UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ÁLGEBRAS ESTÁNDARMENTE ESTRATIFICADAS Y SISTEMAS ESTRATIFICANTES

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
MINDY YANELI HUERTA PÉREZ

DIRECTOR DE LA TESINA
DRA. EDITH CORINA SÁENZ VALADEZ
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MÉXICO, D. F. 3 DE JULIO DE 2015.

UNAM Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Capítulo 1

Algebras Estándarmente Estratificadas y Sistemas Estratificantes

El concepto de sistema estratificante fue introducido en 2002 por K. Erdmann y C. Sáenz (ver [2]). Dicha noción tiene su origen como una generalización de los módulos estándar y del módulo inclinante característico asociado a las álgebras casi-hereditarias y a las álgebras estándarmente estratificadas (las últimas son una generalización de las primeras).

Ambas álgebras han sido estudiadas desde los años 80, aparecieron en el contexto de los grupos algebraicos, álgebras de Lie y categorías de peso máximo. Las categorías de peso máximo fueron introducidas y estudiadas por E. Cline, B. Parshall y L. Scott en [6].

Originalmente las álgebras casi-hereditarias fueron definidas mediante una cadena de ideales idempotentes. En [7] V. Dlab y C. M. Ringel dan una definición de álgebra casi-hereditaria en términos de los que ellos llaman los módulos estándar ${}_\Lambda\Delta$ asociados a una álgebra de dimensión finita Λ.

En 1991, C. M. Ringel establece que una de las propiedades más importantes de dichas álgebras es su conexión con los módulos inclinantes (ver [8]). En este artículo se estudian las propiedades homológicas de la categoría $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ de los módulos ${}_\Lambda\Delta$-filtrados de una álgebra casi-hereditaria Λ y se construye el llamado módulo característico T asociado a $\mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$. Además, C. M. Ringel mostró que el módulo T resulta ser un módulo inclinante y el álgebra de endomorfismos $A = End_\Lambda(T)$ es de nuevo casi-hereditaria.

Dado un sistema estratificante $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$, el conjunto θ generaliza la noción del conjunto de los módulos estándar, el módulo $\underline{Y} = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ el concepto del módulo característico T y $\leqslant$ es el orden natural en el conjunto $\{1, 2, \ldots, t\}$ que indexa a los módulos del conjunto θ.

El objetivo de esta tesina es estudiar las propiedades generales del concepto de sistema estratificante, establecidas en [2]. El contenido temático de la tesina está dividido en 4 secciones y un apéndice. En la primera sección se da la definición de módulo estándar y de álgebra estándarmente estratificada (a la derecha).

En la segunda sección se da la definición y principales propiedades de un sistema estratificante de talla t. En la tercera sección se estudia el álgebra de endomorfismos $A = End_\Lambda(Y)$ de un sistema estratificante $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$; donde $\underline{Y} = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$. Se muestra que $A = End_\Lambda(Y)$ es estándarmente estratificada (a la derecha) con respecto al orden opuesto $\leqslant^{op}$ en el conjunto $\{1, 2, \ldots, t\}$. Por último en la sección 4 se demuestra que las categorías $\mathcal{F}(\theta) \subseteq \Lambda - mod$ (de los θ-módulos filtrados) es contravariantemente equivalente a la categoría $\mathcal{F}(\Delta_A) \subseteq mod - A$ (de los Δ_A-módulos filtrados).

El capítulo 2 es un apéndice con resultados que se utilizan en la tesina.

1.1. Álgebras Estándarmente Estratificadas

Empezaremos esta sección enunciando el concepto de k-álgebra de dimensión finita. A lo largo de este trabajo consideraremos únicamente k-álgebras de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. Por comodidad, algunas veces, sólo diremos que k es un campo o bien que R es una álgebra.

Definición 1.1.1. *Sea k un campo.*

1) *Una k-álgebra es un anillo R (asociativo con 1_R) que posee estructura de k-espacio vectorial de tal forma que $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ para cualesquiera $\alpha \in k$ y $a, b \in R$.*

2) *Diremos que R es una k-álgebra de dimensión finita si R es de dimensión finita como k-espacio vectorial.*

Observación 1.1.2. *Si R es una k-álgebra, se tiene que todo R-módulo izquierdo (ó derecho) M es un k-espacio vectorial. Además, si M es finitamente generado entonces M es un k-espacio vectorial de dimensión finita y por lo tanto M es de longitud finita.*

Denotamos por $R - mod$ a la categoría de los R-módulos izquierdos finitamente generados sobre una k-álgebra R. A partir de ahora trabajaremos únicamente con módulos finitamente generados. Por comodidad, algunas veces, sólo diremos que M es un R-módulo, en lugar de un R-módulo izquierdo finitamente generado. Dada una clase $\mathcal{C}$ de R-módulos denotamos por $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ a la subcategoría plena de $R - mod$ que contiene al módulo cero y a todos los R-módulos que son filtrados por módulos en $\mathcal{C}$. Esto es, un R-módulo no cero M está en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ si existe una cadena finita

$$F: \quad M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_{m-1} \supseteq M_m = 0 \tag{1.1}$$

de R-submódulos de M tales que M_i/M_{i+1} es isomorfo a un módulo en $\mathcal{C}$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. A la cadena finita F de M dada en (1.1) se le conoce como una $\mathcal{C}$-filtración de M. En particular, si $\mathcal{C} = \varnothing$ entonces $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{0\}$. En resumen,

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{X \in R - mod : X \text{ tiene una } \mathcal{C} - \text{filtración}\}.$$

Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos subcategorías plenas de $R{-}mod$. Decimos que $Ext^1_R(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ si $Ext^1_R(X, Y) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Otras categorías relacionadas a $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ son las siguientes:

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \{X \in R - mod : Ext^1_R(\mathcal{F}(\mathcal{C}), X) = 0\},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{X \in R - mod : Ext^1_R(X, \mathcal{F}(\mathcal{C})) = 0\}.$$

En esta tesina trabajaremos con álgebras estándarmente estratificadas a la derecha A. Por ello a continuación A denotará una k-álgebra (de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado). Denotamos por $mod - A$ a la categoría de los A-módulos derechos finitamente generados. En este trabajo nuestros A-módulos derechos siempre serán finitamente generados. Por comodidad, algunas veces sólo diremos que M es un A-módulo, en lugar de un A-módulo derecho finitamente generado.

En lo que sigue daremos la definición de módulo estándar y de álgebra estándarmente estratificada derecha, así como sus principales propiedades. Para ello, empezaremos recordando algunos resultados básicos (ver [14]).

Por el Teorema de Krull-Schmidt sabemos que A tiene una descomposición:

$$A_A = P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(n) \tag{1.2}$$

donde cada $P(i)$ es un A-módulo proyectivo inescindible derecho. Además esta descomposición es única (salvo isomorfismo). Por ello, se dice que (1.2) es la descomposición de A en suma directa de A-módulos proyectivos inescindibles. O bien, la descomposición de A.

Definición 1.1.3. *Una k-álgebra A es básica si los proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición satisfacen que $P(i) \cong P(j)$ sólo si $i = j$.*

A partir de aquí sólo consideraremos k-algebras básicas (de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado). Pero por conveniencia sólo diremos que A es una k-ágebra.

Consideremos la descomposición de A en suma directa de A-módulos proyectivos inescindibles

$$A_A = P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(n)$$

y denotemos por $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ al conjunto de los primeros n números naturales junto con el orden total natural $\leqslant$ (fijo). Se sabe que:

1) Si $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus \cdots \oplus e_nA$ donde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos. Entonces, $P(i) = e_iA$ para todo $i \in \Omega_n$.

