 3) el de **clasificación**, donde el estudiante relaciona las diferentes posiciones que puede tener la elipse con sus ecuaciones de tal manera que puede reconocer las elipses por ejemplo, cuyo eje focal coincide con el eje X, o aquellas cuyo eje focal coincide con el eje Y.

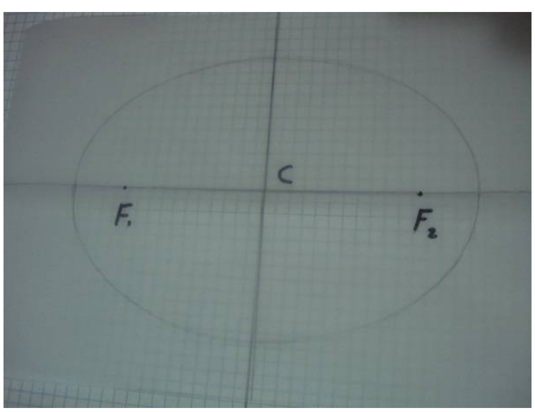
Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado, escuadras, hojas de papel albanene, plumón negro, lápiz, colores.

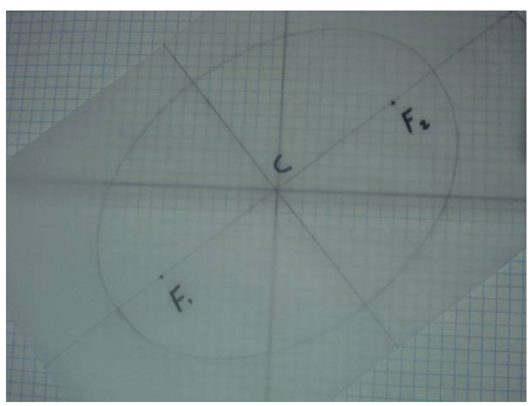
Inicio

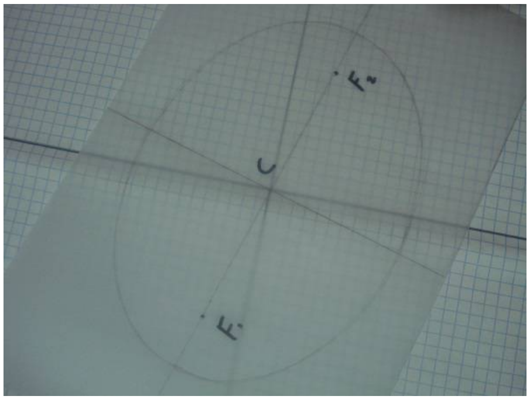
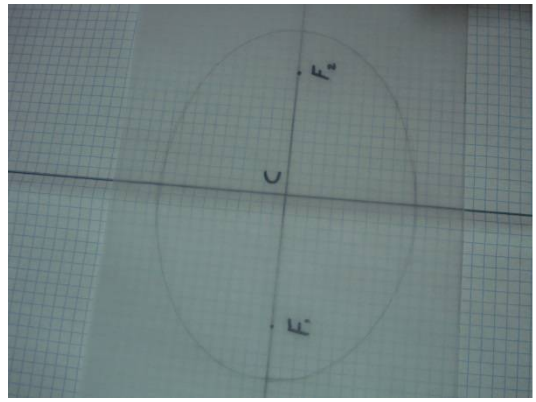
Orientación dirigida. Se le pide al estudiante que en un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado trace los ejes coordenados. Asimismo que trace en papel albanene por el método del jardinero una elipse con sus respectivos ejes focal y normal, los focos F_1, F_2, el centro C y cuya distancia focal mida 2c.

A continuación se le pide que coloque la elipse hecha en papel albanene sobre el papel cuadriculado de tal manera que su origen coincida con el origen de los ejes cartesianos.

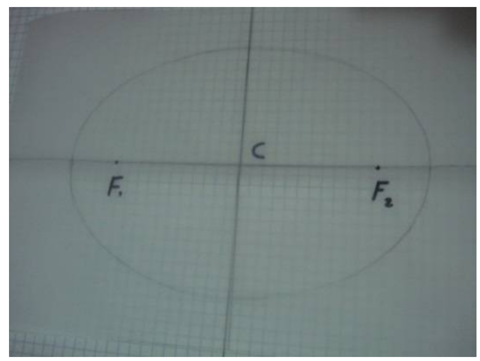
Gira la elipse en torno al origen y observa, ¿cuántas posiciones hay en que el eje focal coincida con los ejes coordenados?





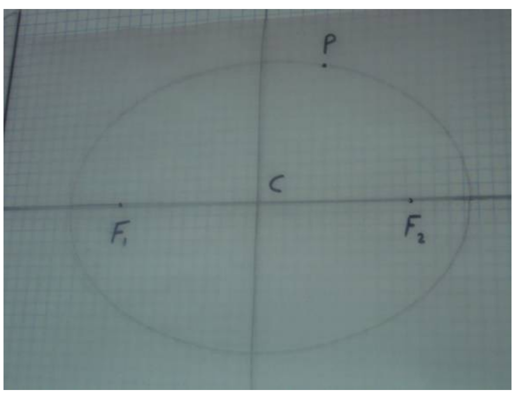
 

Efectivamente, hay dos posiciones, que el eje focal coincida con el eje X o con el eje Y. Nuevamente coloca la elipse sobre los ejes coordenados siempre y cuando su eje focal coincida con el eje X y cuyo centro sea el origen.



Desarrollo

Orientación dirigida. Enseguida, el profesor aplicando la estrategia de discusión grupal y en colaboración con los estudiantes hace notar que el centro de la elipse tendrá coordenadas C(0, 0), los focos coordenadas F1(-c, 0) y F2(c, 0), y se localizará un punto cualquiera de la elipse, P(x, y) como lo muestra la siguiente imagen.



Después, en discusión grupal dirigida por el profesor, se aplica la definición de elipse obteniendo la expresión algebraica:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}=2a$$

Qué al desarrollarla por medio de métodos algebraicos se llega a la ecuación de la elipse en su forma ordinaria cuyo eje focal es el eje X y centro en el origen.

$$\frac{(x)^2}{a^2}+\frac{(y)^2}{b^2}=1$$

Cierre

Orientación dirigida. Se pide que en parejas identifiquen en cada uno de sus trabajos los demás elementos de la elipse como son vértices, distancia focal, longitud del eje mayor, longitud del eje menor, etc. y que anoten la información en una tabla como la siguiente:

Elipse eje focal el eje X Centro en el origen	
Elementos	Notación
Centro	C(0, 0)
Focos	F1(-c,0) , F2(c, 0)
Vertices	V1(-a, 0), V2(a, 0)
Extremos del eje menor	B1(0,b), B2(0,-b)
Distancia focal	2c
Longitud eje mayor	2a
Longitude je menor	2b

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen sus tablas de elementos, con el objetivo de corregir la información de las mismas si es necesario.

Posteriormente, se le pide al estudiante que en papel bond de cuadrícula trace los focos con coordenadas, F_1 (-4, 0) y F_2(4, 0), el centro en el punto C(0,0), el eje focal el eje X, y el valor de a= 22 cm. Por el método del jardinero trace la elipse, con focos los citados anteriormente y marque en la elipse como un punto cualquiera a P(x, y). Por último que aplique la definición de elipse, para encontrar su ecuación.

Orientación libre. Tarea: Se deja al estudiante que repita el mismo procedimiento sólo que ahora con la variante de que el eje focal coincida con el eje Y, con el propósito de que deduzca la ecuación de la elipse con centro en el origen, focos F1 (0, c), F2 (0, -c) aplicando el concepto de elipse como lugar geométrico.

Integración. Para reafirmar el aprendizaje se deja al estudiante ejercicios donde aplique la definición de elipse como lugar geométrico para obtener su ecuación y gráfica.

- Usando la definición de elipse, hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos dados.
  a) focos (3, 0) y (-3, 0) y longitud del eje mayor 8
  b) focos (0, 4) y (0, -4) y vértices (0, 6) y (0, -6)

Sesión 7

Tema: Ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenados y centro fuera del origen.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca la ecuación de la elipse cuyos ejes focal y normal sean paralelos a los ejes coordenados X e Y, y centro diferente del origen.

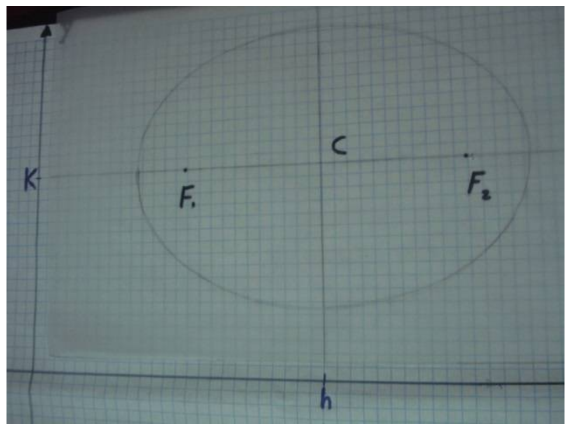
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno, con base en la deducción de la ecuación ordinaria de la elipse con centro el origen y cuyos ejes coinciden con los ejes y aplicando la definición de elipse como lugar geométrico, deduzca junto con el profesor la ecuación de esa curva cuando los ejes son paralelos a los ejes coordenados y con centro fuera del origen; se espera además que indique el tipo de elipse de que se trata según la posición del eje focal.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza a la elipse según la posición que presente en el plano cartesiano; 2) el de la **síntesis y deducción formal**, donde el estudiante deduce la ecuación de la elipse cuyos ejes son paralelos a los ejes cartesianos y su centro no coincide con el origen; 3) el de **clasificación**, donde el estudiante relaciona las diferentes posiciones que puede tener la elipse con sus ecuaciones de tal manera que puede distinguir, por ejemplo, las elipses cuyo eje focal es paralelo al eje X de las que el eje focal es paralelo al eje Y.

Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado, escuadras, hojas de papel albanene, plumón negro, lápiz, colores.

Inicio

Orientación dirigida. En un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado traza los ejes coordenados. Coloca a la elipse (anteriormente hecha con papel albanene) en el primer cuadrante de tal manera que su eje focal sea paralelo al eje X, y cuyo centro sea C (h, k) y con focos F_1 (h-c, k) y F_2 (h+c, k). Como lo muestra la siguiente imagen.



Desarrollo

Orientación dirigida. Enseguida, el profesor localiza un punto P(x, y) en la elipse y aplicando la estrategia de discusión grupal en colaboración con los estudiantes, aplica la definición de elipse obteniendo la expresión algebraica:

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}=2a$$

Al desarrollar la ecuación anterior por medio de métodos algebraicos se llega a la ecuación de la elipse en su forma ordinaria, cuyo eje focal es paralelo al eje X y centro fuera del origen.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Cierre

Se pide que en parejas identifiquen en cada uno de sus trabajos los demás elementos de la elipse como son vértices, distancia focal, longitud del eje mayor, longitud del eje menor, etc. Y que anoten la información en una tabla como la siguiente:

Elipse eje focal paralelo al eje X

Centro fuera del origen	
Elementos	Notación
Centro	C(h, k)
Focos	F1(c-h, k) , F2(c+h, k)
Vertices	V1(a-h, k), V2(a+h, k)
Extremos del eje menor	B1(h, k+b), B2(h, k-b)
Distancia focal	2c
Longitud eje mayor	2a
Longitude je menor	2b

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen sus tablas de elementos, con el objetivo de corregir la información de las mismas si es necesario.

Orientación libre. Tarea: Deducir análogamente la ecuación ordinaria de la elipse con eje focal paralelo al eje Y y centro fuera del origen (sin pérdida de generalización se les sugiere utilicen el primer cuadrante). Emplear geogebra para la representación gráfica.

Sesión 8

Tema: Análisis de la ecuación ordinaria de la elipse con eje focal alguno de los ejes coordenados y centro en el origen.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca de la elipse su extensión y la longitud del lado recto.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno examine la ecuación de la elipse y a partir del análisis obtenga otras características de la elipse como son su extensión y la longitud del lado recto.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, que el estudiante visualice a partir del trazo de la elipse su extensión, y la longitud de su lado recto; 2) el del **análisis**, donde el estudiante conoce la longitud del lado recto, y su extensión al examinar la ecuación de la elipse; 3) el de **clasificación**, donde el estudiante, mediante una generalización, concluye que la longitud del lado recto y la extensión son conceptos que se aplican a cualquiera de las elipses estudiadas.

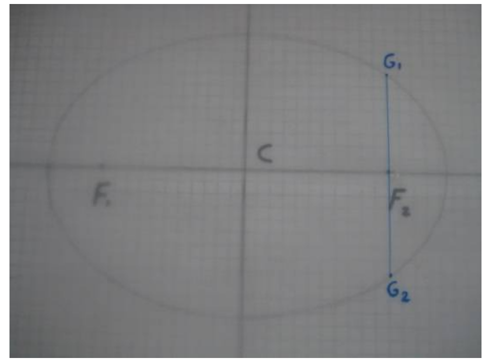
Inicio

Orientación dirigida. Coloca la elipse hecha con albanene sobre la hoja cuadriculada de tal manera que coincida su centro en el origen y eje focal el eje X. Localiza los focos y traza el lado recto que pasa por el foco de la derecha (F2).

Obviamente, los extremos del lado recto tendrán como coordenadas G1(c, y) y G2(c,-y). Como lo muestra la siguiente figura.

Nota que no sabemos cuál es la ordenada de los puntos G1 y G2. Esto nos daría la solución para hallar la longitud del lado recto.

Desarrollo



Orientación dirigida. Escribe la ecuación de la elipse que representa la gráfica y despeja la variable "**y**".

El estudiante debe llegar a la ecuación $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Posteriormente y en forma grupal, se plantea que éste es el valor de "**y**" para cualquier valor de "**x**", pero como se quiere encontrar el valor de las ordenadas de los puntos G1 y G2, se sustituye el valor de **c** en **x**, obteniéndose la expresión

$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$ Por hipótesis sabemos que $a^2 - c^2 = b^2$, de modo que este valor se sustituye en la ecuación anterior y encontramos de esta manera los valores de y.

$y = \pm \frac{b^2}{a}$, por lo tanto las coordenadas de los extremos del lado recto son $G_1\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ y $G_2\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$

. Así la longitud del lado recto es $2\frac{b^2}{a}$.

Se le pide al estudiante que anote en la gráfica de la elipse el valor encontrado.

Cierre

Explicitación. Se le pide al estudiante que haga una reflexión sobre la fórmula para encontrar el lado recto de una elipse, por ejemplo, ¿qué elementos intervienen en su fórmula? La respuesta esperada es "semieje menor y el semieje mayor". Se le pide al estudiante que deduzca la longitud del lado recto que pasa por el foco de la izquierda (F1) de la elipse, y que verifique con ello que la longitud de ambos lados rectos es la misma.

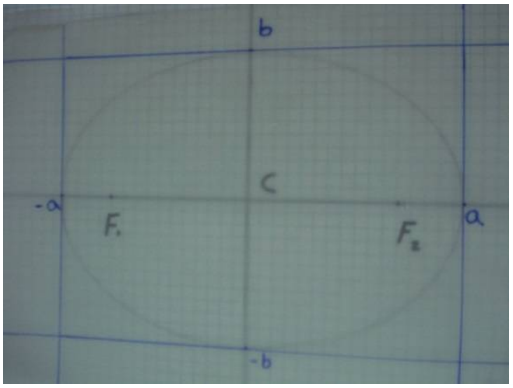
Posteriormente en parejas se les plantea la pregunta, ¿la fórmula de la longitud del lado recto es la misma para cualquier tipo de elipse?, compruébalo.

Segunda parte de la sesión 8

En esta fase se le pide al estudiante que trace sobre la misma gráfica las rectas x= a, x = -a, y = b, y = -b, con el fin de que visualice cómo la elipse queda encerrada en un rectángulo de largo 2a y ancho 2b. Posteriormente, al analizar la ecuación de la elipse, se le pide que obtenga los valores que toman las variables x e y para los puntos de la elipse. Mediante la siguiente actividad.

Inicio

Orientación dirigida. En la misma gráfica, traza las rectas cuyas ecuaciones son x= a, x = -a, y = b, y = -b, ¿qué observas?



Desarrollo

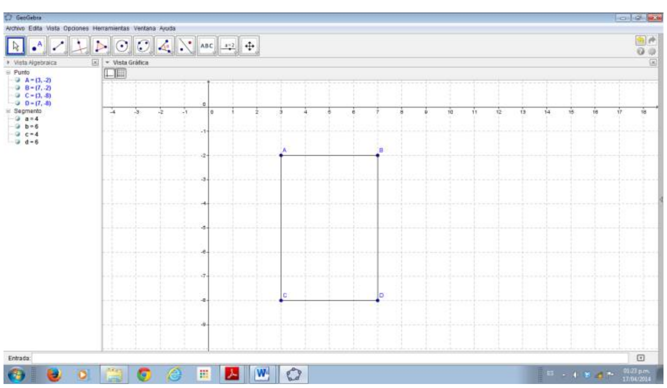
En la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ despeja la variable "*y*" ($y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$) y examina el radicando a^2-x^2. ¿Cómo debe ser la expresión para que "*y*" esté definida? Respuesta. $a^2-x^2\geq 0$, de donde, despejando a la variable "*x*", se obtiene que la elipse está definida para valores de x en el intervalo $-a\leq x\leq a$ (es decir, para valores de x en el intervalo [-a, a]). En la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ despeja la variable "*y*". Después analiza nuevamente el radicando, ¿para qué valores de "*y*" está definida la elipse?

Respuesta. $b^2-y^2\geq 0$, despejando la variable "*y*" se obtiene que la elipse está definida para los valores de "y" en el intervalo $-b\leq y\leq b$ (es decir, para valores de y en el intervalo [-b, b]).

Cierre

Orientación dirigida. Se les pide a los estudiantes que tracen el centro de un rectángulo en un plano cartesiano, y a partir del centro construyan un rectángulo cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados. Enseguida se le pide al estudiante que tomando como base el concepto de extensión, obtenga el valor del centro, los ejes mayor y menor de la elipse que puede trazarse dentro del rectángulo, además de escribir su ecuación.

Ejemplo. La siguiente imagen muestra un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y su centro, construido por un estudiante con Geogebra. En él se pide el valor del centro, eje mayor, menor, su extensión y ecuación.



Sesión 9

Tema: Excentricidad.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno comprenda el concepto de excentricidad.
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno deduzca el concepto de excentricidad al comparar la semidistancia focal c respecto al semieje mayor de la elipse. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza el achatamiento y el alargamiento de la elipse al variar la distancia entre sus focos, 2) el del **análisis**, donde el estudiante examina la relación algebraica entre la semidistancia focal y el semieje mayor de la elipse para comprender el concepto de excentricidad , 3) el de **clasificación**, donde el estudiante mediante una generalización concluye que la excentricidad se aplica a cualquier tipo de elipse y la excentricidad como parámetro me indicará qué tan achatada o alargada esta la elipse obteniendo de esta manera una codificación de la curva.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase el profesor le pide al estudiante que en un cuarto de papel bond cuadriculado trace una elipse por el método del jardinero con centro en el origen y eje focal el eje X, y con una distancia focal igual a dieciséis cuadrados.

Desarrollo

Posteriormente, se le pide al estudiante que con la misma cuerda, trace elipses de catorce, doce, diez, ocho, seis y cuatro cuadros de distancia focal. Al mismo tiempo se le pide que observe cómo se comportan la semidistancia focal y el semieje mayor en cada caso.
Esto mediante la siguiente actividad.
El alumno traza una elipse con centro en el origen y eje focal el eje X en una hoja cuadriculada por medio del método del jardinero. Localiza los focos a una distancia de dieciséis unidades (cuadritos) con respecto al origen. Traza nuevamente con el mismo hilo (distancia focal) y con el mismo método, elipses con distancia focal de dieciséis, catorce, doce, diez, ocho, seis y cuatro unidades con respecto al origen. Compara la distancia semifocal “c” con el semieje mayor “a, llenando la siguiente tabla.

Distancia focal 2c	Semidistancia focal c	Semieje mayor a	Cociente $\frac{c}{a}$
16	8	12	0.6666
14	7	12	0.5833
12	6	12	0.5
10	5	12	0.4166
8	4	12	0.3333
6	3	12	0.25
4	2	12	0.1666

¿Cómo es el cociente de la semidistancia focal entre el semieje mayor, cuando la semidistancia focal "*c*" va tomando valores cada vez más pequeños y el semieje mayor "a "se mantiene constante (12)?
¿Cómo es la forma de la elipse cuando esto sucede?

Cuestionario

Cuando el cociente se aproxima a cero la elipse va tomando la forma de una ______________________________.
A este cociente se le llama excentricidad y se define como la razón entre su semidistancia focal (longitud del segmento que parte del centro de la elipse y acaba en uno de sus focos), denominada por la letra "c", y su semieje mayor, denominada por la letra "a". La excentricidad comúnmente se denota por el símbolo ε (épsilon).

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

En este caso como "c" se aproximaba a cero y a estaba fija, la excentricidad se acercaba al valor de ___________.
Ahora, traza elipses con distancia focal dieciocho, veinte, veintidós cuadritos con respecto al origen. Nuevamente, compara la distancia semifocal "*c*" con el semieje mayor "a", llenando la siguiente tabla.

Distancia focal 2c	Semidistancia focal c	Semieje mayor a	Cociente $\frac{c}{a}$
18	9	12	0.75
20	10	12	0.8333
22	11	12	0.9166

¿Cómo es el cociente de la semidistancia focal entre el semieje mayor (excentricidad), cuando "*c*" va tomando valores cada vez más cercanos a doce y el semieje mayor se mantiene constante (12)?
¿Cómo es la forma de la elipse cuando esto sucede?

Cierre

Explicitación. En esta fase se les pide a los estudiantes que en parejas intercambien sus experiencias y den una definición con sus propias palabras de la excentricidad. Posteriormente, analizando las tablas, se llega en forma grupal a la conclusión de que la excentricidad ε es un parámetro positivo que en el caso de la elipse está entre 0 y 1.
Tarea: Se le pide al estudiante que utilizando Geogebra trace algunas elipses modificando el valor de la distancia focal, y obteniendo en cada caso el valor de la excentricidad.
En este segundo momento el profesor plantea ejercicios que involucren elementos y propiedades de la elipse que ya se estudiaron, de tal manera que el alumno pueda elaborar sus

propias conjeturas, relacionando estas propiedades con el álgebra que se puede emplear para resolverlos.

Sesión 10

Tema: Ejercicios de lo verbal a lo geométrico y algebraico.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda traducir a una forma gráfica y algebraica un problema plateado en forma verbal.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda identificar los elementos de una elipse, los grafique y exprese en forma algebraica la solución de un problema cuando éste se le plantea en forma verbal. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza los elementos que se le proporcionan en forma verbal, al trazar dichos elementos en un plano cartesiano, 2) el del **análisis**, donde el estudiante a partir de los elementos que le son proporcionados, logra examinar los elementos que le son requeridos, localizándolos y escribiéndolos en forma algebraica.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase el docente entrega a cada par de estudiantes una serie de ejercicios verbales, en los cuales se proporcionan algunos elementos de la elipse y se le pide que encuentre otros. En seguida se muestran dos ejercicios semejantes a los que se les piden.

- Una elipse tiene su centro en el origen, y su eje mayor coincide con el eje Y. Si uno de los focos es el punto (0, 3) y la excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$, hallar las coordenadas de otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos.

*- Los vértices de una elipse tienen por coordenadas (- 3, 7) y (- 3, - 1) y la longitud de cada lado recto es **2.** Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.*

Desarrollo.

Orientación dirigida. En esta fase se les pide a los estudiantes que sigan el siguiente procedimiento para resolver el problema.

a) Haz un bosquejo de la elipse que se te pide, localizando cada elemento que proporciona la información.

b) Habla con tu compañero sobre las conjeturas a que lleguen, para poder obtener los elementos que se piden y justifícalas con color rojo.

c) Localiza en el bosquejo los elementos que obtuviste después de haber discutido con tu compañero.

d) Después de haber identificado de qué tipo de elipse se trata, escribe su ecuación.

Cierre.

Explicitación. Después de haber realizados los cuatro pasos anteriores se les pide a cuatro parejas que expongan un ejercicio cada una, explicando como realizaron su ejercicio y justificando su resultado.

Tarea. Se deja una serie de ejercicios semejantes a los anteriores, utilizando en este caso geogebra para localizar los elementos y hacer la gráfica.

Sesión 11

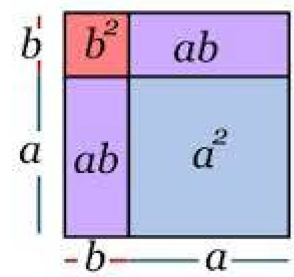
Tema: Transición de la ecuación ordinaria de la elipse a la ecuación general de la elipse.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno transite a la ecuación general de la elipse a partir de la ecuación ordinaria de la elipse.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que al haber conocido la ecuación ordinaria de la elipse el estudiante pueda, a partir de ella y empleando algunos pasos algebraicos, pasar a la forma general de la elipse. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante reconocerá la ecuación ordinaria de la elipse por sus características algebraicas, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante por medio de pasos algebraicos llegará a la ecuación general de la elipse a partir de la ecuación ordinaria.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a los conceptos de binomios al cuadrado. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene situaciones donde se presentan los conceptos de binomios al cuadrado. Posteriormente, para que la idea de binomio al cuadrado sea comprendido, se da su representación geométrica que debe cumplir un binomio al cuadrado. Esto con el propósito de que los estudiantes recuerden y reflexionen sobre tales conocimientos.



$(a+b)^2$
$= a^2 + b^2 + ab + ab$
$= a^2 + 2ab + b^2$

Resuelve de manera simplificada los siguientes binomios elevados al cuadrado.

1.- $(m + n)^2 = (m)^2 + 2(m)(n) + (n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

2.- $(5x – 7y)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(-7y) + (-7y)^2 = 25x^2 – 70xy + 49y^2$

3.- $(ab – 1)^2 = (ab)^2 + 2(ab)(-1) + (-1)^2 = a^2b^2 – 2ab + 1$

4.- $(3a^3 + 5ab)^2 = (3a^3)^2 + 2(3a^3)(5ab) + (5ab)^2 = 9a6 + 30\ a4b + 25a^2b^2$

5.- $(4x^2 – 7xy)^2 =$

6.- $(m – 1)^2 =$

7.- $(8a + 2ab)^2 =$

8.- $(5x + y)^2 =$

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que escriba la ecuación ordinaria de la elipse con centro en el punto C(h,k) y eje focal paralelo al eje X.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

En seguida se le pide que mediante el álgebra quite denominadores y desarrolle los binomios al cuadrado, los cuales ya se habían recordado.

El estudiante obtiene la expresión algebraica:

$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$ se le pide que la escriba de la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Donde deduce que

$A=b^2$, $C=a^2$, $D=-2b^2h$, $E=-2a^2k$ y $F=b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$

Después se hacen preguntas al estudiante como, ¿A y C pueden ser cero?

¿Qué característica deben tener los coeficientes de A y C para que la ecuación represente una elipse?

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes, después de haber argumentado sobre la ecuación general de la elipse que se obtuvo, llegan a las siguientes conclusiones:

"A y C son distintas de cero y tienen el mismo signo".

Sesión 12

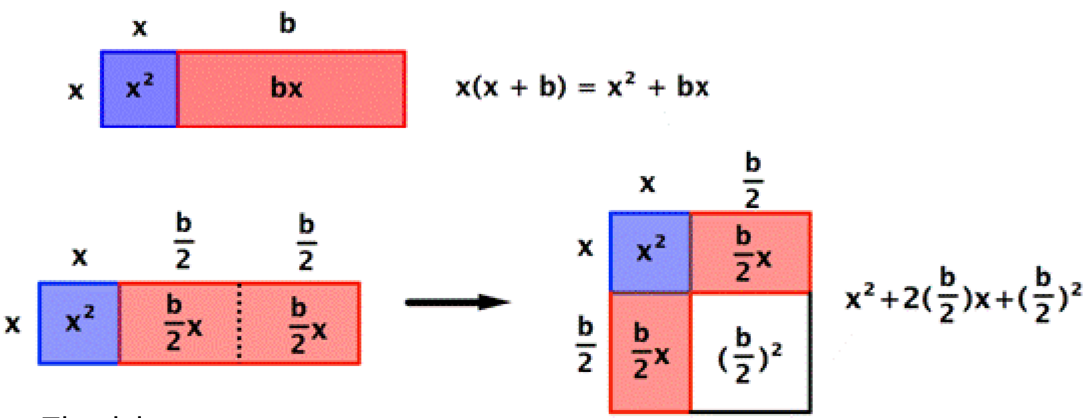
Tema: Transición de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria de la elipse

El **aprendizaje esperado** es que el alumno a partir de la ecuación general de la elipse transite a la ecuación ordinaria de la elipse.

El **aprendizaje significativo** esperado es que al haber identificado el estudiante las características de la ecuación general de la elipse, pueda pasar a la forma ordinaria de la elipse a partir de ella empleando el método de completar cuadrados. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante reconocerá la ecuación general de la elipse por sus características algebraicas, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante por medio de pasos algebraicos deducirá la ecuación ordinaria de la elipse a partir de la ecuación general.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación al método de completar cuadrados. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene situaciones donde se presenta el método de completar cuadrados. Posteriormente, para que la idea del método de completar cuadrado sea comprendida, se da su representación geométrica que debe cumplir para formar un cuadrado. Esto con el propósito de que los estudiantes activen y reflexionen sobre tales conocimientos.



Ejercicios.

Completa al cuadrado.

a) $x^2 + 10x$ b) $x^2 - 12x$ c) $x^2 + 26x$

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que escriba la ecuación general de la elipse especificando las características algebraicas

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con A y C del mismo signo.

En seguida se le pide que mediante el álgebra reduzca y a complete cuadrados, los cuales ya se habían recordado.

El estudiante obtiene la expresión algebraica:

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{C}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$$

Escribimos $M=\dfrac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$ Si $M\neq 0$, dividimos entre M la ecuación y tenemos:

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{MC}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{MA}=1$$

Que es la ecuación ordinaria de la elipse con centro en $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$ y ejes paralelos a los coordenados.

Se hace notar a los estudiantes que podemos suponer que A y C pueden ser positivos sin perder generalidad. Después se hacen preguntas al estudiante como, ¿Qué signo debe tener M, para que la ecuación represente una elipse?

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes, después de haber argumentado sobre la ecuación ordinaria de la elipse que se obtuvo, llegan a las siguientes conclusiones:

- M debe ser de signo positivo.
- $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$ para que la ecuación represente una elipse
- Si $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$ representa el punto $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$
- Si $CD^2 + AE^2 - 4ACF < 0$ no representa ningún lugar geométrico real

Sesión 13

Tema: Tránsito de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria y viceversa.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda, a partir de una ecuación general de la elipse, pasar su forma ordinaria y viceversa.

El **aprendizaje significativo** esperado es que el alumno pueda pasar, a partir de la ecuación general de la elipse, a la forma ordinaria utilizando el método de completar cuadrados y viceversa. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza la forma algebraica de la ecuación ordinaria y la forma algebraica de la ecuación general de la elipse, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante deduce la forma ordinaria a partir de la ecuación general de la elipse aplicando el método de completar cuadrados y viceversa.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase el docente entrega a cada par de estudiantes una serie de ejercicios en los cuales se da la ecuación general de la elipse y se le pide que encuentre su forma ordinaria y viceversa. En seguida se muestran dos ejercicios semejantes a los que se les piden.

“La ecuación de una elipse es $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$.
Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, los vértices y los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad”

“La ecuación ordinaria de una elipse es $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$. Llevar esta ecuación a la forma general y determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad”

Desarrollo.

Orientación dirigida. En esta fase se les pide a los estudiantes que sigan el procedimiento adecuado para resolver el problema utilizando la siguiente tabla.

Problema: Reducir la ecuación $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$ a su forma ordinaria.

Paso	Procedimiento	Justificación
1	$x^2 + 2x + 4y^2 - 12y + 6 = 0$	Ordenamos términos
2	$x^2 + 2x + 1 + 4(y^2 - 3y) + 6 = 0$	Factorizando
3	$x^2 + 2x + 1 + 4\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -6 + 1 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2$	Completando cuadrados y transponiendo términos
4	$(x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$	Reduciendo términos
5	$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{1} = 1$	Dividiendo entre 4, obtenemos la ecuación en su forma ordinaria

Posteriormente, a partir de la ecuación ordinaria o ecuación general, se les pide a los estudiantes que:

a) Determinen los elementos esenciales de la elipse a partir de la ecuación.

b) Hagan un bosquejo de la elipse que se te pide, localizando en él, cada elemento que proporciona la información.

Para encontrar los elementos de una elipse a partir de cualquier ecuación se sugiere utilizar las siguientes tablas.

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$C(h,k)$	$V(h+a,k)$, $V'(h-a,k)$	$F(h+c,k)$, $F'(h-c,k)$	$B(h,k+b)$, $B'(h,k-b)$
Vertical	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$C(h,k)$	$V(h,k+a)$, $V'(h,k-a)$	$F(h,k+c)$, $F'(h,k-c)$	$B(h+b,k)$, $B'(h-b,k)$

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos
Horizontal	$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$	C(h,k)	V(h+a,k) V'(h-a,k)	F(h+c,k) F'(h-c,k)
Vertical	$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$	C(h,k)	V(h,k+a) V'(h,k-a)	F (h,k+c) F' (h,k-c)

Ejemplos.

Ecuación	a	b	c	Centro	Vértices	Focos	B1 y B2	Posición
$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{1}=1$	2	1	$\sqrt{3}$	$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$	$\left(1,\frac{3}{2}\right),\left(-3,\frac{3}{2}\right)$	$\left(-1+\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$ $\left(-1-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$	$\left(-1,\frac{5}{2}\right)$ $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	horizontal

Cierre.

