



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Mecánica Gravitacional en el Espacio
Hiperbólico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

David Padilla Garza

TUTOR

Dr. Luis García Naranjo Ortiz de la Huerta





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. El problema de Kepler y de los dos cuerpos	9
1.1. Deducción de órbitas fase a partir del potencial	10
1.2. Reducción del problema de movimiento en un campo central a un sistema conservativo con un grado de libertad	12
1.3. Investigación cualitativa de las órbitas	17
1.4. El problema de Kepler	20
1.4.1. Primera ley de Kepler	20
1.4.2. Segunda ley de Kepler	22
1.4.3. Tercera ley de Kepler	24
1.5. El problema de los dos cuerpos	25
1.5.1. Definiciones y nociones básicas	26
1.5.2. El problema de los dos cuerpos	27
2. El espacio hiperbólico	31
2.1. Transformaciones de Möbius	32
2.1.1. Definiciones y propiedades básicas	32
2.1.2. Elementos generadores de $PSL(2, \mathbf{C})$	36
2.1.3. $PSL(2, \mathbf{C})$ actúa transitivamente en discos y ternas de puntos	37
2.1.4. Transformaciones que preservan \mathbf{H}	40
2.1.5. El grupo $PSL(2, \mathbf{R})$ actúa transitivamente en la fami- lia de círculos ortogonales al eje real	42
2.2. Geodésicas e isometrías de \mathbf{H}	43
2.2.1. Isometrías de \mathbf{H}	43
2.2.2. Las geodésicas de \mathbf{H}	47
2.2.3. El grupo completo de isometrías	48
2.3. Notas adicionales	52
2.3.1. Estructura de grupo	52

2.3.2.	Álgebra de Lie	53
2.4.	Otros modelos para el plano hiperbólico y el espacio hiperbólico de dimensión 3	54
2.4.1.	El disco de Poincaré-Beltrami	55
2.4.2.	El espacio hiperbólico de dimensión 3	58
3.	La partícula libre en \mathbf{H}	61
3.1.	Ecuaciones reducidas y su solución	62
3.2.	Solución explícita a las ecuaciones de reconstrucción	64
3.3.	Cantidades conservadas	68
3.3.1.	El espacio hiperbólico	71
3.4.	La partícula libre en variedades riemannianas	72
4.	El Problema de Kepler en \mathbf{H}	75
4.1.	Ecuaciones de movimiento del problema de Kepler	76
4.2.	Segunda ley de Kepler en \mathbf{H}	77
4.2.1.	La segunda ley de Kepler	78
4.3.	Reducción a un sistema conservativo con un grado de libertad e investigación cualitativa de las órbitas	79
4.4.	Integración explícita de las ecuaciones	81
4.4.1.	Propiedad de Bertrand	84
4.4.2.	Primera ley de Kepler	86
4.5.	Notas adicionales	89
4.5.1.	El caso $M = 0$	89
4.5.2.	La tercera ley de Kepler	90
4.6.	El problema de los dos cuerpos	93
4.6.1.	Ecuaciones de movimiento	93
4.6.2.	Simetrías y cantidades conservadas	94
4.6.3.	Equilibrios relativos	96
	Appendices	99
A.	Elección del Potencial	101
A.1.	El área de la esfera en \mathbf{H}^3	101
A.2.	Elección del potencial	102
B.	Reducción de \mathbf{H}^3 a \mathbf{H}^2	105

Introducción

La historia de la mecánica no euclidiana probablemente empieza con Gauss en la década de 1810; él consideró la posibilidad física de que el espacio en que vivimos no fuera euclidiana sino curvada. Como experimento para medir la curvatura de la realidad intentó medir la suma de los ángulos de un triángulo formado por rayos de luz con vértices en tres montañas. Sin embargo, debido al error en las mediciones el experimento no fue concluyente. No obstante, lo que más tarde se conocería como geometría riemanniana continuó desarrollándose en el siglo XIX, aun cuando no fuera claro cuál fuera su aplicabilidad física. A principios del siglo XX Einstein dio una base concluyente a que la realidad no es plana, sino curvada, y que además el espacio y el tiempo no son independientes, sino que forman una variedad pseudo-riemanniana 4 dimensional llamada el espacio-tiempo. Su trabajo en relatividad inició en 1905, las primeras contribuciones incluyen proponer que la velocidad de la luz es un invariante en cualquier sistema de referencia, y que es un límite superior para la velocidad de cualquier cuerpo; posteriormente introdujo las ecuaciones de campo que llevan su nombre, que describen la métrica pseudo-riemanniana de espacio-tiempo. Hilbert mostró que la ecuación de campo de Einstein es la ecuación variacional de un cierto funcional (llamado acción de Hilbert) en el espacio de métricas de Minkowski sobre una variedad 4-dimensional dada; la teoría de Einstein implica que una métrica espacio-temporal físicamente posibles es un punto crítico de la acción de Hilbert. Más tarde, la teoría de cuerdas propuso un modelo de 10 u 11 dimensiones para la realidad física. La geometría riemanniana y la mecánica no euclidiana son ramas que continúan ofreciendo problemas en la actualidad.

¿Para qué estudiar la mecánica en espacios no euclidianos? En el siglo XIX, Edwin Abbott publicó una novela llamada "Flatland", que trata de una sociedad que vive en un espacio plano de dos dimensiones. Un día uno de sus habitantes recibe la noticia de que existe una tercera dimensión, pero

al principio no puede aceptar esto; pues, afirma, un espacio de dos dimensiones es lo único que hace sentido. Flatland es una obra de ficción, pero abre la puerta a una interrogante interesante: ¿qué tanto podemos confiar en nuestra intuición y sentido común para describir la realidad física? La intuición y el sentido común se basan en la similitud con experiencias y percepciones pasadas, y si esas experiencias y percepciones se restringen a una aproximación burda o un fragmento de la realidad física, son poco confiables en algunos ámbitos. Al afirmar que lo único que tiene sentido físicamente es que el espacio tenga una curvatura 0 quizás no somos más que el Flatland-ense que afirmó que lo único que tiene sentido es que tenga dimensión 2. La pregunta ¿cuál es la forma del universo? no se ha respondido por completo.

La tesis trata de la mecánica gravitacional en el espacio hiperbólico. El espacio hiperbólico fue introducido por Bolyai y Lobachevsky en la década de 1830; y en 1870 Schering, basándose en su trabajo, generalizó la ley de gravitación Newtoniana a este espacio. El potencial newtoniano es inversamente proporcional al área de la esfera de radio euclidiano constante, y esta idea fue utilizada para la generalización a espacios de curvatura distinta de 0.

En cuanto al desarrollo moderno, Kozlov [9] analizó la integrabilidad del problema de Kepler en espacio de curvatura constante principalmente en los noventas. Pérez-Chavela, Diacu, García Naranjo, entre otros, [8] [10] han analizado equilibrios relativos y Montgomery [7] generalizó el problema a la geometría subriemanniana.

El primer capítulo trata del problema de una partícula en un potencial central gravitacional (problema de Kepler) y de los dos cuerpos que sienten la atracción gravitacional del otro (problema de los dos cuerpos) en el espacio Euclidiano. Este capítulo parte de la ley de la gravitación Newtoniana, y hace un repaso de algunos aspectos de mecánica clásica.

El segundo introduce el espacio en que se estudiará el problema: el espacio hiperbólico. El espacio hiperbólico bidimensional o plano hiperbólico es un modelo de la geometría en que dada una recta, existen una infinidad de paralelas que pasan por un punto dado. El capítulo empieza construyendo este espacio y termina mencionando unos aspectos más específicos relevantes para nuestros problemas.

Los primeros dos capítulos pueden considerarse una introducción a los problemas estudiados. El tercer capítulo trata de la partícula libre, es decir, una partícula sobre la cual no actúan fuerzas externas, en el espacio hiperbólico.

El cuarto capítulo trata del problema de Kepler y los dos cuerpos en el espacio hiperbólico. Empieza tratando el problema en el espacio bidimensional con el potencial $-k \coth$, una justificación física de esto puede encontrarse en los apéndices. Se estudian las tres leyes de Kepler en el espacio hiperbólico. Por último se incluye una nota respecto al problema de los dos cuerpos.

La mayor parte de esta tesis está basada en los libros de Arnold [1], Lascurain [2], y en los artículos de Rañada et al. [6] y García Naranjo et al. [8]. El material en los apéndices fue obtenido en colaboración con el Dr. Richard Montgomery. La formulación exacta de la segunda y la tercera ley de Kepler en el espacio hiperbólico son originales hasta donde sabemos.

El problema de Kepler y de los dos cuerpos

El primer capítulo de este trabajo trata de un problema muy familiar: el de describir el movimiento de los astros que se observa en el cielo; más precisamente, del problema de Kepler y de los dos cuerpos. Este capítulo es una introducción en el sentido de empezar a utilizar las técnicas y enfoques que se usarán más adelante, y estudiar el problema en un espacio conocido.

Primero se introducirán técnicas de mecánica clásica generales, como la deducción de órbitas fase a partir de un potencial o la reducción de un campo central a un sistema conservativo con un grado de libertad. Posteriormente se presenta el problema de Kepler, haciendo énfasis en la tres leyes de movimiento; y por último se trata el problema de los dos cuerpos. Nuestro tratamiento sigue la exposición de [1].

Históricamente, estos problemas comienzan con las observaciones que Tycho Brahe hizo del movimiento de los astros. Basándose en estos datos, Johannes Kepler formuló sus leyes de movimiento. Aunque Kepler fue el primero en concebir a la astronomía como parte de la física, su trabajo fue una descripción mas no una explicación. Fue hasta medio siglo después de su muerte que Isaac Newton dio una explicación física a estas observaciones: que los astros son cuerpos físicos mediante los cuales actúa una fuerza que no se ejerce mediante el contacto-la fuerza de gravedad.

En el problema de los 2 cuerpos las ecuaciones de movimiento de las partículas están dadas por

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{Gm_1 m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{Gm_1 m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} \end{aligned} \tag{1}$$

donde m_i y \mathbf{r}_i denotan la masa y la posición de la i -ésima partícula respectivamente. Imponiendo $\mathbf{r}_2 = 0$ el problema se reduce al movimiento de una sola partícula, y se obtiene la ecuación del problema de Kepler, dado por

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3}.$$

0.1. Deducción de órbitas fase a partir del potencial

Un sistema se llama *sistema conservativo* si el trabajo realizado por una fuerza depende sólo de la posición final e inicial de una trayectoria y es igual al cambio en energía cinética. En consecuencia en un sistema conservativo la energía total es constante, de ahí el nombre. Un sistema conservativo con un solo grado de libertad está dado por

$$\ddot{x} = -U'(x)$$

o equivalentemente por

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -U'(x), \tag{2}$$

donde $U(x)$ es la energía potencial. Uno puede tener una noción cualitativa de las órbitas en el plano fase imaginando que la gráfica de $U(x)$ es un relieve sobre el cual resbala una partícula. Por ejemplo, si la gráfica de $U(x)$ tiene la forma dada en la Figura 1.1, las órbitas fase estarán descritas por la Figura 1.2.

Para comprender la órbita del nivel de energía E_5 son útiles los siguientes puntos:

- Si la partícula empieza cerca y a la derecha de x_3 , como la energía total $E_2 = (1/2)y^2 + U(x)$ es constante, la energía cinética $(1/2)y^2$ es positiva, por lo que \dot{x} es distinto de 0. Además, \dot{x} es positivo porque x va en aumento, y es una función creciente de x hasta que $x = x_4$.
- La magnitud de \dot{x} es máxima cuando $x = x_4$
- En $x = x_5$ la energía potencial y la total son iguales, por lo que $y = 0$, e inmediatamente después es negativa.

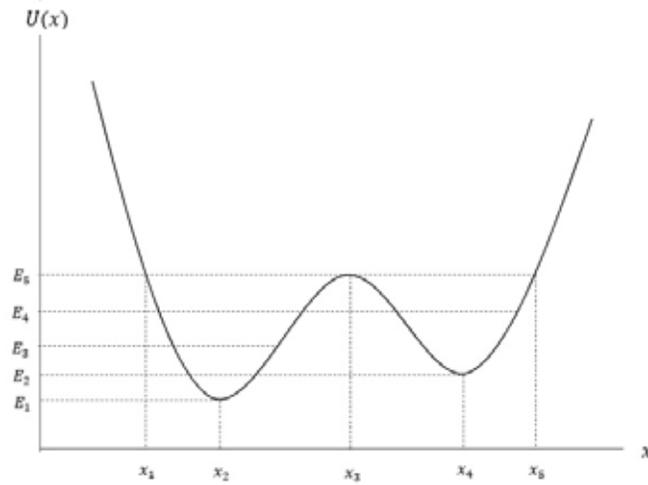


Figura 1: Gráfica de un potencial

- Cuando $x = x_4$ por segunda vez, la velocidad es de igual magnitud pero negativa.
- La órbita se acerca asintóticamente al punto $(x_3, U(x_3))$, pero nunca lo alcanza ya que si lo tocara existiría más de una solución al sistema (1.2) con condición inicial $(x = x_3, \quad y = 0)$, contradiciendo el teorema de existencia y unicidad.

0.2. Reducción del problema de movimiento en un campo central a un sistema conservativo con un grado de libertad

El movimiento de una partícula en un campo central está descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\mathbf{e}_r \quad (3)$$

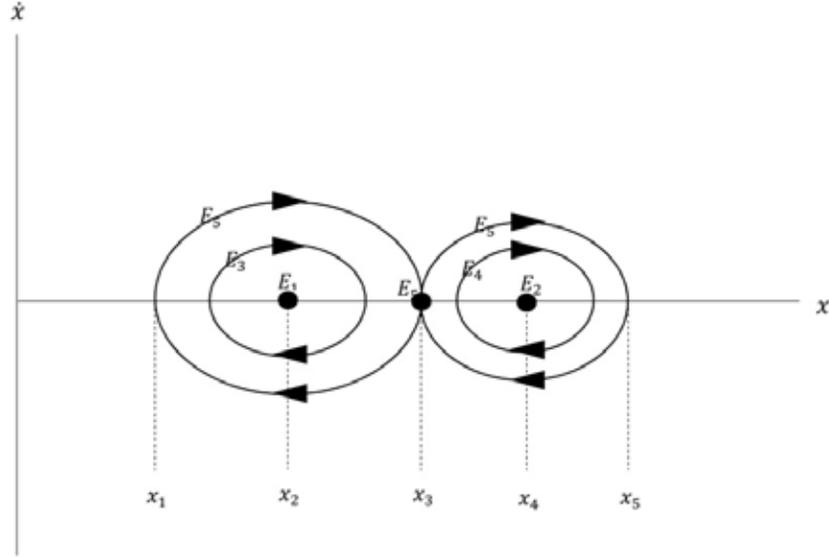


Figura 2: Plano fase correspondiente al potencial de la Figura 1.1.

donde $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{r} \neq 0$ es el vector posición, $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$ es el vector radial unitario, $r = \|\mathbf{r}\|$, y $f \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$. Nótese que las soluciones de (1.3) preservan la energía

$$E = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + W(\mathbf{r}) \quad (4)$$

donde

$$W(\mathbf{r}) = U(\|\mathbf{r}\|) = U(r) \quad \text{con} \quad U(r) \text{ una primitiva de la función } f.$$

Es posible en gran medida reducir este problema a un sistema conservativo con un grado de libertad haciendo uso del siguiente resultado: la magnitud del radio de comporta como la posición de una partícula sujeta a un potencial.

Definición 0.2.1. Se define el momento angular \mathbf{M} como $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$ donde $[\cdot, \cdot]$ denota el producto vectorial en \mathbf{R}^3 .

Lema 0.2.2. A lo largo de las soluciones $\dot{\mathbf{M}} = 0$, es decir \mathbf{M} es constante.

Demostración.

$$\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}] = [\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}],$$

como el campo es central, \mathbf{r} y $\ddot{\mathbf{r}}$ son colineales y su producto cruz es 0. \square

Es una consecuencia inmediata que el movimiento ocurre en un plano perpendicular al vector \mathbf{M} que pasa por el origen.

Lema 0.2.3. *A lo largo de las trayectorias seguidas por la partícula se tiene que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{M} = 0$, donde $\mathbf{r}(t)$ denota la posición de la partícula.*

Demostración. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{r} \cdot [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = \dot{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0.$ □

De ahora en adelante nos restringiremos al plano en el que tiene lugar el movimiento, y expresaremos al vector \mathbf{r} en coordenadas polares como $r\mathbf{e}_r$, e introducimos una base ortonormal para el espacio dada por $\mathbf{e}_r = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ y $\mathbf{e}_\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi))$.

Lema 0.2.4. *Los vectores $\dot{\mathbf{r}}$ y $\ddot{\mathbf{r}}$ se pueden escribir como*

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi, \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi.$$

Demostración. Escribiendo $\mathbf{e}_r = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ y $\mathbf{e}_\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi))$ es fácil ver que $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$ y que $\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi}\mathbf{e}_r$. Entonces

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi.$$

La Figura 1.2 muestra cómo varían las componentes del vector \mathbf{r} . Derivando nuevamente tenemos

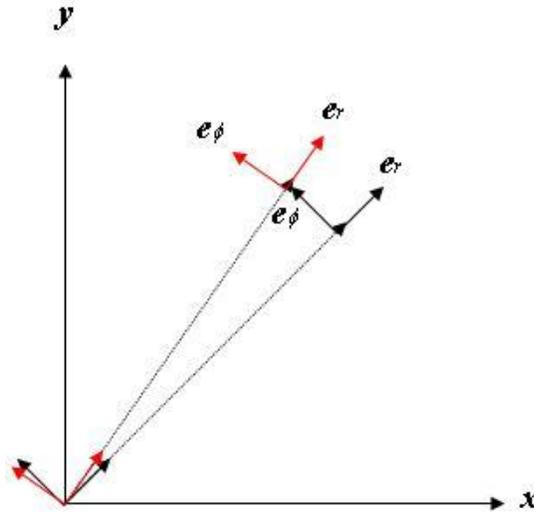
$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi. \tag{5}$$

□

Observación 0.2.5. *A partir del lema anterior es posible escribir a \mathbf{M} en términos de $r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}$ como*

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] \\ &= [\mathbf{r}, \dot{r}\mathbf{e}_r] + [\mathbf{r}, r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi] \\ &= r\dot{\phi}[\mathbf{r}, \mathbf{e}_\phi] \\ &= r^2\dot{\phi}[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi]. \end{aligned}$$

En el cálculo anterior hemos pensado que $\mathbf{e}_r = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0)$ y $\mathbf{e}_\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$ y que el sistema de referencia se elige de forma que \mathbf{M} sea paralelo al eje z .

Figura 3: El vector \mathbf{r} en sus componentes

Sea

$$M = \|\mathbf{M}\| = r^2 \dot{\phi}. \quad (6)$$

En vista del Lema 1.2.2 tenemos que M es constante a lo largo del movimiento. Estamos listos para demostrar que r se comporta como la posición de una partícula en un campo conservativo con un grado libertad sujeta al potencial

$$V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}. \quad (7)$$

El potencial $V(r)$ es llamado *potencial efectivo*.

Teorema 0.2.6. *Sea $U(r) = -\int f(r) dr$, si \mathbf{r} es solución del problema de movimiento en el campo central*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r = f(r) \mathbf{e}_r \quad (8)$$

entonces r es solución del sistema conservativo con un grado de libertad

$$\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(U(r) + \frac{M^2}{2r^2} \right). \quad (9)$$

Demostración. Usando (1.5),

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi.$$

Como el campo es central,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r.$$

Comparando las componentes en ambas expresiones para $\ddot{\mathbf{r}}$ obtenemos

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\dot{\phi}^2, \quad 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0.$$

En particular

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{rM^4}{r^4} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(U(r) + \frac{M^2}{2r^2}\right) = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

□

Proposición 0.2.7. *La energía total del sistema (1.8) y del sistema (1.9) es la misma.*

Demostración. Tenemos

$$\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{M^2}{r^2},$$

entonces (1.4) coincide con

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = \frac{\dot{r}^2}{2} + U(r) + \frac{M^2}{2r^2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) \quad (10)$$

que es igual a la energía del sistema conservativo (1.9). □

Proposición 0.2.8. *Sea (t_1, t_2) un intervalo de tiempo en el que $r(t)$ y $\phi(t)$ son difeomorfismos y $\dot{r} > 0$. Sean también $r_1 = r(t_1)$, $r_2 = r(t_2)$, $\phi_1 = \phi(t_1)$, $\phi_2 = \phi(t_2)$, $\Delta t = t_2 - t_1$, y $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$; entonces*

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))}} \quad (11)$$

y

$$\Delta\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\frac{2M}{r^2}}{\sqrt{2(E - V(r))}} dr. \quad (12)$$

Demostración. Usaremos las fórmulas

$$\dot{r} = \sqrt{2(E - V(r))}, \quad \dot{\phi} = \frac{M}{r^2}$$

que son consecuencia de la conservación de la energía (1.10) y el momento angular (1.6), respectivamente. Se tiene

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\dot{r}} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}. \end{aligned}$$

De manera similar, utilizando la regla de la cadena se obtiene que

$$\begin{aligned} \phi_2 - \phi_1 &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\phi}{dr} dr \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{2M/r^2}{\sqrt{2(E - V(r))}} dr. \end{aligned}$$

□

Nótese que por regla de la cadena $\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}$

0.3. Investigación cualitativa de las órbitas

Supongamos que el potencial efectivo tiene un mínimo local como se muestra en la Figura 1.3. Como la energía cinética es siempre no negativa, los valores posibles de r para el nivel de energía E indicado en la la Figura 1.3, están entre r_{min} y r_{max} (de lo contrario la energía potencial sería mayor a la total, y la cinética, negativa). Los puntos donde $r = r_{min}$ y $r = r_{max}$ reciben el nombre de *pericentro* y *apocentro* respectivamente. El movimiento del cuerpo en el plano tiene lugar en el ánulo $r_{min} \leq r \leq r_{max}$.