2) El conjunto $\{S(i) = P(i)/Rad\, P(i)\}_{i\in\Omega_n}$ es una lista completa de todos los A-módulos simples derechos (salvo isomorfismo).

3) $P(i)$ es la cubierta proyectiva del A-módulo simple $S(i)$ para $i \in \Omega_n$.

4) $Rad\,(P(i))$ es un submódulo maximal de $P(i)$. Luego, $Rad\,(P(i))$ es el único A-submódulo maximal de $P(i)$ para $i \in \Omega_n$.

Procedemos ahora a dar la definición de módulo estándar.

Definición 1.1.4. *Sean A una k-álgebra y $A_A = P(1)\oplus P(2)\oplus\cdots\oplus P(n)$ su descomposición en suma directa de A-módulos proyectivos inescindibles.*

1) Denotamos por $U(i)$ a la suma de todas las imágenes de R-homomorfismos $f : P(j) \to P(i)$ con $j > i$. Es decir,
$$U(i) = \sum_{\substack{f:P(j)\to P(i)\\ j>i}} Im(f),$$

2) Para $i \in \Omega_n$ denotamos por $\Delta(i) := P(i)/U(i)$, y decimos que $\Delta(i)$ es el i-ésimo A-módulo estándar derecho.

3) Denotamos por $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i\in\Omega_n}$. A este conjunto se le conoce como el conjunto de los A-módulos estándar derechos.

4) Denotamos por $\mathcal{F}(\Delta)$ a la subcategoría plena de $mod - A$ que consta del A-módulo derecho cero y de todos los $0 \neq M \in mod - A$ que tienen una Δ-filtración. A la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ se le conoce como la categoría de los A-módulos buenos derechos.

Observación 1.1.5.

1) Dado que A es una álgebra básica tenemos que $U(i)$ es un submódulo propio de $P(i)$, para todo $i \in \Omega_n$.

2) Nótese que la definición del i-ésimo módulo estándar $\Delta(i)$ depende del orden $\leqslant$ (que indexa a los A-módulos proyectivos inescindibles) que ya hemos fijado en el conjunto Ω_n.

Los siguientes resultados establecen algunas de las propiedades que satisfacen los A-módulos estándar.

Lema 1.1.6. *Sean A una k-álgebra y $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i\in\Omega_n}$ el conjunto de A-módulos estándar derechos.*

1) *Sea $X \in mod - A$. Entonces, $Ext^1_R(\mathcal{F}(\Delta), X) = 0$ si y sólo si $Ext^1_R(\Delta(i), X) = 0$ para todo $i \in \Omega_n$.*

2) *Si $\Delta(i) = P(i)$ para todo $i \in \Omega_n$ entonces $\mathcal{I}(\Delta) = mod - A$.*

Demostración:

Ver Lema 3.3.5 y Corolario 3.3.6 de [17].

■

Para cada $i \in \Omega_n$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{Q}^i = \{P(i)/L : L \leqslant P(i) \text{ y } P(i)/L \text{ sólo tiene factores de composición } S(j) \text{ con } j \leqslant i\}.$$

Notemos que $S(i) \in \mathcal{Q}^i$. En el conjunto $\mathcal{Q}^i$ definimos el orden parcial $\preceq$ dado por $P(i)/L \preceq P(i)/T$ si $L \supseteq T$. Con el orden definido en $\mathcal{Q}^i$ se tiene la siguiente caracterización de los A-módulos estándar.

Proposición 1.1.7. *Sea A una k-álgebra y $A_A = P(1)\oplus P(2)\oplus\cdots\oplus P(n)$ su descomposición. Sea $i \in \Omega_n$, entonces $\Delta(i)$ es el cociente maximal de $P(i)$, con respecto al orden parcial $\preceq$, que tiene sólo factores de composición $S(k)$ con $k \leqslant i$.*

Demostración:

Ver la Proposición 3.3.9. de [17].

■

Proposición 1.1.8. *Sean A una k-álgebra. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

1) *$\Delta(i)$ es inescindible para cada $i \in \Omega_n$,*

2) *$Hom_A(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ si $j > i$,*

3) *$Ext^1_A(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ si $j \geqslant i$.*

Demostración:

1) Sean $\pi : P(i) \to \Delta(i)$ y $\varphi : P(i) \to S(i)$ los epimorfismos canónicos.

   Veamos primero que φ se factoriza a través de π. Basta ver que $Ker(\pi) \subseteq Ker(\varphi)$. En efecto, para cada $j > i$ tenemos que $[S(i), S(j)] = 0$ y por 2.1.2 $Hom_A(P(j), M) = 0$ para toda $j > i$. Entonces para toda $f \in Hom_A(P(j), M)$ y para toda $j > i$ se tiene que $\varphi f = 0$. Es decir, $Im(f) \subseteq Ker(\varphi)$ para toda $f \in Hom_A(P(j), M)$ y para toda $j > i$. Luego, $U(i) = Ker(\pi) \subseteq Ker(\varphi)$.

   Dado que existe un morfismo $\psi : \Delta(i) \to S(i)$ tal que $\psi\pi = \varphi$ se tiene que $Ker(\pi) \subseteq Ker(\varphi) = rad(P(i))$. Usando 2.1.5 y 2.1.4 tenemos que $top(\Delta(i)) \cong top(P(i)) \cong S(i)$. Entonces $top(\Delta(i))$ es inescindible y por 2.1.6 concluimos que $\Delta(i)$ es inescindible.

2) Sea $\varphi : \Delta(j) \to \Delta(i)$ con $\varphi \neq 0$ y $\pi : P(j) \to \Delta(j)$ el epimorfismo canónico. Entonces $0 \neq \varphi\pi \in Hom_A(P(j), \Delta(i))$ y por 2.1.2 tenemos que $[\Delta(j), S(i)] \neq 0$. Luego, por 1.1.7 $i \leqslant j$.

3) Sea $j \geqslant i$. Consideremos la sucesión exacta corta: $0 \to U(i) \to P(i) \to \Delta(i) \to 0$. Aplicando $Hom_A(\_, \Delta(i))$ a la sucesión anterior obtenemos la sucesión exacta

   $Hom_A(\Delta(j), \Delta(i)) \to Hom_A(P(j), \Delta(i)) \to Hom_A(U(j), \Delta(i)) \to Ext^1_A(\Delta(j), \Delta(i)) \to Ext^1_A(P(j), \Delta(i)) = 0$

   Veamos que $Hom_A(U(j), \Delta(i)) = 0$. Observemos que si $U(j) = 0$ se tiene que $\Delta(j) = P(j)$ y por lo tanto $Ext^1_A(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$. Supongamos $U(j) \neq 0$ y sea $\psi : P(\lambda) \to \Delta(i)$ con $\lambda > j$, entonces por 2.1.2 $[\Delta(i), S(\lambda)] \neq 0$ y por 1.1.7 $j < \lambda \leqslant i$ lo cual contradice $j \geqslant i$. Luego, $Hom_A(U(j), \Delta(i)) = 0$ y por lo tanto, $Ext^1_A(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ para $j \geqslant i$.

■

Una vez que hemos definido el concepto de A-módulo estándar y enunciado sus principales propiedades, procedemos a dar la definición de k-álgebra estándarmente estratificada a la derecha.