Explicitación. Después de haber terminado los ejercicios se les pide que en parejas expongan un ejercicio, explicando cómo lo realizaron y justificando su resultado.

Tarea. Se deja a los estudiantes una serie de ejercicios semejantes a los anteriores, utilizando en este caso geogebra para que después de realizar el ejercicio localicen los elementos y hagan la gráfica.

Sesión 14

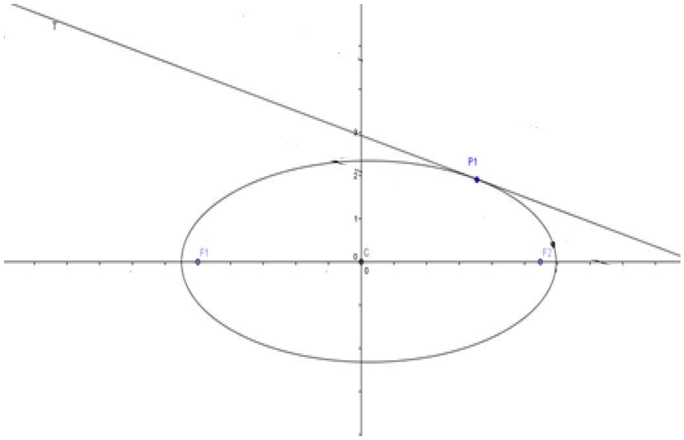
Tema: Aplicaciones a la elipse: La tangente a la elipse en un punto que pertenece a ésta.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda encontrar la ecuación de la tangente a una elipse en un punto dado.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda comprender el concepto de tangente a la elipse y como consecuencia pueda encontrar la ecuación de la tangente a una elipse en un punto dado. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza las características geométricas que debe cumplir una recta para considerarla una recta tangente a una elipse en un punto dado, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante a partir del concepto algebraico de recta tangente respecto a la elipse puede deducir algebraicamente la ecuación de la recta tangente a la elipse en un punto dado.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a recta tangente a una curva. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene la situación donde se presenta la posición de la recta tangente a la elipse. Es decir, para que la idea de tangencia sea comprendida, se da la representación geométrica de esta noción a fin de que los estudiantes recuerden y reflexionen sobre la misma.



La figura anterior muestra la posición de una recta respecto a una elipse. Observa y contesta las siguientes preguntas.

¿La recta T corta a la elipse? ___________________

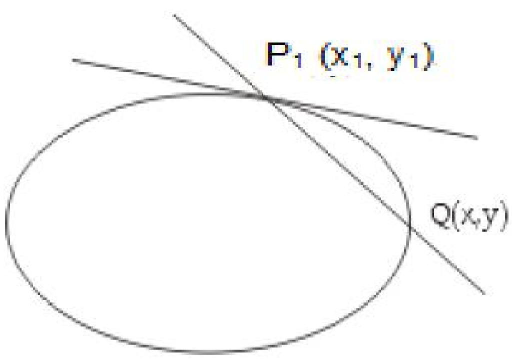
¿En cuántos puntos toca la recta T a la elipse? _______, por lo tanto la recta T recibe el nombre de recta__________.

Posteriormente para indagar sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a las condiciones algebraicas que se deben cumplir para que una recta sea tangente a la elipse, se plantea la siguiente actividad

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase el docente plantea al grupo el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse con ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, (sin pérdida de generalización) en el punto P_1 (x_1, y_1).Para ello realiza una discusión dirigida, llegando a los siguientes resultados:

Todas las rectas que pasan por el punto $P_1(x_1, y_1)$ tienen ecuación de la forma $y-y_1=m(x-x_1)$ y todas estas líneas intersectan a la elipse en al menos un punto (dos si la recta es secante, uno si la recta es tangente).



El problema es encontrar el valor de la pendiente m para la recta que es tangente en el punto P_1 (x_1, y_1). Los puntos Q(x, y) que son intersección de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ con la cónica, satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1) \qquad y-y_1=m(x-x_1) \quad (2)$$

En particular el punto $P_1(x_1, y_1)$ satisface el sistema. La idea general para resolver el sistema consiste en sustituir la segunda ecuación en la primera, con lo cual se obtiene una ecuación cuadrática en x. Para que exista una solución única para la pendiente, el discriminante debe anularse: $\Delta(x_1, y_1, m) = 0$; de esta última expresión puede obtenerse el valor de la pendiente $m = m(x_1, y_1)$. Para aplicar el resultado del procedimiento anterior el docente plantea el siguiente ejercicio para que los estudiantes lo resuelvan en parejas.

Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ en el punto $\left(\sqrt{2},0\right)$.

Solución.

Todas las rectas que pasan por el punto P_1 $\left(\sqrt{2},0\right)$ tienen ecuación de la forma

$y-0=m(x-\sqrt{2})$ (1)

La ecuación de la elipse se puede escribir también $2x^2+4y^2=8$ o bien $x^2+2y^2=4$ (2)

El sistema formado por las ecuaciones de la elipse y la recta ha de tener solución única si han de tener un solo punto de contacto.

Resolviendo el sistema:

$x^2 + 2[1 + m(x - \sqrt{2})]^2 - 4 = 0.$

Operando y agrupando

$(1 + 2m^2)x^2 - 4(\sqrt{2}m^2 - m)x + (4m^2 - 4\sqrt{2}m - 2) = 0$

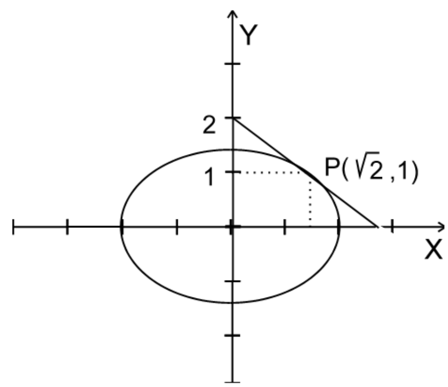
Para que la solución sea única el discriminante ha de ser igual a 0.

$\Delta = 16(\sqrt{2}m^2 - m)^2 - 4(1 + 2m^2)(4m^2 - 4\sqrt{2}m - 2) = 0$

$16m^2 + 16\sqrt{2}m + 8 = 0;$ y cuya solución es $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

La recta tangente es: $y - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2})$

O bien, $\sqrt{2}x + 2y - 4 = 0.$



Cierre

Explicitación. Después de haber terminado el ejercicio se les pide a un par de estudiantes que expongan el ejercicio, explicando cómo realizaron el ejercicio y justificando el resultado. Posteriormente se llega en forma grupal a una justificación general.

Orientación libre. Tarea. Se deja al estudiante que con lo visto en la sesión demuestre el siguiente teorema.

La tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en cualquier punto P_1 (x_1, y_1) de la curva tiene por ecuación $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

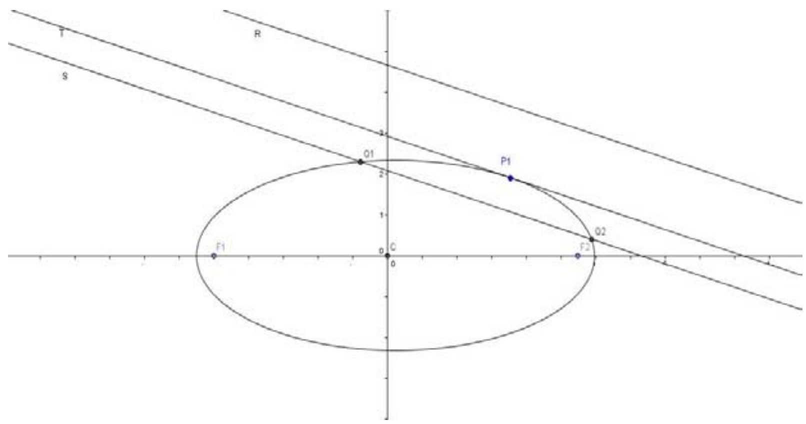
Sesión 15

Tema: Aplicaciones a la elipse: Intersecciones de rectas con la elipse.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda encontrar los puntos de intersección de una recta con la elipse.
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda comprender los casos en que una recta interseca a una elipse y a partir de ello, pueda encontrar una, dos o ninguna intersección de la recta con una elipse. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza los casos en que una recta se interseca con una elipse, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante, a partir del concepto algebraico de intersección entre dos lugares geométricos (en este caso la recta y la elipse), pueda deducir algebraicamente la intersección de la recta con la elipse en uno o dos puntos, o el caso en que no haya intersección.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a la intersección de dos curvas. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene situaciones donde se presentan diferentes posiciones de la recta con relación a una elipse. Es decir, para que la idea de intersección sea comprendida, se da la condición geométrica que debe cumplir una recta para que interseque o no a la elipse. Esto con el propósito de que los estudiantes activen y reflexionen sobre tales conocimientos.



La figura anterior muestra las diferentes posiciones de la recta respecto a una elipse, observa y contesta las siguientes preguntas.
¿Cuál de las rectas no corta a la elipse? ________________
¿En cuántos puntos corta la recta T a la elipse? _______, por lo tanto la recta T recibe el nombre de recta _______________.
¿En cuántos puntos corta la recta S a la elipse?_______, por lo cual la recta S recibe el nombre de recta _____________.
Posteriormente, para recordar los conocimientos relativos a las condiciones algebraicas que se deben cumplir para que una recta se interseque o no a una elipse, se plantea la siguiente actividad.

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase el docente plantea al grupo el problema de encontrar la intersección de una recta con la elipse con ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Casi sin pérdida de generalidad se considera que la ecuación de la recta es $y = mx + k$.

A través de una discusión dirigida se llega a los siguientes resultados:

- Dados una elipse y una recta, puede suceder que:

a) No se corten.
b) La recta corte a la elipse en un punto.
c) La recta corte a la elipse en dos puntos.

En términos algebraicos, estas situaciones se traducen de la siguiente manera. Si consideramos las ecuaciones de la recta y de la elipse y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

i) No hay solución (no se cortan).
ii) Hay una sola solución (se cortan en un solo punto).
iii) Hay dos soluciones (se cortan en dos puntos).

- Si sus gráficas se cortan en uno o más puntos, cada uno de estos puntos se llaman puntos de intersección.
- Como un punto de intersección de dos curvas está sobre cada una de dichas curvas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, ambas ecuaciones.
- La interpretación analítica de un punto de intersección es un par de coordenadas, las correspondientes a una solución común de las ecuaciones.

Esto es, para encontrar la intersección de la recta y la elipse, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad y=mx+k$$

Para ello, despejamos "**y**" de la ecuación de la recta; sustituimos éste valor en la ecuación de la elipse y obtenemos una ecuación cuadrática en x. Para que exista al menos una solución, el discriminante debe ser mayor o igual a cero $\Delta = (k, m) \geq 0$; y en caso de no haber solución, el discriminante será menor de cero $\Delta = (k, m) < 0$.

Para aplicar el resultado del procedimiento, el docente plantea el siguiente ejercicio para que los estudiantes lo resuelvan en parejas.

Ejemplo.

Hallar los puntos de intersección de la recta $2x - 3y = 5$ con la elipse $2x^2 + 3y^2 = 5$

Se resuelve el sistema de ecuaciones, despejando "***y***" de la ecuación de la recta

$y=\frac{5-2x}{-3}$, se sustituye en la ecuación de la elipse $2x^2+3\left(-\frac{5}{3}+\frac{2x}{3}\right)^2=5$ de donde se obtiene la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ de donde al resolverla se tiene una solución $x_1 = 1$ esto implica que $y_1 = -1$, entonces el único punto de intersección de la recta con la curva es el (1, -1).Esto se puede generalizar para una ecuación de la elipse en su forma general.

Ejemplo

Hallar los puntos de intersección de la recta $x + y + 1 = 0$ con la elipse $2x^2 + 3y^2 -4x + 6y -9 = 0$

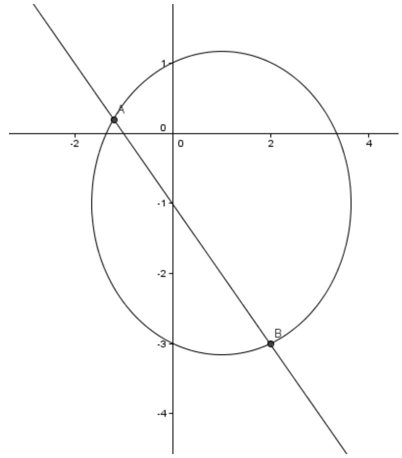
Se resuelve el sistema de ecuaciones despejando "***y***" de la ecuación de la recta $y = - x - 1$, se sustituye en la ecuación de la elipse $2x^2 + 3y^2 -4x + 6y -9 = 0$.

$2x^2 + 3(-x-1)^2 - 4x + 6(-x-1) - 9 = 0$ de donde obtenemos la ecuación

$5x^2 - 4x - 12 = 0$ de donde $x = \frac{4 \pm 16}{10}$ por lo tanto $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{6}{5}$.

Esto implica que $y_1 = \frac{1}{5}$ $y_2 = -3$

Los puntos de intersección son: $\left(-\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)$; $(2, -3)$



Cierre

Explicitación. Terminado el ejercicio se les pide a un par de estudiantes que expongan cómo lo hicieron que justifiquen el resultado.

Orientación libre. Tarea. Se deja al estudiante el siguiente ejercicio:

Con referencia a la elipse $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$:

a) cortan a la elipse en dos puntos diferentes;
b) son tangentes a la elipse
c) no cortan a la elipse

Sesión 16

Tema: Propiedades de la elipse: propiedad reflexiva.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda comprender la propiedad reflexiva de la elipse y a partir de éste conocimiento pueda resolver algunos problemas.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno compruebe la propiedad reflexiva en la elipse con base en las leyes de reflexión de la Física. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, donde el estudiante visualiza la propiedad reflexiva en la elipse, 2) el del **análisis**, donde el estudiante comprueba la propiedad reflexiva de la curva a partir de trazos y mediciones en la misma.

Inicio

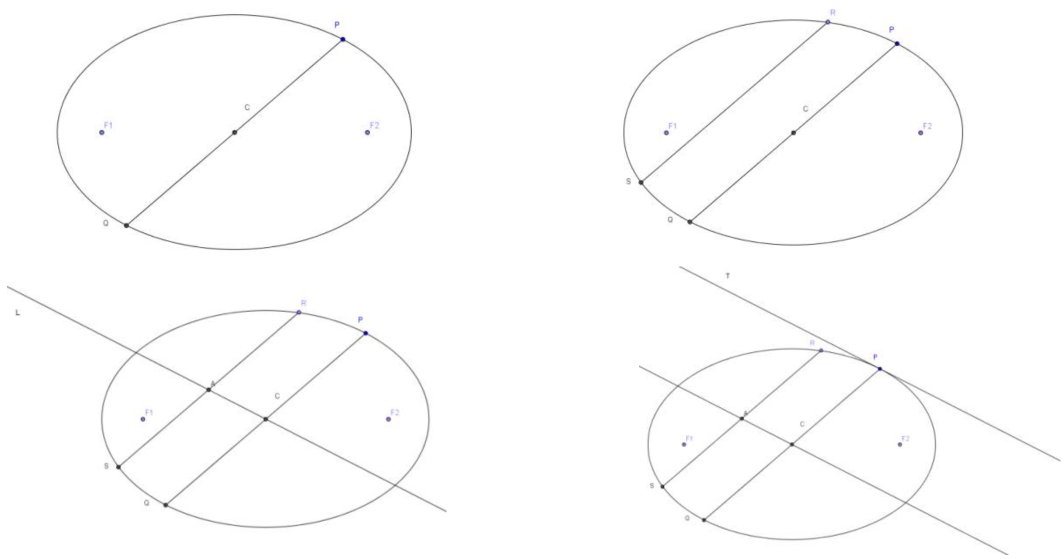
Orientación dirigida. Se le pide al estudiante que trace en un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado una elipse por el método del jardinero, incluyendo el eje focal, la normal y los focos F_1, F_2. Después que localice sobre la elipse un punto P cualquiera y que trace con una regla la recta tangente a la elipse que pasa por P. Para trazar la recta tangente que pasa por el punto P se emplea el siguiente procedimiento:

a) Traza el diámetro PQ.

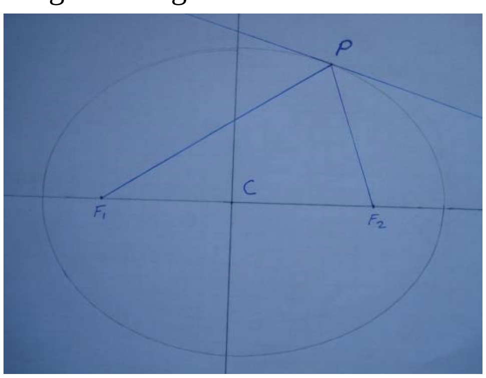
b) Traza la cuerda RS paralela a PQ

c) Traza la recta L que pasa por los puntos medios del diámetro PQ y la cuerda RS

d) Traza la recta T que pasa por P y paralela a L. Tal recta es la tangente que pasa por P.

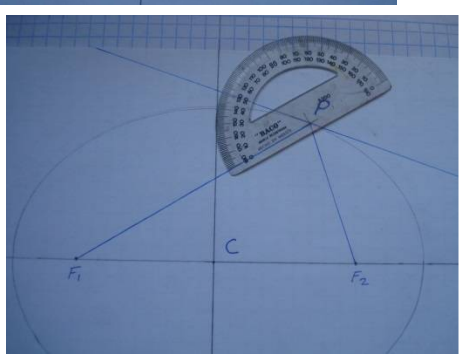


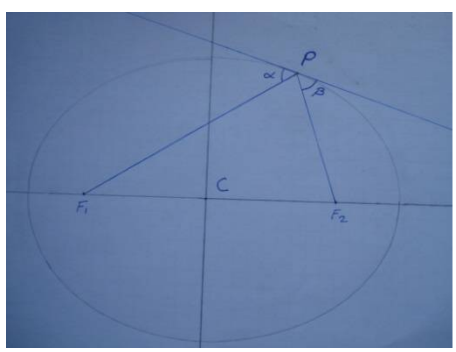
Une a P con los focos F_1, F_2 obteniendo los segmentos PF_1 y PF_2. Como se muestra en la siguiente figura.



Desarrollo

Orientación dirigida. Ahora, con el transportador mide el ángulo que forma la tangente con el segmento P F_1 y llámalo α. ¿Cuánto mide el ángulo α? De la misma manera mide el ángulo que forma la tangente con el segmento P F_2 y llámalo β. ¿Cuánto mide el ángulo β?

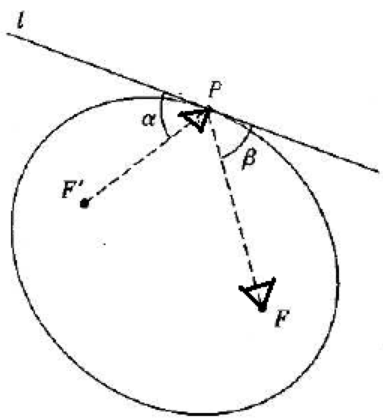




La idea es que el alumno se convenza que los ángulos son iguales, es decir, que $\alpha = \beta$.

Enseguida el profesor, mediante la estrategia de exposición dirigida, explica la propiedad reflexiva en la elipse. *Si F_1 y F_2 son los dos focos de la elipse y P es un punto de la misma, entonces los ángulos entre la tangente en P a la elipse y las rectas que unen a P con F_1 y F_2, respectivamente, son iguales.*

Otra forma de expresar este hecho es que, si se dirige un rayo partiendo de uno de los focos, al reflejarse en el punto de tangencia sigue una dirección que pasa por el otro foco.

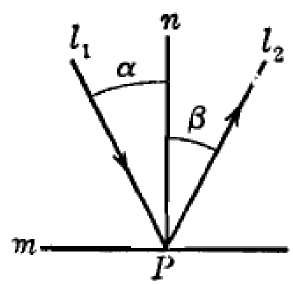


Esta situación se basa en lo que en Física se conoce como *leyes de reflexión*:

1a. ley: El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal se encuentran en un mismo plano.

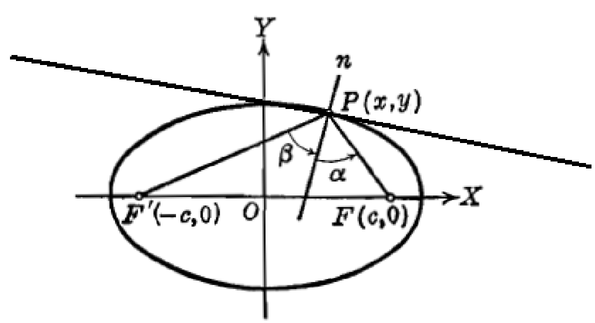
2a. ley: El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

En la figura, $\boldsymbol{l_1}$ es un rayo de luz que se refleja en la recta ***m*** en un punto **P**. Al hacerlo, sigue la trayectoria de la recta $\boldsymbol{l_2}$; ***n*** es la recta perpendicular a ***m*** que pasa por **P** llamada *normal*. El ángulo α formado por $\boldsymbol{l_1}$ y ***n*** es llamado ángulo de incidencia y el ángulo β formado por $\boldsymbol{l_2}$ y ***n*** es llamado ángulo de reflexión.



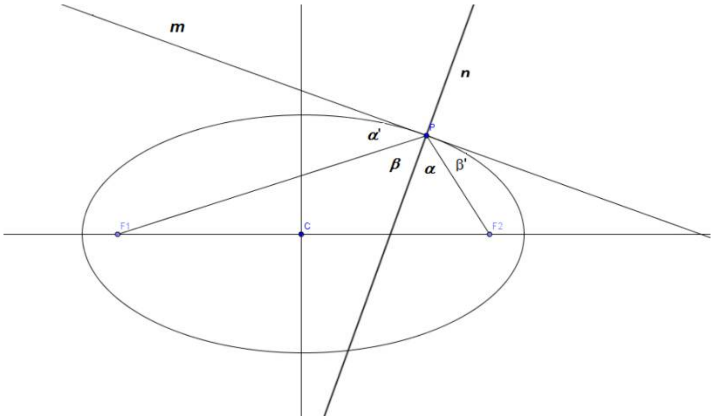
Como consecuencia de lo anterior, si se traza una recta normal (perpendicular) a la recta tangente en el punto de tangencia de la elipse, los ángulos α y β serán iguales. En consecuencia, la recta ***n*** es bisectriz del ángulo formado por los segmentos PF_1 y PF_2.

Enseguida al estudiante se le pide que demuestre analíticamente lo siguiente "la normal a la elipse en uno cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los segmentos PF_1 y PF_2". Se le hace notar al estudiante que la demostración no pierde generalización tomando la ecuación de la elipse en su forma canónica



$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Por último, ya habiendo demostrado lo anterior se le pide al estudiante que en la siguiente figura demuestre sintéticamente que los ángulos α' y β' son iguales.



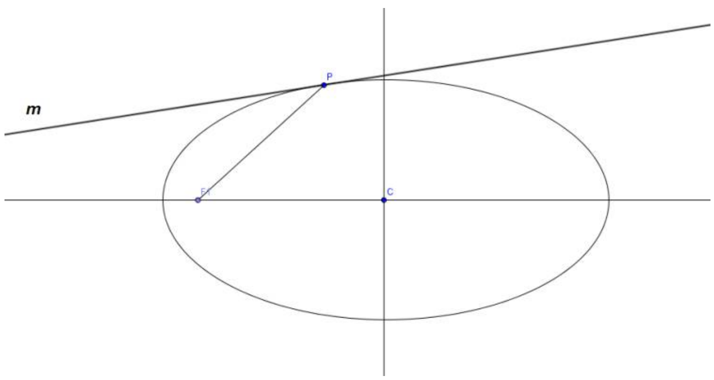
Esto es, sabiendo que ***m*** es la tangente a la elipse en el punto ***P***, ***n*** es la recta normal a la elipse en el punto P y $\beta = \alpha$, demostrar que $\alpha' = \beta'$.

Cierre

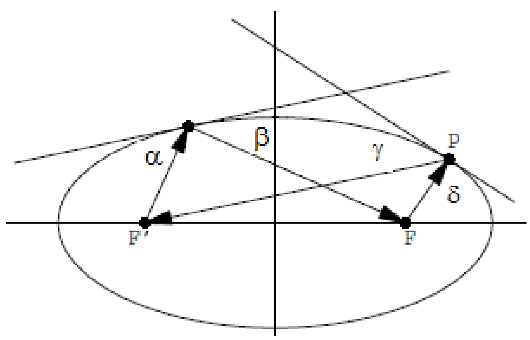
Explicitación. Al terminar las demostraciones, se les pide que en parejas comparen sus demostraciones y las revisen en grupo.

Para terminar se le plantea al estudiante que resuelva algunos problemas donde aplique la propiedad reflexiva como los siguientes:

1. Dada la siguiente figura, encuentra por construcción el foco F_2 aplicando la propiedad reflexiva.



2. En la siguiente figura señala qué ángulos son iguales, según la propiedad reflexiva de la elipse.



Sesión 17

Tema: La circunferencia como lugar geométrico. Definición geométrica de la circunferencia. Circunferencia de Apolonio.

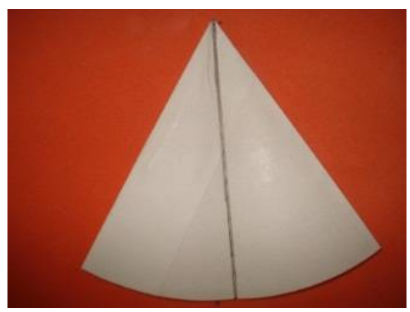
El **aprendizaje esperado** es que el alumno comprenda el concepto de circunferencia como caso límite de la elipse.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno conozca el concepto de circunferencia como caso límite de la elipse a través de cortes a un cono circular recto. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza la variación del ángulo formado por la línea de corte y el eje del cono, hasta llegar a un corte perpendicular 2) el del **análisis**, donde el estudiante, a partir de la variación de los cortes a un cono, descubre que la figura obtenida en el límite del corte es una circunferencia.

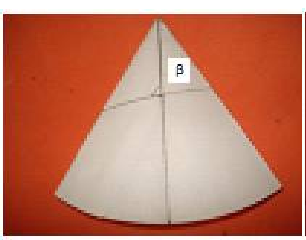
Material: Cuatro vasos cónicos de papel, un lápiz, plumón de color negro, tijeras, escuadras.

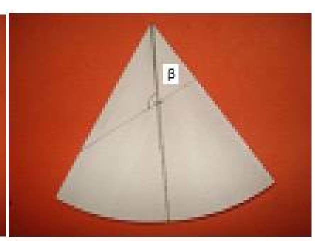
Inicio ***Información.*** Se les pregunta a los alumnos en forma grupal sobre el artículo leído de Apolonio de Perga con el propósito de que los estudiantes recuerden los cortes realizados por Apolonio en el descubrimiento de las cónicas.

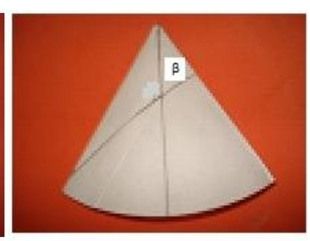
Desarrollo ***Orientación dirigida.*** Se le pide al estudiante que tome cuatro conos de papel y con cada uno realice el siguiente procedimiento: doblar el cono a la mitad y trazar su eje.

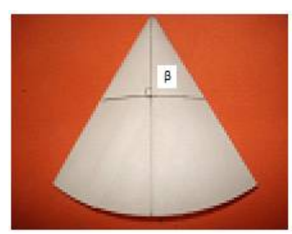


Después se le pide que realicen tres cortes más, variando el ángulo (β) que se forma entre la línea de corte y el eje del cono, de tal manera que en el último corte se forme un ángulo recto (90°).









Para que el estudiante visualice las diferentes formas que va adquiriendo la elipse al variar el ángulo de corte (β) con respecto al eje , se le pide que dibuje la figura que se formó al realizar los diferentes cortes. Posteriormente se le pide al estudiante que mida aproximadamente con su regla el eje mayor y el eje menor del dibujo de cada elipse. Con la finalidad de que vea como van cambiando las medidas y pueda constatar que sucede en el último caso.

Cierre

Explicitación. Para lograr que los estudiantes describan con sus propias palabras la definición de la circunferencia de Apolonio, se les pide que formen parejas y realicen las siguientes actividades:

- Que los alumnos describan con sus propias palabras cómo es la figura que halló después del último corte, ¿a qué se parece la curva?
- Dibujen en un recuadro la figura obtenida al hacer el último corte al cono.

Que respondan a las siguientes preguntas

- ¿qué medida tuvo el ángulo β en el último corte?

-¿Cómo son los valores de 2a y 2b (eje mayor y eje menor) en la elipse del último corte?

-Además, se le pide al alumno que defina con sus propias palabras el concepto de circunferencia de acuerdo con Apolonio.

Sesión 18

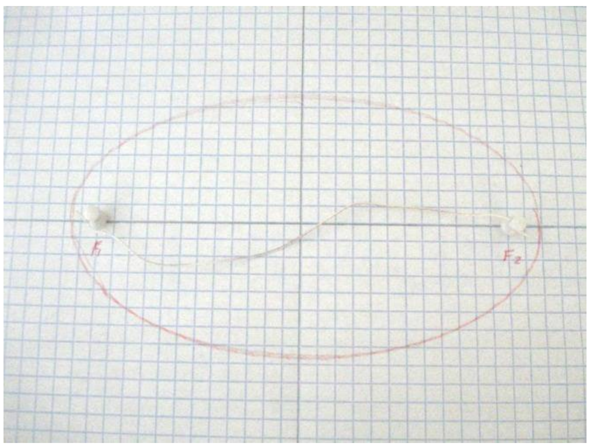
Tema: La circunferencia como lugar geométrico. Definición geométrica de la circunferencia. Obtención de la gráfica de la circunferencia y su ecuación al reducir la distancia focal.
El **aprendizaje esperado** es que el alumno comprenda el concepto de circunferencia como caso límite de la elipse.
El **aprendizaje significativo** es que el alumno comprenda cómo a partir de disminuir la distancia focal a cero se obtiene la circunferencia y su ecuación de la misma con centro en el origen. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza cómo al disminuir la distancia focal de una elipse se obtiene la circunferencia, 2) el del **análisis**, donde el estudiante examina cómo al disminuir la distancia entre los focos de la elipse a cero, se obtiene geométricamente una circunferencia y algebraicamente su ecuación.

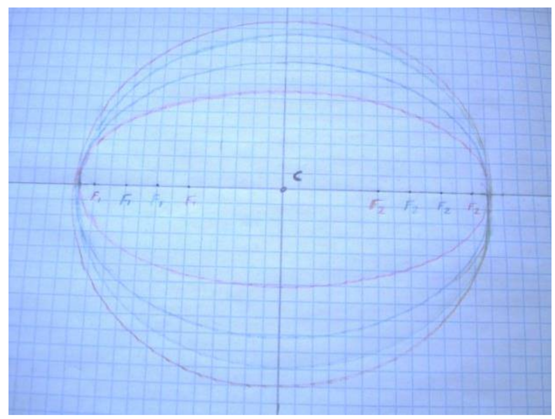
Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, un cuarto de papel bond cuadriculado, escuadras, plumón negro, lápiz, colores.

<u>*Inicio*</u> ***Orientación dirigida.*** Se le pide al alumno que trace una elipse roja con sus ejes por el método del jardinero en un cuarto de papel bond cuadriculado como lo muestra la siguiente imagen.

<u>*Desarrollo*</u>

Orientación dirigida. Manteniendo la longitud del hilo constante, se le pide que mueva mueve las chinchetas una unidad hacia el centro y vuelva a trazar una elipse azul por el método del jardinero. Enseguida se le pide que mueva nuevamente las chinchetas otra unidad más con dirección al centro y trace una elipse verde, que repita el procedimiento una vez más para obtener una elipse café como lo muestra la figura siguiente.





Se le pregunta al estudiante

¿Qué curva es más ovalada?

¿Qué curva es más redonda?

Por último, se le pide que determine en cada curva las medidas del eje mayor, eje menor y la distancia entre los focos y las anote en la siguiente tabla.

Curva	Distancia focal	Longitud eje mayor	Longitud eje menor
Elipse roja			
Elipse azul			
Elipse verde			
Elipse café			

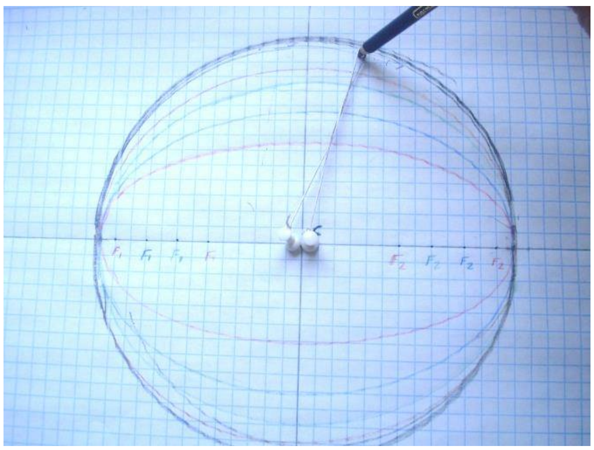
<u>*Cierre*</u>

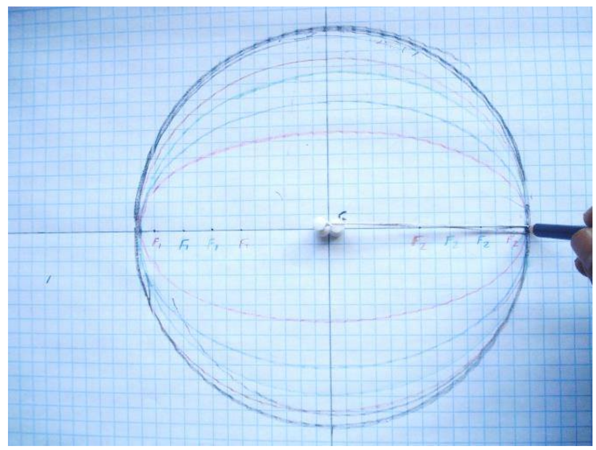
Explicitación. Se pide que en parejas comparen sus resultados. Manteniendo constante la longitud del hilo los estudiantes deberán concluir, que cada vez que se reduce la distancia entre los focos, las elipses que se obtienen se asemejan cada vez más a una circunferencia con centro en medio de los focos. A la vez, los valores de la longitud del eje mayor y eje menor tienden a ser iguales.

