



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

ESPECTROSCOPIA DE NÚCLEOS FUERA DE LA REGIÓN DE ESTABILIDAD

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTORA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
ARACELI IBÁÑEZ SANDOVAL

TUTORES PRINCIPALES  
DRA. MARIA ESTHER ORTIZ SALAZAR  
INSTITUTO DE FÍSICA

DR. ALFREDO GALINDO URIBARRI  
PHYSICS DIVISION, OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY, OAK RIDGE,  
TENNESSEE, USA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

## *Agradecimientos*

Le agradezco a los doctores Maria Esther Ortiz Salazar, Alfredo Galindo Uribarri y Peter Otto Hess Bechstedt, por haberme dado la oportunidad de trabajar con ellos, participar en su equipo de trabajo y por haber conocido así a un gran conjunto de Investigadores que en cualquier momento de la realización de este trabajo me brindaron su apoyo y comprensión.

Quiero agradecer especialmente al Dr. Victor Manuel Velázquez Aguilar por su gran apoyo incondicional que me brindó en cada etapa del trabajo de tesis, y sobre todo por su gran amistad que siempre tuvo hacia mi. Sus palabras de apoyo que poco a poco me ayudaron a llegar a mi meta y aquello que en un principio parecía no tener fin, hoy es una realidad. G R A C I A S por todo su apoyo!

Al Dr. Yang Sun del Departamento de Física, Universidad de Shanghai Jiao Tong, China y del Departamento de Física y Astronomía, Universidad de Tennessee, Knoxville, USA, le agradezco sus valiosos consejos y correcciones que me brindó para mejorar este trabajo de tesis.

A los doctores Beatriz Elizabeth Fuentes Madariaga, Javier Miranda Martín del Campo, Roelof Bijker, Enrique Martínez Quiroz, Elí Francisco Aguilera Reyes, Libertad Barrón Palos, quienes formaron parte del jurado para revisar y corregir el presente trabajo, gracias por todo.

Al Dr. Juan Pedro Laclette, Coordinador de Estudios de Posgrado de la UNAM, agradezco su ayuda y todo el apoyo que me brindó para que finalmente se resolviera mi problema, y con ello, lograra presentar el presente trabajo doctoral. Gracias por su ayuda. De igual manera, agradezco el apoyo que me brindaron los doctores Gloria Soberón Chávez, Manuel Enrique Vázquez Valdés y Carlos Antún.

A las secretarías y personal de cómputo del IFUNAM agradezco su apoyo que me dieron para resolver mis dudas. En especial agradezco a Yanalté Herrero por su ayuda que me brindó para resolver los problemas que fueron surgiendo en mis trámites académicos durante mi estancia en el IFUNAM, así como también en los trámites relacionados con la beca de CONACYT. Por todos sus consejos y sugerencias GRACIAS!

A CONACYT agradezco el apoyo que me otorgó para realizar mis estudios de posgrado. En especial agradezco a la M. en C. Silvia Álvarez Bruneliere, Directora Adjunta de Posgrado y Becas del CONACYT, por darme todo su apoyo en los trámites de la beca. También quiero agradecer el

---

apoyo que me dió la Universidad de Tennessee durante la estancia que realice en el Laboratorio Nacional de Oak Ridge, Tennessee USA, así como también agradezco el apoyo que me dió la UNAM mediante el Programa de Apoyo a los Estudiantes de Posgrado (PAEP) con número 102301.

Agradezco a mis compañeros: Ana Lilia González, Libertad Barrón (Biler), Ana Lilia Flores, Erika Lorena Álvarez, Catalina Espinoza, Guerda Massillon, Benjamin Morales (Chamin), Eduardo Peinado, Felix González, Gabriela Murguía, Arcadio Huerta, su compañía, consejos y todo el apoyo que me dieron durante mi estancia en el IF-UNAM.

A mis amigos Guillermo Vega Ramírez y Allan Takeshi De la Cruz Oliva, por su gran apoyo que me brindaron durante todo el proceso que llevó finalizar todos los trámites para presentar este trabajo de tesis, gracias por todos sus consejos y su compañía.

A mis padres, Ma. Agustina Sandoval Méndez y Miguel Ibáñez López †, quienes me dieron siempre su cariño y entusiasmo durante el desarrollo de este trabajo. A mis hermanos Miguel Angel, Luis Gonzalo, Lilia Ruth, José Oscar, Osvaldo y Ricardo, que de cualquier forma me hicieron sentir esos ánimos para lograr una meta más en mi vida.

Y a todos, que al no mencionarlos, nunca me dejaron sola en este abismo que al principio parecía no tener fin.

¡Muchas Gracias!

---

## *Dedicatoria*

A mis padres:

Ma. Agustina Sandoval Méndez

y

Miguel Ibáñez López †

Por haberme apoyado a lo largo de la carrera y con sus  
consejos me ayudaron a seguir siempre adelante.

---

## Resumen

Actualmente se cuenta con una amplia variedad de instrumentos modernos que han dado la oportunidad de estudiar a los núcleos deficientes en número de neutrones de la región de masa  $A = 130$ . En esta región se han encontrado núcleos que presentan grandes deformaciones, permitiendo así el estudio de sus bandas rotacionales. La descripción de los isótopos  $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$ , con el Modelo de Capas Proyectadas, se presenta en este trabajo de tesis, así como también de núcleos cercanos a los isótopos del praseodimio como son:  $^{124-132}\text{Ce}$ ,  $^{122-130}\text{Ba}$ ,  $^{128-132}\text{Nd}$  y el  $^{123-125}\text{La}$ . La comparación de los datos teóricos con los datos experimentales resulta ser muy satisfactorio, lo cual da la oportunidad de discutir algunas propiedades como son: el momento dinámico de inercia  $\mathcal{J}^{(2)}$ , el momento cinético de inercia  $\mathcal{J}^{(1)}$ , el cruce de bandas rotacionales y los efectos del *backbending*.

## Abstract

A wide variety of modern instruments allows us to study neutron-deficient nuclei in the  $A = 130$  mass region. Highly deformed nuclei have been found in this region, providing opportunities to study the deformed rotational bands. The description of the  $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$  isotopes with the Projected Shell Model is presented in this thesis work, as well as the nuclei close to the Pr isotopes such as:  $^{124-132}\text{Ce}$ ,  $^{122-130}\text{Ba}$ ,  $^{128-132}\text{Nd}$  and the  $^{123-125}\text{La}$ . Good agreement between theory and experiment is obtained and some characteristics are discussed, such as the dynamic moment of inertia  $\mathcal{J}^{(2)}$ , kinetic moment of inertia  $\mathcal{J}^{(1)}$ , the crossing of rotational bands and back-bending effects.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estructura Nuclear</b>	<b>5</b>
2.1. Modelo de Capas . . . . .	5
2.2. Núcleos deformados . . . . .	7
2.3. Modelo de Nilsson . . . . .	11
<b>3. El modelo de Capas Projectado</b>	<b>17</b>
3.1. El operador de proyección . . . . .	17
3.2. Formulación del MCP . . . . .	22
3.3. El Hamiltoniano del MCP . . . . .	24
<b>4. El MCP en los núcleos <sup>125,127,129,131,133</sup>Pr</b>	<b>29</b>
4.1. Reproducción de las bandas Yrast de la cadena del <sup>125-133</sup> Pr . . . . .	29
4.2. El efecto <i>Backbending</i> en los núcleos par-impar del Pr . . . . .	30
4.3. Análisis de los diagramas de bandas de energía . . . . .	34
<b>5. El MCP en núcleos cercanos al Pr</b>	<b>39</b>
5.1. Reproducción de las bandas yrast de la cadena del <sup>124-132</sup> Ce . . . . .	40
5.1.1. El fenómeno del <i>Backbending</i> en los núcleos pares del Ce . . . . .	42
5.2. Reproducción de las bandas yrast de la cadena del <sup>122-130</sup> Ba . . . . .	46
5.2.1. El fenómeno del <i>Backbending</i> en los núcleos pares del Ba . . . . .	46
5.3. Reproducción de las bandas yrast de la cadena del <sup>128-132</sup> Nd . . . . .	51
5.3.1. El fenómeno del <i>Backbending</i> en los núcleos pares del Nd . . . . .	52
5.4. Reproducción de las bandas yrast de los núcleos par-impar <sup>123-125</sup> La . . . . .	57
5.4.1. El fenómeno del <i>Backbending</i> en los núcleos par-impar del La . . . . .	57
<b>6. Conclusión</b>	<b>63</b>

<b>A. El programa del Modelo de Capas Proyectado</b>	<b>65</b>
A.1. El archivo de entrada <b>XY_DATA</b> y el archivo <b>XY_PARA</b> . . . . .	66
A.2. Los archivos de salida <b>XY_OUT#</b> . . . . .	70
<b>B. Artículo</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>



# Índice de figuras

2.1.	La energía del primer estado $2^+$ en núcleos par-par [10]. . . . .	6
2.2.	Esquema del acoplamiento del momento angular colectivo, $\vec{R}$ y el momento angular intrínseco de los nucleones de valencia, $\vec{J}$ . La proyección del momento angular total $\vec{I}$ sobre el eje de simetría es $K$ . . . . .	9
2.3.	Diagrama de Nilsson para protones, $50 \leq Z \leq 82 (\epsilon_4 = \epsilon_2^2/6)$ . . . . .	13
2.4.	Diagrama de Nilsson para neutrones, $82 \leq N \leq 126 (\epsilon_4 = \epsilon_2^2/6)$ . . . . .	14
2.5.	Variación de las energías de la órbita $i_{13/2}$ con diferentes proyecciones de $K$ como una función de la deformación ( $\epsilon > 0, \textit{prolata}$ ) . . . . .	16
4.1.	Comparación entre los resultados teóricos y experimentales. <b>a), c), e), g), i)</b> : Momento de inercia dinámico $\mathcal{J}^{(2)} (\hbar^2 \text{MeV}^{-1})$ . <b>b), d), f), h), j)</b> : Dos veces el momento de inercia cinético $\mathcal{J}^{(1)} (\hbar^2 \text{MeV}^{-1})$ . . . . .	31
4.2.	Comparación entre los resultados teóricos y experimentales para el momento dinámico de inercia $\mathcal{J}^{(2)} (\hbar^2 \text{MeV}^{-1})$ . (a) Resultados experimentales, (b) Resultados obtenidos con el MCP. . . . .	33
4.3.	Niveles de energía deformados de partícula independiente para protones y neutrones cerca del nivel de Fermi representado por un punto. . . . .	35
4.4.	Diagramas de banda de los núcleos $^{125,127,129}\text{Pr}$ . . . . .	36
4.5.	Diagramas de alineamiento de los núcleos $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$ , donde se grafica a la frecuencia rotacional como una función del espín $I$ . . . . .	38
5.1.	Núcleos cercanos a los isótopos del Pr. . . . .	40
5.2.	Dos veces el momento de inercia cinético $\mathcal{J}^{(1)}$ en función de la frecuencia rotacional al cuadrado. . . . .	41
5.3.	Diagrama de bandas de los núcleos $^{124,126,128,130,132}\text{Ce}$ . . . . .	42
5.4.	Diagramas de alineamiento de los núcleos $^{124,126,128,130,132}\text{Ce}$ (frecuencia rotacional en función del espín $I$ ) . . . . .	44

5.5. Comparación de las energías calculadas de la banda yrast con los datos experimentales. . . . .	45
5.6. Comparación entre los cálculos teóricos y experimentales. Cálculo del momento de inercia cinético $\mathcal{J}^{(1)}$ . . . . .	47
5.7. Diagrama de bandas de los núcleos $^{122,124,126,128,130}\text{Ba}$ . . . . .	48
5.8. Diagramas de alineamiento de los núcleos $^{122,124,126,128,130}\text{Ba}$ (frecuencia angular en función del espín I). . . . .	50
5.9. Comparación de las energías calculadas de la banda yrast con los datos experimentales para los isótopos del Ba. . . . .	51
5.10. Comparación entre los cálculos teóricos y experimentales. Cálculo del momento de inercia dinámico $\mathcal{J}^{(2)}$ . . . . .	53
5.11. Comparación entre los cálculos teóricos y experimentales. Cálculo del momento de inercia cinético $\mathcal{J}^{(1)}$ . . . . .	53
5.12. Diagrama de bandas de los núcleos $^{128,130,132}\text{Nd}$ . . . . .	54
5.13. Diagramas de alineamiento de los núcleos $^{128,130,132}\text{Nd}$ (frecuencia angular en función del espín I) . . . . .	56
5.14. Comparación de las energías calculadas de la banda yrast con los datos experimentales. . . . .	56
5.15. Comparación entre los cálculos teóricos y experimentales. Cálculo del momento de inercia dinámico $\mathcal{J}^{(2)}$ . . . . .	58
5.16. Dos veces el momento de inercia cinético $\mathcal{J}^{(1)}$ en función de la frecuencia rotacional al cuadrado. . . . .	58
5.17. Diagrama de bandas de los núcleos $^{123,125}\text{La}$ . . . . .	59
5.18. Diagramas de alineamiento de los núcleos $^{123,125}\text{La}$ (frecuencia rotacional en función del espín I) . . . . .	60
5.19. Comparación de las energías calculadas de la banda yrast con los datos experimentales. . . . .	60
5.20. Núcleos cercanos a la cadena de los Pr. También se ilustran los parámetros de deformación que se asignan a cada uno de los núcleos que se estudiaron en este trabajo de investigación. . . . .	61
A.1. Diagrama de flujo del programa para el MCP [25]. . . . .	67

# Índice de tablas

4.1. Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Pr. . . . .	30
5.1. Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Ce. . . . .	41
5.2. Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Ba. . . . .	46
5.3. Configuración asignada por el MCP a las bandas yrast de los isótopos del Ba. . . .	49
5.4. Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Nd. . . . .	51
5.5. Configuraciones asignadas por el MCP a las bandas yrast de los isótopos del Nd . .	55
5.6. Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Nd. . . . .	57
5.7. Configuraciones asignadas por el MCP a las bandas yrast de los isótopos del La . .	59
A.1. . . . .	68

# 1

## Introducción

Desde hace muchos años, el hombre ha buscado la manera de explicar los misterios que guarda el núcleo atómico. La extensa búsqueda para encontrar una teoría que logre describir su estructura como también que nos conduzca al conocimiento de las complicadas fuerzas que actúan entre sus componentes, han llevado a la construcción de diversos modelos nucleares y al desarrollo de diferentes técnicas experimentales.

Gracias a los avances en el desarrollo de los aceleradores, se abren enormes posibilidades de explorar más la estructura de la materia nuclear en núcleos que se encuentran cercanos a las líneas de estabilidad. En este trabajo de tesis nos enfocaremos al estudio de propiedades de núcleos muy deficientes en neutrones en la región de masa  $A = 130$ . En particular, analizaremos las propiedades de los isótopos del praseodimio ( $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$ ).

La región de masa  $A = 130$ , ha sido un tema central para el estudio de la estructura nuclear desde que se observaron las primeras estructuras superdeformadas. Uno de los primeros núcleos que mostró tener una banda de energía superdeformada fue el  $^{132}\text{Ce}$  [1], donde se encontró que el parámetro de deformación, correspondiente a esta banda de energía, es  $\beta_2 = 0.4$  (prolato). Otras estructuras superdeformadas se encontraron en diferentes núcleos de esta región, llevando a la conclusión de que no únicamente era posible encontrar bandas con altas deformaciones sino que es común observar bandas de energía superdeformadas.

Desde que se encontraron este tipo de estructuras en esta región de masa, se tuvo el interés de

explicar las diferentes contribuciones que los protones y neutrones pueden dar a la estructura de estos núcleos. En estos núcleos, se ha visto que los protones y neutrones se encuentran ocupando la parte superior del orbital intruso  $j h_{11/2}$ . Para el caso de los núcleos impares del praseodimio (Pr), se ha observado que los orbitales del neutron se desenvuelven a la mitad de la capa  $h_{11/2}$ , mientras que para los protones la superficie de Fermi se encuentra en la parte inferior de esta capa. La forma del núcleo dependerá de lo que ocurra ante un alineamiento rotacional por parte de los protones o neutrones, es decir, en un alineamiento rotacional de los protones, llevarían al núcleo a tomar una forma alargada (prolata), mientras que en un alineamiento ocasionado por los neutrones, el efecto resultaría ser opuesto. Esta fuerte competencia entre los nucleones, nos plantean un problema muy interesante para un sistema bajo un movimiento rotacional.

Mediante el análisis de las bandas *Yrast*<sup>1</sup> de los núcleos impares del Pr, se ha buscado explicar las distintas contribuciones que los protones y neutrones pueden dar a la estructura nuclear de estos isótopos. Estas bandas *Yrast* han sido caracterizadas por una configuración de un desacoplamiento de un protón para los estados a bajo espín, y una configuración de un alineamiento producido por un par de nucleones para los estados a alto espín [2, 3, 4, 5]. Las bandas *yrastr* se encuentran formadas por los estados provenientes de una banda base y una banda rotacional, es decir, los estados a bajo espín pertenecen a una banda base, mientras que los estados a alto espín son generados por una banda rotacional. Esto le causa el llamado cruce de bandas entre la banda base y la banda rotacional, el cual ocurre para un valor dado de la frecuencia rotacional. Este cruce de bandas ha sido investigado con el Modelo de Capas *Cranked* (MCC), el cual predice que ocurre alrededor de  $\hbar\omega = 0.5$  MeV, mientras que los datos experimentales sugieren un valor de  $\hbar\omega = 0.4$  MeV. Esta falla que presenta el MCC, para describir el fenómeno del cruce de bandas, se encuentra relacionado con la degeneración del rotiano que se obtiene en la solución estacionaria del Hamiltoniano *Cranking*. Este problema que tiene el MCC ha sido extensamente estudiado por I. Hamamoto (ver [6]). Los estudios que se han llevado acabo hasta ahora, sobre el cruce de bandas, han sugerido que puede producirse por el alineamiento de un par de neutrones [3, 7, 8], mientras otros trabajos proponen que esto puede ser ocasionado por el alineamiento de un par de protones [4, 9]. Estos diferentes resultados obtenidos nos dejan ver cómo las configuraciones asignadas para los estados a alto espín y la naturaleza del alineamiento rotacional en los núcleos impares del Pr,

---

<sup>1</sup>Se le llama banda *yrastr* a la banda formada por los estados de mas baja energía para cada momento angular.

no se entienden completamente, dejando así muchas preguntas abiertas por responder.

Desde hace dos décadas, el Modelo de Capas Proyectado (MCP) se ha empleado para estudiar los estados a alto espín. A diferencia del MCC, este modelo transforma las configuraciones al sistema de laboratorio mediante la proyección del momento angular, eliminando así los problemas que el MCC tiene en la región del cruce de bandas. Por esta razón, el MCP ha mostrado ser excelente para la descripción de este fenómeno en diferentes regiones de masa  $A$ . Ya sea en núcleos muy pesados o ligeros, los resultados obtenidos han mostrado ser satisfactorios, lográndose así, un buen acuerdo con los datos experimentales.

Debido a los excelentes resultados que el MCP tiene para describir la región del cruce de bandas en diferentes regiones, en este trabajo de tesis emplearemos el modelo para estudiar las bandas  $\gamma$  de los núcleos impares del Pr, los cuales son un conjunto de núcleos difíciles de estudiar, principalmente en la región donde se da el cruce de bandas, como también el estudio del fenómeno del *backbending*, el cual no es muy fácil de describir con otros modelos. Con ayuda del MCP, se verá como ha sido posible reproducir los datos experimentales de los Pr, mediante el empleo del mismo conjunto de parámetros que se han utilizado en núcleos pares que se encuentran en la misma región de masa de estos núcleos, y por lo tanto, nos permite realizar un buen análisis en la estructura nuclear de estos isótopos.



# 2

## Estructura Nuclear

El estudio sobre el núcleo atómico continúa siendo un tema de gran interés debido a que aún no se conoce por completo su estructura. Este pequeño sistema sigue dándonos mucha información acerca de sus componentes, como por ejemplo, el cambio que puede sufrir toda la estructura nuclear debido a la presencia de un solo nucleón. Para su comprensión se han desarrollado varios tipos de modelos nucleares, como los llamados modelos de partícula independiente, los cuales consideran que los componentes del núcleo interactúan débilmente, y los modelos llamados colectivos, en donde se consideran a los nucleones fuertemente correlacionados. Todos los modelos nucleares que se conocen actualmente buscan explicar la estructura nuclear desde diferentes puntos de vista, es decir, aún no se cuenta con un modelo nuclear que explique todas las características conocidas de los núcleos, sino únicamente se cuenta con diferentes tipos de modelos que describen ciertas características de ellos.

En este trabajo nos enfocaremos más sobre los modelos de partícula independiente, como por ejemplo el modelo de capas y el modelo de Nilsson, el cual es una extensión del modelo de partícula independiente esférico.

### 2.1. Modelo de Capas

A finales de la década de los 40's, se contaba con una gran cantidad de resultados experimentales muy importantes (sobre masas, momentos magnéticos, etc.), los cuales daban evidencia de que varias propiedades nucleares presentaban discontinuidades para ciertos valores del número de neutrones ( $N$ ) y protones ( $P$ ). Por ejemplo, la energía de amarre en función del número de masa  $A$ ,



presenta máximos muy acentuados para ciertos valores de  $N$  y  $P$ . Una situación similar ocurre al estudiar las energías de separación de los nucleones ( $S_{p,n}$ ) y también sucede en los estados de excitación  $2^+$  en núcleos con un número par en  $N$  y en  $P$  (ver fig.2.1).

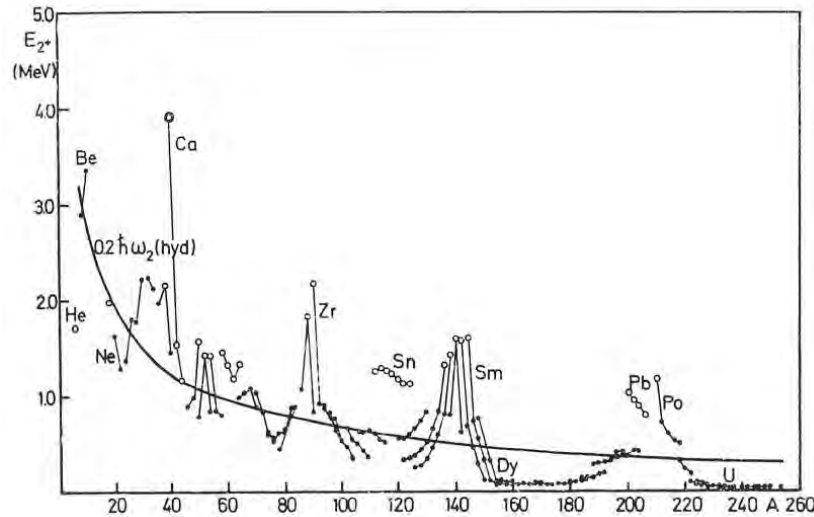


Figura 2.1: La energía del primer estado  $2^+$  en núcleos par-par [10].

Los valores para los cuales se presentan estas discontinuidades resultaron ser: 2, 8, 20, 28, 50, 82 ( y 126 para el caso de neutrones), los cuales reciben el nombre de “*números mágicos*”. Los núcleos que presentan estos valores son particularmente estables y, en consecuencia, su abundancia relativa es mayor. Algunos núcleos (por ejemplo  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  y  $^{208}\text{Pb}$ ) tienen a  $N$  y  $Z$  como números mágicos (doblemente mágicos) y resultan ser más estables. Es decir, estos núcleos son mas difíciles de excitar o de añadirles un nucleón.

Con el descubrimiento de los números mágicos se propuso que los nucleones se movían en un potencial promedio parecido a como los electrones lo hacen alrededor del núcleo. Similar como en el caso nuclear, existen átomos que resultan ser mas estables. Por ejemplo, el grupo de los gases inertes. Estos átomos tienen la característica de que sus electrones justamente llenan los niveles de energía, es decir, sus capas se encuentran totalmente llenas. Si uno desea agregar un electrón a uno de éstos átomos, la energía resulta ser mayor que la energía empleada para agregar un electrón a una capa de un átomo que no esté llena. Por tal razón, este tipo de átomos son muy estables.

A partir de este descubrimiento, se empezaron a desarrollar varios cálculos teóricos con la finalidad de encontrar un potencial promedio que lograra reproducir, y por supuesto, predecir los

números mágicos. Se probaron varios potenciales, como por ejemplo, el potencial esférico, el oscilador armónico; pero ninguno de ellos lograba reproducir los números mágicos experimentales. Fue entonces que Mayer [11] y Jensen [12] en 1949, establecen un modelo conocido como el Modelo de Capas, en donde introducen, además del potencial central, un término que toma en cuenta la interacción espín-órbita. Este modelo describe muy bien el efecto promedio de las interacciones entre los nucleones. A primera aproximación, se puede considerar el movimiento independiente de los nucleones en este potencial de ligadura.

Esta aproximación resulta ser muy buena para los núcleos que tienen sus capas cerradas, debido a su alta estabilidad. Pero para el caso de configuraciones que presentan muchos nucleones fuera de las capas cerradas (nucleones de valencia), es importante considerar también las interacciones residuales entre los nucleones, las cuales no son consideradas dentro del campo promedio de ligadura. El movimiento de estos nucleones de valencia pueden llevar a efectos donde muchos nucleones se mueven en una manera similar, es decir, se mueven *colectivamente*. Para tales núcleos, el movimiento colectivo es separado en modos vibracionales y rotacionales.

En los núcleos que se encuentran en las regiones cercanas a capas cerradas el movimiento colectivo corresponde a vibraciones alrededor del equilibrio, es decir, aquellos núcleos únicamente podrán tener modos de excitación vibracionales debido a que tienen una configuración esférica. Para aquellos núcleos que se encuentran lejos de estas regiones, es decir, que cuentan con suficientes partículas (nucleones) fuera de capa cerrada, el movimiento colectivo corresponde a modos rotacionales. A medida que el número de nucleones de valencia va aumentando, la tendencia a la deformación crece, lo cual es un efecto coherente de todos estos nucleones.

## 2.2. Núcleos deformados

El movimiento de la superficie nuclear puede describirse en términos de una expansión multipolar en armónicos esféricos. La superficie nuclear se define por un radio vector que va desde el origen a la superficie. Para el caso de una simetría axial:

$$R(\theta) = R_\beta \left( 1 + \sum_{\lambda=2}^{\lambda_{max}} \beta_\lambda Y_{\lambda 0}(\theta, \phi) \right) \quad (2.1)$$

donde  $R_\beta$  está relacionado con  $R_0$ <sup>1</sup> mediante la condición de conservación de volumen, el coeficiente de expansión  $\beta_\lambda$  es conocido como el parámetro de deformación y  $Y_{\lambda 0}$  es un armónico esférico de orden  $\lambda$ . Los multipolos más bajos, como es el caso de  $\lambda = 2$ , corresponden a una deformación cuadrupolar, la cual es uno de los modos vibracionales más importantes de las excitaciones colectivas. El siguiente multipolo,  $\lambda = 3$ , representa uno de los principales modos asimétricos del núcleo asociado con las bandas de paridad negativa. Su forma corresponde a una deformación octupolar. Para  $\lambda = 4$  se tiene una deformación hexadecapolar, el cual es uno de los momentos angulares más altos de gran importancia en la teoría nuclear por influir en las excitaciones cuadrupolares y en los estados base de los núcleos pesados.

La introducción del concepto de la deformación nuclear significa que se deben considerar nuevos grados de libertad. Por ejemplo, para el caso esférico no es posible observar el movimiento rotacional colectivo sobre un eje de simetría, debido a que las diferentes orientaciones del núcleo resultan ser cuánticamente indistinguibles. Lo mismo sucede si sólo se consideran rotaciones sobre el eje de simetría en el caso de núcleos deformados que tienen una simetría axial. Para observar el movimiento rotacional de estos núcleos, es necesario tomar ejes que sean perpendiculares al de simetría. Supongamos el movimiento de un núcleo deformado con simetría axial; aquí el momento angular total del sistema es:

$$\vec{I} = \vec{R} + \vec{J} \quad (2.2)$$

donde  $\vec{R}$  es el momento angular generado por el movimiento colectivo de los nucleones sobre un eje perpendicular al eje de simetría y  $\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i$ , es el momento angular orbital generado por los nucleones de valencia (ver fig. 2.2).

De la figura 2.2, se puede observar que la proyección del momento angular total  $\vec{I}$  sobre el eje de simetría, resulta ser igual a  $K$ , siendo éste el mismo valor para la proyección de  $\vec{J}$ . Si  $\Omega$  representa la proyección de cada nucleón de valencia, entonces la proyección de  $\vec{J}$  se puede escribir como:  $K = \sum_{i=1}^A \Omega_i$ .

Haciendo una analogía con un cuerpo rígido rotando clásicamente, se puede determinar la energía rotacional colectiva. La energía cinética de un cuerpo rígido rotando es:

---

<sup>1</sup> $R_0$  es el radio del núcleo esférico.

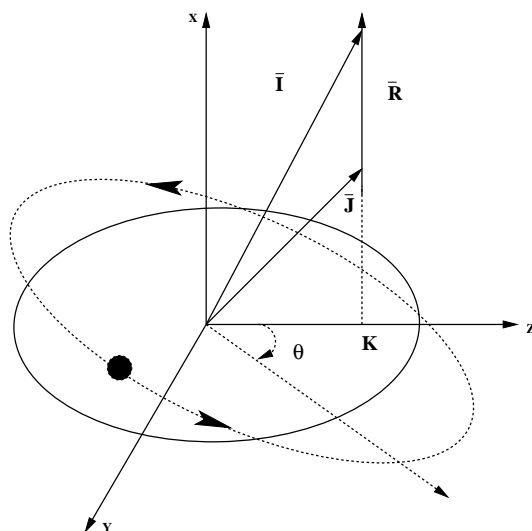


Figura 2.2: Esquema del acoplamiento del momento angular colectivo,  $\vec{R}$  y el momento angular intrínseco de los nucleones de valencia,  $\vec{J}$ . La proyección del momento angular total  $\vec{I}$  sobre el eje de simetría es  $K$ .

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 \quad (2.3)$$

donde  $\mathcal{J}$  es el momento de inercia y  $\omega$  es la frecuencia de rotación. Por analogía a la mecánica clásica, se tiene:

$$E = \frac{\hat{I}^2 - \hat{I}_z^2}{2\mathcal{J}}; \quad (2.4)$$

donde se ha usado la relación:  $\hat{I}_x^2 + \hat{I}_y^2 = \hat{I}^2 - \hat{I}_z^2$ . Escribiendo la energía en términos de los números cuánticos:

$$E = \frac{\hbar^2 [I(I+1) - K^2]}{2\mathcal{J}^{(o)}} \quad (2.5)$$

Para el caso del movimiento rotacional de un núcleo con simetría axial, el número cuántico  $K$  para la banda base, es igual a cero. Así, el movimiento rotacional del núcleo lleva a una secuencia de estados con energía:

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}^{(o)}} I(I+1) \quad (2.6)$$

siendo  $\mathcal{J}^{(0)}$  el momento de inercia estático.

