



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA–CONTROL

**DISEÑO DE OBSERVADORES PARA UNA CLASE  
DE NEURO–OSCILADORES EN PRESENCIA  
DE RUIDO FUERTE**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

*PRESENTA:*

PÉREZ CRUZ JULIO FRANCO

TUTOR

DR. YU TANG XU  
*POSGRADO DE INGENIERÍA, UNAM.*

MÉXICO D.F. OCTUBRE DE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. María Cristina Verde Rodarte

Secretario: Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria

Vocal: Dr. Yu Tang Xu

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Héctor Benítez Pérez

2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. Marcos Ángel González Olvera

Lugar donde se realizó la tesis:  
Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Yu Tang Xu

---

FIRMA

*A Güero, por ser tan valiente.*

A Marisol, de todo corazón.

## *Agradecimientos*

Agradezco al Dr. Yu Tang Xu por su entrega y dedicación como asesor en el desarrollo de este trabajo de tesis. Su gran pasión por la investigación y su calidad humana me brindaron la confianza y motivación necesaria para alcanzar los objetivos planteados en este trabajo. Aprecio profundamente el tiempo, paciencia y esfuerzo invertidos en la resolución de cada una de mis dudas, por pequeñas que éstas fueran.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología le agradezco por brindarme el sustento económico necesario para concluir con el plan de estudios de maestría y con la realización de esta tesis.

## *Resumen*

Se presenta una metodología de diseño de observadores para una clase de neuro-osciladores no lineales basada en la reciente teoría de contracción así como en el uso de sincronización de sistemas dinámicos. En ausencia de ruido, se garantiza la convergencia exponencial de las trayectorias. Cuando las mediciones están contaminadas con ruido fuerte, múltiples copias del observador son sincronizadas atenuando el efecto del ruido en los estimados de los estados tanto medibles como no medibles. La reducción de ruido se verifica mediante simulaciones de un oscilador de van der Pol y del modelo neuronal FitzHugh–Nagumo

## *Abstract*

Base on the recent contraction and synchronization theories, a novel design of observers is presented for a class of nonlinear oscillators. Exponential convergence under noiseless measurements is achieved. To overcome the issue of noisy output measurements, several copies of the main observer are synchronized. Reduction of the noise is verified by means of simulations of the van der Pol and the FitzHugh—Nagumo (FN) oscillator models.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>X</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Metas . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.3. Alcances . . . . .	3
1.4. Estructura de tesis . . . . .	3
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Observabilidad . . . . .	5
2.2. Teoría de Contracción . . . . .	7
2.3. Sincronización . . . . .	12
2.4. Modelo dinámico del Neuro–Oscilador . . . . .	15
<b>3. Diseño de Observadores</b>	<b>19</b>
3.1. Observador de Orden Reducido . . . . .	19

3.2. Observador de Orden Completo . . . . .	21
3.3. Sincronización de Observadores . . . . .	23
<b>4. Simulaciones y resultados</b>	<b>24</b>
4.1. Oscilador de van der Pol . . . . .	24
4.2. Oscilador FitzHugh–Nagumo . . . . .	30
<b>5. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>

# Lista de Figuras

2.1. Dinámica virtual de dos trayectorias vecinas. . . . .	8
4.1. Estados estimados en ausencia de ruido, oscilador de van der Pol. . . . .	26
4.2. Estimado $\hat{z}$ en presencia de ruido a la salida, caso van der Pol. . . . .	27
4.3. Estimado $\hat{v}$ en presencia de ruido a la salida, caso van der Pol. . . . .	28
4.4. Estados estimados en ausencia de ruido, oscilador FN. . . . .	32
4.5. Estimado $\hat{z}$ en presencia de ruido a la salida, caso FN. . . . .	33
4.6. Estimado $\hat{v}$ en presencia de ruido a la salida, caso FN. . . . .	34
4.7. Índice RMS del error de estimación, caso van der Pol. . . . .	35
4.8. Índice RMS del error de estimación, caso FN. . . . .	36

# Lista de Tablas

2.1. Modelos más importantes de neuro-osciladores. . . . .	16
4.1. Valores RMS para $t \in [10 - 25](sec)$ con desviación estándar $\sigma = 0.2$ . . . . .	29
4.2. Valores RMS para $t \in [10 - 25](sec)$ con desviación estándar $\sigma = 0.2$ . . . . .	35

# Capítulo 1

## Introducción

El sistema nervioso es, sin duda, una máquina en proceso de perfeccionamiento, resultado de largos periodos de evolución y adaptación que ha permitido a las especies entender y, sobre todo, transformar el entorno que les rodea. La complejidad de las tareas que realiza el ser humano día a día ha inspirado, desde épocas tempranas, a grupos de investigación conformados por filósofos, médicos, matemáticos e ingenieros, a trabajar en conjunto con la finalidad de desarrollar modelos que expliquen, de forma general, el funcionamiento del sistema nervioso y, de forma particular, la dinámica de las neuronas que lo conforman.

Evidencia reciente ha confirmado [1], que las neuronas presentan un comportamiento oscilatorio al recibir estímulos sensoriales. Esta dinámica oscilante está altamente relacionada con un sinnúmero de procesos cognitivos como la toma de decisiones, atención, uso de la memoria e incluso la conciencia misma [2]. Por lo tanto, el comportamiento oscilatorio del sistema nervioso ha sido descrita por un gran número de modelos matemáticos [3], donde están incluidas las redes de osciladores no lineales [4, 5]. En la mayoría de los casos, las ecuaciones no lineales están relacionadas con la diferencia de potencial eléctrico en la membrana, así como con el flujo de corriente que viaja a través de éstas [6].

La validez de estos modelos es ampliamente conocida, ya que la fidelidad con que estos osciladores reproducen la dinámica del comportamiento neuronal puede ser comparada con las señales obtenidas a partir de métodos como la electroencefalografía (EEG) y magnetografía (MEG) [7, 8], generando una herramienta poderosa en el estudio, por ejemplo, de enfermedades degenerativas como Parkinson [9], [10] y Alzheimer [11]. No obstante, las técnicas de EEG y MEG no permiten ni registrar la actividad de las corrientes eléctricas en las neuronas, ni adquirir un valor limpio del cambio de potencial en las zonas donde se colocan los sensores, generalmen-

te electrodos, ya que las mediciones están contaminadas con un alto nivel de ruido, ocasionando pérdida de datos e información [12]. Esta situación puede resultar bastante perjudicial en aplicaciones de índole biomédica donde es inherente el uso de sistemas de control [13], por ejemplo, el diseño de prótesis robóticas o de interfaces humano-computadora [14, 15], ya que sin un estimado fiel de las variables no medibles o sin una reducción del ruido en las mediciones, las acciones de control pueden ser calculadas de forma errónea, impidiendo el funcionamiento correcto de los dispositivos.

Con el fin de hacer frente al problema anterior, diferentes técnicas de observación han sido utilizadas a largo del tiempo. Los observadores de Alta Ganancia con ganancias constantes y su variable con ganancias adaptables [16] han ofrecido un buen desempeño frente a este tipo de perturbaciones incluyendo, de forma inherente, la presencia del fenómeno de pico para valores elevados de las ganancias de observación [17], hecho que ha sido estudiado y parcialmente resuelto en [18]. Otras técnicas de observación no lineal han permitido contrarrestar esta problemática, como cambio de coordenadas utilizando vía filtros de transformación [19] o aquellos basados en el uso del criterio del círculo [20].

En este trabajo, se presenta una metodología para el diseño de observadores para una clase de neuro-osciladores con base en la reciente teoría de contracción [21, 22]. A partir del diseño expuesto en [23], se obtiene un observador de orden reducido capaz de recuperar de forma exponencial las trayectorias de los estados no medibles para los neuro-osciladores de interés, sin importar el valor de las condiciones iniciales. Para el caso en que las señales están contaminadas con un nivel moderado de ruido, se utiliza un observador de orden completo con el fin de disminuir la intensidad del ruido en los estimados de los estados tanto medibles como no medibles. Mas aún, utilizando la técnica de sincronización como medio de realce colectivo de la precisión [24], un grupo de observadores de orden completo es sincronizado, llevando las trayectorias del sistema acoplado hacia el comportamiento de la dinámica libre de ruido, aún bajo la presencia de ruido fuerte en las mediciones [25, 26].

## 1.1. Metas

Se pretende estudiar e identificar las propiedades y características que definen a un conjunto de osciladores neuronales, con el fin de proponer una metodología para diseño de estimadores de estado haciendo uso de la teoría de contracción. Bajo este enfoque, es posible asegurar la convergencia exponencial de los estados estimados bajo condiciones ideales. Por otro lado, se

recurre a la sincronización de observadores buscando mejorar la calidad en que éstos, al trabajar de forma colectiva y en presencia de ruido en las mediciones, reconstruyen la trayectoria objetivo. Finalmente, se busca generar un estudio comparativo entre los distintos estimadores, con el propósito de verificar mejoras graduales en la atenuación del ruido, iniciando por el observador de orden reducido, seguida por el diseño de orden completo, hasta recobrar una representación fiel de la trayectoria original implementando un conjunto de observadores sincronizados.

## 1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo consiste en presentar una metodología para el diseño de observadores para una clase de neuro-osciladores y, a su vez, garantizar la convergencia exponencial cuando se trabaja en un entorno libre de ruido. Con la finalidad de cuantificar la atenuación del ruido en los estimados de los estados medibles como no medibles, se realiza un estudio comparativo entre los esquemas de orden reducido, completo y sincronizado, considerando para este último caso un número diferente de elementos dentro de la red.

## 1.3. Alcances

Los resultados de este trabajo pueden aplicarse no sólo a una amplia familia de neuro-osciladores, sino también a una variedad de sistemas dinámicos, como los sistemas lagrangianos [27]. Sin embargo, la metodología aquí desarrollada puede extenderse relajando las suposiciones aquí asumidas, esto es, incluyendo sistemas donde el número de mediciones disponibles sea distinto del número de estados a observar o permitiendo la entrada no lineal de los estados no medibles en la dinámica de aquellos medibles. Mas aún, esquemas de observación adaptable pueden añadirse al considerar sistemas con incertidumbre paramétrica.

## 1.4. Estructura de tesis

A continuación se presenta la organización de este trabajo:

En el capítulo 2 se introducen una serie de conceptos y definiciones necesarios para estudiar las propiedades de los sistemas dinámicos desde el enfoque de la teoría de contracción. Además, se define la clase de neuro-osciladores a estudiar así como el término de ruido fuerte. El capítulo

concluye con la presentación del concepto de sincronización como herramienta para recuperar el comportamiento ideal libre de ruido a partir un grupo de sistemas ruidosos acoplados.

En el capítulo 3 se incluye el desarrollo matemático del diseño de observadores contrayentes de orden reducido y completo siguiendo una metodología *top-down*. En primer lugar, se presenta el modelo objetivo o dinámica deseada del estimador, el cual contiene generalmente variables intermedias que impiden la implementación directa del observador, pero facilitan la identificación de las propiedades de interés, que en este trabajo corresponden a las propiedades de contracción. Una vez concluido el análisis, las variables intermedias son sustituidas por funciones de las señales medibles del sistema no lineal, obteniendo así la versión final e implementable del observador. Al término del capítulo, se presenta las ecuaciones que definen al grupo de observadores de orden completo bajo sincronización.

Con el fin de cuantificar la reducción de ruido así como el desempeño por parte de la familia de observadores obtenida en el apartado anterior, en el capítulo 4 se llevan a cabo simulaciones de los osciladores de van der Pol y FitzHugh–Nagumo. Los resultados incluyen un análisis cuantitativo entre los diferentes esquemas así como el efecto de incrementar la cantidad de elementos que conforman la red de estimadores sincronizados.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones más importantes, así como el trabajo a futuro.

# Capítulo 2

## Preliminares

A continuación, se presentan los conceptos de contracción y sistemas no lineales necesarios para desarrollar la propuesta de metodología de diseño de observadores para la clase de neuroosciladores que definen las dinámicas a reconstruir.

### 2.1. Observabilidad

Considere el sistema no lineal de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}), \quad (2.1b)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$  es la salida,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$  el vector de parámetros desconocidos,  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada y  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, h$  son funciones suaves, es decir, sus derivadas de cualquier orden están siempre definidas. De form general, el problema de observabilidad, consiste en la posible reconstrucción del comportamiento de la dinámica interna del sistema a partir de mediciones de la salida  $\mathbf{y}(t)$  y la entrada  $u(t)$  en un intervalo finito de tiempo  $T = [t_0, t_1]$  con  $t_1 > t_0$ . Lo anterior se puede enunciar de la siguiente manera.

**Definición 2.1.1 (Observabilidad [28])** *Se dice que dos estados  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  son indistinguibles ( $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_2$ ), si para cada entrada  $u$ , la función de salida  $\mathbf{y}(\mathbf{x}_1, 0, u, t)$ ,  $t \geq 0$  del sistema bajo la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1$ , y la función de salida  $\mathbf{y}(\mathbf{x}_2, 0, u, t)$   $t \geq 0$  del sistema bajo la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_2$  son idénticas en un dominio común de definición. El sistema se llama*

*observable si  $\mathbf{x}_1$  I  $\mathbf{x}_2$  implica  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ .*

De acuerdo a la definición anterior, la observabilidad de un sistema dinámico implica que los valores de sus estados  $\mathbf{x}(t), t \in [t_1, t_2]$  están completamente determinados por el valor de las entradas y salidas  $u(t), \mathbf{y}(t)$  en  $t \in [t_1, t_2]$ . Sin embargo, esta definición no es valida cuando el sistema presenta un vector de parámetros desconocidos, lo cual, puede solucionarse al incluir el vector de parámetros desconocidos  $\theta$  como una componente del vector de estados extendido  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \theta)^\top$ , resultando en

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \theta)u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.2a)$$

$$\dot{\theta} = 0, \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}), \quad (2.2c)$$

o de forma similar

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, t) + \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}})u(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = (\mathbf{x}_0, \theta)^\top, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{y} = \tilde{h}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (2.3b)$$

donde  $\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta), 0)^\top$ ,  $\tilde{h}(\tilde{\mathbf{x}}) = (h(\mathbf{x}), 0)$  y  $\tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{g}(\mathbf{x}, \theta), 0)^\top$ . Por otro lado, la definición 2.1.1 caracteriza a la observabilidad como una propiedad global del sistema dinámico, que para la gran mayoría de los sistemas no lineales es difícil de comprobar. En algunas sistemas es suficiente con conocer la observabilidad del sistema en la vecindad de un punto de interés en lugar de todo el espacio de estados. Esto hace necesario la definición de la observabilidad local.

