UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DOS NUEVOS TEOREMAS DE SUFICIENCIA EN CÁLCULO DE VARIACIONES

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
CRISTOBAL IVAN MORALES CALLEJAS

DIRECTOR DE LA TESINA
DR. GERARDO SÁNCHEZ LICEA
FACULTAD DE CIENCIAS

MÉXICO, D.F. A 5 DE AGOSTO 2015.

Contenido

1 Introducción. **1**

2 Problema Paramétrico de Cálculo de Variaciones. **1**

3 Problema de Bolza no Paramétrico. **4**

4 Resultados Auxiliares. **5**

5 Demostración del Teorema 1. . . . . **8**

Referencias **20**

1. Introducción.

En este texto presentamos dos nuevos teoremas de condiciones suficientes de segundo orden para mínimos fuertes, un teorema referente a un problema paramétrico y otro referente a un problema de Bolza no paramétrico. En la sección 2 planteamos el problema paramétrico y enunciamos el respectivo teorema de suficiencia, dejando su demostración para la sección 5. En la sección 3 se plantea el problema de Bolza no paramétrico y se enuncia su respectivo teorema de suficiencia, que es una consecuencia casi directa del teorema de suficiencia del problema paramétrico. En la sección 4 se presenta un lema que es de mucha utilidad en la demostración del teorema de suficiencia del problema paramétrico.

El problema paramétrico que analizaremos consiste en minimizar un funcional de la forma

$$I(x_a) := l(a) + \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, \mathrm{d}t.$$

A x_a le llamamos trayectoria, donde x es una función absolutamente continua y $a \in \mathbb{R}^p$. Es importante mencionar que en las hipótesis de los teoremas no se hace uso de la condición reforzada de Legendre, por lo que también aplica para trayectorias *singulares*, es decir, trayectorias x_a donde $\det[L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))] = 0$ para alguna $t \in [t_0, t_1]$.

El método que se usa para la demostración del teorema de suficiencia del problema paramétrico está basado en técnicas que se utilizan en [Licea, 2009, Licea, 2013], que son una generalización de una técnica de [Hestenes, 1966] que tuvo origen en [McShane, 1942]. Una componente importante que cabe destacar acerca de esta técnica es que es autocontenida, en el sentido de que no requiere conceptos clásicos como puntos conjugados, desigualdades de matrices de Ricatti o campos de extremos, más aun, no requiere de argumentos de convexidad local como por ejemplo los presentados en [Bliss, 1968, Clarke and Zeidan, 1986, Loewen, 1990].

2. Problema Paramétrico de Cálculo de Variaciones.

Sea $T := [t_0, t_1]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^p$, al cual llamaremos el *conjunto de parámetros*. Consideremos las siguientes funciones

$$\begin{array}{rcl} l\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} & a \mapsto l(a), & \\ \Psi_i\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n & a \mapsto \Psi_i(a) & (i = 0, 1), \\ L\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} & (t, x, \dot{x}) \mapsto L(t, x, \dot{x}), & \\ \varphi\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k & (t, x, \dot{x}) \mapsto \varphi(t, x, \dot{x}). & \end{array}$$

Asumiremos que las funciones L y φ son de clase C^2 con respecto a x y $\dot{x}$ en $T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, y también que las funciones l y Ψ_i $(i = 0, 1)$ son de clase C^2 en $\mathbb{R}^p$.

Denotaremos por $AC(T; \mathbb{R}^n)$ al conjunto de funciones *absolutamente continuas* en T con valores en $\mathbb{R}^n$, por $AC^2(T; \mathbb{R}^n)$ al conjunto de funciones absolutamente continuas con derivadas cuadrado integrables, es decir,

$$AC^2(T; \mathbb{R}^n) := \left\{ \mathrm{x} \in AC(T; \mathbb{R}^n) \,|\, \dot{\mathrm{x}} \in L^2(T; \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Asimismo, denotaremos por $AC_p(T;\mathbb{R}^n)$ y $AC_p^2(T;\mathbb{R}^n)$ a los conjuntos $AC(T;\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^p$ y $AC^2(T;\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^p$ respectivamente. Si $x\in AC(T;\mathbb{R}^n)$ y $a\in\mathbb{R}^p$ denotaremos por x_a al elemento $(x,a)\in AC_p(T;\mathbb{R}^n)$.

El problema paramétrico del cálculo de variaciones con el que trataremos, el cual etiquetaremos con $(\mathbf{P})$, es el de minimizar el siguiente funcional

$$I(x_a) := l(a) + \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

sobre todo $x_a\in AC_p(T;\mathbb{R}^n)$ sujeto a las siguientes restricciones

R1) $a\in\mathcal{A}$.

R2) $L\big(\cdot, x(\cdot), \dot{x}(\cdot)\big)$ es integrable en T.

R3) $x(t_i)=\Psi_i(a)$ para $i=0,1$.

R4) $\varphi(t,x(t),\dot{x}(t))=0$ casi para todo (c.p.t.) $t\in T$.

A los elementos de $AC_p(T;\mathbb{R}^n)$ les llamaremos *trayectorias*, y diremos que una trayectoria es *admisible* si satisface las cuatro restricciones anteriores. Una trayectoria z_c será solución de $(\mathbf{P})$ si es admisible e $I(z_c)\le I(x_a)$ para toda trayectoria admisible x_a. Diremos que una trayectoria admisible z_c es un *mínimo fuerte* de $(\mathbf{P})$ si es un mínimo local de I relativo a la norma

$$\|x_a\| := |a| + \|x\|_C \qquad \big(x_a\in AC_p(T;\mathbb{R}^n)\big),$$

es decir, si para alguna $h>0$, $I(z_c)\le I(x_a)$ para toda trayectoria admisible x_a que cumple que $\|x_a - z_c\| < h$.

Con el fin de establecer el primer teorema de suficiencia de este trabajo, introduciremos las siguientes definiciones.

- Dada $x\in AC(T;\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\tilde{x}(t) := (t, x(t), \dot{x}(t)) \quad (\text{c.p.t. } t\in T).$$

- Para cualquier $x_a\in AC_p(T;\mathbb{R}^n)$, con $\dot{x}\in L^\infty(T;\mathbb{R}^n)$ y cualquier $y_b\in AC_p(T;\mathbb{R}^n)$, la *primera variación* de I a lo largo de x_a sobre y_b está dada por

$$I'(x_a;y_b) := l'(a)b + \int_{t_0}^{t_1} L_x\big(\tilde{x}(t)\big)y(t) + L_{\dot{x}}\big(\tilde{x}(t)\big)\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Más aun, si $y_b\in AC_p^2(T;\mathbb{R}^n)$, definimos la *segunda variación* de I a lo largo de x_a sobre y_b por

$$I''(x_a;y_b) := b^*\, l''(a)b + \int_{t_0}^{t_1} 2\,\Omega\big(x;\tilde{y}(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

  donde

$$2\,\Omega(x;t,y,\dot{y}) := y^* L_{xx}\big(\tilde{x}(t)\big)y + 2\,y^* L_{x\dot{x}}\big(\tilde{x}(t)\big)\dot{y} + \dot{y}^* L_{\dot{x}\dot{x}}\big(\tilde{x}(t)\big)\dot{y},$$

  para $t\in T$ y $y,\dot{y}\in\mathbb{R}^n$. El símbolo $*$ denota transposición.

- La *función exceso de Weierstrass con respecto a* L, $\mathcal{E}\colon T\times\mathbb{R}^{3n}\to\mathbb{R}$, está dada por

$$\mathcal{E}(t,x,\dot z,\dot x):=L(t,x,\dot x)-L(t,x,\dot z)-L_{\dot x}(t,x,\dot z)(\dot x-\dot z)$$

para $t\in T$ y $x,\dot x,\dot z\in\mathbb{R}^n$.