El movimiento rotacional del núcleo puede describirse en términos de su frecuencia angular rotacional,  $\omega$ . Clásicamente se tiene:

$$\omega = \frac{dE}{dI} \quad (2.7)$$

Para el caso cuántico, está dado por la expresión:

$$\hbar\omega = \frac{dE(I)}{d\sqrt{I(I+1) - K^2}} \quad (2.8)$$

donde  $\sqrt{I(I+1) - K^2}$  es la proyección del momento angular total sobre el eje rotacional, conocido como el *momento angular alineado*,  $I_x$ . Para el caso de una transición entre los estados con espín  $I$  e  $I - 2$ , la frecuencia rotacional puede aproximarse como [13, 14]:

$$\hbar\omega \approx \frac{E(I) - E(I - 2)}{\sqrt{(I+1)(I+2) - K^2} - \sqrt{(I-1)I - K^2}} \quad (2.9)$$

para decaimientos que van de un estado con espín  $I$  a otro estado con espín  $I - 2$ . Obsérvese que para estados con espín muy alto, donde  $I \gg K$ , esta expresión se simplifica a  $\omega \approx \frac{E_\gamma}{2}$ , con  $E_\gamma = E(I) - E(I - 2)$ .

Además del momento de inercia estático, se cuenta con otros dos momentos de inercia para describir la estructura rotacional a muy alto espín, los cuales están relacionados con la primera y segunda derivada de la energía de excitación con respecto al *momento angular alineado*,  $I_x$ . La primera derivada nos da el *momento de inercia cinético*:

$$\mathcal{J}^{(1)} = I_x \left( \frac{dE}{dI_x} \right)^{-1} \hbar^2 = \hbar \frac{I_x}{w} \quad (2.10)$$

y la segunda derivada nos da el *momento de inercia dinámico*:

$$\mathcal{J}^{(2)} = \left( \frac{d^2 E}{dI_x^2} \right)^{-1} \hbar^2 = \hbar \frac{dI_x}{dw}. \quad (2.11)$$

El momento de inercia dinámico puede estar relacionado con la diferencia de energía de transición de rayos gama consecutivos, como:

$$\Delta E_\gamma = \frac{4\hbar^2}{\mathcal{J}(2)} \quad (2.12)$$

Obsérvese que para calcular el momento de inercia dinámico, únicamente se requiere la diferencia en la energía de transición entre dos decaimientos. Además, la variación del momento de inercia dinámico con la frecuencia rotacional puede usarse para determinar la estructura intrínseca de las bandas rotacionales [15].

## 2.3. Modelo de Nilsson

Para estudiar los núcleos que presentan grandes deformaciones, es necesario emplear un modelo que introduzca un potencial nuclear de deformación. Uno de tales modelos es el llamado *Modelo del oscilador armónico deformado*, el cual fue propuesto por Sven G. Nilsson en el año de 1955 [16], quién investigó los efectos de deformación sobre las órbitas de partícula independiente. Este modelo consiste en separar el potencial nuclear dentro de componentes esféricos y de deformación, de tal forma que el Hamiltoniano se puede escribir como:

$$H_{Nil} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{m}{2} (w_x^2 x^2 + w_y^2 y^2 + w_z^2 z^2) - C\vec{l} \cdot \vec{s} + Dl^2 \quad (2.13)$$

donde el primer término es la energía cinética de la partícula y el segundo es el potencial del oscilador armónico. El tercer término representa la interacción espín-órbita y el  $Dl^2$  es un término de atracción para las partículas orbitando cerca del borde del núcleo. Así todos los nucleones experimentan aproximadamente un potencial equivalente, no importando donde se encuentren dentro del núcleo. Estos dos últimos términos fueron introducidos para reproducir los números mágicos del modelo de capas. Los términos  $w_{x,y,z}$  son las frecuencias de un oscilador en una dimensión, las cuales pueden expresarse como función del parámetro de deformación. Para el caso con simetría axial se tiene:

$$w_x^2 = w_y^2 = w_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\epsilon_2\right), \quad w_z^2 = w_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\epsilon_2\right) \quad (2.14)$$

donde  $\epsilon_2$  es el parámetro de deformación, y  $w_0$  es la frecuencia del oscilador ( $\hbar w_0 = 41A^{-1/3} MeV$ ) del potencial esférico con  $\epsilon_2 = 0$ . Para que el volumen nuclear permanezca constante como una función de  $w_0$ , se debe tener la condición de que  $w_x w_y w_z$  sea igual a una constante o de diferente forma se tiene :

$$w_0 = \left(1 - \frac{4}{3}\epsilon_2^2 - \frac{16}{27}\epsilon_2^3\right)^{-1/6}. \quad (2.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.14, 2.15 y utilizando el armónico esférico  $Y_{20}$ , podemos escribir la ec. 2.13 como:

$$H_{Nil} = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}mw_0^2r^2 - \beta_0mw_0^2r^2Y_{20}(\theta, \phi) - C\vec{l} \cdot \vec{s} + Dl^2, \quad (2.16)$$

donde  $\beta_0$  está relacionada con  $\epsilon_2$  como:

$$\beta_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\epsilon_2 \quad (2.17)$$

Los últimos dos términos de la ec.2.16, se definen normalmente en términos de los parámetros  $\kappa = C/2\hbar w_0$  y  $\mu = 2D/C$ , los cuales tienen diferentes valores dependiendo de que nucleón se trate, ya sea protón o neutrón.

Usando este Hamiltoniano dependiente de la deformación, las energías pueden calcularse como una función del parámetro de deformación  $\epsilon_2$  (ver figuras 2.3, 2.4). A este tipo de gráficas se le conoce como *Diagrama de Nilsson*. Nótese que cuando  $\epsilon_2 = 0$ , que es el caso para núcleos con simetría esférica, los números mágicos se reproducen nuevamente. Cuando  $\epsilon_2$  toma valores positivos, la forma nuclear corresponde a una *forma prolata*, es decir, el núcleo toma la forma parecida a la de un balón de futbol americano, y para valores negativos de  $\epsilon_2$ , corresponde a una *forma oblata*, parecida a una esfera achatada.

Los orbitales de Nilsson se caracterizan por el número cuántico asintótico  $\Omega^\pi[Nn_z\Lambda]$ , donde  $N = n_z + n_\perp$  es el número cuántico principal,  $n_z$  es el número de nodos de la función de onda en la dirección  $z$ ,  $\Omega = \Lambda + S_z$  ( $S_z = \pm 1/2$ ) es la componente del momento angular total a lo largo del eje de simetría  $z$ , y  $\Lambda = \pm n_\perp, \pm(n_\perp - 1), \dots, \pm 1, \text{ ó } 0$  es la proyección del momento angular

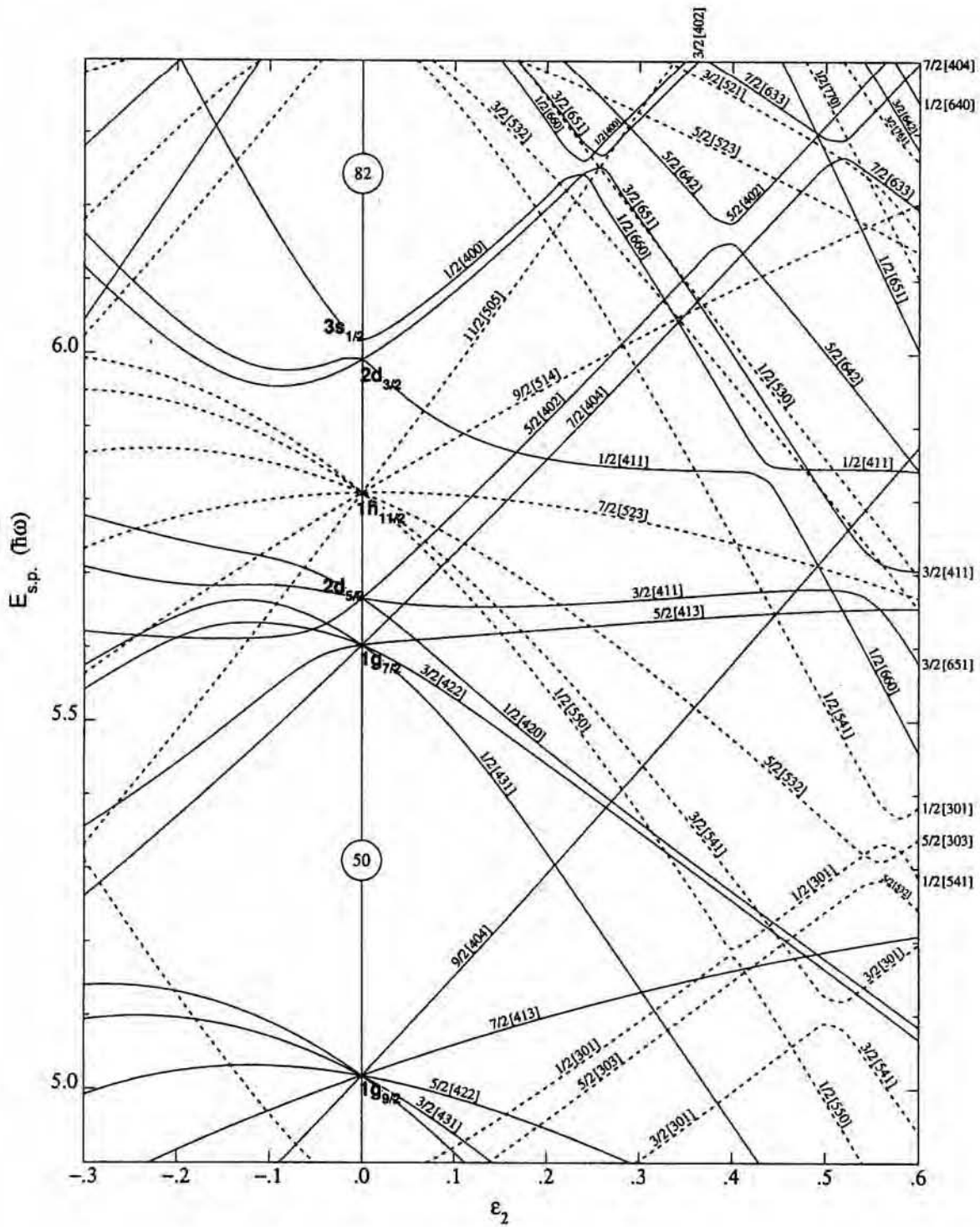


Figura 2.3: Diagrama de Nilsson para protones,  $50 \leq Z \leq 82 (\epsilon_4 = \epsilon_2^2/6)$ .





orbital a lo largo del eje  $z$ . La paridad del estado,  $\pi$ , se define como  $\pi = (-1)^N$ . Cuando  $N$  es par (impar), la suma de  $n_z + \Lambda$  también debe ser par (impar). Para describir los diagramas de Nilsson, tomemos como punto de partida cuando  $\epsilon_2 = 0$ . Observemos que en este punto, cada capa puede mantener sólo  $2j + 1$  nucleones (por ejemplo para  $j = 5/2$  se tienen 6 nucleones), donde  $j$  es el subíndice que etiqueta a cada capa. Cuando la deformación se introduce, los estados de un  $j$  dado se despliegan dentro de  $\frac{1}{2}(2j + 1)$  subestados. Las energías de estos subestados se comportan de manera diferente conforme la deformación cuadrupolar cambia. Considerando el movimiento de una partícula orbitando alrededor de un núcleo con una deformación prolata (ver fig. 2.2), la proyección del vector  $j$  sobre el eje de simetría  $z$ , se define como el valor  $K$  de la órbita. Los valores de  $K$  van desde  $j, j - 1, j - 2, \dots, 1/2$ , teniendo cada órbita una doble degeneración ( $|K|$  y  $|-K|$ ). Los orbitales que permanecen cercanos al resto de la materia nuclear tendrán una energía más baja que aquéllos que permanezcan a grandes distancias de éste. Las energías dependen de la orientación con respecto a la simetría nuclear, lo cual es contrario al caso del modelo de capas esférico donde no se tiene una dirección preferencial en el espacio. Esto se puede ver claramente si se define el ángulo de un plano orbital clásicamente  $\theta$  como (ver fig. 2.2):

$$\theta = \text{sen}^{-1}(K/j) \quad (2.18)$$

Para valores bajos de  $K$ ,  $\theta$  cambia lentamente, y para valores altos de  $K$ ,  $\theta$  varía rápidamente. De esta forma, la diferencia de energía, entre valores sucesivos de  $K$ , se incrementa conforme  $K$  aumenta [17]. Con estas propiedades se puede desarrollar una región limitada de un diagrama de Nilsson para cierto valor de  $j$ . Para  $\epsilon > 0$ , las energías disminuyen rápidamente con  $\epsilon$ , para valores bajos de  $K$  y se incrementan rápidamente para valores altos de  $K$ , así las separaciones de los valores adyacentes de  $K$  aumentan con  $K$  (ver fig.2.5).

Por último es importante mencionar que los diagramas de Nilsson pueden describirse muy bien por los números cuánticos  $\pi$  y  $K$ . Las paridades positivas ( $\pi = +$ ), se representan por líneas sólidas y las paridades negativas ( $\pi = -$ ), con líneas punteadas (ver figuras 2.3 y 2.4). Por el principio de Pauli, no está permitido que dos orbitales, con los mismos valores de  $K$  y  $\pi$ , lleguen a cruzar, así que estos orbitales se repelan. Pero aunque estos orbitales no llegan a cruzarse, la interacción entre ellos significa que las propiedades de las funciones de onda cambian cerca del punto de inflexión.

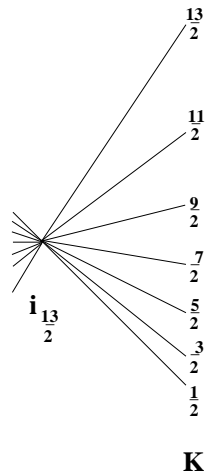


Figura 2.5: Variación de las energías de la órbita  $i_{13/2}$  con diferentes proyecciones de  $K$  como una función de la deformación ( $\epsilon > 0$ , *prolata*)

Por ejemplo, para  $K = \frac{1}{2}$  de la capa  $d_{3/2}$ , esta órbita se repele con otra órbita que tiene los mismos valores de  $K$  y paridad (ver fig.2.3). Esto sucede para un valor de  $\epsilon_2 \approx 0.48$ , y obsérvese como ambas órbitas cambian sus etiquetas, es decir, la órbita  $1/2[411]$  pasa a ser una órbita  $1/2[660]$  después de pasar el punto de inflexión, y de manera similar sucede para la otra órbita. Obsérvese que para valores altos de  $K$ , las funciones de onda, de una capa dada, son muy puros (por ejemplo en la capa  $g_{9/2}$ , el orbital  $K = \frac{9}{2}$  es una línea recta).

# 3

## El modelo de Capas Proyectado

Otro de los modelos que se emplea para estudiar los núcleos pesados y que presentan grandes deformaciones es el llamado *Modelo de Capas Proyectado*. La idea principal de este modelo, además de simplificar el tratamiento de un problema complejo, es el utilizar el método de proyección. Este procedimiento se emplea debido a que la base se construye en el sistema de referencia asociado a los ejes principales del núcleo, el cual espontáneamente viola la simetría rotacional del sistema. Debido a esto, es necesario restaurar esta simetría mediante la proyección del momento angular del sistema intrínseco del núcleo al sistema de laboratorio. Por lo que esto nos lleva a la necesidad de construir un operador de proyección.

### 3.1. El operador de proyección

Las rotaciones por las que estamos interesados son las rotaciones especiales asociadas al grupo  $SU(2)$ , cuyos elementos están especificados por el parámetro del grupo  $\Omega$ . Este parámetro representa un conjunto de ángulos de Euler ( $\alpha, \gamma = [0, 2\pi]$ , y  $\beta = [0, \pi]$ ). La forma explícita del elemento del grupo es:

$$\hat{R}(\Omega) = e^{-i\alpha\hat{J}_z} e^{-i\beta\hat{J}_y} e^{-i\gamma\hat{J}_z}, \quad (3.1)$$

donde  $\hat{J}_y$  y  $\hat{J}_z$  son los operadores del momento angular. Su representación unitaria es:

$$\langle \mu IM | \hat{R}(\Omega) | \nu JK \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta_{IJ} D_{MK}^{I*}(\Omega), \quad (3.2)$$

donde el símbolo \* significa el complejo conjugado y  $D_{MK}^I(\Omega)$  es la función D [21], el cual forma un conjunto completo de funciones en el espacio de parámetros de  $\Omega$ . Para un estado  $|\mu IM\rangle$  que pertenece a un momento angular  $IM$ ,  $\mu$  designa un conjunto de números cuánticos que especifican el estado cuántico de manera única, por lo que la siguiente relación de clausura se cumple:

$$\sum_{\mu IM} |\mu IM\rangle \langle \mu IM| = 1, \quad (3.3)$$

donde el estado  $|\mu IM\rangle$  pertenece a un conjunto completo de vectores ortonormales en el espacio de Hilbert y en el cual el operador de 3.1 actúa. De 3.2 y 3.3 se tiene que:

$$\hat{R}(\Omega)|\nu IK\rangle = \sum_M |\nu IM\rangle D_{MK}^{I*}(\Omega), \quad (3.4)$$

el cual da la relación de multiplete entre los estados que pertenecen a una representación con momento angular  $I$ . Usando 3.4 y la ortogonalidad de las funciones  $D$ :

$$\int d\Omega D_{MK}^{I*}(\Omega) D_{M'K'}^I(\Omega) = \frac{8\pi^2}{2I+1} \delta_{II'} \delta_{MM'} \delta_{KK'} \quad (3.5)$$

se obtiene la relación:

$$\hat{P}_{MK}^I |\nu I' K'\rangle = \delta_{II'} \delta_{KK'} |\nu IM\rangle, \quad (3.6)$$

donde el operador se define como:

$$\hat{P}_{MK}^I = \frac{2I+1}{8\pi^2} \int d\Omega D_{MK}^I(\Omega) \hat{R}(\Omega) \quad (3.7)$$

el cual se llama el *Operador de Proyección del Momento Angular*. De las ecs. 3.3 y 3.6 se pueden obtener su representación espectral y la “regla de suma”:

$$\hat{P}_{MK}^I = \sum_{\nu} |\nu IM\rangle \langle \nu IK|, \quad \sum_{IM} \hat{P}_{MM}^I = 1 \quad (3.8)$$

Usando la representación espectral se pueden obtener fácilmente las siguientes propiedades:

$$\hat{P}_{MK}^{I\dagger} = \hat{P}_{MK}^I \quad \text{y} \quad \hat{P}_{MK}^I \hat{P}_{M'K'}^I = \delta_{II'} \delta_{MM'} \hat{P}_{KK'}^I \quad (3.9)$$

Las cuales son las propiedades que en general un operador de proyección debe satisfacer ( $\hat{P}_i^\dagger = P_i$ ,  $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$  y  $\sum_i P_i = 1$ ), por lo que  $P_{MK}^I$  es un operador de proyección en el sentido usual si

solamente  $K = M$ . Además este operador transforma un sistema fijo en el cuerpo a un sistema fijo en el espacio.

Examinemos un ejemplo para ver cómo se utiliza el operador de proyección. Sea  $|\Phi\rangle$  un estado deformado el cual no es un estado de los operadores de momento angular  $J^2$  y  $J_3$ . Cuando el operador de rotación actúa sobre el estado  $|\Phi\rangle$ , se genera una familia de estados:

$$|\Phi(\Omega)\rangle = \hat{R}(\Omega)|\Phi\rangle, \quad (3.10)$$

los cuales resultan ser todos degenerados debido a que el Hamiltoniano es rotacionalmente invariante, es decir:

$$\hat{R}^\dagger(\Omega)\hat{H}\hat{R}(\Omega) = \hat{H}, \quad (3.11)$$

obsérvese que los estados  $|\Phi(\Omega)\rangle$  pueden ser linealmente independientes de  $|\Phi\rangle$ , ya que los estados deformados no satisfacen la relación lineal tal como 3.4.

Considerando la construcción de una superposición de estados degenerados  $|\Phi(\Omega)\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = \int d\Omega F(\Omega)|\Phi(\Omega)\rangle = \int d\Omega F(\Omega)\hat{R}(\Omega)|\Phi\rangle \quad (3.12)$$

donde  $F(\Omega)$ , representa las funciones de peso, puede determinarse al requerir que el valor esperado de la energía sea estacionario con respecto a variaciones de  $F^*$  y  $F$ :

$$E = \frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{\int d\Omega d\Omega' F^*(\Omega)\langle\Phi\Omega|H|\Phi\Omega\rangle F(\Omega')}{\int d\Omega d\Omega' F^*(\Omega)\langle\Phi\Omega|\Phi\Omega\rangle F(\Omega')} \quad (3.13)$$

Expandiendo  $F(\Omega)$  sobre el conjunto completo de funciones  $D$ :

$$F(\Omega) = \sum_{IMK} \frac{2I+1}{8\pi^2} F_{MK}^I D_{MK}^I(\Omega) \quad (3.14)$$

multiplicando por  $D_{MK}^{I*}(\Omega)$  e integrando se obtiene:

$$F_{MK}^I = \int d\Omega F(\Omega) D_{MK}^{I*}(\Omega) \quad (3.15)$$

obteniendo así:

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \int d\Omega F(\Omega) \hat{R}(\Omega) |\Phi\rangle = \int d\Omega \sum_{IMK} \frac{2I+1}{8\pi^2} F_{MK}^I D_{MK}^I(\Omega) \hat{R}(\Omega) |\Phi\rangle \\
 &= \sum_{IMK} F_{MK}^I \int d\Omega \frac{2I+1}{8\pi^2} D_{MK}^I(\Omega) \hat{R}(\Omega) |\Phi\rangle
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

por la ec.3.7 esto se reduce a:

$$|\Psi\rangle = \sum_{IMK} F_{MK}^I \hat{P}_{MK}^I |\Phi\rangle \tag{3.17}$$

Llevando a cabo el procedimiento variacional, sustituyendo la ec.(3.17) en (3.13):

$$E = \frac{\sum_{I'M'K'} \sum_{IMK} F_{MK}^{I*} \langle \Phi | \hat{P}_{MK}^{I\dagger} H \hat{P}_{M'K'}^I | \Phi \rangle F_{M'K'}^{I'}}{\sum_{I'M'K'} \sum_{IMK} F_{MK}^{I*} \langle \Phi | \hat{P}_{MK}^{I\dagger} \hat{P}_{M'K'}^I | \Phi \rangle F_{M'K'}^{I'}} \tag{3.18}$$

utilizando las propiedades del operador 3.9 se llega a:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sum_{I'M'K'} \sum_{IMK} F_{MK}^{I*} \langle \Phi | H \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle F_{M'K'}^{I'} \delta_{II'} \delta_{MM'}}{\sum_{I'M'K'} \sum_{IMK} F_{MK}^{I*} \langle \Phi | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle F_{M'K'}^{I'} \delta_{II'} \delta_{MM'}} \\
 &= \frac{\sum_{IMKK'} F_{MK}^{I*} \langle \Phi | H \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle F_{MK'}^I}{\sum_{IMKK'} F_{MK}^{I*} \langle \Phi | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle F_{MK'}^I}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

haciendo la variación:

$$\sum_{IMKK'} \delta F_{MK}^{I*} \langle \Phi | H \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle F_{MK'}^I - \sum_{IMKK'} \delta F_{MK}^{I*} \langle \Phi | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle F_{MK'}^I = 0 \tag{3.20}$$

para llegar a:

$$\sum_{K'} \langle \Phi | (H - E) \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle F_{MK'}^I = 0 \tag{3.21}$$

con la condición de normalización

$$\sum_{KK'} F_K^I \langle \Phi | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle F_{K'}^I = 1 \tag{3.22}$$

la cual se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\sum_{K'} (H_{KK'}^I - EN_{KK'}^I) F_{MK'}^I = 0, \quad \sum_{KK'} F_K^I N_{KK'}^I F_{K'}^I = 1 \quad (3.23)$$

definiendo el Hamiltoniano y la matriz de norma como:

$$H_{KK'}^I = \langle \Phi | H \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle \quad y \quad N_{KK'}^I = \langle \Phi | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi \rangle \quad (3.24)$$

Si el estado  $|\Phi\rangle$  resulta ser triaxial, un espín dado aparece más de una vez en el espectro completo, siendo  $I = 0$  una excepción. Para el caso de que el sistema sea axial, donde la relación  $\hat{J}_z |\Phi\rangle = K_0 |\Phi\rangle$  es válida, con  $K_0$  el número cuántico  $k$  conservado, el problema es más sencillo. La solución de 3.23 es:

$$E = \frac{H_{K_0 K_0}^I}{N_{K_0 K_0}^I} \quad \text{con} \quad F_{K_0}^I = \frac{1}{\sqrt{N_{K_0 K_0}^I}} \quad (3.25)$$

ya que únicamente un término con  $K = K_0$  sobrevive en la suma sobre  $K$ . En este caso, no se permite la mezcla de bandas excitadas, sino que únicamente se puede describir una “banda rotacional”, cuya “energía rotacional” se obtiene evaluando  $E$  como una función del espín  $I$ . A diferencia del caso triaxial, cada espín aparece sólo una vez en el espectro. Para el caso axialmente simétrico, el operador  $\hat{P}_{MK}^I$  se reduce a:

$$\left( I + \frac{1}{2} \right) \int_0^\pi d\beta \sin(\beta) d_{MK}^I(\beta) e^{-i\beta \hat{J}_y} \quad (3.26)$$

ya que  $\alpha$  y  $\gamma$  pueden ser integradas explícitamente cuando se evalúan los elementos de la matriz.

El estado  $|\Phi\rangle$  puede generarse de varias maneras, de tal forma que la construcción de este estado pueda violar varias simetrías del Hamiltoniano, debido a que éste representa un estado intrínseco. Mediante dicho estado, el cual resulta ser altamente degenerado, se puede construir un nuevo estado  $|\Psi\rangle$ , donde se recupera la simetría violada. Así, el estado  $|\Psi\rangle$  se puede considerar como una solución aproximada del Hamiltoniano. Con  $|\Psi\rangle$  se considerará como un estado en el sistema fijo en el espacio y para el sistema fijo en el cuerpo se tomará a  $|\Phi\rangle$ . Existen dos conjuntos de operadores diferenciales (mutuamente conmutantes) que representan el momento angular, los cuales se llaman “tipo fijo en el espacio” y “tipo fijo en el cuerpo”, este último caracterizado por una diferencia de signo en las relaciones de conmutación de momento angular. De la ecuación del operador de



proyección se puede observar que el número cuántico  $M$  pertenece a  $|\Psi\rangle$  mientras que  $K$  pertenece a  $|\Phi\rangle$ . Por lo que el operador de proyección transforma un estado fijo en el cuerpo a un estado fijo en el espacio.

## 3.2. Formulación del MCP

Para formular el modelo de capas proyectado, supongamos que se ha seleccionado un conjunto de estados de multi-cuasipartícula (multi-qp)  $\{|\Phi_k\rangle\}$ , el cual se quiere tomar en cuenta dentro del espacio de configuraciones del modelo de capas para proyectarlos sobre un buen momento angular  $I$  y número de partículas  $N$ , cuya especificación mas concreta será dada más adelante (para el caso de núcleos par-impar).

Una vez que la base está preparada, el Hamiltoniano se diagonaliza en el espacio del modelo de capas expandido por  $\{\hat{P}_{MK}^{IN}|\Phi_k\rangle\}$ . Esto lleva a la ecuación de valores propios:

$$\sum_{k'K'} (H_{kKk'K'}^I - EN_{kKk'K'}^I) F_{k'K'}^{IE'} = \delta_{EE'} \quad (3.27)$$

con la condición de normalización:

$$\sum_{kKk'K'} F_{kK}^{IE} N_{kKk'K'}^I F_{k'K'}^{IE'} = \delta_{EE'} \quad (3.28)$$

Obsérvese que 3.27 y 3.28 son generalizaciones directas de 3.23 a un espacio de multiconfiguración. El Hamiltoniano y los elementos de la norma se definen por:

$$H_{kKk'K'}^I = \langle \Phi_k | \hat{H} \hat{P}_{K'K'}^{IN} | \Phi_{k'} \rangle \quad \text{y} \quad N_{kKk'K'}^I = \langle \Phi_k | \hat{P}_{K'K'}^{IN} | \Phi_{k'} \rangle \quad (3.29)$$

el cual es la generalización de 3.24. Las reglas de suma se pueden derivar usando la segunda relación de 3.8.

Los vectores propios normalizados son la generalización correspondiente de 3.17:

$$|\Psi_{IM}^E\rangle = \sum_{kK} F_{kK}^{IE} \hat{P}_{MK}^{IN} |\Phi_k\rangle \quad (3.30)$$

Obsérvese que  $|\Phi_k\rangle$  y su conjugado temporal  $|\Phi_k^-\rangle$  producen el mismo estado proyectado. Esto divide en dos la dimensión del espacio de configuración.

Para calcular los elementos de matriz de un operador tensorial de rango  $\lambda$  con respecto a los estados proyectados, se deben evaluar los elementos de matriz del operador  $\hat{P}_{K'M'}^{I'N'}\hat{T}_{\lambda\mu}\hat{P}_{MK}^{IN}$ . Para obtener esto, tenemos la relación:

$$\hat{P}_{K'M'}^{I'N'}\hat{T}_{\lambda\mu}\hat{P}_{MK}^I = (IM, \lambda\mu|I'M') \sum_{\nu} (IK' - \nu, \lambda\nu|I'K')\hat{T}_{\lambda\nu}\hat{P}_{K'-\nu K}^I, \quad (3.31)$$

la cual se obtiene a partir de las propiedades de un operador tensorial de rango  $\lambda$  bajo rotaciones como también del teorema de reducción de un producto de dos funciones  $D$ . Por otra parte, se tiene:

$$\hat{P}^{N'}\hat{T}_{\lambda\mu}\hat{P}^N = \delta_{N'N+\Delta N}\hat{T}_{\lambda\mu}\hat{P}^N \quad \text{con} \quad [\hat{N}, \hat{T}_{\lambda\mu}] = \Delta N\hat{T}_{\lambda\mu} \quad (3.32)$$

Para este caso  $\Delta N$  es un entero el cual representa la diferencia entre el número de operadores de creación y aniquilación de partícula independiente que constituyen el operador  $\hat{T}_{\lambda\mu}$ . Principalmente éste se da por  $\Delta N = 0(\pm 2)$  para el operador multipolar electromagnético (tipo apareamiento). Combinando las dos relaciones de arriba se obtiene la relación ( $\hat{P}_{MK}^{IN} \equiv \hat{P}_{MK}^I\hat{P}^N$ ):

$$\hat{P}_{M'K'}^{I'N'}\hat{T}_{\lambda\mu}\hat{P}_{MK}^{IN} = \delta_{N'N+\Delta N}(IM, \lambda\mu|I'M') \sum_{\nu} (IK' - \nu, \lambda\nu|I'K')\hat{T}_{\lambda\nu}\hat{P}_{K'-\nu K}^{IN} \quad (3.33)$$

De esta forma se ha presentado el formalismo matemático totalmente general del modelo de capas proyectado. Es decir, este modelo queda formulado en una manera general que permite triaxialidad en la base de cuasipartícula, tomando en cuenta la proyección conjunta del momento angular y el número de partículas. En algunos casos se pueden hacer simplificaciones, por ejemplo omitiendo la proyección del número de partículas. Aunque la proyección del número de partículas puede mejorar los resultados, la física esencial de la espectroscopia de la *banda yrast*<sup>1</sup> puede describirse sin tomar en cuenta esta proyección. De esta forma la mayoría de los cálculos se realizan sustituyendo  $\hat{P}_{MK}^{IN}$  con  $\hat{P}_{MK}^I(\hat{P}^N \rightarrow 1)$ . Se han comparado cálculos obtenidos con y sin la proyección del número de partículas [22]. Otra simplificación hecha es el uso de una base con

---

<sup>1</sup>Se le llama banda yrast a la banda formada por los estados de más baja energía para cada momento angular.

simetría axial.