**Definición 2.1.2 (Observabilidad local [28])** *Un sistema se dice localmente observable en  $\mathbf{x}_0$ , si existe una vecindad  $W \subset \mathbb{R}^n$  de  $\mathbf{x}_0$  tal que para cada vecindad  $V \subset W$  de  $\mathbf{x}_0$ , la relación  $\mathbf{x}_0 \overset{V}{I} \mathbf{x}_1$  implique  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ . Por lo tanto, el sistema se dice localmente observable, si es observable en cada  $\mathbf{x}_0$ .*

Existe un gran número de pruebas disponibles para verificar la observabilidad de sistemas no lineales de la forma (2.3). En este trabajo, se restringe el estudio a sistemas donde la entrada  $u(t)$  la entrada es una constante. Así, se puede reemplazar la función  $u(t)$  como otro parámetro desconocido, lo cual, permite considerar a (2.3) como un sistemas sin entradas. Por lo tanto, se puede recurrir a la siguiente prueba de observabilidad para sistemas autónomos.

**Propiedad 2.1.1 (Prueba de observabilidad [28])**

El sistema es localmente observable para cada punto  $\mathbf{x}^0 \in U \subset \mathbb{R}^{n+d}$  si

$$\text{rango } \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} (\tilde{h}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad L_{\tilde{f}} \tilde{h}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad L_{\tilde{f}}^2 \tilde{h}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \dots \quad L_{\tilde{f}}^{n+d-1} \tilde{h}(\tilde{\mathbf{x}}))^\top = n + d, \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in U \quad (2.4)$$

donde  $L_{\tilde{f}} \tilde{h}(\tilde{\mathbf{x}})$  es la derivada de Lie de  $\tilde{h}$  respecto a  $\tilde{f}$ , esto es,  $L_{\tilde{f}} \tilde{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ .

Para los distintos modelos de neuro-osciladores que se presentan más adelante en el apartado 2.4, ha sido verificada dicha prueba de observabilidad [29, 30].

## 2.2. Teoría de Contracción

El análisis de contracción es una teoría basada en herramientas de mecánica de medio continuo y geometría diferencial, en la cual, a diferencia de otras teorías de estabilidad como análisis de Lyapunov, no es necesario la definición de una trayectoria nominal o de un punto de equilibrio. Bajo el enfoque de contracción, un sistema se puede llamar estable si en alguna región las condiciones iniciales son olvidadas, esto es, si el comportamiento final del sistema es independiente de las condiciones iniciales. En consecuencia, todas las trayectorias convergen a una sola dinámica objetivo. A esta forma de estabilidad se le conoce simplemente como *convergencia*. Lo anterior se expresa en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1 (Contracción [21]) :**

Considere el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados y  $\mathbf{f}$  es un campo vectorial de  $n \times 1$ . Una región del espacio de estados se dice *contrayente* si la parte simétrica del Jacobiano  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$  es uniformemente negativa definida, es decir,

$$\exists \lambda > 0, \quad \mathbf{J}_s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}^\top \right) \leq -\lambda \mathbf{I} < 0, \quad \forall \mathbf{x}, \forall t \geq 0. \quad (2.6)$$

El sistema (2.5) en esta región es *contrayente* con velocidad  $\lambda$ . Más aun, se puede garantizar la *convergencia exponencial y global* de todas las trayectorias vecinas a una única trayectoria,

sin importar las condiciones iniciales, si la totalidad del espacio de estados es una región de contracción.

El resultado anterior se puede abordar de la siguiente forma. Considere un flujo local en un punto  $\mathbf{x}$  arbitrario, donde es de interés analizar el comportamiento entre trayectorias vecinas. Si todas éstas convergen entre sí, se puede concluir la convergencia global y exponencial a una sola trayectoria. A lo anterior se le conoce como comportamiento contrayente. Ahora bien, asuma que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  es continuamente diferenciable, entonces (2.5) produce la relación diferencial exacta [31]

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}, \quad (2.7)$$

donde  $\delta \mathbf{x}$  es un desplazamiento virtual, esto es, un desplazamiento infinitesimal en tiempo fijo y  $\delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x}$  es la forma cuadrática asociada, siendo ambas diferenciables con respecto al tiempo. Considere entonces, dos trayectorias vecinas del campo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  y el desplazamiento  $\delta \mathbf{x}$  entre ellas, como se muestra en la Figura 2.1.

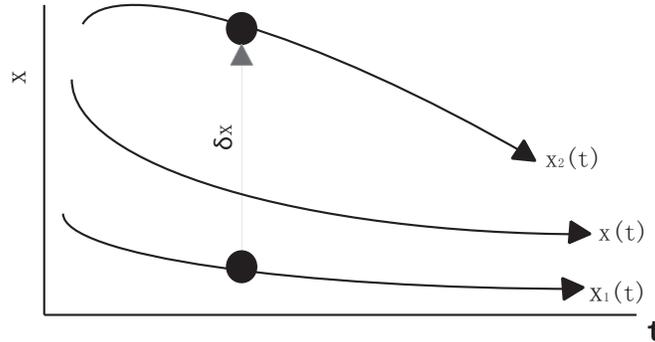


Figura 2.1: Dinámica virtual de dos trayectorias vecinas.

Así, la distancia al cuadrado entre estas trayectorias está dada por  $\delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x}$  y, con base en (2.7), su velocidad de cambio está dada por

$$\frac{d}{dt}(\delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x}) = 2\delta \mathbf{x}^\top \delta \dot{\mathbf{x}} = 2\delta \mathbf{x}^\top \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}.$$

Sea  $\lambda_{\max}(\mathbf{x}, t)$  el valor propio más grande de la parte simétrica del Jacobiano  $\mathbf{J}$ ,

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}^\top \right) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{x}, t),$$

de esta forma se tiene

$$\frac{d}{dt}(\delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x},$$

y por lo tanto

$$\|\delta \mathbf{x}\| \leq \|\delta \mathbf{x}_0\| e^{\int_0^t \lambda_{\max}(\mathbf{x}, t) dt}. \quad (2.8)$$

Ahora bien, asuma que  $\lambda_{\max}(\mathbf{x}, t)$  es uniformemente negativa definida, es decir

$$\exists \beta > 0, \lambda_{\max}(\mathbf{x}, t) \leq -\beta < 0, \forall \mathbf{x}, \forall t \geq 0$$

En consecuencia y por la ecuación (2.8), cada distancia infinitesimal  $\|\delta \mathbf{x}\|$  tiende de forma exponencial a cero. Al integrar este desplazamiento sobre toda la trayectoria, esto implica que todas las soluciones del sistema (2.5) convergen de forma exponencial a una sola trayectoria, independientemente de las condiciones iniciales.

Para el caso general donde la métrica no es necesariamente cartesiana, se puede considerar una transformación de coordenadas de la forma

$$\delta \mathbf{z} = \Theta \delta \mathbf{x},$$

con  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  una matriz cuadrada uniformemente invertible. Así, se tiene que la distancia cuadrática puede ser redefinida como

$$\delta \mathbf{z}^\top \delta \mathbf{z} = \delta \mathbf{x}^\top \mathbf{M} \delta \mathbf{x},$$

donde  $\mathbf{M} = \Theta^\top \Theta$  representa una métrica continuamente diferenciable y simétrica. Por lo tanto, en las nuevas coordenadas, la velocidad de cambio de la distancia al cuadrado de  $\delta \mathbf{z}$  se puede calcular como

$$\frac{d}{dt}(\delta \mathbf{z}^\top \delta \mathbf{z}) = 2\delta \mathbf{z}^\top \delta \dot{\mathbf{z}} = 2\delta \mathbf{z}^\top \left( \dot{\Theta} + \Theta \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \Theta^{-1} \delta \mathbf{z}.$$

Similar al **Teorema 2.2.1**,  $\|\delta\mathbf{z}\| \rightarrow 0$  si la matriz Jacobiana en coordenadas generalizadas es uniformemente negativa definida, es decir,

$$\exists \lambda > 0, \mathbf{F} = \left( \dot{\Theta} + \Theta \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \Theta^{-1} \leq -\lambda \mathbf{I} < 0, \quad \forall \mathbf{x}, \forall t \geq 0,$$

esto implica, nuevamente, que todas las soluciones del sistema original convergen a una única trayectoria, sin importar las condiciones iniciales. Un estudio más amplio y exhaustivo así como el análisis de sistemas contrayentes en configuraciones paralelo, cascada, retroalimentación además de teoremas conversos, etc., se aborda en [32–35].

Ahora bien, una vez que se ha estudiado la convergencia de trayectorias vecinas descritas por la misma función vectorial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , el siguiente teorema se introduce con la finalidad de estudiar, por medio de análisis de contracción, la convergencia de propiedades específicas del sistema, como la convergencia a una variedad, hacia una trayectoria en particular o la relación entre ciertas variables de estado, en lugar de sólo trayectorias. Esta propiedad se conoce como contracción parcial.

**Teorema 2.2.2 (Contracción Parcial [5]) :**

*Sea el sistema auxiliar*

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{f}(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}_v(t_0) = \mathbf{x}_{v0}, \quad (2.9)$$

*asociado a un sistema no lineal suave, que es de la forma*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.10)$$

*Asuma que el sistema auxiliar (2.9) es contrayente respecto a  $\mathbf{x}_v, \forall \mathbf{x}, \forall t \geq 0$ . Si una solución particular del sistema  $\mathbf{x}_v$  verifica una propiedad suave específica, entonces todas las trayectorias del sistema original  $\mathbf{x}$  verifican esta propiedad exponencialmente. Por lo tanto, el sistema original se dice parcialmente contrayente.*

Por lo tanto, el sistema auxiliar  $\mathbf{x}_v$ , también llamado virtual, debe ser contrayente bajo las condiciones del Teorema 2.2.1 y contener dos soluciones particulares, la primera, la solución del sistema original  $\mathbf{x}_v = \mathbf{x} \quad \forall t \geq 0$  y, en segunda, la solución con la propiedad específica. Para esclarecer lo anterior, considere el ejemplo tomado de [32]. Sea la dinámica de un robot

manipulador

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau},$$

y la ley de control para el mismo

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + g(\mathbf{q}) - \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{K} > 0,$$

donde  $\mathbf{q}_r$  es elegida en función de una trayectoria de referencia deseada  $\mathbf{q}_d$ , de la forma  $\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d)$ . Ahora bien, defina el sistema auxiliar para  $\mathbf{x}_v$  de la forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}}_v + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{x}}_v + g(\mathbf{q}) - \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{x}}_v) = \boldsymbol{\tau}.$$

Con el fin de conocer si el sistema auxiliar es contrayente, se obtiene la velocidad de cambio de la distancia al cuadro de  $\delta\mathbf{x}_v$  expresada por

$$\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{x}_v^\top \mathbf{H} \delta\mathbf{x}_v) = -2\delta\mathbf{x}_v^\top (\mathbf{C} + \mathbf{K}) \delta\mathbf{x}_v + \delta\mathbf{x}_v^\top \dot{\mathbf{H}} \delta\mathbf{x}_v.$$

Ya que la matriz  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  es anti-simétrica, esto implica

$$\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{x}_v^\top \mathbf{H} \delta\mathbf{x}_v) = -2\delta\mathbf{x}_v^\top \mathbf{K} \delta\mathbf{x}_v,$$

por lo tanto el sistema auxiliar es contrayente. Mas aún, al sustituir en el sistema virtual  $\mathbf{x}_v = \mathbf{q}$  y  $\mathbf{x}_v = \mathbf{q}_r$  se verifican ambas soluciones particulares, En consecuencia, se puede garantizar que  $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_r$  y  $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_d$ , ambas de forma exponencial.

En aplicaciones de control y de manera similar al caso anterior, el análisis sobre un sistema virtual ayuda a garantizar que, al ser éste contrayente y contener como soluciones particulares a la dinámica de interés y una trayectoria deseada, la primera se contraiga hacia la segunda de forma exponencial sin importar las condiciones iniciales de ambos sistemas. En nuestro caso particular se buscará, que el conjunto de observadores propuestos más adelante sean sistemas virtuales capaces de recuperar de forma exponencial las trayectorias de los estados tanto medibles como no medibles, cuando, de forma ideal, no existen perturbaciones en el sistema, como ruido en las mediciones. En el caso contrario, se recurre a la técnica de sincronización, que se expone a continuación.

## 2.3. Sincronización

La sincronización se puede entender [4] como el ajuste de los ritmos de oscilación de objetos al interactuar entre sí. Esta definición implica que, en principio, la sincronización demanda que el sistema de estudio presente una dinámica oscilante y, al mismo tiempo, que exista algún tipo de interacción entre los sistemas. Esta interacción puede clasificarse como unidireccional (sincronización maestro-esclavo) o bidireccional (sincronización mutua).