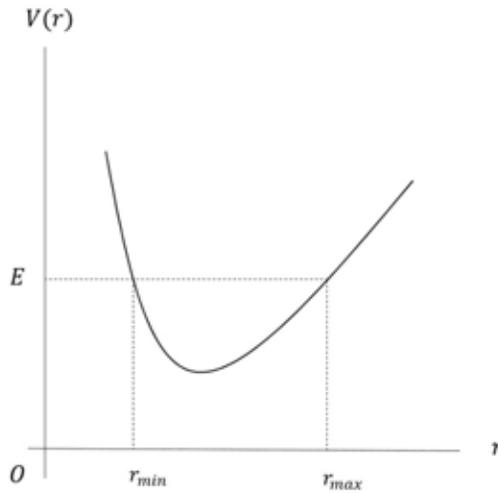


Figura 4: Potencial efectivo con un mínimo local.

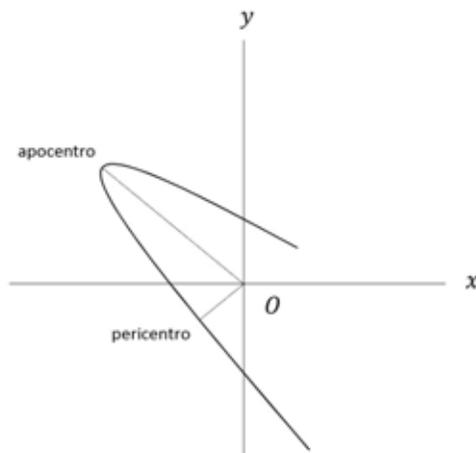


Figura 5: Órbita bidimensional en el anulo $r_{min} \leq r \leq r_{max}$.

Proposición 0.3.1. *Los rayos que parten del centro del campo a cualquier apocentro son ejes de simetría de las órbitas.*

Demostración. Es fácil ver que si $r(t)$ es solución del sistema

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0, \quad \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad (13)$$

entonces $r(-t)$ es solución del sistema

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = -\dot{r}_0, \quad \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (14)$$

En particular, si $r(0)$ es r_{max} , $r(t) = r(-t)$ (porque en ese caso $\dot{r}(0) = 0$, y el sistema (1.13) se vuelve el sistema (1.14)). En consecuencia $r(t)$ es una función par, y de la fórmula (1.12) se puede ver que $\phi(t)$ es una función impar. Entonces si el punto (r, ϕ) está en la órbita, también lo está el punto $(r, -\phi)$. \square

A partir de la demostración es claro que el enunciado de la proposición también es válido para los rayos que parten del centro del campo a cualquier pericentro.

En general, las órbitas no son cerradas. Son cerradas si y sólo si el ángulo entre un apocentro y un pericentro, dado por

$$\Delta\phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{2(E - V(x))}}$$

es un múltiplo racional de 2π . De lo contrario, las órbitas son densas en el anulo, como lo muestra la Figura 1.3.

Si el valor de E es igual al de la energía potencial en un punto crítico, $\dot{r} = 0$ y la órbita es circular.

A partir de (1.7) tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} V(r).$$

Denotaremos

$$U_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} U(r).$$

Si $U_\infty < \infty$ y las condiciones iniciales son tales que $\dot{r} > 0$ y la energía inicial es mayor que U_∞ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$. Más aún, teóricamente es posible que el cuerpo llegue al infinito en un tiempo finito si el potencial no está acotado. Por ejemplo éste es el caso si

$$V(r) = K - 2r^4$$

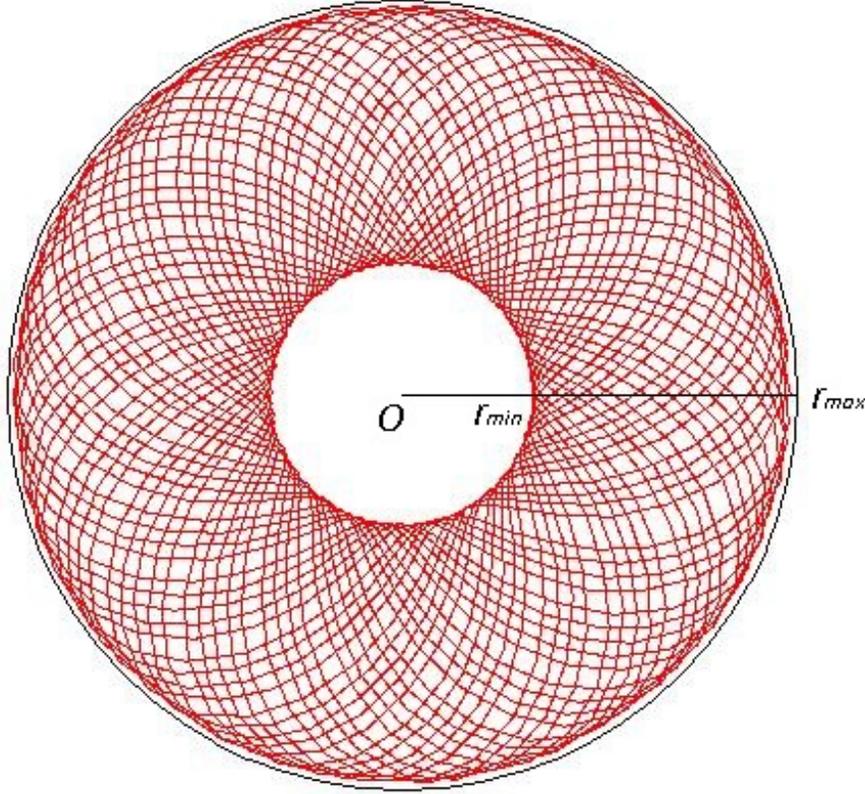


Figura 6: Órbita densa en el anillo $r_{min} \leq r \leq r_{max}$.

con $K > 0$ y la energía inicial $E = K$, como puede verse utilizando (1.11).

Por otro lado, si cuando $r \rightarrow 0$, $|U(r)|$ está acotado por $\frac{M^2}{2r^2}$, más precisamente, si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{U(r)}{\frac{1}{r^2}} = 0$$

entonces $\lim_{r \rightarrow 0} V(r) = \infty$ y r_{min} existe y es mayor que 0. De lo contrario, es posible que

$$U(r) + \frac{M^2}{2r^2} \rightarrow -\infty$$

cuando $r \rightarrow 0$ y en ese caso existen órbitas que caen al centro del potencial, incluso en tiempo finito para algunos potenciales.

0.4. El problema de Kepler

Como se mencionó antes, un caso particular del problema del movimiento en un campo central es el de una partícula sujeta a un potencial gravitacional creado por una partícula de masa m_1 situada en el origen. En este caso el potencial está dado por $U(r) = -\frac{k}{r}$, con $k > 0$, y el potencial efectivo (1.7) por

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{M^2}{2r^2}. \quad (15)$$

La ecuación de movimiento está dada por la ley de la gravitación

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad (16)$$

donde $k = Gm_1$. De acuerdo al Teorema 1.2.6 tenemos que r es solución de

$$\ddot{r} = \frac{k}{r^2} - \frac{M^2}{r^3}.$$

La figura 1.4 muestra una gráfica del potencial efectivo. A partir de la ecua-

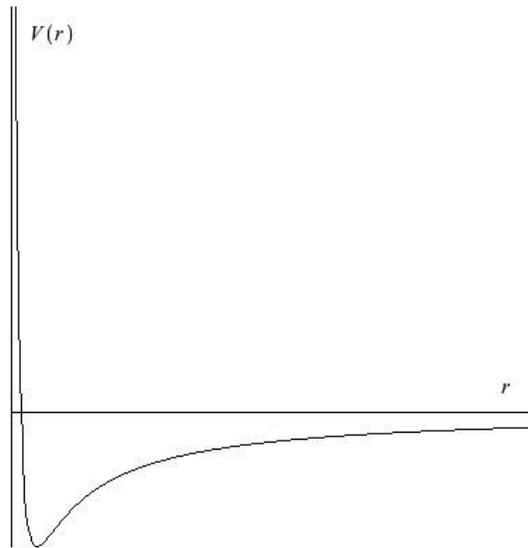


Figura 7: Potencial efectivo gravitacional

ción (1.16) pueden recuperarse las tres leyes de Kepler que fueron deducidas por Kepler a partir de las observaciones de Tycho Brahe en el siglo XVII. A continuación derivaremos dichas leyes.

0.4.1. Primera ley de Kepler

Teorema 0.4.1. *Los planetas se mueven en trayectorias elípticas, con el sol en uno de sus focos.*

Demostración. Usando las fórmulas (1.12) y (1.15) se obtiene que

$$\phi = \int \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{2(E - V(r))}} = \int \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{E - \frac{k}{r} + \frac{M^2}{2r^2}}}.$$

Así obtenemos (véase Observación 1.4.2),

$$\phi = \arccos \left(\frac{\frac{M}{r} - \frac{k}{M}}{\sqrt{2E + \frac{k^2}{M^2}}} \right).$$

Hemos considerado la constante de integración igual a 0 lo que corresponde a escoger apropiadamente el límite inferior de integración para ϕ , lo cual es equivalente a medir ϕ a partir del pericentro.

Introduciendo las variables

$$p = \frac{M^2}{k}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{k^2}},$$

la fórmula se vuelve

$$\phi = \arccos \left(\frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \right)$$

o

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi)}.$$

Ésta es la ecuación de una cónica en coordenadas polares, con el origen en uno de sus focos, es un círculo si $e = 0$, una elipse si $e \in (0, 1)$, una parábola si $e = 1$, y una hipérbola si $e \in (1, \infty)$. En el caso de los planetas en el sistema solar, como la órbita es periódica y acotada, es elíptica (posiblemente circular). \square

Observación 0.4.2. *Una forma de hacer una integral del tipo*

$$\int \frac{K_1 dr}{r^2 \sqrt{K_1 - \frac{K_2}{r} + \frac{K_2}{r^2}}}$$

es primero introducir el cambio de variable $u = 1/r$, lo cual transforma la integral en

$$\int \frac{-du}{\sqrt{c_1 - c_2u + c_3u^2}},$$

y luego completar cuadrados en el denominador

$$c_1 - c_2u + c_3u^2 = \left(\sqrt{c_3}u - \frac{c_2}{2\sqrt{c_3}}\right)^2 - \frac{c_2^2}{4c_3} + c_1,$$

transformando el integrando en la derivada la función arcocoseno aplicada a una función afín de u .

La constante p es llamada el parámetro de la órbita, y e , la excentricidad. En una elipse, estos parámetros están relacionados mediante las fórmulas

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (17)$$

donde a y b son el semieje mayor y menor respectivamente, y c es la distancia del centro de la elipse a sus focos, como lo muestra la Figura 1.4.1.

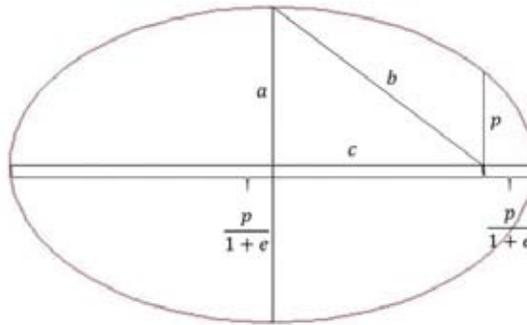


Figura 8: Parámetros de una elipse.

0.4.2. Segunda ley de Kepler

La segunda ley de Kepler afirma que *los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales*. Esta afirmación es equivalente a que $\frac{dA}{dt} = \text{constante}$, donde $A(t)$ es el área barrida por el planeta al tiempo t .

Proposición 0.4.3. *Los dos planteamientos de la segunda ley de Kepler son equivalentes.*

Demostración. Si se cumple la primera definición entonces

$$\frac{A(t_1 + \Delta t) - A(t_1)}{\Delta t} = \frac{A(t_2 + \Delta t) - A(t_2)}{\Delta t}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \dot{A}(t_1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t_1 + \Delta t) - A(t_1)}{\Delta t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t_2 + \Delta t) - A(t_2)}{\Delta t} \\ &= \dot{A}(t_2) \end{aligned}$$

para cualesquiera t_1 y t_2 , por lo que se cumple la segunda.

Si se cumple la segunda definición, entonces

$$\begin{aligned} A(t_1 + \Delta t) - A(t_1) &= \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \dot{A}(t) dt \\ &= \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} \dot{A}(t) dt \\ &= A(t_2 + \Delta t) - A(t_2), \end{aligned}$$

cumpléndose la primera. □

Teorema 0.4.4. *A lo largo de las órbitas se tiene que $\frac{dA}{dt} = cte.$*

Demostración. Esta ley es una consecuencia de la conservación del momento angular. Nótese que

$$A = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{1}{2} r^2 d\phi = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} dt$$

así que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} M = cte. \quad \square$$

La cantidad

$$S = \frac{dA}{dt}$$

es llamada velocidad sectorial. Vale la pena notar que la segunda ley de Kepler es cierta en cualquier campo central, y no sólo el gravitacional.

0.4.3. Tercera ley de Kepler

Teorema 0.4.5. *Para las trayectorias elípticas del problema de Kepler, el cuadrado del periodo de revolución es proporcional al cubo del semieje mayor.*

Demostración. Sea T el periodo de revolución de la órbita, entonces, como $S = \frac{M}{2}$ y el área de la elipse está dada por πab ,

$$\frac{M}{2} = \frac{\pi ab}{T}$$

y

$$T = \frac{2\pi ab}{M}.$$

Los siguientes pasos son escribir a y b en términos de las constantes de movimiento M y E usando las fórmulas (1.17):

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{M^2}{k} \frac{1}{2E \frac{M^2}{k^2}} = \frac{k}{2E}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2 - c^2} \\ &= a\sqrt{1 - e^2} \\ &= \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \\ &= \frac{M^2}{k} \frac{1}{\sqrt{2E \frac{M}{k}}} \\ &= \frac{M}{\sqrt{2E}}. \end{aligned}$$

Luego

$$T = \frac{2\pi k}{\sqrt{2E}^3}$$

y usando que $2E = \frac{k}{a}$ se obtiene que

$$T = 2\pi a^{3/2} k^{-1/2},$$

que es lo que se quería probar. □

Nótese también que la energía total depende únicamente del semieje mayor a .

Más allá del resultado de las fórmulas, la tercera ley de Kepler es cierta por la simetría de escalamientos: si $\mathbf{r}_1(t)$ es solución de (1.16) entonces también lo es

$$\mathbf{r}_2(t) = \lambda^{\frac{-2}{3}} \mathbf{r}_1(\lambda t).$$

Entonces si T_1 , a_1 , T_2 y a_2 denotan el periodo y el semieje de la primera y la segunda órbita respectivamente entonces $a_2 = \lambda^{\frac{-2}{3}} a_1$ y $T_2 = \lambda^{-1} T_1$, por lo que

$$\frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{T_1^2}.$$

0.5. El problema de los dos cuerpos

Cuando se considera que la fuerza ejercida por ambas partículas es apreciable, el problema se llama el de los dos cuerpos; y el planteamiento matemático deja de ser el de un campo central. Sin embargo, haciendo uso del concepto de centro de masa, es posible reducir este problema al problema de Kepler, como veremos a continuación.

0.5.1. Definiciones y nociones básicas

Definición 0.5.1. *Dado un sistema de n partículas, cada una con posición \mathbf{r}_i y masa m_i , se define el centro de masa \mathbf{r} como*

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Proposición 0.5.2. *El centro de masa no depende de la elección del sistema de coordenadas.*

Demostración. Sea A una transformación afín, con $A(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + \mathbf{a}$ donde

T es una transformación lineal, y \mathbf{a} un vector en \mathbf{R}^n . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n m_i A(\mathbf{r}_i)}{\sum_{i=1}^n m_i} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i (T(\mathbf{r}_i) + \mathbf{a})}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i T(\mathbf{r}_i)}{\sum_{i=1}^n m_i} + \mathbf{a} \\ &= T \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) + \mathbf{a} \\ &= A(\mathbf{r}) + \mathbf{a}. \end{aligned}$$

□

En particular, el centro de masa es invariante bajo la aplicación de isometrías al sistema coordenado (recuérdese que las isometrías de \mathbf{R}^n son precisamente las transformaciones afines ortogonales).

Las partículas sienten las fuerzas que ejercen entre sí, y posibles fuerzas externas. Sea \mathbf{F}_i la fuerza neta ejercida sobre la partícula i , \mathbf{F}_{ij} la fuerza que ejerce la partícula j sobre la i , y \mathbf{F}'_i la fuerza externa ejercida sobre i . Con esta nomenclatura,

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}'_i.$$

Muchas veces las fuerzas que ejercen entre sí las partículas j e i son iguales en magnitud, y actúan en dirección opuesta a lo largo del vector $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, es decir:

$$\mathbf{F}_{ij} = f_{ij} \mathbf{e}_{ij}, \quad \mathbf{F}_{ji} = -f_{ij} \mathbf{e}_{ij}, \quad (18)$$

donde f_{ij} es la magnitud de la fuerza, y $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$. En otras palabras, se cumple la tercera ley de Newton.

Un sistema en que no hay fuerzas externas (i.e. $\mathbf{F}'_i = 0 \forall i$) es llamado un *sistema cerrado*.

Proposición 0.5.3. *El centro de masa se comporta como una partícula de masa $M = \sum_{i=1}^n m_i$ sobre el cual son ejercidas las fuerzas externas.*

Demostración.

$$M\ddot{\mathbf{r}} = M \frac{\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_i + \sum_{i,j \leq n, i \neq j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_i.$$

□

En particular, en un sistema cerrado el centro de masa se mueve a velocidad constante.

0.5.2. El problema de los dos cuerpos

Consideremos un sistema cerrado de dos partículas bajo la hipótesis de que (1.18) está satisfecha. Las ecuaciones de movimiento son

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Si $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es una fuerza conservativa, entonces existe $U : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla U$. Si además \mathbf{F} es una fuerza central entonces U es una función radial. En este caso las ecuaciones de movimiento se vuelven

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}_1} U = -\nabla_{\mathbf{r}} U, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}_2} U = \nabla_{\mathbf{r}} U. \end{aligned}$$

Como el centro de masa se mueve a velocidad constante, podemos tomar un sistema de referencia con el centro de masa en el origen.

El meollo de la reducción de este problema a un sistema conservativo con un grado de libertad es el siguiente resultado.

Lema 0.5.4. *El vector \mathbf{r} se comporta como la posición de una partícula de masa $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ sujeta al potencial central U , es decir,*

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U. \quad (19)$$

Demostración. De las ecuaciones de movimiento se tiene que

$$m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_2 \nabla_{\mathbf{r}} U, \quad m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = m_1 \nabla_{\mathbf{r}} U;$$

entonces

$$m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}} = m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = -m_2 \nabla_{\mathbf{r}} U - m_1 \nabla_{\mathbf{r}} U$$

y el resultado se sigue dividiendo las expresiones entre $(m_1 + m_2)$. □

A partir de ahora supondremos que el marco de referencia inercial se elige de forma que el centro de masa está en el origen, es decir, $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$. Usando la fórmula $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es posible despejar

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad (20)$$

y así recuperar a \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 a partir de las soluciones de (1.19).

En el caso particular de la fuerza gravitacional

$$F(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \quad \text{y} \quad U(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|}$$

y tenemos el problema de los dos cuerpos (1.1). De acuerdo al Lema (1.5.4) y a la ecuación (1.20) podemos describir el movimiento de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 mediante la solución al problema de Kepler para \mathbf{r} . Más aún, como veremos a continuación, las leyes de Kepler son válidas para \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 .

Proposición 0.5.5. *Si \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 están acotadas describen órbitas elípticas con el centro de masa en uno de sus focos.*¹

Demostración. Como el vector \mathbf{r} permanece en un plano ortogonal a \mathbf{M} , $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} \equiv 0$. Usando (1.20) tenemos $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_1 \equiv 0$ y \mathbf{r}_1 permanece en el plano ortogonal a \mathbf{M} ; y lo mismo es cierto para \mathbf{r}_2 . Esto permite expresar a \mathbf{r}_1 y a \mathbf{r}_2 en coordenadas polares como

$$\mathbf{r}_1 = (r_1, \phi_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = (r_2, \phi_1).$$

De las ecuaciones (1.20) se deduce que

$$\phi_1 = \phi, \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}r, \quad \phi_2 = \phi + \pi, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}r$$

donde r y ϕ son las coordenadas polares de \mathbf{r} , $\mathbf{r} = (r, \phi)$.

Si \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 están acotadas, a partir de (1.20) se sigue que \mathbf{r} también está acotado y por lo tanto describe una órbita elíptica. Entonces

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi)}$$

¹Recuerde que el centro de masa se ha supuesto fijo en el origen.

con $e \in [0, 1)$. Por lo tanto

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{p}{1 + e \cos(\phi_1)}$$

y

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{p}{1 + e \cos(\phi_2 + \pi)},$$

que son las ecuaciones para una elipse con el origen en uno de sus focos. Vale la pena notar que el origen es el foco derecho de la órbita de \mathbf{r} y de \mathbf{r}_1 y el foco izquierdo de la órbita de \mathbf{r}_2 . \square

Proposición 0.5.6. *Los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 barren áreas iguales en tiempos iguales; es decir $\frac{dA_1}{dt}$ y $\frac{dA_2}{dt}$ son constantes, donde $A_1(t)$ y $A_2(t)$ denotan el área barrida por los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 al tiempo t , respectivamente.*

Demostración.

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r_1^2 \dot{\phi}_1 dt \\ &= \frac{m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} \int_{t_0}^t r^2 \dot{\phi} dt \\ &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 A(t), \end{aligned}$$

donde $A(t)$ denota el área barrida por el vector \mathbf{r} . Por lo tanto

$$\dot{A}_1(t) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \dot{A}(t),$$

lo cual implica que $\dot{A}_1(t)$ es constante. Análogamente $\dot{A}_2(t)$ es constante. \square

Proposición 0.5.7. *Para las trayectorias acotadas del problema de los dos cuerpos, el cuadrado del periodo de revolución de la órbitas de \mathbf{r}_i es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita, para $i = 1, 2$.*

Demostración. Sea T_1 el periodo de la órbita de \mathbf{r}_1 , entonces a partir de (1.20), es fácil ver que $T_1 = T$, donde T es el periodo de la órbita de \mathbf{r} . Similarmente, usando (1.17) y (1.20), tenemos

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a,$$

donde a_1 es el semieje mayor de la órbita de \mathbf{r}_1 y a el de la órbita de \mathbf{r} .