Estas aproximaciones simplifican mucho las ecuaciones y su tratamiento numérico. En particular, la simetría axial implica que el conjunto de números cuánticos  $k$  contiene, entre otras cosas, el número cuántico magnético intrínseco total  $K$  implícitamente. Entonces se puede omitir escribiendo  $K$  en la amplitud  $F_{kK}^I$ . También la suma que corre sobre  $K$  puede omitirse, debido a que sólo una  $K$  específica contribuye a la suma para una  $k$  dada. Esto lleva al conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{k'} \{H_{kk'}^I - EN_{kk'}^I\} F_{k'}^I &= 0, & \sum_{kk'} F_k^I N_{kk'}^I F_{k'}^I &= 1 \\ H_{kk'}^I &= \langle \Phi_k | \hat{H} \hat{P}_{KK'}^I | \Phi_{k'} \rangle, & N_{kk'}^I &= \langle \Phi_k | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi_{k'} \rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

Entonces los elementos de la matriz de un operador tensorial de rango  $\lambda$  pueden evaluarse como:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{I'M'} | \hat{T}_{\lambda\mu} | \Psi_{IM} \rangle &= (IM, \lambda\mu | I'M') \langle \Psi_{I'} | | \hat{T}_\lambda | | \Psi_I \rangle, \\ \langle \Psi_{I'} | | \hat{T}_\lambda | | \Psi_I \rangle &= \sum_{\nu kk'} (IK' - \nu, \lambda\nu | I'K') \langle \Phi_{k'} | \hat{T}_{\lambda\nu} \hat{P}_{K'-\nu K}^I | \Phi_k \rangle F_{k'}^{I'} F_k^I, \end{aligned} \quad (3.35)$$

la cual viene directamente del operador identidad 3.31 y es por lo tanto válida para el caso triaxial con una extensión de la fórmula para la base triaxial.

### 3.3. El Hamiltoniano del MCP

El Hamiltoniano total para el MCP se puede expresar como:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\chi}{2} \sum_{\mu} \hat{Q}_{\mu}^{\dagger} \hat{Q}_{\mu} - G_{\mu} \hat{P}^{\dagger} \hat{P} - G_Q \sum_{\mu} \hat{P}^{\dagger} \hat{P}_{\mu} \quad (3.36)$$

donde el primer término representa el Hamiltoniano del oscilador armónico de partícula independiente:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{\dagger} \varepsilon_{\alpha} c_{\alpha} (\varepsilon_{\alpha} \equiv \hbar\omega \{N - k[2\mathbf{j} \cdot \mathbf{s} + \mu(\mathbf{I}^2 - \langle \mathbf{I}^2 \rangle)] N_j\}) \quad (3.37)$$

donde  $c_{\alpha}^{\dagger}$  y  $c_{\alpha}$  son los operadores de creación y aniquilación de partícula independiente etiquetados por un conjunto de números cuánticos del oscilador armónico esférico  $\alpha = \{N, j, m\}$ . El segundo

término de (3.36) es la interacción cuadrupolar y los dos últimos términos son la interacción de apareamiento monopolar y cuadrupolar. Obsérvese que  $l$  se conoce cuando se dan  $N$  y  $j$ . La energía de Fermi se incluirá en la energía de partícula independiente ( $\varepsilon_\alpha \rightarrow \varepsilon_\alpha - \lambda$ ), y se tomarán tres capas para los nucleones activos, es decir,  $N = 4, 5, 6$  para el caso de neutrones y  $N = 3, 4, 5$  para protones, para los núcleos que se encuentran en la región de tierras raras.

Los operadores de un cuerpo en (3.36) se definen (para cada tipo de núcleos) como:

$$\hat{Q}_\mu = \sum_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger Q_{\mu\alpha\beta} c_\beta, \quad \hat{P}^\dagger = \frac{1}{2} \sum_\alpha c_\alpha^\dagger c_{\bar{\alpha}}^\dagger, \quad \hat{P}_\mu^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger Q_{\mu\alpha\beta} c_\beta^\dagger \quad (3.38)$$

donde  $\bar{\alpha}$  representa el conjugado temporal de  $\alpha$  ( $c_{\bar{\alpha}} = \hat{T} c_\alpha \hat{T}^\dagger = (-1)^{j-m} c_{N_j-m}$ ), mientras que:

$$Q_{\mu\alpha\alpha'} = \delta_{NN'}(Njm|Q_\mu|N'j'm') \quad (3.39)$$

es el elemento de matriz del generador cuadrupolar SU(3), cuyos elementos de matriz son iguales a aquéllos del operador de masa cuadrupolar sin dimensión:

$$\sqrt{\frac{4\pi}{5}} \left(\frac{r}{b}\right)^2 Y_{2\mu} \quad (3.40)$$

para  $N=N'$ , pero se anula para  $N \neq N'$  donde  $b$  es la longitud del oscilador armónico:

$$b^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \quad (3.41)$$

Las propiedades de simetría de los elementos de matriz:

$$Q_{\bar{\mu}\alpha\beta} \equiv Q_{\mu\bar{\alpha}\bar{\beta}} = Q_{\mu\alpha\beta} = (-1)^\mu Q_{-\mu\alpha\beta} \quad (3.42)$$

asegurando las relaciones:  $\hat{Q}_{\bar{\mu}} \equiv \hat{T} \hat{Q}_\mu \hat{T}^\dagger = \hat{Q}_\mu^\dagger = (-1)^\mu \hat{Q}_{-\mu}$ .

El Hamiltoniano de partícula independiente HFB (Hartree-Fock-Bogolyubov) que resulta a partir de (3.36) es:

$$H_{HFB} = \hat{H}_0 - \chi \sum_\mu \langle \hat{Q}_\mu \rangle \hat{Q}_\mu - G_M \langle \hat{P} \rangle (\hat{P} + \hat{P}^\dagger) - G_Q \sum_\mu \langle \hat{P}_\mu \rangle (\hat{P}_\mu - \hat{P}_\mu^\dagger) \quad (3.43)$$

donde  $\langle \dots \rangle$  representan el valor de esperado con respecto al estado vacío de HFB  $|0\rangle$ .

Antes de dar la dependencia de isoespín de estas fuerzas, primero se ajustará el tamaño nuclear al usar los parámetros convencionales del oscilador armónico:

$$\omega_\tau = \omega_0 a_\tau, \quad b_\tau^2 = \frac{b_0^2}{a_\tau}, \quad b_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}, \quad a_\tau \equiv \left\{ 1 \pm \frac{N-Z}{A} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (3.44)$$

con +(-) para  $\tau =$ neutrón (protón).

Las fuerzas del tipo de apareamiento actúan únicamente entre nucleones semejantes. La magnitud de las fuerzas de apareamiento monopolar está dada en forma general:

$$G_M = \left( G_1 \mp G_2 \frac{N-Z}{A} \right) \frac{1}{A} \text{MeV} \quad (3.45)$$

con -(+) para el caso de neutrones (protones), y  $G_1$  y  $G_2$  se ajustan para producir las conocidas diferencias de masa impar-par. Para el caso de los núcleos que se encuentran en la región de masa  $A = 130$ , la longitud de las interacciones de apareamiento monopolar que se emplean para los cálculos son:

$$G_M^\nu = \left( 19.60 - 15.7 \frac{N-Z}{A} \right) \frac{1}{A}, \quad \text{y} \quad G_M^\pi = 19.60 \frac{1}{A} \quad (3.46)$$

Para la fuerza de apareamiento cuadrupolar, se toma que la longitud de  $G_Q$  es proporcional a  $G_M$  con una constante promedio:

$$G_Q = \gamma G_M \quad (3.47)$$

donde  $\gamma$  resulta ser aproximadamente de 0.18 a 0.20 (0.16 a 0.18) en la parte de núcleos ligeros (pesados) de las tierras raras. Para la fuerza  $Q \cdot Q$ , el cual es el segundo término de (3.43), éste puede identificarse como el potencial de Nilsson  $\frac{2}{3}\epsilon\hbar\omega\hat{Q}_0$ . Introduciendo  $x_\tau \equiv \hbar\omega_\tau\langle\hat{Q}_0\rangle_\tau$  y  $C_{\tau\tau'} \equiv \chi_{\tau\tau'}(\hbar\omega_\tau\hbar\omega_{\tau'})^{-1}$ , se obtienen las condiciones autoconsistentes:

$$\begin{aligned} C_{nn}x_n(\epsilon_n, \epsilon_p) + C_{np}x_p(\epsilon_n, \epsilon_p) &= \frac{2}{3}\epsilon_n \\ C_{pn}x_n(\epsilon_n, \epsilon_p) + C_{pp}x_p(\epsilon_n, \epsilon_p) &= \frac{2}{3}\epsilon_p \end{aligned} \quad (3.48)$$

cuyas soluciones  $\epsilon_n$  y  $\epsilon_p$  son en general distintas unas de otras [23]. Considerando que el parámetro de deformación es el mismo para neutrones y protones, las ecs.(3.48) se reducen a una sola:

$$C_{nn}C_{pp} - C_{np}^2 = 0, \quad (C_{pn} = C_{np}) \quad (3.49)$$

así (3.48) y (3.49) llevan al acoplamiento isoescalar  $C_{nn} = C_{pp} = C_{np}$ . Por lo tanto se obtiene la relación:

$$\chi_{\tau\tau'} = \frac{\frac{2}{3}\epsilon\hbar\omega_\tau\hbar\omega_{\tau'}}{\hbar\omega_n\langle\hat{Q}_0\rangle_n + \hbar\omega_p\langle\hat{Q}_0\rangle_p} \quad (3.50)$$

Ésta es una relación muy útil<sup>2</sup>, debido a que la deformación nuclear es una cantidad bien estudiada [24]. La constante de acoplamiento corresponde a la fuerza  $Q \cdot Q$  correspondiente a un parámetro de deformación  $\epsilon$  y se obtiene por (3.50).

Este modelo de fuerzas trabaja bastante bien a pesar de su simplicidad, pues la deformación nuclear queda restringida a la de tipo cuadrupolar y además la interacción protón-neutrón está únicamente presente en la fuerza  $Q \cdot Q$  (tipo partícula-agujero).

Para resumir la estructura lógica del modelo, diagonalizemos primero el Hamiltoniano de Nilsson para un nucleón:

$$\hat{H}_0 - \frac{2}{3}\epsilon\hbar\omega\hat{Q}_0 \quad (3.51)$$

usando a  $\epsilon$  como el conocido parámetro de deformación y llevando a cabo el procedimiento usual de BCS para tomar en cuenta la fuerza de apareamiento monopolar. Esto define la base de cuasipartícula de Nilsson + BCS. Ahora, se evalúa la intensidad de la fuerza  $Q \cdot Q$  con ayuda de la ec.(3.50). Esto fija el Hamiltoniano de (3.36), el cual se diagonaliza a través del modelo de capas expandido por el conjunto selecto de estados proyectados de multi-qp. Las configuraciones utilizadas para diferentes tipos de núcleos son:

$$\begin{array}{ll} \text{par}(\nu) - \text{par}(\pi) & |0\rangle, a_{\nu_1}^\dagger a_{\nu_2}^\dagger |0\rangle, a_{\pi_1}^\dagger a_{\pi_2}^\dagger |0\rangle, a_{\nu_1}^\dagger a_{\nu_2}^\dagger a_{\pi_1}^\dagger a_{\pi_2}^\dagger |0\rangle \\ \text{impar}(\nu) - \text{impar}(\pi) & a_{\nu}^\dagger a_{\pi}^\dagger |0\rangle \end{array}$$

---

<sup>2</sup> $\langle\hat{Q}_0\rangle$  es el valor esperado del momento cuadrupolar  $\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sum_i \langle\phi_i|\hat{r}^2 Y_{20}|\phi_i\rangle$ , donde la suma corre sobre todos los estados ocupados de partícula independiente

$$\begin{aligned} \text{impar}(\nu) - \text{par}(\pi) & a_{\nu}^{\dagger}|0\rangle, a_{\nu}^{\dagger}a_{\pi_1}^{\dagger}a_{\pi_2}^{\dagger}|0\rangle \\ \text{par}(\nu) - \text{impar}(\pi) & a_{\pi}^{\dagger}|0\rangle, a_{\pi}^{\dagger}a_{\nu_1}^{\dagger}a_{\nu_2}^{\dagger}|0\rangle \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde  $\nu's(\pi's)$  representan los números cuánticos de Nilsson para neutrones (protones) que va sobre los estados de cuasipartícula, seleccionados propiamente (a bajas energías).

# 4

## El MCP en los núcleos $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$

A partir de los esquemas de niveles de energía obtenidas experimentalmente de los núcleos, uno puede estudiar una gran variedad de fenómenos físicos. Éstos son de gran ayuda para conocer más sobre la estructura nuclear. En este caso particular estamos interesados en los núcleos que se encuentran en la región de masa  $A=130$ . En este capítulo se da una descripción de las bandas yrast de los isótopos del praseodimio ( $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$ ) mediante el uso del MCP. La buena interpretación que se ha obtenido de las bandas yrast con este modelo, ha permitido estudiar algunas cantidades físicas como son: el momento dinámico de inercia  $\mathcal{J}^{(2)}$ , momento cinético de inercia  $\mathcal{J}^{(1)}$ , el cruce de bandas rotacionales y los efectos de *backbending* que presentan estos isótopos.

### 4.1. Reproducción de las bandas Yrast de la cadena del $^{125-133}\text{Pr}$

Para la realización de todos los cálculos teóricos se utilizó el programa del MCP <sup>1</sup> desarrollado por Kenji Hara y Yan Sun en los años noventa [25]. El MCP inicia primero con la construcción de una base deformada basándose en el Modelo de Nilsson. Los valores utilizados para los parámetros de  $\kappa$  y  $\mu$  del potencial de Nilsson, se tomaron de [26], los cuales adquieren un valor diferente para cada capa  $N$ . Para los cálculos se consideraron las tres capas superiores de  $N$  ( $N = 3, 4, 5$ ) para los protones, como también para los neutrones. Los valores de los parámetros de deformación ( $\epsilon_2$  y  $\epsilon_4$ ) de la base deformada y el valor de  $\gamma$ , de la ec. 3.47, se muestran en la tabla 4.1 para cada núcleo. Estos valores utilizados para los parámetros de deformación, difieren muy poco de los

---

<sup>1</sup>En el apéndice A se da una descripción sobre el funcionamiento del programa.



valores reportados por Moller y Nix [27], debido a que se tomaron de tal manera que se lograra reproducir el fenómeno del *backbending* de los datos experimentales.

	<sup>125</sup> Pr	<sup>127</sup> Pr	<sup>129</sup> Pr	<sup>131</sup> Pr	<sup>133</sup> Pr
$\epsilon_2$	0.300	0.283	0.267	0.234	0.194
$\epsilon_4$	0.00	0.00	0.027	0.027	0.027
$\gamma$	0.16	0.16	0.20	0.20	0.20

Cuadro 4.1: Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Pr.

Después de la construcción de la base deformada, el modelo de capas se trunca de tal forma que únicamente los estados que se encuentran dentro del intervalo de energía, alrededor de la superficie de Fermi, se seleccionan, los cuales determinan el tamaño del espacio  $|\phi_k\rangle$ . Los intervalos de energía que se utilizaron para los cálculos fueron de: 3.5 MeV para los estados de 1-cuasipartícula y de 6.5 MeV para los estados de 3-cuasipartículas. Al finalizar con la construcción de la base de estados, éstos se proyectan sobre estados con un buen momento angular  $I$  para que finalmente se utilicen para la diagonalización del Hamiltoniano del MCP. De esta forma, al obtener los eigenvalores, uno lo que realmente está obteniendo son las energías que componen a cada una de las bandas rotacionales teóricas, las cuales se comparan con las bandas rotacionales experimentales.

## 4.2. El efecto *Backbending* en los núcleos par-impar del Pr

El fenómeno del *backbending*, observado en el espectro rotacional de núcleos deformados, nos da la información acerca de la interacción entre dos bandas rotacionales; una correspondiente a la banda base y la otra que se genera por un par roto de nucleones. Este fenómeno ocurre debido a que la fuerza de Coriolis tiende a romper un par de nucleones que se encuentran acoplados a momento angular cero. Esto ocasiona que los momentos angulares de ambos nucleones se alineen en dirección del eje de rotación (momento angular alineado), generando así una banda rotacional, la cual se cruza con la banda base a un momento angular dado. Esto genera que la banda yrast se encuentre formada por estados pertenecientes a ambas bandas rotacionales. Los estados que se encuentran a bajos espines pertenecen a la banda base y para los estados que se encuentran a alto espín pertenecen a la banda rotacional, la cual **se genera por el par roto de nucleones**. En la fig. 4.1 comparamos los resultados del MCP con los datos experimentales de los isótopos <sup>125–133</sup>Pr,

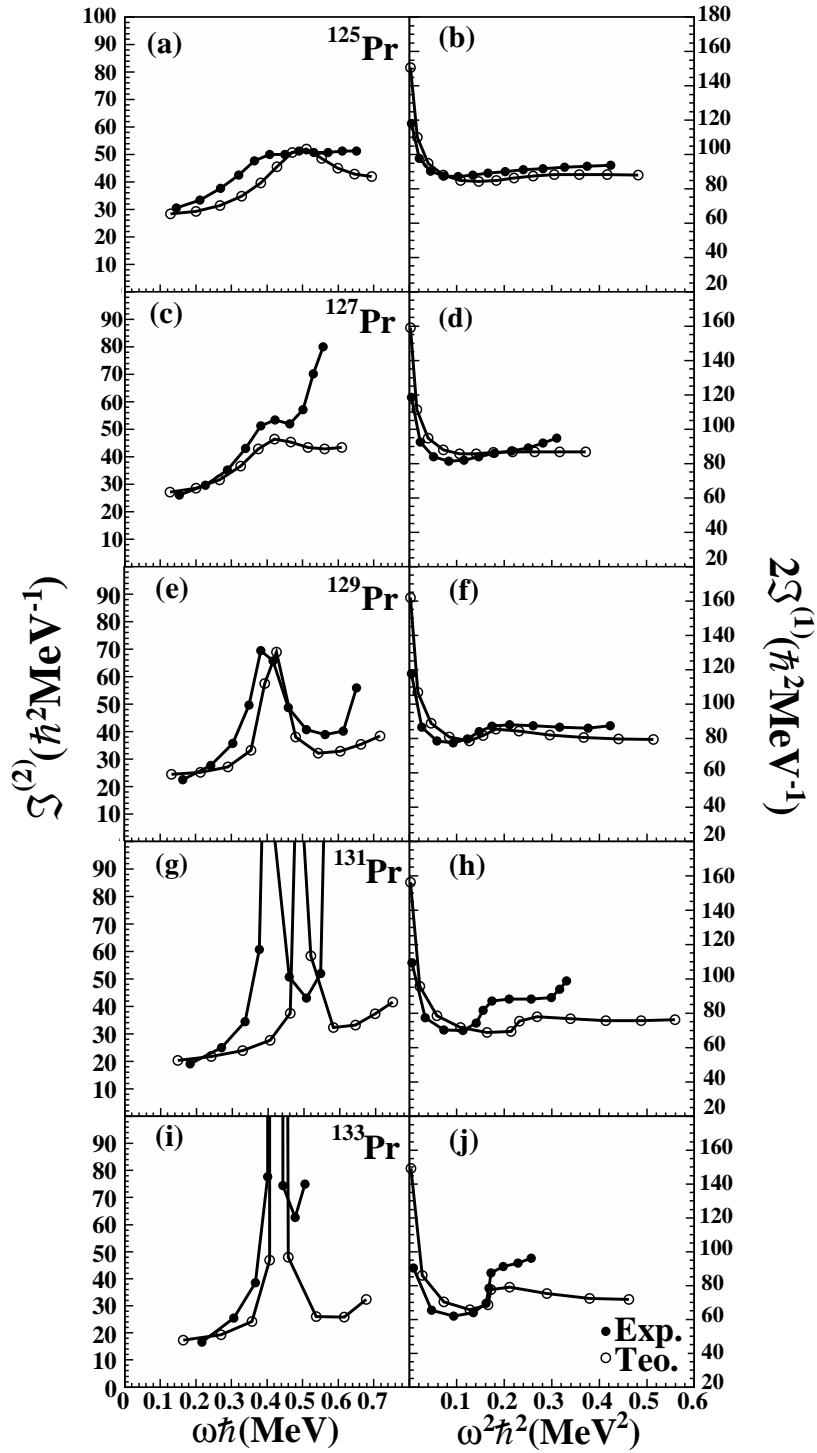


Figura 4.1: Comparación entre los resultados teóricos y experimentales. a), c), e), g), i): Momento de inercia dinámico  $\mathcal{J}^{(2)}(\hbar^2 \text{MeV}^{-1})$ . b), d), f), h), j): Dos veces el momento de inercia cinético  $\mathcal{J}^{(1)}(\hbar^2 \text{MeV}^{-1})$

graficando el momento de inercia dinámico  $\mathcal{J}^{(2)}$  como una función de la frecuencia rotacional  $\hbar\omega$  y dos veces el momento de inercia cinético  $\mathcal{J}^{(1)}$  en función del cuadrado de la velocidad angular  $\omega$  ( $\hbar^2\omega^2$ ). Estas cantidades se definen como:

$$\mathcal{J}^{(2)} = \frac{4}{E(I) - E(I - 2)}, \quad 2\mathcal{J}^{(1)} = \frac{(2I - 1)}{\omega} \quad (4.1)$$

donde la energía de transición  $E_\gamma = E(I) - E(I - 2)$  se encuentra relacionada con la frecuencia rotacional por la siguiente expresión:

$$\hbar\omega = \frac{E_\gamma}{\sqrt{(I + 1)(I + 2) - K^2} - \sqrt{(I - 1)I - K^2}}. \quad (4.2)$$

Se puede observar que la comparación entre los datos teóricos y experimentales (tomados en: [5, 28, 29]) de la fig. 4.1, resultan ser muy satisfactorios. Los momentos de inercia cinético que se muestran del lado derecho de la figura, se reproducen perfectamente, excepto para los isótopos <sup>131</sup>Pr y <sup>133</sup>Pr, donde se puede ver que el cambio en el momento de inercia cinético se da para valores altos de la frecuencia rotacional en los datos teóricos, diferente a como lo muestran los datos experimentales. Los datos que se ilustran del lado izquierdo de la fig.4.1, muestran el comportamiento del momento de inercia dinámico en función de la frecuencia rotacional. Esta cantidad física resulta ser muy sensible debido a que representa las **variaciones del momento de inercia cinético**. Los resultados, obtenidos para los isótopos <sup>125,127</sup>Pr, reproducen bien los efectos del *backbending* que se pueden observar en los datos experimentales (ver fig. 4.1(a) y 4.1(b)). Para el caso del <sup>125</sup>Pr, el cambio del  $\mathcal{J}^{(2)}$  se da en  $\hbar\omega \approx 0.5$  MeV, mientras que experimentalmente ocurre en  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV, el cual puede considerarse aún como una buena aproximación. En el caso del <sup>127</sup>Pr, el cambio del  $\mathcal{J}^{(2)}$  ocurre en  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV, el cual coincide con los datos experimentales. Se puede observar que para valores grandes de la frecuencia rotacional, los valores del  $\mathcal{J}^{(2)}$  se desvían de los datos experimentales. Para el caso del <sup>129</sup>Pr, el MCP reproduce muy bien los datos experimentales (ver fig. 4.1(e)), donde se puede ver que el cambio del  $\mathcal{J}^{(2)}$  ocurre en  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV.

Para los datos experimentales de los isótopos <sup>131,133</sup>Pr se emplearon los valores originales de Nilsson para los parámetros  $\kappa$  y  $\beta$  reportados en [30]. De la fig. 4.1(g) se puede observar que el

MCP predice que el cambio de la frecuencia rotacional para el <sup>131</sup>Pr ocurre en  $\hbar\omega \approx 0.5$  MeV, mientras que experimentalmente se observa alrededor de  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV. Para el caso del <sup>133</sup>Pr el MCP predice que el cambio de la frecuencia rotacional se da alrededor de  $\hbar\omega \approx 0.44$  MeV, siendo éste observado experimentalmente en  $\hbar\omega \approx 0.43$  MeV, el cual resulta ser una muy buena aproximación por el MCP (ver fig. 4.1(i)).

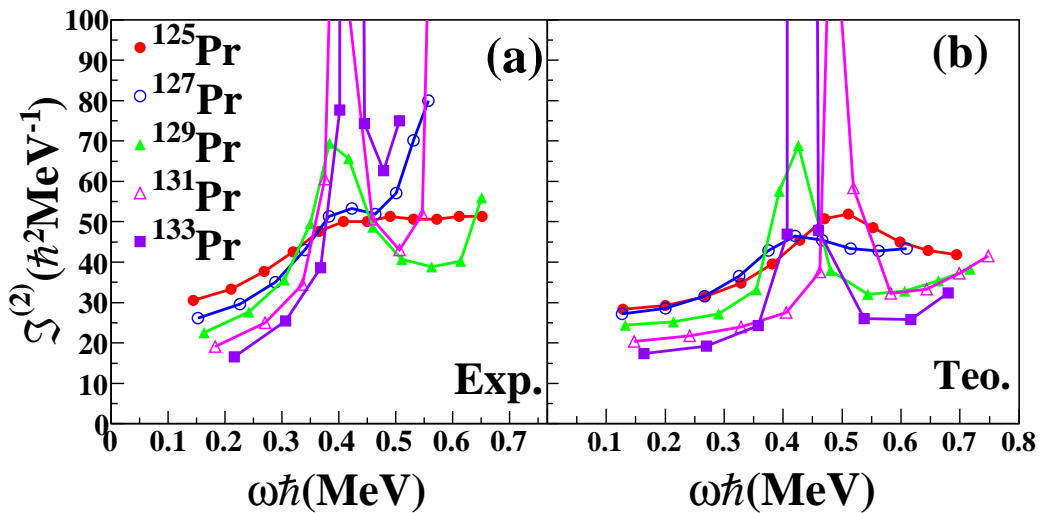


Figura 4.2: Comparación entre los resultados teóricos y experimentales para el momento dinámico de inercia  $\mathcal{J}^{(2)}(\hbar^2 \text{MeV}^{-1})$ . (a) Resultados experimentales, (b) Resultados obtenidos con el MCP.

Graficando todos los momentos dinámicos de inercia experimentales, generados por todos los isótopos <sup>125–133</sup>Pr, se puede observar claramente que  $\mathcal{J}^{(2)}$  se incrementa cuando el valor de  $N$  decrece a valores bajos de la frecuencia rotacional (ver fig. 4.2(a)). Este comportamiento en general, es reproducido muy bien por los cálculos teóricos generados por el MCP (ver fig. 4.2(b)) [31], los cuales concuerdan muy bien con los resultados reportados por Smith, et al., en [28], para los isótopos <sup>127,129,131</sup>Pr. Este comportamiento característico del  $\mathcal{J}^{(2)}$ , es relacionado con el aumento de la deformación asociada a todas las bandas de  $\pi h_{11/2}$ , conforme va disminuyendo el valor de  $N$ . Observese que para obtener todos los cálculos teóricos, los valores empleados para los parámetros de deformación, van desde  $\epsilon_2 = 0.194$  para el isótopo más pesado <sup>133</sup>Pr, hasta el valor de  $\epsilon_2 = 0.300$  para el isótopo más ligero <sup>125</sup>Pr.

### 4.3. Análisis de los diagramas de bandas de energía

El fenómeno del *backbending* y los cambios que presentan los momentos de inercia, mostrados en la sección anterior, corresponde al alineamiento rotacional de las cuasipartículas en diferentes orbitales. Para el caso de los núcleos con masa impar, estos alineamientos se asocian con el cruce de bandas, las cuales presentan configuraciones de 1 y 3 cuasipartículas. Para los isótopos del Pr que estamos estudiando, las bandas con la configuración de una cuasipartícula se encuentran en el orbital deformado  $h_{11/2}$  de protones, mientras que las bandas que presentan una configuración de tres cuasipartículas consisten también en la configuración de ésta cuasipartícula más un par de cuasipartículas del orbital deformado  $h_{11/2}$  de neutrones.

En la fig. 4.3, se pueden observar los principales niveles de energía de partícula independiente para los protones y neutrones, los cuales contribuyen a las bandas con la configuración de tres cuasipartículas, correspondientes a la región del *backbending*. Estos niveles representan los estados de Nilsson, con las siguientes componentes esféricas:  $N = 5$ ,  $l = h$  (la notación espectroscópica para  $l = 5$  le corresponde la letra  $h$ ),  $j = 11/2$  y  $m = 7/2, 3/2, 1/2, 5/2, 9/2$ , denotados como:  $[5h_{11/2}7/2]$ ,  $[5h_{11/2}3/2]$ ,  $[5h_{11/2}1/2]$ ,  $[5h_{11/2}5/2]$ , y  $[5h_{11/2}9/2]$ . Se puede observar que para el caso de los niveles de energía de partícula independiente para protones, únicamente contribuyen tres niveles en la región del *backbending*, los cuales son:  $[5h_{11/2}5/2]\pi$ ,  $[5h_{11/2}3/2]\pi$ , y  $[5h_{11/2}1/2]\pi$ . Conforme va aumentando el número de neutrones, los niveles de energía se aproximan, reflejando un ligero desdoble de estos niveles de energía con una deformación muy pequeña. Para el caso de los neutrones, se tienen dos niveles de energía que contribuyen en la región del *backbending* para los isótopos <sup>125,127</sup>Pr, estos niveles son:  $[5h_{11/2}7/2]\nu$ ,  $[5h_{11/2}5/2]\nu$ . Para el <sup>129</sup>Pr, se tienen tres niveles de energía importantes para la región del *backbending*, los cuales son:  $[5h_{11/2}9/2]\nu$ ,  $[5h_{11/2}1/2]\nu$ , y  $[5h_{11/2}7/2]\nu$ . Por último, para los isótopos <sup>131,133</sup>Pr, se tienen dos niveles de energía:  $[5h_{11/2}9/2]\nu$  y  $[5h_{11/2}7/2]\nu$ .