Definición 1.1.9. *Sea A una k-álgebra y $\leqslant$ el orden total natural en Ω_n. Decimos que $(A, \leqslant)$ es una k-álgebra estándarmente estratificada a la derecha si $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$.*

Ejemplo 1.1.10. *Consideremos el siguiente carcaj*

$$3 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\gamma} 4$$

y el ideal admisible $I = \langle \beta\gamma \rangle$. Sea $A = kQ/I$ se tiene que los A-módulos proyectivos inescindibles son:

$$P(1): \quad 1 \qquad P(2): \quad \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \beta \\ 1 \end{array} \qquad P(3): \quad \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \alpha \\ 1 \end{array} \qquad P(4): \quad \begin{array}{c} 4 \\ \downarrow \gamma \\ 2 \end{array}$$

Usando 1.1.7 tenemos que $\Delta(i) = P(i)$ para todo $i \in \Omega_4$. Por lo tanto, $(A, \leqslant)$ es una k-álgebra estándarmente estratificada a la derecha.

1.2. Sistemas Estratificantes

En esta sección introduciremos el concepto de sistema estratificante y enunciaremos sus principales propiedades. Recordamos que R es una k-álgebra (de dimensión finita, básica sobre un campo k algebraicamente cerrado) y $R-mod$ es la categoría de los R-módulos izquierdos finitamente generados sobre una álgebra R.

Para dar la definición de sistema estratificante consideraremos el siguiente contexto.

R es una k-álgebra, $\Omega_t = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de los primeros t números naturales con el orden total natural $\leqslant$ (fijo).

Definición 1.2.1. *Sean $\theta = \{\theta(i)\}_{i\in\Omega_t}$ un conjunto de R-módulos (no cero) y $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i\in\Omega_t}$ un conjunto de R-módulos inescindibles. El sistema $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ es un sistema estratificante de talla t si se cumple lo siguiente:*

1) $Hom_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ para $j > i$,

2) Para cada $i \in \Omega_t$ existe una sucesión exacta

$$0 \to \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \to Z(i) \to 0$$

tal que $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j < i\})$,

3) $Ext^1_R(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$, donde $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$.

Directamente de la definición anterior se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t. Se tiene que:*

1) Para toda $i \in \Omega_t$, el funtor $Hom_R(\_, Y(i))$ es exacto en $\mathcal{F}(\theta)$.

2) $Hom_R(\theta(i + s), Z(i)) = 0$ para todo $s \geqslant 0$.

3) $Hom_R(\theta(i + s), Y(i)) = 0$ para todo $s \geqslant 1$.

Demostración:

Ver los lemas 3.2.7, 3.2.8 y 3.2.9 de [17].

■

Definición 1.2.3. *Sea $\beta : \theta(i) \to X$ con $X \in \mathcal{I}(\theta)$. Decimos que β es una $\mathcal{I}(\theta)$-aproximación izquierda de $\theta(i)$ si para cualquier $\beta' : \theta(i) \to X'$ con $X' \in \mathcal{I}(\theta)$ existe $\xi : X \to X'$ que satisface $\beta' = \xi\beta$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \theta(i) \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta'"'] & X \arrow[d, "\xi"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

Lema 1.2.4. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante. Para cada $i \in \Omega_t$ el R-homomorfismo $\alpha_i : \theta(i) \to Y(i)$ dado en 1.2.1 es una $\mathcal{I}(\theta)$-aproximación izquierda de $\theta(i)$.*

Demostración:

Sea $X \in \mathcal{I}(\theta)$. Consideremos la sucesión exacta corta dada en 1.2.1

$$0 \to \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \to Z(i) \to 0$$

Como $X \in \mathcal{I}(\theta)$, $Ext^1_R(Z(i), X) = 0$, de donde

$$0 \to Hom_R(Z(i), X) \to Hom_R(Y(i), X) \overset{Hom_R(\alpha_i, X)}{\to} Hom_R(\theta(i), X) \to 0$$

es un sucesión exacta corta. Luego, $Hom_R(\alpha_i, X)$ es un epimorfismo. Es decir, para todo $f : \theta(i) \to X \in Hom_R(\theta(i), X)$ existe $g : Y(i) \to X \in Hom_R(Y(i), X)$ tal que $g\alpha_i = Hom_R(\alpha_i, X)(g) = f$.

■

Definición 1.2.5. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t, $M \in \mathcal{F}(\theta)$ y*

$$F : \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

una θ-filtración de M. Para cada $i \in \Omega_t$, definimos la multiplicidad de $\theta(i)$ en la filtración F de M como el número de cocientes que son isomorfos a $\theta(i)$. Denotamos a la multiplicidad de cada $\theta(i)$ en M con respecto a la filtración F por $[M : \theta(i)]$.

El siguiente resultado muestra que la multiplicidad de cada $\theta(i)$ en M, no depende de la filtración.

Proposición 1.2.6. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t. Para $M \in \mathcal{F}(\theta)$ la multiplicidad de cada $\theta(i)$ en una θ-filtración de M es independiente de la filtración.*

Demostración:

Como $\mathcal{F}(\theta) \subseteq R - mod$ y R es una k-álgebra de dimensión finita, si $M \in \mathcal{F}(\theta)$, se tiene que M, en particular, es un k-espacio vectorial de dimensión finita y por lo tanto $Hom_R(M, Y(i))$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita. Denotamos por $d_{ij} = dim\, Hom_R(\theta(i), Y(j))$ (como k-espacio vectorial). Sea $D = (d_{ij})$ la matriz con entradas d_{ij}. Por 1.2.2 se tiene que es D una matriz triangular superior y $d_{ii} \neq 0$ ya que $0 \neq \alpha_i \in Hom_R(\theta(i), Y(i))$. Sea F una θ-filtración de M

$$F : \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \to M_{n-1} \to M_{n-2} \to M_{n-2}/M_{n-1} \to 0$$

Aplicando el funtor $Hom_R(\_, Y(i))$ a la sucesión anterior por 1.2.2 se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \to Hom_R(M_{n-2}/M_{n-1}, Y(i)) \to Hom_R(M_{n-2}, Y(i)) \to Hom_R(M_{n-1}, Y(i)) \to 0$$

Como $M_{n-1} \cong \theta(j_1)$ y $M_{n-2}/M_{n-1} \cong \theta(j_2)$ con $j_1, j_2 \in \Omega_t$ tenemos $dim\, Hom_R(M_{n-2}, Y(i)) = d_{j_2 i} + d_{j_1 i}$. Ahora consideremos la sucesión exacta corta.

$$0 \to M_{n-2} \to M_{n-3} \to M_{n-3}/M_{n-2} \to 0$$

Por el argumento anterior $dim\, Hom_R(M_{n-3}, Y(i)) = d_{j_3 i} + d_{j_2 i} + d_{j_1 i}$. Inductivamente usando que m_j es el número de cocientes isomorfos a $\theta(j)$ en la filtración F se tiene que

$$dim\, Hom_R(M, Y(i)) = \sum_{j=1}^{t} m_j d_{ji} = (m_1, \ldots, m_t) D_i$$

donde D_i es la i-ésima columna de D.

Si $j = 1$, por 1.2.2 tenemos $dim\, Hom_R(M, Y(1)) = m_1 d_{11}$. Como $0 \neq d_{11}$ y $dim\, Hom_R(M, Y(1))$ son fijos se sigue que $m_1 = dim\, Hom_R(M, Y(1))/d_{11}$. Por lo tanto, m_1 está en términos de $dim\, Hom_R(M, Y(1))$ y d_{11}. Continuando por inducción sobre el conjunto de índices

$$dim\, Hom_R(M, Y(k)) = \sum_{j=1}^{n} m_j d_{jk} = m_k d_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} m_j d_{jk}$$

Como m_j esta determinado para $1 \leqslant j \leqslant k-1$, se sigue que m_k está en términos de m_j para $1 \leqslant j \leqslant k-1$, de la $dim\, Hom_R(M, Y(k))$ y de d_{kk}.

