



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL– HIDRÁULICA

PERFILES DE FLUJO MEDIANTE FUNCIONES EQUIVALENTES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
LIZARRAGA ESTRADA NATALIE DEL ROSARIO

TUTOR  
Dr. NAHUN HAMED GARCÍA VILLANUEVA  
INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares

Secretario: Dr. Víctor Hugo Alcocer Yamanaka

Vocal: Dr. Nahun Hamed García Villanueva

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Víctor Manuel Arroyo Torres

2<sup>d o.</sup> Suplente: M.I. Edmundo Pedroza González

Posgrado en Ingeniería UNAM campus IMTA, Jiutepec, Morelos.

**TUTOR DE TESIS:**

NOMBRE

Dr. Nahun Hamed García Villanueva

---

**FIRMA**



## *DEDICATORIA*

A Eligio, Natalia, William, Axel,  
Karla, Felipe, Manuel y Jorge.



## *AGRADECIMIENTOS*

Al Dr. Nahun Hamed García Villanueva por dirigir y sustentar este documento, su invaluable apoyo, asesoría, dedicación y tiempo.

Al Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares mi profesor favorito, por todas las enseñanzas en los diversos cursos.

Al Dr. Victor Hugo Alcocer Yamanaka por ser un excelente profesor y persona, por todo el aprendizaje y consejos.

Al Dr. Victor Manuel Arroyo Torres por toda la amabilidad y apoyo brindado en la revisión, su aportación fue muy importante para la conclusión de este trabajo y de mi aprendizaje.

Al M.I. Edmundo Pedroza González por la amabilidad y tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

A los demás profesores de la Universidad Nacional Autónoma de México campus IMTA que fueron parte de mi formación, a mis profesores de la Universidad Autónoma Chapingo principalmente al Dr. Victor Prado y al Dr. Mauricio Carrillo y a mis compañeros de la Maestría en Ingeniería Hidráulica campus IMTA.



## ÍNDICE DE CONTENIDO

Contenido	
RESUMEN.....	7
1 INTRODUCCIÓN.....	8
2 OBJETIVOS .....	9
3 MARCO TEÓRICO .....	10
3.1 Flujo Gradualmente Variado .....	10
3.2 Ecuación Dinámica .....	12
3.3 Perfiles de Flujo .....	16
3.4 Métodos de Resolución .....	21
3.4.1 Método Gráfico .....	21
3.4.2 Métodos Numéricos .....	22
a) Método directo por pasos .....	22
b) Método estándar por pasos .....	23
c) Método de Runge-Kutta cuarto orden.....	24
d) Método del punto singular.....	25
3.4.3 Métodos de Integración Directa .....	26
a) Método de Bahkmeteff con modificaciones de Chow.....	28
b) Método de Bresse.....	30
c) Investigaciones recientes sobre soluciones analíticas .....	31
4 FUNCIONES EQUIVALENTES Y METODOLOGÍA PROPUESTA .....	35
4.1 Función equivalente 1. Determinación de coeficientes por correlación lineal.....	35
4.2 Función equivalente 2. Determinación directa de coeficientes.....	38
4.2.1 Definición de la función y solución equivalente .....	38
4.2.2 Coeficientes sugeridos.....	43
4.2.3 Secuencia de cálculo .....	43
5 RESULTADOS .....	47
5.1 Comparación entre las funciones propuestas y soluciones en diferencias finitas47	
5.1.1 Caso 1. Perfil C1 en canal rectangular.....	47
5.1.2 Caso 2. Perfil M2 en canal trapecial .....	51
5.1.3 Caso 3. Perfil M1 en canal circular.....	55
5.1.4 Caso 4. Perfil S2 en canal de sección tipo herradura.....	57



---

5.1.5 Comentarios sobre el esfuerzo computacional en la aplicación de los métodos .....	58
5.2 Comparación de las funciones propuestas con datos experimentales .....	59
6 PROGRAMA PARA CALCULAR PERFILES CON LA METODOLOGÍA PROPUESTA 70	
7 CONCLUSIONES .....	73
8 LITERATURA CITADA .....	74
ANEXO .....	75
DATOS DE LOS PERFILES EXPERIMENTALES Y LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR LOS MÉTODOS .....	75



## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO .....	12
FIGURA 2. CLASIFICACIÓN DE LOS PERFILES DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.....	19
FIGURA 3. TRAMO DE CANAL PARA LA DEDUCCIÓN DE LOS MÉTODOS DE PASO .....	23
FIGURA 4. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO DEL ERROR .....	39
FIGURA 5. AJUSTE LINEAL PARA UN PERFIL C1 .....	47
FIGURA 6. GRÁFICA DE LOS RESULTADOS DEL MÉTODO 1 DE FUNCIONES EQUIVALENTES POR MÍNIMOS CUADRADOS PARA UN PERFIL C1.....	48
FIGURA 7. GRÁFICA DEL MÉTODO DIRECTO POR PASOS PARA UN PERFIL C1 .....	49
FIGURA 8. GRÁFICA DE LOS RESULTADOS DEL MÉTODO 2 CON FÓRMULA DIRECTA DEL CÁLCULO DE COEFICIENTES PARA UN PERFIL C1.....	50
FIGURA 9. RESUMEN DE RESULTADOS CON TRES MÉTODOS DE CÁLCULO (MÉTODO DE PASOS Y FUNCIONES EQUIVALENTES) PARA UN PERFIL C1.....	51
FIGURA 10. GRÁFICA PARA UN PERFIL M2 MÉTODO DIRECTO POR PASOS .....	52
FIGURA 11. AJUSTE LINEAL PARA UN PERFIL M2.....	52
FIGURA 12. GRÁFICA DEL RESULTADO DEL MÉTODO 1 CON FUNCIONES EQUIVALENTES POR MÍNIMOS CUADRADOS PARA UN PERFIL M2.....	53
FIGURA 13. GRÁFICA DEL RESULTADO DEL MÉTODO 2 CON FUNCIONES EQUIVALENTES (SOLUCIÓN DIRECTA) PARA UN PERFIL M2 .....	54
FIGURA 14. GRÁFICA COMPARATIVA ENTRE LOS MÉTODOS DE LA FUNCIÓN EQUIVALENTE Y EL MÉTODO DE PASO A PASO PARA UN PERFIL M2 EN UN CANAL RECTANGULAR.....	55
FIGURA 15. GRÁFICA COMPARATIVA ENTRE LOS MÉTODOS POR FUNCIONES EQUIVALENTES Y EL MÉTODO DE PASOS PARA UN PERFIL M1 EN UN CANAL CIRCULAR .....	57
FIGURA 16. GRÁFICA COMPARATIVA ENTRE LOS MÉTODOS POR FUNCIONES EQUIVALENTES Y EL MÉTODO DE PASOS PARA UN PERFIL S2 EN UN CANAL HERRADURA.....	58
FIGURA 17. IMAGEN DE LAS PRÁCTICAS DE LABORATORIO EN EL CANAL TIPO ARMFIELD PARA LOS PERFILES DE FLUJO .....	60
FIGURA 18. PERFIL M1 .....	61
FIGURA 19. PERFIL M2 .....	62
FIGURA 20. PERFIL M3 .....	62
FIGURA 21. PERFIL S1.....	63
FIGURA 22. PERFIL S2.....	64
FIGURA 23. PERFIL S3.....	64
FIGURA 24. PERFIL C1 .....	65
FIGURA 25. PERFIL C3 .....	66
FIGURA 26. PERFIL H2 .....	67
FIGURA 27. PERFIL H3 .....	67
FIGURA 28. PERFIL A2 .....	68
FIGURA 29. PERFIL A3 .....	69
FIGURA 30. PORTADA DEL PROGRAMA PARA CALCULAR PERFILES CON FUNCIONES EQUIVALENTES MEDIANTE MÍNIMOS CUADRADOS .....	70
FIGURA 31. VENTANA SECCIÓN TRAPEZIAL .....	71
FIGURA 32. RESULTADOS DE UN PERFIL M2 .....	71
FIGURA 33. VENTANA SECCIÓN HERRADURA.....	72
FIGURA 34. RESULTADOS DE UN PERFIL M3 .....	72



## ÍNDICE DE CUADROS

CUADRO 1. MÉTODOS EXISTENTES PARA LA INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO .....	27
CUADRO 2. VALORES DE $\alpha$ , $\phi 1$ Y $\phi 2$ PARA LOS DIFERENTES PERFILES DE FLUJO .....	43
CUADRO 3. RESUMEN DE RESULTADOS PARA DIFERENTE NÚMERO DE PASOS DE CÁLCULO .....	59
CUADRO 4. DATOS GEOMÉTRICOS DE LOS PERFILES EXPERIMENTALES M1, M2 Y M3 .....	60
CUADRO 5. DATOS GEOMÉTRICOS DE LOS PERFILES EXPERIMENTALES S1, S2 Y S3.....	63
CUADRO 6. DATOS GEOMÉTRICOS DE LOS PERFILES EXPERIMENTALES C1 Y C3.....	65
CUADRO 7. DATOS GEOMÉTRICOS DE LOS PERFILES EXPERIMENTALES H2 Y H3.....	66
CUADRO 8. DATOS GEOMÉTRICOS DE LOS PERFILES EXPERIMENTALES A2 Y A3 .....	68



## ÍNDICE DE VARIABLES

$y$ : tirante, m  
 $x$ : distancia horizontal, m  
 $y_n$ : tirante crítico, m  
 $y_c$ : tirante normal, m  
 $z$ : distancia vertical del fondo del canal por encima del nivel de referencia, m  
 $\theta$ : ángulo de la pendiente del fondo, grados  
 $a$  y  $b$ : parámetros de correlación lineal (pendiente y ordenada al origen), adim  
 $S_0$ : pendiente del fondo, adim.  
 $S_f$ : pendiente de la línea de energía específica, adim.  
 $Fr$ : número de Froude, adim  
 $H$ : altura total de energía, m  
 $g$ : aceleración de la gravedad,  $m/s^2$   
 $V$ : velocidad, m /s  
 $dy/dx$ : derivada del tirante con respecto a la distancia, adim  
 $A$ : área hidráulica,  $m^2$   
 $B$ : ancho de la base del canal, m  
 $T$ : ancho de la superficie libre del agua, m  
 $Y$ : tirante hidráulico, m  
 $R$ : radio hidráulico, m  
 $Q$ : caudal,  $m^3/s$   
 $Z$ : factor de sección, adim  
 $K$ : conductividad hidráulica correspondiente a un tirante  $y$ , adim  
 $n$ : coeficiente de Manning, adim  
 $K_n$ : conductividad hidráulica correspondiente al tirante normal  $y_n$ , adim  
 $\Delta x$ : intervalos de longitud, adim  
 $\alpha$ : coeficiente de coriolis; adim  
 $y_1$ : tirante 1 (aguas arriba), m  
 $y_2$ : tirante 2 (aguas abajo), m  
 $z_1$ : altura de la línea de referencia al inicio de  $y_1$ , m  
 $z_2$ : altura de la línea de referencia al inicio de  $y_2$ , m  
 $h_f$ : pérdida de carga por cortante, m  
 $h_0$ : pérdida de carga por remolinos, m  
 $h_e$ : pérdida de carga localizada, m  
 $N$ : exponente hidráulico para el cálculo del flujo normal, adim  
 $M$ : exponente hidráulico para el cálculo del flujo crítico, adim  
 $C, c_1, c_2$ : constantes  
 $G, F$ : son funciones que se calculan en base a la profundidad  $z$ , adim  
 $\omega$ : unidad de peso del agua,  $kg/m^3$



$\bar{W}$ : peso del agua promediado,  $\text{kg/m}^3$

$Q_c$ : gasto asociado a un tirante crítico  $y_c$ ,  $\text{m}^3/\text{s}$

$Q_n$ : gasto asociado a un tirante normal  $y_n$ ,  $\text{m}^3/\text{s}$

$y_0$ : tirante normal (variable definida por Jan y Chen (2010)), m

$y_i$ : tirante inicial, m

$y_f$ : tirante final, m

$\sigma$ : parámetro adimensional que indica el sentido (positivo o negativo) de la pendiente del fondo  $S_0$ , adim

$F_0$  y  $F_f$ : factores de normalización que son constantes para cada perfil, adim

$m$ : pendiente de la recta de la función, adim

$\varepsilon_y$ : error en el tirante  $y$ , adim

$\phi_1$  y  $\phi_2$ : valores cercanos a la unidad que permiten evitar las singularidades de la ecuación dinámica, adim

$C_1, C_2, C_3, C_0$ : constantes

$x_i$ : punto inicial en el eje  $x$ , m

A, B y C: constantes de la función equivalente



## RESUMEN

Para fines prácticos la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado, debido a su no linealidad, se resuelve mediante técnicas numéricas basadas en una discretización espacial del dominio de flujo, como lo es el método de diferencias finitas. Si bien estos métodos arrojan resultados ingenierilmente satisfactorios y suficientemente precisos, es de reconocer que desde sus orígenes ha existido un interés técnico y académico por el desarrollo de soluciones exactas o semi-empíricas; a manera de ejemplo se pueden citar las propuestas de Bakhmeteff (1932), Chow (1959), Henderson (1966), Chaudhry, Schulte (1985), Vetunelli (2004), Vatankhah (2010) y Jan (2012), entre otros; en las que se resuelve la ecuación dinámica mediante la integración exacta de funciones geoméricamente equivalentes, pero su aplicación sólo se adapta a determinadas geometrías y condiciones de frontera. Por tal razón prevalecen los métodos numéricos.

Bajo este marco de referencia se propone una función equivalente, para la integración de la ecuación dinámica, la cual es de fácil integración y válida para geometrías prismáticas y diferentes condiciones de frontera.

Se proponen dos metodologías de cálculo, la primera consiste en la correlación lineal entre la ecuación dinámica y la equivalente, dentro de un rango definido de variación del tirante  $y$  (siendo  $y_c$  y  $y_n$  los tirantes crítico y normal respectivamente), se calculan los parámetros de ajuste, la pendiente  $a$  y la ordenada al origen  $b$ . De esta manera al integrar la ecuación resultante se obtiene una función continua del perfil de flujo con la cual se puede conocer para cada valor de  $y$  su correspondiente posición en el espacio  $x$ . La segunda metodología consiste en la obtención de los coeficientes con una fórmula directa la cual permite formar una función equivalente que de igual manera se puede integrar, según los límites del problema a tratar.

Al comparar los resultados, con los obtenidos con métodos numéricos y de perfiles experimentales encontrados en la literatura, se demuestra una buena aproximación, con la ventaja de que la solución derivada de la función equivalente permite iniciar el cálculo en las inmediaciones de la condición de frontera, y así salvar ciertas singularidades.



## 1 INTRODUCCIÓN

Dentro del campo de la ingeniería hidráulica, la determinación del perfil de la superficie libre del agua en sistemas a superficie libre, mediante la ecuación de flujo gradualmente variado, es de gran utilidad para el diseño y revisión de canales trabajando a flujo permanente.

Hay varios procedimientos para resolver la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado para conocer el perfil de flujo en canales. De manera tradicional dichos métodos se dividen en métodos numéricos, de integración directa y gráficos. La integración numérica es la aplicación más generalizada y es utilizada tanto en cauces naturales como en canales prismáticos, mientras que los métodos de integración directa tienen su principal aplicación en canales prismáticos, y los gráficos han caído en desuso.

Una de las ventajas de los métodos de integración directa radica en la posibilidad de obtener, en un solo cálculo, la longitud a la que se presenta un determinado tirante dentro del perfil de flujo, mientras que los numéricos avanzan a la solución mediante un proceso de solución discreta del perfil de flujo y consecuentemente requieren un elevado número de cálculos.

Si bien hay que reconocer que con el arribo de computadoras cada vez más rápidas y accesibles, las soluciones numéricas se han convertido en la alternativa de solución más utilizada; no obstante en el ámbito académico y científico prevalece un interés por encontrar soluciones analíticas y semi-analíticas que sean aplicables ante cualquier tipo de perfil y de canal prismático, tema que hasta la fecha no ha sido resuelto en su totalidad. Es bajo este argumento que se desarrolla y se justifica el presente trabajo de investigación.

Con base en lo anterior en el cuerpo principal de esta tesis se proponen dos metodologías de cálculo, la primera consiste en la correlación lineal entre la ecuación dinámica y la equivalente, dentro de un rango de variación del tirante  $y$ . De esta manera al integrar la ecuación resultante se obtiene una función continua del perfil de flujo con la cual para cada valor de  $y$  se calcula su correspondiente posición en el espacio  $x$ . La segunda metodología consiste en la obtención de los coeficientes con una fórmula directa que de igual manera se puede integrar, según los límites del perfil de flujo en estudio.



## **2 OBJETIVOS**

Proponer un conjunto de funciones, numéricamente equivalentes e integrables analíticamente, para representar la ecuación de flujo gradualmente variado, y a través de las mismas obtener una solución “directa” de los perfiles de flujo permanente que ocurren ante diferentes condiciones de frontera en canales prismáticos.

Demostrar a partir de esta propuesta con una serie de ejemplos, que las funciones equivalentes presentan resultados numéricamente satisfactorios respecto a las soluciones discretas, con un menor esfuerzo computacional.



### 3 MARCO TEÓRICO

El flujo uniforme en un canal satisface la condición de equilibrio dinámico entre el componente de la fuerza de peso del líquido en la dirección del movimiento y la fuerza de fricción (cortante) generada sobre la frontera sólida de la conducción, lo que equivale a la igualdad de la pérdida por fricción entre dos secciones cualesquiera con el desnivel entre ellas. Esto se logra cuando la velocidad del flujo se mantiene constante a lo largo del canal, lo que es posible únicamente si las dimensiones de la sección y el tirante son constantes (Sotelo, 2002). Esto significa que el flujo uniforme puede ocurrir sólo en un canal prismático donde el gasto es constante. Bajo estas condiciones el flujo, que también se conoce como flujo normalizado, presenta un tirante constante al cual se le denomina tirante normal.

Cualquier otro flujo, incluso en un canal prismático, que no satisfaga las condiciones de equilibrio dinámico, se convierte en variado dentro de un tramo del canal o en toda su longitud. En un canal prismático puede producirse en uno o varios tramos antes o después del flujo uniforme, como resultado de cambios en la rugosidad, en la pendiente, en las dimensiones de la sección, o por efecto de estructuras construidas en el canal para controlar niveles del agua o el gasto, como un vertedor o una compuerta (Sotelo, 2002).

El flujo variado puede ocurrir en cualquier canal (prismático o no) pero su tendencia será tratar de alcanzar las condiciones del uniforme en los tramos prismáticos de la conducción. Esto se logra o no plenamente, dependiendo de la rugosidad del canal y de la longitud que tenga.

#### 3.1 Flujo Gradualmente Variado

En el tratamiento del flujo gradualmente variado se considera que ocurren cambios pequeños del tirante en la dirección del movimiento, si se comparan con la distancia en que se producen y por lo general los perfiles de flujo tienden a normalizarse en la medida en que se desarrollan en el espacio; por lo que es común mantener el tirante normal como una de las condiciones de frontera (Sotelo, 2002).

El flujo gradualmente variado es un tipo de flujo estable no uniforme, en el que el tirante y la velocidad no sufren cambios repentinos ni rápidos, sino que varían de forma tan gradual que la superficie del agua puede considerarse continua. En consecuencia es posible desarrollar una ecuación diferencial que describa la variación incremental del tirante  $y$  con respecto a  $x$ , la distancia a lo largo del canal. Un análisis de esta relación permite predecir las diversas tendencias que el perfil de la superficie del agua podría asumir con base a la geometría del canal, la magnitud de la descarga y las condiciones de frontera conocidas (Potter, 2003).



El flujo gradualmente variado es un flujo permanente cuya profundidad varía de manera gradual a lo largo de la longitud del canal. Esta definición establece dos condiciones:

- 1) El flujo es permanente; es decir, las características hidráulicas de flujo permanecen constantes para el intervalo de tiempo bajo consideración, y
- 2) Las líneas de corriente son paralelas; es decir, prevalece la distribución hidrostática de presiones sobre la sección del canal.

Todas las teorías así desarrolladas en general giran alrededor de la siguiente suposición básica:

- A. La pérdida de energía en una sección es la misma que para un flujo uniforme que tiene la velocidad y el radio hidráulico de la sección. De acuerdo con esta suposición, la ecuación de flujo uniforme puede utilizarse para evaluar la pendiente de energía de un flujo gradualmente variado en una sección de canal determinada, y el correspondiente coeficiente de rugosidad desarrollado en principio para flujo uniforme se aplica al variado. Esta suposición nunca ha sido confirmada de manera precisa por experimentos o por teoría, pero los errores que surgen de ella se cree que son pequeños comparados con aquellos en los cuales se incurre comúnmente durante el uso de una ecuación de flujo uniforme y en la selección del coeficiente de rugosidad. A través de los años esta suposición ha demostrado ser una base confiable para el diseño. Aunque esta suposición es más correcta para flujos variados donde la velocidad se incrementa que aquellos en que la velocidad disminuye, debido a que cuando la velocidad se incrementa las pérdidas son casi en su totalidad por efectos friccionales, pero cuando la velocidad disminuye se puede tratar de pérdidas debido a remolinos (Chow, 1994).

Además de la anterior suposición básica, también se utilizan las siguientes suposiciones:

- B. La pendiente del canal es baja, esto significa que:
  1. El tirante es el mismo sin importar si se utiliza la dirección vertical o normal (al fondo del canal).
  2. El factor de corrección de presiones  $\cos\theta$  (aplicado a la profundidad de la sección de flujo) es igual a la unidad, según Marbello (2005) esto es válido en la práctica para  $\theta < 7^\circ$ .
  3. No ocurre atrapamiento de aire. En caso de que exista un notable atrapamiento de aire, los cálculos deben llevarse a cabo suponiendo que no existe atrapamiento y después deben corregirse.
- C. El canal es prismático; es decir, el canal tiene alineamiento y forma constantes.
- D. La distribución de velocidad en la sección de canal es fija. Luego los coeficientes de distribución de velocidades son constantes.
- E. La conductividad  $K$  y el factor de sección  $Z$  (conceptos que se definirán más adelante) son funciones exponenciales del tirante.
- F. El coeficiente de rugosidad es independiente del tirante y constante a través del tramo del canal bajo consideración (Chow, 1994).

### 3.2 Ecuación Dinámica

Para el análisis de flujo en canales abiertos es necesario predecir el comportamiento de los perfiles de la superficie libre de agua, en función de las variables geométricas e hidráulicas.

Considere el perfil de flujo gradualmente variado en la longitud elemental  $dx$  de un canal abierto (figura 1). La altura total de energía por encima del nivel de referencia en la sección uno aguas arriba es:

$$H = z + y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

Ecuación 1

Donde:

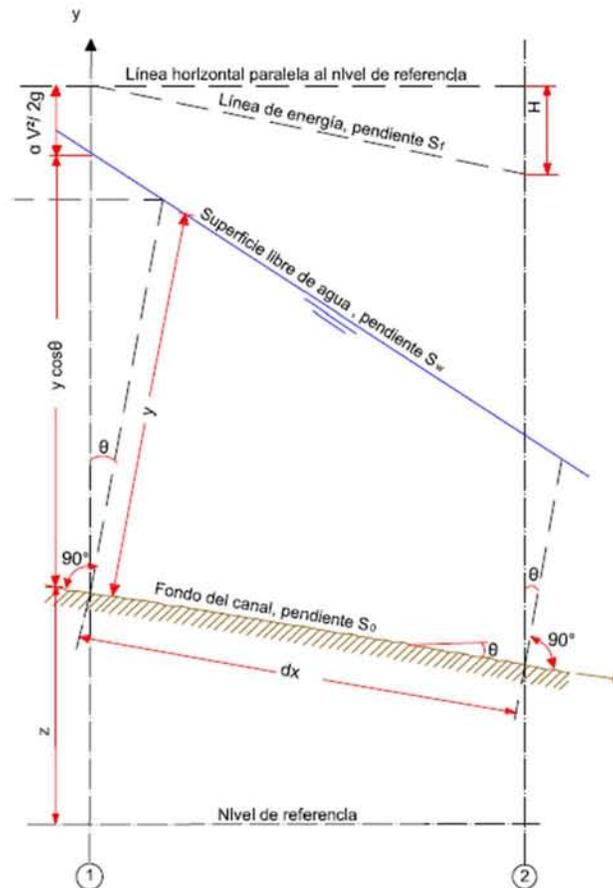


Figura 1. Deducción de la ecuación del flujo gradualmente variado  
Fuente: Hidráulica de canales abiertos, Chow, 1994

Donde  $H$  es la altura total de energía en metros;  $z$  es la distancia vertical del fondo del canal por encima del nivel de referencia en metros;  $y$  es el tirante en metros (corresponde a la profundidad de la sección por el coseno del ángulo de la pendiente del fondo del canal



$\theta$ , con un valor pequeño,  $\cos\theta \approx 1$ );  $\theta$  es el ángulo de la pendiente del fondo en grados;  $\alpha$  es el coeficiente de coriolis; y  $V$  es la velocidad media del flujo en m/s. Como  $\theta$  y  $\alpha$  son constantes a través del tramo del canal bajo consideración, al tomar el fondo del canal como el eje  $x$  y al derivar la ecuación 1 con respecto a la longitud  $x$  del perfil de la superficie del agua, el cual se mide a lo largo del eje  $x$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} \left( y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) \quad \text{Ecuación 2}$$

La pendiente de la línea de energía se define como el seno del ángulo de la pendiente, es positiva si desciende en la dirección del flujo y negativa si asciende (Chow, 1994).

El cambio de energía respecto a la distancia  $x$ , es decir la pendiente de la línea de energía; será siempre negativa para el sistema de referencia especificado (ecuación 3):

$$S_f = -\frac{dH}{dx} \quad \text{Ecuación 3}$$

Y el cambio de elevación del fondo del canal con respecto a la distancia, o pendiente del fondo es:

$$S_0 = -\frac{dz}{dx} \quad \text{Ecuación 4}$$

Al sustituir estas pendientes

$$S_0 - S_f = \frac{d}{dx} \left( y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) \quad \text{Ecuación 5}$$

y al resolver para  $dy/dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{\cos \theta + \frac{d}{dy} \left( \alpha \frac{V^2}{2g} \right)} \quad \text{Ecuación 6}$$

$$\text{Como } \frac{dA}{dy} = T \quad \text{Ecuación 7}$$

Término que se conoce como el ancho de la superficie libre de agua, es la derivada del área entre el tirante. Desarrollando:

$$\alpha \frac{d}{dy} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = \alpha \frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2 A^{-2}}{2g} \right) = \alpha \left( \frac{Q^2}{2g} \right) \frac{dA^{-2}}{dy} = -\frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = -\frac{\alpha Q^2}{gA^3} T = -\frac{\alpha Q^2}{gY} \quad \text{Ecuación 8}$$



Donde:

$$Fr^2 = \frac{\alpha V^2}{gY} \quad \text{Ecuación 9}$$

Siendo el número de Froude:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gY}} \quad \text{Ecuación 10}$$

$$Y \text{ el tirante hidráulico } Y = \frac{A}{B} = \frac{A}{T}$$

Donde:

$B$ , es el ancho de la base del canal (m)

$A$ , es el área de la sección hidráulica ( $m^2$ )

Esta es la ecuación diferencial general para flujo gradualmente variado. En la cual el ángulo  $\theta$  se ha supuesto constante o independiente de  $x$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad \text{Ecuación 11}$$

Donde:

$dy/dx$ , es la derivada del tirante con respecto al desplazamiento en el eje  $x$

$S_0$ , es la pendiente del fondo del canal

$S_f$ , es la pendiente de la línea de energía específica

$Fr$ , es el número de Froude

El término  $\alpha \frac{d}{dy} \left( \frac{V^2}{2g} \right)$  en la ecuación de flujo variado representa el cambio en la carga de velocidad. Se ha supuesto que el coeficiente  $\alpha$  es constante de una sección a la otra en el tramo del canal bajo consideración. Como  $V = Q/A$  es constante,  $dA/dy = T$ , por lo tanto el término de carga de velocidad puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\alpha \frac{d}{dy} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{\alpha Q^2 dA^{-2}}{2g dy} = \frac{\alpha Q^2 dA}{gA^3 dy} = \frac{\alpha Q^2 T}{gA^3} \quad \text{Ecuación 12}$$

$$\text{Como } Z = \sqrt{A^3/T} \quad \text{Ecuación 13}$$

la ecuación 12 puede escribirse como:

$$\alpha \frac{dy}{dx} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{\alpha Q^2}{gZ^2} \quad \text{Ecuación 14}$$



Al suponer que un flujo crítico con caudal igual a  $Q$  ocurre en la sección, tenemos:

$$Q = Z_c \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \quad \text{Ecuación 15}$$

Donde  $Z_c$  es el factor de sección para el cálculo de flujo crítico correspondiente al caudal  $Q$  y a la profundidad  $y_c$ . Ahora, al sustituir la ecuación 14 para  $Q$  en la ecuación 15 y al simplificar,

$$\alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{Z_c^2}{Z^2} \quad \text{Ecuación 16}$$

El término  $S_f$  de la ecuación 11 representa la pendiente de la línea de energía. De acuerdo con las primeras suposiciones básicas, la pendiente de una sección de canal con flujo gradualmente variado es igual a la pendiente de energía del flujo uniforme que tiene la velocidad y el radio hidráulico de la sección. Cuando se utiliza la ecuación de Manning, la pendiente de energía es (Chow, 1994):

$$S_f = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} \quad \text{Ecuación 17}$$

Donde  $R$  es el radio hidráulico en metros. Cuando se utiliza la ecuación de Chézy,

$$S_f = \frac{V^2}{C^2 R} \quad \text{Ecuación 18}$$

En una forma general, expresada en términos de la conductividad  $K$ :

$$K = \frac{Q}{\sqrt{S}} \quad \text{Ecuación 19}$$

la pendiente de energía de la ecuación puede escribirse como:

$$S_f = \frac{Q^2}{K^2} \quad \text{Ecuación 20}$$

Supóngase que un flujo uniforme con caudal igual a  $Q$  ocurre en la sección. La pendiente de energía sería igual a la pendiente del fondo y la ecuación 20 puede escribirse como:

$$S_0 = \frac{Q^2}{K_n^2} \quad \text{Ecuación 21}$$

Donde  $K_n$  es la conductividad para el flujo uniforme con un tirante normal  $y_n$ . Esta  $K_n$  debe distinguirse de  $K$  en la ecuación 20. La notación  $K$  representa el valor numérico de la conductividad correspondiente a una profundidad  $y$  del flujo gradualmente variado. El valor de  $K_n$  es la conductividad calculada para un caudal  $Q$  correspondiente al tirante normal  $y_n$  como si el flujo se considerara uniforme (Chow, 1994).