A partir de los diagramas de banda uno puede analizar más los efectos del *backbending* que presentan los núcleos impares del Pr. En la figura 4.4 se muestran los diagramas de banda marcadas con su respectiva configuración de cuasipartícula. Es importante mencionar que el MCP construye muchos estados de cuasipartículas, pero únicamente algunos estados participan en la región del *backbending*.

Analizando cada uno de los diagramas, se puede ver que para los isótopos <sup>125,127,129,131</sup>Pr, los estados a bajo espín en las bandas Yrast, se representan por un estado de cuasiprotón con  $K = 3/2$

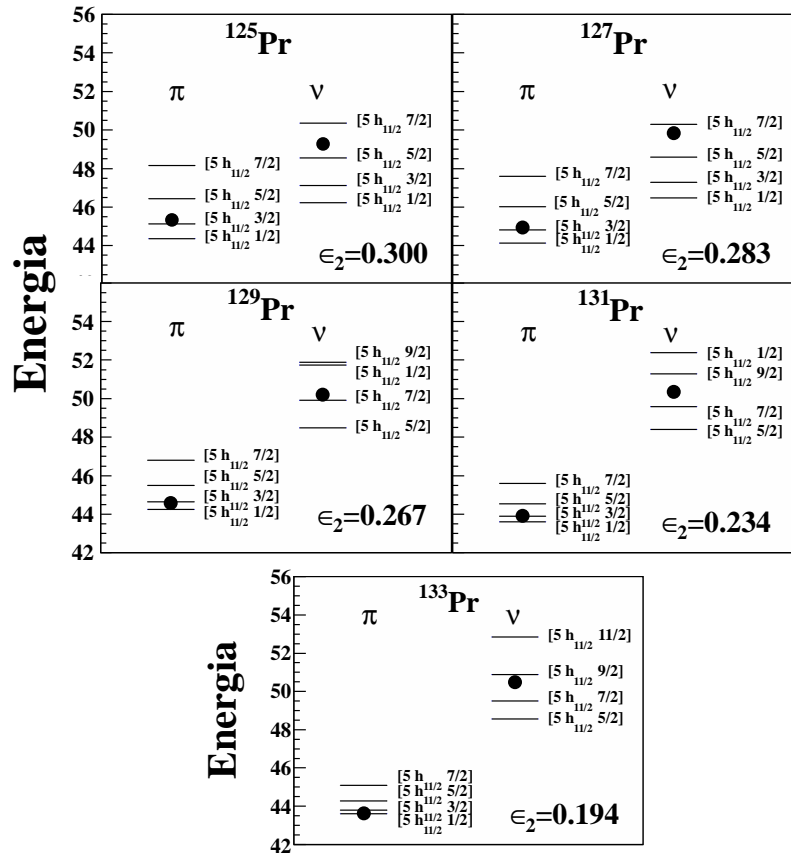


Figura 4.3: Niveles de energía deformados de partícula independiente para protones y neutrones cerca del nivel de Fermi representado por un punto.

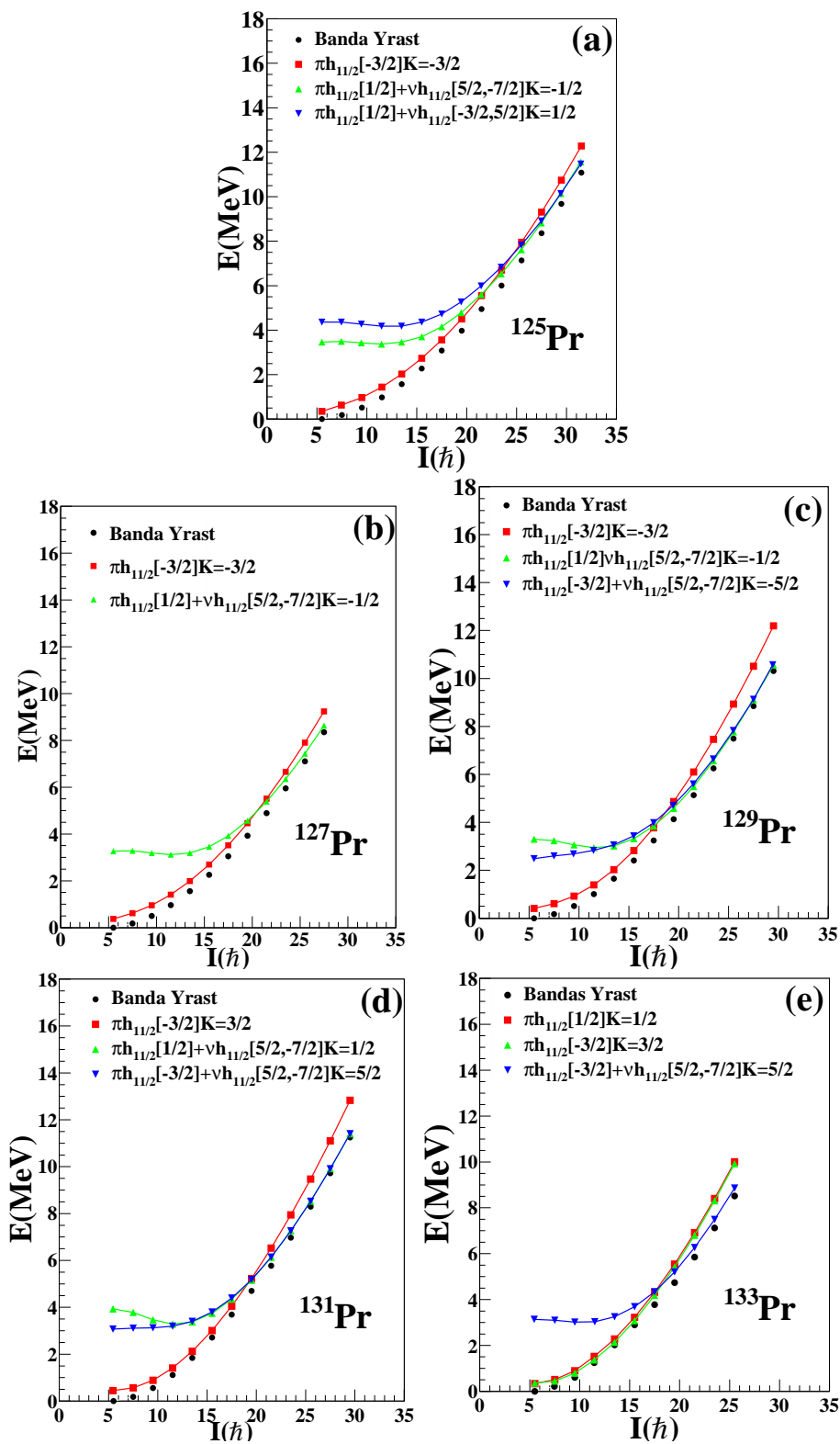


Figura 4.4: Diagramas de banda de los núcleos <sup>125,127,129</sup>Pr

del orbital  $\pi h_{11/2}$ . Esta configuración sugiere que los estados a bajo espín se encuentren relacionados con el desacoplamiento de protones en  $h_{11/2}$  y de esta manera el alineamiento del primer protón se bloquea. Estos resultados concuerdan con la asignación que se les ha dado experimentalmente. Para el caso del <sup>133</sup>Pr, los estados a bajo espín se representan con un estado de cuasiprotón  $K = 1/2$  del orbital  $\pi h_{11/2}$ , el cual resulta ser muy diferente a los resultados reportados en [3, 4, 5, 2].

El cruce de bandas que se da en la banda Yrast se puede observar claramente en cada uno de los diagramas de banda de los isótopos del Pr. Para el caso del <sup>125</sup>Pr, este cruce de bandas ocurre aproximadamente en  $I = 47/2^-$ . La banda que genera este cruce, pertenece a un estado de tres cuasipartículas, la cual consiste de un cuasiprotón  $h_{11/2}[1/2]$  más un par de cuasineutrones  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . El MCP predice otro cruce de bandas en  $I = 63/2^-$ , el cual es causado por otro estado de 3 cuasipartículas de un cuasiprotón  $h_{11/2}[1/2]$  más un par de cuasineutrones  $h_{11/2}[-3/2, 5/2]$  (ver fig.4.4a). En el <sup>127</sup>Pr, los cálculos teóricos predicen solamente un cruce de bandas en  $I = 43/2^-$ , el cual es generado también por un estado de tres cuasipartículas. Este estado consiste de un cuasiprotón  $h_{11/2}[1/2]$  más un par de cuasineutrones  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$  (ver fig.4.4b). Para el <sup>129</sup>Pr, el primer cruce de bandas ocurre en  $I = 39/2^-$ , el cual se origina en un estado de tres cuasipartículas que consisten en un cuasiprotón  $h_{11/2}[1/2]$  más un par de cuasineutrones  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . Un segundo cruce se genera en  $I = 59/2^-$ , el cual también está generado por un estado de tres cuasipartícula, que consiste de un cuasiprotón  $h_{11/2}[-3/2]$  más un par de cuasineutrones  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ (ver fig.4.4c). Para el isótopo <sup>131</sup>Pr, es posible ver dos configuraciones en la banda Yrast (ver fig.4.4d). El cruce de bandas para este isótopo se da en  $I = 39/2^-$  el cual es generado por un estado de 3 cuasipartículas formado por un cuasiprotón  $h_{11/2}[1/2]$  más un par de cuasineutrones  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . Los estados a alto espín son generados por un cuasiprotón  $h_{11/2}[-3/2]$  más un par de cuasineutrones  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . Por último, en el caso del <sup>133</sup>Pr, se pueden observar tres configuraciones diferentes en la banda Yrast, las cuales son generadas por el cruce de bandas a diferentes valores de  $I$  (ver fig.4.4e). El primer cruce de bandas se genera en  $I = 15/2^-$ , el cual se representa por el estado de un cuasiprotón  $h_{11/2}[-3/2]$ . El segundo cruce de bandas se da en  $I = 39/2^-$ , el cual se produce por un cuasiprotón  $h_{11/2}[-3/2]$  mas un par de cuasineutrones  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . De esta forma, se puede ver como el MCP da una muy buena descripción a todas las bandas Yrast de los núcleos impares del Pr, además de asignarles más de una configuración a cada una de estas bandas.

Finalmente, en la fig.4.5 se comparan los diagramas de alineamiento de las bandas Yrast



obtenidas por el MCP con los datos experimentales. Es posible ver que el alineamiento del espín se da en todos los isótopos del Pr. Este comportamiento es reproducido satisfactoriamente por el MCP, donde este efecto se puede explicar en términos del cruce de bandas entre la banda base y la banda generada por el estado de tres cuasipartículas como se vio anteriormente. Sin embargo, en los núcleos con un número mayor de neutrones (<sup>131,133</sup>Pr), el MCP no reproduce satisfactoriamente los estados a alto espín. Esto puede deberse a la presencia de la deformación  $\gamma$  en estos núcleos.

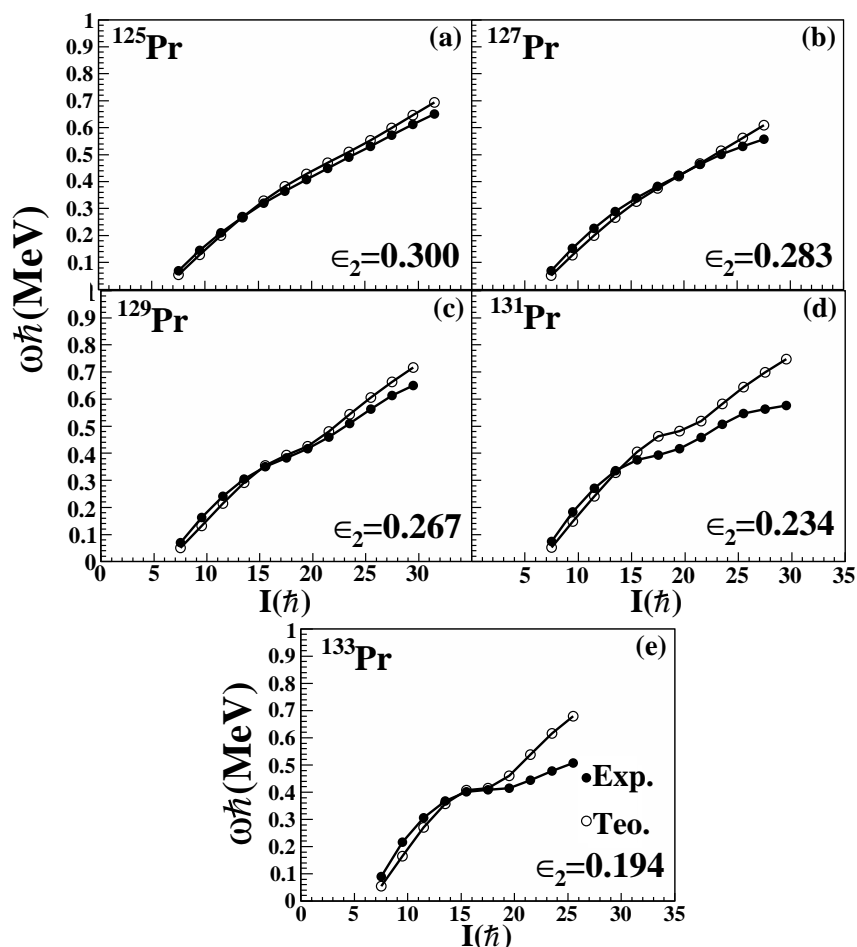


Figura 4.5: Diagramas de alineamiento de los núcleos <sup>125,127,129,131,133</sup>Pr, donde se grafica a la frecuencia rotacional como una función del espín  $I$ .

# 5

## El MCP en núcleos cercanos al Pr

El MCP se ha empleado extensamente en núcleos ligeros [42], como también en núcleos pesados [43], donde los resultados obtenidos son satisfactorios, mostrando un buen acuerdo con los datos experimentales. En las últimas dos décadas, este modelo se ha utilizado para estudiar los núcleos que se encuentran cercanos a los isótopos del Pr, como por ejemplo se han estudiado los núcleos par-par  $^{122-124-126-128-130,132}\text{Ce}$  [44, 45, 46, 47], los núcleos impares  $^{125-127-131}\text{Ce}$  [48], y los núcleos par-par  $^{122-124-126-128}\text{Ba}$  [49]. También se han estudiado otros núcleos que se encuentran en otras regiones de masa A, como son los  $^{98-102}\text{Sr}$ ,  $^{100-104}\text{Zr}$  [50], y los  $^{154-160}\text{Nd}$  y  $^{156-162}\text{Sm}$  [51]. Todos estos cálculos teóricos han mostrado que el MCP resulta ser un buen modelo teórico para describir los efectos que tiene el cruce de bandas como también, la buena interpretación que le da al fenómeno del *backbending*, los cuales juegan un papel muy importante en la estructura nuclear. En este capítulo se mostrarán los cálculos que se realizaron durante el desarrollo de este trabajo de tesis para los núcleos par-par como son: los isótopos del  $^{124,126,128,130,132}\text{Ce}$ ,  $^{122,124,126,128,130}\text{Ba}$  y el  $^{128,130,132}\text{Nd}$ ; y de los núcleos par- impar del  $^{123,125}\text{La}$ , los cuales se encuentran cercanos a los isótopos del Pr que se estudiaron en el capítulo anterior (ver fig. 5.1).

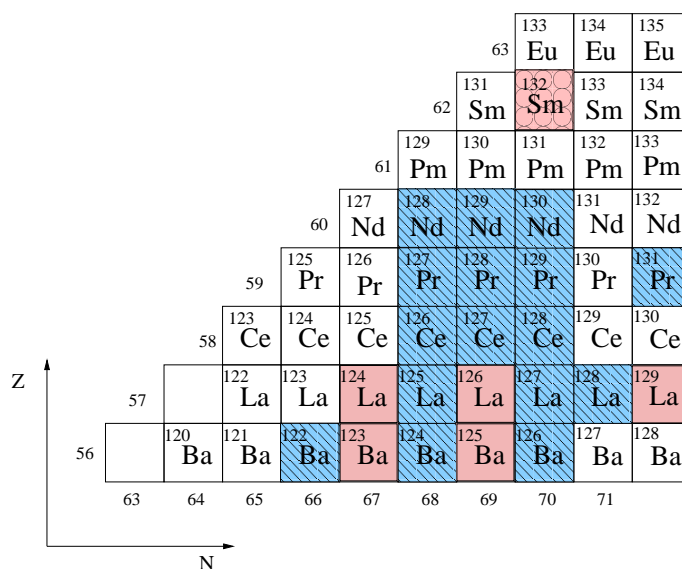


Figura 5.1: Núcleos cercanos a los isótopos del Pr.

## 5.1. Reproducción de las bandas yrast de la cadena del $^{124-132}\text{Ce}$

Para estudiar los isótopos del cerio (Ce) con el MCP, observemos que se tiene el caso de núcleos par-par, es decir, son núcleos cuyo número de protones y neutrones corresponde a un número par. Así que, para aplicar el programa del MCP se utilizó el código correspondiente a estos núcleos, el cual nos va a generar estados cuya configuración es de la forma:

$$|\phi_k\rangle = \{|0\rangle, a_{\nu_1}^\dagger a_{\nu_2}^\dagger |0\rangle, a_{\pi_1}^\dagger a_{\pi_2}^\dagger |0\rangle, a_{\nu_1}^\dagger a_{\nu_2}^\dagger a_{\pi_1}^\dagger a_{\pi_2}^\dagger |0\rangle\}$$

donde la primera configuración representa el estado vacío ( $|0\rangle$ ), el segundo y el tercero representan el estado de 2-cuasipartículas, ya sea para neutrones o protones, y por último nos genera también estados con una configuración de 4-cuasipartículas, las cuales están formadas por 2-cuasineutrones más 2-cuasiprotone. Para reproducir las bandas yrast de los isótopos del Ce con el MCP, se utilizaron los valores reportados por Rani Devi, et al. para los isótopos  $^{124-130}\text{Ce}$  [45, 46], y por Y. Sun para el isótopo  $^{132}\text{Ce}$  [47]. En este último isótopo se tomó la banda yrast que presenta una deformación normal. Los valores utilizados para los parámetros  $\kappa$  y  $\mu$  del potencial de Nilsson,

fueron tomados de [26]. Las capas que se utilizaron para los cálculos fueron  $N=3, 4$  y  $5$  para ambos nucleones, los cuales han sido utilizados para los núcleos que se encuentran en la región de masa  $A=130$ . Los valores de los parámetros de deformación y el valor de  $\gamma$ , se muestran en la tabla 5.1.

	$^{124}\text{Ce}$	$^{126}\text{Ce}$	$^{128}\text{Ce}$	$^{130}\text{Ce}$	$^{132}\text{Ce}$
$\epsilon_2$	0.292	0.267	0.250	0.225	0.21
$\epsilon_4$	0.010	0.01	-0.01	0.01	0.00
$\gamma$	0.20	0.20	0.16	0.16	0.16

Cuadro 5.1: Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Ce.

Los valores para las interacciones de apareamiento monopolar se tomaron de la misma forma como en los cálculos para los isótopos del Pr. Para determinar el tamaño del espacio de estados  $|\phi\rangle$ , se utilizaron los intervalos de energía de 3.5 MeV para los estados de 2-cuasineutrones y 2-cuasiprotones, y 5 MeV para los estados de 4-cuasipartículas, donde únicamente se seleccionan los estados que se encuentren dentro de este intervalo, es decir, los mas cercanos a la superficie de Fermi. Con estos valores, se evaluaron las bandas rotacionales teóricas para cada isótopo del Ce.

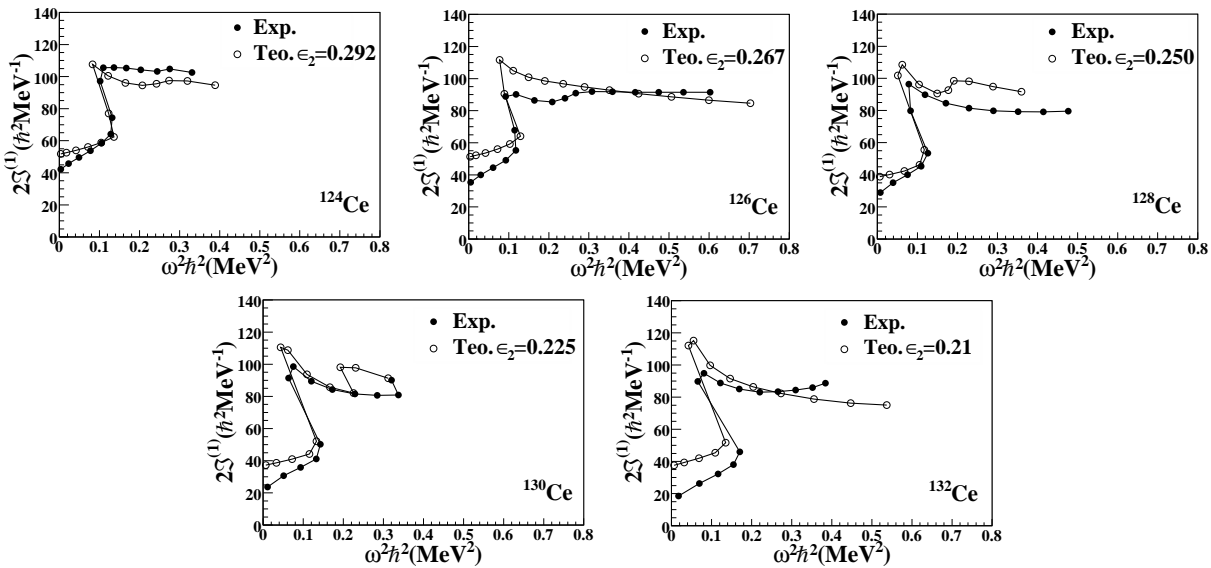


Figura 5.2: Dos veces el momento de inercia cinético  $\mathcal{J}^{(1)}$  en función de la frecuencia rotacional al cuadrado.

### 5.1.1. El fenómeno del *Backbending* en los núcleos pares del Ce

En la fig. 5.2 se puede observar la comparación de los datos experimentales de los isótopos  $^{124,126,128,130,132}\text{Ce}$ , tomados en [8, 38, 52, 53, 54], con los resultados obtenidos con el MCP, donde se muestra el comportamiento que tiene el momento de inercia en función de la frecuencia rotacional. En estas gráficas, es muy notorio ver que conforme aumenta el número de neutrones en estos isótopos, el fenómeno del *backbending* resulta ser más fuerte, es decir, el cambio en el momento de inercia se da con mayor intensidad para el isótopo  $^{132}\text{Ce}$  que para el  $^{124}\text{Ce}$ . Los cálculos teóricos generados por el MCP, logran reproducir este fenómeno. La comparación entre los datos teóricos con los datos experimentales resulta ser muy buena.

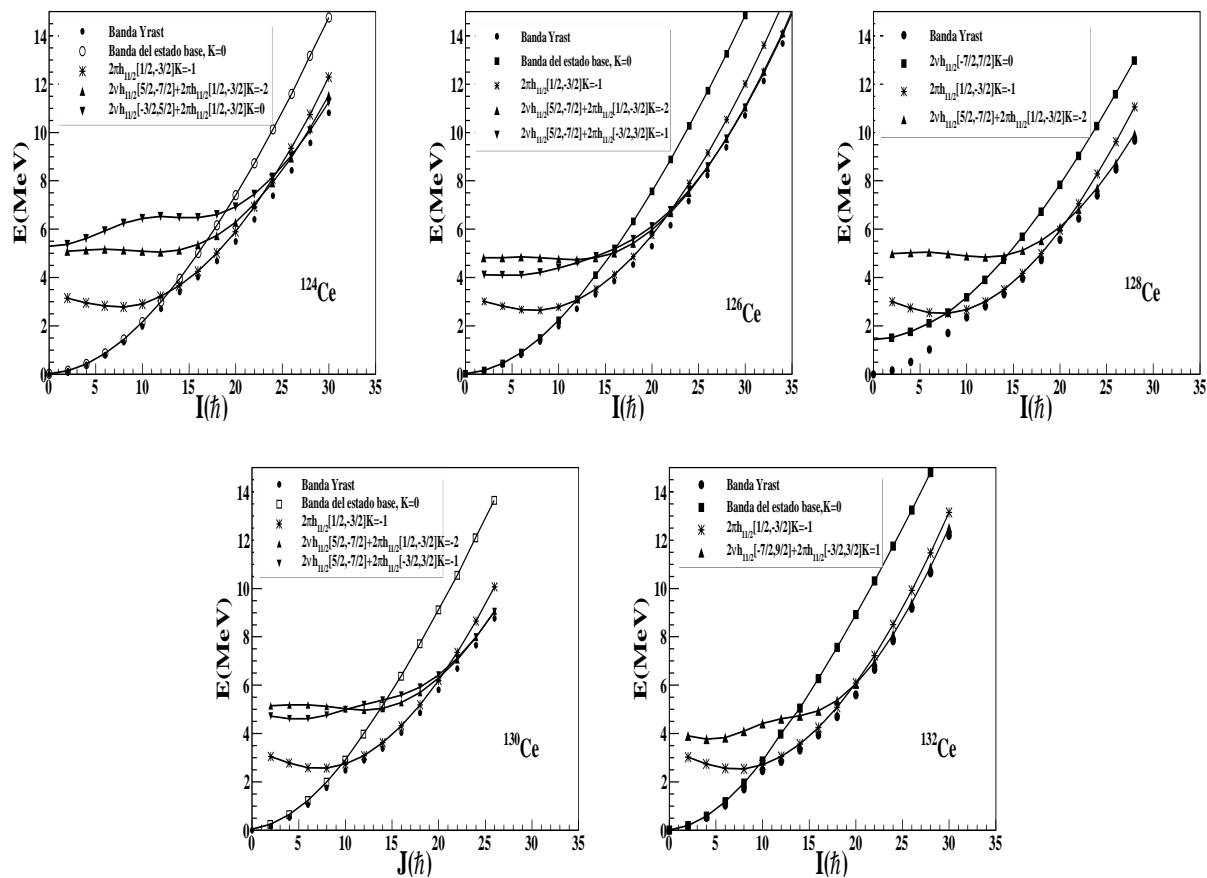


Figura 5.3: Diagrama de bandas de los núcleos  $^{124,126,128,130,132}\text{Ce}$

Para un mejor entendimiento sobre el fenómeno del *backbending*, se pueden analizar los diagramas de las bandas de energía de cada isótopo del Ce. De la fig. 5.3, se observan las

bandas rotacionales generadas por el MCP. Recordemos que el programa calcula varias bandas rotacionales, pero las más cercanas al nivel de Fermi, las que participan en el fenómeno del cruce de bandas, son las que se escogen para obtener la configuración de la banda yrast. A diferencia de los núcleos par-impar que estudiamos en el capítulo anterior, los núcleos par-par presentan configuraciones de dos y cuatro cuasipartículas, como también una configuración del estado vacío ( $K = 0$ ). Para estos núcleos, al igual que en los isótopos del Pr, las cuasipartículas que forman parte de las configuraciones de estas bandas se encuentran en el orbital deformado  $h_{11/2}$  para ambos nucleones.

Analizando cada uno de los diagramas, se puede ver que para los isótopos  $^{124,126,130,132}\text{Ce}$ , los estados a bajo espín de las bandas Yrast, se encuentran representados por un estado base o también llamada banda del estado vacío, con  $K = 0$ <sup>1</sup>. Únicamente el isótopo  $^{128}\text{Ce}$ , sus estados de bajo espín, están representados por un estado de 2-cuasineutrones, acoplados a un  $K = 0$ . Para el isótopo  $^{124}\text{Ce}$ , el MCP predice que el primer cruce se da en  $I = 14^+$  por una banda producida por 2-cuasiprotones  $2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = -1$ . El segundo cruce lo predice en  $I = 24^+$ , el cual se origina por una banda cuya configuración es la superposición de 4-cuasipartículas, la cual consiste de  $2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = -2$ . El último cruce lo predice en  $I = 26^+$ , también producido por la superposición de 4-cuasipartículas, formadas por  $2\nu h_{11/2}[-3/2, 5/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = 0$ . Para el isótopo  $^{126}\text{Ce}$ , el cruce lo predice el MCP, en  $I = 12^+$ , causado por una banda que presenta una configuración de  $2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = -1$ , un segundo cruce se da aproximadamente en  $I = 22^+$ , la cual es creada por un estado de 4-cuasipartículas, formada por el estado de  $2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = -2$ . El modelo predice un tercer cruce aproximadamente en  $I = 30^+$  ocasionado por otro estado de 4-cuasipartícula, el cual está formado por  $2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, 3/2]K = -1$ . En el isótopo  $^{128}\text{Ce}$ , como ya se mencionó anteriormente, los estados de bajo espín se encuentran representados por el estado de  $\nu h_{11/2}[-7/2, 7/2]K = 0$ , el cual es una configuración muy diferente a los demás isótopos del Ce. En éste, el programa predice el cruce aproximadamente en  $I = 8^+$  generada por una banda formada por  $2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = -1$ . El último cruce se da aproximadamente en  $I = 22^+$  causado por una banda, la cual esta formada por el estado de 4-cuasipartículas, representada por la superposición de  $2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, 3/2]K = -1$ . Para

---

<sup>1</sup>Del inglés ground-band y se le representa como “g-band”

el isótopo  $^{130}\text{Ce}$ , el MCP predice el primer cruce de bandas aproximadamente en  $I = 10^+$  causado por una banda que tiene como configuración el estado de  $2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = -1$ , el segundo cruce ocurre aproximadamente en  $I = 20^+$ , causado por una banda de 4-cuasipartículas, formada por  $2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = -2$ . El último cruce se da aproximadamente en  $I = 24^+$ , el cual es generado también por un estado de 4-cuasipartículas formado por  $2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, 3/2]K = -1$ . Para el isótopo  $^{132}\text{Ce}$ , el modelo predice dos cruces de bandas, iniciando aproximadamente en  $I = 10^+$  por un estado de  $2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]K = -1$ , el segundo es producido en  $I = 20^+$  por un estado de 4-cuasipartículas, formado por la superposición de  $2\nu h_{11/2}[-7/2, 9/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, 3/2]K = 1$ .

