



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA MECÁNICA – MECATRÓNICA**

**DISEÑO DE UN ESQUEMA DE CONTROL PARA LA ORIENTACIÓN EN 3 EJES DE UN  
MICRO-SATÉLITE DE PERCEPCIÓN REMOTA CON RUEDAS INERCIALES**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**RIGOBERTO REYES MORALES**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. CARLOS ROMO FUENTES, CENTRO DE ALTA TECNOLOGÍA**

**MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE, 2015**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Tang Xu Yu  
Secretario: Dr. Santillán Gutiérrez Saúl Daniel  
Vocal: Dr. Romo Fuentes Carlos  
1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel  
2<sup>d o</sup>. Suplente: Dr. De La Rosa Nieves Saúl

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Cd. Universitaria, Distrito Federal. México. –  
Cambridge, Massachussets. Estados Unidos de Norteamérica.

**TUTOR DE TESIS:**

NOMBRE

Dr. Carlos Romo Fuentes

-----  
**FIRMA**

*A mi familia y amigos,  
en especial a mis padres  
y hermanos.*

*Sirva este pequeño paso para recordar que:*

*"la excusa más cobarde es culpar al destino" – J. Serrano.*

*El autor quiere extender su agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por las becas: de  
manutención y mixta, otorgadas a través del apoyo número 370055.*

*Así mismo, se agradece a la UNAM y al CONACYT por el apoyo recibido a través de los proyectos:*

*PAPIME-PE103712: Laboratorio de prototipos primarios de tecnología espacial*

*PAPIIT-IT101514: Satélite para detección de contaminantes atmosféricos Quetzal MIT-UNAM F2*

*Laboratorio Nacional CONACYT de Ingeniería Automotriz y Espacial 232660*

*Gracias al jurado conformado por: Dr. Yu Tang, Dr. Saúl Santillán, Dr. Carlos Romo (Tutor), Dr. Edmundo Rocha y  
Dr. Saúl de la Rosa, por los enriquecedores comentarios a este trabajo.*

*Quiero agradecer al Dr. Alvar Saenz-Otero "Alvar" por su inmensa disposición para concretar mi estancia académica,  
bajo su supervisión, en el "Space Systems Laboratory" del MIT.*

*¡Compañeros (as) y amigos (as), gracias!*

# ÍNDICE

	<b>Página</b>
Resumen	7
Lista de Tablas	8
Índice de Figuras	9
<b>I. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1 Antecedentes	11
1.1.1 Proyecto satelital Quetzal	11
1.1.2 Proyecto satelital Condor	11
1.2 Motivación	12
1.3 Revisión de la literatura	12
1.4 Descripción de la tesis	15
1.4.1 Modos de operación (control)	15
1.4.2 Objetivo general	16
1.4.3 Alcances	16
1.4.4 Contenido	16
<b>II. Dinámica del satélite</b>	<b>20</b>
2.1 Sistemas de referencia	20
2.1.1 Sistema de referencia inercial	20
2.1.2 Sistema de referencia orbital	20
2.1.3 Sistema de referencia fijo al cuerpo	20
2.2 Representación de la orientación	21
2.2.1 Ángulos “Yaw-Pitch-Roll”	21
2.2.2 Cuaterniones	23
2.2.2.1 Teorema de Euler	25
2.2.2.2 Cuaterniones unitarios	25
2.3 Ecuaciones de movimiento	27

2.3.1 Consideraciones	28
2.3.2 Dinámica	29
2.3.3 Cinemática	33
2.3.4 Modelo matemático del sistema	37
<b>III. Control de la orientación: diseño del controlador</b>	<b>39</b>
3.1 Teoría de control	39
3.1.1 Ley de control basado en el cuaternion error (Quaternion Feedback Regulator)	40
3.1.2 Estabilidad en lazo cerrado	40
3.1.3 El vector cuaternion error	41
3.1.4 Método para el diseño de las ganancias de la ley de control	42
3.2 Diseño del controlador	45
3.2.1 Apuntamiento de Nadir	45
3.2.2 Apuntamiento inercial	46
3.2.3 Requerimientos de control	46
3.2.4 Ganancias	46
3.2.5 Ley de control	47
3.2.6 Esquema de control	49
<b>IV. Simulación</b>	<b>52</b>
4.1 Diseño	52
4.1.1 Algoritmo de control	52
4.1.2 Software y consideraciones	54
4.2 Resultados	55
4.2.1 Apuntamiento de Nadir	55
4.2.1 Apuntamiento inercial	69
4.3 Comentarios	76
<b>Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>APENDICE A</b>	<b>82</b>

## Resumen

El control de la orientación es de vital importancia para algunas misiones satélites tales como la percepción remota, ya que en este tipo de misiones se requiere apuntar al instrumento a bordo o carga útil hacia un objeto de interés con una alta exactitud y estabilización para que las imágenes o mediciones realizadas sean útiles para el análisis científico.

Actualmente en la UNAM se lleva a cabo un esfuerzo por establecer un grupo de investigación y desarrollo en ingeniería espacial en el Centro de Alta Tecnología de la Facultad de Ingeniería, por lo que están en curso proyectos satelitales que primordialmente tiene como propósito la percepción remota terrestre, demandando sistemas de determinación y control de la orientación para desarrollar las misiones de manera exitosa.

En este documento se presenta el proceso de diseño de un esquema de control de la orientación basado en el controlador "Quaternion Feedback Regulator" que, en esencia, es un controlador de tipo 'proporcional derivativo', que hace uso del vector cuaternion error y la velocidad angular del satélite, para determinar el par de control que debe aplicarse al satélite para alcanzar la orientación deseada. El proceso de diseño presenta a detalle la obtención del modelo matemático, que describe la cinemática y dinámica del movimiento rotacional de un satélite, haciendo uso de la dinámica de cuerpo rígido y de los cuaterniones unitarios para la representación de la orientación. Así mismo, se describe la definición de las ganancias que conforman la ley de control, que cumple con los requerimientos de control, con lo cual se genera un esquema de control de la orientación. Finalmente se presentan los resultados de la evaluación del desempeño del esquema de control de la orientación en 3 ejes diseñado, la cual se realizó mediante simulaciones numéricas realizadas en "software" especializado.

**Lista de Tablas**

	<b>Página</b>
Tabla 3-1. Requerimientos de control.	46
Tabla 4-1. Parámetros iniciales para la simulación numérica P1.1.	56

## Índice de Figuras

	<b>Página</b>
Figura 2-1. Sistemas de referencias.	21
Figura 2-2. Sistemas de referencias inercial y móvil.	22
Figura 2-3. Descripción geométrica del teorema de Euler.	25
Figura 2-4. Descripción geométrica de la orientación de un cuerpo usando cuaterniones.	26
Figura 2-5. Descripción geométrica de la orientación de un cuerpo usando cuaterniones.	28
Figura 2-6. Satélite con tres ruedas inerciales.	30
Figura 2-7. Sistema de referencia orbital y fijo al cuerpo del satélite.	33
Figura 2-8. Sistema de referencia orbital y vector velocidad $\vec{\omega}_{I^0}^O$ .	36
Figura 3-1. Esquema de determinación y control de orientación para un satélite.	49
Figura 3-2. Esquema de control de orientación para un satélite.	49
Figura 3-3. Esquema de control de orientación para un satélite basado en cuaternion error.	50
Figura 4-1. Algoritmo de control.	53
Figura 4-2. Evolución de la orientación P1.1.	57
Figura 4-3. Velocidad del satélite respecto $R_B$ y $R_I$ P1.1.	57
Figura 4-4. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P1.1.	58
Figura 4-5. Evolución de los pares de control y de los actuadores P1.1.	59
Figura 4-6. Evolución de la orientación P1.2.	61
Figura 4-7. Velocidad del satélite respecto $R_B$ y $R_I$ P1.2.	61
Figura 4-8. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P1.2.	62
Figura 4-9. Evolución de los pares de control y de los actuadores P1.2.	63
Figura 4-10. Evolución de la orientación P1.3.	64
Figura 4-11. Velocidad del satélite respecto $R_B$ y $R_I$ P1.3.	65
Figura 4-12. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P1.3.	65
Figura 4-13. Evolución de los pares de control y de los actuadores P1.3.	66
Figura 4-14. Evolución de la orientación P1.4.	67

Figura 4-15. Velocidad del satélite respecto $R_B$ y $R_I$ P1.4.	68
Figura 4-16. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P1.4.	68
Figura 4-17. Evolución de los pares de control y de los actuadores P1.4.	69
Figura 4-18. Evolución de la orientación P2.1.	70
Figura 4-19. Velocidad del satélite respecto $R_B$ y $R_I$ P2.1.	71
Figura 4-20. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P2.1.	71
Figura 4-21. Evolución de los pares de control y de los actuadores P2.1.	72
Figura 4-22. Evolución de la orientación P2.2.	73
Figura 4-23. Velocidad del satélite respecto $R_B$ y $R_I$ P2.2.	74
Figura 4-24. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P2.2.	75
Figura 4-25. Evolución de los pares de control y de los actuadores P2.2.	75

## I. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta brevemente el contexto en el cual la tesis se desarrolló y se describe de forma breve el contenido de la tesis, mostrando los objetivos, motivación, y alcances establecidos para el desarrollo del trabajo.

Adicionalmente se hace una breve descripción de todos los capítulos que componen el trabajo escrito con el propósito de dar al lector una visión general de lo que encontrará en este documento.

### 1.1 Antecedentes

El Centro de Alta Tecnología (CAT) de la Facultad de Ingeniería (FI) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) ha iniciado una incursión en el desarrollo de tecnología espacial, particularmente en el área de los pequeños satélites. Actualmente se encuentra en desarrollo tres proyectos satelitales, a saber: Proyecto Satelital Quetzal UNAM-MIT, Proyecto Satelital Condor UNAM-MAI y Proyecto Satelital Ulises 2.0.

Cada uno de los proyectos mencionados en el párrafo anterior contempla la participación de estudiantes de nivel licenciatura y posgrado para colaborar en el desarrollo de cada subsistema necesario para conformar cada uno de los satélites. Salvo el proyecto Ulises 2.0, el resto de los proyectos contempla el desarrollo de una misión satelital de percepción remota con fines de investigación y, es por ello, que se presentará una breve descripción de cada uno.

#### 1.1.1 Proyecto satelital Quetzal

El proyecto satelital Quetzal UNAM-MIT, a partir de ahora Proyecto Quetzal, surgió como parte de una colaboración académica entre los laboratorio de sistemas espaciales (por sus siglas en inglés, SSL) y de propulsión espacial (en inglés, SPL) del Instituto Tecnológico de Massachusetts (por sus siglas en inglés, MIT) y el Centro de Alta Tecnología de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

La colaboración establecida entre el MIT y la UNAM en el marco del proyecto Quetzal tiene como propósito el desarrollo de un micro-satélite de percepción remota de alrededor de 50 – 70 kg en órbita baja, con la misión de llevar a bordo una carga útil que monitoree la concentración de la contaminación atmosférica en zonas urbanas (Romo, et al., 2013).

#### 1.1.2 Proyecto satelital Condor

Rusia y México tienen un historial en cooperación en el área espacial teniendo su mejor ejemplo en el desarrollo del satélite UNAMSAT (De La Rosa, 1987), el cual sentó las bases para una nueva colaboración, ahora con el proyecto satelital Condor. Este proyecto es un programa de amplia cooperación y objetivos a largo plazo que en su primera etapa incluyó la formación de recursos humanos en las instalaciones y en los programas de posgrado del Instituto de Aviación de Moscú (MAI por sus siglas en ruso).

Dentro de la cooperación establecida por la UNAM y el MAI se tiene contemplado el desarrollo de un micro-satélite que tiene como objetivo detectar precursores ionosféricos de terremotos de alta intensidad (Ramirez, et al., 2013). Adicionalmente, la UNAM desarrolla una cámara de percepción remota para ser incluida dentro de este proyecto como carga útil y así aportar al desarrollo de la ingeniería espacial en México.

## 1.2 Motivación

México se encuentra en el camino para asumirse como un participante habitual en la exploración espacial y muestra de ello es que por primera vez en la historia se ha generado un Plan Nacional de Actividades Espaciales para el periodo 2011 - 2015 (PNAE). El PNAE cuenta con cinco ejes de actividades estratégicas, siendo uno de ellos la formación de capital humano en el campo espacial ya que de acuerdo con el PNAE, el desarrollo del conocimiento constituye un área estratégica para el desarrollo del país.

Anteriormente se ha hecho mención de los esfuerzos de la UNAM por apoyar el esfuerzo nacional en el área espacial con el establecimiento de un grupo de investigación y desarrollo de ingeniería espacial. Los proyectos Condor y Quetzal contemplan, cada uno de manera independiente, la construcción de un satélite de tipo micro para realizar percepción remota que contribuya a la investigación científica en el país.

El presente trabajo, en principio, es desarrollado como parte de un interés personal del autor, pero que ha encontrado una demanda real dentro de proyectos espaciales en desarrollo tal como lo son Condor y Quetzal, ya que ambos proyectos requieren, de acuerdo con su diseño de misión, de un sistema de control de orientación para apuntar sus cargas útiles (Ramirez, et al., 2013) (Romo, et al., 2013), por lo que el trabajo sustenta su razón de ser en el propósito de hacer frente a dicha demanda. Así mismo, la motivación para el desarrollo de un esquema de control de orientación permite colaborar con el cumplimiento del eje 1 del Plan Nacional de Actividades Espaciales 2011-2015, el cual tiene objetivo la formación de recursos humanos especializados en el campo espacial.

En resumen, esta tesis no es un esfuerzo aislado sino que responde a una demanda específica de la academia e industria mexicana y sobre todo, a la necesidad y deseo, reflejado en las políticas implementadas hasta ahora, de nuestro país por unirse a la exploración espacial para formar parte de los grandes hitos de esta industria.

## 1.3 Revisión de la literatura

El problema de control de orientación, en inglés conocido como “the attitude control problem” ha sido tratado desde el inicio de la exploración espacial y es un punto crítico para el desarrollo de las misiones espaciales de observación terrestre, ya que permiten que el instrumento a bordo pueda ser apuntado a una región de interés. Las aplicaciones de la observación terrestre satelital contemplan áreas como el mapeo, geología, oceanografía, agricultura, hidrología, monitoreo de desastres naturales, meteorología, por mencionar algunos (Sandau, 2010).

El problema de control de orientación ha sido atacado principalmente en dos grandes frentes, a saber; sistemas de control activo y sistemas de control pasivo. Los primeros requieren de una fuente externa de energía para poder aplicar las acciones de control al satélite y contempla actuadores como propulsores, ruedas de reacción, giroscopios de control de momentos o bobinas magnéticas. Por otro lado, los sistemas pasivos aprovechan la dinámica propia del satélite y su interacción con el medio para obtener la orientación deseada sin el uso de actuadores.

Sistemas de control activos que utilizan el principio de intercambio de momento angular y que tienen como actuadores ruedas inerciales son generalmente utilizados en satélite de percepción remota. En (Ovchinnikov, et al., 2014) se presenta un proceso completo sobre el diseño de un sistema de

control de orientación para satélites pequeños de observación terrestre utilizando ruedas de reacción como actuadores y de una ley de control de tipo proporcional derivativo (de ahora en adelante PD). También (Candini, Piergentili, & Santoni, 2012) y (Weiss, Kolmanovsky, & Bernstein, 2013) utilizan ruedas de reacción como actuadores. En ese mismo sentido, (Verbin & Lappas, 2013) propone una solución para llevar a cabo maniobra rotacionales rápidas usando ruedas de reacción.

Si bien las ruedas inerciales son muy comunes, actualmente los giroscopios de control de momento (en inglés CMG's) está cobrando una importancia alta en satélites pequeños para tratar el problema de control de orientación desde el punto de vista de actuadores. Por ejemplo (Lappas, Steyn, & Underwood) y (Nishida & Tsubuku) utilizan CMG's como actuadores para llevar a cabo el control de orientación. Y (Patankar & Fitz-Coy, 2014) describe un proceso de diseño de este tipo de actuadores para su uso en satélite pequeños.

Los sistemas basados en ruedas de reacción y los CMG's, son muy comunes, sin embargo, presentan problemas de saturación, esto ocurre cuando el satélite transfiere una cantidad de movimiento angular mayor a la que pueden almacenar los actuadores, por lo que las acciones de control que ejercen ya no son suficientes o pueden generar inestabilidad al sistema. Este problema es tratado por (Forbes J. R., 2015) y se propone para ello una ley de control que se compone de: un término proporcional para controlar la orientación y un término que se encarga de controlar la velocidad angular.

Los sistemas activos descritos en los párrafos anteriores suelen demandar una cantidad de energía considerable. Tomando en cuenta que en órbita, la energía de un satélite está limitada, entonces, desde el punto de vista de control se ha trabajado en el control magnético, es decir, se utiliza la interacción entre un campo magnético que puede generar el satélite con el campo magnético terrestre. Para ello es habitual equipar a los satélites con bobinas magnéticas como se hace en (Rodriguez-Vazquez, Maria, & Bernelli-Zazzera) y (Mulay, et al.). En (Findlay, et al., 2013) se utiliza el control magnético y se generan leyes basadas en el regulador lineal cuadrático (en inglés LQR). El control predictivo también ha sido explorado para este tipo de sistemas, tal como se reporta en (Silani & Lovera, 2005). Amplios trabajos teóricos sobre control magnético se presentan en (Bushenkov, Ovchinnikov, & Smirnov, 2002) y (Ovchinnikov M. , Methods to obtain the principal parameters of simple attitude control systems for small satellites, 1998), todos ellos utilizando bobinas magnéticas como actuadores. En (Forbes & Damaren, Geometric Approach to Spacecraft Attitude Control Using Magnetic and Mechanical Actuation, 2010) se propone una solución que combina los sistemas magnéticos con los mecánicos.

Los sistemas abordados en los párrafos previos demandan, en mayor o menor medida, energía para operar los actuadores que los componen. Recordando que la energía es un recurso limitado en un satélite, se ha propuesto resolver el problema de control de orientación con sistemas pasivos. Por ejemplo en (Burton, Rock, Springmann, & Cutler, 2014) se presenta un método de estabilización pasivo, que consiste en colocar imanes permanentes en el satélite para que, al interactuar con el campo magnético terrestre se genere un torque magnético, que sea usado como par de control, con el propósito de mantener al satélite en una orientación deseada. Este tipo de sistemas de control son poco utilizados en satélite de percepción remota, ya que la exactitud que ofrecen no cumple con los requerimientos de la carga útil (Wertz, Everett, & Puschell, 2011).

Desde el punto de vista de las leyes de control que se usan para controlar la orientación de un satélite en (John & Kreutz-Delgado, 1991) se derivan una serie de leyes no lineales obtenidas a partir de la demostración de estabilidad usando el método directo de Lyapunov con la representación de cuaterniones unitarios. Estas leyes tienen la estructura “proporcional derivativo” en realimentación, en ciertos casos se adiciona un término “feedforward”, de compensación de Coriolis, o uno de compensación adaptativa. (Wie & Barba, 1985) y (Wie, Weiss, & Arapostathis, 1989) presentan unas leyes de control PD basados también en el vector cuaternion error. Por otra parte (Levskii, 2015) propone una solución de tipo óptima. El control robusto se hace presente en (Wang, Li, & Wang, 2012). Todas las leyes anteriores hacen uso de cuaterniones para representar a la orientación, por lo que (Forbes & John, Linear Time-Varying Passivity-Based Attitude Control Employing Magnetic and Mechanical Actuation, 2011) hace uso de la pasividad para combinar un control basado en cuaternion con un término derivado del concepto de pasividad. En (Nudehi, Farooq, Alasty, & Issa, 2008) se resuelve el problema de control de orientación con un enfoque de múltiples entradas y múltiples salidas (en inglés MIMO).

Las leyes mencionadas anteriormente consideran que todos los elementos de los satélites están unidos rígidamente, por lo que para aplicar las leyes hacen uso de la dinámica de cuerpo rígido para generar las ecuaciones del movimiento rotacional. Si bien esto ha demostrado efectividad, en ciertos casos se prefiere considerar que los elementos de los satélites están unidos de manera flexible, tal como hace (Findlay, et al., 2013) proponiendo un enfoque de satélite flexible por lo que toma en cuenta la eliminación de vibraciones debido a los cuerpos flexibles.

El problema de control de orientación es de vital importancia para ciertas misiones espaciales lo cual ha hecho necesario proponer métodos para hacer frente a esta problemática, por ejemplo en (Ovchinnikov, et al., 2014) el proceso completo sobre el diseño de un sistema de control de orientación para satélites pequeños es presentado, este proceso inicia con el diseño teórico, las pruebas en laboratorio usando un simulador de satélite pequeño y finalmente la validación con datos obtenidos en vuelo. También (Polo, Esteban, Cercos, & Parra, 2014) presenta un proceso similar con el satélite NS-1B. En dicho trabajo se valida el desempeño del sistema de control de orientación en Tierra y luego se comparó con los datos obtenidos en operación con el objetivo de mejorar el algoritmo de control implementado. Así mismo se proponen simuladores de la dinámica rotacional del satélite en (Nasirian, Bolandi, Khaki, & Khoogar), (Sarikan, Aydemir, Yavuzoglu, & Ozyurt, 2010) y (Tikka, Wedekind, Danziger, & Cho), siendo estos necesarios porque el ingeniero de control no puede permitir una falla del sistema de control una vez que el satélite se encuentra en órbita.

Actualmente los ingenieros que trabajan el problema de control de actitud han trasladado su esfuerzo en hacer frente a una problemática que si bien no es nueva, ha cobrado una relevancia enorme en el campo de los satélites pequeños. Los satélites pequeños al encontrarse inmersos en un ambiente tan dañino como lo es el medio ambiente espacial, suelen presentar fallas en sus actuadores, ya que de acuerdo con (Tafazoli, 2009), las principales fallas se presentan en los elementos mecánicos, como las ruedas de reacción o CMG's y para hacer frente a esto generalmente se recurre a la redundancia física, es decir, equipar al satélite con cuatro actuadores en lugar de tres. Así, si falla un actuador, se tiene uno de reserva, sin embargo, esta solución representa elevar el costo de la misión, por lo que actualmente se exploran soluciones basadas en los sistemas subactuados, siendo la propuesta de [ (Han, Guo, & Pechev, 2014)] una de las de mayor progreso.

Hasta ahora se ha hecho una revisión sobre las soluciones en el control de orientación, pero para que esto sea posible, primero se debe conocer la orientación de un satélite, este proceso se llama determinación de la orientación (Wertz, Everett, & Puschell, 2011). Si bien este trabajo únicamente trata sobre el control de orientación es importante revisar cómo se hace actualmente la determinación de la orientación. Habitualmente sistemas basados en el Filtro de Kalman Extendido son utilizados para determinar la orientación de un satélite. Por ejemplo en (Ovchinnikov & Ivanov, Approach to study satellite attitude determination algorithms, 2014) el problema de determinación de la orientación es resuelto a partir de utilizar un Filtro de Kalman Extendido. La validación del uso de dicho filtro fue corroborada al comparar los resultados en laboratorio con los obtenidos de los datos de vuelo del satélite ruso Chibis-M, siendo estos favorables. También en (Springmann & Cutler, 2014) se hace uso del Filtro de Kalman Extendido con una exactitud de  $\pm 0.5^\circ$  en la determinación de la orientación.

En un satélite no se pasa directamente de la determinación al control de orientación, ya que un satélite al ser expulsado del cohete portador es disparado con una velocidad angular alta, por lo que es prácticamente imposible (Wise & Miller, 2013) llevar a cabo el control de orientación tras el proceso de expulsión. Por ello, una vez que es expulsado, el satélite determina su orientación, luego disminuye su velocidad angular y finalmente lleva a cabo el control de orientación. Para disminuir la velocidad angular de un satélite, la ley de control conocida como “B-dot” es muy recurrida tal como se hace en (Inamori, Shimizu, Mikawa, & Nakasuka, 2014) alcanzado una exactitud de  $\pm 0.7^\circ$ .

## 1.4 Descripción de la tesis

### 1.4.1 Modos de operación (control)

Un satélite opera bajo diversos modos de operación, es decir, se definen tareas concretas que debe realizar en cada periodo de tiempo durante su vida útil, por ejemplo, un modo de operación es la toma de datos, es decir, cuando el satélite activa la carga útil para llevar a cabo la medición del fenómeno físico de interés, otro es la “bajada” de datos, que consiste en que el satélite se comunice con el centro de control terrestre para transmitir los datos del experimento realizado, entre otros más.

El sistema de determinación y control de la orientación de un satélite también contempla diversos modos de operación y se pueden resumir todas sus tareas en:

- a) conocer cómo se encuentra orientado el satélite con respecto a un marco de referencia,
- b) disminuir la tasa de rotación del satélite tras ser expulsado por el cohete portador, es decir, llevarlo de un movimiento caótico a uno controlado.
- c) corregir, mantener o hacer que siga una trayectoria la orientación con el propósito de llevar al satélite a una orientación deseada.

En este trabajo se aborda la última tarea de que debe cumplir el sistema de control de orientación, y en particular se trabajará el apuntamiento de Nadir y el apuntamiento inercial. El primero es de principal interés en los satélites de percepción remota terrestre, ya que habitualmente es el modo más recurrente de medición en la actualidad. Consiste en que una de las caras del satélite apunte hacia la superficie terrestre de tal manera que si se traza un plano sobre la superficie terrestre de interés, ambos planos sean paralelos y que el vector que los une sea normal a ambos.

En el caso del apuntamiento inercial, es de uso común para observar otros cuerpos celestes como el Sol, planetas, estrellas, o para llevar a cabo una medición de tipo diferente al de Nadir en caso de que la misión científica así lo requiera. Para observar un cuerpo en especial, por ejemplo a la luna, se tiene que modelar la relación entre dicho cuerpo y el satélite para poder establecer la orientación que el satélite debe guardar. En este trabajo no se observa a ningún cuerpo en particular y es por ello que únicamente se busca que el satélite alcance una orientación arbitraria. Así entonces, en este trabajo se abordarán estos dos tipos de modos de control que se presentarán durante la vida útil del satélite, una vez que se encuentre en órbita.

#### **1.4.2 Objetivo general**

Diseñar y evaluar numéricamente el desempeño en dos modos de control de operación: apuntamiento de Nadir y apuntamiento inercial, requeridos en una misión satelital de percepción remota terrestre, de un esquema de control de orientación basado en el vector cuaternion error. Cumpliendo con los requerimientos de apuntamiento solicitados para una cámara de percepción remota en desarrollo en el grupo de ingeniería espacial del CAT-UNAM.

#### **1.4.3 Alcances**

Un satélite de percepción remota requiere un sistema de determinación y control de la orientación, el cual consiste en sensores, actuadores y algoritmos de determinación y control. Es por ello que es importante aclarar que este trabajo únicamente aborda la parte relacionada al control de orientación con los siguientes alcances:

- Diseñar un esquema de control basado en el vector cuaternion error tomando en cuenta un tiempo de establecimiento particular y haciendo uso de las características de actuadores comerciales.
- Llevar a cabo una simulación numérica del esquema de control considerando un caso ideal de estudio para conocer su desempeño y con base en ello determinar la viabilidad de ser utilizado en el caso de estudio.
- Obtener el modelo matemático de un sistema compuesto por un satélite y tres ruedas inerciales el cual es un sistema de control de orientación basado en el principio de intercambio de cantidad de movimiento angular.

#### **1.4.3 Contenido**

Capítulo 1: en este apartado se presenta brevemente el contexto en el que se desarrolló el trabajo.

Capítulo 2: se presenta el proceso para obtener el modelo matemático que describe el movimiento rotacional del satélite requerido para llevar a cabo el control de orientación.

Capítulo 3: se describe la teoría de control de la ley de control basada en el vector cuaternion error que se utiliza. Así mismo se muestra el diseño del controlador generado para los propósitos de este proyecto.

Capítulo 4: se presentan y se discuten los resultados obtenidos de la simulación numérica.

Finalmente en el último apartado se presentan las conclusiones obtenidas con el desarrollo del presente trabajo de investigación.

## Referencias

- Burton, R., Rock, S., Springmann, J., & Cutler, J. (2014). Dual attitude and parameter estimation of passively magnetically stabilized nano satellites. *Acta Astronautica*, *94*, 145-158.
- Bushenkov, V., Ovchinnikov, M., & Smirnov, G. (2002). Attitude Stabilization of a Satellite by Magnetic Coils. *Acta Astronautica*, *50*, 721-728.
- Candini, P. G., Piergentili, F., & Santoni, F. (2012). Miniaturized attitude control system for nanosatellites. *Acta Astronautica*, *81*, 325-334.
- De La Rosa, S. (1987). Microsatellite UNAM-MAI. *Annual Conf. University Space Mission Overview and New Perspectives* (pp. 740-741). IEEE.
- Findlay, E., Ruiter de, A., Forbes, J., Liu, H., Damaren, C., & Lee, J. (2013). Magnetic Attitude Control of a Flexible Satellite. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1522-1526.
- Forbes, J. R. (2015). Attitude control with active actuator saturation prevention. *Acta Astronautica*, *107*, 187-195.
- Forbes, J. R., & Damaren, C. J. (2010). Geometric Approach to Spacecraft Attitude Control Using Magnetic and Mechanical Actuation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 590-595. doi:10.2514/1.46441
- Forbes, J. R., & John, D. C. (2011). Linear Time-Varying Passivity-Based Attitude Control Employing Magnetic and Mechanical Actuation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, *34*, 1363-1372.
- Han, C., Guo, J., & Pechev, A. (2014). Nonlinear H based underactuated attitude control for small satellites with two reaction wheels. *Acta Astronautica*, *104*, 159-172.
- Inamori, T., Shimizu, K., Mikawa, Y., & Nakasuka, S. (2014). Attitude Stabilization for the Nano Remote Sensing Satellite PRISM. *Journal of Aerospace Engineering*, 594-602.
- John, T.-Y., & Kreutz-Delgado, K. (1991). The Attitude Control Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *36*, 1148-1162.
- Lappas, V., Steyn, W. H., & Underwood, C. I. (n.d.). Attitude Control for Small Satellites using Control Moment Gyros.
- Levskii, M. V. (2015). Kinematically Optimal Spacecraft Attitude Control. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, *54*, 116-132.
- Mulay, S., Joshi, J., Chati, Y., Unhelkar, V., Bandyopadhyay, S., Tamaskar, S., . . . Hablani, H. (n.d.). Attitude determination and control of PRATHAM. *Dynamics and Control Conference* (pp. 1-19). IAA.
- Nasirian, M., Bolandi, H., Khaki, A., & Khoogar, A. R. (n.d.). Design of an Satellite Attitude Control Simulator.