Al dividir la ecuación (20) entre la (21),



$$\frac{S_0}{S_f} = \frac{K_n^2}{K^2}$$

Ecuación 22

Al sustituir la ecuación (16) y (21) en la (11).

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1-(K_n/K)^2}{1-(Z_c/Z)^2}$$

Ecuación 23

Ésta es otra forma de la ecuación de flujo gradualmente variado.

Existen otras formas muy conocidas de la ecuación de flujo gradualmente variado que pueden ser fácilmente deducidas, como:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1-(Q/Q_n)^2}{1-(Q/Q_c)^2}$$

Ecuación 24

Donde  $Q$  es el caudal determinado para el flujo gradualmente variado con un tirante  $y$ ,  $Q_n$  es el caudal normal con un tirante normal igual a  $y_n$ , y  $Q_c$  es el caudal crítico correspondiente a un tirante crítico igual a  $y_c$  (Chow, 1994).

### 3.3 Perfiles de Flujo

La primera clasificación de los perfiles del flujo variado fue hecha por Bakhmeteff y está basada en la pendiente del canal y la zona en que se aloja el perfil.

Para un valor dado de  $Q$  en un canal de pendiente pequeña y sección transversal de forma cualquiera, la ecuación diferencial del flujo gradualmente variado (11) no tiene una solución explícita. Sin embargo, es posible analizar la variación del tirante  $y$  con la distancia  $x$  en diferentes circunstancias, considerando la forma que adopta el perfil de flujo. Para este fin, es necesario considerar los signos del numerador y el denominador de la ecuación dinámica (11) y de estos casos el de  $dy/dx$ , a fin de conocer el incremento o decremento de  $y$  en la dirección del flujo (Sotelo, 2002).

Por lo que respecta a la pendiente de la plantilla,  $S_0$  es positiva si desciende en la dirección del flujo, negativa si asciende y cero si es horizontal. Un flujo uniforme de tirante normal  $y_n$  se puede establecer sólo sobre una pendiente positiva, por lo que dicha pendiente y los perfiles de flujo resultantes se designan como:



Subcrítica si  $y_n > y_c$ ; perfiles tipo M

Crítica si  $y_n = y_c$ ; perfiles tipo C

Supercrítica si  $y_n < y_c$ ; perfiles tipo S

La clasificación de la pendiente con alguna de estas designaciones depende de su magnitud, de la rugosidad del canal y en menor grado del gasto.

En algunos casos la pendiente puede ser:

Horizontal,  $y_n = \infty$ ; perfiles tipo H

Negativa o adversa,  $y_n$  no existe; perfiles tipo A

En el caso de pendiente cero no existe posibilidad de flujo uniforme; en efecto para  $S_0 = 0$  el tirante normal es  $y_n = \infty$ . Para  $S_0 < 0$ , el flujo uniforme y un valor de  $y_n$  son físicamente imposibles.

De la ecuación de Manning (17) se obtiene la pendiente de la línea de energía. Por otra parte el número de Froude adopta el valor de uno para el régimen crítico, mayor que uno si los tirantes del perfil del flujo variado son menores que el crítico y menor que uno en caso contrario.

Para un gasto dado y la mayoría de las secciones usuales,  $S_f$  y  $Fr^2$  son decrecientes en forma continua a medida que el tirante crece. Esto es evidente en secciones anchas, donde al crecer el tirante,  $R$  y  $A$  también crecen, pero  $T$  prácticamente no cambia (Sotelo 2002).

Por definición de flujo uniforme,  $S_f = S_0$  cuando  $y = y_n$  por lo cual se concluye ;

$$S_f \geq S_0, \text{ según que } y \geq y_n$$

$$Fr^2 \geq 1 \text{ según que } y \geq y_c$$

Con la ayuda de estas desigualdades se puede observar fácilmente como se afecta el comportamiento de  $dy/dx$  al cambiar las magnitudes de  $y$ ,  $y_n$  y  $y_c$ .

Cualquiera que sea la pendiente, el gasto y la sección del canal, las líneas que indican el tirante normal y del crítico respecto de la plantilla, dividen al espacio en que puede desarrollarse el perfil en esas tres zonas, llamadas:

Zona 1. El espacio arriba de la línea superior

Zona 2. El espacio entre las dos líneas

Zona 3. El espacio debajo de la línea inferior



En ciertos casos, alguna de las zonas puede desaparecer, por ejemplo, la dos cuando la pendiente es crítica y  $y_n=y_c$ . Sin embargo, las restantes mantienen el número de la zona antes asignado.

Dentro de cada zona queda alojado cualquier perfil, de modo que si:

$\frac{dy}{dx} > 0$ , el perfil de la superficie libre diverge de la plantilla

$\frac{dy}{dx} = 0$ , el perfil de la superficie libre es paralelo a la plantilla

$\frac{dy}{dx} < 0$ , el perfil de la superficie libre converge con la plantilla

Esto significa que existen diferentes formas para el perfil del flujo gradualmente variado (12 en total), que se muestran en la figura 2. La forma o tipo del perfil de flujo depende de las condiciones particulares en el canal (Sotelo, 2002).

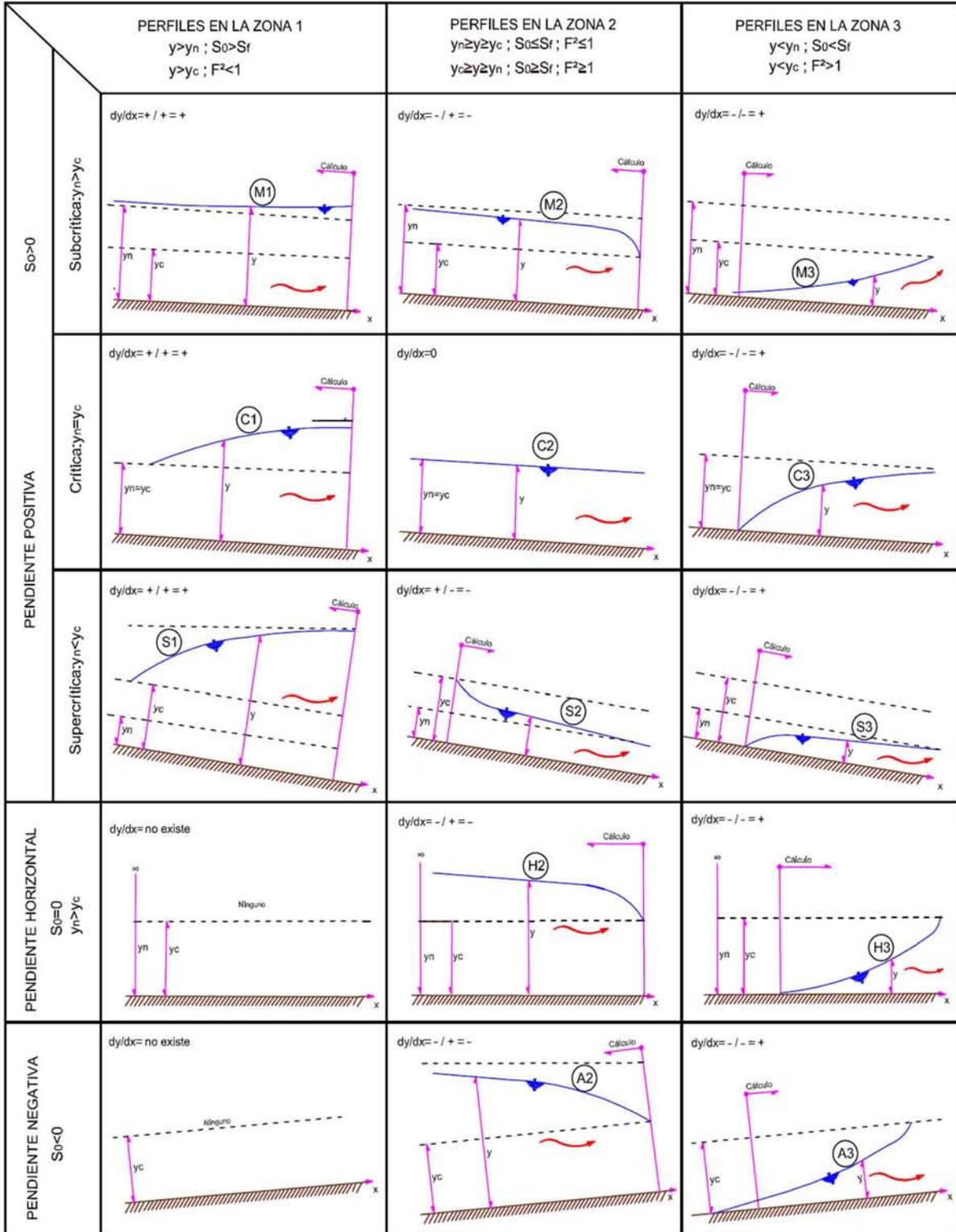


Figura 2. Clasificación de los perfiles de flujo gradualmente variado  
Fuente: Hidráulica de Canales, Sotelo, 2002



En cada zona existe un perfil distinto, válido dentro de los límites de la zona. La forma del perfil en la proximidad de las fronteras de la zona se puede estudiar como sigue:

- a) Cuando  $y$  tiende a  $\infty$ ,  $Fr^2$  y  $S_f$  tienden a cero y en la ecuación dinámica (11),  $dy/dx$  tiende a  $S_0$ . Esto significa que la superficie del agua es asintótica a la horizontal (perfiles H2, A2). Cuando  $y$  tiende a  $y_n$  es porque  $S_f$  tiende a  $S_0$ ,  $dy/dx$  tiende a cero, y el perfil del flujo se vuelve paralelo a la plantilla del canal, es decir, tiende al flujo uniforme (perfiles M1, M2, C2, C3, S2, S3).
- b) Cuando  $y$  tiende a  $y_c$ ,  $Fr^2$  tiende a uno y  $dy/dx$  tiende a  $\infty$ ; es decir, el perfil del flujo tiende a la vertical en la proximidad del tirante crítico. Esto significa que cuando el perfil se desarrolla en régimen supercrítico se presenta un salto hidráulico antes de que  $y$  alcance el valor de  $y_c$  (perfiles M3, H3, A3); por el contrario, si el perfil se desarrolla en régimen subcrítico se genera una gran curvatura al aproximarse al valor  $y_c$ , para volverse vertical en el punto en que  $y=y_c$  (perfiles M2, H2, A2). En ambos casos se presenta localmente un flujo rápidamente variado curvilíneo, que no puede tratarse con la teoría aquí presentada.
- c) Cuando  $y$  tiende a cero, tanto  $S_f$  como  $Fr^2$  tienden a  $\infty$ , de manera que  $dy/dx$  tiende a un límite positivo finito, cuya magnitud depende de la sección particular de que se trate. Este resultado es de poco interés debido a que no puede existir un tirante igual a cero para un gasto mayor de cero (Sotelo, 2002).

A continuación se muestran los comentarios destacados de los perfiles de flujo del libro de Hidráulica de Canales (Sotelo 2002):

Tipo M. El perfil M1 es muy común. La presencia de estructuras de control, como vertedores y compuertas, u otros accidentes naturales como estrechamientos y curvas, sobreelevan la superficie del agua en un canal o río y se produce un perfil del tipo M1 que puede extenderse varios kilómetros hacia aguas arriba, donde es asintótico al perfil en flujo uniforme. El perfil M2 ocurre cuando el tirante disminuye, por ejemplo antes de un cambio de pendiente subcrítica a supercrítica, de un estrechamiento de la sección o en la proximidad de una caída. El perfil M3 se encuentra aguas abajo de un cambio de pendiente de supercrítica a subcrítica, o después de la descarga de una compuerta y su longitud está regida por las condiciones de aguas abajo, ya que termina normalmente en un salto hidráulico. Los perfiles M2 y M3 son más cortos en comparación con el M1.

Tipo S. El perfil S1 se produce antes de una estructura de control, como una presa o una compuerta, situada en un canal de gran pendiente. Principia después de un salto hidráulico y termina en la obstrucción. El perfil S2 es generalmente muy corto y es común en la entrada de un canal de gran pendiente o después de un cambio de pendiente subcrítica a supercrítica. El perfil S3 se produce aguas abajo de una compuerta en un canal de gran pendiente, o aguas abajo de su intersección con otro de menor pendiente.



Tipo C. Como los tirantes normal y crítico coinciden, hay solo dos perfiles. Estos son aproximadamente horizontales y la inestabilidad propia del estado crítico se manifiesta en la forma de una ondulación superficial apreciable.

Tipo H. El tirante normal es infinito y se forman sólo los perfiles H2 y H3. El perfil H2 se produce después de que un canal de pendiente subcrítica cambia a horizontal. El perfil H3 ocurre después de una compuerta o de un cambio de pendiente supercrítica a horizontal.

Tipo A. La pendiente negativa en un canal es poco común. El tirante normal no existe y los perfiles que se forman tienen las mismas tendencias que los H2 y H3. Los perfiles A2 y A3 son extremadamente cortos (Sotelo, 2002).

### 3.4 Métodos de Resolución

Cuando se busca representar un fenómeno hidráulico se requiere establecer un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, cuya solución depende de las condiciones iniciales y de frontera que se le den.

Como se había mencionado la ecuación dinámica debido a que es altamente no lineal, se resuelve ya sea por métodos numéricos, integración gráfica o integración analítica. En los siguientes apartados se describirán brevemente los métodos más importantes de solución de la ecuación diferencial de flujo gradualmente variado.

El procedimiento computacional de cualquiera de los métodos comienza a partir de un punto en el que las características hidráulicas están claramente definidas y procede el cálculo en dirección aguas arriba en flujo subcrítico y hacia aguas abajo cuando se trata de flujo supercrítico.

#### 3.4.1 Método Gráfico

Este método tiene como objetivo integrar la ecuación dinámica de flujo gradualmente variado. Considerando dos secciones de canal localizadas a unas distancias  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente desde un origen escogido y con las profundidades de flujo  $y_1$  y  $y_2$  correspondientes. La distancia a lo largo del fondo del canal es:

$$x = x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{dy} dy \quad \text{Ecuación 25}$$

Suponiendo varios valores de  $y$  y  $x$  se calculan los valores correspondientes de  $dx/dy$ , el cual es el recíproco del lado derecho de la ecuación de flujo gradualmente variado (11). Luego se construye una curva de  $y$  contra  $dx/dy$ . De acuerdo con la ecuación dinámica (11), el valor de  $x$  es el área sombreada formada por la curva, el eje de las  $y$  y las



ordenadas de  $dx/dy$  correspondientes a  $y_1$  y  $y_2$ . Luego puede medirse esta área y determinarse el valor de  $x$ .

Este método tiene una aplicación amplia. Se aplica al flujo en canales prismáticos y no prismáticos de cualquier forma y pendiente. El procedimiento es sencillo y fácil de seguir. Sin embargo, puede volverse muy complicado cuando se aplica a problemas reales. No es muy utilizado en la actualidad, fue reemplazado por los métodos numéricos a partir del uso de las computadoras (Chow, 1994).

### 3.4.2 Métodos Numéricos

El método numérico más común para la solución de la ecuación dinámica es el de incrementos finitos y hay algunas variantes, entre los más conocidos se encuentran el método de paso directo y método del paso estándar que son similares en cuanto a su procedimiento pero se aplican en diferentes condiciones. En la actualidad los métodos de discretización en diferencias finitas son los más utilizados para calcular flujo gradualmente variado. Ambos procedimientos son descritos a detalle, por ejemplo en los textos de Chow (1973) y Henderson (1966, citado en Chow, 1994 p.232).

#### a) Método directo por pasos

En general, un método de paso se caracteriza en dividir el canal en tramos cortos y llevar a cabo los cálculos paso a paso de un extremo al otro. Existe una gran variedad de métodos de paso, unos parecen ser superiores a otros, pero no se ha encontrado que alguno sea mejor en todos los casos o sea más exacto. El método de paso se aplica en canales prismáticos y es un método sencillo (Chow, 1994).

Se basa en el principio de la conservación de la energía (1), mediante el teorema de Bernoulli, al igualar las alturas en los extremos de las secciones de un canal:

$$S_0 \Delta x + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + S_f \Delta x \quad \text{Ecuación 26}$$

Al resolver para  $\Delta x$ ,

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - S_f} = \frac{\Delta E}{S_0 - S_f} \quad \text{Ecuación 27}$$

Donde  $E$  es la energía específica o, al suponer  $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ ,

$$E = y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad \text{Ecuación 28}$$

En las ecuaciones anteriores,  $y$  es la profundidad del flujo,  $V$  es la velocidad media,  $\alpha$  es el coeficiente de energía,  $S_0$  es la pendiente del fondo y  $S_f$  es la pendiente de fricción. El

valor promedio de  $S_f$  se denota mediante  $S_{fm}$  y para calcularla se utiliza la ecuación 17 de Manning (García, 2006).

### b) Método estándar por pasos

Este método también es aplicable a canales tanto prismáticos como no prismáticos. Generalmente es utilizado para calcular los tirantes en los ríos. Este cálculo se lleva a cabo mediante pasos de estación a estación en los cuales se determinan las características hidráulicas. En tales casos la distancia entre las estaciones es conocida y el procedimiento es determinar la profundidad de flujo en las estaciones. Para explicar este método es conveniente referir la posición de la superficie del agua con respecto a un nivel de referencia horizontal. En la figura 3 las superficies del agua por encima del nivel de referencia en las dos secciones extremas son:

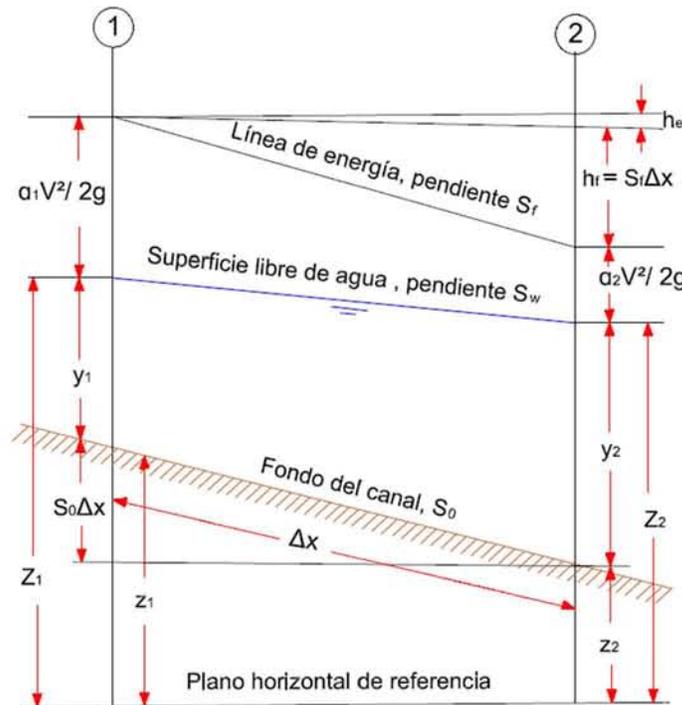


Figura 3. Tramo de canal para la deducción de los métodos de paso

$$Z_1 = S_0 \Delta x + y_1 + z_2$$

Ecuación 29

y

$$Z_2 = y_2 + z_2$$

Ecuación 30

Donde  $y_1$  es tirante aguas arriba en metros,  $y_2$  es tirante aguas abajo en metros,  $z_1$  es la altura del plano horizontal de referencia al inicio de  $y_1$ ,  $z_2$  es la altura del plano horizontal de



referencia al inicio de  $y_2$ ,  $Z_1$  es la suma del tirante  $y_1$  y de la altura  $z_1$  y  $Z_2$  es la suma del tirante  $y_2$  y de la altura  $z_2$ .

$$h_f = S_f \Delta x = \frac{1}{2} (S_1 + S_2) \Delta x \quad \text{Ecuación 31}$$

Donde la pendiente de la línea de energía  $S_f$  se toma como el promedio de las pendientes en las dos secciones extremas. Sustituyendo las anteriores:

$$Z_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_f + h_0 \quad \text{Ecuación 32}$$

Donde  $h_0$ , se añade para tener en cuenta las pérdidas por remolinos.

Las alturas totales en las dos secciones extremas son

$$H_1 = Z_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{y} \quad H_2 = Z_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{Ecuación 32-1}$$

Por consiguiente, la ecuación 32 se convierte en:

$$H_1 = H_2 + h_f + h_e$$

Donde  $h_f$  es la pérdida de energía y  $h_e$  son las pérdidas de carga localizadas debidas a estructuras, estrechamientos, etc. Esta es la ecuación básica que define el procedimiento del método del paso estándar, que es un método muy apropiado para el cálculo en canales naturales. (Subramanya, 1982)

### c) Método de Runge-Kutta cuarto orden

La ecuación dinámica es función únicamente de “y” para unos valores dados de caudal, pendiente, rugosidad y geometría, lo que hace posible aplicar alguno de los métodos conocidos de Runge-Kutta o de Euler. El método de Runge-Kutta más aproximado es el de cuarto orden y viene definido por las siguientes relaciones:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{Ecuación 33}$$

$$k_1 = \Delta x F(y_i)$$

$$k_2 = \Delta x F\left(y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta x F\left(y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = \Delta x F(y_i + k_3)$$



Para utilizar el método anterior el canal debe subdividirse en  $n$  tramos de intervalos de longitud constante  $\Delta x$ . Se comienza el proceso de integración desde el contorno en el que se conocen las variables del flujo y de esta manera es posible conocer el valor de los coeficientes  $k_1, k_2, \dots$ , etc, ya que se conocen los valores de  $i, y$  y  $\Delta x$ . Con ellos se determina el valor del tirante en el siguiente punto de discretización. El cálculo ha de repetirse así hasta completar el total de la longitud del cauce (Subramanya, 1982).

#### d) Método del punto singular

Los análisis anteriores se hicieron para canales prismáticos. Para un tratamiento completo de los perfiles de flujo, en canales prismáticos o no prismáticos con pendientes constantes o variables, se ha hecho uso de métodos de aproximación. Una de estas aproximaciones es el uso de la teoría del punto singular. Esta teoría fue desarrollada por Poincaré (1881, citado por Chow, 1994 p.233) pero fue aplicada por primera vez a estudios de flujo en canales de pendiente variable por Massé (1938 citado por Chow, 1994 p.233).

Para propósitos de simplicidad en el análisis, sólo se consideran canales con pendientes pequeñas. Si se permite que el numerador y el denominador de la ecuación dinámica (11) se represente por dos funciones, o

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1-(Q/Q_n)^2}{1-(Q/Q_c)^2} = \frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)} \quad \text{o} \quad \frac{F_1}{F_2} \quad \text{Ecuación 34}$$

Luego, si se hace cada una de estas funciones iguales a cero, o

$$F_1 = S_0 \left[ 1 - \left( \frac{Q}{Q_n} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{y} \quad F_2 = 1 - \left( \frac{Q}{Q_c} \right)^2 = 0 \quad \text{Ecuación 35}$$

La solución de la ecuación 35,  $F_1=0$  dará  $Q=Q_n$  o  $y=y_n$ . Por consiguiente,  $F_1=0$  representa la línea de profundidad normal en un canal prismático. En canales no prismáticos,  $F_1=0$  da como resultado un perfil de flujo normal ficticio. Éste es ficticio porque el flujo uniforme en canales no prismáticos es irreal.

En canales prismáticos,  $F_1=0$  y  $F_2=0$  representan dos líneas paralelas. En canales no prismáticos, sin embargo, los dos perfiles pueden intersectarse en un punto, lo que da como resultado una expresión indeterminada, este punto en matemáticas se conoce como punto singular.

Cuando  $Q_n=Q_c$ ,  $y_n=y_c$ , la cual se conoce como profundidad transicional. La curva que representa esta profundidad se conoce como perfil transicional. Un flujo que pasa a través de este perfil en el punto singular cambiará de estado de subcrítico a supercrítico, o viceversa. De hecho, el perfil transicional debe pasar por el punto singular, debido a que en este punto  $Q_n=Q_c=Q$  o  $y_n=y_c=y$  (Chow, 1994).



### 3.4.3 Métodos de Integración Directa

La ecuación diferencial de flujo gradualmente variado no puede expresarse explícitamente en términos de  $y$  para todos los tipos de secciones transversales de canal; por consiguiente una integración directa y exacta de la ecuación es casi imposible. Se han hecho muchos intentos para resolver la ecuación para algunos casos especiales o para introducir suposiciones que hacen manejable la ecuación en términos de integración matemática. El cuadro 1 relaciona muchos de los métodos de integración directa existentes, ordenados cronológicamente. A pesar de que la lista está incompleta, da una idea general del desarrollo del método de integración directa. La mayor parte de los primeros métodos fueron desarrollados para canales con una sección transversal específica pero las soluciones posteriores, desde la de Bakhmeteff, fueron diseñadas para canales de todas las formas. La mayor parte de los primeros métodos utilizan la ecuación de Chezy, en tanto que los últimos métodos utilizan la ecuación de Manning (Chow, 1994).

Los métodos de integración directa se han venido investigando desde hace más de 100 años, uno de los primeros investigadores en adentrarse en este tema fue Bresse (1860) citado por Chow (1994, p.246) quien derivó una solución que se conoce como la integral de Bresse para un canal rectangular usando la fórmula de Chezy. Bakhmeteff (1912, citado por Chow, 1994, p.246) propuso una integración directa que se aplica a todas las formas de canal. Su método es una integración aproximada, y requiere una división de la longitud del canal en tramos cortos. Chow (1994) desarrolló una extensión del método de Bakhmeteff la cual permite evitar la complejidad del cálculo.

En un intento por mejorar el método de Bakhmeteff, Monobe (1938, citado por Chow, 1994, p.247) introdujo dos suposiciones para los exponentes hidráulicos. Mediante estas suposiciones los efectos de cambio de velocidad y pérdida de energía se tienen en cuenta sin la necesidad de dividir la longitud del canal en tramos, por lo tanto permite un cálculo más directo.

Más tarde Lee y Von Seggern (1950, citado por Chow, 1994, p.247) sugirieron nuevas suposiciones que arrojaron soluciones más satisfactorias. Von Seggern introdujo una nueva función de flujo variado en adición a la función utilizada por Bakhmeteff. Luego, en este método se necesita una tabla adicional para la nueva función. Sin embargo, en el método de Lee no se requiere una nueva función (Chow, 1994).