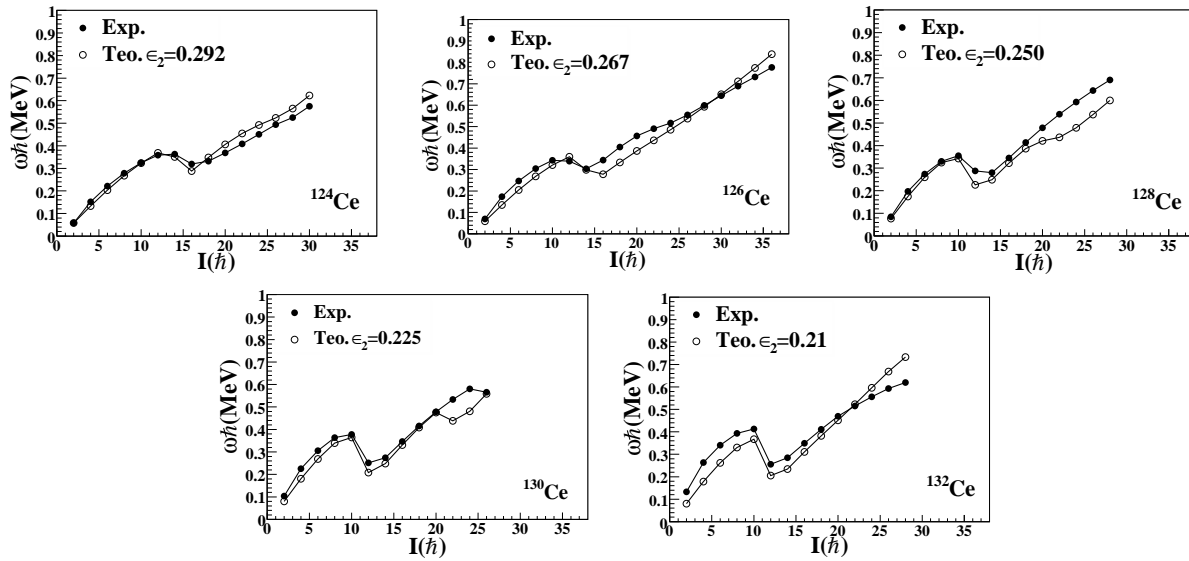


Figura 5.4: Diagramas de alineamiento de los núcleos  $^{124,126,128,130,132}\text{Ce}$  (frecuencia rotacional en función del espín  $I$ )

En la fig. 5.4, se muestran los diagramas de alineamiento de las bandas yrast reproducidas por el MCP. En todas las gráficas es muy notorio ver el alineamiento del espín en todos los isótopos del Ce. Además, se puede observar cómo el cambio en la frecuencia rotacional es más intenso conforme aumenta el número de neutrones en los isótopos del Ce. Este fenómeno se reproduce satisfactoriamente por el MCP, el cual se puede explicar mediante el cruce de bandas que se da entre la banda del estado vacío y la banda que consiste del estado de 2-cuasiprotónes (ver la fig. 5.3).

Por último, en la fig. 5.5, se comparan las energías de las bandas yrast calculadas por el MCP, con los datos experimentales. El MCP le asigna varias configuraciones a los estados de la banda yrast, los cuales ya estudiamos anteriormente. La mayoría de los isótopos pares del Ce, excepto el  $^{128}\text{Ce}$ , sus estados de bajo espín se encuentran formados por una banda del estado base. A partir de su primer cruce, el MCP les asigna a los estados de la banda yrast, una configuración de 2-cuasiprotones, los cuales dan lugar a un alineamiento de un par de protones en la subcapa  $h_{11/2}$ . Para los estados de alto espín, estas bandas de 2-cuasiprotones se cruzan con otras bandas cuya configuración es de 4-cuasipartículas, las cuales están formadas por un estado de 2-cuasineutrones más un estado de 2-cuasiprotones.

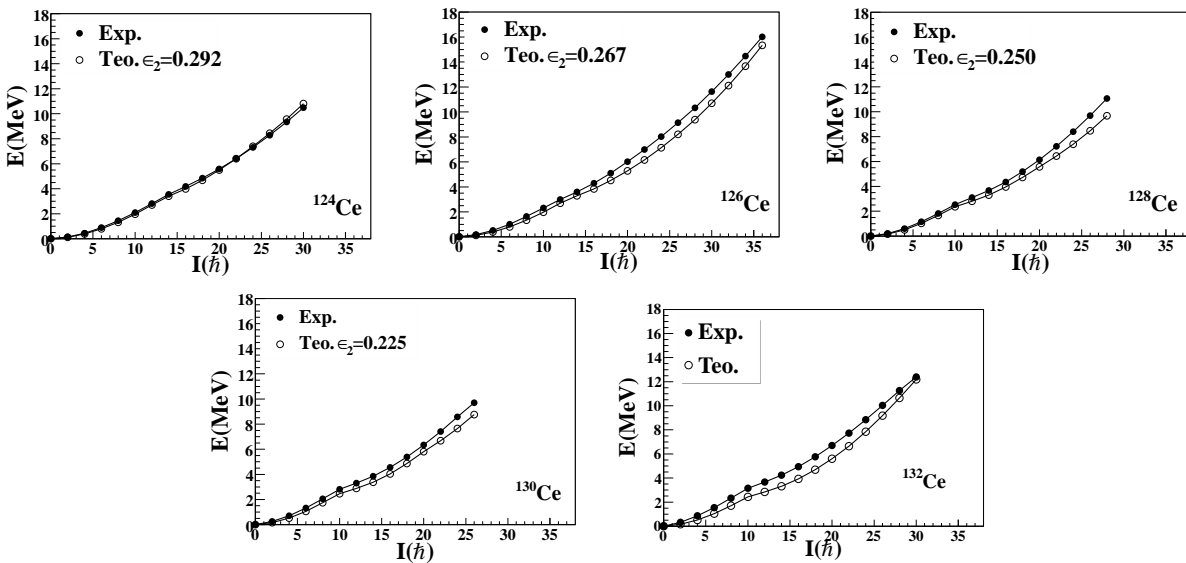


Figura 5.5: Comparación de las energías calculadas de la banda yrast con los datos experimentales.



## 5.2. Reproducción de las bandas yrast de la cadena del $^{122-130}\text{Ba}$

Para estudiar los isótopos pares del bario (Ba), se ocuparon los mismos datos y el mismo código que se utilizó para los núcleos par-par del Ce. Para los isótopos  $^{122,124,126,128,130}\text{Ba}$ , se tomaron los mismos valores que usaron Rawan Kumar, et al. [49] para reproducir sus bandas yrast. Las capas que se utilizaron en el programa fueron también  $N = 3, 4$  y  $5$  para ambos nucleones. Para los isótopos  $^{122,124,126}\text{Ba}$ , los valores para los parámetros  $\kappa$  y  $\mu$  del potencial de Nilsson, se tomaron los valores originales de Nilsson reportados en [30], para los otros dos isótopos se usaron los valores de [26]. En la tabla 5.2, se muestran los valores de los parámetros de deformación que se usaron para cada uno de los isótopos, como también del valor del parámetro  $\gamma$ .

	$^{122}\text{Ba}$	$^{124}\text{Ba}$	$^{126}\text{Ba}$	$^{128}\text{Ba}$	$^{130}\text{Ba}$
$\epsilon_2$	0.260	0.240	0.220	0.210	0.165
$\epsilon_4$	-0.051	0.041	0.025	0.041	0.03
$\gamma$	0.20	0.18	0.18	0.20	0.16

Cuadro 5.2: Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Ba.

Los valores para las interacciones de apareamiento monopolar se tomaron de la misma manera que en los isótopos del Ce, excepto para el  $^{130}\text{Ba}$ , donde el valor de  $G_2$  se tomó con el mismo valor para ambos nucleones, a diferencia de los otros cálculos, donde a  $G_2$  para el caso de los protones se consideró igual a cero. Los intervalos de energía que se emplearon para determinar el tamaño del espacio  $|\phi_k\rangle$ , fueron de 3.5 MeV para los estados de 2-cuasineutrones, 2.5 MeV para los estados de 2-cuasiprotones y por último de 6.0 MeV para los estados de 4-cuasipartículas. Considerando todos estos valores en el programa del MCP, se logró reproducir las bandas rotacionales para los núcleos pares del Ba.

### 5.2.1. El fenómeno del *Backbending* en los núcleos pares del Ba

En la fig. 5.6 se muestra la comparación de los resultados obtenidos por el MCP con los datos experimentales de los isótopos del Ba tomados en [55, 56, 57, 58, 59]. En estas gráficas se puede ver el fenómeno del backbending que los núcleos pares del Ba presentan. Obsérvese cómo el com-

portamiento del momento de inercia es más pronunciado conforme va aumentando el número de neutrones en los isótopos del Ba.

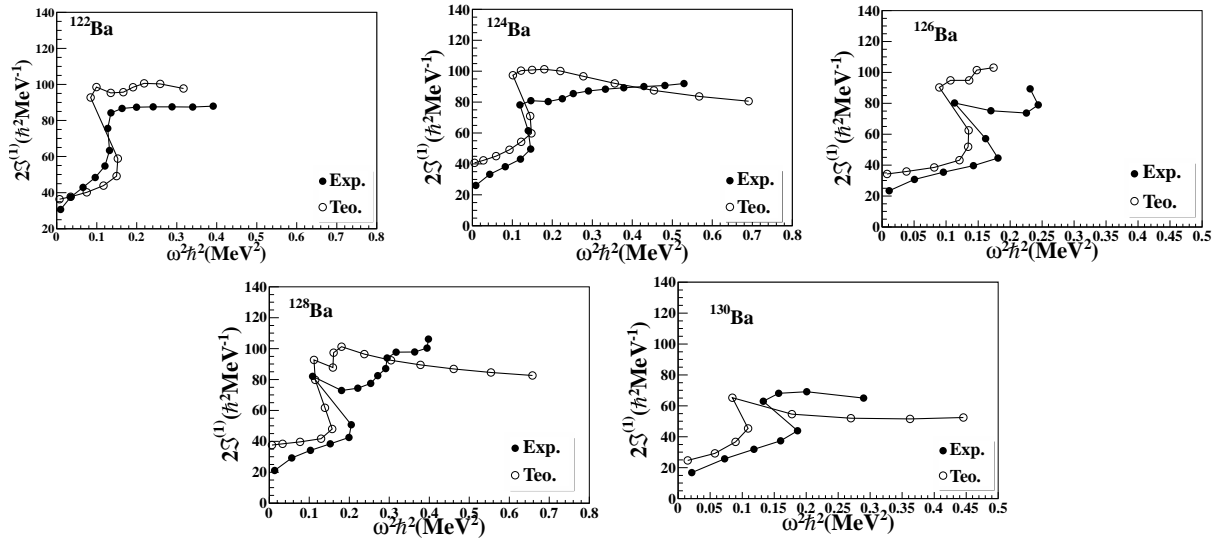


Figura 5.6: Comparación entre los cálculos teóricos y experimentales. Cálculo del momento de inercia cinético  $\mathcal{J}^{(1)}$ .

Para entender un poco más el fenómeno del *backbending*, uno puede hacer un análisis a los diagramas de bandas que se muestran en la fig.5.7, donde claramente se pueden ver las diferentes configuraciones que el MCP les asigna a los isótopos del Ba.

En la tabla 5.3 se muestran las diferentes configuraciones asignadas a las bandas yrast de los núcleos pares del Ba. En general, se puede ver que para los estados a bajo espín se encuentran generados por el estado vacío, con  $K = 0$ . En la mayoría de los isótopos del Ba, el primer cruce de bandas es producido por una banda de 2-cuasineutrones. En el caso del isótopo  $^{122}\text{Ba}$ , el primer cruce de bandas es producida por 2-cuasiprotones, la cual resulta ser distinta a como lo presentan los demás isótopos. Para los estados a más alto espín, la configuración que les asigna el MCP, corresponde a un estado de 4-cuasipartículas, el cual está formado por la superposición de 2-cuasineutrones más 2-cuasiprotones.

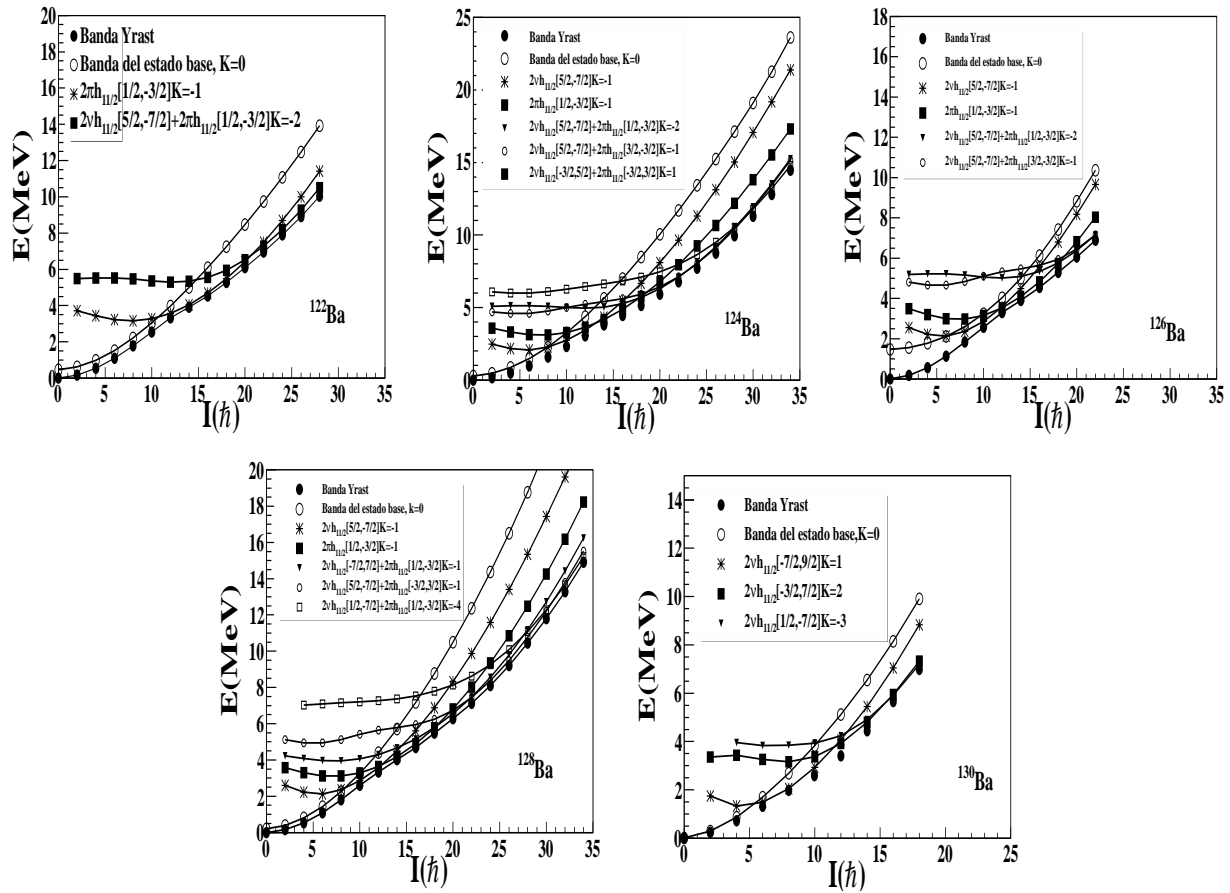


Figura 5.7: Diagrama de bandas de los núcleos  $^{122}, ^{124}, ^{126}, ^{128}, ^{130}\text{Ba}$

Configuración	
<sup>122</sup> Ba	$I_i \rightarrow I_f$
Estado vacío, $K = 0$	0 <sup>+</sup> a 10 <sup>+</sup>
$2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -1$	12 <sup>+</sup> a 20 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -2$	12 <sup>+</sup> a 20 <sup>+</sup>
<sup>124</sup> Ba	$I_i \rightarrow I_f$
Estado vacío, $K = 0$	0 <sup>+</sup> a 8 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2]k = -1$	10 <sup>+</sup> a 12 <sup>+</sup>
$2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -1$	14 <sup>+</sup> a 16 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -2$	18 <sup>+</sup> a 22 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[3/2, -3/2]k = -1$	24 <sup>+</sup> a 28 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[-3/2, 5/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, 3/2]k = 1$	30 <sup>+</sup> a 34 <sup>+</sup>
<sup>126</sup> Ba	$I_i \rightarrow I_f$
Estado vacío, $K = 0$	0 <sup>+</sup> a 6 <sup>+</sup>
$\nu h_{11/2}[5/2, -7/2]k = -1$	8 <sup>+</sup> a 10 <sup>+</sup>
$\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -1$	12 <sup>+</sup> a 18 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -2$	18 <sup>+</sup> a 26 <sup>+</sup>
<sup>128</sup> Ba	$I_i \rightarrow I_f$
Estado vacío, $K = 0$	0 <sup>+</sup> a 8 <sup>+</sup>
$\nu h_{11/2}[5/2, -7/2]k = -1$	10 <sup>+</sup> a 12 <sup>+</sup>
$2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -1$	12 <sup>+</sup> a 18 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[-7/2, 7/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -1$	20 <sup>+</sup> a 22 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, -3/2]k = -1$	24 <sup>+</sup> a 30 <sup>+</sup>
$2\nu h_{11/2}[1/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[1/2, -3/2]k = -4$	32 <sup>+</sup> a 34 <sup>+</sup>
<sup>130</sup> Ba	$I_i \rightarrow I_f$
Estado vacío, $K = 0$	0 <sup>+</sup> a 4 <sup>+</sup>
$\nu h_{11/2}[-7/2, 9/2]k = 1$	6 <sup>+</sup> a 10 <sup>+</sup>
$2\pi h_{11/2}[-3/2, 7/2]k = 2$	12 <sup>+</sup> a 14 <sup>+</sup>
$2\pi h_{11/2}[1/2, -7/2]k = -3$	16 <sup>+</sup> a 18 <sup>+</sup>

Cuadro 5.3: Configuración asignada por el MCP a las bandas yrast de los isótopos del Ba.

En la fig. 5.8, se muestran los diagramas de alineamiento que los núcleos pares del Ba presentan. Es muy claro observar que el cambio que sufre la frecuencia rotacional es más pronunciado en los isótopos pesados que en el ligero (<sup>122</sup>Ba). También se puede ver que para los estados de alto espín, el MCP no logra reproducir bien los datos experimentales; pero a pesar de esto, la reproducción de los datos experimentales con el MCP puede considerarse muy buena. Por último, en la fig.5.9, se muestran las comparaciones de los estados de energía de las bandas Yrast con los datos experimentales. Nuevamente se pueden observar las diferencias que se tienen para los estados de alto espín.

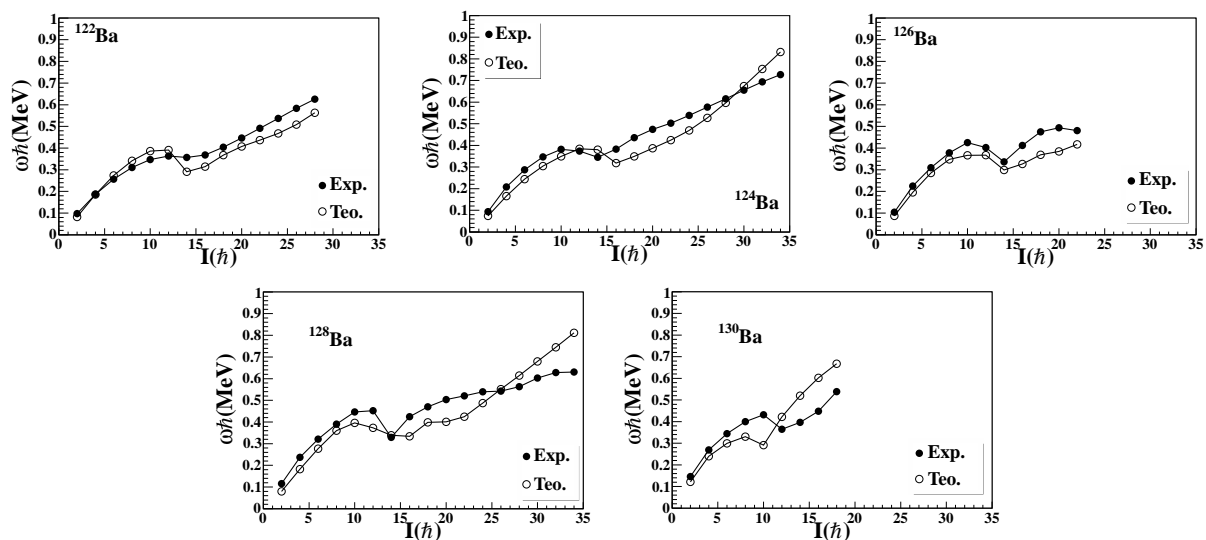


Figura 5.8: Diagramas de alineamiento de los núcleos <sup>122,124,126,128,130</sup>Ba (frecuencia angular en función del espín I).

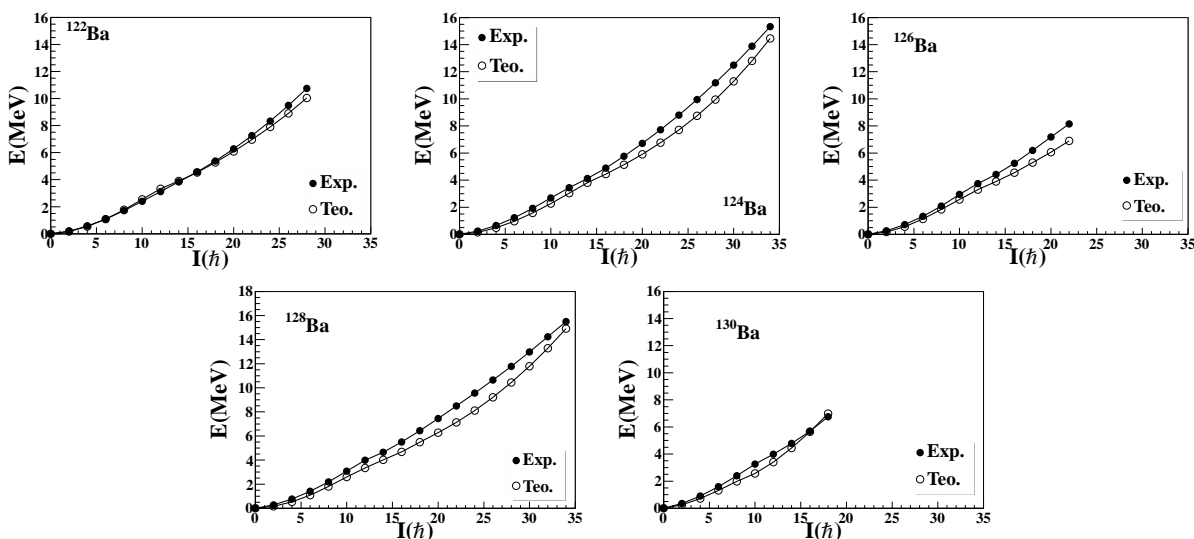


Figura 5.9: Comparación de las energías calculadas de la banda yrast con los datos experimentales para los isótopos del Ba.

### 5.3. Reproducción de las bandas yrast de la cadena del $^{128-132}\text{Nd}$

Para la reproducción de las bandas yrast de los núcleos pares del neodimio (Nd), se tomaron los mismos valores para las capas en ambos nucleones ( $N=3,4$  y  $5$ ). Para estos cálculos fue necesario tomar los valores originales para los parámetros  $\kappa$  y  $\mu$  del potencial de Nilsson [30]. Los valores de los parámetros de deformación y el valor de  $\gamma$ , se muestran en la tabla 5.4.

	$^{128}\text{Nd}$	$^{130}\text{Nd}$	$^{132}\text{Nd}$
$\epsilon_2$	0.330	0.325	0.290
$\epsilon_4$	-0.020	-0.020	-0.020
$\gamma$	0.16	0.16	0.20

Cuadro 5.4: Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Nd.

A diferencia de los isótopos del Ce y Ba, para los núcleos pares del Nd, los valores que se utilizaron para las interacciones de apareamiento monopolar se tomaron iguales en ambos nucleones, es decir, aquí se consideró a  $G_2$  distinto de cero para el caso de los protones. El intervalo de energía que se empleó para determinar el tamaño del espacio  $|\phi\rangle$ , fue de: 3.5 MeV para los es-

tados de 2-cuasineutrones, 3 MeV para los estados de 2-cuasiprotones y 6.5 MeV para los estados de 4-cuasipartículas. De esta forma, se calcularon los niveles de energía de las bandas Yrast de los isótopos del Nd.

### 5.3.1. El fenómeno del *Backbending* en los núcleos pares del Nd

Para el caso de los núcleos pares del Nd, es posible estudiar el fenómeno del *backbending* a partir de las gráficas del momento de inercia dinámico  $\mathcal{J}^{(2)}$ . En la fig. 5.10 se comparan los resultados obtenidos por el MCP con los datos experimentales de los isótopos pares del Nd tomados en [61, 62, 63]. A diferencia de los anteriores núcleos pares (Ce, Ba), los isótopos pares del Nd presentan dos *backbending*. En el <sup>130</sup>Nd no es posible visualizarlo debido a la falta de datos experimentales; pero se puede proponer que para los estados de alto espín es posible que este núcleo experimente un segundo *backbending* similar que en los otros Nd.

Hasta ahora, los núcleos pares del Nd se han estudiado mediante el uso del MCC, en donde se ha examinado la causa del fenómeno del *backbending* [60, 61, 62, 63]. En sus cálculos, se propone que para el caso del núcleo <sup>128</sup>Nd, el primer cambio del  $\mathcal{J}^{(2)}$  ocurre aproximadamente en  $\hbar\omega = 0.37$  MeV. Experimentalmente se da en  $\hbar\omega = 0.35$  MeV. Con ayuda del MCP, podemos observar que los datos teóricos coinciden con los datos experimentales, es decir, también el MCP predice este cambio en  $\hbar\omega = 0.35$  MeV. Comparando los resultados obtenidos por los dos modelos, realmente se puede ver que no hay mucha diferencia, lo cual se puede decir que ambos cálculos teóricos son aceptables. Ambos modelos predicen que la causa del primer *backbending*, lo produce el alineamiento de 2-cuasiprotones que se encuentran en la subcapa  $h_{11/2}$  (ver la tabla 5.5 y la referencia [61]). El segundo cambio que presenta el  $\mathcal{J}^{(2)}$ , el MCC lo predice en  $\hbar\omega \approx 0.47$  MeV, diferente a como ocurre experimentalmente, que es en  $\hbar\omega \approx 0.58$  MeV. Con los cálculos del MCP, el cruce resulta ser aproximadamente igual a como se da con los datos experimentales. Si vemos en la fig.5.10, este cambio lo predice en  $\hbar\omega \approx 0.56$  MeV, el cual resulta ser una aproximación muy buena por este modelo. La causa de este segundo *backbending*, según el MCP, se asocia a 4-cuasipartículas, formada por la superposición de 2-cuasineutrones más 2-cuasiprotones, el cual es muy diferente al propuesto por el MCC, que menciona que este segundo cambio de  $\mathcal{J}^{(2)}$  se produce por un alineamiento de 2-cuasineutrones [61].

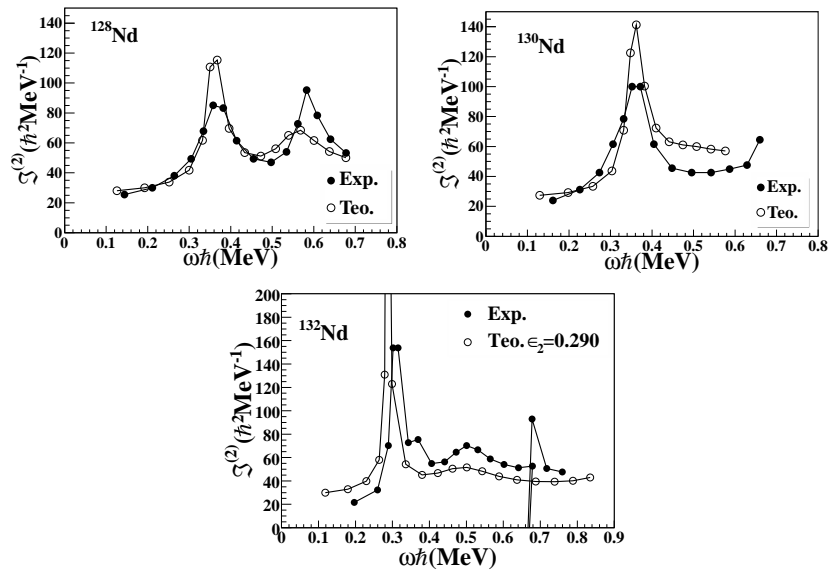


Figura 5.10: Comparación entre los cálculos teóricos y experimentales. Cálculo del momento de inercia dinámico  $\mathcal{J}^{(2)}$ .

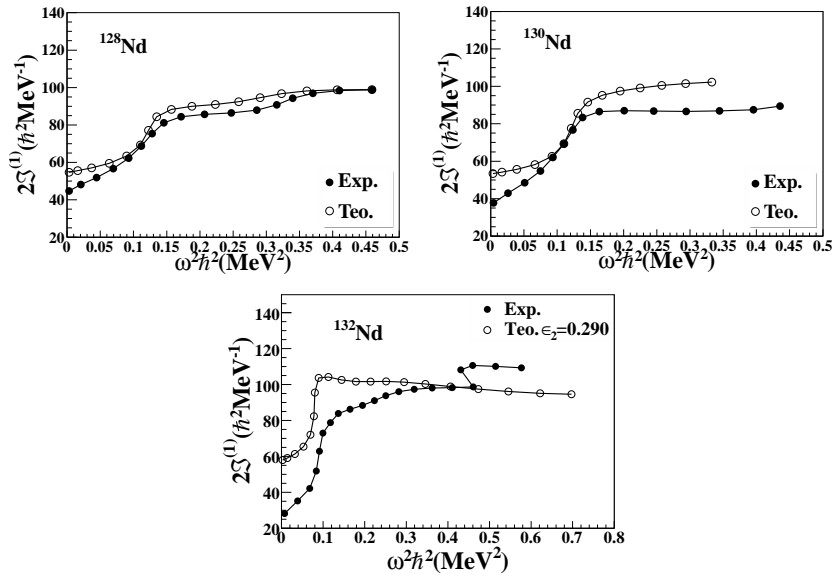


Figura 5.11: Comparación entre los cálculos teóricos y experimentales. Cálculo del momento de inercia cinético  $\mathcal{J}^{(1)}$ .