■

Observación 1.2.7. *De 1.2.1 y de 1.2.6 tenemos que* $[Y(i) : \theta(i)] = 1$ *y* $[Y(i) : \theta(j)] = 0$ *para* $j > i$. *Por lo tanto,* $Y(i) \ncong Y(j)$ *si* $i \neq j$.

Definición 1.2.8. *Sean* $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *un sistema estratificante de talla* t *y* $M \in \mathcal{F}(\theta)$. *Definimos la* θ*-longitud de* M *y la denotamos por* $l_\theta(M)$ *como:*

$$l_\theta(M) = \sum_{i=1}^{t} [M : \theta(i)].$$

Con el propósito de demostrar la Proposición 1.2.14 daremos la siguiente definición y enunciaremos los siguientes resultados.

Definición 1.2.9. *Sean* $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *un sistema estratificante de talla* t *y* $M \in \mathcal{F}(\theta)$. *Definimos* $max(M)$ *como el mayor índice* j *tal que* $[M : \theta(j)] \neq 0$.

Lema 1.2.10. *Sean* $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *un sistema estratificante de talla* t, $M, N, K \in \mathcal{F}(\theta)$ *y consideremos la siguiente sucesión exacta corta en* $R - mod$

$$0 \to K \to M \to N \to 0.$$

Entonces $max(M) =$ *máximo* $\{max(K), max(N)\}$.

Demostración:

Como $N \cong M/K$ bastará demostrar que el lema se cumple para la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to K \to M \to M/K \to 0$$

Sea F una θ-filtración de K

$$F: \qquad K = K_0 > K_1 > \cdots > K_{s-1} > K_s = 0$$

donde $K_p/K_{p+1} \cong \theta(j_p)$ con $j_p \leqslant max(K)$ para $p = 0, 1, 2, \ldots, s-1$.

Sea G una θ-filtración de M/K

$$G: \qquad M/K = M_0/K > M_1/K > \cdots > M_{n-1}/K > M_n/K = 0$$

donde ${}^{M_q/K}/_{M_{q+1}/K} \cong \theta(j_q)$ con $j_q \leqslant max(M/K)$ para $q = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Consideremos la siguiente θ-filtración de M dada por:

$$H: M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = K > K_1 > \cdots > K_{s-1} > K_s = 0$$

se tiene que $M_q/M_{q+1} \cong \theta(j_q)$ para $q = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ y $K_p/K_{p+1} \cong \theta(j_p)$ para $p = 1, 2, \ldots, s-1$. Por lo tanto,

$$max(M) = \text{ máximo } \{max(K), max(M/K)\}.$$

■

Lema 1.2.11. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\theta)$. Supongamos $max(M) = i$. Entonces*

1) $Ext^1_R(\theta(i+s), M) = 0$ para $s \geqslant 0$.

2) Existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \theta(i)^a \to M \to N \to 0$$

donde $N \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j < i\})$.

Demostración:

1) Sea F una θ-filtración de M

$$F: \qquad M = M_0 > M_1 > M_2 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

Consideremos la sucesión

$$0 \to M_{n-1} \to M_{n-2} \to M_{n-2}/M_{n-1} \to 0$$

donde $M_{n-1} \cong \theta(j_1)$ y $M_{n-2}/M_{n-1} \cong \theta(j_2)$ donde $j_1, j_2 \leqslant i$. Aplicando el funtor $Hom_R(\theta(i+s), \_)$ a la sucesión exacta corta anterior obtenemos:

$$0 \to Hom_R(\theta(i+s), M_{n-1}) \to Hom_R(\theta(i+s), M_{n-2}) \to Hom_R(\theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \to$$
$$Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-1}) \to Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-2}) \to Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \to$$

Como $Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-1}) \cong Ext^1_R(\theta(i+s), \theta(j_1)) = 0$ (ya que $j_1 \leqslant i$) y dado que $Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \cong Ext^1_R(\theta(i+s), \theta(j_2)) = 0$ (ya que $j_2 \leqslant i$) se sigue que $Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-2}) = 0$. Inductivamente llegamos a que $Ext^1_R(\theta(i+s), M) = 0$.

2) Inducción sobre $l_\theta(M)$. Si $l_\theta(M) = 1$ se tiene que $M \cong \theta(i)$ para algún $i \in \Omega_t$ y por lo tanto la sucesión buscada es:

$$0 \to \theta(i) \to M \to 0$$

Supongamos que el lema es cierto para módulos $N' \in \mathcal{F}(\theta)$ y tales que $l_\theta(N') < n$. Sea $M \in \mathcal{F}(\theta)$ tal que $l_\theta(M) = n$. Esto es, existe F una θ-filtración de M

$$F: \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

donde $M_s/M_{s+1} \cong \theta(j_s)$ para $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Por hipótesis de inducción existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \theta(j)^{a_{M_1}} \to M_1 \to M' \to 0$$

donde $j = max(M_1)$ y $M_1/\theta(j)^{a_{M_1}} \cong M' \in \mathcal{F}\{\theta(l) : l < j\}$. Se tienen los siguientes casos:

a) $M/M_1 \cong \theta(j_1)$ donde $j_1 < j$. Como $j_1 < j$ se tiene que $max(M) = j$. Consideremos las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \to \theta(j)^{a_{M_1}} \to M \to M/\theta(j)^{a_{M_1}} \to 0 \tag{1.3}$$

$$0 \to M_1/\theta(j)^{a_{M_1}} \to M/\theta(j)^{a_{M_1}} \to M/M_1 \to 0 \tag{1.4}$$

Como $max(M_1/\theta(j)^{a_{M_1}}) < j$ y $max(M/M_1) < j$, por 1.2.10 se tiene que $M/\theta(j)^{a_{M_1}} \in \mathcal{F}\{\theta(l) : l < j\}$. Por lo tanto, la sucesión exacta (1.3) es la sucesión buscada.

b) $M/M_1 \cong \theta(j_1)$ donde $j_1 = j$. Como $j_1 = j$ se tiene que $max(M) = j = max(M_1)$. Usando 1.2.11 la siguiente sucesión exacta se escinde

$$0 \to M_1 \to M \to M/M_1 \to 0$$

de donde $M = M_1 \oplus \theta(j)$ y $M/\theta(j)^{a_{M_1}+1} \cong (M_1 \oplus \theta(j))/\theta(j)^{a_{M_1}+1} \cong M_1/\theta(j)^{a_{M_1}} \in \mathcal{F}\{\theta(l) : l < j\}$. Es decir,

$$0 \to \theta(j)^{a_{M_1}+1} \to M \to M/\theta(j)^{a_{M_1}+1} \to 0$$

es la sucesión exacta buscada.

c) $M/M_1 \cong \theta(j_1)$ donde $j_1 > j$. Como $j_1 > j$ se tiene que $max(M) = j_1$. Como $max(M_1) = j$ usando 1.2.11 la siguiente sucesión exacta corta se escinde.

$$0 \to M_1 \to M \to M/M_1 \to 0$$

Es decir, $M \cong M_1 \oplus \theta(j_1)$ y $M/\theta(j_1) \cong (M_1 \oplus \theta(j_1))/\theta(j_1) \cong M_1 \in \mathcal{F}\{\theta(l) : l \leqslant j\}$. De donde la sucesión exacta corta buscada es

$$0 \to \theta(j_1) \to M \to M/\theta(j_1) \to 0.$$

■

Definición 1.2.12. *Sea M en $R - mod$. Denotamos por $add(M)$ a la subcategoría plena de $R - mod$ cuyos objetos son:*

$$obj(add(M)) = \{X \in R - mod : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ y } T \in R - mod \text{ tal que } X \oplus T \cong M^n\}.$$

Proposición 1.2.13. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t, $M \in \mathcal{F}(\theta)$ y $max(M) = i$. Entonces existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to M \to Y' \to M' \to 0$$

donde $M' \in \mathcal{F}(\theta)$, $max(M') < i$ y $Y' \in add(Y)$.