En ese trabajo, se definirá la sincronización de dos (o mas) osciladores  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , como el caso de igualdad competa  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ . Un estudio más general de las tipos de redes en sincronización puede encontrarse en [2,3]. Ya que los sistemas a sincronizar serán observadores de estados, no existe alguna restricción física o virtual que impida que los estimadores estén completamente acoplados unos con otros. Por lo tanto, este apartado sólo se enfoca en la sincronización bajo la topología conocida como *red simétrica todos con todos*, esto es, sistemas acoplados de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) + K_s \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad K_s > 0, \quad \mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0}, \quad (2.11)$$

donde  $i = 1 \dots N$  denota el número de cada oscilador incluido en la red,  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$  es el  $i$ -ésimo vector de estados y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t)$  es la dinámica del sistema desacoplado. Estos osciladores están difusamente acoplados, es decir, todos los sistemas están conectados por enlaces lineales de la forma  $(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)$  [36].

### Teorema 2.3.1 (Redes simétricas *Todos con Todos* [3]) :

*Considere los  $N$  sistemas acoplados dados por (2.11). Si la función*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) + K_s \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad \forall i, \quad i = 1 \dots N$$

*es contrayente, entonces los  $N$  sistemas alcanzaran la sincronización de forma exponencial sin importar el valor de las condiciones iniciales.*

Con los términos  $K_s(\mathbf{x}_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  como las entradas para cada oscilador, si  $\exists \lambda > 0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} - K_s \leq -\lambda \mathbf{I} < 0$ , entonces cada sistema es contrayente. Además, se puede visualizar que  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \dots = \mathbf{x}_N$ , es decir, cada elemento en la red contiene como soluciones particulares la dinámica de los elementos restantes.

Siguiendo la idea de [24], donde se utilizó el mismo tipo de red acoplada para lograr que un sistema de osciladores ruidosos recobrara de forma colectiva la dinámica de un sistema libre de ruido, en este trabajo se buscará que estimadores de estado puedan reconstruir la dinámica de ciertos neuro-osciladores utilizando mediciones de las entradas y salidas, cuando éstas últimas se encuentran contaminadas con ruido.

Para estudiar este problema, considere al mismo sistema (2.5) con  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^\top & \mathbf{y}^\top \end{bmatrix}^\top$ , donde  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$  es el vector de estados medibles y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}$  el correspondiente a los medibles, con  $n_v \leq n_z$ . La versión estocástica en presencia de ruido del sistema (2.5) descrita por ecuaciones Itô es de la forma

$$d\mathbf{z} = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}, \mathbf{v})dt, \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (2.12a)$$

$$d\mathbf{v} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \mathbf{v})dt, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}, \quad (2.12c)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y} + \sigma_w \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.12d)$$

donde  $\mathbf{y}_i$  denota la  $i$ -ésima medición independiente de la salida  $\mathbf{y}$  contaminada con ruido Gaussiano  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_y}$  con intensidad  $\sigma_w$ . Lo anterior resulta viable en aplicaciones donde existen múltiples sensores supervisando un mismo proceso, situación inherente al utilizar un EEG, donde un arreglo de electrodos registra la actividad cerebral, procesando, en un amplio intervalo de tiempo, el cambio de potencial cuando un individuo realiza tareas cognitivas [2].

Sin embargo, en este proceso, las señales obtenidas por los transductores son de un orden de magnitud bastante pequeño (no más de 90mV), que al escalarse para su posterior análisis y/o uso en aplicaciones en tiempo real, se genera simultáneamente un incremento del nivel de ruido en la lectura del EEG [12]. Éste último puede catalogarse como ruido débil o fuerte, dependiendo, entre otros casos, del valor elegido de media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$  necesarios para generar el ruido blanco. Valores típicos de desviación estándar usados para generar ruido de baja intensidad se encuentran en el rango de  $0.005 < \sigma < 0.05$  [16, 37, 38]. En este trabajo, se considera ruido con un valor superior al definido en este umbral  $\sigma = 0.2$ , por lo que éste puede catalogarse como ruido fuerte.

Con todo lo anterior, es evidente la necesidad de reconstruir las trayectorias de los estados tanto medibles como no medibles con la menor cantidad de ruido posible. Una solución a este problema ha sido planteada en [26], donde han sido sincronizados un conjunto de observadores

de estado para el sistema (2.12), definidos de la forma

$$d\hat{\mathbf{z}}_i = [\mathbf{f}_1(\mathbf{z}_i, \hat{\mathbf{v}}_i) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i) + K_s \sum_j (\hat{\mathbf{z}}_j - \hat{\mathbf{z}}_i)]dt, \quad \hat{\mathbf{z}}_i(t_0) = \hat{\mathbf{z}}_{i0}, \quad (2.13a)$$

$$d\hat{\mathbf{v}}_i = [\mathbf{f}_2(\mathbf{z}_i, \hat{\mathbf{v}}_i) + K_s \sum_j (\hat{\mathbf{v}}_j - \hat{\mathbf{v}}_i)]dt, \quad \hat{\mathbf{v}}_i(t_0) = \hat{\mathbf{v}}_{i0}, \quad (2.13b)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_i \\ \hat{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix}, \quad (2.13c)$$

con  $i = 1, \dots, N$ ,  $0 < \mathbf{K}(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  es una matriz diagonal con elementos positivos y  $K_s > 0$  la ganancia de acoplamiento entre todos los términos de la red. Sea  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}^\top & \hat{\mathbf{v}}^\top \end{bmatrix}^\top$  el estimado de  $\mathbf{x}$  y  $\bar{\mathbf{x}}$  el valor promedio de la red de observadores sincronizados, esto es

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_i \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (2.14)$$

Con base en los resultados expuestos en [24] y [25], se ha demostrado en [26], que si el  $i$ -ésimo observador de la forma (2.13) es contrayente para alguna  $\lambda > 0$ , la distancia entre cualquiera elemento de la red y el valor promedio  $\bar{\mathbf{x}}$  en estado estacionario, cuando las mediciones están contaminadas con ruido, está acotada por

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \frac{N(N-1)}{4N^2} \frac{H_{bd}(k_{\max}^2 + l_F^2 \sigma_w^2)}{\lambda_f + K_s N} + \frac{(k_{\max}^2 + l_F^2 \sigma_w^2)}{N}, \quad (2.15)$$

donde  $H_{bd} \geq \lambda_{\max} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}$  es una cota superior uniforme de la matriz Hessiana  $\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}$ ,  $l_F$  es la constante de Lipschitz del campo  $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^\top(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}) & \mathbf{f}_2^\top(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}) \end{bmatrix}^\top$  y  $\sup_{t \geq 0} (\text{tr}\{K^\top(t)K(t)\}) \leq k_{\max}^2$ .

Se puede apreciar que el lado derecho de (2.15) puede ser arbitrariamente pequeño al incrementar el número de observadores, es decir, tal que  $N \rightarrow \infty$ . Por otro lado, ya que cada observador de (2.13) es contrayente y tiene como solución particular al sistema original (2.12), esto es  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ , se puede garantizar la convergencia exponencial de las trayectorias estimadas hacia la dinámica objetivo (Teorema 9 en [26]). Con base en los resultados anteriores, se puede plantear la sincronización de una diferente cantidad de observadores para combatir el efecto indeseable de ruido en las mediciones de sistemas dinámicos.

## 2.4. Modelo dinámico del Neuro–Oscilador

La gran mayoría de los neuro–osciladores están descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la respuesta de una neurona a una cierta estímulo [29]. De forma general, éstos pueden ser divididos en dos categorías: fenomenológicos y puramente matemáticos. Los primeros exhiben un comportamiento más cercano al proceso biológico real, mientras que los segundos son reducciones matemáticas de mayor abstracción sin relación explícita con todas las variables y cantidades involucradas en la dinámica real, como las corrientes iónicas.

En la Tabla 2.1 se presentan los modelos de neuro–osciladores con mayor presencia en la literatura [3, 6, 39]. El oscilador de Hodgkin–Huxley es considerado el modelo más importante y representativo del funcionamiento de una neurona, ya que al tratarse de un modelo fenomenológico, su dinámica describe de manera fiel tanto el cambio del potencial membranal así como las cargas iónicas. Así mismo, este modelo consta de parámetros constantes así como de un gran número de no linealidades. Una versión simplificada del oscilador anterior es el modelo Morris–Lecar, donde se han fusionado en una solo estado el comportamiento de las distintas corrientes de activación, reduciendo el modelo a un sistema de dos dimensiones. Además, la totalidad de los parámetros son considerados constantes. Por último, puede observarse que los estados no medibles son afín en la dinámica del estado medible.

Una situación similar se presenta en el caso del oscilador FitzHugh–Nagumo, que consta de un estado medible y otro no medible, de parámetros constantes y con una relación lineal de la variable de activación sobre la dinámica del potencial en la membrana. Para el último caso concerniente al oscilador Hindmarsh–Rose, su principal diferencia es la adición de otro estado de activación. Sin embargo, nuevamente los parámetros del sistema se asumen constantes y, más importante, los estados no medibles entran de forma lineal en la dinámica del estado medible. Estos últimos modelos pertenecen a la segunda categoría de neuro–osciladores.

Con base en la definición 2.1.2, la prueba de observabilidad local para los diferentes modelos de neuro–osciladores ha sido aplicada en [29, 30], por lo que en este trabajo se asume que los modelos de estudio son, al menos, localmente observables. Ahora bien, se establece una dinámica general de la forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (2.16a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{z}) = \mathbf{z}, \quad (2.16c)$$

Tabla 2.1: Modelos más importantes de neuro-osciladores.

<i>Fenomenológicos</i>	<i>Ideales</i>
<p><b>Hodgkin-Huxley</b></p> $\dot{z} = \theta_1 v_1^3 v_3 (\theta_2 - z) + \theta_3 v_2^4 (\theta_4 - z) + \theta_5 (\theta_6 - z) + u(t),$ $\dot{v}_1 = (1 - v_1) g\left(\frac{\theta_7 + z}{\theta_8}\right) - \theta_9 v_1 \exp\left(\frac{z}{\theta_{10}}\right),$ $\dot{v}_2 = \theta_{11} (1 - v_2) g\left(\frac{\theta_{12} + z}{\theta_{13}}\right) - \theta_{14} v_2 \exp\left(\frac{z}{\theta_{15}}\right),$ $\dot{v}_3 = \theta_{16} (1 - v_3) \exp\left(\frac{z}{\theta_{17}}\right) - v_3 (1 + \exp\left(\frac{z + \theta_{18}}{\theta_{19}}\right)),$ $y = z,$ $g(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1},$ $\theta_1, \dots, \theta_{19} \in \mathbb{R}, \theta_1, \theta_3, \theta_5 > 0, u(t) \in \mathbb{R}$	<p><b>FitzHug-Nagumo</b></p> $\dot{z} = -\frac{1}{3} z^3 + z + v + u(t),$ $\dot{v} = -\frac{1}{\theta_1} (z - \theta_2 + \theta_3 v),$ $y = z,$ $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0, u \in \mathbb{R}$
<p><b>Morris-Lecar</b></p> $\dot{z} = \left(\frac{1}{\theta_1}\right) (\theta_2 (\theta_3 - z) + \theta_4 g_1(z) (\theta_5 - z) + \theta_6 v (\theta_7 - z) + u(t)),$ $\dot{v} = g_2(z) (g_3(z) - v),$ $y = z,$ $g(x)_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{x - \theta_8}{\theta_9}\right)\right),$ $g(x)_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{x - \theta_{10}}{\theta_{11}}\right)\right),$ $g(x)_3 = \theta_{12} \cosh\left(\frac{x - \theta_{10}}{2\theta_{11}}\right),$ $\theta_1, \dots, \theta_{12} \in \mathbb{R}, \theta_2, \theta_4, \theta_6, \theta_{12} > 0, u \in \mathbb{R}$	<p><b>Hindmarsh-Rose</b></p> $\dot{z} = -\theta_1 z^3 + \theta_2 z^2 + v_1 - v_2 + u(t),$ $\dot{v}_1 = \theta_3 - \theta_4 z^2 - v_1,$ $\dot{v}_2 = \theta_5 ((z + \theta_6)\theta_7 - v_2),$ $y = z,$ $\theta_1, \dots, \theta_7 > 0, u \in \mathbb{R}$

donde  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  es la entrada del sistema,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}$  son los vectores de estados medibles y no medibles con  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  sus campos vectoriales de dimensión  $n_z \times 1$  y  $n_v \times 1$ , respectivamente. El objetivo principal consiste en obtener un estimado del proceso gobernado por (2.16b) utilizando mediciones de la entradas y salidas, además de considerar la dinámica de los estados medibles, dada por (2.16a). Lo anterior, considerando que cada una de las mediciones, independientes entre sí, se encuentran contaminadas con ruido gaussiano de alta intensidad, es decir,  $\mathbf{y}_i = \mathbf{y} + \sigma_w \mathbf{w}_i$ . Para lograr lo anterior, es necesario determinar una serie de restricciones que facilite el diseño de observadores para el sistema (2.16), siempre y cuando éstas logren representar a una cierta clase o familia de neuro–osciladores.

**Propiedad 2.4.1** *La dinámica de los estados medibles tiene la forma  $\mathbf{f}_1(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, t) = P(\mathbf{z}, t)\mathbf{v} + g(\mathbf{z}, \mathbf{u})$  con  $P(\mathbf{z}, t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_v}$ .*

Ésta es una de la principales propiedades que puede encontrarse al analizar las ecuaciones que modelan un oscilador neuronal. Sin embargo, osciladores altamente no lineales como los modelos de Hodgkin–Huxley e Hindmarsh–Rose, no pueden ser incluidos en el estudio, ya que la dinámica medible no es afín en los estados no medibles.

