



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA.

Sólidos Platónicos y Singularidades Kleinianas.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
CRISTIAN RAÚL MORALES VIRUETTE

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D. F. Agosto 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM dentro del proyecto con clave IN106614 titulada Singularidades y Teoría K. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Agradecimientos	3
Notación	7
Introducción	9
1. Sólidos regulares	17
1.1. Los sólidos platónicos	17
1.2. Polítopos convexos	22
1.3. Polítopos regulares	29
1.4. Enumeración de los polítopos regulares	35
1.4.1. Enumeración de los polítopos 3-dimensionales	36
1.4.2. Enumeración de los polítopos 4-dimensionales	37
1.4.3. Enumeración de los polítopos d -dimensionales	38
1.5. Realizaciones de símbolos de Schläfli	38
2. Grupos de rotación finitos	45
2.1. Grupos de rotación de los sólidos platónicos	46
2.1.1. Relación entre los grupos de rotaciones con los grupos de permutaciones	49
2.2. Subgrupos finitos del grupo de rotación $SO(3)$	51
2.3. Subgrupos normales	60
2.4. Generadores y relaciones para los subgrupos finitos de $SO(3)$	62
3. Subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$	69
3.1. Subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$	70
3.2. Cuaterniones y rotaciones	73
3.2.1. Tablas de Cayley	77
3.3. Sólidos regulares 4-dimensionales	85
3.4. Espacios de órbitas \mathbb{S}^3/G de los subgrupos finitos G de $SU(2)$	92
3.5. Generadores y relaciones para los subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$	99

4. Polinomios invariantes	105
4.1. Divisores invariantes y formas semi-invariantes	105
4.2. Los caracteres de los divisores invariantes	112
4.3. Generadores y relaciones para el álgebra de polinomios invariantes	116
4.4. La variedad de órbitas afín	123
Bibliografía	128

Notación

\mathbb{R}	Campo de los números reales.
\mathbb{C}	Campo de los números complejos.
\mathbb{F}	Campo arbitrario.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interno estándar.
$\text{ch}(M)$	Envoltura convexa de M .
∂H	Frontera del subespacio H .
P	Politopo convexo.
$\dim P$	Dimensión de P .
Q	Figura de vértice.
F^Δ	Cara polar de la cara F .
P_r^O	Politopo polar de P con respecto a la esfera centrada en O y radio r .
$\text{Aut}(X)$	Grupo de automorfismos de X .
$\text{Ker } f$	Kernel de f .
E	Matriz identidad.
$\text{GL}(n, \mathbb{F})$	Grupo general lineal: matrices invertibles $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} y operación de grupo dada por la multiplicación de matrices.
$\text{O}(n, \mathbb{F})$	Subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{F})$ que cumple $A^t = A^{-1}$.
$\text{U}(n, \mathbb{F})$	Subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{F})$ que cumple $A^* = A^{-1}$.
$\text{SL}(n, \mathbb{F})$	Subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{F})$ tal que $\det A = 1$.
$\text{SO}(n)$	Subgrupo de $\text{O}(n, \mathbb{F})$ tal que $\det A = 1$.
$\text{SU}(n)$	Subgrupo de $\text{U}(n, \mathbb{F})$ tal que $\det A = 1$.
$\text{Re}(z)$	Parte real del número complejo z .
$\text{tr}(A)$	Traza de la matriz A .
$\text{st}(v)$	Conjunto de vértices que tienen arista común con el vértice v .
$\text{trd}(A)$	Grado de trascendencia del anillo A .

Introducción

En la presente tesis se realizará un análisis sobre lo que trabajó el matemático Alemán *Felix Klein* en su libro *Lectures on the Icosahedron and the Resolution of Equations of Degree Five* publicado en el año 1884, en donde introdujo coordenadas complejas por medio de teoría de invariantes para asociar ecuaciones polinomiales a los grupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$, los cuales tienen una estrecha relación con los poliedros regulares. Estas ecuaciones nos permitirán describir las singularidades de unas superficies complejas particulares. El enfoque que se da es, en mayor parte, el que dio Klaus Lamotke en su libro *Regular Solids and Isolated Singularities*. La tesis incluye temas variados que van desde la geometría de poliedros y álgebra abstracta hasta geometría y topología algebraica, por lo que la escritura no puede tener una notación y terminología estándar de un área en particular, sin embargo se intentará armonizar la notación y los nombres en las definiciones de las diferentes áreas.

El objetivo principal es presentar dos isomorfismos que no se dan regularmente los cuales relacionan nociones de topología algebraica y geometría algebraica. Se satisfacen gracias a las propiedades que brinda un subgrupo finito $G < SL(2, \mathbb{C})$ al considerar el *espacio de órbitas* \mathbb{C}^2/G y su *anillo de polinomios G -invariantes* S^G (más adelante especificaremos lo que son éstas estructuras matemáticas). Por tal motivo, antes de presentar dichos isomorfismos, y con el fin de que la tesis sea autocontenida, se dedican los primeros tres capítulos a la clasificación de los subgrupos finitos del *grupo especial lineal* $SL(2, \mathbb{C})$.

Existe una relación entre los subgrupos finitos del grupo de rotaciones del espacio 3-dimensional $SO(3)$ con los subgrupos finitos del *grupo especial unitario* $SU(2)$; existe también una relación entre los subgrupos finitos de $SU(2)$ con los subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$. La estrategia es pues, clasificar los grupos finitos de $SO(3)$, para clasificar los subgrupos finitos de $SU(2)$ y finalmente obtener una clasificación de los subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$.

En el primer capítulo se caracterizan los politopos convexos regulares de dimensión d y se presenta una forma de construirlos en su respectivo espacio euclidiano.

En particular, los politopos de dimensión tres, llamados *sólidos platónicos*, clasifican casi por completo los subgrupos finitos de $SO(3)$; basta con agregar las dos series infinitas de subgrupos finitos dadas por los subgrupos cíclicos y los subgrupos diédricos lo cual se estudia en el Capítulo 2. Además, se exhibe un sistema de generadores y relaciones para dichos subgrupos.

Luego, en el Capítulo 3, se muestra que todo subgrupo finito de $SL(2, \mathbb{C})$ es conjugado a un subgrupo finito $G < SU(2)$. Se ve el grupo $SU(2)$ como la esfera unitaria en el espacio de cuaterniones y se observa que cada G es una colección finita de puntos en $SU(2)$. Cabe destacar que la envoltura convexa de algunos subgrupos finitos de $SU(2)$ son politopos regulares de dimensión cuatro; utilizaremos las tablas que presentó Arthur Cayley en su artículo *Notes on Polyhedra* de 1866 para facilitar la comprensión geométrica de estos subgrupos finitos.

La relación entre los subgrupos finitos de $SU(2)$ y $SO(3)$ proviene del siguiente análisis: la acción natural que ejerce el grupo general lineal $GL(2, \mathbb{C})$ sobre \mathbb{C}^2 , induce una acción en la *línea proyectiva compleja* \mathbb{CP}^1 , lo que nos permite construir el epimorfismo

$$GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

que asocia a cada matriz invertible compleja 2×2 una transformación proyectiva de la forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$. Es suficiente considerar el subgrupo $SL(2, \mathbb{C}) < GL(2, \mathbb{C})$ pues todo elemento de $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ está representado por una matriz en $SL(2, \mathbb{C})$. Además, como el grupo $SO(3)$ actúa trivialmente en \mathbb{R}^3 , induce una acción de manera natural en la esfera \mathbb{S}^2 ; notemos que \mathbb{S}^2 puede ser vista como la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y ésta a su vez puede ser vista como la línea proyectiva \mathbb{CP}^1 , por tanto, $SO(3)$ actúa en \mathbb{CP}^1 , lo que implica que $SO(3)$ es un subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$. Podemos entonces, restringir el epimorfismo anterior al epimorfismo $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(3)$. Con él, se obtendrá la relación entre los subgrupos finitos de $SU(2)$ y $SO(3)$, pues se tiene que $SU(2) = \rho^{-1}(SO(3))$.

También, en el mismo Capítulo 3, gracias a las relación que tiene $SO(3)$ con $SL(2, \mathbb{C})$, el sistema de generadores y relaciones de los subgrupos finitos de $SO(3)$, induce un sistema de generadores y relaciones de los subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$.

En el capítulo 4, una vez clasificados los subgrupos finitos $G < SL(2, \mathbb{C})$, se verá cómo la acción de un subgrupo G en la \mathbb{C} -álgebra de polinomios $\mathbb{C}[x, y]$, nos permite definir la subálgebra S^G , la cual consiste de polinomios que se mantienen invariantes bajo la acción del grupo G . Estos polinomios invariantes dan lugar a las nociones de *divisores* y *formas semi-invariantes*, con las cuales se dará una caracterización que nos permite clasificar las formas invariantes y con ello presentar un sistema de generadores para la \mathbb{C} -álgebra S^G junto con una relación que depende totalmente del subgrupo G . Luego, gracias a este sistema de generadores y la relación que satisfacen, se puede establecer el primero de los isomorfismos que nos interesa, el cual es entre los anillos S^G y $\mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle$, donde φ es justamente la relación que satisfacen los generadores.

Finalmente, de geometría algebraica, una variedad la podemos ver como los ceros de un polinomio, por lo que podemos pensar en la variedad $V(\varphi_G)$ donde φ_G es la relación que cumplen los generadores de S^G para cada $G < SL(2, \mathbb{C})$.

Probaremos pues el segundo isomorfismo que nos interesa el cual permite describir el espacio de órbitas \mathbb{C}^2/G como la variedad afín $V(\varphi_G)$.

Índice de figuras

1.1. Tetraedro	18
1.2. Construcción del cubo	18
1.3. Tetraedros dentro de un cubo	19
1.4. Construcción del octaedro	19
1.5. Construcción de icosaedro	20
1.6. Construcción del icosaedro	21
1.7. Dual del Icosaedro	21
1.8. Sólidos platónicos duales	22
1.9. Caras del politopo convexo	24
1.10. Una <i>bandera de caras</i> de un cubo	25
1.11. Figura de vértice	26
1.12. Polaridad	27
1.13. Figura de vértice de v en P	28
1.14. Figura de vértice excelente	30
1.15. Radio característico de un p -ágono	32
1.16. Politopo regular con radio circundante r y 1-caras de longitud l	32
1.17. Figura de vértice de una 2-cara de P que contiene a v	33
1.18. Realización del d -tetraedro	39
1.19. Realización del d -octaedro	40
1.20. Realización del d -cubo	41
1.21. Icosaedro; su símbolo de Schläfli es $\{3, 5\}$	42
1.22. Diagrama de Schlegel de un hexacosicoron; su símbolo de Schläfli es $\{3, 3, 5\}$	42
1.23. Diagrama de Schlegel de un hecatonicosacoron; su símbolo de Schläfli es $\{5, 3, 3\}$	43
1.24. Diagrama de Schlegel de un icositetracoron; su símbolo de Schläfli es $\{3, 4, 3\}$	43
2.1. Caras paralelas en un octaedro	50
2.2. Aristas del icosaedro que corresponden a las caras de un cubo	50
2.3. Aristas en distintas clases de equivalencias	51
2.4. Generador del grupo cíclico	62
2.5. Generadores del q -diédrico	63
2.6. Generadores de Sólidos Platónicos	63
2.7. Camino por aristas orientado dado por la sucesión p_1, \dots, p_6	64

2.8. Caminos equivalentes	64
2.9. Palabra equivalente si contiene una 2-celda	65
2.10. Icosaedro subdividido	67
3.1. Generación de hexaedro desde un dodecaedro	79
3.2. Distribución de los elementos de G en los φ -primos	90
3.3. Dominios fundamentales de \mathbb{S}^3/G ; aristas con la misma etiqueta se identifican vía φ -screws	96
3.4. Construcción del dominio fundamental para $G = \tilde{D}_3$	97
3.5. Radios circundantes	97
3.6. Dominio Fundamental D correspondiente a \mathbb{S}^3/\tilde{O}	98
4.1. Órbita D_q -invariante E (puntos medios de aristas).	114

Índice de cuadros

1.1. Sólidos platónicos	25
1.2. Politopos regulares 3-dimensionales	37
1.3. Politopos regulares 4-dimensionales	38
1.4. Politopos regulares d -dimensionales	38
2.1. Rotaciones del tetraedro	47
2.2. Rotaciones del octaedro	48
2.3. Rotaciones del icosaedro	49
2.4. Información de órbitas excepcionales	56
2.5. Órbitas excepcionales del grupo cíclico de orden N	59
2.6. Órbitas excepcionales del grupo diédrico de orden $2q$	59
2.7. Órbitas excepcionales del grupo del Tetraedro	59
2.8. Órbitas excepcionales del grupo del Octaedro	60
2.9. Órbitas excepcionales del grupo del Icosaedro	60
2.10. Generadores y relaciones de los subgrupos de $SO(3)$	63
3.1. Sistema axial del tetraedro.	80
3.2. Sistema axial del cubo y el octaedro	81
3.3. Sistema axial del icosaedro y dodecaedro (primer parte), donde $a = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $b = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $c = \sqrt{5} - 1$, $d = \sqrt{5} + 1$	82
3.4. Sistema axial del icosaedro y dodecaedro (segunda parte), donde $a = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $b = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $c = \sqrt{5} - 1$, $d = \sqrt{5} + 1$	83
3.5. Símbolos de rotación del poliedro con símbolo $\{3, 3, 3\}$	84
3.6. Símbolos de rotación del poliedro con símbolo $\{3, 3, 4\}$	84
3.7. Símbolos de rotación del poliedro con símbolo $\{3, 3, 5\}$	85
3.8. Correspondencia entre elementos de D_2 y \tilde{D}_2	86
3.9. Correspondencia entre elementos de D_3 y \tilde{D}_3	87
3.10. Correspondencia entre los elementos de D_4 y \tilde{D}_4	87
3.11. Correspondencia entre los elementos de T y \tilde{T}	88
3.12. Correspondencia entre los elementos de O y \tilde{O}	88
3.13. Correspondencia entre los elementos de I y \tilde{I}	89
3.14. Grupo fundamental y grupos de homología de \mathbb{S}^3/G (\mathcal{AG} es el <i>grupo abelianizado de G</i>).	94

3.15. Figura de vértice de $\text{ch}(G)$ en el vértice v , faceta del polar $\text{ch}(G)^\circ$ y ángulo α donde $G \cap \alpha$ -primo $\neq 0$	96
3.16. Celdas i -dimensionales de cada espacio de órbitas	98
3.17. Generadores y relaciones de los subgrupos finitos de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. . .	100
3.18. Grupos abelianizados de los subgrupos finitos de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$	102
4.1. Caracteres de los subgrupos no-cíclicos	113
4.2. Condiciones para caracter trivial	115
4.3. Divisores invariantes con caracter trivial	115
4.4. Generadores de las álgebras de polinomios G -invariantes	117
4.5. Bases del espacio vectorial de las formas principales.	117
4.6. Relaciones principales	118
4.7. Reducción de generadores	118
4.8. Transformación de formas	120
4.9. Grupos binarios y sus subgrupos conmutadores $[G, G]$	121

Capítulo 1

Sólidos regulares

Los sólidos platónicos, son de especial interés debido a su regularidad. Estos poliedros 3-dimensionales son sólo cinco: el tetraedro, el cubo (hexaedro), el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro. El porqué sólo son cinco se mostrará utilizando nociones más generales de poliedros, como lo es la regularidad de los *politopos convexos*.

Uno de los resultados que veremos en este primer capítulo es que en dimensiones altas, las posibilidades para la realización de politopos regulares son bastante restringidas.

1.1. Los sólidos platónicos

En términos generales, todo politopo convexo tiene un politopo *dual* el cual podemos construir tomando la envoltura convexa de los centros de sus caras. Más adelante, daremos una definición más formal de los *sólidos duales*.

A continuación construiremos, a *grosso modo*, los sólidos platónicos:

Tetraedro: Para construir el tetraedro, comenzamos con una pirámide que tenga como base un triángulo equilátero. Ajustamos la altitud de ésta, de tal manera que todos los triángulos sean equiláteros (ver Figura 1.1). El tetraedro tiene como sólido dual a otro tetraedro.

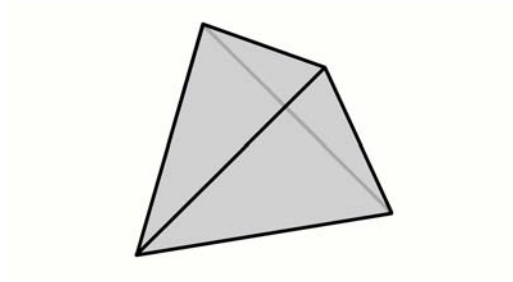
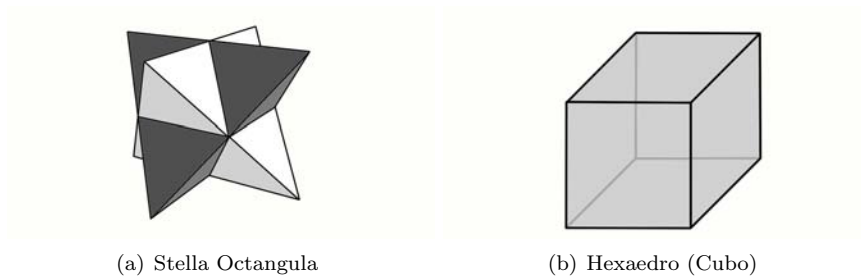


Figura 1.1: Tetraedro

Hexaedro: Encimando dos tetraedros de manera que cada arista de un tetraedro sea perpendicular a una arista del otro tetraedro formamos la *Stella Octangula* de Johannes Kepler mostrada en la Figura 1.2(a). Tomando la envoltura convexa de la Stella Octangula obtenemos un hexaedro como en la Figura 1.2(b). Las aristas de cada tetraedro coinciden con las diagonales de las caras del cubo.



(a) Stella Octangula

(b) Hexaedro (Cubo)

Figura 1.2: Construcción del cubo

De manera más explícita; si tomamos el cubo que tiene a los puntos $(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \in \mathbb{R}^3$ por vértices, un tetraedro de la stella octangula está dado por la envoltura convexa de los vértices

$$(1, -1, 1), \quad (1, 1, -1), \quad (-1, -1, -1) \quad \text{y} \quad (-1, 1, 1);$$

como muestra la Figura 1.3(a) y el otro, está formado por los cuatro vértices antipodales

$$(-1, 1, -1), \quad (-1, -1, 1), \quad (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad (1, -1, -1),$$

como en la Figura 1.3(b).

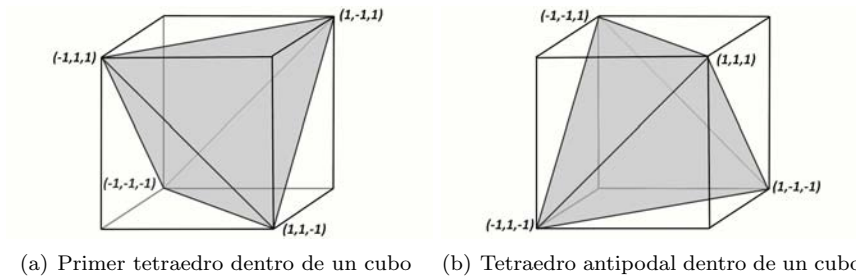


Figura 1.3: Tetraedros dentro de un cubo

Octaedro: Para construir el octaedro, tomamos dos pirámides de base cuadrangular, ajustamos la altitud de cada pirámide de tal manera que se obtengan triángulos equiláteros en las paredes, y finalmente, unimos las dos pirámides por sus bases cuadrangulares como se muestra en la Figura 1.4(a).

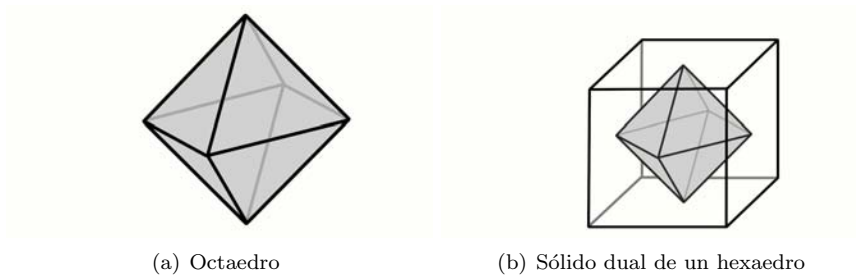


Figura 1.4: Construcción del octaedro

Otra manera de construirlo es mediante la operación dual del hexaedro: Del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ en \mathbb{R}^3 obtenemos el sólido dual con la envoltura convexa de los vértices

$$(\pm 1, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0) \quad \text{y} \quad (0, 0, \pm 1),$$

el cual es precisamente un octaedro (ver Figura 1.4(b)).

Icosaedro: Comenzamos con las tapas de un prisma que tiene como base a pentágonos regulares; giramos uno de los pentágonos regulares 36° y tomamos su envoltura convexa. Esto produce un antiprisma que tiene por caras laterales a 10 triángulos isósceles en forma de zigzag como se muestra en la Figura 1.5(a). La altitud del antiprisma puede ser ajustada para transformar los triángulos (en principio isósceles) en triángulos equiláteros. Finalmente, unimos dos pirámides regulares pentagonales (ver Figura

1.5(b)) que tengan la altitud adecuada (la misma altitud que se estableció en el antiprisma para obtener triángulos equiláteros) en las tapas del antiprisma para obtener el icosaedro como en la Figura 1.5(c).

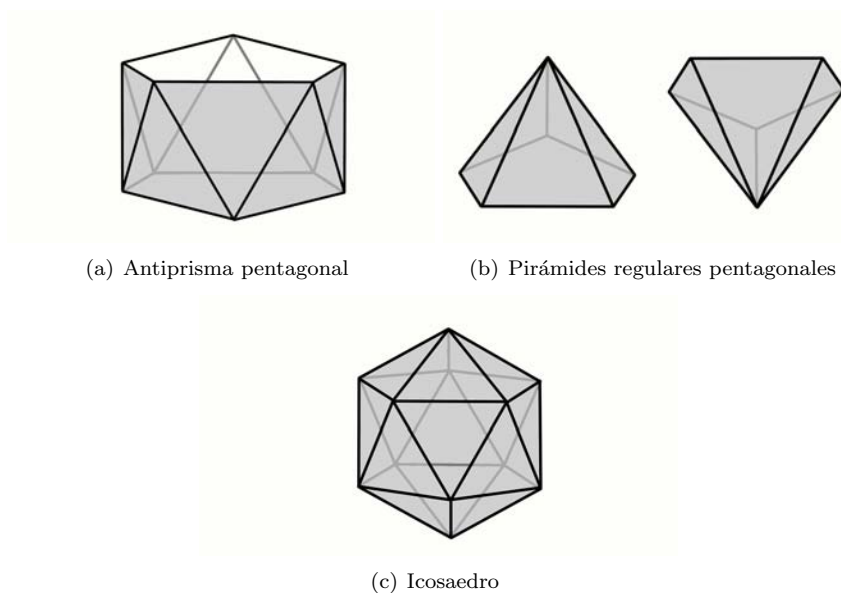


Figura 1.5: Construcción de icosaedro

Otra construcción del icosaedro es a partir del octaedro: sus ocho caras pueden ser coloreadas alternadamente como un tablero de ajedrez como en la Figura 1.6(a). Dado que la coloración nos determina de manera natural una dirección en todas las aristas, podemos dividir cada arista con una razón $a : b$ y así obtener 12 puntos (pues el octaedro tiene 12 aristas) como en la Figura 1.6(b). La envoltura convexa de esos doce puntos es un icosaedro, el cual, en general, es irregular (ver Figura 1.6(c)) pues los triángulos que no están sobre las caras del octaedro no tienen porqué ser equiláteros (de hecho, en principio son triángulos isósceles). Para obtener un icosaedro regular escogemos la razón $a : b$ de tal manera que los triángulos isósceles sean triángulos equiláteros, *i.e.*, considerando la *razón dorada* dada por $a/b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (ver [10]).

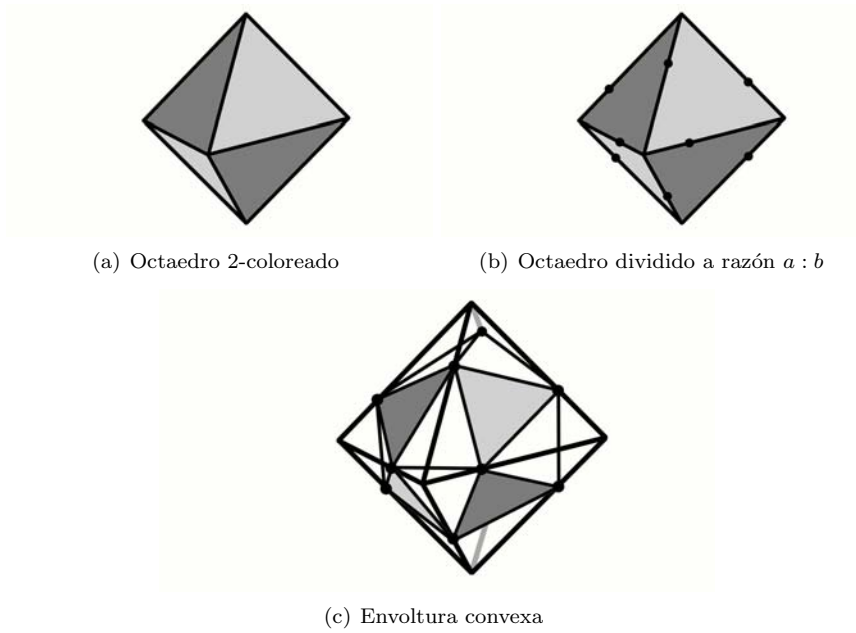


Figura 1.6: Construcción del icosaedro

Dodecaedro: Finalmente, el dodecaedro se obtiene al calcular el dual del icosaedro como se ve en la figura .

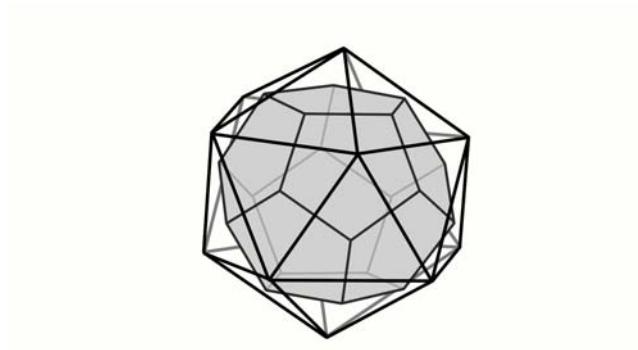


Figura 1.7: Dual del Icosaedro

A continuación los duales de los sólidos platónicos:

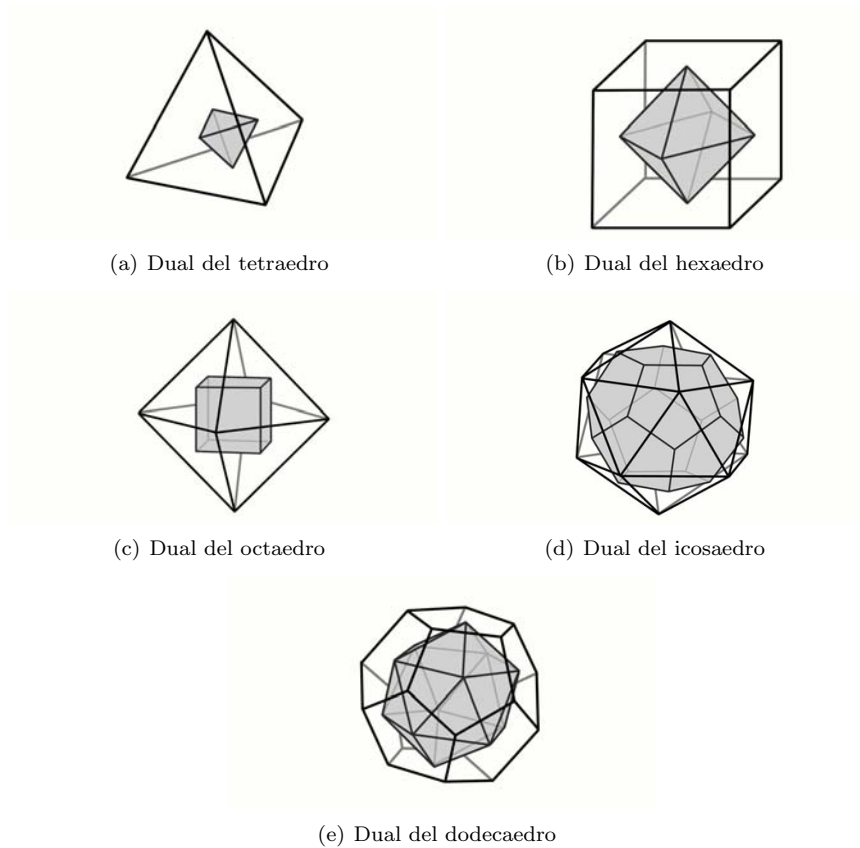


Figura 1.8: Sólidos platónicos duales

1.2. Politopos convexos

En ésta sección se introduce la noción de politopos d -dimensionales convexos, además de conceptos que nos permitan tener un lenguaje más claro a la hora de desarrollar la teoría.

Consideramos el n -espacio euclidiano \mathbb{R}^n con el producto interno estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y la norma dada por $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

A continuación una serie de definiciones que nos permitirán tener un lenguaje adecuado para el desarrollo de las secciones posteriores:

Definición 1.2.1. Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada *isometría (o movimiento euclidiano)* si $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.2. Las *transformaciones ortogonales* de X son aquellos endomorfismos que preservan producto escalar, i.e., $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in X$.

Proposición 1.2.3. Las *transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^n* son exactamente los movimientos euclidianos que fijan el origen.

DEMOSTRACIÓN:

Si $f(0) = 0$, entonces $|f(x) - f(0)| = |x - 0|$, por lo que

$$\langle f(x), f(x) \rangle = |f(x)|^2 = |x|^2 = \langle x, x \rangle.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle \\ &= \langle f(x), f(x) \rangle - 2\langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle \\ &= |f(x)|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle + |f(y)|^2. \end{aligned}$$

Luego, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ si y sólo si $|f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2$ y por lo anterior, $|f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2$ si y sólo si $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. ■

Definición 1.2.4. Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada $(1 : \varepsilon)$ -*similitud*, si para algún $\varepsilon > 0$, $x \mapsto \frac{f(x)}{\varepsilon}$ o equivalentemente $x \mapsto f(\frac{x}{\varepsilon})$, son isometrías.

De manera informal, las similitudes no son más que isometrías escaladas.

Definición 1.2.5. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos subconjuntos, con $f(A) = B$.

Si f es un movimiento euclidiano, A y B son llamados *congruentes*;

Si f es una similitud, se llaman *similares*.

Notemos que los subconjuntos congruentes forman una clase de equivalencia en donde la relación de equivalencia está dada por los movimientos euclidianos. De la misma manera, los subconjuntos similares forman una clase de equivalencia en donde la relación está dada por las similitudes.

Definición 1.2.6. Un subconjunto S de \mathbb{R}^d es llamado *conjunto afín* si todo elemento de la forma $(1 - \lambda)s_1 + \lambda s_2$ es un elemento de S para cualesquiera $s_1, s_2 \in S$ y toda $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2.7. Sea X un espacio de dimensión d . A los subespacios afines de dimensión $d - 1$ los llamaremos *primos*.

Definición 1.2.8. Sea M un subconjunto finito de \mathbb{R}^n . La envoltura convexa

$$P = \text{ch}(M) = \left\{ \sum_{m \in M} \lambda_m m \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_m \geq 0, \sum \lambda_m = 1 \right\}$$

es llamada un *politopo convexo*.

Existe un único subconjunto minimal $M^* \subset M$ tal que $P = \text{ch}(M^*)$. Los elementos de M^* son llamados *vértices de P* . La dimensión d , de P , es la dimensión del subespacio afín generado por M , y por tanto, por P .

Un semi-espacio cerrado H de \mathbb{R}^n está determinado por una función lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un número real γ

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \leq \gamma\}.$$

La frontera de H está dada por

$$\partial H = \{x \in H \mid h(x) = \gamma, \text{ donde } h \text{ es una función lineal}\}.$$

Definición 1.2.9. En el caso en el que el semi-espacio H contiene al politopo $P = \text{ch}(M)$,

$$\partial H \cap P = \text{ch}(\partial H \cap M)$$

es llamada *cara* de P . Ésta es un politopo convexo (posiblemente vacío) como se muestra en la Figura 1.9.

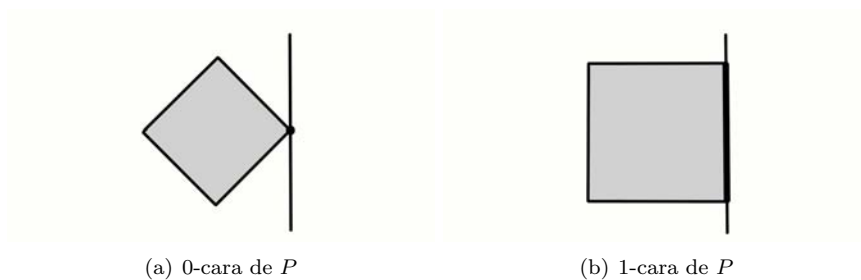


Figura 1.9: Caras del politopo convexo

El politopo P , es considerado una cara de sí mismo. Las caras 0-dimensionales constan de cada uno de los vértices. Las caras 1-dimensionales son llamadas *aristas*, y las caras $(d-1)$ -dimensionales de un politopo d -dimensional son llamadas *facetras*.