- Dado $\mathrm{x}_a\in AC_p(T;\mathbb{R}^n)$, definimos a $Y(\mathrm{x}_a)$ como el conjunto de todas las $\mathrm{y}_b\in AC_p^2(T;\mathbb{R}^n)$ que satisfacen

$$\begin{gathered}\mathrm{y}(t_i)=\Psi_i'(a)b\qquad(i=0,1),\\ \varphi_x\big(\tilde{\mathrm{x}}(t)\big)\mathrm{y}(t)+\varphi_{\dot x}\big(\tilde{\mathrm{x}}(t)\big)\dot{\mathrm{y}}(t)=0\qquad\text{c.p.t. } t\in T.\end{gathered}$$

- Definimos las funciones $V\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $D,\mathcal{Q}\colon AC(T;\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}V(\alpha)&:=\sqrt{1+|\alpha|^2}-1,\\ D(\mathrm{x})&:=\int_{t_0}^{t_1}V\big(\dot{\mathrm{x}}(t)\big)\,\mathrm{d}t,\\ \mathcal{Q}(\mathrm{x})&:=V\big(\mathrm{x}(t_0)\big)+D(\mathrm{x}),\end{aligned}$$

para cada $\alpha\in\mathbb{R}^n$ y $\mathrm{x}\in AC(T;\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1. *Sea z_c una trayectoria admisible con $\dot{\mathrm{z}}\in L^\infty(T;\mathbb{R}^n)$. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones.*

C1) $l'(c)=L_{\dot x}\big(\tilde{\mathrm{z}}(t_0)\big)\,\Psi_0'(c)-L_{\dot x}\big(\tilde{\mathrm{z}}(t_1)\big)\,\Psi_1'(c)$.

C2) $L_{\dot x}\big(\tilde{\mathrm{z}}(t_0)\big)\,\Psi_0''(c;b)-L_{\dot x}\big(\tilde{\mathrm{z}}(t_1)\big)\,\Psi_1''(c;b)\le 0$ *para toda* $b\in\mathbb{R}^p$.

C3) *Existe* $\alpha\in\mathbb{R}^n$ *tal que*

$$L_{\dot x}\big(\tilde{\mathrm{z}}(t)\big)=\int_{t_0}^{t}L_x\big(\tilde{\mathrm{z}}(s)\big)\,ds+\alpha^*\qquad(t\in T).$$

C4) $L_{\dot x\dot x}\big(\tilde{\mathrm{z}}(t)\big)\ge 0$ *c.p.t.* $t\in T$.

C5) $I''(\mathrm{z}_c;\mathrm{y}_b)>0$ *para toda* $\mathrm{y}_b\in Y(\mathrm{z}_c)$ *no nula.*

C6) *Existen* $h,\delta>0$ *tales que para cada trayectoria admisible* x_a *se tiene que*

$$\begin{gathered}\mathcal{E}\big(t,\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{z}}(t),\dot{\mathrm{x}}(t)\big)\ge 0\quad\text{c.p.t. } t\in T,\\ \int_{t_0}^{t_1}\mathcal{E}\big(t,\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{z}}(t),\dot{\mathrm{x}}(t)\big)\,dt\ge hD(\mathrm{x}-\mathrm{z}),\end{gathered}$$

siempre que $\|\mathrm{x}-\mathrm{z}\|_C\le\delta$.

Entonces existen $\mu,\nu>0$ tales que para toda trayectoria admisible x_a se cumple que

$$I(\mathrm{x}_a)\ge I(\mathrm{z}_c)+\mu\min\big\{|a-c|^2,\mathcal{Q}(\mathrm{x}-\mathrm{z})\big\}$$

*siempre que $\|\mathrm{x}_a-\mathrm{z}_c\|<\nu$. En particular, z es un mínimo fuerte de (**P**).*

La demostración de este Teorema se deja para la sección 5.

3. Problema de Bolza no Paramétrico.

Ahora, consideremos un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbb{R}$, dos subconjuntos no vacíos $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ de $\mathbb{R}^n$ y las funciones

$$\begin{aligned} \ell\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} && (x_1, x_2) \mapsto \ell(x_1, x_2), \\ \mathcal{L}\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} && (t, x, \dot{x}) \mapsto \mathcal{L}(t, x, \dot{x}), \\ \phi\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^k && (t, x, \dot{x}) \mapsto \phi(t, x, \dot{x}). \end{aligned}$$

Supondremos que las funciones $\mathcal{L}$ y ϕ son de clase C^2 con respecto a x y $\dot{x}$ en $T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, y que la función ℓ es de clase C^2 en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

El problema no paramétrico del cálculo de variaciones con el que trabajaremos ahora, que denotamos por $(\overline{\mathbf{P}})$, es el de minimizar el funcional

$$\mathcal{I}(\mathrm{x}) := \ell\big(\mathrm{x}(t_0), \mathrm{x}(t_1)\big) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\tilde{\mathrm{x}}(t))\, \mathrm{d}t$$

sobre todo $\mathrm{x} \in AC(T; \mathbb{R}^n)$ que satisface las restricciones

R′1) $\mathrm{x}(t_i) \in \mathcal{A}_i$ para $i = 0, 1$.

R′2) $\mathcal{L}\big(\cdot, \mathrm{x}(\cdot), \dot{\mathrm{x}}(\cdot)\big)$ es integrable en T.

R′3) $\phi(t, \mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t)) = 0$ c.p.t. $t \in T$.

A los elementos de $AC(T; \mathbb{R}^n)$ les llamaremos *trayectorias con respecto a $(\overline{\boldsymbol{P}})$* o simplemente *trayectorias* cuando no haya confusión. Diremos que una trayectoria es *admisible* si satisface las tres restricciones anteriores. Una trayectoria z es *solución* de $(\overline{\mathbf{P}})$ si es admisible y además $\mathcal{I}(\mathrm{z}) \leq \mathcal{I}(\mathrm{x})$ para toda trayectoria admisible x. Diremos que una trayectoria admisible z es un *mínimo fuerte* de $(\overline{\mathbf{P}})$ si es un mínimo de $\mathcal{I}$ relativo a la norma $\|\cdot\|_C$, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que para toda trayectoria admisible x, $\mathcal{I}(\mathrm{z}) \leq \mathcal{I}(\mathrm{x})$ siempre que $\|\mathrm{x} - \mathrm{z}\|_C < \epsilon$.

Sea $\Psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \subset \Psi(\mathbb{R}^n)$. Asociaremos al problema $(\overline{\mathbf{P}})$ el problema paramétrico de la sección 2, al cual denotaremos por $(\mathbf{P}_\Psi)$, con $p = n$, $\mathcal{A} = \Psi^{-1}(\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1)$, $l = \ell \circ \Psi$, $L = \mathcal{L}$, $\varphi = \phi$ y Ψ_0, Ψ_1 las componentes de Ψ, es decir, $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)$.

Teorema 2. *Se satisfacen:*

i) x_a *es una trayectoria admisible de $(\boldsymbol{P}_\Psi)$ si y solo si* x *es una trayectoria admisible de $(\overline{\boldsymbol{P}})$ y $a \in \Psi^{-1}(\mathrm{x}(t_0), \mathrm{x}(t_1))$.*

ii) *Si* x_a *es una trayectoria admisible de $(\boldsymbol{P}_\Psi)$, entonces*

$$\mathcal{I}(\mathrm{x}) = I(\mathrm{x}_a).$$

iii) *Si* $\mathfrak{z}_c$ *es solución de* $(\boldsymbol{P}_\Psi)$*, entonces* z *es solución de* $(\overline{\boldsymbol{P}})$*.*

Demostración. Los incisos i) y ii) se siguen de las definiciones de los problemas.

Sea x una trayectoria admisible de $(\overline{\mathbf{P}})$ y sea $a \in \Psi^{-1}(x(t_0), x(t_1))$. Por el inciso i), z es una trayectoria admisible de $(\overline{\mathbf{P}})$ y x_a es una trayectoria admisible de $(\mathbf{P}_\Psi)$. Entonces, por ii)

$$\mathcal{I}(z) = I(z_c) \le I(x_a) = \mathcal{I}(x)$$

lo que demuestra *iii*). □

El siguiente teorema, el cual es una consecuencia directa de los Teoremas 1 y 2, da un conjunto de condiciones suficientes para el problema $(\overline{\mathbf{P}})$.

Teorema 3. *Sea* z_c *una trayectoria admisible de* $(\boldsymbol{P}_\Psi)$ *con* $\dot{z} \in L^\infty(T; \mathbb{R}^n)$*. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

C′1) $l'(b_0) = L_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t_0)\big)\, \Psi_0'(c) - L_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t_1)\big)\, \Psi_1'(c)$.

