



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Espectro de bandas fotónicas y fonónicas
en un medio helicoidal

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO
DE:

Físico

PRESENTA:

Arturo Villegas Juárez

TUTOR

Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes

México, D.F.

2015





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres.

1. Datos del alumno

Villegas
Juárez
Arturo
58 15 20 44
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
30820925-1

2. Datos del tutor

Dr.
Juan Adrián
Reyes
Cervantes

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Rocío
Jáuregui
Renaud

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Carlos Ignacio
Ruiz Mendoza

5. Datos del sinodal 3

Dra.
Karen Patricia
Volke
Sepúlveda

6. Datos del sinodal 4

Fís.
Andrés Valentín
Porta
Contreras

7. Datos del trabajo escrito

Estructura de bandas fotónicas y fonónicas en un medio
helicoidal
107 p
2015

Índice general

Lista de Símbolos	II
Introducción	VI
Capítulo 1. Teoría de la elasticidad en Cristales Líquidos.	1
1.1. Energía libre de un cristal líquido.	3
1.2. Energía libre en presencia de un campo externo.	7
1.3. La transición de Frederiks	11
Capítulo 2. Propagación de ondas en un colestérico.	16
2.1. Incidencia normal	18
2.2. Incidencia oblicua	22
Capítulo 3. Teoría de elasticidad en el medio continuo	33
3.1. El tensor de esfuerzos	33
3.2. El tensor de elongación	36
3.3. Termodinámica de las deformaciones	38
3.4. Representación matemática de un medio helicoidal	44
Capítulo 4. Ondas elásticas en un medio helicoidal	48
4.1. Solución de las ecuaciones gobernantes	54
Conclusiones	67
Apéndice A	70
Apéndice B	73
Apéndice C	77
Apéndice D	83
Bibliografía	94

Lista de Símbolos

- \vec{n} → *Vector director promedio de un cristal líquido*
- \hat{n} → *Vector director promedio normalizado*
- a → *Longitud molecular típica del cristal líquido*
- ϵ_{ijk} → *Símbolo de Levi – Civita*
- f_{FO} → *Densidad de energía libre de Frank – Oseen*
- K_1, K_2, K_3 → *Constantes elásticas de Frank*
- p → *Pitch o periodo espacial de la hélice*
- q → $q = \frac{2\pi}{p}$
- $f_{13} + f_{14}$ → *Contribuciones de la densidad de energía libre superficial*
- K_1 → *Módulo elástico de "Splay" o de separación*
- K_2 → *Módulo elástico de "Twist" o de torsión*
- K_3 → *Módulo elástico de "Bend" o de flexión*
- F_{FO} → *Energía libre de Frank – Oseen*
- \vec{E} → *Campo eléctrico*
- \vec{D} → *Vector de desplazamiento eléctrico*
- δA → *Variación de la cantidad A*
- F_G → *Energía necesaria para mantener la diferencia de potencial consante cuando el vector de desplazamiento cambia*
- Φ → *Potencial eléctrico*

- ϵ → *Tensor dieléctrico*
 $\epsilon_{||}$ → *Componente paralela del tensor dieléctrico*
 ϵ_{\perp} → *Componente ortogonal del tensor dieléctrico*
 ϵ_a → $\epsilon_a = \epsilon_{||} - \epsilon_{\perp}$
 ϵ_0 → *Permitividad eléctrica del vacío*
 \vec{M} → *Magnetización*
 \vec{B} → *Inducción magnética*
 μ_0 → *Permeabilidad magnética del vacío*
 χ → *Suceptibilidad magnética*
 $\chi_{||}$ → *Componente paralela de la susceptibilidad magnética*
 χ_{\perp} → *Componente ortogonal de la susceptibilidad magnética*
 χ_a → $\chi_a = \chi_{||} - \chi_{\perp}$
 ξ_E → *Longitud de coherencia eléctrica*
 ξ_H → *Longitud de coherencia magnética*
 \vec{H} → *Campo magnético*
 F_{flex} → *Energía libre de polarización flexoeléctrica*
 \vec{P}_f → *Polarización flexoeléctrica*
 H_c → *Magnitud del campo magnético crítico para la transición de Frederiks*
 V_c → *Diferencia de potencial eléctrico crítica para la transición de Frederiks*
 ω → *Frecuencia de la onda*
 E^{\pm} → *Campos eléctricos de ondas con polarización circular derecha o izquierda*
 l → *Número de onda*
 K_0^2 → $K_0^2 = \mu_0 \omega^2 \left(\epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right)$
 K_1^2 → $K_1^2 = \mu_0 \omega^2 \frac{\epsilon_a}{2}$
 ϵ_{zz} → *Componente del tensor dieléctrico a lo largo del eje z*
 k_x, k_y → *Componentes del vector de onda*
 $\epsilon_k(z)$ → *Amplitudes del campo eléctrico*
 $\beta_k(z)$ → *Amplitudes del campo magnético*