- Nishida, J., & Tsubuku, Y. (n.d.). Tokyo Tech's Technology Demonstration Satellite "TSUBAME".
- Nudehi, S., Farooq, U., Alasty, A., & Issa, J. (2008). Satellite Attitude Control using Three Reaction Wheels. *American Control Conference* (pp. 4850-4855). Seattle: American Control Conference.
- Ovchinnikov, M. (1998). Methods to obtain the principal parameters of simple attitude control systems for small satellites. *Acta Astronautica*, 43, 597-605.
- Ovchinnikov, M. Y., S, I. D., Ivlev, N. A., Karpenko, S. O., Roldugin, D. S., & S, T. S. (2014). Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS. *Acta Astronautica*, 93, 23-33.
- Ovchinnikov, M., & Ivanov, D. (2014). Approach to study satellite attitude determination algorithms. *Acta Astronautica*, 98, 133-137.
- Patankar, K., & Fitz-Coy, N. (2014). Design Considerations for Miniaturized Control Moment Gyroscopes for Rapid Retargeting and Precision Pointing of Small Satellites. *Conference on Small Satellites* (pp. 1-12). Utah: AIAA/USU.
- Polo, O., Esteban, S., Cercos, L., & Parra, P. (2014). Ent-to-end validation process for the INTA-Nanosat-1B Attitude Control System. *Acta Astronautica*, 93, 94-105.
- Ramirez, J., De La Rosa, S., Sanchez, E., Romo, C., Ferrer, J., & Santillan, S. (2013). Satellite CONDOR UNAM-MAI. *RAST* (pp. 1037-1040). IEEE.
- Rodriguez-Vazquez, A., Maria, M.-P., & Bernelli-Zazzera, F. (n.d.). Full Magnetic Satellite Attitude Control using ASRE Method. *Dynamics and Control Conference* (pp. 1-13). IAA.
- Romo, C., Santillan, S., Ramirez, J., De la Rosa, S., Lozano, P., & Saenz-Otero, A. (2013). Satellite project Quetzal UNAM-MIT. *RAST* (pp. 903-907). IEEE.
- Sandau, R. (2010). Status and trends of small satellite missions for Earth observation. *Acta Astronautica*, 66, 1-12. doi:10.1016/j.actaastro.2009.06.008
- Sarikan, A., Aydemir, M., Yavuzoglu, E., & Ozyurt, C. (2010). Real Time Digital Simulation of a Satellite Attitude Control System. *SPEEDAM 2010* (pp. 827-832). IEEE.
- Silani, E., & Lovera, M. (2005). Magnetic Spacecraft Attitude Control: a survey and some new results. *Control Engineering Practice*, 13, 357-371.
- Springmann, J., & Cutler, J. (2014). Flight results of a low-cost attitude determination system. *Acta Astronautica*, 99, 201-214.
- Tafazoli, M. (2009). A study of on-orbit spacecraft failures. *Acta Astronautica*, 64, 195-205.
- Tikka, T., Wedekind, F., Danziger, B., & Cho, M. (n.d.). Low-cost and Fast-delivery Verification Strategy for the Aalto-1 Nano-satellite Attitude Determination and Control System.
- Verbin, B., & Lappas, V. (2013). Rapid Rotational Maneuvering of Rigid Satellites with Reaction Wheels. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 36, 1538-1544.

- Wang, L., Li, Z., & Wang, B. (2012). Robust Satellite Attitude Control. *Advances in CSIE* (pp. 649-654). Springer.
- Weiss, A., Kolmanovsky, I., & Bernstein, D. (2013). Inertia-Free Spacecraft Attitude Control Using Reaction Wheels. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 36, 1425-1439.
- Wertz, J., Everett, D., & Puschell, J. (2011). *Space Mission Engineering: The New SMAD*. Hawthorne, California, USA: Microcosm Press.
- Wie, B., & Barba, P. M. (1985). Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers. *Journal of Guidance, Navigation and Control*, 8, 360-365.
- Wie, B., Weiss, H., & Arapostathist, A. (1989). Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations. *Journal of Guidance, Navigation and Control*, 12, 375-380.  
doi:10.2514/320418
- Wise, E., & Miller, D. (2013, May). Design, Analysis, and Testing of Precision Guidance, Navigation, and Control System for a Dual-Spinning Cubesat. Cambridge, Massachusetts, United States of America: MIT.

## II. DINÁMICA DEL SATÉLITE

En el diseño de controladores, el modelo matemático que describe el comportamiento de la planta (sistema a controlar) es requerido para definir los valores de las ganancias de la ley de control que permitan alcanzar los objetivos de control.

En este capítulo se presenta el proceso para obtener el modelo matemático que describe la dinámica rotacional de un satélite en órbita baja, el cual se utilizará posteriormente para diseñar la ley de control de orientación en 3 ejes.

### 2.1 Sistemas de referencia

“Es más grande”, “Está a 10 minutos”, “Camina 20 metros a tu izquierda”, son frases que se suelen utilizar en la vida cotidiana para llevar a cabo comparaciones o para describir la ubicación de un objeto o sujeto. Es claro que todas estas frases requieren de un punto de referencia o de comparación para que cobren sentido, por ejemplo: A es más grande que B o C está a 10 minutos de D. En estos casos B y D son los puntos de referencia que dan sentido a la frases.

Describir el comportamiento de un sistema, de cualquier tipo, a través de modelos matemáticos forzosamente requiere de un sistema de referencia, para que los resultados que se obtengan con dicho modelo adquieran un sentido físico y permitan generar conclusiones sólidas. Para conocer el movimiento de un satélite en el espacio, se deben establecer sistemas ortogonales de referencia sobre los cuales se representarán: el movimiento angular, el cambio en el movimiento angular, entre otras variables de interés para el control de orientación de un satélite.

#### 2.1.1 Sistema de referencia inercial

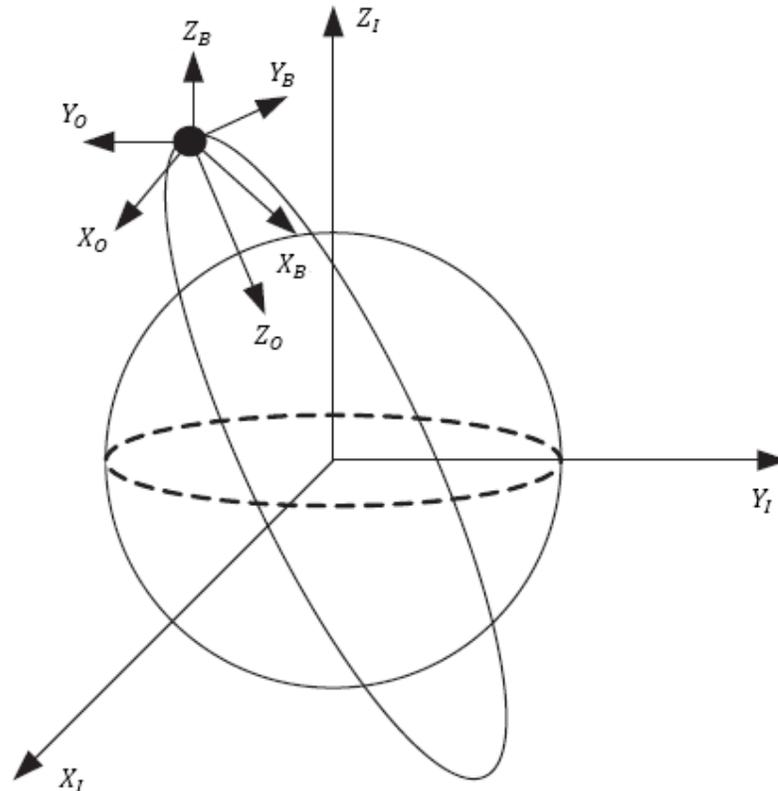
El sistema de referencia inercial ( $R_I$ ) tiene su origen en el centro de la Tierra. El eje  $X_I$  apunta hacia el Equinoccio vernal o Primer punto de Aries, el eje  $Z_I$  hacia el Polo Norte geográfico y el eje  $Y_I$  completa el sistema de referencia ortogonal respetando la regla de la mano derecha. Véase Figura 2-1.

#### 2.1.2 Sistema de referencia orbital

El origen del sistema de referencia orbital ( $R_O$ ) coincide con el centro de masa del satélite. La parte positiva del eje  $X_O$  apunta en el mismo sentido que el vector de velocidad lineal del satélite al encontrarse en órbita. Así mismo, la dirección de este eje cambia conforme cambia la dirección del vector velocidad. Por otra parte, el eje  $Z_O$  apunta hacia el centro de la Tierra y, al igual que en el caso anterior, el eje  $Y_O$  completa el sistema de referencia ortogonal respetando la regla de la mano derecha. El sistema se muestra en la Figura 2-1.

#### 2.1.3 Sistema de referencia fijo al cuerpo

El sistema de referencia fijo al cuerpo del satélite ( $R_B$ ) tiene sus ejes  $X_B$ ,  $Y_B$  y  $Z_B$  coincidentes con los ejes principales de inercia del satélite. Su origen se encuentra en el centro de masa del satélite. Tal como se muestra en la Figura 2-1.



**Figura 2-1. Sistemas de referencias.<sup>1</sup>**

En la Figura 2-1 se presentan los tres sistemas de referencia mencionados.

## 2.2 Representación de la orientación

La orientación de un cuerpo que se encuentra en el espacio tridimensional puede ser representado utilizando diversas herramientas matemáticas, como se menciona en (Chaturvedi, Sanyal, & N., 2011) tres o cuatro parámetros son utilizados para este propósito. En la literatura, los métodos más utilizados para la representación de la orientación de un satélite son: ángulos de Euler, los ángulos “Yaw-Pitch-Roll”, los parámetros de Rodrigues, los parámetros de Rodrigues modificados, Cuaterniones, “Axis-angle” y las matrices de rotación.

En este trabajo se hace uso de los Cuaterniones y de los ángulos “Yaw-Pitch-Roll” para representar la orientación del satélite. Debido a esto, la teoría relacionada con cada uno de los métodos es abordada brevemente en este trabajo en las siguientes secciones. Se recomienda revisar las referencias (Diebel, 2006), (Curtis, 2012), entre otros, para una mayor profundización en la teoría relacionada a la representación de la orientación de un cuerpo en el espacio tridimensional.

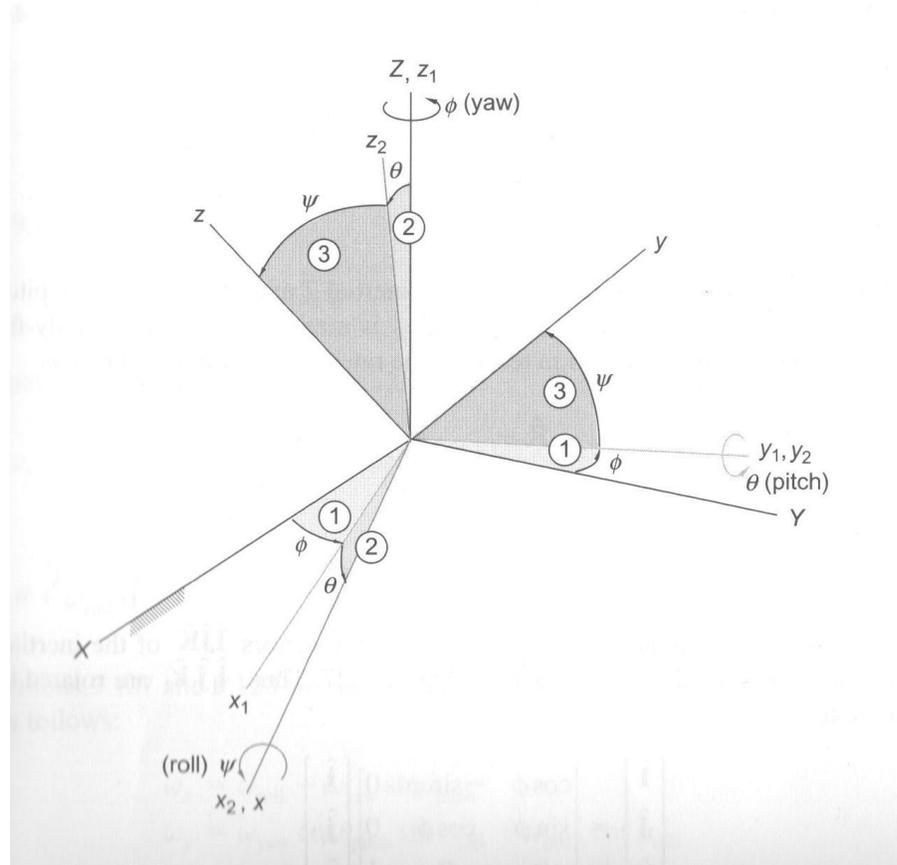
### 2.2.1 Ángulos “Yaw-Pitch-Roll”

Una de las formas más comunes de representar la orientación de un objeto, que se encuentra en el espacio tridimensional con respecto a un sistema de referencia, es con los ángulos de Euler y particularmente utilizando una secuencia conocida como “Yaw-Pitch-Roll”, de acuerdo con (Curtis,

<sup>1</sup> Imagen tomada de (Han, Jian, & Alexandre, 2014). Modificada para los propósitos de este trabajo.

2012) al menos tres ángulos son requeridos para especificar la orientación de un cuerpo rígido relativa un sistema de referencia inercial.

Sean los sistemas de referencia (X-Y-Z) y (x-y-z) que se presentan en la Figura 2-2, un sistema de referencia inercial y un no inercial, respectivamente. Ambos sistemas comparten el origen y el sistema (x-y-z) puede rotar libremente alrededor de los tres ejes del sistema inercial.



**Figura 2-2. Sistemas de referencias inercial y móvil.<sup>2</sup>**

Como puede notarse en la Figura 2-2, el sistema (x-y-z) se encuentra rotado con respecto al sistema inercial. Asumiendo que el sistema no inercial se encuentra fijo al cuerpo del satélite, entonces, si se conoce la orientación del sistema (x-y-z) con respecto al sistema (X-Y-Z) también se conoce la orientación del satélite con respecto al sistema de referencia inercial. Y precisamente los ángulos de Euler, en su secuencia “Yaw-Pitch-Roll”, permiten conocer la orientación de un sistema no inercial relativa a un sistema de referencia inercial (Curtis, 2012).

Para conocer la orientación del sistema no inercial con respecto al sistema inercial, se llevan a cabo una serie de rotaciones. De tal manera que el sistema (X-Y-Z) es “rotado” tres veces para que coincida con el sistema (x-y-z). Así entonces, “la primera rotación se lleva a cabo alrededor del eje

<sup>2</sup> Figura tomada de (Curtis, 2012).

Z un ángulo  $\phi$  (yaw). Esto lleva al eje  $X$  a  $x_1$ ,  $Y$  a  $y_1$  y al eje  $Z$  a  $z_1$ . Luego ocurre una rotación  $\theta$  (pitch) alrededor del eje  $y_1$ , lo cual convierte a este eje en el nuevo eje  $y_2$  y a los ejes  $x_1$  y  $z_1$  en  $x_2$  y  $z_2$ , respectivamente. Finalmente la última rotación  $\psi$  (roll) se lleva a cabo alrededor del eje  $x_2$ , lo cual permite llegar al sistema de referencia no inercial y los ejes  $x_2$ ,  $y_2$  y  $z_2$  se convierte en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente<sup>3</sup>.

Cada una de las rotaciones descritas en el párrafo anterior puede ser representada a través de una matriz de rotación.

$$[\mathbf{R}_1(\phi)] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{R}_2(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} [\mathbf{R}_3(\psi)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Finalmente, para expresar la rotación del sistema (x-y-z) con respecto al sistema (X-Y-Z) se define una matriz de rotación de la siguiente manera (Curtis, 2012),

$$[\mathbf{Q}]_{xx} = [\mathbf{R}_3(\psi)][\mathbf{R}_2(\theta)][\mathbf{R}_1(\phi)] \quad (2.2)$$

Sustituyendo (2.1) en (2.2) se tiene:

$$[\mathbf{Q}]_{xx} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \theta \sin \psi \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Además la matriz  $[\mathbf{Q}]_{xx}$  permite expresar en el sistema no fijo un vector expresado inicialmente en el sistema inercial llevando a cabo la operación siguiente.

$$\{\mathbf{v}\}_x = [\mathbf{Q}]_{xx}\{\mathbf{v}\}_X \quad (2.4)$$

De acuerdo con (Diebel, 2006) el uso de los ángulos de Euler y en particular de la secuencia “Yaw-Pitch-Roll” es muy común porque son fáciles de entender y de manipular. Sin embargo, presentan ciertas desventajas:

1. Cuando el ángulo pitch es  $\pm 90^\circ$  se presentan singularidades, es decir, no hay solución al sistema de ecuaciones que describe la cinemática del satélite.
2. Son menos precisos que los cuaterniones cuando se utilizan para integrar los cambios incrementales en la orientación a través del tiempo.

Debido a las desventajas antes indicadas, en este trabajo se hace uso de la secuencia “Yaw-Pitch-Roll” únicamente para mostrar cómo es el movimiento de rotación del satélite a través del tiempo, sin embargo, en las operaciones matemáticas se utilizan los cuaterniones para resolver el sistema de ecuaciones que describe la cinemática del satélite.

### 2.2.2 Cuaterniones

Los cuaterniones son una abstracción matemática que fueron introducidos en 1843 por Sir. William R. Hamilton. Un cuaternion  $\tilde{q}$  se compone de cuatro elementos que se dividen en dos partes: una parte escalar y una parte vectorial (Curtis, 2012).

<sup>3</sup> (Curtis, 2012) Página 549.

$$\tilde{\mathbf{q}} \equiv q_1 \hat{\mathbf{i}} + q_2 \hat{\mathbf{j}} + q_3 \hat{\mathbf{k}} + q_4 \quad (2.5)$$

La parte imaginaria puede encontrarse al principio o al final del cuaternión.

Un cuaternión también puede expresarse en forma de un vector columna (Hilstad, 2002). En este caso solo se utilizan los coeficientes reales de los componentes del cuaternión.

$$\mathbf{q} \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Haciendo uso de la representación en forma de vector columna se definen una serie de operaciones que pueden llevarse a cabo con cuaterniones como: sustracción, multiplicación, norma, inversa, entre otros. En este trabajo se presenta *grosso modo* algunas de las operaciones de interés para los propósitos de la representación de la orientación de un cuerpo en el espacio. Si se desea una profundización de la definición de cada operación se recomienda revisar las referencias (Grofekattofer & Yoon, 2012) o (Dam, Martin, & Martin, 1998).

Conjugado de un cuaternión

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Norma de un cuaternión

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \quad (2.8)$$

Inverso de un cuaternión

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|} \quad (2.9)$$

Multiplicación de cuaterniones

Sean los cuaterniones  $\mathbf{q}_A = q_{a1} \hat{\mathbf{i}} + q_{a2} \hat{\mathbf{j}} + q_{a3} \hat{\mathbf{k}} + q_{a4}$  y  $\mathbf{q}_B = q_{b1} \hat{\mathbf{i}} + q_{b2} \hat{\mathbf{j}} + q_{b3} \hat{\mathbf{k}} + q_{b4}$ . La multiplicación entre ambos se define como,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_A \mathbf{q}_B = (q_{a1} \hat{\mathbf{i}} + q_{a2} \hat{\mathbf{j}} + q_{a3} \hat{\mathbf{k}} + q_{a4}) (q_{b1} \hat{\mathbf{i}} + q_{b2} \hat{\mathbf{j}} + q_{b3} \hat{\mathbf{k}} + q_{b4}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_A \mathbf{q}_B = (q_{a1}q_{b4} + q_{a2}q_{b3} - q_{a3}q_{b2} + q_{a4}q_{b1}) \hat{\mathbf{i}} + (-q_{a1}q_{b3} + q_{a2}q_{b4} + q_{a3}q_{b1} + q_{a4}q_{b2}) \hat{\mathbf{j}} + (q_{a1}q_{b2} - q_{a2}q_{b1} + q_{a3}q_{b4} + q_{a4}q_{b3}) \hat{\mathbf{k}} + (-q_{a1}q_{b1} - q_{a2}q_{b2} - q_{a3}q_{b3} + q_{a4}q_{b4}) \quad (2.11)$$

Si se hace uso de la notación matricial se tiene,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_{b4} & q_{b3} & -q_{b2} & q_{b1} \\ -q_{b3} & q_{b4} & q_{b1} & q_{b2} \\ q_{b2} & -q_{b1} & q_{b4} & q_{b3} \\ -q_{b1} & -q_{b2} & -q_{b3} & q_{b4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \\ q_{a4} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Entonces se puede definir un operador composición,

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_B * \mathbf{q}_A \quad (2.13)$$

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_B *] \mathbf{q}_A \quad (2.14)$$

Donde

$$[\mathbf{q}_B *] = \begin{bmatrix} q_{b4} & q_{b3} & -q_{b2} & q_{b1} \\ -q_{b3} & q_{b4} & q_{b1} & q_{b2} \\ q_{b2} & -q_{b1} & q_{b4} & q_{b3} \\ -q_{b1} & -q_{b2} & -q_{b3} & q_{b4} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Estas operaciones se retomarán al momento de obtener las ecuaciones cinemáticas del movimiento rotacional del satélite.

### 2.2.2.1 Teorema de Euler

El teorema de Euler establece que “el desplazamiento general de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de cierto eje” (Curtis, 2012). De tal manera que la rotación de un cuerpo en el espacio tridimensional puede cuantificarse describiendo en un sistema de referencia inercial el eje  $\hat{e}$  alrededor del cual se lleva a cabo la rotación y un ángulo de rotación  $\theta$ , tal como se muestra en la Figura 2-3. Cabe mencionar que el eje  $\hat{e}$  es conocido como el eje de Euler y  $\theta$  como el ángulo de Euler.

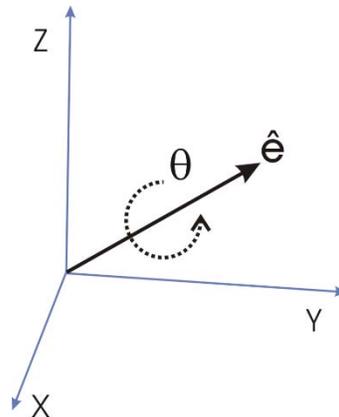


Figura 2-3. Descripción geométrica del teorema de Euler.<sup>4</sup>

### 2.2.2.2 Cuaterniones unitarios

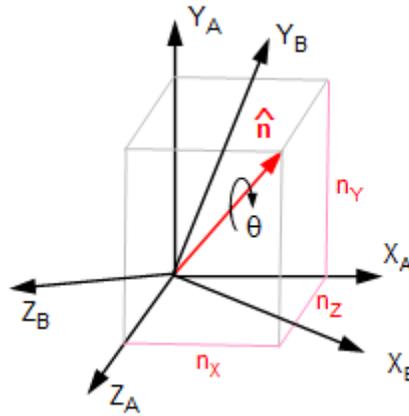
Un cuaternion  $\mathbf{q}$  es considerado un cuaternion unitario si tiene una norma de magnitud igual a uno, es decir,  $\|\mathbf{q}\| = 1$ . Además se cumple que (Dam, Martin, & Martin, 1998);

$$\|\mathbf{q}\| = 1 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}} \quad (2.17)$$

<sup>4</sup> Figura tomada de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s\\_rotation\\_theorem#/media/File:Euler\\_AxisAngle.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_rotation_theorem#/media/File:Euler_AxisAngle.png), el 27 de julio de 2015.

La orientación de un cuerpo rígido en el espacio tridimensional puede describirse a través de un cuaternión unitario. Esta representación se sustenta en el Teorema de Euler (Grofekatthofer & Yoon, 2012).



**Figura 2-4. Descripción geométrica de la orientación de un cuerpo usando cuaterniones.<sup>5</sup>**

Sean los sistemas de referencia inercial ( $X_A$ - $Y_A$ - $Z_A$ ) y fijo al cuerpo del satélite ( $X_B$ - $Y_B$ - $Z_B$ ), que se muestran en la Figura 2-4. El sistema  $R_B$  se encuentra rotado con respecto al sistema  $R_A$ . De acuerdo con el Teorema de Euler, basta con conocer el eje alrededor del cual se lleva a cabo la rotación y la magnitud de la rotación para poder determinar la orientación relativa de  $R_B$  con respecto a  $R_A$ . Si se considera el vector  $\hat{n}$  como el eje de Euler y a  $\theta$  como el ángulo de Euler, entonces el cuaternión unitario que describe la orientación del sistema  $R_B$  con respecto a  $R_A$  (Grofekatthofer & Yoon, 2012), es:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \sin \frac{\theta}{2} \\ n_y \sin \frac{\theta}{2} \\ n_z \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Donde,

$n_x, n_y, n_z$  son las componentes del vector  $\hat{n}$  (eje de Euler) en el sistema inercial.

$\theta$  es el ángulo (de Euler) que se rota alrededor del vector  $n$ .

Considerando que el cuaternión  $\mathbf{q}$  describe la orientación de un sistema dado con respecto a otro. Para conocer la evolución de la orientación a través del tiempo, es necesario conocer la primera derivada de  $\mathbf{q}$  con respecto al tiempo.

<sup>5</sup> Figura tomada [http://www.tobynorris.com/work/prog/csharp/quatview/help/orientations\\_and\\_quaternions.htm](http://www.tobynorris.com/work/prog/csharp/quatview/help/orientations_and_quaternions.htm) el 28 de julio de 2015.

La primera derivada de  $\mathbf{q}$  con respecto al tiempo está dada por (Chobotov, 2008),

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \Omega(\omega) \mathbf{q} \quad (2.19)$$

Donde,

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$\omega_x$ ,  $\omega_y$  y  $\omega_z$ , son los componentes de la velocidad angular del sistema no inercial  $R_B$  con respecto al sistema inercial  $R_A$ .

Otro concepto importante en la representación de la orientación de un sistema no inercial con respecto a uno inercial es la matriz de transformación. Una matriz de transformación  $[\mathbf{C}]_{Xx}$  se encarga de transformar los componentes de un vector  $\mathbf{v}$  en el sistema de referencia  $R_X$  a sus componentes en el sistema de referencia  $R_x$  (Curtis, 2012). Es decir,

$$\{\mathbf{v}\}_x = [\mathbf{C}]_{Xx} \{\mathbf{v}\}_X \quad (2.21)$$

La matriz de transformación de un sistema de referencia inercial a uno móvil utilizando cuaterniones unitarios es (Hughes, 2004),

$$[\mathbf{C}]_{Xx} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La representación de la orientación de un cuerpo en el espacio haciendo uso de los cuaterniones unitarios presenta ciertas ventajas sobre la representación que utiliza los ángulos de Euler. Las principales son que no se presentan singularidades y que el procesamiento computacional requerido es menor comparado con la secuencia "Yaw-Pitch-Roll" (Chobotov, 2008). Estas ventajas han hecho que los cuaterniones sean muy populares en el estudio de la dinámica rotacional de las naves espaciales.

La principal desventaja de un cuaternion es que está sobredimensionado, ya que se requieren cuatro componentes para describir un fenómeno que se encuentra en un espacio de tres dimensiones, por lo que su interpretación física no es intuitiva (Diebel, 2006).

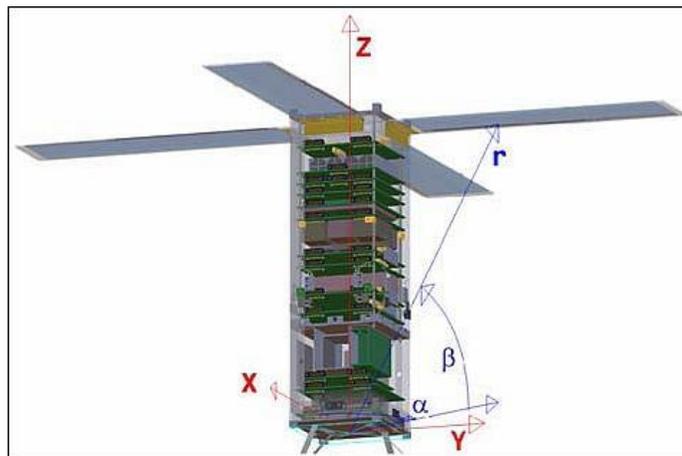
En este trabajo se hace uso de los cuaterniones para llevar a cabo las operaciones matemáticas necesarias para describir el movimiento rotacional del satélite. Y, la secuencia "Yaw-Pitch-Roll" se utilizará para darle un significado físico a los cuaterniones.