Para el caso del <sup>130</sup>Nd, el primer cambio en  $\mathcal{J}^{(2)}$ , experimentalmente, ocurre en  $\hbar\omega \approx 0.34$  MeV. De la fig. 5.10 se puede observar como el MCP coincide con los datos experimentales, a diferencia del obtenido por el MCC, el cual lo predice en  $\hbar\omega \approx 0.35$  MeV [62]. Si comparamos ambos resultados teóricos, la diferencia entre ellos no es muy grande, por lo que ambos son aceptables. En ambos modelos teóricos, se dice que la causa del cambio del  $\mathcal{J}^{(2)}$ , es debido al alineamiento de 2-cuasiprotones que se encuentran en la subcapa  $h_{11/2}$ . A diferencia de los isótopos <sup>128</sup>Nd y <sup>132</sup>Nd, en el isótopo <sup>130</sup>Nd no se puede ver un segundo cambio de  $\mathcal{J}^{(2)}$  debido a que no se cuenta con más datos experimentales para los estados a alto espín, sin embargo se puede pensar que el cambio en  $\mathcal{J}^{(2)}$  debería de ocurrir en  $\hbar\omega \approx 0.68$  MeV debido a su ligero incremento que presenta en los últimos estado que se tienen experimentalmente. Los resultados teóricos obtenidos por el MCP, no reproducen un segundo cambio en el momento de inercia dinámico, diferente a lo que el MCC reporta, el cual predice que el segundo cambio del momento de inercia dinámico debe de ocurrir en  $\hbar\omega \approx 0.5$  MeV. Por último, se tiene al isótopo <sup>132</sup>Nd, donde el primer cambio en  $\mathcal{J}^{(2)}$  se puede ver que experimentalmente ocurre en  $\hbar\omega \approx 0.31$  MeV, mientras que el MCP lo predice en  $\hbar\omega \approx 0.28$  MeV, e incluso, la intensidad del *backbending* es mucho mayor que en los datos experimentales. Los datos experimentales muestran un segundo cruce en  $\hbar\omega \approx 0.5$  MeV, el cual es también reproducido satisfactoriamente por el MCP. El MCP, al igual que el modelo MCC [63], predice que el primer cambio en  $\mathcal{J}^{(2)}$  es causado por el alineamiento de 2-cuasiprotones, para la interpretación del segundo cambio que sufre el  $\mathcal{J}^{(2)}$ , el MCP predice que a éste lo causa el alineamiento de 2-cuasineutrones, que también se encuentran en la subcapa  $h_{11/2}$ .

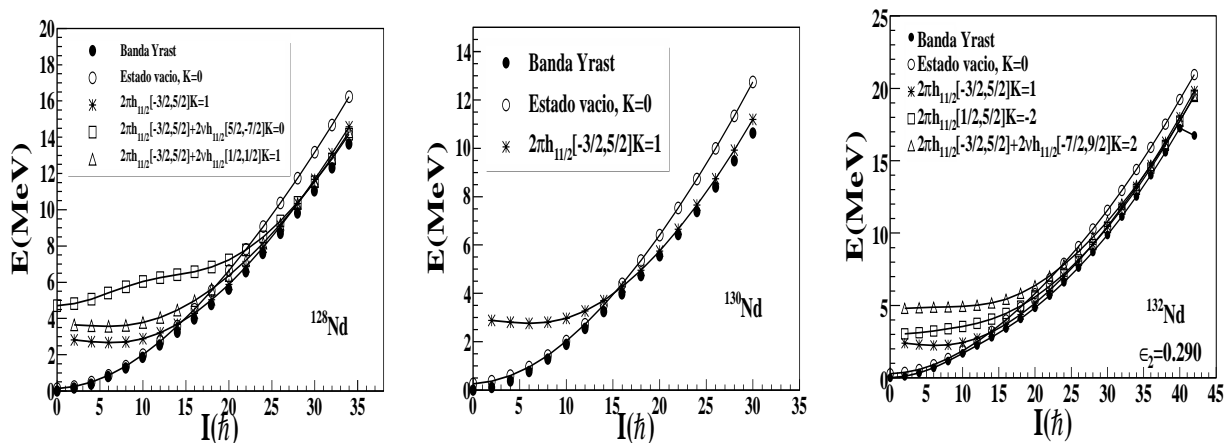


Figura 5.12: Diagrama de bandas de los núcleos <sup>128,130,132</sup>Nd.

Para entender más sobre el fenómeno del *backbending*, es decir, los cambios que sufre el  $\mathcal{J}^{(2)}$  en función de la frecuencia rotacional, se pueden analizar los diagramas de bandas generadas por el MCP para los núcleos pares del Nd (ver fig. 5.12), las cuales ayudan asignarles varias configuraciones a las bandas Yrast de los núcleos pares del Nd (ver la tabla 5.5).

Configuración	
$^{128}\text{Nd}$	$I_i \rightarrow I_f$
Estado vacío, $K = 0$	$0^+$ a $14^+$
$2\pi h_{11/2}[-3/2, 5/2]k = 1$	$16^+$ a $26^+$
$2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, 5/2]k = 0$	$28^+$ a $30^+$
$2\nu h_{11/2}[1/2, 1/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, 5/2]k = 1$	$28^+$ a $30^+$
$^{130}\text{Nd}$	$I_i \rightarrow I_f$
Estado vacío, $K = 0$	$0^+$ a $14^+$
$2\pi h_{11/2}[5/2, -7/2]k = -1$	$16^+$ a $30^+$
$^{132}\text{Nd}$	$I_i \rightarrow I_f$
Estado vacío, $K = 0$	$0^+$ a $14^+$
$2\pi h_{11/2}[-3/2, 5/2]k = 1$	$16^+$ a $28^+$
$2\pi h_{11/2}[1/2, 5/2]k = -2$	$30^+$ a $38^+$
$2\nu h_{11/2}[-7/2, 9/2] + 2\pi h_{11/2}[-3/2, 5/2]k = 2$	$40^+$ a $42^+$

Cuadro 5.5: Configuraciones asignadas por el MCP a las bandas yrast de los isótopos del Nd

Para los estados de bajo espín de las bandas yrast de los isótopos del Nd, el MCP les asigna la configuración de un estado vacío, con  $K = 0$ . El primer cruce de bandas que se da en el  $^{128}\text{Nd}$ , es causado por una banda generada por 2-cuasiprotones que tienen la configuración de  $2\pi h_{11/2}[-3/2, 5/2]k = 1$ , similarmente en el  $^{132}\text{Nd}$  se tiene la misma configuración. Para el caso del  $^{130}\text{Nd}$ , el cruce de bandas tiene su origen por una banda creada por  $2\pi h_{11/2}[5/2, -7/2]k = -1$ . Se predice un segundo y tercer cruce de bandas en el  $^{128}\text{Nd}$ , los cuales se deben a una banda originada por 4-cuasipartículas, la cual está formada por la superposición de 2-cuasineutrones más 2-cuasiprotones (su configuración se muestra en la tabla 5.5). Por último tenemos al  $^{132}\text{Nd}$ , donde se pueden ver los tres cruces de bandas. Las primeras dos bandas son producidas por 2-cuasiprotones. El último cruce lo generan los estados de 4-cuasipartículas (su configuración se

puede ver en la tabla 5.5).

En la fig. 5.13, se muestran los diagramas de alineamiento de los núcleos pares del Nd. Se puede observar cómo el MCP reproduce el alineamiento del espín en los tres isótopos. A diferencia de los núcleos del Ce, el cambio de la frecuencia rotacional no es muy intenso. Además, conforme va aumentando el número de neutrones, se tiene una ligera diferencia entre los datos teóricos con los experimentales. Aún así, se pueden considerar muy buenos los resultados obtenidos por este modelo. Por último, en la fig.5.14, se comparan las energías de los estados yrast calculadas con el MCP con los datos experimentales.

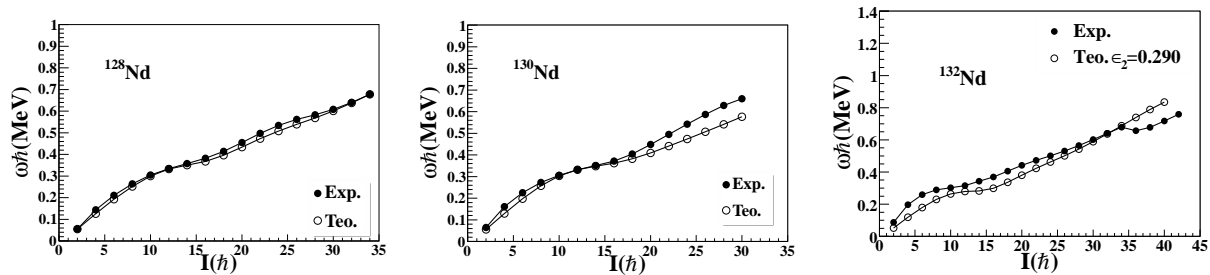


Figura 5.13: Diagramas de alineamiento de los núcleos <sup>128,130,132</sup>Nd (frecuencia angular en función del espín I)

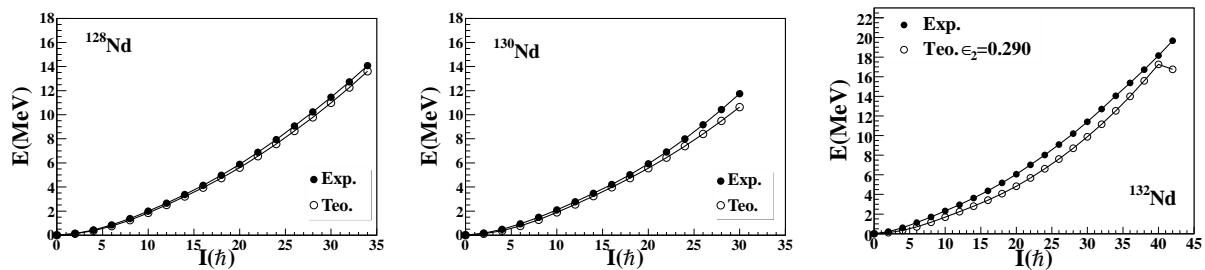


Figura 5.14: Comparación de las energías calculadas de la banda yrast con los datos experimentales.

## 5.4. Reproducción de las bandas yrast de los núcleos par-impar

### $^{123-125}\text{La}$

A diferencia de los núcleos pares, los núcleos par-impar del lantano (La), resultan ser un poco más difíciles de reproducir sus bandas Yrast con el MCP. Al igual que en los isótopos del Pr, se emplearon los mismos datos en el código del programa del MCP. Para los parámetros  $\kappa$  y  $\mu$  del potencial de Nilsson, se usaron los originales reportados en [30]. Los valores de los parámetros de deformación y del valor del parámetro  $\gamma$  se muestran en la tabla 5.6

	$^{123}\text{La}$	$^{125}\text{La}$
$\epsilon_2$	0.280	0.250
$\epsilon_4$	0.013	-0.020
$\gamma$	0.16	0.16

Cuadro 5.6: Datos que se emplearon en el programa del MCP para los isótopos del Nd.

Los valores para las interacciones de apareamiento monopolar se tomaron de la misma forma que fueron empleados para obtener los resultados de los isótopos del Pr, Ce, y algunos del Ba. Como los isótopos del La resultan ser núcleos cuyo número de neutrones es par y el número de protones es impar, las configuraciones del espacio de estados corresponde a estados de 1-cuasipartículas y de 3-cuasipartículas, igual que en el caso de la cadena de los Pr. Los intervalos de energía que se utilizaron para definir el tamaño del espacio  $|\phi\rangle$  fueron: 3.5 MeV y 3.0 MeV para los estados de 1-cuasipartículas y de 6.5 MeV para los estados de 3-cuasipartículas. Al igual que en los anteriores núcleos, a partir de la obtención de las energías de los estados de las bandas yrast, se estudiaron el cruce de bandas rotacionales y el fenómeno del *backbending* que los isótopos del La presentan.

### 5.4.1. El fenómeno del *Backbending* en los núcleos par-impar del La

En la fig. 5.15 se comparan los resultados del momento de inercia dinámico  $\mathcal{J}^{(2)}$  obtenidos con el MCP y los datos experimentales de los isótopos del La [64, 65]. Se puede ver que para el  $^{123}\text{La}$ , se observa un ligero cambio en  $\hbar\omega \approx 0.45$  MeV, para los estados a bajo espín el MCP reproduce bien los datos experimentales, incluso predice un cambio del  $\mathcal{J}^{(2)}$  en  $\hbar\omega \approx 0.46$  MeV, el cual coincide con los datos experimentales. Para los estados a alto espín se observa que la reproducción

de los datos experimentales no son muy buenos, pues el MCP no logra reproducir el segundo cambio ligero que experimentalmente se ve en el  $\mathcal{J}^{(2)}$  alrededor de  $\hbar\omega \approx 0.6$  MeV. Para el caso del  $^{125}\text{La}$ , experimentalmente se observa un cambio del  $\mathcal{J}^{(2)}$  en  $\hbar\omega \approx 0.48$  MeV, mientras que el MCP lo predice antes, en  $\hbar\omega \approx 0.39$  MeV. La reproducción del fenómeno *backbending* para los núcleos par-impar no resulta ser tan fácil. Esto también fue notorio en los isótopos del Pr, donde fue claro ver que para los isótopos más pesados ( $^{131,133}\text{Pr}$ ), los estados teóricos de alto espín ya no coincidían con los datos experimentales.

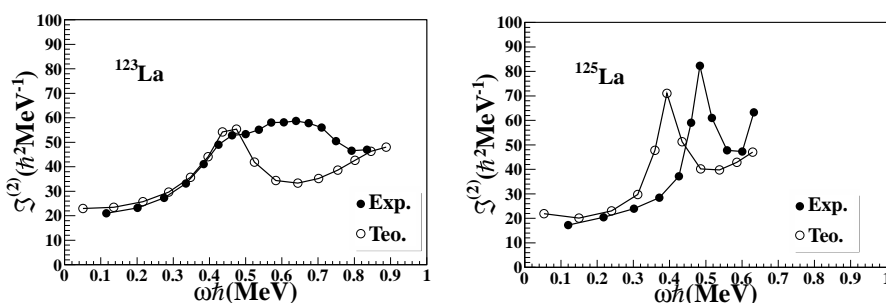


Figura 5.15: Comparación entre los cálculos teóricos y experimentales. Cálculo del momento de inercia dinámico  $\mathcal{J}^{(2)}$ .

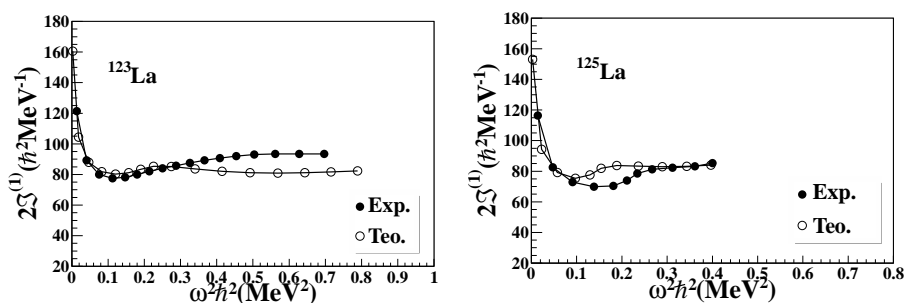


Figura 5.16: Dos veces el momento de inercia cinético  $\mathcal{J}^{(1)}$  en función de la frecuencia rotacional al cuadrado.

De la fig.5.17, se observan los diagramas de bandas que se obtuvieron con el MCP. En estas gráficas se puede observar el cruce de bandas rotacionales, las cuales le asignan las configuraciones a las bandas yrast de los isótopos del La. En la tabla 5.7, se muestran las posibles configuraciones que el MCP le asigna a los estados de las bandas yrast. Se puede observar que para los estados de bajo espín, la configuración corresponde al estado de 1-cuasiprotón que se encuentra en la subcapa

$h_{11/2}$ . Para el caso del  $^{123}\text{La}$ , el modelo le asigna otras tres configuraciones a la banda Yrast, y para el  $^{125}\text{La}$ , únicamente se tienen dos configuraciones (ver la tabla 5.7).

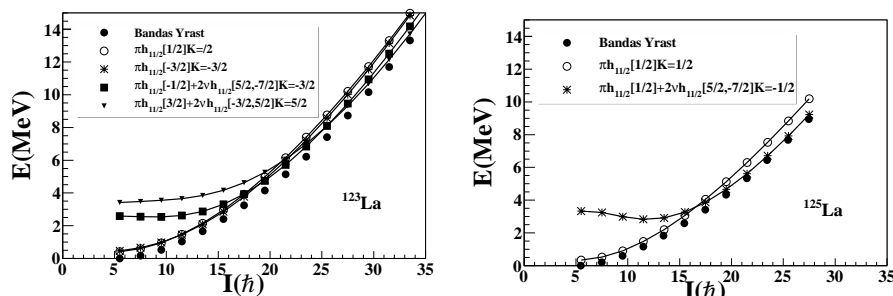


Figura 5.17: Diagrama de bandas de los núcleos  $^{123,125}\text{La}$

Configuración	
$^{123}\text{La}$	$I_i \rightarrow I_f$
$\pi h_{11/2}[1/2]k = 1/2$	11/2- a 19/2-
$\pi h_{11/2}[-3/2]k = -3/2$	23/2- a 35/2
$\pi h_{11/2}[-1/2] + 2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2]k = -3/2$	39/2- a 51/2
$\pi h_{11/2}[3/2] + 2\nu h_{11/2}[-3/2, 5/2]k = 5/2$	51/2- a 75/2-
$^{125}\text{La}$	$I_i \rightarrow I_f$
$\pi h_{11/2}[1/2]k = 1/2$	11/2- a 35/2-
$\pi h_{11/2}[1/2] + 2\nu h_{11/2}[5/2, -7/2]k = -1/2$	39/2- a 55/2-

Cuadro 5.7: Configuraciones asignadas por el MCP a las bandas yrast de los isótopos del La

En la fig. 5.18, se muestran los diagramas de alineamiento, es decir, el comportamiento que tiene la frecuencia rotacional en función del espín. Se puede observar el cambio ligero que se tiene en la frecuencia rotacional en ambos núcleos del La, el cual es ocasionado por el alineamiento de un cuasiprotón en la capa  $h_{11/2}$ . Nuevamente se puede notar que para los estados de alto espín el MCP no reproduce satisfactoriamente los datos experimentales. Por último, en la fig. 5.19, se comparan las energías calculadas de las bandas yrast con los datos experimentales.

Para concluir este capítulo, es interesante ver cómo va cambiando el parámetro de deformación  $\epsilon_2$  en cada uno de los núcleos que fueron estudiados en este trabajo de investigación. En la fig.

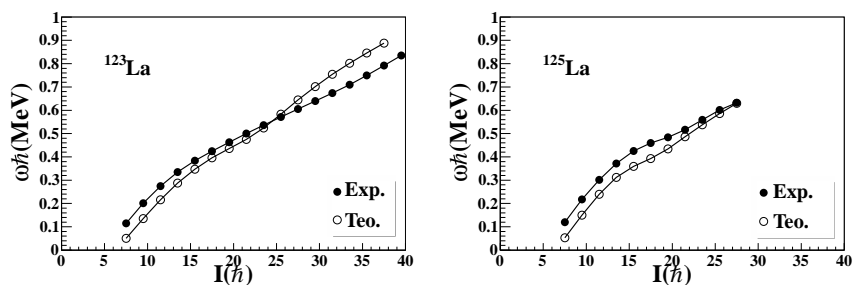


Figura 5.18: Diagramas de alineamiento de los núcleos  $^{123,125}\text{La}$  (frecuencia rotacional en función del espín I)

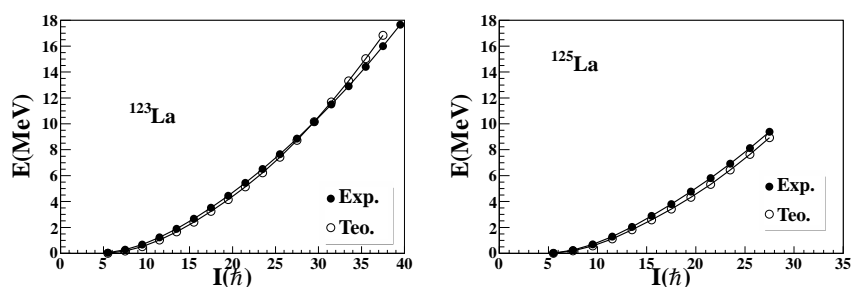


Figura 5.19: Comparación de las energías calculadas de la banda yrast con los datos experimentales.

5.20, se puede ver con claridad cómo el parámetro de deformación se va incrementando conforme aumenta el número de protones, de la misma manera que cuando el número de neutrones disminuye en los isótopos de cada uno de los núcleos estudiados en este capítulo, se registra un aumento en el parámetro de deformación  $\epsilon_2$ .

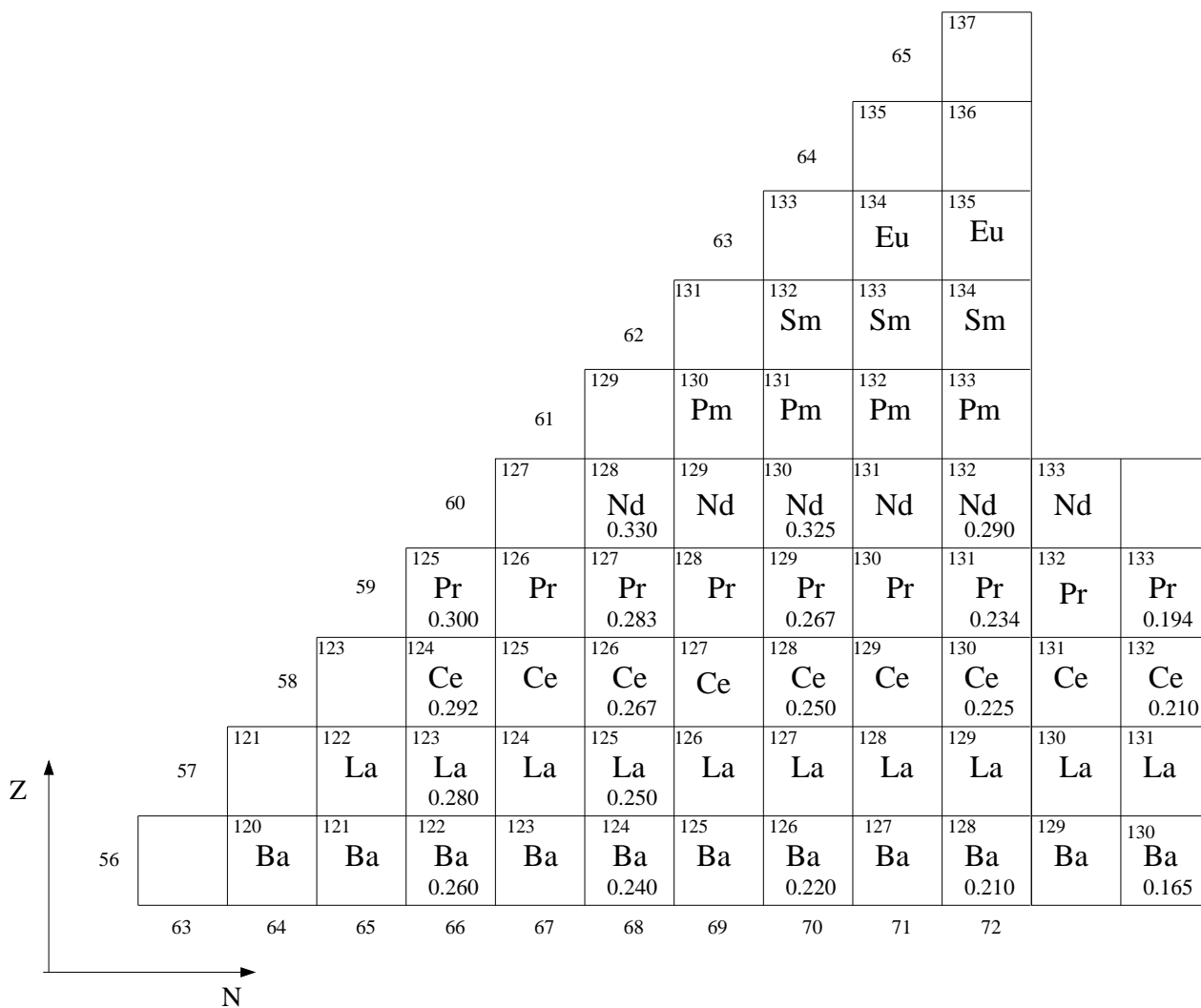


Figura 5.20: Núcleos cercanos a la cadena de los Pr. También se ilustran los parámetros de deformación que se asignan a cada uno de los núcleos que se estudiaron en este trabajo de investigación.





# 6

## Conclusión

A partir del análisis de las bandas yrast de los núcleos impares del Pr, se buscó explicar las diferentes contribuciones que los nucleones pueden dar a su estructura nuclear. Gracias a los cálculos espectroscópicos obtenidos con el MCP para los núcleos  $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$ , fue posible estudiar las bandas yrast observadas en estos núcleos impares. Estos cálculos revelan que el momento de inercia dinámico incrementa su valor para valores bajos en la frecuencia, cuando el número de neutrones ( $N$ ) va decreciendo en los isótopos impares del Pr. Esta es una característica que se encuentra relacionada con el incremento en la deformación asociada a estas bandas yrast para los isótopos ligeros del Pr.

El MCP reproduce bien el fenómeno del *backbending*, el cual es importante para describir la interacción entre la banda base y una banda rotacional. Este modelo propone que el fenómeno ocurre por el alineamiento de un estado de 3-cuasipartículas, el cual está formado por un estado de un cuasiprotón más un estado de un par de cuasineutrones, ambos, ubicados en la subcapa  $h_{11/2}$ .

Debido a que el MCP reproduce muy bien el fenómeno del *backbending*, fue factible estudiar y sobre todo, asignarles una configuración a los estados de las bandas yrast por medio de las bandas que participan en la región del cruce de bandas. Antes de que ocurra este fenómeno, en la mayoría de los isótopos del Pr, sus estados a bajo espín se encuentran caracterizados por 1-cuasiprotón con  $K = -3/2$ , que se encuentra en el orbital  $\pi h_{11/2}$ , siendo muy diferente para el caso del  $^{133}\text{Pr}$ , pues sus estados se encuentran representados por un estado de 1-cuasiprotón con  $K = 1/2$  en el mismo orbital  $\pi h_{11/2}$ . Cuando ocurre el primer cruce de bandas, el MCP sugiere que a éste lo produce un

estado de tres cuasipartículas, la cual consiste de un cuasiprotón más un par de cuasineutrones. El único isótopo que muestra tener una configuración diferente es el  $^{133}\text{Pr}$ . No olvidemos que los datos teóricos que se obtuvieron para este isótopo resultaron no ser tan precisos para los estados de alto espín, esto pudiera deberse a la presencia de la deformación  $\gamma$  que hay en los núcleos pesados del Pr ( $^{131,133}\text{Pr}$ ).

Para tener una visión más amplia sobre el comportamiento del fenómeno del *backbending*, como también sobre el fenómeno del cruce de bandas, de los núcleos que se encuentran en la región de masa  $A=130$ , se estudiaron los núcleos cercanos a la cadena del Pr, como fueron: los núcleos pares del Ce, Ba y Nd, y también los núcleos par-impar del La. Este análisis resultó ser de gran ayuda para ver cómo el parámetro de deformación  $\epsilon_2$  va aumentando conforme crece el número de protones. También se tiene el mismo efecto si el número de neutrones va disminuyendo en los diferentes isótopos que se estudiaron (ver fig.5.20 ).

A diferencia de los núcleos par-impar e impar-impar, los núcleos pares no son tan complicados para ser reproducidos por el MCP. Esto se puede observar si comparamos los resultados obtenidos de los núcleos pares con los núcleos par-impar. A pesar de tener ciertas dificultades para reproducir los datos de los isótopos del Pr y La, los resultados obtenidos pueden considerarse aún muy buenos, aunque no hay que olvidar que es posible que en esta clase de núcleos se tenga ya la presencia del parámetro de deformación  $\gamma$  u otros factores que con el MCP no se consideran.

En conclusión, el MCP ha probado ser un excelente modelo para reproducir datos altamente sensibles experimentalmente en los isótopos impares del Pr, como también para núcleos cercanos a la región de masa  $A=130$ .

# A

## El programa del Modelo de Capas Proyectado

El programa fue creado por primera vez en Munich, Alemania, en el año de 1979, el cual se desarrolló después por los años noventa por Kenji Hara y Yang Sun [25]. De esta forma, el nuevo programa puede usarse fácilmente en cualquier sistema de cómputo. El programa completo se encuentra formado por cuatro códigos por separado; cada código corresponde para núcleos del tipo par-par (EE), impar en neutrones (OE), impar en protones (EO), y por último para núcleos impar-impar (OO). En general todos estos códigos tienen la misma estructura, por lo que en este apéndice sólo describiremos la estructura del código para núcleos impar en protones.

El funcionamiento del programa se divide en tres partes principalmente, las cuales son: la preparación del espacio de configuraciones, el cálculo de los elementos de la matriz rotacional y por último la diagonalización del Hamiltoniano en la base proyectada. En la fig. A.1 se muestra el diagrama de flujo del programa para el MCP, donde se ilustra cada paso que el programa sigue, para la realización de los cálculos, por medio de las flechas. Para su funcionamiento el programa requiere de dos archivos de entrada, uno llamado **XY\_DATA**<sup>1</sup>, donde se introducen todos los datos del núcleo que uno desea estudiar, y otro archivo **XY\_PARA** en donde se da un conjunto de valores enteros, los cuales definirán el tamaño máximo que el arreglo del código puede tener.

---

<sup>1</sup>donde XY se refiere a nucleos par-par “EE”, par-impar “EO”, impar-par “OE” e impar-impar “OO”.

## A.1. El archivo de entrada XY\_DATA y el archivo XY\_PARA

El archivo de entrada es la parte principal del programa, donde se describe al núcleo que se desea estudiar. Cada línea cuenta con un comentario breve explicando la función de cada uno de los parámetros. Por lo que aquí daremos una explicación más detallada de cada uno de ellos.

Los parámetros de deformación que el programa usa es el  $\epsilon$ , el cual es ligeramente diferente al parámetro de deformación  $\beta^2$ . El parámetro de deformación cuadrupolar ( $\epsilon_2$ ) y hexadecapolar ( $\epsilon_4$ ) se denotan como **EPS2** y **EPS4**. Los valores que usualmente se toman para  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_4$ , son los resultados reportados por Moller y Nix [27], I. L. Lamm [24] o de R. Bengtsson [14]. Los núcleos que no se encuentren en las listas, se les puede asignar un valor ligeramente diferente con respecto a los valores empleados en los núcleos vecinos a ellos. De esta forma uno puede variar los valores de ambos parámetros, dentro de un intervalo razonable, hasta lograr obtener la capa llena correctamente. Los valores asignados a  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_4$ , pueden variar ligeramente de un modelo a otro, debido a que en cada uno de los modelos se utilizan diferentes cálculos sistemáticos.

Los controladores **NMAX** (número máximo de la base de estados), **KMAX** (número máximo del número cuántico K de la base de estados) y **EMAX** (energía máxima de cuasipartícula de la base de estados), son los que determinan el tamaño del espacio de configuraciones. Los valores de estos controladores no deben ser demasiado grandes. Se recomienda utilizar valores chicos para obtener resultados que puedan interpretarse fácilmente. Además esto ayuda a que el cálculo computacional sea más rápido. Asignarles valores grandes a estos controladores, no nos garantiza en nada de que los resultados sean los mejores e incluso el programa puede dar resultados muy inestables y difíciles de interpretar físicamente.