Gill (1976, citado por Jan y Chen, 2014, p.27) encontró una solución analítica para un canal de ancho rectangular usando la fórmula de Manning, utilizando por supuesto el coeficiente de rugosidad constante. Kumar (1979) propuso una integración directa para canales rectangulares y triangulares usando la fórmula de Chezy con el coeficiente de fricción constante. Venutelli (2004) y Vatankhah (2010) presentaron las soluciones analíticas para un canal de ancho rectangular con la fórmula de Manning.

No se ha incursionado mucho en los perfiles con pendiente adversa pero, una de las investigaciones más cercanas es de Matzke (1937, citado en Jan y Chen, 2014, p.27),



quien formuló la no dimensionalidad del tirante normal basado en la ecuación dinámica. Allen y Enever (1979) así como Kumar hicieron cálculos de flujo gradualmente variado en canales con pendiente adversa para secciones trapeciales, rectangulares y triangulares. Zaghoul (1990, citado en Jan y Chen, 2014, p.27) integró la ecuación de flujo gradualmente variado para los perfiles en geometría circulares utilizados en cañerías.

Jan y Chen (2012), calculan el flujo gradualmente variado en cauces con pendiente normal y adversa, resolviendo mediante la adimensionalidad del tirante normal basado en la ecuación dinámica usando el método de integración directa y la función hipergeométrica de Gauss que involucra la variable gamma.

**Cuadro 1. Métodos existentes para la integración de la ecuación de flujo gradualmente variado**

Año de publicación	Investigador	Tipo de canal	Ecuación de velocidad	Suposiciones para exponentes hidráulicos
1848	Dupuit	Rectángulo ancho	Chézy	$N = 3, M = 3$
1860	Bresse	Rectángulo ancho	Chézy	$N = 3, M = 3$
1875	Grashof	Rectángulo ancho	Chézy	$N = 3, M = 3$
1880	Rehimann	Rectángulo ancho	Chézy	$N = 4, M = 4$
1898	Tolkmitt	Parábola ancha	Chézy	$N = 3, M = 3$
1900	Masoni	Rectángulo común	Chézy	$K^2 a y^M$
1912 (1932)	Bakhmeteff	Todas las formas	Chézy	$N = 3.5, M = 3$
1914	Schaffernak-Ehrenberger	Rectángulo ancho	$Cy^{0.75}S^{0.5}$ $23.78y^{.336}S^{0.458}$ $22.11y^{0.58}S^{0.43}$	$N = 3.552, M = 3$
1921	Baticle	Trapezio aprox.	Chézy	$K^2 = z^5 = A^2R_1$ donde $z$ es una variable y $dy/dz = \text{const}$
1928	Kozeny	Rectángulo ancho	$Cy^{0.7}S^{0.5}$	$N = 3.4, M = 3$
1930	Schoklisch	Rectángulo ancho	$CR^{0.5}S^{0.5}$	$N = 2 + 2m, M = 3$
1938	Monoebe	Todas las formas	$CR^{0.7}S^{0.5}$	$P \propto y^{2.0041}, A^2y^{2.0041}$
1947	Lee	Todas las formas	Manning	$K^2 \propto yN, A^2y^{0.0041}$
1950	Von Seggern	Todas las formas	Manning	$K^2 \propto y^N, Z^2 \propto y^M$
1968 1979	Allen y Enever Kumar	Rectangular, trapecial, triangular	Manning	
1976	Gill	Rectangular	Manning	
2004	Vetunelli	Rectangular	Manning	$M=10/3, N=3$
2010	Vatankhah	Rectangular	Manning	$M=16/3$ y $N=5$
2012	Jan y Chen	Todas las formas	Manning	Variables

\* $N$  y  $M$  son exponentes hidráulicos que se determinan o pueden ser descritos en términos de la forma de secciones arbitrarias

Fuente: Hidráulica de Canales Abiertos, Chow, 1994 actualizada



### a) Método de Bahkmeteff con modificaciones de Chow

En el método de Bahkmeteff la longitud de canal bajo consideración se divide en tramos cortos. El cambio en la pendiente crítica dentro del rango pequeño de variación de la profundidad en cada tramo se supone constante y la integración se lleva a cabo mediante pasos cortos con la ayuda de una función de flujo variado (Chow, 1994).

El método descrito a continuación se le conoce como el método de integración directa de Bahkmeteff modificado por Chow aunque en realidad es el resultado del estudio de varios métodos de integración directa existentes. Mediante éste, los exponentes hidráulicos se expresan en términos de la profundidad del flujo.

A partir de las ecuaciones para el exponente del flujo uniforme (19) y el exponente hidráulico para el flujo crítico (13),

$$K_n^2 = C_1 y_n^N \quad , \quad K^2 = C_1 y^N \quad \text{Ecuación 36}$$

y

$$Z_{c^2} = C_2 y_c^M \quad , \quad Z^2 = C_2 y^M \quad \text{Ecuación 37}$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son coeficientes. Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación 23, la ecuación de flujo gradualmente variado se convierte en:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (y_n/y)^N}{1 - (y_c/y)^M} \quad \text{Ecuación 38}$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de Bahkmeteff.

Sea  $u = y/y_n$ ; la ecuación anterior puede expresarse para  $dx$  como

$$dx = \frac{y_n}{S_0} \left[ 1 - \frac{1}{1-u^N} + \left( \frac{y_c}{y_n} \right)^M \frac{u^{N-M}}{1-u^N} \right] du \quad \text{Ecuación 39}$$

Esta ecuación puede integrarse para la longitud  $x$  del perfil de flujo. Como el cambio de profundidad en un flujo gradualmente variado por lo general es pequeño, puede suponerse que los exponentes hidráulicos son constantes dentro del rango de los límites de integración. En un caso donde los exponentes hidráulicos sean notoriamente dependientes de  $y$  dentro de los límites de un tramo determinado debe ser subdividido para la integración; luego, los exponentes hidráulicos en cada tramo subdividido pueden suponerse constantes (Chow, 1982).

Entonces la ecuación final:

$$x = \frac{y_n}{S_0} \left[ u - \int_0^u \frac{du}{1-u^N} + \left( \frac{y_0}{y_n} \right)^M \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N} du \right] + const. \quad \text{Ecuación 40}$$



El exponente hidráulico  $M$  depende del tirante hidráulico  $Y$ , el exponente  $N$  que está ligado a  $K$  (conductividad hidráulica) depende del ancho del espejo de agua y del radio hidráulico.

Su rango de valores están entre 2.2 a 9.8 y varía según si la pendiente es positiva o negativa y estas tablas se encuentran ampliamente en el apéndice del libro de Hidráulica de Canales Abiertos (Chow, 1994).

La primera integral del lado derecho de la ecuación anterior se designará mediante  $F(u, N)$ , o

$$F(u, N) = \int_0^u \frac{du}{1-u^N} \quad \text{Ecuación 41}$$

la cual se conoce como función de flujo variado.

La segunda integral de la ecuación 40 también puede expresarse en la forma de la función de flujo variado. Sea  $v = u^{N/J}$  y  $J = N(N - M + 1)$ ; esta integral puede transformarse en:

$$\int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N} du = \frac{J}{N} \int_0^v \frac{dv}{1-v^J} = \frac{J}{N} F(v, J) \quad \text{Ecuación 42}$$

Donde

$$F(v, J) = \int_0^v \frac{dv}{1-v^J} \quad \text{Ecuación 43}$$

Esta es una función de flujo variado parecida a  $F(u, N)$ , excepto que las variables  $u$  y  $N$  se reemplazan por  $v$  y  $J$ , repectivamente.

Utilizando la notación para funciones de flujo variado, la ecuación 40 puede escribirse como:

$$x = \frac{y_n}{s_0} \left[ u - F(u, N) + \left( \frac{y_0}{y_n} \right)^M \frac{J}{N} F(v, J) \right] + const. \quad \text{Ecuación 44}$$

o

$$x = A[u - F(u, N) + BF(v, J)] + const. \quad \text{Ecuación 45}$$

Donde

$$A = \frac{y_n}{s_0}, \quad B = \left( \frac{y_0}{y_n} \right)^M \frac{J}{N}, \quad u = \frac{y}{y_n}, \quad v = u^{N/J}, \quad J = \frac{N}{N-M+1}$$

Y donde  $F(u, N)$  y  $F(v, J)$  son funciones de flujo variado y sus valores se presentan en tablas (Chow, 1994).



## b) Método de Bresse

Bresse fue uno de los pioneros en elaborar estos métodos de integración analítica, cerca del año de 1860 dedujo una ecuación para un canal rectangular de ancho infinito, utilizando la expresión de velocidad ( $V$ ) media de Chézy con  $C$  constante.

El ancho infinito lleva a una importante simplificación:

$$h = R_h = Y \quad \text{Ecuación 46}$$

Por tanto:

$$(K_0/K_h)^2 = (h_0/h)^3 \quad \text{Ecuación 47}$$

Lo que permite escribir la ecuación dinámica (11) de la siguiente forma:

$$\frac{dh}{dx} = S_0 \left( 1 - \left( \frac{h_0}{h} \right)^3 / 1 - \left( \frac{h_0}{h} \right)^3 \left( \frac{S_0}{S_f} \right) \right) \quad \text{Ecuación 48}$$

$S_f$  es la pendiente de la línea de energía

La siguiente integral está compuesta de dos elementos, uno sencillo  $\int d\eta$  y otro complejo  $\int \frac{1}{\eta^3-1} d\eta$ . Al desarrollar la integral entre los límites  $x$  y  $x_1$  se tiene:

$$x - x_1 = \frac{h_0}{S_0} \left[ (\eta - n_1) - \left( 1 - \frac{\alpha C^2 S_0}{g} \right) * (\Omega_\eta - \Omega_{\eta_1}) \right] \quad \text{Ecuación 49}$$

Donde:

$$\Omega_\eta = - \int \frac{d\eta}{\eta^3-1} = \frac{1}{6} LN \left( \frac{\eta^2+\eta+1}{(\eta-1)^2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left( \frac{2\eta+1}{\sqrt{3}} \right) + cte \quad \text{Ecuación 50}$$

Y preparó unas tablas para los valores de  $\Omega(\eta)$  y obtuvo las formas clásicas de las curvas de remanso (García, 2006).

Valores de la constante:

$$\text{Si } \eta < 1 \quad cte = -0.3023$$

$$\text{Si } \eta > 1 \quad cte = -0.9069$$



### c) Investigaciones recientes sobre soluciones analíticas

A continuación se presentan algunas de las investigaciones más recientes en integración analítica de la ecuación dinámica.

Maurizio Vetunelli (2004) a partir de la ecuación básica con exponentes  $M=10/3$  y  $N=3$ , propuso una relación:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1-(y_n/y)^{10/3}}{1-(y_c/y)^3} \quad \text{Ecuación 51}$$

Definiendo  $\eta = y/y_n$  y  $\eta_c = y_c/y_n$ , se puede escribir:

$$dx = \frac{y_n}{S_0} \left[ 1 - \frac{1}{1-\eta^{10/3}} + \eta_c^3 \frac{\eta^{1/3}}{1-\eta^{10/3}} \right] d\eta \quad \text{Ecuación 52}$$

Integrando y haciendo un cambio de variable  $\eta^{1/3} = v$

$$x = \frac{y_n}{S_0} \left[ \eta - \int_0^v \frac{3v^2}{1-v^{10}} + \eta_c^3 \int_0^v \frac{3v^3}{1-v^{10}} dv \right] + const \quad \text{Ecuación 53}$$

El resultado se calculó con el software *Mathematica* (Vetunelli, 2004):

$$x = \frac{y_n}{S_0} [\eta - 3F + 3\eta_c^3 G] + const \quad \text{Ecuación 54}$$

$F$  y  $G$  se calculan en función a la profundidad  $z$ , esta ecuación nos permite obtener el desplazamiento de forma directa en canales triangulares y rectangulares con pendiente normal.

Otro es el método propuesto por Karney y Malekpour (2010), se basa en el principio del equilibrio dinámico. Este método obtiene resultados mejores que el método del paso directo, el conflicto que encuentra es que requiere más cálculos que éste. Por lo tanto los autores lo refieren como un método de optimización del método del paso ya que su desarrollo es similar sólo que los resultados son más fiables.

Se basa en la maximización de:

$$\sum_{i=1}^N (\bar{S}_f)_i * \Delta x$$

Sujeto a:

$$\left| (\Delta F_p + \bar{W} \sin \theta - F_f)_i - (\omega Q(V_{i+1} - V_i)/g) \right| \leq \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad \text{Ecuación 55}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{tirante aguas abajo} \\ Y_{N+1} &= \text{tirante aguas arriba} \\ Y_2, Y_3, \dots, Y_N &\geq 0 \end{aligned}$$



Donde:

$$\bar{S}_f = \frac{S_{f_i} + S_{f_{i+1}}}{2} \quad \text{Ecuación 56}$$

$S_f$  se calcula con la ecuación de Manning (17).

$$\bar{W} = \omega \Delta x \left( \frac{A_i + A_{i+1}}{2} \right) \quad \text{Ecuación 57}$$

$$\Delta F_p = \omega A_i (Y_{i+1} - Y_i) \quad \text{Ecuación 58}$$

$$F_{fr} = \omega \Delta x \left( \frac{A_i + A_{i+1}}{2} \right) \bar{S}_f \quad \text{Ecuación 59}$$

En donde:

$Q$ , gasto en  $m^3/s$ ;  $V$ , velocidad en  $m/s$ ;  $n$ , coeficiente de rugosidad de Manning;  $A$ , área de la sección  $m^2$ ;  $R$ , radio hidráulico en metros;  $Y$ , profundidad del canal en  $m$ ;  $\theta$ , ángulo del canal en grados;  $g$ , aceleración de la gravedad en  $m/s^2$ ;  $\omega$ , unidad del peso del agua  $kg/m^3$ ;  $\bar{W}$ , promedio del peso del agua  $kg/m^3$ ;  $\Delta x$ , intervalo de la distancia;  $S_f$ , pendiente de la línea de energía;  $F_{fr}$ , fuerza de fricción;  $\varepsilon$ , valor constante muy pequeño.

Vatankhah (2010), encontró unas funciones para canales triangulares basadas en la fórmula de Manning.

Esta solución se realiza con la integración directa y la forma adimensional de la ecuación dinámica para el flujo gradualmente variado.

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \left( \frac{1 - (y_0/y)^{16/3}}{1 - (y_c/y)^5} \right) \quad \text{Ecuación 60}$$

La pendiente del fondo ( $S_0 > 0$ );  $y_c$  es el tirante de flujo crítico y  $y_0$  es el tirante normal,  $x$  es la variable independiente y  $y$  es la variable dependiente.

La ecuación 60 puede ser escrita de forma adimensional como:

$$\left( \frac{3(1 - \delta \eta^{15})}{\eta^4(-\eta^{16})} \right) \delta \eta = -dx \quad \text{Ecuación 61}$$

Donde:

$$\delta = (y_c/y_0)^5 \quad x = S_0 x / y_0 \quad \eta = (y_0/y)^{1/3}$$

Como vimos la ecuación reúne todas las variables de la ecuación de flujo gradualmente variado dentro de tres cantidades adimensionales, y es muy adecuado para la integración analítica. La ecuación 61 puede ser integrada por fracciones parciales (Vatankhah, 2010).

Es así como se obtiene una solución directa de flujo gradualmente variado:

$$-x = F(\eta, \delta) + const. \quad \text{Ecuación 62}$$



Las integrales  $I_1$  y  $I_2$  se tienen que desarrollar:

$$I_1(\eta, \delta) = \int \frac{3\eta^3(\eta-\delta)}{2(1-\eta^8)} d\eta \quad I_2(\eta, \delta) = \int \frac{3\eta^3(\eta-\delta)}{2(1+\eta^8)} d\eta \quad \text{Ecuación 63}$$

En la cual  $F(\eta, \delta) = -\eta^{-3} + I_1(\eta, \delta) + I_2(\eta, \delta)$ .

Arreglando la condición  $\eta = \eta(0)$  en la sección de control  $x = x(0)$ , la integración constante puede ser eliminada de la siguiente forma:

$$-(x - x(0)) = F(\eta, \delta) - F(\eta(0), \delta)$$

Con  $x(0) = 0$

$$x = F(\eta(0), \delta) - F(\eta, \delta) \quad \text{Ecuación 64}$$

Dicha ecuación proporciona la adimensionalidad de la distancia a lo largo del canal  $x$  para cualquier  $\eta$  dado (que es una función de  $y$ ). La ecuación 64 es válida para los canales triangulares con pendientes ( $S_0 > 0$ ). Un procedimiento similar puede aplicarse para los cauces triangulares con pendientes ( $S_0 < 0$ ). La metodología para obtener la función equivalente en canales por este método es particularmente sencilla, esta fórmula no incluye el cálculo de los perfiles circulares y en forma de herradura y no se han hecho investigaciones al respecto.

Las investigaciones más recientes han sido hechas por Jan y Chen (2013), en un artículo muy interesante en el que se publicaron una serie de funciones equivalentes de la ecuación dinámica basadas en el tirante crítico adimensional y el uso de la función hipergeométrica de Gauss, válidas para todos los tipos de perfiles y geometrías prismáticas.

El cálculo se basa en la normalización del flujo en el tirante crítico y no en el normal como investigadores anteriores habían propuesto (Chow, 1994; Venutelli, 2004; Vatankhah, 2010).

Partiendo de la ecuación de Bahkmeteff (38), que es la forma adimensional en una dimensión de la ecuación dinámica. Los valores de  $N$  y  $M$  varían de un autor a otro y por lo general se tienen que determinar o pueden ser descritos en términos de la forma de secciones arbitrarias. La ecuación 38 puede ser enunciada como la ecuación 23,

$$\frac{dh}{dx} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2}{\left(\frac{Z_c}{Z}\right)^2}$$

Si el factor de transporte  $K$  y el factor de sección  $Z$  pueden ser expresados en términos del tirante con sus respectivos exponentes  $M$  y  $N$ :

$$\frac{dh}{dx} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^M}{\left(\frac{h_c}{h}\right)^N} \quad \text{Ecuación 65}$$



Donde:  $dh/dx$  es la derivada del tirante con respecto a la distancia,  $h_n$  es el tirante normal,  $h_c$  es el tirante crítico,  $h$  es el tirante de la superficie libre de agua. Jan y Chen (2012) utilizan la  $h = y$ , para todos los casos de tirante.

Así reorganizando, se reduce el número de parámetros que aparecen en la ecuación anterior, normalizando  $x$  y  $h$  basados en  $h_n$ ,  $u = (h/h_n)$  y  $u = (xS_0/h_n)$ , se obtiene el recíproco de la pendiente en una dimensión para flujo gradualmente variado.

$$\frac{dx}{du} = \frac{-u^N + \lambda^M u^{N-M}}{1-u^N} \quad \text{Ecuación 66}$$

$\lambda = (h_c/h_n)$  es el valor cociente de la profundidad del agua. Integrando la ecuación anterior y desarrollando tenemos:

$$x * = \lambda^M \frac{u^{N-M}}{1-M} - \int \frac{u^N}{1-u^N} du + \lambda^M \int \frac{u^{-M}}{1-u^N} du + const \quad \text{Ecuación 67}$$

Antes de encontrar las soluciones analíticas de las ecuaciones, se introduce la definición de la función hipergeométrica de Gauss. Ésta puede expresarse como una serie infinita y simbolizada en la forma de  $F(a, b; c; z)$  como Olde Daalhuis (2010, citado por Jan y Chen, 2012) indica, es decir:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)!} z^s \quad \text{Ecuación 68}$$

$a, b$  y  $c$  son parámetros y  $z$  es una variable, que puede tomar un valor cercano entre -1 y 1.

El símbolo  $F(a,b;c;z)$  que está expresado en la ecuación anterior es la función hipergeométrica de Gauss en la que  $a = 1, b = \frac{(\phi+1)}{N}, c = b + 1$  y la variable  $z = u^N$ . Que también puede ser escrita de la forma:

$$\int \frac{u^\phi}{1-u^N} du = \frac{u^{\phi+1}}{\phi+1} F\left(\frac{\phi+1}{N}, u^N\right) + const \quad \text{Ecuación 69}$$

Reemplazando las dos integrales indefinidas en términos de ecuación 67 usando la ecuación anterior:

$$x * = u \left[ 1 - g\left(\frac{1}{N}, u^N\right) \right] + \lambda^M \frac{u^{N-M+1}}{N-M+1} g\left(\frac{N-M+1}{N}, u^N\right) + const \quad \text{Ecuación 70}$$

La cual es válida solo para  $|u| < 1$

Para  $|u| > 1$  (o  $|w| < 1$  por sustitución de  $u = w^{-1}$  en  $|u| > 1$ ), por lo tanto:

$$x * = w^{-1} g\left(-\frac{1}{N}, w^N\right) + \lambda^M \frac{w^{M-1}}{M-1} g\left(\frac{M-1}{N}, w^N\right) + const \quad \text{Ecuación 71}$$

La integración directa de la ecuación diferencial del flujo gradualmente variado usando funciones hipergeométricas de Gauss, resuelve para todos los tipos de perfiles, incluyendo aquellos que presentan una pendiente adversa en el fondo del canal. Para poder aplicar este método se requiere de conocimientos matemáticos avanzados, lo que lo hace una solución difícil de ser aplicada para el cálculo de los perfiles de flujo.



Son muchos los métodos de integración directa que se han desarrollado, en su mayoría resuelven la ecuación dinámica en geometrías triangulares, trapeciales o rectangulares y pendientes normales, por lo general son métodos sencillos en los que se requiere conocer las características geométricas y de descarga y en ocasiones algún tirante, ya sea el crítico, el normal, o bien los tirantes de partida o final del cálculo. El método más completo y más satisfactorio es el método de Jan y Chen (2010), ya que encuentra solución a todo tipo de geometrías y condiciones de frontera y toma en cuenta el sentido de la pendiente del canal (si es positiva o negativa), pero es un método complejo ya que involucra conocimientos muy elevados de matemáticas y no se ha demostrado que sus resultados sean mejores o al menos más exactos que los métodos numéricos, su importancia radica en que es un procedimiento analítico.

## 4 FUNCIONES EQUIVALENTES Y METODOLOGÍA PROPUESTA

En el presente capítulo se presentan los dos procedimientos para obtener e integrar un conjunto de funciones numéricamente equivalentes a la ecuación de flujo gradualmente variado, cuya solución permite calcular, con un alto grado de precisión, la mayor parte de los perfiles de flujo que se presentan en canales prismáticos y que son parte de la aportación de esta investigación.

### 4.1 Función equivalente 1. Determinación de coeficientes por correlación lineal

Si en la ecuación dinámica (11) se considera que el número de Froude (10) es igual a la velocidad entre la celeridad, y que a su vez la celeridad es igual a la raíz cuadrada de la gravedad por el tirante hidráulico; y la pendiente de fricción  $S_f$  se puede estimar a través de la ecuación de Manning (17); entonces, se satisfacen las siguientes relaciones:

$$Fr = \frac{V}{C} = \frac{V}{\sqrt{gY}} = \frac{V}{\sqrt{g\frac{A}{T}}}$$

$$S_f = \left(\frac{nV}{R_h^{2/3}}\right)^2 = \left(\frac{nQ}{AR_h^{2/3}}\right)^2 = \frac{n^2Q^2}{A^2R_h^{4/3}}$$

Al sustituir en la ecuación dinámica (11) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - \frac{n^2Q^2}{A^2R_h^{4/3}}}{1 - \frac{Q^2}{A^2g\frac{A}{T}}} = \frac{S_0 - \frac{n^2Q^2}{A^2R_h^{4/3}}}{1 - \frac{TQ^2}{A^3g}}$$



De donde, la derivada  $\frac{dx}{dy}$  se puede expresar en la forma:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - \frac{TQ^2}{A^3 g}}{S_0 \frac{n^2 Q^2}{A^2 R_h^{4/3}}} \quad \text{Ecuación 11-1}$$

Esta expresión, bajo un proceso de normalización de variables, se puede reescribir a partir de la ecuación 24, de la siguiente manera según Chow (1994):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{S_0} \frac{(Q_c/Q_n)^2 (Q^2/Q_n^2)}{(Q^2 - Q_c^2)}$$

Donde:

$Q$ , es el gasto del flujo gradualmente variado para el tirante actual  $y$ ;

$Q_n$ , es el gasto normal, correspondiente al tirante  $y_n$ ;

$Q_c$ , es el gasto crítico para el tirante igual a  $y_c$ ;

Dicha ecuación involucra los gastos relacionados a diferentes tirantes que se desarrollan en cualquier tipo de perfil de flujo, estos son los tirantes crítico, normal y el tirante de la superficie libre del agua a lo largo del canal.

Se considera para un gasto y geometría dada en un canal, que la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado se puede expresar como (Bakhmeteff 1912, citado por Chow, 1994, p.246):

$$\frac{dy}{dx} = f \left( \frac{y - y_n}{y - y_c} \right) \quad \text{Ecuación 72}$$

En la cual  $y$  es el tirante de la superficie libre del agua,  $y_n$  es el tirante normal y  $y_c$  es el tirante crítico.

La función  $f$  de la ecuación 72, partiendo de una revisión numérica y visual de varios casos tiene un comportamiento lineal, se puede expresar mediante una función del tipo  $f = (a + by)$ , siendo  $a$  y  $b$  constantes a determinar para cada caso y perfil de flujo en estudio. Dichas constantes se obtienen mediante un procedimiento de correlación lineal, dentro de un rango determinado de valores de  $y$ , entre la función equivalente expresada por la ecuación 73:

$$\frac{dx}{dy} = (a + by) \left( \frac{y - y_c}{y - y_n} \right) \quad \text{Ecuación 73}$$

Si por otra parte la ecuación dinámica se expresa en la forma de la ecuación 71 e igualar con la ecuación 73 y despejar  $a + by$ , resulta:



$$a + by \cong \left( \frac{y - y_n}{y - y_c} \right) \frac{1 - \frac{TQ^2}{A^3 g}}{S_0 - \frac{n^2 Q^2}{A^2 R_h^{4/3}}}$$

Como se puede apreciar, al ser funciones aproximadas, es de esperar que existan ciertas diferencias entre ellas; de aquí que se utilice el signo  $\cong$  en lugar de la igualdad. Ante esta condición, la calidad de la aproximación dependerá de la adecuada selección de los coeficientes  $a$  y  $b$ . Para determinar los coeficientes  $a$  y  $b$ , que minimizan la diferencia entre ambos miembros, se adopta un proceso de correlación lineal por mínimos

cuadrados entre el tirante  $y$  y la función  $\left( \frac{y - y_n}{y - y_c} \right) \frac{1 - \frac{TQ^2}{A^3 g}}{S_0 - \frac{n^2 Q^2}{A^2 R_h^{4/3}}}$ .

Dicha correlación se debe realizar dentro del intervalo de valores del tirante  $y$  que corresponden al perfil de flujo en estudio. Por ejemplo, para un M2 el intervalo será  $y_c < y < y_n$  y para un S2 se tendrá  $y_n < y < y_c$ . Nótese que en estos rangos se han eliminado las igualdades para evitar las singularidades de la propia ecuación dinámica.

Una vez determinados los coeficientes de correlación  $a$  y  $b$  y partiendo de una condición de frontera conocida  $(x_i, y_i)$ ; de acuerdo con la ecuación 73, la posición  $x_{i+1}$  asociada a un determinado tirante  $y_{i+1}$ , se puede obtener mediante la integración directa de la siguiente expresión:

$$x_{i+1} = x_i + \int_{y_i}^{y_{i+1}} (a + by) \left( \frac{y - y_c}{y - y_n} \right) dy \quad \text{Ecuación 74}$$

Los límites de integración de la ecuación 74 se establecen en función del problema a tratar. Así, por ejemplo, para el caso de un perfil M2, cuyo punto de condición de frontera es  $(0, y_c)$ , al integrar (74) resulta la función (75) que permite estimar el valor de la posición  $x$  en que se presenta un determinado tirante  $y$ .

$$x = a \left[ \left( \frac{y_c^2 - y^2}{2} \right) + (y_c - y_n)(y - y_c) \right] + [b(y_c - y)] + [a(y_n^2 - y_c y_n) + b(y_n - y_c)] \left[ \ln \left( \text{abs} \left| \frac{y_c - y_n}{y - y_n} \right| \right) \right]$$

Ecuación 75

En este trabajo a la ecuación (75) se le denomina como la función equivalente que da solución a la ecuación dinámica en perfiles con pendiente positiva.