### 2.3 Ecuaciones de movimiento

En las secciones previas de este capítulo se han introducido conceptos necesarios para obtener el modelo matemático que describa el movimiento rotacional de un satélite. Ahora se procede a desarrollar el modelo matemático del satélite haciendo uso de la dinámica de cuerpo rígido y asumiendo algunas consideraciones que disminuyen la dificultad del problema, pero que permiten obtener una buena aproximación a la descripción del fenómeno.

### 2.3.1 Consideraciones

El movimiento de un satélite en el espacio es un movimiento de 6 grados de libertad (DOF, del inglés “Degrees of freedom”), ya que puede rotar alrededor de su centro de masa, pero también puede trasladarse en cualquier dirección. Por ejemplo, el satélite de la Figura 2-5 puede rotar libremente alrededor de los ejes x-y-z, pero también puede desplazarse sobre ellos. De acuerdo con (Curtis, 2012) estos dos movimientos pueden tratarse por separado ya que la cantidad de movimiento angular absoluta calculada alrededor del centro de masa depende únicamente de la velocidad angular absoluta del cuerpo y no de la velocidad lineal de cualquier punto del cuerpo debido al movimiento traslacional. Tomando ventaja de esto, en este trabajo únicamente se estudia el movimiento rotacional del satélite ya que únicamente es de interés la orientación del satélite con respecto al sistema de referencia orbital y no la posición que ocupa en la órbita.



**Figura 2-5. Descripción geométrica de la orientación de un cuerpo usando cuaterniones.<sup>6</sup>**

Otras consideraciones para la obtención del modelo matemático que describe el movimiento rotacional de un satélite en el espacio, son:

- El satélite siempre se mantiene en su órbita y no se traslada sobre los ejes del sistema ( $R_B$ ).
- El satélite es tratado como un conjunto de cuerpos rígidos unidos rígidamente.
- El tensor de momentos de inercia solo cuenta con momentos de inercia principales.
- Los actuadores son 3 ruedas inerciales idénticas y están colocadas sobre los ejes principales de inercia.
- El satélite es considerado un punto de masa concentrada para calcular su velocidad en órbita.
- Únicamente se considera el par por gradiente gravitacional como perturbación.
- El eje que une la rueda de inercia con el motor es rígido.
- El satélite se encuentra en una órbita circular directa.

Tomando en cuenta estas consideraciones se procede a obtener el modelo matemático del satélite.

<sup>6</sup> Figura tomada de: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/d/delfi-n3xt>, el 29 de julio de 2015.

### 2.3.2 Dinámica

El movimiento de los sistemas mecánicos rotacionales se estudia con una ley análoga a la segunda ley de Newton, ésta relaciona la cantidad de movimiento angular con el momento total que se ejerce sobre el cuerpo.

$$\vec{T}_{externo} = \frac{d}{dt}(\vec{H}_{absoluta}) \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) dice que el par absoluto que actúa sobre el satélite es igual a la primera derivada de la cantidad de movimiento angular absoluto calculado alrededor del centro de masa.

Al definir un sistema de referencia inercial  $R_I$  y un sistema fijo al cuerpo del satélite  $R_B$  se puede obtener el modelo matemático del satélite, donde la ecuación (2.23) se puede reescribir como,

$$\vec{T}_{IB}^{Sat} = \frac{d}{dt}(\vec{H}_{IB}^{Sat}) \quad (2.24)$$

Donde,

$\vec{T}_{IB}^{Sat}$  es el vector de par total que actúa sobre el satélite, medido en el sistema de referencia inercial, pero expresado en el sistema de referencia fijo al cuerpo del satélite.

$\vec{H}_{IB}^{Sat}$  es el vector de cantidad de movimiento del satélite, medido en el sistema de referencia inercial, pero expresado en el sistema de referencia fijo al cuerpo del satélite.

La expresión que permite calcular la cantidad de movimiento angular es,

$$\vec{H}_{IB}^{Sat} = I_{Sat} \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \quad (2.25)$$

Donde,

$I_{Sat}$  es la matriz de momentos de inercia del satélite, obtenida con respecto al sistema  $R_B$ .

$\vec{\omega}_{IB}^{Sat}$  la velocidad angular absoluta del satélite, es decir, con respecto al sistema inercial. Pero expresado en el sistema  $R_B$ .

El satélite, para el caso del estudio de la dinámica, es considerado un conjunto de cuerpos rígidos. Así entonces, el satélite se compone de su "cuerpo" y de tres ruedas inerciales, tal como se ejemplifica en la Figura 2-6. Tomando en cuenta esto, la cantidad de movimiento angular total del satélite es la suma de la cantidad de movimiento de cada cuerpo que lo compone (Hughes, 2004).

$$\vec{H}_{IB}^{Sat} = \vec{H}_{IB}^{Cuerpo} + \vec{H}_{IB}^{Rueda 1} + \vec{H}_{IB}^{Rueda 2} + \vec{H}_{IB}^{Rueda 3} \quad (2.26)$$

Recordando que se asume que cada una de las ruedas inerciales está en cada eje de inercia principal del satélite, entonces se pueden agrupar en un solo vector y cada uno de los movimientos angulares creado por cada rueda puede ser considerado un elemento del vector de cantidad de movimiento angular de todas las ruedas.

$$\vec{H}_{IB}^{Ruedas} = \begin{bmatrix} \vec{H}_{IB}^{Rueda 1} \\ \vec{H}_{IB}^{Rueda 2} \\ \vec{H}_{IB}^{Rueda 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{H}_{IB}^{Rueda x} \\ \vec{H}_{IB}^{Rueda y} \\ \vec{H}_{IB}^{Rueda z} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Con lo anterior, la ecuación (2.26) se reescribe como,

$$\vec{H}_{IB}^{Sat} = \vec{H}_{IB}^{Cuerpo} + \vec{H}_{IB}^{Ruedas} \quad (2.28)$$

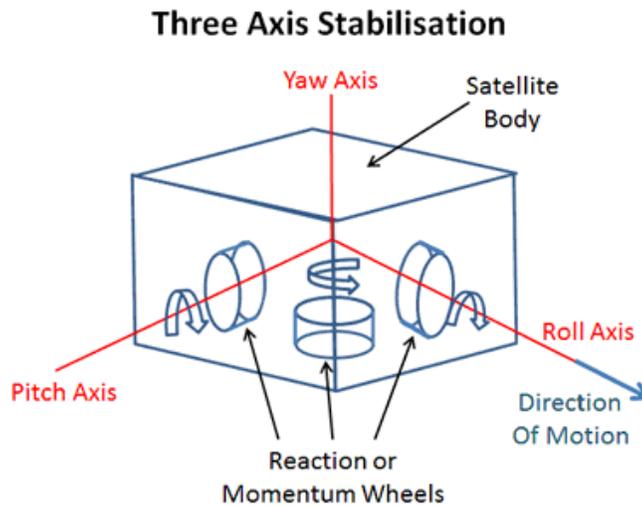


Figura 2-6. Satélite con tres ruedas inerciales.<sup>7</sup>

Hasta ahora nos hemos ocupado de la cantidad de movimiento angular. Sin embargo, lo que realmente es de interés para describir el movimiento rotacional de un cuerpo es la primera derivada de este vector, tal como se indica en la ecuación (2.24).

El vector  $\vec{H}_{IB}^{Sat}$  es calculado en el sistema de referencia no inercial  $R_B$ , por lo que su derivada se calcula como la derivada de un vector fijo a un sistema no inercial que rota a cierta velocidad angular con respecto al sistema inercial (Curtis, 2012).

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_{IB}^{Sat}) = \frac{d}{dt}(\vec{H}_{IB}^{Sat})_{rel B} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times \vec{H}_{IB}^{Sat} \quad (2.29)$$

O,

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_{IB}^{Sat}) = \frac{d}{dt}(\vec{H}_{IB}^{Cuerpo})_{rel B} + \frac{d}{dt}(\vec{H}_{IB}^{Ruedas})_{rel B} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times \vec{H}_{IB}^{Cuerpo} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times \vec{H}_{IB}^{Ruedas} \quad (2.30)$$

Luego (Curtis, 2012),

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_{IB}^{Cuerpo})_{rel B} = \left[ I_{Cuerpo} \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{IB}^{Cuerpo}) \right] \quad (2.31)$$

<sup>7</sup> Imagen tomada de: <http://www.mpoweruk.com/satellites.htm>, el 30 de julio de 2015.

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_{IB}^{Ruedas})_{rel B} = \left[ I_{Ruedas} \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{IB}^{Ruedas}) \right] \quad (2.32)$$

Para reducir el tamaño de la ecuación, se utilizará la notación  $\dot{x}$  en lugar de  $\frac{dx}{dt}$ , y sustituyendo (2.31) y (2.32) en (2.30) se tiene,

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = I_{Cuerpo} \vec{\omega}_{IB}^{Cuerpo} + I_{Ruedas} \vec{\omega}_{IB}^{Ruedas} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times \vec{H}_{IB}^{Cuerpo} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times \vec{H}_{IB}^{Ruedas} \quad (2.33)$$

Aplicando la ecuación (3.25),

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = I_{Cuerpo} \vec{\omega}_{IB}^{Cuerpo} + I_{Ruedas} \vec{\omega}_{IB}^{Ruedas} + \vec{\omega}_{IB}^{Cuerpo} \times I_{Cuerpo} \vec{\omega}_{IB}^{Cuerpo} + \vec{\omega}_{IB}^{Cuerpo} \times I_{Ruedas} \vec{\omega}_{IB}^{Ruedas} \quad (2.34)$$

Si se considera que  $\vec{\omega}_{IB}^{Sat} = \vec{\omega}_{IB}^{Cuerpo}$ , entonces  $\vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} = \vec{\omega}_{IB}^{Cuerpo}$ . Además, para ahorrar espacio se escribirá  $I_C = I_{Cuerpo}$ ,  $I_R = I_{Ruedas}$  y  $\vec{\omega}_{IB}^R = \vec{\omega}_{IB}^{Ruedas}$ . Reescribiendo (2.34),

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = I_C \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \vec{\omega}_{IB}^R + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_C \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_R \vec{\omega}_{IB}^R \quad (2.35)$$

La velocidad angular absoluta de la ruedas es igual a la velocidad angular absoluta del cuerpo del satélite más la velocidad de la ruedas relativa al cuerpo del satélite. Es decir,

$$\vec{\omega}_{IB}^R = \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{BB}^R \quad (2.36)$$

$$\vec{\omega}_{IB}^{\dot{R}} = \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + \vec{\omega}_{BB}^{\dot{R}} \quad (2.37)$$

Sustituyendo en (2.35)

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = I_C \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \left( \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + \vec{\omega}_{BB}^{\dot{R}} \right) + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_C \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_R \left( \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{BB}^R \right) \quad (2.38)$$

Desarrollando las operaciones,

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = I_C \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \vec{\omega}_{BB}^{\dot{R}} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_C \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times (I_R \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + I_R \vec{\omega}_{BB}^R) \quad (2.39)$$

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = I_C \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \vec{\omega}_{BB}^{\dot{R}} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_C \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_R \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_R \vec{\omega}_{BB}^R \quad (2.40)$$

Agrupando términos,

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = (I_C + I_R) \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \vec{\omega}_{BB}^{\dot{R}} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times (I_C \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + I_R \vec{\omega}_{IB}^{Sat}) + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_R \vec{\omega}_{BB}^R \quad (2.41)$$

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = (I_C + I_R) \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \vec{\omega}_{BB}^{\dot{R}} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times (I_C + I_R) \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_R \vec{\omega}_{BB}^R \quad (2.42)$$

Si se define que,

$$I_{Sat} = I_C + I_R \quad (2.43)$$

Entonces,

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = I_{Sat} \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + I_R \vec{\omega}_{BB}^{\dot{R}} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_{Sat} \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_R \vec{\omega}_{BB}^R \quad (2.44)$$

Reagrupando términos,

$$\vec{H}_{IB}^{\dot{Sat}} = I_{Sat} \vec{\omega}_{IB}^{\dot{Sat}} + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_{Sat} \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + I_R \vec{\omega}_{BB}^R + \vec{\omega}_{IB}^{Sat} \times I_R \vec{\omega}_{BB}^R \quad (2.45)$$

La ecuación (2.45) describe el movimiento rotacional del satélite. Si se analizan los términos que la componen, se puede observar que; los primeros dos términos del lado derecho se deben al movimiento del satélite y los dos últimos al movimiento de las ruedas.

Recordando que se considera una matriz de momentos de inercia del satélite diagonal y que las tres ruedas son idénticas, en forma matricial la ecuación (2.45) es,

$$\begin{bmatrix} \tau_{IBx}^{Sat} \\ \tau_{IBy}^{Sat} \\ \tau_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{IBx}^{\dot{Sat}} \\ \omega_{IBy}^{\dot{Sat}} \\ \omega_{IBz}^{\dot{Sat}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{IBx}^{Sat} \\ \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{IBx}^{Sat} \\ \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} + \dots \\ + \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{BB}^{Rx} \\ \omega_{BB}^{Ry} \\ \omega_{BB}^{Rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{IBx}^{Sat} \\ \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{BB}^{Rx} \\ \omega_{BB}^{Ry} \\ \omega_{BB}^{Rz} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Operando,

$$\begin{bmatrix} \tau_{IBx}^{Sat} \\ \tau_{IBy}^{Sat} \\ \tau_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} \omega_{IBx}^{\dot{Sat}} \\ I_{yy} \omega_{IBy}^{\dot{Sat}} \\ I_{zz} \omega_{IBz}^{\dot{Sat}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{IBx}^{Sat} \\ \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} \omega_{IBx}^{Sat} \\ I_{yy} \omega_{IBy}^{Sat} \\ I_{zz} \omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_r \omega_{BB}^{Rx} \\ I_r \omega_{BB}^{Ry} \\ I_r \omega_{BB}^{Rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{IBx}^{Sat} \\ \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_r \omega_{BB}^{Rx} \\ I_r \omega_{BB}^{Ry} \\ I_r \omega_{BB}^{Rz} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{IBx}^{Sat} \\ \tau_{IBy}^{Sat} \\ \tau_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} \omega_{IBx}^{\dot{Sat}} \\ I_{yy} \omega_{IBy}^{\dot{Sat}} \\ I_{zz} \omega_{IBz}^{\dot{Sat}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy}) \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} \\ (I_{xx} - I_{zz}) \omega_{IBx}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} \\ (I_{yy} - I_{yy}) \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_r \omega_{BB}^{Rx} \\ I_r \omega_{BB}^{Ry} \\ I_r \omega_{BB}^{Rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_r (\omega_{BB}^{Rz} \omega_{IBy}^{Sat} - \omega_{BB}^{Ry} \omega_{IBz}^{Sat}) \\ I_r (\omega_{BB}^{Rx} \omega_{IBz}^{Sat} - \omega_{BB}^{Rz} \omega_{IBx}^{Sat}) \\ I_r (\omega_{BB}^{Ry} \omega_{IBx}^{Sat} - \omega_{BB}^{Rx} \omega_{IBy}^{Sat}) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Finalmente la ecuación (2.48) es la ecuación en forma matricial que describe el movimiento rotacional de un satélite con tres ruedas inerciales idénticas ubicadas en los ejes principales de inercia del satélite.

La ecuación (2.48) puede verse en forma escalar como un sistema de ecuaciones como,

$$\tau_{IBx}^{Sat} = I_{xx} \omega_{IBx}^{\dot{Sat}} + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} + I_r \omega_{BB}^{Rx} + I_r (\omega_{BB}^{Rz} \omega_{IBy}^{Sat} - \omega_{BB}^{Ry} \omega_{IBz}^{Sat}) \quad (2.49)$$

$$\tau_{IBy}^{Sat} = I_{yy} \omega_{IBy}^{\dot{Sat}} + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_{IBx}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} + I_r \omega_{BB}^{Ry} + I_r (\omega_{BB}^{Rx} \omega_{IBz}^{Sat} - \omega_{BB}^{Rz} \omega_{IBx}^{Sat}) \quad (2.50)$$

$$\tau_{IBz}^{Sat} = I_{zz} \omega_{IBz}^{\dot{Sat}} + (I_{yy} - I_{yy}) \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} + I_r \omega_{BB}^{Rz} + I_r (\omega_{BB}^{Ry} \omega_{IBx}^{Sat} - \omega_{BB}^{Rx} \omega_{IBy}^{Sat}) \quad (2.51)$$

Estas ecuaciones se utilizarán en la simulación del esquema de control que se diseñará posteriormente.

### 2.3.3 Cinemática

La dinámica rotacional del satélite no es suficiente para conocer la orientación del mismo ya que las ecuaciones (2.49), (2.50) y (2.51) tienen como referencia al sistema inercial, pero para los propósitos de este trabajo se requiere utilizar como referencia el sistema de referencia orbital  $R_O$ .

Anteriormente se mencionó que se abordarán dos modos de control: el apuntamiento de Nadir y apuntamiento inercial. El primero es habitual para realizar percepción remota terrestre y el segundo para observar otro cuerpo celeste de interés (Martin, 2008).

En la Figura 2-7 se muestran los sistemas de referencias  $R_O$  y  $R_B$ . Como ya se mencionó, el eje  $Z_O$  del sistema  $R_B$  apunta siempre al centro de la Tierra y el eje  $X_O$  es tangente a la órbita. Además, este sistema de referencia rota alrededor de su eje  $Y_O$  a la misma razón a la que el satélite orbita la Tierra. Cabe mencionar que el vector velocidad angular del sistema  $R_B$  es negativo si es expresado en el mismo sistema  $R_B$ , ya que se considera una órbita directa o prograd, es decir, el satélite se mueve en el mismo sentido, sentido antihorario si el espectador se ubica en el Polo Norte Solar (Maini & Agrawal, 2011), que el sentido de rotación de la Tierra.

En una misión de percepción remota es de interés que los ejes principales de inercia del satélite coincidan con los ejes del sistema  $R_B$ , ya que el eje  $Z_O$  al apuntar al centro de la Tierra es normal al plano que forma la superficie terrestre sobre la que el satélite se encuentra. Esto permite que se pueda llevar a cabo una medición útil para la parte científica de la misión espacial (Maini & Agrawal, 2011). Debido a esto, es de interés conocer la orientación del sistema  $R_B$  con respecto al sistema  $R_O$ , puesto que éste último fungirá como el sistema de referencia.

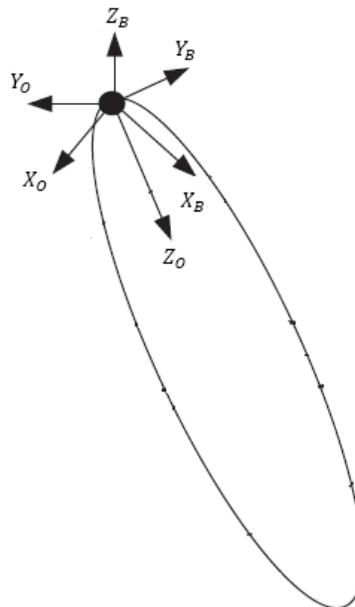


Figura 2-7. Sistema de referencia orbital y fijo al cuerpo del satélite.<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Figura tomada de (Han, Jian, & Alexandre, 2014) y modificada por Rigoberto Reyes Morales.

La orientación de un sistema de referencia con respecto a otro puede ser descrito a través de diversos métodos, por ejemplo: ángulos de Euler, matrices de cosenos directores, cuaterniones, entre otros. En este trabajo se hace uso de los cuaterniones y por ello la orientación del sistema  $R_B$  con respecto a  $R_O$ , queda descrito por,

$$\mathbf{q}_O^B = \begin{bmatrix} q_{O1}^B \\ q_{O2}^B \\ q_{O3}^B \\ q_{O4}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ox} \sin \frac{\theta}{2} \\ n_{oy} \sin \frac{\theta}{2} \\ n_{oz} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Y la cinemática del satélite está dada por,

$$\dot{\mathbf{q}}_O^B = \frac{1}{2} \Omega(\omega_O^B) \mathbf{q}_O^B \quad (2.53)$$

Donde,

$$\Omega(\omega_O^B) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{Oz}^B & -\omega_{Oy}^B & \omega_{Ox}^B \\ -\omega_{Oz}^B & 0 & \omega_{Ox}^B & \omega_{Oy}^B \\ \omega_{Oy}^B & -\omega_{Ox}^B & 0 & \omega_{Oz}^B \\ -\omega_{Ox}^B & -\omega_{Oy}^B & -\omega_{Oz}^B & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$\omega_{Ox}^B$ ,  $\omega_{Oy}^B$  y  $\omega_{Oz}^B$ , son las componentes de la velocidad angular del sistema  $R_B$  relativo al sistema  $R_O$ .

Recordando que el sistema  $R_B$  se encuentra fijo al cuerpo del satélite, entonces, la velocidad angular de  $R_B$  es la misma que la del satélite, por lo que la ecuación (2.53) se reescribe como,

$$\dot{\mathbf{q}}_O^B = \frac{1}{2} \Omega(\omega_{OB}^{Sat}) \mathbf{q}_O^B \quad (2.55)$$

Donde,

$$\Omega(\omega_{OB}^{Sat}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{OBz}^{Sat} & -\omega_{OBy}^{Sat} & \omega_{OBx}^{Sat} \\ -\omega_{OBz}^{Sat} & 0 & \omega_{OBx}^{Sat} & \omega_{OBy}^{Sat} \\ \omega_{OBy}^{Sat} & -\omega_{OBx}^{Sat} & 0 & \omega_{OBz}^{Sat} \\ -\omega_{OBx}^{Sat} & -\omega_{OBy}^{Sat} & -\omega_{OBz}^{Sat} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$\omega_{OBx}^{Sat}$ ,  $\omega_{OBy}^{Sat}$  y  $\omega_{OBz}^{Sat}$ , son las componentes de la velocidad angular del satélite con respecto al sistema de referencia orbital  $R_O$  expresados en el sistema  $R_B$ .

Para obtener  $\vec{\omega}_{OB}^{Sat}$  se hace uso del concepto de movimiento relativo. Si se tienen dos cuerpos A y B que rotan con respecto a un sistema de referencia inercial y que también rotan entre ellos, entonces, la velocidad absoluta de B puede ser descrita como la velocidad de B con respecto a A, más la velocidad absoluta de A, es decir, (Bedford & Fowler, 2000)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_A \quad (2.57)$$

Trasladando el concepto anterior al problema de interés, se puede decir entonces que,

$$\vec{\omega}_{IB}^{Sat} = \vec{\omega}_{OB}^{Sat} + \vec{\omega}_{IB}^0 \quad (2.58)$$

Donde,

$\vec{\omega}_{OB}^{Sat}$  es la velocidad angular del satélite con respecto al sistema de referencia orbital, expresado en el sistema fijo al cuerpo del satélite.

$\vec{\omega}_{IB}^0$  es la velocidad angular absoluta del sistema de referencia orbital, expresado en el sistema de referencia fijo al cuerpo del satélite.

La ecuación (2.58) sostiene que: la velocidad angular absoluta del satélite expresado en el sistema  $R_B$ , es igual a la suma de la velocidad angular del satélite con respecto al sistema orbital  $R_O$  con la velocidad angular absoluta del sistema de referencia orbital, ambos expresados en el sistema  $R_B$ .

Despejando  $\vec{\omega}_{OB}^{Sat}$ ,

$$\vec{\omega}_{OB}^{Sat} = \vec{\omega}_{IB}^{Sat} - \vec{\omega}_{IB}^0 \quad (2.59)$$

Al analizar la ecuación (2.59) se puede hacer notar que  $\vec{\omega}_{IB}^{Sat}$  se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones conformado por las ecuaciones (2.49), (2.50) y (2.51). De esta manera, para determinar la variable de interés es necesario conocer cómo calcular la ecuación  $\vec{\omega}_{IB}^0$ . Para este propósito, antes que nada se debe recordar que el sistema orbital rota alrededor de su eje  $Y_O$  a la misma razón que el satélite orbita a la Tierra, en otras palabras, a la velocidad angular del satélite con respecto a la Tierra. Así pues  $\vec{\omega}_{IB}^0$ , velocidad absoluta del sistema  $R_O$  con respecto a  $R_I$  expresado en  $R_B$ , es igual a la velocidad del satélite en cada instante de su órbita. Recordando que se considera una órbita circular, entonces la velocidad angular a la que el satélite orbita a la Tierra es constante y se calcula como (Wise & Miller, 2013),

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \quad (2.60)$$

Donde,

$\mu$  es la constante de gravitación terrestre. En este trabajo se considera que  $\mu = 398,600 \text{ km}^3/\text{s}^2$ .

$R$  es la distancia del centro de la Tierra al centro del satélite, es decir, la suma del radio de la Tierra con la altitud del satélite. El radio de la Tierra  $R_E$  se toma como  $R_E = 6,378 \text{ km}$ .

Con la ecuación (2.60) se obtiene la magnitud del vector  $\vec{\omega}_{IB}^0$ , por tanto, hace falta determinar su dirección y sentido. Para esto primero se determinará la dirección y sentido de  $\vec{\omega}_{IO}^0$ . Se ha mencionado que el sistema  $R_B$  rota alrededor de su eje  $Y_O$  por lo que su vector velocidad es normal al plano orbital, de tal manera que sus componentes en los ejes  $X_O$  y  $Z_O$  son nulos. Además se asume una órbita directa, entonces el giro del sistema  $R_O$  se realiza en sentido horario, por lo que la componente en el eje  $Y_O$  del vector  $\vec{\omega}_{IO}^0$  es negativo, tal como se muestra en la Figura 2-8.

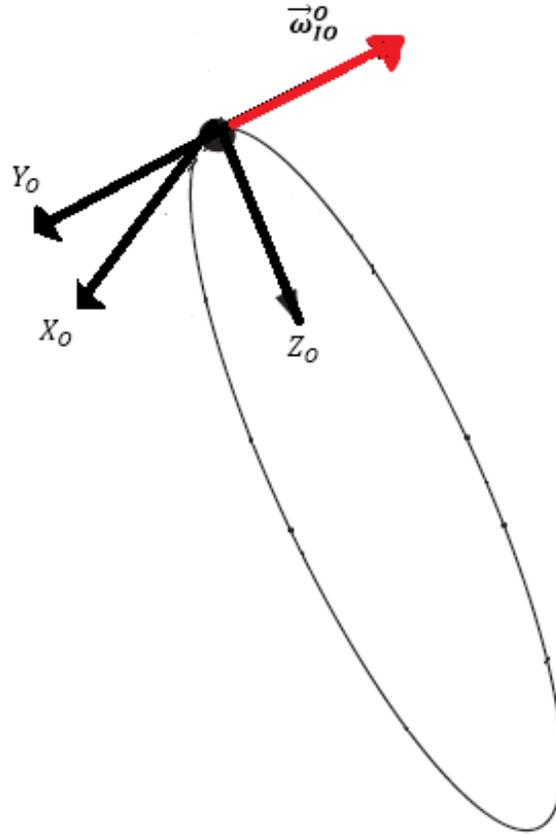


Figura 2-8. Sistema de referencia orbital y vector velocidad  $\vec{\omega}_{IO}^0$ .

Entonces,

$$\vec{\omega}_{IO}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente para obtener  $\vec{\omega}_{IB}^0$  se hace uso de la matriz de transformación introducida con la ecuación (2.22), de tal manera pues que,

$$\vec{\omega}_{IB}^0 = [C]_{OB} \vec{\omega}_{IO}^0 \quad (2.61)$$

Donde,

$$[C]_{OB} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Por lo que,

$$\vec{\omega}_{OB}^{Sat} = \vec{\omega}_{IB}^{Sat} - [C]_{OB} \vec{\omega}_{IO}^0 \quad (2.63)$$

Simplificando,

$$\vec{\omega}_{OB}^{Sat} = \vec{\omega}_{IB}^{Sat} + n [C_{1:3,2}]_{OB} \quad (2.63)$$

Donde,

$[C_{1:3,2}]_{OB}$  es el vector columna formado por la segunda columna de la matriz  $[C]_{OB}$ .

Con esto el modelo matemático que describe la cinemática del satélite ha sido obtenido.

### 3.3.4 Modelo matemático del sistema

El modelo matemático que describe la dinámica y la cinemática del satélite han sido obtenidos en las secciones previas. Con lo que el modelo matemático del movimiento rotacional está compuesto por las ecuaciones siguientes:

$$\tau_{IBx}^{Sat} = I_{xx} \dot{\omega}_{IBx}^{Sat} + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} + I_r \dot{\omega}_{BB}^{Rx} + I_r (\omega_{BB}^{Rz} \omega_{IBy}^{Sat} - \omega_{BB}^{Ry} \omega_{IBz}^{Sat}) \quad (2.64)$$

$$\tau_{IBy}^{Sat} = I_{yy} \dot{\omega}_{IBy}^{Sat} + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_{IBx}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} + I_r \dot{\omega}_{BB}^{Ry} + I_r (\omega_{BB}^{Rx} \omega_{IBz}^{Sat} - \omega_{BB}^{Rz} \omega_{IBx}^{Sat}) \quad (2.65)$$

$$\tau_{IBz}^{Sat} = I_{zz} \dot{\omega}_{IBz}^{Sat} + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_{IBx}^{Sat} \omega_{IBy}^{Sat} + I_r \dot{\omega}_{BB}^{Rz} + I_r (\omega_{BB}^{Ry} \omega_{IBx}^{Sat} - \omega_{BB}^{Rx} \omega_{IBy}^{Sat}) \quad (2.66)$$

$$\dot{q}_O^B = \frac{1}{2} \Omega(\omega_{OB}^{Sat}) q_O^B \quad (2.67)$$

Las primeras tres ecuaciones describen a la dinámica y la última la cinemática.