Por la tercera ley de Kepler existe una constante C tal que $T^2 = Ca^3$, por lo tanto

$$T_1^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^3 Ca_1^3.$$

De forma completamente análoga tenemos

$$T_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^3 Ca_2^3.$$

□

Vale la pena notar que si $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$ entonces $\mathbf{r}_2 \rightarrow 0$ y $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$, recuperando la solución al problema de Kepler.

En resumen, este capítulo redujo el estudio del problema de Kepler al estudio de un sistema conservativo con un grado de libertad, y el problema de los dos cuerpos al problema de Kepler. Más adelante se verá que la reducción del problema de los dos cuerpos al problema de Kepler está íntimamente ligada a la estructura métrica de \mathbf{R}^3 y que no está disponibles en el plano hiperbólico.

El espacio hiperbólico

El espacio en que se analizará el problema de la atracción gravitacional es llamado el plano hiperbólico. Un modelo para este espacio es el *semi-plano de Poincaré* que se define como

$$\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$$

equipado con la métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Durante nuestro tratamiento trabajaremos indistintamente con la versión compleja de \mathbf{H} de modo que

$$\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

equipado con la métrica

$$ds^2 = \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(\text{Im}(z))^2}.$$

La primera sección de este capítulo trata de transformaciones de Möbius, que son fundamentales en el estudio del plano hiperbólico y en muchas áreas de la matemática. Primero se justifica el tratar a las transformaciones de Möbius como matrices con determinante 1; después de expresarán estas transformaciones como composición de funciones más sencillas, y se muestra que las transformaciones de Möbius actúan transitivamente en círculos y ternas de puntos. Posteriormente nos restringiremos a las transformaciones que preservan \mathbf{H} , se determinará cuáles son, y se demostrará que actúan transitivamente en círculos ortogonales al eje real.

La segunda sección trata propiamente del plano hiperbólico. Primero mostramos que las transformaciones de Möbius de \mathbf{H} en \mathbf{H} son isometrías. Usando

esto se determinan las geodésicas; y por último, usando estos dos resultados se determina el grupo completo de isometrías. El elemento técnico en estas dos secciones puede resultar pesado, así que sugiero tener en mente el objetivo de cada parte, y el significado de los resultados para hacerlas más comprensibles.

Por último se mencionan unas propiedades relevantes para nuestro problema: se da una estructura de grupo a \mathbf{H} donde además la multiplicación por un elemento fijo es una isometría. Después se determina el álgebra de Lie del grupo de isometrías; y se mencionan otros modelos del espacio hiperbólico bidimensional y de más dimensiones.

Este capítulo se basa en el libro de A. Lascurain [2].

0.6. Transformaciones de Möbius

Se define el espacio $\widehat{\mathbf{C}}$ como $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, con la topología de la compactificación de Alexandroff (ver [4]). Una transformación de Möbius es una función de $\widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ dada por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ con la aritmética

$$\frac{\infty}{z} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Para evaluar f en ∞ se reescribe

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}.$$

0.6.1. Definiciones y propiedades básicas

Observación 0.6.1. *Nótese que si $ad - bc = 0$ entonces f es la función constante $\frac{b}{d}$. Efectivamente, si $ad - bc = 0$ entonces $(ad - bc)z + bd = bd \Rightarrow adz + bd = cbz + bd$, de donde se sigue que $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{b}{d}$.*

De ahora en adelante consideraremos transformaciones de Möbius con $ad - bc \neq 0$.

Resulta útil identificar a las transformaciones de Möbius con matrices invertibles dos por dos con coeficientes complejos. El conjunto de dichas matrices se denota por $GL(2, \mathbf{C})$. La asociación ι está definida como

$$\iota(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Nota: es necesario considerar a las transformaciones de Möbius como arreglos formales y no como funciones para que ι sea una función univaluada.

Proposición 0.6.2. *La asociación ι es compatible con la composición, es decir, si $f(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ y $g(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ entonces $\iota(f \circ g) = \iota(f)\iota(g)$.*

Demostración. Se tiene

$$f \circ g(z) = \frac{a_1 \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + d_1} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

Por otro lado

$$\iota(f)\iota(g) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2+c_1b_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}$$

entonces $\iota(f \circ g) = \iota(f)\iota(g)$. □

De ahora en adelante se hablará indiferentemente de una transformación de Möbius y de su matriz asociada por ι .

Proposición 0.6.3. *Las transformaciones de Möbius no constantes son un grupo con la composición.*

Demostración. Claramente la composición es asociativa y la función identidad es el neutro de esta operación. Además, el inverso de la transformación de Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ es la transformación

$$z \mapsto \frac{\frac{1}{(ad-bc)}(dz-b)}{\frac{1}{(ad-bc)}(-cz+a)} = \frac{dz-b}{-cz+a},$$

ya que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. □

Las proposiciones anteriores demuestran que la función κ , de $GL(2, \mathbf{C})$ en las transformaciones de Möbius, definida como

$$\kappa \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (21)$$

es un homomorfismo de grupos.

Es fácil ver que las transformaciones de Möbius asociadas a las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, son la misma. Recíprocamente tenemos la siguiente proposición.

Proposición 0.6.4. *Si $f(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ y $g(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ entonces $f = g$ implica que*

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Demostración. Suponiendo que todos los coeficientes son distintos de 0 entonces

$$-\frac{d_1}{c_1} = f^{-1}(\infty) = g^{-1}(\infty) = -\frac{d_2}{c_2},$$

y análogamente

$$-\frac{b_1}{a_1} = f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = -\frac{b_2}{a_2}.$$

Escribiendo

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \mu$$

se sigue

$$\frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} = \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} \right),$$

por otro lado

$$\frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{a_2 + b_2}{c_2 + d_2} \right) = \frac{a_1 + b_1}{c_1 + d_1} = f(1) = g(1) = \frac{a_2 + b_2}{c_2 + d_2},$$

por lo que $\mu = \lambda$ y la razón entre todos los coeficientes es la misma. La demostración para coeficientes iguales a 0 es análoga. \square

Este resultado permite asociar a cada transformación de Möbius otra cuyas entradas sean un múltiplo de la original, y que tenga determinante 1; es decir si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = k \neq 0$, entonces la transformación

$$g(z) = \frac{\left(\frac{\sqrt{k}}{k}\right)az + \left(\frac{\sqrt{k}}{k}\right)b}{\left(\frac{\sqrt{k}}{k}\right)cz + \left(\frac{\sqrt{k}}{k}\right)d} \quad (22)$$

es tal que $g = f$ y la matriz asociada a g tiene determinante 1. El conjunto de matrices en $GL(2, \mathbf{C})$ con determinante 1 se denota por $SL(2, \mathbf{C})$.

Lema 0.6.5. *La función κ definida por (2.1) restringida a $SL(2, \mathbf{C})$, es decir $\kappa|_{SL(2, \mathbf{C})}$, es suprayectiva.*

Demostración. Sea

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

una transformación de Möbius con $ad - bc = k \neq 0$. De acuerdo con la ecuación (2.2), la matriz

$$\frac{\sqrt{k}}{k} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pertenece a $SL(2, \mathbf{C})$ y su imagen bajo κ es f . □

Proposición 0.6.6. *Las únicas matrices en $SL(2, \mathbf{C})$ cuya imagen bajo κ es la transformación identidad son $\pm Id$.*

Demostración. Sea $M \in SL(2, \mathbf{C})$ tal que su imagen bajo κ es la transformación identidad. Entonces $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, para algún $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Como $M \in SL(2, \mathbf{C})$ entonces $\lambda^2 = 1$ y $\lambda = \pm 1$. □

El resultado anterior se puede formular de la siguiente manera en el contexto de homomorfismos de grupos.

Lema 0.6.7. *El núcleo de $\kappa|_{SL(2, \mathbf{C})}$ es $\pm Id$.*

De este modo, llegamos a la siguiente caracterización del grupo de las transformaciones de Möbius.

Teorema 0.6.8. *El cociente $SL(2, \mathbf{C})/(\pm Id)$ es isomorfo al grupo de las transformaciones de Möbius.*

Demostración. Por el primer teorema fundamental de isomorfismos, el núcleo $\ker(\kappa|_{SL(2,\mathbf{C})})$ es un subgrupo normal de $SL(2,\mathbf{C})$ y el cociente

$$SL(2,\mathbf{C})/\ker(\kappa|_{SL(2,\mathbf{C})})$$

es isomorfo a la imagen de $\kappa|_{SL(2,\mathbf{C})}$. Por el Lema 2.1.5 la imagen de $\kappa|_{SL(2,\mathbf{C})}$ son todas las transformaciones de Möbius, y por la Proposición 2.1.6, el núcleo $\ker(\kappa|_{SL(2,\mathbf{C})}) = \pm\text{Id}$. \square

El grupo $SL(2,\mathbf{C})/(\pm\text{Id})$ es llamado $PSL(2,\mathbf{C})$. De ahora en adelante se hablará indistintamente del grupo de transformaciones de Möbius y $PSL(2,\mathbf{C})$.

0.6.2. Elementos generadores de $PSL(2,\mathbf{C})$

Durante esta sección, continuamente trabajaremos una transformación de Möbius T genérica que, como se vio en la sección anterior, puede ser escrita como

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1. \quad (23)$$

Definición 0.6.9.

- Una homotecia $h : \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ está definida como $h(z) = cz$ donde $c \in \mathbf{R}$ es positivo.
- Una traslación $\tau : \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ está definida como $\tau(z) = z + z_0$ donde $z_0 \in \mathbf{C}$.
- Una rotación $r : \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ está definida como $r(z) = e^{i\theta}z$ donde $\theta \in \mathbf{R}$.

Notemos que las funciones en la definición son transformaciones de Möbius. Las matrices asociadas a estas funciones, y a la función $z \mapsto \frac{-1}{z}$, respectivamente son :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{c} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{c}}{c} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 0.6.10. $PSL(2,\mathbf{C})$ es generado por traslaciones, homotecias, rotaciones, y la función $z \mapsto \frac{-1}{z}$.

Demostración. Sea $T \in PSL(2, \mathbf{C})$ dada por (2.3). Si $c = 0$ entonces T es de la forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

y como cualquier número complejo w se puede escribir como $\|w\|e^{i\arg(w)}$, la función $z \mapsto \frac{a}{d}z$ es la composición de una rotación con una homotecia. Luego T es la composición de una homotecia, una rotación, y una traslación.

Si $c \neq 0$ entonces

$$T(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{cb - ad}{c^2z + cd} = \frac{a}{c} + \frac{-1}{c^2z + cd}.$$

Así T es la composición de la función $z \mapsto \frac{-1}{z}$, homotecias, traslaciones, y rotaciones. \square

0.6.3. $PSL(2, \mathbf{C})$ actúa transitivamente en discos y ternas de puntos

En el contexto de este capítulo, se consideran circunferencias de radio infinito a las rectas, y como discos al interior de estas circunferencias, es decir, semiplanos.

Proposición 0.6.11. *La imagen de un disco bajo una transformación de Möbius es otro disco.*

Demostración. La estrategia es demostrar esta propiedad para los elementos del generador; si cada elemento del generador la tiene, $PSL(2, \mathbf{C})$ la tiene. Claramente las homotecias, traslaciones, y rotaciones tienen esta propiedad, sólo resta demostrarla para la función $z \mapsto \frac{-1}{z}$. Sea C el círculo descrito por la ecuación $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = D$, la imagen del punto finito $(x, y) \neq (0, 0)$ bajo la función $z \mapsto \frac{-1}{z}$ es

$$\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Sean

$$u = \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Nótese que

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

y por lo tanto

$$x = \frac{-u}{u^2 + v^2} \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación del círculo se obtiene

$$A \left(\frac{1}{u^2 + v^2} \right) + B \left(\frac{-u}{u^2 + v^2} \right) + C \left(\frac{v}{u^2 + v^2} \right) = D.$$

Dado que $u^2 + v^2 \neq 0$ la igualdad anterior es equivalente a

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv = A,$$

que es de nuevo la ecuación de un círculo.

En esta demostración se supuso que el círculo tiene radio finito y que no pasa por el origen, la demostración para círculos de radio infinito o que pasan por el origen es análoga. \square

Lema 0.6.12. *Si una transformación de Möbius T fija los puntos $0, 1$ e ∞ , T es la función identidad.*

Demostración. Nuevamente consideramos T dada por (2.3). Nótese que a no puede ser 0, porque si lo fuera entonces $\frac{b}{d} = T(0) = 0$, por lo que $b = 0$, y entonces $T \equiv 0$, contradiciendo la hipótesis.

Nótese también que d no puede ser 0 porque si lo fuera como $T(0) = 0 \neq \infty$, $b = 0$ (si b fuera distinto de 0, suponiendo $d = 0$ entonces $T(0) = \infty$) entonces $T \equiv \frac{a}{c}$ contradiciendo la hipótesis.

Como T fija al infinito, $\frac{a}{c} = T(\infty) = \infty$ y $c = 0$; como T fija al 0 $\frac{b}{d} = T(0) = 0$ y $b = 0$; como T fija al 1 entonces $a = d$. Por tanto T es la identidad. \square

Proposición 0.6.13. *Dados $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos existe una transformación de Möbius T tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, y $T(z_3) = \infty$.*

Demostración. Si ninguno de los puntos es ∞ , la transformación de Möbius

$$T(z) = \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \right) \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

cumple que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, y $T(z_3) = \infty$.

Si uno de los puntos es infinito, supóngase sin pérdida de generalidad que es z_2 , entonces la función

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

cumple que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, y $T(z_3) = \infty$. \square

Proposición 0.6.14. *Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ distintos entre sí, y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbf{C}$ distintos entre sí, existe una única transformación de Möbius T tal que $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$, $T(z_3) = w_3$.*

Demostración. Existencia: Sean S, W transformaciones de Möbius tales que

$$\begin{aligned} S(z_1) = 0, \quad S(z_2) = 1, \quad S(z_3) = \infty, \\ W(w_1) = 0, \quad W(w_2) = 1, \quad W(w_3) = \infty, \end{aligned}$$

entonces la transformación de Möbius $T = W^{-1} \circ S$ cumple que $T(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$ y hemos probado existencia. Para mostrar la unicidad supongamos que sean T_1 y T_2 transformaciones de Möbius tales que

$$S_1(z_i) = S_2(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Entonces tanto $W \circ T_1 \circ S^{-1}$ como $W \circ T_2 \circ S^{-1}$ fijan a los puntos $0, 1, e \infty$. Por lo tanto, por el Lema 2.1.12, se tiene

$$W \circ S_1 \circ T^{-1} = W \circ S_2 \circ T^{-1}$$

y por lo tanto $T_1 = T_2$. □

Corolario 0.6.15. *Si dos transformaciones de Möbius coinciden en tres puntos, son iguales.*

Demostración. Sean $T_1, T_2 \in PSL(2, \mathbf{C})$ que coinciden en $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ distintos. Entonces $T_1 \circ T_2^{-1}$ fija tres puntos distintos y por la Proposición 2.1.14 es la identidad, entonces $T_1 = T_2$. □

Proposición 0.6.16. *Las transformaciones de Möbius actúan transitivamente en la familia de círculos de \mathbf{C} , es decir, para cualesquiera círculos C_1 y C_2 existe una transformación de Möbius T tal que $T(C_1) = C_2$.*

Demostración. Sean $a_1, a_2, a_3 \in C_1$ distintos, $b_1, b_2, b_3 \in C_2$ distintos. Sea $T \in PSL(2, \mathbf{C})$ tal que

$$T(a_1) = b_1, \quad T(a_2) = b_2, \quad T(a_3) = b_3.$$

Entonces $T(C_1)$ es una circunferencia que contiene a b_1, b_2 , y b_3 , como esta circunferencia es única, $T(C_1) = C_2$. □

0.6.4. Transformaciones que preservan \mathbf{H}

Como nuestro interés es el semiplano superior, estudiaremos las transformaciones de Möbius que lo preserven. Éstas resultan ser aquellas transformaciones de la forma (2.3) con a, b, c, d reales. El conjunto de dichas transformaciones se denota por $PSL(2, \mathbf{R})$.

Lema 0.6.17. *Las transformaciones de Möbius son homeomorfismos de $\widehat{\mathbf{C}}$ en $\widehat{\mathbf{C}}$.*

Demostración. La estrategia nuevamente es demostrarlo para los elementos del generador, luego quedará demostrado para todas las transformaciones de Möbius. Las homotecias, rotaciones y traslaciones son continuas en ∞ (porque si $(z_n) \rightarrow \infty$ entonces $f(z_n) \rightarrow \infty$, donde f es una rotación, traslación u homotecia) y además claramente continuas en \mathbf{C} . Además, la inversa de una rotación es una rotación, la de una homotecia una homotecia, y la de una traslación una traslación; por tanto son estas funciones son biyectivas y continuas con inversa continua, por tanto homeomorfismos de $\widehat{\mathbf{C}}$ en $\widehat{\mathbf{C}}$.

Sea ι la función $z \rightarrow \frac{-1}{z}$. ι es una involución (es su propia inversa). ι es continua en 0 y en ∞ por que si $(z_n) \rightarrow \infty$ entonces $i(z_n) \rightarrow 0 = \iota(\infty)$; si $(z_n) \rightarrow 0$ entonces $i(z_n) \rightarrow \infty = \iota(0)$. Claramente ι es continua en cualquier otro punto en $\widehat{\mathbf{C}}$. Por lo tanto ι es un homeomorfismo. Por tanto cualquier transformación de Möbius también lo es. \square

Proposición 0.6.18. *Una transformación en $PSL(2, \mathbf{C})$ preserva el semiplano superior si y sólo si sus entradas son reales.*

Demostración. Sea $T \in PSL(2, \mathbf{R})$. Es fácil ver que

$$T(\widehat{\mathbf{R}}) = \widehat{\mathbf{R}},$$

donde $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ es la recta real extendida. Por biyectividad

$$T(\widehat{\mathbf{C}} \setminus \widehat{\mathbf{R}}) = T(\widehat{\mathbf{C}}) \setminus T(\widehat{\mathbf{R}}).$$

Usando $T(\widehat{\mathbf{C}}) = \widehat{\mathbf{C}}$ y $T(\widehat{\mathbf{R}}) = \widehat{\mathbf{R}}$ obtenemos

$$T(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) = \mathbf{C} \setminus T(\mathbf{R}).$$

Se sigue que $T(\mathbf{C} - \mathbf{R})$ tiene dos componentes conexas,

$$\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}, \quad \text{y} \quad \mathbb{H}^- = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im}(z) < 0\}.$$

Como T es continua en $\widehat{\mathbf{C}}$ la imagen de \mathbb{H}^+ (que es conexo) es un conjunto conexo, entonces

$$T(\mathbb{H}^+) \subseteq \mathbb{H}^+ \quad \text{ó} \quad T(\mathbb{H}^+) \subseteq \mathbb{H}^-;$$

y lo mismo es cierto para $T(\mathbb{H}^-)$. Como además

$$\mathbf{C} \setminus \mathbf{R} = T(\mathbb{H}^-) \cup T(\mathbb{H}^+)$$

entonces o bien

$$T(\mathbb{H}^+) = \mathbb{H}^+ \quad \text{o bien} \quad T(\mathbb{H}^+) = \mathbb{H}^-.$$

Para ver que $T(\mathbb{H}^+) = \mathbb{H}^+$ nótese que $T(i) \in \mathbb{H}^+$ porque

$$\text{Im}(T(i)) = \text{Im} \left(\frac{ai + b}{ci + d} \right) = \text{Im} \left(\frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} = \frac{1}{c^2 + d^2} > 0.$$

Por lo tanto $T(\mathbb{H}^+) = \mathbb{H}^+$.

Ahora probemos la implicación inversa. Sea $T \in PSL(2, \mathbf{C})$ dado por (2.3) y supongamos que T preserva el semiplano superior \mathbb{H}^+ . Mostraremos que a, b, c, d son reales. Dado que T es un homeomorfismo

$$T(\mathbb{H}^+) = \partial(T(\mathbb{H}^+)).$$

Dado que $\widehat{\mathbf{R}} = \partial\mathbb{H}^+$ tenemos $T(\widehat{\mathbf{R}}) = \widehat{\mathbf{R}}$.

Sea $\bar{T}(z) = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}}$ y sea $z \in \mathbf{R}$. Entonces

$$T(z) = \overline{T(z)} = \bar{T}(\bar{z}) = \bar{T}(z),$$

donde hemos usado que $T(z) \in \widehat{\mathbf{R}}$. Se sigue que T y \bar{T} coinciden a lo largo de toda la recta real. En particular coinciden en tres punto distintos y de acuerdo al Corolario 2.1.15 son iguales. Entonces

$$a = \bar{a}, \quad b = \bar{b}, \quad c = \bar{c}, \quad d = \bar{d}$$

ó

$$a = -\bar{a}, \quad b = -\bar{b}, \quad c = -\bar{c}, \quad d = -\bar{d},$$

es decir, a, b, c, d son reales o son imaginarios puros. Si fueran imaginarios puros entonces $T(i) \in \mathbb{H}^-$, porque

$$\text{Im}(T(i)) = \text{Im} \left(\frac{ai + b}{ci + d} \right) = \frac{(ai + b)(ci - d)}{c^2 + d^2} = -\frac{ad - bc}{c^2 + d^2} = -\frac{1}{c^2 + d^2} < 0.$$

Esto contradice que $T(\mathbb{H}^+) = \mathbb{H}^+$. Por lo tanto, a, b, c, d son reales, y $T \in PSL(2, \mathbf{R})$. \square

Proposición 0.6.19. $PSL(2, \mathbf{R})$ es generado por traslaciones por reales, homotecias por un real positivo, y la transformación $z \mapsto \frac{-1}{z}$.

Demostración. Procedemos de manera similar a 2.1.10. Sea $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ dado por (2.3). Si $c = 0$ entonces T es de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Notemos que en este caso $ad = 1$ y por lo tanto $\frac{a}{d} > 0$. Se sigue entonces que T es la composición de una homotecia por un real positivo y una traslación.

Si $c \neq 0$ entonces

$$T(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2z + cd} = \frac{a}{c} + \frac{-1}{c^2z + cd}.$$

Así T es la composición de la función $z \mapsto \frac{-1}{z}$, con homotecias por un real positivo y traslaciones. \square

0.6.5. El grupo $PSL(2, \mathbf{R})$ actúa transitivamente en la familia de círculos ortogonales al eje real

Proposición 0.6.20. Sea C_1 un círculo ortogonal al eje real, y $T \in PSL(2, \mathbf{R})$, entonces $T(C_1)$ es un círculo ortogonal al eje real.