Demostración:

Hacemos la demostración por inducción sobre el $max(M)$. Supongamos que $max(M) = 1$, usando 1.2.11 se tiene que $M \cong \theta(1)^n$. Como $\theta(1) = Y(1)$ la sucesión exacta corta

$$0 \to M \to Y(1)^n \to 0 \to 0$$

cumple con las condiciones del lema. Supongamos que el lema se cumple para $L \in \mathcal{F}(\theta)$ tal que $max(L) < i$. Sea $M \in \mathcal{F}(\theta)$ tal que $max(M) = i$. Por 1.2.11 tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \to \theta(i)^a \to M \to N \to 0$$

donde $N \in \mathcal{F}(\theta)$ y $max(N) < i$. Por hipótesis de inducción, existe una sucesión exacta corta:

$$0 \to N \xrightarrow{f} \bar{Y} \to \bar{N} \to 0$$

donde $\bar{Y} \in add(Y)$ y $max(\bar{N}) < max(N)$. Consideremos el diagrama conmutativo push-out

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \theta(i)^a \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y(i)^a \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & Z(i)^a \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z(i)^a \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $N \in \mathcal{F}(\theta)$ y $Ext^1_R(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$ el segundo renglón se escinde. Luego, $W \cong Y(i)^a \oplus N$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to W/M \to (Y(i)^a \oplus \bar{Y})/M \to (Y(i)^a \oplus \bar{Y})/W \to 0$$

Como $W/M \cong Z(i)^a$ y $(Y(i)^a \oplus \bar{Y})/W \cong \bar{N}$ por 1.2.10, $max((Y(i)^a \oplus \bar{Y})/M) < i$. Tomando las inclusiones f y g tenemos la inclusión $fg : M \to Y(i)^a \oplus \bar{Y}$ donde $Y(i)^a \oplus \bar{Y} \in add(Y)$. Por lo que la sucesión

$$0 \to M \to Y(i)^a \oplus \bar{Y} \to (Y(i)^a \oplus \bar{Y})/M \to 0$$

cumple con las condiciones del lema.

■

Terminamos esta sección con el siguiente resultado.

Proposición 1.2.14. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\theta)$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_k \to 0$$

donde $Y_r \in add(Y)$ para $r \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ y $k < max(M)$.

Demostración:

Se sigue inductivamente aplicando la Proposición 1.2.13.

■

1.3. El álgebra $End_R(Y)$

En esta sección demostraremos que dado un sistema estratificante $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ de talla t, el álgebra $(A = End_R(Y), \leqslant^{op})$ es estándarmente estratificada a la derecha donde $\leqslant^{op}$ es el orden opuesto en Ω_t. Cabe aclarar que en $A = End_R(Y)$ estamos haciendo la composición a la derecha. Es decir, dados $f : M \to N$ y $g : N \to L$ la composición es $fg : M \to L$. Iniciaremos esta sección con la siguiente proposición, la cual usaremos más adelante.

Proposición 1.3.1. *Sean A una k-algebra y $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i\in\Omega_n}$ el conjunto de A-módulos estándar derechos. Si $\Delta(i)_A = P(i)_A$ para toda $i \in \Omega_n$ entonces considerando $\Delta(i) = Y(i)$ para toda $i \in \Omega_n$ se tiene que $(\Delta, \underline{Y}, \leqslant)$ es un sistema estratificante de talla n.*

Demostración:

Se sigue directamente de la definición 1.2.1 y de la Proposición 1.1.8.

■

Lema 1.3.2. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t, $A = End_R(Y)$ y el funtor $F := Hom_R(\_, Y) : R - mod \to mod - A$. Tenemos que*

1) *Si $F(Y(i)) \cong F(Y(j))$ entonces $Y(i) \cong Y(j)$.*

2) *Si $M \in \mathcal{F}(\theta)$ entonces $F(M)$ tiene una $F(\theta)$-filtración de A-módulos. Además, si $max(M) = i$ se tiene que $max(F(M)) = i$.*

Demostración:

Ver los Lemas 3.3.10 y 3.3.11 de [17].

■

Del lema anterior tenemos la siguiente observación.

Observación 1.3.3. *Dado $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t, tenemos que $A = End_R(Y)$ es una k-álgebra básica.*

Teorema 1.3.4. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t. Entonces $A = End_R(Y)$ es estandarmente estratificada derecha, respecto a $\leqslant^{op}$, (donde $\leqslant^{op}$ es el orden natural opuesto en Ω_t). Más aún, $\Delta(i) = Hom_R(\theta(i), Y)$ para todo $i \in \Omega_t$.*

Demostración:

Para cada $i \in \Omega_t$ denotamos por $P(i) = Hom_R(Y(i), Y)$ al A-módulo proyectivo inescindible derecho. Veamos primero que cada $P(i)_A$ tiene una $F(\theta)$-filtración. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \to Z(i) \to 0$$

donde $Z(i) \in \mathcal{F}\{\theta(j) : j < i\}$. Aplicando el funtor $F = Hom_R(\_, Y)$ a la sucesión exacta anterior tenemos:

$$0 \to Hom_R(Z(i), Y) \xrightarrow{l} Hom_R(Y(i), Y) \xrightarrow{F(\alpha_i)} Hom_R(\theta(i), Y) \to 0$$

Por 1.3.2 se tiene que $Hom_R(Z(i), Y)$ tiene una $F(\theta)$-filtración y por lo tanto $P(i)$ tiene una $F(\theta)$-filtración.

Para probar el resultado mostraremos que $F(\theta(i)) = \Delta(i)_A$ con respecto al orden opuesto $\leqslant^{op}$. Esto es, vamos a probar que $Hom_R(\theta(i), Y)$ es el cociente maximal de $P(i)$ con factores de composición $S(j)$ con $j \geqslant i$.

Como $Hom_A(P(j), F(\theta(i))) \cong Hom_R(\theta(i), \theta(j))$ (ver [4] 1.1.3) y por 1.2.2 se sigue que $Hom(P(j), F(\theta(i))) = 0$ para $j < i$. Por lo tanto, por 2.1.2 se tiene que $[F(\theta(i)), S(j)] = 0$ para $j < i$. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \to U(i) \to P(i) \to \Delta(i) \to 0$$

donde $U(i) = \sum\limits_{f:P(j)\to P(i)} Im\, f$ donde $j < i$.
Sea $j < i$ y $g : P(j) \to P(i)$. Mostraremos que $Im\, g \subseteq F(Z(i))$. Como $Hom(P(j), P(i)) \cong Hom_R(Y(i), Y(j))$ (ver [4] 1.1.3), entonces existe $h : Y(i) \to Y(j)$ tal que $F(h) = g$.

Por 1.2.2 se tiene que $Hom_R(\theta(i), Y(j)) = 0$. Por lo tanto, $\alpha_i h = 0$ y $0 = F(\alpha_i h) = F(h)F(\alpha_i) = gF(\alpha_i)$ y se sigue que $Im\, g \subseteq F(Z(i))$ ya que $F(Z(i)) \cong Im\, l = KerF(\alpha_i)$. Por lo tanto, $U(i) \subseteq F(Z(i))$ de donde $F(\theta(i)) \subseteq \Delta(i)$.