## Referencias

- Bedford, A., & Fowler, W. (2000). *Dinámica*. Addison Wesley Longman de México.
- Chaturvedi, N. A., Sanyal, A. K., & N., M. H. (2011). *Rigid-Body Attitude Control: Using rotation matrices for continuous singularity-free control laws*. Michigan: IEEE CONTROL SYSTEMS MAGAZINE. doi:10.1109/MCS.2011.940459
- Chobotov, V. A. (2008). *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*. Malabar, Florida, USA: Krieger Publishing Company.
- Curtis, H. D. (2012). *Orbital Mechanics for Engineering Students* (Third Edition ed.). ELSEVIER.
- Dam, E. B., Martin, K., & Martin, L. (1998). *Quaternions, Interpolation and Animation*. University of Copenhagen, Department of Computer Science. Universitetsparken 1.
- Diebel, J. (2006). *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions and Rotation Vectors*. Stanford, California: Stanford University.
- Grofeckatthofer, K., & Yoon, Z. (2012). *Introduction into quaternions for spacecraft attitude representation*. Technical University fo Berlin, Department of Astronautics and Aeronautics. Berlin: Technical University of Berlin.
- Han, C., Jian, G., & Alexandre, P. (2014). Nonlinear H based underactuated attitude control for small satellites with two reaction wheels. *Acta Astronautica*, 159-172.
- Hilstad, M. O. (2002, June). A Muti-Vehicle Testbed and Interface Framework for the Development and Verification of Separated Spacecraft Control Algorithms. *Master Thesis*. Cambrigde, Massachusetts, USA: MIT.
- Hughes, P. C. (2004). *Spacecraft Attitude Dynamics*. Dover Publications.
- Maini, A. K., & Agrawal, V. (2011). *Satellite Technology: Principles and Applications*. Noida, India: Wiley.
- Martin, R. V. (2008). Satellite remote sensing of surface air quality. *Atmosferic Environment*, 42, 7823-7843. doi:10.1016/j.atmosenv.2008.07.018
- Wise, E., & Miller, D. (2013, May). Design, Analysis, and Testing of Precision Guidance, Navigation, and Control System for a Dual-Spinning Cubesat. Cambrigde, Massachusetts, United States of America: MIT.

### III. CONTROL DE LA ORIENTACIÓN: Diseño del controlador.

El movimiento de un satélite que orbita un cuerpo celeste es un movimiento de 6 DOF, ya que puede desplazarse en cualquier dirección de los ejes de un sistema de referencia ortogonal y también puede rotar libremente alrededor de ellos. Por ello, para controlar el movimiento del satélite se tendría que llevar ejercer tanto control en la posición lineal como en la angular, de tal manera que dos controladores al menos serían necesarios, o bien, uno que controle estas dos variables.

En (Curtis, 2012) se afirma que la cantidad de movimiento angular absoluta calculada alrededor del centro de masa depende únicamente de la velocidad angular absoluta del cuerpo y no de la velocidad lineal de cualquier punto del cuerpo debido al movimiento traslacional en la órbita, por lo que estos dos movimientos pueden tratarse de manera independiente. Debido a esto, se considera que el satélite mantiene siempre su posición en la órbita, por tanto, sólo se diseña un controlador de posición angular para alcanzar y/o mantener la orientación deseada.

En este capítulo se presenta la teoría asociada a la ley de control que se utiliza, así mismo se describe el proceso para definir los valores de las ganancias adecuadas para conseguir los objetivos de control. Cabe mencionar que se considera la etapa en la que el satélite ya ha disminuido la velocidad angular que adquiere al ser expulsado del vehículo espacial que lo puso en órbita.

#### 3.1 Teoría de control

Han sido diseñadas naves espaciales para cumplir diferentes tipos de misiones a través del tiempo. En muchas de ellas el ADCS es de suma importancia, por lo que el problema de control de orientación ha sido atacado desde diferentes enfoques; por ejemplo en actuadores se usan ruedas de reacción, bobinas magnéticas, propulsores, etc. Se han diseñado leyes de control discretas o continuas, así mismo también se han presentado leyes de control para disminuir la velocidad angular del satélite, el control de apuntamiento y estabilización.

No hay una ley de control única, ya que depende de la misión y del ingeniero de control elegir la más adecuada para la misión. Una de las más utilizadas es la que fue propuesta por Bong Wie en 1985 (Wie & Barba, Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers, 1985), mejorada en 1989 (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989) y ampliada en 2002 (Wie B. , Rapid Multitarget Acquisition and Pointing Control of Agile Spacecraft, 2002). Ejemplos del uso de esta ley en naves espaciales que se encuentran en órbita se presentan en (Ovchinnikov, et al., 2014) y (Nolet & Miller, 2007), así mismo ha sido utilizado como referencia para comparar nuevas leyes de control como en (Kim, Lee, & D). Una versión mejorada de esta ley es presentada en (Pong & Miller, 2014).

En este trabajo se hace uso de la ley de control presentada en (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989) ya que es una ley simple y muy adecuada para su implementación porque no requiere mucho procesamiento computacional al estar basado en cuaterniones (Quadrino, Miller, & Cahoy, 2014). Si bien este trabajo no presenta la implementación de esta ley, al enmarcarse en el desarrollo de un proyecto y bajo los planes de un grupo de investigación, se tiene muy claro que la siguiente etapa será abordar el problema de implementación.

Adicionalmente, este trabajo pretende ser una especie de trabajo introductorio para resolver los problemas de control de orientación de satélites en México, por lo que para la selección de la ya mencionada ley de control se ha seguido la premisa de iniciar con lo simple, y con herencia de vuelo

en misiones similares. Además, por el momento solo se pretende resolver el control de orientación, sin tocar temas de robustez, tolerancia a fallas y/o optimización.

### 3.1.1 Ley de control basado en el cuaternion error (Quaternion Feedback Regulator)

La ley de control que se utiliza en este proyecto de investigación es el que es propuesto en la referencia (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989), compuesto por tres términos: “un término no lineal que contrarresta el “gyroscopic coupling torque”, realimentación negativa de la velocidad angular del satélite y realimentación negativa del cuaternion error”<sup>1</sup>.

$$\vec{u} = -\Omega J \vec{\omega}_{IB}^{Sat} - D \vec{\omega}_{OB}^{Sat} - K \mathbf{q}_{Oerror}^B \quad (3.1)$$

Donde,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{IBz}^{Sat} & \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} & 0 & -\omega_{IBx}^{Sat} \\ -\omega_{IBy}^{Sat} & \omega_{IBx}^{Sat} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$\omega_{IBx}^{Sat}$ ,  $\omega_{IBy}^{Sat}$  y  $\omega_{IBz}^{Sat}$ , son las componentes de la velocidad angular del satélite con respecto al sistema de referencia inercial  $R_I$  expresados en el sistema  $R_B$ .

$J$  es la matriz de momentos de inercia del satélite.

$\vec{\omega}_{OB}^{Sat}$  es la la velocidad angular del satélite con respecto al sistema de referencia orbital  $R_O$  expresado en el sistema  $R_B$ .

$\mathbf{q}_{Oerror}^B$  es el vector cuaternion error que se obtiene de la diferencia de la orientación deseada menos la actual.

$D$  y  $K$  son matrices de ganancias constantes de 3x3 a determinar.

El primer término de esta ley descrita por la ecuación (3.1) y conocido como “the gyroscopic coupling torque” se debe a que la cantidad de movimiento angular del satélite está referenciado a un sistema no fijo, por lo que se ve afectado por la velocidad angular de dicho sistema, y aparece en el lado derecho como el segundo término en la ecuación (2.45) que describe el movimiento rotacional del satélite.

### 3.1.2 Estabilidad en lazo cerrado

En este trabajo no se llevó a cabo el análisis de estabilidad en lazo cerrado del sistema al considerar la ley de control de la ecuación (3.1), ya que ya fue realizada y demostrada por Wie en (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989) por lo que únicamente se consultó el procedimiento realizado en la sección análisis de estabilidad de dicho documento. En dicha sección el método directo de Lyapunov para analizar la estabilidad de los sistemas no lineales fue utilizado por el autor de la ley de control para tal propósito y se demostró que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable para el punto

<sup>1</sup> Apartado “Quaternion Feedback Regulator” de la Sección II de (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989).

de equilibrio en el que los ejes del sistema de referencia no inercial coinciden con los ejes del sistema de referencia inercial (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989), es decir, cuando,

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (3.3)$$

Otro par de resultados importantes en esa demostración es que se concluye que las matrices  $D$  y  $K$  tienen la forma,

$$D = d \mathbf{I} \quad K = k \mathbf{I} \quad (3.4)$$

Donde,

$d$  y  $k$  son constantes positivas.

$\mathbf{I}$  es la matriz de momentos de inercia del satélite.

El procedimiento para definir a las constantes  $d$  y  $k$  se mostrará posteriormente en la sección 3.1.4.

### 3.1.3 El vector cuaternion error

En la ley de control se introduce el vector cuaternion error, que de manera general puede definirse como la diferencia de la orientación deseada menos la orientación actual, es decir,

$$\text{Cuaternion error} \equiv \text{Cuaternion deseado} - \text{Cuaternion actual}$$

Un cuaternion  $\mathbf{q}$  representa la orientación de un sistema de referencia no inercial con respecto a un sistema de referencia inercial. Por otro lado, esto mismo puede verse como que  $\mathbf{q}$  representa la rotación de un sistema inercial para alcanzar al sistema no inercial. Teniendo esto en mente y de acuerdo con (Hilstad, 2002) el resultado de la multiplicación de dos cuaterniones  $\mathbf{q}_A$  y  $\mathbf{q}_B$  representa la rotación de un cuerpo rígido primero a través de una rotación definida por el cuaternion  $\mathbf{q}_A$  y luego por una rotación a través de  $\mathbf{q}_B$ .

Con esto, se puede decir entonces que,

$$\mathbf{q}_{deseado} = \mathbf{q}_{actual} \mathbf{q}_{error} \quad (3.5)$$

Es decir, el cuaternion deseado es una combinación del cuaternion actual y el cuaternion error. Refiriendo al cuaternion error como lo que hace falta para que el cuaternion actual sea igual al deseado.

Al despejar a  $\mathbf{q}_{error}$ ,

$$\mathbf{q}_{error} = \mathbf{q}_{actual}^{-1} \mathbf{q}_{deseado} \quad (3.6)$$

Recordando las operaciones para los cuaterniones definidas en el capítulo II, en particular las ecuaciones (2.10) y (2.14), se tiene,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_A \mathbf{q}_B = [\mathbf{q}_B *] \mathbf{q} \quad (3.7)$$

Donde

$$[\mathbf{q}_B^*] = \begin{bmatrix} q_{b4} & q_{b3} & -q_{b2} & q_{b1} \\ -q_{b3} & q_{b4} & q_{b1} & q_{b2} \\ q_{b2} & -q_{b1} & q_{b4} & q_{b3} \\ -q_{b1} & -q_{b2} & -q_{b3} & q_{b4} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Entonces (3.6) puede reescribirse como,

$$\mathbf{q}_{error} = [\mathbf{q}_{deseado}^*] \mathbf{q}_{actual}^{-1} \quad (3.9)$$

Recordando que se usan cuaterniones unitarios,

$$\mathbf{q}_{error} = [\mathbf{q}_{deseado}^*] \bar{\mathbf{q}}_{actual} \quad (3.10)$$

Si se utiliza  $\mathbf{q}_{error} = \mathbf{q}_e$ ,  $\mathbf{q}_{deseado} = \mathbf{q}_d$  y  $\bar{\mathbf{q}}_{actual} = \bar{\mathbf{q}}_a$ . Finalmente

$$\mathbf{q}_e = [\mathbf{q}_d^*] \bar{\mathbf{q}}_a \quad (3.11)$$

Reescribiendo con la nomenclatura adecuada,

$$\mathbf{q}_{0e}^B = [\mathbf{q}_{0d}^B]^* \bar{\mathbf{q}}_{0a}^B \quad (3.12)$$

Donde,

$$[\mathbf{q}_{0d}^B]^* = \begin{bmatrix} q_{0d4}^B & q_{0d3}^B & -q_{0d2}^B & q_{0d1}^B \\ -q_{0d3}^B & q_{0d4}^B & q_{0d1}^B & q_{0d2}^B \\ q_{0d2}^B & -q_{0d1}^B & q_{0d4}^B & q_{0d3}^B \\ -q_{0d1}^B & -q_{0d2}^B & -q_{0d3}^B & q_{0d4}^B \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{0a}^B = \begin{bmatrix} -q_{0a1}^B \\ -q_{0a2}^B \\ -q_{0a3}^B \\ q_{0a4}^B \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Así entonces ha quedado definido el cuaternion error requerido en (3.1).

Es importante mencionar que  $\mathbf{q}_{0a}^B$  es obtenido al resolver las ecuaciones de la cinemática del satélite y  $\mathbf{q}_{0d}^B$  es establecido por la misión espacial como objetivo de control.

### 3.1.4 Método para el diseño de las ganancias de la ley de control

Ya mencionó que las matrices  $D$  y  $K$  deben ser de la forma,

$$D = d \mathbf{I} \quad K = k \mathbf{I} \quad (3.15)$$

Donde,

$d$  y  $k$  son constantes positivas.

$\mathbf{I}$  es la matriz de momentos de inercia del satélite.

Restando únicamente determinar los valores adecuado de las constantes  $d$  y  $k$  para cumplir con los objetivos de control.

En la ecuación de la ley control (3.1) se puede notar que las matrices  $D$  y  $K$  multiplican a los vectores  $\vec{\omega}_{OB}^{Sat}$  y  $q_{0e}^B$ , respectivamente. Para el primer producto no hay ningún problema ya que las dimensiones de ambos elementos permiten llevar a cabo la operación. Sin embargo, no es así en el segundo caso, ya que  $q_{0e}^B$  es un vector de  $4 \times 1$ , por lo que la operación, en principio, no se puede ejecutar. Debido a esto, la ley de control únicamente hace uso de los primeros tres elementos del cuaternion  $q_{0e}^B$ . La razón por la que la ley de control únicamente hace uso de tres elementos del cuaternion error será detallado a continuación.

Sea un cuaternion  $q$  representa la orientación de un cuerpo,

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \sin \frac{\theta}{2} \\ n_y \sin \frac{\theta}{2} \\ n_z \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Entonces la cinemática está dada por,

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega(\omega) q \quad (3.17)$$

Donde,

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Si se expande (3.17),

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z q_2 & -\omega_y q_3 & \omega_x q_4 \\ -\omega_z q_1 & 0 & \omega_x q_3 & \omega_y q_4 \\ \omega_y q_1 & -\omega_x q_2 & 0 & \omega_z q_4 \\ -\omega_x q_1 & -\omega_y q_2 & -\omega_z q_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

En forma escalar,

$$2 \dot{q}_1 = \omega_z q_2 - \omega_y q_3 + \omega_x q_4 \quad (3.20)$$

$$2 \dot{q}_2 = -\omega_z q_1 + \omega_x q_3 + \omega_y q_4 \quad (3.21)$$

$$2 \dot{q}_3 = \omega_y q_1 - \omega_x q_2 + \omega_z q_4 \quad (3.22)$$

$$2 \dot{q}_4 = -\omega_x q_1 - \omega_y q_2 - \omega_z q_3 \quad (3.23)$$

Además como se considera un cuaternion unitario,

$$1 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \quad (3.24)$$

En el caso de la orientación, es de interés que el sistema de referencia fijo al cuerpo coincida con el sistema de referencia inercial, y el cuaternion que representa esta orientación es,

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (3.25)$$

Si se considera al cuaternion  $\mathbf{q}$  como la condición inicial para resolver las ecuaciones cinemáticas y también cambios de orientación pequeños, entonces se tiene que (Wie & Barba, Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers, 1985),

$$2 \dot{q}_1 = \omega_x \quad (3.26)$$

$$2 \dot{q}_2 = \omega_y \quad (3.27)$$

$$2 \dot{q}_3 = \omega_z \quad (3.28)$$

Al integrar,

$$2 q_1 = \theta_x \quad (3.29)$$

$$2 q_2 = \theta_y \quad (3.30)$$

$$2 q_3 = \theta_z \quad (3.31)$$

Y de acuerdo con (Wie & Barba, Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers, 1985)  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  son la desviación angular de los ejes (x-y-z) del sistema fijo al cuerpo con respecto al sistema inercial (X-Y-Z). Por lo que la ley de control únicamente hace uso de los primeros tres elementos del cuaternion  $\mathbf{q}_{0e}^B$ .

Hasta este momento se puede abordar la manera de seleccionar las constantes para definir las matrices de ganancias  $D$  y  $K$ . En (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989) se establece que la ecuación de la dinámica de un satélite con una entrada de control como el de la ecuación (3.1) puede aproximarse con la ecuación (3.32) si se considera que la velocidad angular es pequeña, entonces,

$$(\ddot{\theta} + d \dot{\theta} + k \sin \theta/2) \mathbf{I} \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.32)$$

Donde,

$\theta$  es el ángulo de Euler.

$\hat{\mathbf{n}}$  es el vector a lo largo del eje de Euler.

$\mathbf{I}$  es la matriz de momentos de inercia del satélite.

Si se considera el producto  $\mathbf{I} \hat{\mathbf{n}} \neq 0$ , la ecuación (3.32) se reduce a,

$$\ddot{\theta} + d \dot{\theta} + k \sin \theta/2 = 0 \quad (3.33)$$

Ahora se recurre a una nueva aproximación al considerar  $\sin \theta/2 \approx \theta/2$  por lo que se tiene (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989),

$$\ddot{\theta} + d \dot{\theta} + k (\theta/2) = 0 \quad (3.34)$$

La ecuación (3.31) tiene la forma de una ecuación de segundo orden si se establece que  $d$  y  $k$  deben cumplir con,

$$d = 2 \zeta \omega_n \quad (3.35)$$

$$k/2 = \omega_n^2 \quad (3.36)$$

Donde,

$\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema.

$\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento.

Debido a que se consideró  $\sin \theta/2 \approx \theta/2$ , entonces en (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989), se recomienda usar la siguiente relación para el tiempo de establecimiento del sistema,

$$t_s = 8/(\zeta \omega_n) \quad (3.37)$$

Habiendo realizado una breve descripción sobre la teoría de control utilizado en este trabajo, ahora se está en condiciones de llevar a cabo el diseño del controlador para el caso de estudio. El autor recomienda al lector la consulta de (Wie & Barba, Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers, 1985) y (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989) en caso de requerir una mayor profundización en la ley de control de orientación utilizada en este trabajo.

### 3.2 Diseño del controlador

En el diseño de controladores se requieren dos elementos importantes: el modelo matemático del sistema o planta a controlar y la teoría de control de la que se hará uso. En la primera sección de este capítulo se ha presentado la teoría de control y en el capítulo previo se obtuvo el modelo matemático, por lo que ahora estamos en condiciones de iniciar el diseño del controlador para los modos de control que se abordan en este trabajo.

#### 3.2.1 Apuntamiento de Nadir

El apuntamiento de Nadir desde el punto de vista de la orientación se logra cuando los ejes del sistema de referencia fijo al cuerpo del satélite  $R_B$  coinciden con los ejes del sistema de referencia orbital  $R_O$ . El cuaternion que describe esta orientación es,

$$q_{O}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

De tal manera que el cuaternion descrito por la ecuación (3.38) es el cuaternion deseado de la ecuación (3.12). Así entonces, en el primer modo de control, de principal interés en este trabajo, el objetivo es llevar al satélite de una orientación inicial arbitraria a la posición en la que los sistemas  $R_B$  y  $R_O$  coinciden.

### 3.2.2 Apuntamiento inercial

La ley de control que se utiliza en este trabajo se puede usar para mantener y/o alcanzar cualquier orientación. En esa situación el cuaternion deseado es definido por la misión espacial a partir de la determinación del cuerpo celeste a observar. Esto no es una tarea trivial, puesto que se debe llevar a cabo un proceso de modelación matemático para calcular dicho cuaternion, el cual al final será,

$$q_{0d}^B = \begin{bmatrix} q_{0d1}^B \\ q_{0d2}^B \\ q_{0d3}^B \\ q_{0d4}^B \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

En este trabajo no se observará a un cuerpo celeste en particular y únicamente se elegirán cuaterniones objetivos al azar con el propósito de probar el funcionamiento de la ley de control basado en el cuaternion error.

### 3.2.3 Requerimientos de control

En el diseño de controladores se establecen objetivos de control que luego permitirán evaluar el desempeño del controlador bajo ciertas condiciones. Estos objetivos suelen medirse utilizando varios parámetros como el tiempo de establecimiento, porcentaje de sobrepaso, magnitud de la señal de control, porcentaje de error, entre otros.

En el grupo de investigación espacial de la UNAM se encuentra en desarrollo una cámara de percepción remota satelital, que se pondrá en órbita y cuenta con varios requerimientos de control. Esto es, una exactitud de apuntamiento de  $\pm 0.1^\circ$  y se usará como requerimiento principal para establecer el objetivo de control. Adicionalmente se establecerán un tiempo deseado de establecimiento del sistema y una magnitud máxima de la señal de control basándose en los actuadores comerciales disponibles. Estos requerimientos de control se resumen en la Tabla 3-1.

**Tabla 3-1. Requerimientos de control.**

<b>Requerimiento</b>	<b>Valor deseado</b>
Exactitud en la orientación	$\pm 0.1^\circ$
Tiempo de establecimiento	100 s
Máxima velocidad angular de cada rueda inercial	5000 rpm
Máximo torque de cada rueda inercial	0.011 N.m

### 3.2.4 Ganancias

Los elementos  $d$  y  $k$  de las matrices de ganancias deben definirse a partir de dos parámetros: la frecuencia natural del sistema y el coeficiente de amortiguamiento. Posteriormente se requiere una

matriz de momentos de inercia del satélite para definir los elementos que conforman a las matrices  $D$  y  $K$  de la ley de control. En nuestro caso haremos uso de una matriz de inercia diagonal ya que sólo se consideran momentos principales de inercia.

El principal interés de este trabajo son las misiones de percepción remota en micro-satélites, por lo que se toman datos de satélites de otras misiones espaciales similares para poder diseñar la ley de control. Este trabajo toma prestada la matriz de momentos de inercia del micro-satélite Chibis-M (Ovchinnikov & Ivanov, 2014), siendo  $I_{xx} = 1.03$ ,  $I_{yy} = 1.54$  y  $I_{zz} = 1.82$ .

Por otra parte, se establece que  $\zeta = 1$  y utilizando un tiempo de establecimiento de 100 segundos se calcula la frecuencia natural del sistema,

$$\omega_n = 8/(1)(100) = 0.08 \quad (3.40)$$

Con estos valores se procede a calcular las constantes  $d$  y  $k$ ,

$$d = 2 \zeta \omega_n = 2 (1) (0.08) = 0.16 \quad (3.41)$$

$$k = 2 * \omega_n^2 = 2 (0.08)^2 = 0.0128 \quad (3.42)$$

Luego entonces,

$$D = d \mathbf{I} = \begin{bmatrix} (0.16) (1.03) & 0 & 0 \\ 0 & (0.16) (1.54) & 0 \\ 0 & 0 & (0.16) (1.82) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1648 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2464 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2912 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$K = k \mathbf{I} = \begin{bmatrix} (0.0128) (1.03) & 0 & 0 \\ 0 & (0.0128) (1.54) & 0 \\ 0 & 0 & (0.0128) (1.82) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0131 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0197 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0232 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

### 3.2.5 Ley de control

La ley de control se puede escribir en su forma extendida una vez que se han definido todos sus términos como,

$$\vec{u} = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{IBz}^{Sat} & \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} & 0 & -\omega_{IBx}^{Sat} \\ -\omega_{IBy}^{Sat} & \omega_{IBx}^{Sat} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.03 & 0 & 0 \\ 0 & 1.54 & 0 \\ 0 & 0 & 1.82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{IBx}^{Sat} \\ \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1648 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2464 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2912 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{OBx}^{Sat} \\ \omega_{OBy}^{Sat} \\ \omega_{OBz}^{Sat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0131 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0197 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0232 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{Oe1}^B \\ q_{Oe2}^B \\ q_{Oe3}^B \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Desarrollando,

$$\vec{u} = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{IBz}^{Sat} & \omega_{IBy}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} & 0 & -\omega_{IBx}^{Sat} \\ -\omega_{IBy}^{Sat} & \omega_{IBx}^{Sat} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1.03)\omega_{IBx}^{Sat} \\ (1.54)\omega_{IBy}^{Sat} \\ (1.82)\omega_{IBz}^{Sat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0.1648)\omega_{OBx}^{Sat} \\ (0.2464)\omega_{OBy}^{Sat} \\ (0.2912)\omega_{OBz}^{Sat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0.0131)q_{Oe1}^B \\ (0.0197)q_{Oe2}^B \\ (0.0232)q_{Oe3}^B \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\vec{u} = - \begin{bmatrix} -\omega_{IBz}^{Sat} (1.54)\omega_{IBy}^{Sat} + \omega_{IBy}^{Sat} (1.82)\omega_{IBz}^{Sat} \\ \omega_{IBz}^{Sat} (1.03)\omega_{IBx}^{Sat} - \omega_{IBx}^{Sat} (1.82)\omega_{IBz}^{Sat} \\ -\omega_{IBy}^{Sat} (1.03)\omega_{IBx}^{Sat} + \omega_{IBx}^{Sat} (1.54)\omega_{IBy}^{Sat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0.1648)\omega_{OBx}^{Sat} \\ (0.2464)\omega_{OBy}^{Sat} \\ (0.2912)\omega_{OBz}^{Sat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0.0131)q_{Oe1}^B \\ (0.0197)q_{Oe2}^B \\ (0.0232)q_{Oe3}^B \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\vec{u} = - \begin{bmatrix} 0.28 \omega_{IBz}^{Sat} \omega_{IBy}^{Sat} \\ -0.79 \omega_{IBz}^{Sat} \omega_{IBx}^{Sat} \\ 0.51 \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBx}^{Sat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0.1648)\omega_{OBx}^{Sat} \\ (0.2464)\omega_{OBy}^{Sat} \\ (0.2912)\omega_{OBz}^{Sat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0.0131)q_{Oe1}^B \\ (0.0197)q_{Oe2}^B \\ (0.0232)q_{Oe3}^B \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\vec{u} = - \begin{bmatrix} 0.28 \omega_{IBz}^{Sat} \omega_{IBy}^{Sat} + 0.1648\omega_{OBx}^{Sat} + 0.0131q_{Oe1}^B \\ -0.79\omega_{IBz}^{Sat} \omega_{IBx}^{Sat} + 0.2464\omega_{OBy}^{Sat} + 0.0197q_{Oe2}^B \\ 0.51 \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBx}^{Sat} + 0.2912\omega_{OBz}^{Sat} + 0.0232q_{Oe3}^B \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

En forma escalar,

$$u_x = -0.28 \omega_{IBz}^{Sat} \omega_{IBy}^{Sat} - 0.1648\omega_{OBx}^{Sat} - 0.0131q_{Oe1}^B \quad (3.50)$$

$$u_y = 0.79\omega_{IBz}^{Sat} \omega_{IBx}^{Sat} - 0.2464 \omega_{OBy}^{Sat} - 0.0197 q_{Oe2}^B \quad (3.51)$$

$$u_z = -0.51 \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBx}^{Sat} - 0.2912\omega_{OBz}^{Sat} - 0.0232q_{Oe3}^B \quad (3.52)$$

$u_x$ ,  $u_y$  y  $u_z$ , son los pares que se deben aplicar alrededor en cada de uno de los ejes principales del satélite para alcanzar la orientación deseada.

La relación entre las señales de control y el par de las ruedas de reacción es como sigue (Kim, Lee, & D),

$$u_x = -I_r \omega_{BB}^{\dot{R}x} \quad (3.53)$$

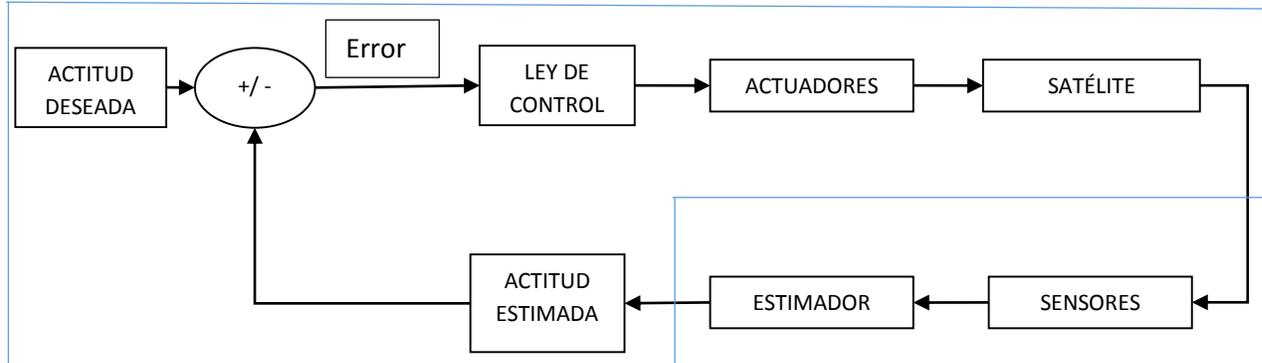
$$u_y = -I_r \omega_{BB}^{\dot{R}y} \quad (3.54)$$

$$u_z = -I_r \omega_{BB}^{\dot{R}z} \quad (3.55)$$

Las relaciones de arriba deben tenerse muy presentes a la hora de simular, ya que de lo contrario la ley de control no cumpliría con los objetivos.