C′2) $L_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t_0)\big)\, \Psi_0''(c; b) - L_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t_1)\big)\, \Psi_1''(c; b) \le 0$ *para toda* $b \in \mathbb{R}^n$*.*

C′3) *Existe* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$L_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t)\big) = \int_{t_0}^{t} L_x\big(\tilde{z}(s)\big)\, ds + \alpha^* \qquad (t \in T).$$

C′4) $L_{\dot{x}\dot{x}}\big(\tilde{z}(t)\big) \ge 0$ *c.p.t.* $t \in T$*.*

C′5) $I''(z_c; y_b) > 0$ *para toda* $y_b \in Y(z_c)$ *no nula.*

C′6) *Existen* $h, \delta > 0$ *tales que para cada trayectoria admisible* x *se tiene que*

$$\mathcal{E}\big(t, x(t), \dot{z}(t), \dot{x}(t)\big) \ge 0 \quad c.p.t.\ t \in T,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}\big(t, x(t), \dot{z}(t), \dot{x}(t)\big)\, dt \ge hD(x - z),$$

siempre que $\|x - z\|_C \le \delta$*.*

Entonces z *es un mínimo fuerte de* $(\overline{\boldsymbol{P}})$*.*

4. Resultados Auxiliares.

El siguiente Lema será de gran utilidad en la demostración del Teorema 1. Antes de enunciar el Lema daremos algunas notaciones sobre convergencia.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y f una función medible. Denotaremos convergencia uniforme por $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$, convergencia casi uniforme por $f_n \xrightarrow{\text{cu}} f$, convergencia fuerte en L^p por $f_n \xrightarrow{L^p} f$ y convergencia débil en L^p por $f_n \xrightharpoonup{L^p} f$. De aquí en adelante no reetiquetaremos las subsucesiones de una sucesión puesto que este hecho no alterará nuestros resultados.

Lema 1. *Sean $z \in AC(T;\mathbb{R}^n)$ y $(z^q)_{q\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $AC(T;\mathbb{R}^n)$ tales que*

$$\lim_{q\to\infty} \mathcal{Q}(z^q - z) = 0 \quad y \quad d_q := \left[2\mathcal{Q}(z^q - z)\right]^{1/2} > 0 \qquad (q \in \mathbb{N}).$$

Para cada $q \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathfrak{y}^q := \frac{z^q - z}{d_q}.$$

Entonces se cumple lo siguiente:

a) Existen $\mathfrak{y} \in AC^2(T;\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión de $(z^q)_{q\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\dot{z}^q \xrightarrow{cu} \dot{z},$$

$$\mathfrak{y}^q \xrightarrow{u} \mathfrak{y},$$

$$\dot{\mathfrak{y}}^q \xrightharpoonup{L^1} \dot{\mathfrak{y}}.$$

b) Sean $S \subset T$ medible, $R \in L^\infty(S;\mathbb{M}^{n\times n})$ y $(R_q)_{q\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^\infty(S;\mathbb{M}^{n\times n})$. Si $\dot{z}^q \xrightarrow{u} \dot{z}$, $R_q \xrightarrow{u} R$ en S, y $R(t) \geq 0$ para cada $t \in S$, entonces existe una subsucesión de $(\mathfrak{y}^q)_{q\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\liminf_{q\to\infty} \int_S \dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* R_q(t) \dot{\mathfrak{y}}^q(t)\, dt \geq \int_S \dot{\mathfrak{y}}(t)^* R(t) \dot{\mathfrak{y}}(t)\, dt.$$

Demostración.

a) Primeramente observemos que $\mathcal{Q}(z^q - z) \to 0$ implica que

$$\lim_{q\to\infty} V\big(z^q(t_0) - z(t_0)\big) = \lim_{q\to\infty} D(z^q - z) = 0.$$

Dados $q \in \mathbb{N}$ y c.p.t. $t \in T$, definimos

$$w_q(t) := \left[1 + \frac{1}{2} V\big(\dot{z}^q(t) - \dot{z}(t)\big)\right]^{1/2},$$

$$c_q := \left[1 + \frac{1}{2} V\big(z^q(t_0) - z(t_0)\big)\right]^{1/2}.$$

Notemos que $V(\alpha)(2 + V(\alpha)) = |\alpha|^2$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\left|\frac{\mathfrak{y}^q(t_0)}{c_q}\right|^2 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{\mathfrak{y}}^q(t)|^2}{w_q(t)^2}\, \mathrm{d}t = 1 \qquad (q \in \mathbb{N}),$$

y como claramente $c_q \longrightarrow 1$, existen $\beta \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in L^2(T;\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión de $\{z^q\}$ tales que $\mathfrak{y}^q(t_0) \longrightarrow \beta$ y $(\dot{\mathfrak{y}}^q/w_q) \xrightarrow{L^2} \sigma$. Ahora definimos $\mathfrak{y} \in AC^2(T;\mathbb{R}^n)$ por

$$\mathfrak{y}(t) := \beta + \int_{t_0}^{t} \sigma(s)\,\mathrm{d}s \qquad (t \in T),$$

e inmediatamente se sigue que $\mathfrak{y}(t_0) = \beta$ y $\dot{\mathfrak{y}}(t) = \sigma(t)$ c.p.t. $t \in T$.
Como $w_q^2 \geq w_q \geq 1$ tenemos

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} [w_q(t) - 1]\,\mathrm{d}t \leq \int_{t_0}^{t_1} [w_q^2(t) - 1]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} D(z^q - z).$$

Observe, que también

$$\int_{t_0}^{t_1} [w_q(t) - 1]^2\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} [w_q^2(t) - 1]\,\mathrm{d}t - 2\int_{t_0}^{t_1} [w_q(t) - 1]\,\mathrm{d}t.$$

Así que $w_q u \xrightarrow{L^2} u$ para toda $u \in L^\infty(T;\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* u(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\dot{\mathfrak{y}}^q(t)}{w_q(t)}\right)^* w_q(t) u(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathfrak{y}}(t)^* u(t)\,\mathrm{d}t$$

para cada $u \in L^\infty(T;\mathbb{R}^n)$. Por tanto $\dot{\mathfrak{y}}^q \xrightarrow{L^1} \dot{\mathfrak{y}}$. Entonces la sucesión $(\dot{\mathfrak{y}}^q)_{q\in\mathbb{N}}$ es equi-integrable en T, lo que implica que $(\mathfrak{y}^q)_{q\in\mathbb{N}}$ es equi-continua en T. Como $\mathfrak{y}^q(t) = \mathfrak{y}^q(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{\mathfrak{y}}^q(s)\,\mathrm{d}s$ $(t \in T)$ se deduce que $\mathfrak{y}^q \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathfrak{y}$.

Sea $\mathfrak{x} \in AC(T;\mathbb{R}^n)$, definimos $w(t) := [1 + \frac{1}{2} V(\dot{\mathfrak{x}}(t))]^{1/2}$ c.p.t. $t \in T$. Observemos que

$$\int_{t_0}^{t_1} w(t)^2\,\mathrm{d}t = (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} D(\mathfrak{x}),$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{\mathfrak{x}}(t)|^2}{w(t)^2}\,\mathrm{d}t = 2D(\mathfrak{x}).$$

Entonces, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned}
\|\dot{\mathfrak{x}}\|_1^2 &= \left(\int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathfrak{x}}(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \\
&= \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{\mathfrak{x}}(t)|}{w(t)} w(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \\
&\leq \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{\mathfrak{x}}(t)|^2}{w(t)^2}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{t_0}^{t_1} w(t)^2\,\mathrm{d}t\right) \\
&= D(\mathfrak{x})\,[2(t_1 - t_0) + D(\mathfrak{x})]\,.
\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\lim_{q\to\infty} \|\dot{z}^q - \dot{z}\|_1 = 0,$$

lo que implica que existe un subsucesión de $(z^q)_{q\in\mathbb{N}}$, tal que $\dot{z}^q \xrightarrow{\text{cu}} \dot{z}$ en T.

b) Puesto que $\dot{z}^q \xrightarrow{\text{u}} \dot{z}$ es S, existe $c_0 > 0$ tal que para toda $q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_S |\dot{\mathfrak{y}}^q(t)|^2 \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\mathcal{Q}(z^q - z)} \int_S V\big(\dot{z}^q(t) - \dot{z}(t)\big) \left[2 + V\big(\dot{z}^q(t) - \dot{z}(t)\big)\right] \,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{c_0}{\mathcal{Q}(z^q - z)} \int_S V\big(\dot{z}^q(t) - \dot{z}(t)\big) \,\mathrm{d}t \\ &\le c_0 \frac{\mathcal{Q}(z^q - z)}{\mathcal{Q}(z^q - z)} \\ &= c_0.\end{aligned}$$