Si bien la actual forma de la función equivalente (75) es aplicable a perfiles con pendiente positiva, es importante destacar que se puede generalizar para todo tipo de perfiles, para lo cual se le debe dar un tratamiento semejante al que se aplica a la segunda función equivalente que se propone en este trabajo (ver subcapítulo 4.2).



## 4.2 Función equivalente 2. Determinación directa de coeficientes

### 4.2.1 Definición de la función y solución equivalente

La segunda metodología que se desarrolló consiste en obtener una versión adimensional de la función considerando los tirantes en la frontera. Sea la ecuación de flujo gradualmente variado (11):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - F_r^2}{s_o - s_f}$$

En este trabajo se propone y se parte de la hipótesis de que ésta numéricamente puede ser representada, con un cierto grado de aproximación, por una expresión equivalente del siguiente tipo:

$$\frac{dx}{dy} \approx \frac{y}{y_o} \left( \frac{y - y_o}{y - \sigma y_f} \right) \quad \text{Ecuación 76}$$

En donde  $y_o$  y  $y_f$  representan los tirantes en el origen y el final del perfil de flujo en estudio; así, por ejemplo, para el caso de perfiles M2 y S2 estos tirantes corresponden al tirante crítico y al normal respectivamente ( $y_o = y_c$  y  $y_f = y_n$ ). En lo que se refiere a  $\sigma$  es un factor que permite considerar el signo de la pendiente de la plantilla del canal, para lo cual en lo general se adopta  $\sigma = \frac{S_o}{|S_o|}$  y con la excepción de  $\sigma = 0$  para el caso particular de  $S_o = 0$ .

Igualando la ecuación dinámica (11) con la ecuación 76:

$$\frac{1 - F_r^2}{s_o - s_f} \approx \frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o - y}{\sigma y_f - y} \right) \quad \text{Ecuación 77}$$

Dicha relación (77), es adimensional entre 0 y 1, dividiendo cada uno de los miembros por el valor que adquieren considerando un tirante muy próximo al que se presenta al final del perfil, por ejemplo, para  $y = \alpha y_f$ , siendo  $\alpha$  un factor muy cercano a la unidad (no se adopta  $y = y_f$  para evitar la singularidad que se presentaría en diferentes perfiles cuando  $\sigma = 1$ , cuando la pendiente de la plantilla del canal es positiva). En el caso en que el flujo al final del perfil tienda a normalizarse, se deberá adoptar  $y = \alpha y_n$  con  $\alpha = 1.001$  o  $\alpha = 0.999$  en función del tipo de perfil que se presente.

$$\frac{\frac{1 - F_r^2}{s_o - s_f}}{\left( \frac{1 - F_r^2}{s_o - s_f} \right)_{y = \alpha y_f}} \approx \frac{\frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o - y}{\sigma y_f - y} \right)}{\left( \frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o - y}{\sigma y_f - y} \right) \right)_{y = \alpha y_f}} \quad \text{Ecuación 78}$$



Para simplificar la forma de la ecuación 78, los factores de normalización, que son constantes para cada perfil (evaluados en  $y = \alpha y_f$ ), se expresan mediante la notación  $F_o$  y  $F_f$ , se adopta:

$$F_o = \left( \frac{1-F_r^2}{s_o-s_f} \right)_{y=\alpha y_f} \tag{Ecuación 79}$$

y

$$F_f = \left( \frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o-y}{\sigma y_f-y} \right) \right)_{y=\alpha y_f} \tag{Ecuación 80}$$

Ahora, reemplazando la ecuación (79) y la (80) en la (78),

$$\frac{1}{F_o} \frac{1-F_r^2}{s_o-s_f} \approx \frac{1}{F_f} \frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o-y}{\sigma y_f-y} \right) \tag{Ecuación 81}$$

Aceptando que existe un error  $\varepsilon_y$ , para cada valor de  $y$ , se tendrá:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{F_o} \frac{1-F_r^2}{s_o-s_f} - \frac{1}{F_f} \frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o-y}{\sigma y_f-y} \right) \tag{Ecuación 82}$$

Para estimar este error, mediante una expresión equivalente, en este trabajo se sugiere adoptar una función lineal del siguiente tipo:

$$\varepsilon_y = a + \frac{m}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f-y}{y_o} \right) \tag{Ecuación 83}$$

Donde  $m$  representa la pendiente de la recta que cruza el eje de los errores a la altura  $a$ , tal y como se ilustra en la figura 4. En dicha figura se ha considerado que en el origen del perfil se presenta el tirante  $y_o$  (para el caso de perfiles M2 y S2,  $y_o$  corresponde al tirante crítico,  $y_o = y_c$ ):

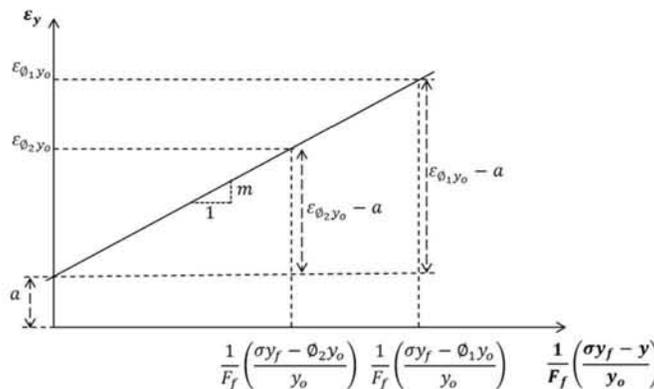


Figura 4. Aproximación numérica del comportamiento del error



De acuerdo con la figura 4 se satisfacen:

$$m = \frac{\varepsilon_{\phi_1 y_0} - a}{\frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_1 y_0}{y_0} \right)} = \frac{F_f (\varepsilon_{\phi_1 y_0} - a)}{(\sigma y_f - \phi_1)} \quad \text{Ecuación 84}$$

$$m = \frac{\varepsilon_{\phi_2 y_0} - a}{\frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_2 y_0}{y_0} \right)} = \frac{F_f (\varepsilon_{\phi_2 y_0} - a)}{(\sigma y_f - \phi_2)} \quad \text{Ecuación 85}$$

Dónde  $\phi$  es un factor cercano a la unidad ( $0.99 \leq \phi \leq 1.01$ , dependiendo del perfil de flujo en estudio). Por ejemplo para los perfiles M2 se sugiere adoptar  $\phi_1 = 1.001$  y  $\phi_2 = 1.01$  y para el caso de perfiles S2 se sugieren  $\phi_1 = 0.999$  y  $\phi_2 = 0.99$ .

Igualando la ecuación 84 y la 85

$$\frac{\varepsilon_{\phi_1 y_0} - a}{\frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_1 y_0}{y_0} \right)} = \frac{\varepsilon_{\phi_2 y_0} - a}{\frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_2 y_0}{y_0} \right)}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{\phi_1 y_0} - a) \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_2 y_0}{y_0} \right) &= (\varepsilon_{\phi_2 y_0} - a) \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_1 y_0}{y_0} \right) \\ a \left[ \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_1 y_0}{y_0} \right) - \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_2 y_0}{y_0} \right) \right] &= \varepsilon_{\phi_2 y_0} \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_1 y_0}{y_0} \right) - \varepsilon_{\phi_1 y_0} \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_2 y_0}{y_0} \right) \end{aligned}$$

Despejando  $a$  :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\varepsilon_{\phi_2 y_0} \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_1 y_0}{y_0} \right) - \varepsilon_{\phi_1 y_0} \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_2 y_0}{y_0} \right)}{\frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_1 y_0}{y_0} \right) - \frac{1}{F_f} \left( \frac{\sigma y_f - \phi_2 y_0}{y_0} \right)} \\ a &= \frac{\varepsilon_{\phi_2 y_0} (\sigma y_f - \phi_1 y_0) - \varepsilon_{\phi_1 y_0} (\sigma y_f - \phi_2 y_0)}{\phi_2 y_0 - \phi_1 y_0} \\ a &= \frac{\varepsilon_{\phi_2 y_0} (\sigma y_f - \phi_1 y_0) - \varepsilon_{\phi_1 y_0} (\sigma y_f - \phi_2 y_0)}{y_0 (\phi_2 - \phi_1)} \\ a &= \frac{\varepsilon_{\phi_2 y_0} \left( \frac{\sigma y_f}{y_0} - \phi_1 \right) - \varepsilon_{\phi_1 y_0} \left( \frac{\sigma y_f}{y_0} - \phi_2 \right)}{(\phi_2 - \phi_1)} \quad \text{Ecuación 86} \end{aligned}$$

Mediante la ecuación 86 y posteriormente la 84, se determinan los coeficientes de la función de error  $\varepsilon_y$ , los valores de  $a$  y  $m$  de la ecuación 83. Para estimar los errores  $\varepsilon_{\phi_1 y_0}$  y  $\varepsilon_{\phi_2 y_0}$  se aplica la ecuación 82, de donde se derivan las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{\phi_1 y_0} = \left[ \frac{1}{F_0} \left( \frac{1 - F_r^2}{S_0 - S_f} \right)_{y=\phi_1 y_0} \right] - \left[ \frac{1}{F_f} \left( \frac{y}{y_0} \left( \frac{y_0 - y}{\sigma y_f - y} \right) \right)_{y=\phi_1 y_0} \right]$$



$$\varepsilon_{\phi_2 y_0} = \left[ \frac{1}{F_0} \left( \frac{1 - F_r^2}{S_0 - S_f} \right) \right]_{y=\phi_2 y_0} - \left[ \frac{1}{F_f} \left( \frac{y}{y_0} \left( \frac{y_0 - y}{\sigma y_f - y} \right) \right) \right]_{y=\phi_2 y_0}$$

Sustituyendo la ecuación 83 en la 82, y despejando  $\left( \frac{1 - F_r^2}{s_0 - s_f} \right)$ :

$$\frac{1 - F_r^2}{s_0 - s_f} = \frac{F_0}{F_f y_0} y \left( \frac{y_0 - y}{\sigma y_f - y} \right) + m \frac{F_0}{F_f y_0} (\sigma y_f - y) + F_0 a$$

Factorizando en el segundo miembro  $\frac{F_0}{F_f y_0}$ , resulta:

$$\frac{1 - F_r^2}{s_0 - s_f} = \frac{F_0}{F_f y_0} \left( y \left( \frac{y_0 - y}{\sigma y_f - y} \right) + m(\sigma y_f - y) + a F_f y_0 \right) \quad \text{Ecuación 87}$$

Asignando:

$$A = \frac{F_0}{F_f y_0} \quad \text{Ecuación 88}$$

$$B = mA \quad \text{Ecuación 89}$$

y

$$C = a F_f y_0 A \quad \text{Ecuación 90}$$

La ecuación 87, se puede expresar como:

$$\frac{1 - F_r^2}{s_0 - s_f} = y \left( \frac{y_0 - y}{\sigma y_f - y} \right) + B(\sigma y_f - y) + C \quad \text{Ecuación 91}$$

Al comparar e igualar la ecuación 91 con la ecuación dinámica (11), se obtiene:

$$\frac{dx}{dy} = Ay \left( \frac{y_0 - y}{\sigma y_f - y} \right) + B(\sigma y_f - y) + C \quad \text{Ecuación 92}$$

La ecuación 92 representa la ecuación equivalente a resolver, y para tal fin al ser expresada en su forma integral, bajo los límites de integración  $i$  a  $i + 1$  (tanto en  $x$  como en  $y$ ), resulta:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \left[ Ay \left( \frac{y_0 - y}{\sigma y_f - y} \right) + B(\sigma y_f - y) + C \right] dy \quad \text{Ecuación 93}$$



Para un determinado perfil de flujo, al ser  $y_o$ ,  $y_f$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$  constantes conocidas, la ecuación 93 puede ser integrada de manera directa:

$$x_{i+1} = x_i + \left[ A \left[ y(\sigma y_f - y_o) + \ln|y - \sigma y_f|(\sigma^2 y_f^2 - y_o \sigma y_f) + \frac{y^2}{2} \right] + B(\sigma y_f y - \frac{y^2}{2}) + C y \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$$

**Ecuación 94**

Reemplazando la ecuación (88), la (89) y la (90) en la (94), y simplificando:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F_o}{F_f y_o} \left[ (\sigma y_f - y_o)y + \sigma y_f \ln|y - \sigma y_f|(\sigma y_f - y_o) + \frac{y^2}{2} + m(\sigma y_f y - \frac{y^2}{2}) + a F_f y_o y \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F_o}{F_f} \left[ y \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) + \sigma y_f \ln|y - \sigma y_f| \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) + \frac{y^2}{2 y_o} + m \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} y - \frac{y^2}{2 y_o} \right) + a F_f y \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F_o}{F_f} \left[ \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) y + \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) \sigma y_f \ln|y - \sigma y_f| + (1 - m) \frac{y^2}{2 y_o} + a F_f y + m \frac{\sigma y_f}{y_o} y \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F_o}{F_f} \left[ \frac{(1 - m)}{2 y_o} y^2 + \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) (y + \sigma y_f \ln|y - \sigma y_f|) + \left( a F_f + m \frac{\sigma y_f}{y_o} \right) y \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F_o}{F_f} \left[ \frac{(1 - m)}{2 y_o} y^2 + \sigma y_f \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) \ln|y - \sigma y_f| + \left( a F_f + (m + 1) \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) y \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$$

**Ecuación 95**

La expresión (95) representa una alternativa para la “solución directa” de la ecuación de flujo gradualmente variado.

Una forma más compacta de ver la ecuación (95) es adoptando las siguientes constantes:

$$C3 = \frac{F_o (1 - m)}{F_f 2 y_o} \quad \text{Ecuación 96}$$

$$C2 = \frac{F_o}{F_f} \sigma y_f \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) \quad \text{Ecuación 97}$$

$$C1 = \frac{F_o}{F_f} \left( a F_f + (m + 1) \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) \quad \text{Ecuación 98}$$

Con lo que se reduce a:

$$x_{i+1} = x_i + \left[ C1 y + C2 \ln|y - \sigma y_f| + C3 y^2 \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i + \left( C1 y_{i+1} + C2 \ln|y_{i+1} - \sigma y_f| + C3 y_{i+1}^2 \right) - \left( C1 y_i + C2 \ln|y_i - \sigma y_f| + C3 y_i^2 \right)$$



Asignando

$$C_0 = - (C_1 y_i + C_2 \ln|y_i - \sigma y_f| + C_3 y_i^2) \quad \text{Ecuación 99}$$

Finalmente se puede expresar como:

$$x_{i+1} = x_i + C_0 + C_1 y_{i+1} + C_2 \ln|y_{i+1} - \sigma y_f| + C_3 y_{i+1}^2 \quad \text{Ecuación 100}$$

#### 4.2.2 Coeficientes sugeridos

Por la importancia que tiene la adecuada selección de los coeficientes  $\alpha$  y  $\emptyset$ , los cuales dependen del perfil de flujo en estudio, en el cuadro 2 se presenta un conjunto de coeficientes sugeridos en este trabajo para  $\alpha$ ,  $\emptyset_1$  y  $\emptyset_2$ .

Cuadro 2. Valores de  $\alpha$ ,  $\emptyset_1$  y  $\emptyset_2$  para los diferentes perfiles de flujo

Perfiles	
M1, C1, S1, S2	M2, M3, C3, S3, H2, H3, A2, A3
$\alpha=1.001$	$\alpha=0.999$
$\emptyset_1=0.999$	$\emptyset_1=1.001$
$\emptyset_2=0.99$	$\emptyset_2=1.01$

#### 4.2.3 Secuencia de cálculo

1.- Se inicia con los siguientes datos: la geometría del canal (sección prismática), el coeficiente de Manning ( $n$ ), el gasto ( $Q$ ), la pendiente del canal ( $S_0$ ), así como el tirante inicial y el final del perfil en estudio,  $y_o$  y  $y_f$ :

2.- Se calculan

$$\sigma = \frac{S_o}{|S_o|}, \text{ con la excepción de adoptar } \sigma = 0 \text{ para el caso particular de que } S_0 = 0$$

$$F_o = \left( \frac{1 - F_r^2}{S_o - S_f} \right)_{y=\alpha y_f}$$

y

$$F_f = \left( \frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o - y}{\sigma y_f - y} \right) \right)_{y=\alpha y_f}$$



Recordando que para estos casos  $y_o = y_c$  y  $y_f = y_n$ , corresponden al tirante crítico y al normal respectivamente.

3.- Se calculan los errores  $\varepsilon_y$  (ecuación 82) en dos puntos cercanos al punto de inicio del perfil

$$\varepsilon_{\phi_1 y_o} = \left[ \frac{1}{F_o} \left( \frac{1 - F_r^2}{S_o - S_f} \right)_{y=\phi_1 y_o} \right] - \left[ \frac{1}{F_f} \left( \frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o - y}{\sigma y_f - y} \right) \right)_{y=\phi_1 y_o} \right]$$

$$\varepsilon_{\phi_2 y_o} = \left[ \frac{1}{F_o} \left( \frac{1 - F_r^2}{S_o - S_f} \right)_{y=\phi_2 y_o} \right] - \left[ \frac{1}{F_f} \left( \frac{y}{y_o} \left( \frac{y_o - y}{\sigma y_f - y} \right) \right)_{y=\phi_2 y_o} \right]$$

Por lo general, para estos casos el tirante de origen corresponde al tirante crítico,  $y_o = y_c$ .

4. Se calculan los coeficientes  $a$  y  $m$  con las ecuaciones 85 y 86

$$a = \frac{\varepsilon_{\phi_2 y_o} \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - \phi_1 \right) - \varepsilon_{\phi_1 y_o} \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - \phi_2 \right)}{(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$m = \frac{F_f (\varepsilon_{\phi_1 y_o} - a)}{\left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - \phi_1 \right)}$$

Nota: En estas expresiones, para perfiles M2 y S2 el tirante de origen corresponde al tirante crítico,  $y_o = y_c$ , sin embargo en el caso de que sea otro el tirante de origen, como ocurre en los perfiles M1, en el que el tirante de partida  $y_o$  es mayor que el tirante normal y consecuentemente diferente a  $y_c$ , se deberá tener el cuidado de estimar y utilizar el valor correcto de  $y_o$ .

5.- A partir del punto de inicio del perfil, o sea de la condición de frontera  $(x_i, y_i)$ , se propone un valor de  $y_{i+1}$  y se calcula la distancia  $x_{i+1}$  con la ecuación 95:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F_o}{F_f} \left[ \left( \frac{(1-m)}{2y_o} y_{i+1}^2 + \sigma y_f \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) \ln |y_{i+1} - \sigma y_f| + \left( a F_f + (m+1) \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) y_{i+1} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{(1-m)}{2y_o} y_i^2 + \sigma y_f \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) \ln |y_i - \sigma y_f| + \left( a F_f + (m+1) \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) y_i \right) \right]$$

Simplificando

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F_o}{F_f} \left[ \frac{(1-m)}{2y_o} (y_{i+1}^2 - y_i^2) + \sigma y_f \left( \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) \ln \left| \frac{y_{i+1} - \sigma y_f}{y_i - \sigma y_f} \right| + \left( a F_f + (m+1) \frac{\sigma y_f}{y_o} - 1 \right) (y_{i+1} - y_i) \right]$$



Otra opción, para estimar  $x_{i+1}$ , es utilizar la ecuación (100), considerando las ecuaciones (96), (97), (98) y (99) para determinar las constantes  $C1, C2, C3$  y  $C0$ :

$$x_{i+1} = x_i + C_0 + C_1 y_{i+1} + C_2 \ln|y_{i+1} - \sigma y_f| + C_3 y_{i+1}^2$$

Nota: En estas expresiones  $(x_i, y_i)$  normalmente corresponde a la condición de frontera inicial del perfil en estudio, adopta los valores  $(x_o, y_o)$ .

Una forma general de representar un perfil de flujo, que se integra desde el origen  $(x_o, y_o)$  hasta un punto  $(x, y)$ , estará dado por la ecuación:

$$x = x_o + C_0 + C_1 y + C_2 \ln|y - \sigma y_f| + C_3 y^2$$

Aquí es muy importante hacer notar, dado que normalmente los perfiles tienen su origen en el punto  $(x_o, y_o)$ , se deberá satisfacer la condición  $x_o = 0$ , para  $y = y_o$ , por lo que la ecuación se reduce a:

$$x = C_0 + C_1 y + C_2 \ln|y - \sigma y_f| + C_3 y^2$$

Esta expresión corresponde a la forma general de la ecuación que permite representar todos los perfiles de flujo gradualmente variado en canales prismáticos.

#### 5.2.4 Ejemplo de aplicación para perfiles en la zona 2

Para el caso de perfiles M2 y S2, los cuales se desarrollan entre el tirante normal y el crítico, se sugiere utilizar  $x_i = 0$  y  $y_i = y_o = y_c$ . Dado que en los perfiles, cuya pendiente es positiva ( $\sigma = 1$ ), el tirante final  $y_f$  corresponde al tirante normal  $y_n$ , el cual se presenta a una distancia infinita ( $x_f = \infty$ ), se recomienda limitar el cálculo hasta valores cercanos al mismo, limitarlo al rango  $y_c \leq y_{i+1} \leq 0.999 y_n$  para los M2 y a  $y_c \geq y_{i+1} \geq 1.001 y_n$  para los S2. De esta manera, en este caso en particular, la ecuación que representa el perfil de flujo se puede expresar de la siguiente forma:

$$x = \frac{F_o}{F_f} \left[ \frac{(1-m)}{2y_o} (y^2 - y_c^2) + \sigma y_n \left( \frac{\sigma y_n}{y_c} - 1 \right) \ln \left| \frac{y - \sigma y_n}{y_c - \sigma y_n} \right| + \left( a F_f + (m+1) \frac{\sigma y_n}{y_c} - 1 \right) (y - y_c) \right]$$

Donde  $F_o$  se evalúa bajo condiciones de régimen crítico, para  $y_c$  y  $F_f$  bajo condiciones de flujo normal, o sea, para  $y_n$ .

Siendo  $x$  la distancia a la cual se presenta el tirante  $y$ . Para cada perfil se asume que se satisface  $y_c \geq y_{i+1} \geq \alpha y_n$ , con  $\alpha = 1.001$  en el caso de perfil S2,  $y_c \leq y \leq \alpha y_n$  con  $\alpha = 0.999$  para perfiles M2) y  $\sigma = 1$ . De esta manera para evaluar  $F_o, F_f, a$  y  $m$ , al tomar en consideración las condiciones de las fronteras de estos perfiles, se obtiene:



$$F_o = \left( \frac{1 - F_r^2}{s_o - s_f} \right)_{y=\alpha y_n}$$

$$F_f = \frac{y}{y_c} \left( \frac{y_c - \alpha y_n}{\sigma y_n - \alpha y_n} \right)$$

$$\varepsilon_{\phi_1 y_c} = \frac{1}{F_o} \left[ \frac{1 - F_r^2}{s_o - s_f} \right]_{y=\phi_1 y_c} - \frac{1}{F_f} \frac{y}{y_c} \left( \frac{y_c - \phi_1 y_c}{\sigma y_n - \phi_1 y_c} \right)$$

$$\varepsilon_{\phi_2 y_c} = \frac{1}{F_o} \left[ \frac{1 - F_r^2}{s_o - s_f} \right]_{y=\phi_2 y_c} - \frac{1}{F_f} \frac{\phi_2 y_c}{y_c} \left( \frac{y_c - \phi_2 y_c}{\sigma y_n - \phi_2 y_c} \right)$$

$$a = \frac{\varepsilon_{\phi_2 y_c} \left( \frac{\sigma y_n}{y_c} - \phi_1 \right) - \varepsilon_{\phi_1 y_c} \left( \frac{\sigma y_n}{y_c} - \phi_2 \right)}{(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$m = \frac{F_f (\varepsilon_{\phi_1 y_c} - a)}{\left( \frac{\sigma y_n}{y_c} - \phi_1 \right)}$$



## 5 RESULTADOS

En este apartado se presenta una comparación entre los perfiles obtenidos con los métodos de solución aquí propuestos, mediante las funciones equivalentes, y con el método de incrementos finitos. El estudio considera comparaciones de diversos perfiles para las geometrías prismáticas más comunes: trapecial (rectangular, triangular), circular y herradura. Adicionalmente se incluye un ejercicio de comparación con respecto a resultados experimentales reportados en la literatura especializada.

### 5.1 Comparación entre las funciones propuestas y soluciones en diferencias finitas

#### 5.1.1 Caso 1. Perfil C1 en canal rectangular

Primero se presenta un perfil C1 en un canal de geometría básica rectangular, con una base de 5 metros, un caudal de  $50 \text{ m}^3/\text{s}$ , un coeficiente de Manning de 0.014 y una pendiente del fondo de 0.003416. El tirante crítico y normal en este tipo de perfiles es el mismo,  $y_n = y_c = 2.16825$  metros.

Con el método de funciones equivalentes por mínimos cuadrados se calcularon el parámetro de forma y la pendiente  $a = -10.411$  y  $b = 345.98$ , el coeficiente de correlación para esta relación fue de 0.99. En la siguiente figura se muestran los resultados del ajuste lineal para el ejemplo.

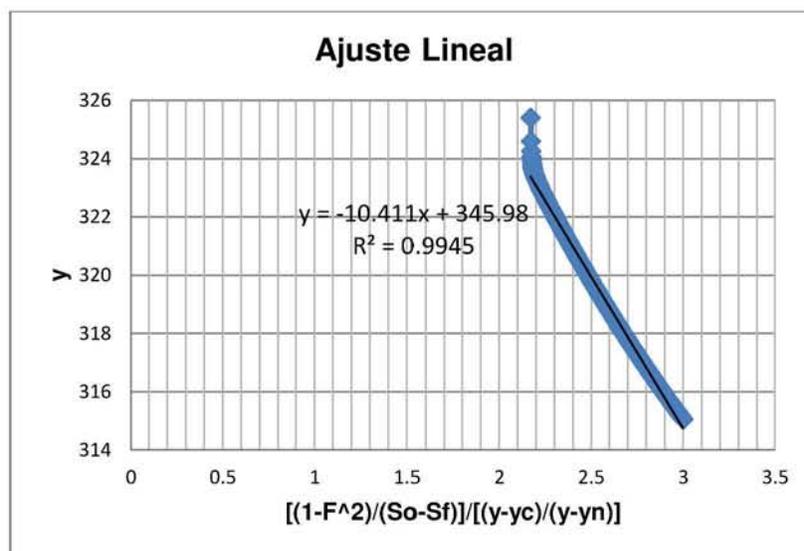


Figura 5. Ajuste lineal para un perfil C1



Al integrar la función que resulta con los coeficientes de correlación obtenemos una función equivalente a la ecuación dinámica para esta geometría y condiciones de frontera:

$$x = 5.21y^2 - 345.98y + 0.0101 * \ln(y - 2.1683) - 725.81$$

Y la gráfica (figura 6) que describe el comportamiento de la superficie libre del agua al utilizar esta función se presenta a continuación.