Segunda parte, sesión 18

Inicio

Orientación dirigida. Se le pide al alumno que trace en el mismo papel bond cuadriculado una elipse negra por el método del jardinero de tal manera que las chinchetas estén sobre el centro como lo muestra la siguiente imagen.





Se le pregunta al estudiante

¿Qué curva obtienes?___________________________

¿Qué medida tiene el radio de la circunferencia, si la longitud del hilo entre las chinchetas es $2a$? _______.

Desarrollo *Orientación dirigida.* Enseguida se le pide al estudiante que deduzca analíticamente la ecuación de la circunferencia con centro en el origen a partir de la ecuación de la elipse en su forma canónica $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, considerando como hipótesis que las longitudes de los semiejes mayor y menor son iguales es decir, $a=b$ cuando su distancia focal c es igual a cero.

Cierre

Explicitación. Se pide que en parejas comparen sus demostraciones. Posteriormente en forma grupal se revisa la misma, llegando a la conclusión que la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio a es de la forma $x^2+ y^2 = a^2$. Esta ecuación es llamada ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio a.

Sesión 19

Tema: Definición geométrica de la circunferencia como lugar geométrico.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno obtenga la definición de circunferencia como lugar geométrico.

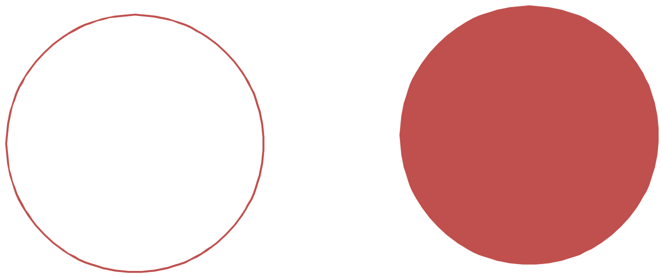
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno descubra la definición de la circunferencia como lugar geométrico a partir del concepto de distancia entre dos puntos.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento,** es decir, el estudiante visualiza la circunferencia mediante una construcción mecánica; 2) **el del análisis**, donde el estudiante reconoce y describe los elementos que intervienen en la definición de la circunferencia como son el centro, el concepto de distancia entre dos puntos y la propiedad que cumplen los puntos de una circunferencia.

Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, hojas blancas tamaño oficio, plumón negro, lápiz.

Inicio

Información. En esta fase se realiza un diagnóstico sobre los conocimientos previos del estudiante con relación al concepto de circunferencia. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que consiste en preguntar a los alumnos diversas situaciones donde se presenta el concepto de círculo y circunferencia. Por ejemplo, en las siguientes imágenes ¿cuál representa el concepto de círculo? y ¿cuál el de circunferencia?



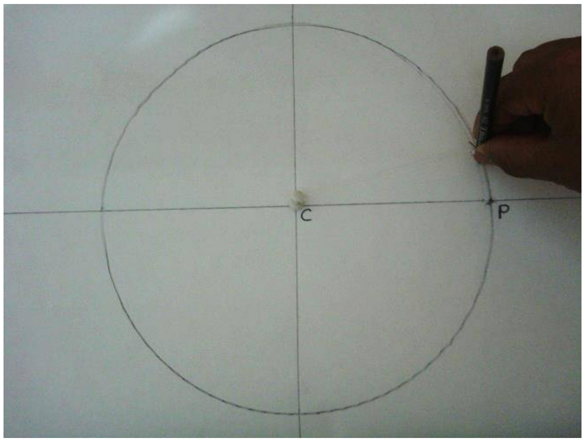
Explica con tus palabras el concepto de círculo y de circunferencia.

Explicitación. Los alumnos intercambian sus conceptos en parejas y en forma grupal llegan al concepto de círculo y circunferencia.

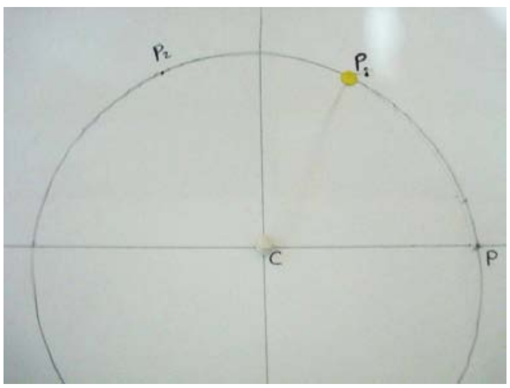
Desarrollo

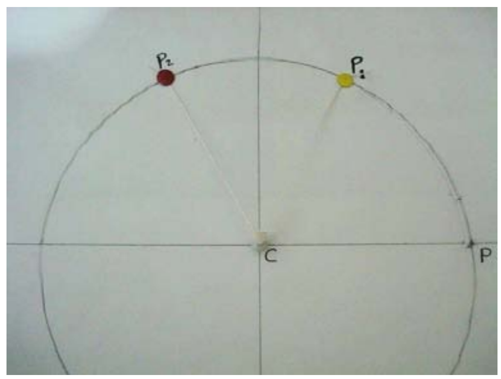
Orientación dirigida. En esta fase el estudiante construye la circunferencia por el método del jardinero. Tal construcción se basa en una técnica sintética. Lo primero que debe hacer el alumno es dibujar dos líneas rectas perpendiculares, en una hoja blanca. Al punto de intersección de las rectas se le llama *centro* y se le denota por la letra **C**. Sobre la línea horizontal se marca un punto P que se encuentre a una distancia ***r*** del punto **C**. Después, en el centro **C**, se sujeta (clava) una chinche o tachuela. Finalmente, en el extremo opuesto del hilo de tamaño ***r*** se sujeta un lápiz.

Enseguida con el lápiz se dibuja la circunferencia manteniendo el hilo tenso durante todo el trazo, tal como se ve en la figura siguiente.

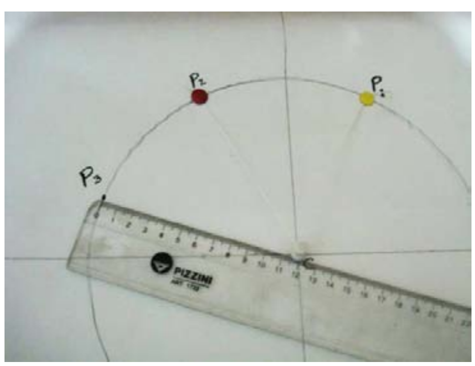


Posteriormente se pide al alumno que observe lo sucedido en la construcción para que logre identificar el tipo de curva que se genera, así como algunos otros aspectos importantes que se quieran remarcar. Para ello se le pide y preguntan cosas como "describe con tus palabras que forma tiene la curva que acabas de trazar", "si marcamos un punto P_1 en la curva (sujetado por una tachuela), y otro punto cualquiera P_2, ¿cómo es la distancia CP_1 con respecto a la distancia CP_2? "comprueba lo anterior midiendo las distancias con tu regla" o "¿A cuál de las cónicas descubiertas por Apolonio se asemeja esta curva?".





Al respecto, son muchas las cuestiones por atender, las cuales incluyen preguntas como "¿y si marcamos otro punto P_3 y medimos la distancia CP_3, ¿cómo es esta distancia respecto a las otras distancias?



En este caso, para apoyar la definición de circunferencia como lugar geométrico en el plano es recomendable que los estudiantes elaboren una tabla para observar con claridad la existencia de un patrón numérico. La tabla contendrá una columna. En la columna se escribe la distancia del centro C a cada punto P_1, P_2 y P_3 en la circunferencia. A partir del análisis de dicha tabla es muy probable que se compruebe la definición de circunferencia como lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo llamado centro es una constante.

La tabla tendrá el siguiente aspecto:

Distancia del centro **C** a los puntos en la circunferencia **P_1, P_2, P_3.**
CP_1 =
CP_2 =
CP_3 =

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes intercambian, por parejas, los resultados obtenidos respecto a la distancia del centro a los puntos **P_1, P_2, P_3** considerados en la circunferencia. El propósito es verificar que la distancia de todo punto en la circunferencia al centro de la misma es constante y tiene un valor ***r***. Es importante tomar en cuenta que puede haber una variación en las mediciones, esto debido a los errores que se puedan presentar al realizar la medición. La justificación del resultado se basa en el hecho de que la longitud del hilo es igual a ***r***.

Integración. Para finalizar, mediante una revisión grupal, se reitera el concepto de "circunferencia" como el lugar geométrico de puntos cuya distancia a un punto fijo llamado centro es una constante igual a ***r***. Para ello conviene que cada estudiante escriba con sus propias palabras la definición del concepto de circunferencia al que se llegó.

***Tarea*:** Se deja al estudiante que con geogebra trace una circunferencia, localice algunos puntos y verifique que se cumple la definición dada de este concepto

Sesión 20

Tema: Simetría central de la circunferencia.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno comprenda geométricamente la propiedad de simetría central de la circunferencia.

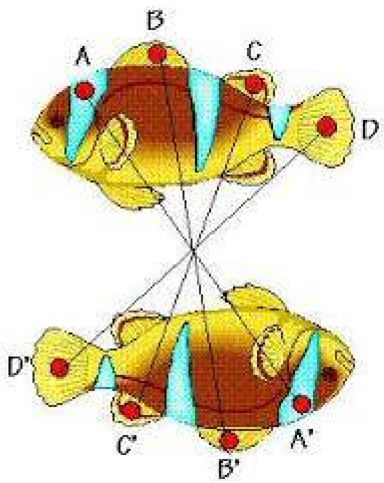
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda comprobar la simetría central de la elipse.

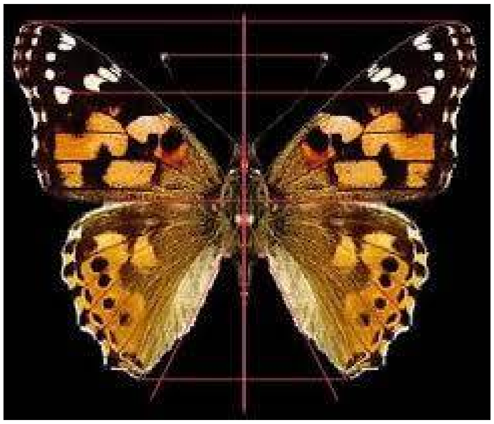
Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, que el estudiante visualice la simetría central de la circunferencia, 2) el del **análisis**, donde el estudiante reconoce la simetría de la curva geométricamente, aplicando la propiedad de simetría central.

Material: Compás, escuadras, regla, hojas blancas tamaño oficio, papel albanene tamaño oficio, plumón negro, lápiz

Inicio

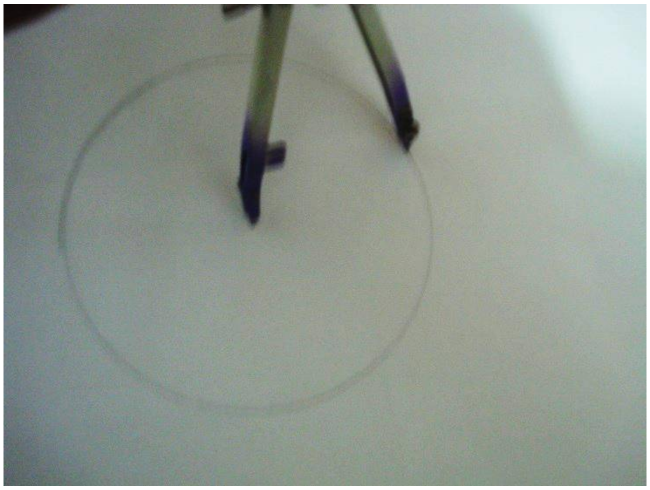
Información. En esta fase se recuerdan los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación al concepto de simetría central. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene situaciones donde se presenta el concepto de simetría central. Posteriormente, para que la idea de simetría central sea comprendida, se enuncian las condiciones geométricas que debe cumplir una curva para tener simetría central. Esto con el propósito de que los estudiantes activen, reflexionen y compartan sus conocimientos.
Se dice que una figura geométrica F tiene simetría central en un punto O, si al trazar desde un punto P cualquiera de la figura una recta L que pase por O, a P le corresponderá otro punto P' de L y F tal que O es el punto medio del segmento PP'.
¿Cuáles de las siguientes figuras tienen simetría central? Compruébalo con tu juego de geometría.



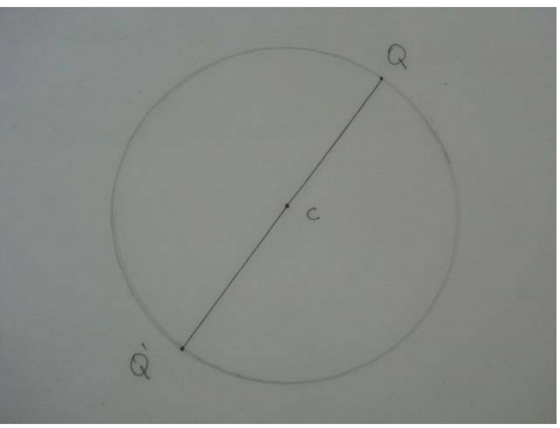


Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que trace con el compás una circunferencia y que compruebe si tiene simetría central, mediante la siguiente actividad.
Coloca una hoja blanca tamaño oficio y encima una hoja de papel albanene. Traza con el compás una circunferencia de radio r como lo muestra la siguiente figura.



Localiza un punto Q en la circunferencia, traza una línea recta que parta del punto Q y que pase por el punto C de la circunferencia de tal manera que intersecte a la circunferencia en otro punto Q'.
Mide con la regla los segmentos QC y CQ' ¿cómo son sus medidas?
La conclusión a la que debe llegar el estudiantes es que C es el punto medio de QQ', es decir, QC = CQ'. Enseguida se le pide al alumno que localice otros puntos cualesquiera R, y S en la circunferencia y aplicando el



procedimiento anterior debe obtener los puntos R' y S' en la curva y comprobar que RC = CR' y SC = CS' probando que C es punto medio de RR' y SS' respectivamente; como consecuencia la circunferencia tiene simetría central respecto a este punto. Los estudiantes deben llegar a la conclusión de que se cumple por definición del concepto de "circunferencia" como lugar geométrico, dado que Q, R, S y Q', R' S' son puntos de la circunferencia y C es el centro de la circunferencia entonces en particular RC = r = CR', análogamente se prueba para los demás puntos.

<u>Cierre</u>

Explicitación. En esta fase se examina el trabajo realizado de la siguiente manera. En parejas revisan que se cumplan las propiedades de simetría central en el trabajo de su compañero. Posteriormente en discusión grupal los estudiantes explican cómo se comprobó la simetría central en la circunferencia y por qué creen que la figura tiene simetría central.

Sesión 21

Tema: Elementos que definen a la circunferencia.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca los elementos que definen a la circunferencia.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno con base en las propiedades de simetría de la circunferencia, defina los elementos que forman la circunferencia.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza todos los elementos que componen a la circunferencia y 2) el del **análisis**, donde el estudiante examina las propiedades que tienen cada uno de los elementos que integran a una circunferencia.

Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, hojas blancas tamaño oficio, escuadras, plumón negro, lápiz, color rojo.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase se le pide al estudiante que trace la circunferencia por el método del jardinero, y que localice en la gráfica los elementos ya conocidos como son el centro C punto de intersección de dos rectas perpendiculares. Asimismo, se le pide que escriba las propiedades de los elementos que se generan. Para que el estudiante comprenda mejor éstas propiedades, se le pide que elabore una tabla donde aparezcan los elementos de la circunferencia por un lado y las propiedades de estos por el otro. Ver tabla 2. Por ejemplo, como por construcción cualesquiera puntos de la circunferencia P_1, P_2, P_3 se localizan a la misma distancia del centro C, entonces $CP_1 = CP_2 = CP_3$. Di definimos la distancia C del centro a cualquier punto de la circunferencia con la letra trenemos que si P es cualquier punto de la circunferencia, CP = r. Entonces la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro es r. Dicha cantidad es la constante que define a la circunferencia, como ya lo habíamos comprobado.

TABLA 2

Elemento de la circunferencia	**Propiedades y relaciones con otros elementos**
Radio r CP: Segmento que une el centro con cualquier otro punto de la circunferencia	CP=r (distancia de cualquier punto P de la circunferencia al centro C)
Cuerda AB	
Diámetro DE	
Centro C	
Secante S	
Tangente T	

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se definen otros elementos de la circunferencia. Se pide al estudiante que localice en la circunferencia construida tales elementos, cómo se denotan y nombran, que escriba sus propiedades en la tabla 2 y conteste algunas preguntas, mediante la siguiente actividad.

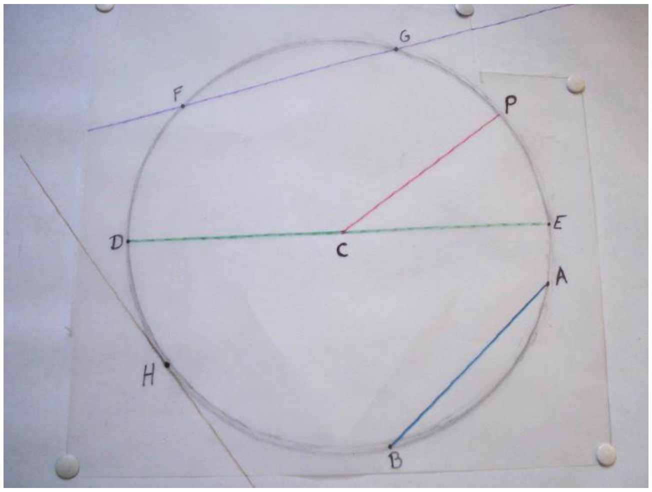
Localiza con rojo el centro de la circunferencia, denótalo con la letra C.

Traza un segmento de recta del centro C a cualquier punto de la circunferencia, denota al segmento como CP. A este segmento se le llama *radio*. Remarca el radio con color rojo. Une dos puntos A y B cualesquiera de la circunferencia. Al segmento AB se le llama *cuerda*. Remarca la cuerda con color azul.

Traza una cuerda DE que pase por el centro de la circunferencia. A esta cuerda se le llama *diámetro*. Remarca el diámetro con color verde. Como la circunferencia es simétrica respecto al centro, entonces C también es punto medio del diámetro DE, el cual es la cuerda de *mayor* longitud en la circunferencia.

Traza una línea recta que pase por dos puntos F y G de la circunferencia, denota a la recta como *S*. A esta recta se le llama *secante*. Remarca la secante con color violeta.

Traza una línea recta que pase por un solo punto H de la circunferencia, denota a esta recta como *T*. A esta recta se le llama tangente. Remarca la tangente con color café. Al punto H se le llama punto de tangencia.



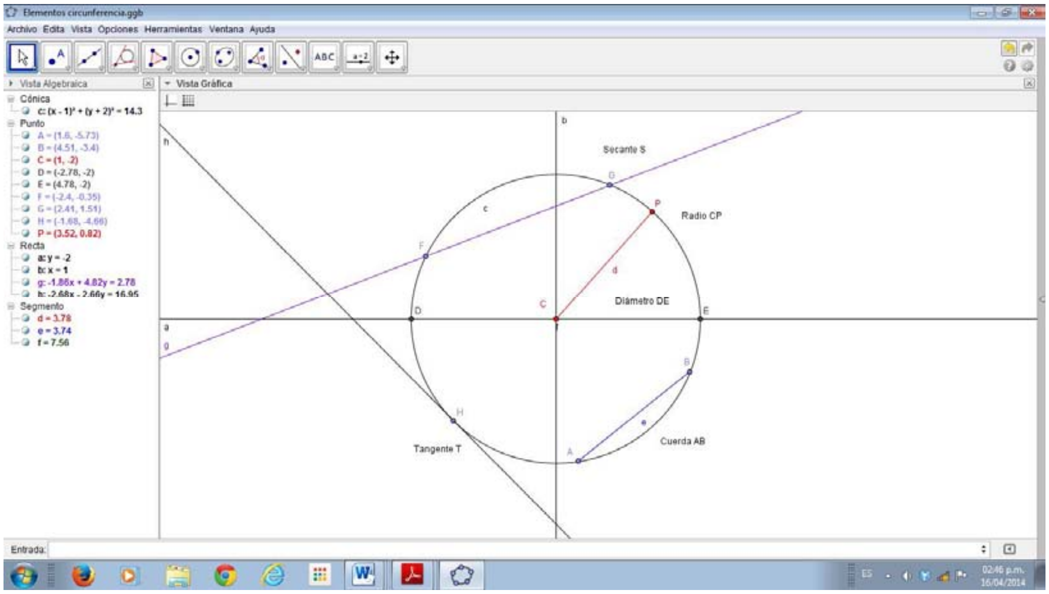
Cierre

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen sus tablas de elementos, con el objetivo de mejorar la información de las mismas.

Integración. Al terminar, se revisa el trabajo de cada equipo en forma grupal, con el fin de que todo el grupo obtenga los conocimientos sobre los elementos de la circunferencia y sus propiedades.

Tarea: Se deja al estudiante que trace una circunferencia con geogebra algunos de sus elementos (denotando cada uno de ellos con letras) y que escriba explícitamente sus nombres.

Ejemplo.



Sesión 22

Tema: Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro el origen.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno deduzca la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro el origen.

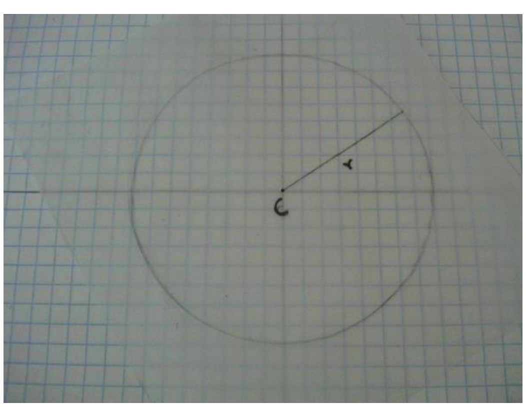
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno deduzca, con base en la definición de circunferencia, la ecuación ordinaria de una circunferencia con centro el origen.

Los niveles de razonamiento que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza a la circunferencia con centro en el origen en el plano cartesiano, 2) el de **síntesis**, donde el estudiante deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen a partir de la definición de circunferencia como lugar geométrico.

Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado, escuadras, hojas de papel albanene, plumón negro, lápiz, colores.

Inicio

Orientación dirigida. Se le pide al estudiante que en un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado trace los ejes coordenados. Asimismo, se le pide que trace en papel albanene por el método del jardinero una circunferencia con centro C y cuyo radio mida r.

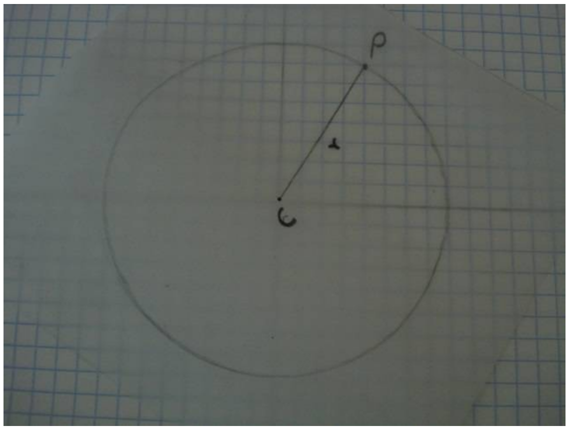


A continuación se le pide que coloque la circunferencia hecha en papel albanene sobre el papel cuadriculado de tal manera que su origen coincida con el origen de los ejes cartesianos, que gire la curva en torno al origen y observe.

Haciéndole la siguiente pregunta, ¿varia el radio de la circunferencia?

Desarrollo

Orientación dirigida. Enseguida, el profesor aplicando la estrategia de discusión grupal y en colaboración con los estudiantes hace notar que el centro de la circunferencia tendrá coordenadas C (0, 0), y se le pide al estudiante que localice un punto cualquiera P(x, y) de la curva como lo muestra la siguiente imagen.



Después, en discusión grupal dirigida por el profesor, se aplica la definición de circunferencia obteniendo la expresión algebraica:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$$

Qué al desarrollarla por medio de métodos algebraicos se llega a la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria con centro en el origen. $x^2+y^2=r^2$

Cierre

Orientación dirigida. Se pide que en parejas identifiquen en cada uno de sus trabajos los demás elementos de la circunferencia como son diámetro, cuerda, recta secante, recta tangente, y que anoten la información en una tabla como la siguiente:

Circunferencia con centro en el origen	
Elementos	Notación
Centro	C(0, 0)
Cuerda	AB Donde A,B son puntos de la circunferencia
Diámetro	DE = 2r D, E son puntos de la circunferencia
Radio	CP= r
Recta secante	S recta que pasa por los puntos F y G puntos de la circunferencia.
Recta tangente	T recta que pasa por el punto H, punto de la circunferencia

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen sus tablas de elementos, con el objetivo de corregir la información de las mismas si es necesario.

Posteriormente, se le pide al estudiante que en papel bond de cuadrícula trace los ejes coordenados, centro en el punto C(0,0) y radio 5 cm. Por el método del jardinero trace la circunferencia y marque en ella como un punto cualquiera a P(x, y). Por último se le pide que aplique la definición de esta curva y encuentre su ecuación.

Tarea: Se deja al estudiante que con geogebra trace una circunferencia con centro en el origen y radio 3 cm, con el propósito de que deduzca su ecuación, aplicando la idea de la curva como lugar geométrico. Posteriormente se pide que compare la ecuación obtenida con la ecuación que aparece en geogebra en vista algebraica.

Integración. Para reafirmar el aprendizaje se deja al estudiante ejercicios donde aplique la definición de circunferencia como lugar geométrico para obtener su ecuación y gráfica como los siguientes.

- Usando la definición, hallar la ecuación de la circunferencia a partir de los siguientes datos.
  a) centro el origen y radio 4.
  b) centro el origen y diámetro 5.

Sesión 23

Tema: Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca la ecuación de la circunferencia con centro diferente del origen.

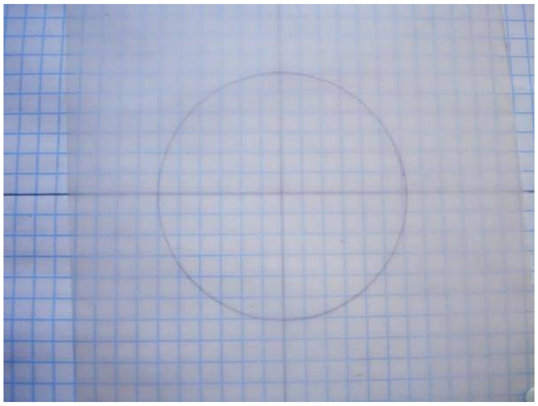
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno, con base en la deducción de la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro el origen y aplicando la definición de circunferencia como lugar geométrico, deduzca junto con el profesor la ecuación de esa curva cuando el centro este fuera del origen.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza a la circunferencia según la posición que presente en el plano cartesiano; 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante deduce la ecuación de la circunferencia cuyo centro no coincide con el origen; 3) el de **clasificación**, donde el estudiante relaciona las diferentes posiciones que puede tener la circunferencia con respecto a las coordenadas de su centro, por ejemplo, las circunferencias cuyo centro este sobre el eje X de las que su centro está en el eje Y.

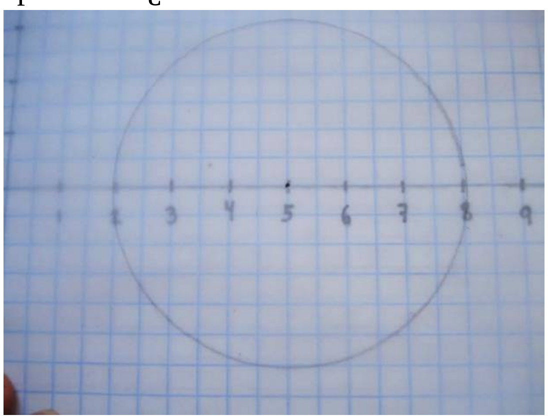
Material: Un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado, hojas blancas tamaño oficio, papel albanene tamaño oficio, compás, escuadras, regla, plumón negro, lápiz.

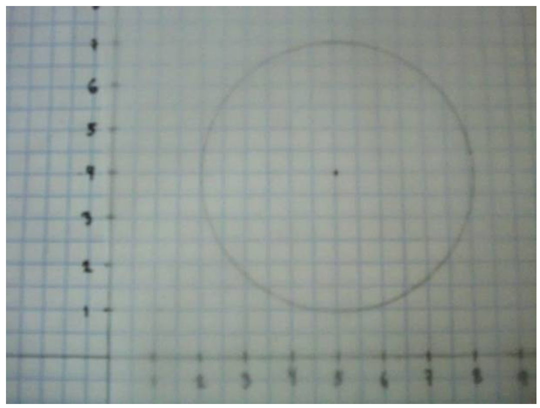
Inicio

Orientación dirigida. Se le pide al estudiante que trace los ejes coordenados en un cuarto de pliego de papel. Asimismo que trace en una hoja de papel vegetal, una circunferencia de radio 3 unidades, que coloque a la circunferencia (anteriormente hecha con papel albanene) sobre los anteriores ejes cartesianos de tal manera que el centro de la circunferencia coincida con el origen.



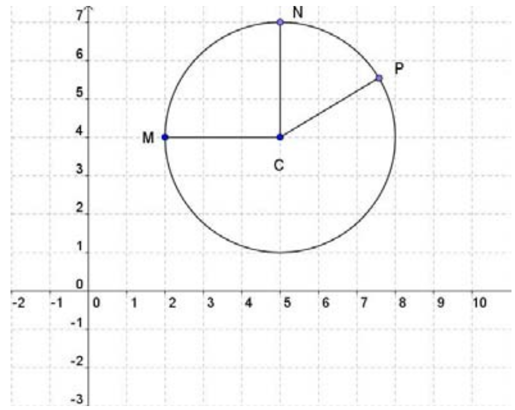
Se le pide que escriba la ecuación de la circunferencia localizada en los ejes anteriores. En seguida que mueva la circunferencia sobre el eje X de tal manera que el centro coincida con el número 5 del eje X. Se le pregunta, ¿qué coordenadas tiene el centro de la circunferencia en esta nueva posición? ¿Cambió la medida del radio? _______.
Nuevamente, se le pide que mueva la circunferencia desde esta posición, en forma vertical 4 unidades hacia arriba. Se le pregunta, ¿qué coordenadas tiene el centro de la circunferencia en esta nueva posición? ¿Cambió la medida del radio?





Se le pide que haga una reflexión, a partir de la gráfica de la curva estudiada.

Se le pide al alumno que localice los Puntos M(2, 4), N(5, 7), pidiéndole que calcule la distancia de M y N al centro.



Desarrollo

Orientación dirigida. Enseguida, el profesor localiza un punto P(x, y) en la circunferencia y aplicando la estrategia de discusión grupal en colaboración con los estudiantes, aplica la definición de circunferencia obteniendo la expresión algebraica como lo indica la siguiente actividad. Se aplica el método analítico de la siguiente manera

Se indica al estudiante que suponga que el punto P de coordenadas (x, y) pertenece a la circunferencia; entonces se le pide que calcule la distancia de P al centro, denotando las coordenadas del centro con (h, k), y al radio con la letra r. Por último se le pide que exprese lo anterior algebraicamente, llegando al resultado $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$

Al desarrollar el alumno la ecuación anterior por medio de métodos algebraicos se llega a la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, cuyo centro está fuera del origen.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Cierre

Se pide que en parejas deduzcan en cada uno de sus trabajos las demás formas de la ecuación de la circunferencia, lo cual depende del centro de la misma; por ejemplo, en el segundo, tercero o cuarto cuadrante, sobre el eje X o sobre el eje Y.

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen las ecuaciones obtenidas, con el objetivo de corregir las mismas si es necesario.

Tarea: Emplear geogebra para la representación gráfica de la circunferencia en las diferentes posiciones según la posición de su centro.

Sesión 24

Tema: Análisis de la ecuación ordinaria circunferencia. Extensión y excentricidad de la circunferencia.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca de la circunferencia su extensión y excentricidad.

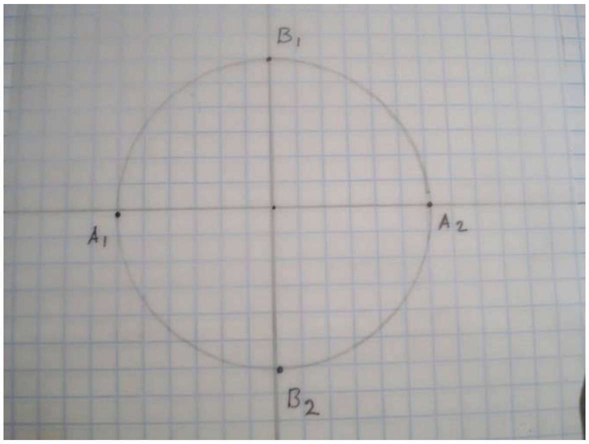
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno examine la ecuación de la circunferencia y a partir del análisis obtenga otras características de la circunferencia como son su extensión y excentricidad.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, que el estudiante visualice a partir del trazo de la circunferencia su extensión; 2) el del **análisis**, donde el estudiante conoce la extensión y su excentricidad de la curva al examinar la ecuación de la misma; 3) el de **clasificación**, donde el estudiante, mediante una generalización, concluye que la extensión y su excentricidad son conceptos que se aplican a cualquiera de las circunferencias estudiadas.

Material: Un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado, hojas blancas tamaño oficio, papel albanene tamaño oficio, compás, escuadras, regla, plumón negro, lápiz.

Inicio

Orientación dirigida. Coloca la circunferencia de radio a hecha con albanene sobre la hoja cuadriculada de tal manera que coincida su centro en el origen. Localiza los puntos de intersección de la circunferencia con los ejes coordenados $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, a)$ y $B_2(0,-a)$. Como lo muestra la figura.