Demostración. Es fácil ver que homotecias y traslaciones reales tienen esta propiedad. También es fácil ver que la función $z \mapsto \frac{-1}{z}$ tiene esta propiedad para círculos ortogonales al eje real que no pasan por el origen, porque la función es analítica en $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, por tanto conforme, y además preserva circunferencias y la recta real extendida. Para ver que la función $z \mapsto \frac{-1}{z}$ tiene esta propiedad para círculos que pasan por el origen, sea C un círculo con la contiene al origen; entonces C consta de todos los puntos $x + iy$ tales que $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ o lo que es lo mismo, $x^2 + y^2 - 2rx = 0$. La función $z \mapsto \frac{-1}{z}$ puede escribirse como $x + iy \mapsto u + iv$, donde

$$u = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Entonces $u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $x = \frac{-u}{u^2 + v^2}$, y sustituyendo y simplificando en la ecuación anterior se obtiene $u = \frac{1}{2r}$, que es la ecuación de una recta vertical en la nuevas coordenadas, es decir, un círculo ortogonal al eje real. \square

De ahora en adelante denotaremos el conjunto de los puntos en el eje imaginario positivo por $i\mathbf{R}^+$.

Lema 0.6.21. *Para cualquier circunferencia C existe una transformación de Möbius T tal que $T(C) = i\mathbf{R}^+$.*

Demostración. Si C es una recta vertical entonces existe una traslación que la transforma en $i\mathbf{R}^+$.

Si C es una circunferencia de radio r y centro en x_0 entonces la traslación por $-x_0$ seguida de la homotecia por $\frac{1}{r}$ transforma a C en el círculo unitario. Luego, la transformación

$$z \mapsto \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

pertenece a $PSL(2, \mathbf{R})$ y transforma al 1 en 0 y al -1 en ∞ . Por lo tanto transforma el círculo unitario en $i\mathbf{R}^+$. La composición de las tres funciones transforma a C en $i\mathbf{R}^+$. \square

Teorema 0.6.22. *El grupo $PSL(2, \mathbf{R})$ actúa transitivamente en esta familia de círculos ortogonales al eje real; es decir, si C_1, C_2 son círculos ortogonales al eje real existe $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ tal que $T(C_1) = C_2$.*

Demostración. Sean C_1 y C_2 dos círculos ortogonales al eje real, y T_1 y T_2 tales que

$$T_1(C_1) = i\mathbf{R}^+ \quad \text{y} \quad T_2(C_2) = i\mathbf{R}^+,$$

entonces $T_1^{-1} \circ T_2$ cumple que $T_1^{-1} \circ T_2(C_2) = C_1$. \square

0.7. Geodésicas e isometrías de \mathbf{H}

0.7.1. Isometrías de \mathbf{H}

En esta sección estudiaremos el grupo de isometrías de \mathbf{H} . Trabajaremos con nociones de geometría Riemanniana. Estas nociones se pueden consultar en [3].

Recuerde que denotamos \mathbf{H} al semiplano superior \mathbb{H}^+ equipado con la métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Es decir, si $u, v \in T_{(x,y)}\mathbf{H}$ entonces

$$\langle u, v \rangle_{(x,y)} := u^T \mathcal{G}(x, y) v \tag{24}$$

donde hemos identificado $T_{(x,y)}\mathbf{H}$ con \mathbf{R}^2 y $\mathcal{G}(x, y)$ denota la matriz

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Dada una curva suave $g : [t_0, t_1] \mapsto \mathbf{H}$ se define su longitud por

$$L(g) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle g'(t), g'(t) \rangle_{g(t)}} dt.$$

Dados dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ se define la distancia ρ entre ellos por

$$\rho(z_1, z_2) = \inf\{L(g) : g \text{ es una curva que conecta } z_1 \text{ con } z_2\}.$$

Esta definición de distancia hace de (\mathbf{H}, ρ) un espacio métrico.

Una curva g que conecta a z_1 y z_2 tal que

$$\rho(z_1, z_2) = L(g)$$

se llama una *geodésica que conecta a z_1 a z_2* .

Definición 0.7.1. Una función suave $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ es llamada una *isometría* si

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(\varphi(z_1), \varphi(z_2))$$

para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$

Si $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ es una función suave, y se cumple que

$$D\varphi(x, y)^T \mathcal{G}(\varphi(x, y)) D\varphi(x, y) = \mathcal{G}(x, y) \quad (26)$$

para todo $(x, y) \in \mathbf{H}$ entonces, mediante el uso de la regla de la cadena, puede mostrarse que para cualquier curva g que conecta a puntos $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ se tiene

$$L(g) = L(\varphi(g)).$$

Por lo tanto $\rho(z_1, z_2) = \rho(\varphi(z_1), \varphi(z_2))$ y φ es una isometría. Recíprocamente puede mostrarse que toda isometría satisface (2.6) (ver [3]).

A continuación identificamos algunas isometrías de \mathbf{H} .

Teorema 0.7.2. Las funciones en $PSL(2, \mathbf{R})$ y la función $z \rightarrow -\bar{z}$ son isometrías.

Demostración. Para las transformaciones $\tau(z) = z + x_0$, y $r(z) = -\bar{z}$ con $x_0 \in \mathbf{R}$ se tiene

$$D\tau(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Dr(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y estas matrices satisfacen (2.6).

Para una homotecia $h(z) = kz$ con $k \in \mathbf{R}^+$, se cumple

$$Dh(x, y) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

y por lo tanto

$$D\varphi(x, y)^T \mathcal{G}(\varphi(x, y)) D\varphi(x, y) = k^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{(ky)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ky)^2} \end{pmatrix} = \mathcal{G}(x, y).$$

Finalmente, la transformación $\iota(z) = -\frac{1}{z}$ se escribe como

$$\iota(x, y) = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

por lo cual

$$D\iota(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\mathcal{G}(\iota(x, y)) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo muestra que

$$D\iota(x, y)^T \mathcal{G}(\iota(x, y)) D\iota(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto se cumple (2.6) con $\varphi = \iota$.

Como todas las funciones en su generador son isometrías, todas las transformaciones en $PSL(2, \mathbf{R})$ son isometrías. \square

Proposición 0.7.3. *El grupo $PSL(2, \mathbf{R})$ actúa transitivamente en pares equidistantes de puntos en \mathbf{H} . Es decir, para cualesquiera dos pares de puntos $z_1, z_2, s_1, s_2 \in \mathbf{H}$ tales que $\rho(z_1, z_2) = \rho(s_1, s_2)$ existe $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ tal que $T(z_1) = s_1$ y $T(z_2) = s_2$.*

Demostración. Sean C_z y C_s los círculos ortogonales al eje real que pasan por z_1 y z_2 , s_1 y s_2 respectivamente. Por el Lema 2.1.21 existen $T_z, T_s \in PSL(2, \mathbf{R})$ tales que

$$T_z(C_z) = i\mathbf{R}^+ \quad \text{y} \quad T_s(C_s) = i\mathbf{R}^+$$

respectivamente. Sean

$$T_z(z_1) = ix_1, \quad T_z(z_2) = ix_2, \quad T_s(s_1) = iy_1, \quad T_s(s_2) = iy_2$$

con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$. Supóngase sin pérdida de generalidad que

$$x_2 > x_1 \quad \text{y} \quad y_2 > y_1.$$

Sean h_z y h_s las homotecias por un factor de $\frac{1}{x_1}$ y $\frac{1}{y_1}$ respectivamente. Sean

$$U_s = h_s \circ T_s \quad \text{y} \quad U_z = h_z \circ T_z.$$

Nótese que

$$U_z(z_1) = i \quad \text{y} \quad U_s(s_1) = i,$$

y que

$$U_s(C_s) = i\mathbf{R}^+ \quad \text{y} \quad U_z(C_z) = i\mathbf{R}^+.$$

Sea

$$U_s(s_2) = ia \quad \text{y} \quad U_z(z_2) = ib,$$

con $a, b \in \mathbf{R}$, nótese que $a, b > 1$. Como

$$\rho(i, ia) = \rho(i, ib),$$

y tanto a como b son mayores que 1, $a = b$, y entonces $U_s(s_2) = U_z(z_2)$. Por lo tanto, $U_s \circ U_z$ cumple que

$$U_s^{-1} \circ U_z(z_1) = s_1 \quad \text{y} \quad U_s^{-1} \circ U_z(z_2) = s_2.$$

□

0.7.2. Las geodésicas de \mathbf{H}

Proposición 0.7.4. *Si $z_1 = iy_1, z_2 = iy_2 \in i\mathbf{R}^+$ entonces existe una única geodésica de z_1 a z_2 que está contenida en el eje imaginario positivo.*

Demostración. Sea $g : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbf{H}$ tal que $g(t_1) = z_1, g(t_2) = z_2$ con $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ (g_1, g_2 funciones reales). Supondremos que $y_1 < y_2$ y que $\dot{g}_2(t) > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} L(g) &= \int_a^b \frac{1}{\operatorname{Im}(g(t))} \sqrt{\dot{g}_1(t)^2 + \dot{g}_2(t)^2} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{1}{g_2(t)} \dot{g}_2(t) dt \\ &= \left| \log \left(\frac{g_2(t_2)}{g_2(t_1)} \right) \right| \\ &= \left| \log \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \right|. \end{aligned} \tag{27}$$

Entonces si g es tal que $g_1 \equiv 0$, la longitud de g es mínima y g es una geodésica.

Para ver que esta geodésica es única, nótese que si $g_1(t) \neq 0$ para alguna $t \in [t_1, t_2]$ entonces $\dot{g}_1(t) \neq 0$ para alguna $t \in [t_1, t_2]$, entonces $L(g) > \left| \log \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \right|$. □

La idea de la prueba está ilustrada en la Figura. 2.2.2

Teorema 0.7.5. *Sea $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, entonces existe una única geodésica entre ellos y es el arco del círculo ortogonal al eje real que pasa por z_1 y z_2 .*

Demostración. Existencia: Sea $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ tal que $T(z_1), T(z_2) \in i\mathbf{R}^+$. Por la proposición anterior (Proposición (2.2.4)), la recta ortogonal al eje real que une $T(z_1)$ con $T(z_2)$ es una geodésica; sea γ esta geodésica. Por el teorema 2.2.2 $T^{-1}(\gamma)$ es una geodésica que une a z_1 con z_2 ; como $PSL(2, \mathbf{R})$ actúa transitivamente el círculos ortogonales al eje real, el arco de circunferencia ortogonal al eje real que une a z_1 con z_2 es una geodésica.

Unicidad Supóngase que existen dos geodésicas distintas, γ_1 y γ_2 que unen a z_1 con z_2 , entonces $T(\gamma_1)$ y $T(\gamma_2)$ son dos geodésicas distintas que unen a $T(z_1)$ con $T(z_2)$, contradiciendo la Proposición (2.2.4). □

La Figura 2.2.2 muestra algunas geodésicas de \mathbf{H} .

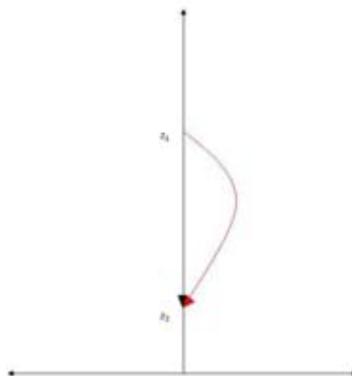


Figura 9: Una trayectoria vertical (negro) y una trayectoria que no está contenida en una recta vertical (rojo).

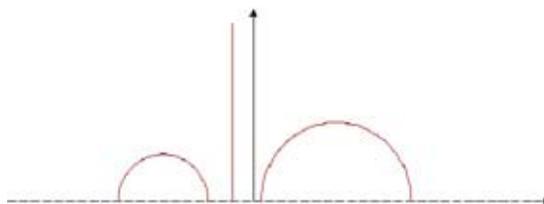


Figura 10: Algunas geodésicas de \mathbf{H} .

0.7.3. El grupo completo de isometrías

En esta sección se demostrará que cualquier isometría de \mathbf{H} es una transformación en $PSL(2, \mathbf{R})$ o la composición de una transformación en $PSL(2, \mathbf{R})$ con la función $z \mapsto -\bar{z}$. Para eso se necesitarán algunos lemas previos.

Lema 0.7.6. *Para cualquier $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ y cualesquiera $z, w \in \mathbf{H}$,*

$$\frac{\|z - w\|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} = \frac{\|T(z) - T(w)\|^2}{2 \operatorname{Im}(T(z)) \operatorname{Im}(T(w))}. \tag{28}$$

Demostración. Sea T dada por (2.3). Tenemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(T(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\
 &= \frac{1}{\|cz+d\|^2} \operatorname{Im}((az+b)(c\bar{z}+d)) \\
 &= \frac{1}{\|cz+d\|^2} \operatorname{Im}(ac\|z\|^2 + adz + bc\bar{z} + bd) \\
 &= \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{\|cz+d\|^2} \\
 &= \frac{\operatorname{Im}(z)}{\|cz+d\|^2}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{\|T(z) - T(w)\|^2}{2\operatorname{Im}(T(z))\operatorname{Im}(T(w))} &= \frac{\left\|\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d}\right\|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \|cz+d\|^2 \|cw+d\|^2 \\
 &= \frac{\|(az+b)(cw+d) - (aw+b)(cz+d)\|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \\
 &= \frac{\|(ad-bc)z - (ad-bc)w\|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \\
 &= \frac{\|z-w\|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

□

Lema 0.7.7. *Para cualesquiera $z, w \in \mathbf{H}$ se tiene que*

$$\cosh(\rho(z, w)) = 1 + \frac{\|z-w\|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \tag{31}$$

donde $\rho(z, w)$ denota la distancia hiperbólica entre z y w .

Demostración. Si $z = i, w = ki$ con $k > 1$, podemos parametrizar la geodésica que los conecta por

$$x(t) = 0, \quad y(t) = t, \quad 1 \leq t \leq k.$$

Por lo tanto, la longitud de dicha geodésica es

$$\begin{aligned}\rho(z, w) &= \int_1^k \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)^2} dt \\ &= \int_1^k \frac{1}{t} dt \\ &= \log(k).\end{aligned}\tag{32}$$

Entonces

$$\cosh(\rho(z, w)) = \frac{k + \frac{1}{k}}{2} = \frac{(k-1)^2}{2k} + 1 = \frac{\|i - ki\|^2}{2 \operatorname{Im}(i) \operatorname{Im}(ki)} + 1.$$

Si $z, w \in \mathbf{H}$ entonces existe $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ tal que $T(z) = i, T(w) = ki$, entonces,

$$\cosh(\rho(z, w)) = \cosh(\rho(i, ki)) = \frac{\|i - ki\|^2}{2 \operatorname{Im}(i) \operatorname{Im}(ki)} + 1.$$

Usando el Lema 2.2.6 concluimos (2.11). \square

Estos lemas son las herramientas técnicas necesarias para caracterizar el grupo de isometrías de \mathbf{H} .

Lema 0.7.8. *Si T es una isometría que fija a los elementos de $i\mathbf{R}^+$ entonces T es la identidad o T es la función $z \mapsto -\bar{z}$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbf{H}$ y $t > 0$. Como T es una isometría $\rho(it, z) = \rho(it, T(z))$ y por el Lema 2.2.6 tenemos

$$\frac{\|it - T(z)\|^2}{2 \operatorname{Im}(it) \operatorname{Im}(T(z))} = \frac{\|it - z\|^2}{2 \operatorname{Im}(it) \operatorname{Im}(z)}.$$

Sea $z = x + iy, T(z) = a + ib$, entonces

$$\frac{a^2 + (b-t)^2}{b} = \frac{x^2 + (y-t)^2}{y}, \quad \frac{y}{b} = \frac{x^2 + (y-t)^2}{a^2 + (b-t)^2}.$$

Como esta igualdad es cierta para todo $t \in \mathbf{R}$ entonces

$$\frac{y}{b} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^2 + (y-t)^2}{a^2 + (b-t)^2} = 1.$$

Entonces $y = b$, y por lo tanto $a = \pm x$.

Por tanto, si $z = x + iy$ entonces

$$T(z) = x + iy \quad \text{ó} \quad T(z) = -x + iy.$$

Nótese que si $T(z_0) = z_0$ para alguna $z_0 \in \mathbf{H}$ entonces necesariamente $T(z) = z$ para cualquier otra $z \in \mathbf{H}$, porque de lo contrario o la función T no es continua o no es inyectiva. Análogamente, si $T(z_0) = -\bar{z}_0$ para alguna z_0 entonces $T(z) = -\bar{z} \forall z$. \square

Lema 0.7.9. *Sea ϕ una isometría, entonces existe $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ tal que $T \circ \phi$ fija puntualmente al eje imaginario positivo.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.3 existe $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ tal que

$$T \circ \phi(i) = i \quad \text{y} \quad T \circ \phi(2i) = 2i.$$

Dado que $T \circ \phi(i\mathbf{R})$ es un círculo ortogonal al eje x , de lo anterior se sigue que $T \circ \phi(i\mathbf{R}) = i\mathbf{R}$. Es decir, $T \circ \phi$ fija a $i\mathbf{R}$ como conjunto. Mostraremos ahora que también lo fija puntualmente.

Usando nuevamente que $T \circ \phi$ es una isometría, entonces $\forall z \in i\mathbf{R}^+$ se cumple que

$$\rho(z, i) = \rho(T \circ \phi(z), i) \quad \text{y} \quad \rho(z, 2i) = \rho(T \circ \phi(z), 2i).$$

Sea

$$\rho_1 = \rho(z, i) \quad \text{y} \quad \rho_2 = \rho(z, 2i),$$

si $z \in i\mathbf{R}$ entonces

$$T \circ \phi(z) = \frac{i}{\exp \rho_1} \quad \text{ó} \quad T \circ \phi(z) = i \exp \rho_1,$$

y análogamente

$$T \circ \phi(z) = \frac{2i}{\exp \rho_2} \quad \text{ó} \quad T \circ \phi(z) = 2i \exp \rho_2;$$

donde hemos usado (2.12). y la única manera de que las dos condiciones se cumplan es que $T \circ \phi(z) = z$, por lo tanto $T \circ \phi(z) = z \forall z \in i\mathbf{R}^+$. \square

Teorema 0.7.10. *Si ϕ es una isometría de \mathbf{H} entonces $\phi \in PSL(2, \mathbf{R})$ o $\phi \circ r \in PSL(2, \mathbf{R})$, donde $r(z) = -\bar{z}$.*

Demostración. Sea $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ tal que $T \circ \phi$ fija puntualmente al eje imaginario (T existe por el lema 2.2.9), entonces por el Lema 2.2.8, $T \circ \phi$ es la identidad o r . Si $T \circ \phi$ es la identidad entonces $\phi \in PSL(2, \mathbf{R})$, si $T \circ \phi$ es la función r entonces $\phi \circ r = T^{-1} \in PSL(2, \mathbf{R})$. \square

0.8. Notas adicionales

0.8.1. Estructura de grupo

El espacio \mathbf{C} tiene una estructura de grupo con la suma; en el caso de \mathbf{H} no es tan fácil dar una estructura de grupo, pero es posible asociar a cada punto una isometría; de manera similar a como en \mathbf{R}^n a cada punto está naturalmente asociada la traslación.

Sea $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow PSL(2, \mathbf{R})$ definida como

$$\varphi(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{y}} \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Es decir, $\varphi(x + iy)(z) = yz + x$. Es fácil ver que la imagen de φ es el grupo de homotecias y traslaciones, y que además es inyectiva.

Definición 0.8.1. Se define la operación binaria $*$: $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ como $(x + iy) * (a + ib) = \varphi^{-1}(\varphi(x + iy)\varphi(a + ib))$.

Lema 0.8.2. La operación $*$ está bien definida, es decir $\varphi(x + iy)\varphi(a + ib) \in \text{Im}(\varphi)$.

Demostración.

$$\varphi(x + iy)\varphi(a + ib) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yb & ya + x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Como $y, b > 0$ $yb > 0$, y $\varphi(x + iy)\varphi(a + ib) \in \text{Im}(\varphi)$ □

A partir de la prueba obtenemos la siguiente expresión para la multiplicación en \mathbf{H}

$$(x + iy) * (a + ib) = (ya + x) + i(yb). \quad (35)$$

Observación 0.8.3. $(\mathbf{H}, *)$ es un grupo.

Demostración. En general, cuando existe una función biyectiva de un conjunto a un grupo, el conjunto hereda la estructura de grupo. Aquí demostraremos un caso particular.

- $*$ es asociativo porque

$$(z_1 * z_2) * z_3 = \varphi^{-1}(\varphi(z_1)\varphi(z_2)\varphi(z_3)) = z_1 * (z_2 * z_3).$$

- i es el elemento neutro porque

$$z * i = \varphi^{-1}(\varphi(z)\varphi(i)) = \varphi^{-1}(\varphi(z)\text{Id}) = z;$$

análogamente, $i * z = z$.

- $(-\frac{x}{y} + i\frac{1}{y})$ es el inverso de $(x + iy)$ porque

$$\begin{aligned} (x + iy) * \left(-\frac{x}{y} + i\frac{1}{y}\right) &= \varphi^{-1}(\varphi(x + iy)\varphi\left(-\frac{x}{y} + i\frac{1}{y}\right)) \\ &= \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \varphi^{-1}(\text{Id}) \\ &= i \end{aligned}$$

□

En conclusión, \mathbf{H} es isomorfo al grupo de traslaciones y homotecias.

0.8.2. Álgebra de Lie

El grupo de isometrías de \mathbf{H} es un grupo de Lie (un grupo con estructura de variedad diferenciable). El espacio tangente a la identidad de un grupo de Lie es llamado el Álgebra de Lie, denotado \mathfrak{g} . En esta sección mostraremos que el Álgebra de Lie de $SL(2, \mathbf{R})$ es el espacio de matrices con traza cero.