### 3.2.6 Esquema de control

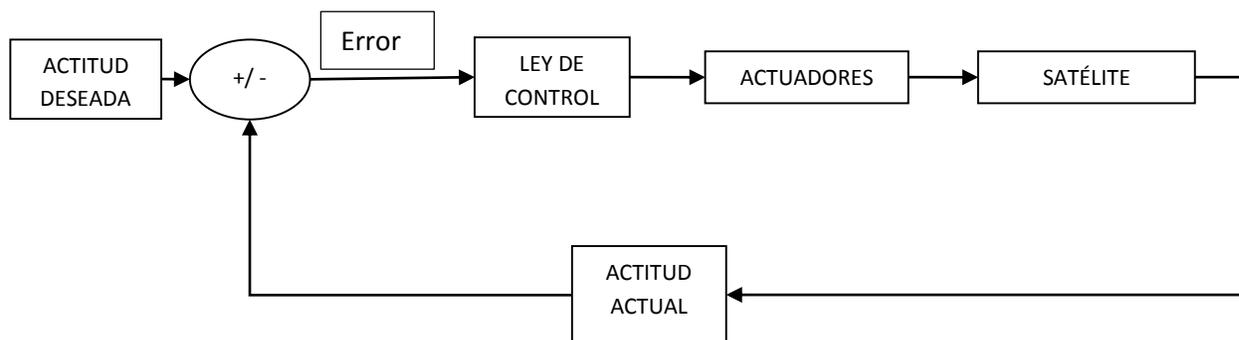
Antes de simular el comportamiento del sistema con el controlador diseñado se generará el esquema de control de orientación, de tal manera que no esté atado a un 'software' en particular. Un esquema general de determinación y control de la orientación se presenta en la Figura 3-1.



**Figura 3-1. Esquema de determinación y control de orientación para un satélite.**

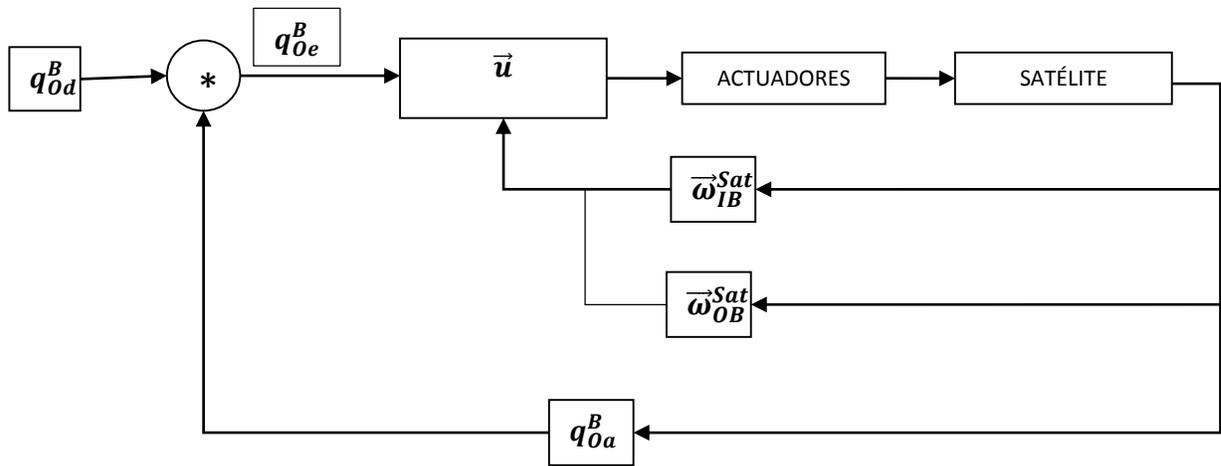
En este esquema, los sensores miden o detectan los cambios en la orientación, luego envían estos datos al estimador para determinar la orientación del satélite. El estimador lleva a cabo una serie de operaciones para estimar la orientación, ésta se compara con la orientación deseada y se calcula el error de la orientación. El siguiente paso es enviar este error a la ley de control para generar las señales de control necesarias, los cuales se solicitan a los actuadores y finalmente éstos últimos aplican los pares al satélite. El proceso se repite hasta que se alcanza la orientación deseada.

En este trabajo se estudia el problema de control, de tal manera que se asume que la estimación de la orientación ya está resuelta y por tanto la orientación estimada es conocida. Si se considera lo anterior, el esquema de control se reduce únicamente a los bloques encerrados en el bloque de color azul en la Figura 3-1. Reacomodando los bloques se tiene el esquema de la Figura 3-2.



**Figura 3-2. Esquema de control de orientación para un satélite.**

La Figura 3-2 contempla únicamente el esquema de control de orientación para un satélite, pero para tener más claro cómo funciona el esquema de control de este trabajo se utilizará la nomenclatura adecuada, generando el esquema de la Figura 3-3.



**Figura 3-3. Esquema de control de orientación para un satélite basado en cuaternion error.**

Con este esquema se simulará el comportamiento del sistema bajo el esquema de control diseñado.

## Referencias

- Curtis, H. D. (2012). *Orbital Mechanics for Engineering Students* (Third Edition ed.). ELSEVIER.
- Hilstad, M. O. (2002, June). A Multi-Vehicle Testbed and Interface Framework for the Development and Verification of Separated Spacecraft Control Algorithms. *Master Thesis*. Cambridge, Massachusetts, USA: MIT.
- Kim, B. J., Lee, H., & D, C. S. (n.d.). Three-axis reaction wheel attitude control system for Kitsat-3 microsatellite.
- Nolet, S., & Miller, D. W. (2007, June). Development of a Guidance, Navigation and Control Architecture and Validation Process Enabling Autonomous Docking to a Tumbling Satellite. Cambridge, Massachusetts, United States of America: MIT.
- Ovchinnikov, M. Y., S, I. D., Ivlev, N. A., Karpenko, S. O., Roldugin, D. S., & S, T. S. (2014). Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS. *Acta Astronautica*, *93*, 23-33.
- Ovchinnikov, M., & Ivanov, D. (2014). Approach to study satellite attitude determination algorithms. *Acta Astronautica*, *98*, 133-137.
- Pong, C. M., & Miller, D. W. (2014, June). High-Precision Pointing and Attitude Estimation and Control Algorithms for Hardware-Constrained Spacecraft. Cambridge, Massachusetts, USA: MIT.
- Quadrino, M. K., Miller, D., & Cahoy, K. (2014, June). Testing the Attitude Determination and Control of a Cubesat with Hardware-in-the-Loop. Cambridge, Massachusetts, USA: MIT.
- Wie, B. (2002). Rapid Multitarget Acquisition and Pointing Control of Agile Spacecraft. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, *25*, 96-104. doi:10.2514/2.4854
- Wie, B., & Barba, P. M. (1985). Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers. *Journal of Guidance, Navigation and Control*, *8*, 360-365.
- Wie, B., Weiss, H., & Arapostathist, A. (1989). Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations. *Journal of Guidance, Navigation and Control*, *12*, 375-380. doi:10.2514/320418

## IV. SIMULACIÓN

El avance de las herramientas computacionales ha permitido al ingeniero de la actualidad probar su solución antes de ponerla en práctica, ya que existen áreas de la ingeniería en la que las fallas no están permitidas o en caso de haberlas tienen un costo muy alto. La ingeniería de sistemas espaciales es una de estas áreas, ya que no existe manera de dar mantenimiento o reparar a una nave espacial una vez que se encuentra en órbita, por ello todos los subsistemas que la conforman deben tener un nivel de confiabilidad alto para que se garantice el correcto funcionamiento.

Una serie de pruebas se deben llevar a cabo antes de que un sistema espacial se pueda poner en órbita y, así mismo, existen varias etapas para llegar al producto final. En general, las simulaciones numéricas son muy utilizadas para probar el desempeño de una solución propuesta a cierto problema y, es por ello que se presenta en este capítulo la simulación numérica que evalúa el desempeño de la ley de control diseñada junto con las consideraciones y resultados obtenidos.

### 4.1 Diseño

#### 4.1.1 Algoritmo de control

Antes de llevar a cabo una simulación se establece claramente lo que se quiere probar, de tal manera que al final se tengan parámetros sólidos que permitan evaluar la solución propuesta. En este trabajo se ha diseñado una ley de control para llevar a cabo el control de orientación de un micro-satélite de percepción remota, asumiendo que se conoce la orientación actual del satélite, dejando para otra investigación el problema de la determinación de la orientación.

Sin necesidad del uso de un 'software' de tipo matemático en particular, se presentará un diagrama de bloques que explica de manera general el funcionamiento del algoritmo de control, el cual funciona como sigue:

- Establecer condiciones iniciales y datos de inicio como: altitud de la órbita, momentos de inercia del satélite y de las ruedas de reacción, velocidades angulares iniciales, orientación inicial, orientación deseada, ganancias de la ley de control.
- Haciendo uso de los datos y condiciones iniciales se resuelven las ecuaciones de la dinámica para determinar el vector  $\vec{\omega}_{IB}^{Sat}$ .
- Calcular la velocidad del satélite con respecto al sistema orbital.
- Utilizar  $\vec{\omega}_{OB}^{Sat}$  calculado en el punto anterior para conocer la orientación actual del satélite.
- Obtenido el cuaternion que describe la orientación actual, se procede a determinar el cuaternion error, necesario para determinar el par de control.
- La ley de control calcula los pares de control que se deben aplicar a cada uno de los ejes principales del satélite para alcanzar y/o mantener la orientación deseada.
- Determinar los valores de la velocidad a la que cada rueda debe girar para obtener el par de control de terminado por la ley de control.
- Finalmente estas velocidades se ingresan a la dinámica del satélite para generar el par de control necesario.
- Este ciclo se repite hasta que el tiempo de la simulación llega al tiempo máximo definido.

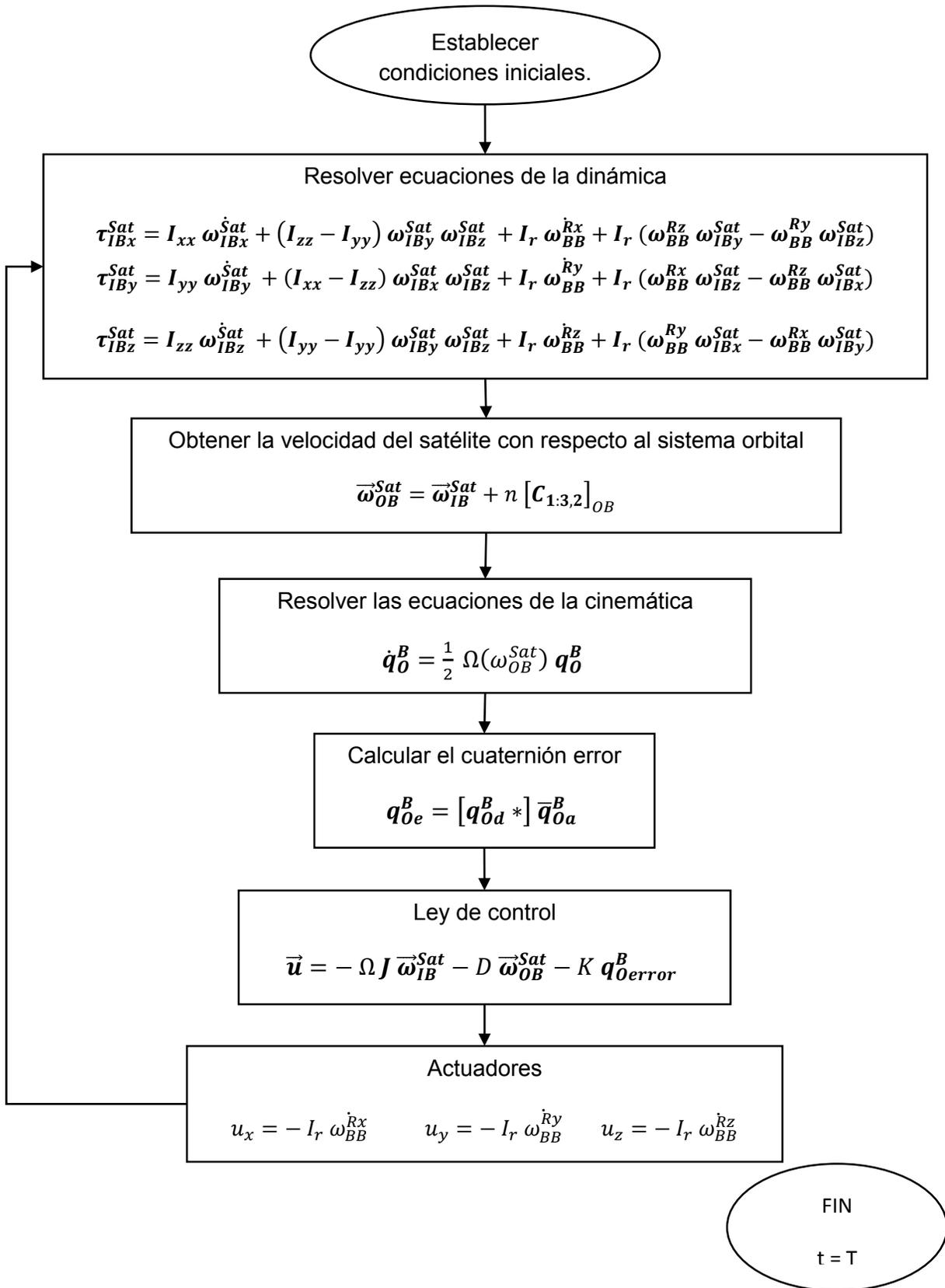


Figura 4-1. Algoritmo de control.

#### 4.1.2 Software y consideraciones

La simulación numérica del algoritmo de control y la evaluación de la ley de control se puede llevar en cualquier 'software' de tipo matemático. En este trabajo se hace uso de un software matemático especializado como herramienta para llevar a cabo la simulación numérica del desempeño del esquema de control de la orientación diseñado.

Las ecuaciones que modelan la dinámica del satélite son:

$$\tau_{IBx}^{Sat} = I_{xx} \dot{\omega}_{IBx}^{Sat} + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_{IBy}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} + I_r \omega_{BB}^{\dot{R}x} + I_r (\omega_{BB}^{Rz} \omega_{IBy}^{Sat} - \omega_{BB}^{Ry} \omega_{IBz}^{Sat}) \quad (4.1)$$

$$\tau_{IBy}^{Sat} = I_{yy} \dot{\omega}_{IBy}^{Sat} + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_{IBx}^{Sat} \omega_{IBz}^{Sat} + I_r \omega_{BB}^{\dot{R}y} + I_r (\omega_{BB}^{Rx} \omega_{IBz}^{Sat} - \omega_{BB}^{Rz} \omega_{IBx}^{Sat}) \quad (4.2)$$

$$\tau_{IBz}^{Sat} = I_{zz} \dot{\omega}_{IBz}^{Sat} + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_{IBx}^{Sat} \omega_{IBy}^{Sat} + I_r \omega_{BB}^{\dot{R}z} + I_r (\omega_{BB}^{Ry} \omega_{IBx}^{Sat} - \omega_{BB}^{Rx} \omega_{IBy}^{Sat}) \quad (4.3)$$

En las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) se puede notar que el término del lado izquierdo es el par externo que se aplica al satélite, esto incluye a los pares generados por el medio ambiente espacial únicamente, ya que para el caso de estudio, los pares de control son considerados pares internos y se incluyen en la parte derecha de las ecuaciones. Para poder simular el comportamiento de la ley de control se debe definir el par perturbador externo que habitualmente se compone de: par de gradiente gravitacional, par de arrastre atmosférico, par de presión solar y pares internos del satélite.

Los pares perturbadores son difíciles de determinar por lo que no existe un modelo matemático que modele su comportamiento a lo largo de la órbita. Debido a esto, en este trabajo únicamente se considera el par de gradiente gravitacional ya que es el único par que tiene un modelo bien definido de su comportamiento (Hughes, 2004), así entonces:

$$\vec{\tau}_{IB}^{Sat} = \vec{\tau}_{gg} = 3 n^2 [C_{1:3,3}]_{OB} \times I [C_{1:3,3}]_{OB} \quad (4.4)$$

Donde,

$n$  es la velocidad del satélite en órbita. Determinado con la ecuación (4.60).

$I$  matriz de momentos de inercia del satélite.

$[C_{1:3,3}]_{OB}$  es el vector columna formado por la tercera columna de la matriz  $[C]_{OB}$ .

Llevando a cabo el producto cruz se tiene,

$$\vec{\tau}_{IB}^{Sat} = \vec{\tau}_{gg} = 3 n^2 \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy}) C_{23} C_{33} \\ (I_{xx} - I_{zz}) C_{33} C_{13} \\ (I_{yy} - I_{xx}) C_{13} C_{23} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Donde,

$$[C_{1:3,3}]_{OB} = \begin{bmatrix} 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{23} \\ C_{33} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Con esto se tiene lo necesario para llevar a cabo la simulación del esquema de control.

En esta tesis se utiliza un software de tipo especializado para llevar a cabo la simulación del esquema de control. El método de Runge-Kutta es utilizado para resolver las ecuaciones numéricamente con un paso fijo de tiempo de 0.001 s, es decir, cada 1 milisegundo se ejecuta el ciclo de control. Este período es de suma importancia al implementar el algoritmo de control en un microcontrolador por lo que debe establecerse a conciencia cuando se llegue a dicha etapa.

## 4.2 Resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos con la simulación numérica.

Se realizaron dos tipos de pruebas:

### Prueba 1

- Apuntamiento de Nadir: esta prueba consiste en llevar al satélite de una orientación inicial arbitraria a la orientación en la que el sistema de referencia fijo al cuerpo coincide con el sistema de referencia orbital.

### Prueba 2

- Apuntamiento inercial: en este caso se estableció de manera arbitraria una orientación de inicio y se comandó una orientación deseada y el objetivo es analizar si la ley de control podía alcanzar dicha orientación comandada.

#### 4.2.1 Apuntamiento de Nadir

##### Prueba 1:

Consiste en el apuntamiento de Nadir, es decir, se da al satélite una orientación arbitraria de inicio y a partir de ahí se observa su comportamiento para alcanzar la orientación deseada, la cual es la coincidencia de los sistemas de referencia  $R_B$  y  $R_O$ .

Un número finito de experimentos se llevaron a cabo, en cada uno de estos sólo se modificó la orientación inicial. Los cambios son en la magnitud y en el sentido de los ángulos, con el objetivo de cubrir la mayor cantidad de combinaciones posibles, básicamente modificando los sentidos de los ángulos. Además, se considera el caso ideal en el que la velocidad angular del satélite es muy pequeña, podría decirse que prácticamente el satélite está quieto, lo que en el caso real indica que el proceso de “detumbling” ya ha concluido.

##### Experimento 1

En el experimento uno, todos los ángulos de inicio se tomaron positivos y los demás parámetros y condiciones iniciales se resumen en la Tabla 4-1. Un tiempo de simulación de 300 s fue establecido, ya que el tiempo de establecimiento del sistema propuesto al diseñar el controlador fue de 100 s,

por lo que 300 se considera un tiempo suficiente para conocer el desempeño del controlador. Para este propósito se han generado gráficas de evolución de la orientación, comportamiento de la velocidad angular del satélite con respecto a los sistemas de referencia orbital e inercial, evolución a través del tiempo de los pares de control generados por la ley de control y los que los actuadores entregaron y el comportamiento de las velocidades angulares de las ruedas inerciales.

**Tabla 4-1. Parámetros iniciales para la simulación numérica P1.1.**

Parámetro	Valor
Altitud de la órbita	600 km
Matriz de momentos de inercia	$\begin{bmatrix} 1.03 & 0 & 0 \\ 0 & 1.54 & 0 \\ 0 & 0 & 1.82 \end{bmatrix} \text{ kg m}^2$
Orientación inicial (Yaw, Pitch, Roll)	$(70, 40, 25)^\circ$
Orientación deseada (Yaw, Pitch, Roll)	$(0, 0, 0)^\circ$
Velocidad angular inicial del satélite	$\vec{\omega}_{IB}^{Sat} = [-0.8130 \quad -0.7032 \quad 0.1027]^T \times 10^{-3}$

Los resultados del Experimento 1 de la Prueba 1 se muestran en las Figuras 4-2, 4-3, 4-4 y 4-5. Primeramente se analiza el comportamiento de la orientación a través del tiempo (Figura 4-2), en la gráfica superior de dicha figura se observa que los tres ángulos (Yaw-Pitch-Roll) alcanzan el valor deseado y por tanto convergen al origen. También se puede notar que los tres ángulos llegan al estado estable un poco antes de los 100 s, lo cual es adecuado cuando se ha propuesto un tiempo de establecimiento del sistema de 100 s. En la parte del análisis del sistema relacionado con el coeficiente de amortiguamiento, se nota que las tres señales tienen un comportamiento críticamente amortiguado, tal como es de esperarse, ya que así se ha indicado al momento de diseñar el controlador.

En la gráfica inferior de la Figura 4-2 se hace un acercamiento en el eje de las ordenadas con el propósito de verificar la exactitud del apuntamiento, el cual como se puede recordar es de  $\pm 0.1^\circ$ . En este caso, se observa que el ángulo "Roll" es el primero en alcanzar el valor deseado e incluso lo hace antes del tiempo de establecimiento, alrededor de los 90 s. Dicho comportamiento, hasta cierto punto, es predecible, ya que su valor de inicio es el más cercano  $0^\circ$ . Por otra parte, los ángulos "Pitch" y "Yaw" prácticamente convergen al mismo tiempo al valor de referencia, siendo este tiempo muy cercano a los 150 s. Si bien, ambos ingresan al valor de exactitud requerido alrededor de los 110 s, al no tener un tiempo de establecimiento estricto, se puede decir que el controlador ha llevado a cabo su tarea con éxito en este primer experimento.

Otra de las variables de interés para el análisis del comportamiento del sistema bajo la ley de control diseñada es la velocidad angular del satélite con respecto a dos sistemas de referencia, a saber: sistema de referencia inercial y sistema de referencia orbital. Estas dos representaciones de la velocidad angular se presentan en las gráficas de la Figura 4-3.

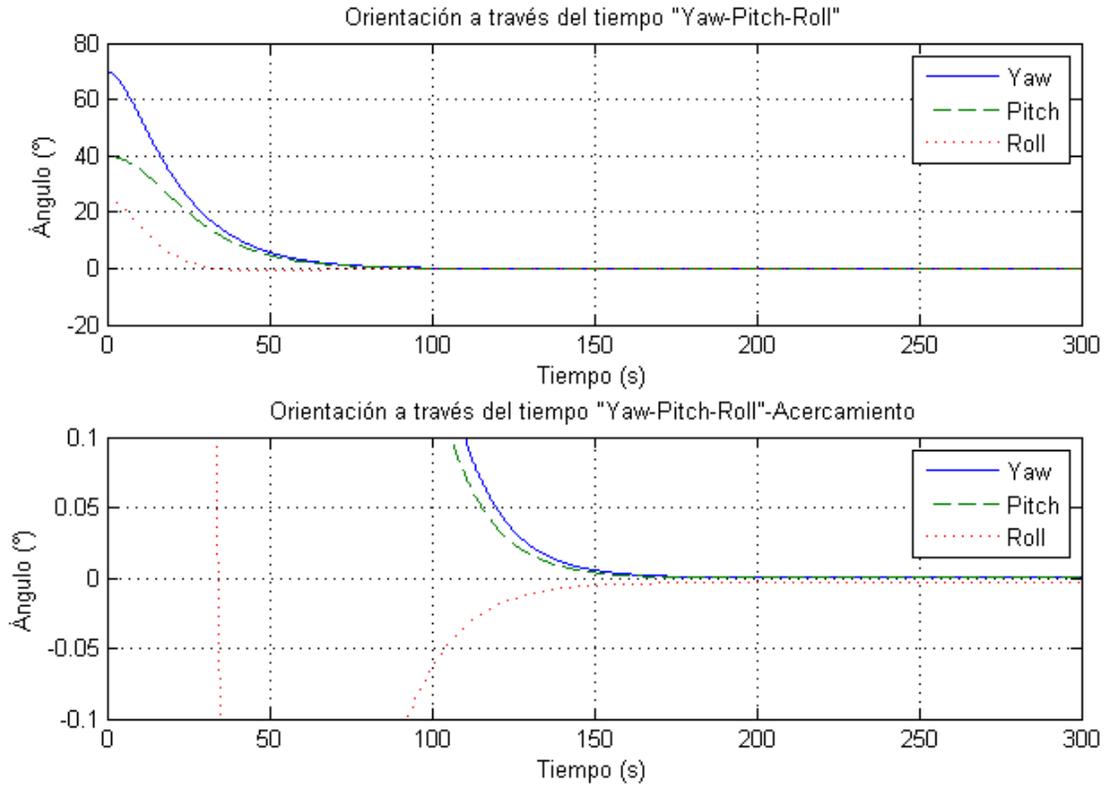


Figura 4-2. Evolución de la orientación P1.1.

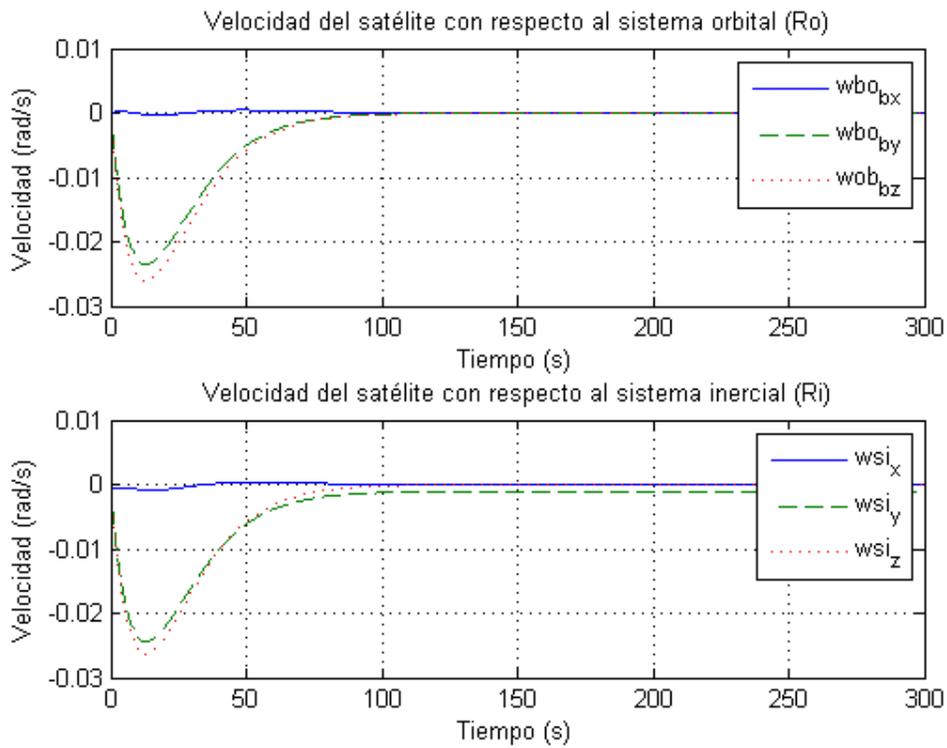
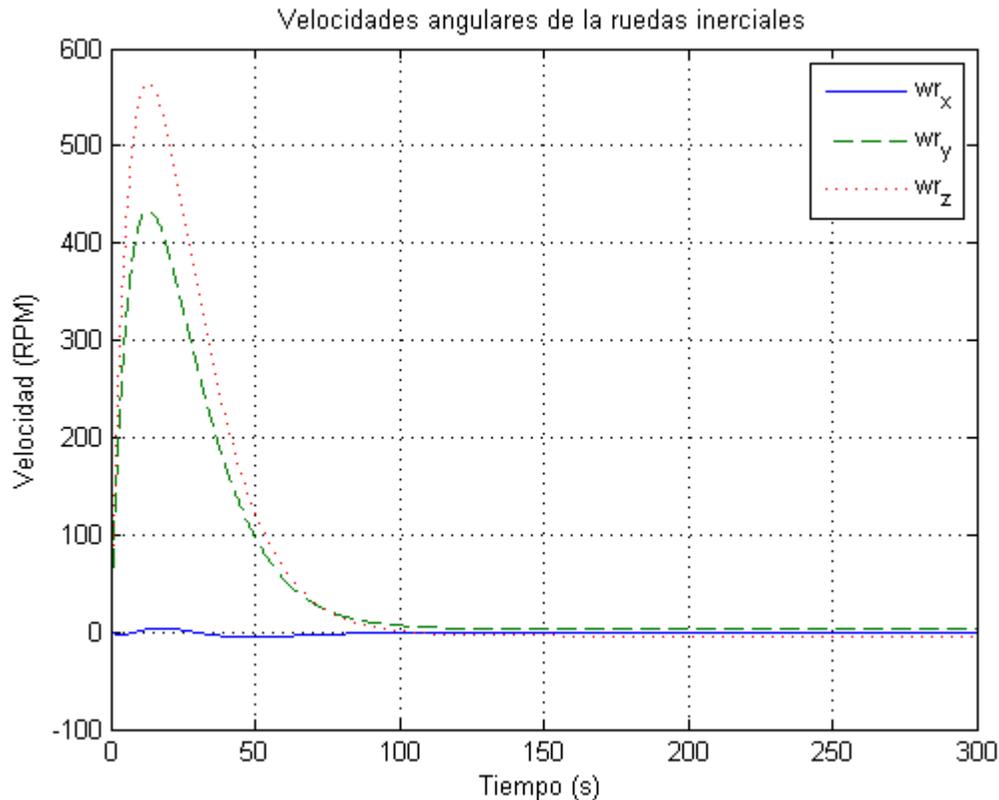


Figura 4-3. Velocidad del satélite respecto  $R_B$  y  $R_I$  P1.1.