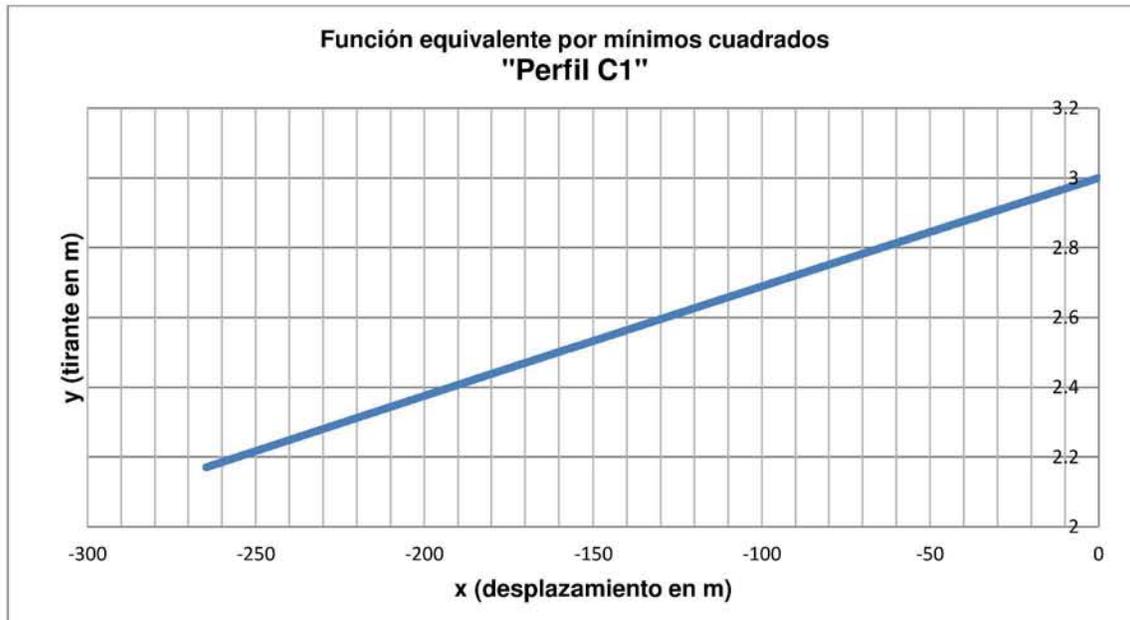


Figura 6. Gráfica de los resultados del método 1 de funciones equivalentes por mínimos cuadrados para un perfil C1

La distancia desde un tirante de 3 metros, que es la altura a la que se eleva la superficie libre del agua por la presencia de alguna estructura que hace que se desarrolle un perfil crítico, hasta antes de que se alcance el tirante crítico ( $1.001y_c$ ) es de  $x=264.6296$  metros con 500 divisiones del dominio en  $y$ . Con el método de pasos, que generalmente es el método de aproximación más utilizado para resolver la ecuación del flujo gradualmente variado, bajo el mismo rango de valores en el dominio de  $y$ , se tiene un desplazamiento total de  $x=264.6291$  metros (Figura 7).

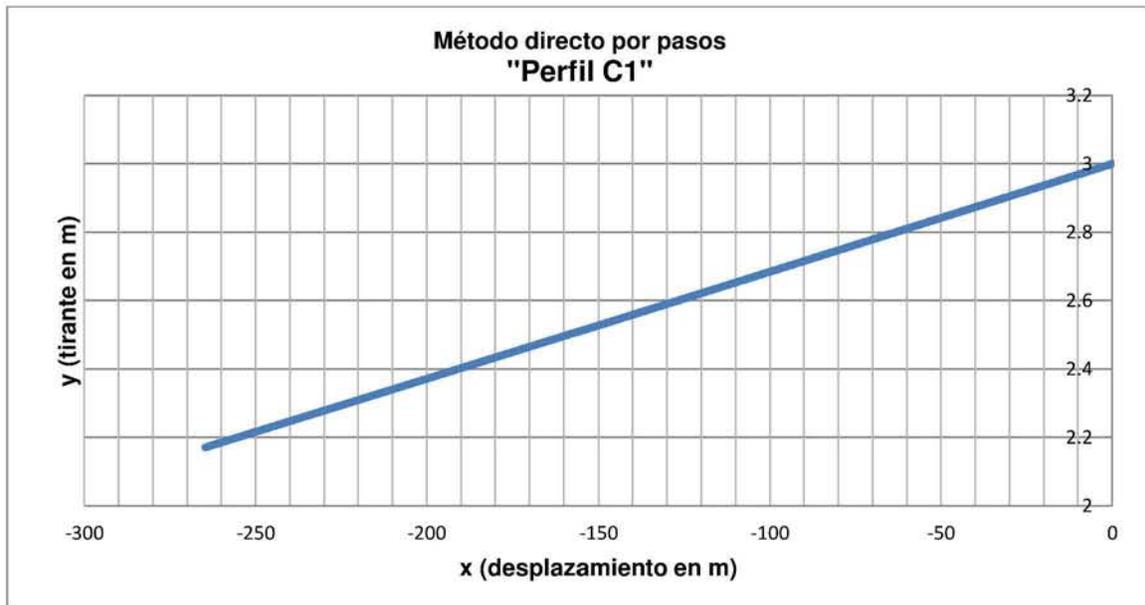


Figura 7. Gráfica del método directo por pasos para un perfil C1

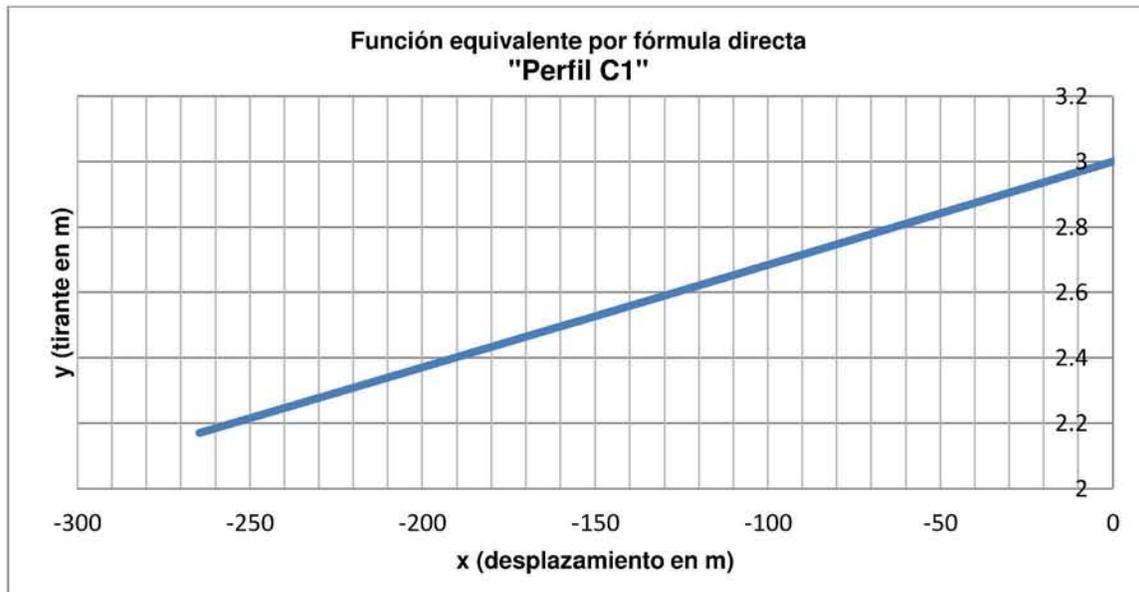
Con la fórmula directa se calcularon el parámetro  $a$  y la pendiente  $m$ , así como los demás coeficientes que integran la función equivalente para dicha geometría y condiciones específicas:

$a = 1.0954$	$A = 0.0353$	$C = 322.0133$	$C1 = 340.2311$
$m = 237.3084$	$B = 8.3886$	$C0 = -982.7738$	$C2 = 0.0638$
$C3 = -4.2119$			

La expresión para calcular el perfil de flujo, de acuerdo con la ecuación (100), resulta ser:

$$x = -982.77 + 340.23y + 0.063785 \ln|y - 2.1683| - 4.21y^2$$

La gráfica (figura 8) representa el comportamiento de dicha función.



**Figura 8. Gráfica de los resultados del método 2 con fórmula directa del cálculo de coeficientes para un perfil C1**

El desplazamiento total utilizando la fórmula directa es  $x = 264.5710$  metros, desde el tirante de partida a 3 metros hasta  $1.001y_c$  (2.170391843 metros).

En la figura 9 se muestra el resumen de resultados con los tres métodos, del método de incrementos finitos que se representa con línea azul, la función equivalente por correlación lineal (línea roja) y el cálculo con la fórmula directa (línea negra) se puede observar que dan prácticamente el mismo resultado de desplazamiento total, con errores mínimos entre distancias parciales.

Los perfiles de tipo rectangular presentan un menor porcentaje de error que otros tipos de geometrías (trapezoidal, circular, herradura) al usar funciones equivalentes, teniendo como referencia los resultados obtenidos con métodos numéricos.

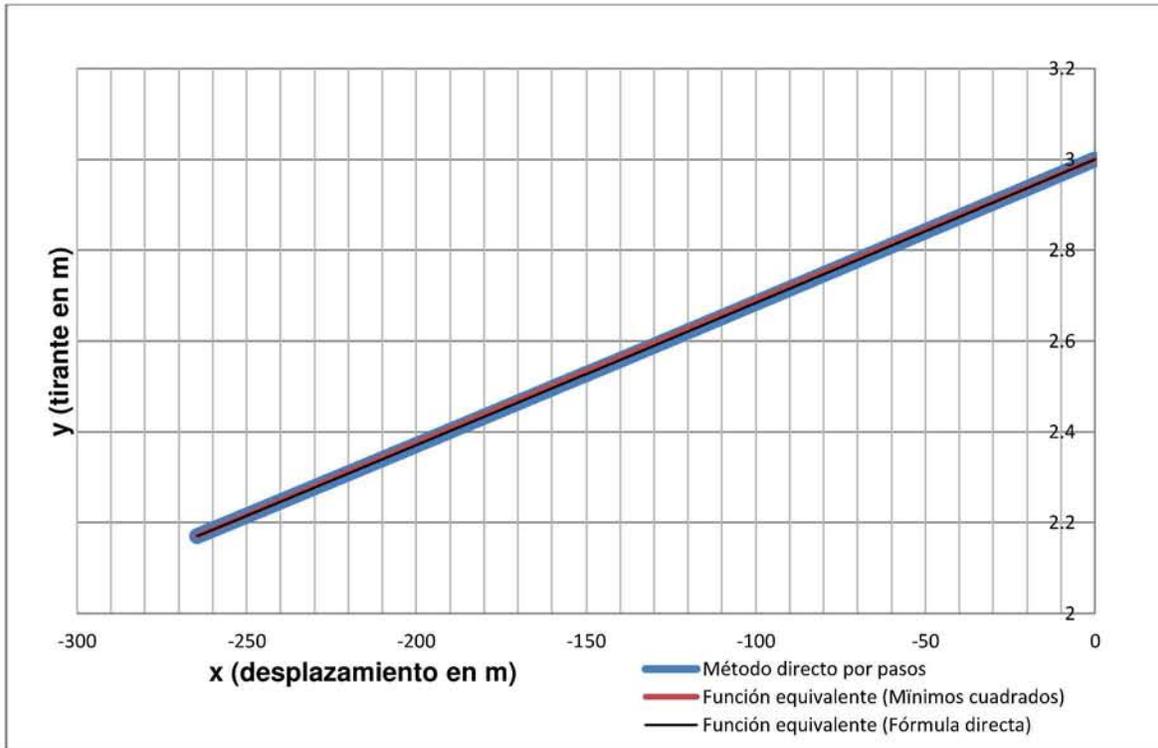


Figura 9. Resumen de resultados con tres métodos de cálculo (Método de pasos y funciones equivalentes) para un perfil C1

### 5.1.2 Caso 2. Perfil M2 en canal trapecial

Se presenta a continuación un ejemplo de un perfil M2 para un canal trapecial con las siguientes características geométricas y de descarga: ancho de la base,  $B=10$  metros; talud,  $k=1$ ; coeficiente de Manning,  $n=0.02$ ; caudal,  $Q=100 \text{ m}^3/\text{s}$ , pendiente del fondo,  $S_0=0.0005$ . Se calcularon el tirante crítico y el tirante normal obteniéndose los valores de 2.0199 metros y 3.6240 metros, respectivamente.

Los resultados del método de pasos se presentan en la siguiente figura, con una división del dominio de rango en  $y$  de 500 divisiones. Se observa que el desplazamiento total alcanzado  $x=8620.37$  metros desde  $1.001y_c$  hasta  $0.999y_n$ .

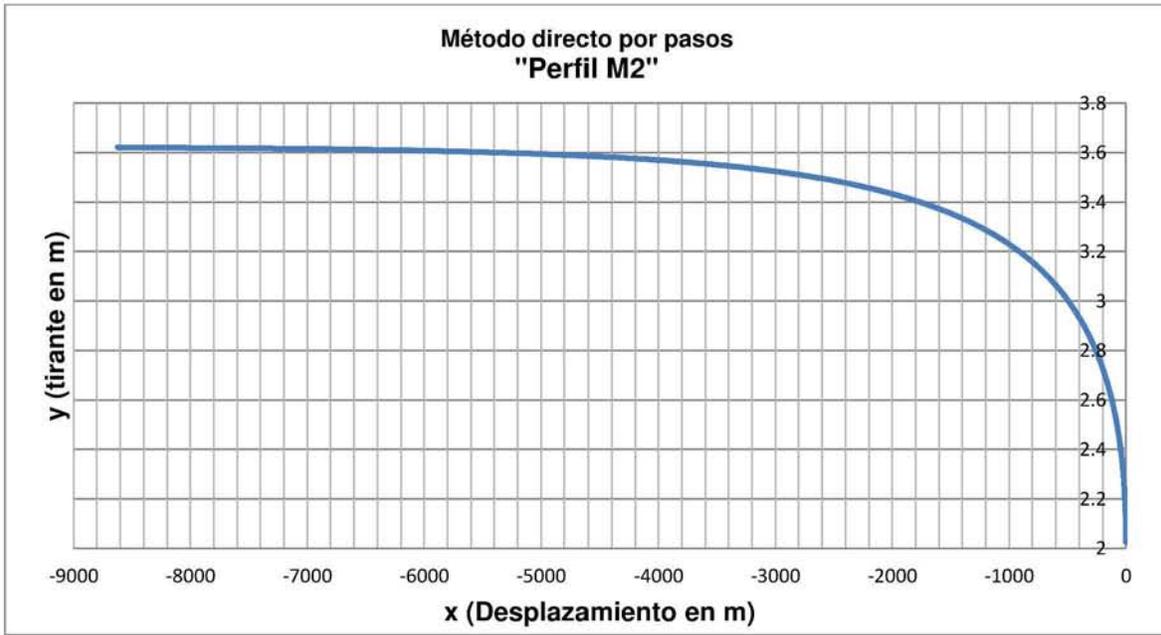


Figura 10. Gráfica para un perfil M2 método directo por pasos

Con el método 1 de la función equivalente propuesto en este trabajo (obtención de parámetros por mínimos cuadrados), se tienen como resultados para los parámetros de ajuste  $a=195.86$  y  $b=387.13$ , con un coeficiente de correlación de  $R^2=0.999$  (Figura 11).

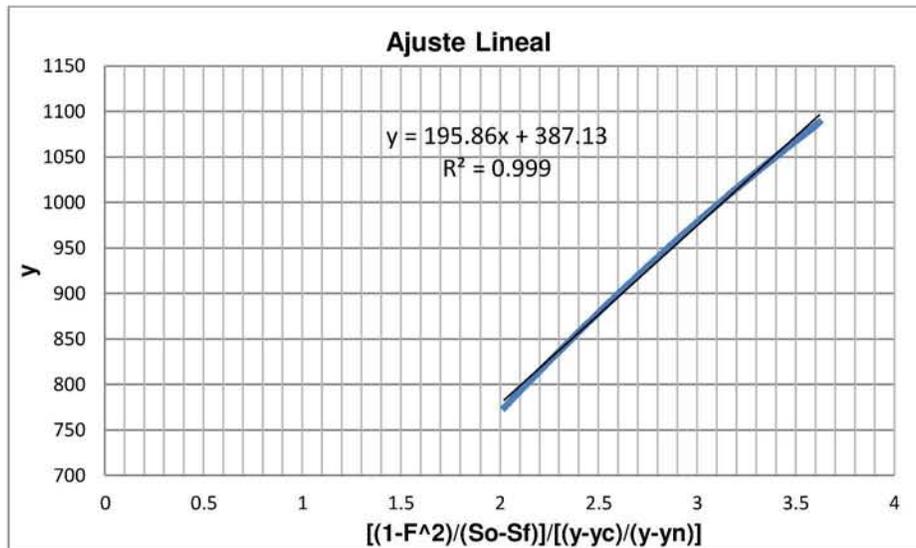
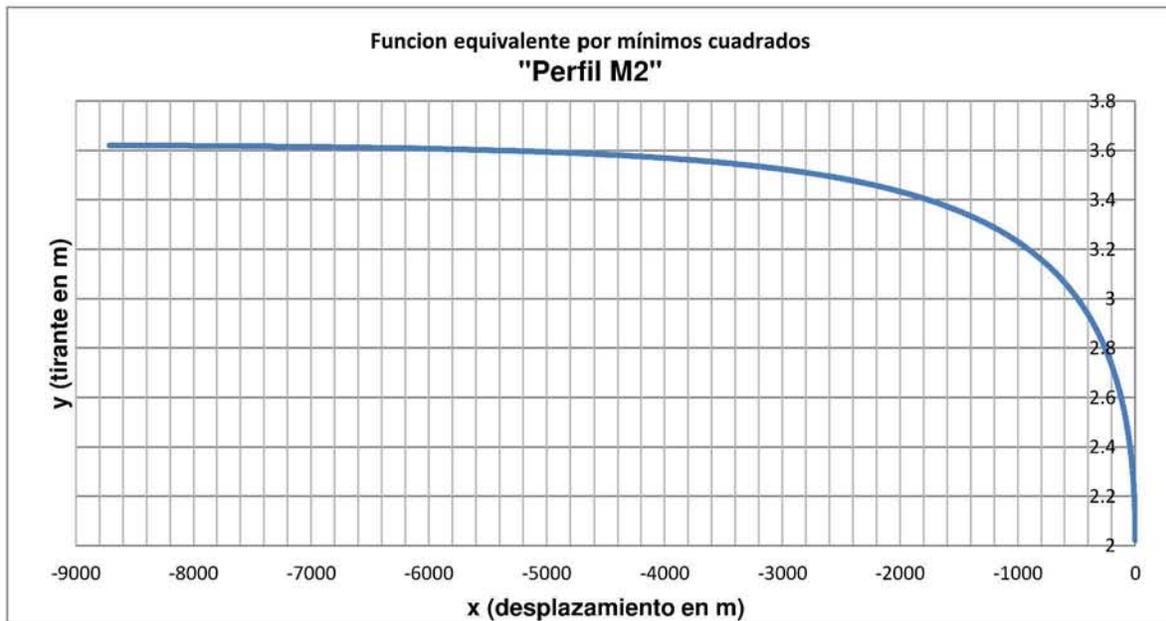


Figura 11. Ajuste lineal para un perfil M2

La integral de la función equivalente que describe el perfil de flujo para esas condiciones de frontera es:

$$x = 97.93y^2 + 701.31y + 1759.58 * \ln(y - 3.624) - 2647.64$$



**Figura 12.** Gráfica del resultado del método 1 con funciones equivalentes por mínimos cuadrados para un perfil M2

En la Figura 12 se puede observar que la distancia a la que se presenta un tirante  $y = 0.999y_n$ , con respecto a la posición en que se encuentra el tirante crítico  $y_c$  (punto donde inicia el perfil de flujo,  $x_c=0$ ), es  $x=8714.57$  metros.

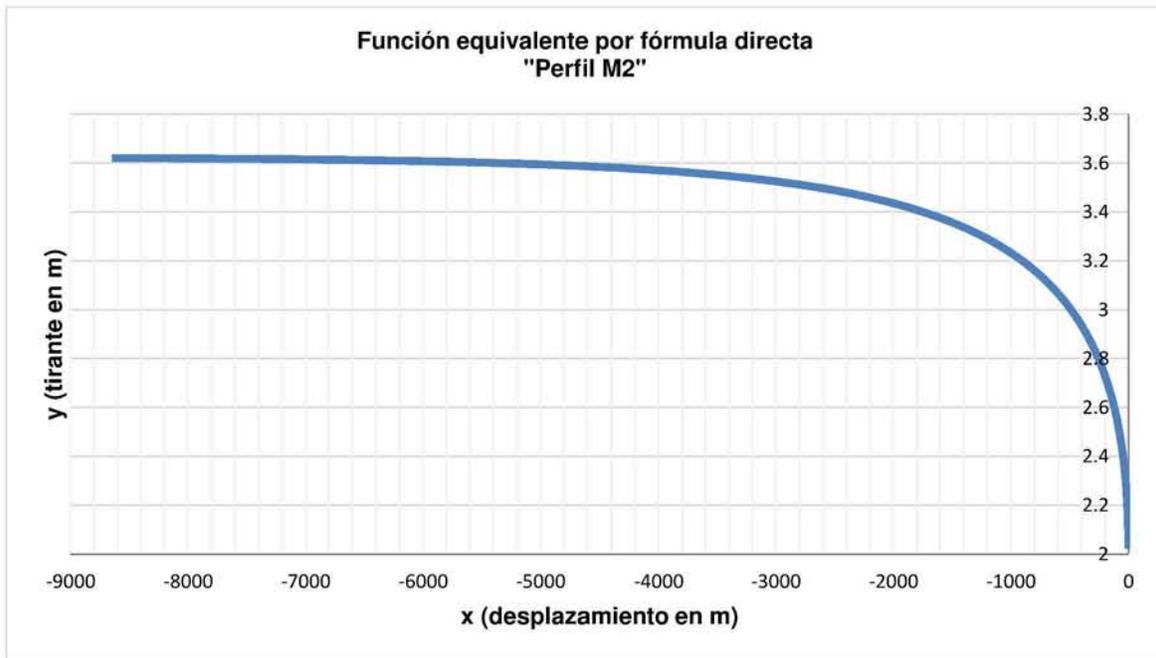
Con el segundo método propuesto, que es un método directo que nos permite conocer el desplazamiento con cualquier tirante dado, calculando para la misma cantidad de puntos (Figura 13), tenemos que el desplazamiento cerca al tirante normal es de  $x=8650.61$  metros.

En la cual:

$a = 0.000351$	$A = 300.5019$	$C = -168.6563$	$C1 = 694.4202$
$m = 0.349876$	$B = 105.1385$	$C0 = -2626.807$	$C2 = 1746.9710$
$C3 = 97.6817$			

Una vez aplicada la ecuación de integración correspondiente (100) la gráfica que describe el comportamiento de la superficie libre de agua para esas condiciones de frontera y geometría específica es la siguiente (figura 13):

$$x = -2626.81 + 694.42y + 1746.97 \ln|y - 3.62| + 97.68y^2$$



**Figura 13. Gráfica del resultado del método 2 con funciones equivalentes (solución directa) para un perfil M2**

En la gráfica de la figura 14 se empatan los tres resultados con el mismo rango de valores del tirante. Se puede observar que el desplazamiento total en la curva resultado del método por pasos y la curva que resulta del método por funciones equivalentes mediante correlación difiere entre uno y otro método en 1%, y entre el método por pasos y el resultado con la fórmula directa hay una diferencia de 0.73%.

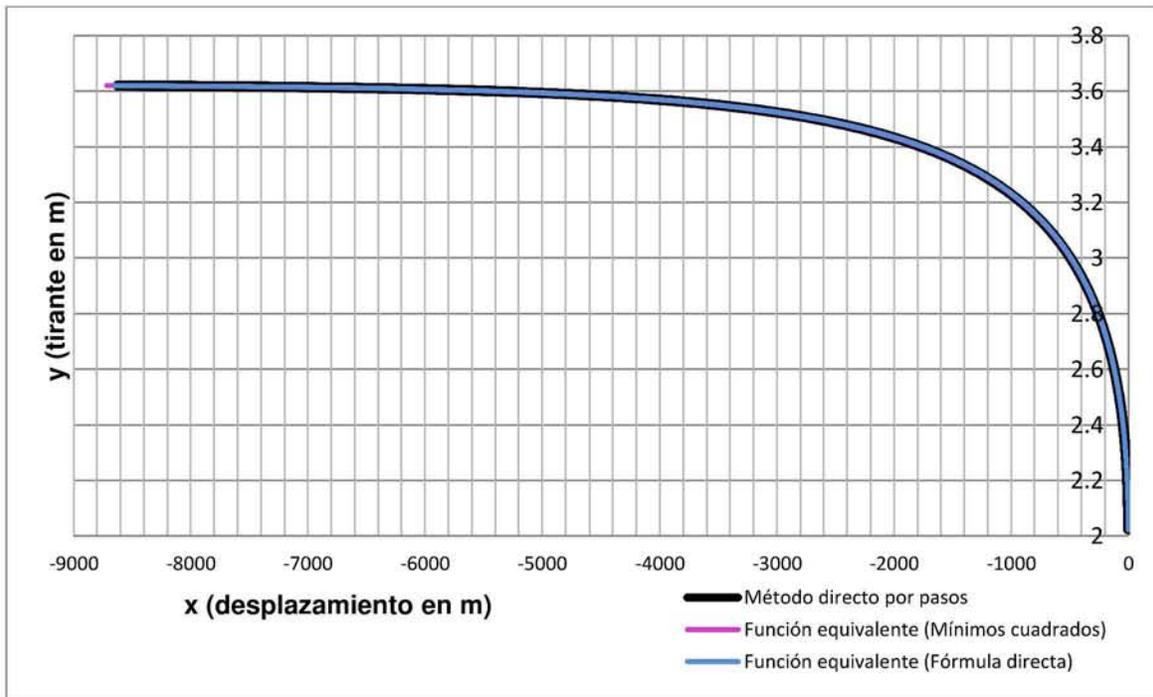


Figura 14. Gráfica comparativa entre los métodos de la función equivalente y el método de paso a paso para un perfil M2 en un canal rectangular

### 5.1.3 Caso 3. Perfil M1 en canal circular

Ahora, para el flujo a superficie libre en un canal tipo circular de un perfil M1 con un diámetro  $D=10$  metros, un coeficiente de Manning  $n=0.009$ , un gasto  $Q=50 \text{ m}^3/\text{s}$  y una pendiente del fondo  $S_0=0.0002$ . Se calcularon los tirantes crítico y normal respectivos: 2.2023 metros y 3.1864 metros.

Con el método con funciones equivalentes por mínimos cuadrados, para esta geometría y condiciones de frontera, los parámetros de ajuste fueron para  $a=519.4427$  y para  $b=1558.0604$ , con un coeficiente de correlación  $R^2=0.9928$  y la ecuación que describe el desplazamiento con un tirante dado a lo largo del canal es la siguiente:

$$x = 61.46y^2 + 3297.63y + 3167.01 * \ln(y - 3.186) - 7527.77$$

Aquí es importante notar que cuando se sustituye  $y_0 = 3.3$  metros se obtiene  $x_0 = -2970.347888$  metros; lo que implicaría que el perfil no tiene su origen en  $x = 0$ . Para corregir este detalle, se tiene que restar a la expresión anterior dicho valor, quedando:

$$x = 61.46y^2 + 3297.63y + 3167.01 * \ln(y - 3.186) - 7527.77 - x_0$$

$$x = 61.46y^2 + 3297.63y + 3167.01 * \ln(y - 3.186) - 7527.77 + 2979.347888$$

$$x = 61.46y^2 + 3297.63y + 3167.01 * \ln(y - 3.186) - 4557.422112$$



Con el método de funciones equivalentes con fórmula directa, los parámetros que resultan para este ejemplo son los siguientes:

$$\begin{array}{llll}
 a = 0.0294308 & A = -8930.0006 & C = 29047.5883 & C1 = -42157.444 \\
 m = 2.5380641 & B = -22664.9138 & Co = 71363.7486 & C2 = 3232.4373 \\
 C3 = 6867.4566 & & & 
 \end{array}$$

y la ecuación:

$$x = -71363.75 - 42157.44y + 3232.44 \ln|y - 3.1864| + 6867.46y^2$$

Como en los perfiles M1 el tirante inicial se encuentra por arriba del tirante normal (esto debido a una estructura o un desnivel aguas abajo), para el ejemplo que se está tratando se propone un tirante de inicio de 3.3 metros, en la figura siguiente se presentan las gráficas de los desplazamientos contra los tirantes para los 2 métodos propuestos en este trabajo y el método paso a paso.

Como se observa (Figura 15), el desplazamiento con el método paso a paso desde la altura inicial del tirante ( $y=3.3$  metros) hasta 1.001 del tirante normal, es  $x=11708.94$  metros, con el método de la función equivalente resultado de la correlación lineal es de  $x=11620.79$  metros y con el método con fórmula directa se obtiene un desplazamiento de  $x=11712.43$  metros. Hay una diferencia de 0.73% entre el método de pasos y la función equivalente por mínimos cuadrados y 0.03% entre el método de pasos y la fórmula directa.