Entonces, existe una subsucesión de $(\dot{\mathfrak{y}}^q)_{q\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a $\dot{\mathfrak{y}}$ en $L^2(S;\mathbb{R}^n)$. Puesto que $R \ge 0$ en S, la función

$$v \mapsto \int_S v(t)^* R(t) v(t) \,\mathrm{d}t$$

es débilmente semicontinua inferior en $L^2(S;\mathbb{R}^n)$. Como $w_q \xrightarrow{\text{u}} 1$ en S, entonces para toda $h \in L^2(S;\mathbb{R}^n)$,

$$\int_S \dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* h(t) \,\mathrm{d}t = \int_S \left(\frac{\dot{\mathfrak{y}}^q(t)}{w_q(t)}\right)^* w_q(t) h(t) \,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_S \dot{\mathfrak{y}}(t)^* h(t) \,\mathrm{d}t,$$

es decir, $\dot{\mathfrak{y}}^q \xrightarrow{L^2} \dot{\mathfrak{y}}$ en S. De esta manera,

$$\liminf_{q\to\infty} \int_S \dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* R(t) \dot{\mathfrak{y}}^q(t) \,\mathrm{d}t \ge \int_S \dot{\mathfrak{y}}(t)^* R(t) \dot{\mathfrak{y}}(t) \,\mathrm{d}t.$$

Puesto que $R_q \xrightarrow{\text{u}} R$ en S, se sigue que

$$\liminf_{q\to\infty} \int_S \dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* R_q(t) \dot{\mathfrak{y}}^q(t) \,\mathrm{d}t \ge \int_S \dot{\mathfrak{y}}(t)^* R(t) \dot{\mathfrak{y}}(t) \,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

5. Demostración del Teorema 1.

Las siguientes definiciones serán de utilidad en la demostración del Teorema 1.

- Para toda $\mathrm{x} \in AC(T;\mathbb{R}^n)$ y $a \in \mathbb{R}^p$, definimos
$$\mathrm{x}_a(t) := (\mathrm{x}(t), a)^* \qquad (t \in T).$$
Obsérvese que para cada $a \in \mathbb{R}^p$,
$$\dot{\mathrm{x}}_a(t) = (\dot{\mathrm{x}}(t), 0)^* \qquad (\text{c.p.t. } t \in T).$$

- La función $L_0\colon T \times \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}$ y la *función exceso de Weierstrass con respecto a* L_0, $\mathcal{E}_0\colon T \times \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}$, están definidas como
$$L_0(t,u,\dot{u}) := \frac{l(u_{n+1},\ldots,u_{n+p})}{t_1 - t_0} + L(t,u_1,\ldots,u_n,\dot{u}_1,\ldots,\dot{u}_n),$$
$$\mathcal{E}_0(t,u,\dot{u},\dot{v}) := L_0(t,u,\dot{v}) - L_0(t,u,\dot{u}) - L_{0\,\dot{u}}(t,u,\dot{u})(\dot{v}-\dot{u}),$$
para $t \in T$ y $u, \dot{u}, \dot{v} \in \mathbb{R}^{n+p}$.

Antes de establecer la demostración del Teorema 1, presentaremos varios lemas que nos ayudarán en la demostración del Teorema. En lo que sigue de esta sección hasta antes de la demostración del Teorema, z_c será una trayectoria admisible con $\dot{z} \in L^\infty(T;\mathbb{R}^n)$ que cumple las 6 condiciones del Teorema 1 y $\left(z^q_{c_q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ será una sucesión de trayectorias admisibles tales que para toda $q \in \mathbb{N}$

$$\|z^q_{c_q} - z_c\| \leq \text{mín}\left\{\delta, \frac{1}{q}\right\}, \tag{1}$$
$$I(z^q_{c_q}) - I(z_c) < \text{mín}\left\{\frac{|c_q - c|^2}{q}, \frac{\mathcal{Q}(z^q - z)}{q}\right\}. \tag{2}$$

Cabe notar que $z^q \xrightarrow{\text{u}} z$ y $c_q \longrightarrow c$.

Para cada $t \in T$ y $u \in \mathbb{R}^{n+p}$ definimos
$$M(t,u) := L_0\big(t,u,\dot{z}_c(t)\big) - L_0\big(t,z_c(t),\dot{z}_c(t)\big) - L_{0u}\big(t,z_c(t),\dot{z}_c(t)\big)\big(u - z_c(t)\big),$$
$$N(t,u) := L^*_{0\dot{u}}\big(t,u,\dot{z}_c(t)\big) - L^*_{0\dot{u}}\big(t,z_c(t),\dot{z}_c(t)\big).$$
Observemos que por la fórmula de Taylor aplicada a la variable u tenemos,
$$M(t,u) = \frac{1}{2}\big(u - z_c(t)\big)^* P(t,u)\big(u - z_c(t)\big),$$
$$N(t,u) = Q(t,u)\big(u - z_c(t)\big),$$
donde
$$P(t,u) := 2\int_0^1 (1-\lambda) L_{0uu}\big(t,\, z_c(t) + \lambda[u - z_c(t)],\, \dot{z}_c(t)\big)\,\mathrm{d}\lambda,$$
$$Q(t,u) := \int_0^1 L_{0\dot{u}u}\big(t,\, z_c(t) + \lambda[u - z_c(t)],\, \dot{z}_c(t)\big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Dada $\mathrm{x}_a \in AC_p(T;\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathrm{x}_a) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_0\big(t, \mathrm{x}_a(t), \dot{z}_c(t), \dot{\mathrm{x}}_a(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$
$$K(\mathrm{x}_a) := \int_{t_0}^{t_1} M\big(t, \mathrm{x}_a(t)\big) + \big(\dot{\mathrm{x}}_a(t) - \dot{z}_c(t)\big)^* N\big(t, \mathrm{x}_a(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Lema 2. *Si* $\mathrm{x}_a \in AC_p(T;\mathbb{R}^n)$*, entonces*

$$I(\mathrm{x}_a) = I(z_c) + I'(z_c; \mathrm{x}_a - z_c) + K(\mathrm{x}_a) + \tilde{\mathcal{E}}(\mathrm{x}_a).$$

Demostración. Se sigue de las definiciones de $\tilde{\mathcal{E}}, K, I'$ e I. □

Lema 3. *Si* x_a *es una trayectoria admisible con* $\|\mathrm{x}_a - z_c\| \leq \delta$*, entonces*

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathrm{x}_a) \geq h\left[\mathcal{Q}(\mathrm{x} - z) - V\big(\mathrm{x}(t_0) - z(t_0)\big)\right].$$

Demostración. Se sigue del hecho de que $\mathcal{E}_0(t, \mathrm{x}_a(t), \dot{z}_c(t), \dot{\mathrm{x}}_a(t)) = \mathcal{E}(t, \mathrm{x}(t), \dot{z}(t), \dot{\mathrm{x}}(t))$, C6) y de la definición de $\mathcal{Q}$. □

Lema 4. *Existe* $\eta > 0$ *tal que para toda trayectoria admisible* x_a*,*

$$\big|K(\mathrm{x}_a)\big| \leq \eta\,\|\mathrm{x}_a - z_c\|\,\big[1 + \mathcal{Q}(\mathrm{x} - z)\big]$$

siempre que $\|\mathrm{x}_a - z_c\| \leq 1$*.*

Demostración. Definimos

$$\kappa_0^2 := \big(\|z_c\| + 1\big)^2 + \|\dot{z}\|_\infty^2.$$

Por continuidad de L_{0uu} y $L_{0\dot{u}u}$, existe $\kappa > 0$ tal que

$$|L_{0uu}(t, u, \dot{u})| \leq \kappa,$$
$$|L_{0\dot{u}u}(t, u, \dot{u})| \leq \kappa,$$

para cada $t \in T$ y $u, \dot{u} \in \mathbb{R}^{n+p}$ que satisfacen $|(u, \dot{u})| \leq \kappa_0$.