Un politopo convexo d -dimensional también puede ser descrito por un sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1d}x_d + a_1 &\geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2d}x_d + a_2 &\geq 0 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kd}x_d + a_k &\geq 0 \end{aligned}$$

donde $k > d$, los a_i 's están en \mathbb{R} , la suma $\sum_{i=1}^d a_j i = 1$ para toda $j = 1, \dots, k$ y x_1, \dots, x_d son los vectores unitarios del espacio \mathbb{R}^d (ver [6, Sección 7.4]).

Con esta definición, las caras no son más que subconjuntos de \mathbb{R}^d que satisfacen las desigualdades permitiendo algunas de ellas como igualdades.

La Tabla 1.1 muestra el número de caras de cada Sólido Platónico:

	tetraedro	octaedro	cubo	icosaedro	dodecaedro
vértices	4	6	8	12	20
aristas	6	12	12	30	30
caras	4	8	6	20	12

Tabla 1.1: Sólidos platónicos

Definición 1.2.10. Una sucesión P_0, P_1, \dots, P_k de caras de P , es una *bandera* de caras si P_i es una cara de P_{i+1} . La bandera es *completa* si $\dim P_i = i$ y $k = \dim P$ (ver Figura 1.10).

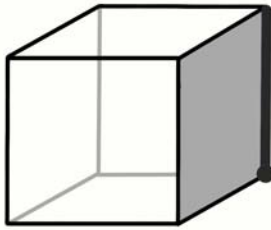


Figura 1.10: Una *bandera de caras* de un cubo

Claramente, toda bandera está contenida en una bandera completa.

Definición 1.2.11. Sea v un vértice del politopo convexo P . Llamaremos *figura de vértice* de v en P a la envoltura convexa de los puntos medios de todas las aristas que inciden en v . Lo denotaremos regularmente Q .

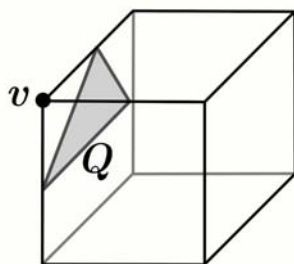


Figura 1.11: Figura de vértice

La figura del vértice es un politopo convexo que cumple con la siguiente propiedad: para cada k -cara F de P que contiene a v , la intersección $F \cap \partial H$ es una $(k - 1)$ -cara de Q . Así, la cara $F \cap \partial H$ es una figura de vértice de F en v .

La función $F \rightarrow F \cap \partial H$ establece una correspondencia 1-1 entre las caras de P que contienen a v y todas las caras de Q . Cabe destacar que dicha correspondencia, preserva banderas.

Ahora, construiremos un politopo a partir de uno ya dado con propiedades especiales:

Definición 1.2.12. Sea O un punto interior del politopo convexo d -dimensional $P \subset \mathbb{R}^d$. Definimos el *politopo polar* (o *dual*) P_r^O de P con respecto a la esfera de radio r centrada en O de dimensión $(d - 1)$, como:

$$P_r^O = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x - O, y - O \rangle \leq r^2, \text{ para toda } y \in P\}.$$

El politopo polar, es también un politopo convexo d -dimensional. Además, el polar del politopo polar P es precisamente el politopo original P [3, Teorema 9.1], *i.e.*,

$$(P_r^O)_r^O = P.$$

Según las definiciones anteriores, podemos definir de manera natural, la cara polar de la k -cara F de P , como

Definición 1.2.13. Sea F una k -cara de P . La *cara polar* de F , denotada por F^Δ está dada por

$$F^\Delta = \{x \in P_r^O \mid \langle x - O, y - O \rangle = r^2, \text{ para toda } y \in F\}$$

y es una $(d - k - 1)$ -cara de P_r^O .

Observación 1.2.14. Si F y G son dos caras, tales que $F \subset G$, entonces $F^\Delta \supset G^\Delta$, y además, $F^{\Delta\Delta} = F$.

La similitud $x \mapsto r^2x$ mapea P_1^O sobre P_r^O . Si v es un vértice de P , entonces, la faceta v^Δ de P_r^O yace en un primo L el cual es perpendicular al segmento Ov como se muestra en las Figuras 1.12(a) y 1.12(b). La distancia l , de L a O (punto interior del politopo), está dada por $l : r = r : |v|$. Usando esto, se construye:

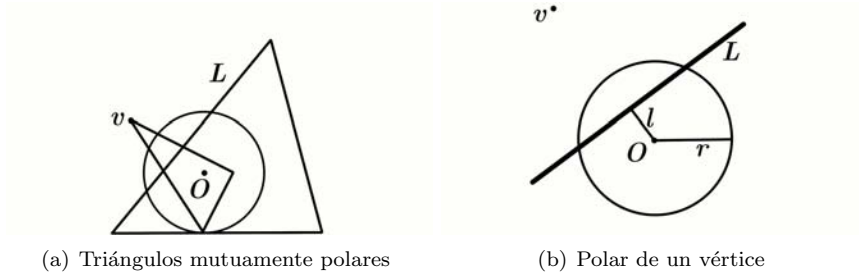


Figura 1.12: Polaridad

Proposición 1.2.15. Sea Q la figura de vértice de P en el vértice v . Sea L el primo que pasa por Q . Existe una única recta que pasa por v y es perpendicular a L . Llamemos c al punto en donde la recta interseca a L . Entonces, la faceta v^Δ de un polar P^O es similar a un polar Q^c de Q en L .

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $|v| = 1$, que O es el origen de \mathbb{R}^d y que $r = 1$. Por definición, tenemos que el politopo polar está dado por

$$P_1^O = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \text{ para toda } y \in P\}$$

y la cara polar por

$$F^\Delta = \{x \in P_1^O \mid \langle x, y \rangle = 1, \text{ para toda } y \in F\}.$$

Juntando ambas ecuaciones, tenemos que la cara polar de v está dada por

$$v^\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, v \rangle = 1, \langle x, y \rangle \leq 1, \text{ para toda } y \in P\}.$$

Ahora, como P es convexo, se tiene que todo punto $y \in P$ puede escribirse como $y = (1 - \mu)v + \mu z$ para un adecuado $z \in Q$ y un $\mu \geq 0$ como se muestra en la Figura 1.13(a), lo que implica que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, (1 - \mu)v + \mu z \rangle \\ &= \langle x, (1 - \mu)v \rangle + \langle x, \mu z \rangle \\ &= (1 - \mu)\langle x, v \rangle + \mu\langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

Luego, como $\langle x, y \rangle \leq 1$ y $\langle x, v \rangle = 1$, se obtiene

$$1 - \mu(1 - \langle x, z \rangle) \leq 1$$

lo cual ocurre si y sólo si $\langle x, z \rangle \leq 1$, pues $\mu \geq 0$. Por tanto, la cara polar de v se puede escribir como

$$v^\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, v \rangle = 1, \langle x, z \rangle \leq 1, \text{ para toda } z \in Q\}.$$

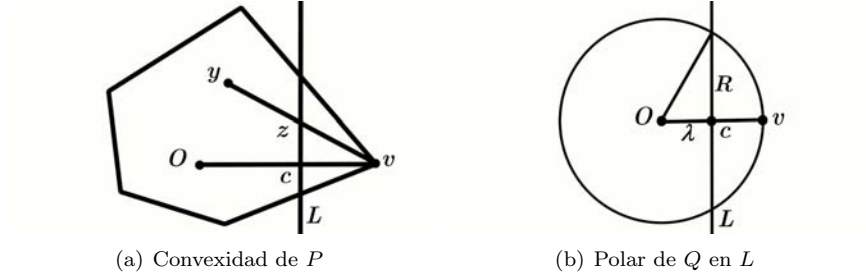


Figura 1.13: Figura de vértice de v en P

Por su parte, el polar de Q en L al rededor de c , con respecto a la esfera de radio $R = \sqrt{1 - \lambda^2}$ (ver Figura 1.13(b)) es

$$Q_R^c = \{x \in L \mid \langle x_c, z_c \rangle \leq 1 - \lambda^2, \text{ para toda } z_c \in Q\},$$

donde $x = c + x_c$ y $z = c + z_c$.

Claramente, L está dado por

$$L = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, v \rangle = \lambda\}.$$

Luego, como $c \in L$ y x_c es perpendicular a v , se tiene que

$$\langle x, v \rangle = \langle c + x_c, v \rangle = \langle c, v \rangle + \langle x_c, v \rangle = \lambda + 0.$$

Por su parte,

$$\langle x, z \rangle = \langle c + x_c, c + z_c \rangle = |c|^2 + \langle x_c, c \rangle + \langle c, z_c \rangle + \langle x_c, z_c \rangle.$$

Como $|c| = \lambda$ (ver Figura 1.13(b)), $\langle x_c, c \rangle = \langle c, z_c \rangle = 0$ (pues tanto x_c como z_c son vectores centrados en c) y $\langle x_c, z_c \rangle \leq 1 - \lambda^2$ (por definición de Q_R^c), obtenemos

$$\langle x, z \rangle \leq \lambda^2 + 0 + 0 + 1 - \lambda^2 = 1.$$

Por lo tanto, Q_R^c se puede escribir como

$$Q_R^c = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, v \rangle = \lambda, \langle x, z \rangle \leq 1, \text{ para toda } z \in Q\}.$$

Finalmente, de la similitud $\varphi : Q_R^c \rightarrow v^\Delta$, dada por $x \mapsto \frac{(x+v)}{(1+\lambda)}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(x), v \rangle &= \left\langle \frac{x+v}{1+\lambda}, v \right\rangle = \frac{1}{1+\lambda} \langle x+v, v \rangle \\
&= \frac{1}{1+\lambda} (\langle x, v \rangle + \langle v, v \rangle) = \frac{\lambda+1}{1+\lambda} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

y utilizando el hecho de que $\langle v, z \rangle = \lambda$, pues $Q \subset L$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(x), z \rangle &= \left\langle \frac{x+v}{1+\lambda}, z \right\rangle = \frac{1}{1+\lambda} (\langle x, z \rangle + \langle v, z \rangle) \\
&\leq \frac{1+\lambda}{1+\lambda} = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la faceta v^Δ de un polar P_1^O es similar a un polar Q_R^c de Q en L . ■

1.3. Polítopos regulares

En vista de que queremos establecer un criterio de regularidad, es importante la siguiente definición:

Definición 1.3.1. Llamaremos *automorfismo* de P a una isometría que transforme un polítopo convexo P en sí mismo.

Observación 1.3.2. Los automorfismos satisfacen las siguientes propiedades:

- Permutan los vértices de P y están únicamente determinados por dichas permutaciones (no toda permutación es un automorfismo).
- Si v_1, \dots, v_q son los vértices, el *centro* $O = \frac{v_1 + \dots + v_q}{q}$ de P es un punto fijo para todo automorfismo.
- Transforman banderas (completas) en banderas (completas).

Definimos pues, los polítopos convexos regulares:

Definición 1.3.3. El polítopo convexo P es llamado *regular* si podemos transformar cualquier bandera completa de caras en cualquier otra mediante automorfismos de P . A los polítopos convexos regulares los llamaremos simplemente *polítopos regulares*.

De la Definición 1.3.3 se siguen las siguientes observaciones:

Observación 1.3.4. Cada cara de un politopo regular es un politopo regular. Más aún, todas las caras de la misma dimensión son congruentes entre sí.

Observación 1.3.5. Para una dimensión fija k , los centros de todas las k -caras tienen la misma distancia r_k desde el centro O del politopo regular P .

El caso en el que $k = 0$ es un caso especial, pues representa el radio de la esfera más pequeña que contiene al politopo completamente, por tanto, lo nombraremos de manera especial:

Definición 1.3.6. Llamaremos a $r = r_0$ el *radio circundante* (circum radius) de P , *i.e.*, la distancia del centro O de P a cualquiera de sus vértices.

Notemos que el vector \vec{Oc} , que va del centro de P al centro de cualquier cara F , es perpendicular a F .

Sea $\mathcal{F} = (F_0, \dots, F_d)$ una bandera completa, sea c_k el centro de cada cara k -dimensional F_k . Si c_d es elegido como origen, los vectores restantes c_0, \dots, c_{d-1} forman una base de \mathbb{R}^d . Si $\mathcal{F}' = (F'_0, \dots, F'_d)$ es otra bandera completa con centros c'_k , un automorfismo α de P , que transforma \mathcal{F} en \mathcal{F}' , satisface $\alpha(c_k) = c'_k$. Por tanto, α está únicamente determinado por las banderas \mathcal{F} y \mathcal{F}' .

Si fijamos una bandera, obtenemos una correspondencia 1-1 entre el conjunto de todas las banderas completas de P y el grupo de todos los automorfismos de P , siendo la identidad del grupo, la bandera fijada.

Considerando v como un vértice del politopo regular P , vemos que todas las aristas que salen de v , terminan en vértices que yacen en un único primo L , el cual es perpendicular al vector que va de O a v . Esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 1.3.7. Con las condiciones anteriores, llamaremos a la envoltura convexa de los vértices que yacen en el primo L , *figura de vértice excelente* de P en v y la denotaremos por Q (ver Figura 1.14).

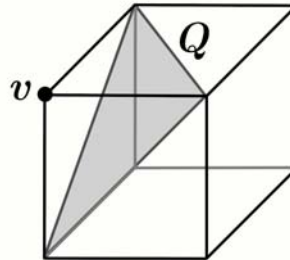


Figura 1.14: Figura de vértice excelente

Notemos que todas las figuras de vértices excelentes Q , son politopos regulares mutuamente congruentes de dimensión $d - 1$, siendo d la dimensión de P .

Ahora daremos un criterio de regularidad de manera recursiva. Para ello primero definimos los politopos convexos de dimensión 2: el politopo convexo regular 2-dimensional es el polígono convexo que tiene todos sus ángulos interiores iguales y sus aristas tienen la misma longitud.

Proposición 1.3.8. (Criterio de regularidad):

El politopo convexo d -dimensional P , con $d \geq 3$, es regular si y sólo si existe un vértice v con las siguientes propiedades:

- i) Existen automorfismos de P que transforman al vértice v en cualquier otro vértice de P .*
- ii) La figura de vértice Q de v en P es un politopo regular.*
- iii) Para todo automorfismo γ de Q , existe un automorfismo g de P , con $g(v) = v$ y $g|_Q = \gamma$.*

Con el fin de clasificar los politopos regulares, introduciremos el concepto de *símbolo de Schläfli*: los únicos politopos regulares 2-dimensionales son los p -ágonos regulares (es decir, polígonos con p lados), con $p \geq 3$, $p \in \mathbb{N}$. Están denotados por el *símbolo de Schläfli* $\{p\}$; el símbolo de Schläfli de un politopo regular 3-dimensional cuyas 2-caras son p -ágonos y cuyas figuras de vértice son q -ágonos está dado por $\{p, q\}$; de manera inductiva, definimos los símbolos de Schläfli de politopos regulares $d + 1$ -dimensionales como:

Definición 1.3.9. El *símbolo de Schläfli* de un politopo regular $d+1$ -dimensional está dado por $\{p_1, \dots, p_d\}$, siempre que sus 2-caras sean p_1 -ágonos y sus figuras de vértice excelentes tengan como símbolo de Schläfli a $\{p_2, \dots, p_d\}$.

Naturalmente, el símbolo de Schläfli de los politopos regulares similares es el mismo, pues el escalamiento del politopo regular es irrelevante para el símbolo.

Definición 1.3.10. Sea P un politopo regular. Sean l la longitud de sus aristas y r su radio circundante. Llamaremos a $s(P) = \frac{l}{2r}$, el *radio característico* de P .

Dado que la longitud de la arista no puede ser cero y es estrictamente menor que $2r$, se tiene que:

$$0 < s(P) < 1$$

Notemos que politopos similares tienen el mismo radio característico. Además, si el politopo P es sólo un p -ágono regular, entonces $s(P) = \frac{l}{2r} = \text{sen} \left(\frac{\pi}{p} \right)$, como se muestra en la Figura 1.15(b).

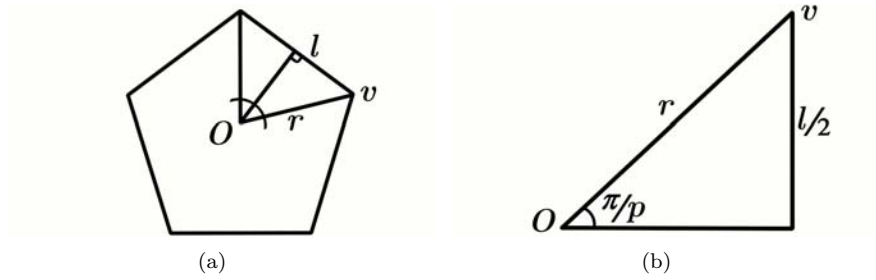


Figura 1.15: Radio característico de un p -ágono

Lema 1.3.11. Si P es un politopo regular de dimensión mayor que 2, con p -ágonos como 2-caras y Q es una figura de vértice excelente de P . Entonces,

$$s(P)^2 = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{s(Q)^2}. \quad (1.1)$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea O el centro de P , l la longitud de sus aristas y r su radio circundante. Sea Q en v , c el centro de Q y r' su radio circundante como se muestra en la Figura 1.16.

Se sigue que $\sin \varphi = \frac{l}{2r}$ y $\cos \varphi = \frac{r'}{r}$. Así, de la identidad trigonométrica $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$, se tiene que

$$s(P)^2 = 1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^2. \quad (1.2)$$

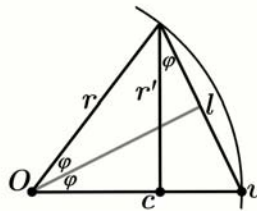
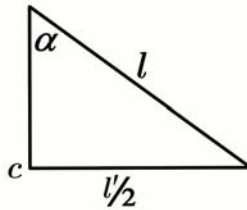


Figura 1.16: Politopo regular con radio circundante r y 1-caras de longitud l

Por otro lado, una arista de Q de longitud l' es la figura de vértice de una 2-cara de P que contiene a v , como se muestra en la Figura 1.17(a).



(a) l es la longitud de una arista en P y l' (b) Triángulo formado por dos vértices de la longitud de una arista de Q P y su centro O



(c) Triángulo formado por dos vértices de P y el centro de Q

Figura 1.17: Figura de vértice de una 2-cara de P que contiene a v

Sea α el ángulo que se forma entre una arista que contiene a v y el radio incidente en v como en la Figura 1.17(b). Se tiene entonces que $\frac{2\pi}{p} + 2\alpha = \pi$, lo que implica que $\alpha = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$. De aquí, por la Figura 1.17(c),

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right) = \frac{l'}{2l},$$

y dado que $\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos(\theta)$, se obtiene

$$\cos \left(\frac{\pi}{p} \right) = \frac{l'}{2l},$$

por tanto, la longitud de la arista de Q está dada por $l' = 2l \cos \left(\frac{\pi}{p} \right)$.

Si se sustituye l' en la fórmula para el radio característico de Q , obtenemos

$$s(Q) = \frac{l'}{2r'} = \frac{2l \cos \left(\frac{\pi}{p} \right)}{2r'} = \frac{l}{r'} \cos \left(\frac{\pi}{p} \right),$$

y notando que $\left(\frac{r'}{l} \right)^2 = \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right)}{s^2(Q)}$, sustituyendo en la ecuación (1.2) obtenemos la fórmula (1.1). ■

El lema implica, por inducción sobre la dimensión, que el radio característico $s(P)$ depende únicamente de los símbolos de Schläfli de P . Formalmente, podemos decir entonces que:

Teorema 1.3.12. *Dos polítopos regulares son similares si y sólo si tienen el mismo símbolo de Schläfli.*

DEMOSTRACIÓN:

\Rightarrow] Es trivial.

\Leftarrow] La prueba es por inducción en la dimensión.

En el primer caso ($d = 2$), si P y P' tienen el mismo símbolo de Schläfli $\{p\}$, ambos son dos polígonos de p lados. Estos son similares trivialmente.

Ahora, si P y P' son polítopos regulares d -dimensionales en \mathbb{R}^d con el mismo símbolo de Schläfli, podemos suponer que comparten el mismo centro O y comparten al menos un vértice v . Esto implica que tienen el mismo radio circundante. Ahora, por hipótesis de inducción, P y P' tienen figuras de vértices excelentes similares Q y Q' respectivamente en v .

Luego, por el Lema 1.3.11, se tiene que $s(P) = s(P') = \frac{l}{2r}$, y como P y P' tienen el mismo radio circundante r , se tiene que la longitud de sus aristas l es la misma. Esto implica que las figuras de vértice Q y Q' yacen en el mismo plano L , tienen el mismo centro c y el mismo radio circundante $r' = r \sin 2\varphi$ (véase la Figura 1.16).

Por tal motivo, Q y Q' no sólo son similares, sino congruentes: existe una transformación ortogonal f de \mathbb{R}^d con el eje Ov fijo tal que $f(Q') = Q$. Después de ésta transformación, P y P' tienen en común el centro O , el vértice v y la figura de vértice excelente Q en v .

Ahora, sean v^* los vértices que están conectados a v mediante una arista y sea Q^* la figura de vértice excelente de v^* . Los vértices v^* son los vértices de un Q común. La reflexión ρ en el plano que pasa por O y es perpendicular a vv^* (para un v^* fijo), es un automorfismo que transforma la bandera completa $(v, vv^*, F_2, \dots, F_d)$ en la bandera completa $(v^*, v^*v, F_2, \dots, F_d)$.

El mismo argumento implica que ρ es también un automorfismo de P' , por lo que $Q^* = \rho(Q)$ es la figura de vértice excelente común de P y P' en v^* . Por lo tanto, P y P' también tienen en común todos los vértices v^* y todas las figuras de vértice Q^* en v^* .

Finalmente, para todo vértice $w \in P$, existe una secuencia de vértices $v = v_0, v_1, \dots, v_n = w$ tal que $v_i v_{i+1}$ es siempre una arista de P . Lo anterior implica paso por paso que v_0, \dots, v_n son vértices de P' también. Entonces P y P' tienen los mismos vértices, por lo tanto $P = P'$. ■

Dado que hemos considerado polítopos regulares salvo similitud, se puede decir que el símbolo de Schläfli $\{p_1, \dots, p_{d-1}\}$ es una clase de equivalencia.

Proposición 1.3.13. *Las k -caras de $\{p_1, \dots, p_{d-1}\}$ son $\{p_1, \dots, p_{k-1}\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

La prueba es por inducción sobre la dimensión. El primer caso es trivial, pues las 2-caras de P son p_1 -ágonos. Luego, la figura de vértice excelente Q_F de una k -cara F es una $(k-1)$ -cara de la figura de vértice $\{p_2, \dots, p_{d-1}\}$, por tanto, $Q_F = \{p_2, \dots, p_{k-1}\}$ por hipótesis de inducción. Finalmente, como las 2-caras de F son p_1 -ágonos, $F = \{p_1, \dots, p_{k-1}\}$. ■

Observación 1.3.14.

- Todos los duales de P son polítopos regulares mutuamente similares pues el hecho de que el dual sea un polar con respecto a la esfera centrada en O hace que los ejes de rotación de P no cambien, lo que implica que el polítopo dual simplemente es un escalamiento de otro polítopo dual donde su tamaño depende totalmente del radio de la esfera con la que tomamos el polar.
- Dado que el polítopo dual es un subconjunto finito de puntos de la esfera con la que tomamos el polar y dicha esfera está centrada en O , se tiene que el polítopo regular P y su dual P° tienen el mismo centro.

Proposición 1.3.15. *El dual de $\{p_1, \dots, p_{d-1}\}$ es $\{p_{d-1}, \dots, p_1\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

La prueba es por inducción sobre la dimensión. Sean P y R polítopos regulares d -dimensionales mutuamente duales. El caso en que la dimensión es 2 es trivial. Supongamos que se satisface para $k = d-1$. Sea $P = \{p_1, \dots, p_{d-1}\}$ el dual de $R = \{r_1, \dots, r_{d-1}\}$. Por la Proposición 1.2.15, las facetas de R son los duales de las figuras de vértice de P , por tanto, por hipótesis de inducción, $\{r_1, \dots, r_{d-2}\} = \{p_{d-1}, \dots, p_2\}$.

De nuevo, por la Proposición 1.2.15, el dual de la figura de vértice $\{r_2, \dots, r_{d-1}\}$ de R es una faceta de $R^\circ = P$, *i.e.*, un $\{p_1, \dots, p_{d-2}\}$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción, la figura de vértice $\{r_2, \dots, r_{d-1}\}$ de Q es $\{p_{d-2}, \dots, p_1\}$.

Combinando lo anterior, obtenemos que

$$\{r_1, \dots, r_{d-1}\} = \{p_{d-1}, \dots, p_1\}.$$

■

1.4. Enumeración de los polítopos regulares

A continuación delimitaremos las posibilidades de los polítopos regulares d -dimensionales.

De la fórmula

$$s^2(P) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{s^2(Q)},$$

la cual se probó en el Lema 1.3.11, despejando $\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)$ obtenemos que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) = s^2(Q) - s^2(P) \cdot s^2(Q),$$

y por la desigualdad (1.3), $s(P), s(Q) \in (0, 1)$, por lo que $s^2(P) \cdot s^2(Q) > 0$ por lo tanto,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) < s^2(Q).$$

Por otro lado, $\frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{p} > 0$ para $p \geq 3$. Además, $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)$. Así pues, dado que $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ se tiene que $\frac{1}{4} \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)$.

Juntando ambas desigualdades, se obtiene:

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) < s^2(Q), \quad (1.3)$$

para el politopo regular $P = \{p, q_2, \dots, q_{d-1}\}$, que tiene como figura de vértice a $Q = \{q_2, \dots, q_{d-1}\}$.

Comencemos con dimensión 3 e iremos generalizando:

1.4.1. Enumeración de los politopos 3-dimensionales

Comenzando con los politopos regulares 3-dimensionales, *i.e.*, $P = \{p, q\}$, tenemos que, $Q = \{q\}$, por lo que $s(Q) = \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$. Así, la desigualdad (1.3) se convierte en

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) < \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right). \quad (1.4)$$

Buscando las posibles parejas $\{p, q\}$ que admite la desigualdad (1.4), tenemos que:

- Las parejas $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$ y $\{3, 5\}$ son válidas.
- Para $\{3, q\}$ con $q \geq 6$, se tiene $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)$, por lo que no son símbolos válidos.
- El símbolo de Schläfli $\{4, 3\}$ es una pareja válida.
- El símbolo $\{4, q\}$, con $q \geq 4$, contradice la desigualdad (1.4), pues se tiene que $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)$.
- La pareja $\{5, 3\}$ satisface la desigualdad (1.4).
- Las parejas $\{5, q\}$, con $q \geq 4$, cumplen con $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)$, por tanto, no pueden ser símbolos de Schläfli de politopos regulares.

- Las parejas $\{p, q\}$, con $p \geq 6$, no satisfacen la desigualdad (1.4).

Así pues, los únicos símbolos de Schläfli que tienen posibilidad de ser politopos regulares los enlistamos a continuación:

P	$\{3, 3\}$	$\{3, 4\}$	$\{4, 3\}$	$\{3, 5\}$	$\{5, 3\}$
$s^2(P)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{16}$

Tabla 1.2: Politopos regulares 3-dimensionales

1.4.2. Enumeración de los politopos 4-dimensionales

Si consideramos ahora, el politopo 4-dimensional $P = \{p, q, r\}$, tenemos que su figura de vértice es $Q = \{q, r\}$. Si s es el radio característico de Q , de la desigualdad (1.3), obtenemos:

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2 \left(\frac{\pi}{p} \right) < s^2. \quad (1.5)$$

Ahora, buscaremos las posibles tripletas que satisfacen la desigualdad (1.5), a sabiendas de que la Tabla 1.2 contiene los únicos posibles valores de s^2 :

- Las tripletas $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 3, 5\}$ y $\{3, 4, 3\}$ son válidas.
- Para la tripleta $\{3, 5, 3\}$, obtenemos $\cos^2 \left(\frac{\pi}{3} \right) > s^2 = s^2(\{5, 3\})$ de la Tabla 1.2, por lo que no satisface la desigualdad (1.5).
- De los símbolos de Schläfli que tienen por 2-caras a 4-ágonos, al tener $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$, se tiene, por la Tabla 1.2, que la única tripleta válida es la que tiene figura de vértice $\{3, 3\}$, *i.e.*, $\{4, 3, 3\}$.
- Para los símbolos con 5-ágonos por 2-caras, se tiene que $\cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) \approx .65$, por tanto, de la Tabla 1.2, concluimos que sólo el símbolo de Schläfli $\{5, 3, 3\}$ es una tripleta que satisface la desigualdad (1.5).
- Finalmente, para las tripletas $\{p, q_1, q_2\}$, con $p \geq 6$, no se satisface la desigualdad (1.5) en ninguno de los casos válidos de $Q = \{q_1, q_2\}$.

Así pues, únicamente hay 6 posibles tripletas para los politopos 4-dimensionales, los cuales enlistamos en la siguiente tabla:

P	$\{3, 3, 3\}$	$\{3, 3, 4\}$	$\{4, 3, 3\}$
$s^2(P)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

P	$\{3, 4, 3\}$	$\{3, 3, 5\}$	$\{5, 3, 3\}$
$s^2(P)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{16}$

Tabla 1.3: Polítopos regulares 4-dimensionales

1.4.3. Enumeración de los polítopos d -dimensionales

De la misma manera que dedujimos la Tabla 1.3, en dimensión $d \geq 5$, sólo permanecen 3 posibilidades:

P	$\{3, \dots, 3\}$	$\{3, \dots, 3, 4\}$	$\{4, 3, \dots, 3\}$
$s^2(P)$	$\frac{d+1}{2d}$	$\{\frac{1}{2}\}$	$\{\frac{1}{n+1}\}$

Tabla 1.4: Polítopos regulares d -dimensionales

1.5. Realizaciones de símbolos de Schläfli

Realicemos ahora las posibilidades obtenidas de la Sección 1.4.

Resulta que todos los símbolos de Schläfli de las Tablas 1.2, 1.3 y 1.4 son realizables; a continuación haremos la realización de dichos símbolos. Para los sólidos regulares 4-dimensionales haremos uso de los *diagramas de Schlegel*¹

Realización de $\{3, \dots, 3\}$: Consideremos los puntos unitarios canónicos de \mathbb{R}^{d+1} dados por $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$. La envoltura convexa T^d , de dichos puntos, es el d -tetraedro con vértices e_1, \dots, e_{d+1} . Yace en el primo $x_1 + \dots + x_{d+1} = 1$ de \mathbb{R}^{d+1} .

Toda permutación de los $d + 1$ vértices es un automorfismo de T^d , por tanto, T^d es un sólido regular. El dual del d -tetraedro es de nuevo un tetraedro. El símbolo de Schläfli correspondiente al d -tetraedro es $\{3, \dots, 3\}$.

¹Un diagrama de Schlegel es una proyección de un polítopo contenido en \mathbb{R}^d sobre el espacio \mathbb{R}^{d-1} a través de un punto que está fuera de cualquiera de sus caras, obteniendo una división politépica de las caras en \mathbb{R}^{d-1} combinatoriamente equivalente al polítopo original.

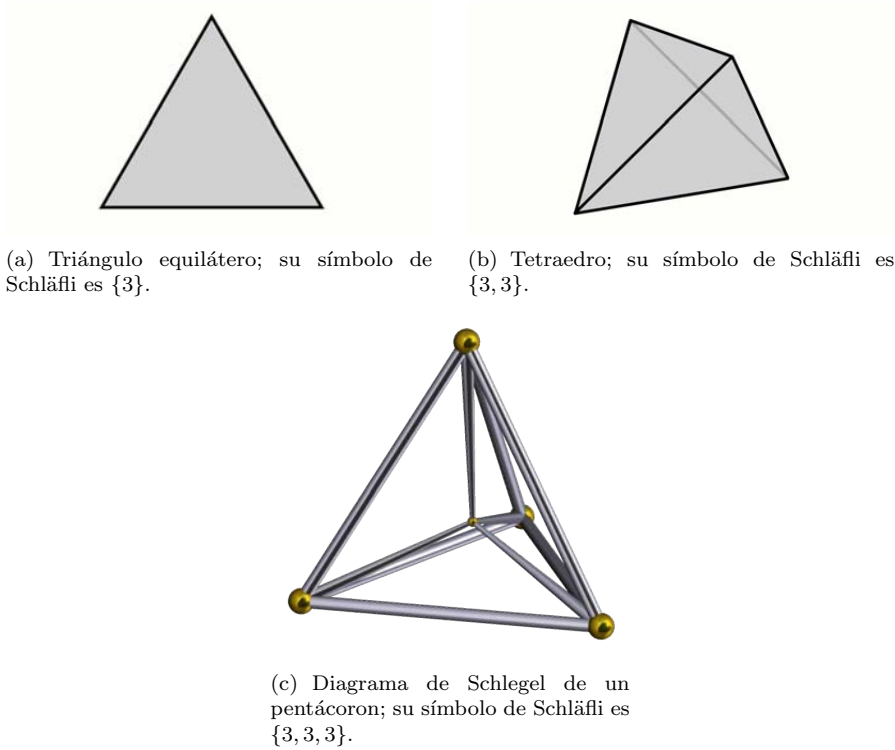


Figura 1.18: Realización del d -tetraedro

Como casos particulares, tenemos el triángulo equilátero T^2 (ver Figura 1.18(a)), el tetraedro regular T^3 (ver Figura 1.18(b)) y el *pentácoron* T^4 (ver Figura 1.18(c)²), también llamado *4-simplejo* o *5-cell*.