- ϵ_{lm} \rightarrow Componentes del tensor dieléctrico
 $\vec{\psi}, \psi$ \rightarrow Vector de 4 elementos que contiene a las componentes transversales de los campos electromagnéticos
 M \rightarrow $\frac{d\vec{\psi}}{dz} = iM\vec{\psi}$
 M_{ij} \rightarrow Componentes de la matriz M
 R \rightarrow Matriz de rotación
 ϕ \rightarrow $\phi = R\psi$
 R^{-1} \rightarrow Matriz inversa de la matriz R
 T \rightarrow $T = \left(iRM R^{-1} - R \frac{dR^{-1}}{dz} \right)$
 Q \rightarrow $Q = RMR^{-1}$
 Q_{ij} \rightarrow Componentes de la matriz Q
 T_{\perp} \rightarrow Matriz T en incidencia normal de la onda
 v_0 \rightarrow Vector constante no nulo
 $\tilde{\omega}$ \rightarrow Frecuencia adimensional $\tilde{\omega} = \frac{\omega c}{q}$
 \tilde{l} \rightarrow Número de onda adimensional $\tilde{l} = \frac{l}{q}$
 l \rightarrow Número de onda
 n_o, n_e \rightarrow Índices de refracción ordinario y extraordinario
 $\Delta\omega$ \rightarrow Ancho de banda
 \vec{F} \rightarrow Fuerza
 $t_i^{\hat{n}}$ \rightarrow Vector de esfuerzos
 σ_{ij} \rightarrow Tensor de esfuerzos
 ρ \rightarrow Densidad
 f_{V_i} \rightarrow Componentes de las fuerzas volumétricas
 u_i \rightarrow Vector de deformación o desplazamientos
 f_{S_k} \rightarrow Componentes de las fuerzas superficiales
 u_{ik} \rightarrow Tensor de elongación o de formación
 Ω_{ik} \rightarrow Tensor de rotación
 W \rightarrow Trabajo mecánico
 U \rightarrow Energía interna

- T → *Temperatura*
 S → *Entropía*
 F → *Energía libre de Helmholtz*
 λ_{ikmn} → *Tensor de rigidéz*
 $\bar{\sigma}$ → *Vector con seis elementos que contiene las componentes independientes del tensor de esfuerzos*
 \bar{u}_k → *Vector con seis elementos que contiene las componentes independientes del tensor de elongación*
 C_{ik} → *Matriz que contiene los elementos del tensor de rigidéz o módulos elásticos del material*
 λ, μ → *Coefficientes de Lamé*
 $S_{ik}(z)$ → *Matriz de módulos elásticos del medio helicoidal*
 R_{ik} → *Matriz de rotación*
 M_R → $M_R = F R_r F^{-1}$
 F → *diag (1, 2, 1, 2, 2, 1)*
 $\bar{\sigma}'_i, \bar{u}'_k$ → *Vectores $\bar{\sigma}_i$ y \bar{u}_k transformados*
 R_r, R_u → *Matrices que rotan a los vectores $\bar{\sigma}_i$ y \bar{u}_k*
 Ψ → *Vector de seis elementos con las componentes independientes del tensor de esfuerzos y del vector de desplazamientos*
 M_{\perp} → *Matriz M en el caso de incidencia normal*
 Φ → $\Psi = R^{-1}\Phi$
 $P_{ik}(z)$ → *Matriz de rotación para el vector $\bar{\sigma}$*
 b_i, G → *Sustituciones en terminos de las componentes C_{ik}*
 Φ_0 → *Vector constante no nulo*
 Γ_i, Λ_i → *Cambios de variable*
 \tilde{l} → *Número de onda adimensional $l^2 = q^2 \tilde{l}$*
 $\tilde{\omega}$ → *Frecuencia adimensional $\omega^2 = \tilde{\omega} q^2$*
 $\tilde{\omega}_i$ → *Soluciones de la relación de dispersión*
 $\tilde{\omega}_{0\pm}$ → *Bordes de la banda central*

Introducción

En las últimas décadas el estudio de los medios periódicos ha sido de gran relevancia debido a que ha logrado grandes avances y múltiples aplicaciones en la Biología, Química, Óptica y en la tecnología en general [1]. Es intuitivo asociar el estudio de los medios periódicos exclusivamente al estado sólido y la cristalografía; sin embargo, hay otros materiales periódicos blandos como lo son los cristales líquidos que son materiales anisotrópicos con cierto grado de ordenamiento molecular de diferentes tipos y con características que permite clasificarlos en distintas fases. [2] Una de ellas, la fase colestérica, tiene la peculiaridad de que las moléculas están ordenadas helicoidalmente; es decir, están ordenadas de manera aproximadamente paralela a lo largo de planos pero en la dirección ortogonal a ellos el ordenamiento gira formando una hélice. Dicha característica helicoidal de los cristales líquidos colestéricos induce propiedades electro-ópticas no locales como la reflexión selectiva de la luz, entre otras, que surgen del comportamiento de los campos electromagnéticos dentro de tales medios [3, 4].