Proposición 0.8.4. *Sea B es una matriz de $n \times n$ de traza cero, entonces $\exp(Bt)$ tiene determinante 1.*

Demostración. Sean λ_i los eigenvalores de B tomados con multiplicidad y posiblemente complejos. De la ecuación

$$\exp(Bt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Bt)^n}{n!} \tag{36}$$

se sigue que los eigenvalores de $\exp(Bt)$ son

$$\alpha_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t)^n}{n!} = e^{\lambda_i t}. \tag{37}$$

Luego el determinante de $\exp(Bt)$ es

$$\det(\exp(Bt)) = \prod_i \alpha_i(t) = e^{(\sum_i \lambda_i)t} = e^0 = 1. \quad (38)$$

□

Lema 0.8.5. *El 1 es un valor regular de la función $\det : GL(2, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, y $SL(2, \mathbf{R})$ es una subvariedad de dimensión 3 de $GL(2, \mathbf{R})$.*

Demostración. Sea $A \in \det^{-1}(1)$, sea $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow GL(2, \mathbf{R})$ definida como $\gamma(t) = tA$, entonces $\det(\gamma(t)) = t^2 \det(A)$ y

$$2t = 2t \det(A) = \frac{d}{dt} \det(\gamma(t)) = D\det_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \quad (39)$$

□

entonces

$$2 = \frac{d}{dt} \det(\gamma(t))|_{t=1} = D\det_A(A), \quad (40)$$

por tanto $D\det_A$ es suprayectiva, y por el teorema de la sumersión (Véase [5]) 1 es un valor regular, y $SL(2, \mathbf{R}) = \det^{-1}(1)$ es una subvariedad de codimensión 1 y dimensión 3.

Proposición 0.8.6. *El Álgebra de Lie de $SL(2, \mathbf{R})$ es el espacio de matrices de 2×2 con traza cero.*

Demostración. Sea B una matriz de 2×2 con traza cero y sea $\gamma_B(t) = \exp(Bt)$, por el Lema 2.3.4, $\gamma_B(t) : \mathbf{R} \rightarrow SL(2, \mathbf{R})$, y además $\gamma_B(0) = \text{Id}$. Por tanto $\dot{\gamma}_B(0) \in \mathfrak{g}$, como $\dot{\gamma}_B(0) = B$, $\mathfrak{se}(2, \mathbf{R}) \subseteq \mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{se}(2, \mathbf{R})$ denota el espacio de matrices con traza cero.

Como $SL(2, \mathbf{R})$ es una subvariedad de dimensión 3, su álgebra de Lie tiene dimensión 3, como \mathfrak{g} tiene dimensión 3, $\mathfrak{se}(2, \mathbf{R}) = \mathfrak{g}$ □

0.9. Otros modelos para el plano hiperbólico y el espacio hiperbólico de dimensión 3

El semiplano superior \mathbf{H} es una variedad Riemanniana de dimensión 2 y curvatura constante -1 del llamado plano hiperbólico. Este espacio se

puede caracterizar como una *variedad de curvatura seccional constante -1 de dimensión 2 completa, conexa y simplemente conexa*. Cualquier variedad con estas propiedades en un modelo del plano hiperbólico y es isométrico a \mathbf{H} . Otro modelo usado frecuentemente es el disco de Poincaré-Beltrami del que hablaremos a continuación.

0.9.1. El disco de Poincaré-Beltrami

Denotemos por

$$\mathbf{D} = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

y consideremos la función $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{H}$ definida como

$$f(u, v) = \left(\frac{-2v}{1 + u^2 + v^2 - 2u}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2 - 2u} \right). \quad (41)$$

Es fácil ver que la condición $u^2 + v^2 < 1$ implica que

$$\frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2 - 2u} > 0$$

por lo que realmente la imagen de f está contenida en \mathbf{H} . La misma condición implica que el denominador en las expresiones anteriores no se anula por lo que f está bien definida. De hecho se tiene el siguiente lema.

Lema 0.9.1. *La función f es un difeomorfismo entre \mathbf{D} y \mathbf{H} .*

Demostración. Un cálculo directo muestra que f es invertible con inversa:

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{-1 + x^2 + y^2}{x^2 + (1 + y)^2}, \frac{-2x}{x^2 + (1 + y)^2} \right). \quad (42)$$

Puede verse que tanto f como f^{-1} son suaves. □

Dado que f es un difeomorfismo, induce una métrica en \mathbf{D} . La expresión de la métrica en estas coordenadas está contenida en el siguiente lema.

Lema 0.9.2. *La métrica inducida en \mathbf{D} por f dada por (2.21) en las coordenadas (u, v) es*

$$ds^2 = 4 \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2}. \quad (43)$$

Demostración. Tenemos

$$x = \frac{-2v}{1 + u^2 + v^2 - 2u}, \quad y = \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2 - 2u}, \quad (44)$$

por lo cual

$$\begin{aligned} dx &= \frac{4v(u-1)}{(1+u^2+v^2-2u)^2} du + \frac{-2(1+u^2-v^2-2u)}{(1+u^2+v^2-2u)^2} dv, \\ dy &= \frac{2(1+u^2-v^2-2u)}{(1+u^2+v^2-2u)^2} du + \frac{4v(u-1)}{(1+u^2+v^2-2u)^2} dv. \end{aligned}$$

Entonces

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 + u^2 + v^2 - 2u)^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = 4 \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2},$$

y la expresión de la izquierda es la métrica en \mathbf{H} . \square

La figura 2.4.1 es un grabado de M.C. Escher, completado en 1959, que muestra la geometría del disco de Poincaré.

Es natural utilizar coordenadas polares en \mathbf{D} . Para esto será necesario considerar la distancia hiperbólica de un punto arbitrario $(u, v) \in \mathbf{D}$ al $(0, 0)$. Denotamos dicha distancia por r . Notemos que como f es una isometría

$$r = \rho((x, y), (0, 1))$$

donde (x, y) están dados por (2.24) y hemos usado que $f(0, 0) = (0, 1)$. En la expresión anterior ρ denota la distancia riemanniana en \mathbf{H} . Usando (2.11) tenemos

$$\cosh(r) = \cosh(\rho((x, y), (0, 1))) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2y}. \quad (45)$$

En vista de (2.24) tenemos

$$\cosh(r) = \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}.$$

De lo anterior se deduce que

$$u^2 + v^2 = \frac{\cosh(r) + 1}{\cosh(r) - 1} = \tanh^2\left(\frac{r}{2}\right).$$



Figura 11: El grabado “Límite Circular 3” de Escher, una teselación del disco de Poincaré por peces isométricos.

En base a los cálculos anteriores, podemos usar coordenadas polares (r, θ) en \mathbf{D} definidas como

$$u = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \cos \theta, \quad v = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \sin \theta, \quad r > 0, \theta \in (0, 2\pi). \quad (46)$$

Las líneas coordenadas definidas por (r, θ) son las mismas que con las coordenadas polares usuales como lo ilustra la Figura 2.4.1. Las curvas $\theta = \text{cte}$ son líneas rectas que pasan por el origen y las curvas $r = \text{cte}$ son círculos centrados en el origen.

Teorema 0.9.3. *La métrica hiperbólica en las coordenadas polares (r, θ) se escribe como*

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2(r)d\theta^2. \quad (47)$$

Demostración. A partir de (2.26) tenemos

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{2} \cos(\theta) \operatorname{sech}^2\left(\frac{r}{2}\right) dr - \sin(\theta) \tanh\left(\frac{r}{2}\right) d\theta \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{2} \sin(\theta) \operatorname{sech}^2\left(\frac{r}{2}\right) dr + \cos(\theta) \tanh\left(\frac{r}{2}\right) d\theta; \end{aligned}$$

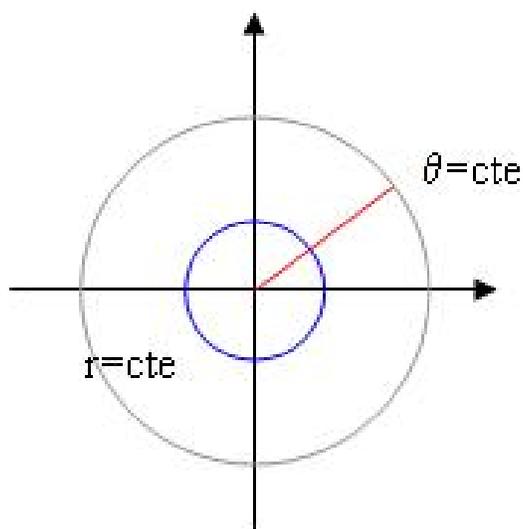


Figura 12: Curvas $\theta = \text{cte}$ y $r = \text{cte}$.

luego

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{\operatorname{sech}^4\left(\frac{r}{2}\right)dr^2 + \tanh^2\left(\frac{r}{2}\right)d\theta^2}{\operatorname{sech}^4\left(\frac{r}{2}\right)} \\
 &= dr^2 + 4 \cosh^2\left(\frac{r}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) d\theta^2 \\
 &= dr^2 + \sinh^2(r) d\theta^2.
 \end{aligned}$$

□

0.9.2. El espacio hiperbólico de dimensión 3

El semiplano de Poincaré admite la siguiente generalización de tres dimensiones. Definimos al espacio \mathbf{H}^3 como

$$\mathbf{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z > 0\}$$

equipado con la métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}. \quad (48)$$

Este es un modelo para el *espacio hiperbólico de dimensión 3* caracterizado intrínsecamente como la variedad riemanniana tres dimensional de curvatura constante -1 completa, conexa y simplemente conexa.

La versión tridimensional del disco de Poincaré-Beltrami es la bola

$$\mathbf{D}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 < 1\}$$

equipada con la métrica

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2 + dw^2)}{(u^2 + v^2 + w^2 - 1)^2}. \quad (49)$$

Los modelos \mathbf{H}^3 y \mathbf{D}^3 son isométricos. La isometría entre ambos está definida por las relaciones

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2v}{1 + u^2 + v^2 + w^2 - 2u}, \\ y &= \frac{-2w}{1 + u^2 + v^2 + w^2 - 2u}, \\ z &= \frac{1 - u^2 - v^2 - w^2}{1 + u^2 + v^2 + w^2 - 2u}. \end{aligned} \quad (50)$$

En analogía con el tratamiento que se hizo para el disco de Poincaré-Beltrami, es posible introducir coordenadas esféricas en \mathbf{D}^3 . Si denotamos por r la distancia del punto $(u, v, w) \in \mathbf{D}^3$ al $(0, 0, 0) \in \mathbf{D}^3$ tenemos

$$\begin{aligned} u &= \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \sin \varphi \cos \theta, & v &= \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \sin \varphi \sin \theta, \\ w &= \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \cos \varphi, & r &> 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi. \end{aligned} \quad (51)$$

La expresión para la métrica en estas coordenadas es

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2(r)(\sin^2 \varphi d\theta^2 + d\varphi^2). \quad (52)$$

La partícula libre en \mathbf{H}

Considérese una partícula en \mathbf{H} , con posición y velocidad inicial dadas y sin la acción de fuerzas externas. El problema que nos planteamos ahora es el de analizar la dinámica de esa partícula. A cada trayectoria γ está asociada una energía dada por el funcional

$$T = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}^2 dt, \quad (53)$$

donde

$$|\dot{\gamma}|_{\gamma(t)} = \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_{\gamma(t)}}.$$

Como consecuencia del principio de mínima acción, la partícula seguirá la trayectoria que sea un punto crítico de la energía, es decir, el funcional. En nuestro caso

$$|\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}^2 = \frac{1}{y^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

y por lo tanto la trayectoria γ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (ver por ejemplo [1]) para el *lagrangiano*

$$L = \frac{1}{2y^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (54)$$

Asociada con la estructura de grupo descrita en la sección 2.3.1, el sistema tiene una simetría respecto a la acción de \mathbf{H} en sí mismo. En la primera sección se introduce el sistema reducido, se hace una interpretación y se resuelve dicho sistema.

En la segunda sección se resuelve el sistema completo de ecuaciones para una partícula con condición inicial arbitraria y velocidad inicial de norma 1.

La tercera sección introduce el teorema de Noether, que afirma que si un lagrangiano admite una simetría entonces existe una cantidad conservada.

Este resultado es una generalización de la conservación del momento para lagrangianos invariantes por traslaciones, y el momento angular en lagrangianos invariantes por rotaciones. A partir de la formulación del Teorema de Noether para grupos uniparamétricos de simetrías para lagrangianos en \mathbf{R}^n , se demuestra una versión intrínseca para grupos de simetría generales y para lagrangianos en variedades riemannianas generales. A partir de esto calculamos las integrales de movimiento para el problema de la partícula libre en \mathbf{H} .

La cuarta sección trata de una partícula libre en variedades riemannianas en general, y demuestra que las trayectorias que sigue la partícula libre son geodésicas, generalizando la situación encontrada en las primeras dos secciones.

0.10. Ecuaciones reducidas y su solución

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano dado por la Ecuación (3.2) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{y^2} = 0 \quad (55)$$

y

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{y^2} = -\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{y^3}. \quad (56)$$

Para la solución del sistema introducimos las variables

$$u = \frac{\dot{x}}{y}, \quad v = \frac{\dot{y}}{y}. \quad (57)$$

Sustituyendo en la Ecuación (3.3) se obtiene

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{u}{y} = -\frac{2}{y^2}(\dot{y}u - \dot{u}y) = -\frac{2}{y}(uv - \dot{u}),$$

entonces

$$\dot{u} = uv. \quad (58)$$

De manera similar, sustituyendo en la ecuación (3.4) se obtiene

$$\frac{2}{y}(u^2 + v^2) = \frac{2}{y^2}(\dot{y}v - \dot{v}y) = \frac{2}{y}(v^2 - \dot{v})$$

y entonces

$$\dot{v} = -u^2. \tag{59}$$

El sistema resultante es

$$\dot{u} = uv, \quad \dot{v} = -u^2. \tag{60}$$

Antes de resolver el sistema analizaremos cualitativamente las soluciones. La Figura 3.1 ilustra la dinámica en el plano u, v .

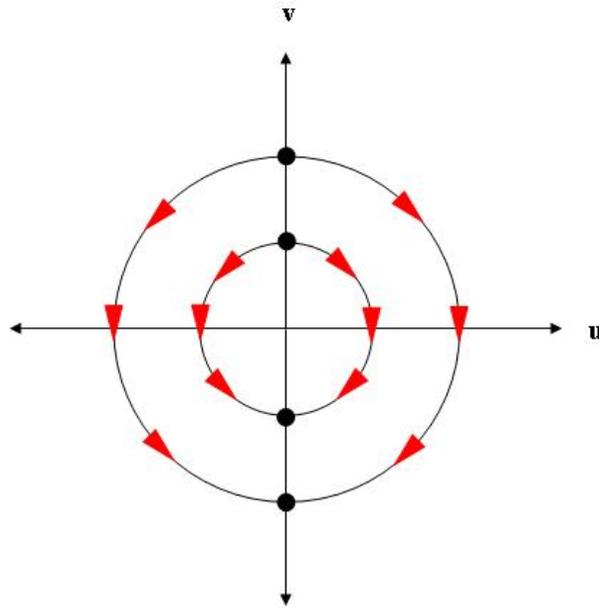


Figura 13: Plano fase u, v .

Respecto a la figura, nótese los siguientes puntos:

- La expresión $u^2 + v^2$ es constante, porque

$$\frac{d}{dt}(u^2 + v^2) = 2(ui + vi) = 2(uv^2 - uv^2) = 0, \tag{61}$$

por lo tanto

$$u^2 + v^2 = c^2 \tag{62}$$

para alguna constante $c \in \mathbf{R}$; y las soluciones están contenidas en círculos de radio c . Esta es la conservación de la energía escrita en el espacio reducido. Notar que la energía coincide con el cuadrado de la norma hiperbólica de la velocidad de la partícula.

- Los puntos donde $u = 0$ son puntos de equilibrio, por lo tanto los puntos en la recta vertical son puntos de equilibrio.
- Como u es una función real $\dot{v} = -u^2 < 0$, por lo tanto *los puntos* $(0, v)$ *son atractores si* $v < 0$ *y repulsores si* $v > 0$.

Los puntos $(0, v)$ corresponden a trayectorias contenidas en líneas verticales, recorridas hacia arriba si $v = \frac{\dot{y}}{y} > 0$ y hacia abajo si $v = \frac{\dot{y}}{y} < 0$. Del análisis anterior se puede concluir que hay soluciones contenidas en líneas verticales, y éstas son “estables” si se recorren hacia abajo, e inestables si se recorren hacia arriba.

Para resolver el sistema, consideraremos la trayectoria en el conjunto de energía constante c . Usando la Ecuación (3.10), la Ecuación (3.7) puede reescribirse como

$$\dot{v} = v^2 - c^2, \quad (63)$$

cuya solución es

$$v = -c \tanh(ct + k) \quad (64)$$

cuando $u \neq 0$.

A partir de la conservación de la energía tenemos $u^2 = c^2 - v^2$ y por lo tanto

$$u = \pm c \operatorname{sech}(ct + k). \quad (65)$$

Todo el análisis anterior es válido suponiendo que $u(0) \neq 0$. Si $u(0) = 0$ entonces $u(t) = 0$ para todo t y v es constante.

0.11. Solución explícita a las ecuaciones de reconstrucción

En esta sección encontraremos la solución explícita de las ecuaciones (3.3) y (3.4) para condiciones iniciales para las cuales la norma hiperbólica del vector velocidad $(\dot{x}(0), \dot{y}(0))$ vale 1.

Poniendo $c = 1$ en (3.12) y (3.13) tenemos

$$v = -\tanh(t + k), \quad u = \pm \operatorname{sech}(t + k), \quad (66)$$

Regresando a las variables x e y , la ecuación para y se vuelve

$$\dot{y} = vy = -\tanh(t + k)y, \quad (67)$$

cuya solución es

$$y = k_1 \cosh(k) \operatorname{sech}(t + k). \quad (68)$$

La ecuación para x se vuelve

$$\dot{x} = uy = \pm k_1 \cosh(k) \operatorname{sech}^2(t + k), \quad (69)$$

cuya solución es

$$x = k_2 + k_1 \cosh(k) \tanh(t + k), \quad (70)$$

tomando el signo $+$ en la Ecuación (3.17) o

$$x = k_2 - k_1 \cosh(k) \tanh(t + k). \quad (71)$$

tomando el signo $-$. Todo esto suponiendo $u \neq 0$; si $u = 0$ entonces la ecuación para y es

$$\dot{y} = cy, \quad (72)$$

cuya solución es $y = ke^{ct}$, y $x = 0$. Nótese que la trayectoria (x, y) describe geodésicas; éste el caso general de una partícula libre en una variedad riemanniana, como se verá más adelante.

Ahora elegiremos las constantes de integración para satisfacer las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -\sin(\theta), \quad \dot{y}(0) = \cos(\theta). \quad (73)$$

Nótese que θ es el ángulo que forma la velocidad inicial con la recta vertical, como lo muestra la figura (3.2). Además, las condiciones iniciales (Ecuación (3.21)) satisfacen que

$$\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 = 1, \quad (74)$$

Por tanto, las Ecuaciones (3.16) y (3.18) se vuelven

$$y = \cosh(k) \operatorname{sech}(t + k), \quad (75)$$

$$x = k_2 + \cosh(k) \tanh(t + k). \quad (76)$$

Por otro lado, la ecuación (3.14) se vuelve

$$\tanh(k) = v(0) = \frac{\dot{y}}{y}(0) = \cos(\theta), \quad (77)$$

por lo que

$$k = -\tanh^{-1}(\cos(\theta)). \quad (78)$$

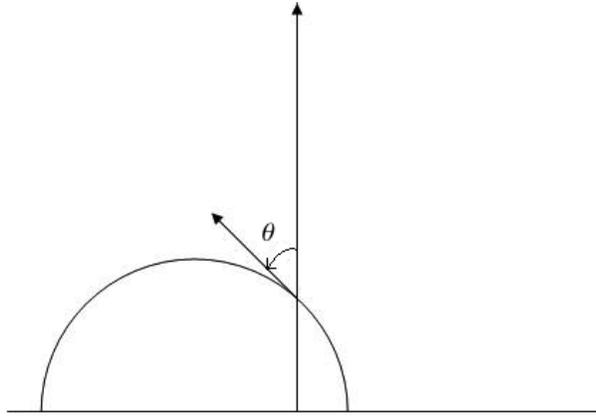


Figura 14: Ángulo medido desde la recta vertical.

Nuestro objetivo ahora es simplificar esta expresión, y para eso conviene expresar algunas funciones hiperbólicas de k en términos de θ :

$$\tanh(k) = \cos(\theta), \quad (79)$$

entonces

$$\operatorname{sech}^2(k) = 1 - \tanh^2(k) = \cos^2(\theta) + 1 = \sin^2(\theta), \quad (80)$$

y

$$\cosh(k) = \frac{1}{|\sin(\theta)|}; \quad (81)$$

por otro lado

$$\frac{\sinh(k)}{\cosh(k)} = \cos(\theta), \quad (82)$$

por lo que

$$\sinh(k) = \frac{\cos(\theta)}{|\sin(\theta)|}. \quad (83)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\cosh(k)}{\cosh(t+k)} \\
 &= \frac{\frac{1}{|\sin(\theta)|}}{\cosh(t)\cosh(k) + \sinh(t)\sinh(k)} \\
 &= \frac{\frac{1}{|\sin(\theta)|}}{\cosh(t)\frac{1}{|\sin(\theta)|} - \sinh(t)\frac{\cos(\theta)}{|\sin(\theta)|}},
 \end{aligned} \tag{84}$$

y

$$y(t) = \frac{1}{\cosh(t) - \cos(\theta)\sinh(t)}. \tag{85}$$

Para obtener una expresión para x , nótese que

$$0 = x(0) = k_2 + \cosh(k)\tanh(k) = k_2 - \frac{\cos(\theta)}{|\sin(\theta)|}, \tag{86}$$

por tanto

$$k_2 = \frac{\cos(\theta)}{|\sin(\theta)|}; \tag{87}$$

luego

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{\cos(\theta)}{|\sin(\theta)|} + \frac{\tanh(t+k)}{|\sin(\theta)|} \\
 &= \frac{\cos(\theta)}{|\sin(\theta)|} + \frac{\tanh(t) + \tanh(k)}{|\sin(\theta)|(1 + \tanh(t)\tanh(k))} \\
 &= \frac{\cos(\theta)}{|\sin(\theta)|} + \frac{\tanh(t) - \cos(\theta)}{|\sin(\theta)|(1 - \tanh(t)\cos(\theta))} \\
 &= \frac{\cos(\theta)(1 - \tanh(t)\cos(\theta)) + \tanh(t) - \cos(\theta)}{|\sin(\theta)|(1 - \tanh(t)\cos(\theta))} \\
 &= \frac{-\tanh(t)\cos^2(\theta) + \tanh(t)}{|\sin(\theta)|(1 - \tanh(t)\cos(\theta))} \\
 &= \frac{\sin^2(\theta)\tanh(t)}{|\sin(\theta)|(1 + \tanh(t)\cos(\theta))} \\
 &= -\frac{\sin(\theta)\tanh(t)}{1 - \tanh(t)\cos(\theta)} \\
 &= \frac{\sin(\theta)\sinh(t)}{-\cosh(t) + \sinh(t)\cos(\theta)}
 \end{aligned} \tag{88}$$

La solución es entonces

$$x(t) = \frac{\sin(\theta) \sinh(t)}{-\cosh(t) + \sinh(t) \cos(\theta)} \quad y(t) = \frac{1}{\cosh(t) - \cos(\theta) \sinh(t)}. \quad (89)$$

Dado que \mathbf{H} define una simetría del problema, su acción en sí misma define transformaciones que envían soluciones en soluciones. Así, usando (2.15) tenemos que si $(x_0, y_0) \in \mathbf{H}$ entonces

$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (y_0 x(t) + x_0, y_0 y(t))$$

es una solución que satisface

$$(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (x_0, y_0).$$

Un cálculo directo muestra que

$$(\dot{\tilde{x}}(0), \dot{\tilde{y}}(0)) = (-y_0 \sin \theta, y_0 \cos \theta).$$

0.12. Cantidades conservadas

Sea M una variedad Riemanniana y $L : TM \rightarrow \mathbf{R}$ un lagrangiano. Sea G un grupo de Lie que actúa en M , denotamos la acción de G como

$$\Psi : G \times M \rightarrow M, \quad \Psi(g, q) = g \cdot q.$$

Definición 0.12.1. *El Lagrangiano es invariante bajo la acción de G si*

$$L(Dg(q) \cdot v, g \cdot q) = L(v, q)$$

para todo $v \in T_q M$, $q \in M$.