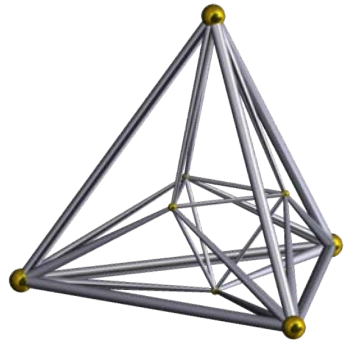
Realización de $\{3, \dots, 3, 4\}$: Sean $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$ los puntos unitarios canónicos de \mathbb{R}^d . La envoltura convexa de los $2d$ puntos $\pm e_1, \dots, \pm e_d$, es el d -octaedro O^d con $2d$ vértices.

Ahora, si v es un vértice, $-v$ también lo es. Una permutación α de los $2d$ vértices es un automorfismo O^d si y sólo si $\alpha(-v) = -\alpha(v)$ para todo vértice. Así pues, O^d es un sólido regular con símbolo de Schläfli $\{3, \dots, 3, 4\}$.

²Diagrama de Schlegel de un 5-cell tomado de <http://en.wikipedia.org/wiki/5-cell>



(a) Cuadrado; su símbolo de Schläfli es $\{4\}$. (b) Octaedro regular; su símbolo de Schläfli es $\{3, 4\}$.



(c) Diagrama de Schlegel de un hexadecacoron; su símbolo de Schläfli es $\{3, 3, 4\}$.

Figura 1.19: Realización del d -octaedro

Como casos particulares, tenemos el cuadrilátero regular O^2 (ver Figura 1.19(a)), el octaedro regular O^3 (ver Figura 1.19(b)) y el *hexadecacoron* O^4 (ver Figura 1.19(c)³) también llamado *16-cell*.

Realización de $\{4, 3, \dots, 3\}$: Este sólido regular es un d -cubo y está dado por

$$C^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \text{ para } i = 1, \dots, d\}.$$

El sólido regular es el dual del d -octaedro y tiene símbolo de Schläfli $\{4, 3, \dots, 3\}$.

Como casos especiales para el d -cubo, tenemos el cuadrilátero regular C^2 (ver Figura 1.20(a)), el hexaedro C^3 (ver Figura 1.20(b)) y el *teseracto* C^4 también conocido por *octacoron*, *hipercubo* y *8-cell* (ver Figura 1.20(c)⁴).

³Diagrama de Schlegel de un 16-cell tomado de <http://en.wikipedia.org/wiki/16-cell>

⁴Diagrama de Schlegel de un 8-cell tomado de <http://en.wikipedia.org/wiki/8-cell>

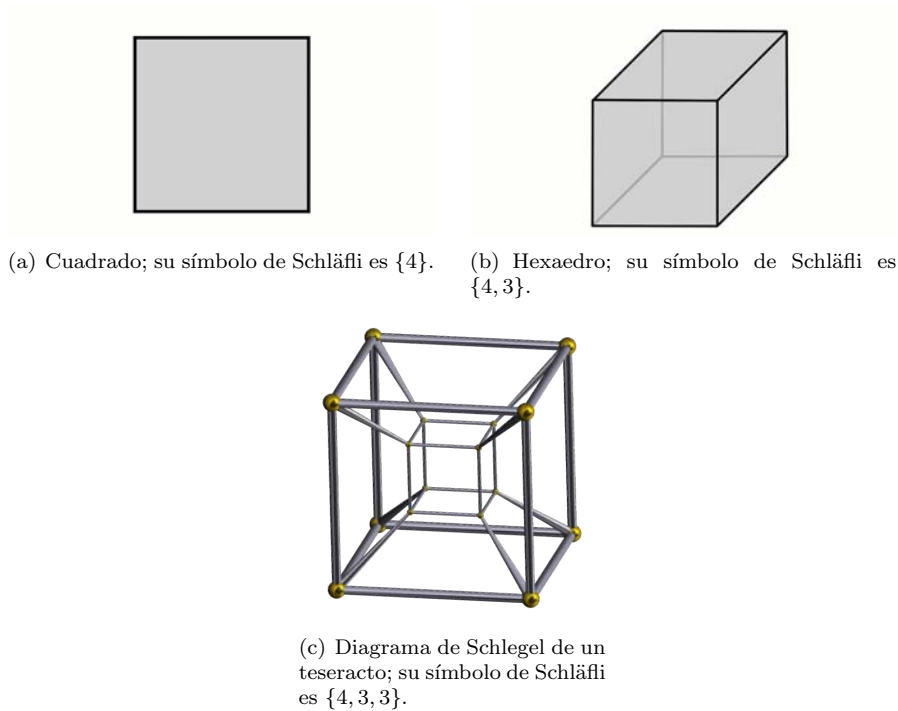


Figura 1.20: Realización del d -cubo

Realización de $\{3,5\}$: Comenzamos con el octaedro 2-coloreado de la Figura 1.6(a) que se utilizó en la Sección 1.1. Todo automorfismo que mantiene invariante la 2-coloración, claramente es un automorfismo del icosaedro inscrito (ver Figura 1.6(c)) que se construyó a razón $a : b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pues los vértices del icosaedro están en correspondencia con las aristas del octaedro y dado que los automorfismos actúan transitivamente en las aristas del octaedro, *i.e.*, podemos transformar cualquier arista del octaedro en cualquier otra mediante un automorfismo, actúan de igual manera en los vértices del icosaedro.

En el icosaedro construido por un antiprisma pentagonal y dos pirámides pentagonales (ver Figura 1.5), tomamos la cúspide de una de las pirámides como el vértice v , vemos que su figura de vértice excelente es un pentágono. Por tanto, todo automorfismo de esta figura de vértice, proviene de un automorfismo del icosaedro que fija a v .

Ambas descripciones juntas, muestran que el icosaedro satisface el criterio de regularidad 1.3.8.

Finalmente, como las caras 2-dimensionales del icosaedro son triángulos y las figuras de vértice son pentágonos, el icosaedro tiene símbolo de Schläfli $\{3,5\}$.

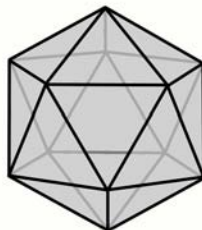


Figura 1.21: Icosaedro; su símbolo de Schläfli es $\{3, 5\}$.

Para los símbolos restantes, $\{3, 3, 5\}$, $\{5, 3, 3\}$ y $\{3, 4, 3\}$, no tenemos una realización sencilla, pues en principio es complicado describir algo en cuatro dimensiones. Hasta ahora, sólo podemos hacer uso de la Proposición 1.3.13 para saber cómo son las k -caras del politopo regular. La cantidad de k -caras será proporcionada más adelante en el Teorema 3.3.3. Así pues:

Realización de $\{3, 3, 5\}$: El símbolo se realiza con 600 tetraedros 3-dimensionales, 1200 triángulos, 720 aristas y 120 vértices. Es llamado *hexacosicoron* o *600-cell* [11]. En la Figura 1.22⁵ se muestra su diagrama de Schlegel.

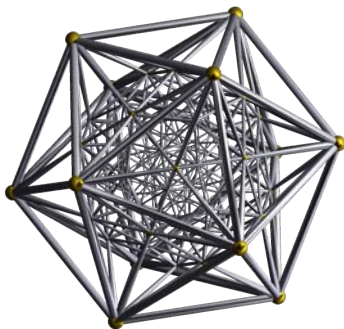


Figura 1.22: Diagrama de Schlegel de un hexacosicoron; su símbolo de Schläfli es $\{3, 3, 5\}$.

Realización de $\{5, 3, 3\}$: Este politopo regular 4-dimensional es el dual del 600-cell por tanto está constituido por 120 dodecaedros, 720 pentágonos, 1200 aristas, y 600 vértices. Es llamado *hecatonicosacorón*, *hiperdodecaedro* o *120-cell* [11]. Su diagrama de Schlegel se muestra en la Figura 1.23⁶

⁵Diagrama de Schlegel de un 600-cell tomado de <http://en.wikipedia.org/wiki/600-cell>

⁶Diagrama de Schlegel de un 120-cell tomado de <http://en.wikipedia.org/wiki/120-cell>

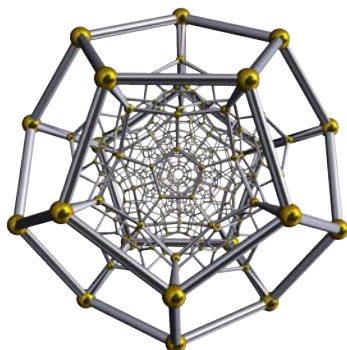


Figura 1.23: Diagrama de Schlegel de un hecatonicosacoron; su símbolo de Schläfli es $\{5, 3, 3\}$.

Realización de $\{3, 4, 3\}$: Finalmente, el politopo 4-dimensional $\{3, 4, 3\}$, consta de 8 vértices, 24 aristas, 32 triángulos equiláteros y 16 tetraedros 3-dimensionales regulares y es llamado *icositetraoron* o *24-cell*. En la Figura 1.24⁷ se muestra su diagrama de Schlegel.

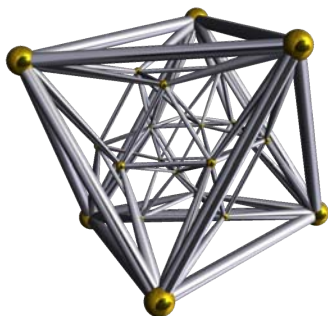


Figura 1.24: Diagrama de Schlegel de un icositetraoron; su símbolo de Schläfli es $\{3, 4, 3\}$.

El icositetraoron, al igual que el d -tetraedro es *autodual i.e.*, su politopo dual es nuevamente un icositetraoron.

Cabe mencionar que éste sólido regular es el único sólido regular que es puramente 4-dimensional, *i.e.*, no tiene una versión análoga en dimensiones $d \neq 4$ [11].

⁷Diagrama de Schlegel de un 24-cell tomado de <http://en.wikipedia.org/wiki/24-cell>

Capítulo 2

Grupos de rotación finitos

Antes de continuar, definamos el grupo ortogonal real y el grupo ortogonal especial real:

Definición 2.0.1. El *grupo ortogonal* real de dimensión n , denotado por $O(n)$, es el grupo de transformaciones que preservan distancia y fijan el origen del espacio real de coordenadas \mathbb{R}^n . La operación del grupo está dada por la composición de transformaciones.

Equivalentemente, el grupo ortogonal es el grupo de *matrices ortogonales* $n \times n$ que tiene la multiplicación de matrices como operación de grupo, donde las matrices ortogonales son matrices reales cuya inversa es igual a su transpuesta *i.e.*, O es una matriz ortogonal si y sólo si cumple que $OO^t = O^tO = E$.

Claramente, podemos deducir que el determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1 pues $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ y $\det A = \det A^t$.

Observación 2.0.2. La generalización del grupo ortogonal real es el grupo de operadores lineales invertibles que preservan formas bilineales simétricas no degeneradas en un espacio vectorial sobre un campo.

Un caso particular de la Observación 2.0.2, es cuando la forma bilineal es el producto interno estándar en el espacio vectorial \mathbb{F}^n sobre el campo \mathbb{F} ; el grupo ortogonal, denotado por $O(n, \mathbb{F})$, es el conjunto de matrices ortogonales $n \times n$ con entradas en el campo \mathbb{F} dado por

$$O(n, \mathbb{F}) = \{Q \in GL(n, \mathbb{F}) \mid Q^tQ = QQ^t = \text{Id}\},$$

donde la operación de grupo está dada por la multiplicación de matrices y $GL(n, \mathbb{F})$ está definido como sigue:

Definición 2.0.3. El *grupo general lineal* del espacio vectorial E , es el grupo formado por todos los automorfismos de E y es denotado por $GL(E)$. Cuando

el espacio vectorial $E = \mathbb{F}^n$, siendo \mathbb{F} un campo, se denota $\text{GL}(n, \mathbb{F})$ y se le llama grupo general lineal de grado n sobre el campo \mathbb{F} . $\text{GL}(n, \mathbb{F})$, puede ser pensado como el grupo de matrices invertibles $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , con la operación de grupo dada por la multiplicación de matrices.

Un subgrupo importante del grupo general lineal, es el grupo especial lineal definido como sigue:

Definición 2.0.4. El *grupo especial lineal*, denotado por $\text{SL}(n, \mathbb{F})$ está dado por

$$\text{SL}(n, \mathbb{F}) = \{Q \in \text{GL}(n, \mathbb{F}) \mid \det Q = 1\}.$$

Retomando lo del determinante de matrices ortogonales, se tiene que aquellas matrices ortogonales con determinante 1, forman un subgrupo de $\text{O}(n, \mathbb{F})$ de índice 2, y por tanto *normal*, el cual se define a continuación como:

Definición 2.0.5. El *grupo ortogonal especial*, denotado por $\text{SO}(n, \mathbb{F})$ está dado por

$$\text{SO}(n, \mathbb{F}) = \{Q \in \text{O}(n, \mathbb{F}) \mid \det Q = 1\}.$$

Cuando el campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, este grupo es llamado también *grupo de rotaciones* del espacio \mathbb{R}^n , pues en dimensiones $n = 2$ y $n = 3$, sus elementos son las rotaciones usuales alrededor del origen ($n = 2$) o una línea que pasa por el origen ($n = 3$).

Los grupos $\text{O}(n, \mathbb{F})$, $\text{GL}(n, \mathbb{F})$, $\text{SL}(n, \mathbb{F})$ y $\text{SO}(n, \mathbb{F})$ se denotarán simplemente por $\text{O}(n)$, $\text{GL}(n)$, $\text{SL}(n)$ y $\text{SO}(n)$ respectivamente, cuando el campo \mathbb{F} sea igual a \mathbb{R} .

Dado que toda rotación en \mathbb{R}^n es un elemento del grupo $\text{SO}(n)$, se tiene que todo subgrupo de rotación finito es un subgrupo del grupo de rotaciones $\text{SO}(n)$.

Ahora bien, en dimensión 3, existe una conexión muy fuerte entre los polítopos regulares y los subgrupos finitos de rotaciones de $\text{SO}(3)$. La geometría de los sólidos, permite la formulación de ciertas propiedades abstractas que cumplen sus respectivos grupos asociados. En este capítulo, se estudiará la estructura que tienen estos grupos en relación con los polítopos regulares.

2.1. Grupos de rotación de los sólidos platónicos

Tomemos como centro del sólido platónico $P = \{p, q\}$, al origen de \mathbb{R}^3 . Por definición, el grupo de rotaciones de P consiste de todas las rotaciones que transforman P en sí mismo, *i.e.*, los elementos del grupo de rotaciones $\text{SO}(3)$ que dejan invariante a P . Como $\text{SO}(3)$ es el subgrupo normal de índice 2 del grupo ortogonal $\text{O}(3)$, se tiene también que el grupo de rotación de P , es un subgrupo

de índice 2 del grupo de todos los automorfismos de P .

En esta sección calcularemos los grupos de rotación de los sólidos platónicos. La noción de dualidad nos facilita el trabajo, pues los sólidos duales tienen el mismo grupo finito asociado que el sólido original [9], lo que implica que basta con estudiar los grupos del tetraedro, octaedro (o hexaedro) e icosaedro (o dodecaedro) para conocer todos los grupos de rotación.

A sabiendas de que toda rotación en \mathbb{R}^3 tiene asociados un ángulo y un eje que pasa por el origen; analizando el símbolo de Schläfli de los polítopos regulares, tenemos las tres posibles rotaciones siguientes para el polítopo $P = \{p, q\}$:

- 1) El eje que pasa por un vértice y el ángulo es un múltiplo de $\frac{2\pi}{q}$.
- 2) El eje que pasa por el punto medio de cualquier arista con ángulo $\frac{2\pi}{2} = \pi$.
- 3) El eje que pasa a través del centro de una cara y el ángulo es un múltiplo de $\frac{2\pi}{p}$.

A estos ejes los llamaremos q -eje, 2 -eje y p -eje respectivamente.

Ahora, analizando la geometría de cada uno de los polítopos regulares, tenemos las rotaciones específicas siguientes para cada uno de ellos:

Tetraedro: Los ejes que pasan a través de vértices y los que pasan a través de centros de caras son los mismos; existen 4 de ellos y cada uno es un 3-eje. Los ejes que pasan a través de puntos medios de aristas vienen en pares antipodales, por lo que sólo hay 3 de ellos que son 2-ejes. En la Tabla 2.1 se enumeran los elementos del grupo asociado al tetraedro el cual llamaremos *grupo del tetraedro* también conocido como *Tetraédrico* y lo denotaremos por T .

Tipo y cantidad de ejes	Elementos que genera cada eje	Total de elementos en el grupo
4 ejes por vértices	2 elementos de orden 3	8
3 ejes por aristas	1 elemento de orden 2	3
Identidad	1 elemento de orden 1	1
Orden del grupo del tetraedro =12		

Tabla 2.1: Rotaciones del tetraedro

Octaedro: Los tres tipos de ejes (por vértices, por puntos medios de aristas y por centros de caras) vienen en parejas antipodales y dado que el octaedro tiene 6 vértices, 12 aristas y 8 caras, se tiene que existen tres q -ejes a través de vértices, seis 2-ejes a través de puntos medios de aristas y cuatro p -ejes que pasan a través de centros de caras. Cabe destacar que en cada q -eje se tiene un elemento de orden dos y dos elementos de orden 4. En la Tabla 2.2 se enumeran los elementos del grupo asociado al octaedro el cual llamaremos *grupo del octaedro* o simplemente *Octaédrico* y lo denotaremos por O .

Tipo y cantidad de ejes	Elementos que genera cada eje	Total de elementos en el grupo
3 ejes por vértices	2 de orden 4	6
	1 de orden 2	3
6 ejes por aristas	1 de orden 2	6
4 ejes por caras	2 de orden 3	8
Identidad	1 de orden 1	1
Orden del grupo del octaedro = 24		

Tabla 2.2: Rotaciones del octaedro

Icosaedro: Al igual que el octaedro, los tres tipos de ejes vienen en parejas antipodales. El icosaedro tiene 12 vértices, 30 aristas y 20 caras, por lo que se tienen seis q -ejes a través de vértices, quince 2-ejes a través de aristas y diez p -ejes a través de caras. En la Tabla 2.3 se enumeran los elementos asociados al *grupo del icosaedro* también llamado *Icosaédrico* y lo denotaremos por I .

Tipo y cantidad de ejes	Elementos que genera cada eje	Total de elementos en el grupo
6 ejes por vértices	4 de orden 5	24
15 ejes por aristas	1 de orden 2	15
10 ejes por caras	2 de orden 3	20
Identidad	1 de orden 1	1
Orden del grupo del icosaedro = 60		

Tabla 2.3: Rotaciones del icosaedro

2.1.1. Relación entre los grupos de rotaciones con los grupos de permutaciones

Tomando en cuenta las observaciones anteriores, identificaremos los grupos de rotaciones de los sólidos platónicos con los grupos de permutaciones:

Grupo del tetraedro (Tetraédrico) T :

El grupo completo de automorfismos del tetraedro lo podemos meter en el grupo simétrico S_4 que consiste de todas las permutaciones de 4 elementos. A diferencia de las permutaciones impares, las permutaciones pares son rotaciones, por lo que el grupo de rotaciones del tetraedro es precisamente el grupo alternante A_4 .

Grupo del octaedro (Octaédrico) O :

En el octaedro, las 8 caras vienen en 4 parejas de caras paralelas (ver Figura 2.1). Los elementos del grupo del octaedro permuta éstas cuatro parejas, por lo que podemos incluir el grupo en el grupo de permutaciones de 4 elementos S_4 .

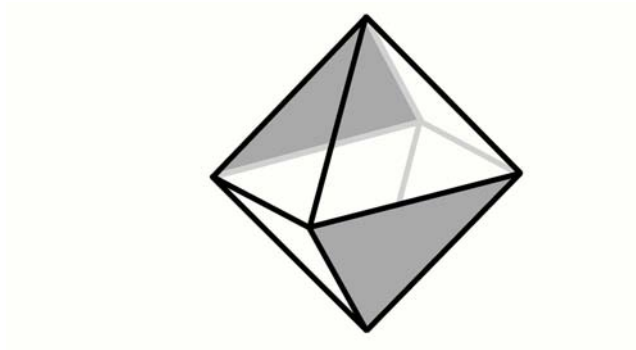


Figura 2.1: Caras paralelas en un octaedro

Ahora, como toda permutación corresponde a una rotación del octaedro, se tiene que el grupo de rotación del octaedro es completamente el grupo simétrico S_4 .

Como el hexaedro es el sólido dual del octaedro, se tiene que el grupo del hexaedro es también S_4 .

Grupo del icosaedro (Icosaédrico) I :

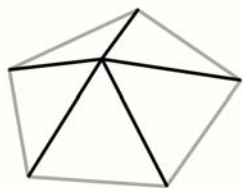
Al icosaedro le podemos asociar cinco cubos independientes entre sí los cuales tienen sus caras en correspondencia con las aristas del icosaedro como se muestra en la Figura 2.2. Con esto, podemos considerar las aristas que corresponden a cada cubo como clases de equivalencia.



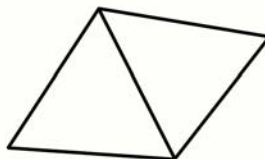
Figura 2.2: Aristas del icosaedro que corresponden a las caras de un cubo

Una manera de saber si las aristas pertenecen a una misma clase (cubo) es la siguiente: dos aristas pertenecen a la misma clase si y sólo si son paralelas o perpendiculares entre si.

Así pues, existen cinco clases con seis aristas cada una; lo que agota las 30 aristas que tiene el icosaedro. Notemos que cinco aristas con un vértice en común como en la Figura 2.3(a) o cinco aristas que pertenecen a dos caras con una arista común como en la Figura 2.3(b), pertenecen a clases distintas.



(a) Cinco aristas con un vértice en común.



(b) Aristas de dos triángulos con una arista en común.

Figura 2.3: Aristas en distintas clases de equivalencias

Los elementos del grupo de rotación del icosaedro, permutan las cinco clases [9, Cap I, Sec 8]. En la Figura 2.3(a) se observa que las rotaciones sobre ejes que pasan por vértices producen permutaciones cíclicas de orden cinco de las clases de equivalencia. En la Figura 2.3(b) vemos que la rotación sobre el eje que pasa por el punto medio de la arista común de los triángulos produce una permutación que consta de dos transposiciones de las cinco clases de equivalencia y una clase permanece invariante. Por último, como las 2-caras del icosaedro son triángulos equiláteros, las rotaciones sobre los ejes que pasan por centros de caras producen permutaciones cíclicas de orden tres, en las cuales se permutan las tres clases de equivalencia representadas por los lados de dichos triángulos dejando a dos clases de equivalencia invariantes.

Ésta inspección muestra que el grupo de rotación del icosaedro puede ser considerado como un subgrupo de S_5 . Las permutaciones pares, a diferencia de las permutaciones impares, son rotaciones, por tal motivo, el grupo de rotación del icosaedro es el grupo alternante A_5 .

Como el dodecaedro es el sólido dual del icosaedro, se tiene que el grupo del dodecaedro es también A_5 .

2.2. Subgrupos finitos del grupo de rotación $SO(3)$

Definamos lo que es una acción de grupo:

Definición 2.2.1. Sea S un conjunto, G un grupo y e la identidad de G . Una acción de G en S por la izquierda, asigna a todo $g \in G$ una función $\phi : G \times S \rightarrow S$, con las siguientes propiedades:

- 1) $\phi(e, s) = s$, para toda $s \in S$ y $e \in G$.

2) $\phi(hg, s) = \phi(h, \phi(g, s))$, para toda $s \in S$ y $g, h \in G$.

Cuando el subconjunto S es precisamente G , la acción dada por $\phi(g, s) = gsg^{-1}$, se dice que es una *acción por conjugación*. Si aplicamos la acción a un subgrupo H de G , lo que obtenemos es otro subgrupo de G denotado por gHg^{-1} ; decimos que H y gHg^{-1} son subgrupos *conjugados* en G .

Ahora, además de los grupos de los sólidos regulares, existen dos series infinitas de subgrupos finitos de $SO(3)$; Los subgrupos cíclicos de orden p y los subgrupos p -diédricos de orden $2p$ con $p < \infty$.

Grupos cíclicos:

Cada uno de los subgrupos cíclicos consiste de todas las rotaciones en torno a un eje fijo con ángulos $\frac{2\pi j}{q}$, donde $j = 1, \dots, q$. Cualesquiera dos de éstos subgrupos, son conjugados en $SO(3)$. Los denotaremos C_q .

Grupos diédricos:

En el caso en el que $q = 2$, dadas tres líneas perpendiculares entre si que pasen por el origen, el subgrupo finito que deja cada línea invariante consiste de las π -rotaciones alrededor de cada una de las líneas y la identidad. Este grupo de orden cuatro, es llamado *2-diédrico* o *four group*. Cualesquiera dos de ellos, son conjugados en $SO(3)$.

Para $q \geq 3$ consideramos un q -ágono regular plano con centro en el origen. El grupo q -diédrico, consiste de todas las rotaciones que dejan invariante al q -ágono: la línea que pasa a través del origen y es perpendicular al q -ágono es un q -eje, los otros ejes son 2-ejes que pasan a través de vértices y de puntos medios de aristas del q -ágono; hay q ejes de este tipo (si q es impar, los ejes pasan a través de un vértice y un punto medio de arista; si q es par, los ejes pasan por dos vértices o por dos puntos medios de aristas). Por lo anterior, el q -diédrico tiene orden $2q$ ($q - 1$ elementos generados por el q -eje, q elementos generados por los q 2-ejes y la identidad). De nuevo, cualesquiera dos de éstos subgrupos, son conjugados en $SO(3)$. Los denotaremos por D_q .

Notemos que el q -ágono plano puede ser considerado como un sólido regular degenerado con su cara contada dos veces, lo que le da también el nombre de diédrico.

Definición 2.2.2. Sea G un subgrupo finito de $SO(3)$ y \mathbb{S}^2 la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 . Para cada punto $p \in \mathbb{S}^2$, definimos el *grupo de isotropía* en p como

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\} < G.$$

Definición 2.2.3. Sea G un subgrupo finito de $SO(3)$ y \mathbb{S}^2 la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 . Definimos la *órbita* de un punto $p \in \mathbb{S}^2$ como el subconjunto de \mathbb{S}^2 dado por

$$G \cdot p = \{g \cdot p \in \mathbb{S}^2 \mid g \in G\}.$$

Si $n(p)$ es el orden del subgrupo de isotropía en p y $n(p) > 1$ entonces la órbita $G \cdot p$ es llamada *órbita excepcional* con respecto a p .

Observación 2.2.4. La acción de $G < \text{SO}(3)$ en \mathbb{S}^2 está bien definida, pues en particular, los elementos de $\text{SO}(3)$ son transformaciones que preservan distancia y fijan el origen de \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.2.5. *Salvo conjugación, los subgrupos finitos de $\text{SO}(3)$ son los siguientes:*

- Los grupos cíclicos de orden q , tal que $2 \leq q < \infty$.
- Los grupos diédricos de orden $2q$, tal que $2 \leq q < \infty$.
- El grupo del tetraedro.
- El grupo del octaedro (o hexaedro).
- El grupo del icosaedro (o dodecaedro).

DEMOSTRACIÓN:

De la Observación 2.2.4 tenemos que la esfera \mathbb{S}^2 es invariante con respecto a cualquier elemento del grupo de rotaciones $\text{SO}(3)$, por tanto, nos basta con considerar puntos en la esfera \mathbb{S}^2 .

Sea G un subgrupo finito de $\text{SO}(3)$. Claramente, la esfera \mathbb{S}^2 es la unión disjunta de sus órbitas *i.e.*,

$$\mathbb{S}^2 = \bigsqcup_{p \in \mathbb{S}^2} G \cdot p.$$

Sea $n(p)$ el orden del subgrupo de isotropía G_p con $p \in \mathbb{S}^2$. Como los grupos de isotropía son subgrupos de G se tiene que $n(p) \mid |G|$.

El cociente $c = \frac{N}{n(p)}$ es la cardinalidad de la órbita $G \cdot p$, donde N es el orden de G , pues $\Phi : G/G_p \rightarrow G \cdot p$, tal que $\Phi(g \cdot G_p) = g \cdot p$, es una biyección bien definida. Lo que implica que, si p y q pertenecen a la misma órbita, el orden de sus respectivos grupos de isotropía es el mismo, *i.e.*,

$$n(p) = n(q)$$

Ahora bien, consideremos el conjunto

$$\mathcal{M} = \{(g, p) \mid g \in G \setminus \{1\}, p \in \mathbb{S}^2, g \cdot p = p\}.$$

Para analizar \mathcal{M} , primero fijemos $g \in G \setminus \{1\}$. Existen exactamente dos puntos p y q en \mathbb{S}^2 tales que (g, p) y (g, q) están en \mathcal{M} ; los puntos antipodales en donde el eje correspondiente a g interseca a la esfera \mathbb{S}^2 . Esto implica que la cardinalidad de \mathcal{M} está dada por

$$|\mathcal{M}| = 2(N - 1) \tag{2.1}$$

Si ahora fijamos $p \in \mathbb{S}^2$, $(g, p) \in \mathcal{M}$ si y sólo si $g \in G_p \setminus \{1\}$. Por tal motivo, cada punto p de la esfera \mathbb{S}^2 , contribuye en $n(p) - 1$ elementos al conjunto \mathcal{M} . Ahora, dado que las órbitas no excepcionales cumplen que $n(p) = 1$, se tiene que los puntos en la esfera que no están en órbitas excepcionales, aportan $n(p) - 1 = 1 - 1 = 0$ elementos al conjunto \mathcal{M} . Así pues, sólo necesitamos considerar los puntos que están en órbitas excepcionales.

Por la ecuación (2.1), se tiene que el conjunto \mathcal{M} es finito. En consecuencia, sólo existe un número finito de órbitas excepcionales. Denotemos dichas órbitas por

$$\Sigma_1, \dots, \Sigma_k.$$

Sea c_i la cardinalidad de Σ_i y $n_i = n(p)$ para algún $p \in \Sigma_i$ (notemos que no hay ambigüedad al definir n_i de esta manera, pues el orden de los subgrupos de isotropía de los elementos de una misma órbita es el mismo).

Se tiene entonces que los elementos de Σ_i contribuyen con $c_i(n_i - 1)$ elementos al conjunto \mathcal{M} , por lo tanto,

$$|\mathcal{M}| = \sum_{i=1}^k c_i(n_i - 1) \quad (2.2)$$

Luego, combinando las ecuaciones (2.1) y (2.2), obtenemos la siguiente igualdad:

$$2(N - 1) = \sum_{i=1}^k c_i(n_i - 1),$$

y, dividiendo por el correspondiente $N = c_i n_i$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} = \frac{2}{N} + k - 2 \quad (2.3)$$

Esto restringe las posibilidades de los subgrupos finitos de $\text{SO}(3)$.

Dado que $n_i \geq 2$, la ecuación 2.3 cumple con la siguiente desigualdad

$$\frac{k}{2} \geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} = \frac{2}{N} + k - 2, \quad (2.4)$$

y por tanto, $k < 4$, pues de la desigualdad (2.4) se tiene

$$\frac{4 - k}{2} \geq \frac{2}{N}.$$

Veamos pues lo que ocurre en los casos $k = 1, 2, 3$:

Caso $k = 1$: Es imposible, pues de la ecuación (2.3) obtenemos

$$\frac{1}{n_i} = \frac{2 - N}{N},$$

lo que implica que

$$N(1 - n_i) = 2n_i.$$

Luego, como $n_i \geq 2$, tenemos que $N(1 - n_i) < 0$ y $2n_i > 0$, lo cual es una contradicción.

Caso $k = 2$: En este caso, obtenemos

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{N},$$

y, dado que, tanto n_i como N son enteros, la ecuación se satisface sólo cuando $n_1 = n_2 = N$, *i.e.*, $G = G_p$ para algún p , por lo que G es un subgrupo cíclico.

Caso $k = 3$: Aquí, de la ecuación (2.3), obtenemos

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{2}{N} + 1, \quad (2.5)$$

y como $N > 0$, de la ecuación (2.5) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1 \quad (2.6)$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Con esta suposición, la desigualdad (2.6), sólo tiene las soluciones

$$(2, 2, q) \text{ con } q \geq 2, \quad (2, 3, 3), \quad (2, 3, 4) \text{ y } (2, 3, 5),$$

pues con (2, 3, 6) y (3, 3, 3) obtenemos

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1,$$

y cualquier otra tripleta cumplirá con

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1.$$

Tenemos pues que los subgrupos finitos de $SO(3)$ son de cinco tipos distintos: cíclicos (como en el caso $k = 2$), los correspondientes a la tripleta (2, 2, q) con $q \geq 2$, los correspondientes a la tripleta (2, 3, 3), los correspondientes a la tripleta (2, 3, 4) y los correspondientes a la tripleta (2, 3, 5). Llamaremos a éstos últimos, del tipo A_q, B, C y D respectivamente.