En general el programa ocupa tres capas para llevar a cabo los cálculos. Primero se le indica cuantas capas son y seguido de este valor, se le especifican las tres capas superiores que le corresponde al núcleo. Por ejemplo, si el núcleo tiene 70 neutrones y 59 protones ( $^{129}\text{Pr}$ ), las capas superiores para este caso resultan ser  $N=3, 4$  y  $5$  para ambos nucleones.

---

<sup>2</sup>Para valores no muy grandes de  $\epsilon_2$ , la relación con  $\beta_2$  es:  $\epsilon_2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2$ .

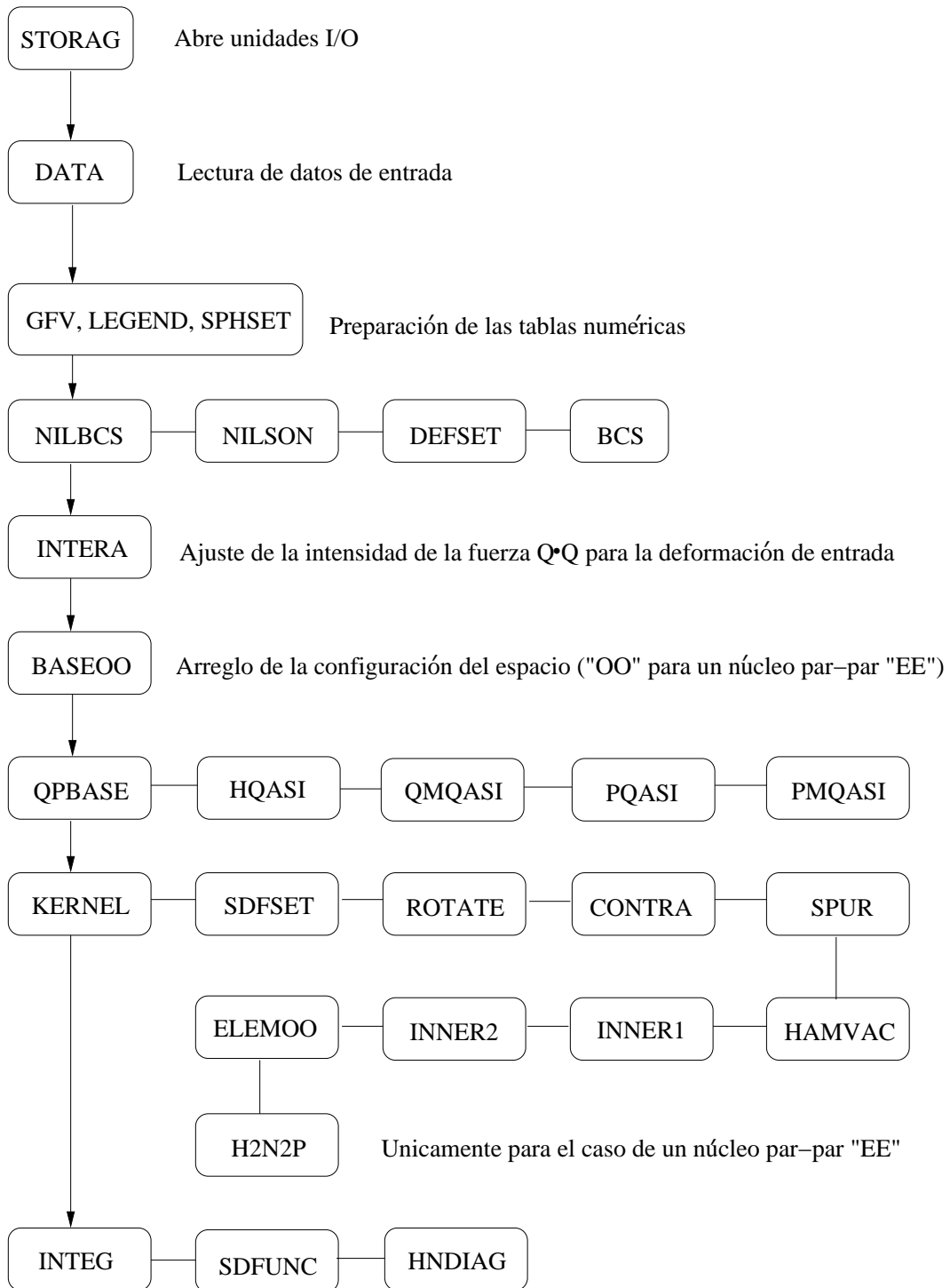


Figura A.1: Diagrama de flujo del programa para el MCP [25].

Los valores  $G_1$  y  $G_2$  son los que determinan la longitud de las fuerzas de apareamiento monopolar y cuadrupolar. Estos valores juegan un papel muy importante en la reproducción del espectro de energía correcto. El gap de energía<sup>3</sup> resultante debe ser el apropiado para el núcleo de interés. En el archivo de entrada es posible asignarle valores a  $G_1$  y a  $G_2$  para los neutrones ( $\nu$ ) y los protones ( $\pi$ ) por separado<sup>4</sup>. Los valores que comunmente se han empleado en diferentes regiones de masa A, se muestran en la tabla A.1. En nuestro caso se utilizaron los valores para la región de masa  $A \approx 130$  para describir bandas con deformación normal. Estos valores se tomaron en [47, 66, 67, 68, 69, 70].

A	$G_1^\nu$	$G_2^\nu$	$G_1^\pi$	$G_2^\pi$	Tipo de deformación
$\approx 30$	19.6	15.7	19.6	0	normal
$\approx 40$	22.5	18.0	22.5	0	normal
$\approx 70-80$	20.25	16.20	20.25	0	normal
$\approx 130$	19.6	15.7	19.6	0	normal
$\approx 130$	18.0	14.4	19.6	0	superdeformación
$\approx 170-180$	21.2	13.9	21.2	13.9	normal

Cuadro A.1:

El valor de la constante de proporcionalidad  $\gamma$  entre la fuerza de apareamiento cuadrupolar y monopolar, puede tomar valores entre el intervalo de 0.16 a 0.18 para el caso de núcleos pesados en la región de tierras raras y de 0.18 a 0.20 para los núcleos ligeros en la misma región. Uno puede ajustar el valor de  $\gamma$  hasta obtener el lugar correcto del punto de interacción entre la banda base y otra banda rotacional, es decir, el lugar en donde se da el cambio en la frecuencia rotacional. También es posible verificar cómo el fenómeno del *backbending* está afectado por la interacción de la fuerza de apareamiento cuadrupolar con un cambio ligero en la constante de proporcionalidad  $\gamma$ .

Los parámetros de la fuerza de interacción espín-órbita  $\kappa$  y  $\mu$ , que aparecen en el potencial de Nilsson, son muy importantes para reproducir la capa llena correctamente, principalmente en núcleos de masa A impar y en núcleos impar-impar. El programa da dos opciones para elegir los valores de estos parámetros por medio de la constante **LSF** desde el archivo de entrada. Cuando

<sup>3</sup>La diferencia de energía entre dos estados es llamado “una brecha (en inglés se llama gap) de energía”.

<sup>4</sup>El programa que se encuentra disponible en: [http://cpc.cs.qub.ac.uk/summaries/ADGJ.v1\\_0.html](http://cpc.cs.qub.ac.uk/summaries/ADGJ.v1_0.html), no cuenta con esta modificación.

uno elige **LSF=1**, se emplean los valores reportados por S. G. Nilsson et al.[30], donde a todas las capas N se les asigna el mismo valor de  $\kappa$  y  $\mu$ . Estos valores se ajustaron para la región de tierras raras. Cuando se toma la opción de **LSF=2**, se utilizan los valores reportados por Zhang et al. [71], siendo ésta la versión modificada por Bengtsson y Ragnarsson [72]. Para este caso, los valores de  $\kappa$  y  $\mu$  son diferentes para las capas superiores.

El archivo **XY\_PARA** contiene diez parámetros, los cuales determinan el tamaño del arreglo del código. Estos parámetros son:

- **NMD**: Representa el número de niveles de Nilsson en la capa superior, por ejemplo, para el caso de N=5, se tiene 21 niveles de Nilsson.
- **NJMAX**: Es el número máximo de j subcapas que puede tener cada capa N. Para N=5, se tienen 6 con  $j_{max}=11/2$ , para N=6 se tienen 7 con  $j_{max}=13/2$ .
- **NNBCS**: Número total de niveles de Nilsson en las tres capas superiores. Por ejemplo para las capas N= 3, 4 y 5 se tienen 46 niveles ( $46= 10_{N=3}+ 15_{N=4}+ 21_{N=5}$ ). Se usa la regla  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ .
- **NNRANK**: Número máximo de la base para una configuración parcial.
- **NNRANT**: Número máximo de la base para la configuración total.
- **NNATA**: Dos veces el número de los niveles seleccionados de Nilsson.
- **NJOTMX**: Número de momento angular a ser calculado.
- **NKMAX**: Número máximo del valor K para los estados de multicuasipartículas.
- **NNDEG**: Número máximo de “puntos malla” para la integración  $\beta$
- **NNTQ3**: Número máximo de la base de 3-cuasipartículas (únicamente para los códigos EO y OE).

Si se llegara a tener algún conflicto con el valor de cualquier parámetro, el programa escribirá el conflicto que se tenga en el archivo de salida **XY\_OUT1**, deteniendo la ejecución del programa. Esto nos ayuda muchísimo para corregir inmediatamente el problema. En las siguientes secciones



se explicará a cada uno de los archivos de salida. Para una descripción más detallada sobre el funcionamiento del programa ver [25].

## A.2. Los archivos de salida XY\_OUT#

El programa original da tres archivos de salida **XY\_OUT1**, **XY\_OUT2** y **XY\_OUT3**, los cuales están asociados al archivo de entrada **XY\_DATA**. El programa se modificó de tal forma que uno pueda contar con los cálculos del momento de inercia dinámico y cinético, como también de la frecuencia rotacional, listos para ser graficados inmediatamente después de que el programa finalice. En seguida se explicará el contenido de cada uno de estos archivos de salida.

El archivo **XY\_OUT1** es el archivo principal en donde se escriben todos los resultados, como son: la configuración del espacio, las energías de los niveles de Nilsson, las energías de las cuasipartículas, las energías de las bandas generadas, los eigenvalores de la ecuación del MCP, etc. Además, en la primera parte del archivo, uno puede verificar los datos utilizados en los cálculos y comprobar si éstos corresponden al núcleo que se desea estudiar. En el archivo **XY\_OUT2**, se escribe la banda yrast y todas las bandas rotacionales generadas por el MCP. Los demás archivos contienen los datos de las siguientes cantidades físicas:

- **XY\_OUT3**: Datos para el momento de inercia cinético ( $\mathcal{J}^1$ ).
- **XY\_OUT4**: Datos del momento de inercia dinámico ( $\mathcal{J}^2$ ).
- **XY\_OUT5**: Datos de la frecuencia rotacional como función del espín I.
- **XY\_OUT7**: Energías de la banda yrast como función del espín I.
- **XY\_OUT8**:  $E(I) - E(I - 1)$  (para el caso de los códigos EO, OE y OO).

Los archivos cuentan con un formato que puede ser leído por cualquier graficador bajo el sistema UNIX o también para el ambiente de X-windows. Si uno lo desea, se puede modificar el formato de salida de los archivos con ayuda de la subroutine INTEG.

**B**

**Artículo**

PHYSICAL REVIEW C **83**, 034308 (2011)**Projected shell model study of yrast states of neutron-deficient odd-mass Pr nuclei**

A. Ibáñez-Sandoval\* and M. E. Ortiz

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-364, 01000 México Distrito Federal, México*

V. Velázquez

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-542, 04510 México Distrito Federal, México*

A. Galindo-Uribarri

*Physics Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee 37831, USA*

P. O. Hess

*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-543, 04510 México Distrito Federal, México*

Y. Sun

*Department of Physics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, People's Republic of China**Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, People's Republic of China**Department of Physics and Astronomy, University of Tennessee, Knoxville, Tennessee 37996, USA*

(Received 4 October 2010; published 9 March 2011)

A wide variety of modern instruments allow us to study neutron-deficient nuclei in the  $A = 130$  mass region. Highly deformed nuclei have been found in this region, providing opportunities to study the deformed rotational bands. The description of the  $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$  isotopes with the projected shell model is presented in this paper. Good agreement between theory and experiment is obtained and some characteristics are discussed, including the dynamic moment of inertia  $\mathcal{J}^{(2)}$ , kinetic moment of inertia  $\mathcal{J}^{(1)}$ , the crossing of rotational bands, and backbending effects.

DOI: [10.1103/PhysRevC.83.034308](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.83.034308)

PACS number(s): 21.10.Re, 27.60.+j, 21.60.Cs

**I. INTRODUCTION**

The study of neutron-deficient nuclei in the  $A=130$  mass region has been an interesting subject in nuclear structure physics [1]. In this mass region a highly-deformed band was observed first in  $^{132}\text{Ce}$  [2], where a series of  $\gamma$ -ray transitions with an energy separation of approximately 70 keV were found. This band was quantitatively described by the projected shell model (PSM) [3].  $^{132}\text{Ce}$  has played a central role in the investigation of superdeformed structure of  $A=130$  nuclei. The major interest in studying  $A=130$  nuclei is to understand the different contributions of neutrons and protons. In these nuclei both neutrons and protons occupy the high- $j$   $h_{11/2}$  intruder orbitals. In odd-mass Pr nuclei, for example, the neutron orbitals evolve in the middle of the  $h_{11/2}$  shell, while the proton Fermi surface lies in the lower part of the shell. Rotation alignment of the  $h_{11/2}$  protons would drive the nucleus to a prolate shape, while alignment of  $h_{11/2}$  neutrons would produce an opposite effect in deformation. This poses an interesting situation with strong competition of neutrons and protons in a fast rotating system.

The yrast bands in odd-Pr nuclei are characterized by a decoupled  $h_{11/2}$  proton configuration for low spin states and rotation alignment of an additional pair of nucleons for high

spin states [4–7]. These bands have been investigated with the cranked shell model (CSM) in which the calculations predicted that the band crossing occurs around  $\hbar\omega \approx 0.5$  MeV while the experimental data suggested a lower value around  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV [6,8]. The origin of the crossing has not been well understood despite many intensive studies. There have been suggestions that it is attributed to the neutron alignment [6,9–11], whereas other studies indicated an alignment of a pair of protons [5,12]. We may thus conclude that the configuration assignment for the high spin states in these odd Pr nuclei and the nature of the rotation alignment are still open questions. In the past two decades, the projected shell model [13] has been applied to study the structure of high spin states. Different from the CSM, which works in the intrinsic frame, the PSM transforms the configurations to the laboratory frame by using the angular momentum projection, and further mixes them in the laboratory frame by diagonalizing a two-body Hamiltonian. Mixing of the configurations in the laboratory frame removes ambiguities in the band-crossing region in the CSM, which is a well-known problem of the cranking approximation first pointed out by Hamamoto [14]. Thus the PSM is in principle better suited for the study of the band-crossing phenomenon. The PSM has been extensively applied to study superdeformed as well as normal deformed bands in different mass regions [3,15–19]. The recent PSM calculations for the even-even  $^{124-130}\text{Ce}$  isotopes [20,21], the  $^{98-102}\text{Sr}$  and  $^{100-104}\text{Zr}$  isotopes [22], the neutron-rich  $^{154-160}\text{Nd}$  and  $^{156-162}\text{Sm}$  isotopes [23], as well as for very heavy nuclei [24] and light nuclei [25], have

\*Also at Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, 07738, México Distrito Federal, México.

shown satisfactory agreement with experimentally observed yrast bands and demonstrated the ability of the PSM to describe the backbending phenomenon.

The purpose of the present work is to carry out a systematic study on the yrast bands in the odd-mass  $^{125-133}\text{Pr}$  nuclei, a set of isotopes which are difficult to describe. We demonstrate that it is possible to reproduce the experimental data with the PSM by using the same set of parameters as in the even-even nuclei in the  $A = 130$  mass region, and we further provide detailed analysis for the structure of these isotopes. The paper is arranged as follows. An outline of the PSM is given in Sec. II. Theoretical discussion and comparison with experimental data are presented in Sec. III. Finally, conclusions are drawn in Sec. IV.

## II. OUTLINE OF THE PROJECTED SHELL MODEL

The PSM has been developed as a shell model truncation scheme which is implemented in a deformed single-particle basis [13]. Pairing correlations are included in this basis, which is constructed by the quasiparticle (qp) states obtained from a Nilsson + BCS calculation. The shell model truncation is carried out by considering the low-lying multi-qp configurations around the Fermi levels. We then use the angular-momentum-projection method to restore the rotational symmetry violated in the deformed basis. Finally, the two-body Hamiltonian is diagonalized in the projected basis.

The following set of multi-qp configurations is used for odd-proton nuclei:

$$|\Phi_k\rangle = \{a_\pi^\dagger|0\rangle, a_\pi^\dagger a_{v1}^\dagger a_{v2}^\dagger|0\rangle\}, \quad (1)$$

where  $a^\dagger$ 's are the qp creation operators and  $k$  labels each configuration. The states are written in the Nilsson + BCS representation, with  $v$ 's ( $\pi$ 's) representing the neutron (proton) Nilsson quantum numbers, which run over low-lying orbitals, and  $|0\rangle$  the qp vacuum state. The 3-qp states are formed by one quasiproton plus a pair of quasineutrons. The inclusion of the 3-qp configurations is important for odd-mass nuclei for a description of the band-crossing phenomenon which is caused by a rotation alignment of a pair of quasineutrons.

The Hamiltonian employed in the calculation is [13]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\chi}{2} \sum_{\mu} \hat{Q}_{\mu}^+ \hat{Q}_{\mu} - G_M \hat{P}^+ \hat{P} - G_Q \sum_{\mu} \hat{P}_{\mu}^+ \hat{P}_{\mu}, \quad (2)$$

where  $H_0$  is the spherical single-particle Hamiltonian which contains a proper spin-orbit force. The second term in Eq. (2) is the quadrupole-quadrupole ( $QQ$ ) interaction and  $\chi$  represents its strength, which is determined by the self-consistent relation between the input quadrupole deformation  $\epsilon_2$  and the one resulting from the HFB procedure [13,26]. The last two terms are the monopole and quadrupole pairing interactions, respectively. The strengths of the monopole pairing interactions are given by

$$G_M^v = \left(19.60 + 15.7 \frac{N-Z}{A}\right) \frac{1}{A}, \quad G_M^{\pi} = 19.60 \frac{1}{A}, \quad (3)$$

and that for the quadrupole pairing interaction is related to the monopole pairing by

$$G_Q = \gamma G_M, \quad (4)$$

with  $\gamma = 0.16$ . These strengths are the same as those in Ref. [3], which have been tested by other PSM calculations for this mass region [20,21]. As noticed by Dufour and Zuker [27], these interactions represent the essence of the most important correlations in the low-lying nuclear spectrum.

The Hamiltonian (2) is diagonalized in the shell model space spanned by  $\hat{P}_{MK}^I |\Phi_k\rangle$ , where the  $\hat{P}_{MK}^I$  is the angular-momentum-projection operator and  $|\Phi_k\rangle$  the multi-qp states of Eq. (1). The eigenvalue equation for each spin  $I$  is given by

$$\sum_{k'} (H_{kk'}^I - E^{I\alpha} N_{kk'}^I) F_k^{I\alpha} = 0, \quad (5)$$

where  $\alpha$  enumerates the states with the same spin. The normalization is chosen such that

$$\sum_{kk'} f_k^{\alpha} N_{kk'} f_{k'}^{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (6)$$

and the Hamiltonian matrix elements  $H_{kk'}^I$  and the norm matrix elements  $N_{kk'}^I$  in (5) are

$$H_{kk'}^I = \langle \Phi_k | \hat{H} \hat{P}_{KK'}^I | \Phi_{k'} \rangle, \quad N_{kk'}^I = \langle \Phi_k | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi_{k'} \rangle. \quad (7)$$

The band energies are obtained when we calculate the expectation values of the Hamiltonian with respect to a "rotational" band  $k$ , which are obtained from each angular-momentum-projected state in (1). Thus the rotational energy of a band  $k$  is defined as

$$E_k(I) = \frac{\langle \Phi_k | \hat{H} \hat{P}_{KK}^I | \Phi_k \rangle}{\langle \Phi_k | \hat{P}_{KK}^I | \Phi_k \rangle} = \frac{H_{kk}^I}{N_{kk}^I}, \quad (8)$$

which are the diagonal elements in Eq. (7) with respect to a projected multi-qp state  $k$ . A diagram containing rotational energies of various bands as a function of spin  $I$  is called a band diagram [13]. From band diagrams we can study the properties such as the crossing of rotational bands, which we will discuss in the following sections.

## III. CALCULATIONS AND COMPARISON WITH DATA

To carry out calculations, we use the PSM code published in Ref. [28]. First, a deformed basis is constructed from the standard Nilsson model, and the  $\kappa$  and  $\mu$  parameters in the Nilsson potential are taken from Ref. [29]. We consider three major shells ( $N = 3, 4$ , and  $5$ ) for both neutrons and protons. The parameters of the basis deformation ( $\epsilon_2$  and  $\epsilon_4$ ) and  $\gamma$  in Eq. (4) for each nucleus are given in Table I. The deformation parameters are very close to but slightly different from the values given in Ref. [30]. We note that the present calculation is of the shell model type which uses the deformed potential with suitable input parameters to generate a model basis. Different configurations (one- and three-quasiparticle states) are built within the chosen basis. Although the quasiparticle vacuum state is obtained with a fixed deformation, mixing of the multi-qp configurations can introduce dynamically some effects, such as those caused by qp alignments. These

TABLE I. Parameters used in the calculation.

	$^{125}\text{Pr}$	$^{127}\text{Pr}$	$^{129}\text{Pr}$	$^{131}\text{Pr}$	$^{133}\text{Pr}$
$\epsilon_2$	0.300	0.283	0.267	0.234	0.194
$\epsilon_4$	0.00	0.00	0.027	0.027	0.027
$\gamma$	0.16	0.16	0.20	0.20	0.20

additional treatments (the construction of projected multi-qp states and the configuration mixing) go beyond the usual mean-field methods, and therefore our deformed states are not necessarily the same as those in other models.

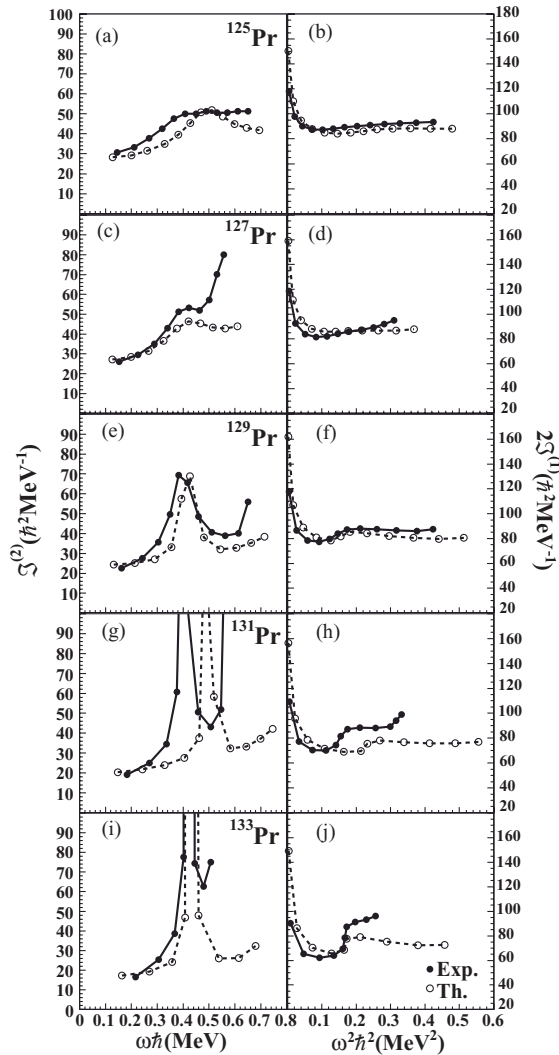


FIG. 1. Comparison between theory and experiment. (a), (c), (e), (g), (i): Dynamical moment of inertia  $\mathcal{J}^{(2)}$  ( $\hbar^2 \text{MeV}^{-1}$ ), and (b), (d), (f), (h), (j): Twice the kinetic moment of inertia  $\mathcal{J}^{(1)}$  ( $\hbar^2 \text{MeV}^{-1}$ ).

In the present work, the shell model space is truncated in such a way that only states within an energy window around the Fermi surface are selected. This determines the size of the basis space  $|\Phi_k\rangle$ . The energy windows that we used in the calculation are 3.5 MeV for 1-qp states and 6.5 MeV for 3-qp states. Finally, the basis states are projected to good angular momentum states, and the projected basis is used to diagonalize the shell model Hamiltonian. In this way, we obtain the energy spectra which are compared to the experimental data.

### A. Backbending of moment of inertia in yrast bands

The backbending in moment of inertia, observed in the rotational spectra of deformed nuclei, carries important information on the interplay between the ground band and bands with alignment of a pair of quasiparticles. Thus, an yrast sequence is formed by states of both bands such that the lower spin states are mainly of the ground band, and the major component of the higher spin states belongs to the bands with aligned quasiparticles. In Fig. 1, we compare the PSM results with experimental data for the  $^{125-133}\text{Pr}$  isotopes. We plot the dynamical moment of inertia  $\mathcal{J}^{(2)}$  as a function of the rotational frequency  $\hbar\omega$  and twice the kinetic moment of inertia  $\mathcal{J}^{(1)}$  as a function of  $\hbar^2\omega^2$ . These quantities are defined as

$$\mathcal{J}^{(2)} = \frac{4}{E_\gamma(I) - E_\gamma(I-2)}, \quad 2\mathcal{J}^{(1)} = \frac{(2I-1)}{\omega}, \quad (9)$$

where the transition energy  $E_\gamma = E(I) - E(I-2)$  is related to the rotational frequency through

$$\hbar\omega = \frac{E_\gamma}{\sqrt{(I+1)(I+2) - K^2} - \sqrt{(I-1)I - K^2}}. \quad (10)$$

As one can see from Fig. 1, the comparison between theory and experiment is overall satisfactory. In the right column of the figure, the kinetic moments of inertia of the isotopes are reproduced almost perfectly, except for  $^{131}\text{Pr}$  where the rise of  $\mathcal{J}^{(1)}$  in theory is shifted to a higher rotational frequency. The dynamical moment of inertia  $\mathcal{J}^{(2)}$  is a very sensitive quantity as it describes the variation of  $\mathcal{J}^{(1)}$ . For this quantity, the results obtained for  $^{125,127}\text{Pr}$  reproduce the observed backbending effects [see Figs. 1(a) and 1(c)] as seen

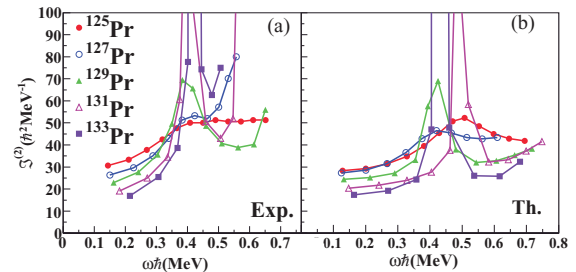


FIG. 2. (Color online) Comparison between theory and experiment for dynamical moment of inertia  $\mathcal{J}^{(2)}$  ( $\hbar^2 \text{MeV}^{-1}$ ) for all isotopes. (a) Experimental data. (b) The PSM calculation.

from the experimental data [7,8]. Nevertheless, the change of  $\mathcal{J}^{(2)}$  for  $^{125}\text{Pr}$  is predicted to occur at  $\hbar\omega \approx 0.5$  MeV while experimentally it occurs at  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV, which still can be considered as a good agreement with experiment. In the case of  $^{127}\text{Pr}$  the change of  $\mathcal{J}^{(2)}$  with rotational frequency coincides with the experimental data, with the observed value at  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV. However, deviations of the theoretical  $\mathcal{J}^{(2)}$  from the data are seen at the highest spin states. For  $^{129}\text{Pr}$ , the PSM reproduces very well the experimental data [see Fig. 1(e)]. The change of  $\mathcal{J}^{(2)}$  with rotational frequency is predicted correctly at  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV.

The experimental data for  $^{131,133}\text{Pr}$  are taken from Refs. [8,31]. For these two isotopes we used the original Nilsson  $\kappa$  and  $\mu$  parameters taken from Ref. [32]. For  $^{131}\text{Pr}$  the PSM predicts that the change of rotational frequency occurs at  $\hbar\omega \approx 0.5$  MeV, while it is observed around  $\hbar\omega \approx 0.4$  MeV [see Fig. 1(g)]. For  $^{133}\text{Pr}$  the PSM predicts a change in the rotational frequency at around  $\hbar\omega \approx 0.44$  MeV, while it is observed at  $\hbar\omega \approx 0.43$  MeV, which is very good [see Fig. 1(i)].

Comparing all the experimental dynamical moments of inertia  $\mathcal{J}^{(2)}$ , we see clearly that  $\mathcal{J}^{(2)}$  increases with decreasing  $N$  at low frequencies [see Fig. 2(a)]. This general behavior is correctly reproduced by the theoretical calculations of the PSM [see Fig. 2(b)]. This is also consistent with the results reported by Smith *et al.* [8] for the  $^{127,129,131}\text{Pr}$  isotopes. This characteristic is understood to relate with the increase in the associated deformation of all the  $\pi h_{11/2}$  bands while decreasing  $N$ . In fact, the PSM calculations employed varying deformation parameters from  $\epsilon_2 = 0.194$  in the heavier  $^{133}\text{Pr}$  isotope to  $\epsilon_2 = 0.300$  in the lighter  $^{125}\text{Pr}$  isotope.

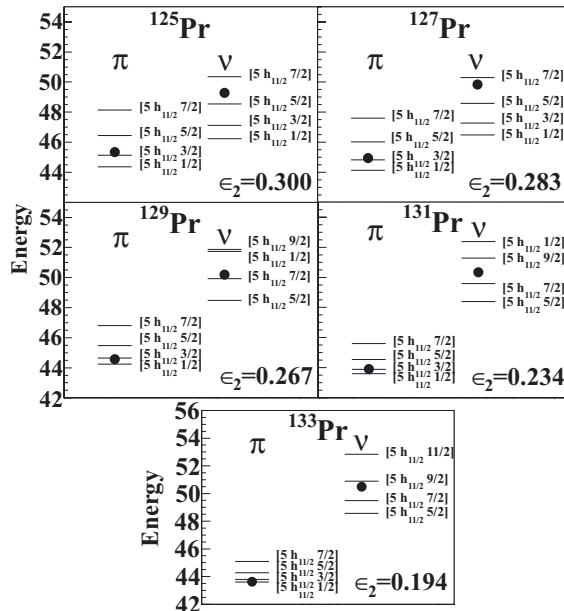


FIG. 3. Deformed single-particle energy levels for protons and neutrons near the Fermi level represented by the closed circle.