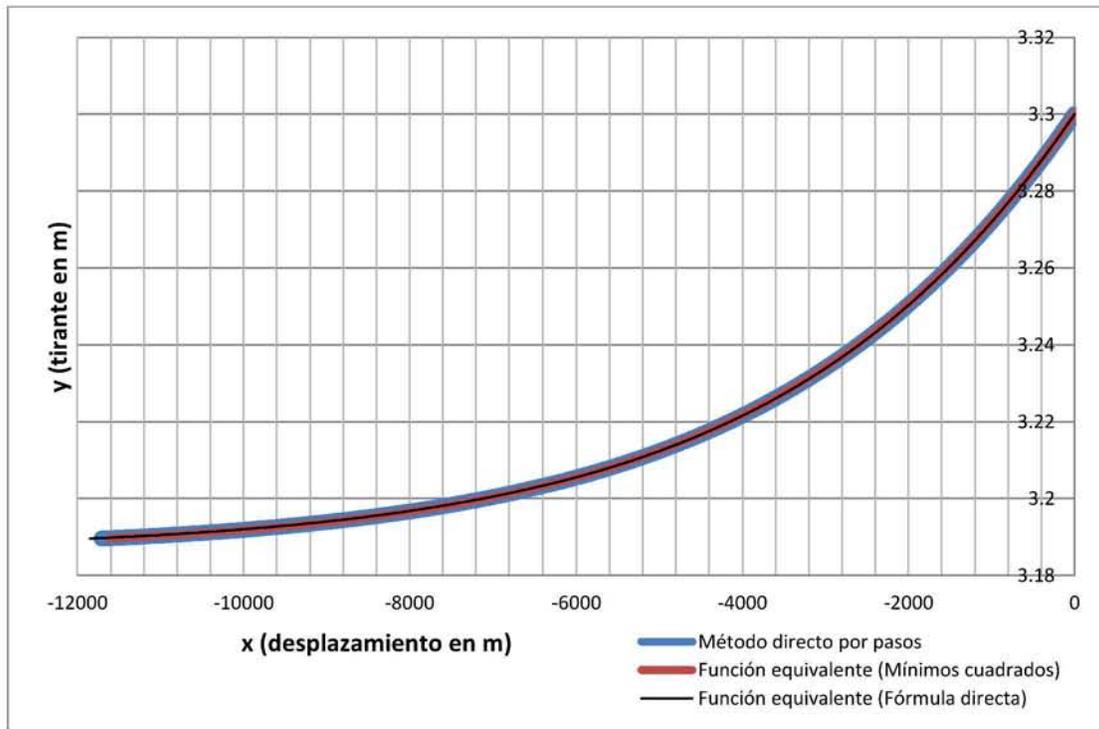


Figura 15. Gráfica comparativa entre los métodos por funciones equivalentes y el método de pasos para un perfil M1 en un canal circular

#### 5.1.4 Caso 4. Perfil S2 en canal de sección tipo herradura

Por último se presenta un perfil supercrítico tipo S2 para un canal de geometría con forma de herradura, con las siguientes características:  $D=12$  metros,  $Q=100$  m<sup>3</sup>/s,  $S_o=0.02$  y  $n=0.016$ . Se calcularon de igual manera los tirantes crítico y normal y se obtuvieron los valores de 2.4409 metros y 1.4763 metros, respectivamente. Los parámetros de ajuste por mínimos cuadrados resultaron  $a=10.5093$  y  $b=103.1530$ , con un coeficiente de regresión de  $R^2=0.9999$ , siendo la función que describe el comportamiento del flujo:

$$x = -5.25y^2 + 113.24y - 84.53 * \ln(y - 1.476) - 248.21$$

Con la fórmula directa, se calcularon los parámetros:

$a = -0.00116806$	$B = 99.4748$	$C1 = 159.5227$
$m = 1.2682524$	$C = 88.3261$	$C2 = -111.6938$
$A = 78.4345$	$Co = -330.7259$	$C3 = -10.5201$



la ecuación es la siguiente:

$$x = -330.73 + 159.52y - 111.69 \ln|y - 1.4763| - 10.52y^2$$

La distancia obtenida con el método de pasos en de  $x= 617.148$  metros, mientras que con la función equivalente directa resultó de  $x= 610.06$  metros y con el método de mínimos cuadrados de  $x= 614.53$  metros. La diferencia entre el método paso a paso y el método de funciones equivalentes por mínimos cuadrados es de 0.42% y con la fórmula directa es de 1.15% (figura 16).

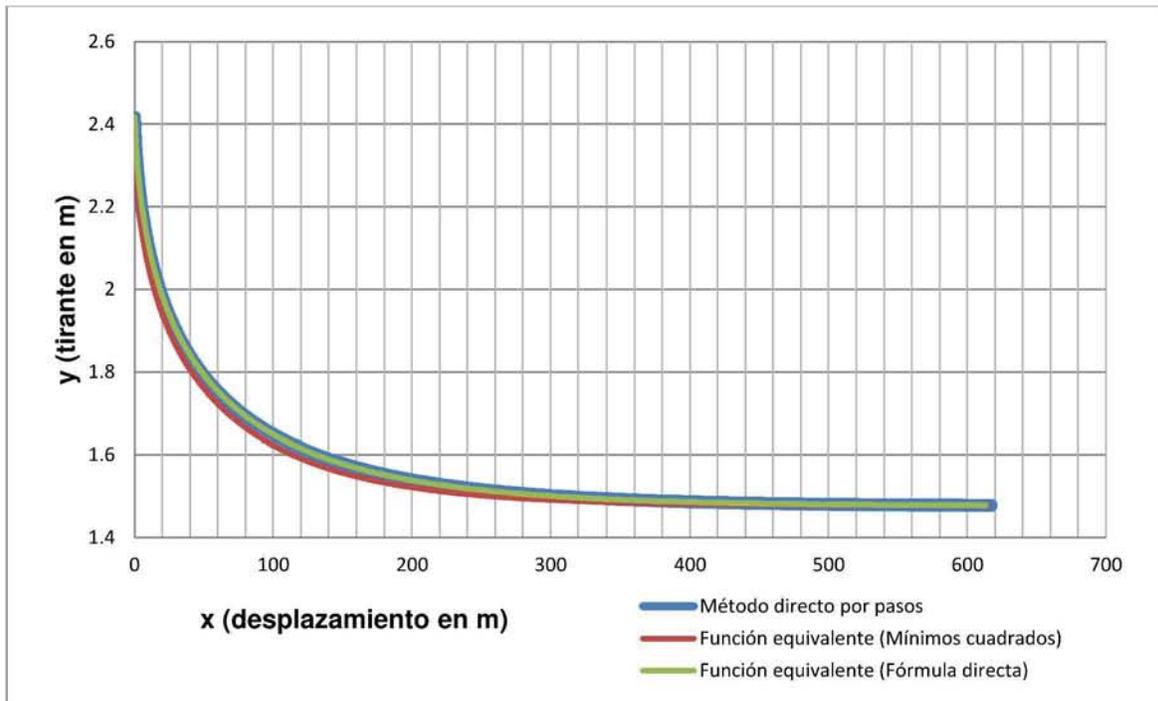


Figura 16. Gráfica comparativa entre los métodos por funciones equivalentes y el método de pasos para un perfil S2 en un canal herradura

### 5.1.5 Comentarios sobre el esfuerzo computacional en la aplicación de los métodos

Si bien, todos los ejemplos anteriores fueron calculados con 500 pasos de cálculo y así los resultados difieren en algunos casos, por lo general y para mejorar la precisión del método paso a paso los incrementos deben ser muy pequeños para garantizar la convergencia. En el siguiente cuadro se muestran los resultados que se obtienen para los perfiles anteriores utilizando 5, 50 y 500 pasos de cálculo:



Cuadro 3. Resumen de resultados para diferente número de pasos de cálculo

Desplazamiento total en m (x)								
Sección geométrica	Rectangular		Trapezoidal		Circular		Herradura	
Número de Pasos	Método de pasos	Función equivalente 1						
5	264.63	264.63	3822.28	8698.60	11708.96	12056.83	325.35	489.75
50	249.34	264.63	7446.76	8712.70	11652.13	12056.83	521.07	489.75
500	156.52	264.63	8620.37	8714.20	10033.12	12056.83	617.15	489.75

De acuerdo con los resultados, utilizando el método de la función equivalente el desplazamiento total que se alcanza teniendo 5 y 500 pasos es prácticamente el mismo, pero con el método paso a paso el resultado varía según el número de pasos.

Entonces, el método de la función equivalente puede calcular con 5 pasos la función del perfil con una buena aproximación, con ésta pueden obtenerse  $n$  valores de desplazamiento según tirante dado entre las condiciones de frontera.

La variación en cuanto al número de pasos de cómputo depende de la geometría y las condiciones que se tengan. En el perfil trapecial se observa la mayor variación para la función equivalente, en las pruebas realizadas en esta investigación.

## 5.2 Comparación de las funciones propuestas con datos experimentales

Una forma de comprobar el método propuesto es mediante la experimentación de los perfiles de flujo en laboratorio. Este trabajo sólo contempla la validación de las funciones con otros métodos numéricos. No obstante en la literatura se encontraron resultados de las mediciones de los doce perfiles de flujo en un canal tipo Armfield (Yescas, 2014), se optó por realizar una comparación cualitativa entre estos y los perfiles calculados por métodos numéricos e integración analítica.

Como ya se había mencionado, la función equivalente de la ecuación dinámica obtenida por mínimos cuadrados, incluye en la función los tirantes crítico y normal, por lo tanto, no puede ser utilizada para calcular perfiles A2, A3, H2, H3 debido a que en los perfiles con pendiente adversa no existe un tirante normal y en los perfiles con pendiente horizontal el tirante normal tiende a infinito. Para estos casos, en particular, se utilizó la fórmula directa que permite calcular todo tipo de perfiles de flujo.

Dado que los perfiles experimentales fueron desarrollados en un canal con una geometría muy pequeña y los resultados de la fórmula directa no son satisfactorios en estas condiciones, sólo serán evaluados aquellos perfiles que no se puedan calcular con la primera metodología propuesta.

En el siguiente figura se observa el canal tipo Armfield donde fue llevada a cabo la práctica de laboratorio, los datos sobre metodología y más detalles sobre cómo se realizó

se encuentran en la tesis “Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica” (Yescas, 2014). En el cuadro 4 se encuentran los datos generales de geometría del canal y los tirantes crítico y normal que corresponden a los perfiles M1, M2 y M3.



Figura 17. Imagen de las prácticas de laboratorio en el canal tipo Armfield para los perfiles de flujo  
Fuente: “Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica” (Yescas, 2014).  
Universidad Autónoma Chapingo

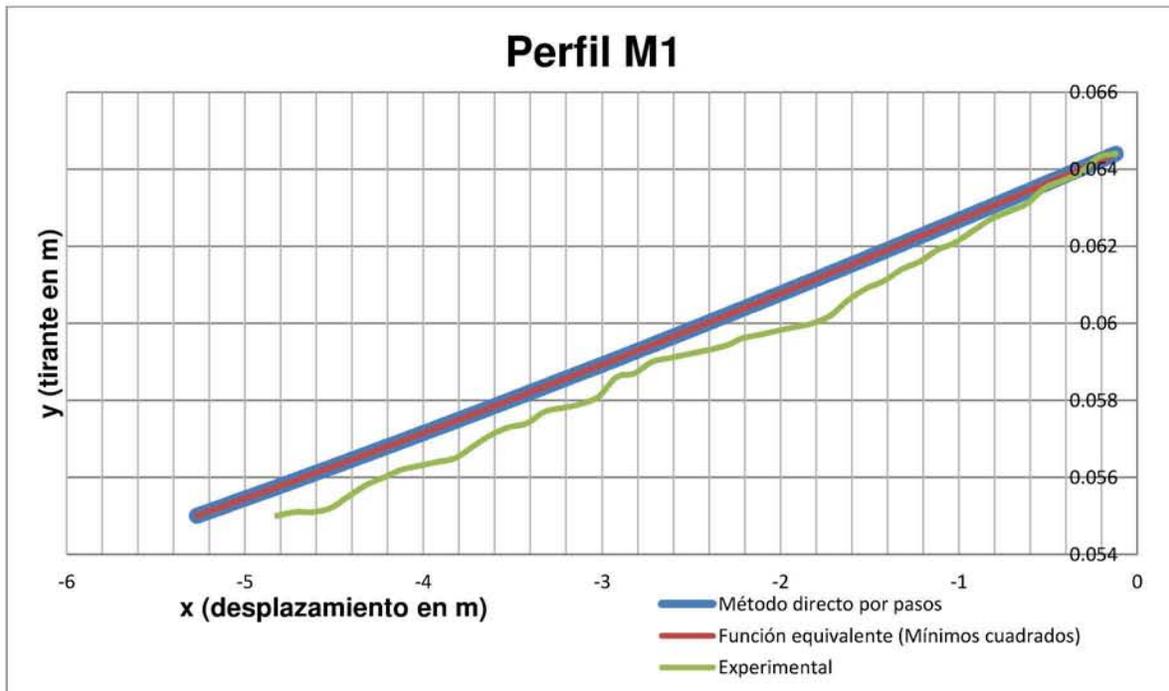
Cuadro 4. Datos geométricos de los perfiles experimentales M1, M2 y M3

Datos	Valor	Unidades
Caudal (Q)	0.00152767	m <sup>3</sup> /s
Ancho del canal (b)	0.076	m
Rugosidad de Manning (n)	0.008	
Pendiente (S <sub>0</sub> )	0.00258	
Tirante normal (y <sub>n</sub> )	0.0427881	m
Tirante crítico (y <sub>c</sub> )	0.0345346	m
Pendiente crítica (S <sub>c</sub> )	0.00456506	

Fuente: “Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica” (Yescas, 2014)

Se calcularon los perfiles con los datos de tirante que se presentan en el anexo, las gráficas para el perfil M1 nos muestra con una línea verde el perfil experimental, que son los datos obtenidos de laboratorio, con una línea roja los resultados del método de la función equivalente calculada por mínimos cuadrados y la línea azul es el resultado del método de pasos.

La forma de la gráfica calculada con el método de pasos y con la función equivalente es la misma, al igual que la distancia total  $x=5.3$  metros, los resultados parciales difieren.



**Figura 18. Perfil M1**

En el caso del perfil M2 (figura 19), el desplazamiento total próximo al tirante normal es de  $x=4.82$  m en el perfil experimental,  $x=4.345$  m con el método paso a paso y  $x=4.349$  m con la función equivalente por mínimos cuadrados.

Aquí es importante resaltar que hay un cierto nivel de incertidumbre con respecto a los datos experimentales ya que existen variaciones significativas en el perfil de la superficie libre medida, no obstante la correlación entre los datos medidos y los calculados mantiene una cierta correspondencia para fines prácticos e ilustrativos. Esta misma condición se mantiene en el resto de los perfiles que aquí se comparan.

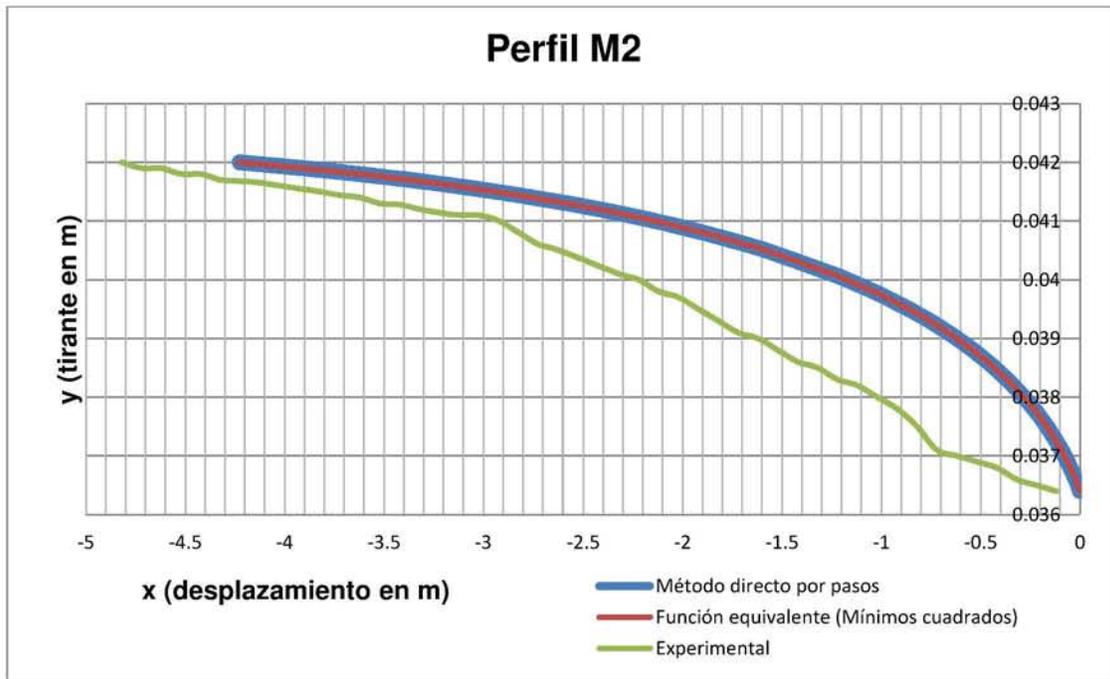


Figura 19. Perfil M2

El perfil M3 (figura 20) presenta una adecuada correlación en las partes intermedias entre perfil experimental y los resultados de los otros dos métodos (numérico y analítico), en los extremos se observan diferencias que pueden ser debidas a errores de medición.

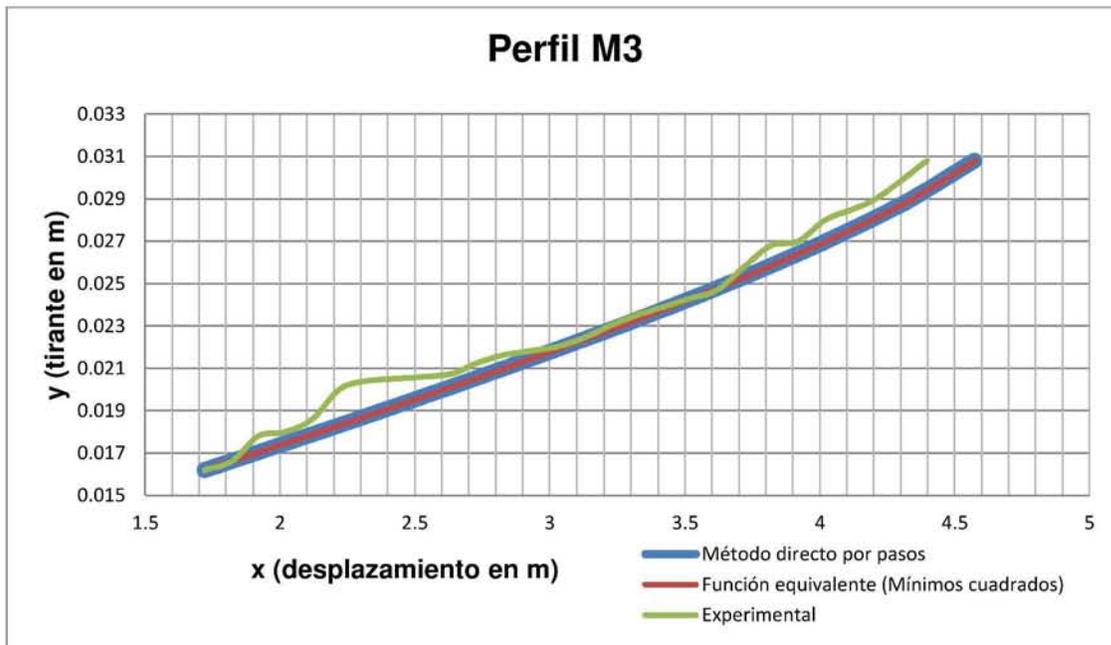


Figura 20. Perfil M3



En el cuadro 5 se encuentran los datos geométricos y de descarga así como los tirantes crítico y normal para los perfiles supercríticos.

Cuadro 5. Datos geométricos de los perfiles experimentales S1, S2 y S3

Datos	Valor	Unidades
Caudal (Q)	0.001561	m <sup>3</sup> /s
Ancho del canal (b)	0.076	m
Rugosidad de Manning (n)	0.007	
Pendiente (S <sub>0</sub> )	0.002678	
Tirante normal (y <sub>n</sub> )	0.0170023	m
Tirante crítico (y <sub>c</sub> )	0.0350351	m
Pendiente crítica (S <sub>c</sub> )	0.00351044	

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

La figura 21 nos muestra el perfil S1 en el cual el método de incrementos finitos y el método de ajuste lineal por mínimos cuadrados presentan una adecuada correlación, las distancias totales entre estos dos métodos son iguales  $x=4.32$  metros, contra  $x=3.92$  metros del perfil experimental. En la figura 22 se observa el perfil S2 en el cual los desplazamientos calculados con los dos metodos (método numérico e integración analítica) son mayores que los datos experimentales, siendo en estos casos  $x=6.9$  metros aproximadamente, y en el resultado de laboratorio se alcanza una distancia  $x=4.82$  metros.

Y por último el perfil S3 (figura 23) en el cual el método propuesto y el de incrementos finitos alcanzan la misma distancia entre los límites de frontera que el perfil experimental.

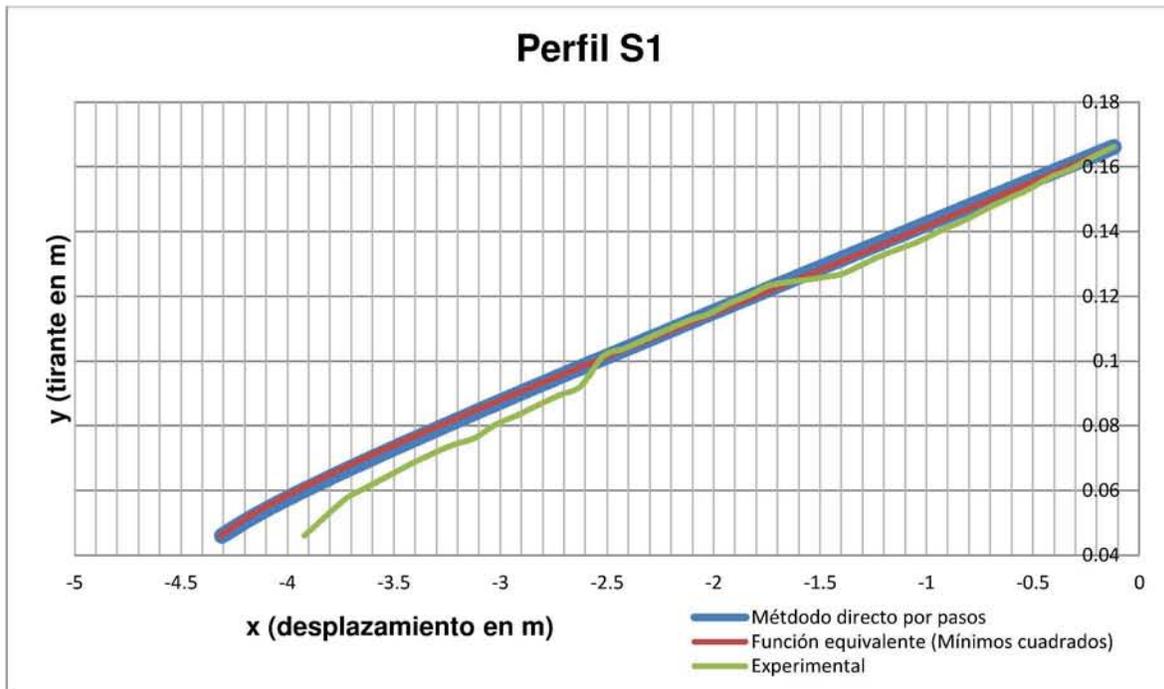


Figura 21. Perfil S1

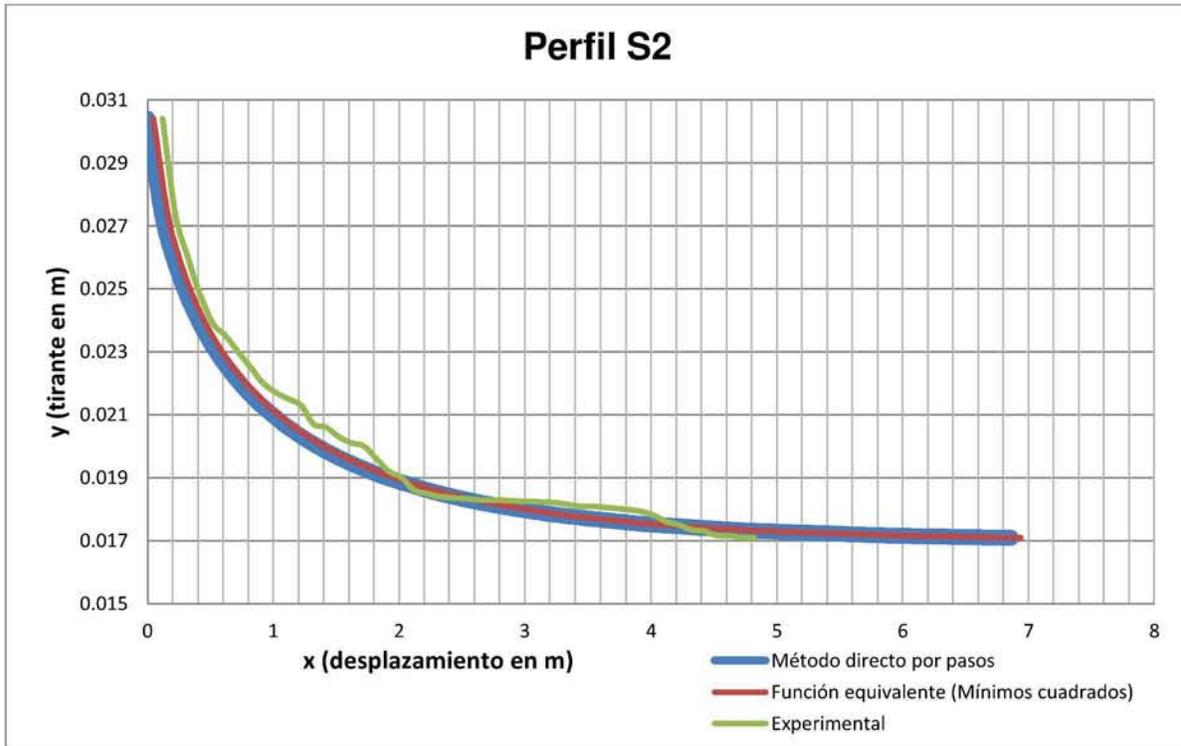


Figura 22. Perfil S2

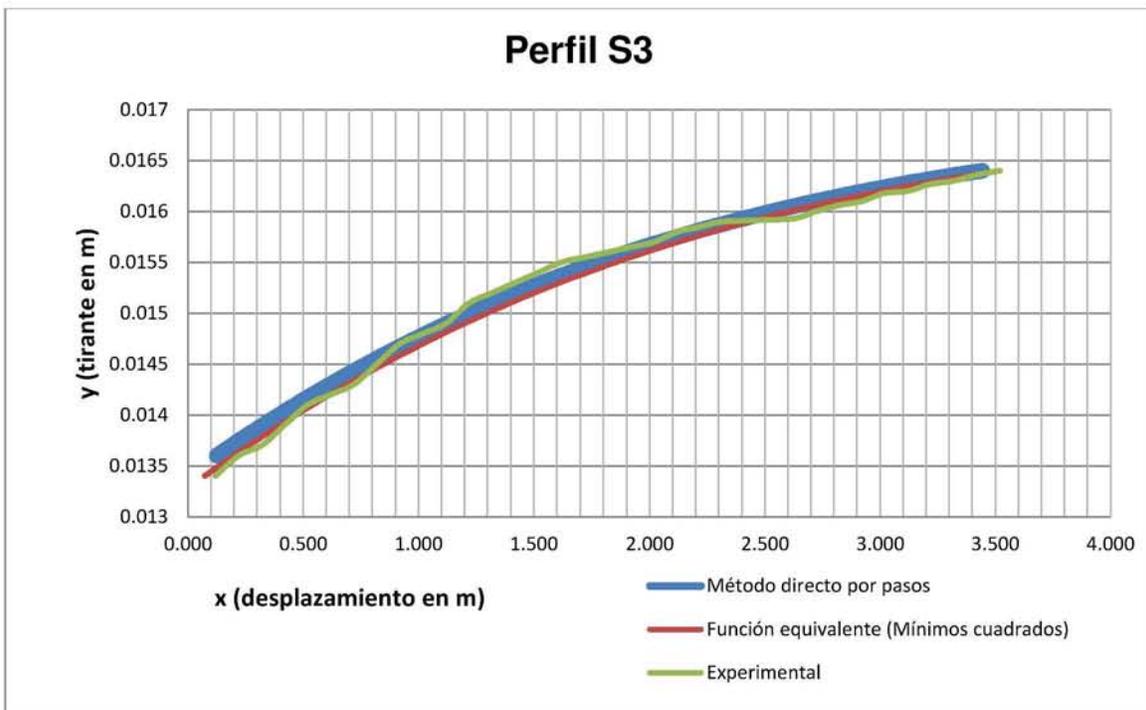


Figura 23. Perfil S3

En el cuadro 6 se presentan los datos con los que fueron desarrollados los perfiles críticos tipo C. Al igual que en los perfiles anteriores se comparó el perfil experimental con el método numérico de pasos y con el método de mínimos cuadrados de la función equivalente.