Desarrollo

Orientación dirigida. Escribe la ecuación de la circunferencia que representa la gráfica y despeja la variable "**y**".

El estudiante debe llegar a la ecuación $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

Posteriormente y en forma grupal, se plantea que éste es el valor de "**y**", siempre y cuando $a^2 - x^2 \geq 0$. Resolviendo la desigualdad se llega que para valores de x entre $-a$ y a, esto es, para $-a \leq x \leq a$, "**y**" está definida. (es decir, para valores de x en el intervalo $[-a, a]$).

En la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ despeja la variable "*x*". Después analiza nuevamente el radicando, ¿para qué valores de "*x*" está definida la elipse?

Respuesta. $a^2 - y^2 \geq 0$, despejando la variable "*y*" se obtiene que la elipse está definida para los valores de "y" en el intervalo $-a \leq y \leq a$ (es decir, para valores de y en el intervalo $[-a, a]$).

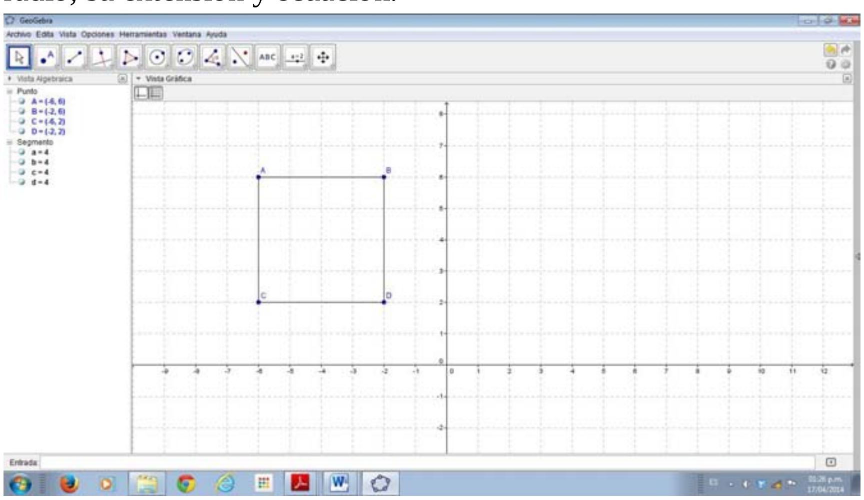
Información. En esta fase se recuerda sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación al concepto de excentricidad. Para tal propósito se menciona en forma grupal que el concepto de excentricidad se define por la razón $e = \frac{c}{a}$ donde *c* es la semidistancia focal y a representa al semieje mayor de la elipse. En el caso de la circunferencia como límite de la elipse se estableció que la distancia focal es cero, esto es, c = 0 y que el valor de los semiejes son iguales, esto es, a = b donde se obtuvo la circunferencia con radio a ≠ 0.
Con estos argumentos se llega en forma grupal a la conclusión que la excentricidad es cero dado que $e = \frac{0}{a} = 0$.

Cierre

Orientación dirigida. Se les pide a los estudiantes que tracen el centro de un cuadrado en un plano cartesiano, y a partir del centro construyan un cuadrado cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados. Enseguida se le pide al estudiante que tomando como base el concepto de extensión, obtenga el valor del centro, y radio de la circunferencia que puede trazarse dentro del cuadrado, además de escribir su ecuación.

Ejemplo.

La siguiente imagen muestra un cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y su centro, construido por un estudiante con Geogebra. En él se pide el valor del diámetro, el radio, su extensión y ecuación.



Explicitación. En esta fase se les pide a los estudiantes que en parejas intercambien sus experiencias y expliquen con sus propias palabras porqué la excentricidad en la circunferencia es cero.

Sesión 25

Tema: Ejercicios de lo verbal a lo geométrico y algebraico.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda traducir a una forma gráfica y algebraica un problema plateado en forma verbal.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda identificar los elementos de una circunferencia, los grafique y exprese en forma algebraica la solución de un problema cuando éste se le plantea en forma verbal. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza los elementos que se le proporcionan en forma verbal, al trazar dichos elementos en un plano cartesiano, 2) el del **análisis**, donde el estudiante a partir de los elementos que le son proporcionados, logra examinar los elementos que le son requeridos, localizándolos y escribiéndolos en forma algebraica.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase el docente entrega a cada par de estudiantes una serie de ejercicios verbales, en los cuales se proporcionan algunos elementos de la circunferencia y se le pide que encuentre otros. En seguida se muestran dos ejercicios semejantes a los que se les piden.

- Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos A (2,3) y B (-4, 5). Hallar su extensión, el radio y la ecuación de la circunferencia.
- ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (-1,-3) y que además pasa por el punto (1,-2)?

Desarrollo.

Orientación dirigida. En esta fase se les pide a los estudiantes que sigan el siguiente procedimiento para resolver el problema.

a) Haz un bosquejo de la circunferencia que se te pide, localizando cada elemento que proporciona la información.

b) Habla con tu compañero sobre las conjeturas a que lleguen, para poder obtener los elementos que se piden y justifícalas con color rojo.

c) Localiza en el bosquejo los elementos que obtuviste después de haber discutido con tu compañero.

d) Después de haber identificado de qué tipo de circunferencia se trata, escribe su ecuación.

Cierre.

Explicitación. Después de haber realizados los cuatro pasos anteriores se les pide a cuatro parejas que expongan un ejercicio cada una, explicando como realizaron su ejercicio y justificando su resultado.

Tarea. Se deja una serie de ejercicios semejantes a los anteriores, utilizando en este caso geogebra para localizar los elementos y hacer la gráfica.

Sesión 26

Tema: Transición de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general de la circunferencia.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno transite a la ecuación general de la circunferencia a partir de la ecuación ordinaria de la circunferencia.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que al haber conocido la ecuación ordinaria de la circunferencia el estudiante pueda, a partir de ella y empleando algunos pasos algebraicos, pasar a la forma general de la circunferencia. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante reconocerá la ecuación ordinaria de la circunferencia por sus características algebraicas, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante por medio de pasos algebraicos llegará a la ecuación general de la circunferencia a partir de la ecuación ordinaria.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a los conceptos de binomios al cuadrado. Cabe mencionar que el concepto ya se había retomado en el tema de la elipse. Por tal motivo se emplea una actividad que contiene ejercicios donde se presentan el concepto de binomio al cuadrado. Esto con el propósito de que los estudiantes recuerden y reflexionen sobre tales conocimientos.

Resuelve de manera simplificada los siguientes binomios elevados al cuadrado.

1. $(x + 8)^2$ 2. $(4 - m)^2$ 3. $(y + 9)^2$ 4. $(a - 3)^2$ 5. $(m - 10)^2$ 6. $(x - 12)^2$ 7. $(x + 0.2)^2$

8. $(2x + 3y)^2$ 9. $(4x^3 + 5y)^2$

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que escriba la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el punto C(h, k) y radio r

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En seguida se le pide que mediante el álgebra desarrolle los binomios al cuadrado con el procedimiento recién recordado.

El estudiante obtiene la expresión algebraica: $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$

se le pide que la escriba de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde deduce que

$A = 1 \quad C = 1 \quad D = -2h \quad E = -2k \quad F = h^2 + k^2 - r^2$

Después se hacen preguntas al estudiante como, ¿A y C pueden ser cero? ¿Qué característica deben tener los coeficientes de A y C para que la ecuación represente una circunferencia?

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes, después de haber argumentado sobre la ecuación general de la circunferencia que se obtuvo, llegan a las siguientes conclusiones: "A y C son iguales a uno".

Sesión 27

Tema: Transición de la ecuación general de la circunferencia a la ecuación ordinaria de la circunferencia

El **aprendizaje esperado** es que el alumno a partir de la ecuación general de la circunferencia transite a la ecuación ordinaria de la circunferencia.

El **aprendizaje significativo** esperado es que al haber identificado el estudiante las características de la ecuación general de la circunferencia, pueda pasar a la forma ordinaria de la circunferencia a partir de ella empleando el método de completar cuadrados. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante reconocerá la ecuación general de la circunferencia por sus características algebraicas, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante por medio de pasos algebraicos deducirá la ecuación ordinaria de la circunferencia a partir de la ecuación general.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación al método de completar cuadrados, cabe mencionar que el concepto ya se había retomado en el tema de la elipse. Por tal motivo se emplea una actividad que contiene ejercicios donde se presentan los conceptos de completar cuadrados. Esto con el propósito de que los estudiantes recuerden y reflexionen sobre tales conocimientos.

Ejercicios. Completa el cuadrado.

1) $x^2 - 4x$ 2) $x^2 - 6$ 3) $2x^2 + 8x$

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que escriba la ecuación general de la circunferencia especificando las características algebraicas.

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con A y C iguales a uno.

En seguida se le pide que mediante el álgebra reduzca y complete cuadrados, lo cual ya se había recordado.

El estudiante obtiene la expresión algebraica:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Que es la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y radio

$$r=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$$

Se hace notar a los estudiantes que A y C son iguales a uno. Después se hacen preguntas al estudiante como, ¿Qué signo debe tener D^2+E^2-4F , para que la ecuación represente una circunferencia?

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes, después de haber argumentado sobre la ecuación ordinaria de la circunferencia que se obtuvo, llegan a las siguientes conclusiones

- $\frac{D^2+E^2-4F}{4}$ debe ser de signo positivo.
- $D^2+E^2-4F>0$ para que la ecuación represente una circunferencia
- Si $D^2+E^2-4F=0$, la ecuación representa el punto $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$
- Si $D^2+E^2-4F<0$ no representa ningún lugar geométrico real

Sesión 28

Tema: Tránsito de la ecuación general de la circunferencia a la ecuación ordinaria y viceversa.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda, a partir de una ecuación general de la circunferencia, pasar a su forma ordinaria y viceversa.

El **aprendizaje significativo** esperado es que el alumno pueda pasar, a partir de la ecuación general de la circunferencia, a la forma ordinaria utilizando el método de completar cuadrados y viceversa. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza la forma algebraica de la ecuación ordinaria y la forma algebraica de la ecuación general de la circunferencia, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante deduce la forma ordinaria a partir de la ecuación general de la circunferencia aplicando el método de completar cuadrados y viceversa.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase el docente entrega a cada par de estudiantes una serie de ejercicios en los cuales se da la ecuación general de la circunferencia y se le pide que encuentre su forma ordinaria y viceversa. En seguida se muestran dos ejercicios semejantes a los que se les piden.

- Reducir la ecuación de la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 12x + 40y + 77 = 0$ a su forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, calcular la longitud del radio y su extensión.

- La ecuación ordinaria de una circunferencia es $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$. Llevar esta ecuación a la forma general y determinar las coordenadas del centro, calcular la longitud del radio y su extensión.

Desarrollo.

Orientación dirigida. En esta fase se les pide a los estudiantes que sigan el procedimiento adecuado para resolver el problema utilizando la siguiente tabla.

Problema: Reducir la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 12x + 40y + 77 = 0$ a su forma ordinaria.

Paso	Procedimiento	Justificación
1	$4x^2 + 4y^2 - 12x + 40y + 77 = 0$	Dividiendo entre 4,
2	$x^2 - 3x + y^2 + 10y + \frac{77}{4} = 0$	Ordenamos términos
3	$x^2 - 3x + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + y^2 + 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = -\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \frac{77}{4}$	Factorizando
4	$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 10y + 25 = +\frac{9}{4} + 25 - \frac{77}{4}$	Completando cuadrados y transponiendo términos
5	$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+5)^2 = 8$	Reduciendo términos obtenemos la ecuación en su forma ordinaria

Posteriormente, a partir de la ecuación ordinaria o ecuación general, se les pide a los estudiantes que:

a) Determinen los elementos esenciales de la circunferencia a partir de la ecuación.

b) Hagan un bosquejo de la circunferencia que se te pide, localizando en él cada elemento que proporciona la información.

Para encontrar los elementos de una circunferencia a partir de cualquier ecuación se sugiere utilizar las siguientes tablas.

Ecuación	Centro	Radio	Diámetro	Extensión
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	$C(h,k)$	r	$D = 2r$	$-r \le x \le r$ $-r \le y \le r$

$x^2+y^2=r^2$	$C(0,0)$	r	$D=2r$	$-r\le x\le r$ $-r\le y\le r$
$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$	$C(h,k)$	r	$D=2r$	$-r\le x\le r$ $-r\le y\le r$

Ejemplos.

Ecuación	Centro	Radio	Diámetro	Extensión
$(x-2)^2+(y+5)^2=3$	$C(2,-5)$	$\sqrt{3}$	$D=2\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ $-\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3}$

Cierre.

Explicitación. Después de haber terminado los ejercicios se les pide que en parejas expongan un ejercicio, explicando como lo realizaron y justificando su resultado.

Tarea. Se deja a los estudiantes una serie de ejercicios semejantes a los anteriores, utilizando en este caso geogebra. Después de realizar el ejercicio se les pide que localicen los elementos y hagan la gráfica.

Sesión 29

Tema: Aplicaciones a la circunferencia: La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos. Método de las mediatrices, método de las tres condiciones.

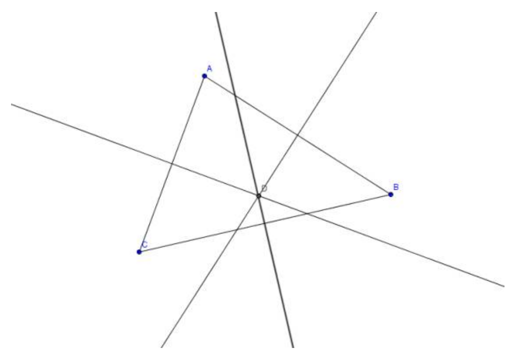
El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos por diferentes métodos.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda comprender el concepto de mediatriz y como consecuencia pueda encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos. Pueda comprender que la circunferencia está sujeta a tres condiciones y a partir de ello por medio de manipulación algebraica pueda encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza las características geométricas que se cumplen en una circunferencia para que pase por tres puntos, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante a partir del concepto geométrico de mediatriz respecto a la circunferencia puede deducir algebraicamente la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos, 3) el de análisis, donde empleando el método analítico examina las tres condiciones a que está sujeta la circunferencia y encuentra la ecuación de la curva.

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación al método sintético de trazar una circunferencia dados tres puntos no colineales. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene la situación donde se presenta este problema geométrico. Es decir, para que sea comprendido el problema de hallar la ecuación de la circunferencia que pase por tres puntos. Primero se realiza la representación geométrica de esta noción para posteriormente resolver el problema analíticamente.

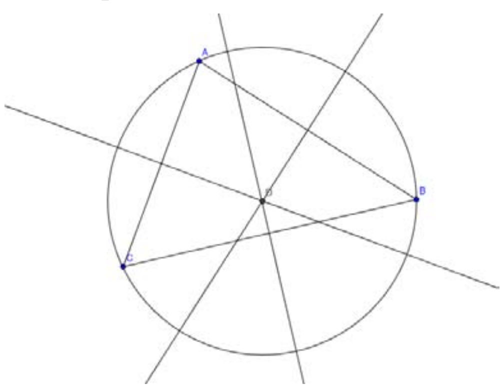
Orientación dirigida. En esta fase se les pide a los estudiantes que sigan el siguiente procedimiento para resolver el problema de trazar la circunferencia que pase por tales puntos dados tres puntos A, B, C no colineales.

La solución a que deben llegar los estudiantes es el de trazar las mediatrices de los segmentos AB, BC y CA , el punto de intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.



Observa la siguiente imagen y contesta lo siguiente.

D es el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos AB, BC y CA.



Como D es un punto de la mediatriz del segmento CB entonces DC = DB

Como D es un punto de la mediatriz del segmento AB entonces _________

Como D es un punto de la mediatriz del segmento ____ entonces _________.

Como DC = DB = DA, entonces D equidista de los puntos A, B y C.

Por lo tanto puedo trazar una circunferencia con centro en D y radio la distancia de D a cualquiera de los puntos A, B y C.

Desarrollo.

Orientación dirigida. En esta fase se les pide a los estudiantes que en parejas resuelvan el problema en el plano cartesiano.

Considera los puntos de coordenadas $A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, y $C=(c_1,c_2)$, hallar la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ que pasa por los tres puntos.

Los estudiantes deben llegar a que la solución es considerar que el centro, $O(x, y)$, equidista de los puntos *A*, *B*, *C* y resolver el sistema de las ecuaciones métricas correspondientes:

dist (O, A)= dist(O, B)

dist(O, A)= dist (O,C)

La primera ecuación representa a la mediatriz del lado *AB* y la segunda a la mediatriz del lado *AC*. La solución del sistema, que es la intersección de las dos mediatrices, es el centro de la circunferencia. Una vez determinado este punto el radio se halla calculando la distancia de *O* a cualquiera de los puntos dados.

Cierre

Explicitación. Después de haber terminado el ejercicio se les pide a un par de estudiantes que lo expongan, explicando cómo realizaron el ejercicio y justifiquen el resultado.

Tarea. Se deja al estudiante el siguiente ejercicio.

Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos A(-1, 1), B(3, 5), y C(5, -3) por el método analítico.

Traza su gráfica por el método sintético, esto es, dados los puntos A, B y C, traza la circunferencia que pasa por tales puntos.

Segunda parte de la sesión 29.

Información. En esta fase se indaga sobre como está determinada una circunferencia por tres condiciones dadas. El profesor, empleando la estrategia de exposición dirigida, le pide al alumno que reflexione en torno a lo siguiente:

En la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ hay tres constantes arbitrarias independientes, *h*, *k* y *r*. De manera semejante en la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ hay tres constantes arbitrarias independientes, D, E y F.

Como la ecuación de la circunferencia puede escribirse en cualquiera de las anteriores formas, la ecuación de la circunferencia puede obtenerse determinando los valores de las tres constantes.

Desarrollo.

Orientación dirigida. Una circunferencia está determinada por tres condiciones independientes. Se le pide ahora al alumno encuentre la ecuación de la circunferencia dados tres puntos.

Ejemplo. Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos A(2, 1), B(-4, 3) y C(-6, 5) .

El alumno debe escribir la ecuación de la circunferencia en su forma general

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Como los puntos están en la circunferencia, cada uno debe satisfacer la ecuación general. De acuerdo a esto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

A (2,1)   4 + 1 + 2D + E + F = 0
B (-4, 3)   16 + 9 – 4D+ 3E + F = 0
C (-6, 5)   36 + 25 – 6D + 5E + F = 0
que pueden escribirse
– 2D + E + F = – 5
+ 4D + 3E + F = – 25
– 6D + 5E + F = – 61
El estudiante debe encontrar la solución de este sistema, la cual es
D = – 4   ;   E = – 22   ;   F = 25
De tal manera que sustituyendo estos valores en la ecuación general se tiene

$$x^2 + y^2 - 4x - 22y + 25 = 0$$

Ecuación que pasa por los puntos A, B, C.

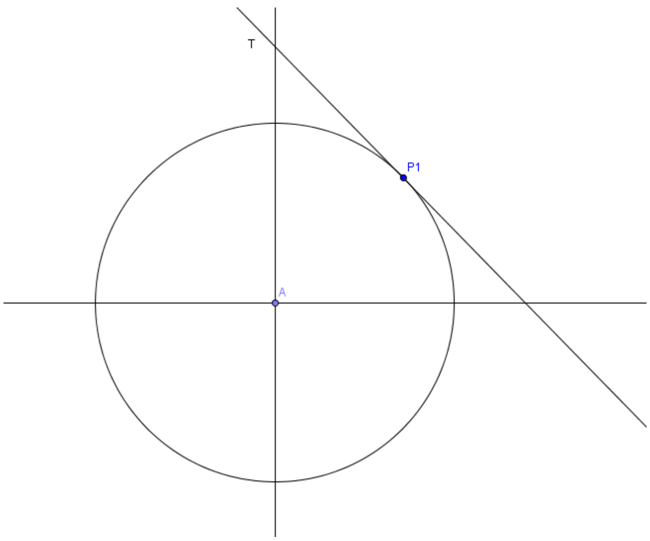
Cierre ***Explicitación.*** Después de haber terminado el ejercicio se les pide a un par de estudiantes que expongan el ejercicio, explicando cómo lo realizaron y justificando el resultado.
Tarea. Se deja al estudiante el siguiente ejercicio.
Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos A (1, –3), B (5, 1), y C(9, –3) por el método de las tres condiciones independientes.

Sesión 30

Tema: Aplicaciones a la circunferencia: Ecuación de la recta tangente a una circunferencia, en uno de sus puntos.
El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda encontrar la ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto dado.
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda comprender el concepto de tangente a la circunferencia y como consecuencia pueda encontrar la ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto dado. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza las características geométricas que debe cumplir una recta para considerarla una recta tangente a una circunferencia en un punto dado, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante a partir del concepto algebraico de recta tangente respecto a la circunferencia puede deducir algebraicamente la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto dado.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a recta tangente a una curva. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene la situación donde se presenta la posición de la recta tangente a la circunferencia. Es decir, para que la idea de tangencia sea comprendida, se da la representación geométrica de esta noción a fin de que los estudiantes recuerden y reflexionen sobre la misma.



La figura anterior muestra la posición de una recta respecto a una circunferencia. Observa y contesta las siguientes preguntas. ¿La recta T corta a la circunferencia?

____

¿En cuántos puntos toca la recta T a la circunferencia? _______, por lo tanto la recta T recibe el nombre de recta

________________.

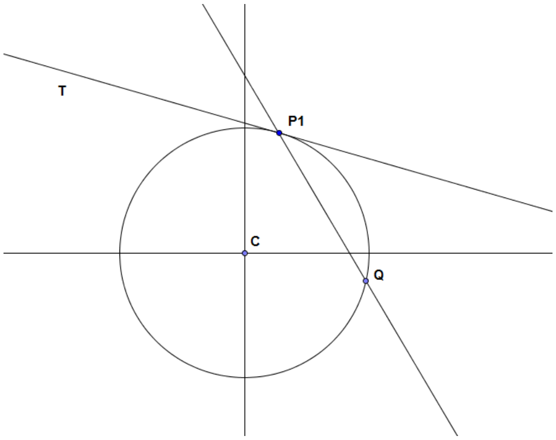
Posteriormente para indagar sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a las condiciones algebraicas que se deben cumplir para que una recta sea tangente a la circunferencia, se plantea la siguiente actividad.

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase el docente plantea al grupo el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ en un punto P_1 (x_1, y_1). Para ello realiza una discusión dirigida, llegando a los siguientes resultados:

Todas las rectas que pasan por el punto $P_1(x_1, y_1)$ tienen ecuación de la forma

$y - y_1 = m(x - x_1)$ y todas estas líneas intersecan a la circunferencia en al menos un punto (dos si la recta es secante, uno si la recta es tangente).



El problema es encontrar el valor de la pendiente m para la recta que es tangente en el punto P_1 (x_1, y_1).

Los puntos Q(x, y) que son intersección de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ con la circunferencia satisfacen el sistema de ecuaciones

$x^2 + y^2 = r^2$ (1) $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$ (2)

En particular el punto $P_1(x_1, y_1)$ satisface este sistema. La idea general para resolver el sistema consiste en sustituir la segunda ecuación en la primera, con lo cual se obtiene una ecuación cuadrática en x. $\Delta(x_1, y_1, m) = 0$; de esta última expresión puede obtenerse el valor de la pendiente $m = m(x_1, y_1)$. Para aplicar el resultado del procedimiento anterior el docente plantea el siguiente ejercicio para que los estudiantes lo resuelvan en parejas.

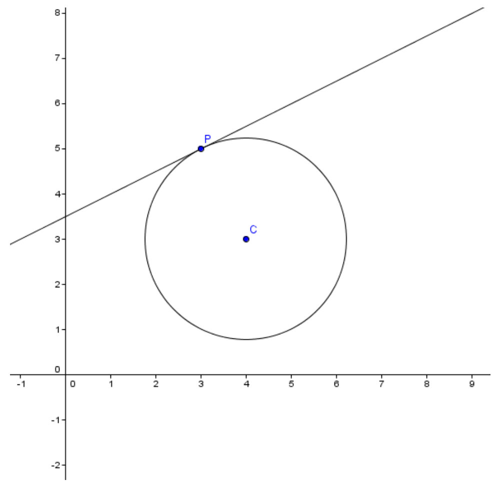
Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ en el punto (3, 5).

La ecuación de la familia de rectas que pasa por el punto (3, 5) es $y - 5 = m(x - 3)$, en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. Despejando "***y***" de esta ecuación y sustituyéndola en la ecuación de la circunferencia tenemos

$$x^2 + (mx - 3m + 5)^2 - 8x - 6(mx - 3m + 5) + 20 = 0$$

que se reduce a

$$(m^2 + 1)x^2 - (6m^2 - 4m + 8)x + (9m^2 - 12m + 15) = 0 .$$



Como sabemos para que exista una solución única para la pendiente, el discriminante debe anularse, esto es

$$(6m^2 - 4m + 8)^2 - 4(m^2 + 1)(9m^2 - 12m + 15) = 0$$

La solución de esta ecuación es $m = \frac{1}{2}$ de manera que la ecuación de la tangente buscada es

x – 2y + 7 = 0.

Cierre

Explicitación. Después de haber terminado el ejercicio se les pide a un par de estudiantes que expongan el ejercicio, explicando como realizaron el ejercicio y justificando el resultado. Posteriormente se llega en forma grupal a una justificación general.

Tarea. Se deja al estudiante que con lo visto en la sesión demuestre el siguiente

Teorema. La ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto de contacto P_1 (x_1, y_1) es $x_1 x + y_1 y = r^2$

Sugerencia usar el hecho de que $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

Sesión 31

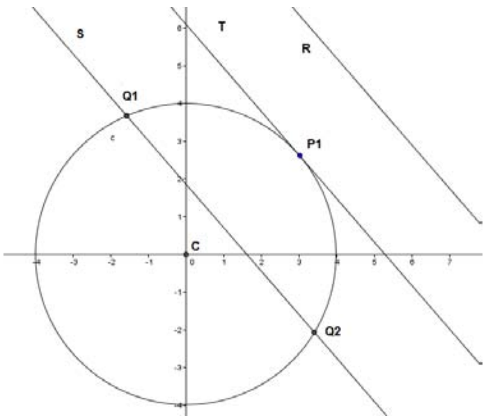
Tema: Aplicaciones a la circunferencia: Intersecciones de rectas con una circunferencia.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda encontrar los puntos de intersección de una recta con la circunferencia.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda comprender los casos en que una recta intersecta a una circunferencia y a partir de ello, pueda encontrar una, dos o ninguna intersección de una recta con una circunferencia. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza los casos geométricos en que una recta se relaciona con una circunferencia, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante a partir del concepto algebraico de intersección entre dos lugares geométricos, en este caso la recta y la circunferencia pueda deducir algebraicamente la intersección de la recta con la circunferencia en uno o dos puntos, o el caso en que no haya intersección.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a la intersección de dos curvas. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene situaciones donde se presentan diferentes posiciones de la recta y su relación con una circunferencia. Es decir, para que la idea de intersección sea comprendida, se da la representación geométrica que debe cumplir una recta para que esté intersecte a la circunferencia o no la intersecte. Esto con el propósito de que los estudiantes activen y reflexionen sobre tales conocimientos.



La figura anterior muestra las diferentes posiciones de la recta respecto a una circunferencia, observa y contesta las siguientes preguntas.

¿Qué recta no corta a la circunferencia?

____

¿En cuántos puntos corta la recta T a la circunferencia? _______, por lo tanto la recta T recibe el nombre de recta ________________.

¿En cuántos puntos corta la recta S a la circunferencia?_______, por lo cual la recta S recibe el nombre de recta _____________.

Posteriormente para indagar sobre sus conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a las condiciones algebraicas que se deben cumplir para que una recta se intersecte o no con la circunferencia. Se plantea la siguiente actividad

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase el docente plantea al grupo el problema de encontrar la intersección (o no) de la recta a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, (sin pérdida de generalización) y la recta $y = mx + k$.

Realizando una discusión dirigida se llega a los siguientes resultados:

- Dados una circunferencia y una recta, puede suceder que:

a) No se corten.

b) La recta toque a la circunferencia en un punto.

c) La recta corte a la circunferencia en dos puntos.

En términos algebraicos, estas situaciones se traducen de la siguiente manera. Si consideramos las ecuaciones de la recta y de la circunferencia y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

iv) No hay solución (no se cortan).

v) Hay una sola solución (se cortan en un solo punto).

vi) Hay dos soluciones (se cortan en dos puntos).

- Si sus gráficas se cortan en uno o más puntos, cada uno de estos puntos se llaman puntos de intersección.
- Como un punto de intersección de dos curvas está sobre cada una de dichas curvas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, ambas ecuaciones.
- La interpretación analítica de un punto de intersección es un punto cuyas coordenadas representan una solución común de las ecuaciones.

Esto es, para encontrar la intersección de la recta y la circunferencia, debemos resolver simultáneamente las ecuaciones $x^2 + y^2 = r^2$ y $y = mx + k$.

Para ello, despejamos "**y**" de la ecuación de la recta; sustituimos éste valor en la ecuación de la circunferencia y obtenemos una ecuación cuadrática en x. Para que exista al menos una solución, el discriminante debe ser mayor o igual a cero $\Delta= (k, m) \geq 0$; y en caso de no haber solución, el discriminante será menor de cero $\Delta= (k, m) < 0$.

Para aplicar el resultado del procedimiento, el docente plantea el siguiente ejercicio para que los estudiantes lo resuelvan en parejas.

Hallar los puntos de intersección de la recta $x - 2y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

Solución.

Resolvemos simultáneamente ambas ecuaciones. Despejamos x de la ecuación de la recta y la sustituimos en la ecuación del círculo y simplificamos

$$(2y-2)^2 + y^2 = 16$$

$$5y^2 - 8y - 12 = 0$$

Usamos la fórmula general para la solución de la ecuación de segundo grado y obtenemos

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64+240}}{10} = \frac{4 \pm 2\sqrt{19}}{5}$$ es decir,

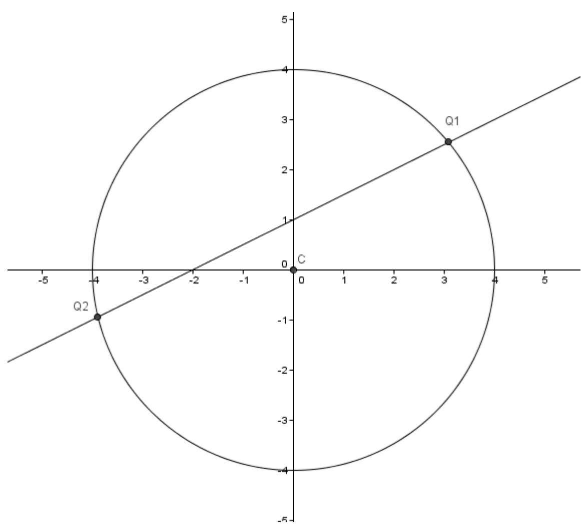
$$y_1 = \frac{4+2\sqrt{19}}{5} \qquad y_2 = \frac{4-2\sqrt{19}}{5}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la recta y obtenemos

$$x_1 = \frac{-2+4\sqrt{19}}{5} \qquad x_2 = \frac{-2-4\sqrt{19}}{5}$$ por lo

tanto los puntos de intersección son

Q_1 (3.1, 2.5) y Q_2 (– 3.9, – 0.9)



Cierre

Explicitación. Después de haber terminado el ejercicio se les pide a un par de estudiantes que expongan el ejercicio, explicando cómo realizaron su ejercicio y justificando su resultado.

Orientación libre. Tarea. Se deja al estudiante el siguiente ejercicio:

Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x - 2y + k = 0$

a) cortan a la circunferencia en dos puntos diferentes

b) son tangentes

c) no tienen ningún punto común con la circunferencia.

Propósitos generales de la secuencia sobre el tema: Parábola y sus ecuaciones cartesianas.

Que el estudiante reafirme el método analítico en la obtención de las ecuaciones de la parábola, y que avance en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano.

Aprendizajes esperados

Se espera que el estudiante:
1) conozca cómo se genera una superficie cónica e identifique los elementos que la definen a partir de observar un experimento.
2) describa el aspecto general de la parábola y comprenda el tipo de corte que debe hacerse para obtener la parábola al efectuar cierto corte a un cono.
3) reconozca que la curva construida es una parábola, obtenga la definición de parábola como lugar geométrico, reconozca los tipos de simetría de esta curva e identifique los elementos que la definen mediante una construcción mecánica de la curva. Asimismo, se espera que deduzca la expresión con radicales que expresa la propiedad de los puntos de dicho lugar geométrico.
4) A partir de lo anterior, se espera que el estudiante comprenda cómo se obtiene la ecuación ordinaria de la parábola fuera del origen.
Los puntos anteriores están relacionados con los siguientes puntos del programa del CCH:

- Obtención de las otras formas de la parábola a partir de su ecuación ordinaria.
- Tránsito de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria y viceversa (con el método de la completación del cuadrado).
- Determinación de los elementos esenciales de una parábola a partir de su ecuación (dada en la forma ordinaria o general), y el uso de éstos al bosquejar su gráfica.
- Ayudar al alumno a concatenar con coherencia sus argumentos y deducciones en todo el proceso, y
- Aplicación de los conocimientos adquiridos en la resolución de diversos problemas.

Sesión 32

Tema: La parábola como lugar geométrico: Definición geométrica de la parábola. Parábola de Apolonio.

El ***aprendizaje esperado*** es que el estudiante comprenda el significado geométrico de obtener una parábola al intersecar un cono con un plano.

El ***aprendizaje significativo*** que se espera es que el estudiante, después de hacer un tipo particular de corte a un cono de papel, describa el aspecto general de la parábola y aprenda qué tipo de corte debe hacer para obtener la parábola.