**Propiedad 2.4.2** *El número de estados desconocidos es igual al número de estados medibles, esto es,  $n_v = n_z$ , con  $P(\mathbf{z}, t) = P^\top(\mathbf{z}, t) > 0 \quad \forall t \geq 0$ .*

De forma similar a la propiedad anterior, una amplia variedad de neuro-osciladores son sistemas de dos dimensiones, ya que las únicas variables que se consideran son la diferencia de potencial en la membrana de la neurona así como otro estado que representa las corrientes de activación que cruzan a través de ella. Por consiguiente, la dinámica en (2.16) puede redefinirse como

$$\dot{\mathbf{z}} = P(\mathbf{z}, t)\mathbf{v} + g(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (2.17a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (2.17b)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{z}) = \mathbf{z}. \quad (2.17c)$$

Con base en todo lo anterior, los osciladores de Morris–Lecar y FitzHugh–Nagumo poseen todas las propiedades definidas anteriormente, quedando incluidos en la clase de osciladores a quienes se dirige el diseño de observadores propuesto en este trabajo. Ahora bien, con el fin de ejemplificar la metodología de diseño a desarrollar en el siguiente apartado, se introduce la

dinámica del conocido oscilador de van der Pol, dada por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= v, & z(t_0) &= z_0, \\ \dot{v} &= -(z^2 - 1)v + \phi(z, t), & v(t_0) &= v_0 \\ y &= z\end{aligned}\tag{2.18}$$

que ha sido también ampliamente utilizado en el estudio del comportamiento neuronal así como en la creación de modelos descriptivos de EEG basados en redes de osciladores de este tipo [8]. De esta manera, es fácil identificar que el oscilador de van der Pol también se encuentra dentro de la clase de osciladores con el mismo número de estados medibles como no medibles, donde  $v$  entra de forma lineal en la dinámica de  $z$ . Así, el valor de la matriz  $P$  está dado por  $P(z, t) = 1$  y, a su vez, la función  $g$  es de la forma  $g(z, u) = 0$ .

# Capítulo 3

## Diseño de Observadores

En este capítulo se utiliza la teoría de contracción para diseñar un conjunto de observadores para neuro-osciladores de la forma (2.17), es decir,

$$\dot{\mathbf{z}} = P(\mathbf{z}, t)\mathbf{v} + g(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (3.1a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{z}) = \mathbf{z}. \quad (3.1c)$$

Con fines de análisis, primero se introduce una versión simple del observador que permita asegurar la convergencia exponencial de las trayectorias estimadas hacia la dinámica objetivo. Finalmente, se sustituyen las variables intermedias por funciones de las señales medibles, resultando en la versión implementable del observador.

### 3.1. Observador de Orden Reducido

Considere el siguiente sistema auxiliar

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t) + K_v(\mathbf{z}, t)(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}), \quad \hat{\mathbf{v}}(t_0) = \hat{\mathbf{v}}_0, \quad (3.2a)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{v}} \quad (3.2b)$$

que representa un observador de orden reducido para el sistema (3.1), con  $K_v(\mathbf{z}, t) \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$  como la ganancia de estimación. Al elegir un valor adecuado para  $K_v$  tal que

$$\mathbf{J}_s = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} - K_v(\mathbf{z}, t) \right]_s \leq -\lambda \mathbf{I} \quad (3.3)$$

permite verificar la propiedad de contracción sobre (3.2), donde  $[\cdot]_s$  representa la parte simétrica de  $\mathbf{J}$ . Además, no es difícil verificar que (3.2a) contiene a  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  como una solución particular. Por lo tanto, (3.1b) es parcialmente contrayente respecto a (3.2a). De esta forma, por los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2, las trayectorias de los estados estimados del observador de orden reducido convergen de forma exponencial a las trayectorias de la dinámica no medible en ambientes libres de ruido.

Ahora bien, la presencia del término  $\mathbf{v}$  en (3.2a) impide la implementación directa de este observador. Para solucionar este inconveniente, en primer lugar se elige la ganancia  $K_v$  como  $K_v(\mathbf{z}, t) = KP(\mathbf{z}, t)$  con  $K = K^\top > 0$ , lo cual transforma (3.2a) en

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t) - KP(\mathbf{z}, t)\hat{\mathbf{v}} + KP(\mathbf{z}, t)\mathbf{v}, \quad (3.4)$$

Con base en la **Propiedad** 2.4.1, el término  $P(\mathbf{z}, t)\mathbf{v}$  se reemplaza por su valor en (3.1a), es decir,  $P(\mathbf{z}, t)\mathbf{v} = \dot{\mathbf{z}} - g(\mathbf{z}, \mathbf{u})$ , obteniendo

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t) - KP(\mathbf{z}, t)\hat{\mathbf{v}} + K\dot{\mathbf{z}} - Kg(\mathbf{z}, \mathbf{u}). \quad (3.5)$$

Al escribir ambas derivadas en el lado izquierdo de la ecuación, resulta

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(\hat{\mathbf{v}} - K\mathbf{z})}_{\bar{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t) - Kg(\mathbf{z}, \mathbf{u}) - KP(\mathbf{z}, t)\hat{\mathbf{v}},$$

donde la variable intermedia  $\bar{\mathbf{v}} \triangleq \hat{\mathbf{v}} - K\mathbf{z}$  recupera de forma indirecta el valor del estimado  $\hat{\mathbf{v}}$ . Con todo lo anterior, la versión final del observador de orden reducido se expresa como

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t) - K[g(\mathbf{z}, \mathbf{u}) + P(\mathbf{z}, t)\hat{\mathbf{v}}], \quad \bar{\mathbf{v}}(t_0) = \bar{\mathbf{v}}_0, \quad (3.6a)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} + K\mathbf{z}, \quad (3.6b)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{v}}. \quad (3.6c)$$

Así, por ejemplo, el observador de orden reducido para el oscilador de van der Pol es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{v}} &= -(z^2 - 1)\hat{v} + \phi(z, t) - K\hat{v}, \quad \bar{v}(t_0) = \bar{v}_0, \\ \hat{v} &= \bar{v} + Kz, \\ \hat{y} &= \hat{v}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Como comentario final, puede apreciarse en (3.6b), que el cálculo del estimado  $\mathbf{v}$  es directamente proporcional al valor del estado medible  $\mathbf{z}$ . Por lo tanto, puede ocurrir una reconstrucción errónea del estado  $\hat{\mathbf{v}}$ , si el vector de estados medibles está contaminado con ruido de baja intensidad, problema que se aborda en el siguiente apartado diseñando un observador de orden completo.

## 3.2. Observador de Orden Completo

Considerando el siguiente observador de orden completo para el sistema (2.17)

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = P(\mathbf{z}, t)\hat{\mathbf{v}} + g(\mathbf{z}, \mathbf{u}) + K_z(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}), \quad \hat{\mathbf{z}}(t_0) = \hat{\mathbf{z}}_0,\tag{3.8a}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t) + K_v(\mathbf{z}, t)(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) + P^\top(\mathbf{z}, t)(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}), \quad \hat{\mathbf{v}}(t_0) = \hat{\mathbf{v}}_0,\tag{3.8b}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_i \\ \hat{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix},\tag{3.8c}$$

con  $K_z = K_z^\top \geq K_0$ . Éste posee la misma estructura que su antecesor de orden reducido más la introducción de un término de corrección relacionado con el vector de estados medibles  $\mathbf{z}$ . Así,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^\top & \mathbf{v}^\top \end{bmatrix}^\top$  y  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}^\top & \hat{\mathbf{v}}^\top \end{bmatrix}^\top$  son los vectores de estados real y estimados asociados. Por otro lado, el sistema (3.1) es parcialmente contrayente con respecto a (3.8), ya que se verifica la solución particular  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$  y al calcular la matriz Jacobiana de (3.8) se obtiene

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -K_z & P(\mathbf{z}, t) \\ -P^\top(\mathbf{z}, t) & \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} - K_v(\mathbf{z}, t) \end{bmatrix},\tag{3.9}$$

cuya parte simétrica tiene la forma

$$\mathbf{J}_s = \text{diag}(-K_z, \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} - K_v(\mathbf{z}, t) \right]_s) \leq -\lambda \mathbf{I}, \quad (3.10)$$

con  $\lambda = \min(K_z, K)$ . Como puede apreciarse, el término  $P^\top(\mathbf{z}, t)(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})$  en (3.8b) facilita el cálculo de la parte simétrica del Jacobiano al mismo tiempo que incluye un término de corrección en el cálculo de los estimados para la parte no medible. Por lo tanto, si existe  $K_v(\mathbf{z}, t)$ , con base en los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 se concluye nuevamente que (3.8) converge de forma exponencial con velocidad de contracción  $\lambda$  a las trayectorias de la dinámica objetivo (3.1). Mediante un proceso similar al desarrollado en el caso del observador de orden reducido, la versión implementable del observador de orden completo se expresa como

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = P(\mathbf{z}, t)\hat{\mathbf{v}} + g(\mathbf{z}, \mathbf{u}) + K_z(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}), \quad \hat{\mathbf{z}}(t_0) = \hat{\mathbf{z}}_0, \quad (3.11a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}, t) - K[g(\mathbf{z}, \mathbf{u}) + P(\mathbf{z}, t)\hat{\mathbf{v}}] + P^\top(\mathbf{z}, t)(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}), \quad \hat{\mathbf{v}}(t_0) = \hat{\mathbf{v}}_0, \quad (3.11b)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} + K\mathbf{z}, \quad (3.11c)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \bar{\mathbf{v}} + K\hat{\mathbf{z}}, \quad (3.11d)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}, \quad (3.11e)$$

donde la variable  $\boldsymbol{\psi}$  se toma como parte de la salida del observador, con el fin de reducir el impacto del ruido presente en el vector  $\mathbf{z}$  al sustituir éste por su análogo de estimados  $\hat{\mathbf{z}}$  sin alterar el modelo interno del observador, evitando así, un cambio en el análisis planteado con anterioridad al proteger la propiedad de contracción. Bajo este esquema, el observador de orden completo para el oscilador de van der Pol está descrito por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \hat{v} + K_y(z - \hat{z}), \quad \hat{z}(t_0) = \hat{z}_0, \\ \dot{\hat{v}} &= -(z^2 - 1)\hat{v} + \phi(z, t) - K\hat{v} + (z - \hat{z}), \quad \hat{v}(t_0) = \hat{v}_0, \\ \hat{v} &= \bar{v} + Kz, \\ \boldsymbol{\psi} &= \bar{\mathbf{v}} + K\hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.3. Sincronización de Observadores

Utilizando la idea de la sincronización [5] junto con los resultados expuestos en [24] y [25], así como su uso para el diseño de observadores en [26] para sistemas de la forma (2.13), se propone el siguiente conjunto de observadores sincronizados

$$d\hat{\mathbf{z}}_i = [P(\mathbf{z}_i, t)\hat{\mathbf{v}}_i + g(\mathbf{z}_i, \mathbf{u}) + K_z(\mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i) + K_s \sum_j (\hat{\mathbf{z}}_j - \hat{\mathbf{z}}_i)]dt, \quad K_s > 0, \quad (3.13a)$$

$$d\bar{\mathbf{v}}_i = [\mathbf{f}_2(\mathbf{z}_i, \hat{\mathbf{v}}_i, \mathbf{u}, t) - K[g(\mathbf{z}_i, \mathbf{u}) + P(\mathbf{z}_i, t)\hat{\mathbf{v}}_i] + P^\top(\mathbf{z}_i, t)(\mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i) + K_s \sum_j (\hat{\mathbf{v}}_j - \hat{\mathbf{v}}_i)]dt, \quad (3.13b)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}}_i + K\mathbf{z}_i, \quad (3.13c)$$

$$\psi_i = \bar{\mathbf{v}}_i + K\hat{\mathbf{z}}_i, \quad (3.13d)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_i \\ \psi_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.13e)$$

Como puede apreciarse, la dinámica de cada observador desacoplado corresponde al esquema de orden completo desarrollado en la sección anterior, siendo ésta contrayente. Además, con  $K_s(\mathbf{x}_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  como las entradas para el  $i$ -ésimo elemento y con  $K_s > 0$ , se cumplen las condiciones del Teorema 2.3.1, asegurando la sincronización de los  $N$  sistemas sin importar las condiciones iniciales. Aun más, para cada miembro de la red se verifica la solución particular  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ . En consecuencia, las trayectorias del sistema sincronizado convergen de forma exponencial a la dinámica objetivo en ambientes libres de ruido.

# Capítulo 4

## Simulaciones y resultados

Con el propósito de ejemplificar el comportamiento y desempeño de los diferentes observadores desarrollados en el capítulo anterior, en presencia y ausencia de ruido, se presentan simulaciones sobre dos distintos osciladores. El primero corresponde al antes mencionado oscilador de van der Pol, y el segundo está relacionado con el modelo neuronal FitzHugh–Nagumo.