Utilizando la fórmula (2.3), obtenemos

$$N = \frac{2}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i} - 1},$$

de donde podemos calcular la cardinalidad de G para cada tipo de subgrupo. Por otra parte, podemos calcular la cardinalidad de las órbitas excepcionales, pues $c_i = \frac{N}{n_i}$. Con estos datos, se construye la siguiente tabla para los distintos tipos de subgrupos finitos no-cíclicos de $\text{SO}(3)$:

Tipo de tripleta	A_q	B	C	D
n_1	2	2	2	2
n_2	2	3	3	3
n_3	$q \geq 2$	3	4	5
c_1	q	6	12	30
c_2	q	4	8	20
c_3	2	4	6	12
N	$2q$	12	24	60

Tabla 2.4: Información de órbitas excepcionales

Notemos que los q -diédricos, Tetraédricos, Octaédricos e Icosaédricos son de los tipos A_q, B, C y D respectivamente. Ahora, como en la Tabla 2.4 se establecen los únicos posibles subgrupos finitos no-cíclicos de $\text{SO}(3)$, para concluir con la demostración, resta mostrar que cualquier subgrupo finito del tipo A_q, B, C o D es un grupo D_q, T, O o I respectivamente.

Tipo A_2 : De acuerdo a la Tabla 2.4, para el grupo G del tipo A_2 , las órbitas excepcionales consisten de dos puntos cada una. Sean $\Sigma_i = \{p_i, q_i\}$ dichas órbitas ($i = 1, 2, 3$). Mostremos que q_i es el punto antipodal de p_i y que todos los vectores \vec{p}_i son perpendiculares entre si *i.e.*, $q_i = -p_i$ y $\langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

Dado que el orden de cualquier subgrupo de isotropía es dos, y que las órbitas son invariantes bajo los elementos del grupo de isotropía, se tiene que existe sólo un $g \in G \setminus \{1\}$ tal que $g \cdot q_i = q_i$, por tanto $g \cdot p_i = p_i$. Ahora, como el conjunto de puntos fijos (en la esfera) de cualquier transformación $g \in \text{SO}(3) - \{1\}$ consiste de los dos puntos antipodales en donde el eje de rotación, correspondiente a g , corta a la esfera \mathbb{S}^2 , se concluye que $q_i = -p_i$.

Sea $g \cdot p_i = p_i$. Por la invarianza de las órbitas bajo los elementos del subgrupo, se tiene $g \cdot p_j = -p_j$ para $j \neq i$. Luego, recordando que el producto interior es invariante bajo rotaciones, aplicando g , se tiene que

$$\langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle = \langle g \cdot \vec{p}_i, g \cdot \vec{p}_j \rangle = \langle \vec{p}_i, -\vec{p}_j \rangle,$$

lo que implica que $\langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle = 0$, *i.e.*, \vec{p}_i es perpendicular a \vec{p}_j con $i \neq j$. Por tanto, los \vec{p}_i 's y a su vez los ejes que pasan por el origen y los p_i 's, son mutuamente perpendiculares. Cada uno de ellos es invariante por la acción del subgrupo G , por tanto, G es un subgrupo del 2-diédrico. Finalmente, como ambos grupos tienen orden cuatro, $G = D_2$.

Ahora, para mostrar la relación entre los subgrupos G del tipo A_q ($q \geq 3$), B , C y D , con los subgrupos D_q , T , O e I , encontraremos un q -diédrico, un tetraedro, un octaedro y un icosaedro respectivamente, que permanece invariante bajo el subgrupo G y así, G coincide con el correspondiente subgrupo.

Tipo A_q ($q \geq 3$): Si G es del tipo A_q ($q \geq 3$), elegimos un punto $p \in \Sigma_3$, y al igual que en el caso $G = A_2$, se muestra que Σ_3 consta de dos puntos antipodales, *i.e.*, $\Sigma_3 = \{p, -p\}$ y que $\vec{p} \perp \vec{q}$ para cualquier $q \in G \setminus \Sigma_3$. Luego, la envoltura convexa de Σ_1 es un q -ágono que yace sobre el plano que pasa por el origen y es perpendicular a \vec{p} . Por la Tabla 2.4, se tiene que el grupo G_p es de orden q , por lo que permuta los puntos de Σ_1 en orden cíclico, y por tanto, el q -ágono es regular. Éste q -ágono es el q -diédrico invariante que buscamos, por lo que $G = D_q$.

Tipo B : Si G es del tipo B y $p \in \Sigma_3$, utilizando la Tabla 2.4, vemos que los cuatro puntos de Σ_3 , tienen grupo de isotropía G_p , los cuales son de orden 3. Esto implica que G_p permuta los tres puntos restantes de $\Sigma_3 \setminus \{p\}$ de manera cíclica, por lo que los vértices de $\Sigma_3 \setminus \{p\}$ son vértices de un triángulo equilátero. Ahora, dado que p fue un punto arbitrario de la órbita excepcional, cualquier elección de tres vértices de Σ_3 forma un triángulo equilátero. Por tal motivo, la envoltura convexa de Σ_3 es un tetraedro invariante bajo G . Lo que concluye que $G = T$.

Tipo C : Si G es del tipo C , necesitamos encontrar un octaedro invariante bajo G . De la Tabla 2.4, vemos que Σ_3 tiene cardinalidad 6, por lo que su envoltura convexa es nuestro candidato. Observemos que para cualquier punto $p \in \Sigma_3$, su respectivo grupo de isotropía G_p es cíclico de orden 4, lo que nos dice que algún punto $p_1 \in \Sigma_3 \setminus \{p\}$ queda fijo. Éste punto no tiene otra opción que ser el punto antipodal $-p$. Ahora, dado que p fue arbitrario, se concluye que los puntos de Σ_3 vienen en parejas antipodales, es decir, $\Sigma_3 = \{p, q, r, -p, -q, -r\}$.

Luego, tenemos que G_p permuta los puntos $\{q, r, -q, -r\}$ de manera cíclica. En particular, existe un elemento $g \in G_p$ tal que $g \cdot q = -q$. Entonces, para $p, q \in \Sigma_3$, con $q \neq -p$, se tiene

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = \langle g \cdot \vec{p}, g \cdot \vec{q} \rangle = \langle \vec{p}, -\vec{q} \rangle,$$

por tanto, $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 0$, *i.e.*, \vec{p} es perpendicular a \vec{q} . Análogamente se concluye que p, q, r son mutuamente perpendiculares. Finalmente, la envoltura convexa de la órbita excepcional Σ_3 es el octaedro invariante que necesitábamos, por lo tanto $G = O$.

Tipo D: Si G es del tipo D , la órbita excepcional Σ_3 consiste de 12 puntos. Cada uno de ellos tiene grupo de isotropía G_p , el cual es cíclico de orden 5. Como G_p permuta los once puntos de $\Sigma_3 \setminus \{p\}$, implica que uno de ellos es un punto fijo, el cual no tiene otra opción que ser $-p$. Se tiene pues, que los puntos de Σ_3 vienen en parejas antipodales.

Considerando ahora la acción de G_p en $\Sigma_3 \setminus \{p, -p\}$, existen dos órbitas de 5 puntos cada una que son permutados de manera cíclica por G_p , por lo que la envoltura convexa de cada órbita es un pentágono regular, los cuales denotaremos por π y π' .

Entre los vértices de un pentágono regular no existen parejas antipodales, por tanto, cada vértice en π tiene su vértice antipodal en π' , lo que implica que $\pi' = -\pi$ es el pentágono antipodal de π .

Sin pérdida de generalidad, sea π el pentágono más cercano al punto $p \in \Sigma_3$. La envoltura convexa de $\{p\} \cup \pi$ es una pirámide pentagonal. De igual manera, $\{-p\} \cup -\pi$ también es una pirámide pentagonal. La envoltura convexa de $\pi \cup -\pi$, forma un antiprisma, debido a que son pentágonos antipodales. Ahora, pegando la pirámide $\{p\} \cup \pi$ con $\pi \cup -\pi$ por los puntos de π y $\{-p\} \cup -\pi$ por los puntos de $-\pi$, se obtiene un icosaedro como en la construcción de la Sección 1.1 (Figura 1.5).

Resta probar que las aristas de dicho icosaedro tienen la misma longitud para que sea el icosaedro regular invariante que necesitamos encontrar.

Hasta aquí, sólo tres distintas longitudes de aristas pueden ocurrir:

- 1) Las aristas de las pirámides que van de la cúspide al resto de los vértices.
- 2) Las aristas del antiprisma que unen el pentágono π con $-\pi$.
- 3) Las aristas que corresponden a los lados de los pentágonos.

Dado que en estas pirámides, las aristas que van de la cúspide al pentágono base tienen la misma longitud, pues el pentágono es perpendicular al eje de rotación, un vértice q en el pentágono π , es extremo de los 3 tipos de aristas. Luego, como comenzamos con un vértice $p \in \Sigma_3$ arbitrario, cualquier vértice de la órbita excepcional puede considerarse como la cúspide de una pirámide, por lo tanto, se concluye que todas las aristas que inciden en el vértice q tienen la misma longitud. Por lo tanto, G es exactamente I .

■

En resumidas cuentas, los resultados anteriores se expresan en las siguientes tablas, en las cuales se enlistan las órbitas excepcionales, *i.e.*, los dos puntos fijos $\{p, -p\}$ para el grupo cíclico; y $E = \{\text{puntos medios de aristas}\}$, $V = \{\text{vértices}\}$ y $F = \{\text{centros de caras}\}$ para los otros grupos. El número c representa la cantidad de elementos de las órbitas excepcionales, n representa el orden del correspondiente grupo cíclico de isotropía y a la cantidad de ejes correspondientes a cada órbita excepcional.

Cíclico de orden N	P	-P
c	1	1
n	N	N
a	1	

Tabla 2.5: Órbitas excepcionales del grupo cíclico de orden N

Diédrico (Orden $2q$)	E	V	F
c	q	q	2
n	2	2	q
a	$\frac{q}{2}$	$\frac{q}{2}$	1 q par
	q		1 q impar

Tabla 2.6: Órbitas excepcionales del grupo diédrico de orden $2q$

Tetraedro (Orden 12)	E	V	F
c	6	4	4
n	2	3	3
a	3	4	

Tabla 2.7: Órbitas excepcionales del grupo del Tetraedro

Octaedro (Orden 24)	E	V	F
c	12	6	8
n	2	4	3
a	6	3	4

Tabla 2.8: Órbitas excepcionales del grupo del Octaedro

Icosaedro (Orden 60)	E	V	F
c	30	12	20
n	2	5	3
a	15	6	10

Tabla 2.9: Órbitas excepcionales del grupo del Icosaedro

2.3. Subgrupos normales

En esta sección veremos cuáles son los subgrupos normales de los subgrupos finitos de $SO(3)$.

Cíclicos:

Como todo grupo cíclico es un grupo abeliano, se tiene que C_q tiene exactamente un subgrupo normal de orden r por cada r que divide a q .

Diédricos:

El conjunto de todas las rotaciones sobre el eje que pasa por el centro de una cara forma un subgrupo normal de D_q .

Si q es par, existen dos posibilidades más:

1. Las rotaciones en torno al eje que pasa por el centro de una cara, cuyos ángulos son múltiplos de $\frac{4\pi}{q}$, junto con las rotaciones en torno al eje que pasa por un vértice, forman un subgrupo normal de D_q .
2. Las rotaciones en torno al eje que pasa por el centro de una cara, cuyos ángulos son múltiplos de $\frac{4\pi}{q}$, junto con las rotaciones en torno al eje que pasa por el punto medio de una arista, es también un subgrupo normal de D_q .

Si q es impar, no existen más subgrupos normales.

Tetraédrico:

Existe sólo un subgrupo normal propio de T ; consiste de la identidad y de las tres π -rotaciones en torno a los tres distintos ejes que pasan por el punto medio de las aristas. Sea N dicho subgrupo normal. Como $|N| = 4$, su índice es $[T : N] = 3$.

Octaédrico:

Existen dos subgrupos normales propios de O :

- 1) Este subgrupo normal de O es el más pequeño de los subgrupos normales. Consiste de la identidad y las π -rotaciones en torno a los ejes que pasan por vértices.
- 2) Este subgrupo de O es de índice 2. Sus elementos son las ocho rotaciones generadas por los cuatro 3-ejes que pasan por los centros de las caras.

Icosaédrico:

Este subgrupo de $SO(3)$, no tiene subgrupos normales. A continuación, una prueba de este hecho:

Sea H subgrupo normal de I . Si un elemento $h \in H$ es distinto de la identidad, por definición, $ghg^{-1} \in H$ para todo $g \in I$. Sea α el eje correspondiente a h y denotemos por $g(\alpha)$ al eje correspondiente a ghg^{-1} . Dado que la rotación g , produce un ángulo θ con respecto a un eje y g^{-1} produce el mismo ángulo sobre el mismo eje pero en sentido contrario $-\theta$, se tiene que h y ghg^{-1} tienen el mismo ángulo de rotación. En principio, $\alpha \neq g(\alpha)$. Ahora, si H contiene una θ -rotación al rededor del eje β , entonces H contiene todas las $m\theta$ -rotaciones ($m \in \mathbb{Z}$) en torno a todos los ejes del mismo tipo que γ (centros de caras, puntos medios de aristas o vértices), *i.e.*, todos los ejes $g(\beta)$, pues la acción es sobre todo los elementos de I .

Por otro lado, de la Tabla 2.3, existen tres conjuntos de rotaciones distintos de la identidad:

- 1) El conjunto V que consta de las 24 rotaciones en torno a los ejes que pasan por los vértices.
- 2) El conjunto A que contiene las 15 rotaciones alrededor de los ejes que pasan por los puntos medios de aristas.
- 3) El conjunto C que consta de las 20 rotaciones alrededor de los ejes que pasan a través de los centros de caras.

Así pues, si el subgrupo normal H contiene una rotación $g \in V$, contendrá las 24 rotaciones de V ; si contiene una rotación $g \in A$, contendrá las 15 rotaciones de A ; y si contiene una rotación $g \in C$, contendrá las 20 rotaciones de C .

Por lo tanto, obtenemos la siguiente fórmula para la cardinalidad del subgrupo normal H :

$$|H| = 24a + 15b + 20c + 1, \quad a, b, c \in \{0, 1\}. \quad (2.7)$$

Finalmente, ninguna solución de la fórmula (2.7) divide a $|I| = 60$ propiamente, por lo tanto, I no contiene subgrupos normales propios.

2.4. Generadores y relaciones para los subgrupos finitos de $SO(3)$

En esta sección daremos una presentación en generadores y relaciones de los subgrupos finitos de $SO(3)$.

El grupo cíclico de orden q está obviamente generado por un elemento β que es una $\frac{2\pi}{q}$ -rotación, por lo que la relación es $\beta^q = 1$ como se muestra en la Figura 2.4.



Figura 2.4: Generador del grupo cíclico

En el q -diédrico, hay dos generadores; γ , que es la $\frac{2\pi}{q}$ -rotación en torno al eje que pasa a través del centro de una cara y β , que es la π -rotación en torno al eje que pasa por el punto medio de alguna arista o en torno al eje que pasa por un vértice como se muestra en la Figura 2.5.

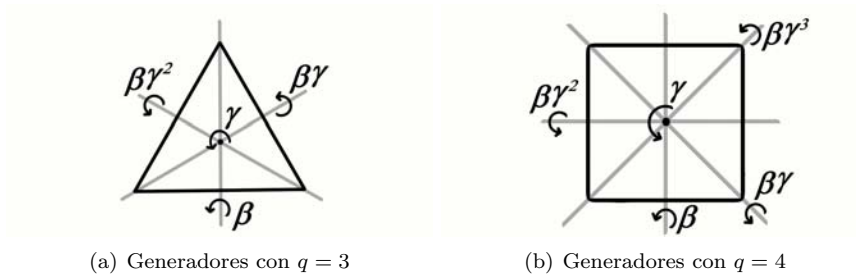


Figura 2.5: Generadores del q -diédrico

El resto de los subgrupos tiene, al igual que los q -diédricos, dos generadores; β , que es la $\frac{2\pi}{3}$ -rotación en torno al centro de alguna cara y γ , que es la $\frac{2\pi}{r}$ -rotación en torno a un vértice de la misma cara, donde $r = 3$ si consideramos T , $r = 4$ si consideramos O y $r = 5$ si consideramos I (ver Figura 2.6), pues las rotaciones alrededor de los ejes que pasan por puntos medios de aristas están dadas por combinaciones de las anteriores.

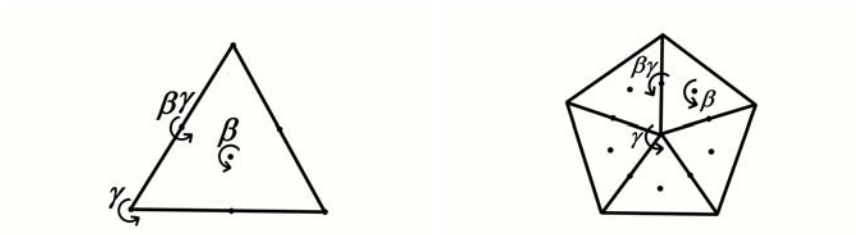


Figura 2.6: Generadores de Sólidos Platónicos

Construimos entonces la siguiente tabla con los generadores y relaciones de los subgrupos finitos de $SO(3)$:

Subgrupo finito de $SO(3)$	Generadores	Relaciones
C_q	β	$\beta^q = 1$
D_q	β, γ	$\beta^2 = \gamma^q = (\beta\gamma)^2 = 1$
T	β, γ	$\beta^3 = \gamma^3 = (\beta\gamma)^2 = 1$
O	β, γ	$\beta^3 = \gamma^4 = (\beta\gamma)^2 = 1$
I	β, γ	$\beta^3 = \gamma^5 = (\beta\gamma)^2 = 1$

Tabla 2.10: Generadores y relaciones de los subgrupos de $SO(3)$

Para probar la Tabla 2.10, utilizaremos la siguiente definición y los siguientes resultados:

Definición 2.4.1. Una sucesión finita de vértices $p_1 \cdots p_n$, es llamada un *camino por aristas* si p_i y p_{i+1} están conectados por una única arista.

La sucesión que representa el camino por aristas produce una orientación natural como se muestra en la siguiente Figura 2.7.

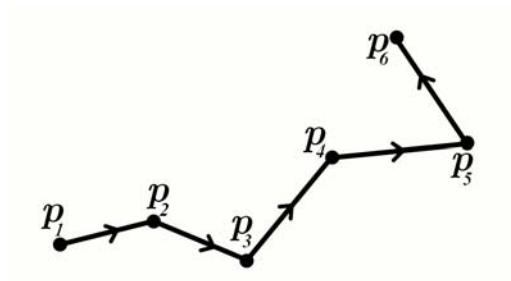


Figura 2.7: Camino por aristas orientado dado por la sucesión p_1, \dots, p_6

Por tanto, veremos el camino por aristas, como una sucesión de sus aristas orientadas.

Proposición 2.4.2. Los caminos por aristas cumplen con las siguientes propiedades de transformación:

P1: La palabra $\cdots pqp \cdots$, es equivalente a la palabra $\cdots p \cdots$ como se muestra en la Figura 2.8.

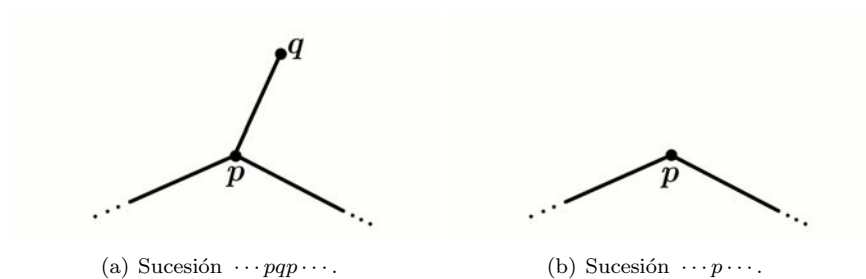


Figura 2.8: Caminos equivalentes

P2: La palabra $\cdots pq_1 \cdots q_r \cdots$, es equivalente a la palabra $\cdots p \cdots$ siempre que $q_1 \cdots q_r$ sean los vértices de una 2-celda en orden cíclico y $q_r = p$ como se muestra en la Figura 2.9.

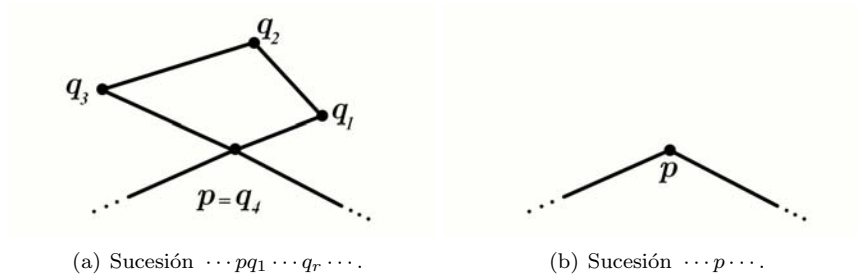


Figura 2.9: Palabra equivalente si contiene una 2-celda

Notemos que un camino por aristas, en la descomposición celular de una superficie, puede considerarse como un camino continuo. Esto nos permite utilizar los siguientes resultados de topología:

Proposición 2.4.3. *Dos caminos por aristas de la misma descomposición celular son homotópicos si y sólo si podemos transformar uno en otro mediante una cantidad finita de operaciones P1 y P2 [1, Cap 6, Sec 4].*

Proposición 2.4.4. *La superficie de un politopo convexo es simplemente conexa, i.e., todo camino continuo que comienza y termina en el mismo punto p (un lazo) es homotópico al camino constante.*

La Proposición 2.4.4 se sigue de que todo politopo convexo 3-dimensional es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^2 es simplemente conexa [1, Teorema 5.12, pág. 99].

Observación 2.4.5. Todo camino por aristas $p_1 \dots p_n$ con $p_1 = p_n$ puede ser transformado en el camino constante p_1 usando las propiedades P1 y P2 un número finito de veces.

Antes de dar una prueba de los resultados de la Tabla 2.10, definamos lo que es un *dominio fundamental*:

Definición 2.4.6. Un subconjunto $D \subset S$ es llamado un *dominio fundamental* para la acción del grupo finito G en S si satisface lo siguiente:

- 1) Para todo $x \in S$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x \in D$.
- 2) Si para algún $g \in G$, tanto x como $g \cdot x$ están en $\text{Int}(D)$, entonces $g = 1$.
- 3) $D = \overline{\text{Int}(D)}$.

DEMOSTRACIÓN (de la Tabla 2.10):

Para el subgrupo cíclico, la demostración es clara. La prueba del resto de los subgrupos se divide en tres partes:

- a) Las relaciones son válidas.
- b) Los generadores β y γ son suficientes.
- c) Las relaciones son suficientes.

Mostremos los tres incisos:

- a) El producto $\beta\gamma$ es una π -rotación como se observa en las Figuras 2.5 y 2.6. Por tanto, $(\beta\gamma)^2 = 1$. Las otras rotaciones son válidas trivialmente.
- b) Para el q -diédrico, las potencias γ^m generan todas las rotaciones en torno a los ejes que corresponden a los centros de caras. Las rotaciones correspondientes a los otros tipos de ejes están dadas por $\beta\gamma^m$, como se muestra en la Figura 2.5.

Para los subgrupos de los sólidos platónicos, todas las rotaciones en torno a puntos medios de aristas se obtienen de $\beta\gamma$ con conjugaciones de las potencias de β y γ , pues cualquier punto medio de arista puede ser trasladado a otro punto medio de arista mediante rotaciones en torno a caras y rotaciones en torno a vértices.

Similarmente, todas las rotaciones en torno a vértices se obtienen de γ^m por conjugaciones con potencias de β , pues podemos llegar de un vértice a cualquier otro mediante rotaciones con respecto a centros de caras.

Finalmente, todas las rotaciones correspondientes a centros de caras, al ser todas triángulos, se obtienen de β y β^2 , por conjugaciones con potencias de γ , pues podemos mandar un centro de cara a cualquier otro centro de cara mediante rotaciones en torno a vértices.

En este sentido, todos los elementos del subgrupo se obtienen de β y γ , por tanto, β y γ son generadores suficientes.

- c) Para este inciso, mostraremos sólo el caso del icosaedro I , pues el del tetraedro y el octaedro son casos similares pero más sencillos.

Dividimos baricéntricamente al icosaedro como en la Figura 2.10(a).

Sea \mathcal{B} la subdivisión baricéntrica. \mathcal{B} está constituido por 120 triángulos, pues hay 6 triángulos por cada cara del icosaedro y éste tiene a su vez 20 caras. Uniendo los triángulos de \mathcal{B} que comparten un vértice de I y además estén en una misma cara, obtenemos una subdivisión del icosaedro en 60 cuadriláteros irregulares iguales como en la Figura 2.10(b) *i.e.*, una descomposición celular de la esfera que consiste de 60 cuadriláteros congruentes; denotemos por \mathcal{B}' a dicha subdivisión del icosaedro.

Cada cuadrilátero irregular de \mathcal{B}' , es una región fundamental de la acción de G , *i.e.*, si fijamos uno de los cuadriláteros irregulares, toda órbita pasa a través de él y dos puntos distintos dentro del cuadrilátero pertenecen a órbitas distintas.

Denotemos por \mathcal{D} al dual de \mathcal{B}' (ver Figura 2.10(c)). Los vértices de \mathcal{D} corresponden a los baricentros de los 60 cuadriláteros congruentes de \mathcal{B}' . Cada arista de \mathcal{B}' aporta una arista a \mathcal{D} , por tanto \mathcal{D} tiene 120 aristas, pues el interior de cada cara de I aporta 3 aristas a \mathcal{B}' y cada arista de

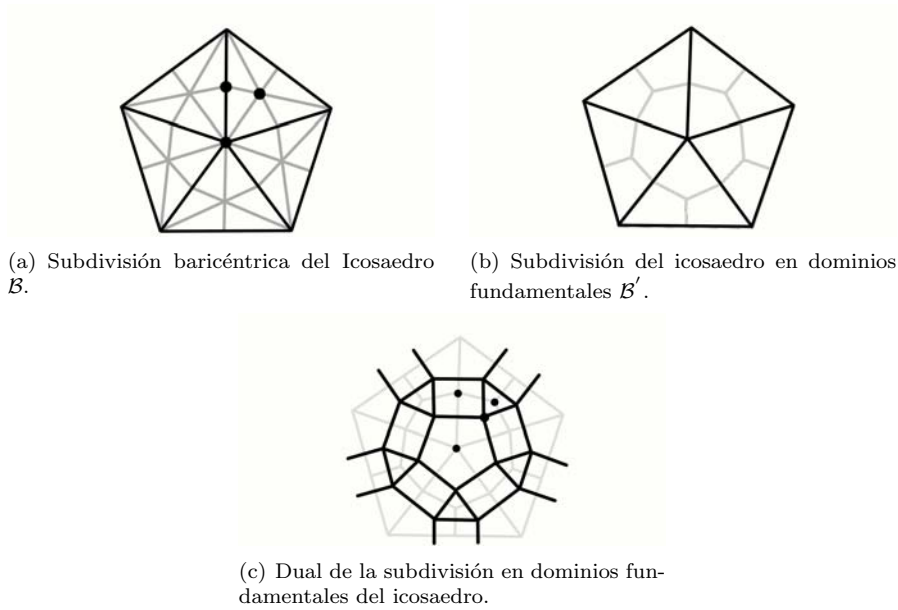


Figura 2.10: Icosaedro subdividido

I aporta 2 aristas a \mathcal{B}' . Finalmente, las 2-celdas de \mathcal{D} consisten de un pentágono por cada vértice de I , un cuadrilátero por cada arista de I y un triángulo por cada cara de I , así pues, por la Tabla 1.1, \mathcal{D} tiene 12 pentágonos, 30 cuadriláteros y 20 triángulos.

Ahora, consideremos el producto $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, con $\alpha_i \in \{\beta, \gamma, \beta^{-1}, \gamma^{-1}\}$. Este producto representa un elemento en el grupo G del icosaedro. El producto vacío representa la identidad $e \in G$.

El elemento $g = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in G$ determina el camino por aristas

$$[\alpha_1 \cdots \alpha_n] = p\alpha_1(p)\alpha_1\alpha_2(p) \cdots \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n(p),$$

donde, p es un vértice inicial de D . De hecho, todo camino por aristas que comienza en p tiene esta forma.

Si $\alpha_1 \cdots \alpha_n = e$ en G , el camino es un lazo, pues

$$[\alpha_1 \cdots \alpha_n] = p\alpha_1(p)\alpha_1\alpha_2(p) \cdots e(p) = p\alpha_1(p)\alpha_1\alpha_2(p) \cdots p.$$

El lazo puede ser transformado en el lazo constante $[\emptyset] = p$ usando las transformaciones P1 y P2.

Las correspondientes operaciones para los elementos $g \in G$ son:

Q1: El producto $g = \cdots \alpha_i \alpha \alpha^{-1} \alpha_{i+1} \cdots$ es equivalente al producto $\cdots \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots$, donde $\alpha \in \{\beta, \gamma, \beta^{-1}, \gamma^{-1}\}$.

Q2: Los productos

$$\cdots \alpha_i \beta^{\pm 3} \alpha_{i+1} \cdots, \cdots \alpha_i \gamma^{\pm 5} \alpha_{i+1} \cdots \quad \text{y} \quad \cdots \alpha_i (\beta\gamma)^{\pm 2} \alpha_{i+1} \cdots,$$

son equivalentes a $\cdots \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots$, dependiendo de la 2-celda (triángulo, pentágono o cuadrilátero) usada en la transformación P2.

Por tanto, la palabra $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ que representa la identidad en G puede ser transformada en la palabra vacía usando las relaciones de la Tabla 2.10, lo que implica que las relaciones son suficientes.

■

Capítulo 3

Subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$

En el Capítulo 2 los subgrupos finitos de $SO(3)$ fueron clasificados usando su acción en la esfera euclidiana

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Ahora, si pensamos a \mathbb{S}^2 como la *esfera de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *i.e.*, como el plano complejo \mathbb{C} adjuntando un punto al infinito $\{\infty\}$, se tiene que el grupo de rotaciones $SO(3)$, y por tanto cualquier subgrupo finito G , actúan mediante *transformaciones proyectivas*, pues éstas son precisamente transformaciones de la esfera de Riemann $f \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

con $ad - bc \neq 0$, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ y $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Podemos suponer que $ad - bc = 1$. En este capítulo se establece una correspondencia entre los subgrupos finitos G de $SO(3)$ y los subgrupos finitos Γ del grupo $SL(2, \mathbb{C})$, la cual asocia a cada G un subgrupo *binario* Γ el cual consta del doble de los elementos de G .

Además, un vector $v \in \mathbb{C}^2$ distinto del vector cero, determina el encaje $\Gamma \curvearrowright \mathbb{C}^2$, dado por $g \mapsto g \cdot v$. Estudiaremos la envoltura convexa de G en $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ y veremos que en unos casos la envoltura convexa $\text{ch}(G)$ es un sólido regular 4-dimensional. Con esto, se completará la información de las realizaciones de la Sección 1.5.

Finalmente, para una métrica hermitiana adecuada en \mathbb{C}^2 , la acción de Γ deja invariante a la esfera unitaria $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Lo que nos permitirá estudiar los espacios de órbitas \mathbb{S}^3/Γ , los cuales son variedades compactas 3-dimensionales, desde el punto de vista de la topología algebraica y la topología combinatoria.

3.1. Subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$

En esta sección, utilizaremos los resultados anteriores para clasificar los subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$.

Considerando la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, como la *esfera de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en el sentido del análisis complejo, tenemos que todo elemento $\alpha \in SO(3)$ es una isometría que preserva orientación de $\widehat{\mathbb{C}}$, en particular, es una aplicación *conforme* que preserva orientación y por tanto, un biholomorfismo en $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.

Para introducir coordenadas complejas, describiremos la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ como la *línea proyectiva compleja* \mathbb{CP}^1 , *i.e.*, como el espacio $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ con la relación de equivalencia \sim dada por

$$z \sim w \text{ si y sólo si } w = \lambda z \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C}^*$$

donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La clase de equivalencia de un $z = (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ se denota por $[z] = [z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1$ y la llamamos *coordenada homogénea* en \mathbb{CP}^1 .

La identificación entre \mathbb{CP}^1 y $\widehat{\mathbb{C}}$ está dada por $[z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1}$.

Observación 3.1.1. La acción del grupo general lineal $GL(2, \mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ induce una acción por la izquierda en \mathbb{CP}^1 definida por:

$$g \cdot [z] = [g \cdot z] \quad \text{para } g \in GL(2, \mathbb{C}) \text{ y } z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}.$$

Por otro lado, a toda matriz 2×2 invertible compleja $F \in GL(2, \mathbb{C})$ le podemos asociar una transformación proyectiva $f(z) \in \text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ dada por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{tal que } ad - bc \neq 0,$$

donde z es una variable compleja y los coeficientes a, b, c y d son números complejos. Notemos que la condición $ad - bc \neq 0$ es equivalente a la condición de que el determinante de F no sea cero, *i.e.*, que la matriz F sea invertible. Además, el producto de dos matrices está asociado a la composición de dos transformaciones proyectivas, pues si F y $G \in GL(2, \mathbb{C})$ están dadas por

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad G = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},$$

la multiplicación FG es

$$FG = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

y las transformaciones asociadas a F, G y $FG = H$ son f, g y h respectivamente, dadas por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{ez + f}{gz + h}, \quad h(z) = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)}.$$

y como la composición $f \circ g(z)$ está dada por

$$\begin{aligned} f \circ g(z) = f(g(z)) &= \frac{a \left(\frac{ez+f}{gz+h} \right) + b}{c \left(\frac{ez+f}{gz+h} \right) + d} = \frac{\frac{a(ez+f)+b(gz+h)}{gz+h}}{\frac{c(ez+f)+d(gz+h)}{gz+h}} \\ &= \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)}, \end{aligned}$$

se tiene que $f \circ g = h$. Por tanto, se tiene el siguiente homomorfismo entre el grupo general lineal y el grupo de automorfismos de la línea proyectiva compleja

$$\begin{aligned} \pi : \text{GL}(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{CP}^1) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

Ahora, sea $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La matriz λF dada por

$$\lambda F = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix},$$

tiene la misma transformación proyectiva asociada que F , pues

$$\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\lambda(az+b)}{\lambda(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Por tanto, las transformaciones proyectivas determinan su matriz asociada salvo múltiplos escalares. En otras palabras, el *kernel* de π está dado por

$$\text{Ker}(\pi) = \{\lambda E \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}, \quad \text{con } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la Observación 3.1.1, vemos que $\text{Ker}(\pi)$ actúa trivialmente en \mathbb{CP}^1 .