Cuadro 6. Datos geométricos de los perfiles experimentales C1 y C3

Datos	Valor	Unidades
Caudal (Q)	0.00152767	m <sup>3</sup> /s
Ancho del canal (b)	0.076	m
Rugosidad de Manning (n)	0.008	
Pendiente (S <sub>0</sub> )	0.00456506	
Tirante normal (y <sub>n</sub> )	0.0345346	m
Tirante crítico (y <sub>c</sub> )	0.0345346	m
Pendiente crítica (S <sub>c</sub> )	0.00456506	

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

En los resultados, para el perfil C1 (figura 24) se puede observar en los resultados experimentales que la distancia desde  $y=0.0619$  m hasta el tirante crítico  $y_c$  es de  $x=4.82$  m, y al calcular con los métodos se tiene un valor de  $x=3.752$  m para el mismo rango del tirante  $y$ .

En el caso del perfil C3 (figura 25), se observan diferencias que podrían estar relacionadas con problemas o limitaciones de medición.

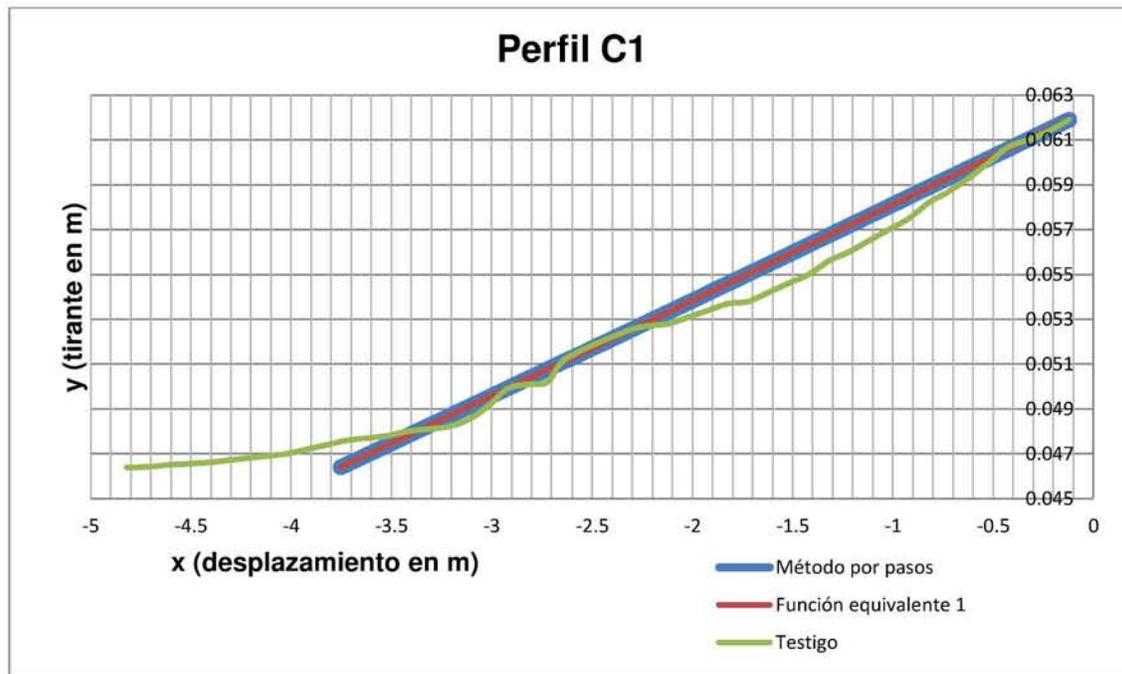


Figura 24. Perfil C1

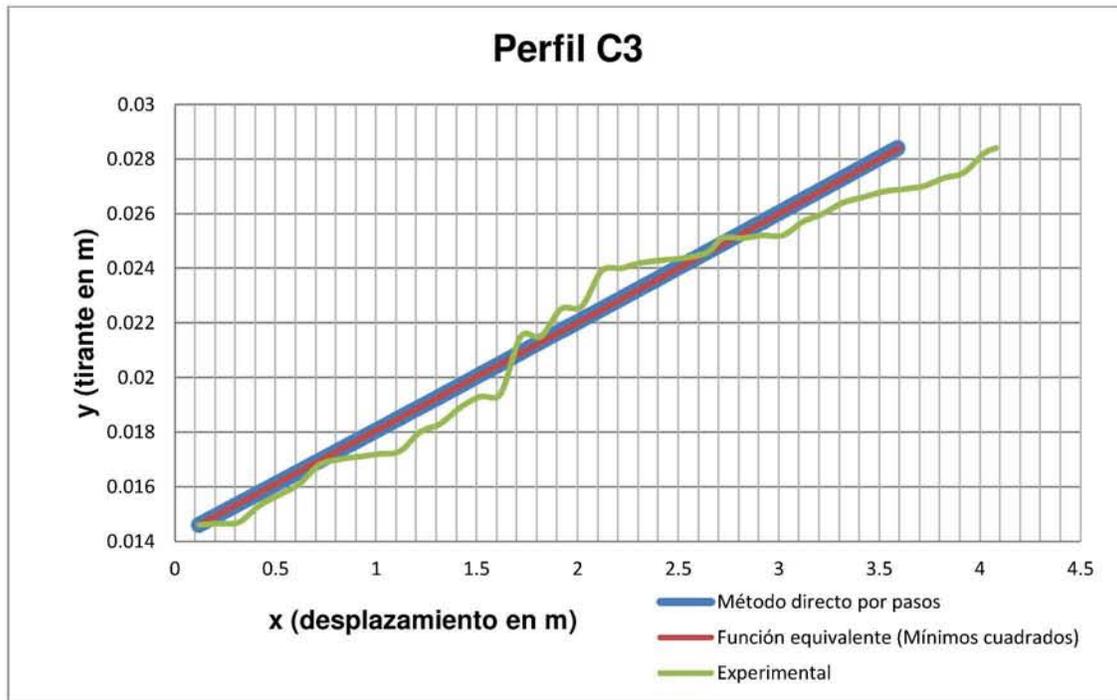


Figura 25. Perfil C3

Los datos para los perfiles con pendiente horizontal se encuentran en el cuadro 7, como se había mencionado, estos perfiles se calcularon con la fórmula directa y con incrementos finitos y se compararon al igual que en los otros perfiles (con pendiente positiva) con el perfil experimental.

Al usar la fórmula directa en el perfil H2 (figura 26) desde  $y=0.0383$  metros a  $y=0.0584$  metros se tiene un desplazamiento de  $x=4.783$  metros,  $x=4.82$  metros para el perfil experimental,  $x=4.659$  metros para el método por incrementos finitos.

Para fines prácticos es una mejor opción utilizar la fórmula directa ya que sólo se necesita hacer una simple sustitución y se obtienen prácticamente los mismos resultados del método por pasos.

Cuadro 7. Datos geométricos de los perfiles experimentales H2 y H3

Datos	Valor	Unidades
Caudal (Q)	0.00152767	$m^3/s$
Ancho del canal (b)	0.076	m
Rugosidad de Manning (n)	0.01	
Pendiente ( $S_0$ )	0.0	
Tirante normal ( $y_n$ )	Infinito	m
Tirante crítico ( $y_c$ )	0.0345346	m
Pendiente crítica ( $S_c$ )	0.00712506	

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

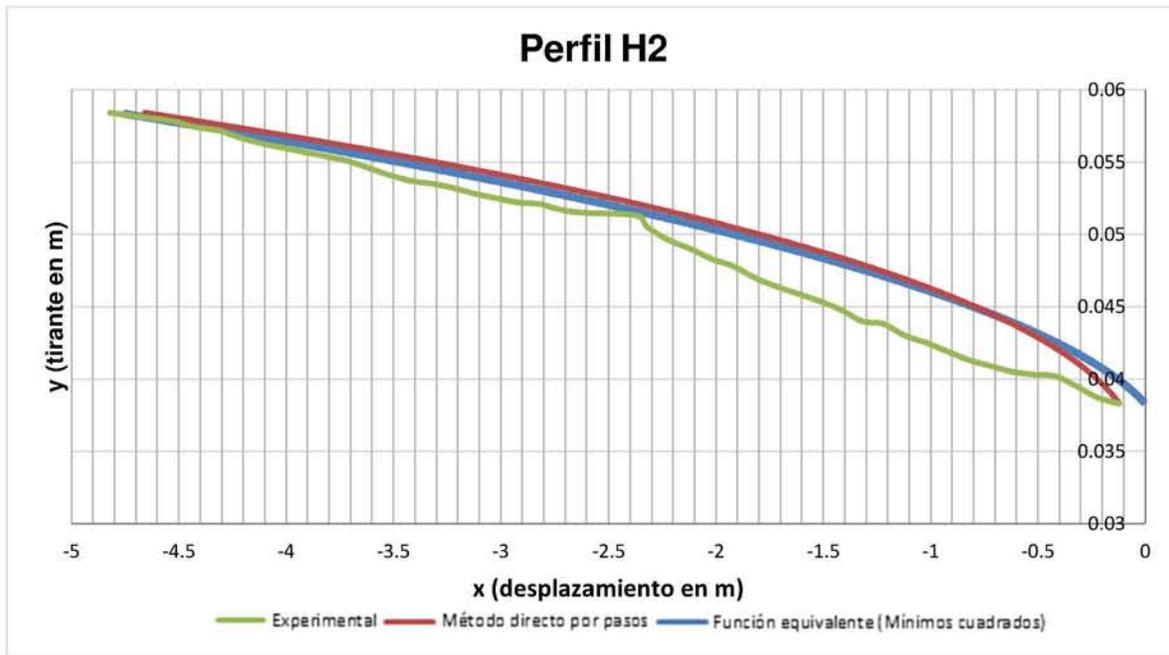


Figura 26. Perfil H2

En el caso del perfil H3 (figura 27) existe un error significativo ya que las curvas calculadas con los dos métodos (numérico y analítico) no tienen una pendiente parecida con el perfil experimental. Basándonos únicamente en las pruebas experimentales la metodología no se consideraría apropiada para calcular este tipo de perfiles.

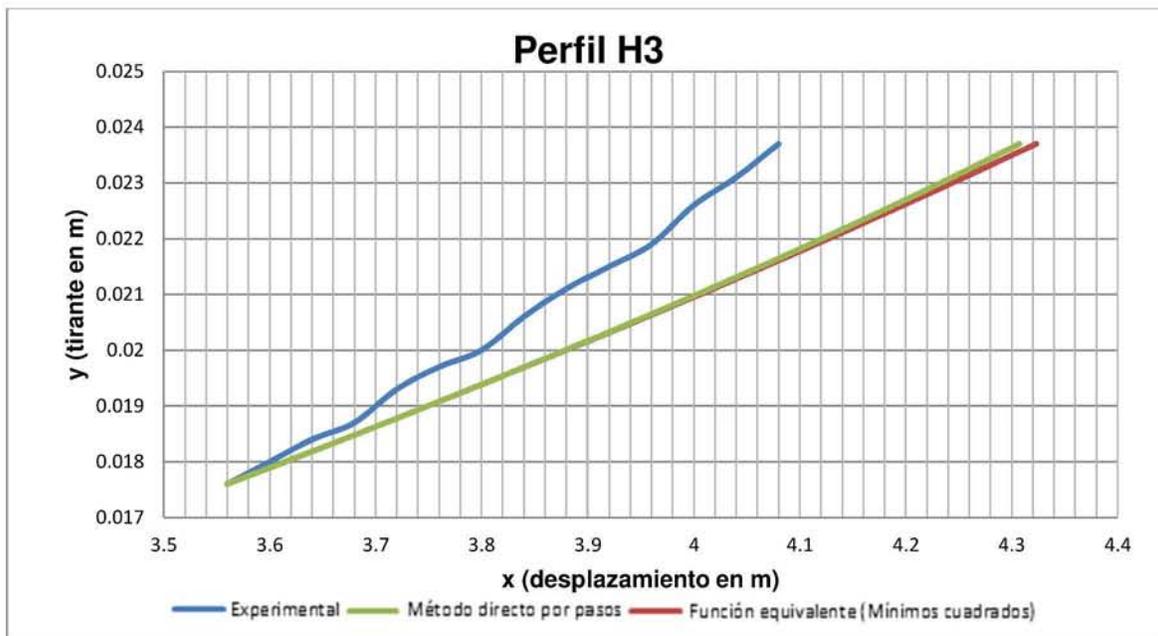


Figura 27. Perfil H3



Y por último se tienen los perfiles con pendiente adversa o negativa, en el cuadro 8 podemos encontrar los valores de geometría, descarga y tirantes crítico y normal. El perfil A2 (figura 29) presenta una diferencia menor el método numérico contra el obtenido con la fórmula directa con respecto al perfil experimental. En el perfil A3 (figura 30) las curvas resultados de los métodos numérico y analítico con similares y parece apegarse más la curva de la fórmula directa al perfil experimental.

Cuadro 8. Datos geométricos de los perfiles experimentales A2 y A3

Datos	Valor	Unidades
Caudal (Q)	0.00151931	m <sup>3</sup> /s
Ancho del canal (b)	0.076	m
Rugosidad de Manning (n)	0.009	
Pendiente (S <sub>0</sub> )	-0.006631	
Tirante normal (y <sub>n</sub> )	No existe	m
Tirante crítico (y <sub>c</sub> )	0.0344085	m
Pendiente crítica (S <sub>c</sub> )	0.0057713	

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

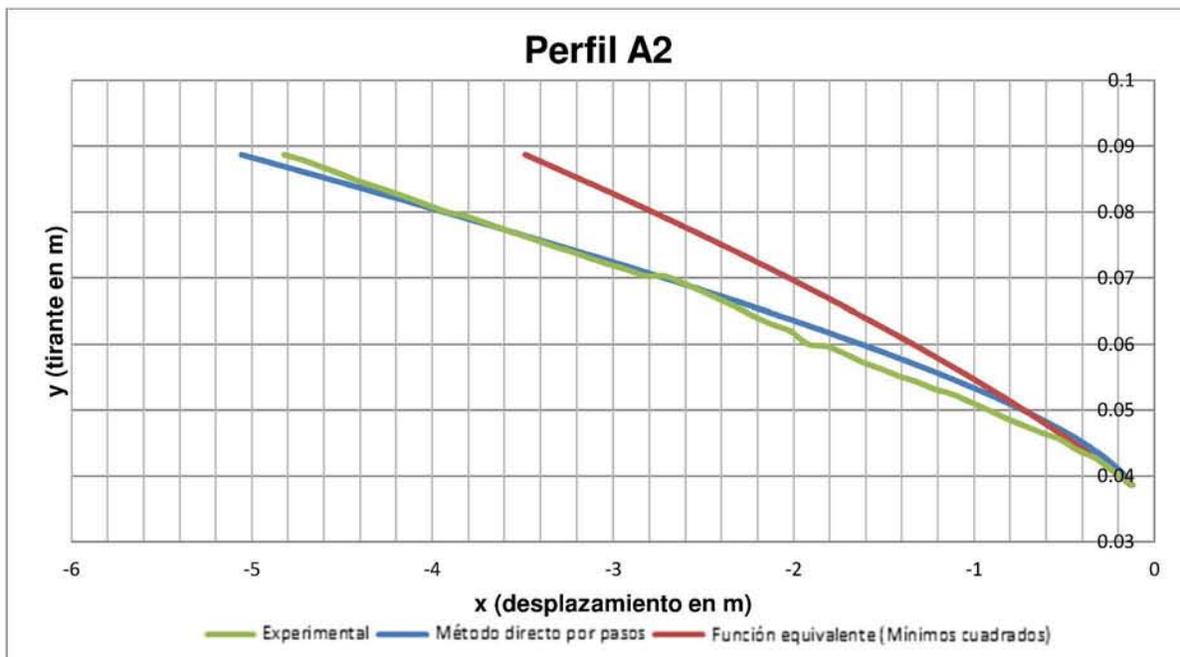


Figura 28. Perfil A2

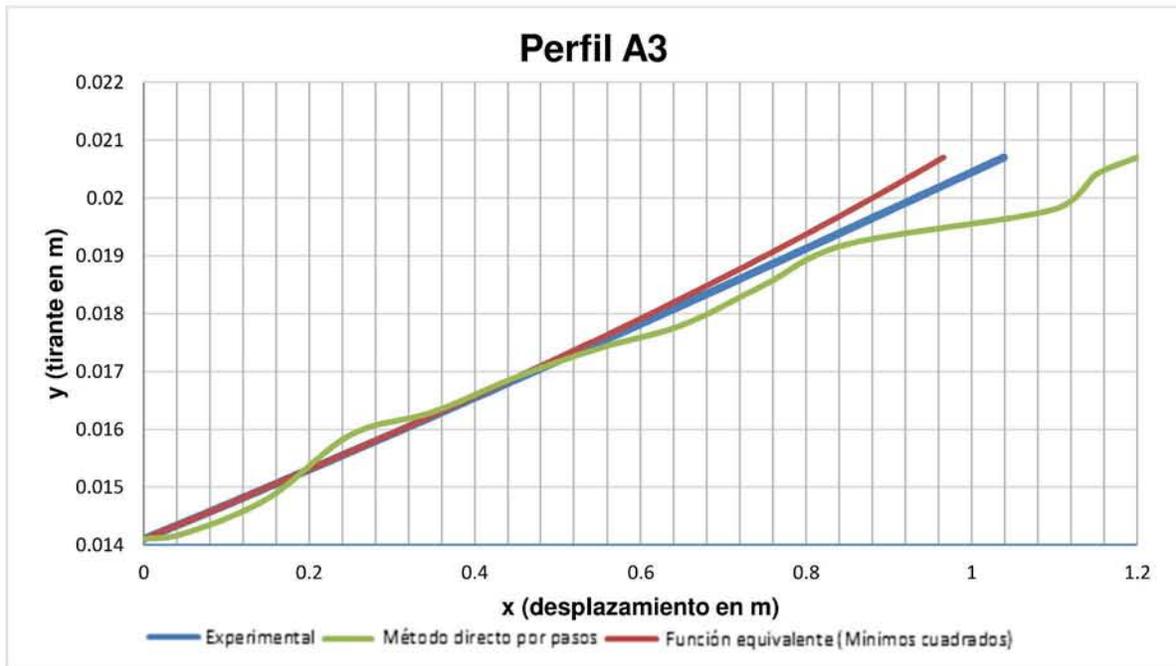


Figura 29. Perfil A3

## 6 PROGRAMA PARA CALCULAR PERFILES CON LA METODOLOGÍA PROPUESTA

Se realizó como apoyo al método de funciones equivalentes por mínimos cuadrados un programa de cómputo, usando el lenguaje de programación Delphi RAD Studio XE3, para calcular los perfiles subcríticos tipo M, los perfiles críticos tipo C y los perfiles supercríticos tipo S.

Se tiene un menú principal, en el cual se calculan 8 diferentes tipos de perfiles con los 3 tipos de geometría principales (trapezoidal, circular y herradura).



Figura 30. Portada del programa para calcular perfiles con funciones equivalentes mediante mínimos cuadrados

Es necesario escribir los valores en los cuadros de la plantilla, talud, caudal, el coeficiente de coriolis, el coeficiente de Manning y proponer un tirante según el tipo de perfil a calcular. Por ejemplo para un perfil M1 se debe escribir un tirante por encima del tirante normal, para un M2 se debe proponer un tirante entre el crítico y el normal y para un M3 un tirante por abajo del tirante crítico, lo mismo sucede con los perfiles críticos y supercríticos.

Al oprimir el botón "tipo de perfil" se calculan el tirante crítico y normal (que son calculados por punto fijo) y el tipo de perfil que se va a calcular.

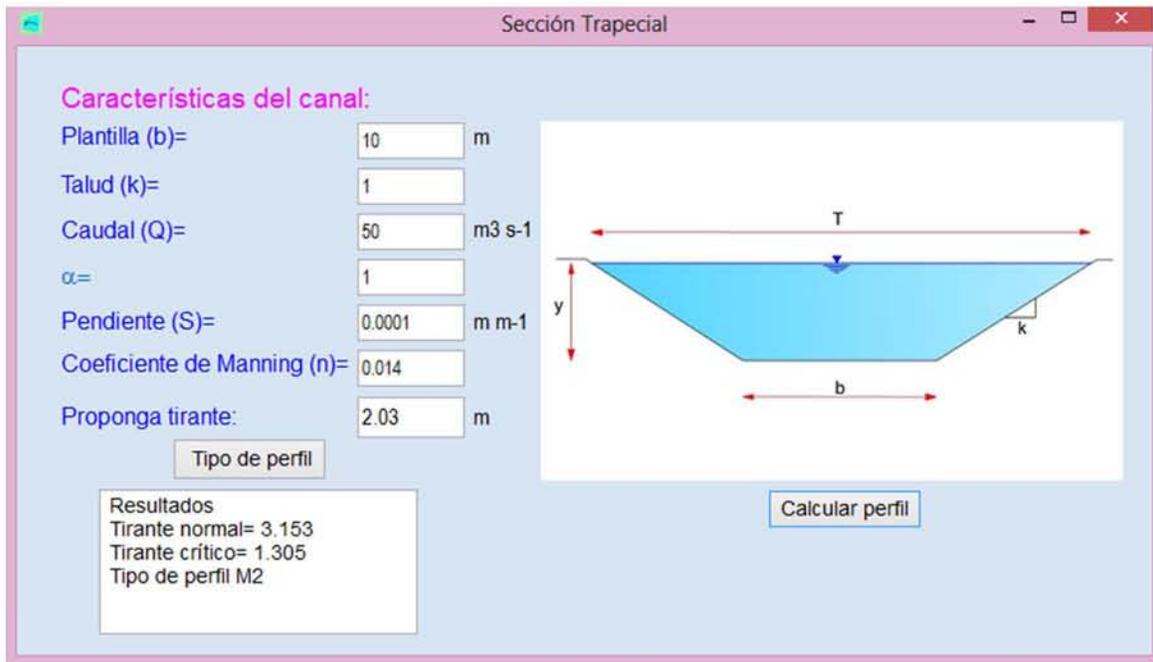


Figura 31. Ventana sección trapecial

Para ver los resultados (Figura 32) se oprime el botón “ver resultados” y nos muestra la tabla de resultados con los tirantes y la distancia correspondiente con 50 cálculos por defecto, la gráfica con los resultados y la ecuación logarítmica del comportamiento de la superficie libre del agua.

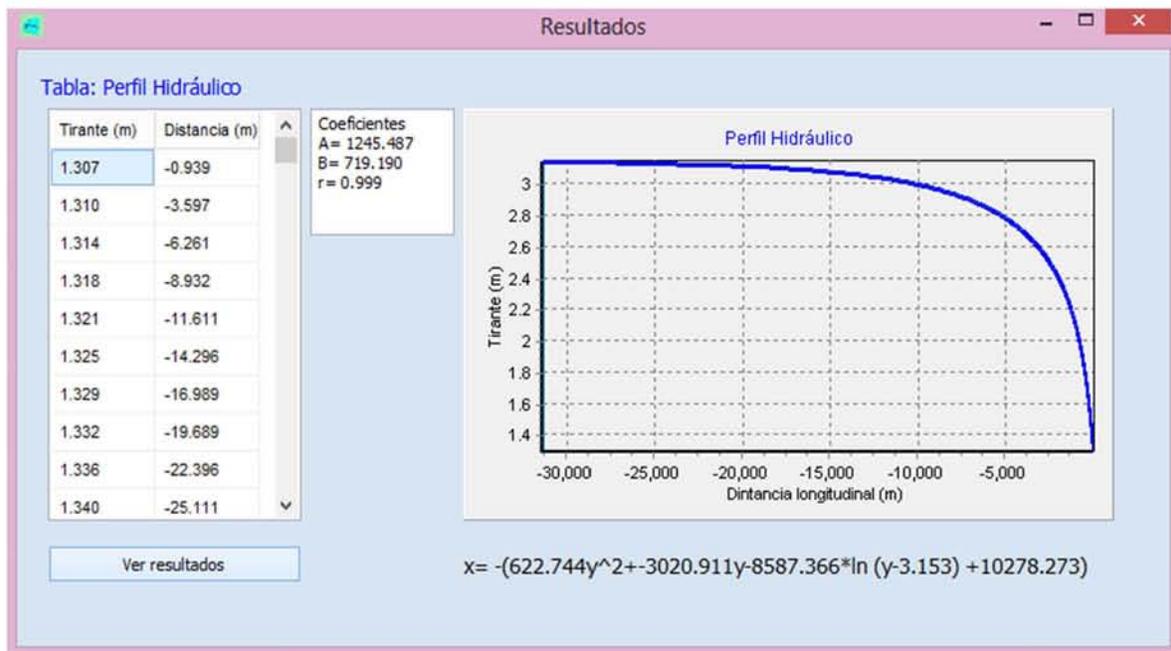


Figura 32. Resultados de un perfil M2



Para un canal en sección herradura (Figura 33), se propone un diámetro, caudal, pendiente, coeficiente de coriolis, coeficiente de Manning. Se escribe un tirante a partir del cual inician los cálculos, y nos da de resultados una ecuación, una gráfica y una tabla. De igual manera se procede con un perfil de tipo circular.

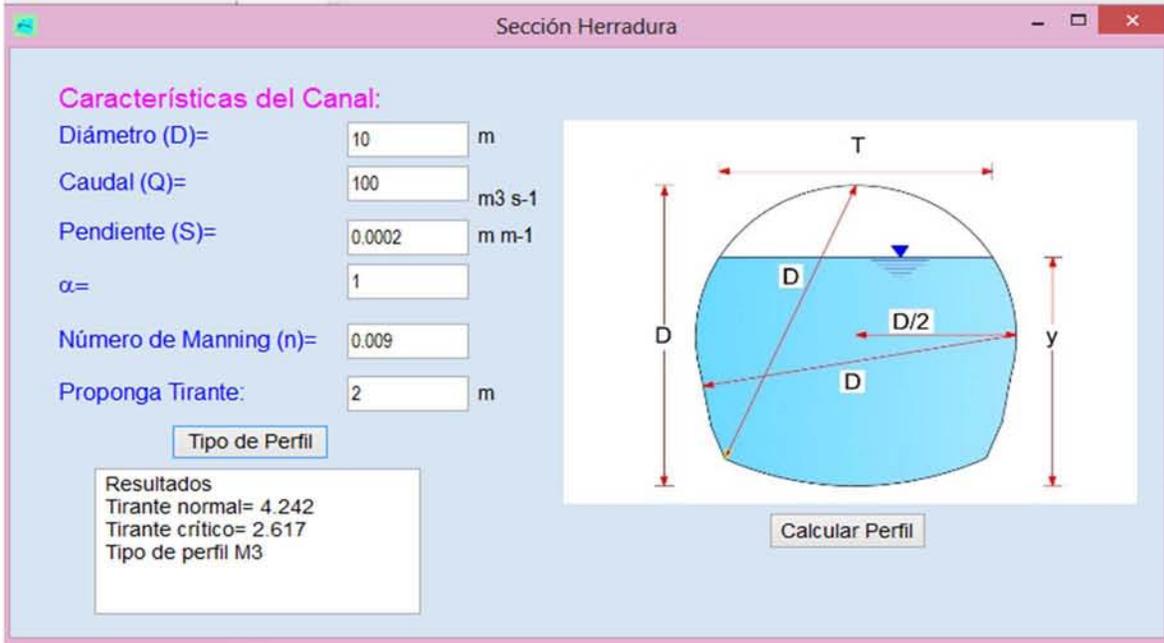


Figura 33. Ventana sección herradura

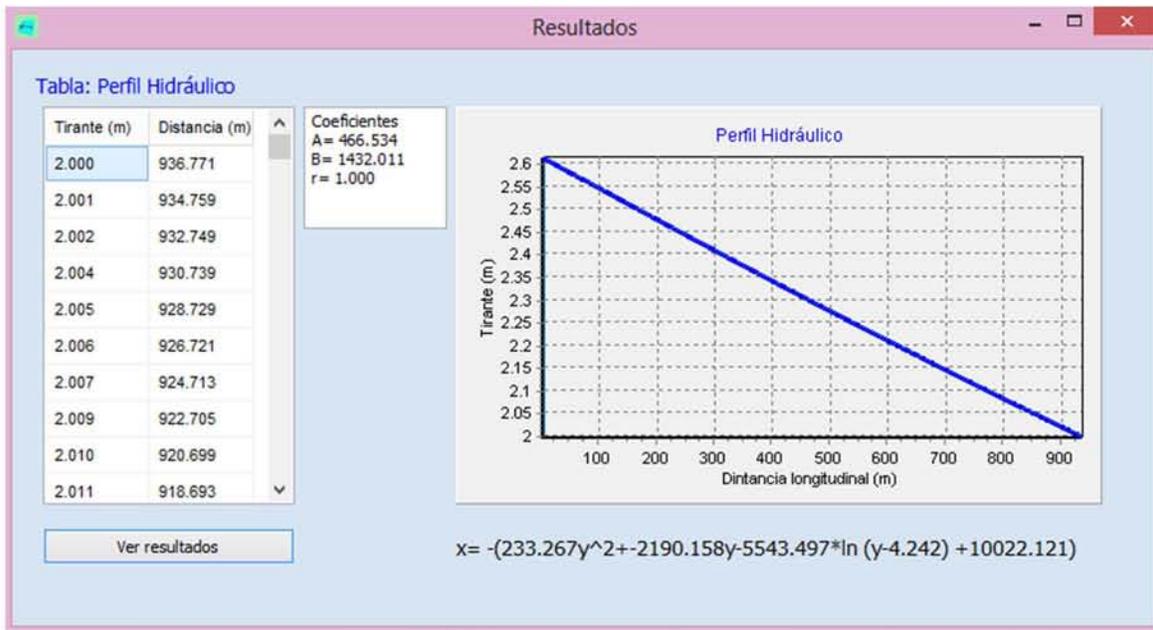


Figura 34. Resultados de un perfil M3



## 7 CONCLUSIONES

La concepción y obtención de la función equivalente es simple y permite describir con precisión el flujo gradualmente variado para condiciones de frontera particulares; ofrece la ventaja de ser una solución analítica por lo que facilita su interpretación y solución directa.