Debido a su naturaleza helicoidal, los cristales líquidos colestéricos tienen una gran capacidad de hacer girar el plano de polarización de una onda electromagnética conforme ésta se propaga dentro del medio, dicha propiedad se conoce como actividad óptica gigantesca [4]. El estudio de la propagación de la luz en medios helicoidales como los cristales líquidos colestéricos ha dado origen a múltiples desarrollos tanto teóricos como experimentales. Se han obtenido soluciones analíticas y exactas para propagación axial de ondas electromagnéticas en este tipo de medios helicoidales no magnéticos [5, 6] y también para medios magnéticos [7]. Debido a la periodicidad en este tipo de materiales, se presenta el fenómeno de dispersión de Bragg para ondas planas con polarización circular izquierda o derecha; que da lugar a múltiples aplicaciones y dispositivos electro-ópticos y mecánicos como lo son filtros de polarización circular, filtros de banda estrecha, sensores ópticos, sintonizadores, controladores de banda, entre otros. Además, se han observado fenómenos interesantes como la disminución de la

energía de activación de un láser en cristales líquidos colestéricos contaminados con colorantes [8].

Partiendo del estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en cristales líquidos colestéricos a temperaturas bajas, fue posible estudiar el comportamiento de ondas acústicas propagándose en cristales líquidos colestéricos congelados como sólidos helicoidales y con ello se analizaron sus propiedades elásticas [9, 10, 11]; lo cual dio origen a un nuevo ámbito de estudio en la física.

Además de los cristales líquidos colestéricos, que están presentes en la naturaleza se han sintetizado elastómeros quirales con la misma estructura [12] y se han construido sólidos artificialmente a partir de películas delgadas [13, 14]. La construcción de sólidos helicoidales a partir de películas delgadas esculpidas mediante deposición física, consiste en depositar capas muy delgadas de un material sobre un sustrato que gira a velocidad constante, creando así una morfología quiral periódica. [15, 16] En 1959 Young y Kowal lograron depositar películas delgadas de fluoruro de calcio mediante éste método para obtener un material con actividad óptica [17]. Utilizando el proceso de deposición física se puede construir un medio helicoidal prácticamente a partir de cualquier material. Con ello, se puede obtener un medio con características de nuestra elección por ejemplo densidad, constantes elásticas, índices de refracción, etcétera.

Si se utilizara un material piezoeléctrico, es decir, un material cristalino sin simetría bajo inversiones que responde eléctricamente ante esfuerzos mecánicos induciendo diferencias de potencial o recíprocamente induce deformaciones ante campos eléctricos externos, sería posible cambiar las propiedades intrínsecas del material y hacer estudios más detallados; con ello, construir artificialmente medios helicoidales con propiedades que permitan un análisis más exhaustivo de las características ópticas como función de los parámetros eléctricos en este caso variables.

Las múltiples investigaciones tanto electro-ópticas como elásticas en el ámbito de los medios helicoidales ha dado origen al desarrollo de múltiples estudios como es el caso de los defectos. Los defectos en medios periódicos son interrupciones en la periodicidad del material. Por ejemplo, un defecto en un cristal líquido colestérico se produce cuando la dirección de ordenamiento de las moléculas, que cambia suavemente formando una hélice, cambia abruptamente provocando una discontinuidad en la hélice del material. Tales defectos han sido motivo de diversas investigaciones tanto teóricas [18, 19, 20] como experimentales [21, 22, 23].

En un sólido helicoidal, como los mencionados anteriormente, es posible obtener este tipo de defectos de torsión al cortar la muestra paralelamente a los planos de la deposición de las películas delgadas; y girar un cierto ángulo uno de los fragmentos respecto al otro, sobre el plano de corte. Se han obtenido resultados similares a los de las investigaciones en cristales líquidos colestéricos pero en el caso del estudio de propagación de ondas elásticas en sólidos helicoidales [9, 10, 11].

El propósito de este trabajo es el análisis teórico de la estructura de bandas fotónicas y fonónicas de ondas electromagnéticas y elásticas en medios periódicos helicoidales no magnéticos en ausencia de piezoelectricidad, pues se considera siempre que tanto los índices de refracción como los módulos elásticos del medio son constantes. Se estudiará primero el caso de una onda electromagnética que se propaga en un cristal líquido colestérico contenido en una celda de vidrio. Posteriormente se analiza el caso de una onda elástica propagándose en un sólido artificial con estructura helicoidal.