### 4.1. Oscilador de van der Pol

De acuerdo a la dinámica del oscilador de van der Pol (2.18) junto con metodología de diseño aquí planteada, fueron obtenidos los observadores de orden reducido y completo por las ecuaciones (3.7) y (3.12), respectivamente. Para construir la red de estimadores acoplados para este oscilador, se toma en cuenta la estructura del  $i$ -ésimo observador de orden completo expresada por (3.13), que es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_i &= \hat{v}_i + K_z(z_i - \hat{z}_i) + K_s \sum_j (\hat{z}_j - \hat{z}_i), \quad \hat{z}_i(t_0) = \hat{z}_{i0}, \\ \dot{\hat{v}}_i &= -(z_i^2 - 1)\hat{v}_i + \phi(z_i, t) - K\hat{v}_i + (z_i - \hat{z}_i) + K_s \sum_j (\hat{v}_j - \hat{v}_i), \quad \hat{v}_i(t_0) = \hat{v}_{i0}, \\ \hat{v}_i &= \bar{v}_i + Kz_i, \\ \psi_i &= \bar{v}_i + K\hat{z}_i, \\ \hat{y}_i &= \begin{bmatrix} \hat{z}_i \\ \psi_i \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

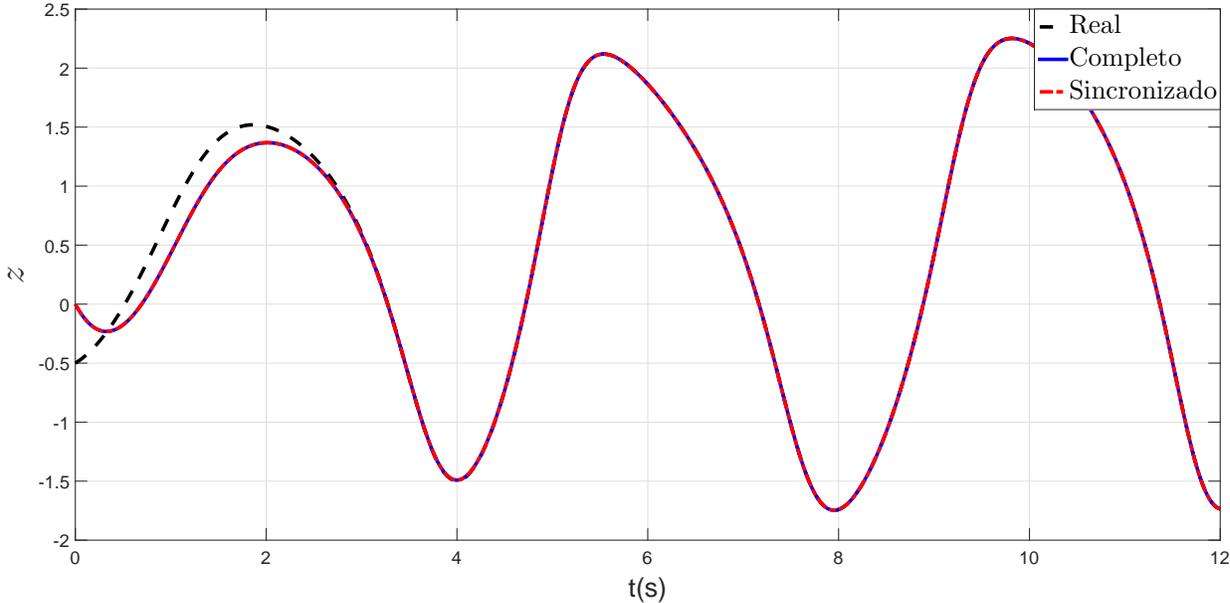
Los parámetros de la planta fueron asignados como sigue: la función  $\phi$  se eligió de la forma  $\phi(z, t) = -3z + \frac{t}{t+1} z^2 + z \sin(t)$ . Así mismo, las condiciones iniciales de la dinámica objetivo se fijaron como  $v(0) = 0.5$  y  $z(0) = -0.5$ . Por su parte, las condiciones iniciales de los observadores se establecieron idénticamente igual a cero, emulando que se desconoce un estado determinado de la dinámica no medible. Además, las ganancias de observación y sincronización tienen los valores  $K = 10$ ,  $K_z = 15$  y  $K_s = 10$ . Finalmente, un conjunto de cincuenta observadores ( $N = 50$ ) forma la red de sincronización, cuya salida está definida por el valor promedio de todos los elementos acoplados, esto es  $\bar{\psi} = \frac{1}{N} \sum_i \psi_i$ . La elección de este número de observadores se discutirá más adelante.

Con todo lo anterior, en la Figura 4.1 se muestra el comportamiento de los distintos observadores bajo condiciones ideales. En ella se aprecia que, en ausencia de ruido, cada uno de los estimadores converge de forma exponencial a una sola trayectoria, correspondiente a la dinámica de la planta.

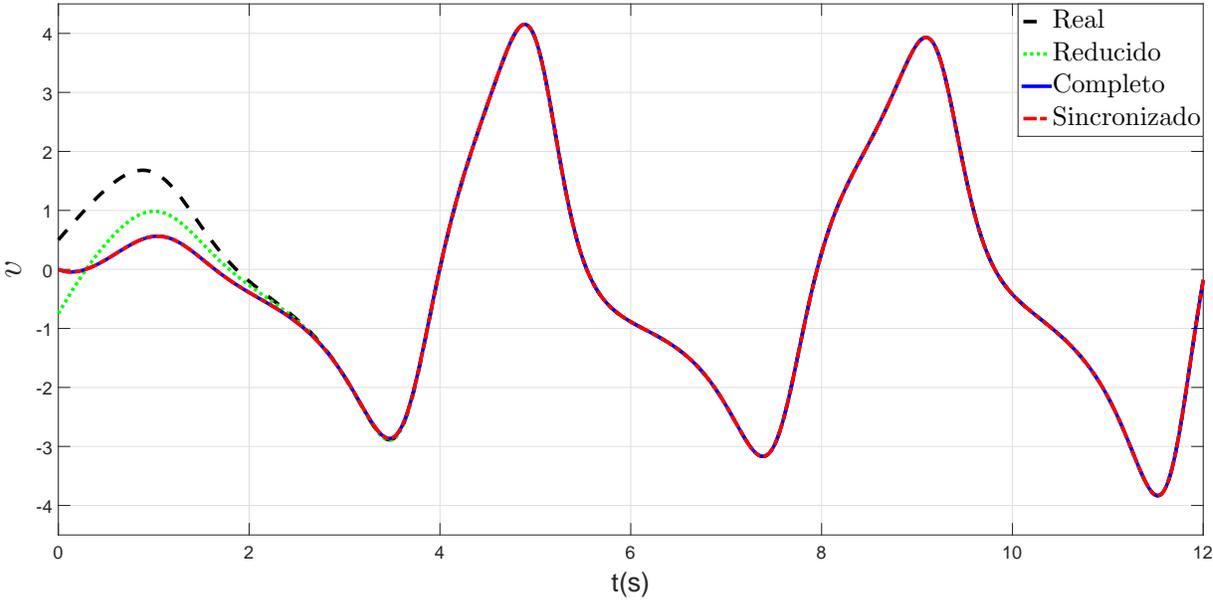
Por otro lado, se inyectó ruido blanco a cada una de las  $N$  salidas de la planta para simular condiciones de operación real. Los parámetros de desviación estándar  $\sigma$  y media  $\mu$ , que definen un proceso de tipo Gaussiano, se eligieron como  $\sigma = 0.2$  y  $\mu = 0$ , que representen un alto contenido de ruido sin agregar un sesgo a la señal original. Bajo estas condiciones, la Figura 4.2 ilustra la evolución de las trayectorias para el estado  $z$  y sus estimados. Como puede apreciarse, la implementación del observador de orden completo funciona a manera de filtro, atenuando drásticamente la intensidad de ruido en la señal de salida. A su vez, la reducción del ruido es aún más evidente para el caso de la red de estimadores sincronizados. Esta mejora puede apreciarse en la vista de detalle para el tiempo  $t = 5$  segundos. Aquí, la sincronización de observadores ofrece una trayectoria más suave respecto al uso de un único observador, recobrando de manera fiel la dinámica objetivo libre ruido.

De forma similar, en la Figura 4.3 se presentan las trayectorias de los estimados  $\hat{v}$ . En contraste con el caso ideal, el observador de orden reducido exhibe un pobre desempeño al amplificar de forma considerable el ruido, principalmente a través del término  $K z$ . Por su parte, el observador de orden completo logra mejorar de forma sustancial el valor del estimado  $\hat{v}$  al intercambiar en la ecuación de salida el valor del estimado  $\hat{z}$  en lugar de la señal ruidosa  $z$ . A su vez, la mejor atenuación del ruido y realce de mayor calidad fueron logrados a partir del conjunto de estimadores sincronizados, ya que, como se muestra en el detalle para  $t = 5$  segundos, la trayectoria estimada exhibe un comportamiento similar a la trayectoria libre de ruido.

Ahora bien, para cuantificar la mejoría en estimación entre los diferentes observadores y

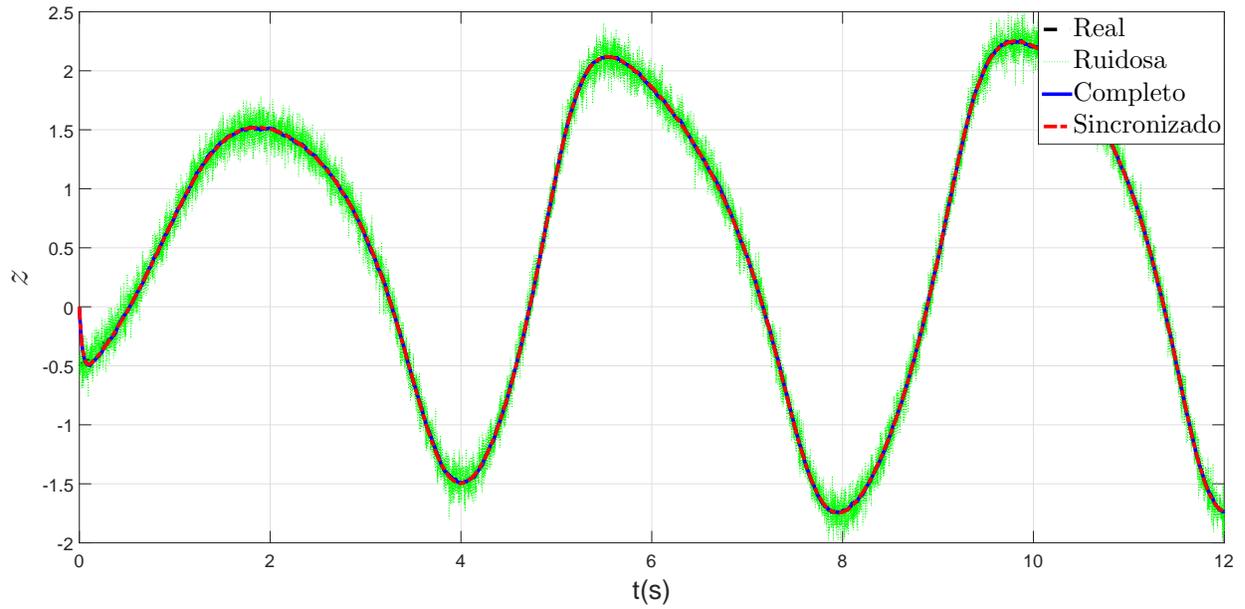


(a) Estimados  $z$

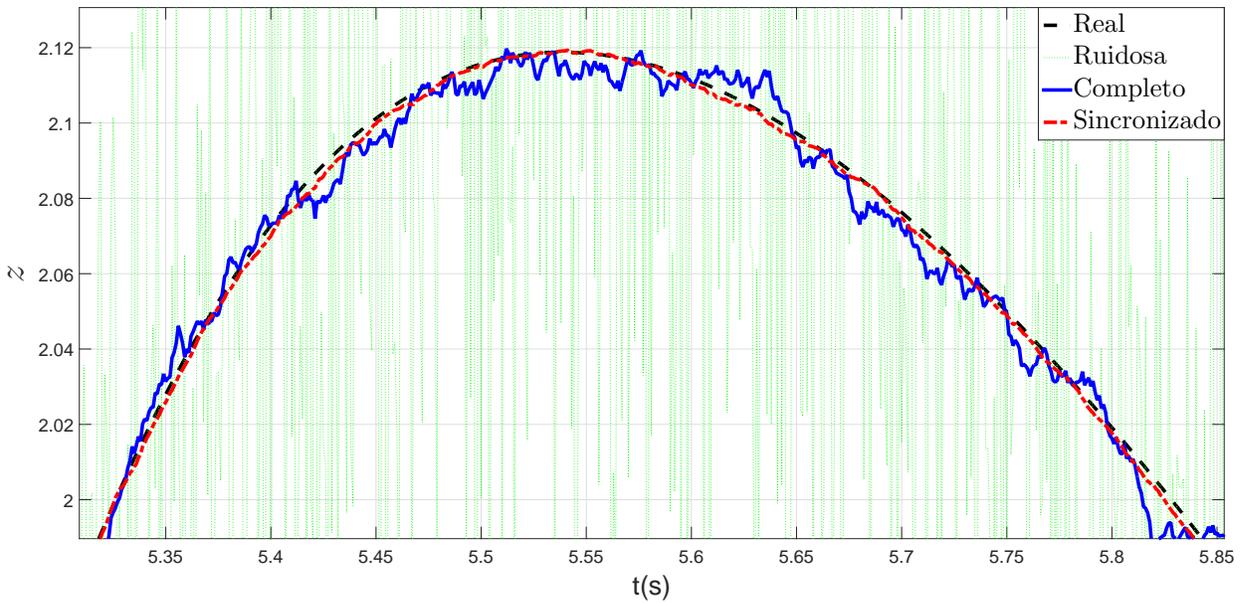


(b) Estimados  $v$

Figura 4.1: Estados estimados en ausencia de ruido, oscilador de van der Pol.