Veamos que $Im\, l \subseteq U(i)$. Sea F una $F(\theta)$-filtración de $F(Z(i))$

$$F: \qquad F(Z(i)) = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_m = 0$$

donde $M_s/M_{s+1} \cong F(\theta(j_s))$ para $s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(j_{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-1}))}"'] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"'] & P(j_{m-2}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-2}))}"] \arrow[ld, dashed, "\pi_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{m-1} \arrow[r, "i_1"] & M_{m-2} \arrow[r] & M_{m-2}/M_{m-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $M_{m-1} \cong F(\theta(j_{m-1}))$, $M_{m-2}/M_{m-1} \cong F(\theta(j_{m-2}))$ y $P_2 = P(j_{m-1}) \oplus P(j_{m-2})$. Tenemos que $\beta_2 := (\pi_{F(Z(j_{m-1}))} i_1, \pi_2) : P_2 \to M_{m-2}$ es un epimorfismo. Además $j_{m-1} < i$ y $j_{m-2} < i$. De manera análoga obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"'] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"'] & P(j_{m-3}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-3}))}"] \arrow[ld, dashed, "\pi_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{m-2} \arrow[r, "i_2"] & M_{m-3} \arrow[r] & M_{m-3}/M_{m-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$P_3 = P_2 \oplus P(j_{m-3})$. Donde $\beta_3 = (\beta_2 i_2, \pi_3) : P_3 \to M_{m-3}$ es un epimorfismo y $j_{m-3} < i$.

Continuando con este procedimiento se tiene $P_m = \bigoplus_{k=1}^{m} P(j_{m-k})$ con $j_{m-k} < i$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$ y un epimorfismo $\beta_m : P_m \to F(Z(i))$. Tenemos el morfismo $\beta_m l : P_m \to P(i)$ donde $Im\, \beta_m l = Im\, l$, lo cual implica que $F(Z(i)) \cong Im\, l \subseteq U(i)$. Podemos concluir que $F(Z(i)) \cong U(i)$. Por lo tanto $\Delta(i)_A = Hom_R(\theta(i), Y)$.

■

Ejemplo 1.3.5. *Consideremos el siguiente carcaj C:*

$$3 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\gamma} 4$$

y el ideal admisible $I = \langle \beta\gamma \rangle$ de kC. Sea $R = kQ/I$ se tiene que los R-módulos proyectivos inescindibles son:

$$P(1): \quad 1 \qquad P(2): \quad \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ 1 \end{array} \qquad P(3): \quad \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ 1 \end{array} \qquad P(4): \quad \begin{array}{c} 4 \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ 2 \end{array}$$

Por 1.1.7 tenemos que $\Delta(i) = P(i)$ para todo $i \in \Omega_4$ y por 1.3.1 se tiene que $\Delta(i) = Y(i)$ para $i \in \Omega_4$. Más aún, la k-álgebra $A = End_R(\bigoplus_{j=1}^{4} Y(j))$ es isomorfa a $C' = kC/I$, donde C' es el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} 4 & 3 & 2 \arrow[ll, bend right, "c"'] & 1 \arrow[l, "a"] \arrow[ll, bend right, "b"'] \end{tikzcd}$$

e $I = \langle ac \rangle$ (donde la multiplicación está dada a la derecha). Se tiene que

$$P(4): \quad 4 \qquad P(3): \quad 3 \qquad P(2): \quad \begin{array}{c} 2 \\ {\scriptstyle c}\downarrow \\ 4 \end{array} \qquad P(1): \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

son los A-módulos proyectivos derechos. Dado que estamos considerando el orden opuesto $\leqslant^{op}$ en Ω_4, por 1.1.7 tenemos que $\Delta(4)_A = P(4)$, $\Delta(3)_A = P(3)$, $\Delta(2)_A = P(2)$, $\Delta(1)_A = P(1)$. Por lo tanto, $(A, \leqslant^{op})$ es una k-álgebra estándarmente estratificada a la derecha.

1.4. Propiedades de $\mathcal{F}(\theta)$

En esta sección demostraremos que la categoría $\mathcal{F}(\theta)$ es contravariantemente equivalente a la categoría $\mathcal{F}(\Delta_A)$ (ver Teorema 1.4.6).

Proposición 1.4.1. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t en $R-mod$, $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$, $A = End_R(Y)$ y el funtor $F := Hom_R(\_, Y) : R-mod \to mod-A$. Entonces la restricción de F a $\mathcal{F}(\theta)$, $F\mid_{\mathcal{F}(\theta)}: \mathcal{F}(\theta) \to mod-A$ es un funtor exacto y $F(\mathcal{F}(\theta)) \subseteq \mathcal{F}(\Delta_A)$.*

Demostración:

Como $Ext^1_R(\_, Y)\mid_{\mathcal{F}(\theta)} = 0$ se tiene que $F\mid_{\mathcal{F}(\theta)}: \mathcal{F}(\theta) \to mod-A$ es un funtor exacto. Además, por 2.1.3 y 1.3.4 se sigue que $F(\mathcal{F}(\theta)) \subseteq \mathcal{F}(\Delta_A)$.

■

Definición 1.4.2. *Sean R una k-álgebra, $Y \in R-mod$ y $A := End({}_RY)$. Consideremos los funtores $F := Hom_R(\_, Y) : R-mod \to mod-A$ y $G := Hom_A(\_, Y) : mod-A \to R-mod$. Recordamos que la transformación natural de funtores valuación*

1) $\epsilon : 1_{R-mod} \to GF$ se define como la familia de morfismos

$$\epsilon := \{\epsilon_X : X \to G(F(X))\}_{X \in R-mod},$$

donde $\epsilon_X(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in X$ y $f \in Hom_R(X, Y)$.

2) $\epsilon' : 1_{mod-A} \to FG$ se define como la familia de morfismos

$$\epsilon' := \{\epsilon'_X : X \to F(G(X))\}_{X \in mod-A},$$

donde $\epsilon'_X(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in X$ y $f \in Hom_A(X, Y)$.

Lema 1.4.3. *Sean R una k-álgebra, $Y \in R-mod$ y $A := End({}_RY)$. Consideremos los funtores $F := Hom_R(\_, Y) : R-mod \to mod-A$, $G := Hom_A(\_, Y) : mod-A \to R-mod$ y $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta en $R-mod$ que se escinde. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $\epsilon_M : M \to G(F(M))$ es un monomorfismo (respectivamente epimorfismo).

2) $\epsilon_{M'} : M' \to G(F(M'))$ y $\epsilon_{M''} : M'' \to G(F(M''))$ son monomorfismos (respectivamente epimorfismos).

Demostración:

Dado que F y G son funtores aditivos, la sucesión

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

se escinde y $\epsilon : 1_{R-mod} \to GF$ es una transformación natural tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\eta\ : 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{M'}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_M"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{M''}"] & 0 \\
GF(\eta) : 0 \arrow[r] & G(F(M')) \arrow[r] & G(F(M)) \arrow[r] & G(F(M'')) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\eta'\ : 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{M''}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_M"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{M'}"] & 0 \\
GF(\eta') : 0 \arrow[r] & G(F(M'')) \arrow[r] & G(F(M)) \arrow[r] & G(F(M')) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\eta, \eta', GF(\eta)$ y $GF(\eta')$ son sucesiones exactas cortas que se escinden.

1) ⇒ 2) Supongamos que ϵ_M es un monomorfismo (respectivamente epimorfismo). Aplicando el lema de la serpiente a los diagramas anteriores se tiene que $Ker(\epsilon_{M'}) = 0$ y $Ker(\epsilon_{M''}) = 0$ (respectivamente $Coker(\epsilon_{M''}) = 0$ y $Coker(\epsilon_{M'}) = 0$).