Lema 0.12.2. *Si L es el Lagrangiano dado por la energía cinética riemanniana, es decir,*

$$L(v, q) = \frac{1}{2} |v|_q^2 = \frac{1}{2} g_{ij}(q) v^i v^j, \quad (90)$$

entonces el grupo de transformaciones que preservan L es el grupo de isometrías de M .

Demostración. \Leftarrow) Si f es una isometría entonces

$$L(v, q) = |v|_q^2 = |Df(q) \cdot v|_{f(q)}^2 = L(Df(q) \cdot v, f(q)). \quad (91)$$

\Rightarrow) Si f es una función que preserva el Lagrangiano, entonces la aplicación lineal $Df(q) = T_q M \rightarrow T_{f(q)} M$ preserva la norma de los vectores, por tanto

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_q &= \frac{1}{2}(|v + w|_q^2 - |v|_q^2 - |w|_q^2) \\ &= \frac{1}{2}(|Df(q) \cdot (v + w)|_{f(q)}^2 - |Df(q) \cdot v|_{f(q)}^2 - |Df(q) \cdot w|_{f(q)}^2) \\ &= \langle Df(q) \cdot v, Df(q) \cdot w \rangle_{f(q)}, \end{aligned} \quad (92)$$

y f es una isometría. \square

Lema 0.12.3. *Si L es un Lagrangiano de la forma $L(p, v) = \frac{1}{2}|v|_p^2 - U(p)$, $U : M \rightarrow \mathbf{R}$, y es invariante bajo la acción de G entonces G es un subgrupo del grupo de isometrías.*

Demostración. Sea $g \in G$, como $L(v, q) = L(Dg(q) \cdot v, g \cdot q)$ para todo $v \in T_q M$, en particular si $v = 0$ obtenemos $U(q) = U(g \cdot q)$, luego $|v|_q = |Dg(q) \cdot v|_{g \cdot q}$, y por un razonamiento similar al lema anterior, Dg es una aplicación que preserva el producto escalar, por tanto g actúa como isometría. \square

Partiremos del teorema de Noether en \mathbf{R}^n ([1]) que dice lo siguiente:

Teorema 0.12.4. *Sea $L(\dot{q}, q)$ un lagrangiano en \mathbf{R}^n , y h^s un grupo uniparamétrico que preserva L , entonces la cantidad*

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{dh^s q}{dt} \right|_{s=0} \quad (93)$$

es constante a lo largo de soluciones.

Definición 0.12.5. *Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G . Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ se define el generador infinitesimal de la acción ξ_M , que es un campo vectorial sobre M como*

$$\xi_M(q) = \left. \frac{d(\exp(\xi s) \cdot q)}{ds} \right|_{s=0}.$$

Teorema 0.12.6. *Sea L un Lagrangiano dado por $L(v, q) = \frac{1}{2}|v|_q^2 - U(q)$, donde $U : M \rightarrow \mathbf{R}$, entonces la cantidad $\langle \dot{q}, \xi_M(q) \rangle_q$ es constante a lo largo de las trayectorias.*

Demostración. En coordenadas locales escribimos:

$$q = (q_1, \dots, q_n), \quad v = v_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial q_n},$$

y el Lagrangiano como

$$L(q, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q) v_i v_j - U(q),$$

o de manera equivalente como

$$L(q, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_q - U(q).$$

Consideremos $\xi \in \mathfrak{g}$ fijo. Podemos definir un grupo uniparamétrico de transformaciones

$$\psi_s^\xi : M \rightarrow M$$

por

$$\psi_s^\xi(q) = \exp(s\xi) \cdot q.$$

Dado que

$$\{\exp(s\xi) : s \in \mathbf{R}\}$$

es un subgrupo uniparamétrico de G , se sigue que las transformaciones ψ_s^ξ dejan invariante a L . Por lo tanto, las hipótesis del Teorema (3.3.4) se cumplen y obtenemos que la cantidad

$$I_\xi(q, v) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i}(q, v) \left. \frac{d(\psi_s^\xi(q))_i}{ds} \right|_{s=0}$$

es constante a lo largo de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.

Esta expresión se puede interpretar de forma intrínseca notando que

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \sum_{j=1}^n g_{ij}(q) v_j$$

y que el campo vectorial ξ_M admite la expresión local

$$\xi_M(q) = \left. \frac{d(\psi_s^\xi(q))_i}{ds} \right|_{s=0} \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + \left. \frac{d(\psi_s^\xi(q))_i}{ds} \right|_{s=0} \frac{\partial}{\partial q_n}.$$

Así obtenemos

$$I_\xi(q, v) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q) v_j (\xi_M(q))_i = \langle v, \xi_M(q) \rangle_q.$$

□

0.12.1. El espacio hiperbólico

A continuación se explorará el caso de las cantidades conservadas en la partícula libre en el plano hiperbólico.

El álgebra de Lie de este grupo de Lie $PSL(2, \mathbf{R})$ es el espacio de matrices de 2×2 con traza 0, generado por

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Para ξ_1 ,

$$\exp(\xi_1 s) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}, \quad (95)$$

y $\exp(\xi_1)$ actúa mediante

$$\exp(\xi_1)(z) = \frac{e^{\frac{t}{2}} z}{e^{-\frac{t}{2}}} = e^t z. \quad (96)$$

Luego

$$\frac{d}{ds} e^s z = e^s z \quad \text{y} \quad \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^s z = z.$$

Entonces, si la posición de una partícula está dada por $x + iy$,

$$\frac{1}{y^2} ((x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y})) = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{y^2} \quad (97)$$

es constante a lo largo de la trayectoria.

Para ξ_3 , nótese que $\xi_3^2 = 0$, entonces la $\exp(\xi_3) = Id + \xi_3$ por tanto

$$\exp(\xi_3 s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (98)$$

y $\exp(\xi_3)$ actúa mediante

$$\exp(\xi_3 s)(z) = z + s. \quad (99)$$

Luego

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} z + s = 1.$$

Entonces

$$\frac{1}{y^2} ((1, 0) \cdot (\dot{x}, \dot{y})) = \frac{\dot{x}}{y^2} \quad (100)$$

es constante a lo largo de la trayectoria.

Para ξ_2 ,

$$\exp(\xi_2 s) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{2}) & -\sin(\frac{s}{2}) \\ \sin(\frac{s}{2}) & \cos(\frac{s}{2}) \end{pmatrix}, \quad (101)$$

y $\exp(\xi_2 s)$ actúa mediante

$$\exp(\xi_2 s) \cdot z = \frac{\cos(\frac{s}{2})z - \sin(\frac{s}{2})}{\sin(\frac{s}{2})z + \cos(\frac{s}{2})}. \quad (102)$$

Luego

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\cos(\frac{s}{2})z - \sin(\frac{s}{2})}{\sin(\frac{s}{2})z + \cos(\frac{s}{2})} \right) = -\frac{z^2 + 1}{2(\cos(\frac{s}{2}) + \sin(\frac{s}{2})z)^2}.$$

Por lo tanto

$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos(\frac{s}{2})z - \sin(\frac{s}{2})}{\sin(\frac{s}{2})z + \cos(\frac{s}{2})} \right) \right|_{t=0} = -\frac{x^2 - y^2 + 1 + i(2xy)}{2}.$$

Entonces, omitiendo un signo menos sin importancia, concluimos que

$$\frac{1}{y^2}((x^2 - y^2 + 1, 2xy) \cdot (\dot{x}, \dot{y})) = \frac{\dot{x}(x^2 - y^2 + 1) + 2xy\dot{y}}{y^2} \quad (103)$$

es constante a lo largo de la trayectoria.

0.13. La partícula libre en variedades riemannianas

El problema de la partícula libre puede plantearse en una variedad riemanniana cualquiera de la siguiente forma: considérese una partícula en una variedad riemanniana con energía cinética $K = \frac{1}{2}|\dot{q}(t)|_{q(t)}^2$ donde la posición está dada en cada punto por $p(t)$, y no actúa ninguna fuerza externa. Entonces el lagrangiano está dado por $L = \frac{1}{2}|\dot{q}(t)|_{q(t)}^2$.

Definición 0.13.1. Sea M una variedad riemanniana. Sean (q^1, \dots, q^n) coordenadas locales y sea

$$g_{ij}(q) dq^i \otimes dq^j$$

la representación de la métrica en estas coordenadas. Una curva $q : (t_0, t_1) \rightarrow M$ se llama una geodésica si cumple que

$$\ddot{q}^l = -\Gamma_{ij}^l(q) \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (104)$$

donde las funciones Γ_{ij}^l son llamados símbolos de Christoffel y están dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} - \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_l} \right). \quad (105)$$

En la fórmula anterior hemos se ha utilizado la notación de Einstein de suma sobre índices repetidos y $g^{kl}(q)$ es la matriz inversa de $g_{ij}(q)$.

En el resto de esta sección se continuará utilizando la notación de Einstein.

Observación 0.13.2. En el libro de Lee [3] se demuestra que las geodésicas así definidas son puntos críticos del funcional distancia. Por lo anterior, las curvas que sean geodésicas con la noción introducida al principio del capítulo por lo que localmente esta definición coincide con la noción de geodésicas introducidas al principio del capítulo 2.

Teorema 0.13.3. La partícula libre en variedades riemannianas sigue geodésicas de acuerdo a la Definición 3.4.1.

Demostración. Sea $(t_0, t_1) \subseteq \mathbf{R}$ y $q : (t_0, t_1) \rightarrow M$, entonces el lagrangiano está dado por

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(a) \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Luego

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = g_{ij} \dot{q}^i$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Por consiguiente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) = \dot{q}^i \frac{d}{dt} (g_{ik}) + g_{ik} \ddot{q}^i = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^i + g_{ik} \ddot{q}^i.$$

La ecuación de Lagrange resultante es

$$g_{ik} \ddot{q}^i + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

o equivalentemente

$$g_{lk}\ddot{q}^l = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Multiplicando por la matriz inversa g^{kl} resulta

$$\begin{aligned} \ddot{q}^l &= g^{kl} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - 2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j, \end{aligned}$$

donde en el último paso se renombraron índices mudos. Nótese que esta ecuación recupera la definición de símbolos de Christoffel de la Ecuación (3.53), y por tanto la Ecuación (3.52) para la geodésica. Por lo tanto la partícula libre sigue geodésicas. \square

El Problema de Kepler en \mathbb{H}

Este capítulo trata de la dinámica de una partícula sujeta a un potencial central gravitacional hiperbólico; se puede pensar como la dinámica de un sistema solar en el espacio hiperbólico.

La primera sección introduce herramientas técnicas necesarias para el estudio del problema: éstas son el disco de Poincaré-Beltrami y las coordenadas polares. Está aceptado [6] que las coordenadas polares son de gran utilidad en el problema de Kepler. El lagrangiano en el problema de Kepler es invariante por rotaciones y reflexiones, y una ventaja del disco de Poincaré-Beltrami y las coordenadas polares es que estas funciones tienen una expresión más sencilla.

La segunda sección plantea formalmente el problema de Kepler en el espacio hiperbólico. Se empieza con el problema real en 3 dimensiones, y se determina el potencial gravitacional, de manera que sea una función radial que resulte en un flujo constante a través de esferas hiperbólicas. Después se demuestra que el movimiento está restringido a un espacio hiperbólico bidimensional, justificando estudiar ese potencial en el espacio de dos dimensiones. Por último se plantean las ecuaciones de Euler-Lagrange en este espacio.

La tercera sección trata de la segunda ley de Kepler en el espacio hiperbólico. Por la invariancia del potencial por rotaciones, existe una cantidad conservada, llamada "momento angular" por analogía con el momento angular hiperbólico, y como consecuencia de la conservación del momento angular se tiene la segunda ley de Kepler. La segunda ley de Kepler hiperbólica es distinta de la Euclidiana en que la segunda afirma que la derivada del área barrida es constante, mientras que la primera se refiere a un factor no constante de ésta.

La cuarta sección usa la conservación del momento angular para reducir el problema a un campo conservativo unidimensional. En general, cuando

existe una cantidad conservada, es posible reducir un problema de n variables a uno de $n - 1$ variables. Posteriormente se hace un análisis cualitativo de las soluciones.

La quinta sección deduce fórmulas explícitas para el radio, el ángulo y el tiempo. Usando estas fórmulas se deduce que las trayectorias son cónicas hiperbólicas, es decir, se cumple la primera ley de Kepler. Usando las fórmulas también se demuestra la propiedad de Bertrand, es decir, que todas las órbitas acotadas son cerradas.

Por último se mencionan unos puntos más respecto al problema. Las secciones anteriores suponen que la posición y la velocidad no son colineales, en esta sección se trata el caso en que lo son, lo cual equivale a que el momento angular sea 0. Se menciona el problema de Kepler en el espacio esférico, con la motivación de estudiar el problema en un espacio de curvatura constante positiva tras haberlo estudiado en espacios de curvatura constante negativa y 0. Por último se analiza la tercera ley de Kepler, y por qué no es válida en el espacio hiperbólico.

La última sección menciona algunos aspectos del problema de los dos cuerpos. Primero se deducen las ecuaciones de movimiento, las simetrías y las cantidades conservadas. Después se discuten brevemente los equilibrios relativos, que son soluciones en que la distancia entre los cuerpos se mantiene constante.

0.14. Ecuaciones de movimiento del problema de Kepler

El problema de Kepler en \mathbf{H} consiste en el movimiento de una partícula cuya energía cinética está dada por la métrica hiperbólica y sobre el cual actúa una fuerza gravitatoria debida al potencial

$$U(r) = -k\coth(r).$$

donde r es la distancia al potencial. En el apéndice *A* se explica que la dependencia del potencial como la cotangente hiperbólica es la generalización natural del caso euclidiano. En el apéndice *B* se demuestra que nuestro tratamiento del problema en el espacio bidimensional \mathbf{H} es suficiente para comprender la dinámica del problema de Kepler en \mathbf{H}^3 .

De acuerdo a la expresión para la métrica hiperbólica en coordenadas polares dada en (2.27) tenemos que el Lagrangiano del problema es

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \sinh^2(r)\dot{\theta}^2) + k\coth(r). \quad (106)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son

$$\frac{d}{dt}(\sinh^2(r)\dot{\theta}) = 0, \quad (107)$$

y

$$\ddot{r} = \cosh(r) \sinh(r)\dot{\theta}^2 - k\operatorname{csch}^2(r). \quad (108)$$

Notamos que la primera ecuación es en realidad una ley de conservación. Esta ley es debida a que el Lagrangiano no depende explícitamente de θ . Es decir, es invariante bajo rotaciones. En analogía con el caso euclidiano, la cantidad conservada es llamada *momento angular* y la denotaremos por

$$M = \sinh^2(r)\dot{\theta}. \quad (109)$$

0.15. Segunda ley de Kepler en \mathbf{H}

Al ser \mathbf{H} una variedad riemanniana de dimensión 2, ésta hereda una forma de área de la métrica. Esta forma de área está caracterizada como la única con la propiedad de que el área determinada por el paralelogramo formado por dos vectores ortonormales es 1. Puede verse que en coordenadas polares esta forma de área está dada por

$$d\mathcal{A} = \sinh(r) dr \wedge d\theta.$$

Para nuestros propósitos será necesario considerar otra forma de área en \mathbf{H} . Definimos

$$d\mu = \cosh(r) d\mathcal{A}. \quad (110)$$

Mostraremos que una versión de la segunda ley de Kepler es válida en \mathbf{H} respecto de las áreas medidas con $d\mu$.

0.15.1. La segunda ley de Kepler

Sea $(r(t), \theta(t))$ una solución al problema de Kepler, (t_0, t_1) un intervalo de tiempo en el que r y θ son monótonas. Sean $r_0 = r(t_0)$, $\theta_0 = \theta(t_0)$. Para $t \in (t_0, t_1)$ se define la región

$$S(t) = \{(r, \theta) \in \mathbf{D} : 0 \leq r \leq r(\tau), \theta = \theta(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$$

que se ilustra en la figura. Definimos el área $A(t)$ de esta región calculada

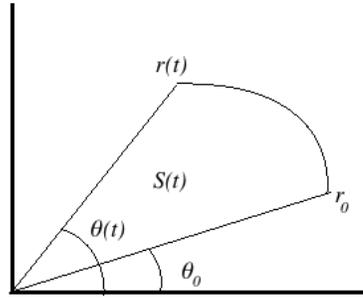


Figura 15: Definición de la región $S(t)$.

con respecto a la forma de área $d\mu$

$$A(t) = \int_{S(t)} d\mu.$$

Ahora sí podemos formular la versión de la segunda ley de Kepler que es válida en el espacio hiperbólico.

Teorema 0.15.1. *A lo largo de las soluciones se cumple que $\frac{dA}{dt}$ es constante.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} d\mu &= \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \int_0^{r(t)} \cosh(r) \sinh(r) dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \sinh^2(r(t)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sinh^2(r) \dot{\theta} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t M dt. \end{aligned} \tag{111}$$

Por lo tanto $\frac{dA}{dt} = M = cte.$

□

Nótese que la segunda ley de Kepler en el espacio hiperbólico es válida respecto de una forma de área que no coincide con la forma de área inducida por la métrica riemanniana. Esta es una diferencia importante con respecto al problema euclidiano.

0.16. Reducción a un sistema conservativo con un grado de libertad e investigación cualitativa de las órbitas

A partir de aquí se supondrá que $M \neq 0$.

Utilizando la conservación del momento angular (4.4) tenemos que (4.3) se puede escribir como

$$\ddot{r} = \frac{\cosh(r)}{\sinh^3(r)} M^2 - k \operatorname{csch}^2(r), \quad (112)$$

donde $M = \sinh^2(r)\dot{\theta}$. Luego, r se comporta como la posición de una partícula sujeta al potencial

$$V(r) = \frac{M^2}{2 \sinh^2(r)} - k \coth(r). \quad (113)$$

Para cualesquiera valores de $M \neq 0$ y k se cumple que

$$\lim_{r \rightarrow 0} V(r) = +\infty \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = -k. \quad (114)$$

Además $V(r)$ corta el eje de las abscisas en el único punto r_1 que satisface la ecuación

$$\frac{M^2}{k} = 2 \cosh(r_1) \sinh(r_1) = \sinh(2r_1). \quad (115)$$

Como hay una barrera de potencial en el 0, el movimiento tiene una cota inferior para cualquier nivel de energía.

Las órbitas tienen un comportamiento cualitativamente distinto dependiendo de si $\frac{M^2}{k} \in (0, 1)$ o no.

- Si

$$\frac{M^2}{k} \in (0, 1)$$

entonces la función

$$\frac{dV}{dr} = -M^2 \frac{\cosh(r)}{\sinh^3(r)} + k \operatorname{csch}^2(r) \quad (116)$$

tiene una única raíz en

$$r_0 = \tanh^{-1} \left(\frac{M^2}{k} \right), \quad (117)$$

y la función V tiene un único mínimo en ese punto, con el valor

$$W_0 = -\frac{1}{2} \left(M^2 + \frac{k^2}{M^2} \right). \quad (118)$$

En este caso el movimiento es periódico y acotado para valores de la energía E tales que $E \in (-W_0, -k)$; y no acotado para $E \in [-k, \infty)$. La figura 4.3 muestra este caso.

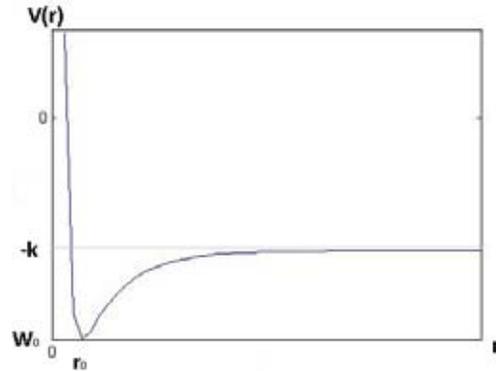


Figura 16: Gráfica de un potencial aumentado que permite la existencia de órbitas acotadas.

- Si

$$\frac{M^2}{k} \in [1, \infty)$$

entonces el potencial no tiene mínimos locales, sólo existen órbitas con energía $E > -k$, y todas las órbitas son no acotadas, con $\lim_{r \rightarrow \infty} r(t) = \infty$. La figura 4.3 muestra este caso.