Definimos

$$\eta := \sqrt{2}\,\kappa\,\text{máx}\,\{t_1 - t_0, 1\}.$$

Sea x_a una trayectoria admisible tal que $\|\mathrm{x}_a - z_c\| \leq 1$. Si $t \in T$ es tal que $|\dot{z}(t)| \leq \|\dot{z}\|_\infty$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned}\big|\big(z_c(t) + \lambda[\mathrm{x}_a(t) - z_c(t)]\,,\,\dot{z}_c(t)\big)\big|^2 &= \big|z_c(t) + \lambda[\mathrm{x}_a(t) - z_c(t)]\big|^2 + |\dot{z}(t)|^2 \\ &\leq (\|z_c\| + \lambda\|\mathrm{x}_a - z_c\|)^2 + \|\dot{z}\|_\infty^2 \\ &\leq \kappa_0^2.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\big|P\big(t,\mathrm{x}_a(t)\big)\big| \leq 2\int_0^1 (1-\lambda)\big|L_{0uu}\big(t,\, z_c(t)+\lambda[\mathrm{x}_a(t)-z_c(t)],\, \dot z_c(t)\big)\big|\,\mathrm{d}\lambda \leq \kappa,$$
$$\big|Q\big(t,\mathrm{x}_a(t)\big)\big| \leq \int_0^1 \big|L_{0\dot u u}\big(t,\, z_c(t)+\lambda[\mathrm{x}_a(t)-z_c(t)],\, \dot z_c(t)\big)\big|\,\mathrm{d}\lambda \leq \kappa,$$

c.p.t. $t\in T$. Entonces,

$$\begin{aligned}\big|M\big(t,\mathrm{x}_a(t)\big)+\big(\dot{\mathrm{x}}_a(t)-\dot z_c(t)\big)^* N\big(t,\mathrm{x}_a(t)\big)\big| &\leq |\mathrm{x}_a(t)-z_c(t)|\Big(\big|P\big(t,\mathrm{x}_a(t)\big)\big|\,|\mathrm{x}_a(t)-z_c(t)| \\ &\qquad + \big|Q\big(t,\mathrm{x}_a(t)\big)\big|\,|\dot{\mathrm{x}}_a(t)-\dot z_c(t)|\Big) \\ &\leq \kappa\|\mathrm{x}_a-z_c\|\big(1+|\dot{\mathrm{x}}_a(t)-\dot z_c(t)|\big) \\ &\leq \sqrt{2}\,\kappa\|\mathrm{x}_a-z_c\|\sqrt{1+\big|\dot{\mathrm{x}}(t)-\dot z(t)\big|^2}\end{aligned}$$

c.p.t. $t\in T$. De modo que

$$\begin{aligned}\big|K(\mathrm{x}_a)\big| &\leq \sqrt{2}\,\kappa\|\mathrm{x}_a-z_c\|\int_{t_0}^{t_1} 1+V(\dot{\mathrm{x}}(t)-\dot z(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\,\kappa\|\mathrm{x}_a-z_c\|\big[(t_1-t_0)+D(\mathrm{x}-z)\big] \\ &\leq \eta\|\mathrm{x}_a-z_c\|\;\big[1+D(\mathrm{x}-z)\big] \\ &= \eta\|\mathrm{x}_a-z_c\|\;\big[1+\mathcal{Q}(\mathrm{x}-z)-V\big(\mathrm{x}(t_0)-z(t_0)\big)\big] \\ &\leq \eta\|\mathrm{x}_a-z_c\|\;\big[1+\mathcal{Q}(\mathrm{x}-z)\big].\end{aligned}$$

□

Lema 5. *Para cada $q\in\mathbb{N}$ e $i=0,1$ se cumplen*

$$z^q(t_i)-z(t_i) = \int_0^1 \Psi_i'\big(c+\lambda[c_q-c]\big)(c_q-c)\,d\lambda, \tag{3}$$

$$z^q(t_i)-z(t_i) = \Psi_i'(c)(c_q-c) + \int_0^1 (1-\lambda)\Psi_i''\big(c+\lambda[c_q-c];\, c_q-c\big)\,d\lambda, \tag{4}$$

$$l'(c)(c_q-c) = \sum_{i=0}^{1}\Big\{(-1)^i L_{\dot x}(\tilde z(t_i))\big(z^q(t_i)-z(t_i)\big) + (-1)^{i+1}L_{\dot x}(\tilde z(t_i))\int_0^1 (1-\lambda)\Psi_i''\big(c+\lambda[c_q-c]; c_q-c\big)\,d\lambda\Big\}, \tag{5}$$

$$I'(z_c; z^q_{c_q}-z_c) = l'(c)\,(c_q-c) - \sum_{i=0}^{1}(-1)^i L_{\dot x}(\tilde z(t_i))\big(z^q(t_i)-z(t_i)\big), \tag{6}$$

$$I'(z_c; z^q_{c_q}-z_c) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}L_{\dot x}(\tilde z(t_i))\int_0^1 (1-\lambda)\Psi_i''\big(c+\lambda[c_q-c]; c_q-c\big)\,d\lambda. \tag{7}$$

Demostración. Por R3) sabemos que $z^q(t_i)-z(t_i)=\Psi_i(c_q)-\Psi_i(c)$. Entonces, por la fórmula de Taylor aplicada a Ψ_i obtenemos (3) y (4)

De C1) tenemos

$$l'(c)(c_q-c)=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i L_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t_i)\big)\,\Psi_i'(c)(c_q-c).$$

Sustituyendo $\Psi_i'(c)(c_q-c)$ de la ecuación (4) en la ecuación anterior obtenemos (5).

Por C3), $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(\tilde{z}(t))=L_x(\tilde{z}(t))$ c.p.t. $t\in T$. Entonces,

$$I'(z_c;z^q_{c_q}-z_c)=l'(c)\,(c_q-c)+\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\big[L_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t)\big)\big(z^q(t)-z(t)\big)\big]\,\mathrm{d}t.$$

Nuevamente por C3), la función $t\mapsto L_{\dot{x}}(\tilde{z}(t))$ es absolutamente continua en T y aplicando el teorema fundamental del cálculo para integrales de Lebesgue a la ecuación anterior obtenemos (6).

Finalmente, la ecuación (7) se obtiene al sustituir (5) en (6). □

Lema 6. *Existe una subsucesión de $(z^q)_{q\in\mathbb{N}}$ tal que $z^q\neq z$ para toda $q\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z^q=z$ para cada $q\in\mathbb{N}$. Entonces, (3) y (5) se reducen a

$$\int_0^1\Psi_i'\big(c+\lambda[c_q-c]\big)\,(c_q-c)\,\mathrm{d}\lambda=0\qquad(q\in\mathbb{N},\ i=0,1),\tag{8}$$

$$l'(c)(c_q-c)=\sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}L_{\dot{x}}(\tilde{z}(t_i))\int_0^1(1-\lambda)\Psi_i''(c+\lambda[c_q-c];c_q-c)\,\mathrm{d}\lambda.\tag{9}$$

Asimismo, (2) se reduce a $l(c_q)<l(c)$, lo que implica que $c_q\neq c$ para toda $q\in\mathbb{N}$. De esta manera la sucesión $\left(\frac{c_q-c}{|c_q-c|}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ está bien definida. Por tanto podemos escoger una subsucesión tal que

$$\lim_{q\to\infty}\frac{c_q-c}{|c_q-c|}=\hat{c}\tag{10}$$

para algún $\hat{c}\in\mathbb{R}^p$ con $|\hat{c}|=1$.

Por (8) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (T.C.D.L),

$$\begin{aligned}0&=\lim_{q\to\infty}\int_0^1\Psi_i'\big(c+\lambda[c_q-c]\big)\left(\frac{c_q-c}{|c_q-c|}\right)\mathrm{d}\lambda\\&=\Psi_i'(c)\hat{c}\qquad(i=0,1).\end{aligned}$$

Por tanto $0_{\hat{c}}\in Y(z_c)$ y además es no nulo.