Los ***niveles de razonamiento*** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, dado que el estudiante visualiza la parábola al hacer un tipo de corte a un cono; 2) el del **análisis**, donde el estudiante reconoce la forma de la parábola, la describe y reflexiona sobre el tipo de corte que realizó para poder obtenerla.

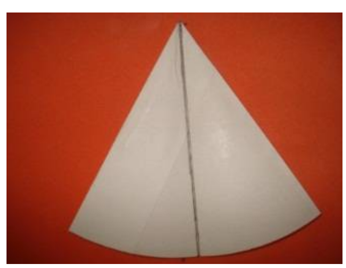
Material: Un vaso cónico de papel, un lápiz, plumón de color negro, tijeras, escuadras.

Inicio

Información. Se les pregunta a los alumnos en forma grupal sobre el artículo leído de Apolonio de Perga con el propósito de que los estudiantes recuerden los cortes realizados por Apolonio en el descubrimiento de las cónicas, y en especial el caso de la parábola.

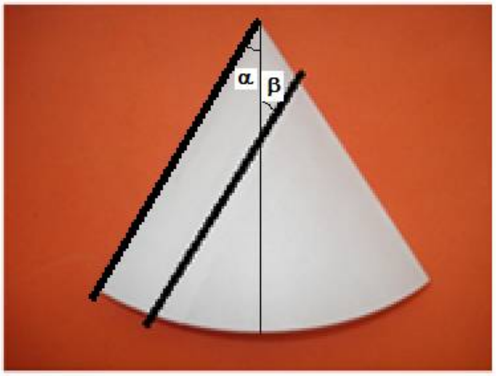
Desarrollo

Orientación dirigida. Se le pide al estudiante que tome un cono de papel que realice el siguiente procedimiento: doblar el cono a la mitad y trazar su eje con lápiz.


Trazar una línea paralela a una de las líneas del contorno (generatriz).

Identificar los ángulos α (ángulo formado por la generatriz y el eje del cono, también llamado ángulo de conicidad) y β (ángulo formado por el corte y el eje del cono)



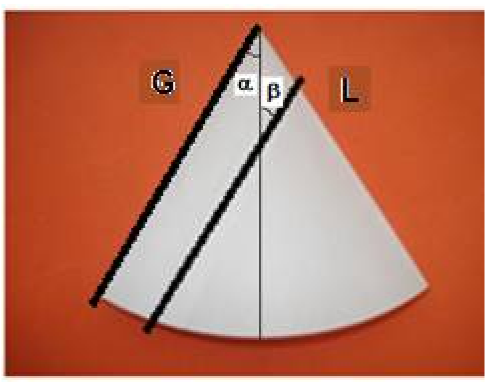
Recorta con tijeras la línea paralela a la generatriz. Observa desde arriba el corte realizado en el cono.

Cierre

Explicitación. Para lograr que los estudiantes describan con sus propias palabras el aspecto general de la parábola trabajamos las siguientes preguntas y actividades:

- Describe con tus propias palabras como es la figura que encontraste después del corte, ¿a qué se parece la curva?

- Dibuja en el siguiente recuadro la figura que obtuviste al hacer el corte al cono.



Observa la imagen y completa el siguiente enunciado: "El corte representado gráficamente por la recta _____ paralela a la generatriz _____ forma un ángulo β cuya mediad es _______ al ángulo α formado por la generatriz y el eje del cono. De hecho cualquier línea paralela a la _____________ formará con el eje un ángulo igual a α. Por eso decimos: la sección cónica producida por un plano que corta al cono formando un ángulo igual al ángulo formado por una generatriz del cono es una parábola."

Para confirmar la definición de parábola dada por Apolonio, se deja la siguiente tarea.

Tarea: Con base en la figura anterior, demuestra que el ángulo de corte β es igual al ángulo α de conicidad, es decir, demostrar que $\alpha = \beta$.

Sesión 33

Tema: Definición de la parábola como lugar geométrico

El **aprendizaje esperado** es que el alumno obtenga la definición de parábola como lugar geométrico.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno descubra la definición de la parábola como lugar geométrico a partir del concepto de distancia entre dos puntos y entre un punto y una recta.

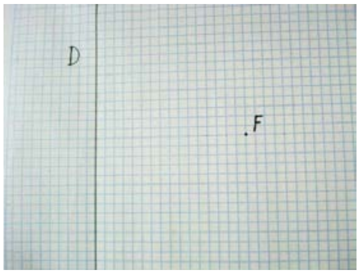
Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza la parábola mediante una construcción mecánica; 2) el del **análisis**, donde el estudiante reconoce y describe los elementos que intervienen en la definición de la parábola como son el foco, directriz, el concepto de distancia entre dos puntos, distancia entre un punto y una recta y la propiedad que cumplen los puntos de una parábola.

Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, un pliego de papel bond cuadriculado, compás, escuadras, regla, plumón negro, lápiz.

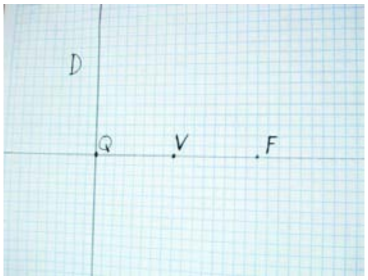
Inicio

Información. En esta fase se realiza un diagnóstico sobre los conocimientos previos del estudiante; con relación a la distancia entre dos puntos, sólo se les pide a los estudiantes que resuelvan algunos ejercicios para repasar el concepto que ya que se ha trabajado. En cuanto a la distancia entre un punto y una recta se emplea una actividad focal introductoria que consiste en preguntar a los alumnos diversas situaciones donde se presenta el concepto de distancia entre un punto y una recta. Por ejemplo, si queremos encontrar la altura del triángulo ABC que parta del vértice C a la base AB, ¿cuál es el procedimiento que se debe emplear? O bien, si tenemos dos rectas L_1 y L_2 paralelas, ¿cómo podemos encontrar la distancia que hay entre ellas?

Desarrollo



Orientación dirigida. En esta fase el alumno construye la parábola por medio de regla y compás. Tal construcción se basa en una técnica sintética, donde al trazar algunas figuras geométricas implícitamente están los conceptos de distancia entre dos puntos y entre un punto y una recta, fundamentales en el concepto de parábola. Para ello, se le pide al alumno que realice las siguientes instrucciones:

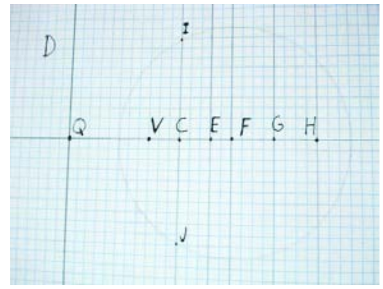


- Traza una recta D (llamada directriz) y un punto F (llamado foco) fuera de la recta D.

-Traza una recta S (llamada eje focal) perpendicular a D que pase por el punto F.

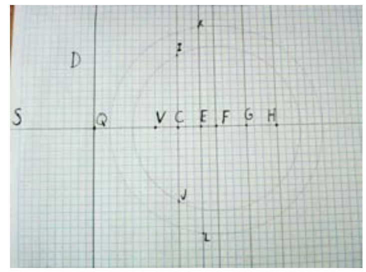
-Localiza el punto Q de intersección de las rectas D y S y el punto medio V (llamado vértice) del segmento QF.

- Localiza sobre la recta S, dos puntos C, E entre los puntos V y F. Y dos puntos G y H a la derecha de F.



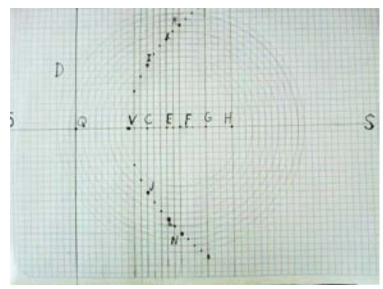
-Traza rectas paralelas a la recta D que pasen por los puntos C, E, F, G y H.

- Traza con el compás una circunferencia con centro en el punto F y radio la medida del segmento QC. Ésta corta a la recta paralela que pasa por C en los puntos I y J.



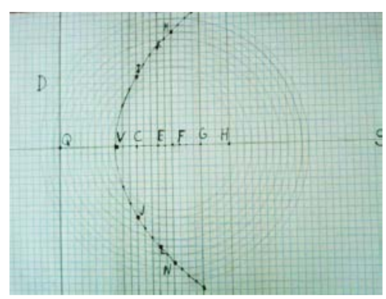
- Nuevamente, traza con el compás la circunferencia con centro en el punto F y radio QE, cortando a la recta paralela que pasa por E en los puntos K y L.

-De la misma manera traza la circunferencia con centro en F y radio QF, obteniendo los puntos M y N



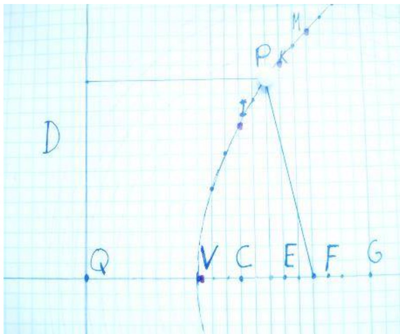
- De esta manera los puntos I, J, K, L, M, N y V son puntos de una curva. Remárcalos.

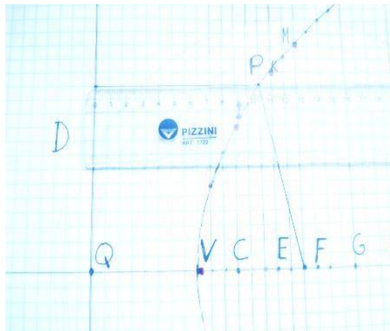
- Continúa realizando el mismo procedimiento tomando con el compás las medidas de los segmentos QG y QH. ¿A qué se parece la figura que obtienes?

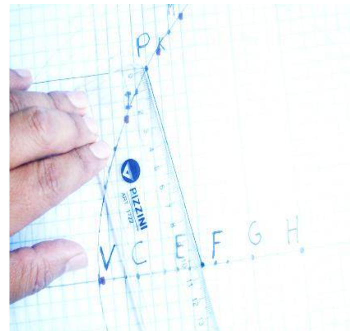


- Sigue el mismo procedimiento, aumentado el número de puntos sobre la recta S, para lo cual trazarás más rectas paralelas, obteniendo más puntos de la curva cuyo trazo será cada vez más preciso, ¿qué curva obtienes?

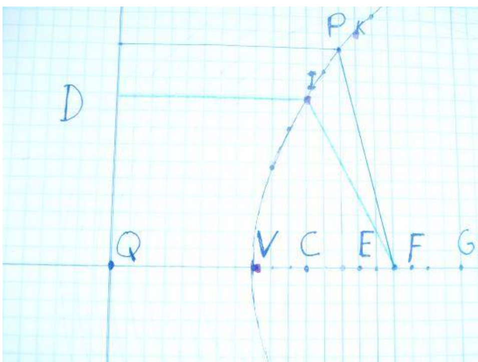
Posteriormente se pide al alumno que observe lo sucedido en la construcción para que logre identificar el tipo de curva que se genera, así como algunos otros aspectos importantes que se quieran subrayar. Para ello se le pide y preguntan cosas como “describe con tus palabras que forma tiene la curva que acabas de trazar”, “si marcamos un punto P en la curva (indicado por una tachuela) ¿cómo es la distancia de P a F compara con la distancia de P a la recta D?” o bien, “comprueba lo anterior midiendo la distancia de P a F y de P a la recta D con tu regla”







"¿A cuál de las cónicas descubiertas por Apolonio se asemeja esta curva?". Al respecto, son muchas las cuestiones por atender, las cuales incluyen preguntas como "¿y si remarcamos otro punto I y comparamos las distancias I a F con la distancia de I a la recta D, qué resultado obtenemos?"



En este caso, para apoyar la definición de la parábola como lugar geométrico en el plano es recomendable que los estudiantes elaboren una tabla para observar con claridad la existencia de un patrón numérico. La tabla contendrá dos columnas. En la primera columna se escribe la distancia del punto de la curva al foco F y en la segunda la distancia del mismo punto a la directriz D. A partir del análisis de dicha tabla es muy probable que se compruebe la definición de parábola como lugar geométrico de los puntos cuya distancia al foco es igual a la distancia a la directriz.

La tabla tendrá el siguiente aspecto:

Distancia del punto de la curva al foco F	Distancia del punto de la curva a la directriz D.
PF =	PD =
IF =	ID=
KF=	KD=
MF=	MD=

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes intercambian, por parejas, los resultados obtenidos respecto a la distancia de los puntos de la curva respecto al foco F comparadas con la distancia a la recta directriz D. El propósito es verificar que la distancia de un punto de la curva al foco es igual a la distancia que hay de dicho punto a la directriz. Es importante tomar en cuenta que puede haber una variación en las mediciones, esto debido a los errores que se puedan presentar al realizar la medición. Se pide a los alumnos que justifiquen sintéticamente la justificación del resultado. Ellos deben descubrir que el resultado se basa en el hecho de que al tomar la medida de Q a cualquier punto R sobre el eje focal (después de V) y considerar esta medida QR como radio de la circunferencia con centro en F, cortará a la paralela a la directriz en los punto P y P' (por simetría puntos de la parábola), la distancia de Q a R es la misma de F a P por construcción, QR = PF. Por otra parte, la distancia del punto P a la recta D (PA) (directriz) es la misma que la de Q a R, PA = QR, pues PA y QR son los lados del rectángulo QRPA. Por lo tanto PF = PD. Todo esto se muestra en las siguientes imágenes.

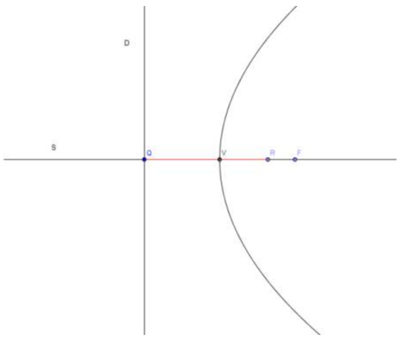


Fig. 1 Se toma la medida QR

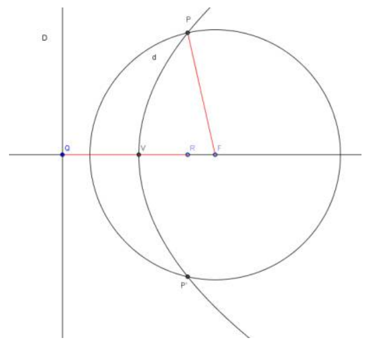


Fig.2 QR = FP por construcción

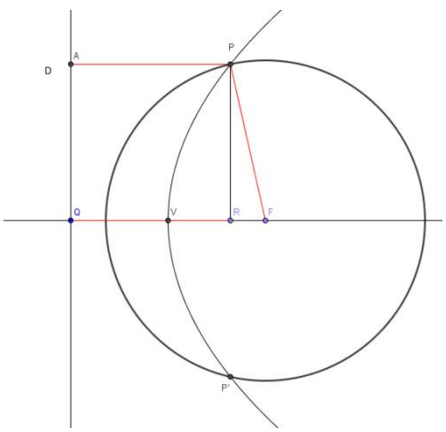


Fig. 3 QR = PA por ser lados del rectángulo QRPA

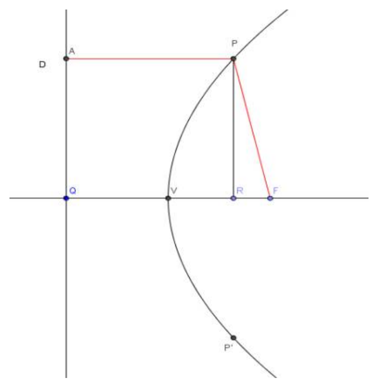
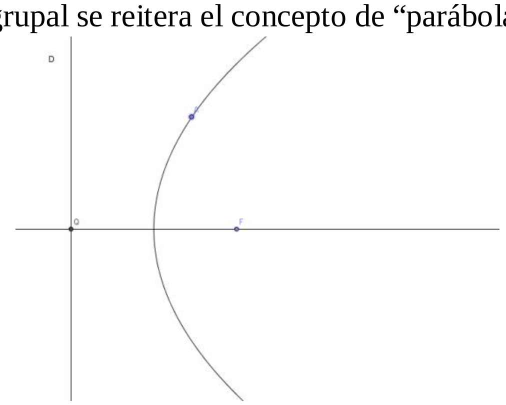


Fig. 4   PF = PA es decir PF = PD

Integración. Para finalizar, mediante una revisión grupal se reitera el concepto de "parábola" como el lugar geométrico de puntos cuya distancia a un punto fijo es igual a la distancia a una recta fija. Para ello conviene que cada estudiante escriba con sus propias palabras la definición del concepto de parábola al que se llegó.

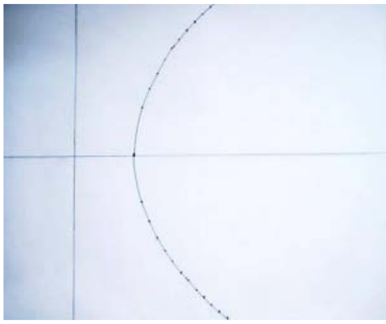


Tarea: Se deja al estudiante que con geogebra trace una parábola, localice algunos puntos y verifique que se cumple la definición dada de este concepto.

Sesión 34

Tema: Propiedades de simetría y elementos que definen a la parábola.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno comprenda geométricamente las propiedades de simetría de la parábola.



El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno recuerde el concepto de simetría axial y pueda comprobar la simetría de la parábola.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, que el estudiante visualice la simetría axial de la parábola, 2) el del **análisis**, donde el estudiante reconoce la simetría de la parábola geométricamente, aplicando la propiedad de simetría axial.

Material: Un pliego de papel bond blanco, un pliego de papel albanene, regla, escuadras, plumón negro, lápiz

Inicio

Información. En esta fase se recuerdan los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación al concepto de simetría axial. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene situaciones donde se presenta el concepto de simetría axial. Posteriormente, para que la idea de simetría axial sea comprendida, se enuncian las condiciones geométricas que debe cumplir una curva para tener simetría axial. Esto con el propósito de que los estudiantes activen, reflexionen y compartan sus conocimientos. Decimos que una curva C es simétrica respecto a una recta L cuando para cada punto P de la curva hay un punto P' al otro lado de L de modo que el segmento PP' es perpendicular a L y L pasa por su punto medio. En otras palabras, cuando trazamos una recta (llamada eje de simetría) que divida en dos partes iguales una figura, de manera que si plegamos el plano por ese eje las dos partes coincidan, se dice que la figura tiene simetría axial.¿Cuáles de las siguientes figuras tienen simetría axial?

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que calque con papel albanene la parábola hecha con regla y compás y que compruebe si tiene simetría axial, mediante la siguiente actividad.

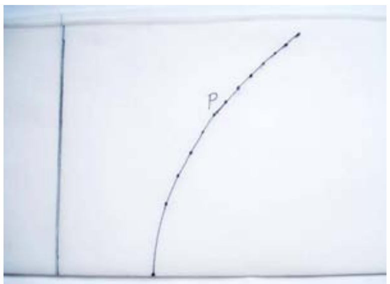
Coloca el pliego de papel cuadriculado donde se trazó la parábola y encima la hoja de papel albanene, calca la parábola en la hoja de papel albanene. Coloca ahora la hoja blanca tamaño oficio y encima la hoja de papel albanene con la parábola calcada, como lo muestra la siguiente figura

Localiza un punto P en la parábola, realiza un pliegue sobre el eje focal, ¿coinciden las dos partes de la curva?

Localiza el punto correspondiente a P al hacer el pliegue y llámalo P’. Traza el segmento PP’.

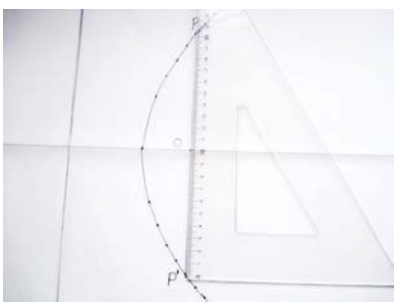
Mide con el transportador el ángulo entre el segmento PP’ y al eje focal, ¿cómo es el ángulo?

Verifica con la regla si el eje focal pasa por el punto medio de la cuerda PP’.
Esto es, define como O al punto de intersección de la cuerda con el eje focal y comprueba si el punto O es punto medio de la cuerda PP’.
Cuál es tu conclusión: ¿Es simétrica la parábola respecto al eje focal?



Cierre

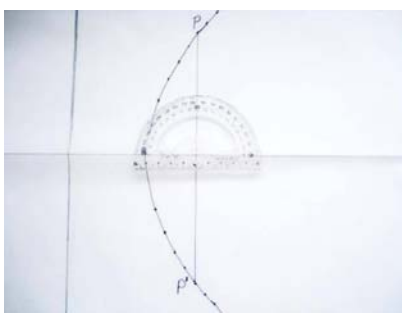
Explicitación. En esta fase se examina el trabajo realizado de la siguiente manera. En parejas revisan que se cumplan las propiedades de simetría axial (con respecto al eje focal) en el trabajo de su compañero. Posteriormente, en discusión grupal los estudiantes explican cómo se comprobó la simetría axial en la parábola.



Tarea. Se les pide que realicen un mapa conceptual sobre el tema de simetría axial, donde expliquen la propiedad y hablen de la simetría de la parábola como ejemplo.

Sesión 35

Tema: Elementos que definen a la parábola.
El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca los elementos que definen a la parábola.



El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno, con base en las propiedades de simetría de la parábola, defina los elementos que forman la parábola.
Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza todos los elementos que componen a la parábola y 2) el del **análisis**, donde el estudiante examina las propiedades que tienen cada uno de los elementos que integran a una parábola.
Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, hojas blancas tamaño oficio, escuadras, plumón negro, lápiz, color rojo.

Inicio

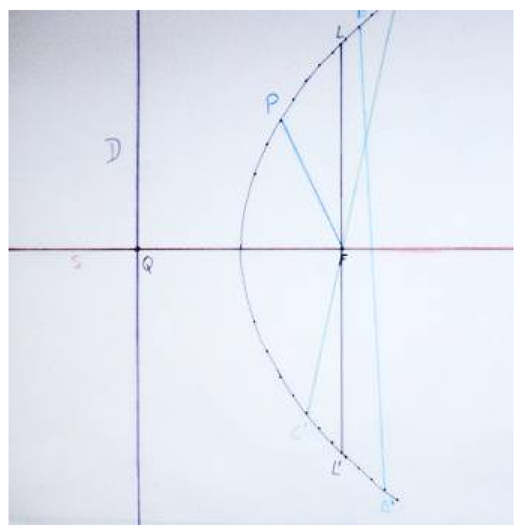
Orientación dirigida. En esta fase se le pide al estudiante que nuevamente calque la parábola y localice en la gráfica los elementos ya conocidos como son el foco F, el vértice V (punto de intersección de la curva con el eje focal S) y la directriz D. Asimismo, se le pide que escriba las propiedades de los elementos que se generan. Para que el estudiante comprenda mejor éstas propiedades, se le pide que elabore una tabla donde aparezcan los elementos de la elipse por un lado y las propiedades de estos por el otro. Ver tabla 2. Por ejemplo, En la construcción el vértice V se localizan a la misma distancia de la directriz D y el foco F. Definimos la intersección de la directriz D con el eje focal S con el punto Q, por lo cual la distancia entre el vértice y la directriz, es la distancia entre Q y V.

TABLA 2

Elemento de la elipse	**Propiedades y relaciones con otros elementos**
Vértice V	V es la intersección de la parábola con el eje focal
Eje focal S	
Directriz D	
Foco F	
Punto Q	
Cuerda BB'	
Cuerda focal CC'	
Lado recto LL'	
Radio focal FP	

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se definen otros elementos de la parábola. Se pide al estudiante que localice en la parábola construida tales elementos, cómo se denotan y nombran, que escriba sus propiedades en la tabla 2 y conteste algunas preguntas.



Remarca con rojo la recta S que pasa por F y es perpendicular a D y llámala eje focal. Localiza con azul Q el punto de intersección del eje focal y la directriz.

Traza el segmento de recta BB' que une dos puntos cualquiera de la parábola y llámala cuerda.

Traza la cuerda CC' que pasa por el foco y llámala cuerda focal.

Traza la cuerda focal LL' perpendicular al eje focal y llámalo lado recto.

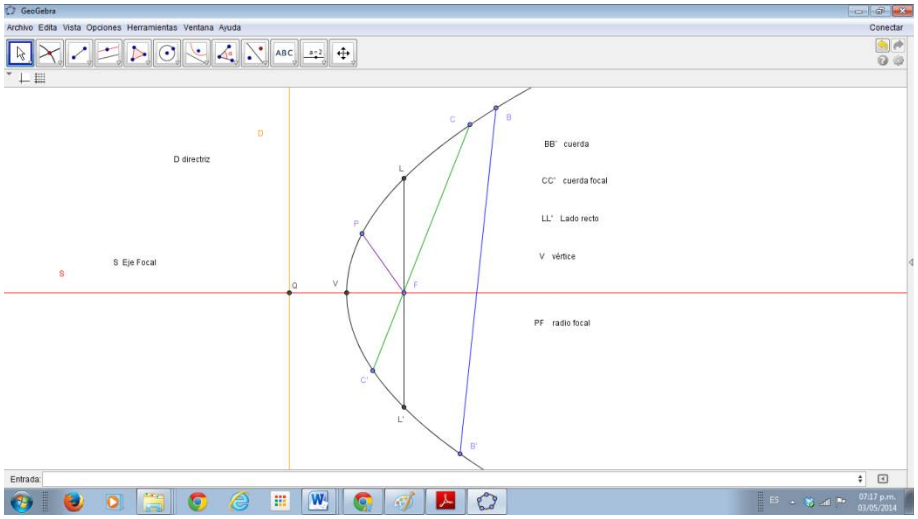
Localiza un punto P cualquiera de la parábola, el segmento de recta FP que une el foco F con el punto P llámalo radio focal de P.

Cierre

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen sus tablas de elementos, con el objetivo de mejorar la información de las mismas.

Integración. Al terminar, se revisa el trabajo de cada equipo en forma grupal, con el fin de que todo el grupo obtenga los conocimientos sobre los elementos de la parábola y sus propiedades. *Tarea*: Se deja al estudiante que con geogebra trace una parábola y localice todos sus elementos, denotando cada uno de ellos con letras y que escriba explícitamente sus nombres.

Ejemplo.



Sesión 36

Tema: Ecuación ordinaria de la parábola de vértice el origen y eje focal un eje coordenado.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno deduzca la ecuación ordinaria de la parábola de vértice el origen y cuyo eje focal sea un eje coordenado.

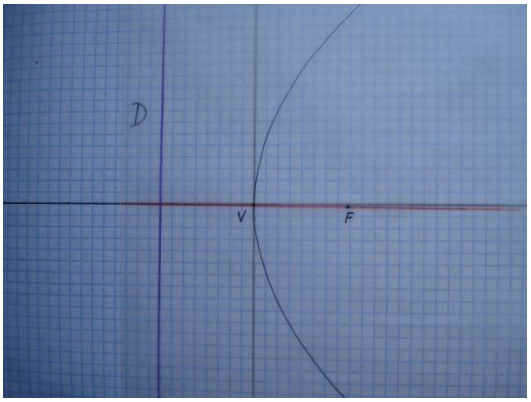
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno deduzca, con base en la definición de parábola, la ecuación ordinaria de una parábola de vértice el origen y cuyo eje coincida con un eje coordenado y que, además, indique el tipo de curva de que se trata según que el eje focal coincida con el eje X o Y.

Los niveles de razonamiento que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza a la parábola según la posición que presente en el plano cartesiano, 2) el de **síntesis**, donde el estudiante deduce la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen y eje coincidente con un eje coordenado, 3) el de **clasificación**, donde el estudiante relaciona las diferentes posiciones que puede tener la parábola con sus ecuaciones de tal manera que puede reconocer este tipo de curvas. Por ejemplo, aquellas cuyo eje focal coincide con el eje X, o aquellas cuyo eje focal coincide con el eje Y.

Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado, escuadras, hojas de papel albanene, plumón negro, lápiz, colores.

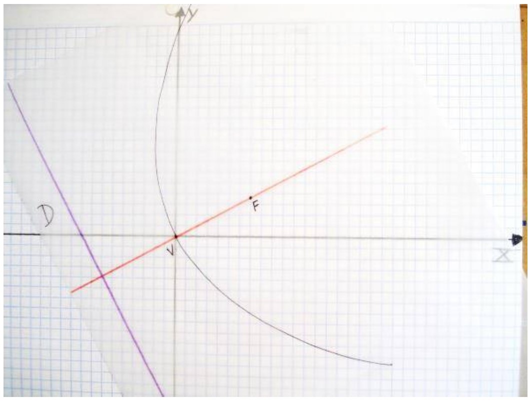
Inicio

Orientación dirigida. Se le pide al estudiante que en un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado trace los ejes coordenados.



Asimismo, se le pide que trace en papel albanene con regla y compás una parábola con su respectivo eje focal y directriz, el foco F, vértice V y cuya distancia del vértice al foco mida p.A continuación se le pide que coloque la parábola hecha en papel albanene sobre el papel cuadriculado de tal manera que su vértice coincida con el origen de los ejes cartesianos.

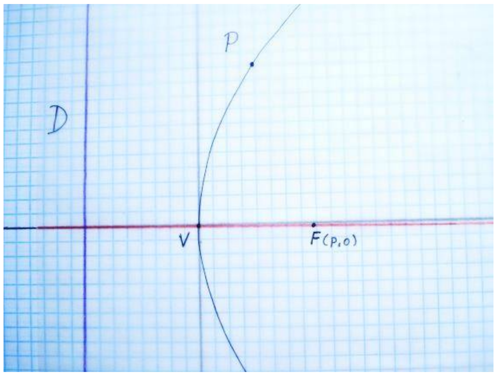
Gira la parábola en torno al origen y observa, ¿cuántas posiciones hay en que el eje focal coincida con los ejes coordenados?

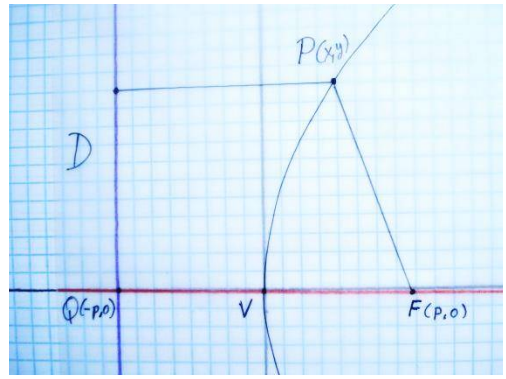


Efectivamente, hay dos posiciones: cuando el eje focal coincide con el eje X o cuando coincide con el eje Y. Nuevamente coloca la parábola sobre los ejes coordenados siempre y cuando su eje focal coincida con el eje X y cuyo vértice sea el origen.

Desarrollo

Orientación dirigida. Enseguida, el profesor, aplicando la estrategia de discusión grupal y en colaboración con los estudiantes, hace notar que el vértice de la parábola tendrá coordenadas V(0, 0), el foco las coordenadas F(p, 0) y se localizará un punto cualquiera de la parábola, P(x, y) como lo muestra la siguiente imagen.





Después, en discusión grupal dirigida por el profesor, se aplica la definición de parábola obteniendo la expresión algebraica:

d(P,F) = d(P,D)

$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$

Qué al desarrollarla por medio de métodos algebraicos se llega a la ecuación de la parábola en su forma ordinaria cuyo eje focal es el eje X y vértice en el origen $y^2 = 4px$.

Cierre

Orientación dirigida. Se pide que en parejas identifiquen en cada uno de sus trabajos los demás elementos de la parábola como son el lado recto, cuerda, cuerda focal, radio focal, etc. y que anoten la información en una tabla como la siguiente:

Parábola eje focal el eje X vértice en el origen	
Elementos	Notación
Vértice	V(0, 0)
Foco	F(p,0)
Punto Q	Q(-p 0)
Lado recto	LL’
Cuerda	BB’
Cuerda Focal	CC’
Directriz	x = -p

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen sus tablas de elementos, con el objetivo de corregir la información de las mismas si es necesario.

Posteriormente, se le pide al estudiante que en papel bond de cuadrícula trace el foco con coordenadas, F(4, 0), el vértice en el punto C(0,0), el eje focal el eje X, y directriz con ecuación x = -4. Con regla y compás trace la parábola, y marque en la parábola un punto cualquiera a P(x, y). Por último que aplique la definición de parábola, para encontrar su ecuación.

Tarea: Se deja al estudiante que repita el mismo procedimiento sólo que ahora con la variante de que el eje focal coincida con el eje Y. El propósito es que deduzca la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco F(0, p) aplicando el concepto de parábola como lugar geométrico.

Integración. Para reafirmar el aprendizaje se deja al estudiante ejercicios donde aplique la definición de parábola como lugar geométrico para obtener su ecuación y gráfica.

- Usando la definición de parábola, hallar la ecuación de la parábola a partir de los datos dados.

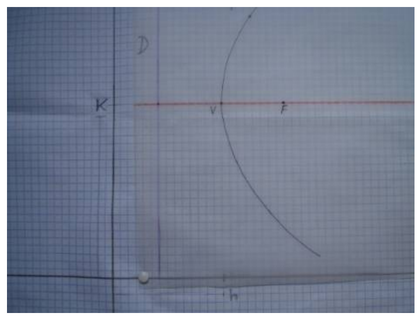
a) Vértice (0, 0) y foco F(0, 3) b) vértice (0, 0) y foco F(0, -3)

Sesión 37

Tema: Ecuación de la parábola con eje focal paralelo a los ejes de coordenados y vértice fuera del origen.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca la ecuación de la parábola cuyo eje focal sea paralelo a los ejes coordenados X e Y, y vértice diferente del origen.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno, con base en la deducción de la ecuación ordinaria de la parábola con vértice el origen y cuyo eje coincida con los ejes y aplicando la definición de parábola como lugar geométrico, deduzca junto con el profesor la ecuación de esa curva cuando el eje focal sea paralelo a los ejes coordenados y con vértice fuera del origen; se espera además que indique el tipo de parábola de que se trata según la posición del eje focal si abre hacia arriba o abajo; hacia la derecha o la izquierda.



Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza a la parábola según la posición que presente en el plano cartesiano; 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante deduce la ecuación de la parábola cuyo eje focal es paralelo a los ejes cartesianos y su vértice no coincide con el origen; 3) el de **clasificación**, donde el estudiante relaciona las diferentes posiciones que puede tener la parábola con sus ecuaciones de tal manera que puede distinguir, por ejemplo, las parábola cuyo eje focal es paralelo al eje X y abren hacia la derecha o la izquierda, de las que el eje focal es paralelo al eje Y y abren hacia arriba o abajo.

Material: Un cartón rectangular de 30 x 35cm, chinchetas, hilo de cáñamo, un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado, escuadras, hojas de papel albanene, plumón negro, lápiz, colores.

Inicio

Orientación dirigida. Se le pide al alumno que en un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado trace los ejes coordenados y coloque a la parábola (anteriormente hecha con papel albanene) en el primer cuadrante de tal manera que su eje focal sea paralelo al eje X, y cuyo vértice sea V (h, k) y con foco

F (h + p, k). Como lo muestra la siguiente imagen. Se le pide además que localice la directriz, que en este caso será la recta x = h – p.

Desarrollo

Orientación dirigida. Enseguida, el profesor localiza un punto cualquiera P(x,y) en la parábola y, en discusión grupal con los estudiantes, aplica la definición de parábola como lugar geométrico obteniendo la expresión algebraica:

$$d(P,F)=d(P,D)$$

$$\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}=\frac{|x-h+p|}{\sqrt{(1)^2+(0)^2}}$$

Al desarrollar la ecuación anterior por medio de métodos algebraicos se llega a la ecuación de la parábola en su forma ordinaria, cuyo eje focal es paralelo al eje X y vértice fuera del origen.

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

Cierre

Se pide que en parejas identifiquen en cada uno de sus trabajos los demás elementos de la parábola como son lado recto, distancia focal, directriz, radio focal etc. y que anoten la información en una tabla como la siguiente

Parábola eje focal paralelo al eje X Vértice fuera del origen	
Elementos	Notación
Vértice	V(h, k)
Foco	F(h + p, k)
Directriz	x= h – p
Radio vector	FP
Distancia focal	p

Explicitación. En esta fase, se pide que en parejas revisen sus tablas de elementos, con el objetivo de corregir la información de las mismas si es necesario.

Tarea: Deducir análogamente la ecuación ordinaria de la parábola con eje focal paralelo al eje Y y vértice fuera del origen (sin pérdida de generalización se les sugiere utilicen el primer cuadrante). Emplear geogebra para la representación gráfica.

Sesión 38

Tema: Análisis de la ecuación ordinaria de la parábola con eje focal alguno de los ejes coordenados y vértice en el origen.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno conozca la extensión de la parábola y la longitud del lado recto.

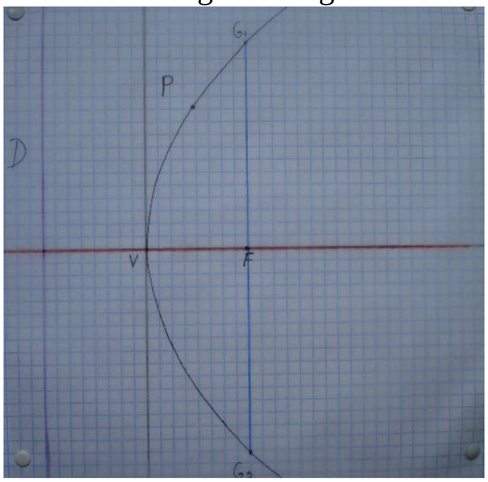
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno examine la ecuación de la parábola y a partir del análisis obtenga otras características de la parábola como son su extensión y la longitud del lado recto.

Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, que el estudiante visualice a partir del trazo de la parábola su extensión, y la longitud de su lado recto; 2) el del **análisis**, donde el estudiante conoce la longitud del lado recto, y su extensión al examinar la ecuación de la parábola; 3) el de **clasificación**, donde el estudiante, mediante una generalización, concluye que la longitud del lado recto y la extensión son conceptos que se aplican a cualquiera de las parábolas estudiadas.

Inicio

Orientación dirigida. Se le pide al estudiante que coloque la parábola hecha con albanene sobre la hoja cuadriculada de tal manera que coincida su vértice en el origen y eje focal el eje X. Que localice el foco y trace el lado recto que pasa por el foco F.

Obviamente, los extremos del lado recto tendrán como coordenadas G_1 (p, y) y G_2 (p,-y). Como lo muestra la siguiente figura.



Nota que no sabemos cuáles son las ordenadas de los puntos G1 y G2. Esto nos daría la solución para hallar la longitud del lado recto. Cabe recordar que la longitud del lado recto nos da la anchura de la parábola en el foco.

Desarrollo

Orientación dirigida. Se le pide al alumno que escriba la ecuación de la parábola que representa la gráfica y despeje la variable "**y**".

El estudiante debe llegar a la ecuación $y = \pm 2\sqrt{px}$

Posteriormente y en forma grupal, se plantea que éste es el valor de "**y**" para cualquier valor de "**x**", pero como se quiere encontrar el valor de las ordenadas de los puntos G1 y G2, se sustituye el valor de **p** en **x**, obteniéndose la expresión

$y = \pm 2\sqrt{p^2}$. Sabemos que $\sqrt{p^2} = |p|$, de modo que este valor se sustituye en la ecuación anterior y encontramos de esta manera los valores de y.

$y=\pm 2p$ de modo que los extremos del lado recto son: $G_1(p,2p)$ y $G_2(p,-2p)$. Así la longitud del lado recto es $|4p|$.Se le pide al estudiante que anote en la gráfica de la elipse el valor encontrado.

Cierre

Explicitación. Se le pide al estudiante que haga una reflexión sobre la fórmula para encontrar el lado recto de una parábola, por ejemplo, ¿qué elementos intervienen en ella? La respuesta esperada es "la distancia del foco al vértice". Posteriormente en parejas se les plantea la pregunta, ¿la fórmula de la longitud del lado recto es la misma para cualquier tipo de parábola?, compruébalo.

Segunda parte de la sesión 38

En esta fase se le pide al estudiante que obtenga los valores que toman las variables x e y para los puntos de la parábola. Mediante la siguiente actividad.

Desarrollo

En la ecuación $y^2=4px$ despeja la variable "y" ($y=\pm\sqrt{4px}=\pm 2\sqrt{px}$) y examina el radicando px. ¿Cómo debe ser la expresión para que "y" esté definida?

Respuesta. $px\geq 0$. Pero como $p>0$ (por ser distancia focal), resulta que la parábola está definida para valores de x mayores que 0 (es decir, para valores de x en el intervalo [0, ∞)).

En la ecuación $y^2=4px$ despeja la variable "x" $\left(x=\frac{y^2}{4p}\right)$. Después analiza nuevamente el radicando, ¿para qué valores de "y" está definida la parábola?

Respuesta: La parábola está definida para todos los números reales, es decir para los valores de "y" en el intervalo $-\infty\leq y\leq\infty$.

Cierre

Orientación dirigida. Enseguida con el fin de aplicar el concepto de extensión, se le pide al estudiante que encuentre la extensión de la parábola con ecuación $y^2=16x$, que trace la parábola y obtenga el valor del vértice, el foco, eje focal y directriz.

Tarea: Se le deja al estudiante que trace la ecuación de la curva anterior en geogebra con el propósito de que visualice la extensión de la curva.

Sesión 39

Tema: Excentricidad.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno comprenda el concepto de excentricidad.

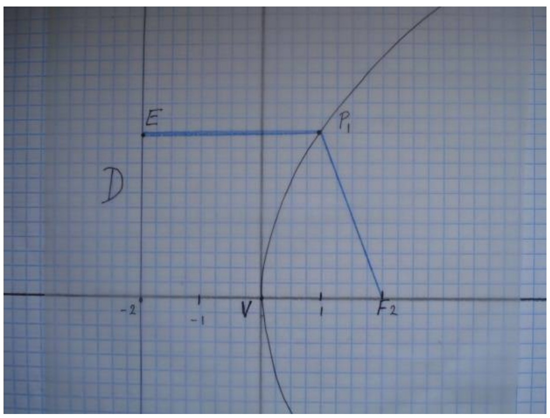
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno deduzca el concepto de excentricidad al comparar la distancia de cualquier punto P de la parábola al foco respecto a la distancia de ese punto P a la directriz. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza que el cociente de distancias es uno, 2) el del **análisis**, donde el estudiante examina la relación algebraica entre la distancia de cualquier punto P de la curva al foco y la distancia de ese punto P cualquiera a la directriz es igual a la unidad para comprender el concepto de excentricidad, 3) el de **clasificación**, donde el estudiante mediante una generalización concluye que la excentricidad se aplica a cualquier tipo de parábola y su valor es igual a la unidad.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase el profesor le pide al estudiante que en un cuarto de papel bond cuadriculado coloque la parábola hecha con papel albanene con centro en el vértice y eje focal el eje X, y con una distancia focal igual a dos unidades.

Desarrollo

Posteriormente, se le pide al estudiante que localice un punto P_1 cualquiera en la parábola, que trace el radio vector P_1F y la distancia de P_1 a la directriz D
(P_1 E).Como lo muestra la siguiente figura.



Al mismo tiempo se le pide que mida la distancia PF y la distancia PD y observe como es la razón entre ambas distancias. De la misma manera se le pide que localice otros puntos cualesquiera, P_2, P_3 y P_4 en la parábola y que aplique el mismo procedimiento, observando al final de cada caso como son las razones entre las distancias. En este caso, es recomendable que los estudiantes elaboren una tabla para observar con claridad la existencia de un patrón numérico. A partir del análisis de dicha tabla es muy probable que el alumno compruebe que la razón entre las distancias es una constante igual a la unidad.

La tabla tendrá el siguiente aspecto:

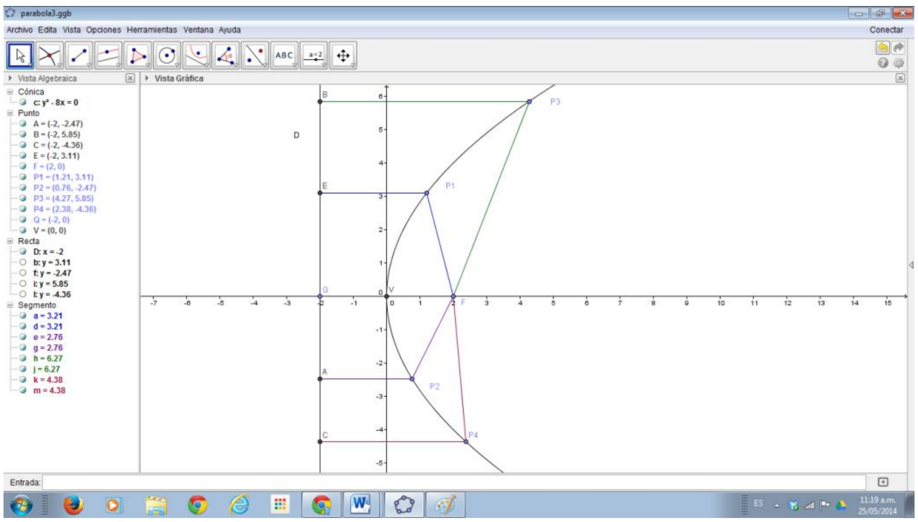
Distancia de un punto cualquiera al foco F	Distancia de ese punto cualquiera a la directriz D.	Razón entre ambas distancias.
P_1F_1 =	P_1D=	$\frac{P_1F}{P_1D} =$
P_2F_1 =	P_2D=	$\frac{P_2F}{P_2D} =$
P_3F_1 =	P_3D=	$\frac{P_3F}{P_3D} =$
P_4F_1 =	P_4D=	$\frac{P_4F}{P_4D} =$

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes intercambian, por parejas, los resultados obtenidos respecto a la razón de distancias de los puntos considerados de la parábola. El propósito es verificar que la razón de distancias al foco y a la directriz es una constante ε y vale 1. Es importante tomar en cuenta que puede haber una variación en las mediciones, esto debido a los errores que se puedan presentar al realizar la medición. La justificación del resultado se basa en la definición de la parábola como lugar geométrico.

Integración. Para finalizar, mediante una revisión grupal, se reitera el concepto de *excentricidad* en la parábola como la razón de distancias que hay entre cualquier punto de la curva al foco y a la directriz. Para ello conviene que cada estudiante escriba con sus propias palabras la definición del concepto de excentricidad al que se llegó.

Tarea: Se deja al estudiante que con geogebra trace una parábola, localice algunos puntos y verifique que se cumple la definición dada de este concepto.



Sesión 40

Tema: Ejercicios de lo verbal a lo geométrico y algebraico.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda traducir a una forma gráfica y algebraica un problema plateado en forma verbal.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda identificar los elementos de una parábola, los grafique y exprese en forma algebraica la solución de un problema cuando éste se le plantea en forma verbal. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza los elementos que se le proporcionan en forma verbal, al trazar dichos elementos en un plano cartesiano, 2) el del **análisis**, donde el estudiante a partir de los elementos que le son proporcionados, logra examinar los elementos que le son requeridos, localizándolos y escribiéndolos en forma algebraica.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase el docente entrega a cada par de estudiantes una serie de ejercicios verbales, en los cuales se proporcionan algunos elementos de la parábola y se le pide que encuentre otros. En seguida se muestran dos ejercicios semejantes a los que se les piden.

- Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto (–2, 4). Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, y la longitud de su lado recto.
- Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (3, 4) y cuyo foco es el punto (3, 2). Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Desarrollo.

Orientación dirigida. En esta fase se les pide a los estudiantes que sigan el siguiente procedimiento para resolver el problema.

a) Haz un bosquejo de la parábola que se te pide, localizando cada elemento que proporciona la información.

b) Habla con tu compañero sobre las conjeturas a que lleguen, para poder obtener los elementos que se piden y justifícalas con color rojo.

c) Localiza en el bosquejo los elementos que obtuviste después de haber discutido con tu compañero.

d) Después de haber identificado el tipo de elipse del que se trata, escribe su ecuación.

Cierre.

Explicitación. Después de haber realizados los cuatro pasos anteriores se les pide a cuatro parejas que expongan un ejercicio cada una, explicando como realizaron su ejercicio y justificando su resultado.

Tarea. Se deja una serie de ejercicios semejantes a los anteriores, utilizando en este caso geogebra para localizar los elementos y hacer la gráfica.

Sesión 41

Tema: Transición de la ecuación ordinaria de la parábola a la ecuación general de la parábola. El **aprendizaje esperado** es que el alumno transite a la ecuación general de la parábola a partir de la ecuación ordinaria de la parábola.

El **aprendizaje significativo** que se espera es que al haber conocido la ecuación ordinaria de la parábola el estudiante pueda, a partir de ella y empleando algunos pasos algebraicos, pasar a la forma general de la elipse. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante reconocerá la ecuación ordinaria de la parábola por sus características algebraicas, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante por medio de pasos algebraicos llegará a la ecuación general de la parábola a partir de la ecuación ordinaria.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a los conceptos de binomios al cuadrado. Cabe mencionar que el concepto ya se había retomado en los temas anteriores. Por tal motivo se emplea una actividad que contiene ejercicios donde se presentan el concepto de binomio al cuadrado. Esto con el propósito de que los estudiantes recuerden y reflexionen sobre tales conocimientos.

Resuelve de manera simplificada los siguientes binomios elevados al cuadrado.

1. $(x + 5)^2$ 2. $(6 - m)^2$ 3. $(y + 8)^2$ 4. $(a - 11)^2$ 5. $(m - 21)^2$ 6. $(x - 14)^2$ 7. $(x + 0.5)^2$
8. $(3x + 5y)^2$ 9. $(6x^3 + 7y)^2$

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que escriba la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el punto V(h, k) y eje focal paralelo al eje X $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

En seguida se le pide que mediante el álgebra desarrolle los binomios al cuadrado con el procedimiento recién recordado.

El estudiante obtiene la expresión algebraica: $y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$

se le pide que la escriba de la forma $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde deduce que $C = 1 \quad D = -4p \quad E = -2k \quad F = k^2 + 4ph$

Después se hacen preguntas al estudiante como, ¿C puede ser cero?

¿Qué característica deben tener el coeficiente de C para que la ecuación represente una parábola?

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes, después de haber argumentado sobre la ecuación general de la parábola que se obtuvo, llegan a las siguientes conclusiones:

- $C \neq 0$ para que represente la ecuación general a una parábola
- Si D = 0, la ecuación toma la forma $Cy^2 + Ey + F = 0$ que es una ecuación cuadrática en la variable **y**.
  - ✓ Si las raíces son reales y diferentes, la ecuación representa dos rectas paralelas al eje X.
  - ✓ Si las raíces son reales e iguales, la ecuación representa dos rectas coincidentes que forman una recta paralela al eje X.
  - ✓ Si las raíces son complejas no existe ningún lugar geométrico.

Sesión 42

Tema: Transición de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria de la parábola

El **aprendizaje esperado** es que el alumno a partir de la ecuación general de la parábola transite a la ecuación ordinaria de la parábola.

El **aprendizaje significativo** esperado es que al haber identificado el estudiante las características de la ecuación general de la parábola, pueda pasar a la forma ordinaria de la parábola a partir de ella empleando el método de completar cuadrados. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante reconocerá la ecuación general de la parábola por sus características algebraicas, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante por medio de pasos algebraicos deducirá la ecuación ordinaria de la parábola a partir de la ecuación general.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación al método de completar cuadrados. Cabe mencionar que el concepto ya se había retomado en los temas anteriores. Por tal motivo se emplea una actividad que contiene ejercicios donde se presentan los conceptos de completar cuadrados. Esto con el propósito de que los estudiantes recuerden y reflexionen sobre tales conocimientos.

Ejercicios. Completa el cuadrado.

1) $x^2 - 8x$ 2) $x^2 - 6x$ 3) $3x^2 + 4x$

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase se pide al estudiante que escriba la ecuación general de la parábola especificando las características algebraicas.

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Con C diferente de cero.

En seguida se le pide que mediante el álgebra reduzca y a complete cuadrados, los cuales ya se habían recordado.

El estudiante obtiene la expresión algebraica: $\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x+\frac{F}{D}\right)$

de donde

$k = -\frac{E}{2}$ $h = -\frac{F}{D}$ y $4p = -D$ dado que C = 1 . Se concluye que es la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en $\left(-\frac{F}{D}, -\frac{E}{2}\right)$ y eje focal paralelo al eje X.

Cierre

Explicitación. En esta fase los estudiantes, después de haber argumentado sobre la ecuación ordinaria de la parábola que se obtuvo, llegan a las siguientes conclusiones:

C y D deben ser diferentes de cero para que la ecuación represente una elipse con vértice en el punto V $\left(-\frac{F}{D}, -\frac{E}{2}\right)$ y eje focal el eje X

Sesión 43

Tema: Tránsito de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria y viceversa.

El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda, a partir de una ecuación general de la parábola, pasar a su forma ordinaria y viceversa.

El **aprendizaje significativo** esperado es que el alumno pueda pasar, a partir de la ecuación general de la parábola, a la forma ordinaria utilizando el método de completar cuadrados y viceversa. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza la forma algebraica de la ecuación ordinaria y la forma algebraica de la ecuación general de la parábola, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante deduce la forma ordinaria a partir de la ecuación general de la parábola aplicando el método de completar cuadrados y viceversa.

Inicio

Orientación dirigida. En esta fase el docente entrega a cada par de estudiantes una serie de ejercicios en los cuales se da la ecuación general de la parábola y se le pide que encuentre su forma ordinaria y viceversa. En seguida se muestran dos ejercicios semejantes a los que se les piden.

-Reducir la ecuación de la parábola $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$, a su forma ordinaria, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y del eje focal, y la longitud del lado recto.

-La ecuación ordinaria de una parábola es $(x - 5)^2 = -8(y + 2)$, llevar esta ecuación a la forma general y determinar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y del eje focal, y la longitud del lado recto.

Desarrollo.

Orientación dirigida. En esta fase se les pide a los estudiantes que sigan el procedimiento adecuado para resolver el problema utilizando la siguiente tabla.

Problema: Reducir la ecuación $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$ a su forma ordinaria.

Paso	Procedimiento	Justificación
1	$4y^2 - 20y - 48x - 71 = 0$	Ordenamos términos
2	$y^2 - 5y - 12x - 71/4 = 0$	Dividimos entre 4
3	$y^2 - 5y + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = 12x + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + \frac{71}{4}$	Completando cuadrados y transponiendo términos
4	$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + 24$	Reduciendo términos
5	$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2)$	Factorizando el lado izquierdo, obtenemos la ecuación en su forma ordinaria

Posteriormente, a partir de la ecuación ordinaria o ecuación general, se les pide a los estudiantes que:

a) Determinen los elementos esenciales de la parábola a partir de la ecuación.
b) Hagan un bosquejo de la parábola que se te pide, localizando en él, cada elemento que proporciona la información.
Para encontrar los elementos de una parábola
a partir de cualquier ecuación se sugiere utilizar las siguientes tablas.

- Parábolas con vértice en el origen y directriz paralela a uno de los ejes cartesianos.

Posición	Abre hacia	Ecuación	Directriz	Vértice	Foco
Vertical	arriba	$x^2 = 4py$	$y = -p$	$V(0,0)$	$F(0,p)$
Vertical	abajo	$x^2 = -4py$	$y = p$	$V(0,0)$	$F(0,-p)$
Horizontal	la derecha	$y^2 = 4px$	$x = -p$	$V(0,0)$	$F(p,0)$
Horizontal	la izquierda	$y^2 = -4px$	$x = p$	$V(0,0)$	$F(-p,0)$

- Parábolas con vértice en V (h, k) y directriz paralela a uno de los ejes cartesianos.

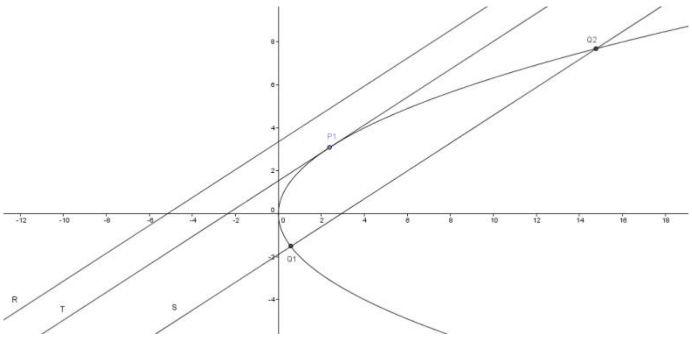
Posición	Abre hacia	Ecuación	Directriz	Vértice	Foco
Vertical	arriba	$(x-h)^2 = 4p(y-k)^2$	$y = k-p$	$V(h,k)$	$F(h,k+p)$
Vertical	abajo	$(x-h)^2 = -4p(y-k)^2$	$y = k+p$	$V(h,k)$	$F(h,k-p)$
Horizontal	la derecha	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$x = h-p$	$V(h,k)$	$F(h+p,k)$
Horizontal	la izquierda	$(y-k)^2 = -4px$	$x = h+p$	$V(h,k)$	$F(h-p,k)$

Sesión 44

Tema: Aplicaciones a la parábola: Intersecciones de rectas con la parábola.
El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda encontrar los puntos de intersección de una recta con la parábola.
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno pueda comprender los casos en que una recta interseca a una parábola y a partir de ello, pueda encontrar una, dos o ninguna intersección de la recta con una parábola. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, es decir, el estudiante visualiza los casos en que una recta se interseca con una parábola, 2) el de la **síntesis**, donde el estudiante, a partir del concepto algebraico de intersección entre dos lugares geométricos (en este caso la recta y la parábola), pueda deducir algebraicamente la intersección de la recta con la parábola en uno o dos puntos, o el caso en que no haya intersección.

Inicio

Información. En esta fase se indaga sobre los conocimientos previos adquiridos por el estudiante con relación a la intersección de dos curvas. Para tal propósito se emplea una actividad focal introductoria que contiene situaciones donde se presentan diferentes posiciones de la recta con relación a una parábola. Es decir, para que la idea de intersección sea comprendida, se da la condición geométrica que debe cumplir una recta para que interseque o no a la parábola. Esto con el propósito de que los estudiantes activen y reflexionen sobre tales conocimientos.



La figura anterior muestra las diferentes posiciones de la recta respecto a una parábola, observa y contesta las siguientes preguntas.

¿Cuál de las rectas no corta a la parábola? ________________

¿En cuántos puntos corta la recta T a la parábola? _______, por lo tanto la recta T recibe el nombre de recta _______________.

¿En cuántos puntos corta la recta S a la parábola?_______, por lo cual la recta S recibe el nombre de recta _____________.

Posteriormente, para recordar los conocimientos relativos a las condiciones algebraicas que se deben cumplir para que una recta interseque o no a una parábola, se plantea la siguiente actividad.

Desarrollo

Orientación dirigida. En esta fase el docente plantea al grupo el problema de encontrar la intersección de una recta con la parábola con ecuación $y^2 = 4px$. Casi sin pérdida de generalidad se considera que la ecuación de la recta es $y = mx + b$.

A través de una discusión dirigida se llega a los siguientes resultados:

- Dados una parábola y una recta, puede suceder que:

a) No se corten.

b) La recta corta a la parábola en un punto.

c) La recta corta a la parábola en dos puntos.

En términos algebraicos, estas situaciones se traducen de la siguiente manera. Si consideramos las ecuaciones de la recta y de la parábola y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

i) No hay solución (no se cortan).

ii) Hay una sola solución (se cortan en un solo punto).

iii) Hay dos soluciones (se cortan en dos puntos).

- Si sus gráficas se cortan en uno o más puntos, cada uno de estos puntos se llaman puntos de intersección.

- Como un punto de intersección de dos curvas está sobre cada una de dichas curvas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, ambas ecuaciones.
- La interpretación analítica de un punto de intersección es un par de coordenadas, las correspondientes a una solución común de las ecuaciones.

Esto es, para encontrar la intersección de la recta y la elipse, debemos resolver el sistema de ecuaciones: $y^2 = 4px \qquad y = mx + b$

Para ello, despejamos "**y**" de la ecuación de la recta; sustituimos éste valor en la ecuación de la elipse y obtenemos una ecuación cuadrática en x. Para que exista al menos una solución, el discriminante debe ser mayor o igual a cero $\Delta = (b, m) \geq 0$; y en caso de no haber solución, el discriminante será menor de cero $\Delta = (b, m) < 0$.

Para aplicar el resultado del procedimiento, el docente plantea el siguiente ejercicio que los estudiantes resolverán en parejas.

Ejemplo. Hallar los puntos de intersección de la recta $-x + 2y - 6 = 0$ con la parábola $y^2 = 8x$

Lo primero es despejar "***y***" en la ecuación de la recta: $y = \frac{x+6}{2}$

Después, se sustituye el valor de "y" en la ecuación de la elipse: $\left(\frac{x+6}{2}\right)^2 = 8x$

De lo anterior se obtiene la ecuación $x^2 - 20x + 36 = 0$ la cual, al resolverla, tienen las soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 18$. Esto implica que $y_1 = 4$ y $y_2 = 12$. Por lo tanto, los puntos de intersección de la recta con la curva son (2, 4) y (18, 12).

Esto se puede generalizar para una ecuación de la elipse en su forma general.

Ejemplo.

Hallar los puntos de intersección de la recta $x - y - 21 = 0$ con la parábola $y^2 + x - 8y - 21 = 0$

Para resolver el sistema de ecuaciones despejamos "***y***" de la ecuación de la recta ($y = x - 21$) y substituimos en la ecuación de la parábola $y^2 + x - 8y - 21 = 0$:

$(x - 21)^2 + x - 8(x - 21) - 21 = 0$ de donde obtenemos la ecuación

$x^2 - 49x + 588 = 0$ la cual, al resolverla, tiene las soluciones $x_1 = 21$ y $x_2 = 28$.

Esto implica que $y_1 = 0$ y $y_2 = 7$

Los puntos de intersección son: $(21,0)$; $(28,7)$

Cierre

Explicitación. Terminado el ejercicio se les pide a un par de estudiantes que expongan lo que hicieron y justifiquen el resultado.

Orientación libre. Tarea. Se deja al estudiante el siguiente ejercicio:

Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$:

a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes;

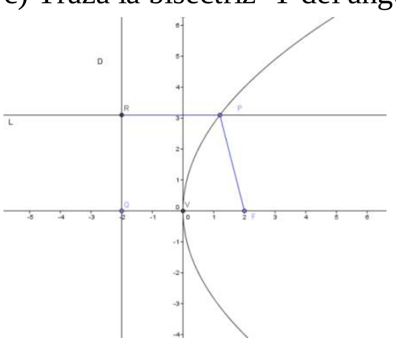
b) son tangentes a la parábola
c) no cortan a la parábola

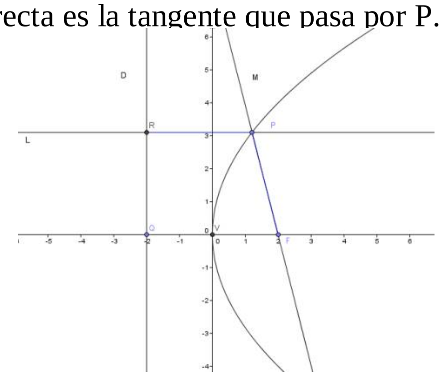
Sesión 45

Tema: Propiedades de la parábola: propiedad reflexiva.
El **aprendizaje esperado** es que el alumno pueda comprender la propiedad reflexiva de la parábola y a partir de éste conocimiento pueda resolver algunos problemas.
El **aprendizaje significativo** que se espera es que el alumno compruebe la propiedad reflexiva en la parábola con base en las leyes de reflexión de la Física. Los **niveles de razonamiento** que se fomentan en las actividades son: 1) el del **reconocimiento**, donde el estudiante visualiza la propiedad reflexiva en la parábola, 2) el del **análisis**, donde el estudiante comprueba la propiedad reflexiva de la curva a partir de trazos y mediciones en la misma.

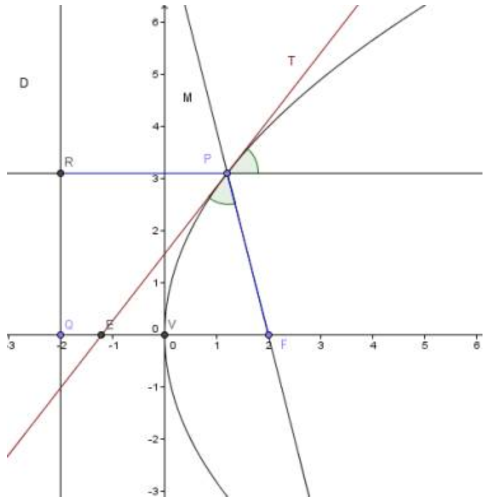
Inicio

Orientación dirigida. Se le pide al estudiante que trace en un cuarto de pliego de papel bond cuadriculado una parábola con vértice en el origen, eje focal el eje X, y que abra hacia la derecha. Después que localice sobre la parábola un punto P cualquiera y que trace con una regla la recta tangente a la parábola que pasa por P. Para trazar la recta tangente que pasa por dicho punto se le indica al estudiante que emplee el siguiente procedimiento:
a) Traza la recta L paralela al eje X que pasa por P y que corte a la directriz en el punto R.
b) Traza la recta M que pasa por P y por el foco F.
c) Traza la bisectriz T del ángulo RPF. Tal recta es la tangente que pasa por P.



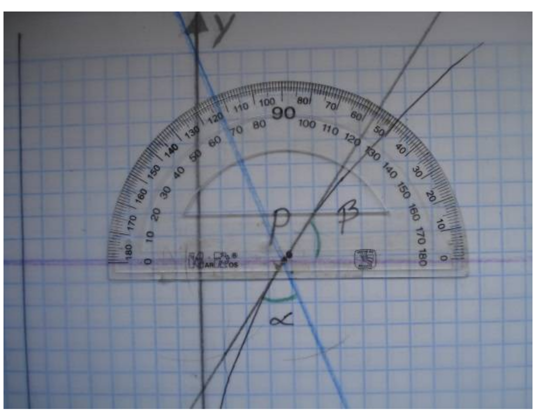


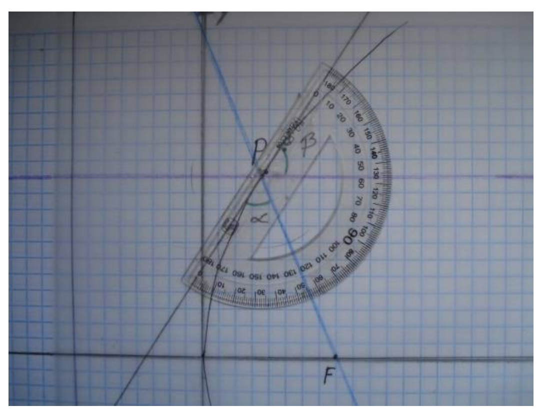
Se le pide al estudiante que considere los ángulos que forman la tangente con el radio vector PF y la tangente con la paralela al eje X. Como se muestra en la siguiente figura.



Desarrollo

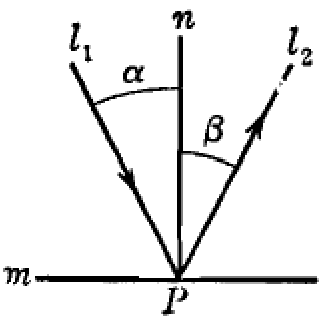
Orientación dirigida. Se le pide al alumno que con el transportador mida el ángulo que forma la tangente con el segmento PF y que lo nombre α.
¿Cuánto mide el ángulo α? De la misma manera que mida el ángulo que forma la tangente con la recta L y que lo llame β.
¿Cuánto mide el ángulo β?