Definiremos de manera especial al cociente entre $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ y $\text{Ker}(\pi)$:

Definición 3.1.2. El *grupo lineal proyectivo* está dado por

$$\text{PGL}(2, \mathbb{C}) = \text{GL}(2, \mathbb{C}) / \text{Ker}(\pi).$$

Luego, por el *primer teorema del isomorfismo*[13, Teorema 2.70] de teoría de grupos, se tiene que

$$\text{GL}(2, \mathbb{C}) / \text{Ker}(\pi) \cong \text{Aut}(\mathbb{CP}^1),$$

por lo que el grupo lineal proyectivo $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ es isomorfo al grupo de automorfismos de la línea proyectiva compleja $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$, *i.e.*,

$$\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \cong \text{Aut}(\mathbb{CP}^1). \quad (3.1)$$

Esto implica que $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ actúa efectivamente en \mathbb{CP}^1 .

En lo que se refiere a la acción sobre \mathbb{CP}^1 , basta considerar el grupo especial lineal $\text{SL}(2, \mathbb{C}) < \text{GL}(2, \mathbb{C})$, pues todo elemento de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ está representado por algún elemento de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Por tanto, el homomorfismo π se restringe al epimorfismo entre el grupo especial lineal y el grupo de automorfismos de la línea proyectiva compleja

$$\rho : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C}). \quad (3.2)$$

Notemos que el kernel de ρ está dado por

$$\text{Ker}(\rho) = \{E, -E\},$$

por tanto, el epimorfismo ρ es 2 a 1.

Ahora, por el isomorfismo (3.1), se tiene que todo biholomorfismo de \mathbb{CP}^1 se puede ver como un elemento en $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. En particular, $\text{SO}(3)$ es un subgrupo de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Así pues, la imagen inversa de $\text{SO}(3) < \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ bajo ρ , es un subgrupo de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, *i.e.*, $\rho^{-1}(\text{SO}(3)) < \text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Definición 3.1.3. El subgrupo $\rho^{-1}(\text{SO}(3)) < \text{SL}(2, \mathbb{C})$ es llamado *grupo especial unitario* y está denotado por $\text{SU}(2)$.

La definición anterior no es la definición usual, pero junto con la siguiente proposición, será suficiente para nuestros propósitos.

Proposición 3.1.4. *Todo subgrupo finito de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ es conjugado a un subgrupo de $\text{SU}(2)$.*

En la siguiente sección se presenta otra manera de ver lo anterior usando cuaterniones, la definición usual del grupo especial unitario de dimensión n y la prueba de la Proposición 3.1.4.

Ahora bien, suponiendo que es válida la Proposición 3.1.4, para clasificar los subgrupos finitos de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ salvo conjugación, basta con restringirnos a los subgrupos finitos de $\text{SU}(2)$.

Lema 3.1.5. *Si $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ tiene orden dos, entonces $A = -E$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si A tiene orden dos, entonces $A^2 = E$, por tanto se tiene que $A = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Lo que implica que $a = d = \pm 1$ y $b = c = 0$. Luego, como A es de orden dos, $a = d \neq 1$, por lo tanto, $a = d = -1$ y $b = c = 0$, *i.e.*, $A = -E$. ■

Definición 3.1.6. Si $G < \text{SO}(3)$ es un subgrupo finito, entonces el subgrupo $\rho^{-1}(G) < \text{SU}(2)$ y cualquier $\Gamma < \text{SL}(2, \mathbb{C})$ que sea conjugado a $\rho^{-1}(G)$ es llamado *subgrupo binario* correspondiente a G . Este Γ tiene el doble de elementos que G ya que ρ es 2 a 1.

Observación 3.1.7. Un subgrupo finito Γ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ es binario si y sólo si la matriz $-E$ está en Γ .

Lema 3.1.8. *Un subgrupo finito $\Gamma < \text{SL}(2, \mathbb{C})$ no es binario si y sólo si es cíclico de orden impar.*

DEMOSTRACIÓN:

\Rightarrow] Por la Proposición 3.1.4, podemos suponer que Γ es un subgrupo de $\text{SU}(2)$. Dado que, $-E \notin \Gamma$, la proyección ρ mapea el grupo Γ de manera isomorfa en el grupo finito $\rho(\Gamma) < \text{SO}(3)$. Luego, el Lema 3.1.5 implica que Γ , y por consiguiente $\rho(\Gamma)$, no tienen elementos de orden 2. De la clasificación de subgrupos finitos de $\text{SO}(3)$ del Teorema 2.2.5, se sigue que $\rho(\Gamma)$, y por tanto Γ , es un subgrupo cíclico de orden impar, pues el resto de los subgrupos finitos de $\text{SO}(3)$ contienen elementos de orden 2.

\Leftarrow] Al ser Γ de orden impar, se concluye que no puede ser un subgrupo binario, pues por definición, $|\Gamma| = 2|G|$, donde $G < \text{SO}(3)$ y $\rho^{-1}(G)$ es conjugado a Γ . ■

De la Definición 3.1.6, utilizando la clasificación de subgrupos finitos $G < \text{SO}(3)$ del Teorema 2.2.5, obtenemos todos los subgrupos binarios correspondientes a G . Luego, por el Lema 3.1.8, se tiene los únicos subgrupos no binarios con los cíclicos de orden impar. Esto permite dar una clasificación de las clases de conjugación de los subgrupos finitos de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$:

Teorema 3.1.9. *Los subgrupos finitos de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ son conjugados a cualquier grupo de la siguiente lista:*

- Grupos cíclicos C_q de orden $q = 1, 2, \dots$
- Grupos diédricos binarios \tilde{D}_q de orden $4q$ ($q = 2, 3, \dots$)
- Tetraédrico binario \tilde{T} de orden 24
- Octaédrico binario \tilde{O} de orden 48
- Icosaédrico binario \tilde{I} de orden 120 .

3.2. Cuaterniones y rotaciones

Para definir de manera general el grupo especial unitario $\text{SU}(n)$ haremos uso de la siguiente definición:

Definición 3.2.1. Sea $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ una matriz invertible de $n \times n$ y sea A^* la matriz transpuesta conjugada. Definimos el *grupo unitario* como

$$\text{U}(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}\}.$$

Ahora bien,

Definición 3.2.2. El *grupo especial unitario* está dado por

$$\text{SU}(n) = \text{U}(n) \cap \text{SL}(n, \mathbb{C}).$$

Si $\langle -, - \rangle$ denota el producto interno canónico hermitiano, $\text{U}(n)$ consiste de aquellas A las cuales preservan $\langle -, - \rangle$, *i.e.*, las matrices que cumplen con $\langle Az, A\omega \rangle = \langle z, \omega \rangle$.

Para probar la Proposición 3.1.4, utilizaremos los siguientes dos hechos:

- a) Para cualquier subgrupo finito H de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ existe un producto interno H -invariante hermitiano $\langle -, - \rangle_H$ en \mathbb{C}^n , el cual se puede obtener del producto interno canónico promediando como sigue:

$$\langle x, y \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \langle gx, gy \rangle.$$

- b) Dados cualesquiera dos productos interiores hermitianos $\langle -, - \rangle$ y $\langle -, - \rangle_*$ en \mathbb{C}^n , existe un $T \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que

$$\langle x, y \rangle_* = \langle Tx, Ty \rangle \quad \text{para } x, y \in \mathbb{C}^n. \quad (3.3)$$

Para el inciso b), podemos considerar dos bases ortonormales; \mathcal{B} con respecto al producto interno hermitiano $\langle -, - \rangle$ y \mathcal{B}_* con respecto a $\langle -, - \rangle_*$, para las cuales existe un cambio de base *i.e.*, existe una transformación $T \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $T\mathcal{B}_* = \mathcal{B}$. Entonces, la condición (3.3) se satisface al aplicar la transformación T a los elementos de la base \mathcal{B}^* . Luego, como se cumple para todos los elementos de la base \mathcal{B}^* , se satisface para elementos arbitrarios en \mathbb{C}^n .

Combinemos los incisos a) y b): dado un subgrupo finito H de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, elegimos un producto interno H -invariante $\langle -, - \rangle_H$ y encontramos una transformación $T \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ que cumpla con $\langle x, y \rangle_H = \langle Tx, Ty \rangle$, donde $\langle -, - \rangle$ denota el producto interno canónico.

Luego, THT^{-1} está contenido en $\text{U}(n)$. Podemos suponer que $\det T = 1$, por tanto se tiene la siguiente observación:

Observación 3.2.3. Cualquier subgrupo finito de $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ es conjugado en $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ a un subgrupo de $\text{SU}(n)$.

La observación anterior demuestra la Proposición 3.1.4 en el caso en que $n = 2$.

Ahora, daremos la noción de cuaterniones, un epimorfismo ρ de $SU(2)$ a $SO(3)$ que es 2 a 1 y, un isomorfismo $\tau : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$, para obtener

$$\rho(g) \cdot \tau(z) = \tau(g \cdot z) \quad \text{para } z \in \mathbb{C}P^1 \quad \text{y } g \in SU(2). \quad (3.4)$$

Comenzaremos con la introducción del concepto de cuaternión y algunas propiedades:

Definición 3.2.4. Llamaremos *cuaterniones* a las matrices complejas de la forma

$$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Los cuaterniones, forman una subálgebra real, denotada por \mathbb{H} , del álgebra de todas las matrices 2×2 de dimensión real 4, pues $a, b \in \mathbb{C}$ se pueden ver como $a = x + iy$ y $b = z + iw$ con $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Su elemento unidad es $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tenemos las siguientes conclusiones inmediatas de los cuaterniones:

- La traza de un cuaternión es real, pues $\text{tr}(q) = a + \bar{a} = 2\text{Re}(a)$.
- El determinante también es un real, pues $\det q = |a|^2 + |b|^2 \geq 0$.
- Se tiene que $\det q = 0$ si y sólo si $q = 0$.
- La transpuesta conjugada de un cuaternión q , es también un cuaternión, *i.e.*, $q^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- También se tiene que $qq^* = \det q \cdot e$, pues

$$\begin{aligned} qq^* &= \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 + |a|^2 \end{pmatrix} \\ &= (|a|^2 + |b|^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det q \cdot e. \end{aligned}$$

El álgebra \mathbb{H} es un espacio vectorial euclidiano con producto interno dado por

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(pq^*) \quad (3.5)$$

Del producto interno (3.5) y de la ecuación 3.2 se deduce que

$$|q|^2 = \langle q, q \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(qq^*) = \frac{1}{2} \text{tr}(\det q \cdot e) = \det q \quad (3.6)$$

Notemos que los cuaterniones q tales que $|q| = 1$, forman el grupo multiplicativo $SU(2)$, pues $|q| = 1$ implica que $\det q = 1$ y que $qq^* = e$. Luego, $SU(2)$ es homeomorfo a la 3-esfera, dada por

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\},$$

pues la condición $|a|^2 + |b|^2 = 1$ es equivalente a que $\det q = 1$.

Por otro lado, cualquier $q \in SU(2)$ tiene dos eigenvalores $e^{\pm i\varphi}$ donde $\varphi \in [0, \pi]$. Por tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(q) &= e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) + (\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi) \\ &= 2 \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

El ángulo φ es la distancia esférica entre q y la unidad e .

Dado que $g \mapsto q \cdot g$ es una transformación ortogonal, la distancia esférica entre q y h en $SU(2)$ es la distancia esférica entre qh^{-1} y e .

Definición 3.2.5. El *complemento ortogonal* de $\mathbb{R} \cdot e$ en \mathbb{H} es el espacio vectorial 3-dimensional dado por

$$V = \{v \in \mathbb{H} \mid \langle e, v \rangle = 0\} = \{v \in \mathbb{H} \mid \operatorname{tr}(v) = 0\}.$$

Restringiendo el epimorfismo ρ de (3.2) a $SU(2)$, *i.e.*,

$$\rho : SU(2) \longrightarrow SO(3), \quad (3.7)$$

se tiene que toda $q \in SU(2)$ determina la transformación ortogonal siguiente:

$$\begin{aligned} \rho(q) : V &\longrightarrow V, \\ v &\longmapsto qvq^*. \end{aligned}$$

Además, todo $q \in SU(2)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$q = \cos \varphi \cdot e + \operatorname{sen} \varphi \cdot \omega, \quad \text{con } \omega \in V, |\omega| = 1 \quad (3.8)$$

Inversamente, todo elemento de la forma (3.8) pertenece a $SU(2)$, y $\operatorname{tr}(q) = 2 \cdot \cos \varphi$.

Observación 3.2.6. Si q está escrito como en (3.8), entonces $\rho(q)$ es la rotación en V con respecto al eje orientado que pasa por ω con ángulo $2 \cdot \varphi$.

Así, $\rho : SU(2) \rightarrow SO(V) \cong SO(3)$ es un epimorfismo 2 a 1.

El isomorfismo $SO(V) \cong SO(3)$ depende de la elección de una base ortonormal para V , por ejemplo:

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Esta base es ortonormal, pues de (3.6), obtenemos que

$$|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1,$$

y de (3.5) se tiene que

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0.$$

Ahora, para definir $\tau : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$, elegimos como puntos bases $p = [1 : 0]$ en \mathbb{CP}^1 y $s = e_1 \in \mathbb{S}^2$, donde la esfera es vista como

$$\mathbb{S}^2 = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Así pues, para todo $z \in \mathbb{CP}^1$, existe un $g \in \text{SU}(2)$ tal que $z = g \cdot p$.

Observación 3.2.7. Dado que las coordenadas homogéneas (z_0, z_1) están determinadas salvo un valor $\lambda \in \mathbb{C}^*$, podemos suponer $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$, por tanto

$$g = \begin{pmatrix} z_0 & -\bar{z}_1 \\ z_1 & \bar{z}_0 \end{pmatrix},$$

transforma p en z .

El vector $\rho(g) \cdot q$ depende únicamente de z y no de la elección de g , pues si se tiene también que $z = h \cdot p$, entonces $g^{-1} \cdot g$ fija a p , por lo que $g^{-1} \cdot h = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}$ para algún u . Esto implica que $\rho(g^{-1} \cdot h)$ fija a q , por tal motivo $\tau : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$, definida por $\tau(z) = \rho(g) \cdot q$ para algún $z = g \cdot p$, está bien definido.

Para probar la inyectividad de τ , supongamos que $z = gp$ y $z' = hp$ tienen la misma imagen $\rho(g) \cdot q = \rho(h) \cdot q$. Entonces, $\rho(g^{-1}h)$ fija a q , y por consiguiente $g^{-1}h$ fija a p . Luego, utilizando que $\text{SO}(V)$ actúa transitivamente en \mathbb{S}^2 y que ρ es epimorfismo, se tiene que τ es sobreyectiva. Por lo tanto, para cualquier $v \in \mathbb{S}^2$, existe un $g \in \text{SU}(2)$ con $v = \rho(g) \cdot q = \tau(gp)$. Finalmente, la ecuación (3.4) se sigue directamente de la definición de τ , pues si $z = h \cdot p$, se tiene:

$$\begin{aligned} \tau(gz) &= \tau(ghp) = \rho(gh) \cdot q = \rho(g) \rho(h) \cdot q \\ &= \rho(g) \tau(z). \end{aligned}$$

3.2.1. Tablas de Cayley

Los sólidos platónicos tienen una fuerte conexión geométrica entre ellos: sea c el centro del sólido platónico P y tomemos la proyección de P en una esfera cuyo centro también sea c mediante *semirectas* que salen de c . Así, los vértices del poliedro se proyectan en puntos de la esfera, las aristas se proyectan en arcos de círculos maximales de la esfera y las caras de P se proyectan en polígonos

esféricos. A los poliedros proyectados sobre una esfera, los llamaremos *poliedros esféricos*.

Recordando la Sección 1.1, los poliedros duales de los sólidos platónicos son de nuevo sólidos platónicos:

$$\begin{array}{lcl} \text{Tetraedro} & \longleftrightarrow & \text{Tetraedro} \\ \text{Hexaedro} & \longleftrightarrow & \text{Octaedro} \\ \text{Icosaedro} & \longleftrightarrow & \text{Dodecaedro} \end{array}$$

Daremos una conexión geométrica entre los poliedros regulares de dimensión tres. Pensaremos a cada poliedro como su respectivo poliedro esférico.

Comenzando con el icosaedro, se tiene que podemos obtener un dodecaedro mediante la operación dual; los vértices del icosaedro corresponden a los centros de las caras pentagonales del dodecaedro, cada arista del icosaedro corresponde a la arista del dodecaedro a la que corta (éstas dos aristas tienen el mismo punto medio) y los centros de las caras triangulares del icosaedro corresponden a vértices del dodecaedro.

Del dodecaedro, si tomamos una de las cinco diagonales de una de sus caras (arcos entre vértices no adyacentes), se tiene que sólo una arista de dicha cara no toca a la diagonal seleccionada como se muestra en la Figura 3.1(a). Luego, la cara que es adyacente a la cara con la que comenzamos, vía la arista que no toca a la diagonal, tiene sólo una diagonal que no toca a la arista común de las caras como muestra la Figura 3.1(b). Uniendo los extremos de las dos diagonales, obtenemos un cuadrilátero esférico, en donde todas sus aristas también son diagonales de caras del dodecaedro como en la Figura 3.1(c). Este cuadrilátero esférico corresponde a una cara de un hexaedro. Para obtener el hexaedro completamente se hace el mismo procedimiento para cada arista del cuadrilátero esférico que generamos; éste produce más diagonales de caras del dodecaedro a las que volveremos aplicar el mismo procedimiento. La unión de todas las diagonales resultantes forma el hexaedro buscado. Notemos que los 8 vértices del hexaedro son un subconjunto de los 20 vértices del dodecaedro y los 6 centros de las caras del hexaedro corresponden a un subconjunto de los 30 puntos medios de aristas del dodecaedro. Se tiene que cada cara del dodecaedro contiene exactamente una arista del hexaedro, por lo que el hexaedro que obtuvimos con la anterior construcción es uno de los 5 posibles hexaedros que podemos formar, pues basta con seleccionar una diagonal distinta de la cara con la que comenzamos.

Sabemos que el octaedro es el poliedro dual del hexaedro; los vértices del hexaedro corresponden a los centros de las caras triangulares del octaedro, las aristas del cubo cortan de manera perpendicular a las aristas del octaedro por lo que están en correspondencia una a una y los centros de las caras cuadradas del hexaedro corresponden a vértices del octaedro.

Finalmente, de la 2-coloración del octaedro realizada en la Sección 1.1 (ver Figura 1.6(a)), podemos generar dos tetraedros distintos tomando la envoltura convexa de los centros de caras de cualquiera de los dos *colores*.

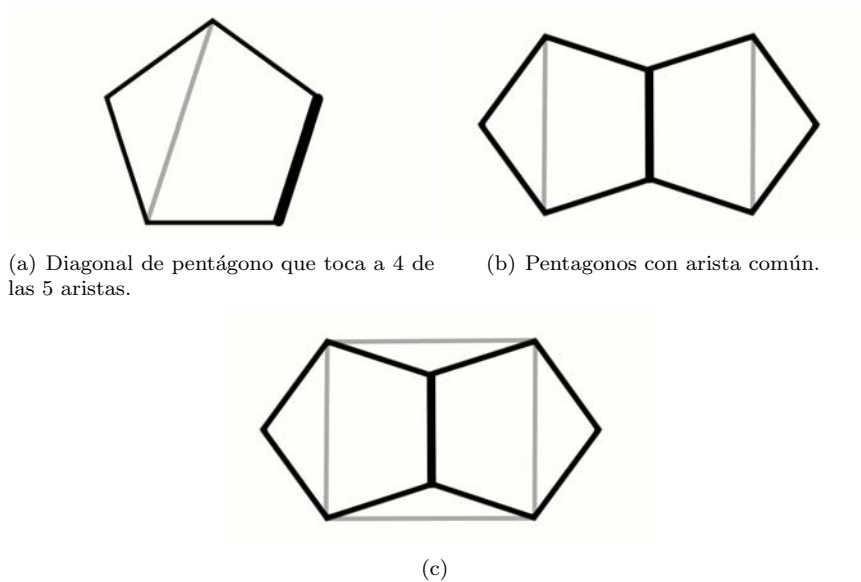


Figura 3.1: Generación de hexaedro desde un dodecaedro

Ahora, como los sólidos duales tienen el mismo grupo finito de rotaciones asociado, se tiene que sus ejes son los mismos.

Considerando la posición geométrica según la construcción anterior, todos los ejes del tetraedro son ejes del cubo y del tetraedro, pues los 2-ejes del tetraedro corresponden a los 4 ejes del hexaedro (octaedro) y los 3-ejes del tetraedro corresponden a 3-ejes en el hexaedro (octaedro). Más aún, los 3-ejes del cubo y el octaedro son algunos de los 3-ejes del dodecaedro (icosaedro) y los 4-ejes del cubo y el octaedro están incluidos dentro de los 2-ejes del dodecaedro (icosaedro). Notemos que los 2-ejes del cubo y el octaedro no son ejes del dodecaedro (icosaedro).

Los 4-ejes del cubo forman un sistema de coordenadas rectangulares común para los poliedros regulares. A continuación, se presentan unas tablas hechas por *Arthur Cayley* en su artículo *Notes on Polyhedra* [5], en las cuales se dan de manera explícita las posiciones de los poliedros regulares 3-dimensionales como en la construcción anterior pero considerando los 4-ejes del cubo como ejes coordenados.

Tabla 3.1: Sistema axial del tetraedro.

Distancias			Azimuts			cos X	cos Y	cos Z	Símbolos de rotación
ángulo	cos	sen	ángulo	cos	sen				
4 3-ejes, $\frac{1}{2}$ ángulo de rotación = $\frac{\pi}{3}$, cos = $\frac{1}{2}$, sen = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.									
$54^\circ 44'$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1 + i + j + k)$
$54^\circ 44'$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	135°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1 - i + j + k)$
$54^\circ 44'$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	225°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1 - i - j + k)$
$54^\circ 44'$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	315°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1 + i - j + k)$
3 2-ejes, $\frac{1}{2}$ ángulo de rotación = $\frac{\pi}{2}$. cos = 0, sen = 1.									
0°	1	0	*	*	*	0	0	1	k
90°	0	1	0°	1	0	1	0	0	i
90°	0	1	90°	0	1	0	1	0	j

Distancias			Azimuts			cos X	cos Y	cos Z	Símbolos de rotación
ángulo	cos	sen	ángulo	cos	sen				
4 3-ejes, $\frac{1}{2}$ ángulo de rotación = $\frac{\pi}{3}$, cos = $\frac{1}{2}$, sen = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.									
54°44'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1+i+j+k)$
54°44'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	135°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1-i+j+k)$
54°44'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	225°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1-i-j+k)$
54°44'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	315°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1+i-j+k)$
3 4-ejes, $\frac{1}{2}$ ángulo de rotación = $\frac{\pi}{4}$, cos = $\frac{1}{\sqrt{2}}$, sen = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.									
0°	1	0	*	*	*	0	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+k)$
90°	0	1	0°	1	0	1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$
90°	0	1	90°	0	1	0	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$
6 2-ejes, $\frac{1}{2}$ ángulo de rotación = $\frac{\pi}{2}$, cos = 0, sen = 1.									
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0°	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(i+k)$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	90°	0	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(j+k)$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	180°	-1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-i+k)$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	270°	0	-1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-j+k)$
90°	0	1	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$
90°	0	1	135°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-i+j)$

Tabla 3.2: Sistema axial del cubo y el octaedro

Distancias			Azimuts			cos X	cos Y	cos Z	Símbolos de rotación
ángulo	cos	sen	ángulo	cos	sen				
6 5-ejes, $\frac{1}{2}$ ángulo de rotación = $\frac{\pi}{5}$, $\cos = \frac{d}{4}$, $\text{sen} = \frac{a}{4}$.									
31°44'	$\frac{2}{a}$	$\frac{c}{a}$	0°	1	0	$\frac{c}{a}$	0	$\frac{2}{a}$	$\frac{d}{4} + \frac{c}{4}i + \frac{1}{2}k$
31°44'	$\frac{2}{a}$	$\frac{c}{a}$	180°	-1	0	$-\frac{c}{a}$	0	$\frac{2}{a}$	$\frac{d}{4} - \frac{c}{4}i + \frac{1}{2}k$
58°17'	$\frac{a}{2\sqrt{5}}$	$\frac{b}{2\sqrt{5}}$	90°	0	1	0	$\frac{b}{2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2\sqrt{5}}$	$\frac{d}{4} + \frac{1}{2}j + \frac{c}{4}k$
58°17'	$\frac{a}{2\sqrt{5}}$	$\frac{b}{2\sqrt{5}}$	270°	0	-1	0	$-\frac{b}{2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2\sqrt{5}}$	$\frac{d}{4} - \frac{1}{2}j + \frac{c}{4}k$
90°	0	1	31°43'	$\frac{b}{2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2\sqrt{5}}$	$\frac{b}{2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2\sqrt{5}}$	0	$\frac{d}{4} + \frac{1}{2}i + \frac{c}{4}j$
90°	0	1	148°17'	$-\frac{b}{2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{b}{2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2\sqrt{5}}$	0	$\frac{d}{4} - \frac{1}{2}i + \frac{c}{4}j$
10 3-ejes, $\frac{1}{2}$ ángulo de rotación = $\frac{\pi}{3}$, $\cos = \frac{1}{2}$, $\text{sen} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.									
54°44'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1 + i + j + k)$
54°44'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	135°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1 - i + j + k)$
54°44'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	225°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1 - i - j + k)$
54°44'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	315°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}(1 + i - j + k)$
20°55'	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	90°	0	1	0	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} + \frac{c}{4}j + \frac{d}{4}k$
20°55'	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	270°	0	-1	0	$-\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} - \frac{c}{4}j + \frac{d}{4}k$
69°5'	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	0°	1	0	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	0	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} + \frac{d}{4}i + \frac{c}{4}k$
69°5'	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	180°	-1	0	$-\frac{d}{2\sqrt{3}}$	0	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} - \frac{d}{4}i + \frac{c}{4}k$
90°	0	1	69°5'	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{2} + \frac{c}{4}i + \frac{d}{4}j$
90°	0	1	110°55'	$-\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{c}{4}i + \frac{d}{4}j$

Tabla 3.3: Sistema axial del icosaedro y dodecaedro (primer parte), donde

$$a = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad b = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad c = \sqrt{5} - 1, \quad d = \sqrt{5} + 1.$$

Distancias			Azimuths			cos X	cos Y	cos Z	Símbolos de rotación
ángulo	cos	sen	ángulo	cos	sen				
15 2-ejes, $\frac{1}{2}$ ángulo de rotación = $\frac{\pi}{2}$, cos = 0, sen = 1.									
0°	1	0	*	*	*	0	0	1	k
90°	0	1	0°	1	0	1	0	0	i
90°	0	1	90°	0	1	0	1	0	j
36°	$\frac{d}{4}$	$\frac{a}{4}$	62°40'	$\frac{c}{a}$	$\frac{2}{a}$	$\frac{c}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{c}{4}i + \frac{1}{2}j + \frac{d}{4}k$
36°	$\frac{d}{4}$	$\frac{a}{4}$	297°20'	$\frac{c}{a}$	$-\frac{2}{a}$	$\frac{c}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{c}{4}i - \frac{1}{2}j + \frac{d}{4}k$
36°	$\frac{d}{4}$	$\frac{a}{4}$	242°40'	$-\frac{c}{a}$	$-\frac{2}{a}$	$-\frac{c}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{d}{4}$	$-\frac{c}{4}i - \frac{1}{2}j + \frac{d}{4}k$
36°	$\frac{d}{4}$	$\frac{a}{4}$	117°20'	$-\frac{c}{a}$	$\frac{2}{a}$	$-\frac{c}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{d}{4}$	$-\frac{c}{4}i + \frac{1}{2}j + \frac{d}{4}k$
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	20°55'	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{c}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{d}{4}i + \frac{c}{4}j + \frac{1}{2}k$
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	339°5'	$\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$\frac{d}{4}$	$-\frac{c}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{d}{4}i - \frac{c}{4}j + \frac{1}{2}k$
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	200°55'	$-\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{d}{4}$	$-\frac{c}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{d}{4}i - \frac{c}{4}j + \frac{1}{2}k$
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	159°5'	$-\frac{d}{2\sqrt{3}}$	$\frac{c}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{d}{4}$	$\frac{c}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{d}{4}i + \frac{c}{4}j + \frac{1}{2}k$
72°	$\frac{c}{4}$	$\frac{b}{4}$	62°40'	$\frac{c}{a}$	$\frac{2}{a}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{c}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{d}{4}j + \frac{c}{4}k$
72°	$\frac{c}{4}$	$\frac{b}{4}$	297°20'	$\frac{c}{a}$	$-\frac{2}{a}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{d}{4}$	$\frac{c}{4}$	$\frac{1}{2}i - \frac{d}{4}j + \frac{c}{4}k$
72°	$\frac{c}{4}$	$\frac{b}{4}$	242°40'	$-\frac{c}{a}$	$-\frac{2}{a}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{d}{4}$	$\frac{c}{4}$	$-\frac{1}{2}i - \frac{d}{4}j + \frac{c}{4}k$
72°	$\frac{c}{4}$	$\frac{b}{4}$	117°20'	$-\frac{c}{a}$	$\frac{2}{a}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{c}{4}$	$-\frac{1}{2}i + \frac{d}{4}j + \frac{c}{4}k$

Tabla 3.4: Sistema axial del icosaedro y dodecaedro (segunda parte), donde

$$a = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad b = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad c = \sqrt{5} - 1, \quad d = \sqrt{5} + 1.$$

Más aún, en el mismo artículo, Cayley presenta los símbolos de rotación para los poliedros regulares 4-dimensionales los cuales provienen de los poliedros regulares 3-dimensionales descritos en las tablas anteriores:

El tetraedro da origen a un grupo de 24 símbolos descritos de manera explícita en la Tabla 3.5

$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$	16 raíces cúbicas de ± 1
$\pm i, \pm j, \pm k$	6 raíces cuadradas de ± 1
± 1	2 términos

24 símbolos de rotación

Tabla 3.5: Símbolos de rotación del poliedro con símbolo $\{3, 3, 3\}$

Los signos \pm son independientes entre sí.

El cubo y el octaedro dan origen a un grupo de 48 símbolos descritos de manera explícita en la Tabla 3.6

$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm j), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm k)$	12 raíces cuartas de ± 1
$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$	16 raíces cúbicas de ± 1
$\pm i, \pm j, \pm k, \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm j \pm k), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm k \pm i), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm i \pm j)$	18 raíces cuadradas de ± 1
± 1	2 términos

48 símbolos de rotación

Tabla 3.6: Símbolos de rotación del poliedro con símbolo $\{3, 3, 4\}$

Los signos \pm son independientes entre sí.

El icosaedro y el dodecaedro dan origen a un grupo de 120 símbolos descritos de manera explícita en la Tabla 3.7

$\pm \frac{\sqrt{5} \pm 1}{4} \pm \frac{1}{2}j \pm \frac{\sqrt{5} \mp 1}{4}k,$ $\pm \frac{\sqrt{5} \pm 1}{4} \pm \frac{1}{2}k \pm \frac{\sqrt{5} \mp 1}{4}i,$ $\pm \frac{\sqrt{5} \pm 1}{4} \pm \frac{1}{2}i \pm \frac{\sqrt{5} \mp 1}{4}j$	48 raíces quintas de la unidad ± 1
$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k),$ $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{4}j \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{4}k,$ $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{4}k \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{4}i,$ $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{4}i \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{4}j$	40 raíces cúbicas de ± 1
$\pm i, \pm j, \pm k,$ $\pm \frac{1}{2}i \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{4}j \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{4}k,$ $\pm \frac{1}{2}j \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{4}k \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{4}i,$ $\pm \frac{1}{2}k \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{4}i \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{4}j$	30 raíces cuadradas de ± 1
± 1	2 términos

120 símbolos de rotación

Tabla 3.7: Símbolos de rotación del poliedro con símbolo $\{3, 3, 5\}$

Los signos \pm son independientes entre sí, excepto en cada una de las tres primeras expresiones que corresponden a las raíces quintas de ± 1 en donde los signos $\sqrt{5} \pm 1$ y $\sqrt{5} \mp 1$ son opuestos el uno con respecto del otro, por tanto, cada expresión tiene 16 símbolos.