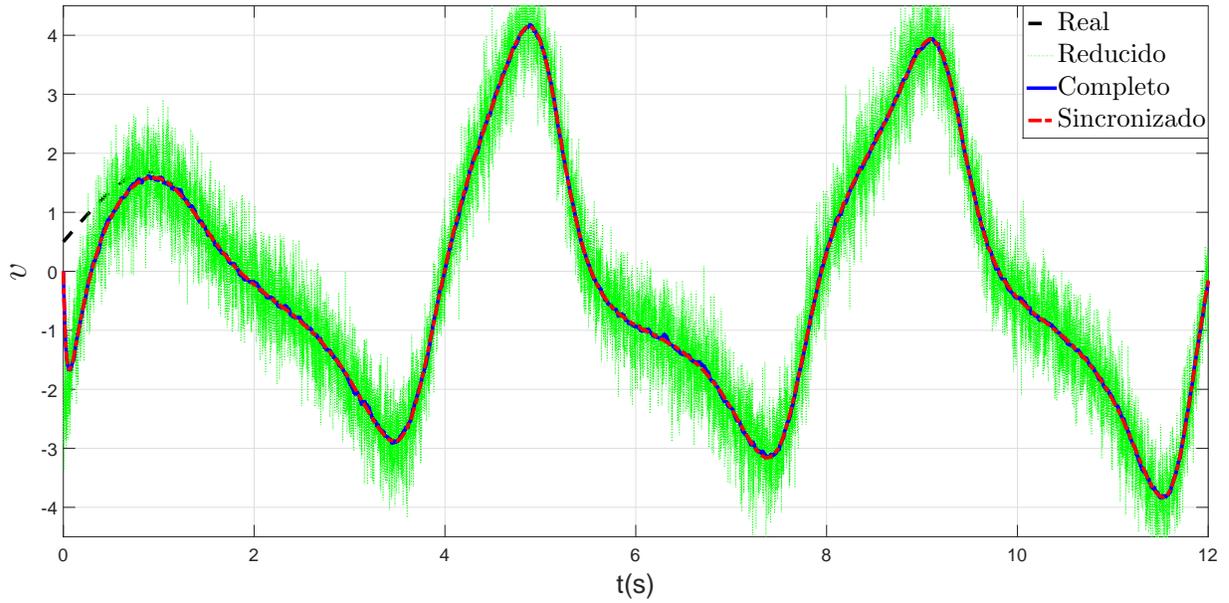


(a) Respuesta completa

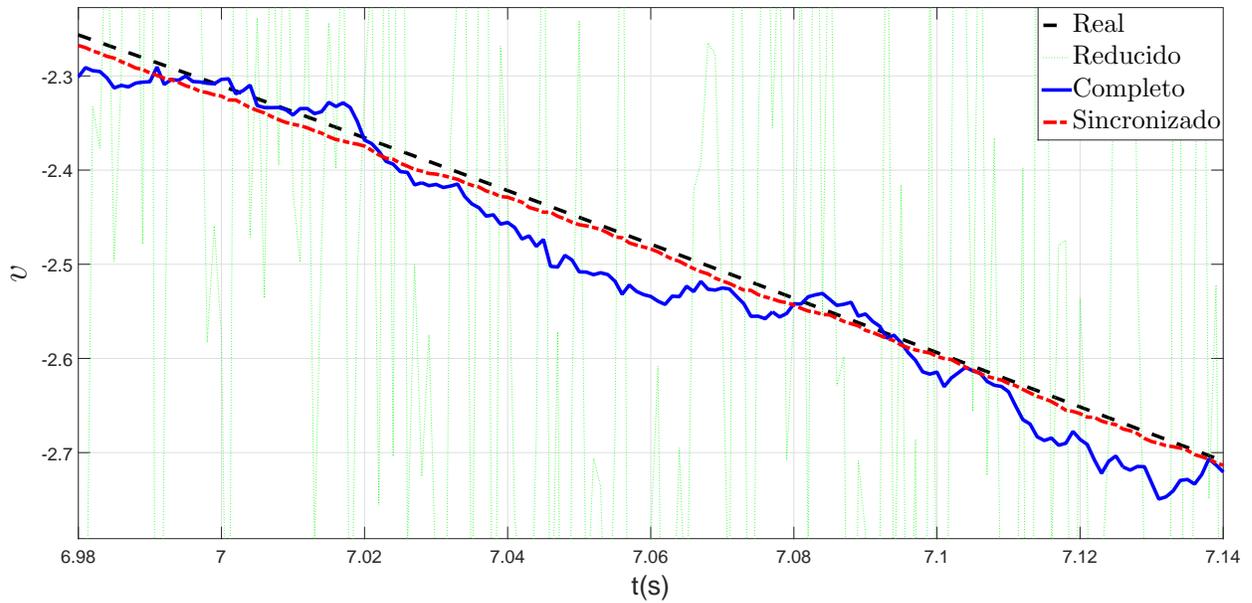


(b) Detalle en  $t=5$  segundos

Figura 4.2: Estimado  $\hat{z}$  en presencia de ruido a la salida, caso van der Pol. (Negra–discontinua) señal original, (verde–punteada) señal contaminada con ruido, (azul–sólida) orden completo, (rojo–discontinua–punteada) grupo de observadores sincronizados.



(a) Respuesta completa



(b) Detalle en  $t=2$  segundos

Figura 4.3: Estimado  $\hat{v}$  en presencia de ruido a la salida, caso van der Pol. (Negra-discontinua) señal original, (verde-punteada) orden reducido, (azul-sólida) orden completo, (rojo-discontinua-punteada) grupo de observadores sincronizados.

realizar un análisis comparativo entre éstos, se calculó el valor cuadrático medio

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^T \| f(t) \|^2 dt}. \quad (4.2)$$

con  $f(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . La reducción en la magnitud de este índice implica que la distancia entre ambas trayectorias, libre de ruido y la estimada, es más pequeña, concluyendo una mejor atenuación de ruido. Para llevar a cabo la comparación en condiciones similares, en todos los casos se eligió el tiempo inicial  $t_0 = 10$  segundos, efectuado el cómputo del índice de desempeño en estado estacionario con  $T = 6.5(\text{sec})$ . La Tabla 4.1 contiene los valores de estos índices.

Para el caso del observador de orden reducido, el orden de magnitud del índice es considerablemente grande con respecto a cualquier otro observador, lo que coincide con la deficiente estimación presentada en la Figura 4.2. En cambio, la red de observadores sincronizados redujo en un orden de magnitud la estimación respecto al uso de un único elemento. Con lo anterior, se puede constatar que la técnica de sincronización permite no sólo proteger o blindar a un sistema dinámico del ruido intrínseco así como ruido externo, sino también reconstruir de manera fiel las trayectorias reales de los estados tanto medibles como no medibles.

Tabla 4.1: Valores RMS para  $t \in [10 - 25](\text{sec})$  con desviación estándar  $\sigma = 0.2$ .

Señal	Reducido	Completo	Sincronizado $N = 50$
$z - \hat{z}$	—	0.0011	0.00006
$v - \hat{v}$	23.8747	0.1680	0.074

## 4.2. Oscilador FitzHugh–Nagumo

Una representación simplificada de un modelo de activación de neurona es el sistema no lineal FitzHugh–Nagumo (FN), cuya dinámica está gobernada según

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -\frac{1}{3}z^3 + z + v + u(t), \quad z(t_0) = z_0, \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\theta_1}(z - \theta_2 + \theta_3 v), \quad v(t_0) = v_0, \\ y &= z,\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$  son parámetros constantes,  $z$  representa el potencial en la membrana y  $v$  está relacionada con las corrientes de ionización a través de la neurona [29]. Dependiendo del valor que tome la entrada  $u(t)$ , la neurona se encontrará en un estado activo ( $u(t) \geq 0.5$ ) o de relajación ( $u(t) < 0.5$ ), siendo el primero caso el comportamiento de interés en este trabajo.

En lo que se refiere al modelo FN, fácilmente se puede verificar que la función  $g$  y la matriz  $P$  son de la forma  $g(z, t) = -\frac{1}{3}z^3 + z + u$  y  $P(z, t) = 1$ . Utilizando esta información junto con la ecuación (3.6), el observador de orden reducido está expresado como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{v}} &= -\frac{1}{\theta_1}(z - \theta_2 + \theta_3 \hat{v}) - K(\hat{v} - \frac{1}{3}z^3 + z + u), \quad \bar{v}(t_0) = \bar{v}_0, \\ \hat{v} &= \bar{v} + Kz, \\ \hat{y} &= \hat{v},\end{aligned}\tag{4.4}$$

y de forma similar, el observador de orden completo según (3.11) tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= -\frac{1}{3}\hat{z}^3 + z + \hat{v} + u + K_z(z - \hat{z}), \quad \hat{z}(t_0) = \hat{z}_0, \\ \dot{\hat{v}} &= -\frac{1}{\theta_1}(z - \theta_2 + \theta_3 \hat{v}) - K(\hat{v} - \frac{1}{3}\hat{z}^3 + z + u) + (z - \hat{z}), \quad \bar{v}(t_0) = \bar{v}_0, \\ \hat{v} &= \bar{v} + Kz, \\ \psi &= \bar{v} + K\hat{z}, \\ \hat{y} &= \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \psi \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Finalmente, se presenta a continuación la dinámica del  $i$ -ésimo observador de orden completo

bajo sincronización

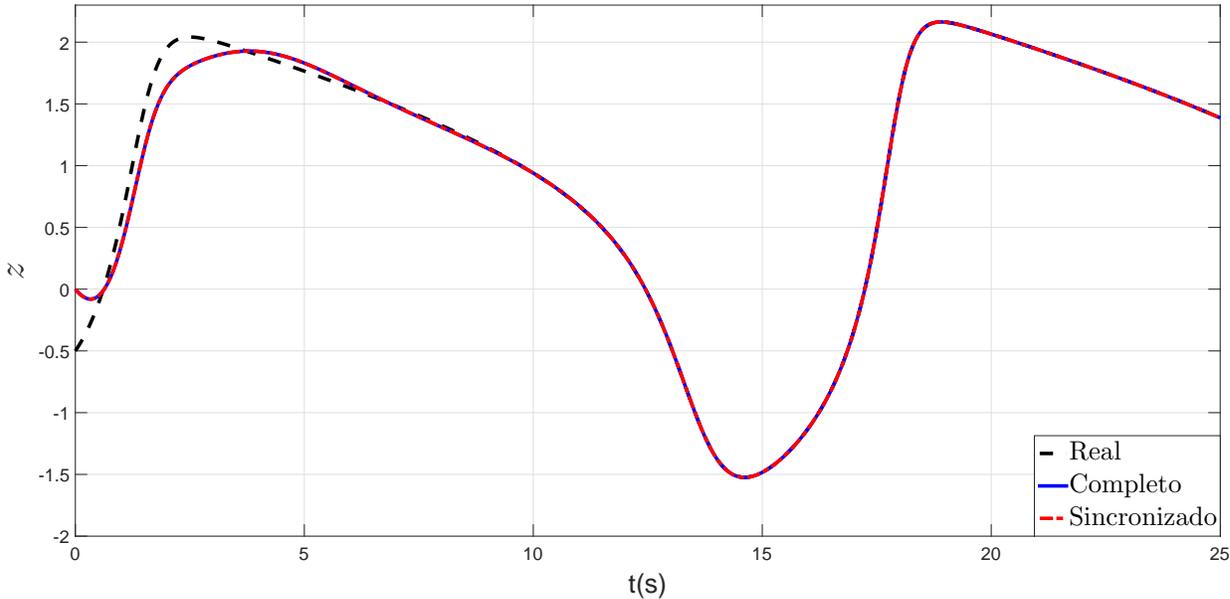
$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_i &= -\frac{1}{3}z_i^3 + z_i + \hat{v}_i + u + K_z(z_i - \hat{z}_i) + K_s \sum_j (\hat{z}_j - \hat{z}_i), \\
\dot{\hat{v}}_i &= -\frac{1}{\theta_1}(z_i - \theta_2 + \theta_3 \hat{v}_i) - K(\hat{v}_i - \frac{1}{3}z_i^3 + z_i + u) + (z_i - \hat{z}_i) + K_s \sum_j (\hat{v}_j - \hat{v}_i), \\
\hat{v}_i &= \bar{v}_i + K z_i, \\
\psi_i &= \bar{v}_i + K \hat{z}_i, \\
\hat{y}_i &= \begin{bmatrix} \hat{z}_i \\ \psi_i \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Los parámetros constantes del modelo FN se seleccionaron como  $\theta_1 = 3.5$ ,  $\theta_2 = 0.7$ ,  $\theta_3 = 0.1$  y  $u = 0.5$ , los cuales coinciden con valores típicos encontrados en la literatura [6,24]. De forma análoga al caso del oscilador de van der Pol, las condiciones iniciales de la planta y observadores, los parámetros estructurales del ruido blanco, las ganancias de observación y sincronización así como el número de elementos sincronizados conservan el mismo valor. Dicho lo anterior, la Figura 4.4 presenta el comportamiento de los observadores con el vector de estados medibles libre de ruido. Nuevamente se comprueba la convergencia exponencial de cada una de las trayectorias de los observadores a la dinámica objetivo, gracias a la propiedad de contracción.

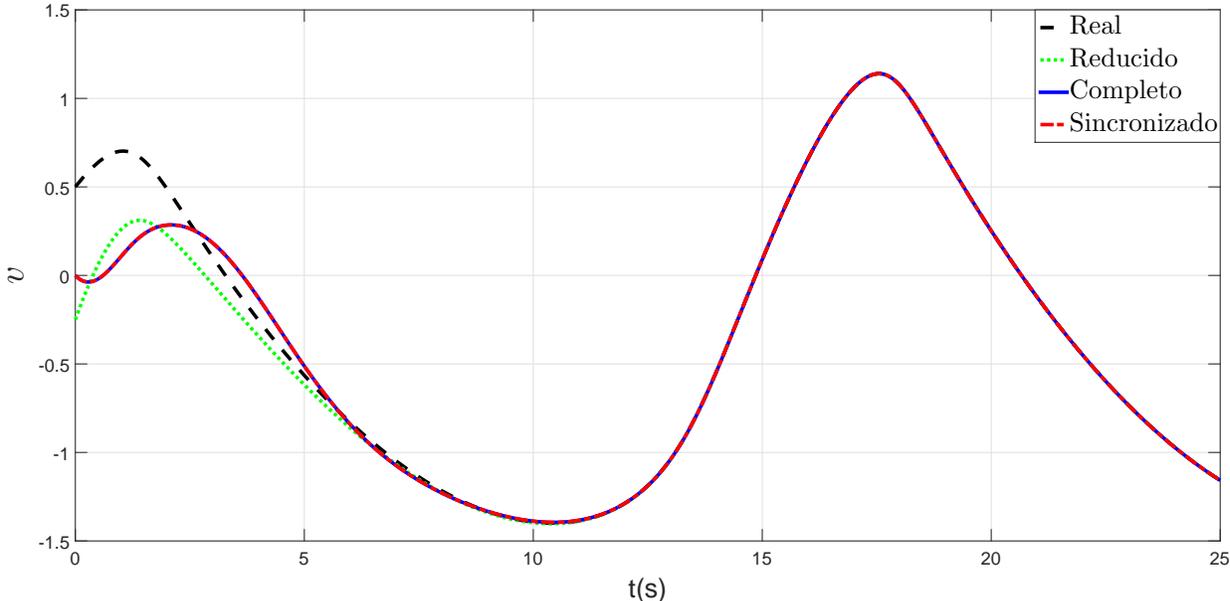
Cuando las mediciones están contaminadas con ruido fuerte, el observador de orden completo permite recobrar un estimado cercano a la trayectoria original pero con cierto nivel de ruido, tal y como se muestra en la Figura 4.5. A primera vista, una situación similar se presenta para el conjunto de observadores sincronizados. Sin embargo, el detalle para  $t = 12$  segundos resalta una atenuación mayor del ruido en comparación al estimador de orden completo individual.