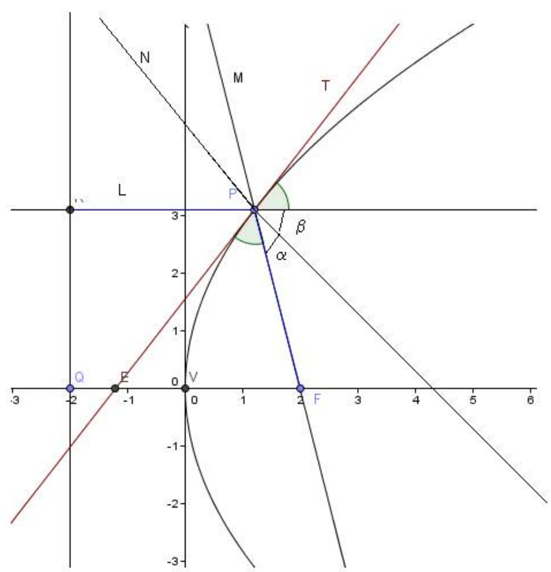
La idea es que el alumno se convenza que los ángulos son iguales, es decir, que
$\alpha = \beta$.
Enseguida el profesor, mediante la estrategia de exposición dirigida, explica la propiedad reflexiva en la elipse. *Si F es el foco de la parábola, P un punto de la misma y L es una recta paralela al eje focal, entonces los ángulos entre la tangente y el radio vectorial FP y entre la tangente y la recta L, respectivamente, son iguales.*

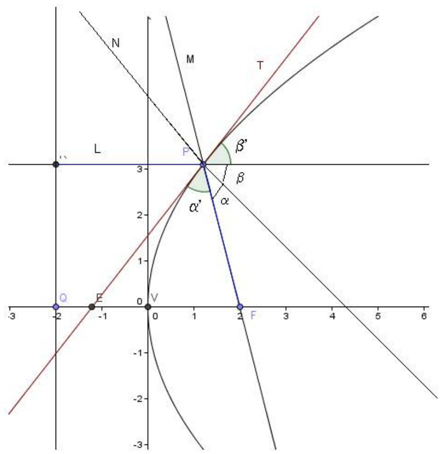
Otra forma de expresar este hecho es que si se dirige un rayo partiendo del foco, al reflejarse en el punto de tangencia sigue una dirección paralela al eje focal (Esta propiedad se utiliza para construir reflectores, lámparas sordas, etc.).
Se le indica al estudiante que esta situación se basa en lo que en Física se conoce como *leyes de reflexión* que anteriormente se tomó en cuenta para explicar la propiedad reflexiva de la elipse.
Información. Para recordar los conocimientos previamente adquiridos por el estudiante con relación a las leyes de reflexión (visto ya en el caso de la elipse) se emplea una actividad focal que contiene una situación geométrica donde se presentan tales leyes con relación a la parábola. Esto con el propósito de que los estudiantes activen y reflexionen sobre tales conocimientos. Como se muestra enseguida.
Orientación dirigida. El profesor recuerda, en discusión grupal, las leyes de reflexión.



En la figura, $\boldsymbol{l_1}$ es un rayo de luz que se refleja en la recta ***m*** en un punto **P**. Al hacerlo, sigue la trayectoria de la recta $\boldsymbol{l_2}$; ***n*** es la recta perpendicular a ***m*** que pasa por **P** llamada *normal*. El ángulo α formado por $\boldsymbol{l_1}$ y ***n*** es llamado ángulo de incidencia y el ángulo β formado por $\boldsymbol{l_2}$ y ***n*** es llamado ángulo de reflexión.
Como consecuencia de lo anterior, si se traza una recta normal ***N*** (perpendicular) a la recta tangente en el punto de tangencia de la parábola, los ángulos α y β serán iguales. En consecuencia, la recta ***N*** es bisectriz del ángulo formado por el radio vector PF y la recta L.

Enseguida se le pide al estudiante que demuestre analíticamente lo siguiente “la normal a la parábola en uno cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por el radio vector PF y la recta L paralela al eje focal.
Se le hace notar al estudiante que la demostración no pierde generalidad cuando la ecuación de la parábola se toma en su forma canónica $y^2 = 4px$
Por último, habiendo demostrado lo anterior, se le pide al estudiante que en la siguiente figura demuestre sintéticamente que los ángulos α’ y β’ son iguales.





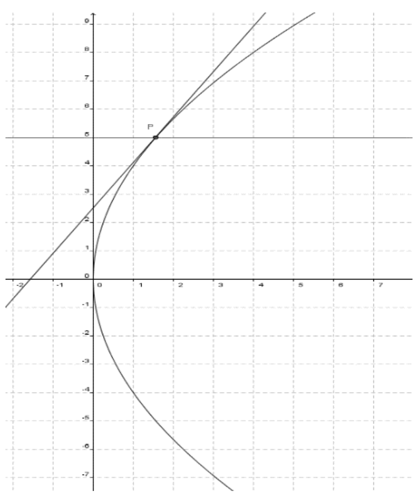
Esto es, sabiendo que ***T*** es la tangente a la parábola en el punto ***P***, ***N*** es la recta normal a la parábola en el punto P y β = α, demostrar que α' = β'.

Cierre

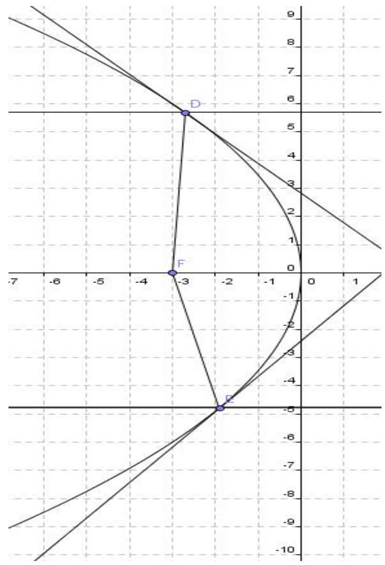
Explicitación. Al terminar las explicaciones se les pide a los alumnos que en parejas comparen sus apuntes y los revisen en grupo.

Orientación libre. Para terminar se le plantea al estudiante que resuelva algunos problemas donde aplique la propiedad reflexiva como los siguientes:

1. Dada la siguiente figura, encuentra por construcción el foco F aplicando la propiedad reflexiva.



2. En la siguiente figura señala ¿qué ángulos son iguales, según la propiedad reflexiva de la parábola?



Sesión 46

Tema: Aplicación de la evaluación final.

Inicio . En esta sesión se le pide al alumno que resuelva el examen final con el objetivo de evaluar (en cierta medida) el nivel de adquisición y manejo de los niveles de razonamiento adquiridos durante las sesiones.

Desarrollo

Aplicación de la evaluación final. Evaluación Final de Matemáticas III

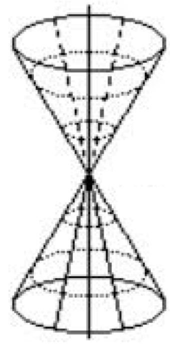
Tema: Elipse, circunferencia, parábola y sus ecuaciones cartesianas.

Nombre_______________________________ Grupo___________

La presente evaluación representa un referente que permite ubicar los distintos grados de adquisición y manejo de conocimientos y habilidades matemáticas que adquiriste según el nivel de razonamiento desarrollado durante las sesiones. Se te pide que leas con atención, observes y respondas a cada problema en forma individual.

Material: Juego de geometría, lápiz, bolígrafo negro o azul, goma, sacapuntas.

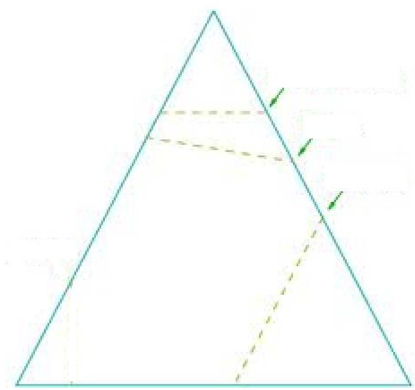
1. Dada la siguiente superficie cónica,



a) Localiza sus elementos.
b) Explica como se genera.

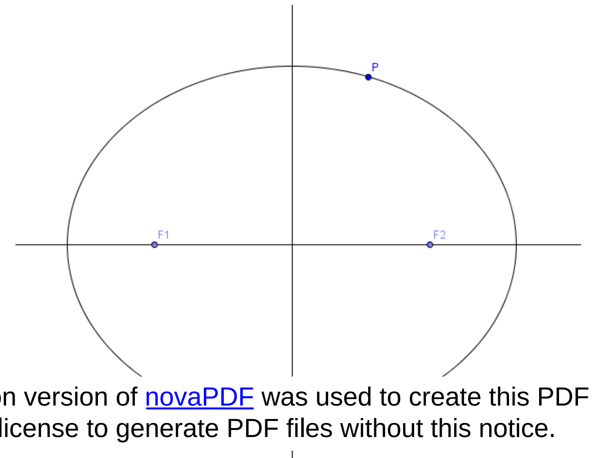
Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el de reconocimiento y análisis, donde el estudiante visualiza y reconoce los elementos que intervienen en la formación de la superficie cónica, y por otra parte examina la manera en que se genera.

2. La siguiente figura muestra la imagen de un cono y las líneas señalan los diferentes cortes al mismo. Escribe según el corte que tipo de cónica se genera.



Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el de reconocimiento, donde el estudiante visualiza y reconoce los diferentes tipos de corte a un cono que dan como resultado una cónica.

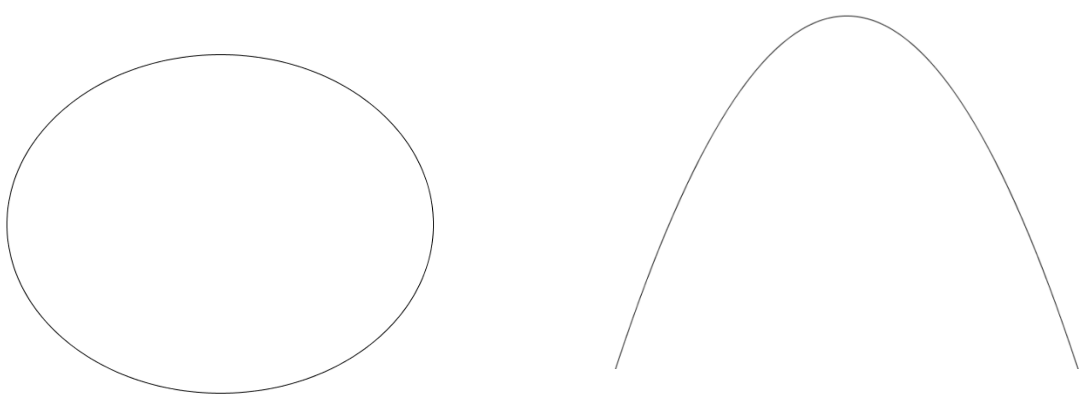
3. En la siguiente curva, dados los focos F1 y F2 y un punto cualquiera de la elipse, explica el concepto de la elipse como lugar geométrico.



d (,) + d(,) =

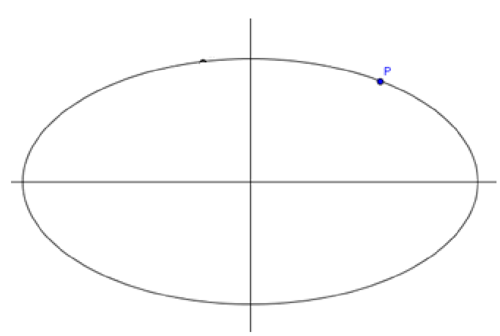
Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el de análisis, donde el estudiante reconoce y describe los elementos que intervienen en la definición de la elipse como son los focos, el concepto de distancia entre dos puntos y la propiedad que cumplen los puntos de una elipse.

4. Traza las simetrías que cumplen las siguientes cónicas.



Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el de reconocimiento y el de síntesis, donde el estudiante visualiza, reconoce las simetrías de las cónicas y además las traza geométricamente.

5. Dada la elipse, realiza lo que se pide

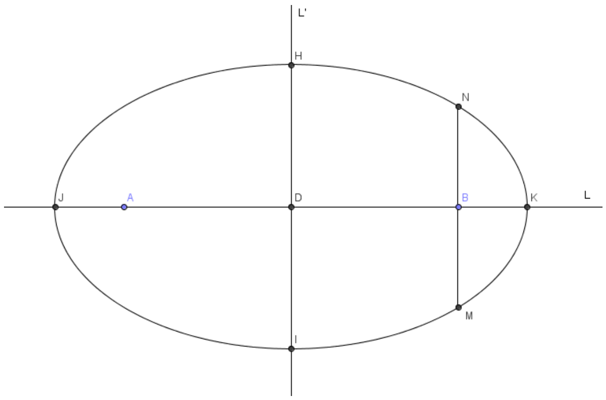


a) Traza el punto simétrico P' de P respecto al eje focal.

b) Comprueba que se cumplen las condiciones de simetría axial para los puntos P y P'.

Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el del análisis, donde el estudiante reconoce y comprueba la simetría axial en la elipse

6. Dada la siguiente elipse escribir en los espacios los elementos que correspondan



Focos: ______ Vértices:_________ Centro: ______ Eje mayor: ________

Eje menor: _______ Eje focal: _______ Eje normal:______

Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el del reconocimiento, donde el estudiante visualiza y reconoce los elementos que componen a la elipse.

7. Completa los siguientes enunciados para que sean verdaderos.

El punto medio del eje menor es el ___________ de la elipse.

El eje menor y el mayor forman un ángulo de ______ grados.

Los puntos donde el eje normal corta a la elipse forman un segmento llamado _____________.

El eje focal es________ respecto al lado recto.

La distancia del centro C al vértice V se denota con la letra _____, por lo tanto la longitud del eje mayor se denota por _______.

La longitud del eje menor se denota por _______, por lo tanto la distancia de su extremo al centro tiene de longitud.

El ______es la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro de la misma.

La longitud del diámetro es el ______ de la longitud del radio en la circunferencia.

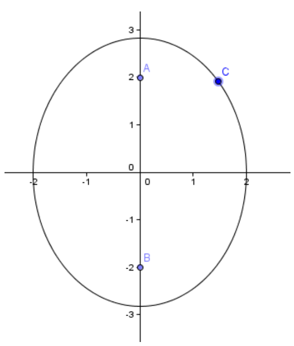
La ________es la distancia entre el vértice y el foco en la parábola y se denota por la letra _____.

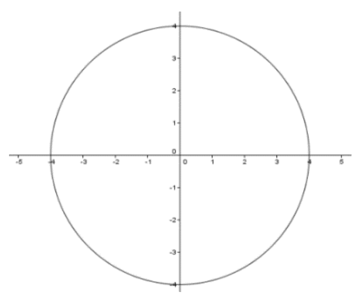
El _______ es el punto medio entre el foco y el punto donde intersecta la directriz al eje focal.

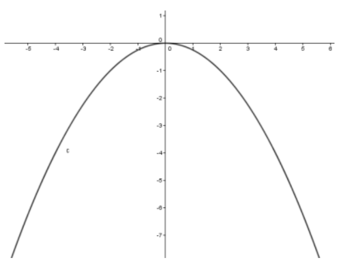
El _________ representa la anchura de la parábola en el foco.

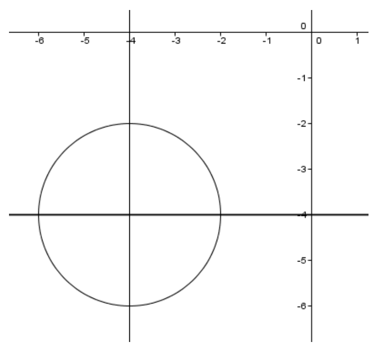
Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el del análisis, donde el estudiante recuerda y examina las propiedades que tienen cada uno de los elementos que integran a las cónicas.

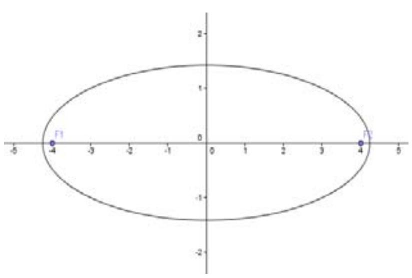
8. Relaciona la posición que tienen las cónicas con su ecuación cartesiana.

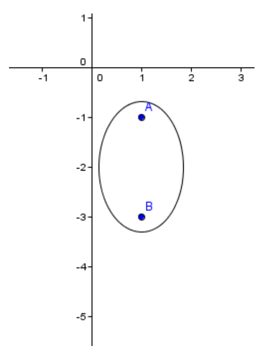












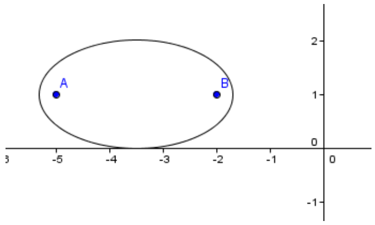
a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

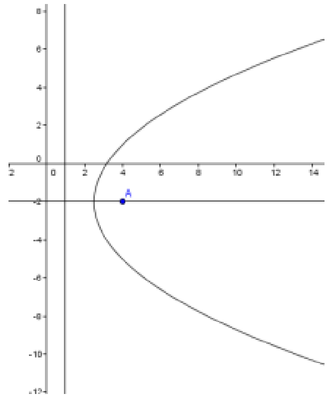
b) $x^2+y^2=r^2$

c) $x^2=4px \qquad p<0$

d) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

e) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$





f) $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$

g) $(y-k)^2=4p(x-h) \quad p<0$

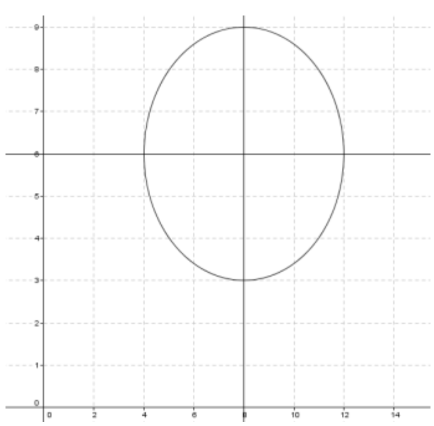
h) $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el del reconocimiento y clasificación, donde el estudiante visualiza y reconoce las posiciones de las cónicas en el plano cartesiano y después, relaciona las diferentes posiciones que puede tener la cónica con sus ecuaciones.

9. Encuentra el lugar geométrico de los puntos tal que la suma de sus distancias a los puntos F(12, 0) y F'(−12, 0) sea igual a 26.

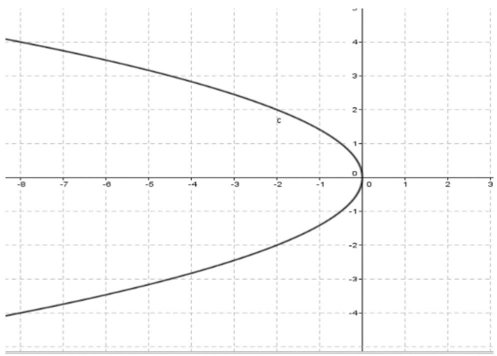
Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el de síntesis y deducción formal, donde el estudiante deduce la ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen y ejes coincidentes con los coordenados a partir de la definición de la elipse como lugar geométrico.

10. Observa las siguientes cónicas y escribe la extensión de cada una.



____ < x < ____

____ < y < _____

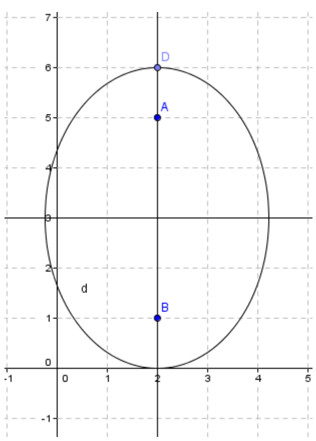


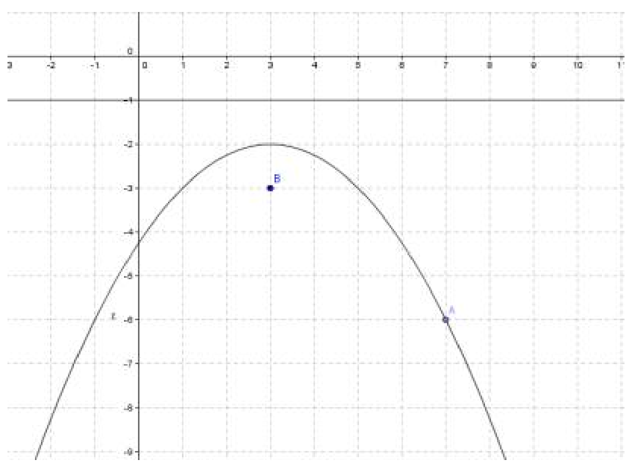
____ > x > ____

_____ > y > ____

Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el del reconocimiento y análisis, donde el estudiante visualiza, reconoce y examina a partir de la curva su extensión.

11. De las siguientes cónicas encuentra o comprueba (puedes usar regla) su excentricidad.





Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el del análisis, donde el estudiante examina los elementos de las cónicas que intervienen en el concepto de excentricidad, y por un lado obtiene la excentricidad de la elipse y por el otro comprueba con su regla la excentricidad de la parábola.

12. Resuelve los siguientes problemas sobre cónicas, haciendo un bosquejo de los elementos de la cónica en cada caso.

a) Los focos de una elipse son los puntos (3, 8) y (3, 2), y la longitud de su eje menor es 8. Halla la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

b) Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (–1, 3) y (– 4, 3), respectivamente. Encuentra también las ecuaciones de su directriz y al longitud de su lado recto.
c) Halla la ecuación de la circunferencia de centro el punto (– 3,– 5) y cuya longitud del diámetro es 14.

Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el del análisis, donde el estudiante a partir de los elementos que le son proporcionados, logra examinar los elementos de las cónicas que le son requeridos, localizándolos y escribiéndolos en forma algebraica.

13. Reduce las siguientes ecuaciones generales de las cónicas a su forma ordinaria y viceversa utilizando métodos algebraicos.

a) La ecuación de una elipse es $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

Reduce esta ecuación a la forma ordinaria y determina las coordenadas del centro,

los vértices y los focos; calcula las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad"

b) La ecuación ordinaria de una parábola es $(x - 5)^2 = 4(y + 3)$, lleva esta ecuación a la forma general y determina las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y del eje focal, y la longitud del lado recto.

Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el del análisis, donde el estudiante a partir de la ecuación general u ordinada proporcionada, logra por métodos algebraicos llevar la ecuación de una forma a otra, además de determinar los elementos de las cónicas que le son requeridos, localizándolos y escribiéndolos en forma algebraica.

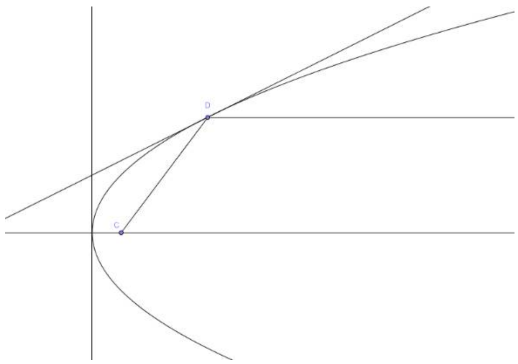
14. Dadas la ecuaciones de una recta y una cónica averigua si se intersectan, si se intersectan comprueba si la recta es una secante o una tangente.

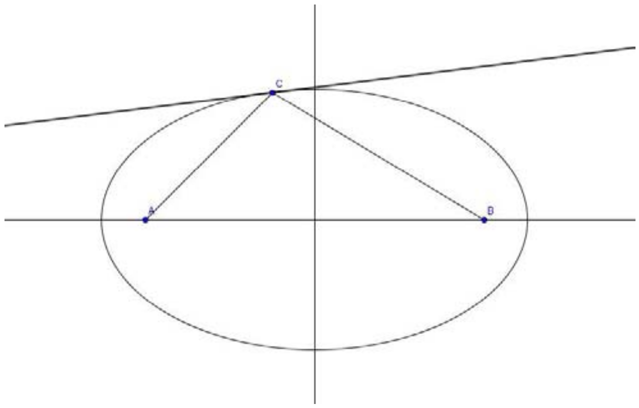
a) La recta cuya ecuación es: $x - y - 3 = 0$
La cónica con ecuación: $y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

b) La recta con ecuación: $3x + 2y - 41 = 0$
La cónica cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 48 = 0$

Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el analítico, donde el estudiante a partir del concepto algebraico de intersección entre dos lugares geométricos (en este caso la recta y la cónica), pueda deducir algebraicamente la intersección de la recta con la cónica en uno o dos puntos, o el caso en que no haya intersección.

15. Las siguientes curvas cumplen la propiedad reflexiva. Encontrar los ángulos que son iguales y probar la propiedad reflexiva en cada caso (pueden usar transportador).





Los niveles de razonamiento que se fomentan con este reactivo son el de la síntesis, donde el estudiante comprueba la propiedad reflexiva de la curva a partir de trazos y mediciones en la misma.

Cierre. Se realizan en forma grupal comentarios finales, agradecimientos y despedida del grupo

Capítulo V

Análisis y evaluación de la propuesta.

La planeación de la propuesta toma en cuenta diversas estrategias didácticas, la participación de los estudiantes y distintas formas de evaluación. Como ya se mencionó en el modelo de Van Hiele, lleva un determinado tiempo alcanzar los niveles de razonamiento que se espera de los estudiantes como resultado del proceso.

Por tal motivo, se pensó en evaluar la propuesta de manera cuantitativa, midiendo el grado de razonamiento que va alcanzando el estudiante durante el proceso mediante una rúbrica aplicada a la evaluación de algunos reactivos. Para poder comparar el desempeño de los estudiantes con base en este instrumento, se eligió un grupo testigo formado por 20 estudiantes del cuarto semestre, los cuales ya habían cursado la materia de matemáticas III. La idea era contrastar los resultados con un grupo de aplicación formado por 20 alumnos de tercer semestre con el que se trabajó la propuesta durante 46 sesiones. Cada sesión tuvo una duración aproximada de una hora. Al final de se le aplico el examen de evaluación tanto al grupo testigo como al grupo de aplicación.

Los reactivos y el nivel de razonamiento que se midieron en cada uno de ellos se muestran en la siguiente tabla.

Número de pregunta	Nivel de razonamiento
1	Reconocimiento-análisis
2	Reconocimiento
3	Análisis
4	Reconocimiento
5	Análisis
6	Reconocimiento
7	Análisis
8	Reconocimiento-clasificación
9	Síntesis-deducción formal
10	Reconocimiento-análisis
11	Análisis
12	Análisis
13	Análisis
14	Síntesis
15	Síntesis

La siguiente tabla (rúbrica) muestra los distintos niveles de conocimientos y habilidades matemáticas a ser identificados a través de la aplicación de la evaluación final. El nivel 3 responde al nivel de razonamiento (Van Hiele) que se propone alcanzar.

Número de reactivo	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	No localiza los elementos de la superficie cónica. No sabe cómo se genera la superficie cónica.	Localiza algunos elementos de la superficie cónica. No ha comprendido cómo se genera la superficie cónica.	Localiza cada uno de los elementos de la superficie cónica. Explica claramente cómo se genera la superficie cónica.
2	No sabe reconocer los diferentes tipos de corte a un cono.	Reconoce algunos tipos de corte a un cono que dan como resultado las cónicas estudiadas.	Reconoce los diferentes tipos de corte a un cono que dan como resultado las cónicas estudiadas.
3	No ha entendido el concepto de elipse como lugar geométrico por lo tanto no relaciona los elementos que intervienen en la misma.	Comprende el concepto de elipse como lugar geométrico pero no puede escribirlo algebraicamente.	Explica el concepto de la elipse como lugar geométrico al relacionar los elementos que intervienen en la misma.
4	No reconoce las simetrías de las curvas.	Reconoce las simetrías de las curvas pero tiene dificultad al trazar las simetrías geométricamente	Reconoce y traza las simetrías de las cónicas dadas.
5	No sabe trazar el punto simétrico de P en la elipse.	Traza el punto simétrico de P, pero no sabe comprobar la simetría	Traza el punto simétrico de P, y comprueba que se cumple la simetría axial en la elipse.
6	No reconoce los elementos que componen a la elipse	Reconoce y localiza sólo algunos elementos que componen a la elipse	Localiza los elementos que componen a la elipse
7	No recuerda las propiedades que tienen los elementos de las cónicas	Recuerda sólo algunas propiedades que tienen los elementos de las cónicas	Examina y escribe las propiedades que tienen los elementos de las cónicas

8	No relaciona correctamente la posición que tienen las cónicas con su ecuación	Relaciona la posición que tienen algunas cónicas con su ecuación.	Relaciona la posición que tienen las cónicas con su ecuación.
9	No recuerda la definición de elipse como lugar geométrico, por lo cual no deduce su ecuación dados los focos y la constante 2a	Recuerda la definición de elipse como lugar geométrico, pero no deduce la ecuación por errores algebraicos.	Deduce la ecuación de la elipse con base a la definición de elipse como lugar geométrico dados los focos y la constante 2a
10	No encuentra la extensión de la cónica, pues no la visualiza, ni la reconoce	Visualiza y reconoce la extensión de la cónica, pero tiene dificultades para expresarla algebraicamente.	Encuentra la extensión de una cónica
11	No comprende el concepto de excentricidad en la elipse y parábola.	Comprueba la excentricidad de la parábola, pero tiene dificultad para encontrar la excentricidad de la elipse.	Encuentra la excentricidad de la elipse y comprueba la de la parábola.
12	No puede examinar los elementos de las cónicas, pues no sabe localizarlos.	Localiza los elementos de las cónicas, pero al analizarlos tiene dificultades algebraicas para resolver los problemas.	Resuelve problemas de cónicas examinando los elementos dados.
13	No maneja los conceptos de completar cuadrados, ni desarrollo de binomios, lo que impide que reduzca las ecuaciones.	Maneja los conceptos de completar cuadrados y del desarrollo de binomios, pero comete errores algebraicos.	Reduce la ecuación ordinaria de una cónica a la general y viceversa empleando métodos algebraicos
14	No comprende la idea analítica de comprobar la intersección de una recta y una cónica.	Comprende como probar analíticamente si la recta corta a la cónica, pero presenta errores algebraicos en el procedimiento.	Dada una recta y una cónica comprueba por métodos algebraicos la primera corta a la segunda, y en caso de hacerlo si es secante o tangente.
15	No comprende la propiedad reflexiva de una cónica, por lo que hace intentos sin estar	Encuentra los ángulos que son iguales en cada caso, pero no sabe expresar con claridad la propiedad reflexiva.	Comprueba la propiedad reflexiva de una cónica por medios sintéticos.

	seguro a dónde quiere llegar.		

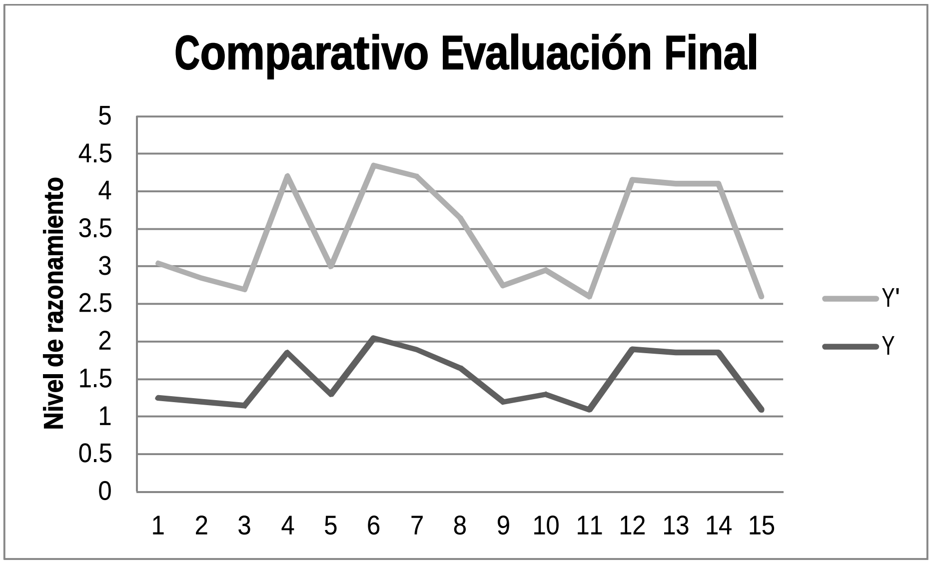
Resultados de la aplicación de la propuesta

La siguiente tabla corresponde a los resultados del grupo testigo en el examen final (columnas 1 y 2), contrastados con los resultados del grupo de aplicación en el examen final (columnas 1 y 3).

[X indica el número de reactivo, Y, Y' el nivel de razonamiento alcanzado]

X	Y	Y'
1	1.25	1.8
2	1.2	1.65
3	1.15	1.55
4	1.85	2.35
5	1.3	1.7
6	2.05	2.3
7	1.9	2.3
8	1.65	2
9	1.2	1.55
10	1.3	1.65
11	1.1	1.5
12	1.9	2.25
13	1.85	2.25
14	1.85	2.25
15	1.1	1.5

La siguiente gráfica nos muestra los resultados del grupo testigo en la evaluación final (línea negra) contrastados con los resultados del grupo de aplicación en la evaluación final (línea gris)



Conclusiones

Respecto a los objetivos planteados al inicio de la propuesta, con base en ella se logró que el grupo de aplicación mejorara su aprovechamiento (nivel de razonamiento) un 14% con relación al aprovechamiento (nivel de razonamiento) del grupo testigo.

Otra forma de apreciar el fortalecimiento del aprendizaje de la geometría analítica fue observando los productos realizados por los estudiantes, para lo cual debieron:

a) Razonar geométricamente al realizar las actividades de clase.

b) Presenciar el surgimiento de los principales conceptos y resultados de las cónicas a través de construcciones mecánicas, con regla y compás y con diversos materiales.

c) Manejar del método analítico y sintético a partir de situaciones problemáticas de las cónicas

d) Resolver acertadamente situaciones y problemas dentro del contexto de la Geometría analítica.

f) Involucrar a los estudiantes en la construcción de sus conocimientos (a través de estrategias como: “construcciones mecánicas”, “construcciones con regla y papel”, “uso del software geogebra”, etc.) tiene un mayor impacto en su aprendizaje.

g) Los productos obtenidos (realizados durante el desarrollo de las clases y a través de las tareas) permitieron ubicar distintos niveles de razonamiento y de desarrollo cognitivo en los estudiantes, de modo tal que mediante la evaluación final se pudo constatar qué logros se obtuvieron en su nivel de razonamiento.