3.3. Sólidos regulares 4-dimensionales

Dado que $SU(2)$ es la esfera unitaria en el espacio 4-dimensional euclidiano \mathbb{H} de cuaterniones, la envoltura convexa $\text{ch}(G)$ de cualquier subgrupo finito $G < SU(2)$ es un politopo convexo.

Notemos que si G es cíclico de orden n , entonces $\text{ch}(G)$ es un n -ágono regu-

lar. En el resto de los casos, la envoltura convexa es de dimensión 4.

Por otro lado, la acción de G en \mathbb{H} con multiplicación por la izquierda, encaja G como un subgrupo de $\text{SO}(\mathbb{H})$. Los elementos de G son automorfismos de $\text{ch}(G)$.

Como G actúa transitivamente en sí mismo, todos los elementos de G son vértices de $\text{ch}(G)$.

Estudiaremos la distribución de los elementos de G entre los primos de \mathbb{H} que son perpendiculares al eje que pasa a través de Oe y que están en $\text{SU}(2)$.

Si L es dicho primo, todos los elementos $L \cap \text{SU}(2)$ tienen la misma distancia esférica φ desde e , donde $0 \leq \varphi \leq \pi$. Llamaremos a L el φ -primo.

El $\frac{\pi}{2}$ -primo, es el espacio tridimensional V y $\rho : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(V)$ es el epimorfismo 2 a 1 que se mencionó con anterioridad.

Observación 3.3.1. Sea $g \in \text{SU}(2)$. Si $\rho(g)$ es una α -rotación para algún α en $[0, \pi]$, entonces, por lo visto en la Proposición 3.2.6, $\rho(g)$ tiene una preimagen en el $\frac{\alpha}{2}$ -primo y otra en el $(\pi - \frac{\alpha}{2})$ -primo.

Para un $\varphi \in (0, \pi)$ fijo, la aplicación definida por

$$s = s_\varphi : V \rightarrow \varphi\text{-primo}$$

$$s(v) \mapsto \cos \varphi \cdot e + \text{sen } \varphi \cdot v$$

es una $(1 : \sin(\varphi))$ -similitud, pues s_φ sólo escala por $\text{sen } \varphi$ y traslada por $\cos \varphi \cdot e$. Ahora, si $|v| = 1$, entonces $s(v)$ está en $\text{SU}(2)$ y $\rho(s(v)) \in \text{SO}(V)$ es la 2φ -rotación sobre el eje orientado que pasa por v .

Observación 3.3.2. Notemos que la 2φ -rotación $\rho(g)$ tiene como imagen inversa a dos puntos antipodales, lo que implica que sólo para el caso $2\varphi = \pi$ el φ -primo y el $(\pi - \varphi)$ -primo son el mismo. Por tanto, La restricción de ρ a $\text{SU}(2) \cap \varphi$ -primo es inyectiva siempre que $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

$\rho(g) \in D_2$	α -rotación	$g \in \tilde{D}_2$	$\frac{\alpha}{2}$ -primo
3	π -rotación	3	$\frac{\pi}{2}$ -primo
		3	$(\pi - \frac{\pi}{2})$ -primo
1	0-rotación	1	0-primo
		1	π -primo

Tabla 3.8: Correspondencia entre elementos de D_2 y \tilde{D}_2 .

Ahora, utilizando la Observación 3.3.1, localicemos los elementos del grupo $G \in \{\tilde{D}_q, \tilde{T}, \tilde{O}, \tilde{I}\}$ (con $q = 2, 3, 4$) en los $\frac{\alpha}{2}$ -primos correspondientes.

De la descripción vista en la Sección 2.2 del subgrupo 2-diédrico, se genera la Tabla 3.8 donde se muestra la correspondencia entre las α -rotaciones de D_2 y los elementos de \tilde{D}_2 que están en los correspondientes $\frac{\alpha}{2}$ -primos.

$\rho(g) \in D_3$	α -rotación	$g \in \tilde{D}_3$	$\frac{\alpha}{2}$ -primo
1	$\frac{2\pi}{3}$ -rotación	1	$\frac{\pi}{3}$ -primo
		1	$(\pi - \frac{\pi}{3})$ -primo
1	$2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ -rotación	1	$\frac{2\pi}{3}$ -primo
		1	$(\pi - \frac{2\pi}{3})$ -primo
3	π -rotación	3	$\frac{\pi}{2}$ -primo
		3	$(\pi - \frac{\pi}{2})$ -primo
1	0-rotación	1	0-primo
		1	π -primo

Tabla 3.9: Correspondencia entre elementos de D_3 y \tilde{D}_3 .

$\rho(g) \in D_4$	α -rotación	$g \in \tilde{D}_4$	$\frac{\alpha}{2}$ -primo
1	$\frac{2\pi}{4}$ -rotación	1	$\frac{\pi}{4}$ -primo
		1	$(\pi - \frac{\pi}{4})$ -primo
1	$2 \cdot \frac{2\pi}{4}$ -rotación	1	$\frac{\pi}{2}$ -primo
		1	$(\pi - \frac{\pi}{2})$ -primo
1	$3 \cdot \frac{2\pi}{4}$ -rotación	1	$\frac{3\pi}{4}$ -primo
		1	$(\pi - \frac{3\pi}{4})$ -primo
4	π -rotación	4	$\frac{\pi}{2}$ -primo
		4	$(\pi - \frac{\pi}{2})$ -primo
1	0-rotación	1	0-primo
		1	π -primo

Tabla 3.10: Correspondencia entre los elementos de D_4 y \tilde{D}_4 .

También en la Sección 2.2, describimos el grupo D_q para $q \geq 3$. Si tomamos $q = 3, 4$, de dicha descripción, podremos generar las Tablas 3.9 y 3.10 en donde se relacionan las rotaciones de D_3 y D_4 con los elementos de \tilde{D}_3 y \tilde{D}_4 respectivamente.

$\rho(g) \in T$	α -rotación	$g \in \tilde{T}$	$\frac{\alpha}{2}$ -primo
4	$\frac{2\pi}{3}$ -rotación	4	$\frac{\pi}{3}$ -primo
		4	$(\pi - \frac{\pi}{3})$ -primo
4	$2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ -rotación	4	$\frac{2\pi}{3}$ -primo
		4	$(\pi - \frac{2\pi}{3})$ -primo
3	π -rotación	3	$\frac{\pi}{2}$ -primo
		3	$(\pi - \frac{\pi}{2})$ -primo
1	0-rotación	1	0-primo
		1	π -primo

Tabla 3.11: Correspondencia entre los elementos de T y \tilde{T} .

En la Tabla 2.1 tenemos la información necesaria para relacionar los elementos del Tetraédrico con los elementos del Tetraédrico binario. La Tabla 3.11 muestra esta relación.

$\rho(g) \in O$	α -rotación	$g \in \tilde{O}$	$\frac{\alpha}{2}$ -primo
3	$\frac{2\pi}{4}$ -rotación	3	$\frac{\pi}{4}$ -primo
		3	$(\pi - \frac{\pi}{4})$ -primo
3	$2 \cdot \frac{2\pi}{4}$ -rotación	3	$\frac{\pi}{2}$ -primo
		3	$(\pi - \frac{\pi}{2})$ -primo
3	$3 \cdot \frac{2\pi}{4}$ -rotación	3	$\frac{3\pi}{4}$ -primo
		3	$(\pi - \frac{3\pi}{4})$ -primo
6	π -rotación	6	$\frac{\pi}{2}$ -primo
		6	$(\pi - \frac{\pi}{2})$ -primo
4	$\frac{2\pi}{3}$ -rotación	4	$\frac{\pi}{3}$ -primo
		4	$(\pi - \frac{\pi}{3})$ -primo
4	$2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ -rotación	4	$\frac{2\pi}{3}$ -primo
		4	$(\pi - \frac{2\pi}{3})$ -primo
1	π -rotación	1	0-primo
		1	π -primo

Tabla 3.12: Correspondencia entre los elementos de O y \tilde{O} .

Las rotaciones del Octaédrico de la Tabla 2.2 generan la información de la

Tabla 3.12 en donde se relacionan los elementos de O y los elementos de \tilde{O} .

Finalmente, la información de la Tabla 2.3, nos permite calcular en que $\frac{\alpha}{2}$ -primo se encuentran cada uno de los elementos del Icosaédrico binario.

$\rho(g) \in I$	α -rotación	$g \in \tilde{I}$	$\frac{\alpha}{2}$ -primo
6	$\frac{2\pi}{5}$ -rotación	6	$\frac{\pi}{5}$ -primo
		6	$(\pi - \frac{\pi}{5})$ -primo
6	$2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ -rotación	6	$\frac{2\pi}{5}$ -primo
		6	$(\pi - \frac{2\pi}{5})$ -primo
6	$3 \cdot \frac{2\pi}{5}$ -rotación	6	$\frac{3\pi}{5}$ -primo
		6	$(\pi - \frac{3\pi}{5})$ -primo
6	$4 \cdot \frac{2\pi}{5}$ -rotación	6	$\frac{4\pi}{5}$ -primo
		6	$(\pi - \frac{4\pi}{5})$ -primo
15	π -rotación	15	$\frac{\pi}{2}$ -primo
		15	$(\pi - \frac{\pi}{2})$ -primo
10	$\frac{2\pi}{3}$ -rotación	10	$\frac{\pi}{3}$ -primo
		10	$(\pi - \frac{\pi}{3})$ -primo
10	$2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ -rotación	10	$\frac{2\pi}{3}$ -primo
		10	$(\pi - \frac{2\pi}{3})$ -primo
1	π -rotación	1	0-primo
		1	π -primo

Tabla 3.13: Correspondencia entre los elementos de I y \tilde{I} .

Las Tablas 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13 nos permiten distribuir los elementos de $G \in \{\tilde{D}_q, \tilde{T}, \tilde{O}, \tilde{I}\}$ ($q = 2, 3, 4$), en sus correspondientes primos. Como $G \cap (\pi - \varphi)$ -primo es igual a $-(G \cap \varphi)$ -primo, basta considerar φ en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Así pues, en la Figura 3.2 se muestran secciones 2-dimensionales de \mathbb{H} . Las líneas circulares de cada figura, representan $SU(2)$, las líneas verticales representan los φ -primos que contienen elementos de G y el número de dichos elementos (proviene de las tablas de correspondencia entre los subgrupos finitos de $SO(3)$ y los subgrupos finitos de $SU(2)$) está escrito bajo cada línea vertical.

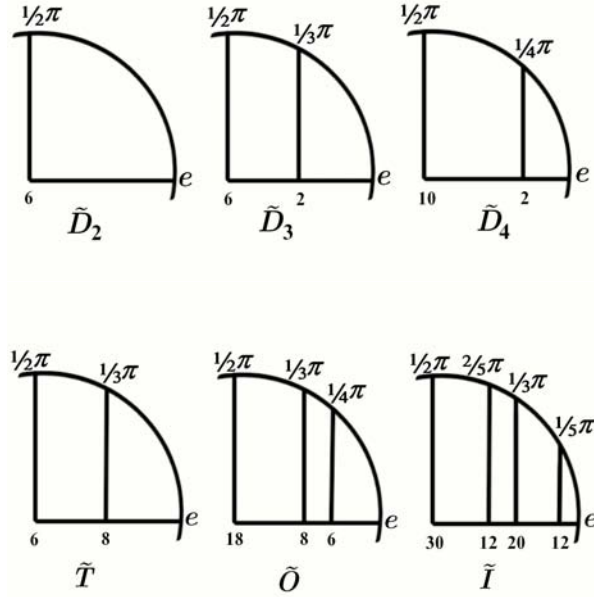


Figura 3.2: Distribución de los elementos de G en los φ -primos

Resulta que la envoltura convexa de tres subgrupos finitos de $SU(2)$ dan lugar a sólidos regulares 4-dimensionales. Para formalizarlo, el siguiente teorema:

Teorema 3.3.3.

- a) La envoltura convexa del grupo diédrico binario \tilde{D}_2 es el 4-octaedro con símbolo de Schläfli $\{3, 3, 4\}$. Tiene 16 tetraedros como caras 3-dimensionales, 32 triángulos por caras de dimensión 2, 24 aristas y 8 vértices.
- b) La envoltura convexa del grupo tetraédrico binario \tilde{T} es el sólido regular $\{3, 4, 3\}$. Tiene 24 octaedros como facetas, 96 triángulos por 2-caras, 96 aristas y 24 vértices.
- c) La envoltura convexa del icosaédrico binario $\text{ch}(\tilde{I}) = \{3, 3, 5\}$, tiene 600 tetraedros por facetas, 1200 triángulos como caras bidimensionales, 720 aristas y 120 vértices.
- d) Para cualquier otro subgrupo finito no-cíclico $G < SU(2)$, $\text{ch}(G)$ no es regular.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\alpha > 0$ el ángulo más pequeño tal que $G \cap \alpha\text{-primo} \neq \emptyset$. Si la envoltura convexa $\text{ch}(G)$ es regular, entonces, de la Sección 1.4, se tiene que $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ es el radio característico de $\text{ch}(G)$ y $Q = \text{ch}(G \cap \alpha\text{-primo})$ es la figura de vértice excelente en e .

Si comparamos lo obtenido en la Tabla 1.3 con el $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ y las figuras de vértice Q de la Figura 3.2, se tiene que a lo más $\text{ch}(\tilde{D}_2)$, $\text{ch}(\tilde{T})$ y $\text{ch}(\tilde{I})$ tienen oportunidad de ser regulares. Para \tilde{D}_n , con $n \geq 3$, Q no puede ser figura de vértice debido a la cantidad de vértices y para \tilde{O} , $\text{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$ no es un radio característico válido de un sólido regular.

Así pues, el inciso d) queda demostrado.

Utilicemos el siguiente lema [10, pág. 41-43]:

Lema 3.3.4. *Sea $G \in \{\tilde{D}_2, \tilde{T}, \tilde{I}\}$.*

- i) Para \tilde{D}_2 , $Q = \{3, 4\}$ es figura de vértice; $Q = \{4, 3\}$ es figura de vértice para \tilde{T} y $Q = \{3, 5\}$ lo es para \tilde{I} .*
- ii) Toda línea que une cualquier $g \in G$ con e , interseca el α -primo en Q .*
- iii) Si para algún $f \in \text{O}(\mathbb{H})$, la figura de vértice Q es f -invariante, entonces el conjunto finito (eventualmente vacío) $G \cap \varphi\text{-primo}$ es f -invariante para cualquier ángulo $0 \leq \varphi \leq \pi$.*

Dado que los vértices de $\text{ch}(G)$ corresponden a los elementos del grupo que está actuando en él y dicho grupo actúa de manera transitiva en sí mismo, se tiene que los automorfismos que transforman un vértice en otro son precisamente los elementos del grupo. El inciso *i*) del Lema 3.3.4 nos dice que Q es una figura de vértice regular de e . Por último, el tercer inciso del criterio de regularidad 1.3.8 se sigue del inciso *iii*) del Lema 3.3.4. Por lo tanto, al cumplirse el criterio de regularidad, $\text{ch}(G)$ es un sólido regular 4-dimensional que tiene por figura de vértice a Q , lo que implica que el símbolo de Schläfli correspondiente a \tilde{D}_2 es $\{3, 3, 4\}$, a \tilde{T} es $\{3, 4, 3\}$ y a \tilde{I} es $\{3, 3, 5\}$.

Ahora bien, por la Proposición 1.3.13, sabemos como son las k -caras de $\text{ch}(G)$, lo que implica que también sabemos el número de vértices q_k de cada k -cara; sabemos el número r_k de k -caras que contienen a e *i.e.*, $r_k = \#$ de $(k - 1)$ -caras de Q ; y sabemos el número $n_0 = |G|$ de vértices de $\text{ch}(G)$. Por tanto, conocemos el número n_k de k -caras el cual está dado por

$$n_k = n_0 \frac{r_k}{q_k}. \quad (3.9)$$

Entonces, con la fórmula (3.9), tenemos el número de k -caras de cada $\text{ch}(G)$ como se expone en los primeros tres incisos del Teorema 3.3.3:

a) Para la envoltura convexa del grupo diédrico binario \tilde{D}_2 , se tiene:

- $n_0 = 4 \cdot 2 = 8$ (Por el Teorema 3.1.9).
- $n_1 = n_0 \frac{q_1}{r_1} = 8 \cdot \frac{6}{2} = 24$.
- $n_2 = n_0 \frac{q_2}{r_2} = 8 \cdot \frac{12}{3} = 32$.
- $n_3 = n_0 \frac{q_3}{r_3} = 8 \cdot \frac{8}{4} = 16$.

b) Para el sólido regular \tilde{T} , se tiene:

- $n_0 = 24$ (Por el Teorema 3.1.9).
- $n_1 = n_0 \frac{q_1}{r_1} = 24 \cdot \frac{8}{2} = 96$.
- $n_2 = n_0 \frac{q_2}{r_2} = 24 \cdot \frac{12}{3} = 96$.
- $n_3 = n_0 \frac{q_3}{r_3} = 24 \cdot \frac{6}{6} = 24$.

c) Para \tilde{I} tenemos:

- $n_0 = 120$ (Por el Teorema 3.1.9).
- $n_1 = n_0 \frac{q_1}{r_1} = 120 \cdot \frac{12}{2} = 720$.
- $n_2 = n_0 \frac{q_2}{r_2} = 120 \cdot \frac{30}{3} = 1200$.
- $n_3 = n_0 \frac{q_3}{r_3} = 120 \cdot \frac{20}{4} = 600$.

■

3.4. Espacios de órbitas \mathbb{S}^3/G de los subgrupos finitos G de $SU(2)$

Todo subgrupo finito $G < SU(2)$ actúa en la 3-esfera $SU(2)$ mediante multiplicación por la izquierda.

Recordando la Definición 2.2.1, pero reemplazando el subconjunto S por un espacio topológico X , tenemos

Definición 3.4.1. Sea X un espacio topológico, G un grupo y e la identidad de G . Una acción de G en X por la izquierda, asigna a todo $g \in G$ una función $\phi : G \times X \rightarrow X$, con las siguientes propiedades:

- 1) $\phi(e, x) = x$, para toda $x \in X$ y $e \in G$.
- 2) $\phi(hg, x) = \phi(h, \phi(g, x))$, para toda $x \in X$ y $g, h \in G$.

Recordando también la Definición 2.2.3, el espacio total X es la unión disjunta de todas las órbitas $G \cdot x$. El conjunto de todas las órbitas se denota por X/G . Naturalmente se tiene la proyección canónica

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow X/G \\ x &\longmapsto G \cdot x. \end{aligned}$$

Observación 3.4.2. El conjunto de órbitas X/G tiene estructura de espacio topológico; un subconjunto $U \subset X/G$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(U) \subset X$ es abierto.

Así, la proyección p es una función continua y abierta.

A partir de aquí, a menos que se diga lo contrario, G será un grupo finito. Con esta condición, p es también una función cerrada.

Proposición 3.4.3. *El espacio de órbitas X/G es un espacio de Hausdorff si X es un espacio de Hausdorff. Similarmente, si X es compacto, el espacio de órbitas X/G es compacto [2, Proposición 2.2].*

Definición 3.4.4. Un *cubriente* $p : E \rightarrow X$ es aquel que para todo $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que $p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} S_i$, donde $S_i \subset E$ y además $p(S_i)$ es homeomorfo a U_x . A E se le llama *espacio cubriente*, a X le llamamos *espacio base* y a los S_i 's le llamamos *hojas* sobre U_x .

Observación 3.4.5. Si G actúa libremente en X , i.e., si $g \cdot x = x$ para algún $g \in G$ y $x \in X$, entonces $g = 1$, se tiene que la proyección $p : X \rightarrow X/G$ es un cubriente. En este caso, la vecindad de x es un abierto en X/G dado por $p(U_x)$, y las hojas están dadas por gU_x .

Proposición 3.4.6. *El grupo G es el grupo de transformaciones cubrientes de X sobre X/G , i.e., todo homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ tal que $p \cdot f = p$ es la acción de algún $g \in G$ en X como se muestra en el siguiente diagrama [8, Proposición 1.40 (b)].*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & X \\
 & \searrow p & \swarrow p \\
 & & X/G
 \end{array}$$

Si X es una variedad diferenciable y si G actúa libremente vía funciones diferenciables, el espacio de órbitas X/G hereda una única estructura diferenciable tal que p se vuelve un difeomorfismo local [4, Cap 0, Ejemplo 4.8].

Si además, X es orientado y toda función $X \rightarrow X$, dada por $x \mapsto g \cdot x$ preserva orientación, entonces X/G hereda una única orientación tal que p preserva orientación [4, Cap 0, Ejercicio 9].

Teorema 3.4.7. *Sea $G < \text{SU}(2)$ un subgrupo finito que actúa en $\mathbb{S}^3 = \text{SU}(2)$ (con multiplicación por la izquierda). El espacio de órbitas \mathbb{S}^3/G es una 3-variedad orientada compacta. La proyección canónica $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3/G$ es el*

cubriente universal. El grupo fundamental π_1 y el grupo de homología H_i de \mathbb{S}^3/G son los siguientes:

π_1	H_0	H_1	H_2	H_3
G	\mathbb{Z}	AG	0	\mathbb{Z}

Tabla 3.14: Grupo fundamental y grupos de homología de \mathbb{S}^3/G (AG es el grupo abelianizado de G).

DEMOSTRACIÓN:

La esfera 3-dimensional \mathbb{S}^3 es una 3-variedad orientada compacta diferenciable, el grupo G actúa libremente y de manera diferencial preservando orientación. Por tanto, \mathbb{S}^3/G es también una 3-variedad orientada compacta diferenciable.

La proyección p es el cubriente universal, pues \mathbb{S}^3 es simplemente conexo [8, pág. 68]. Por tanto, el grupo G de transformaciones cubrientes es canónicamente isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^3/G)$ [8, Proposición 1.40 (c)].

Dado que \mathbb{S}^3/G es arco-conexo, $H_0 = \mathbb{Z}$ [8, Proposición 2.7].

Ahora, un resultado general para espacios topológicos arbitrarios, nos dice que el primer grupo de homología es igual al grupo fundamental abelianizado, *i.e.*, $H_1(X) = \mathcal{A}\pi_1(X)$ [8, Teorema 2A.1]. Esto implica que $H_1 = AG$.

Luego, por la dualidad de Poincaré, $H^1 = H_2$ para toda 3-variedad orientada compacta [8, Teorema 3.30].

Por otro lado, el *Teorema del coeficiente universal* [8, Teorema 3.2] nos da la sucesión exacta de espacios arbitrarios

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(X), \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

En nuestro caso $H^1 = 0$, pues $H_1 = AG$ es finito y $H_0 = \mathbb{Z}$. ■

Ahora bien, un adecuado dominio fundamental (ver Definición 2.4.6) nos permite visualizar las variedades de órbitas \mathbb{S}^3/G .

Luego, $X/G = p(D)$, p proyecta $\text{Int}(D)$ de manera homeomorfa sobre $p(\text{Int}(D))$ y $p(\text{Int}(D))$ es denso en X/G . Así, X/G se obtiene de D mediante la identificación de puntos que están solamente en la frontera $\partial D = D \setminus \text{Int}(D)$.

Sea $P = (\text{ch}(G))^\circ$ el politopo polar de la envoltura convexa de G con respecto a la 3-esfera $\text{SU}(2)$. La multiplicación de G deja a $\text{ch}(G)$ invariante, por tanto, también a P .

La proyección radial manda la frontera $\partial P = \text{Unión de todas las facetas de } P$, de manera homeomorfa sobre $\mathbb{S}^3 = \text{SU}(2)$.

Los centros de las facetas de P son los elementos $g \in G$. La faceta con centro

g se denota por D_g .

La multiplicación por la izquierda de un elemento $h \in G$ manda a D_g de manera isomorfa en D_{hg} . Por lo que cada D_g es un dominio fundamental por la acción de G en ∂P .

Por simplicidad, escogemos $D = D_e$, donde e es el elemento unidad. Esta faceta D está rodeada por las facetas D_g para todos los $g \in G$ que están conectados a e por una arista de $\text{ch}(G)$.

Definición 3.4.8. Al conjunto de todos los $g \in G$ que están conectados a e por una arista de $\text{ch}(G)$ lo llamamos la *estrella* de e y lo denotamos por $\text{st}(e)$.

Si $\text{ch}(G)$ es regular, $\text{st}(e)$ consiste de los vértices de la figura de vértice de $\text{ch}(G)$ en e . En caso contrario, $\text{st}(e)$ no necesariamente yace en un solo primo.

Para todo $g \in \text{st}(e)$ existen las 2-caras comunes

$$F_g = D \cap D_g \quad \text{y} \quad \partial D = \bigcup_{g \in \text{st}(e)} F_g.$$

El espacio de órbitas $\partial P/G$ se obtiene de D , identificando cada $F_{g^{-1}}$ con F_g vía multiplicación por la izquierda con g .

Geoméricamente, este isomorfismo $g : F_{g^{-1}} \rightarrow F_g$ es un α -screw, donde un α -screw está definido como sigue:

Definición 3.4.9. Sea φ la distancia esférica de g a e . Al isomorfismo $g : F_{g^{-1}} \rightarrow F_g$, dado por la traslación a lo largo del vector que va del centro de $F_{g^{-1}}$ al centro de F_g (este vector es perpendicular a F_g y $F_{g^{-1}}$ los cuales yacen en 2-planos paralelos), combinando con una φ -rotación en torno al eje que pasa a través de éste vector, lo llamamos φ -screw.

Sea $\alpha > 0$ el ángulo más pequeño tal que $G \cap \alpha$ -primo $\neq \emptyset$. La intersección $Q = (\text{ch}(G)) \cap \alpha$ -primo es una figura de vértice de $\text{ch}(G)$ en e con centro $c = \cos(\alpha) \cdot e$.

Existe una correspondencia 1-1 entre $\text{st}(e)$ y el conjunto $V(Q)$ de vértices de Q : la arista de e a $g \in \text{st}(e)$ interseca el α -primo en $v_g \in V(Q)$. Sea Q^c el polar de Q con respecto a alguna esfera centrada en c en el α -primo. Todo vértice v_g de Q determina la 2-cara v_g^Δ de Q^c (ver la Sección 1.2).

De acuerdo a la Proposición 1.2.15, la faceta D del polar $\text{ch}(G)^\circ$ es similar a Q^c . La similitud manda la 2-cara v_g^Δ de Q^c sobre la 2-cara F_g de D .

En los casos $G \in \{\tilde{D}_2, \tilde{T}, \tilde{I}\}$, donde la envoltura convexa $\text{ch}(G)$ es regular, la estrella $\text{st}(e) = V(Q)$.

La figura de vértice Q y la faceta D son sólidos regulares mutuamente duales (ver Figura 3.15). El espacio de órbitas \mathbb{S}^3/G se obtiene de D identificando las 2-caras opuestas de D por medio de α -screws.

En las Figuras 3.3(a), 3.3(b) y 3.3(c), se muestran los dominios fundamentales D de \mathbb{S}^3/G con $G \in \{\tilde{D}_2, \tilde{T}, \tilde{I}\}$; aristas con la misma etiqueta se identifican por los α -screws.

G	\tilde{D}_2	\tilde{T}	\tilde{I}
Q	$\{3, 4\}$	$\{4, 3\}$	$\{3, 5\}$
D	$\{4, 3\}$	$\{3, 4\}$	$\{5, 3\}$
α	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$

Tabla 3.15: Figura de vértice de $\text{ch}(G)$ en el vértice v , faceta del polar $\text{ch}(G)^\circ$ y ángulo α dónde $G \cap \alpha\text{-primo} \neq 0$.

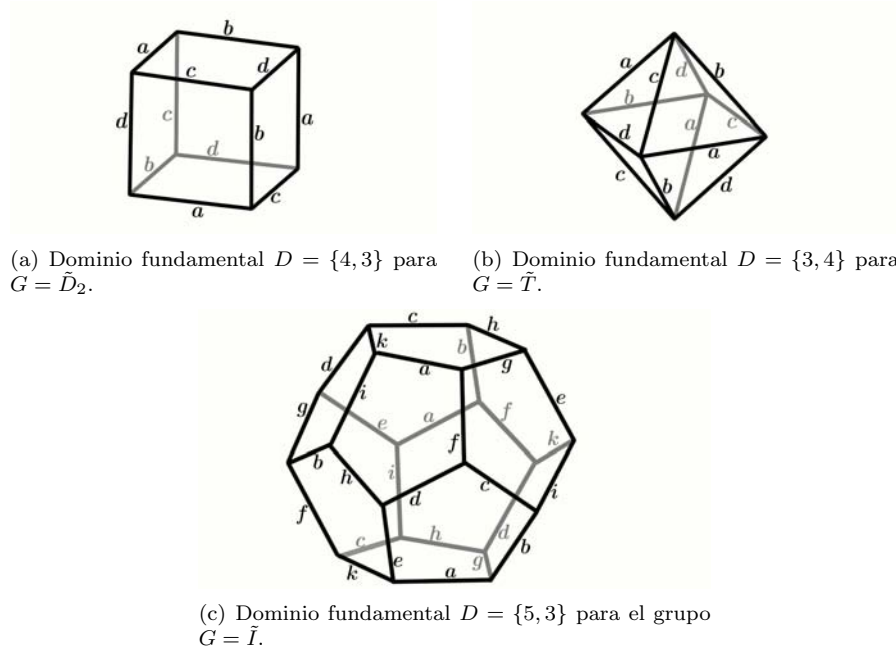
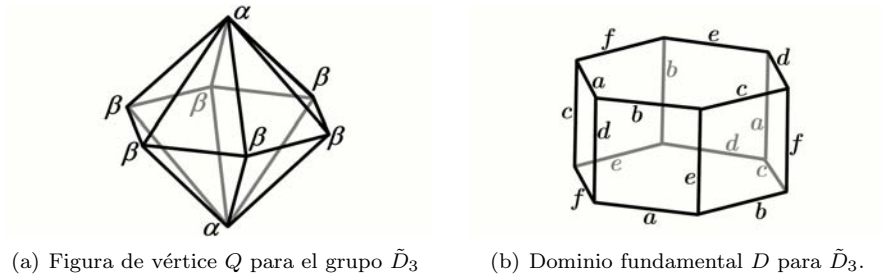


Figura 3.3: Dominios fundamentales de \mathbb{S}^3/G ; aristas con la misma etiqueta se identifican vía φ -screws

Ahora, si $G \in \{\tilde{D}_n, \tilde{O}\}$, con $n \geq 3$, unos elementos g de $\text{st}(e)$ yacen en el α -primo (lo que implica que $g = v_g$) y el resto de los elementos yacen en el β -primo. Por tanto, Q tiene dos tipos de vértices; α -vértices y β -vértices, y D tiene dos tipos de caras; α -caras y β -caras.

Para $G = \tilde{D}_n$, con $n \geq 3$, tenemos $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ y $\beta = 90^\circ$. La figura de vértice Q es una doble pirámide sobre un $2n$ -ágono. En la Figura 3.4(a), se muestra la figura de vértice Q para $n = 3$. Las dos cúspides son α -vértices; los vértices del $2n$ -ágono ecuatorial son β -vértices.

El polar D de Q es un prisma que tiene de base un $2n$ -ágono. En la Figura



(a) Figura de vértice Q para el grupo \tilde{D}_3 (b) Dominio fundamental D para \tilde{D}_3 .

Figura 3.4: Construcción del dominio fundamental para $G = \tilde{D}_3$

3.4(b) se muestra el polar D para $n = 3$. Los $2n$ -ágonos que forman la base y tapa, son α -caras; los cuadrados laterales son β -caras. Las aristas que están identificadas por los α -screws y β -screws se denotan con la misma letra.

Para $G = \tilde{O}$, tenemos $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 60^\circ$. Los 6 α -vértices son los vértices de un octaedro O^3 ; los 8 β -vértices son los vértices de un cubo C^3 , el cual es dual a O^3 .

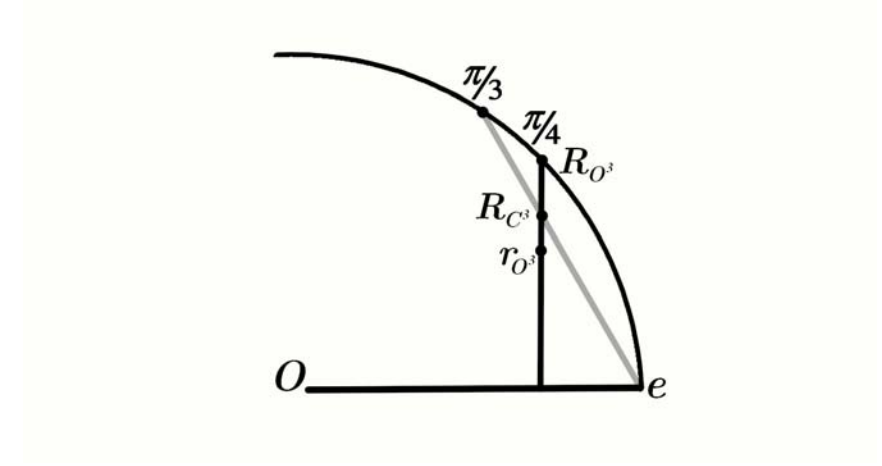


Figura 3.5: Radios circundantes

La Figura 3.5, muestra los radios circundantes

$$R_{O^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} = .7071 \quad \text{y} \quad R_{C^3} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{2})}{2} = .5073$$

Observemos que R_{C^3} es más grande que el radio interior

$$r_{O^3} = \frac{1}{\sqrt{6}} = .4082,$$

por tanto, C^3 no está contenido en O^3 .