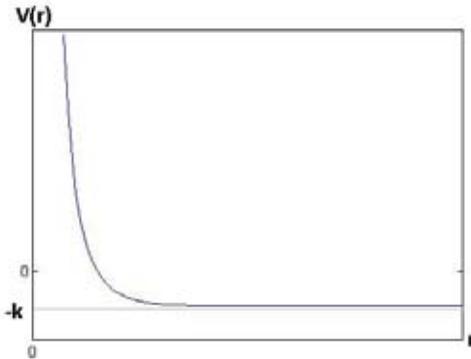


Figura 17: Gráfica de un potencial aumentado que no permite la existencia de órbitas acotadas.

Así hemos visto que en el espacio hiperbólico hay valores del momento angular para los cuales no existen órbitas periódicas. Esto contrasta con el caso euclidiano donde existen soluciones periódicas para cualquier valor del momento angular.

0.17. Integración explícita de las ecuaciones

El objetivo de esta sección es dar una fórmula exacta para las trayectorias seguidas por las soluciones del problema de Kepler en \mathbf{H} . La estrategia es exactamente análoga al problema euclidiano, es decir, usar la conservación de la energía y del momento angular.

La conservación de la energía E para el sistema conservativo con un grado de libertad (4.7) está dada por

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2\sinh^2(r)} - k\coth(r) = E, \quad (119)$$

donde hemos usado la expresión para el potencial $V(r)$ dado por (4.8).

Usando (4.4) puede comprobarse que E coincide con

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\sinh^2(r)\dot{\theta}}{2} - k\coth(r) \quad (120)$$

que es la energía del problema en \mathbf{H} .

Sea $(r(t), \theta(t))$ una solución al problema de Kepler, con $r_0 = r(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$ y $\dot{r}(0) > 0$. Como consecuencia de la ecuación (4.14) se tiene que

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2 \left(E + k \coth(r) - \frac{M}{2 \sinh^2(r)} \right)}. \quad (121)$$

Como consecuencia es posible conocer t como función de r :

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2 \left(E + k \coth(r) - \frac{M}{2 \sinh^2(r)} \right)}}. \quad (122)$$

De la ecuación (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \int_{t_0}^t \frac{M^2}{\sinh^2(r(t))} dt \\ &= \int_{r_0}^r \frac{M^2}{\sinh^2(r(t))} \frac{dt}{dr} dr \\ &= \int_{r_0}^r \frac{M dr}{\sinh^2(r) \sqrt{2 \left(E + k \coth(r) - \frac{M}{2 \sinh^2(r)} \right)}}. \end{aligned} \quad (123)$$

Haciendo el cambio de variable $u = \coth(r)$, la ecuación (4.18) se convierte en

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \int_{\coth(t_0)}^{\coth(t)} - \frac{du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2k}{M^2}u + 1 + \frac{2E}{M^2}}} \\ &= \arccos \left(\frac{u - \frac{k}{M^2}}{\sqrt{\frac{k^2}{M^4} + 1 + \frac{2E}{M^2}}} \right) \Bigg|_{\coth(r_0)}^{\coth(r)}. \end{aligned} \quad (124)$$

Introduciendo las variables

$$b = \frac{k}{M^2}, \quad f = \sqrt{\frac{k^2}{M^4} + 1 + \frac{2E}{M^2}} \quad (125)$$

la ecuación (4.19) se vuelve

$$\theta - \theta_0 = \arccos \left(\frac{u - b}{f} \right) \Bigg|_{\coth(r_0)}^{\coth(r)}. \quad (126)$$

Tomando $r_0 = \coth^{-1}(b + f)$ la ecuación (4.21) se vuelve

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \arccos\left(\frac{\coth(r) - b}{f}\right) - \arccos(1) \\ &= \arccos\left(\frac{\coth(r) - b}{f}\right),\end{aligned}\tag{127}$$

o, equivalentemente

$$\coth(r) = b + f(\cos(\theta - \theta_0)).\tag{128}$$

La Figura 4.4 muestra posibles trayectorias de una partícula para el problema de Kepler en el espacio hiperbólico.

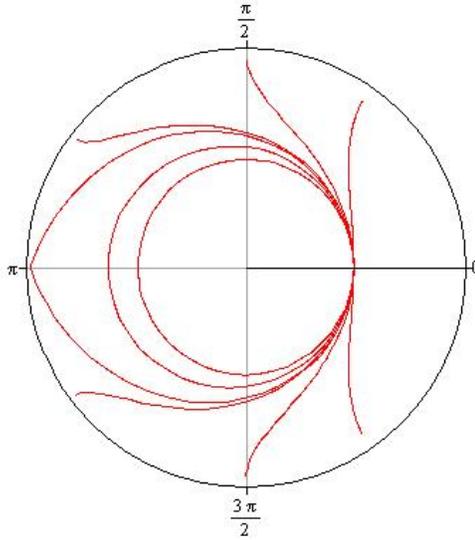


Figura 18: Posibles trayectorias en el problema de Kepler en el espacio hiperbólico

Observación 0.17.1. La constante f es siempre un número real porque $E > -\frac{1}{2}(\frac{k}{M^2} + M^2)$ porque, en el caso $\frac{M^2}{k} \in (0, 1)$ $-\frac{1}{2}(\frac{k}{M^2} + M^2)$ es el valor mínimo de la energía, y en el caso $\frac{M^2}{k} \in [1, \infty)$ porque $E > -k$, y entonces

$$-k > -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{M^2} + M^2\right)$$

si

$$\frac{k^2}{M^2} - 2k + M^2 > 0$$

si

$$\left(\frac{k}{M} - M\right)^2 > 0.$$

Observación 0.17.2. La suma $b + f > 1$, y por tanto $\coth^{-1}(b + f)$ es un número real positivo. Se puede verificar esta desigualdad separando en los casos

$$1 \quad \frac{M^2}{k} < 1 \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2}(M^2 + \frac{k^2}{M^2}) < E < -k,$$

$$2 \quad \frac{M^2}{k} < 1 \quad \text{y} \quad -k \leq E,$$

$$3 \quad 1 \leq \frac{M^2}{k}$$

Tomando $D = \frac{1}{b}$ y $e = \frac{f}{b}$ se obtiene la ecuación

$$\tanh(r) = \frac{D}{1 + e \cos \theta} \quad (129)$$

0.17.1. Propiedad de Bertrand

Las soluciones tienen una propiedad importante llamada propiedad de Bertrand: todas las órbitas acotadas son cerradas. Pocos potenciales centrales tienen esta propiedad.

Proposición 0.17.3. Todas las soluciones acotadas al problema de Kepler son cerradas.

Demostración. Nótese que si las órbitas son acotadas entonces

$$E < -k < -M^2 < \frac{-M^2}{2},$$

luego

$$\frac{M^2}{k} < 1$$

y en consecuencia

$$e = \frac{M^2}{k} \sqrt{\frac{k^2}{M^4} + 1 + \frac{2E}{M^2}} < 1, \quad (130)$$

Nótese también que

$$f < b - 1; \quad (131)$$

porque $E + k < 0$, por tanto

$$\frac{2(E + k)}{M^2} < 0,$$

por tanto

$$\frac{k^2}{M^4} + 1 + \frac{2E}{M^2} < \frac{k^2}{M^4} + 1 - \frac{2k}{M^2},$$

por tanto

$$\sqrt{\frac{k^2}{M^4} + 1 + \frac{2E}{M^2}} < \frac{k}{M^2} - 1,$$

y $f < b - 1$.

Esto significa que $1 + e \cos(\theta - \theta_0) \neq 0$ para todo θ . Además,

$$\begin{aligned} \frac{D}{1 + e \cos \theta} &\leq \frac{D}{1 - e} \\ &= \frac{\frac{1}{b}}{1 - \frac{f}{b}} \\ &= \frac{1}{b + f}; \end{aligned} \quad (132)$$

y como consecuencias de (4.26),

$$\frac{D}{1 + e \cos \theta} \in (0, 1)$$

y por tanto

$$\tanh^{-1} \left(\frac{D}{1 + e \cos \theta} \right)$$

es un real positivo y las soluciones están definidas para todo $\theta \in \mathbf{R}$.

Considérese la función $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{H}$ dada en coordenadas polares como $g(\theta) = (\theta, r(\theta))$. La gráfica de las soluciones es el conjunto $g(\mathbf{R})$. Como $r(\theta)$ es un función periódica de periodo 2π , g también lo es, y entonces $g(\mathbf{R}) = g([0, 2\pi])$; como g es continua $g([0, 2\pi])$ es compacto, por tanto cerrado, y por tanto las órbitas acotadas son cerradas. \square

0.17.2. Primera ley de Kepler

¿Es válida la primera ley de Kepler en el espacio hiperbólico? Es decir, ¿son estas órbitas elipses hiperbólicas? La definición de una elipse hiperbólica es análoga a la de una elipse euclidiana: una *elipse hiperbólica* es conjunto de puntos en el disco de Poincaré (o en \mathbf{H}^2) tales que la suma de las distancias a dos puntos llamados focos es constante.

Proposición 0.17.4. *Una elipse con uno de sus focos en el origen y otro en el punto $(-u_0, 0)$ con $u_0 > 0$ está dada en coordenadas polares por*

$$\tanh(r) = \frac{D}{1 + e \cos \theta}, \quad (133)$$

donde $e, D > 0$, $D < 1$, y $e < 1 - D$.

La estrategia de la demostración será usar las fórmulas conocidas para obtener una expresión para la suma de las distancias en coordenadas polares.

Demostración. Sea d la suma de las distancias a los focos. Para evitar casos degenerados supondremos que la suma de las distancias a los focos es mayor que la distancia entre los focos, es decir (véase la Ecuación (2.25)),

$$d > \rho((-u_0, 0)(0, 0)) = \cosh^{-1} \left(\frac{1 + u_0^2}{1 - u_0^2} \right). \quad (134)$$

Sea $(u, v) \in \mathbf{D}$. El primer paso es obtener una fórmula para la distancia entre (u, v) y $(-u_0, 0)$, lo cual se consigue sustituyendo las fórmulas dadas por (2.24)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{-2v}{1 + u^2 + v^2 - 2u} & \operatorname{Im}(z) &= \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2 - 2u} \\ \operatorname{Re}(w) &= 0 & \operatorname{Im}(w) &= \frac{1 - u_0^2}{1 + u_0^2 + 2u_0} \end{aligned}$$

en la expresión para la distancia entre dos puntos en el semiplano (2.2.7)

$$\cosh(z, w) = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{\|z - w\|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} \right), \quad (135)$$

resultando en la fórmula

$$\rho_D((u, v)(-u_0, 0)) = \cosh^{-1} \left(\frac{u_0^2 + u^2 u_0 + v^2 u_0^2 + 4u_0 u + 1 + u^2 + v^2}{(-1 + u_0^2)(-1 + u^2 + v^2)} \right), \quad (136)$$

donde ρ_D denota la distancia entre dos puntos en el disco de Poincaré.

Luego, sustituyendo las expresiones (2.26)

$$u = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \cos \theta, \quad v = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \sin \theta \quad (137)$$

en (4.31) se obtiene la expresión

$$\cosh^{-1}\left(-\frac{\cosh(r) + u_0^2 \cosh(r) + 2u_0 \cos \theta \sinh(r)}{-1 + u_0^2}\right) \quad (138)$$

para la distancia del punto (r, θ) al punto $(-u_0, 0)$, que en coordenadas polares se escribe como (u_0, π) .

De la definición de elipse se sigue que

$$\cosh^{-1}\left(-\frac{\cosh(r) + u_0^2 \cosh(r) + 2u_0 \cos \theta \sinh(r)}{-1 + u_0^2}\right) + r = d,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\cosh(r) + u_0^2 \cosh(r) + 2u_0 \cos \theta \sinh(r)}{1 - u_0^2} &= \cosh(d - r) \\ &= \cosh(r) \cosh(d) - \sinh(r) \sinh(d) \end{aligned}$$

y

$$\frac{1 + u_0^2 + 2u_0 \cos \theta \tanh(r)}{1 - u_0^2} = \cosh(d) - \tanh(r) \sinh(d).$$

Despejando $\tanh(r)$ resulta

$$\tanh(r) = \frac{-1 - u_0^2 + \cosh(d) - \cosh(d)u_0^2}{2u_0 \cos \theta + \sinh(d) - \sinh(d)u_0^2}.$$

Haciendo

$$D = \frac{-1 - u_0^2 + \cosh(d) - \cosh(d)u_0^2}{\sinh(d) - \sinh(d)u_0^2} \quad e = \frac{2u_0}{\sinh(d) - \sinh(d)u_0^2}$$

se recupera la Ecuación (4.28).

Sólo queda verificar que $e, D > 0$, $D < 1$, y $e < 1 - D$.

- La constante $e > 0$, porque $u_0 \in (0, 1)$, por tanto

$$\sinh(d) - \sinh(d)u_0^2 > 0,$$

luego

$$\frac{2u_0}{\sinh(d) - \sinh(d)u_0^2} > 0$$

- La constante $D > 0$ porque, como consecuencia de la desigualdad (4.30) se tiene que

$$\cosh(d) > \frac{1 + u_0^2}{1 - u_0^2},$$

luego

$$\cosh(d) - u_0^2 \cosh(d) > 1 + u_0^2,$$

y

$$-1 - u_0^2 + \cosh(d) - u_0^2 \cosh(d) > 0,$$

por consiguiente se sigue que $D > 0$.

- La constante $e < 1$ porque, como consecuencia de la desigualdad 4.30 se tiene que

$$\sinh(d) > \frac{2u_0}{1 - u_0^2},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{2u_0}{\sinh(d) - \sinh(d)u_0^2} &< \frac{2u_0}{\sinh(d)(1 - u_0^2)} \\ &< \frac{2u_0}{\frac{2u_0}{1 - u_0^2}(1 - u_0^2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- La constante $e < 1 - D$ sii

$$\frac{2u_0}{\sinh(d) - \sinh(d)u_0^2} < 1 - \frac{-1 - u_0^2 + \cosh(d) - \cosh(d)u_0^2}{\sinh(d) - \sinh(d)u_0^2}$$

sii

$$u_0^2 + 1 + \cosh(d)u_0^2 - \cosh(d) < \sinh(d) - u_0^2 \sinh(d) - 2u_0$$

sii

$$0 < -u_0^2 - 1 - \cosh(d)u_0^2 + \cosh(d) + \sinh(d) - u_0^2 \sinh(d) - 2u_0,$$

además

$$\begin{aligned} & -u_0^2 - 1 - \cosh(d)u_0^2 + \cosh(d) + \sinh(d) - u_0^2 \sinh(d) - 2u_0 \\ &= -u_0^2 - 1 + (1 - u_0^2) \cosh(d) + (1 - u_0^2) \sinh(d) - 2u_0 \\ &< -u_0^2 - 1 + (1 - u_0^2) \frac{1 + u_0^2}{1 - u_0^2} + (1 - u_0^2) \frac{2u_0}{1 - u_0^2} - 2u_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto $e < 1 - D$.

□

Nótese que la fórmula para las soluciones (Ecuación 4.24) cumple que $e, D > 0$, $D < 1$, y $e < 1 - D$ cuando las soluciones son acotadas (véase la sección 4.4.1); por tanto las soluciones acotadas son elipses.

0.18. Notas adicionales

0.18.1. El caso $M = 0$

¿Qué ocurre cuando $M = 0$? esta condición equivale a que $\sinh^2(r)\dot{\theta} = 0$, y por tanto $\dot{\theta} \equiv 0$, es decir, el ángulo es constante; y para que esto ocurra, r_0 y \dot{r}_0 deben ser colineales.

El sistema de ecuaciones se reduce a

$$\dot{\theta} = 0, \quad \ddot{r} = -k\text{csch}^2(r), \quad (139)$$

y de la ecuación 4.14 se tiene de

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = k\text{coth}(r) + E. \quad (140)$$

Hay varios comportamientos posibles:

Si $E > -k$ y la velocidad inicial es hacia afuera ($\dot{r}_0 > 0$) entonces como $\frac{1}{2}\dot{r}^2 = k\text{coth}(r) + E$ es siempre positivo la partícula se aleja del centro del

potencial con velocidad siempre mayor a $\sqrt{k + E}$ y llega al infinito en tiempo infinito y con velocidad $\sqrt{k + E}$.

Si $E = -k$ y la velocidad es hacia afuera entonces la partícula se aleja del centro del potencial y llega al infinito en tiempo infinito y con velocidad 0.

Si $E < -k$ (nótese que esto implica $\frac{M^2}{k} < 1$) y la velocidad inicial es hacia afuera entonces la partícula se aleja del centro del potencial hasta alcanzar su afelio en el punto

$$r_{max} = \coth^{-1} \left(\frac{-E}{k} \right) \quad (141)$$

y después se acerca al centro del potencial con rapidez creciente; alcanzándolo en tiempo finito y con velocidad infinita.

Si la velocidad inicial es hacia adentro la partícula alcanza el centro del potencial en tiempo finito y con velocidad infinita.

0.18.2. La tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler en el espacio euclidiano se refería a una relación entre el semieje mayor de las órbitas elípticas y el periodo de revolución. En el espacio hiperbólico definimos el *semieje mayor* de una órbita elíptica como

$$a = \frac{1}{2} \left(\tanh^{-1} \left(\frac{D}{1+e} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{D}{1-e} \right) \right), \quad (142)$$

como se ve en la Figura 4.5.2. La estrategia para deducir la relación entre el semieje y el periodo será la misma que en el caso euclidiano: calcular el área de la elipse de dos maneras, una como función del periodo y otra como función del semieje. A diferencia del caso euclidiano, no se usará la forma de área inducida por la métrica, sino la forma $d\mu$, porque con esta forma es cierta la segunda ley de Kepler.

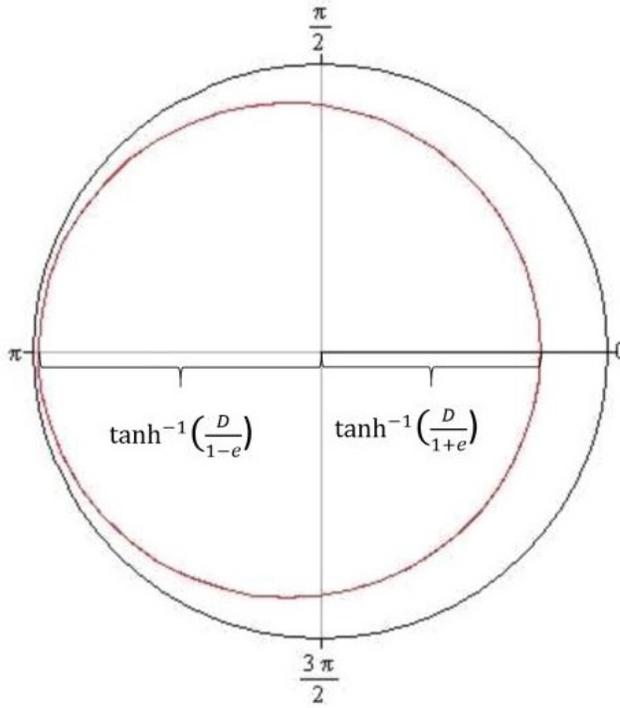


Figura 19: Semieje mayor de una elipse hiperbólica.

Sea A el área de la elipse medida con $d\mu$, entonces

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r(\theta)} d\mu = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r(\theta)} \cosh(r) \sinh(r) dr d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sinh^2 r d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \sinh^2 r \dot{\theta} dt \\
 &= \frac{1}{2} MT,
 \end{aligned} \tag{143}$$

donde T denota el periodo de la órbita.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sinh^2 r d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sinh^2 \left(\tanh^{-1} \left(\frac{D}{1+e \cos(\theta)} \right) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\left(\frac{D}{1+e \cos(\theta)} \right)^2}{1 - \left(\frac{D}{1+e \cos(\theta)} \right)^2} d\theta \\
&= \frac{1}{2} D\pi \frac{-\sqrt{D^2 - 2D + 1 - e^2} + \sqrt{D^2 + 2D + 1 - e^2}}{\sqrt{D^2 - 2D + 1 - e^2} \sqrt{D^2 + 2D + 1 - e^2}} \\
&= \frac{1}{2} D\pi \left(\frac{1}{\sqrt{D^2 - 2D + 1 - e^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + 2D + 1 - e^2}} \right)
\end{aligned} \tag{144}$$

Sea

$$x = \tanh(2a) = \frac{\left(\frac{D}{1+e}\right) + \left(\frac{D}{1-e}\right)}{1 + \left(\frac{D}{1+e}\right)\left(\frac{D}{1-e}\right)} = \frac{2D}{1 - e^2 + D^2}.$$

Nótese que

$$\frac{2D}{x} = 1 - e^2 + D^2$$

y que

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2D}{x} + 2D}} = \frac{1}{\sqrt{D^2 + 2D + 1 - e^2}}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2D}{x} - 2D}} = \frac{1}{\sqrt{D^2 - 2D + 1 - e^2}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} D\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2D}{x} - 2D}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{2D}{x} + 2D}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{D} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x} - 2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x} + 2}} \right)
\end{aligned} \tag{145}$$

Sustituyendo $D = \frac{1}{b} = y$ y $b = \frac{k}{M^2}$ se sigue que

$$A = \frac{1}{2} \frac{M}{\sqrt{k}} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x} - 2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x} + 2}} \right).$$

Igualando esta ecuación con la Ecuación (4.38) se sigue que

$$T = \frac{1}{\sqrt{k}} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x} - 2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x} + 2}} \right).$$

0.19. El problema de los dos cuerpos

0.19.1. Ecuaciones de movimiento

Considérense dos partículas de masas m_1 y m_2 en \mathbf{H}^2 que interactúan entre sí mediante atracción gravitacional. El potencial que describe físicamente esta situación es

$$V(d) = -km_1m_2 \coth(d) \quad (146)$$

donde d es la distancia entre las partículas. La razón es que este potencial resulta en una fuerza (gradiente) que apunta en la dirección de la geodésica y tiene la magnitud de la fuerza gravitacional. El espacio de configuraciones es $Q = \mathbf{H} \times \mathbf{H} \setminus \Delta$ con la métrica producto, donde $\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{H} \times \mathbf{H} : x = y\}$ es el conjunto de colisiones. El lagrangiano resultante en coordenadas (x_1, y_1, x_2, y_2) con $y_1, y_2 > 0$ es

$$L = \frac{1}{2} \left(m_1 \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}{y_1^2} + m_2 \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}{y_2^2} \right) - V(d). \quad (147)$$

Observación 0.19.1. *La distancia hiperbólica d entre dos puntos $x + iy, a + ib \in \mathbf{H}$ satisface que*

$$d = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{(x - a)^2 + (b - y)^2}{2by} \right) \quad (148)$$

Demostración. Véase el lema (2.2.7). □

Observación 0.19.2. Para cualquier número real x se cumple que

$$\coth(\cosh^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (149)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \coth(\cosh^{-1}(x)) &= \frac{\cosh(\cosh^{-1}(x))}{\sinh(\cosh^{-1}(x))} \\ &= \frac{\cosh(\cosh^{-1}(x))}{\sqrt{(\cosh(\cosh^{-1}(x)))^2 - 1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (150)$$

□

Usando estos dos resultados se obtiene una fórmula para el potencial gravitacional:

$$V = -km_1m_2 \frac{(x-a)^2 + b^2 + y^2}{\sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2)((x-a)^2 + (y+b)^2)}}. \quad (151)$$

Las ecuaciones de Lagrange resultantes para este sistema son

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= m_i \frac{2\dot{x}_i \dot{y}_i}{y_i} + \frac{8km_i m_j (x_j - x_i) y_i^4 y_j^2}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2][(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ m_i \ddot{y}_i &= m_i \frac{\dot{y}_i^2 - \dot{x}_i^2}{y_i} + \frac{km_i m_j 4y_i^3 y_j^2 ((x_i - x_j)^2 + y_j^2 - y_i^2)}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2][(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (152)$$

Nótese que no hay puntos de equilibrio.