En la gráfica superior de la Figura 4-3 se muestran las componentes de la velocidad angular del satélite con respecto al sistema orbital y, como es de esperarse, el valor final de las tres componentes es cero, ya que tras coincidir ambos sistemas y mantenerse en esa posición el resto el tiempo, es de natural que entre ellos no haya velocidad relativa o en otras palabras esta velocidad relativa es nula. Al estudiar un caso ideal en el que se considera una velocidad inicial muy pequeña (véase Tabla 4-1), las componentes no se alejan tanto del valor de inicio y esto es muy marcado en el caso de la componente relacionada al ángulo “Roll”, puesto que prácticamente se mantiene muy cerca del cero.

Por otro lado, la gráfica inferior de la Figura 4-3 presenta las componentes absolutas de la velocidad angular del satélite. En este caso, la componente en el eje  $Y_B$ , es no nulo y tiene un valor negativo, el cuál es igual a la velocidad a la que el satélite orbita la Tierra o a la razón de cambio del sistema de referencia orbital sobre su eje  $Y_O$ , recordando que el eje  $Z_O$  de este sistema apunta siempre al centro de la Tierra y el eje  $X_O$  es tangente a la órbita, por lo que para mantener estas relaciones, el sistema gira alrededor del  $Y_O$  a la misma velocidad a la que el satélite órbita la Tierra. Con esto se refuerza el hecho de que el controlador ha realizado su tarea de manera exitosa.

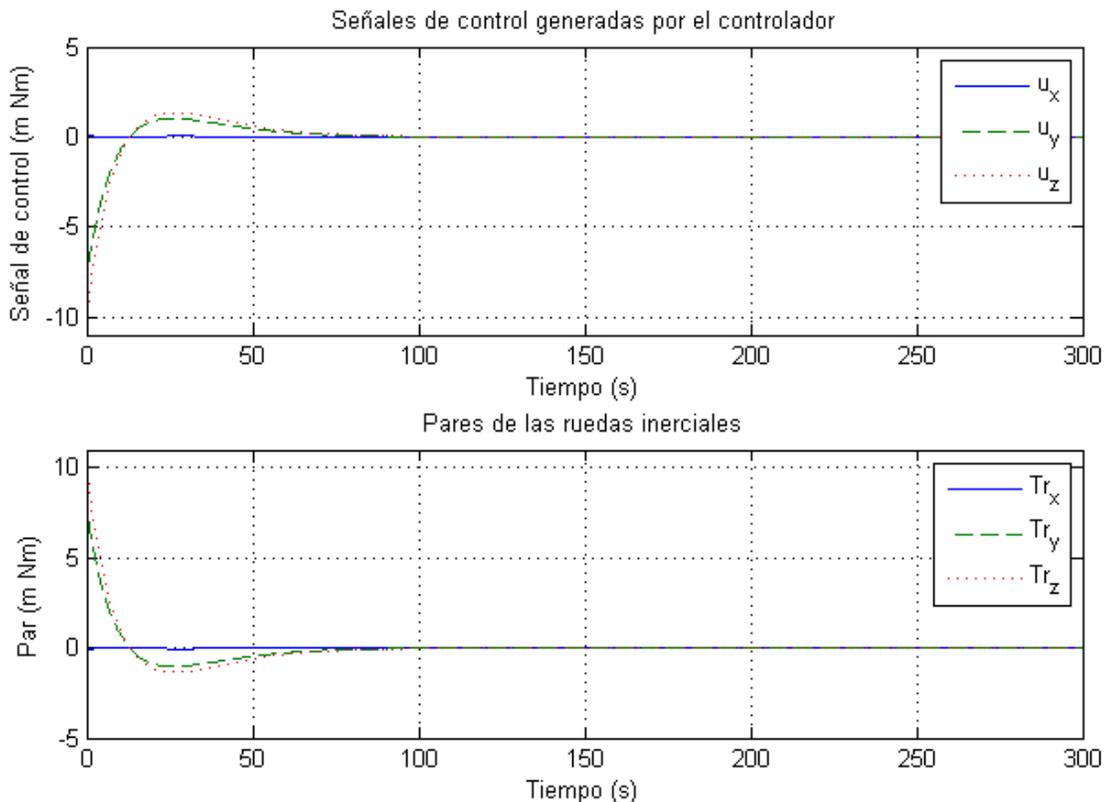


**Figura 4-4. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P1.1.**

Los actuadores considerados para generar los pares de control que se aplicarán al satélite son las ruedas de reacción, los cuales se basan en el principio de la conservación de momento angular, es decir, que el momento angular no se elimina y solo se transfiere del satélite a las ruedas y viceversa. Se sabe que la cantidad de movimiento angular se define como el producto de la inercia por la velocidad angular. Si se asume un momento de inercia de la rueda constante, entonces la única

variable que se puede modificar, es la velocidad angular. Teóricamente, esta velocidad puede tomar cualquier valor, sin embargo, en la práctica está limitado por la velocidad máxima que el motor puede proporcionar. Así, al ser la velocidad finita, el actuador también tiene un valor máximo de cantidad de movimiento angular máximo y es muy importante considerar esta restricción ya que si se supera este valor, es probable que la rueda no pueda absorber toda la cantidad de movimiento angular del satélite y por lo tanto no controlar el movimiento del mismo. Es por ello que al momento de llevar a cabo la simulación, se debe tomar en cuenta este hecho y limitar la velocidad angular que cada una de las ruedas puede proporcionar.

En la Figura 4-4 se muestran los valores de las velocidades angulares que cada una de las ruedas de reacción colocadas en cada eje principal del satélite alcanzan durante el estado estacionario del sistema son mostrados. La rueda que mayor velocidad angular alcanza, es la colocada en el eje  $Z_B$ , teniendo un pico de aproximadamente 560 RPM, el cual se encuentra muy por debajo del valor máximo que los actuadores, de acuerdo con datos del fabricante (véase apéndice A1), pueden proporcionar y que es de 5000 RPM. El comportamiento de la rueda colocada en el eje  $X_B$  tiene una relación muy fuerte con la velocidad angular absoluta del satélite en el mismo eje (véase Figura 4-3), puesto que al no presentar un cambio notorio en la velocidad absoluta en esa dirección, el actuador tampoco necesita girar a una velocidad considerable para absorber la cantidad de movimiento angular en dicha dirección.



**Figura 4-5. Evolución de los pares de control y de los actuadores P1.1.**

Finalmente, en la Figura 4-5 se presentan los pares de control generados, tanto por el controlador como por las ruedas inerciales. Es necesario aclarar por qué se hace esta distinción, ya que se podría pensar que ambos deben ser iguales.

Si se sabe que el par que genera un cuerpo en rotación es igual al producto de su inercia por su aceleración angular, entonces, al igual que en el caso de la velocidad, sabemos que ambas variables están limitadas físicamente por los datos del fabricante: un momento de inercia de la rueda constante y una aceleración angular máxima. Entonces, existe un par máximo que el actuador puede generar, el cual, nuevamente según datos proporcionados por el fabricante, es de  $11 \text{ m Nm}$ . Dentro del marco de este primer experimento, el par máximo generado por la ley de control no supera los  $10 \text{ m Nm}$  por lo que las gráficas mostradas en la figura, ya mencionada, son idénticas.

### Experimento 2

La orientación inicial del experimento 2 se compone de tres valores negativos:  $(-70, -10, -20)^\circ$ . El resto de los parámetros definidos en la Tabla 4-1 se mantienen constantes.

En el Experimento 2 el controlador nuevamente vuelve a llevar a cabo un proceso de control de orientación exitoso, puesto que desde el nuevo valor de inicio de la orientación se alcanza el valor deseado. En la gráfica superior de la figura 4-6 se observa que los tres ángulos de Euler convergen al origen antes del tiempo de establecimiento definido en el diseño del controlador. Sin embargo, en la gráfica inferior, al llevar a cabo un acercamiento para corroborar la exactitud en el apuntamiento se descubre que los ángulos "Roll" y "Pitch" ingresan al margen de tolerancia antes de los 100 s, pero no es así con el ángulo "Yaw", ya que este entra un poco después de los 110 s. Y todos los tres ángulos convergen al origen tras 150 s. Este tiempo es muy importante a la hora de programar las maniobras de medición relacionadas con la misión espacial, puesto que así es posible considerar este pequeño retraso para establecer el tiempo de inicio de la maniobra. Una de las cuestiones que llama la atención en este experimento es que uno de los ángulos ya no tiene un comportamiento totalmente críticamente amortiguado, ya que puede observarse en la gráfica inferior de la Figura 4-6 que cruza el eje cero y tras cierto tiempo regresa. Esto puede deberse a dos causas principales, a saber: la linealización realizada al cuaternión error y la restricción de par que se impone a los actuadores.

Con relación a la velocidad angular del satélite, véase Figura 4-7, los comentarios que pueden realizarse son mínimos, puesto que nuevamente, como es de esperarse, la velocidad angular con respecto al sistema de referencia orbital tiende a cero una vez que ambos sistemas están alineados y por otro lado, la velocidad absoluta presenta un componente no nulo y negativo alrededor del eje "Pitch". Como ya se comentó, esto se deba a que el sistema orbital rota alrededor de su eje  $Y_B$ .

Recordando que el sistema de control propuesto se basa en el intercambio de cantidad de movimiento angular, es fácil deducir que si queremos llevar dos puntos de inicio al mismo punto en el mismo periodo de tiempo, entonces el que esté más alejado solicitará una velocidad y aceleración mayores para cumplir con tal objetivo. Esto se ejemplifica de forma excelente con la gráfica de la Figura 4-8, puesto que ahí se puede observar que la velocidad angular de la rueda colocada sobre el eje "Yaw" tiene un valor de pico mucho más grande que el del eje "Roll". Considerando que en el "Yaw" se inicia en  $-70^\circ$ , en cambio en "Roll" se tiene un valor más cercano al deseado ( $-20^\circ$ ). A pesar de todo, el pico en la velocidad angular de la rueda inercial no alcanza el valor máximo de la misma que es de 5000 RPM.

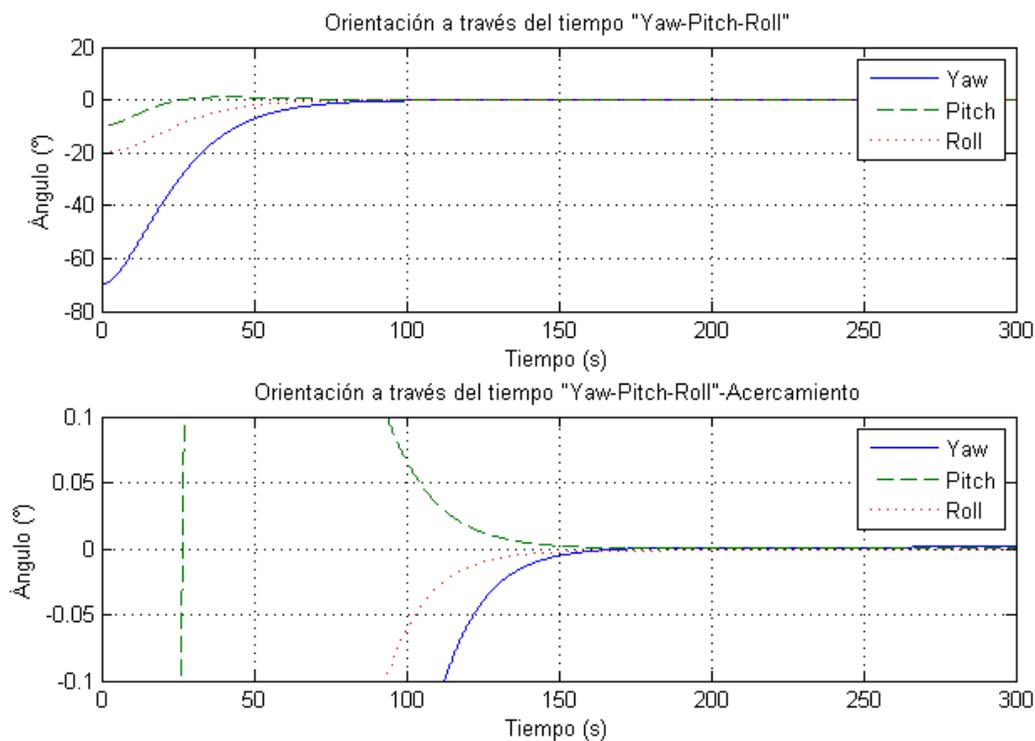


Figura 4-6. Evolución de la orientación P1.2.

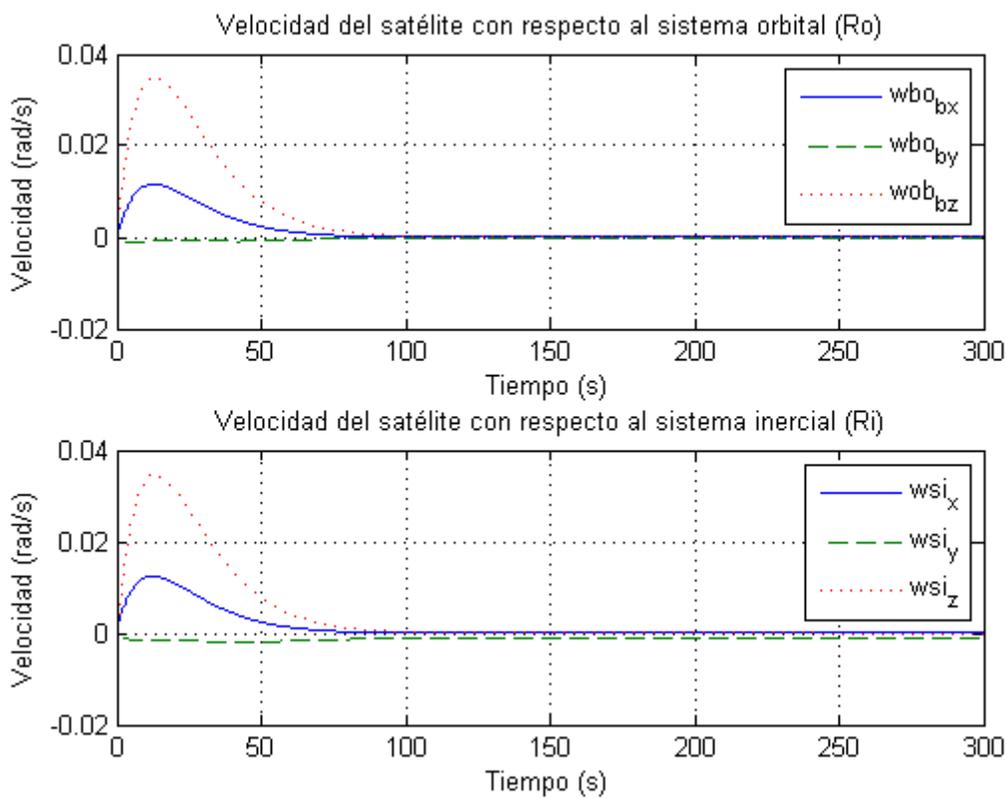
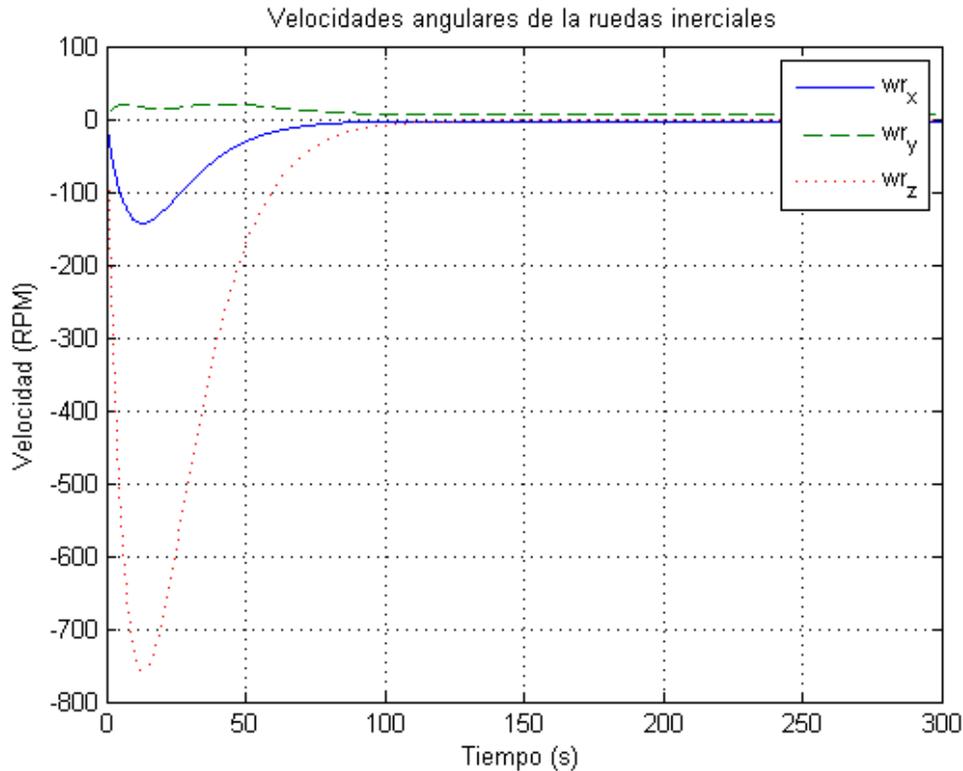


Figura 4-7. Velocidad del satélite respecto  $R_B$  y  $R_I$  P1.2.



**Figura 4-8. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P1.2.**

La última variable de interés por analizar es el par tanto de control como el que generan los actuadores. La gráfica de la izquierda de la Figura 4-9 muestra las señales de control que se determinan a partir de la ley de control y se observa de manera clara que una de esas señales (la componente en eje z) sobrepasa los  $11 \text{ mNm}$  que pueden generar cada una de las ruedas por separado. Aquí cobra importancia el hecho de haber establecido límites de saturación a las ruedas de inercia, y así, en la gráfica de la izquierda de la Fig. 5-9 al principio del proceso de control el par de control marcado con la línea de color rojo difiere con la del mismo color de la gráfica superior. Esto se debe a que en el esquema de control se estableció que si la señal de control obtenida por el controlador llegase a superar el par máximo que la rueda pueda proporcionar, entonces los actuadores solo proporcionarán su par máximo, y es por esta causa que en la gráfica inferior se observa un valor máximo inferior a los  $12 \text{ mNm}$ . Si bien en el proceso de control de orientación en general no se tiene una afectación para lograr el objetivo principal de control, alcanzar el valor deseado, sí se afecta el comportamiento del sistema, puesto que ya no es puramente un comportamiento críticamente amortiguado.

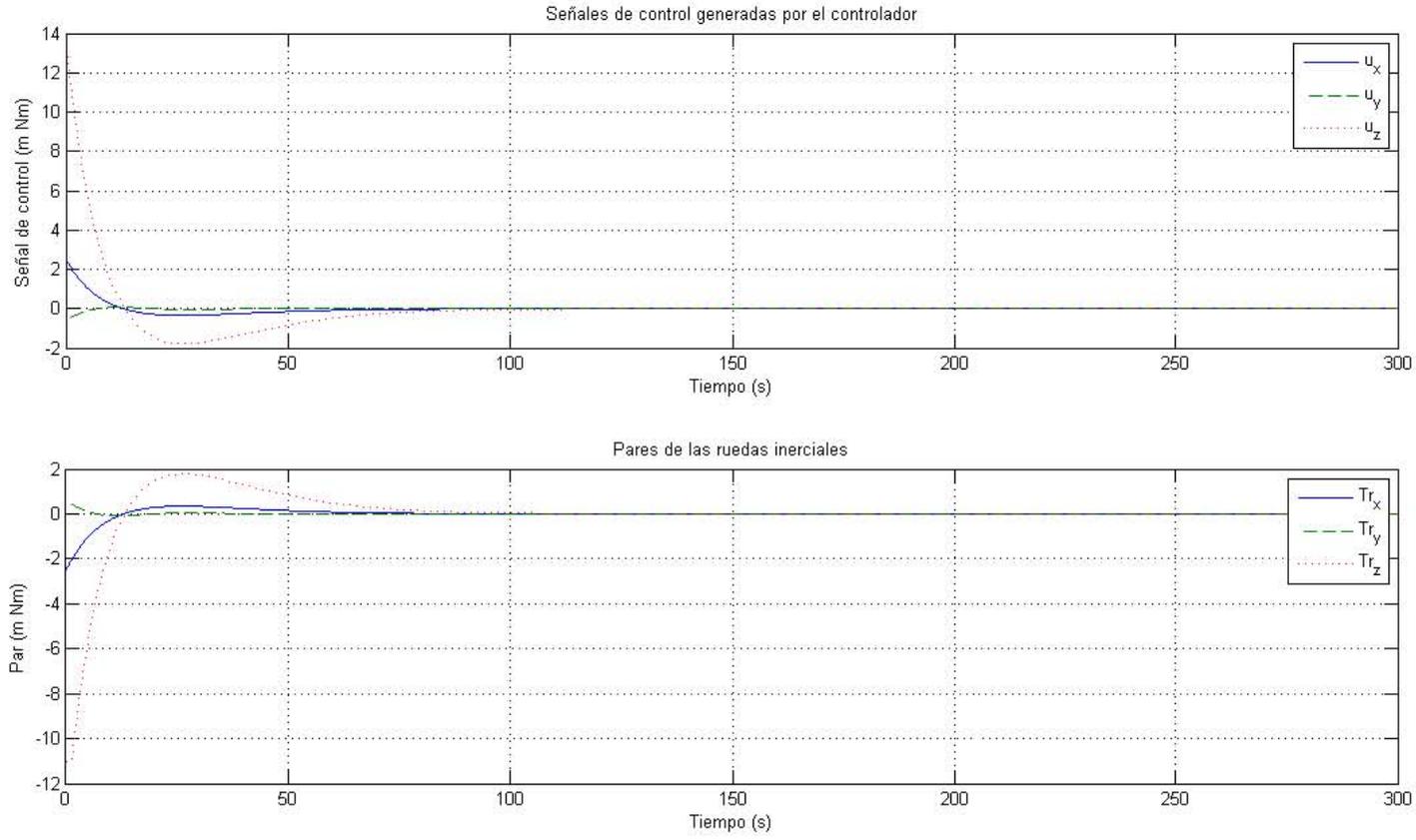


Figura 4-9. Evolución de los pares de control y de los actuadores P1.2.

### Experimento 3

En el Experimento 3 se han utilizado dos valores de ángulos negativos y uno positivo, específicamente;  $(3, -80, -5)^\circ$ . Recordando que el orden de los ángulos es de acuerdo con la secuencia "Yaw-Pitch-Roll".

En primera instancia se aprecia que la orientación deseada del sistema se alcanza antes del tiempo de establecimiento, lo cual puede corroborarse con la gráfica superior de la Figura 4-10. Es claro que el ángulo más alejado del origen, en este caso en "Pitch", es el que requiere de un mayor tiempo para converger al valor deseado, como ya ha sido habitual en las pruebas previas.

El acercamiento en el rango de exactitud requerido nuevamente muestra que el ángulo más alejado del origen converge al cero un poco después de los 150 segundos, y los más cercanos lo hacen unos después de llegar a los 100 segundos. Pero, de manera general el controlador cumple con el objetivo primordial, el cual es la coincidencia de los ejes de los sistemas de referencia orbital y fijo al cuerpo y que también se corrobora con la gráfica superior de la Figura 4-11 ya que en el estado estacionario no existe velocidad relativa entre ambos sistemas. Así mismo la velocidad angular absoluta del satélite solo cuenta con una proyección en el eje  $Y_B$  lo que desde el punto de vista físico representa la orientación de los sistemas alrededor de dicho eje para mantenerse en órbita.

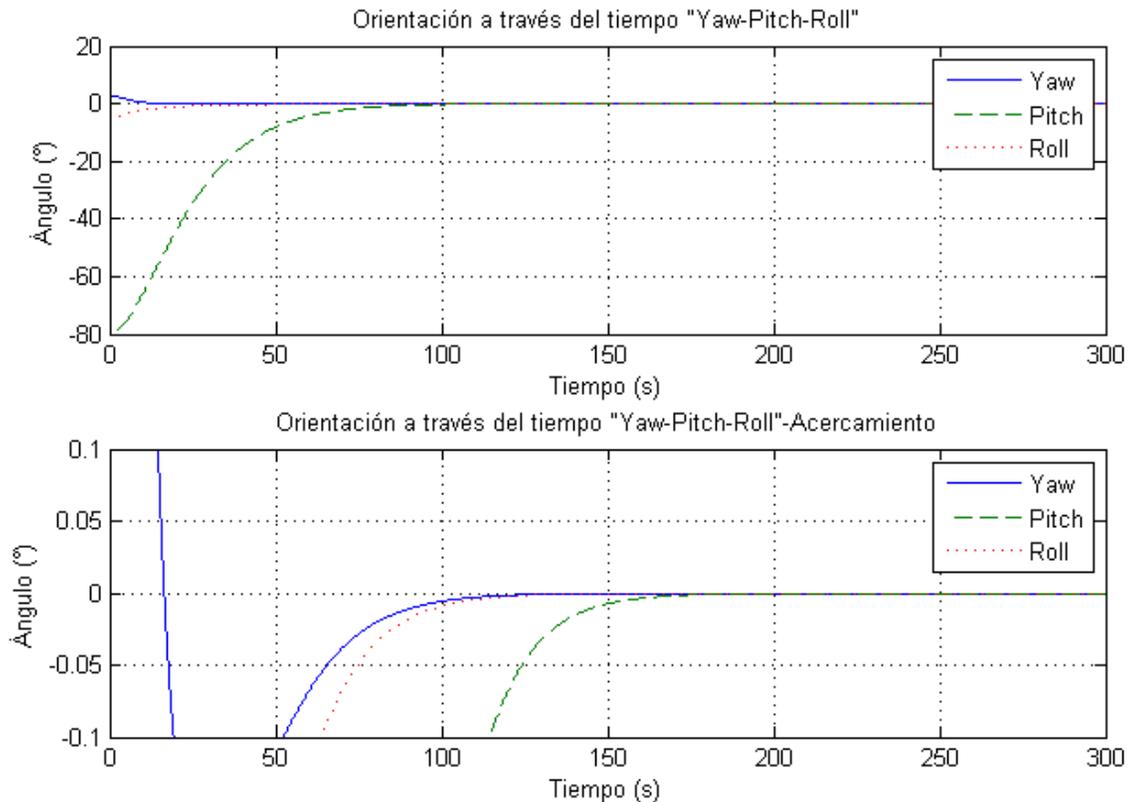


Figura 4-10. Evolución de la orientación P1.3.

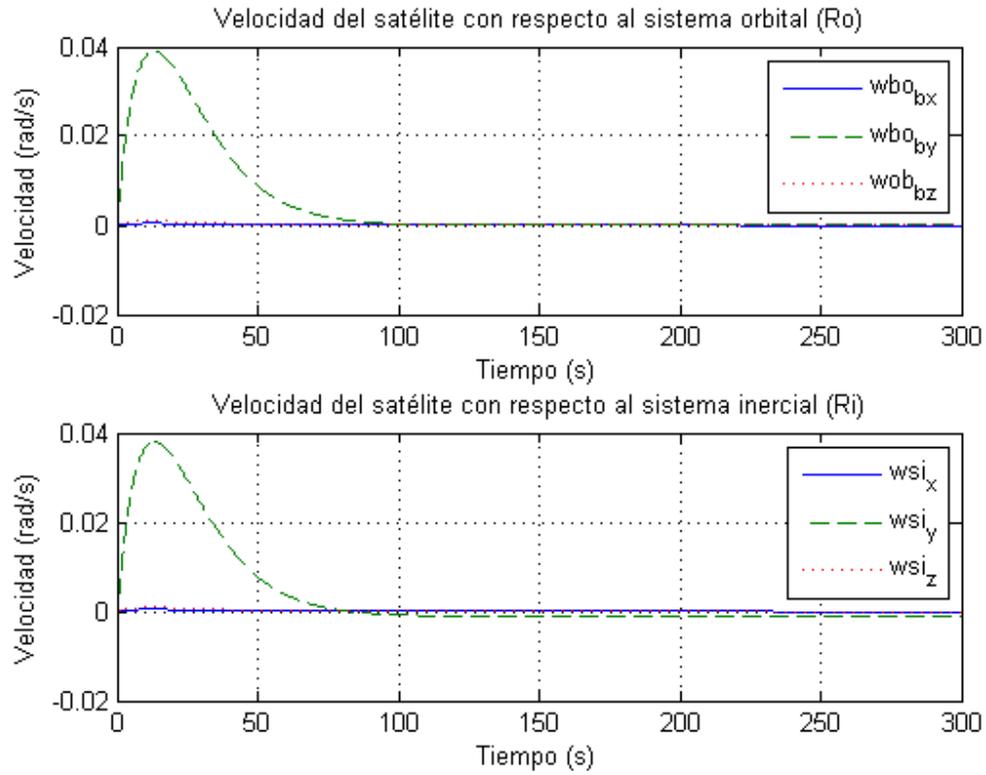


Figura 4-11. Velocidad del satélite respecto  $R_B$  y  $R_I$  P1.3.