2) ⇒ 1) Aplicando el lema de la serpiente en el primer diagrama tenemos la sucesión exacta $Ker(\epsilon_{M'}) \to Ker(\epsilon_M) \to Ker(\epsilon_{M''})$ (respectivamente $Coker(\epsilon_{M'}) \to Coker(\epsilon_M) \to Coker(\epsilon_{M''})$). Como $Ker(\epsilon_{M'}) = 0 = Ker(\epsilon_{M''})$ (respectivamente $Coker(\epsilon_{M'}) = 0 = Coker(\epsilon_{M''})$) se sigue que $Ker(\epsilon_M) = 0$ (respectivamente $Coker(\epsilon_M) = 0$).

■

Corolario 1.4.4. *La función evaluación ϵ_X es un isomorfismo para cualquier $X \in \mathcal{F}(\theta)$.*

Demostración: Tenemos los siguientes casos:

1) Caso $X = Y$. Si $\epsilon_Y(x) = 0$ entonces $0 = \epsilon_Y(x)(1) = 1(x) = x$. Si $f \in G(F(Y))$ entonces $\forall\, g \in A$ se tiene que $f(g) = f(g1) = gf(1)$ por lo que $\epsilon_Y(f(1))(g) = gf(1) = f(g)$ $\forall\, g \in A$. Por lo tanto, ϵ_X es un isomorfismo.

2) Caso $X = Y^m$ con $m \in \mathbb{N}$. Usando que los funtores F y G son aditivos, tenemos $F(Y^m) = Hom_R(Y^m, Y) \cong Hom_R(Y, Y)^m = A^m$ y por lo tanto $G(F(Y^m)) \cong Hom_A(A^m, Y) \cong Hom_A(A, Y)^m \cong Y^m$. Por lo tanto, ϵ_X es un isomorfismo.

3) Caso $X \in add(Y)$. Sean $m \in \mathbb{N}, N \in R-mod$ tales que $X \oplus N \cong Y^m$. Usando que F y G son aditivos, tenemos $X \oplus N \cong Y^m \cong G(F(Y^m)) \cong G(F(X) \oplus F(N)) \cong G(F(X)) \oplus G(F(N))$. Considerando el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $R-mod$

$$\begin{tikzcd}
\epsilon : 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_X"] & Y^m \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{Y^m}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_N"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & G(F(X)) \arrow[r] & G(F(Y^m)) \arrow[r] & G(F(N)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como ϵ es una sucesión exacta que se escinde y ϵ_{Y^m} es un isomorfismo por el caso 2) por 1.4.3 se sigue que ϵ_X y ϵ_N son isomorfismos.

4) Caso general. La prueba se hará por inducción sobre $max(X)$. Sea $0 \neq X \in \mathcal{F}(\theta)$. Si $max(X) = 1$ entonces $X \cong \theta(1)^m \cong Y(1)^m \in add(Y)$ y por el caso 3) se sigue que ϵ_X es un isomorfismo. Supongamos que $1 < max(X)$, por 1.2.13 existe una sucesión exacta corta en $\mathcal{F}(\theta)$
$$0 \to X \to Y_0 \to N \to 0$$
donde $Y_0 \in add(Y)$ y $max(N) < max(X)$. Como $F\mid_{\mathcal{F}(\theta)}$ es exacto se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $R-mod$

$$\begin{tikzcd}
 & Ker(\epsilon_X) \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_X"] & Y_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{Y^m}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G(F(X)) \arrow[r] \arrow[d] & G(F(Y^m)) \arrow[r] \arrow[d] & G(F(N)) \arrow[d] & \\
 & Coker(\epsilon_X) & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción ϵ_{Y_0} y ϵ_N son isomorfismos. Luego, por el lema de la serpiente ϵ_X es un isomorfismo.

■

Lema 1.4.5. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t en $R-mod$, $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ y $A = End_R(Y)$. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

1) $Ext^1_A(N, Y) = 0$ para cada $N \in \mathcal{F}(\Delta_A)$.

2) La restricción $G\mid_{\mathcal{F}(\Delta_A)}: \mathcal{F}(\Delta_A) \to R-mod$ es un funtor exacto y además $G(\mathcal{F}(\Delta_A)) \subseteq \mathcal{F}(\theta)$.

3) La aplicación $\epsilon'_X : X \to FG(X)$ es un isomorfismo en $mod-A$ para cualquier $X \in \mathcal{F}(\Delta_A))$.

Demostración:

1) Basta ver que $Ext^1_A(\Delta(i), Y) = 0$ para todo $i \in \Omega_t$. Consideremos la sucesión exacta en $R-mod$
$$0 \to \theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0$$
Aplicando el funtor F a la sucesión anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta en $A-mod$ (ver 1.4.1)
$$0 \to F(Z(i)) \to P(i) \to \Delta(i) \to 0$$

Dado que $P(i)$ es proyectivo, aplicando el funtor G y usando el isomorfismo de 1.4.4 tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $R - mod$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \theta(i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_{\theta(i)}"] & Y(i) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\epsilon_{Y(i)}"] & Z(i) \arrow[rr] \arrow[d, "\epsilon_{Z(i)}"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & G(\Delta(i)) \arrow[r, "f'"] & G(P(i)) \arrow[r, "g'"] & G(F(Z(i))) \arrow[r] & Ext^1_A(\Delta(i), Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $g, \epsilon_{Y(i)}$ y $\epsilon_{Z(i)}$ son epimorfismos se sigue que g' es un epimorfismo. Por lo tanto, $Ext^1_A(\Delta(i), Y) = 0$ para todo $i \in \Omega_t$.

2) Por el inciso anterior se tiene que $G \mid_{\mathcal{F}(\Delta_A)}: \mathcal{F}(\Delta_A) \to R - mod$ es exacto. Luego, por 2.1.3 y 1.4.4 se sigue que $G(\mathcal{F}(\Delta_A)) \subseteq \mathcal{F}(G(\Delta_A)) = \mathcal{F}(\theta)$.

3) Sea $X \in mod - A$. La prueba se hará por inducción sobre la Δ_A-longitud de X. Si $l_{\Delta_A}(X) = 1$ entonces $X \cong \Delta(j)$ para algún $j \in \Omega_t$. Luego, por 1.3.4 y 1.4.4 tenemos que $FG(X) \cong FG(\Delta(j)) = FG(F(\theta(j))) = F(GF(\theta(j))) \cong F(\theta(j)) \cong \Delta(j)$. Ahora bien, supongamos que $l_{\Delta_A}(X) \geqslant 2$ y consideremos H una Δ_A-filtración de X

$$H: \quad X = M_0 > M_1 > \cdots > M_{m-1} > M_m = 0$$

donde $X/M_1 \cong \Delta(j_1)$ para algún $j_1 \in \Omega_t$ y $l_{\Delta_A}(M_1) < m$. Dado que los funtores $F \mid_{\mathcal{F}(\theta)}: \mathcal{F}(\theta) \to mod - A$ y $G \mid_{\mathcal{F}(\Delta_A)}: \mathcal{F}(\Delta_A) \to R - mod$ son exactos se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon'_{M_1}"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\epsilon'_X"] & \Delta(j_1) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon'_{\Delta(j_1)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & FG(M_1) \arrow[r, "f'"] & FG(X) \arrow[r, "g'"] & FG(\Delta(j_1)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción, $\epsilon'_{\Delta(j_1)}$ y ϵ'_{M_1} son isomorfismos. Luego, usando 2.1.10 se sigue que ϵ'_X es un isomorfismo.