En el Capítulo 1 se introducen los conceptos básicos relacionados con los cristales líquidos como el campo director y las constantes elásticas. Se revisa la teoría de elasticidad en cristales líquidos además de la descripción de sus propiedades electromagnéticas. Se hace uso de la energía libre de Frank-Oseen para ilustrar las propiedades elásticas de los cristales líquidos. Posteriormente se revisan las correcciones a la energía libre de Frank-Oseen en presencia de un campo eléctrico o magnético externo y conceptos relacionados como los campos umbrales y la transición de Frederiks [24].

En el Capítulo 2 se estudia la propagación de una onda electromagnética monocromática en una celda de cristal líquido colestérico [25]. Se parte de las ecuaciones de Maxwell en un medio material anisotrópico en el cual el vector de desplazamientos está relacionado con el campo eléctrico mediante el tensor dieléctrico de una forma específica. Posteriormente se resuelven las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico y magnético utilizando dos métodos. El primer método considera ondas circularmente polarizada en incidencia normal. La solución de dichas ecuaciones da lugar a una relación de dispersión que caracteriza una banda de reflexión que prohíbe el paso de ondas con ciertas frecuencias.

El segundo procedimiento es más general, se considera la incidencia oblicua de una onda electromagnética también monocromática sobre la misma celda de cristal líquido. Se plantean las ecuaciones de Maxwell en la representación matricial de Marcuvitz-Schwinger con la finalidad de agrupar las ecuaciones resultantes en una sola expresión y simplificar los cálculos.

Debido a la geometría del sistema, ya que el cristal líquido colestérico es un medio helicoidal, es posible aplicar una rotación de la misma magnitud del giro del colestérico pero en sentido contrario y con ello anular la dependencia del ángulo de giro. Resolviendo lo anterior se obtiene la relación de dispersión en el caso general de incidencia oblicua en términos de las componentes del vector de onda. Este último procedimiento general se reduce al primero en el caso de incidencia normal y con ello se obtiene la estructura de bandas de reflexión fotónica que es función de los índices de refracción del material. Asimismo se encuentra una relación para el ancho de banda como función de dichos parámetros.

En el Capítulo 3 se revisa la teoría de la elasticidad en el medio continuo y conceptos indispensables como el tensor de esfuerzos, tensor de elongación (o deformación) y vector de desplazamientos. Se presentan las ecuaciones constitutivas de la elasticidad en el medio continuo generalizando la segunda ley de Newton y la ecuación constitutiva del medio elástico. Se estudia también al medio continuo como un sistema termodinámico que debido a las simetrías permite que en el caso más general el medio elástico lineal tenga 21 módulos elásticos independientes. Debido a las ecuaciones de conservación y a la simetría en el tensor de esfuerzos y de elongación, es posible definir vectores con las componentes independientes de los mismos para simplificar los cálculos.

En el Capítulo 4 se analiza la propagación de una onda elástica en un sólido helicoidal construido artificialmente. Se plantean las ecuaciones de la elasticidad, la segunda ley de Newton y la ley de Hooke en su caso más general. Utilizando los vectores con las componentes independientes de los tensores de esfuerzos y elongación definidas en el Capítulo 3 se pueden escribir las ecuaciones de la elasticidad en una representación matricial similar a la de Marcuvitz-Schwinger en el caso electromagnético pero en términos ahora de las componentes independientes del tensor de esfuerzos y el vector de desplazamientos. Siguiendo un razonamiento similar al del caso electromagnético, se llega a la relación de dispersión que da origen a la estructura de bandas fonónicas en el medio helicoidal. Se estudia también el ancho de las bandas en analogía con lo hecho en el Capítulo 2 para las bandas fotónicas.

Capítulo 1

Teoría de la elasticidad en Cristales Líquidos.

El término cristal líquido describe a un estado de agregación intermedio entre los sólidos cristalinos y los líquidos amorfos. Los cristales líquidos, también llamados líquidos mesomórficos, fueron descubiertos en 1888 por F. Reinitzer y F. Lejman que observaron propiedades ópticas similares a las conocidas en cristales sólidos, en sustancias con fluidez. Después de que se prepararan numerosos cristales líquidos con características particulares, J. Friedel propuso la primera clasificación de estos materiales. S. Oseen y J. Zocher formularon la teoría de la elasticidad de cristales líquidos y posteriormente V. N. Tsvektov y V. K. Frederiks estudiaron las propiedades ópticas y elásticas de los mismos.

Una condición requerida para que ocurra la fase de cristal líquido es que las moléculas que lo componen deben ser altamente anisotrópicas en su forma geométrica, pero también deben ser rígidas como una barra o un disco, por ejemplo. Los compuestos que dan origen a los cristales líquidos pueden pasar por una o varias mesofases líquido cristalinas antes de transformarse en un líquido isotrópico común dependiendo de factores como la estructura molecular, la densidad, la temperatura o campos electromagnéticos externos aplicados.