## B. Band diagram analysis

The variation and backbending in moments of inertia as shown above correspond to rotation alignment of quasi-particles in particular orbitals. For odd-mass nuclei, it is phenomenologically associated with crossings between bands with 1- and 3-qp configurations. In our present case, 1-qp configurations are those from the deformed proton  $h_{11/2}$  orbit, while 3-qp ones consist of these proton 1-qp configurations plus a pair of  $h_{11/2}$  neutrons. Thus before we analyze the

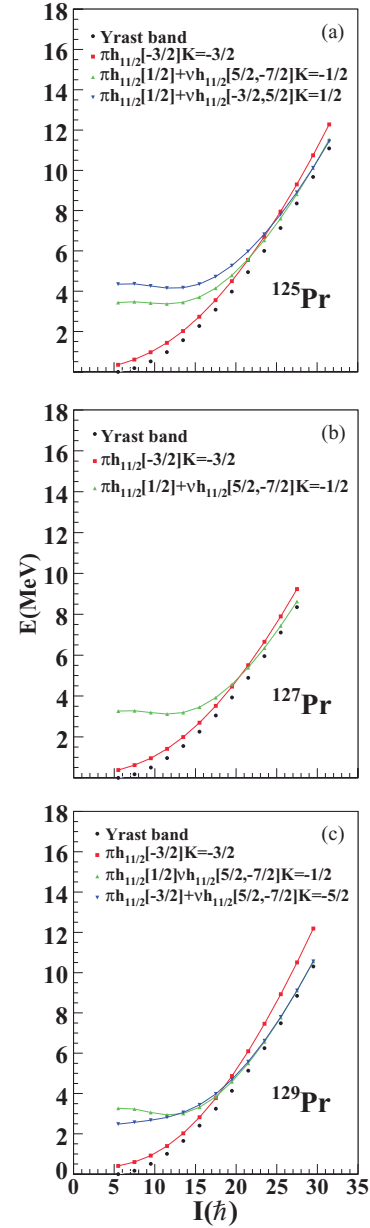


FIG. 4. (Color online) Band diagrams for  $^{125-129}\text{Pr}$ .

structure of the bands, it is useful to look at the deformed single-particle levels.

Figure 3 shows the single-particle levels for protons and neutrons which contribute to the 3-qp bands corresponding to the region of the backbendings. The Nilsson states have the following spherical components:  $N = 5, l = h, j = 11/2$ , and  $m = 7/2, 3/2, 1/2, 5/2, 9/2$ , which can be represented as  $[5h_{11/2}7/2]$ ,  $[5h_{11/2}3/2]$ ,  $[5h_{11/2}1/2]$ ,  $[5h_{11/2}5/2]$ , and  $[5h_{11/2}9/2]$ , respectively. For the case of the proton single-particle levels there are mainly three levels that contribute in the backbending region, which are  $[5h_{11/2}5/2]\pi$ ,  $[5h_{11/2}3/2]\pi$ , and  $[5h_{11/2}1/2]\pi$ . These levels are closer when the number of neutrons is increased, reflecting a weaker splitting of the single-particle levels with a smaller deformation. For  $^{125,127}\text{Pr}$  there are two neutron single-particle levels  $[5h_{11/2}7/2]\nu$  and  $[5h_{11/2}5/2]\nu$ , which contribute in the backbending region. In the case of  $^{129}\text{Pr}$  there are three neutron single-particle levels  $[5h_{11/2}9/2]\nu$ ,  $[5h_{11/2}1/2]\nu$ , and  $[5h_{11/2}7/2]\nu$  which are important. For  $^{131,133}\text{Pr}$  we have only two neutron single-particle levels  $[5h_{11/2}9/2]\nu$  and  $[5h_{11/2}7/2]\nu$  which are relevant to the discussion.

The band diagrams help us to understand the backbending effects which are present in the odd-Pr nuclei. In Figs. 4 and 5, the band diagrams for the  $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$  isotopes are

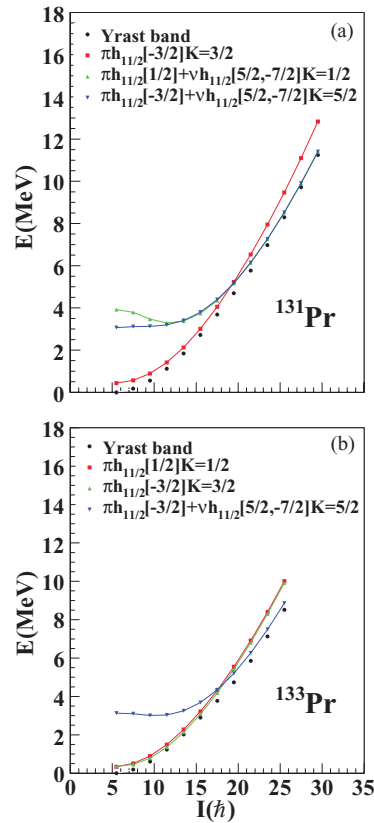


FIG. 5. (Color online) Band diagrams for  $^{131-133}\text{Pr}$ .

shown. We have marked each band with the corresponding qp configuration. In the calculation, our configuration space is built by many more qp states, but we only show in each diagram the most important ones.

In these diagrams for  $^{125,127,129,131}\text{Pr}$ , we can see that the low spin states in the yrast bands are represented by a quasiproton  $K = 3/2$  state from  $\pi h_{11/2}$ . This configuration suggests that the low spin states are based on the decoupled  $h_{11/2}$  protons, and in this way the first proton alignment is blocked. These results are in agreement with the experimental assignment. In the case of  $^{133}\text{Pr}$ , the low spin states are represented by a quasiproton  $K = 1/2$  state from  $\pi h_{11/2}$ , which is different from the results reported in Refs. [4–7].

For the case of  $^{125}\text{Pr}$  the band crossing in the yrast band occurs approximately at  $I = 47/2^-$ . The band which generates this crossing is a 3-qp state consisting of an  $h_{11/2}[1/2]$  quasiproton plus a pair of quasineutrons,  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . The PSM predicts another band crossing at  $I = 63/2^-$ , which is caused by a 3-qp state of an  $h_{11/2}[1/2]$  quasiproton plus a pair of quasineutrons,  $h_{11/2}[-3/2, 5/2]$  [see Fig. 4(a)]. In  $^{127}\text{Pr}$ , the crossing is predicted at  $I = 43/2^-$  by a 3-qp band also. This band has a configuration of a quasiproton state  $h_{11/2}[1/2]$  plus a pair of quasineutrons,  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$  [see Fig. 4(b)]. For  $^{129}\text{Pr}$ , we can see that the crossing occurs at  $I = 39/2^-$ . The crossing band is identified as a 3-qp band which has a configuration of a quasiproton state  $h_{11/2}[1/2]$  plus a pair of quasineutrons,  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . A third band crossing is predicted at  $I = 59/2^-$ . This band is generated by a

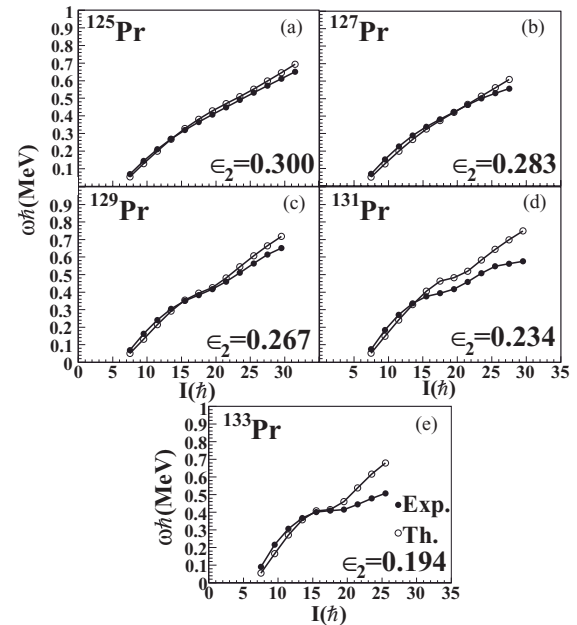


FIG. 6. Alignment diagrams for  $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$ , where the spin  $I$  is plotted against the rotational frequency  $\omega$ . The calculations of alignments are compared with the experimental data.



quasiproton state  $h_{11/2}[-3/2]$  plus a pair state of quasineutrons,  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$  [see Fig. 4(c)].

In the last two isotopes,  $^{131,133}\text{Pr}$ , it is possible to see three configurations in each yrast band [see Figs. 5(a) and 5(b)]. In  $^{131}\text{Pr}$  the crossing occurs at  $I = 39/2^-$  which is generated by a 3-qp band that has a configuration of a quasiproton state  $h_{11/2}[1/2]$  plus a pair state of quasineutrons,  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . In this case the high spin states are generated by a quasiproton state  $h_{11/2}[-3/2]$  plus a pair state of quasineutrons,  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . For the  $^{133}\text{Pr}$  isotope, the crossing occurs at  $I = 15/2^-$ . This crossing is represented by a 1-qp band with a configuration of a quasiproton state  $h_{11/2}[-3/2]$ . It is also possible to observe another crossing in high spin states ( $I = 39/2^-$  to  $51/2^-$ ), which is generated by a quasiproton state  $h_{11/2}[-3/2]$  plus a pair state of quasineutrons,  $h_{11/2}[5/2, -7/2]$ . In this way we can observe how the PSM describes very well all yrast bands with more than one configuration in each Pr isotope.

Finally, in Fig. 6, we compare the alignment diagrams of the yrast bands obtained by the PSM with the experimental data. It is possible to observe an amount of spin alignment in each Pr isotope. This behavior is reproduced successfully by the PSM, where it explains these effects in terms of the crossing between the ground band and the 3-qp band as we have seen before. However, in the nuclei with more neutrons ( $^{131,133}\text{Pr}$ ), the high spin states are not reproduced satisfactorily perhaps due to the presence of  $\gamma$  deformation in these nuclei.

We admit that the present calculation, while well reproducing the variation in the interaction strength at the band crossings, does not give all the observed variations of the crossing frequencies when neutron number changes (see Fig. 2). We note that precise positions (i.e., spins or rotational frequencies) where quasiparticle alignments occur are very sensitive to several calculation conditions. In the first place, correct single-particle states are important for the behavior

of the aligned quasiparticle states. We note that our deformed Nilsson single-particle states are obtained by using the original Nilsson parameters [32] without any adjustment that may best suit the present nuclei. More careful choices in the input deformation parameters may also improve the agreement. We do not do such a fine tuning as far as the essential physics has been understood.

#### IV. CONCLUSION

The spectroscopic calculations obtained with the PSM for  $^{125,127,129,131,133}\text{Pr}$  nuclei have allowed us to study the observed yrast bands in these odd-proton nuclei. Our calculations reveal that the dynamical moment of inertia increases its value at low frequency when  $N$  is decreased. This characteristic is related to the increase in the associated deformation in these yrast bands for the lighter isotopes.

The PSM reproduces very well the backbending phenomenon. This model proposes that this phenomenon occurs by the alignment of a 3-qp state which is formed by a quasiproton state plus a pair of quasineutron states. In conclusion, the PSM proved to be an excellent model to reproduce highly sensitive experimental data in the odd-Pr isotopes.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge financial help from DGAPA, PAEP (102301), CONACyT (México), PAPIIT (IN121809-2), and the University of Tennessee. YS was supported by the Shanghai Pu-Jiang program, the National Natural Science Foundation of China under Contract Nos. 10875077 and 11075103, and the Chinese Major State Basic Research Development Program through Grant No. 2007CB815005. Oak Ridge National Laboratory is managed by UT-Battelle, LLC, under Contract No. DE-AC05-00OR22725 with the US Department of Energy.

- 
- [1] A. Galindo-Uribarri, *Rev. Mex. Fís.* **45-S2**, 55 (1999).
  - [2] P. J. Nolan *et al.*, *J. Phys. G* **11**, L17 (1985).
  - [3] Y. Sun and M. Guidry, *Phys. Rev. C* **52**, R2844 (1995).
  - [4] M. J. Godfrey *et al.*, *J. Phys. G* **13**, 1165 (1987).
  - [5] P. K. Weng *et al.*, *Phys. Rev. C* **47**, 1428 (1993).
  - [6] C. M. Parry *et al.*, *Phys. Rev. C* **57**, 2215 (1998).
  - [7] A. N. Wilson *et al.*, *Phys. Rev. C* **66**, 021305 (2002).
  - [8] B. H. Smith *et al.*, *Phys. Lett. B* **443**, 89 (1998).
  - [9] S. M. Mullins *et al.*, *Phys. Rev. C* **58**, R2626 (1998).
  - [10] A. Galindo-Uribarri *et al.*, *Phys. Rev. C* **50**, R2655 (1994).
  - [11] A. N. Wilson *et al.*, *Phys. Rev. C* **63**, 054307 (2001).
  - [12] D. J. Hartley *et al.*, *Phys. Rev. C* **65**, 044329 (2002).
  - [13] K. Hara and Y. Sun, *Int. J. Mod. Phys. E* **4**, 637 (1995).
  - [14] I. Hamamoto, *Nucl. Phys. A* **271**, 15 (1976).
  - [15] Y. Sun, J.-Y. Zhang, and M. Guidry, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2321 (1997).
  - [16] Y. Sun, J.-Y. Zhang, M. Guidry, and C.-L. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 686 (1999).
  - [17] V. Velazquez, J. Hirsch, Y. Sun, and M. Guidry, *Nucl. Phys. A* **653**, 355 (1999).
  - [18] V. Velazquez, J. Hirsch, and Y. Sun, *Nucl. Phys. A* **686**, 129 (2001).
  - [19] R. Palit, J. A. Sheikh, Y. Sun, and H. C. Jain, *Phys. Rev. C* **67**, 014321 (2003).
  - [20] R. Devi, B. D. Sehgal, S. K. Khosa, and J. A. Sheikh, *Phys. Rev. C* **72**, 064304 (2005).
  - [21] B. D. Sehgal, R. Devi, and S. K. Khosa, *J. Phys. G* **32**, 1211 (2006).
  - [22] S. Verma, P. A. Dar, and R. Devi, *Phys. Rev. C* **77**, 024308 (2008).
  - [23] Y.-C. Yang, Y. Sun, S.-J. Zhu, M. Guidry, and C.-L. Wu, *J. Phys. G* **37**, 085110 (2010).
  - [24] F. Al-Khudair, G.-L. Long, and Y. Sun, *Phys. Rev. C* **79**, 034320 (2009).
  - [25] Y. Sun, Y.-C. Yang, H.-L. Liu, K. Kaneko, M. Hasegawa, and T. Mizusaki, *Phys. Rev. C* **80**, 054306 (2009).



---

PROJECTED SHELL MODEL STUDY OF YRAST STATES . . .

PHYSICAL REVIEW C **83**, 034308 (2011)

- [26] V. Velazquez, J. Hirsch, and Y. Sun, *Nucl. Phys. A* **643**, 39 (1998).  
[27] M. Dufour and A. P. Zuker, *Phys. Rev. C* **54**, 1641 (1996).  
[28] Y. Sun and K. Hara, *Comput. Phys. Commun.* **104**, 245 (1997).  
[29] J.-Y. Zhang, N. Xu, D. B. Fossan, Y. Liang, R. Ma, and E. S. Paul, *Phys. Rev. C* **39**, 714 (1989).  
[30] P. Moller and J. R. Nix, *At. Data Nucl. Data Tables* **59**, 185 (1995).  
[31] S. Rab, *Nucl. Data Sheets* **75**, 491 (1995).  
[32] S. G. Nilsson *et al.*, *Nucl. Phys. A* **131**, 1 (1969).

# Bibliografía

- [1] P. J. Nolan, A. Kirwan, D. J. G. Love, A. H. Nelson, D. J. Unwin and P. J. Twin., *J. Phys.***G 11**(1985)L17.
- [2] M. J. Godfrey, P. J. Bishop, A. Kirwan, P. J. Nolan, D. J. Thornley, D. J. Unwin, D. J. G. Love, and A. H. Nelson, *J. Phys.***G 13**(1987)1165.
- [3] C. M. Parry, A. J. Boston, C. Chandler, A. Galindo-Uribarri, I. M. Hibbert, V. P. Janzen, D. T. Joss, S. M. Mullins, P. J. Nolan, E. S. Paul, P. H. Regan, S. M. Vincent, R. Wadsworth, D. Ward and R. Wyss, *Phys. Rev.***C57**(1998)2215.
- [4] P. K. Weng, P. F. Hua, S. G. Li, S. X. Wen, L. H. Zhu, L. K. Zhang, G. J. Yuan, G. S. Li, P. S. Yu, C. X. Yang, X. F. Sun, Y. X. Guo and X. G. Lei, *Phys. Rev.***C47**(1993)1428.
- [5] A. N. Wilson, D. R. LaFosse, J. F. Smith, C. J. Chiara, A. J. Boston, M. P. Carpenter, H. J. Chantler, R. Charity, P. T. W. Choy, M. Devlin, A. M. Fletcher, D. B. Fossan, R. V. F. Janssens, D. G. Jenkins, N. S. Kelsall, F. G. Kondev, T. Koike, E. S. Paul, D. G. Sarantites, D. Seweryniak, K. Starosta and R. Wadsworth, *Phys. Rev.***C66**(2002)21305.
- [6] I. Hamamoto, *Nucl. Phys.***A 271**(1976)15.
- [7] S. M. Mullins, A. Galindo-Uribarri, C. E. Svensson, R. A. E. Austin, G. C. Ball, M. Cromaz, V. P. Janzen, D. C. Radford, I. Ragnarsson, J. C. Waddington, and D. Ward, *Phys. Rev.***C58**(1998)R2626.
- [8] A. N. Wilson, R. Wadsworth, J. F. Smith, S. J. Freeman, M. J. Leddy, C. J. Chiara, D. B. Fossan, D. R. LaFosse, K. Starosta, M. Devlin, D. G. Sarantites, J. N. Wilson, M. P. Carpenter, C. N. Davids, R. V. F. Janssens, D. Seweryniak, and R. Wyss *Phys. Rev.***C63**(2001)054307.
- [9] D. J. Hartley, L. L. Riedinger, M. Danchev, W. Reviol, O. Zeidan, Jing-ye Zhang, A. Galindo-Uribarri, C. J. Gross, C. Baktash, M. Lipoglavsek, S. D. Paul, D. C. Radford, C.-H. Yu, D. G.

- 
- Sarantites, M. Devlin, M. P. Carpenter, R. V. F. Janssens, D. Seweryniak, and E. Padilla, *Phys. Rev.* **C65**(2002)44329
- [10] P. Nathan, and S. G. Nilsson, *Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy*, K. Siegbahn, Ed. North Holland, Amsterdam, 1965. **15, 125**.
- [11] M.G. Mayer, *Phys. Rev.*, **75** (1949)1969.
- [12] O. Haxel, J. H. D. Jensen, and H. E. Suess, *Phys. Rev.*, **75** (1949) 1766.
- [13] R. Bengtsson, S. Frauendorf, *Nucl. Phys.* **A327**, (1979) 139.
- [14] R. Bengtsson, S. Frauendorf, F.-R. May, *At. Data Nucl. Data Tables*, **35**(1986)15.
- [15] P. Fallon, A. Alderson, M.A. Bentley, A.M. Bruce, P.D. Forsyth, D. Howe, J.W. Roberts, J.F. Sharpey-Schafer, P.J. Twin, F.A. Beck, T. Byrski, D. Curien, C. Schuck, *Phys. Lett.* **B218**, (1989) 137.
- [16] S. G. Nilsson, *Dan. Mat. Fys. Medd.* **29**, No.16 (1955).
- [17] R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective*, Oxford University Press, Oxford (1990).
- [18] W. Greiner, J. A. Maruhn, *Nuclear Models*, Springer, 1996.
- [19] R. Bengtsson, S. Frauendorf, *Nucl. Phys.* **A314**, (1979) 27.
- [20] P. Ring y P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer, 1980.
- [21] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. I*, Apéndice 1A, Benjamin, Inc., London, 1969.
- [22] K. Hara and Y. Sun, *Int. Journal of Modern Phys.* **E4**(1995)637.
- [23] S. Iwasaki and K. Hara, *Phys. Letter* **B144**(1984)9.
- [24] I. L. Lamm, *Nucl. Phys.* **A125**(1969)504.
- [25] Y. Sun and K. Hara, *Computer Physics Communications***104** (1997)245.
-

- 
- [26] Jing-ye Zhang, N. Xu, D. B. Fossan, Y. Liang, R. Ma, and E. S. Paul, *Phys. Rev. C* **39** (1989)714.
- [27] P. Moller and J. R. Nix, *At Data Nucl. Data Tables*, 59 (1995) 185.
- [28] B. H. Smith, L.L. Riedinger, H.Q. Jin, W. Reviol, W. Satua, A. Galindo-Uribarri, D.G. Sarantites, J.N. Wilson, D. LaFosse, S.M. Mullins, *Phys. Letter B* **443**(1998)89.
- [29] S. Rab, *Nucl. Data Sheets* **75** (1995)491.
- [30] S. G. Nilson, et al., *Nucl. Phys.***A131**(1969)1.
- [31] A. Ibáñez-Sandoval, M. E. Ortiz, V. Velzquez, A. Galindo-Uribarri, P. O. Hess, and Y. Sun, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 034308.
- [32] A. Gizon, J. Genevey, G. Cata-Danil, D. Barnoud, R. Braud, A. Emsallem, C. Foin, J. Gizon, C.F. Liang, P. Paris, I. Penev, A. Plochoki, B Weiss, *Z. Phys.***A358**(1997)369.
- [33] B. H. Smith, Tesis de Doctorado, University of Tennessee, Knoxville, TN USA, 1998.
- [34] A. Galindo-Uribarri, D. Ward, V. P. Janzen, D. C. Radford, S. M. Mullins, S. Flibotte, M. Cromaz, J. De Graff and T. Drake, *Atomic Energy of Canada Ltd., AECL-11132, PR-TASCC-09* (1994)3.1.15.
- [35] B. H. Smith, L.L.Riedinger, H.Q.Jin, W.Reviol, W.Satula, A.Galindo-Uribarri, D.G.Sarantites, J.N.Wilson, S.M.Mullins, D.LaFosse, *Nuovo Cim.***111A**(1998)663.
- [36] A. Galindo-Uribarri, D. Ward, T. Drake, G. Hackman, V. P. Janzen, S. M. Mullins, S. Pilotte, D. C. Radford, I. Ragnarsson, N. C. Schmeing, and J. C. Waddington, *Phys. Rev.***C50**(1994)2655.
- [37] R. Wyss, J. Nyberg, A. Johnson, R. Bengtsson, W. Nazarewicz, *Phys. Lett. B* **215** (1988) 211.
- [38] E.S. Paul, P. Bednarczyk, A.J. Boston, C.J. Chiara, C. Foin, D.B. Fossan, J. Genevey, A. Gizon, J. Gizon, D.G. Jenkins, N. Kelsall, N. Kintz, T. Koike, D.R. LaFosse, P.J. Nolan, B.M. Nyak, C.M. Parry, J.A. Sampson, A.T. Semple, K. Starosta, J. Timr, R. Wadsworth, A.N. Wilson, L. Zolnai, *Nucl. Phys. A* **676**(2000)32.
-

- 
- [39] J. Lu, J. Mukai, T. Komatsubara, T. Hayakawa, K. Furuno, *Nucl. Phys.* **A607**(1996)327.
- [40] G. Căta-Danil, B. M. Nyak, J. Gizon, V. Barci, D. Bucurescu, D. Curien, A. Gizon, S. Andr, C. Foin, J. Genevey, L. Hildingsson, W. Klamra, J. vC. Merdinger, L. Zolnai , *Z. Phys.* **A 339**(1991)313
- [41] *National Nuclear Data Center*: <<http://www.nndc.bnl.gov/>>
- [42] Yang Sun, Ying-Chun Yang, Hong-Liang Liu, Kazunari Kaneko, Munetake Hasegawa, and Takahiro Mizusaki, *Phys. Rev. C* **80** (2009)054306.
- [43] Falih Al-Khudair, Gui-Lu Long, and Yang Sun, *Phys. Rev. C* **79** (2009)034320.
- [44] Rani Devi, B. D. Sehgal and S. K. Khosa, *Pramana - J. Phys.* **67(3)**, (2006) 467.
- [45] Rani Devi, B. D. Sehgal, S. K. Khosa, and J. A. Sheikh, *Phys. Rev. C* **72** (2005)064304.
- [46] B. D. Sehgal, Rani Devi and S. K. Khosa, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **32** (2006)1211.
- [47] Yan Sun and Mike Guidry, *Phys. Rev. C* **52** (1995)2844.
- [48] Arun Bharti, Suram Singh and S. K. Khosan, *Pramana - J. Phys.* **74(4)**, (2010) 525.
- [49] Rawan Kumar, Rani Devi and S. K. Khosan, *Phys. Scr.* **80** (2009) 045201.
- [50] Sonia Verma, Parvaiz Ahmad Dar, and Rani Devi, *Phys. Rev. C* **77** (2008) 024308.
- [51] Ying-Chun Yang, Yang Sun, Sheng-Jiang Zhu, Mike Guidry and Cheng-Li Wu, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37** (2010)085110.
- [52] J. F. Smith, V. Medina-Chico, C. J. Chiara, M. P. Carpenter, C. N. Davids, M. Devlin, J. L. Durell, D. B. Fossan, S. J. Freeman, R. V. F. Janssens, D. R. LaFosse, M. J. Leddy, P. Reiter, D. G. Sarantites, D. Seweryniak, K. Starosta, R. Wadsworth, A. N. Wilson, and J. N. Wilson, *Phys. Rev. C* **69** (2004) 034339.
- [53] D. M. Todd, R. Aryaeinejad, D J G Love, A H Nelson, P J Nolan, P J Smith and P J Twin, *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **10**,(1984) 1407.
-

- 
- [54] E. S. Paul, A. J. Boston, D.T. Joss, P.J. Nolan, J.A. Sampson, A.T. Semple, F. Farget, A. Gizon, D. Santos, B.M. Nyak, N.J. O'Brien, C.M. Parry, R. Wadsworth, *Nucl. Phys. A* **619** (1997) 177.
- [55] C. M. Petrache, G. Lo Bianco, D.Bazzacco, Th.Kroll, S.Lunardi, R.Menegazzo, M.Nespolo, P.Pavan, C.Rossi Alvarez, G.de Angelis, E.Farnea, T.Martinez, N.Marginean, D.R.Napoli, N.Biasi, *Eur. Phys. J. A* **12** (2001) 135-137.
- [56] Ali Al-Khatib, A. K. Singh, O. Wieland, *Acta Physica Polonica B* **36** (2005) 1029.
- [57] J. Katakura and K. Kitao, *Nucl. Data Sheets* **97** (2002) 765.
- [58] O. Vogel, R. S. Chakrawar, A.Dewald, P.Petkov, K.Jessen, J.Gableske, P.von Brentano, D.Bazzacco, A.Gizon, J.Gizon, S.Lunardi, D.R.Napoli, P.Pavan, C.Rossi Alvarez, I.Wiedenhöver, *Eur. Phys. J.A* **4** (1999) 323.
- [59] Sun Xiangfu, D. Bazzacco, W. Gast, A. Gelberg, U. Kaup, A. Dewald, K. O. Zell, and P. von Brentano, *Phys. Rev. C* **28** (1983) 1167.
- [60] C. M. Petrache, G.Lo Bianco, D.Bazzacco, Th.Kroll, S.Lunardi, R.Menegazzo, M.Nespolo, P.Pavan, C.Rossi Alvarez, M.Axiotis, G.de Angelis, E.Farnea, N.Marginean, D.R.Napoli, N.Biasi, *Eur. Phys. J. A* **12** (2001) 139-141.
- [61] O. Zeidan, D. J. Hartley, L. L. Riedinger, W. Reviol, W. D. Weintraub, Y. Sun, Jing-ye Zhang, A. Galindo-Uribarri, S. D. Paul, D. G. Sarantites, M. Devlin, M. P. Carpenter, R. V. F. Janssens, and D. Seweryniak, *Phys. Rev. C* **66** (2002) 044311.
- [62] D. J. Hartley, W. Reviol, L. L. Riedinger, H. Q. Jin, B. H. Smith, N. Yoder, O. Zeidan, A. Galindo-Uribarri, D. G. Sarantites, D. R. LaFosse, J. N. Wilson, and S. M. Mullins, *Phys. Rev. C* **63** (2001) 024316.
- [63] D. T. Joss, E. S. Paul, D. E. Archer, M. Devlin, P. Fallon, I. M. Hibbert, D. R. LaFosse, P. J. Nolan, N. J. O'Brien, J. Pfohl, M. A. Riley, D. G. Sarantites, R. Sheline, J. Simpson, and R. Wadsworth, *Phys. Rev. C* **54** (1996) R969.
-

- [64] H. I. Park, D. J. Hartley, L. L. Riedinger, W. Reviol, O. Zeidan, Jing-Ye Zhang, A. Galindo-Uribarri, R. V. F. Janssens, M. P. Carpenter, D. Seweryniak, D. G. Sarantites, M. Devlin, B. G. Dong, and I. Ragnarsson, *Phys. Rev. C* **68** (2003) 044323.
- [65] D. J. Hartley, L.L. Riedinger, H. Q. Jin, W. Reviol, B. H. Smith, A. Galindo-Uribarri, D. G. Sarantites, D. R. LaFosse, J. N. Wilson, and S. M. Mullins, *Phys. Rev. C* **60** (1999) 014308.
- [66] Gui-Lu Long, and Yang Sun, *Phys. Rev. C* **63** (2001)021305.
- [67] Kenji Hara, Yang Sun, and Takahiro Mizusaki, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999)1922.
- [68] R. Palit, J. A. Sheikh, Y. Sun, and H. C. Jain, *Phys. Rev. C* **67** (2003)014321.
- [69] C. M. Petrache, Y. Sun, D. Bazzacco, S. Lunardi, C. Rossi Alvarez, R. Venturelli, D. De Acua, G. Maron, M. N. Rao, Z. Podolyk, and J. R. B. Oliveira, *Phys. Rev. C* **53**(1996)R2581.
- [70] J. A. Sheikh, Y. Sun, and P. M. Walker, *Phys. Rev. C* **57**(1998)R26.
- [71] Jing-ye Zhang, A. J. Larabee and L. L. Riedinger, *J. Phys. G:Nucl. Phys.* **G 13**(1987)L75.
- [72] T. Bengtsson and I. Ragnarsson, *Nucl. Phys.* **A 436**(1985)14.