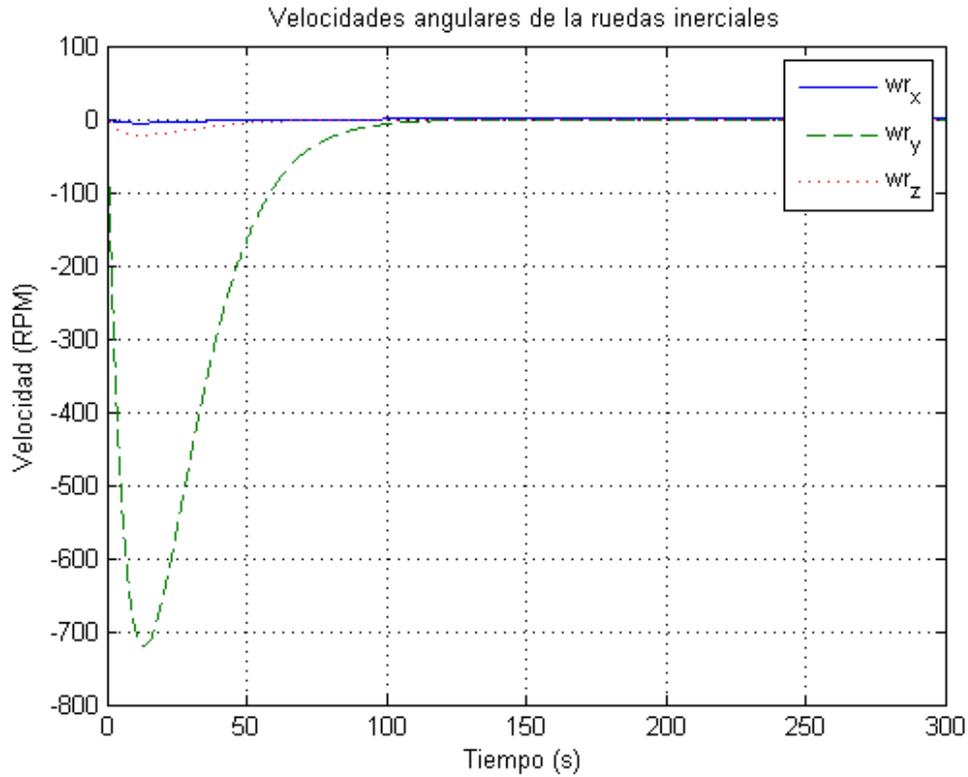


Figura 4-12. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P1.3.

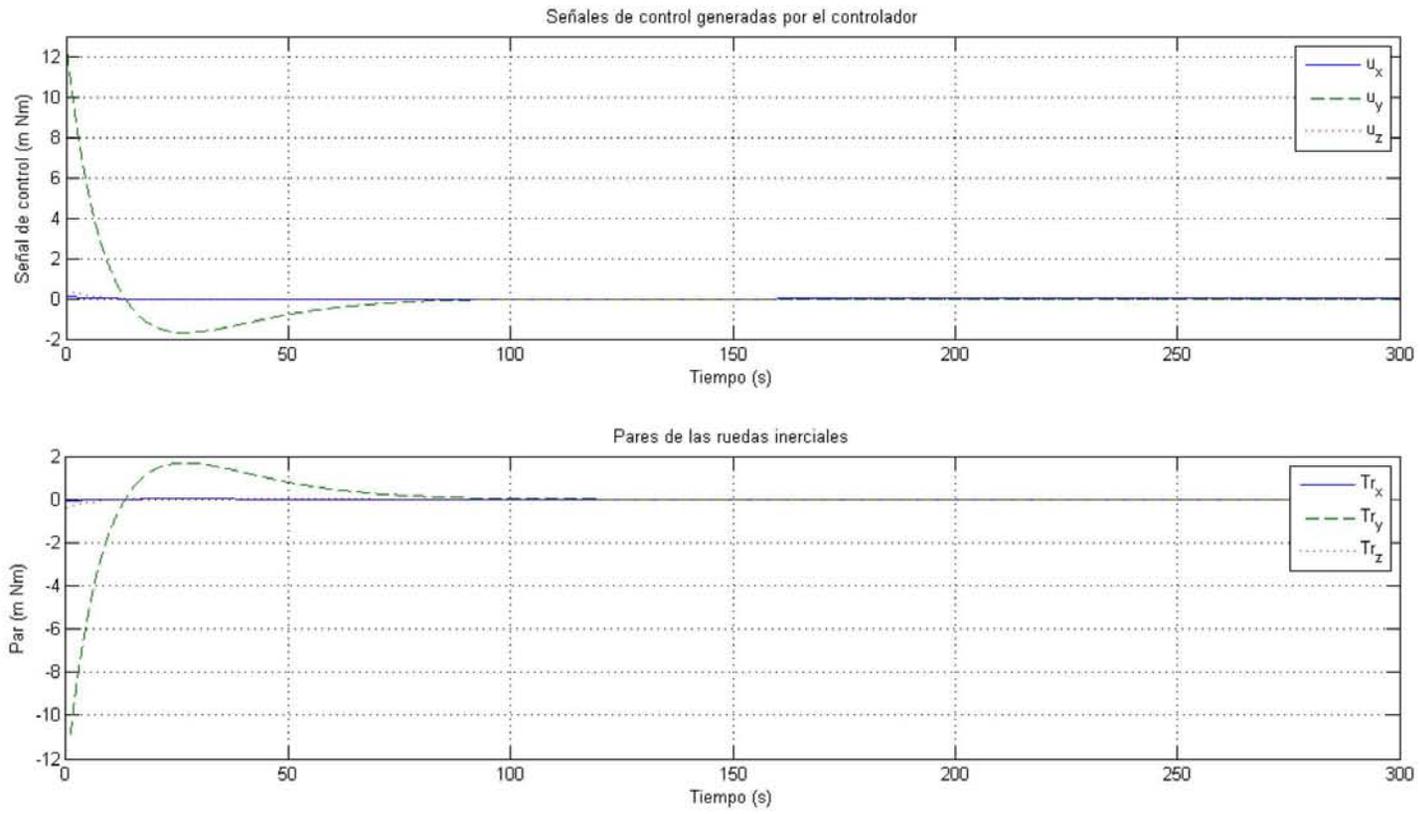
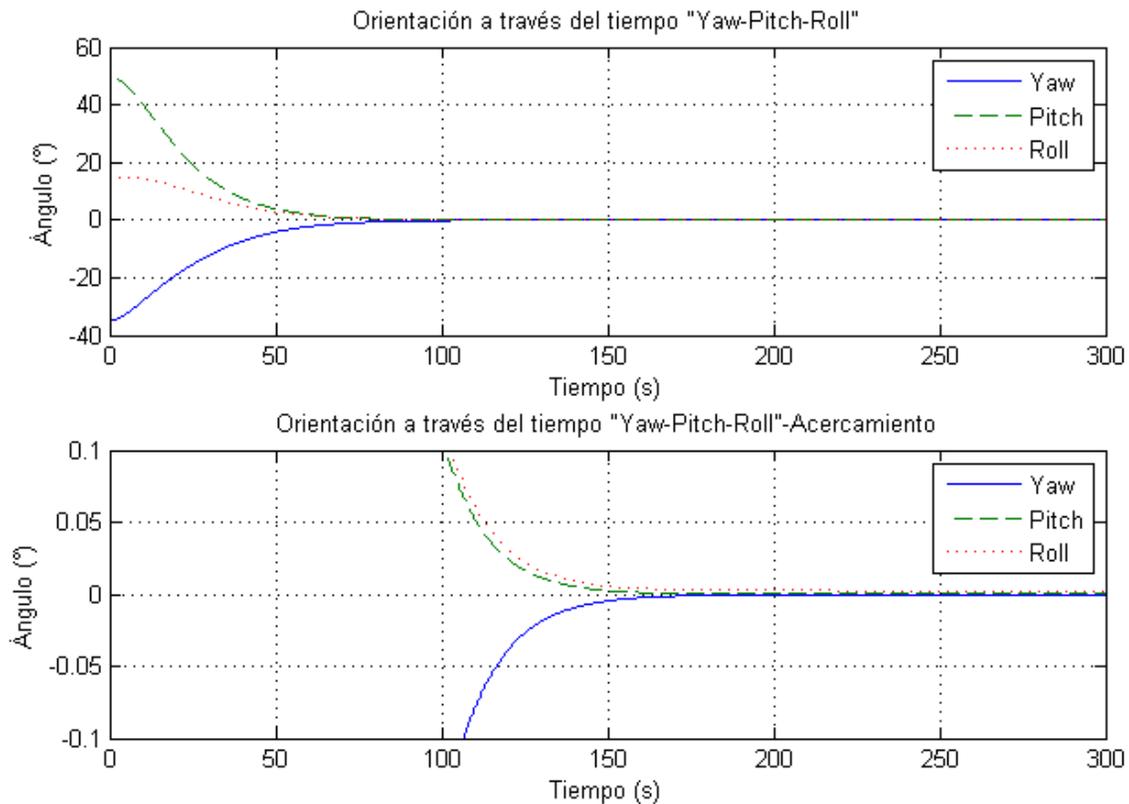


Figura 4-13. Evolución de los pares de control y de los actuadores P1.3.

En este experimento se presenta un hecho de interés con respecto al par que el controlador determina para aplicarse al eje  $Y_B$  del satélite, ya que como puede verificarse en la gráfica de la derecha de la Figura 4-13, se alcanza un pico de  $12 \text{ m Nm}$ , el cual es superior al valor máximo de torque del actuador y por tanto en la gráfica inferior de dicha figura éste se limita a  $11 \text{ m Nm}$ , tal como sería en la realidad. También es notorio, y antes no se ha comentado, que el par del actuador es de sentido contrario al par del controlador, lo cual viene a confirmar el intercambio de momentos que ocurre entre actuador y satélite. El controlador establece cuál es la magnitud y en qué sentido debe aplicarse el par al satélite y para lograr esto, los actuadores giran en sentido contrario y provocan que satélite lo haga en el sentido que indica el controlador.

#### Experimento 4

En este experimento la orientación se compone de dos valores positivos y uno negativo:  $yaw = -35$ ,  $pitch = 50$  y  $roll = 15$ . Los resultados de este experimento son muy similares a los del primero. El sistema presenta un comportamiento críticamente amortiguado, la velocidad angular absoluta solo tiene una componente en el eje  $Y_B$  en el estado estable, se garantiza la exactitud en el apuntamiento y ni el par de control máximo ni la velocidad máxima de los actuadores es superado. A detalle todo lo comentado se presenta en las Figuras 4-14 al 4-17.



**Figura 4-14. Evolución de la orientación P1.4.**

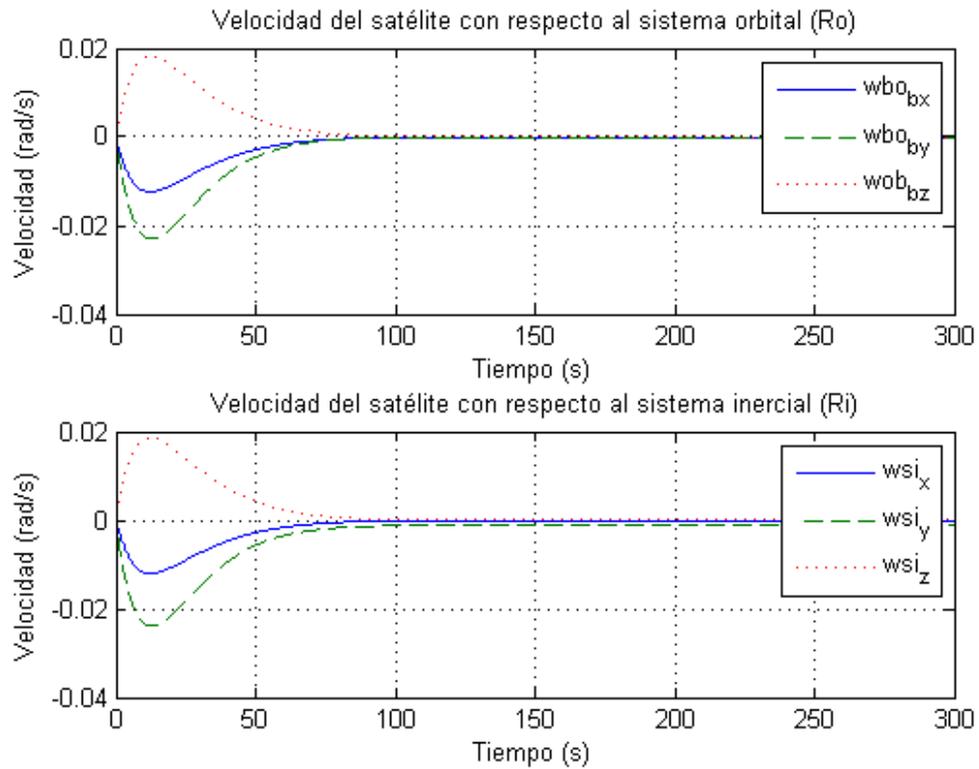


Figura 4-15. Velocidad del satélite respecto  $R_B$  y  $R_I$  P1.4.

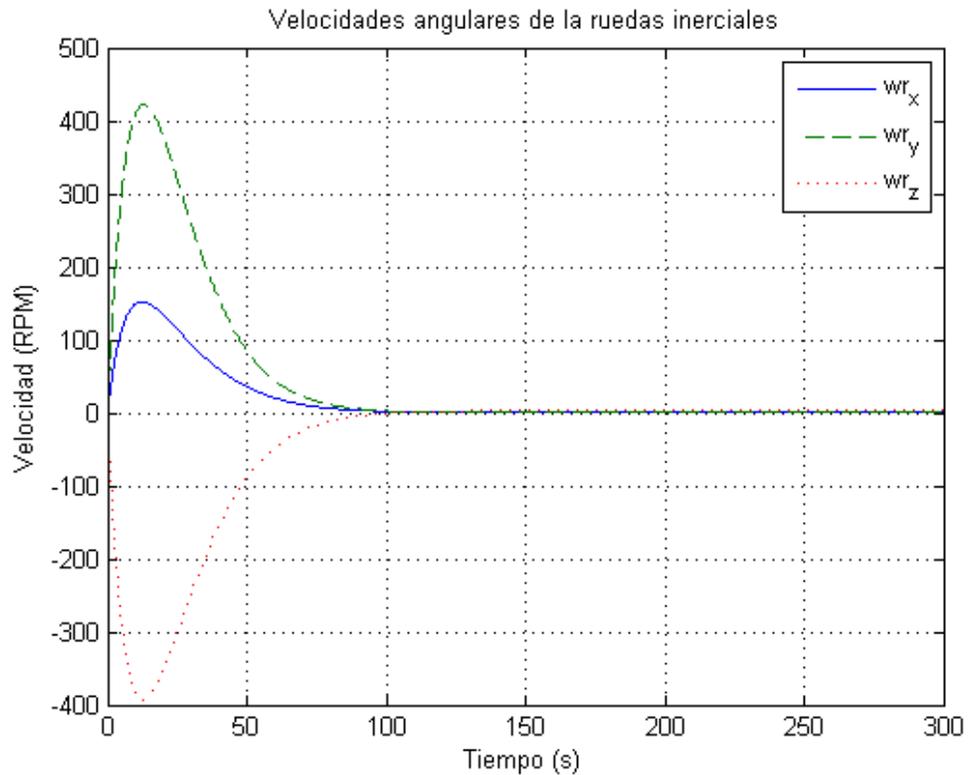


Figura 4-16. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P1.4.

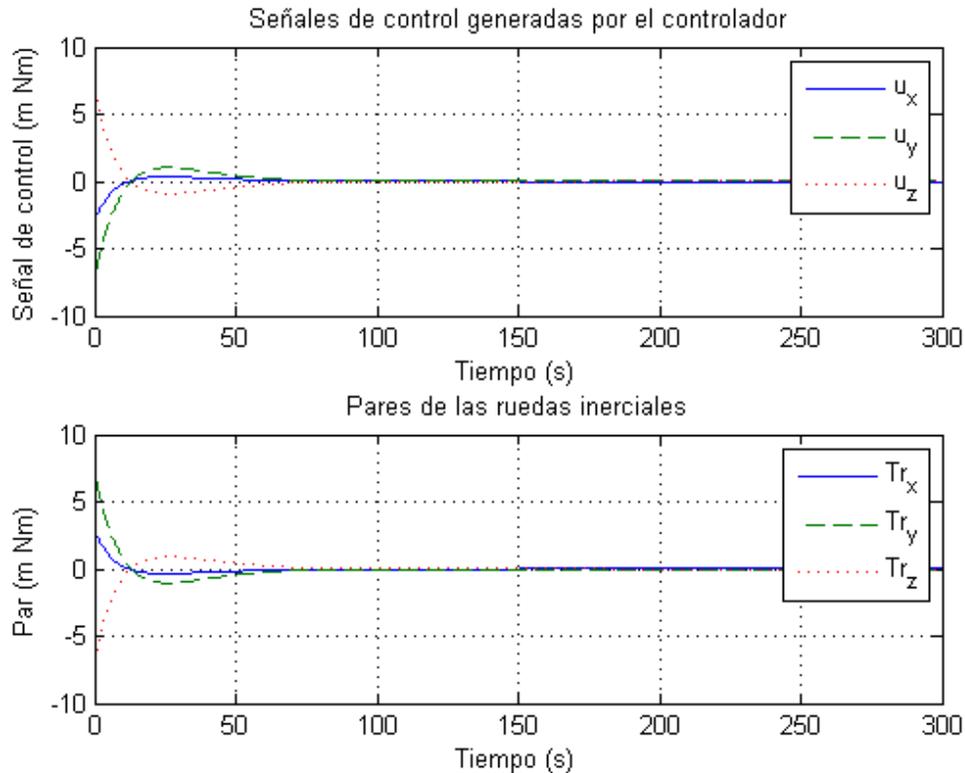


Figura 4-17. Evolución de los pares de control y de los actuadores P1.4.

#### 4.2.2 Apuntamiento inercial

Prueba 2:

La Prueba 2 consiste en lograr el apuntamiento inercial del satélite, es decir, se lleva al satélite de una orientación arbitraria de inicio a una orientación deseada también establecida arbitrariamente. Al igual que en la Prueba se considera el caso ideal en el que la velocidad angular del satélite es muy pequeña.

##### Experimento 1

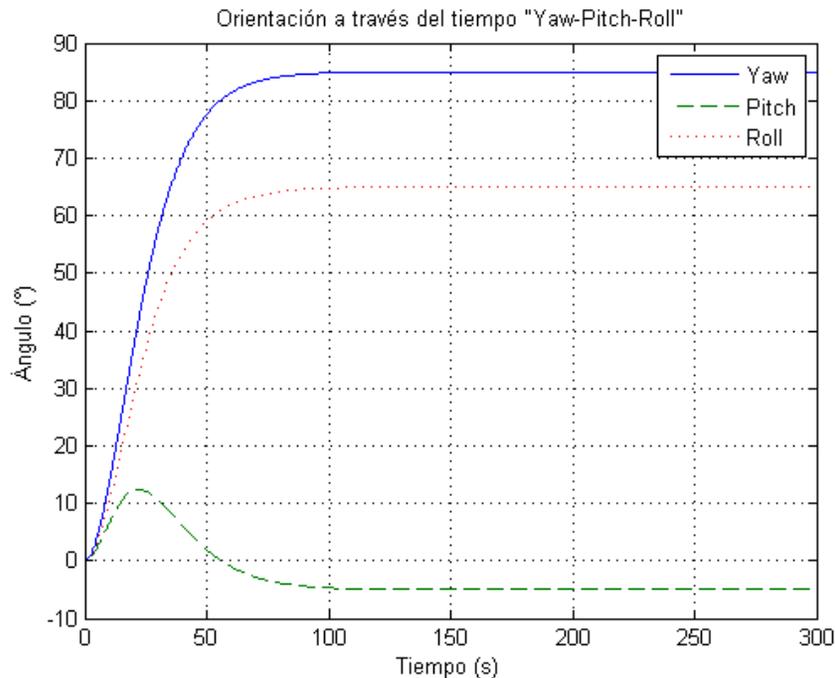
En el experimento uno de la Prueba 1 se ha establecido como punto inicial el caso en el que los sistemas de referencia orbital y fijo al cuerpo del satélite coinciden, es decir, los valores de los ángulos "Yaw-Pitch-Roll" es igual con cero. A partir de ahí se estableció una orientación objetivo y de esta manera conocer si el algoritmo de control es capaz de controlar la orientación. Se eligieron a los siguientes ángulos como objetivos:

$$yaw = 85, pitch = -5, roll = 65$$

Para llevar a cabo el análisis del desempeño del esquema de control se han generado varias gráficas: evolución de los ángulos de orientación, evolución de la velocidad del satélite relativo al sistema orbital y relativo al sistema inercial, velocidad de las ruedas inerciales a través del tiempo, señal de control y pares generados por las ruedas inerciales. Principalmente se quiere conocer si se

logra la orientación deseada, si se cumple con el tiempo de asentamiento definido para el sistema y si se respeta el comportamiento críticamente amortiguado.

Los resultados que se muestran en la Figura 4-18 indican que el algoritmo de control pudo llevar al satélite a la orientación deseada en el tiempo de establecimiento (100 s) definido en el diseño del controlador. Nuevamente se cumple que el ángulo más alejado solicita un torque más alto que el que puede proporcionar el actuador por separado para poder alcanzar el objetivo, tal como se muestra en la Figura 4-21. Y es por ello que en la gráfica inferior de la Figura 4-21 se puede observar que la componente de par en el eje  $Z_B$  es limitada al valor máximo que los actuadores pueden proporcionar, y puede verse que a largo del tiempo las gráficas difieren, sobre todo al inicio de la maniobra.



**Figura 4-18. Evolución de la orientación P2.1.**

La relación mencionada en el párrafo anterior también se extiende a las velocidades angulares de las ruedas de reacción, por ejemplo, la rueda colocada en el eje "Yaw" es la que mayor pico presenta, rondando un valor cercano a los 800 RPM, véase Figura 4-20.

Por otra parte, con relación a la velocidad angular del satélite (Figura 4-19) relativo al sistema de referencia orbital, esta es nula y para lograr tal propósito, a diferencia de los resultados de la Prueba 1, la componente en el sistema de referencia no inercial no nulo se presenta en el eje  $X_B$ . Esto no es tan simple de ver, puesto que no se ha modelado y no se ha estudiado a profundidad el comportamiento que debiera esperarse para este experimento. Pero sirve para corroborar que el apuntamiento de Nadir solo es un caso particular de un caso general de apuntamiento como lo es el apuntamiento inercial.

En la práctica, para determinar los valores deseados en un apuntamiento inercial, se debe llevar a cabo un modelado utilizando la posición de los cuerpos celestes conocidos y sobre ello determinar

cuáles son los valores de orientación a los que el satélite debe aspirar. Claro está que ese problema escapa a los alcances de esta tesis, por lo que únicamente se establecen orientaciones arbitrarias deseadas sin especificar a cuál cuerpo celeste o región de la Tierra es el objetivo.

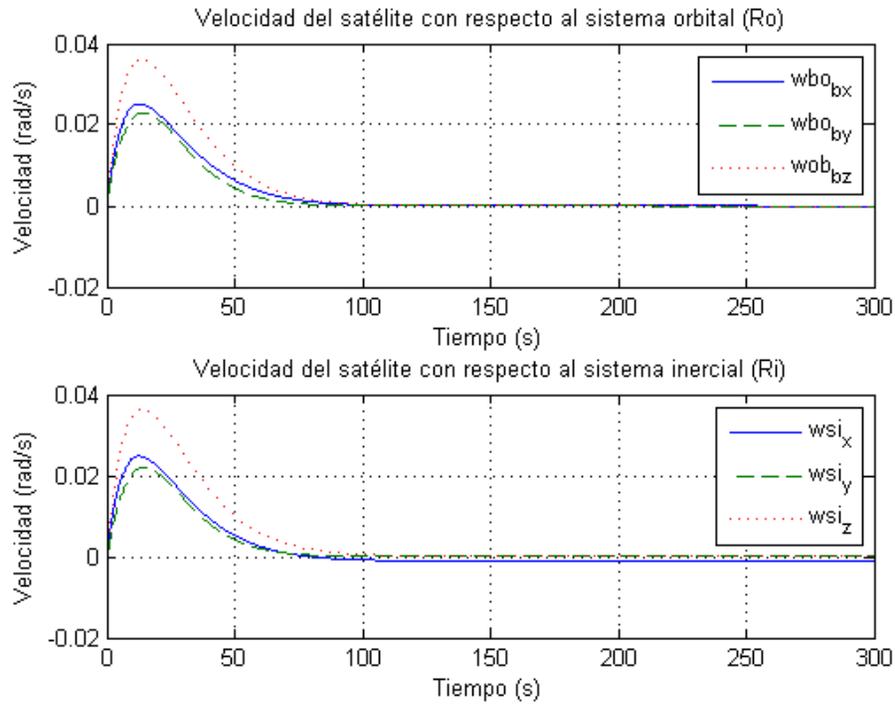


Figura 4-19. Velocidad del satélite respecto  $R_B$  y  $R_I$  P2.1.

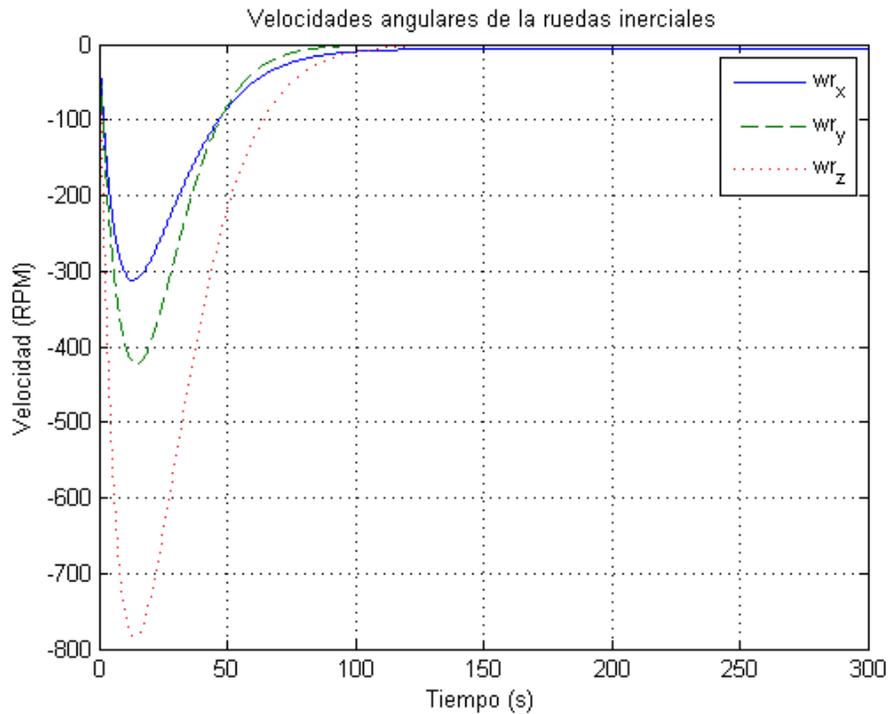


Figura 4-20. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P2.1.