La gran mayoría de los cristales líquidos termotrópicos, es decir, cuyas transiciones entre estados intermedios son debidas únicamente a procesos térmicos, están hechos de moléculas en forma de barra. De acuerdo a la clasificación hecha por Friedel, éstos se pueden separar en tres tipos o mesofases: nemáticos, colestéricos y esmécticos [2].

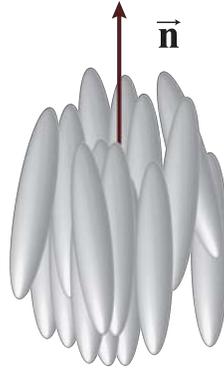


Figura 1. Moléculas de Cristal líquido Nemático y el vector director promedio \mathbf{n} .

Las moléculas del cristal líquido nemático tienen alto grado de orden orientacional, pero no de orden traslacional, como se muestra en la Figura 1. Entonces, difieren de los líquidos isotrópicos pues las moléculas del cristal líquido nemático pueden orientarse espontáneamente con sus ejes aproximadamente paralelos, salvo fluctuaciones térmicas.

La dirección de alineamiento de los ejes moleculares varía de punto a punto en el medio mesomórfico, pero una muestra uniformemente alineada es ópticamente uniaxial, de modo que el eje de alineamiento molecular corresponde al eje óptico del material. Las moléculas de cristal líquido pueden desplazarse manteniéndose aproximadamente paralelas a las demás, de modo que estas sustancias fluyen como líquidos.

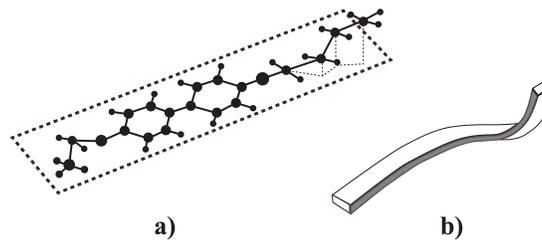


Figura 2. Molécula de cristal líquido colestérico **a)** estructura molecular **b)** aproximación.

La mesofase colestérica es también un tipo de cristal líquido nemático, con la diferencia de que tiene actividad óptica. Las moléculas de cristal líquido colestérico difieren de las moléculas en la fase nemática pues no se consideran únicamente como barras o discos sólidos, sino que también son moléculas quirales, esto es que su imagen especular, es decir en el espejo, no puede superponerse con la imagen real. Lo anterior

se ilustra en la Figura 2. En esta fase, la estructura adquiere un giro alrededor del eje normal a la dirección preferencial de las moléculas. El giro puede ser izquierdo o derecho dependiendo de la quiralidad de la molécula. La energía del giro representa una parte muy pequeña de la energía total asociada al alineamiento paralelo de las moléculas [25], sin embargo, si una pequeña cantidad de cristal líquido colestérico o una sustancia no mesomórfica pero con actividad óptica se agrega a un nemático, la mezcla adquiere la configuración helicoidal. Como consecuencia de este fenómeno de arreglo molecular en espiral se presentan propiedades ópticas en tales sustancias como la reflexión selectiva de luz circularmente polarizada y un poder rotativo gigantesco alrededor de 100 veces más grande que en una sustancia ordinaria con actividad óptica.

Para deformar la estructura de una muestra de cristal líquido es necesaria una energía muy pequeña, de modo que una perturbación, por pequeña que sea, por ejemplo una partícula de polvo que se adhiere a la superficie, es suficiente para distorsionar la estructura de la muestra.

1.1. Energía libre de un cristal líquido.

El estado de deformaciones de un cristal líquido en fase nemática o colestérica, a temperatura fija está descrito por el campo director a través de un vector unitario $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ que describe la dirección promedio de alineamiento molecular. La energía libre asociada con la deformación depende explícitamente del gradiente del campo director, $\nabla \mathbf{n} = \frac{\partial n_i}{\partial x_j} = n_{i,j}$. [24] Asumiendo deformaciones pequeñas comparadas con la longitud molecular típica a del cristal líquido, es decir:

$$(1) \quad |n_{i,j}| \ll \frac{1}{a}$$

Es posible definir una orientación $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ tangente a cada punto \mathbf{r} , que permita hacer una descripción continua del medio mesomórfico.

La densidad de energía libre de una muestra de cristal líquido nemático o colestérico debe ser invariante bajo operaciones que preserven la orientación local de \mathbf{n} , como la invariancia bajo inversión de sentido $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ que no afecta físicamente a las moléculas.

En el caso de los nemáticos, también son operaciones de simetría la inversión central sobre cualquier punto y la rotación a lo largo de \mathbf{n} ; en el caso de los colestéricos no hay invariancia bajo inversión central, pues las moléculas de estas sustancias son quirales; sin embargo, hay invariancia bajo rotaciones de π al rededor del director \mathbf{n} .