Usando (9) y la fórmula de Taylor tenemos que para cada $q \in \mathbb{N}$, existe $\hat{b}_q \in (c_q, c)$[1] tal que

$$\begin{aligned}
0 &> l(c_q) - l(c) \\
&= l'(c)(c_q - c) + \frac{1}{2}(c_q - c)^* l''(\hat{b}_q)(c_q - c) \\
&= \sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}\int_0^1 (1-\lambda)L_{\dot{x}}(\tilde{z}(t_i))\Psi_i''\big(c+\lambda[c_q - c]; c_q - c\big)\,\mathrm{d}\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2}(c_q - c)^* l''(\hat{b}_q)(c_q - c).
\end{aligned}$$

Entonces, usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y (10)

$$\begin{aligned}
0 &\geq \lim_{q\to\infty}\left\{\sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}\int_0^1 (1-\lambda)L_{\dot{x}}(\tilde{z}(t_i))\Psi_i''\left(c+\lambda[c_q - c]; \frac{c_q - c}{|c_q - c|}\right)\mathrm{d}\lambda\right. \\
&\qquad \left. +\frac{1}{2}\left(\frac{c_q - c}{|c_q - c|}\right)^* l''(\hat{b}_q)\left(\frac{c_q - c}{|c_q - c|}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}L_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t_i)\big)\Psi_i''(c;\hat{c}) + \frac{1}{2}\,\hat{c}^* l''(c)\,\hat{c} \\
&\geq \frac{1}{2}\,\hat{c}^* l''(c)\,\hat{c} \\
&= \frac{1}{2}I''(z_c; 0_{\hat{c}}).
\end{aligned}$$

Esto contradice C5), lo que demuestra el Lema. $\square$

Lema 7. *Se satisfacen*

i) $\mathcal{Q}(z^q - z) > 0$ *para toda* $q \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{q\to\infty} \mathcal{Q}(z^q - z) = 0$.

Demostración. Del Lema 6 se sigue el inciso i). Por (6) tenemos

$$\lim_{q\to\infty} I'(z_c; z^q_{c_q} - z_c) = 0. \tag{11}$$

[1] (c_q, c) denota el segmento de recta que une a c_q y c sin los extremos.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{Q}(z^q - z)}{q} &\geq I(z^q_{c_q}) - I(z_c) && \text{(Por (2))}\\
&= I'(z_c; z^q_{c_q} - z_c) + K(z^q_{c_q}) + \tilde{\mathcal{E}}(z^q_{c_q}) && \text{(Por el Lema 2)}\\
&\geq I'(z_c; z^q_{c_q} - z_c) - \eta \| z^q_{c_q} - z_c \| && \text{(Por (1) y}\\
&\quad + \big[h - \eta \| z^q_{c_q} - z_c \|\big] \mathcal{Q}(z^q - z) - h\, V(z^q(t_0) - z(t_0)) && \text{los Lemas 3 y 4)}\\
&\geq I'(z_c; z^q_{c_q} - z_c) - \frac{\eta}{q} && \text{(Por (1))}\\
&\quad + \left(h - \frac{\eta}{q}\right) \mathcal{Q}(z^q - z) - h\, V(z^q(t_0) - z(t_0)),
\end{aligned}
$$

para cada $q \in \mathbb{N}$. Reordenando los términos obtenemos que

$$
\left(h - \frac{\eta}{q} - \frac{1}{q}\right) \mathcal{Q}(z^q - z) \leq \frac{\eta}{q} + h\, V\big(z^q(t_0) - z(t_0)\big) - I'(z_c; z^q_{c_q} - z_c) \qquad (q \in \mathbb{N}). \tag{12}
$$

Por tanto, de (11), (12) y de la continuidad de V se sigue el inciso ii). □

Para cada $q \in \mathbb{N}$, sean

$$
d_q := \sqrt{2\mathcal{Q}(z^q - z)} \quad \text{y} \quad \mathfrak{y}^q := \frac{z^q - z}{d_q},
$$

que por el Lema anterior están bien definidas.

Lema 8. *Existen $\mathfrak{y} \in AC^2(T; \mathbb{R}^n)$ y una subsucesión de $(z^q)_{q\in\mathbb{N}}$ que cumplen*

i) $\dot{z}^q \xrightarrow{cu} \dot{z}$.

ii) $\mathfrak{y}^q \xrightarrow{u} \mathfrak{y}$.

iii) $\dot{\mathfrak{y}}^q \xrightarrow{L^1} \dot{\mathfrak{y}}$.

iv) $\displaystyle \liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}\big(z^q_{c_q}\big)}{d_q^2} \geq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathfrak{y}}(t)^* L_{\dot{x}\dot{x}}\big(\tilde{z}(t)\big) \dot{\mathfrak{y}}(t)\, dt \geq 0.$

Demostración. Del inciso a) del Lema 1 junto con el Lema 7 se siguen inmediatamente los primeros tres incisos.

Por la fórmula de Taylor

$$
\frac{\mathcal{E}\big(t, z^q(t), \dot{z}(t), \dot{z}^q(t)\big)}{d_q^2} = \frac{1}{2}\, \dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* R_q(t) \dot{\mathfrak{y}}^q(t), \tag{13}
$$

donde

$$R_q(t) := 2\int_0^1 (1-\lambda)L_{\dot{x}\dot{x}}\big(t, z^q(t), \dot{z}(t) + \lambda[\dot{z}^q(t) - \dot{z}(t)]\big)\,\mathrm{d}\lambda,$$

y por C6)

$$\frac{1}{2}\,\dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* R_q(t)\dot{\mathfrak{y}}^q(t) \geq 0 \qquad (\text{c.p.t. } t \in T,\ q \in \mathbb{N}). \tag{14}$$

Sea $S \subset T$ medible en el cual $\dot{z}^q \xrightarrow{\mathrm{u}} \dot{z}$. Entonces, $R_q \xrightarrow{\mathrm{u}} L_{\dot{x}\dot{x}}\big(\tilde{z}(\,\cdot\,)\big)$ en S. De manera que

$$\begin{aligned}
\liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}\big(z^q_{c_q}\big)}{d_q^2} &= \frac{1}{2}\liminf_{q\to\infty}\int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* R_q(t)\dot{\mathfrak{y}}^q(t)\,\mathrm{d}t && \text{(Por (13))}\\
&\geq \frac{1}{2}\liminf_{q\to\infty}\int_S \dot{\mathfrak{y}}^q(t)^* R_q(t)\dot{\mathfrak{y}}^q(t)\,\mathrm{d}t && \text{(Por (14))}\\
&\geq \frac{1}{2}\int_S \dot{\mathfrak{y}}(t)^* L_{\dot{x}\dot{x}}\big(\tilde{z}(t)\big)\dot{\mathfrak{y}}(t)\,\mathrm{d}t && \text{(Por el Lema 1b))}\\
&\geq 0. && \text{(Por C4))}
\end{aligned}$$

Como S se puede escoger de tal manera que la medida de $T\setminus S$ sea arbitrariamente pequeña, obtenemos iv). □

Lema 9. *La sucesión* $\left(\frac{c_q - c}{d_q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ *es acotada.*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\left(\frac{c_q - c}{d_q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ no es acotada. Así que existe una subsucesión tal que

$$\lim_{q\to\infty}\left|\frac{c_q - c}{d_q}\right| = \infty,$$

por lo que para q suficientemente grande $|c_q - c| \neq 0$. Entonces, podemos extraer una subsucesión de $\left(\frac{c_q - c}{|c_q - c|}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{q\to\infty}\frac{c_q - c}{|c_q - c|} = \check{c}. \tag{15}$$

para algún $\check{c} \in \mathbb{R}^p$ con $|\check{c}| = 1$. Como $\mathfrak{y}^q \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathfrak{y}$,

$$\frac{z^q - z}{|c_q - c|} = \left(\frac{d_q}{|c_q - c|}\right)\mathfrak{y}^q \xrightarrow{\mathrm{u}} 0\cdot\mathfrak{y} = 0. \tag{16}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{q\to\infty}\frac{z^q(t_i) - z(t_i)}{|c_q - c|}\\
&= \lim_{q\to\infty}\int_0^1 \Psi_i'\big(c + \lambda[c_q - c]\big)\left(\frac{c_q - c}{|c_q - c|}\right)\mathrm{d}\lambda && \text{(Por (3))}\\
&= \Psi_i'(c)\check{c} && \text{(Por T.C.D.L)}
\end{aligned}$$

para $i = 0, 1$. De modo que $0_{\check{c}} \in Y(z_c)$ y es no nula.