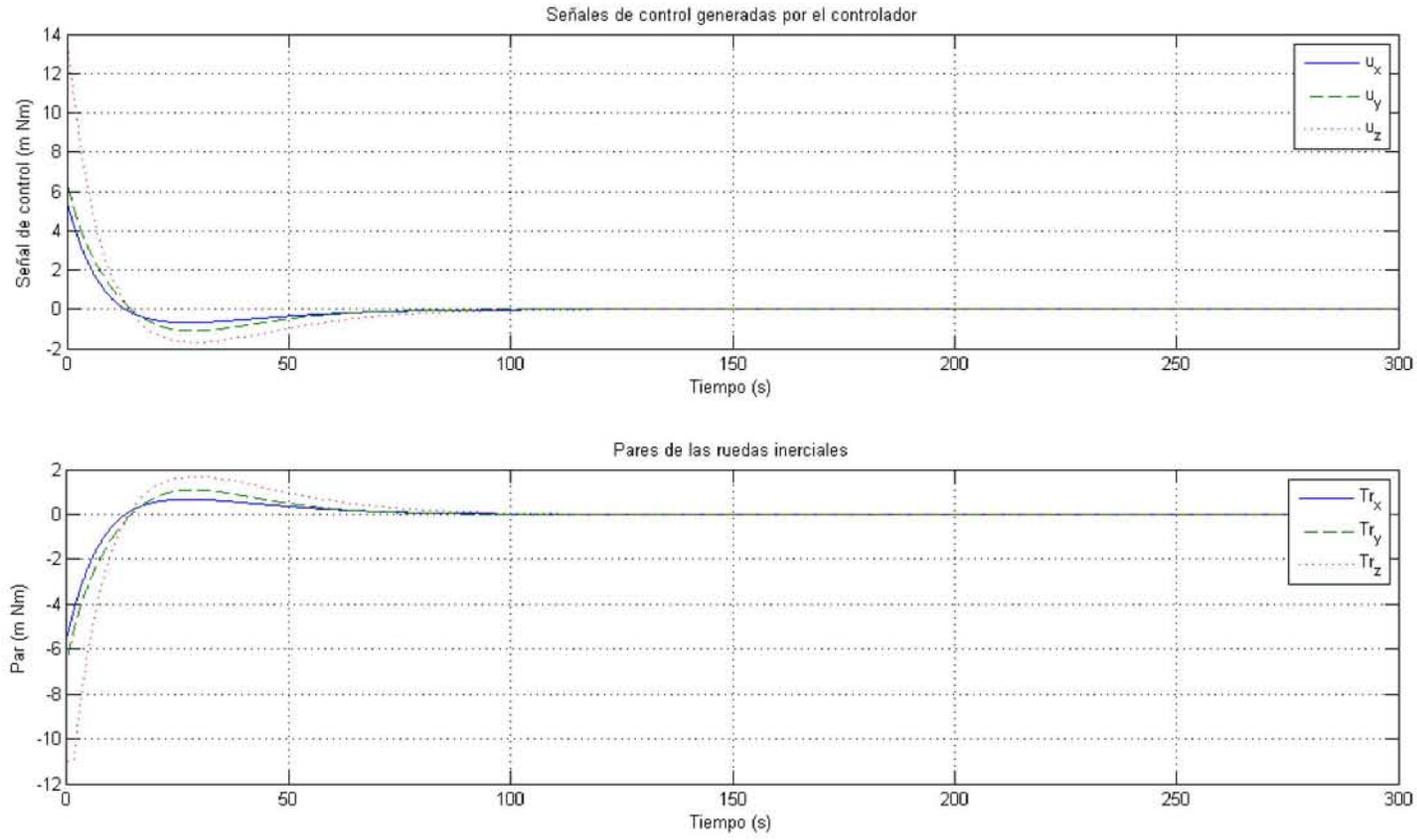


Figura 4-21. Evolución de los pares de control y de los actuadores P2.1.

## Experimento 2

En este experimento se dio al satélite una orientación arbitraria de inicio y una orientación deseada también elegida de forma arbitraria:

$$yaw_0 = -70, pitch_0 = -30, roll_0 = -5$$

$$yaw_d = -5, pitch_d = -80, roll_d = 35$$

En este ejercicio, como parte de la Prueba 2 de la simulación, los resultados que se han obtenido son bastante similares a los ejercicios previos, ya que nuevamente el sistema de control puede llevar sin gran problema al satélite de la orientación inicial a una final o deseada respetando el requerimiento del tiempo de establecimiento y respetando la restricción sobre el máximo torque que cada uno de los actuadores puede proporcionar al sistema durante el proceso de control de orientación.

En la Figura 4-22 la gráfica muestra que los tres ángulos "Yaw-Pitch-Roll" alcanzan el valor deseado un poco antes de los 100 s y se mantienen ahí durante el resto del tiempo de la simulación. En este caso, la velocidad angular del satélite, véase Figura 4-23, en el estado estable es nulo con respecto al sistema de referencia orbital y con respecto al sistema inercial, de una manera muy similar al caso del apuntamiento de Nadir, solo existe una componente en el eje "Pitch", es decir, en el eje  $Y_B$ . Esto quiere decir que para que el satélite mantenga la orientación deseada a lo largo del tiempo en el que se requiera, se mantendrá girando alrededor de su ya mencionado eje.

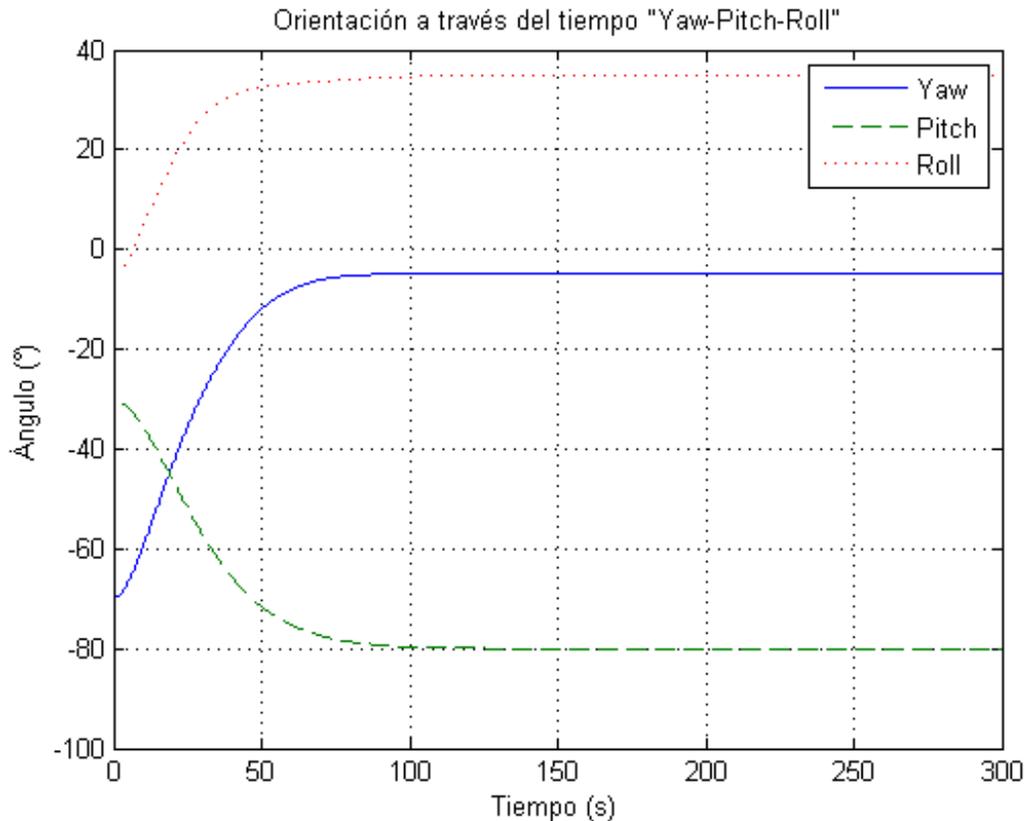
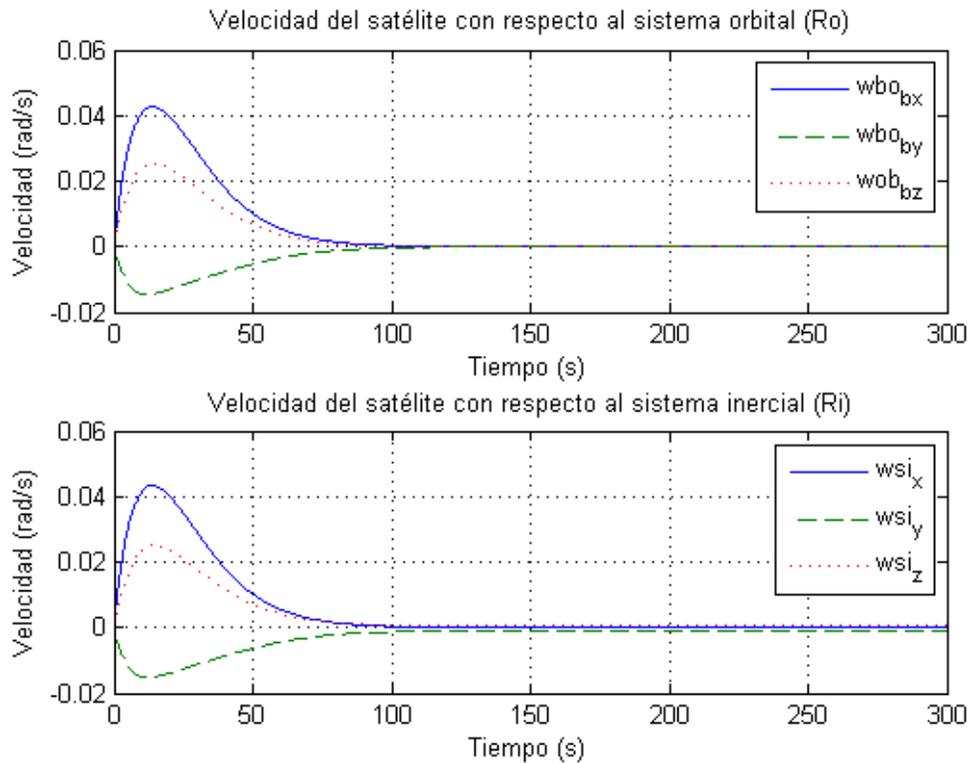


Figura 4-22. Evolución de la orientación P2.2.

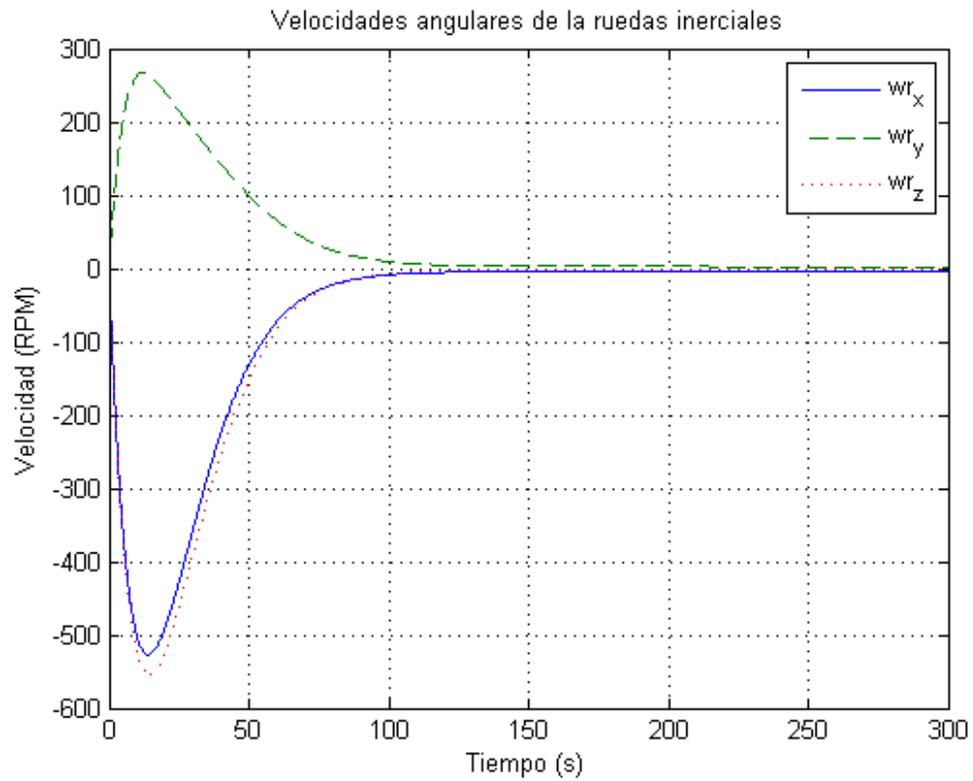
En lo concerniente a la restricción física de los actuadores con relación al par y velocidad angular máximos que pueden generar de manera individual siempre de acuerdo con la información del fabricante, las Figuras 4-24 y 4-25 dan fe de que durante todo el proceso de control de la orientación, ambas variables se mantienen por debajo de tales valores máximos. Cabe resaltar que en este caso, no es necesario tomar en cuenta la saturación de cada actuador, puesto que (véase gráfica superior de la Figura 4-25) la ley de control, nunca determina un par de control mayor al que otorgan los actuadores.



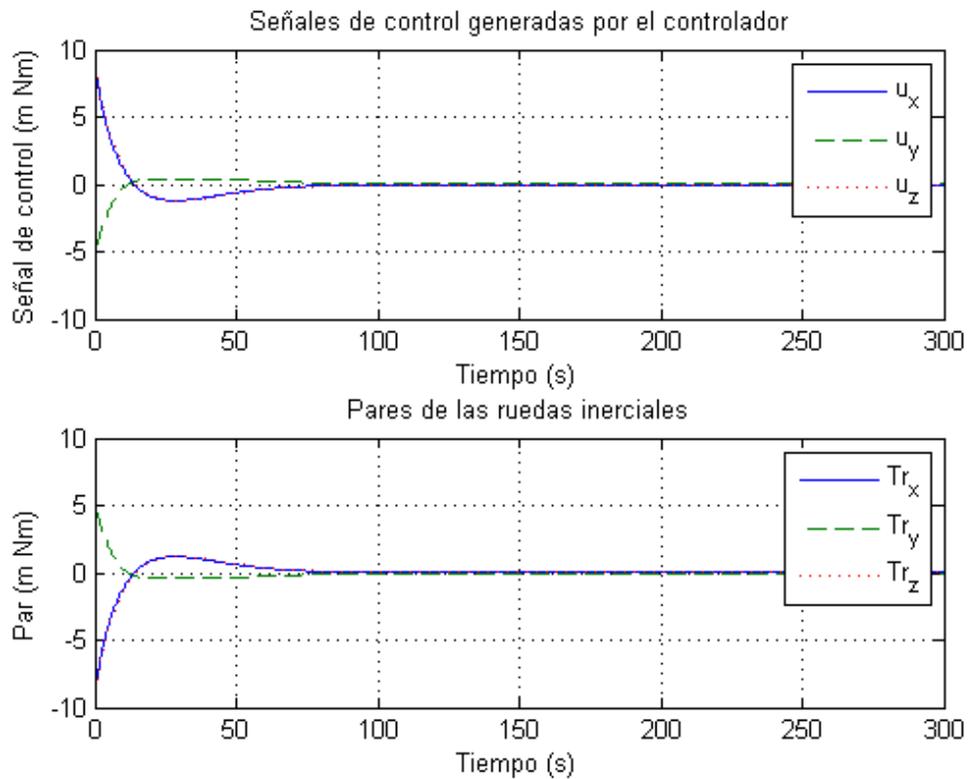
**Figura 4-23. Velocidad del satélite respecto  $R_B$  y  $R_I$  P2.2.**

De esta manera se concluye con las pruebas realizadas para conocer el desempeño del esquema de control diseñado para la orientación de un micro-satélite que tiene como propósito la percepción remota, en principio, terrestre pero que también contempla una posible medición de algún otro cuerpo celeste de interés para la misión. Si bien es cierto que se pueden llevar a cabo un gran número de pruebas, en este trabajo únicamente se reportan un número finito de pruebas con el objetivo de ejemplificar el desempeño de la ley de control basada en el cuaternion error.

El lector puede formularse una pregunta válida: ¿Son suficientes estas pruebas para asegurar que el algoritmo de control funcionará para cualquier orientación inicial? La respuesta a esta interrogante es no, ya que para ello es necesario llevar a cabo un número infinito de pruebas, sin embargo, esto es prácticamente imposible y es cuando vale recordar que la demostración de la estabilidad global del sistema en lazo cerrado fue demostrada por (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989), siendo dicha demostración la prueba de la validez de la ley de control para cualquier situación de orientación inicial.



**Figura 4-24. Evolución de las velocidades angulares de las ruedas inerciales P2.2.**



**Figura 4-25. Evolución de los pares de control y de los actuadores P2.2.**

### 4.3 Comentarios

En este capítulo se han presentado un número de pruebas para conocer el desempeño de la ley de control para orientación de un satélite de percepción remota, en particular para dos modos de control: apuntamiento de Nadir y apuntamiento inercial. Cada experimento de las dos pruebas, fueron comentadas previamente, por lo que ahora se procederá a dar comentarios generales sobre los mismos.

Las pruebas presentadas en este capítulo han verificado que el esquema de control de orientación basado en el uso del cuaternion error y un controlador con una estructura de tipo PD (proporcional derivativo) más un término linealizante, regula de manera exitosa la orientación del satélite en el principal caso de interés que es el apuntamiento de Nadir. Adicionalmente, esta ley también es capaz de mantener un apuntamiento inercial, es decir, que puede utilizarse para cualquier otro tipo de apuntamiento.

Los requerimientos establecidos al momento del diseño de las ganancias que componen la ley de control de orientación en 3 ejes son satisfechos de manera parcial:

1. En el caso del tiempo de establecimiento del sistema, de manera general el controlador alcanza la orientación deseada hasta cierto punto, antes de que se cumpla el tiempo de establecimiento deseado. Sin embargo, al llevar a cabo un acercamiento a la evolución de los ángulos "Yaw-Pitch-Roll", debido al requerimiento de exactitud, se observa que para cumplir cabalmente con este requerimiento establecido por la carga útil de estudio, se requiere de tiempo adicional, por lo que el sistema generalmente alcanza el estado deseado entre los 100 y 150 segundos. Este retraso hasta este momento no es de gravedad ya que hasta este momento no se tiene una restricción fuerte con respecto al tiempo de establecimiento del sistema, por lo que puede ser modificado.
2. Un requerimiento de interés fuerte para los propósitos de la carga útil utilizada como caso de estudio en el desarrollo de este trabajo, contempla un margen de exactitud para la orientación final. Por ello se analizó cada prueba a detalle y se pudo corroborar que la ley de control garantiza dicha exactitud. Así pues, con esto se hace frente a una de las principales demandas en el control de orientación.
3. Restricciones físicas que habitualmente son considerados en el diseño de un sistema de control de orientación de satélites pequeños son el par máximo y la velocidad angular máxima, para el caso de ruedas inerciales y/o giroscopios de control de momentos, también fueron objeto de estudio durante las pruebas realizadas, de tal manera que para ambas variables en el proceso de simulación se establecieron límites para garantizar que los valores obtenidos de ellas no superarán el límite físico establecido por el fabricante de la rueda de reacción. En algunos experimentos, la ley de control determinó un par mayor al máximo para poder corregir la orientación del satélite, pero a pesar de que dicho par fue limitado, el sistema al final alcanzó la orientación deseada, aunque se tuvieron repercusiones en el tiempo de establecimiento del sistema, haciéndolo un poco más grande, pero sin afectar el objetivo general que era orientar al satélite. Al limitar el valor de par máximo como consecuencia se limita la aceleración máxima y así mismo la velocidad, así pues, tampoco se superó en ninguna prueba, la velocidad máxima que los actuadores individualmente proporcionan.
4. En cuanto a la velocidad angular que el satélite alcanza una vez que se logra la orientación deseada, en el caso del apuntamiento de nadir, tanto la velocidad relativa al sistema orbital

como a la relativa al sistema inercial, se observó un comportamiento de acuerdo a lo que físicamente estaría ocurriendo con el movimiento rotacional del satélite. Por una parte, tras llegar al estado estacionario, no existe velocidad entre el satélite y el sistema orbital ya que ambos giran a la misma velocidad sobre el eje  $Y_B$ . Por el otro lado, la velocidad absoluta del satélite correspondió a lo esperado, ya que en el modelado se determinó que la velocidad angular del sistema orbital solo tiene una componente en el eje  $Y_B$  para poder cumplir con el periodo orbital del satélite.

En general el comportamiento del sistema a controlar bajo la acción de las señales de control determinadas por la ley de control propuesta por Wie cumple de manera cabal con el principal objetivo propuesto en este trabajo, que es mantener y/o alcanzar el apuntamiento de nadir y/o inercial deseado.

Ahora debe continuarse con una etapa de implementación para evaluar de mejor manera la viabilidad de generar un sistema de control en tiempo real requerido en el grupo de investigación en el cual se llevó a cabo este trabajo.

## Referencias

Hughes, P. C. (2004). *Spacecraft Attitude Dynamics*. Dover Publications.

Wie, B., Weiss, H., & Arapostathist, A. (1989). Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations. *Journal of Guidance, Navigation and Control*, 12, 375-380.  
doi:10.2514/3.20418

## Conclusiones

El problema de control de la orientación o mejor conocido en el campo de la ingeniería espacial como “the attitude control problem” ha sido abordado en este trabajo con el objeto de hacer frente a la demanda del grupo de investigación y desarrollo en ingeniería espacial del CAT-UNAM. Para ello, en específico, se ha utilizado como caso de estudio el requerimiento de apuntamiento para el modo de medición de nadir de una cámara de percepción remota.

Un esquema de control de la orientación basado en el controlador “Quaternion Feedback Regulator” que tiene una estructura de tipo proporcional-derivativo propuesto en (Wie, Weiss, & Arapostathist, 1989) fue diseñado como primera propuesta para cumplir de manera exitosa con los requerimientos de control de apuntamiento de la carga útil en estudio. Simulaciones numéricas del desempeño de este esquema de control fueron llevados a cabo utilizando software matemático especializado, logrando tener evidencia que permite concluir lo siguiente:

- El esquema de control diseñado aborda únicamente el problema de control de la orientación asumiendo que se conoce la orientación actual del satélite, siendo esto suficiente para los propósitos de este trabajo, pero insuficiente cuando se aborde el problema en una misión satelital, ya que se debe considerar el problema de la determinación de la orientación.
- El controlador, con base en la evidencia obtenida con simulaciones numéricas, se ha mostrado capaz de alcanzar el apuntamiento de nadir con el rango de exactitud requerido por parte de la cámara de percepción utilizada como carga útil de estudio. Como prueba de ello en la velocidad angular absoluta del satélite únicamente se tiene una componente alrededor del eje “pitch” tal como es esperado gracias al análisis realizado en el modelado del movimiento rotacional del satélite. Además, no existe velocidad relativa entre los sistemas orbital y fijo al cuerpo. Así entonces, se concluye que el esquema de control diseñado cumple satisfactoriamente el principal requerimiento de la misión satelital de estudio.
- Con respecto al modo de operación de control de apuntamiento inercial, en la simulación numérica también se obtuvieron resultados positivos, por lo que el esquema de control de orientación diseñado, es una alternativa seria para ser utilizada en los diversos proyectos que se están llevando a cabo actualmente en la UNAM y también en el país, que requieran un control de orientación de alta exactitud.
- Si bien el esquema de control de orientación diseñado puede mantener y/o alcanzar la orientación deseada, en ocasiones, este propósito no se logra en el tiempo de establecimiento deseado, sobre todo cuando se hace un análisis minucioso con respecto al rango de exactitud y, primordialmente, este retraso en el establecimiento del sistema se presenta cuando la orientación de inicio se encuentra muy lejos del origen, por lo que la ley de control genera señales de control más grandes a las que los actuadores pueden generar por separado, así que al limitar la señal de control aplicada al sistema, se tiene como consecuencia un retraso en el tiempo de establecimiento del sistema. Para los alcances de esta tesis, este retraso no se considera, pero debe tenerse en cuenta en el proceso de implementación del controlador y/o cuando se tenga un requerimiento de “slew rate”.
- La ley de control genera en ocasiones, generalmente, cuando el punto de inicio se encuentra bastante alejado del origen, señales de control mayores a la que los actuadores

pueden generar. Es por ello que se implementó, en la simulación, un bloque de saturación para limitar esta señal de control, el cual funcionó de manera correcta aunque genera comportamientos no deseados en el sistema, como: retraso en el tiempo de establecimiento y comportamiento no críticamente amortiguado. En lo que concierne al comportamiento no críticamente amortiguado, el hecho que se presente un pequeño sub-amortiguamiento tampoco es grave para los propósitos del satélite de percepción remota, pero no sería así si se buscara un acoplamiento con otra nave espacial.

- Los actuadores elegidos para el satélite utilizado, como caso de estudio en la simulación numérica son adecuados para manejar la cantidad de movimiento angular que puede absorber un satélite con las características consideradas, si bien en ocasiones se les demanda mayor par del que pueden proporcionar, han logrado compensar este hecho y alcanzar la orientación deseada, aunque afectando el tiempo de establecimiento deseado. Así mismo, durante la simulación nunca se rebasó su velocidad angular máxima, lo cual es una buena señal, ya que cuando este hecho se presenta recurrentemente, el actuador se satura y pierde el control del satélite, al no poder absorber la cantidad de movimiento angular. Es importante mencionar que no se realizó el análisis de demanda de energía.

En resumen, el esquema de control basado en el vector cuaternion error cumple de manera suficiente el principal requerimiento impuesto por la cámara de percepción remota. Si bien es cierto, que en ocasiones no se cumple con el tiempo de establecimiento deseado, por ahora no es crítico para el acercamiento a este tema.

Por otra parte, este trabajo refuerza el trabajo hasta ahora realizado en el grupo de ingeniería espacial de la UNAM de la Facultad de Ingeniería en el campo del control de la orientación de satélites pequeños, sentando bases para que en el futuro se puedan diseñar esquemas acorde con los propósitos específicos de cada misión satelital. Abriendo también un nicho de oportunidad para los ingenieros de control en el país, ya que el campo del control de orientación de satélites en México es prácticamente nulo o en un diagnóstico positivo, escaso.

Adicionalmente, este proyecto de investigación directamente contribuye al establecimiento de capacidades nacionales en el campo de la ingeniería espacial, en particular en la de los satélites pequeños, con la formación de recursos humanos especializados en el problema de control de orientación, lo cual se alinea con uno de los ejes rectores del Plan Nacional de Actividades Espaciales 2011-2015.

### **Trabajo futuro**

Este trabajo pretende sentar las bases para generar un sistema completo de determinación y control de la orientación de micro-satélites. Es por ello que mucho queda por hacer, enumerando las siguientes tareas, que a criterio del autor, son fundamentales:

- Diseñar un esquema para la determinación de la orientación con un nivel de exactitud mayor al del control de orientación.
- Abordar el problema de la disminución de la velocidad angular (“detumbling”) al ser el satélite expulsado del cohete portador.
- Generar los cuaterniones que describan otros modos de control de orientación necesarios durante la operación de un satélite de percepción remota, tales como:

apuntamiento de paneles solares, maniobras para apoyar el control térmico, apuntamiento de antenas para comunicación con el centro de control.

- Análisis energético y de saturación de las ruedas de reacción a lo largo de la vida útil, con el propósito de determinar si es necesario un grupo de actuadores secundarios para 'desaturar' a las ruedas.
- Selección de la tecnología adecuada para fungir como computadora de a bordo del sistema de control de la orientación.
- Implementación de la ley de control y pruebas experimentales del desempeño del mismo en algún simulador de dinámica rotacional y orbital de satélites como los presentados brevemente en la revisión de la literatura.

Siendo el trabajo a futuro una lista interminable, el autor considera que los puntos anteriores son en los que primeramente se debe trabajar.

## APENDICE A

### Hoja de especificaciones de los actuadores.



# SSTL Microwheels

	10SP-M	100SP-O
<b>Performance</b>		
Design life	7.5 years	7.5 years
Angular momentum	0.42 Nms	1.5 Nms
Max speed (+/-)	5000 rpm	5000 rpm
Speed accuracy	<0.1 rpm rms	<0.055 rpm rms
Max torque (peak)	0.011 N.m	0.11 N.m
<b>Environmental Conditions</b>		
Operating temperature	-20 to +50°C	-20 to +50°C
Survival temperature	-30 to +60°C	-30 to +60°C
Radiation	5 krad	5 krad
Random vibration (qualification)	18 grms (all axes)	15 grms (all axes) *
First mode	>400 Hz	>300 Hz
<b>Mechanical</b>		
Mass	0.96 kg	2.6 kg
Volume	Ø109x101 mm	Ø131x120 mm
Moment of inertia (wheel)	0.0008 kg.m <sup>2</sup>	0.0028 kg.m <sup>2</sup>
Static unbalance	<0.1 gcm	<0.2 gcm
Dynamic unbalance	<0.2 gcm <sup>2</sup>	<0.3 gcm <sup>2</sup>
Lubrication	Dry	Oil
<b>Electrical &amp; Control</b>		
Integrated electronics	Yes	Yes
Control mode (up to 5Hz)	Output Speed	Output Speed <sup>#</sup>
Power (standby) : 20°C	~0.65 W	~ 1.2 W
Power (5000rpm) : 20°C	~ 2.8 W	~ 10 W
Power (maximum torque) : 20°C	~ 10 W	~ 113 W
Supply voltage(s)	5V / 22-34V DC (single supply also available)	17-35V DC
Data interface	CAN bus/ RS422	CAN bus/ optional RS422
Telemetry data examples	Speed, Motor current Electronics Temperature	Speed, Motor current Electronics & Motor Temperature

\* Mechanism levels tested. Life & electronics qualifications tested at lower values. Electronics can accept 10SP-M levels based on heritage design.

# The wheel can be run in torque mode but this is likely to be coarse and has not been characterised by SSTL.

**10SP-M Heritage**

- UK-DMC-2 (2009)
- Delmos-1 (2009)
- NigeriaSat-2 (2011)
- ExactView-1 (2012)
- Third party missions

**100SP-O Heritage**

- TechDemoSat-1 (launched 2014)
- KazaEOSat-2 (launched 2014)
- DMC3 Constellation (launching 2015)
- NovaSAR-S (launching 2016)

**SSTL is ISO9001:2008 certified**

- Manufacture to:
  - ECSS Q-ST-70-08C
  - ECSS Q-ST-70-38C
- All work overseen by ESA trained assembly staff

**Available as part of SSTL's AOCs suite**

- Actuators
  - Magnetorquers, Reaction Wheels
- Sensors
  - Magnetometers, Sun Sensor
  - Inertial Sensors, Star Trackers
- GPS Receivers

Product specification may be subject to change without notification

© Surrey Satellite Technology Ltd.

Tycho House, 20 Stephenson Road, Surrey Research Park, Guildford, Surrey, GU27YE, United Kingdom  
Tel: +44(0)1483803803 | Fax: +44(0)1483803804 | Email: [subsystems@sstl.co.uk](mailto:subsystems@sstl.co.uk) | Web: [www.sstl.co.uk](http://www.sstl.co.uk)