Ahora bien, la Figura 4.6 muestra el valor de los estimados  $\hat{v}$ . Una vez más, el conjunto de estimadores acoplados exhibe una notable reducción del ruido a diferencia de los diseños de orden completo y reducido, siendo mayor la amplificación para éste último caso. Para reafirmar lo anterior, la reducción de error es cuantificada a través del mismo índice  $f_{\text{rms}}$  con  $T = 15.4$ (sec). Estos valores se resumen en la Tabla 4.2.

Finalmente y como se mencionó en la sección 2.3, la distancia entre cualquier observador del grupo respecto a la trayectoria promedio (2.15) puede hacerse arbitrariamente pequeña cuando  $N \rightarrow \infty$ , [24,26]. Con el propósito de analizar el progreso en la reducción del ruido, fue seleccionado un número diferente de elementos que conforman la red de observadores sincro-

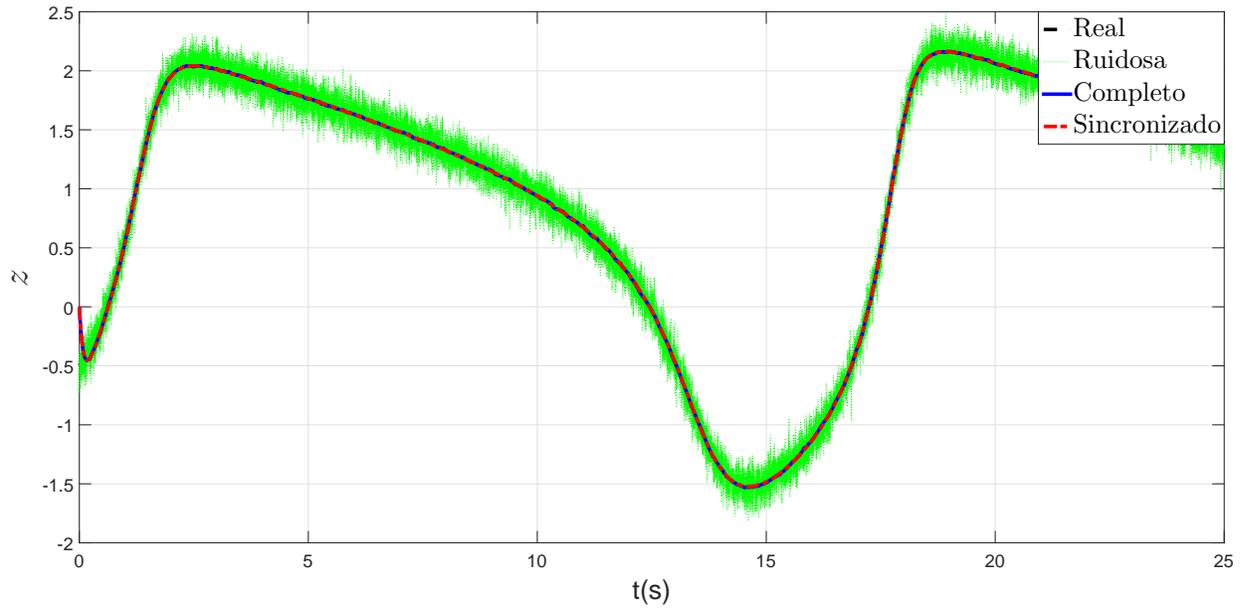


(a) Estimados  $z$

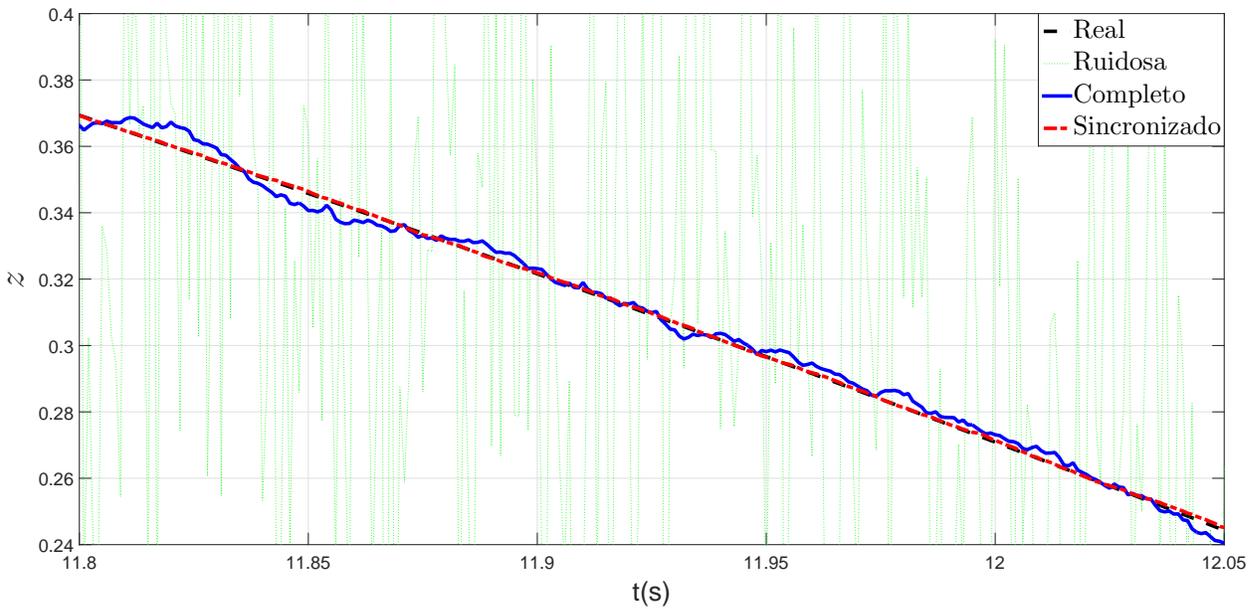


(b) Estimados  $v$

Figura 4.4: Estados estimados en ausencia de ruido, oscilador FN.

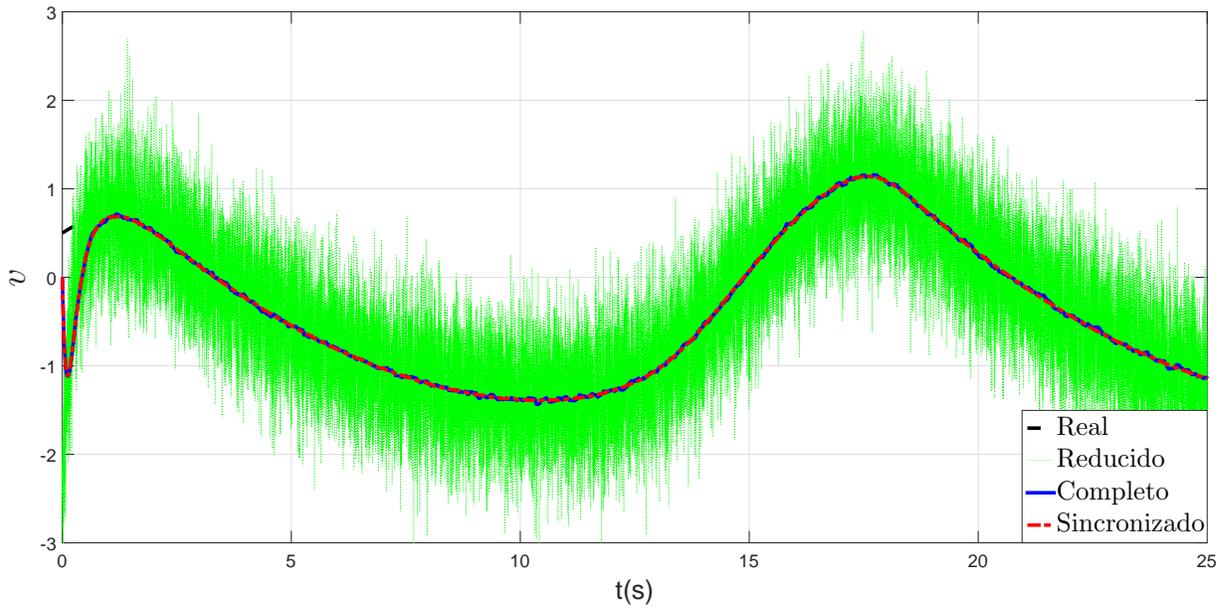


(a) Respuesta completa

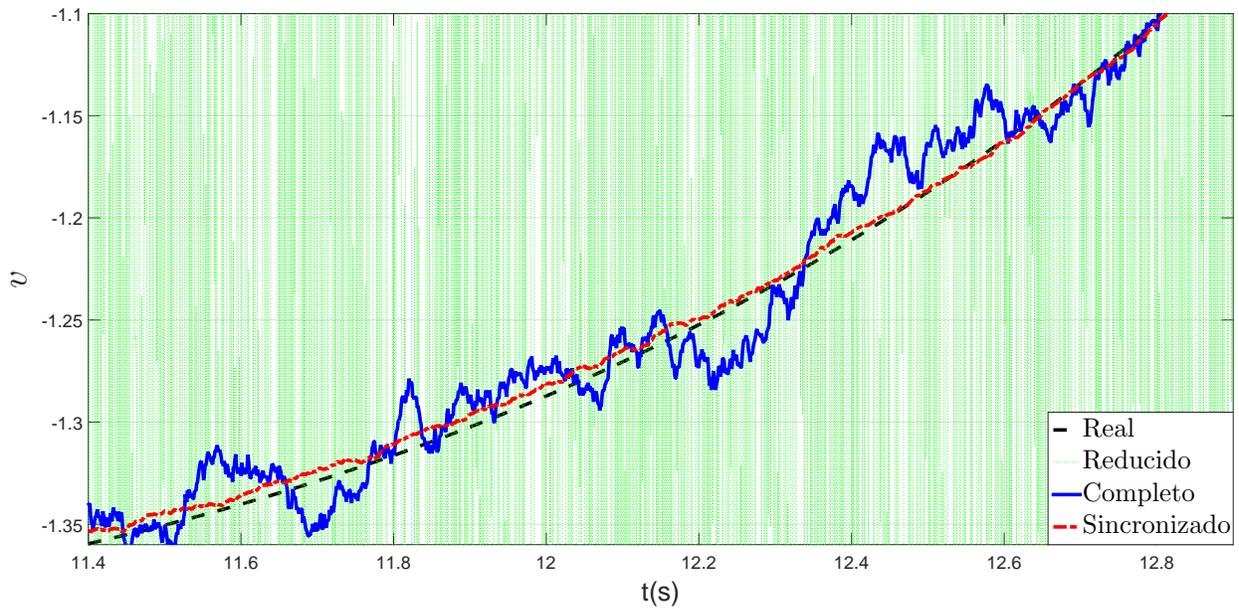


(b) Detalle en  $t=12$  segundos

Figura 4.5: Estimado  $\hat{z}$  en presencia de ruido a la salida, caso FN. (Negra–discontinua) señal original, (verde–punteada) señal contaminada con ruido, (azul–sólida) orden completo, (rojo–discontinua–punteada) grupo de observadores sincronizados.



(a) Respuesta completa



(b) Detalle en  $t=12$  segundos

Figura 4.6: Estimado  $\hat{v}$  en presencia de ruido a la salida, caso FN. (Negra–discontinua) señal original, (verde–punteada) orden reducido, (azul–sólida) orden completo, (rojo–discontinua–punteada) grupo de observadores sincronizados.

Tabla 4.2: Valores RMS para  $t \in [10 - 25](sec)$  con desviación estándar  $\sigma = 0.2$ .

Señal	Reducido	Completo	Sincronizado $N = 50$
$z - \hat{z}$	–	0.0014	0.000037
$v - \hat{v}$	38.4410	0.1577	0.0143

nizados, en el rango  $N = 1 \dots 250$ . Para cada conjunto, se calculó el valor cuadrático medio del error obteniendo las gráficas que se presentan en las Figuras 4.7 y 4.8.

De acuerdo con esta información, el valor del índice de desempeño permanece prácticamente constante a partir de  $N = 50$ . Por consiguiente, se puede establecer un límite en el número de observadores a sincronizar antes de, por ejemplo, llevar a cabo una implementación de éstos sobre una aplicación real, como en el caso de un EEG, ya que una cantidad elevada de observadores por encima de este valor, podría incrementar la carga computacional a la que es sometida el ordenador de forma considerable e innecesaria.