Por (15) y (16),

$$
\begin{aligned}
\frac{M\big(\cdot\,,\, z^q_{c_q}(\cdot)\big)}{|c_q - c|^2} &= \frac{1}{2}\,\frac{\big(z^q_{c_q}(\cdot) - z_c(\cdot)\big)^*}{|c_q - c|}\; P\big(\cdot\,,\, z^q_{c_q}(\cdot)\big)\;\frac{z^q_{c_q}(\cdot) - z_c(\cdot)}{|c_q - c|}\\
&\xrightarrow{L^\infty} \frac{1}{2}\; 0_{\check{c}}(\cdot)^*\, L_{0uu}\big(\cdot\,,\, z_c(\cdot),\, \dot{z}_c(\cdot)\big) 0_{\check{c}}(\cdot)\\
&= \frac{\check{c}^* l''(c)\check{c}}{2(t_1 - t_0)}, \qquad (17)\\
\frac{N(\cdot\,, z^q_{c_q}(\cdot))}{|c_q - c|} &= Q(\cdot\,,\, z^q_{c_q}(\cdot))\frac{\big(z^q_{c_q}(\cdot) - z_c(\cdot)\big)}{|c_q - c|}\\
&\xrightarrow{L^\infty} L_{0\dot{u}u}\big(\cdot\,,\, z_c(\cdot), \dot{z}_c(\cdot)\big)\, 0_{\check{c}}(\cdot)\\
&= 0. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Como $\dot{\mathfrak{y}}^q \xrightarrow{L^1} \dot{\mathfrak{y}}$, entonces

$$
\frac{\dot{z}^q - \dot{z}}{|c_q - c|} = \left(\frac{d_q}{|c_q - c|}\right)\dot{\mathfrak{y}}^q \xrightarrow{L^1} 0 \cdot \dot{\mathfrak{y}} = 0,
$$

y junto con (18) tenemos

$$
\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\big(\dot{z}^q_c(t) - \dot{z}_c(t)\big)^*}{|c_q - c|} \cdot \frac{N\big(t, z^q_{c_q}(t)\big)}{|c_q - c|}\, \mathrm{d}t = 0. \qquad (19)
$$

Entonces, de (17) y (19),

$$
\lim_{q\to\infty} \frac{K(z^q_{c_q})}{|c_q - c|^2} = \frac{1}{2}\,\check{c}^* l''(c)\check{c}. \qquad (20)
$$

Por (7) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$
\lim_{q\to\infty} \frac{I'(z_c; z^q_{c_q} - z_c)}{|c_q - c|^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1} L_{\dot{x}}(\tilde{z}(t_i))\Psi''_i(c; \check{c}), \qquad (21)
$$

y por el Lema 8iv),

$$
\liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}(z^q_{c_q})}{|c_q - c|^2} = \liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}(z^q_{c_q})}{d_q^2} \cdot \frac{d_q^2}{|c_q - c|^2} \geq 0. \qquad (22)
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}I''(z_c;0_{\check{c}}) &= \frac{1}{2}\,\check{c}^*\,l''(c)\check{c} \\
&\leq \lim_{q\to\infty}\frac{K(z^q_{c_q})}{|c_q-c|^2} + \liminf_{q\to\infty}\frac{\tilde{\mathcal{E}}(z^q_{c_q})}{|c_q-c|^2} && \text{(Por (20) y (22))} \\
&= \liminf_{q\to\infty}\left\{\frac{I(z^q_{c_q})-I(z_c)}{|c_q-c|^2} - \frac{I'(z_c;z^q_{c_q}-z_c)}{|c_q-c|^2}\right\} && \text{(Por el Lema 2)} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}L_{\dot{x}}(\tilde{z}(t_i))\Psi_i''(c;\check{c}) && \text{(Por (2) y (21))} \\
&\leq 0. && \text{(Por C2))}
\end{aligned}
$$

Lo que contradice C5) □

Lema 10. *Existen $\bar{c}\in\mathbb{R}^p$ y una subsucesión de $\left(\frac{c_q-c}{d_q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ que cumplen*

i) $\lim_{q\to\infty}\frac{c_q-c}{d_q}=\bar{c}$.

ii) $\mathfrak{y}_{\bar{c}}\in Y(z_c)$.

Demostración. El primer inciso se sigue del Lema 9.

Usando (3) y el hecho de que $\mathfrak{y}^q \xrightarrow{\text{u}} \mathfrak{y}$ tenemos

$$\mathfrak{y}(t_i)=\Psi_i'(c)\bar{c} \qquad (i=0,1).$$

Resta demostrar que

$$\varphi_x\big(\tilde{z}(t)\big)\mathfrak{y}(t)+\varphi_{\dot{x}}\big(\tilde{z}(t)\big)\dot{\mathfrak{y}}(t)=0 \qquad (\text{c.p.t. } t\in T).$$

Para ello definimos

$$G_q(t;\lambda):=\varphi\big(t,z(t)+\lambda[z^q(t)-z(t)],\dot{z}(t)+\lambda[\dot{z}^q(t)-\dot{z}(t)]\big) \qquad (q\in\mathbb{N},\ \lambda\in[0,1],\ \text{c.p.t. } t\in T),$$

y notemos que

$$G_q(t;0)=G_q(t;1)=0 \qquad (q\in\mathbb{N},\ \text{c.p.t. } t\in T).$$

También definimos

$$
\begin{aligned}
\varphi_x^q(t;\lambda) &:= \varphi_x(t,z(t)+\lambda[z^q(t)-z(t)],\dot{z}(t)+\lambda[\dot{z}^q(t)-\dot{z}(t)]), \\
\varphi_{\dot{x}}^q(t;\lambda) &:= \varphi_{\dot{x}}(t,z(t)+\lambda[z^q(t)-z(t)],\dot{z}(t)+\lambda[\dot{z}^q(t)-\dot{z}(t)]), \\
\varphi_{(x,\dot{x})}^q(t;\lambda) &:= \varphi_{(x,\dot{x})}(t,z(t)+\lambda[z^q(t)-z(t)],\dot{z}(t)+\lambda[\dot{z}^q(t)-\dot{z}(t)])
\end{aligned}
$$

para toda $q \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0,1]$ y c.p.t. $t \in T$. Por la fórmula de Taylor

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\varphi\big(\tilde{z}^q(t)\big) - \varphi\big(\tilde{z}(t)\big)}{d_q} &= \int_0^1 \varphi^q_{(x,\dot{x})}(t;\lambda) \begin{pmatrix} \mathrm{y}^q(t) \\ \dot{\mathrm{y}}^q(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\lambda \\ &= \left(\int_0^1 \varphi^q_x(t;\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{y}^q(t) + \left(\int_0^1 \varphi^q_{\dot{x}}(t;\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \right) \dot{\mathrm{y}}^q(t). \end{aligned}$$

Sea $S \subset T$ medible tal que $\dot{z}^q \xrightarrow{\mathrm{u}} \dot{z}$. Como $\dot{\mathrm{y}}^q \xrightarrow{L^1} \dot{\mathrm{y}}$, para toda $t \in T$,

$$\int_{[t_0,t]\cap S} \varphi_x(\tilde{z}(s))\mathrm{y}(s) + \varphi_{\dot{x}}(\tilde{z}(s))\dot{\mathrm{y}}(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Como S se puede escoger de tal manera que la medida de $T \setminus S$ sea arbitrariamente pequeña, entonces

$$\int_{t_0}^{t} \varphi_x(\tilde{z}(s))\mathrm{y}(s) + \varphi_{\dot{x}}(\tilde{z}(s))\dot{\mathrm{y}}(s)\,\mathrm{d}s = 0 \qquad (t \in T).$$

Por consiguiente

$$\varphi_x(\tilde{z}(t))\mathrm{y}(t) + \varphi_{\dot{x}}(\tilde{z}(t))\dot{\mathrm{y}}(t) = 0 \qquad (\text{c.p.t. } t \in T). \qquad \square$$

Lema 11. *Se satisfacen*

i) $\mathrm{y} = 0$.

ii) $\displaystyle \liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}(z^q_{c_q})}{d_q^2} = 0.$