Como comentario final, queremos decir que consideramos importante reforzar el vínculo entre la geometría y el álgebra, lo cual representa un punto clave para alcanzar un adecuado nivel de comprensión del método analítico, fundamental en la aplicación de los conocimientos en los futuros cursos de matemáticas.

Asimismo, consideramos importante fortalecer, al inicio de la aplicación de la propuesta, el compromiso del profesor ante el grupo para lograr un mejor aprendizaje, exigiendo a su vez que ellos acepten el reto de aprender y cumplir con la responsabilidad que les corresponde. Al respecto, es importante mencionar el cambio de actitud y de interés que tuvieron los alumnos al irse involucrando en las actividades. El trabajo colaborativo que se logró en el salón, aunque se fue dando poco a poco (en lo que los alumnos empezaron a comprender el rol que deben desempeñar), fue satisfactorio al final de los cursos. Para concluir, diremos que nuestro propósito es seguir perfeccionando este tipo de trabajo tomando en cuenta los comentarios de maestros, compañeros y estudiantes.

Anexo 1.Niveles de razonamiento

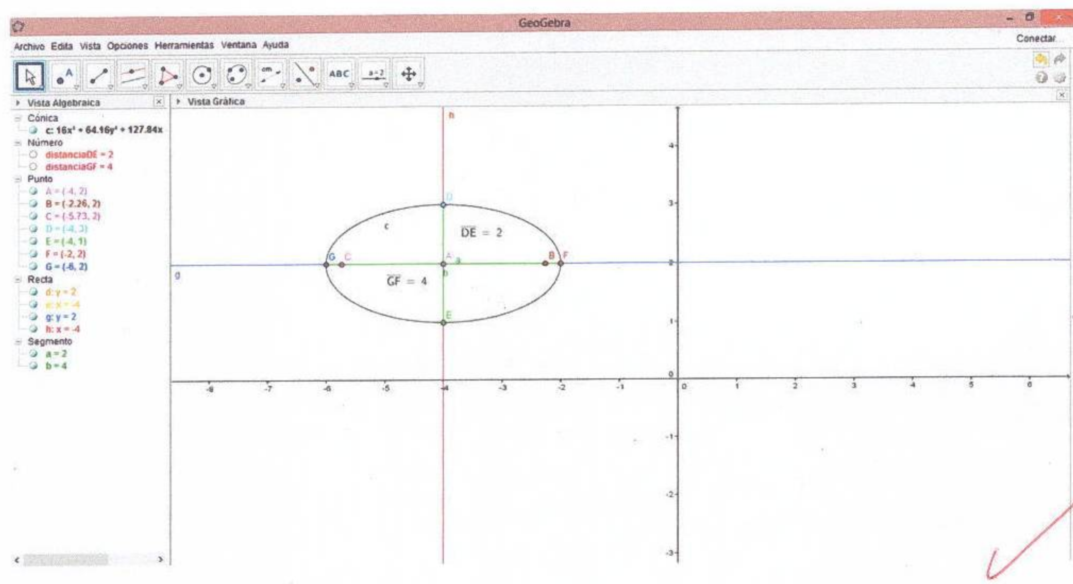
En el nivel 2 los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en los contextos que requieren inferencia no más que directa. Pueden extraer la información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo modo de representación. Los estudiantes a este nivel pueden aplicar algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones. Son capaces de razonar directamente y de hacer interpretaciones literales de los resultados.

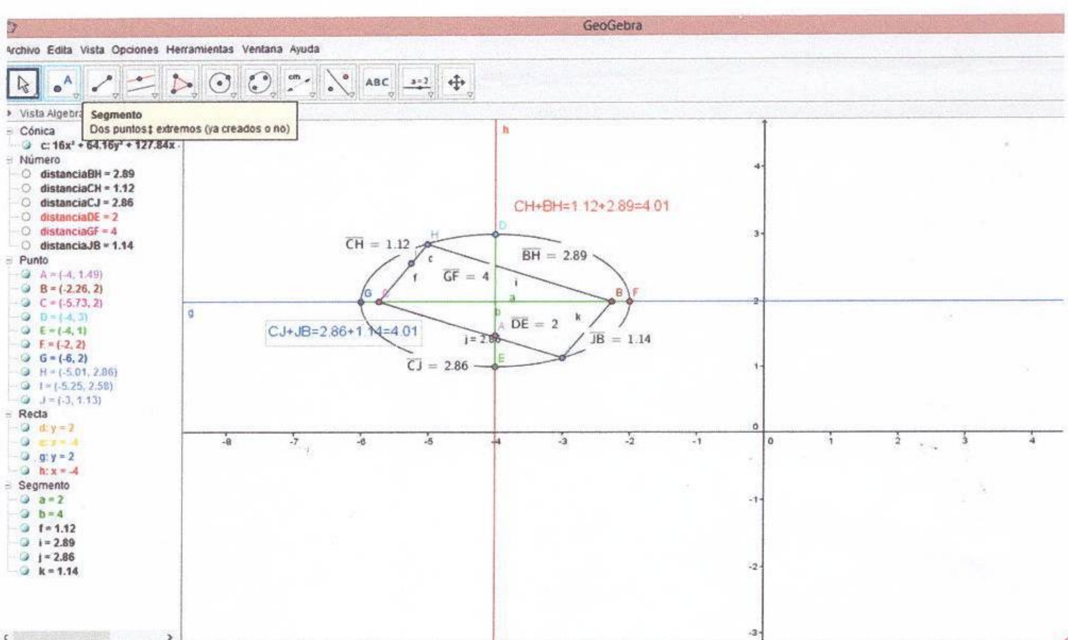
En el nivel 3 los estudiantes pueden ejecutar procedimientos claramente descritos, incluyendo los que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias simples de resolución de problemas. Los estudiantes a este nivel pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diversas fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Pueden desarrollar respuestas cortas para comunicar sus interpretaciones y resultados.

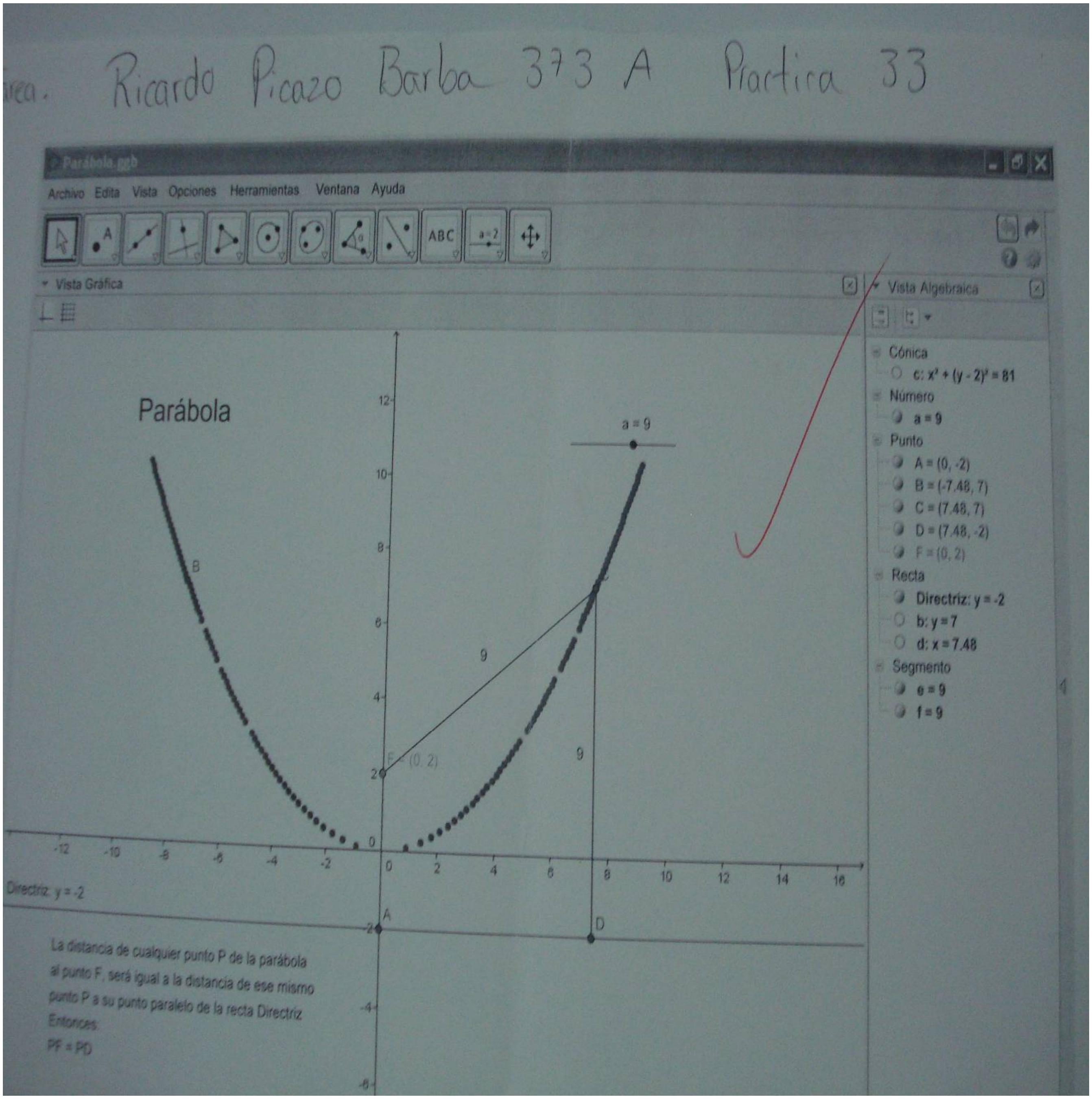
Anexo 2. Evidencias de la estrategia didáctica

Trabajos elaborados con Geogebra

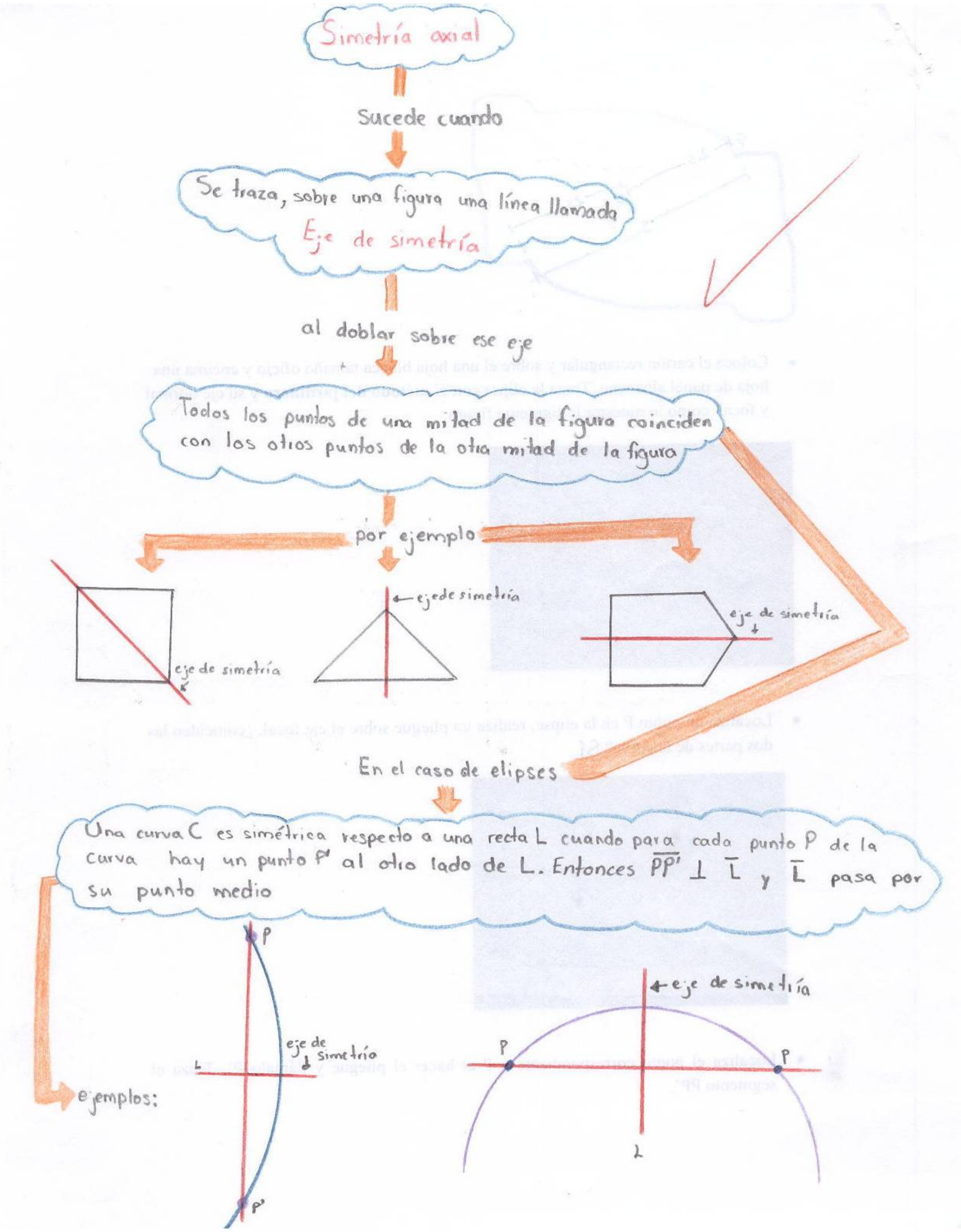
Sara Doris Montes Incin 0373-A.






Ricardo Picazo Barba 373 A Practica 33
Parábola.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Gráfica
Parábola
a = 9
Directriz: y = -2
La distancia de cualquier punto P de la parábola
al punto F, será igual a la distancia de ese mismo
punto P a su punto paralelo de la recta Directriz
Entonces
PF = PD
Vista Algebraica
Cónica
c: x² + (y - 2)² = 81
Número
a = 9
Punto
A = (0, -2)
B = (-7.48, 7)
C = (7.48, 7)
D = (7.48, -2)
F = (0, 2)
Recta
Directriz: y = -2
b: y = 7
d: x = 7.48
Segmento
e = 9
f = 9

Empleo de mapas conceptuales



Secciones Cónicas

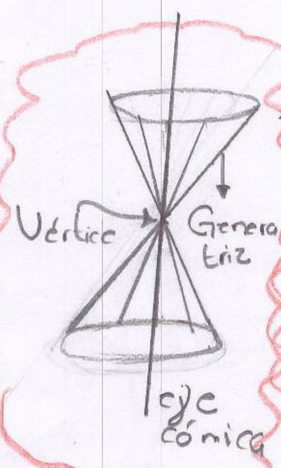
Propiedades de las curvas

Apolonio de Perga

Estudio de lugares geo. métricos

Obtener variando la inclinación de un plano que corta a un cono

Superficie Cónica



Si la generatriz se gira sobre el eje manteniendo fijo el punto de corte (vértice) y el ∢ que se forman

Circunferencia

Curva cerrada que se genera al cortar la superficie cónica con un plano ⊥ al eje del cono

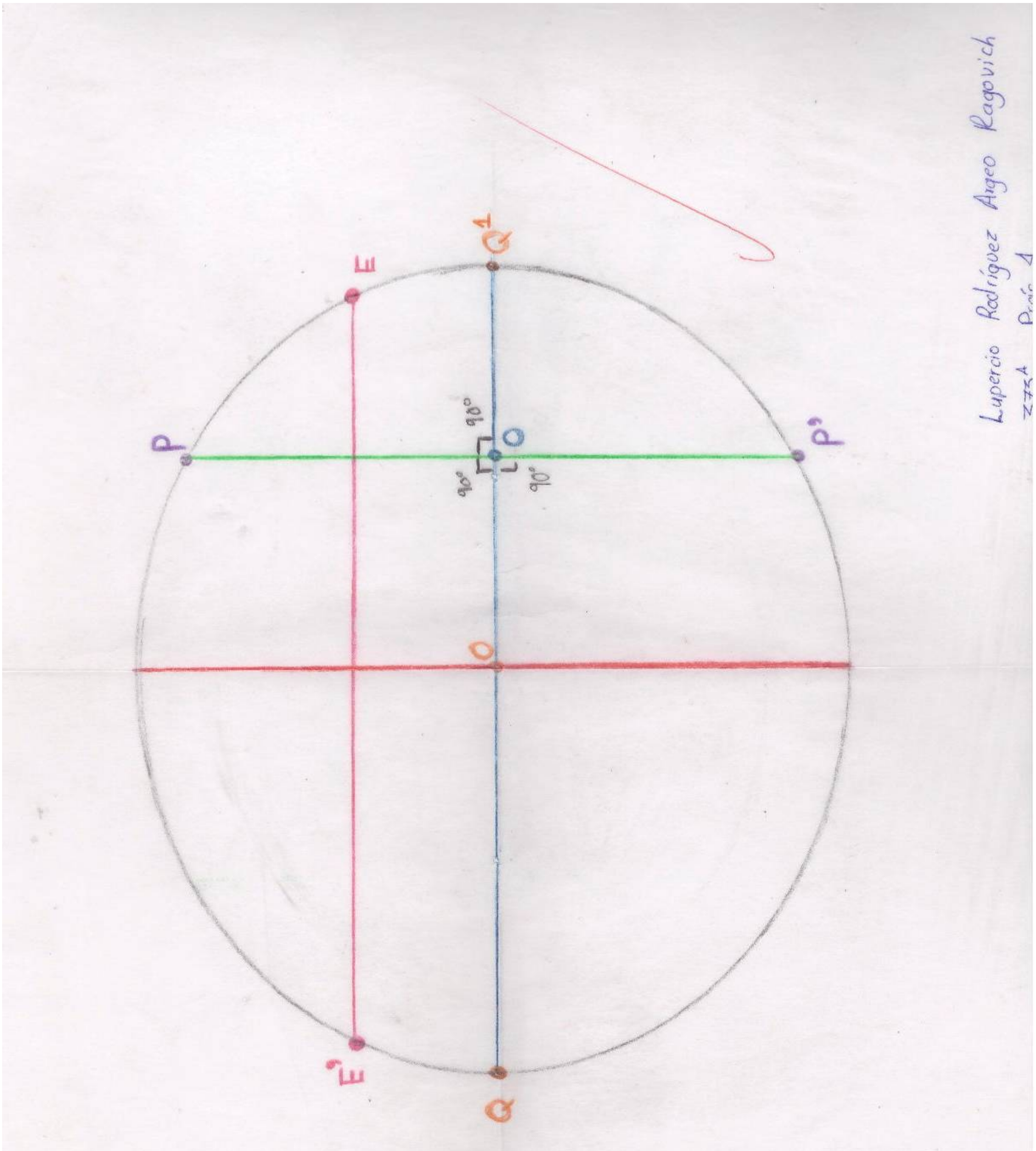
Elipse

Curva cerrada que se genera al cortar la superficie cónica con un plano que forma un ∢ superior, al ∢ formado por

Parábola

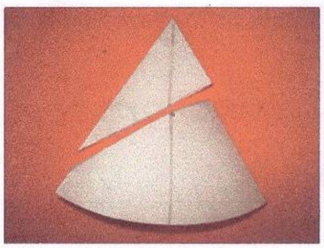
Curva abierta que se genera al cortar la superficie cónica con un plano que forma un

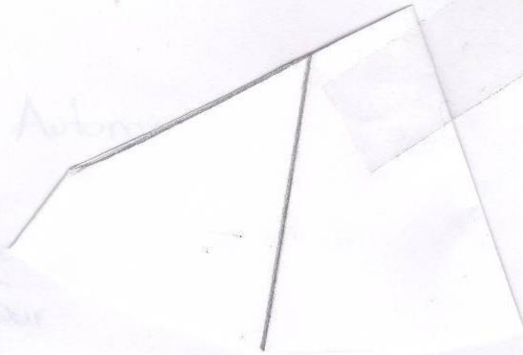
Trazos en papel albanene



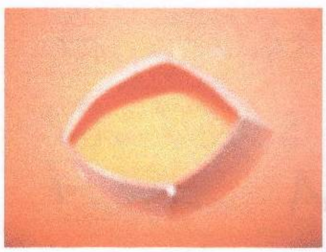
Actividades en el aula

- Recorta con tijeras la línea oblicua.





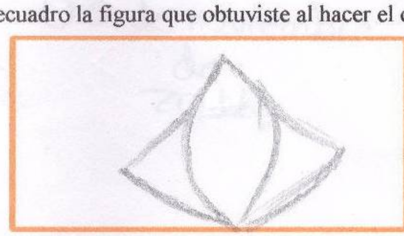
- Observa desde arriba el corte realizado en el cono y reconoce de ésta manera la forma de la curva.



- Describe con tus propias palabras como es la figura que encontraste después del corte, ¿a qué se parece la curva?

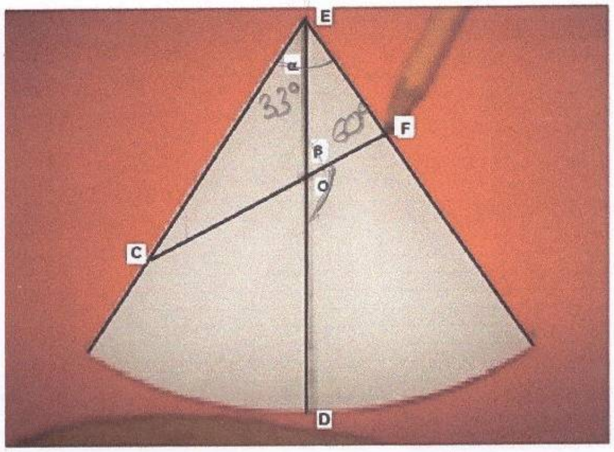
Un ovalo. Por ejemplo, un balón de futbol americano.

- Dibuja en el siguiente recuadro la figura que obtuviste al hacer el corte al cono.



5

La siguiente figura recrea los ángulos α y β que se forman al trazar la recta oblicua sobre el eje del cono.



- Mide el ángulo α y el β con el transportador ¿Cómo son los ángulos α y β?

α = agudo (33°)
β = agudo (60°)

Observa nuevamente la imagen anterior y completa el siguiente enunciado:
"El corte representado gráficamente por el segmento CF corta a las generatrices de los extremos en los puntos __C__ y __F__ y al eje en el punto __O__. De hecho corta a todas las __rectas__ del cono. Por eso decimos: la sección cónica producida por un plano que interseca a todas las generatrices de un mismo lado del vértice es una elipse."

Para confirmar la definición de elipse dada por Apolonio, resuelve siguiente tarea.

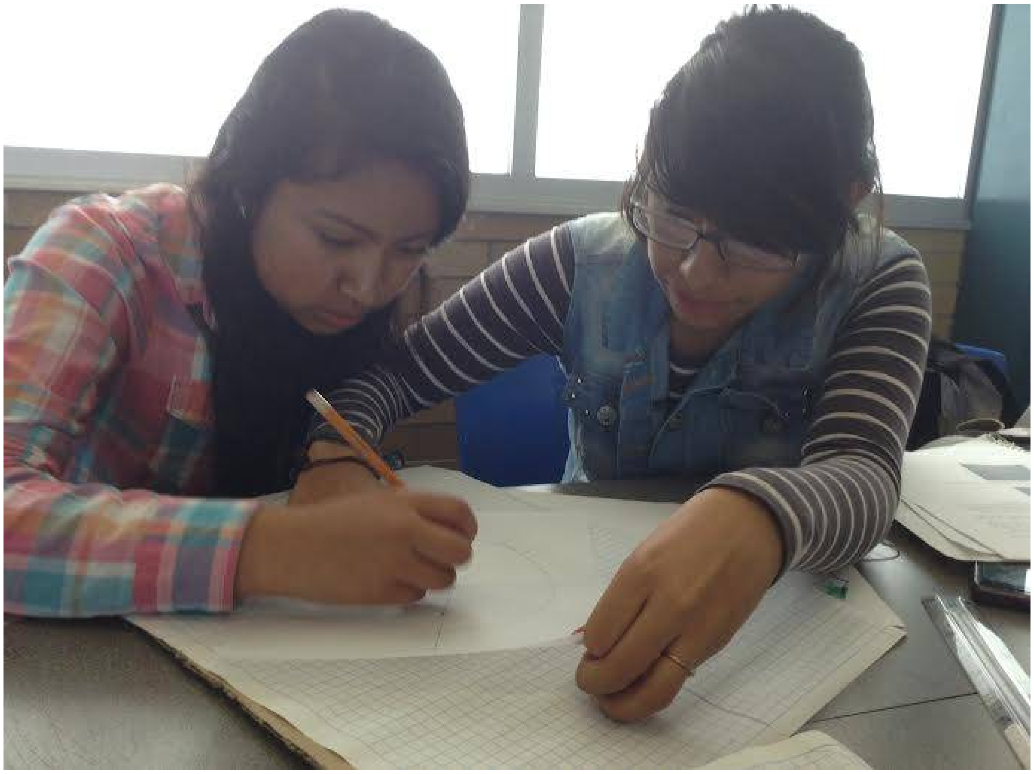
Tarea: Con base en la figura anterior, demuestra que el ángulo de corte con respecto al eje es mayor que el ángulo formado por una generatriz del cono y su eje, pero menor que 90°, es decir, demostrar que $\alpha < \beta < 90°$.

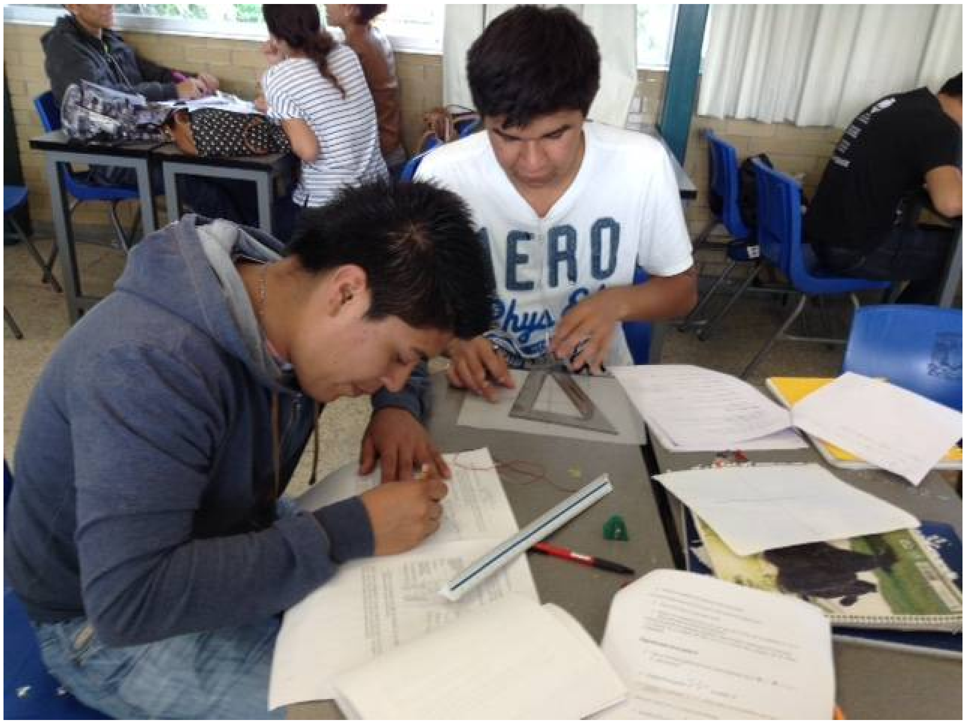
$33° < 60° < 90°$

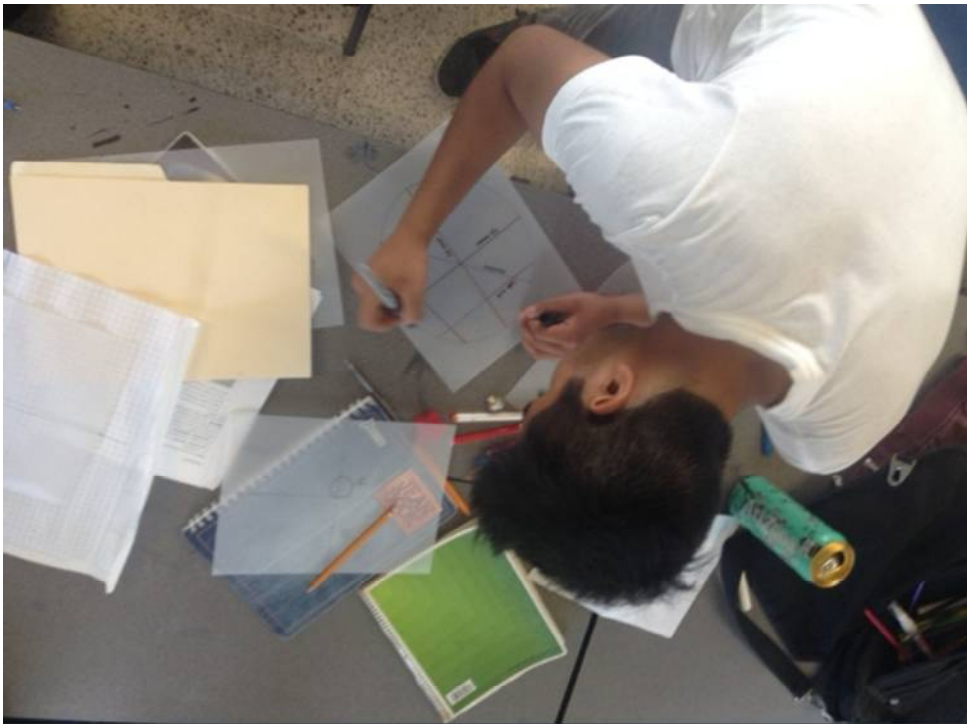
$O° = 180° - 60° = 120°$

$O° = 120°$

6




AERO



BIBLIOGRAFÍA.

ALCALÁ HERNANDEZ MANUEL (2002).*La construcción del lenguaje matemático*, Editorial GRAÓ.

AUSUBEL, D.P. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México. Trillas.

COLL, C (2001). *Constructivismo y educación. La concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Eds.), Desarrollo psicológico y educación. Vol.2. Psicología de la educación escolar. Madrid: Alianza Editorial.*

COLL, C(1996). *Constructivismo y educación escolar: ni hablamos siempre de lo mismo ni lo hacemos siempre desde la misma perspectiva epistemológica. Anuario de Psicología, 69, 153-178.*

DEL RIO SANCHEZ JOSE, *Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento*, Estudio comparado de dos metodologías. CIDE.

DÍAZ BARRIGA FRIDA, HERNÁNDEZ GERARDO (2010) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*, Editorial Mac Graw-Hill. Education 2. 1-14 (traducción del DR. Juan Díaz Godino)

EVES, HOWARD(1969).*Estudio de las geometrías*, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, México.

FERNANDO FOUZ, BERRITZEGUNE DE DONOSTI (2004/2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Ciclo de conferencias: Un paseo por la geometría.Raúl Ibáñez y Marta Macho Stadler, del Departamento de Matemáticas de la Universidad del País Vasco

GASCÓN, J. (2001), *Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato.* ¿Dos mundos completamente separados? Barcelona, España: Seminario de Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

GELFAND, I., GLAGOLIEVA, E. Y KIRILLOV, A., (1973).*El método de coordenadas*, Editorial MIR, Moscú

GONZALEZ MAZUELO CRISTINA, PANIAGUA CASTRILLÓN JUAN, PATIÑO JARAMILLO GUSTAVO, *SECCIONES CÓNICAS. UNA MIRADA DESDE LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA,* Editorial ITM.

JOHNSON,D.W., JOHNSON, R.T. Y HOLUBEC, E. (1999). *Cooperation and Competition. Theory and Research. Edina, Minessota: Interaction Book Company.*

HERNÁNDEZ, G. (1998). Paradigmas en psicología de la educación. México: Paidós.

JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1990).*Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele*, en S. Llinares, M.V. Sánchez (eds.), *Teoríay práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, Spain), pp. 295-384.(fragmentos).

JOHNSON, DONOVAN, A.,(1975).*Curve nello spacio*, Zanichelli, Bologna.

KLETENIK, D.,(1979)*Problemas de geometría analítica*, Editorial MIR, Moscú.

LUELMO, M.T. (1997). *Un entorno para el aprendizaje de las matemáticas*. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 12, 5-7.

ORTEGA, TOMÁS (2005).*Conexiones matemática. Motivación del alumnado y competencia matemática*, Editorial GRAÓ

PEDOE, DAN,(1979).*Circles, A Mathematical View*, Dover, New York.

PLANAS, NURIA Y ALSINA, ÁNGEL, *Educación Matemática y Buenas Prácticas*, Serie: Didáctica de las Matemáticas, Colección Biblioteca del aula, Editorial GRAO

POSNER, G. (1979) *Instrumentos para la investigación y desarrollo del currículo: Aportaciones potenciales de la ciencia cognoscitiva.* Perfiles Educativos, 6. UNAM, Centro de Investigaciones y Servicios Educativos,

TREFFERS, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: KluwerAcademicPublishers.

TORRES, CARLOS, (1999).*Geometría analítica* (2ª edición), Editorial Santillana, México.

VAN HIELE, P (1986) Characetrizing the Van Hiele levels of developing in Geometry, Journal research in Matematics Education. Vol 17(1) pp 31-48.

VAN REEUWIJK, M. (1997).*Las Matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las Matemáticas.*UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 12,9-16.

ZORRILLA ALCALÁ JUAN FIDEL (2007). Desarrollo de habilidades verbales y matemáticas I. AGO Editorial.

ZUBIRÍA REMY e HILDA DORIS, *El constructivismo en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el siglo XXI*. Plaza Valdés Editores.