En ambos casos, nemático y colestérico, es suficiente restringir la energía libre a una expansión en términos cuadráticos en $\nabla \mathbf{n}$, pues se ha considerado en la condición (1) que $n_{i,j}$ es suficientemente pequeño.

Existen dos invariantes escalares lineales en $n_{i,j}$ bajo cualquier rotación, que son la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{n} = n_{i,i}$ y el producto interno con el rotacional $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} = \epsilon_{ijk} n_{k,j} n_i$. Donde ϵ_{ilk} es el tensor completamente antisimétrico o símbolo de Levi-Civita. Debido a que $\nabla \cdot \mathbf{n}$ es impar en \mathbf{n} , se excluye del desarrollo de la densidad de energía libre, pues no cumple con las condiciones de simetría. Por otro lado, $(\nabla \cdot \mathbf{n})^2$ está permitida en ambos casos, colestéricos y nemáticos, pues cumple con la simetría.

Nótese que $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}$ cambia de signo bajo la inversión de sentido en \mathbf{n} , así que únicamente puede aparecer en la densidad de energía libre para el caso de la fase colestérica pero no en la nemática. Finalmente, el cuadrado del invariante escalar $(\nabla \times \mathbf{n})^2$ aparece en ambos casos.

Usando la identidad $(\nabla \times \mathbf{n})^2 = (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2$, la densidad de energía libre limitada a derivadas de primer orden se escribe de la siguiente forma en el caso nemático.

$$(2) \quad f_{FO} = \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + \frac{1}{2} K_3 (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2$$

La expresión anterior se conoce como la *densidad de energía de Frank-Oseen*, donde K_1, K_2 y K_3 son las constantes elásticas de Frank (todas positivas). [24]

La energía libre en la fase colestérica, debido al término $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}$ es:

$$(3) \quad f_{FO} = \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) + q_0)^2 + \frac{1}{2} K_3 (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2$$

donde $q_0 = \frac{2\pi}{p}$, con p el paso o periodo espacial del colestérico. Usaremos el hecho de que q_0 es positivo en el caso de colestéricos con giro a la derecha y negativos cuando el giro es a la izquierda.

La ecuación (3) representa la densidad de energía libre de la fase dentro del bulto. Para completar la descripción elástica será necesario analizar además, qué pasa en la frontera de la fase del cristal líquido. Las contribuciones a la densidad de energía libre superficial están dadas por:

$$(4) \quad f_{13} + f_{14} = K_{13} \nabla \cdot (\mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n}) - K_{24} (\mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))$$

Estas expresiones son densidades de energía y deben integrarse sobre la superficie cerrada del cristal líquido por lo que se deben sumar

mediante el Teorema de Gauss las contribuciones provenientes de las integrales de volumen de la ecuación (3) [24].

Considerando que las ecuaciones (2) y (3) estén completas, es decir, despreciando los términos de divergencia (o superficie) es posible hacer un análisis del cristal líquido en el bulto. Supongamos que el campo director $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ de un cristal líquido nemático está dado en coordenadas cilíndricas por las componentes $n_x = \cos\varphi$, $n_y = \sin\varphi$ y $n_z = 0$, con dependencia bidimensional, entonces $\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r}$, los términos de K_2 y K_3 desaparecen pues $\nabla \times \mathbf{n} = 0$. Análogamente, en un caso tridimensional con $n_x = \frac{x}{r}$, $n_y = \frac{y}{r}$ y $n_z = \frac{z}{r}$, con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{r}$. En ambos casos, la energía libre es como en (2), con únicamente el término de K_1 , pues los demás se anulan. La constante de Frank K_1 se conoce como “módulo elástico de *splay*” o de separación. En la Figura 3 se muestra la distorsión asociada a esta constante elástica.

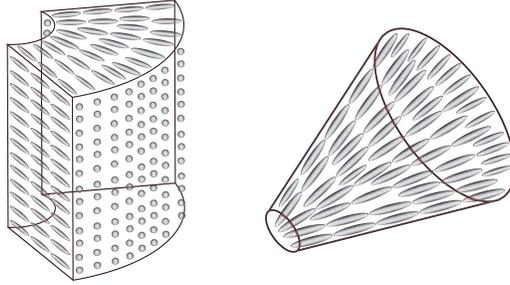


Figura 3. Descripción bidimensional y tridimensional del módulo elástico K_1 de “Splay”.

Considérese ahora el caso en el que el campo director está dado por $n_x = \cos qz$, $n_y = \sin qz$ y $n_z = 0$. En este caso $q = \frac{2\pi}{p} = \frac{\alpha}{d} > 0$, donde α es el ángulo de giro en cada plano como se ve en la Figura 4, y p es el paso del colestérico. Notemos que $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} = -q$, así $q = -\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}$ es el número de onda del material, asociado a p . De la ecuación (3), la energía libre está dada únicamente por el término $K_2(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} + q_0)^2$, que se anula cuando $q = q_0$. K_2 es llamado el módulo elástico de “twist” o torsión.