Demostración. Por el Lema 8ii) y el Lema 10i),

$$\begin{aligned} \frac{M\big(\,\cdot\,, z^q_{c_q}(\,\cdot\,)\big)}{d_q^2} &= \frac{1}{2}\, \frac{\big(z^q_{c_q}(\,\cdot\,) - z_c(\,\cdot\,)\big)^*}{d_q}\; P\big(\,\cdot\,, z^q_{c_q}(\,\cdot\,)\big)\, \frac{\big(z^q_{c_q}(\,\cdot\,) - z_c(\,\cdot\,)\big)}{d_q} \\ &\xrightarrow{L^\infty} \frac{1}{2}\, \mathrm{y}_{\bar{c}}(\,\cdot\,)^*\, L_{0uu}\big(\,\cdot\,, z_c(\,\cdot\,), \dot{z}_c(\,\cdot\,)\big)\, \mathrm{y}_{\bar{c}}(\,\cdot\,), \\ \frac{N\big(\,\cdot\,, z^q_{c_q}(\,\cdot\,)\big)}{d_q} &= Q\big(\,\cdot\,, z^q_{c_q}(\,\cdot\,)\big)\, \frac{\big(z^q_{c_q}(\,\cdot\,) - z_c(\,\cdot\,)\big)}{d_q} \\ &\xrightarrow{L^\infty} L_{0\dot{u}u}\big(\,\cdot\,, z_c(\,\cdot\,), \dot{z}_c(\,\cdot\,)\big)\, \mathrm{y}_{\bar{c}}(\,\cdot\,). \end{aligned}$$

Como $\dot{\mathrm{y}}^q \xrightarrow{L^1} \dot{\mathrm{y}}$, entonces

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathrm{y}}^q_{\bar{c}}(t)^*\, \frac{N\big(t, z^q_{c_q}(t)\big)}{d_q}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathrm{y}}_{\bar{c}}(t)^*\, L_{0\dot{u}u}\big(t, z_c(t), \dot{z}_c(t)\big)\, \mathrm{y}_{\bar{c}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Por el Lema 8iv),

$$
\begin{aligned}
\lim_{q\to\infty} \frac{K(z^q_{c_q})}{d_q^2} &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{y}_{\bar c}(t)^* L_{0uu}\big(t, z_c(t), \dot z_c(t)\big)\, \mathfrak{y}_{\bar c}(t) \\
&\qquad + 2\,\dot{\mathfrak{y}}_{\bar c}(t)^* L_{0\dot u u}\big(t, z_c(t), \dot z_c(t)\big)\, \mathfrak{y}_{\bar c}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} I''(z_c; \mathfrak{y}_{\bar c}) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathfrak{y}}(t)^* L_{\dot x\dot x}\big(\tilde z(t)\big)\dot{\mathfrak{y}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geq \frac{1}{2} I''(z_c; \mathfrak{y}_{\bar c}) - \liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}\big(z^q_{c_q}\big)}{d_q^2}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Por (7) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$
\lim_{q\to\infty} \frac{I'(z_c; z^q_{c_q} - z_c)}{d_q^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1} (-1)^{i+1} L_{\dot x}(\tilde z(t_i))\Psi_i''(c;\bar c). \tag{24}
$$

Por el Lema 2, (2), (24) y C2),

$$
\begin{aligned}
\lim_{q\to\infty} \frac{K(z^q_{c_q})}{d_q^2} + \liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}(z^q_{c_q})}{d_q^2} &= \liminf_{q\to\infty} \left\{ \frac{I(z^q_{c_q}) - I(z_c)}{d_q^2} - \frac{I'(z_c; z^q_{c_q} - z_c)}{d_q^2} \right\} \\
&\leq -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1} (-1)^{i+1} L_{\dot x}(\tilde z(t_i))\Psi_i''(c;\bar c) \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Entonces, de (23) se sigue que $I''(z_c; \mathfrak{y}_{\bar c}) \leq 0$. Así que por C5) y el Lema 10ii), podemos concluir que $\mathfrak{y}_{\bar c} = 0$. Nuevamente, de (23),

$$
\lim_{q\to\infty} \frac{K(z^q_{c_q})}{d_q^2} = 0.
$$

Por tanto el inciso ii) se obtiene de (25) y el Lema 8iv). □

Demostración del Teorema 1. Supongamos que todas las hipótesis del Teorema se satisfacen y que la conclusión del Teorema es falsa para obtener una contradicción. Entonces, existe una sucesión $\left(z^q_{c_q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ de trayectorias admisibles tales que para toda $q \in \mathbb{N}$ se cumplen (1) y (2). Por consiguiente los Lemas de esta sección son válidos para z_c y $\left(z^q_{c_q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$. Entonces, para alguna subsucesión de $\left(z^q_{c_q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}(z^q_{c_q})}{d_q^2} && \text{(Por el Lema 11ii))}\\
&\geq h\ \liminf_{q\to\infty}\left[\frac{\mathcal{Q}(z^q-z)}{d_q^2}-\frac{V\big(z^q(t_0)-z(t_0)\big)}{d_q^2}\right] && \text{(Por el Lema 3)}\\
&= \frac{h}{2} - h\limsup_{q\to\infty}\frac{V\big(z^q(t_0)-z(t_0)\big)}{d_q^2} && \text{(Por la definición de } d_q\text{)}\\
&\geq \frac{h}{2}-\frac{h}{2}\limsup_{q\to\infty}\left|\frac{z^q(t_0)-z(t_0)}{d_q}\right|^2 && (2V(\alpha)\leq|\alpha|^2\ \forall\alpha\in\mathbb{R}^n)\\
&= \frac{h}{2}-\frac{h}{2}\limsup_{q\to\infty}\left|\int_0^1 \Psi_0'\big(c+\lambda[c_q-c]\big)\left(\frac{c_q-c}{d_q}\right)d\lambda\right|^2 && \text{(Por (3))}\\
&= \frac{h}{2}-\frac{h}{2}\big|\Psi_0'(c)\,\bar{c}\big|^2 && \text{(Por el Lema 10i) y el T.C.D.L.)}\\
&= \frac{h}{2}-\frac{h}{2}\big|y(t_0)\big|^2 && \text{(Por el Lema 10ii))}\\
&= \frac{h}{2} && \text{(Por el Lema 11i))}
\end{aligned}
$$

lo que contradice el hecho de que $h > 0$. □

Referencias

[Alekseev et al., 1987] Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M., and Fomin, S. V. (1987). *Optimal control.* Contemporary Soviet Mathematics. Consultants Bureau.

[Bliss, 1968] Bliss, G. A. (1968). *Lectures on the Calculus of Variations.* Phoenix science series. University of Chicago Press.

[Brechteken-Mandersch, 1991] Brechteken-Mandersch, U. (1991). *Introduction to the Calculus of Variations.* Chapman and Hall Mathematics. Taylor and Francis.

[Cesari, 1983] Cesari, L. (1983). *Optimization - Theory and Applications: Problems with Ordinary Differential Equations.* Applications of Mathematics. Springer-Verlag.

[Clarke, 2013] Clarke, F. H. (2013). *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control.* Graduate Texts in Mathematics. Springer.

[Clarke and Zeidan, 1986] Clarke, F. H. and Zeidan, V. (1986). Sufficiency and the Jacobi condition in the calculus of variations. *Canadian Journal of Mathematics*, 38(5):1199–1209.

[Ewing, 1985] Ewing, G. M. (1985). *Calculus of Variations with Applications*. Mathematics Series. Dover Publications.

[Hestenes, 1966] Hestenes, M. R. (1966). *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. John Wiley and Sons.

[Ize, 2002] Ize, J. (2002). *Cálculo de Variaciones*. Serie Fenomec. UNAM, Proyecto Universitario de Fenómenos no Lineales y Mecánica.

[Krasnov et al., 1992] Krasnov, L., Makarenko, G., and Kiseliov, A. (1992). *Cálculo Variacional: (Ejemplos y Problemas)*. Mir.

[Leitmann, 1981] Leitmann, G. (1981). *The Calculus of Variations and Optimal Control*. Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering. Springer.

[Licea, 2009] Licea, G. S. (2009). Sufficiency by a direct method in the variable state problem of calculus of variations: singular extremals. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*.

[Licea, 2013] Licea, G. S. (2013). Relaxing strengthened Legendre–Clebsch condition. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(5):3886–3902.

[Loewen, 1990] Loewen, P. D. (1990). Second-order sufficiency criteria and local convexity for equivalent problems in the calculus of variations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 146(2):512 – 522.

[McShane, 1942] McShane, E. J. (1942). Sufficient conditions for a weak relative minimum in the problem of Bolza. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 52:344–379.

[Morse, 1973] Morse, M. (1973). *Variational Analysis: Critical Extremals and Sturmian Extensions*. Pure and Applied Mathematics. J. Wiley.

[Reid, 1971] Reid, W. T. (1971). *Ordinary Differential Equations*. Applied Mathematics Series. Wiley.

[Wan, 1995] Wan, F. (1995). *Introduction to the Calculus of Variations and Its Applications*. Chapman and Hall Mathematics. Taylor and Francis.