La figura de vértices está dada por $Q = \text{ch}(O^3 \cup c^3)$. La faceta D es similar al polar $Q^c = \text{ch}(O^3)^c \cap \text{ch}(C^3)^c$, el cual es la intersección del cubo $\text{ch}(O^3)^c$ y su octaedro dual $\text{ch}(C^3)^c$, *i.e.*, un cubo con las esquinas seccionadas como se muestra en la Figura 3.6.

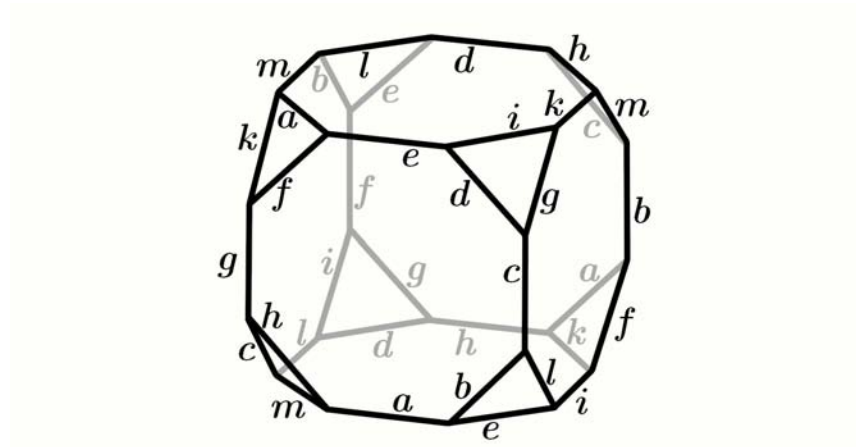


Figura 3.6: Dominio Fundamental D correspondiente a \mathbb{S}^3/\tilde{O} .

Las α -caras de D son octógonos regulares; las β -caras son triángulos equiláteros. De nuevo, las α -caras opuestas se identifican mediante los α -screws y las β -caras por los β -screws, con el fin de obtener el espacio de órbitas \mathbb{S}^3/\tilde{O} .

Observación 3.4.10. El dominio fundamental D , junto con la identificación de sus caras opuestas, produce una descomposición celular del espacio de órbitas \mathbb{S}^3/G con los siguientes números n_i de celdas i -dimensionales:

G	n_0	n_1	n_2	n_3
D_n	n	$2n$	$n + 1$	1
T	1	4	4	1
O	6	12	7	1
I	5	10	6	1

Tabla 3.16: Celdas i -dimensionales de cada espacio de órbitas

Observemos que en todos los casos, la característica de Euler-Poincaré es cero, *i.e.*, $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = 0$, como debe ser el caso para las 3-variedades orientadas compactas [8, Corolario 3.37].

Esta descomposición celular se utiliza también para determinar el grupo fundamental y la homología de \mathbb{S}^3/G .

3.5. Generadores y relaciones para los subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$

Sea $G < SL(2, \mathbb{C})$ un subgrupo finito binario y sea $\rho : G \rightarrow \Gamma$ el epimorfismo sobre el correspondiente subgrupo finito $\Gamma < SO(3)$.

Lema 3.5.1. *Si $\gamma \in \Gamma$ tiene orden r , entonces existe un elemento $g \in G$ tal que $\rho(g) = \gamma$ y $g^r = -E$, donde e denota la unidad.*

DEMOSTRACIÓN:

Recordemos que por el Lema 3.1.5, $-E$ es el único elemento de orden 2 en $SL(2, \mathbb{C})$. Existe pues un g con $\rho(g) = \gamma$ y tal que $g^r = \pm E$. Supongamos que $g^r = E$. Si r es impar, reemplazamos g por $-g$, pues multiplicando por $(-g)^r$ en ambos lados, obtenemos $(-g)^r g^r = (-g)^r$, de donde se sigue que $E = (-g)^r$. Si $r = 2s$ es par, llegamos a una contradicción, pues $g^{2s} = e$ implicaría que $g^s = \pm E$, por lo que $\gamma^s = 1$, lo cual es imposible ya que γ tiene orden $2s = r$.

■

La presentación de los subgrupos finitos $G < SL(2, \mathbb{C})$ por generadores y relaciones, se obtienen de la presentación de sus correspondientes subgrupos finitos $\Gamma < SO(3)$ vistos en la Sección 2.4. Si G no es cíclico, Γ tiene dos generadores: β y γ .

Usando el Lema 3.5.1, elegimos dos elementos $b, c \in G$ tales que $\beta = \rho(b)$, $\gamma = \rho(c)$ y los órdenes de b y c sean el doble de los órdenes β y γ respectivamente.

Estos generadores producen las siguientes presentaciones:

Tipo de $G < \text{SL}(2, \mathbb{C})$	Generadores	Relaciones
Cíclico de orden n	b	$b^n = 1$
Binario q -diédrico	b, c	$b^2 = c^q = (bc)^2$
Binario tetraédrico	b, c	$b^3 = c^3 = (bc)^2$
Binario octaédrico	b, c	$b^3 = c^4 = (bc)^2$
Binario icosaédrico	b, c	$b^3 = c^5 = (bc)^2$

Tabla 3.17: Generadores y relaciones de los subgrupos finitos de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$

La prueba de la tabla anterior consiste de tres puntos, los cuales enunciamos en la siguiente proposición:

Proposición 3.5.2.

- a) *Las relaciones son válidas.*
- b) *Los generadores b y c son suficientes.*
- c) *Las relaciones son suficientes.*

DEMOSTRACIÓN:

- a) Sean q y r los órdenes de β y γ respectivamente, entonces b y c satisfacen $b^q = c^r = -E$. Es suficiente mostrar que $(bc)^2 = -E$.

Dado que $(\beta\gamma)^2 = 1$, tenemos $(bc)^2 = \pm E$. Si suponemos $(bc)^2 = E$, obtenemos que $(bc) = \pm E$, por lo que $\beta\gamma = 1$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $(bc)^2 = -E$. Luego, $b^q = c^r = (bc)^2 = -E$.

- b) Sea G' un subgrupo de G generado por b y c . Entonces, se cumple que $-E = (bc)^2 \in G'$ y además ρ es un epimorfismo entre G' y Γ , por lo tanto $G' = G$.

- c) Sea G^* el grupo con presentación de acuerdo a la Tabla 3.17. El elemento $v = (bc)^2$ está en el centro de G^* , denotado por $Z(G^*)$. Mostremos que $v^2 = 1$ para los casos $v = b^2$ y $v = b^3$:

Caso 1: Si $v = b^2$, tenemos que $(bc)^2 = bcbcb = b^2$, por lo que $c = b^{-1}c^{-1}b$. Luego,

$$\begin{aligned}
 v = c^q &= (b^{-1}c^{-1}b)^q = b^{-1}c^{-q}b \\
 &= b^{-1}v^{-1}b = b^{-1}b^{-2}b = b^{-3}b = b^{-2} \\
 &= v^{-1}.
 \end{aligned}$$

por tanto, se cumple $v^2 = 1$ para $v = b^2$.

Caso 2: Si $v = b^3$, tenemos $(bc)^2 = bcbc = b^3$, por lo que

$$c = b^2 c^{-1} b^{-1} \quad (3.10)$$

Luego,

$$v = c^r = (b^2 c^{-1} b^{-1})^r = b (bc^{-1})^r b^{-1},$$

y como $v \in Z(G^*)$, se tiene que

$$v = b^{-1} v b = b^{-1} \left(b (bc^{-1})^r b^{-1} \right) b,$$

por tanto

$$v = (bc^{-1})^r \quad (3.11)$$

Por otro lado, $(bc)^2 = bcbc = c^r$ implica que $b = c^{-1} b^{-1} c^{r-1}$. Al sustituir en (3.11), obtenemos:

$$\begin{aligned} v &= (c^{-1} b^{-1} c^{r-1} c^{-1})^r = (c^{-1} b^{-1} c^{r-2})^r \\ &= c^{-1} (b^{-1} c^{r-3})^{r-1} b^{-1} c^{r-2} = c^{-1} (b^{-1} c^{r-3})^{r-1} b^{-1} c^{r-2} c^{-1} c \\ &= c^{-1} (b^{-1} c^{r-3})^{r-1} b^{-1} c^{r-3} c = c^{-1} (b^{-1} c^{r-3})^r c, \end{aligned}$$

y como $v \in Z(G^*)$, se obtiene

$$v = (b^{-1} c^{r-3})^r \quad (3.12)$$

Luego, transformamos la ecuación (3.12), conjugando por b , en

$$v = (c^{r-3} b^{-1})^r \quad (3.13)$$

Ahora bien, analicemos los distintos casos $r = 3, 4, 5$:

$r = 3$: Por la ecuación (3.12), se tiene que

$$v = (b^{-1} c^0)^3 = b^{-3} = v^{-1}$$

$r = 4$: Por la ecuación (3.13), tenemos que $v = (cb^{-1})^4$, lo cual es igual a $(bc^{-1})^{-4}$ que a su vez, por la ecuación (3.11), es igual a v^{-1} , por lo tanto $v = v^{-1}$.

$r = 5$: Por la ecuación (3.12), $v = (b^{-1}c^2)^5$. Y por la ecuación (3.10) $c^2 = b^2c^{-1}bc^{-1}b^{-1}$. Sustituyendo c^2 , obtenemos

$$\begin{aligned} v &= (bc^{-1}bc^{-1}b^{-1})^5 = bc^{-1}b(c^{-2}b)^4c^{-1}b^{-1} \\ &= bcc^{-1}c^{-1}b(c^{-2}b)^4c^{-1}b^{-1} = bc(c^{-2}b)^5c^{-1}b^{-1}, \end{aligned}$$

Luego, por la ecuación (3.13),

$$v = bcv^{-1}c^{-1}b^{-1} = bcv^{-1}(bc)^{-1}.$$

Y de nuevo, dado que $v \in Z(G^*)$, se tiene que $v = v^{-1}$.

Al cumplirse $v = v^{-1}$ para todos los r 's, se concluye que $v^2 = 1$ para $v = b^3$.

Finalmente, existe un epimorfismo $h : G^* \rightarrow G$ por el inciso a) y b). Comparando la presentación de G^* con la presentación de $\Gamma = \rho(G)$ como en la Sección 2.4, vemos que el kernel de $\rho h : G^* \rightarrow G \rightarrow \Gamma$ es generado por v , por lo que el $\text{Ker}(h)$ es generado por una potencia v^s . Dado que $h(v) = -E$ y $v^2 = 1$, la potencia tiene que ser $s = 0$, i.e., h es un isomorfismo. ■

Es imposible deducir que $v^2 = 1$ de las relaciones $b^q = c^r = (bc)^2$ con un argumento general para cualquier q y r , pues para otros q y r , el elemento v tiene orden infinito.

Las presentaciones de G en la Tabla 3.17, produce los grupos abelianizados $\mathcal{A}G$ de la siguiente tabla:

$G < \text{SL}(2, \mathbb{C})$	Grupo abelianizado
C_q	$\mathcal{A}G = G$
\tilde{D}_q	<i>Four group</i> generado por b y c (q par). Cíclico de orden 4, generado por b con $c = b^2$ (q impar).
\tilde{T}	Cíclico de orden 3, generado por c con $b = c^{-1}$
\tilde{O}	Cíclico de orden 2, generado por c con $b = 1$
\tilde{I}	$\{1\}$

Tabla 3.18: Grupos abelianizados de los subgrupos finitos de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$

El epimorfismo $\rho : G \rightarrow \Gamma < \text{SO}(3)$ induce un epimorfismo $\bar{\rho} : \mathcal{A}G \rightarrow \mathcal{A}\Gamma$. Este epimorfismo es 2 a 1 si G es cíclico de orden par o es un q -diédrico binario con q impar. En el resto de los casos, $\bar{\rho}$ es un isomorfismo. Los $\mathcal{A}\Gamma$ se obtienen de las Secciones 2.3 y 2.4.

Capítulo 4

Polinomios invariantes

En este capítulo veremos cómo la acción de un subgrupo arbitrario G de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ en la \mathbb{C} -álgebra de polinomios $S = \mathbb{C}[x, y]$, nos permite definir una subálgebra S^G , en donde todo elemento es un polinomio que se mantiene invariante bajo la acción del grupo G . Estos polinomios invariantes dan lugar a las definiciones de *divisores* D y *formas semi-invariantes* f , con las que daremos una caracterización que relaciona ciertos divisores con formas G -semi-invariantes.

Luego, de la definición de forma semi-invariante, obtenemos unos homomorfismos llamados *caracteres*, éstos nos ayudarán a obtener todos los polinomios G -invariantes, pues con dichos caracteres obtenemos un conjunto de generadores $\{x, y, z\}$ para la \mathbb{C} -álgebra S^G , con $G < \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, y un isomorfismo

$$\Phi : \mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle \longrightarrow S^G$$

con $\langle \varphi \rangle = \mathrm{Ker} \Phi$ y $\varphi(x, y, z) = \varphi_G = 0$ es la relación que cumplen los generadores para cada subgrupo finito G .

Finalmente, probaremos un resultado general acerca de las \mathbb{C} -álgebras S^G de polinomios G -invariantes, donde G es un subgrupo finito arbitrario de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, y lo utilizaremos para describir el espacio de órbitas \mathbb{C}^n/G como variedad afín $V \subset \mathbb{C}^r$. En el caso en que $G < \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, esta variedad es homeomorfa a la superficie compleja dada por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid \varphi(x, y, z) = 0\}$$

la cual llamaremos *variedad de órbitas afín*.

4.1. Divisores invariantes y formas semi-invariantes

En esta sección estudiaremos los anillos de polinomios G -invariantes en dos variables para los subgrupos finitos $G < \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Comenzaremos con algunas definiciones generales y algunas observaciones:

Observación 4.1.1. Un subgrupo $G < \text{GL}(n, \mathbb{C})$ actúa en la \mathbb{C} -álgebra de polinomios $S = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ en n variables mediante

$$(f\delta)(z) = f(\delta z) \quad \text{para } \delta \in G, z \in \mathbb{C}^n \text{ y } f \in S.$$

Definición 4.1.2. Un polinomio $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ es llamado G -invariante si $f\delta = f$ para todo $\delta \in G$.

Los polinomios G -invariantes forman una subálgebra S^G . Con el fin de estudiar la subálgebra S^G , podemos reemplazar el subgrupo G por un subgrupo conjugado $H = \alpha G \alpha^{-1}$, pues el morfismo $S^G \rightarrow S^H$, dado por $f \mapsto f\alpha$, es un isomorfismo.

La acción de G respeta la descomposición aditiva de un polinomio f en sus términos homogéneos, pues cada $\delta \in G$ es una automorfismo lineal de \mathbb{C}^n , *i.e.*, si escribimos a f como

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_n,$$

donde las f_i son las sumas de todos los términos de grado i en f , entonces $f(\delta z) = f_0(\delta z) + f_1(\delta z) + \dots + f_n(\delta z)$.

Particularmente f es G -invariante si y sólo si sus términos homogéneos son G -invariantes. Por tanto, primero nos restringiremos a la acción de G en polinomios homogéneos a los cuales llamaremos simplemente *formas*.

Recordando el *Teorema Fundamental del Álgebra*:

Teorema 4.1.3. *Todo polinomio complejo en una variable de grado n puede escribirse de manera única como*

$$\varphi(z) = \kappa(z - z_1)^{r_1} \dots (z - z_q)^{r_q},$$

donde z_1, \dots, z_q son los distintos ceros de φ que tienen multiplicidades r_1, \dots, r_q respectivamente, $\kappa \in \mathbb{C}$ y $n = r_1 + \dots + r_q$.

Existe una estrecha relación entre formas en dos variables y polinomios en una variable la cual consiste en homogeneizar los polinomios de la siguiente manera

$$f(z, w) = w^n \varphi\left(\frac{z}{w}\right).$$

Notemos que cuando $w = 1$ se tiene $f(z, 1) = \varphi(z)$. Luego, como f es un polinomio homogéneo se tiene:

$$w^n \varphi\left(\frac{z}{w}\right) = w^n f\left(\frac{z}{w}, 1\right) = f(z, w).$$

Así pues, el Teorema Fundamental del Álgebra para formas queda como sigue:

Teorema 4.1.4. *Toda forma en dos variables de grado n se puede escribir como*

$$f(z, w) = (b_1z - a_1w)^{r_1} \cdots (b_qz - a_qw)^{r_q},$$

donde $[a_1 : b_1], \dots, [a_q : b_q] \in \mathbb{CP}^1$ son los diferentes ceros de f que tienen órdenes r_1, \dots, r_q respectivamente tales que $r_i \in \mathbb{Z}^+$ y $n = r_1 + \cdots + r_q$.

DEMOSTRACIÓN:

Por el Teorema 4.1.3, todo polinomio de grado n , se escribe

$$\varphi(x) = \kappa(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_q)^{r_q},$$

con $r_1 + \cdots + r_q = n$.

Luego, por la relación entre dos formas y polinomios en una variable, tenemos que

$$\begin{aligned} f(z, w) &= w^n \varphi\left(\frac{z}{w}\right) = w^n \kappa \left(\frac{z}{w} - x_1\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{z}{w} - x_q\right)^{r_q} \\ &= \kappa w^{r_1} \left(\frac{z}{w} - x_1\right)^{r_1} \cdots w^{r_q} \left(\frac{z}{w} - x_q\right)^{r_q} \\ &= \kappa \left(w \left(\frac{z}{w} - x_1\right)\right)^{r_1} \cdots \left(w \left(\frac{z}{w} - x_q\right)\right)^{r_q} \\ &= \kappa (z - wx_1)^{r_1} \cdots (z - wx_q)^{r_q}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\kappa = b_1^{r_1} \cdots b_q^{r_q}$, por lo que

$$\begin{aligned} f(z, w) &= b_1^{r_1} \cdots b_q^{r_q} (z - wx_1)^{r_1} \cdots (z - wx_q)^{r_q} \\ &= b_1^{r_1} (z - wx_1)^{r_1} \cdots b_q^{r_q} (z - wx_q)^{r_q} \\ &= (b_1(z - wx_1))^{r_1} \cdots (b_q(z - wx_q))^{r_q} \\ &= (b_1z - b_1wx_1)^{r_1} \cdots (b_qz - b_qwx_q)^{r_q}. \end{aligned}$$

Sea $a_i = b_i w$ para $i = 1, \dots, q$. Escribimos entonces $f(z, w)$ como

$$f(z, w) = (b_1z - a_1w)^{r_1} \cdots (b_qz - a_qw)^{r_q}.$$

De esta manera, es claro que los ceros de $f(z, w)$ están dados por las coordenadas homogéneas $[a_1 : b_1], \dots, [a_q : b_q]$, con multiplicidades r_1, \dots, r_q respectivamente. Además, las multiplicidades satisfacen $r_1 + \cdots + r_q = n$, lo cual se sigue del Teorema 4.1.3. ■

En el teorema anterior, \mathbb{CP}^1 es la línea proyectiva definida en la Sección 3.1.

La forma f está únicamente determinada por sus ceros y multiplicidades salvo un factor $\kappa \in \mathbb{C}^*$, el cual proviene del polinomio complejo $\varphi\left(\frac{z}{w}\right)$, y salvo el orden de los factores.

Para una mejor formulación introduciremos el concepto de un *divisor*.

Definición 4.1.5. Una función $D : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $D(x) = 0$ para toda x , excepto para una cantidad finita, es llamada *divisor* de \mathbb{CP}^1 . Además, el divisor D es llamado *positivo* si $D(x) \geq 0$ para toda x .

El conjunto de todos los divisores (no sólo los divisores positivos), forman un grupo abeliano denotado por \mathcal{D} : la operación de grupo “ \cdot ”, está definida como la suma puntual de enteros, *i.e.*,

$$(D_1 \cdot D_2)(x) = D_1(x) + D_2(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{CP}^1.$$

Claramente la operación es asociativa y conmutativa, pues se reduce a la suma de enteros la cual es también asociativa y conmutativa. El elemento identidad es el *divisor cero* definido por $D_0(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{CP}^1$. El elemento inverso de D está dado por $-D$, *i.e.*, si $D(x) = z$, $(-D)(x) = -z$ con $z \in \mathbb{Z}$, por tanto $(D \cdot (-D)) = D_0$, pues $(D \cdot (-D))(x) = D(x) + (-D)(x) = z - z = 0$ para todo $x \in \mathbb{CP}^1$. Análogamente, $((-D) \cdot D) = D_0$.

A cada forma f le podemos asociar un divisor positivo como sigue:

$$D_f(x) \equiv \begin{cases} \text{Multiplicidad de } x & \text{Si } x \text{ es cero de } f \\ 0 & \text{Si } x \text{ no es cero de } f. \end{cases}$$

Observación 4.1.6. Los múltiplos escalares de f generan el mismo divisor D_f .

Así pues, para cada divisor positivo D , tenemos una forma f la cual tiene por divisor asociado al propio D . Esta forma f es única salvo un factor en \mathbb{C}^* .

Notemos que si

$$f(z, w) = (b_1z - a_1w)^{r_1} \cdot \dots \cdot (b_qz - a_qw)^{r_q}$$

y

$$g(z, w) = (d_1z - c_1w)^{s_1} \cdot \dots \cdot (d_pz - c_pw)^{s_p},$$

la multiplicación fg está dada por

$$(fg)(z, w) = (b_1z - a_1w)^{r_1} \cdot \dots \cdot (b_qz - a_qw)^{r_q} \cdot (d_1z - c_1w)^{s_1} \cdot \dots \cdot (d_pz - c_pw)^{s_p},$$

por tanto, el divisor D_{fg} está dado por las multiplicidades de los ceros de fg . Si f y g tienen una raíz en común $[a_i : b_i] = [c_j : d_j]$, se tiene que la multiplicidad de dicha raíz será $r_i + s_j$. Así, el divisor D_{fg} está dado por

$$D_{fg} = \begin{cases} r_i + s_j, & \text{si } [a_i : b_i] = [c_j : d_j] \text{ es una raíz común de } f \text{ y } g \\ r_i, & \text{si } [a_i : b_i] \text{ es sólo raíz de } f \\ s_j, & \text{si } [c_j : d_j] \text{ es sólo raíz de } g \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En resumidas cuentas, se tiene que

$$D_{fg} = D_f + D_g.$$

Definición 4.1.7. El *grado* de un divisor está dado por el homomorfismo

$$\begin{aligned} \deg : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ D &\longmapsto \sum_{x \in \mathbb{CP}^1} D(x). \end{aligned}$$

Luego, como $\deg(D_f) = \sum_{x \in \mathbb{CP}^1} D_f(x) = \sum_{i=1, \dots, q} r_i$, donde r_i es la multiplicidad de una raíz $[a_i : b_i]$ de f , se tiene que $\deg D_f = \deg f$.

El subgrupo finito $\Gamma < \text{SO}(3)$ actúa linealmente en \mathbb{CP}^1 . Por tanto, actúa por la derecha en el grupo de divisores de la siguiente manera:

$$(D\gamma)(x) = D(\gamma x) \quad \text{para } \gamma \in \Gamma \quad \text{y } x \in \mathbb{CP}^1.$$

Definición 4.1.8. El divisor D es llamado Γ -invariante si $D\gamma = D$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Los divisores Γ -invariantes forman un subgrupo de \mathcal{D}_Γ .

Definición 4.1.9. Sea $\Sigma \subset \mathbb{CP}^1$ una órbita de la Γ -acción, entonces Σ determina el divisor Γ -invariante positivo definido por:

$$D(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in \Sigma \\ 0 & \text{En otro caso,} \end{cases}$$

el cual es llamado *divisor simple* de Σ y lo denotaremos también por Σ .

Proposición 4.1.10. *Todo divisor invariante positivo puede escribirse de manera única como suma finita de diferentes divisores simples Σ_i con coeficientes $r_i \in \mathbb{N}$, $r_i > 0$, i.e.,*

$$D = r_1 \Sigma_1 + r_2 \Sigma_2 + \cdots + r_k \Sigma_k \tag{4.1}$$

DEMOSTRACIÓN:

La prueba es clara, pues si Σ_i es una órbita, entonces D tiene el valor r_i en todos los puntos de Σ_i , lo cual implica la ecuación (4.1). ■

Sea $G < \text{SL}(2, \mathbb{C})$ un subgrupo finito. Salvo conjugación, podemos suponer que G es un subgrupo de $\text{SU}(2)$. Sea $\rho : G \rightarrow \Gamma < \text{SO}(3)$ el epimorfismo (3.7). Para una forma f con divisor D_f tenemos $D_{f\delta} = (D_f)\gamma^{-1}$ para $\delta \in G$ y $\gamma = \rho(\delta)$, en particular:

Proposición 4.1.11. *Si f es G -invariante, entonces D_f es Γ -invariante.*

DEMOSTRACIÓN:

Si f es G -invariante, se tiene que $f\delta = \delta$ para todo $\delta \in G$, luego

$$D_f = D_{f\delta} = (D_f)(\rho(\delta))^{-1},$$

por lo que $(D_f)(\rho(\delta))^{-1} = D_f$ para todo $\rho(\delta) \in \Gamma$, lo que implica que D_f es Γ -invariante. ■

Pero el recíproco no es del todo cierto. De hecho, lo que tenemos es la siguiente proposición:

Proposición 4.1.12. *Si D_f es Γ -invariante, entonces $f\delta$ es igual a f salvo un factor en \mathbb{C}^* .*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\gamma = \rho(\delta) \in \Gamma$. Dado que D_f es Γ -invariante, se tiene que

$$D_f = (D_f)\gamma = D_{f\delta^{-1}},$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. Luego, $\alpha f = f\delta^{-1}$ para todo $\delta \in G$ y $\alpha \in \mathbb{C}^*$, lo que implica que f es G -invariante salvo un factor α . ■

Esto motiva a la siguiente definición:

Definición 4.1.13. Una forma f es llamada *G -semi-invariante* si para cada $\delta \in G$, existe un $\chi(\delta) \in \mathbb{C}^*$ tal que $f\delta = \chi(\delta)f$, i.e., $f(\delta z) = \chi(\delta)f(z)$ para $z \in \mathbb{C}^2$.

Notemos que si $f \neq 0$, el factor $\chi(\delta)$ está únicamente determinado por f y δ .

Definición 4.1.14. Llamaremos *caracter* de f a la función $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$, de la Definición 4.1.13. Para enfatizar que es el caracter correspondiente a f , lo denotaremos por χ_f .

Si $n = |G|$, los valores de χ son raíces n -ésimas de la unidad, pues como todo elemento $\delta \in G$ cumple con $\delta^n = 1$, se tiene

$$f = f\delta^n = \chi(\delta)^n f,$$

lo cual implica que $\chi(\delta)^n = 1$.

Ahora si, podemos dar una condición necesaria y suficiente para los divisores Γ -invariantes:

Teorema 4.1.15. *La forma f es G -semi-invariante si y sólo si su divisor D_f es Γ -invariante.*

DEMOSTRACIÓN:

Se sigue directamente de las Proposiciones 4.1.11 y 4.1.12.

■

El caracter de f depende únicamente de D_f . Por tanto, para todo divisor Γ -invariante positivo, existe un caracter bien definido

$$\chi_D : G \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

Este caracter cumple claramente que

$$\chi_{C+D} = \chi_C \cdot \chi_D,$$

para dos divisores positivos.

Luego, la Proposición 4.1.10, implica que el caracter de un divisor invariante arbitrario puede calcularse si conocemos los caracteres de los divisores simples.

Definición 4.1.16. Un *divisor excepcional* es el divisor simple de una órbita excepcional.

Usando esta definición, tenemos que es suficiente conocer los caracteres de los divisores excepcionales (dos o tres según sea el caso).

Para un punto $x \in \mathbb{CP}^1$, denotemos también por x al divisor:

$$x = \begin{cases} 1 & \text{En } x \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Definición 4.1.17. El divisor invariante positivo $D = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma x$, donde x es el divisor asociado al punto $x \in \mathbb{CP}^1$, el cual tiene por grado $\deg D = N = |\Gamma|$, es llamado el *divisor principal* a través de x .

Proposición 4.1.18. Si Σ es la órbita a través de x , entonces $D = m\Sigma$ donde $m = |\Gamma_x|$ es el orden del subgrupo de isotropía de x .

DEMOSTRACIÓN:

Dado que siempre se satisface $|\Gamma| = |\Sigma| |\Gamma_x|$, se tiene que

$$|\Gamma| = \deg D = m \deg(\Sigma) = m|\Sigma|,$$

donde $m = |\Gamma_x|$. Se sigue que el divisor principal a través de x está dado por $D = m\Sigma$.

■

De la Proposición 4.1.18 y de la igualdad 4.1, se sigue que

$$\chi_{m\Sigma} = (\chi_\Sigma)^m = \chi_\Sigma^m.$$

Para todo $\delta \in G$ el valor del caracter $\chi_D(\delta)$ depende de x . Puesto que \mathbb{CP}^1 es conexo y $\chi_D(\delta)$ es una raíz $|G|$ -ésima de la unidad, $\chi_D(\delta)$ no depende de D .

Hemos probado entonces la siguiente proposición:

Proposición 4.1.19. *Todos los divisores principales tienen el mismo caracter. Si Σ es una Γ -órbita excepcional, entonces el caracter común de todos los divisores principales es $\chi = \chi_\Sigma^n$ con $n = \frac{|\Gamma|}{|\Sigma|}$.*

4.2. Los caracteres de los divisores invariantes

Como antes, G es un subgrupo finito de $SU(2)$ y $\Gamma = \rho(G)$ es un subgrupo de $SO(3)$.

Con el fin de obtener todos los polinomios G -invariantes, primero determinaremos los caracteres de los divisores excepcionales y así, por la Proposición 4.1.19, obtener los caracteres de todos los divisores simples. Luego, por la Proposición 4.1.10, podemos calcular el caracter de cualquier divisor invariante.

En particular, obtenemos aquellos divisores invariantes que tienen caracter trivial. Sus correspondientes formas son exactamente las formas G -invariantes, *i.e.*, las componentes homogéneas de los polinomios G -invariantes.

A continuación diremos como son los caracteres de los subgrupos finitos de $SU(2)$:

Caracteres de los subgrupos cíclicos: Sea G el grupo cíclico de orden n , generado por el elemento b . Existen pues, dos divisores excepcionales P y Q de Γ . Estos pertenecen a los dos puntos fijos. Los valores de los caracteres $\chi_P(b)$ y $\chi_Q(b)$ son raíces n -ésimas primitivas de la unidad con $\chi_P \cdot \chi_Q = 1$. El caracter común χ de los divisores principales está determinado por el valor $\chi(b) = 1$ para n impar y $\chi(b) = -1$ para n par.

DEMOSTRACIÓN:

Podemos suponer que después de una conjugación adecuada,

$$b = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{con } \eta = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Lo que implica que $P = [0 : 1]$ y $Q = [1 : 0]$ son los puntos fijos, y $f(z, w) = z$ y $g(z, w) = w$ son 2-formas con $D_f = P$ y $D_g = Q$. Esto produce

$$\chi_P(b) = \chi_f(b) = \eta \quad \text{y} \quad \chi_Q(b) = \chi_g(b) = \eta^{-1}.$$

Si n es impar, $n = |\Gamma|$, y por lo tanto nP es principal, de modo que $\chi(b) = \chi_P(b)^n = 1$. Si n es par, $\frac{n}{2} = |\Gamma|$, de modo que $\chi(b) = \chi_P(b)^{\frac{n}{2}} = -1$. La diferencia entre la paridad de n viene del Lema 3.1.8.

Caracteres de los subgrupos no-cíclicos: Utilizaremos las tablas que resumen lo hecho en la Sección 2.2. Existen pues, tres divisores excepcionales denotados por E, V y F que corresponden a las órbitas excepcionales de puntos medios de aristas, vértices y centros de caras respectivamente.

Dado que los valores de los caracteres yacen en un grupo abeliano, tenemos que todo caracter $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ se factoriza a través del grupo abelianizado \mathcal{AG} el cual vimos en la Tabla 3.18. Es suficiente entonces, determinar los valores $\chi(b)$ y $\chi(c)$ para los generadores de b y c de \mathcal{AG} .

Tipo de $G < \text{SL}(2, \mathbb{C})$		χ_E	χ_V	χ_F	χ
q -diédrico binario (q impar)	b	i	$-i$	-1	-1
q -diédrico binario (q par)	b	1	-1	-1	1
	c	-1	-1	1	1
Tetraédrico binario	c	1	θ	θ^2	1
Octaédrico binario	c	-1	-1	1	1
Icosaédrico binario	1	1	1	1	1

Tabla 4.1: Caracteres de los subgrupos no-cíclicos

En la Tabla 4.1, χ denota el caracter común de los divisores principales y θ es una raíz tercera primitiva de la unidad.

DEMOSTRACIÓN (de la Tabla 4.1):

La última línea se sigue de que el icosaédrico binario abelianizado es un grupo trivial.

Veamos algunas observaciones generales antes de mostrar cómo calcular los valores precisos de $\chi(b)$:

Observación 4.2.1.

- a) Si G es el q -diédrico binario (con q par) o el Octaédrico binario, por la Tabla 3.18, todos los elementos de \mathcal{AG} tienen orden menor o igual que 2, por tanto, los valores de los correspondientes caracteres son ± 1 .
- b) Los valores de caracteres del q -diédrico binario para q impar, son raíces cuartas de la unidad, pues de la Tabla 3.18, $\mathcal{A}\tilde{D}_q$ es cíclico de orden 4.