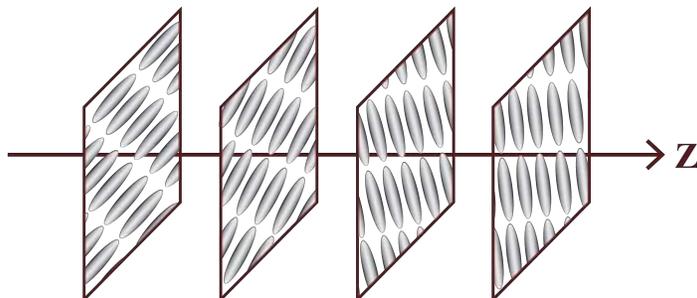


Figura 4. Descripción del módulo elástico K_2 de “Twist”.

Por último, tomamos ahora el campo director $n_x = \sin\varphi$, $n_y = \cos\varphi$ y $n_z = 0$. Aquí el término $\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})$ es el único que no se anula y $|\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})| = \frac{1}{r}$, es un vector normal a la envolvente del campo director, cuya longitud es la curvatura. De la densidad de energía libre en (2) y (3) para este campo director queda únicamente el término con K_3 , llamada entonces, módulo elástico de “bend”, flexión o pandeamiento. Obsérvese la distorsión asociada a dicha constante elástica en la Figura 5.

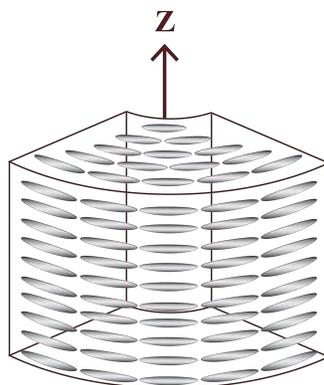


Figura 5. Descripción del módulo elástico K_3 de “Bend”.

Debido a que \mathbf{n} no tiene unidades, las constantes elásticas K_1 , K_2 y K_3 tienen unidades de energía sobre longitud o Newtons, además son del orden de $\frac{k_B T_{NI}}{a}$, donde k_B es la constante de Boltzmann, T_{NI} es la temperatura de transición entre el líquido isotrópico y la fase nemática, y a es la longitud molecular típica. [24]

1.2. Energía libre en presencia de un campo externo.

Es posible describir los efectos que causa un campo eléctrico externo aplicado a un cristal líquido, comúnmente se estudian cuando el cristal líquido está confinado en una celda. La celda consta de placas de vidrio recubiertas con un material conductor que en ocasiones se coloca de cierta manera que las moléculas que se adhieren a la superficie de la celda alineen sus vectores directores a lo largo de una dirección \mathbf{L} , denominada dirección de anclaje. Véase figura 6.

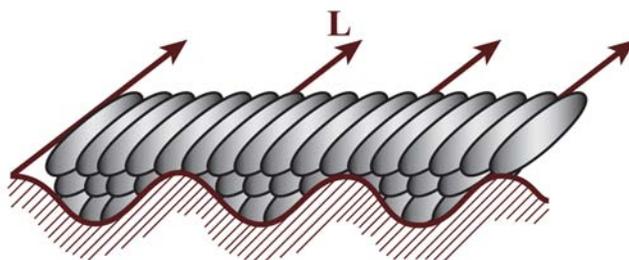


Figura 6. Superficie pulida que induce el anclaje fuerte.

Para el estudio de la interacción de los campos externos con el cristal líquido, considérese la suposición de que el cristal líquido es un aislante perfecto y que las placas de la celda no se polarizan debido a la acumulación de iones provocada por la presencia de contaminantes en la fase líquido cristalina.

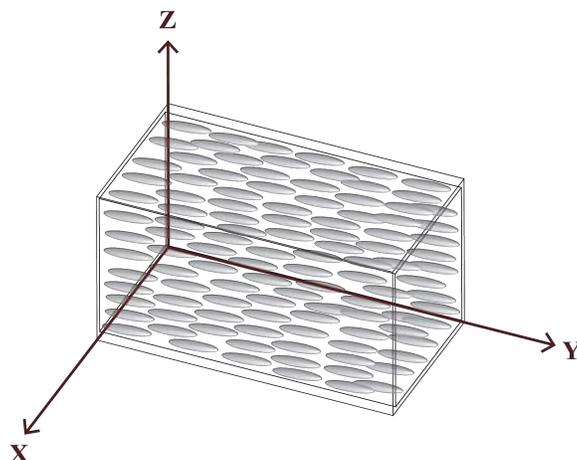


Figura 7. Celda con paredes de vidrio que contiene al cristal líquido

Para generar un campo eléctrico externo se conecta la celda en la que está contenido el cristal líquido a una fuente que mantenga una diferencia de potencial constante a través de ella. Para que se lleve a cabo el acoplamiento dieléctrico, las moléculas del cristal líquido se

orientan de forma que la componente del tensor de polarizabilidad a lo largo de la dirección del campo sea máxima.