0.19.2. Simetrías y cantidades conservadas

Definición 0.19.3. Sea $f : M \rightarrow M$, se define la acción diagonal $F : M \times M \rightarrow M \times M$ como

$$F(x, y) = (f(x), f(y)). \quad (153)$$

Lema 0.19.4. *El grupo de difeomorfismos $PSL(2, \mathbf{R})$ actuando diagonalmente preservan el Lagrangiano.*

Demostración. Sea $T \in PSL(2, \mathbf{R})$ y $(z_1, z_2, v_1, v_2) \in TQ$, con $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ entonces, en virtud de que T es una isometría,

$$\begin{aligned}
& L(z_1, z_2, v_1, v_2) \\
&= \frac{1}{2} (m_1(|v_1|_{z_1}^2 + m_2|v_2|_{z_2}^2) + km_1m_2 \coth(d(z_1, z_2))) \\
&= \frac{1}{2} (m_1(|Dg_{z_1}v_1|_{g(z_1)}^2 + m_2|Dg_{z_2}v_2|_{g(z_2)}^2) + km_1m_2 \coth(d(g(z_1), g(z_2)))) \\
&= L(g(z_1), g(z_2), Dg_{z_1}v_1, Dg_{z_2}v_2).
\end{aligned} \tag{154}$$

□

Lema 0.19.5. *Sea $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2)$ una solución al problema de los dos cuerpos, entonces las cantidades*

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1}{y_1^2} + \frac{x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2}{y_2^2}, \\
N_2 &= \frac{\dot{x}_1}{y_1^2} + \frac{\dot{x}_2}{y_2^2}, \\
N_3 &= \frac{\dot{x}_1(x_1^2 - y_1^2 + 1) + 2x_1y_1\dot{y}_1}{y_1^2} + \frac{\dot{x}_2(x_2^2 - y_2^2 + 1) + 2x_2y_2\dot{y}_2}{y_2^2}
\end{aligned} \tag{155}$$

son constantes a lo largo de las soluciones.

Demostración. Sea G el grupo de Lie de automorfismos de Q que preservan el Lagrangiano, sea \mathfrak{g} su álgebra de Lie, y sean $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}$ definidos como

$$\xi_h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \xi_e = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{156}$$

Para cada ξ_i los generadores infinitesimales η_i son

$$\eta_i(z_1, z_2) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp(\xi_i)(z_1, z_2) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\exp(\xi_i)z_1, \exp(\xi_i)z_2). \tag{157}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\eta_1(z_1, z_2) &= (z_1, z_2), \\
\eta_2(z_1, z_2) &= (z_1^2 + 1, z_2^2 + 1), \\
\eta_3(z_1, z_2) &= ((1, 0), (1, 0)).
\end{aligned} \tag{158}$$

Luego, por el teorema de Noether,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \langle \eta_1(z_1, z_2), (\dot{z}_1, \dot{z}_2) \rangle = \frac{x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1}{y_1^2} + \frac{x_2 \dot{x}_2 + y_2 \dot{y}_2}{y_2^2}, \\
N_2 &= \langle \eta_2(z_1, z_2), (\dot{z}_1, \dot{z}_2) \rangle = \frac{\dot{x}_1}{y_1^2} + \frac{\dot{x}_2}{y_2^2}, \\
N_3 &= \langle \eta_3(z_1, z_2), (\dot{z}_1, \dot{z}_2) \rangle \\
&= \frac{\dot{x}_1(x_1^2 - y_1^2 + 1) + 2x_1 y_1 \dot{y}_1}{y_1^2} + \frac{\dot{x}_2(x_2^2 - y_2^2 + 1) + 2x_2 y_2 \dot{y}_2}{y_2^2}.
\end{aligned} \tag{159}$$

son constantes a lo largo de las soluciones. \square

0.19.3. Equilibrios relativos

Un equilibrio relativo para el problema de los dos cuerpos es una solución en que la distancia entre las partículas se mantiene constante (la definición general de equilibrio relativo no es ésta). En el espacio euclidiano, los equilibrios relativos son soluciones en donde los cuerpos se mueven en círculos con el centro de masa en el origen. Para una exposición más detallada de este tema se puede consultar [8].

Definición 0.19.6. *Dadas dos partículas de masas m_1 y m_2 en el plano hiperbólico, se define su centro de masa m como el único punto en la geodésica que une las dos partículas y cumple que*

$$m_1 \sinh(2d_1) = m_2 \sinh(2d_2),$$

donde d_1 y d_2 son las distancias del centro de masa a la primera y segunda partícula respectivamente.

Definición 0.19.7. *Dos partículas m_1, m_2 están en configuración canónica si están en el círculo unitario, su centro de masa es el punto i , y m_1 está en el primer cuadrante mientras que m_2 está en el segundo.*

Considérense dos partículas de masas m_1 y m_2 en configuración canónica con posiciones z_1 y z_2 . Hay dos equilibrios relativos:

- Uno es

$$\varphi(t) = \exp(\omega \xi_h t)(z_1, z_2)$$

donde ξ_h está dado por (4.51) y

$$\begin{aligned}\omega^2 &= k \frac{\sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2)}{(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1))^2} \frac{\sin^2(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} m_2 \\ &= k \frac{\sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2)}{(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1))^2} \frac{\sin^2(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} m_1.\end{aligned}\quad (160)$$

Ésta es una solución en que las partículas siguen líneas rectas que pasan por el origen, alejándose del ideal. El centro de masa permanece en la recta $x = 0$ y tiende, igual que las soluciones, a infinito. La Figura 4.6.3 ilustra esta situación.

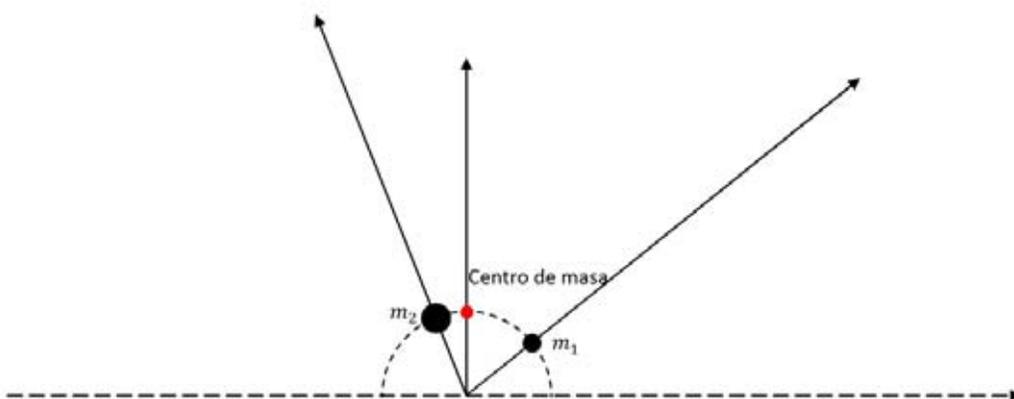


Figura 20: Equilibrio hiperbólico.

- Otro es

$$\varphi(t) = \exp(\omega \xi_e t)(z_1, z_2)$$

donde ξ_h está dado por (4.51) y ω satisface (4.55). Éstas son soluciones en que las partículas se mueven en círculos, el círculo que describe la partícula de mayor masa es más pequeño y está en el interior. Son soluciones periódicas y el centro de masa permanece fijo en el centro de las circunferencias. La Figura 4.6.3 ilustra esta situación.

Las soluciones hiperbólicas son inestables. Conceptualmente, lo que pasa es que en estas soluciones existe un balance entre dos fuerzas: la atracción

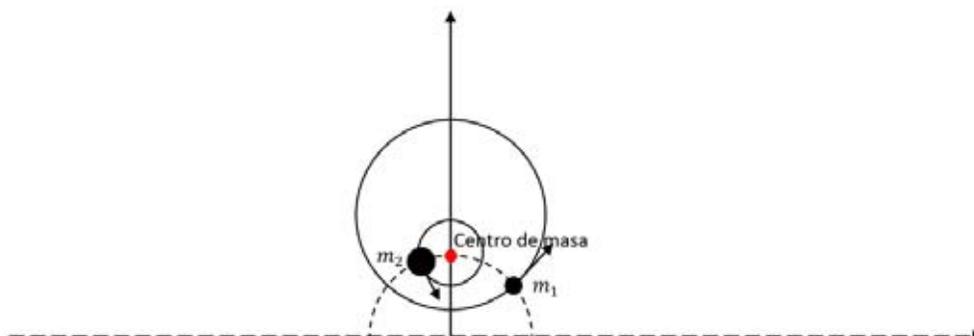


Figura 21: Equilibrio elíptico.

gravitacional, que hace que las partículas se acerquen; y la inercia, que hace que las partículas sigan geodésicas y se alejen. Si se perturba el equilibrio, por más pequeña que sea la perturbación, en un caso será dominante el efecto de la inercia y las partículas se alejarán, y en otro será dominante el efecto de la atracción gravitacional, y las partículas se acercarán.

Las soluciones elípticas son estables cuando las partículas están lo suficientemente cercanas. En este caso una perturbación pequeña hará que las partículas se muevan en oscilaciones alrededor del equilibrio relativo.

Appendices

Elección del Potencial

.1. El área de la esfera en \mathbf{H}^3

En la sección 2,4 se demostró que se pueden elegir coordenadas polares (r, θ, φ) para el espacio hiperbólico de dimensión 3 y que la métrica hiperbólica en estas coordenadas está dada por

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2(r)(\sin^2(\varphi)d\theta^2 + d\varphi^2). \quad (161)$$

Recordamos que $r > 0$ denota la distancia al "origen" mientras que $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$ son "ángulos esféricos". En el modelo de la bola de Poincaré \mathbf{D}^3 el origen coincide con el centro de la bola mientras que en el modelo del semiespacio \mathbf{H}^3 el origen es el punto $(0, 0, 1)$.

En nuestra formulación del problema de Kepler, el origen descrito anteriormente es el centro del potencial. La métrica hiperbólica induce una forma de volumen en el espacio hiperbólico. Dicha forma de volumen está caracterizada por asignar volumen 1 al cualquier paralelepípedo formado por vectores tangentes ortonormales [3].² En coordenadas polares, dicha forma de volumen en \mathbf{H}^3 está dada por

$$dV = \sinh^2(r) \sin(\varphi) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi. \quad (162)$$

Como en el espacio euclidiano, se define una esfera de radio r con centro en $p \in \mathbf{H}^3$ como

$$S_r = \{x \in \mathbf{H}^3 : \rho(x, p) = r\}, \quad (163)$$

donde ρ denota la distancia hiperbólica.

²Estrictamente la forma de volumen está definida módulo la elección de una orientación del espacio

Sea S_{r_0} la esfera de radio r_0 y centro en el origen. La forma de volumen dV induce una forma de área dA_{r_0} en S_{r_0} a través de la contracción por el vector $\frac{\partial}{\partial r}$ seguida por la restricción a S_{r_0} . Un cálculo directo muestra que

$$dA_{r_0} = \sinh^2(r_0) \sin(\varphi) d\theta \wedge d\varphi. \quad (164)$$

El área (hiperbólica) de la esfera S_0 es entonces

$$\begin{aligned} A_{r_0} &= \int_{S_{r_0}} dA_{r_0} \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sinh^2(r_0) \sin(\varphi) d\theta d\varphi \\ &= 4\pi \sinh^2(r_0). \end{aligned} \quad (165)$$

.2. Elección del potencial

Sea $U(r, \theta, \varphi)$ el potencial del problema de Kepler. Para que físicamente haga sentido, U debe cumplir las siguientes condiciones:

i) U es radialmente simétrico, es decir $U = U(r)$

ii) El flujo del campo gravitacional a través de esferas es constante, es decir

$$\int_{S_r} \langle \nabla U \cdot \mathbf{n} \rangle dA_r = cte, \quad (166)$$

para toda r , donde \mathbf{n} es la normal unitaria a la esfera S_r y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto definido por la métrica riemanniana.

El gradiente de U tiene interpretación en términos de la métrica riemanniana y está dado por

$$\nabla U = (g_{ij})^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right). \quad (167)$$

donde (g_{ij}) es la matriz de la métrica expresada en las coordenadas (r, θ, φ) . Es decir

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2(r) \sin^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2(r) \end{pmatrix}.$$

En la expresión anterior el vector ∇U está escrito respecto de la base $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$.

Por lo tanto

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (168)$$

Notemos que el vector unitario \mathbf{n} coincide con $\frac{\partial}{\partial r}$. Utilizando lo anterior, la condición *ii*) se traduce a

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \langle \nabla U, \mathbf{n} \rangle dA_r &= \int_{S_r} \frac{\partial U}{\partial r}(r) dA_r \\ &= \frac{\partial U}{\partial r}(r) \int_{S_r} dA_r \\ &= 4\pi \sinh^2(r) \frac{\partial U}{\partial r}(r) \\ &= c. \end{aligned} \quad (169)$$

En consecuencia

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{c}{4\pi \sinh^2(r)} \quad (170)$$

y por lo tanto

$$U(r) = \int \frac{c}{4\pi \sinh^2(r)} dr = -4\pi c \coth(r). \quad (171)$$

Tomando $k = -4\pi c$, obtenemos la expresión con la que se trabaja en la tesis

$$U(r) = -k \coth(r). \quad (172)$$

CIV

Reducción de \mathbf{H}^3 a \mathbf{H}^2

Considérese el problema de Kepler en el espacio hiperbólico tridimensional con el modelo de la bola: la métrica riemanniana dada por (2.28) y con el lagrangiano $L(v, q) = \frac{1}{2}|v|_q^2 + k\coth(r)$.

Lema .2.1. *El disco $D^2 = \{(u, v, w) \in D^3 : w = 0\}$ con la métrica inducida es isométrico a \mathbf{H}^2 .*

Demostración. Sean g_{D^3} , g_{D^2} la métrica riemanniana en D^3 y la métrica inducida en D^2 , respectivamente. El espacio tangente a D^2 , $T_p D^2 = \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle$. Según la definición de métrica inducida, si $p = (u, v, 0)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in T_p D^2$ entonces

$$g_{D^2}(\varphi_1, \varphi_2) = 4 \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{(u^2 + v^2 + w^2 - 1)^2}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2}(\varphi_1, \varphi_2); \quad (173)$$

que coincide con la métrica del disco de Poincaré bidimensional (Ecuación 2.4.2); por tanto D^2 es isométrico a \mathbf{H}^2 . \square

Lema .2.2. *Sea $I : D^3 \rightarrow D^3$ definida como $I(u, v, w) = (u, v, -w)$, y \tilde{I} el levantamiento a TD^3 (es decir, si $v \in T_p D^3$ entonces $\tilde{I}(p, v) = (I(p), DI_p(v))$). Entonces \tilde{I} preserva el Lagrangiano.*

Demostración. De la ecuación (2.25) se deduce que $r(u, v, w) = r(u, v, -w)$, luego, si $q \in D^3$, $v \in T_p D^3$ con $v = x_1 \frac{\partial}{\partial u} + x_2 \frac{\partial}{\partial v} + x_3 \frac{\partial}{\partial w}$ entonces

$$\begin{aligned} L(v, q) &= 4 \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{(u^2 + v^2 + w^2 - 1)^2} \\ &= 4 \frac{x_1^2 + x_2^2 + (-x_3)^2}{(u^2 + v^2 + (-w)^2 - 1)^2} \\ &= (I(q), DI_q(v)) \\ &= \tilde{I}(q, v). \end{aligned} \quad (174)$$

□

Teorema .2.3. *El movimiento de una partícula con condiciones inicial x_0 , \dot{x}_0 está contenido en una subvariedad isométrica a \mathbf{H}^2 .*

Demostración. Sea P el plano que contiene a x_0 , al origen, y a la geodésica con condiciones iniciales x_0, \dot{x}_0 . Sin pérdida de generalidad supóngase que x_0 y \dot{x}_0 no son colineales, entonces P es único.

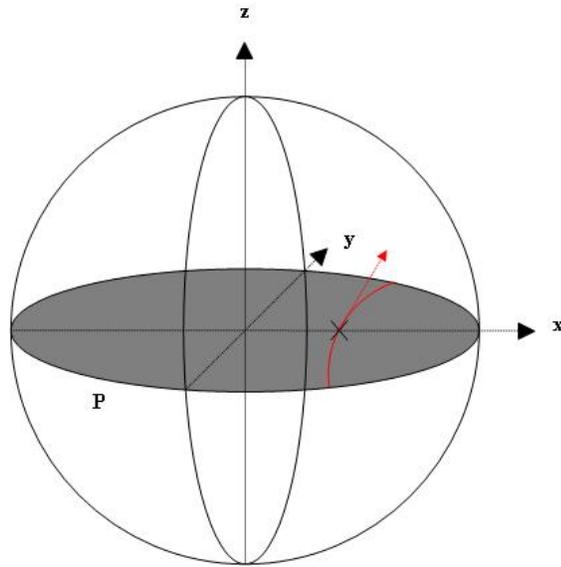


Figura 22: Representación del plano P , conteniendo a x_0 , la geodésica con condiciones iniciales x_0, \dot{x}_0 y el origen.

Tómense coordenadas (x, y, z) de manera que $P = \{(x, y, z) : z = 0\}$. Sea $I : D^3 \rightarrow D^3$ definida como $I(x, y, z) = (x, y, -z)$. Por el lema B.0.2, I preserva el Lagrangiano, y por tanto transforma soluciones en soluciones. Sea γ la solución al problema de Kepler con condición inicial x_0, \dot{x}_0 . La curva $I(\gamma)$ es una solución con condiciones iniciales $I(x_0), DI_{x_0}(\dot{x}_0)$, por definición de P , $I(x_0) = x_0$, y $\dot{x}_0 \in \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$, entonces

$$DI_{x_0}(\dot{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{x}_0 = \dot{x}_0.$$

Como γ y $I(\gamma)$ son soluciones con las mismas condiciones iniciales $\gamma = I(\gamma)$ y por tanto $\gamma \subseteq P$ (porque $p = I(p) \Leftrightarrow p \in P$). Luego, por el lema B.0.1, P es isométrico a \mathbf{H}^2 . \square

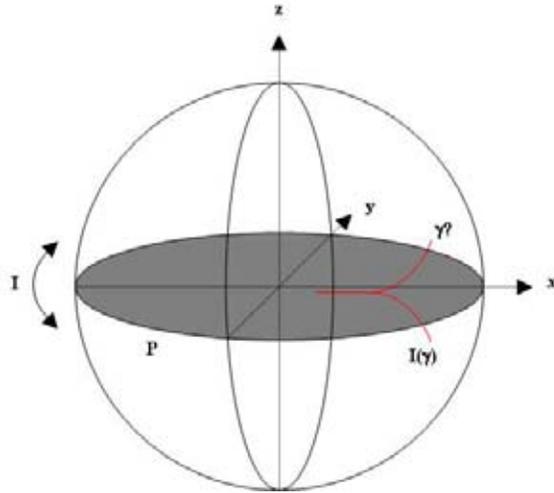


Figura 23: Idea de la prueba: Si para algún t_0 , $\gamma(t_0) \in D^3 \setminus P$ entonces $I(\gamma(t_0)) \neq \gamma(t_0)$.

o

Bibliografía

- [1] Arnold, V.I., [1989], *Mathematical methods of classical mechanics*. Segunda edición, Graduate Texts in Mathematics **60**, Springer-Verlag.
- [2] Lascurain Orive, A. (2005). Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional. UNAM.
- [3] Lee, J. M. (1997). Riemannian manifolds: an introduction to curvature (Vol. 176). Springer Science & Business Media.
- [4] Prieto, C. (2009). Elements of Point-Set Topology.
- [5] Lee, J. (2012). Introduction to smooth manifolds (Vol. 218). Springer Science & Business Media.
- [6] Cariñena, J. F., Rañada, M. F., & Santander, M. (2005). Central potentials on spaces of constant curvature: the Kepler problem on the two-dimensional sphere S^2 and the hyperbolic plane H^2 . *Journal of mathematical physics*, 46(5), 052702.
- [7] Montgomery, R., & Shanbrom, C. (2012). Keplerian dynamics on the Heisenberg group and elsewhere. arXiv preprint arXiv:1212.2713.
- [8] García-Naranjo, L. C., Marrero, J. C., Pérez-Chavela, E., & Rodríguez-Olmos, M. (2015). Classification and stability of relative equilibria for the two-body problem in the hyperbolic space of dimension 2. arXiv preprint arXiv:1505.01452.
- [9] Kozlov, V. V., & Harin, A. O. (1992). Kepler's problem in constant curvature spaces. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 54(4), 393-399.

- [10] Diacu, F., Pérez-Chavela, E., & Santoprete, M. (2012). The n-body problem in spaces of constant curvature. Part I: Relative equilibria. *Journal of nonlinear science*, 22(2), 247-266.