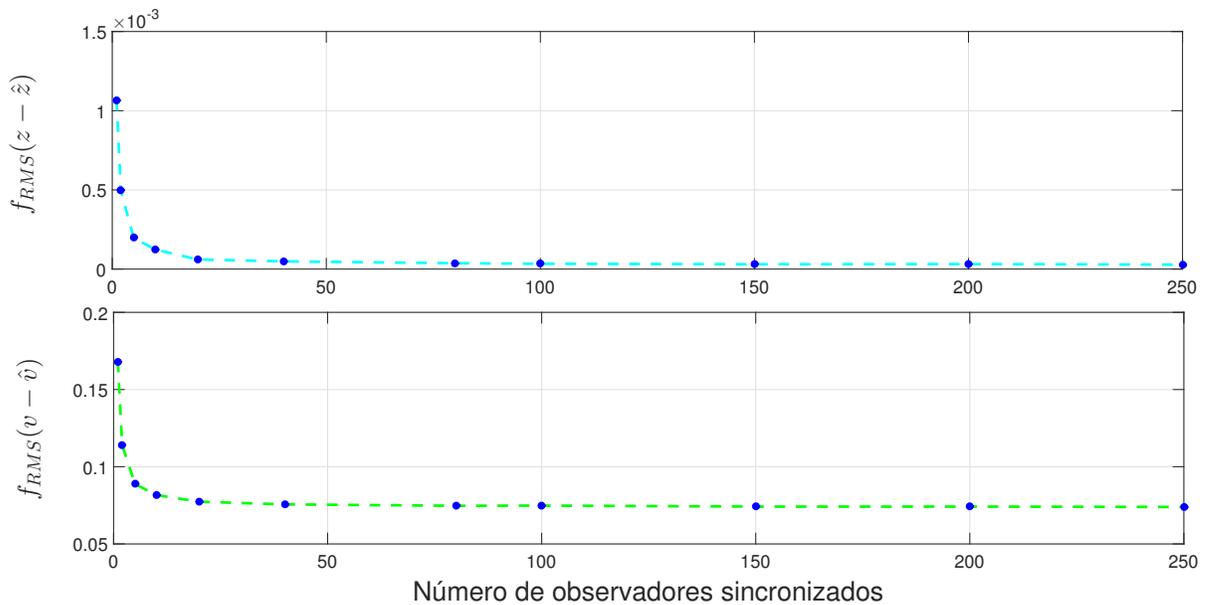


Figura 4.7: Índice RMS del error de estimación ( $z - \hat{z}$ ) (azul) y ( $v - \hat{v}$ ) (verde) para un diferente número de observadores, caso van der Pol.

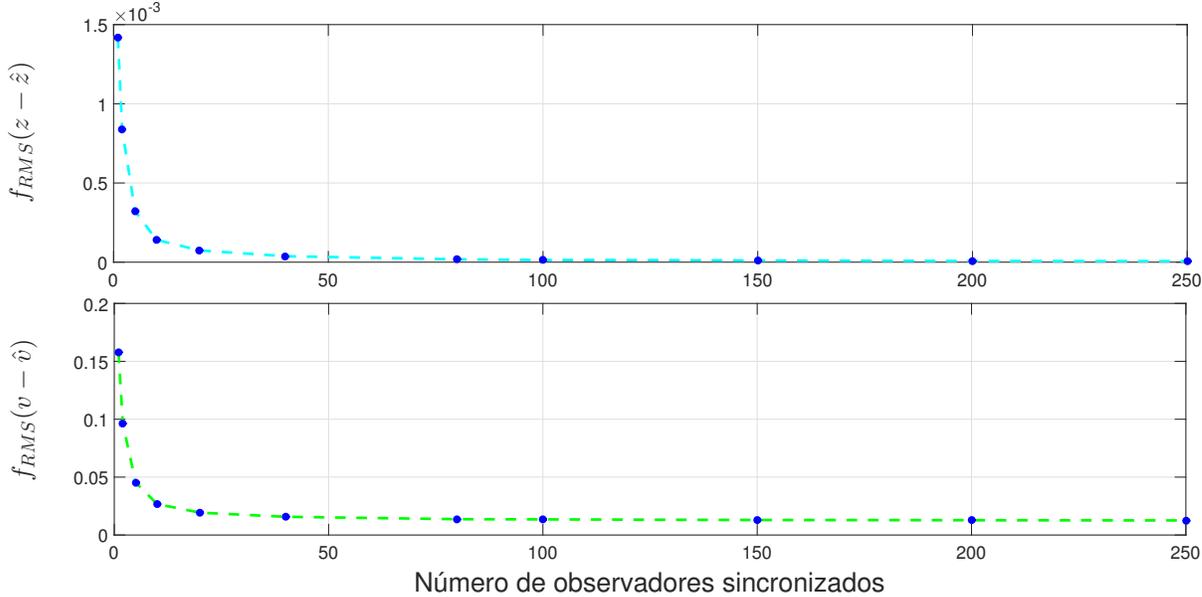


Figura 4.8: Índice RMS del error de estimación  $f_{RMS}(z - \hat{z})$  (azul) y  $f_{RMS}(v - \hat{v})$  (verde) para un diferente número de observadores, caso FN.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo a futuro

Se ha presentado una metodología en el diseño de observadores de estado para neuro-osciladores basada en la teoría de contracción y la técnica de sincronización de sistemas dinámicos con el fin de reducir el efecto del ruido en los estados tanto medibles como no medibles. Se demostró que los observadores de orden reducido y completo verifican las propiedades de contracción y contracción parcial, garantizando que todas las trayectorias convergerán una a otra, olvidando de forma exponencial las condiciones iniciales, incluyendo la dinámica objetivo.

Se comprobó por medio de simulaciones sobre dos osciladores no lineales, que en ambientes libres de ruido, el observador de orden reducido permite reconstruir completamente la trayectorias de las variables no medibles. Para el caso en que las mediciones están contaminadas con ruido de baja intensidad, se ha recurrido a un observador de orden completo, ya que éste no sólo mejora la estimación de los estados no medibles, también ayuda a reducir el efecto del ruido sobre el mismo vector de estados medibles.

No obstante, en presencia de ruido fuerte, un único observador de orden completo no es capaz de recobrar de forma precisa la información del proceso original. Al agregar un término de acoplamiento entre un grupo de observadores, se ha obtenido un mejor desempeño, el cual, se incrementa según el número de elementos interconectados, permitiendo que la red de estimadores recupere un comportamiento bastante similar al de una dinámica libre de ruido.

De esta forma, la sincronización de sistemas dinámicos demostró ser una herramienta poderosa en la búsqueda por proteger a un proceso de los efectos del ruido, que incluye no sólo el caso intrínseco originado por el flujo de información entre los elementos que conforman una red neuronal, sino también el agregado por los instrumentos utilizados para efectuar medicio-

nes. En consecuencia, futuras pruebas en aplicaciones como médicas o biológicas, como es el caso de una Electroencefalograma, deben llevarse acabo con el fin de verificar el desempeño de los observadores bajo condiciones reales.

Finalmente, una extensión más general de la metodología aquí presentada puede llevarse acabo al relajar las distintas restricciones que se asumieron a lo largo del trabajo. Al considerar sistemas donde el número de estados no medibles es diferente al número de mediciones disponibles, permitirá abarcar una familia más grande y compleja de neuro-osciladores, como los modelos Hindmarsh-Rose y Hodgkin-Huxley, etc. Así mismo, la entrada no lineal de los estados no medibles sobre la dinámica de aquellos medibles, ampliaría considerablemente la familia de sistemas sobre la cual puede aplicarse esta metodología, incluyendo sistemas no lineales de tipo mecánico, biológicos, etc. Mas aún, el uso de técnicas de estimación adaptable ayudaría a contemplar incertidumbre en los parámetros del modelo del neuro-oscilador, lo cual es una situación común e inherente en todo proceso neuro-biológico. Éstos y otros temas quedan abiertos a futuras investigaciones en el campo del diseño de observadores y, en general, en el estudio de sistemas no lineales.

# Bibliografía

- [1] W. Freeman, R. Kozma, and P. Werbos, “Biocomplexity: adaptive behavior in complex stochastic dynamical systems,” *Biosystems*, vol. 59, no. 2, pp. 109 – 123, 2001.
- [2] L. Ward, “Synchronous neural oscillations and cognitive processes,” *Trends in Cognitive Sciences*, vol. 7, no. 12, pp. 553 – 559, 2003.
- [3] W. Wang and J.-J. Slotine, “A theoretical study of different leader roles in networks,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 1156–1161, July 2006.
- [4] E. Steur, “On Synchronization of Electromechanical Hindmarsh-Rose Oscillators,” master’s thesis, Eindhoven University of Technology, September 2007.
- [5] W. Wang and J.-J. Slotine, “On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators,” *Biological Cybernetics*, vol. 92, no. 1, pp. 38–53, 2005.
- [6] E. Steur, I. Tyukin, and H. Nijmeijer, “Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 238, no. 21, pp. 2119 – 2128, 2009.
- [7] O. David and K. Friston, “A neural mass model for MEG/EEG: coupling and neuronal dynamics,” *NeuroImage*, vol. 20, no. 3, pp. 1743 – 1755, 2003.
- [8] P. Ghorbanian, S. Ramakrishnan, A. Whitman, and H. Ashrafiuon, “A phenomenological model of EEG based on the dynamics of a stochastic Duffing-van der Pol oscillator network,” *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 15, no. 0, pp. 1 – 10, 2015.
- [9] A. de Paor, “Can control theory throw light on Parkinson’s disease and its treatment with deep brain stimulation?,” in *Signals and Systems Conference (ISSC 2009), IET Irish*, pp. 1–6, June 2009.

- [10] N. Jimenez, Y. Tang, and M. Gonzalez-Olvera, “Identification of first-order hammerstein systems and its application to a simple neural mass model for Parkinson’s disease treatment,” in *Control and Automation (ICCA), 2013 10th IEEE International Conference on*, pp. 1196–1200, June 2013.
- [11] P. Ghorbanian, S. Ramakrishnan, and H. Ashrafiuon, “Stochastic coupled oscillator model of EEG for Alzheimer’s disease,” in *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2014 36th Annual International Conference of the IEEE*, pp. 706–709, Aug 2014.
- [12] M. Maguire and A. Abel, “What changes in neural oscillations can reveal about developmental cognitive neuroscience: Language development as a case in point,” *Developmental Cognitive Neuroscience*, vol. 6, no. 0, pp. 125 – 136, 2013.
- [13] T. Hinterberger, A. Kübler, J. Kaiser, N. Neumann, and N. Birbaumer, “A brain–computer interface (BCI) for the locked-in: comparison of different EEG classifications for the thought translation device,” *Clinical Neurophysiology*, vol. 114, no. 3, pp. 416 – 425, 2003.
- [14] J. Wolpaw, N. Birbaumer, D. McFarland, G. Pfurtscheller, and T. M. Vaughan, “Brain–computer interfaces for communication and control,” *Clinical Neurophysiology*, vol. 113, no. 6, pp. 767 – 791, 2002.
- [15] B. Girard, N. Tabareau, Q. Pham, A. Berthoz, and J.-J. Slotine, “Where neuroscience and dynamic system theory meet autonomous robotics: A contracting basal ganglia model for action selection,” *Neural Networks*, vol. 21, no. 4, pp. 628 – 641, 2008. Robotics and Neuroscience.
- [16] R. Sanfelice and L. Praly, “On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise,” *Automatica*, vol. 47, no. 10, pp. 2165 – 2176, 2011.
- [17] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [18] D. Astolfi and L. Praly, “Output feedback stabilization for SISO nonlinear systems with an observer in the original coordinates,” in *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pp. 5927–5932, Dec 2013.

- [19] R. Marino and P. Tomei, “Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 37, pp. 1239–1245, Aug 1992.
- [20] M. Arcak and P. Kokotović, “Nonlinear observers: A circle criterion design and robustness analysis,” *Automatica*, vol. 37, no. 12, pp. 1923 – 1930, 2001.
- [21] W. Lohmiller and J.-J. Slotine, “On Contraction Analysis for Non-linear Systems,” *Automatica*, vol. 34, no. 6, pp. 683 – 696, 1998.
- [22] W. Lohmiller and J.-J. Slotine, “Applications of contraction analysis,” in *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, vol. 2, pp. 1044–1049 vol.2, Dec 1997.
- [23] W. Lohmiller and J.-J. Slotine, “On metric observers for nonlinear systems,” in *Control Applications, 1996., Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on*, pp. 320–326, Sep 1996.
- [24] N. Tabareau, J.-J. Slotine, and Q.-C. Pham, “How Synchronization Protects from Noise,” *PLoS Comput Biol*, vol. 6, p. e1000637, 01 2010.
- [25] Q.-C. Pham, N. Tabareau, and J.-J. Slotine, “A Contraction Theory Approach to Stochastic Incremental Stability,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, pp. 816–820, April 2009.
- [26] I. Grave and Y. Tang, “A New Observer for Perspective Vision Systems under Noisy Measurements,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 60, pp. 503–508, Feb 2015.
- [27] N. Aghannan and P. Rouchon, “An intrinsic observer for a class of Lagrangian systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 936–945, June 2003.
- [28] H. Nijmeijer and A. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [29] D. Fairhurst, I. Tyukin, H. Nijmeijer, and C. van Leeuwen, “Observers for Canonic Models of Neural Oscillators,” *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 5, pp. 146–184, 1 2010.

- [30] F. Albertini, “State observability in recurrent neural networks,” in *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*, pp. 3706–3707 vol.4, Dec 1993.
- [31] W. Flügge, *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer, 1972.
- [32] J.-J. Slotine and W. Lohmiller, “Modularity, evolution, and the binding problem: A view from stability theory,” *Neural Networks*, vol. 14, no. 2, pp. 137 – 145, 2001.
- [33] I. Manchester and J.-J. Slotine, “Control Contraction Metrics and Universal Stabilizability,” *CoRR*, vol. abs/1311.4625, 2013.
- [34] I. Manchester and J.-J. Slotine, “Transverse contraction criteria for existence, stability, and robustness of a limit cycle,” *Systems and Control Letters*, vol. 63, no. 0, pp. 32 – 38, 2014.
- [35] F. Forni and R. Sepulchre, “A Differential Lyapunov Framework for Contraction Analysis,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 59, pp. 614–628, March 2014.
- [36] A. Pogromsky and H. Nijmeijer, “Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems,” *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 152–162, Feb 2001.
- [37] J. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, “A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 37, pp. 875–880, Jun 1992.
- [38] A. Dani, S.-J. Chung, and S. Hutchinson, “Observer Design for Stochastic Nonlinear Systems via Contraction-Based Incremental Stability,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 60, pp. 700–714, March 2015.
- [39] Q.-C. Pham and J.-J. Slotine, “Stable concurrent synchronization in dynamic system networks,” *Neural Networks*, vol. 20, no. 1, pp. 62 – 77, 2007.