- c) Los valores de los caracteres del Tetraédrico binario son raíces cúbicas de la unidad, pues su grupo abelianizado es cíclico de orden 3 (ver Tabla 3.18).
- d) En todos los casos, $\chi = \chi_E^2$ pues $2E$ es una órbita principal.

Ahora bien, mostremos cómo calcular $\chi(b)$ para el q -diédrico binario con q -impar. Podremos calcular el resto de los valores de la Tabla 4.1 con el mismo método:

El elemento $b \in \tilde{D}_q$ tiene orden 4. Su imagen $\beta = \rho(b) \in D_q$ es una π -rotación en torno al eje de simetría del q -ágono invariante de D_q .

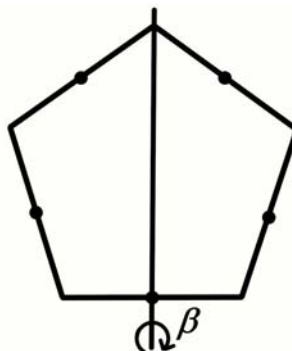


Figura 4.1: Órbita D_q -invariante E (puntos medios de aristas).

La órbita D_q -invariante E que consta de puntos medios de aristas (ver Figura 4.1) consisten de un punto fijo de β y $\frac{q-1}{2}$ β -órbitas principales.

De la Observación 4.2.1(b), si b es el generador de $\mathcal{A}\tilde{D}_q$, se tiene que el punto fijo contribuye el factor $\pm i$ al caracter $\chi_E(b)$ y cada β -órbita principal contribuye el factor -1, por tanto $\chi_E(b) = \pm i$. Si b es reemplazado eventualmente por b^{-1} , normalizamos $\chi_E(b) = i$ y $\chi(b) = -1$ por el último punto de las observaciones generales que se precisaron con anterioridad. La Γ -órbita de vértices consiste de los otros puntos fijos de β y $\frac{q-1}{2}$ β -órbitas principales, por tanto, $\chi_V(b) = \chi_E(b)^{-1} = -i$. Finalmente, la Γ -órbita F es una β -órbita principal, por lo que $\chi_F(b) = -1$. Por tanto, hemos calculado los valores precisos de $\chi(b)$ para el q -diédrico con q impar. ■

La estructura de la órbita de la Γ -acción en $\mathbb{C}P^1$ (ver el resumen del final de la Sección 2.2) y la descomposición de divisores invariantes en divisores simples de acuerdo a la Proposición 4.1.10 implica que todo divisor invariante positivo se puede escribir como

$$D = rP + sQ + P_1 + \dots + P_k \quad \text{para } \Gamma \text{ cíclico} \quad (4.2)$$

o como

$$D = rE + sV + tF + P_1 + \cdots + P_k \quad \text{para } \Gamma \text{ no-cíclico} \quad (4.3)$$

donde $r, s, t \in \mathbb{N}$ y P_1, \dots, P_k son divisores simples de órbitas principales.

La Tabla 4.1 implica que D dado por la ecuación (4.2) o (4.3), tiene caracter trivial si y sólo si las condiciones de divisibilidad de la siguiente tabla se cumplen:

Tipo de $G < \text{SL}(2, \mathbb{C})$	Condiciones para caracter trivial
Cíclico de orden impar n	$n (r - s)$
Cíclico de orden par $2m$	$2m (r - s + km)$
q -diédrico binario (q impar)	$4 (r - s + 2t + 2k)$
q -diédrico binario (q par)	$2 (s + t)$ y $2 (r + s)$
Tetraédrico binario	$3 (s - t)$
Octaédrico binario	$2 (r + s)$
Icosaédrico binario	—

Tabla 4.2: Condiciones para caracter trivial

Para toda condición de la Tabla 4.2, listamos un número finito de (r, s, t, k) que generan el semigrupo aditivo que satisfacen dicha condición.

Los divisores correspondientes se listan en la siguiente tabla.

Tipo de $G < \text{SL}(2, \mathbb{C})$	Divisores invariantes con caracter trivial son sumas de:
Cíclico de orden impar n	$nP, nQ, P + Q, P_i$
Cíclico de orden par $2m$	$nP, nQ, P + Q, mP + P_i, mQ + P_i, P_i + P_j$
q -diédrico binario (impar)	$4E, 4V, E + V, 2E + F, 2V + F, 2F,$ $2E + P_i, 2V + P_i, F + P_i, P_i + P_j$
q -diédrico binario (par)	$2E, 2V, 2F, E + V + F, P_i$
Tetraédrico binario	$E, 3V, 3F, V + F, P_i$
Octaédrico binario	$2E, 2V, F, E + V, P_i$
Icosaédrico binario	E, V, F, P_i

Tabla 4.3: Divisores invariantes con caracter trivial

Proposición 4.2.2. *Eligiendo una forma para cada divisor de la tabla, obtenemos un conjunto de generadores para el álgebra de todos los polinomios G -invariantes.*

4.3. Generadores y relaciones para el álgebra de polinomios invariantes

Como en la sección anterior, $G < \text{SU}(2)$ denota el subgrupo finito cuya imagen $\Gamma = \rho(G) < \text{SO}(3)$ actúa en la línea proyectiva $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$.

Si dos formas semi-invariantes tienen el mismo grado y el mismo caracter, cualquier combinación lineal de ellas es de nuevo una forma semi-invariante que tiene ese grado y ese caracter, pues

$$\begin{aligned} ((\alpha f + \beta g)\delta)(z) &= (\alpha f + \beta g)(\delta z) = \alpha f(\delta z) + \beta g(\delta z) \\ &= \alpha \chi(\delta) f(z) + \beta \chi(\delta) g(z) = \chi(\delta) (\alpha f(z) + \beta g(z)) \\ &= \chi(\delta) (\alpha f + \beta g)(z). \end{aligned}$$

En particular, todas las formas semi-invariantes de grado $N = |\Gamma|$ que tienen el caracter común de divisores principales (ver Proposición 4.1.19) forman un espacio vectorial W .

Definición 4.3.1. Una forma f se llama *simple (principal)* si D_f es simple (principal).

Por tanto, se tiene lo siguiente:

$$\{\text{formas simples}\} \subset \{\text{formas principales}\} \subset W.$$

Proposición 4.3.2. *El espacio vectorial W tiene dimensión dos. Las formas simples generan W . Todo elemento no cero de W es una forma principal.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea V el subespacio vectorial generado por las formas simples, entonces $\dim V \geq 2$, pues de lo contrario, cualesquiera dos formas simples serían linealmente dependientes, *i.e.*, sólo habría una órbita simple, lo cual es imposible. Sea $\langle u, v \rangle \subset W$ el generado por dos elementos linealmente independientes $u, v \in W$. Si Σ es una órbita simple, elegimos un punto $x \in \Sigma$ y encontramos $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tal que $h = \lambda u + \mu v$ satisface $h(x) = 0$. Entonces $D_h = \Sigma$. Esto implica que $V \subset \langle u, v \rangle$, y por tanto, $V = \langle u, v \rangle$ debido a que $\dim(\langle u, v \rangle) = 2$. Luego, $V = W$ y $\dim W = 2$.

Sea $u \in W$ un elemento no cero dado. Existe una forma principal v tal que u y v tienen un cero en común x . Si u y v fueran linealmente independientes, todo $w \in W = \langle u, v \rangle$ tendría un cero en x , lo cual es imposible. Por lo tanto, $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

■

Sean p, q, e, v y f formas con divisores P, Q, E, V y F como en la sección anterior. Estas formas están determinadas salvo un factor en \mathbb{C}^* . El álgebra S^G de polinomios G -invariantes en dos variables está generado por las formas invariantes de la Tabla 4.4.

Tipo de $G < \text{SL}(2, \mathbb{C})$		Generadores de S^G
C_n , cíclico de orden n		p^n, q^n, pq
\tilde{D}_q	q impar	$e^4, v^4, ev, e^2f, v^2f, f^2$
	q par	e^2, v^2, f^2, evf
\tilde{T}		e, v^3, f^3, vf
\tilde{O}		e^2, v^2, f, ev
\tilde{I}		e, v, f

Tabla 4.4: Generadores de las álgebras de polinomios G -invariantes

DEMOSTRACIÓN (de la Tabla 4.4):

La Proposición 4.2.2 nos dice que S^G es generado por las formas de la Tabla 4.4 junto con formas que tienen uno o dos factores p_i cuyos divisores son divisores simples para órbitas principales p_i (como $p^m p_i, q^m p_i, p_i p_j$ para el grupo cíclico de orden $2m$).

De acuerdo a la Proposición 4.3.2, todo p_i es una combinación lineal de las dos formas principales de la Tabla 4.5, las cuales forman una base del espacio vectorial de todas las formas principales.

C_n, n impar	p^n, q^n
C_{2m}	p^m, q^m
\tilde{D}_q	e^2, v^2
$\tilde{T}, \tilde{O}, \tilde{I}$	e^2, f^3

Tabla 4.5: Bases del espacio vectorial de las formas principales.

Por lo tanto, todas las formas con un factor p_i podemos omitirlas de la lista de generadores de S^G . Así, la lista de la Tabla 4.4 es suficiente.

■

Sean $k = n(E)$, $m = n(V)$ y $n = n(F)$ los órdenes de los subgrupos de isotropía que corresponden a las órbitas excepcionales E, V, F (ver Tabla 2.6 para D_q , Tabla 2.7 para T , Tabla 2.8 para O y Tabla 2.9 para I). Entonces, e^k, v^m y f^n son formas principales.

Estas formas principales son linealmente dependientes, pero cualesquiera dos de ellas son independientes, por tanto,

$$\alpha e^k + \beta v^m + \gamma f^n = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*.$$

Hasta ahora, e, v y f , se determinan salvo un factor en \mathbb{C}^* . Si éstos factores se eligen adecuadamente, las relaciones se convierten en

$$e^k + v^m + f^n = 0.$$

Obtenemos entonces las relaciones principales de la Tabla 4.6.

$G < \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$	Relación Principal
\tilde{D}_q	$e^2 + v^2 + f^q = 0$
\tilde{T}	$e^2 + v^3 + f^3 = 0$
\tilde{O}	$e^2 + v^4 + f^3 = 0$
\tilde{I}	$e^2 + v^5 + f^3 = 0$

Tabla 4.6: Relaciones principales

La Tabla 4.4 contiene entre tres y seis generadores para S^G . Las relaciones principales nos permiten reducir el número de generadores a tres en cada caso.

Aquí una elección adecuada:

	Generadores de S^G	Relacion $\varphi = 0$
C_n	$x = p^n - q^n, y = p^n + q^n, z = pq$	$x^2 - y^2 + 4z^n = 0$
\tilde{D}_q	q impar	$x^2 + z(y^2 - z^q) = 0$
	q par	
\tilde{T}	$x = v^3 - f^3, y = vf, z = e$	$x^2 + 4y^3 - z^4 = 0$
\tilde{O}	$x = ev, y = f, z = e^2$	$x^2 + z(z^2 + y^3) = 0$
\tilde{I}	$x = e, y = f, z = v$	$x^2 + y^3 + z^5 = 0$

Tabla 4.7: Reducción de generadores

Los tres generadores de la Tabla 4.7 determinan un homomorfismo

$$\Phi : \mathbb{C}[x, y, z] \rightarrow S,$$

donde S es el álgebra de polinomios en 2 variables.

Ahora, como la imagen de Φ es la subálgebra S^G de polinomios G -invariantes y el polinomio $\varphi(x, y, z)$ de la Tabla 4.7 es mandado a 0, se tiene que Φ induce un isomorfismo. Para formalizarlo, el Teorema 4.3.5.

Antes de enunciar el teorema, veamos la definición de grado de trascendencia y un resultado que utilizaremos en su demostración.

Definición 4.3.3. Si A es un anillo, entonces una *base trascendente* \mathcal{B} es un subconjunto independiente algebraico maximal y el *grado de trascendencia* de A está definido por

$$\text{trd}(A) = |\mathcal{B}|.$$

Proposición 4.3.4. Para un epimorfismo $f : A \rightarrow B$ entre anillos enteros,

$$\text{trd}(A) \geq \text{trd}(B).$$

La igualdad se cumple si y sólo si $f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo.

Una prueba de la Proposición 4.3.4 es utilizando [13, Ejercicio 6.55], y notando que $B \cong f^{-1}(A) \subset A$.

Teorema 4.3.5. El homomorfismo Φ induce un isomorfismo

$$\mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle \cong S^G,$$

donde $\langle \varphi \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ es el ideal principal generado por φ .

DEMOSTRACIÓN:

Se muestra que los polinomios φ de la Tabla 4.7 son irreducibles usando el hecho de que x sólo aparece como término x^2 . Así, $\mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle$ es entero, *i.e.*, sin divisores de cero.

Como subanillo de S , el anillo S^G también es entero, *i.e.*, tampoco tiene divisores de cero, por tanto, Φ induce un epimorfismo

$$\bar{\Phi} : \mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle \rightarrow S^G \tag{4.4}$$

entre las \mathbb{C} -álgebras de división.

Probemos que

$$\text{trd}(S^G) = 2. \tag{4.5}$$

Para todo $u \in S$, el polinomio

$$h(X) = \prod_{\delta \in G} (X - u\delta) = X^N + a_{N-1}X^{N-1} + \cdots + a_0$$

tiene coeficientes $a_\nu \in S^G$. Luego, el hecho que $h(u) = 0$, implica que S es una extensión algebraica de S^G , en particular se tiene que

$$\text{trd}(S^G) = \text{trd}(S) = 2.$$

Ahora, dado que el epimorfismo canónico

$$\mathbb{C}[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle$$

no es un isomorfismo, se tiene que

$$\text{trd}(\mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle) \leq 2.$$

Por otro lado,

$$\text{trd}(\mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle) \geq 2$$

por el epimorfismo (4.4) y la ecuación (4.5).

Por lo tanto $\mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle$ y S^G tienen grado de trascendencia igual a dos, lo que implica que Φ es un isomorfismo. ■

Por otro lado, si cambiamos el grupo G y se transforman las formas (como en la Tabla 4.8), las relaciones principales de la Tabla 4.6 se convierten en las relaciones $\varphi = 0$ de la Tabla 4.7 como se muestra a continuación:

$\tilde{D}_q \rightarrow C_q$	$\tilde{T} \rightarrow \tilde{D}_2$	$\tilde{O} \rightarrow \tilde{T}$	$\tilde{I} \rightarrow \tilde{I}$
$e \rightarrow x$	$e \rightarrow \sqrt{2}x$	$e \rightarrow \frac{i}{2}x$	$e \rightarrow x$
$v \rightarrow iy$	$v \rightarrow \frac{i}{\sqrt{3}}y - x$	$v \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}z$	$v \rightarrow z$
$f \rightarrow (4^{\frac{1}{4}}z)$	$f \rightarrow \frac{-i}{\sqrt{3}}y - x$	$f \rightarrow -y$	$f \rightarrow y$

Tabla 4.8: Transformación de formas

Para $\tilde{D}_q \rightarrow C_q$: Tenemos que

$$e^2 + v^2 + f^q = 0 \longmapsto (x)^2 + (iy)^2 + \left(4^{\frac{1}{q}}z\right)^q.$$

$$\text{Luego, } (x)^2 + (iy)^2 + \left(4^{\frac{1}{q}}z\right)^q = x^2 - y^2 + 4z^q = \varphi_{C_q}(x, y, z) = 0.$$

Para $\tilde{T} \rightarrow \tilde{D}_2$: Tenemos que

$$e^2 + v^3 + f^3 \longmapsto \left(\sqrt{2}x\right)^2 + \left(\frac{i}{\sqrt{3}}y - x\right)^3 + \left(\frac{-i}{\sqrt{3}}y - x\right)^3.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left(\frac{i}{\sqrt{3}}y - x\right)^3 &= \left(\frac{i}{\sqrt{3}}y\right)^3 - 3\left(\frac{i}{\sqrt{3}}y\right)^2 z + 3\left(\frac{i}{\sqrt{3}}y\right) z^2 - z^3 \\ &= -\frac{i}{3\sqrt{3}}y^3 + y^2 z + \frac{3i}{\sqrt{3}}y z^2 - z^3\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left(\frac{-i}{\sqrt{3}}y - x\right)^3 &= \left(\frac{-i}{\sqrt{3}}y\right)^3 - 3\left(\frac{-i}{\sqrt{3}}y\right)^2 z + 3\left(\frac{-i}{\sqrt{3}}y\right) z^2 - z^3 \\ &= \frac{i}{3\sqrt{3}}y^3 + y^2 z - \frac{3i}{\sqrt{3}}y z^2 - z^3\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}x)^2 + \left(\frac{i}{\sqrt{3}}y - x\right)^3 + \left(\frac{-i}{\sqrt{3}}y - x\right)^3 &= 2x^2 + 2y^2 z - 2z^3 \\ &= 2(x^2 + z(y^2 - z^2)) \\ &= 2(\varphi_{\tilde{D}_2}(x, y, z)) = 0.\end{aligned}$$

Para $\tilde{O} \rightarrow \tilde{T}$: Tenemos que

$$e^2 + v^4 + f^3 \mapsto \left(\frac{i}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^4 + (-y)^3.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left(\frac{i}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^4 + (-y)^3 &= -\frac{x^2}{4} + \frac{z^4}{4} - y^3 \\ &= -\frac{1}{4}(x^2 - z^4 + 4y^3) \\ &= -\frac{1}{4}(\varphi_{\tilde{T}}(x, y, z)) = 0.\end{aligned}$$

Para $\tilde{I} \rightarrow \tilde{I}$: Tenemos que

$$e^2 + v^5 + f^3 \mapsto (x)^2 + (z)^5 + (y)^3.$$

Luego, $(x)^2 + (z)^5 + (y)^3 = \varphi_{\tilde{I}}(x, y, z) = 0$.

Esto no es coincidencia, pues si $[G, G]$ es el subgrupo conmutador de G tal que $\mathcal{A}G = G/[G, G]$, de la Tabla 3.18 obtenemos la Tabla 4.9.

G	\tilde{D}_q	\tilde{T}	\tilde{O}	\tilde{I}
$[G, G]$	C_q	\tilde{D}_2	\tilde{T}	\tilde{I}

Tabla 4.9: Grupos binarios y sus subgrupos conmutadores $[G, G]$

Ahora, la Tabla 4.9 junto con la Proposición 4.3.6, explican la Tabla 4.8.

Proposición 4.3.6. *Sea $G < \text{GL}(n, \mathbb{C})$ un subgrupo finito. El álgebra de polinomios $[G, G]$ -invariantes es generado por las formas G -semi-invariantes.*

DEMOSTRACIÓN:

Toda h G -semi-invariante es $[G, G]$ -invariante, pues el caracter χ_h se factoriza en $\mathcal{A}G = G/[G, G]$.

Es suficiente pues, mostrar que toda f $[G, G]$ -invariante es una suma de G -semi-invariantes.

Dado que f es $[G, G]$ -invariante, $f \cdot \delta$ es una forma bien definida para todo $\delta \in \mathcal{A}G$. Si $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ un homomorfismo, entonces,

$$f_\chi = \sum_{\delta \in \mathcal{A}G} \chi(\delta^{-1})(f \cdot \delta)$$

es G -semi-invariante con caracter χ .

Hay una cantidad finita de homomorfismos $\chi_1, \dots, \chi_s : \mathcal{A}G \rightarrow \mathbb{C}^*$. Su suma satisface

$$\chi_1(\delta) + \chi_2(\delta) + \dots + \chi_s(\delta) = 0 \quad \text{si } \delta \neq 1 \quad (4.6)$$

Usando $f_j = f_{\chi_j}$, obtenemos

$$f = \frac{1}{s}(f_1 + \dots + f_s).$$

Para probar la ecuación (4.6), supongamos primero que $\mathcal{A}G$ es cíclico de orden q , generado por α . Entonces χ está únicamente determinado por $\chi(\alpha)$, y éste, puede elegirse como cualquier raíz q -ésima de la unidad. Por tanto, hay q homomorfismos determinados por

$$\chi_j(\alpha) = \zeta^j, \quad j = 0, \dots, q-1, \quad \zeta = e^{\frac{2\pi i}{q}}.$$

Para $\delta = \alpha^k$, con $k = 1, \dots, q-1$, obtenemos

$$\chi_0(\delta) + \dots + \chi_{q-1}(\delta) = \chi_0(\alpha)^k + \dots + \chi_{q-1}(\alpha)^k = 1 + \zeta^k + \dots + \zeta^{k(q-1)} = 0,$$

pues las raíces q -ésimas de la unidad ζ^k , con $k = 1, \dots, q-1$, son las raíces de $1 + z + \dots + z^{q-1} = 0$.

En general, $\mathcal{A}G$ es un producto directo de grupos cíclicos finitos [13, Teorema 5.18]. Entonces, para mostrar la ecuación (4.6), es suficiente probar que se satisface para $\mathcal{A}G = A \times B$ suponiendo que se satisface para A y B .

Si $\chi_1, \dots, \chi_s : A \rightarrow \mathbb{C}^*$ y $\psi_1, \dots, \psi_t : B \rightarrow \mathbb{C}^*$ son los posibles homomorfismos, entonces $w_{ij} : A \times B \rightarrow \mathbb{C}^*$ definido por $w_{ij}(a, b) = \chi_i(a)\psi_j(b)$ son todos los posibles homomorfismos del producto directo, con $i = 1, \dots, s$ y $j = 1, \dots, t$.

Obtenemos pues

$$\sum_{i,j} w_{ij}(a, b) = \sum_i \chi_i(a) \cdot \sum_j \psi_j(b).$$

Ahora, dado que $(a, b) \neq (1, 1)$, al menos un factor es igual a cero por suposición. ■

4.4. La variedad de órbitas afín

Tras la descripción de S^G como $\mathbb{C}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle$, veamos un resultado general para subgrupos finitos arbitrarios de $GL(n, \mathbb{C})$. Para su demostración, utilizaremos propiedades básicas de anillos noetherianos.

Proposición 4.4.1. *Para todo subgrupo finito $G < GL(n, \mathbb{C})$, la \mathbb{C} -álgebra S^G de polinomios G -invariantes en n variables, es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN:

Para $f \in S = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ consideramos el polinomio

$$\prod_{\delta \in G} (X - f\delta) = X^N + a_{N-1}X^{N-1} + \dots + a_0$$

con coeficientes $a_\nu \in S^G$. Éstos coeficientes dependen de f , por lo que mejor escribiremos $a_\nu(f)$. Sea $A \subset S^G$ la \mathbb{C} -álgebra generada por $a_\nu(z_j)$ con $j = 1, \dots, n$ y $\nu = 0, \dots, N - 1$.

Dado que A es finitamente generada, es noetheriana [12, Cap 1, Sec 3].

Ahora, como A -módulo, S es finitamente generada por $z_1^{\nu_1}, \dots, z_n^{\nu_n}$ con $\nu_i < N$. Por tanto, el A -módulo S^G es también finitamente generado.

Los generadores de A como \mathbb{C} -álgebra junto con los generadores de S^G como A -módulo, generan S^G como \mathbb{C} -álgebra. ■

Podemos suponer que las formas $1, f_1, \dots, f_r$ de grados $0, d_1, \dots, d_r$ respectivamente, generan la \mathbb{C} -álgebra S^G .

La aplicación polinomial

$$F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^r$$

con componentes f_1, \dots, f_r , induce el epimorfismo

$$\begin{aligned} {}_rS &\twoheadrightarrow S^G \\ h &\mapsto h \circ F \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde ${}_rS = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]$. Por tanto, también induce el isomorfismo

$${}_rS/\mathfrak{x} \cong S^G$$

donde \mathfrak{x} es el kernel del epimorfismo (4.7), el cual, por la Proposición 4.4.1, es un ideal primo finitamente generado.

Así, la *variedad de órbitas afín*

$$V = \{x \in \mathbb{C}^r \mid h(x) = 0 \forall h \in \mathfrak{x}\}$$

es irreducible.

Además,

$$\dim V = n,$$

ya que

$$\dim V = \text{trd}({}_r S / \mathfrak{x}) = \text{trd}(S^G) = \text{trd}({}_n S) = n,$$

pues ${}_n S$ es una extensión algebraica de S^G .

Proposición 4.4.2. *El aplicación polinomial $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^r$, con componentes f_1, \dots, f_r , tiene las siguientes propiedades:*

$$F(\mathbb{C}^n) = V, \tag{4.8}$$

$$F(z) = F(w) \Leftrightarrow w = \delta z \text{ para algún } \delta \in G, \tag{4.9}$$

$$F \text{ es propia y cerrada,} \tag{4.10}$$

$$F : \mathbb{C}^n \rightarrow V \text{ con rango restringido, es abierta.} \tag{4.11}$$

DEMOSTRACIÓN:

Demostración de propiedad (4.8): Tenemos $F(\mathbb{C}^n) \subset V$ pues $h \cdot F = 0$ para todo $h \in \mathfrak{x}$. Para probar $F(\mathbb{C}^n) \supset V$: sea un $c = (c_1, \dots, c_r) \in V$ dado y sea $\mathfrak{b} \subset {}_n S$ el ideal generado por $f_1 - c_1, \dots, f_r - c_r$. Si $\mathfrak{b} \neq {}_n S$, existe un cero común $b \in \mathbb{C}^n$ de $f_1 - c_1, \dots, f_r - c_r$ por el Nullstellensatz de Hilbert [12, Teorema 5.4], por lo tanto $F(b) = c$.

Para mostrar que $\mathfrak{b} = {}_n S$ es imposible veamos que $\mathfrak{b} = {}_n S$ implica la existencia de $p_1, \dots, p_r \in {}_n S$ tales que

$$p_1 \cdot (f_1 - c_1) + \dots + p_r (f_r - c_r) = 1,$$

luego, transformamos con los elementos $\delta \in G$ y los agregamos, usando la invarianza de f_i :

$$\left(\sum_{\delta \in G} p_1 \delta \right) (f_1 - c_1) + \dots + \left(\sum_{\delta \in G} p_r \delta \right) (f_r - c_r) = |G|.$$

Dado que $\sum p_i \delta \in S^G$, existen $\tilde{p}_i \in {}_r S$ con $\tilde{p}_i \cdot F = \sum p_i \delta$, por lo que

$$(\tilde{p}_1(x_1 - c_1) + \dots + \tilde{p}_r(x_r - c_r)) \cdot F = |G|,$$

es decir,

$$h(x) = \tilde{p}_1 \cdot (x_1 - c_1) + \dots + \tilde{p}_r(x_r - c_r) - |G| \in \mathfrak{x}.$$

Por lo tanto, $h(x) = 0$ para toda $x \in V$. En particular, $h(c) = 0$. Luego, $|G| = 0$, lo que es una contradicción.

Demostración de propiedad (4.9): Si $w = \delta z$, entonces $F(w) = F(z)$, pues las componentes f_i de F son G -invariantes. Supongamos ahora, que $w \neq \delta z$ para toda $\delta \in G$. Existe un $f \in {}_n S$ con $f(z) = 0$ y $f(\delta w) = 1$ para toda $\delta \in G$. Dado que $\prod_{\delta \in G} f\delta$ está en S^G , existe un $h \in {}_r S$ con $h \cdot F = \prod_{\delta \in G} f\delta$.

Por tanto, $h \cdot F(w) = 1$ y $h \cdot F(z) = 0$. Luego, $F(w) \neq F(z)$.

Demostración de propiedad (4.10): Para $t \in \mathbb{C}$ y $y = (y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{C}^r$, sea

$$s(t, y) = (t^{d_1} y_1, \dots, t^{d_r} y_r).$$

Tenemos entonces $F(tx) = s(t, F(x))$.

Sea $d = \text{mcm}(d_1, \dots, d_r)$ y $a_i = \frac{d}{d_i}$. Usaremos la siguiente quasi-norma en \mathbb{C}^r :

$$\sigma(y) = \sqrt[d]{|y_1|^{a_1} + \dots + |y_r|^{a_r}}.$$

Para toda vecindad U de 0 en \mathbb{C}^r , existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{y \in \mathbb{C}^r \mid \sigma(y) < \varepsilon\} \subset U.$$

Tenemos pues, que $\sigma(s(t, y)) = |t|\sigma(y)$ y por tanto

$$\sigma(F(tx)) = |t|\sigma(F(x)) \quad \text{para } x \in \mathbb{C}^n \text{ y } t \in \mathbb{C} \quad (4.12)$$

Sea $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ la norma usual hermitiana en \mathbb{C}^n , sea $\mathbb{S}^{2n-1} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| = 1\}$ la correspondiente esfera unitaria compacta.

Su imagen $F(\mathbb{S}^{2n-1}) \subset \mathbb{C}^r$ es compacta y no contiene al origen, pues $F(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ por la propiedad (4.9). Por tanto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma(F(x)) > \varepsilon$ para toda $x \in \mathbb{S}^{2n-1}$. Junto con la ecuación (4.12), esto produce

$$\sigma(F(x)) > \varepsilon\|x\| \quad \text{para toda } x \in \mathbb{C}^n. \quad (4.13)$$

Si $B \subset \mathbb{C}^r$ es compacto, entonces es cerrado y acotado, pues podemos considerar a \mathbb{C}^r como \mathbb{R}^{2r} y después utilizamos [1, Teorema 3.1]. Por tanto, $F^{-1}(B)$ es cerrado debido a que F es continua, y $F^{-1}(B)$ es acotado por la desigualdad (4.13).

Sea $A \subset \mathbb{C}^n$ cerrado y sea $c \in \mathbb{C}^r \setminus F(A)$. Para encontrar una vecindad U de c tal que $U \cap F(A) = \emptyset$ comenzamos con la vecindad $W = \{y \in \mathbb{C}^r \mid \sigma(y) < 2\|c\|\}$. El compacto $K = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| < \frac{2\|c\|}{\varepsilon}\}$ contiene $F^{-1}(W)$, nuevamente por la desigualdad (4.13).

La imagen $F(A \cap K)$ es compacta, por tanto también cerrada: existe una vecindad W' de c tal que $W' \cap F(A \cap K) = \emptyset$. Luego, $U = W \cap W'$ no interseca a $F(A)$.

Demostración de propiedad (4.11): Se sigue de las propiedades (4.8)-(4.10).

Juntando lo anterior, se obtiene:

Teorema 4.4.3. *La aplicación polinomial $(f_1, \dots, f_r) = F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^r$, induce un homeomorfismo*

$$\bar{F} : \mathbb{C}^n/G \rightarrow V$$

entre el espacio de órbitas \mathbb{C}^n/G y la variedad afín V . Por tal motivo, V es llamada la variedad de órbitas afín.

Las variedades de órbitas afines de subgrupos conjugados de $GL(n, \mathbb{C})$ son isomorfos:

Sean $h \in GL(n, \mathbb{C})$ y $G' = hGh^{-1}$. Sea $F' : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^s$ una aplicación polinomial G' -invariante el cual determina la variedad de órbita $V' = F'(\mathbb{C}^n)$ de la G' -acción. Existen pues, aplicaciones polinomiales tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^n & \xleftarrow{h} & \mathbb{C}^n \\
 \downarrow F & & \downarrow F' & & \downarrow F \\
 \mathbb{C}^r & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^s & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}^r
 \end{array}$$

Las componentes φ_i y ψ_j de Φ y Ψ se obtienen como sigue: para toda componente f'_i de F' la composición $f'_i \cdot h$ es G -invariante, por tanto $f'_i \cdot h = \varphi_i \cdot F$ para algún $\varphi_i \in {}_rS$; para toda componente f_j de F , la composición $f_j \cdot h^{-1}$ es G' -invariante, por tanto $f_j \cdot h^{-1} = \psi_j \cdot F'$ para algún $\psi_j \in {}_sS$.

El diagrama implica que Φ mapea V de manera isomorfa sobre V' con inversa $(\Phi|_V)^{-1} = \Psi|_{V'}$.

Bibliografía

- [1] M. A. Armstrong. *Basic Topology*. Springer. January 1983.
- [2] S. Biec Amigo. *Acciones de Grupos sobre Espacios Topológicos*. Universidad Complutense de Madrid UCM.
- [3] A. Brøndsted. *An Introduction to Convex Polytopes*. Springer-Verlag. New York. 1983.
- [4] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston. 1992.
- [5] A. Cayley. *Notes on Polyhedra*. Cambridge University Press. 1866.
- [6] H. S. M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Methuen. 1947.
- [7] M. J. Greenberg and J. R. Harper. *Algebraic Topology a first course*. The Benjamin/Cummings Publishing Company. 1981.
- [8] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press. 2002.
- [9] F. Klein. *Lectures on the Icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*. Dover Publications, Inc. New York. 2003.
- [10] K. Lamotke. *Regular Solids and Isolated Singularities*. Vieweg and Sohn. Braunschweig, Wiesbaden. 1986.
- [11] J. Leys, É. Ghys and A. Alvarez. *Dimensions. Une promenade mathématique*.
<http://www.dimensions-math.org/>
- [12] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press. 1986.
- [13] J. J. Rotman *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall. 1st Edition. 2002.
- [14] J. Seade. *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*. Birkhäuser Verlag. 2006.
- [15] I.R Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*. Springer-Verlag. 1977.
- [16] A. S. Solodóvnikov. *Sistemas de desigualdades lineales*. Mir. Moscú. 1984.

- [17] G. F. Torres del Castillo. *La representación de rotaciones mediante cuaterniones*. Miscelánea Matemática 29. Universidad Autónoma de Puebla, México. 1999.