∎

Teorema 1.4.6. *La categoría $\mathcal{F}(\theta)(\subseteq R{-}mod)$ es contravariantemente equivalente a $\mathcal{F}(\Delta_A)(\subseteq mod - A)$.*

Demostración:

Se sigue de la Proposición 1.4.1 y de los Lemas 1.4.4 y 1.4.5.

∎

Corolario 1.4.7. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t. Entonces $\theta(i)$ es inescindible para toda $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración:

El funtor $F\mid_{\mathcal{F}(\theta)}$ induce un isomorfismo de anillos $End_R(\theta(i)) \cong End_A(\Delta(i))$. Como $\Delta(i)$ es inescindible (ver 1.1.8) por 2.1.9 se sigue que $End_A(\Delta(i))$ es un anillo local. Por lo tanto, $\theta(i)$ es inescindible.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Apéndice

2.1. Módulos, Álgebras locales

Definición 2.1.1. *Sean R una k-álgebra, $M \in R-mod$ y la familia de R-submódulos de M*

$$\mathcal{M}_M := \{N : N \text{ es un submódulo maximal de } M\}.$$

El radical de M es el submódulo de M

$$rad(M) := \bigcap_{N \in \mathcal{M}_M} N$$

Proposición 2.1.2. *Sean R una k-álgebra, $i \in \Omega_n$ y $M \in R-mod$. Entonces $Hom_R(P(i), M) \neq 0$ si y sólo si $[M : S(i)] \neq 0$.*

Demostración: Ver [15], proposición 2.5.

■

Proposición 2.1.3. *Sean A y B k-álgebras, $\mathcal{C}$ una clase de objetos en $mod - A$ y $H : mod - A \to B - mod$ un funtor (covariante o contravariante) exacto. Entonces $H(\mathcal{F}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$.*

Demostración: Ver [15], proposición 3.15.

■

Definición 2.1.4. *Sea R una k-álgebra. Para cada $M \in R - mod$, definimos el top de M como el cociente $top(M) := M/rad(M)$.*

Proposición 2.1.5. *Sean A una k-álgebra y $f : M \to N$ un epimorfismo en $mod - A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *$Ker(f) \subseteq rad(M)$.*

2) *El morfismo $\bar{f} : top(M) \to top(N)$, dado por $\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}$ es un isomorfismo.*

Demostración: Ver [15], proposición 5.15.

■

Proposición 2.1.6. *Sea A una k-álgebra. Definamos la correspondencia*

$$top : mod - A \to mod - A$$

dada por $top(f) : top(X) \to top(Y)$ donde $top(f)(x) = f(x) + rad(Y)$ para todo $x \in X$ y para todo $f \in Hom_A(X, Y)$. Entonces, top es un funtor aditivo que conmuta con productos arbitrarios y preserva epimorfismos.

Demostración: Ver [15], proposición 5.24.

■

Teorema 2.1.7. *Sean A una k-álgebra. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) *A tiene un único ideal izquierdo maximal.*

2) *$rad(A)$ es el único ideal izquierdo maximal en A.*

3) *$rad(A) = A/U(A)$ donde $U(A)$ denota al conjunto de las unidades de A, es decir, a los elementos de A que son invertibles.*

4) *$A/U(A)$ es cerrado bajo suma en A.*

5) *Para cada $a \in A$, se tiene que $\{a, 1-a\} \cap U(A) \neq \varnothing$.*

6) *$A/rad(A)$ es una k-álgebra con división.*

Demostración: Ver [15], Proposición 5.36.

■

Definición 2.1.8. *Decimos que una k-álgebra A es local si satisface alguna de las condiciones del Teorema 2.1.7*

Teorema 2.1.9. *Sean A una k-álgebra y $M \in mod - A$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

1) *$End_A(M)$ es local si y sólo si M es indescomponible.*

2) *Sea M indescomponible. Entonces, para cada $f \in End_A(M)$ se tiene que f es nilpotente o un isomorfismo.*

Demostración: Ver [15], proposición 5.38.

■

Lema 2.1.10 (Lema Corto del Cinco)**.** *Sea R una k-álgebra. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $R-mod$*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_1"] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_2"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si cualesquiera dos de los morfismos α_1, α_2 y α_3 son isomorfismos, entonces el tercero también lo es.

Demostración: Ver [13], proposición 2.72.

■

Teorema 2.1.11 (Lema de la Serpiente)**.** *Sea R una k-álgebra. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $R-mod$*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "h"] & N' \arrow[r, "t"] & M' & \end{tikzcd}$$

Entonces existe una sucesión exacta en $R-mod$

$$Ker(\alpha) \to Ker(\beta) \to Ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} Coker(\alpha) \to Coker(\beta) \to Coker(\gamma),$$

donde $\delta : Ker(\gamma) \to Coker(\alpha)$ esta dado por $\delta(m) := h^{-1}\beta f^{-1}(m) + Im(\alpha)$. Más aún, si $g : L \to N$ es un monomorfismo, entonces $Ker(\alpha) \to Ker(\beta)$ es un monomorfismo; y si $t : N' \to M'$ es un epimorfismo, entonces $Coker(\beta) \to Coker(\gamma)$ es un epimorfismo.

Demostración: Ver [13], teorema 6.5.

■

Bibliografía

[1] M. Auslander, I. Reiten & S.O. Smalo. Representation Theory of Artin Algebras, *Cambridge University Press*, New York USA, ISBN: 0-521-41134-3, 1995.

[2] K. Erdmann & C. Sáenz. *On Standardly Stratified Algebras*, Communications in Algebra, Vol 31, No. 7, 3429-3446, 2003.

[3] E. Do N. Marcos, O. Mendoza & C. Sáenz. *Stratifying systems via relative simple modules*, Journal and Pure and Applied Algebra, 208, 472-487, 2004.

[4] E. Cline, B. Parshall & L. Scott. *Stratifying Endomorphism Algebras*, AMS memoirs, 591, ISBN: 0-8218-0488-X, 1996.

[5] C. Xi. *Standardly stratified algebras and cellular algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 133, 37-53, 2002.

[6] E. Cline, B. Parshall & L. Scott. *Finite dimensional algebras and highest weight categories*. J. Reine Angew. Math, 391:85-99, 1988.

[7] V. Dlab & C. M. Ringel. *The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras*. Repr. Theory and Related Topics, London Math. Soc. LNS, 168:200-224, 1992.

[8] C. M. Ringel. *The category of modules with good filtrations over quasi-hereditary algebra has almost split sequences*. Mat Z, 208:209-223, 1991.

[9] I. Agoston, D. Happel, E. Lukacs & L. Unger. *Standarly Stratified Algebras and Tilting*. Journal of Algebra, 226: 144-160, 2000.

[10] I. Assem, D. Somson & A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press, New York USA, 2006.

[11] H. Cartan & S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, New Jersey USA, 1956.

[12] Frank W. Anderson & Kent R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York USA, ISBN: 0-387-97845-3, 1992.

[13] Joseph J.Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, New York USA, ISBN: 978-0-387-24527-0, 2009.

[14] C. Cibils, F. Larrion & L. Salmeron. *Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones*. Monografía 11 del Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 1982.

[15] M. Sandoval. *Sistemas Estratificantes Lineales*, Tesis para obtener el grado de Maestra en Ciencias Matemáticas, dirigida por el Dr. Octavio Mendoza Hernández. Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2011.

[16] J. Vega. *El conjunto de módulos estándar es un sistema estratificante*, Tesis para obtener el grado de Matemático, dirigida por la Dra. Edith Corina Sáenz Valadez. Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2014.

[17] M. Huerta. *Introducción a los Sistemas Estratificantes*, Tesis para obtener el grado de Matemática, dirigida por la Dra. Edith Corina Sáenz Valadez. Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2013.