Si bien se requiere llevar a cabo un ejercicio de correlación, para obtener los valores de los coeficientes  $a$  y  $b$  de la ecuación equivalente, se recomienda hacer el ajuste con un número de puntos de división del rango de tirantes dentro de los cuales se desarrolla el perfil mayor a 5 puntos, tal que se obtenga un coeficiente de correlación  $R^2 > 0.99$  para garantizar una solución confiable.

Con el método paso a paso se puede lograr una muy alta precisión, pero tiene la desventaja, al igual que la mayoría de los métodos numéricos, que el valor de los incrementos debe ser muy pequeño para garantizar la convergencia a la solución; situación que siempre quedará a criterio del calculista. En contraste, con el método propuesto, desde que se conoce la calidad de la correlación de la ecuación equivalente, se tendrá la certeza de la calidad de la solución; en este sentido todas las pruebas hasta ahora para este tipo de perfiles arrojan coeficientes de correlación superiores a  $R^2 = 0.99$ . A diferencia de otras propuestas para la solución analítica de la ecuación de flujo gradualmente variado, la función equivalente por mínimos cuadrados que aquí se presenta es válida para todo tipo de geometrías prismáticas en canales con pendientes positivas.

La solución directa, segunda alternativa, resuelve la ecuación dinámica introduciendo expresiones simples para calcular los coeficientes de la función equivalente propuesta con un solo paso de cómputo, sin recurrir a procesos iterativos. Si bien tiene algunas restricciones al calcular perfiles con ciertas geometrías, presenta la ventaja que permite calcular los 12 perfiles de flujo con una muy buena aproximación, incluso aquellos que tienen pendiente negativa o pendiente cero. En este caso queda el reto de encontrar mecanismos para optimizar la estimación directa de los coeficientes.

En resumen, con este trabajo se propusieron dos alternativas para solucionar la ecuación de flujo gradualmente variado mediante funciones equivalentes integrables analíticamente y se demostró que la calidad de las soluciones obtenidas son numéricamente competitivas con respecto a los métodos numéricos, como lo es el método paso a paso y confiables en comparación con datos experimentales.



## 8 LITERATURA CITADA

- Sotelo, G. (2002). *Hidráulica de Canales*. México: Ciudad Universitaria.
- Chow, V. (1994). *Hidráulica de Canales Abiertos*. Colombia: Editorial McGraw-Hill.
- García, J. (2006). *Flujo Gradualmente Variado. Canales Prismáticos*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Potter, M. (2003). *Mecánica de Fluidos*. México: Editorial Thomson.
- Subramanya, K. (1982). *Flow in Open Channels*. New Delhi: Editorial McGraw Hill.
- Yescas, G. 2014. *Análisis de los métodos de solución de la ecuación dinámica de flujo gradualmente variado usando el canal Armfield del laboratorio de hidráulica*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma Chapingo. Texcoco, México.
- Marbello, R. (2005). *Manual de prácticas de laboratorio de hidráulica*. Tesis de licenciatura publicada. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.
- Jan, C. D. (2014). *Gradually Varied Flow Profiles Channels. Analytical Solutions by Using Gaussian Hypergeometric Function*. Taiwan, National Cheng Kung University: Edit. Springer. National Cheng Kung University.
- Karney, B.W., Malekpour A., Salehi H. (2010). An Exploratory Approach to Teaching Gradually Varied Flow. *Journal of Hydro-environment Research*, 4, 175-180.
- Vatankhah, A. (2010). Analytical Integration of the Equation of Gradually Varied Flow for Triangular Channels. *Journal of Flow Measurement and Instrumentation*, 21, 546-549.
- Jan, C. D., and Chen C. L. (2013). Gradually Varied Open-Channel Flow Profiles Normalized by Critical Depth and Analytically Solved by Using Gaussian Hypergeometric Functions. *Journal of Hydrology and Earth System Sciences*, 17, 973-987.
- Kumar, A., Enever K. J. (1979). Integral Solution of the Gradually Varied Equation for Rectangular and Triangular Channels. *Proc. Instn. Civ. Engrs*, 67, 221-225.
- Venutelli, M. (2004). Direct Integration of the Equation of Gradually Varied Flow. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 130, 88-91.
- Jan, C. D, Chen C. L. (2012). Use of the Gaussian hypergeometric function to solve the equation of gradually-varied flow. *Journal of Hydrology*, 456-457, 139-145.



## ANEXO

## DATOS DE LOS PERFILES EXPERIMENTALES Y LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR LOS MÉTODOS

Perfil M1			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0644	-0.12	-0.120	-0.120
0.0643	-0.22	-0.171	-0.171
0.0639	-0.32	-0.373	-0.373
0.0637	-0.42	-0.475	-0.475
0.0635	-0.52	-0.577	-0.577
0.0631	-0.62	-0.782	-0.782
0.0629	-0.72	-0.885	-0.885
0.0627	-0.82	-0.988	-0.988
0.0624	-0.92	-1.144	-1.144
0.0621	-1.02	-1.300	-1.300
0.0619	-1.12	-1.404	-1.404
0.0616	-1.22	-1.562	-1.562
0.0614	-1.32	-1.667	-1.667
0.0611	-1.42	-1.825	-1.825
0.0609	-1.52	-1.932	-1.932
0.0606	-1.62	-2.091	-2.091
0.0602	-1.72	-2.306	-2.306
0.06	-1.82	-2.414	-2.414
0.0599	-1.92	-2.468	-2.468
0.0598	-2.02	-2.522	-2.522
0.0597	-2.12	-2.576	-2.576
0.0596	-2.22	-2.631	-2.631
0.0594	-2.32	-2.740	-2.740

Perfil M1			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0591	-2.62	-2.904	-2.904
0.059	-2.72	-2.959	-2.959
0.0587	-2.82	-3.125	-3.125
0.0586	-2.92	-3.180	-3.180
0.0581	-3.02	-3.459	-3.459
0.0579	-3.12	-3.572	-3.572
0.0578	-3.22	-3.628	-3.628
0.0577	-3.32	-3.685	-3.685
0.0574	-3.42	-3.856	-3.856
0.0573	-3.52	-3.913	-3.913
0.0571	-3.62	-4.027	-4.027
0.0568	-3.72	-4.201	-4.201
0.0565	-3.82	-4.375	-4.375
0.0564	-3.92	-4.434	-4.434
0.0563	-4.02	-4.492	-4.492
0.0562	-4.12	-4.551	-4.551
0.056	-4.22	-4.669	-4.669
0.0558	-4.32	-4.788	-4.788
0.0555	-4.42	-4.968	-4.967
0.0552	-4.52	-5.149	-5.149
0.0551	-4.62	-5.210	-5.209
0.0551	-4.72	-5.210	-5.209
0.055	-4.82	-5.270	-5.270

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

Perfil M2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.042	-4.82	-4.345	-4.349
0.0419	-4.72	-4.024	-4.028
0.0419	-4.62	-4.024	-4.028

Perfil M2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0418	-4.52	-3.741	-3.745
0.0418	-4.42	-3.741	-3.745
0.0417	-4.32	-3.489	-3.493



Perfil M2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.04168	-4.22	-3.442	-3.445
0.04165	-4.12	-3.373	-3.376
0.0416	-4.02	-3.263	-3.266
0.04155	-3.92	-3.157	-3.161
0.0415	-3.82	-3.057	-3.060
0.04144	-3.72	-2.943	-2.946
0.0414	-3.62	-2.870	-2.873
0.0413	-3.52	-2.698	-2.701
0.04128	-3.42	-2.665	-2.668
0.0412	-3.32	-2.540	-2.543
0.04114	-3.22	-2.450	-2.453
0.0411	-3.12	-2.393	-2.396
0.0411	-3.02	-2.393	-2.396
0.041	-2.92	-2.257	-2.260
0.0408	-2.82	-2.013	-2.015
0.0406	-2.72	-1.799	-1.801
0.0405	-2.62	-1.702	-1.704
0.0401	-2.32	-1.366	-1.367
0.04	-2.22	-1.293	-1.294
0.0398	-2.12	-1.159	-1.159

Perfil M2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0397	-2.02	-1.096	-1.097
0.0395	-1.92	-0.981	-0.982
0.0393	-1.82	-0.877	-0.878
0.0391	-1.72	-0.783	-0.784
0.039	-1.62	-0.740	-0.740
0.0388	-1.52	-0.658	-0.659
0.0386	-1.42	-0.584	-0.585
0.0385	-1.32	-0.550	-0.550
0.0383	-1.22	-0.486	-0.487
0.0382	-1.12	-0.457	-0.457
0.038	-1.02	-0.402	-0.402
0.0378	-0.92	-0.352	-0.352
0.0375	-0.82	-0.286	-0.286
0.0371	-0.72	-0.213	-0.213
0.037	-0.62	-0.197	-0.197
0.0369	-0.52	-0.182	-0.182
0.0368	-0.42	-0.168	-0.168
0.0366	-0.32	-0.143	-0.143
0.0365	-0.22	-0.131	-0.131
0.0364	-0.12	-0.120	-0.120

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

Perfil M3			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método de Pasos	Funciones equivalentes
0.0162	0	0.000	0.000
0.0166	0.1	0.096	0.097
0.0178	0.2	0.380	0.383
0.018	0.3	0.427	0.430
0.0186	0.4	0.568	0.571
0.02	0.5	0.887	0.892
0.0204	0.6	0.977	0.982
0.0207	0.9	1.044	1.048
0.0212	1	1.155	1.159
0.0216	1.1	1.242	1.246
0.0218	1.2	1.285	1.289

Perfil M3			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método de Pasos	Funciones equivalentes
0.022	1.3	1.328	1.332
0.0224	1.4	1.414	1.417
0.023	1.5	1.540	1.543
0.0235	1.6	1.643	1.646
0.0239	1.7	1.724	1.727
0.0243	1.8	1.804	1.807
0.0247	1.9	1.882	1.885
0.0258	2	2.090	2.094
0.0268	2.1	2.269	2.273
0.027	2.2	2.304	2.307
0.028	2.3	2.469	2.472



0.0285	2.4	2.546	2.550
0.0291	2.5	2.635	2.639
0.0308	2.677	2.853	2.857

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

Perfil S1			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Funciones equivalentes
0.1661	-0.12	-0.120	-0.120
0.163	-0.22	-0.235	-0.229
0.1593	-0.32	-0.372	-0.360
0.1567	-0.42	-0.468	-0.453
0.153	-0.52	-0.606	-0.585
0.15	-0.62	-0.717	-0.693
0.1469	-0.72	-0.831	-0.806
0.1435	-0.82	-0.957	-0.930
0.1407	-0.92	-1.060	-1.032
0.1374	-1.02	-1.182	-1.154
0.1348	-1.12	-1.278	-1.250
0.1323	-1.22	-1.370	-1.342
0.1292	-1.32	-1.484	-1.458
0.1265	-1.42	-1.583	-1.558
0.1236	-1.72	-1.690	-1.667
0.1207	-1.82	-1.796	-1.775
0.118	-1.92	-1.895	-1.876
0.1146	-2.02	-2.019	-2.004
0.1124	-2.12	-2.100	-2.087

Perfil S1			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Funciones equivalentes
0.1096	-2.22	-2.202	-2.192
0.1067	-2.32	-2.307	-2.301
0.1038	-2.42	-2.412	-2.410
0.1014	-2.52	-2.499	-2.500
0.0923	-2.62	-2.826	-2.839
0.0895	-2.72	-2.926	-2.942
0.0864	-2.82	-3.036	-3.056
0.0832	-2.92	-3.148	-3.172
0.0804	-3.02	-3.246	-3.273
0.0762	-3.12	-3.391	-3.422
0.0741	-3.22	-3.463	-3.495
0.0713	-3.32	-3.558	-3.591
0.0682	-3.42	-3.661	-3.695
0.0647	-3.52	-3.776	-3.809
0.0612	-3.62	-3.887	-3.919
0.0577	-3.72	-3.994	-4.024
0.052	-3.82	-4.158	-4.180
0.046	-3.92	-4.308	-4.317

Perfil S2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función Equivalente
0.0304	0.12	0.12	0.12
0.0274	0.22	0.234	0.232
0.026	0.32	0.326	0.323
0.0248	0.42	0.433	0.43
0.0239	0.52	0.536	0.534
0.0235	0.62	0.59	0.588
0.023	0.72	0.667	0.665
0.0225	0.82	0.754	0.753

Perfil S2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función Equivalente
0.022	0.92	0.855	0.854
0.0217	1.02	0.923	0.923
0.0215	1.12	0.971	0.972
0.0213	1.22	1.024	1.025
0.0207	1.32	1.203	1.205
0.0206	1.42	1.236	1.239
0.0203	1.52	1.345	1.348
0.0201	1.62	1.426	1.429



Perfil S2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función Equivalente
0.02	1.72	1.468	1.472
0.0196	1.82	1.658	1.663
0.0192	1.92	1.888	1.894
0.019	2.02	2.023	2.029
0.0186	2.12	2.347	2.353
0.0185	2.22	2.442	2.449
0.0184	2.32	2.545	2.552
0.0183	2.62	2.657	2.664
0.01829	2.72	2.669	2.675
0.01828	2.82	2.681	2.687
0.01826	2.92	2.705	2.711
0.01825	3.02	2.717	2.723
0.01823	3.12	2.741	2.748
0.01821	3.22	2.766	2.773
0.01816	3.32	2.831	2.837

Perfil S2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función Equivalente
0.0181	3.42	2.913	2.918
0.01809	3.52	2.927	2.932
0.01806	3.62	2.97	2.975
0.01802	3.72	3.03	3.035
0.01798	3.82	3.092	3.097
0.01793	3.92	3.173	3.178
0.0178	4.02	3.41	3.414
0.0176	4.12	3.867	3.872
0.0175	4.22	4.161	4.165
0.01734	4.32	4.786	4.792
0.0173	4.42	4.992	4.998
0.01716	4.52	6.012	6.041
0.01715	4.62	6.121	6.149
0.0171	4.72	6.801	6.833
0.01709	4.82	6.981	7.012

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

Perfil S3			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0134	0.12	0.12	0.12
0.0136	0.22	0.246	0.246
0.0137	0.32	0.311	0.311
0.0139	0.42	0.446	0.446
0.0141	0.52	0.588	0.587
0.0142	0.62	0.661	0.661
0.0143	0.72	0.737	0.737
0.0145	0.82	0.896	0.896
0.0147	0.92	1.065	1.065
0.0148	1.02	1.154	1.154
0.0149	1.12	1.247	1.247
0.0151	1.22	1.444	1.444
0.0152	1.32	1.549	1.55
0.0153	1.42	1.659	1.66

Perfil S3			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0154	1.52	1.775	1.776
0.0155	1.62	1.898	1.899
0.01555	1.72	1.962	1.963
0.0156	1.82	2.028	2.029
0.01565	1.92	2.096	2.098
0.0157	2.02	2.167	2.168
0.0158	2.12	2.315	2.317
0.01585	2.22	2.394	2.395
0.0159	2.32	2.476	2.477
0.01593	2.62	2.526	2.528
0.016	2.72	2.65	2.651
0.01606	2.82	2.762	2.764
0.0161	2.92	2.841	2.842
0.01618	3.02	3.008	3.01



Perfil S3			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0162	3.12	3.052	3.054
0.01627	3.22	3.216	3.217
0.0163	3.32	3.29	3.292

Perfil S3			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.01636	3.42	3.449	3.451
0.0164	3.52	3.563	3.564

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

Perfil C1			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por Pasos	Función equivalente
0.0619	-0.12	-0.120	-0.120
0.0614	-0.22	-0.236	-0.236
0.061	-0.32	-0.329	-0.329
0.0607	-0.42	-0.398	-0.398
0.06	-0.52	-0.561	-0.561
0.0593	-0.62	-0.724	-0.723
0.0587	-0.72	-0.863	-0.863
0.0582	-0.82	-0.980	-0.979
0.0575	-0.92	-1.143	-1.142
0.057	-1.02	-1.259	-1.259
0.0565	-1.12	-1.376	-1.376
0.056	-1.22	-1.493	-1.492
0.0556	-1.32	-1.586	-1.586
0.055	-1.42	-1.726	-1.726
0.0546	-1.52	-1.820	-1.820
0.0542	-1.62	-1.914	-1.913
0.0538	-1.72	-2.007	-2.007
0.0537	-1.82	-2.031	-2.031
0.0534	-1.92	-2.101	-2.101
0.0531	-2.02	-2.171	-2.171
0.0528	-2.12	-2.242	-2.242
0.0527	-2.22	-2.265	-2.265
0.0525	-2.32	-2.312	-2.312

Perfil C1			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por Pasos	Función equivalente
0.0513	-2.62	-2.594	-2.594
0.0502	-2.72	-2.853	-2.854
0.0501	-2.82	-2.877	-2.877
0.0499	-2.92	-2.924	-2.924
0.0491	-3.02	-3.113	-3.113
0.0485	-3.12	-3.254	-3.255
0.0482	-3.22	-3.325	-3.326
0.0481	-3.32	-3.349	-3.349
0.048	-3.42	-3.373	-3.373
0.0478	-3.52	-3.420	-3.420
0.0477	-3.62	-3.444	-3.444
0.0476	-3.72	-3.467	-3.468
0.0474	-3.82	-3.515	-3.515
0.0472	-3.92	-3.562	-3.562
0.047	-4.02	-3.609	-3.610
0.0469	-4.12	-3.633	-3.633
0.0468	-4.22	-3.657	-3.657
0.0467	-4.32	-3.680	-3.681
0.0466	-4.42	-3.704	-3.704
0.04655	-4.52	-3.716	-3.716
0.0465	-4.62	-3.728	-3.728
0.04641	-4.72	-3.749	-3.750
0.0464	-4.82	-3.752	-3.752

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)



Perfil C3			
Y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por Pasos	Función Equivalente
0.0284	0.12	0.12	0.12
0.0282	0.18	0.17	0.17
0.0275	0.28	0.343	0.343
0.0273	0.38	0.393	0.393
0.027	0.48	0.467	0.468
0.0269	0.58	0.492	0.493
0.0268	0.68	0.517	0.518
0.0266	0.78	0.567	0.567
0.0264	0.88	0.617	0.617
0.026	0.98	0.716	0.717
0.0257	1.08	0.791	0.792
0.0252	1.18	0.916	0.917
0.0252	1.28	0.916	0.917
0.0251	1.38	0.941	0.942
0.0251	1.48	0.941	0.942
0.0245	1.58	1.091	1.092
0.0242	1.88	1.166	1.167
0.024	1.98	1.216	1.217
0.0239	2.08	1.241	1.242
0.0226	2.18	1.567	1.569

Perfil C3			
Y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por Pasos	Función Equivalente
0.0225	2.28	1.592	1.594
0.0215	2.38	1.843	1.846
0.0215	2.48	1.843	1.846
0.0194	2.58	2.368	2.377
0.0193	2.68	2.394	2.402
0.0189	2.78	2.495	2.503
0.0183	2.88	2.648	2.656
0.018	2.98	2.724	2.732
0.0173	3.08	2.902	2.91
0.0172	3.18	2.928	2.936
0.0171	3.28	2.953	2.961
0.017	3.38	2.979	2.987
0.0168	3.48	3.03	3.038
0.0161	3.58	3.208	3.216
0.0157	3.68	3.31	3.318
0.0153	3.78	3.412	3.421
0.0147	3.88	3.565	3.574
0.01465	3.98	3.578	3.587
0.0146	4.08	3.591	3.6

Perfil H2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0584	-4.82	-4.659	-4.783
0.0582	-4.72	-4.638	-4.700
0.058	-4.62	-4.589	-4.618
0.0578	-4.52	-4.539	-4.537
0.0574	-4.42	-4.531	-4.376
0.0572	-4.32	-4.515	-4.297
0.0567	-4.22	-4.482	-4.103
0.0563	-4.12	-4.445	-3.950
0.056	-4.02	-4.386	-3.837
0.0557	-3.92	-4.321	-3.726
0.0554	-3.82	-4.263	-3.617

Perfil H2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0551	-3.72	-4.161	-3.509
0.0546	-3.62	-4.133	-3.333
0.0541	-3.52	-4.018	-3.161
0.0537	-3.42	-3.924	-3.027
0.0535	-3.32	-3.840	-2.961
0.0532	-3.22	-3.753	-2.863
0.0528	-3.12	-3.641	-2.735
0.0525	-3.02	-3.482	-2.641
0.0522	-2.92	-3.377	-2.549
0.0521	-2.82	-3.221	-2.518
0.0517	-2.72	-3.080	-2.398



Perfil H2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0515	-2.62	-2.854	-2.339
0.0513	-2.57	-2.640	-2.280
0.0505	-2.32	-2.585	-2.054
0.0496	-2.22	-2.528	-1.813
0.049	-2.12	-2.413	-1.660
0.0483	-2.02	-2.383	-1.490
0.0478	-1.92	-2.294	-1.374
0.047	-1.82	-2.202	-1.197
0.0464	-1.72	-2.077	-1.071
0.0459	-1.62	-1.981	-0.972
0.0454	-1.52	-1.916	-0.877
0.0448	-1.42	-1.783	-0.768
0.044	-1.32	-1.612	-0.634

Perfil H2			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Método por pasos	Función equivalente
0.0438	-1.22	-1.435	-0.602
0.043	-1.12	-1.326	-0.481
0.0425	-1.02	-1.215	-0.411
0.0419	-0.92	-1.102	-0.334
0.0413	-0.82	-0.987	-0.262
0.0409	-0.72	-0.830	-0.218
0.0405	-0.62	-0.628	-0.177
0.0403	-0.52	-0.546	-0.157
0.0402	-0.42	-0.379	-0.148
0.0395	-0.32	-0.293	-0.086
0.0387	-0.22	-0.207	-0.026
0.0383	-0.12	-0.120	0.000

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

Perfil H3			
Y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Función equivalente	Método por pasos
0.0176	3.56	3.5600	3.5600
0.018	3.6	3.6150	3.6150
0.0184	3.64	3.6694	3.6693
0.0187	3.68	3.7097	3.7096
0.0193	3.72	3.7891	3.7887
0.0197	3.76	3.8412	3.8405
0.02	3.8	3.8798	3.8788

Perfil H3			
Y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Función equivalente	Método por pasos
0.0206	3.84	3.9558	3.9539
0.0211	3.88	4.0179	4.0149
0.0215	3.92	4.0668	4.0627
0.0219	3.96	4.1150	4.1095
0.0226	4	4.1977	4.1890
0.0231	4.04	4.2554	4.2438
0.0237	4.08	4.3233	4.3074

Perfil A2			
Y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Función equivalente	Método por pasos
0.0887	-0.12	-0.1274	-0.12
0.0879	-0.22	-0.1937	-0.225
0.0869	-0.32	-0.276	-0.3558
0.0859	-0.42	-0.3579	-0.4861
0.0848	-0.52	-0.4473	-0.6286
0.0839	-0.62	-0.52	-0.7447
0.083	-0.72	-0.5922	-0.8602

Perfil A2			
Y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Función equivalente	Método por pasos
0.082	-0.82	-0.672	-0.9879
0.081	-0.92	-0.7512	-1.1149
0.08	-1.02	-0.8298	-1.2412
0.0794	-1.12	-0.8767	-1.3166
0.0785	-1.22	-0.9466	-1.4292
0.0775	-1.32	-1.0238	-1.5535
0.0766	-1.42	-1.0928	-1.6647



Perfil A2			
Y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Función equivalente	Método por pasos
0.0757	-1.52	-1.1613	-1.7751
0.0747	-1.62	-1.2368	-1.897
0.0739	-1.72	-1.2968	-1.9938
0.0729	-1.82	-1.3712	-2.1138
0.072	-1.92	-1.4377	-2.221
0.0712	-2.02	-1.4963	-2.3155
0.0703	-2.12	-1.5618	-2.421
0.0703	-2.22	-1.5618	-2.421
0.0693	-2.32	-1.634	-2.5371
0.0656	-2.62	-1.8954	-2.9555
0.0642	-2.72	-1.9919	-3.1088
0.063	-2.82	-2.0735	-3.2377
0.062	-2.92	-2.1407	-3.3434
0.06	-3.02	-2.2731	-3.5494
0.0597	-3.12	-2.2927	-3.5797
0.0586	-3.22	-2.364	-3.6891

Perfil A2			
Y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Función equivalente	Método por pasos
0.0573	-3.32	-2.447	-3.8152
0.0563	-3.42	-2.5101	-3.9097
0.0552	-3.52	-2.5785	-4.011
0.0543	-3.62	-2.6338	-4.0916
0.0532	-3.72	-2.7005	-4.1874
0.0524	-3.82	-2.7484	-4.255
0.0512	-3.92	-2.8192	-4.3529
0.05	-4.02	-2.8888	-4.4465
0.0487	-4.12	-2.9628	-4.5427
0.0476	-4.22	-3.0242	-4.6195
0.0465	-4.32	-3.0846	-4.6919
0.0455	-4.42	-3.1385	-4.7537
0.0438	-4.52	-3.228	-4.8492
0.0426	-4.62	-3.2895	-4.909
0.0406	-4.72	-3.3888	-4.9931
0.0386	-4.82	-3.4839	-5.0562

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)

Perfil A3			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Función equivalente	Método por pasos
0.0141	0	0	0
0.0142	0.05	0.05	0.017
0.0148	0.15	0.15	0.1178
0.0159	0.25	0.35	0.296
0.0163	0.35	0.45	0.3589
0.0169	0.45	0.55	0.451
0.0174	0.55	0.65	0.5256

Perfil A3			
y (tirante en m)	x (desplazamiento en m)		
	Testigo	Función equivalente	Método por pasos
0.0178	0.65	0.75	0.5839
0.0185	0.75	0.8551	0.6827
0.0192	0.85	0.9026	0.7774
0.0198	1.099	0.9272	0.8551
0.0204	1.15	0.9934	0.9297
0.0207	1.2	1.0288	0.9658

Fuente: "Solución de la ecuación dinámica usando el canal Armfield en el laboratorio de Hidráulica" (Yescas, 2014)