Para encontrar la orientación de equilibrio del campo director bajo la influencia de un campo eléctrico externo es necesario minimizar la energía elástica $F_{FO} = \int f_{FO} dV$, lo cual se lleva a cabo al añadir el término de energía eléctrica a la energía libre de las ecuaciones (2) y (3).

La energía del campo eléctrico aplicado distribuida en un volumen V del espacio es [29]:

$$(5) \quad F_E = \int f_E dV = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

cuya variación debida a una reorientación molecular pequeña es:

$$(6) \quad \delta F_E = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

Además, hace falta considerar la energía libre asociada al cambio de carga en los electrodos cuando \mathbf{n} se reorienta. Para mantener constante el voltaje a través de la celda, la fuente debe suministrar una energía δF_G igual al trabajo necesario para mantener el voltaje fijo cuando el desplazamiento eléctrico cambia $\delta \vec{D}$ y modifica $-\delta D_z$ la densidad superficial de carga en las placas. El subíndice z denota la componente del desplazamiento eléctrico a lo largo de la normal a las placas.

Tal energía es entonces:

$$(7) \quad \delta F_G = \iint_A \Phi \delta D_z dA = \int \text{div}(\Phi \delta \vec{D}) dV$$

Donde Φ es el potencial eléctrico y dA el elemento de superficie en el electrodo. Considerando que $\text{div}(\Phi \delta \vec{D}) = \Phi \text{div} \delta \vec{D} + \delta \vec{D} \cdot \nabla \Phi$, $\vec{E} = -\nabla \Phi$ y $\text{div} \vec{D} = 0$; entonces, de acuerdo a la ecuación (6):

$$(8) \quad \delta F_G = - \int \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV = -2\delta F_E$$

Sumando las contribuciones de las variaciones, la energía mínima total en el bulto del material se obtiene cuando

$$(9) \quad \delta F_{FO} + \delta F_E + \delta F_G = \delta F_{FO} - \delta F_E = \delta(F_{FO} - F_E) = 0$$

Además, la energía eléctrica en (5) puede escribirse en términos del tensor dieléctrico. El vector de desplazamiento eléctrico $\vec{D}(r)$ se

expresa como una funcional lineal del campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en el mismo punto r , despreciando la débil rotación intrínseca remanente de la fase isotrópica. Tal expresión es de la forma $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, donde ϵ es el tensor dieléctrico. Para encontrar dicha funcional, considérese la incidencia de un campo eléctrico \vec{E} que se aplica sobre un cristal líquido. El vector de desplazamiento dependerá de la orientación del campo respecto al vector director \mathbf{n}

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{D}_{\parallel} = \epsilon_{\parallel} \vec{E} \quad , \quad \text{si } \vec{E} \parallel \hat{n}$$

$$\vec{D}_{\perp} = \epsilon_{\perp} \vec{E} \quad , \quad \text{si } \vec{E} \perp \hat{n}$$

Es decir, la respuesta del medio anisotrópico ante el campo eléctrico es distinta si el campo está dirigido a lo largo del eje nemático o perpendicular a él; de modo que se analizan ambos casos:

$$\blacksquare \hat{n} \perp \vec{E}$$

$$D = \epsilon_{\perp} E + \epsilon_a E \cdot \mathbf{n} = \epsilon_{\perp} E$$

$$\blacksquare \hat{n} \parallel \vec{E}$$

$$D = \epsilon_{\perp} E + \epsilon_a E \cdot \mathbf{n} = (\epsilon_{\perp} + \epsilon_a) E, \text{ que por lo antes mencionado } D = \epsilon_{\parallel} E, \text{ por lo cual } \epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\perp} + \epsilon_a$$

De lo anterior, se tiene que el tensor dieléctrico en notación de diádicas tiene la forma:

$$(10) \quad \epsilon = \epsilon_{\perp} \mathbb{I} + \epsilon_a \hat{n} \hat{n}$$

Es decir:

$$(11) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_{\perp} \vec{E} + \epsilon_a (\vec{E} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Sustituyendo en la energía de la expresión (5),

$$(12) \quad \vec{E} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_{\perp} E^2 + \epsilon_0 \epsilon_a (\vec{n} \cdot \vec{E})^2.$$

Ignorando el término no dependiente de \mathbf{n} en la expresión anterior se obtiene la expresión para la densidad de energía libre con el término dieléctrico como se sigue:

$$(13) \quad f = f_{FO} - f_E = f_{FO} - \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_a(n \cdot E)^2$$

Es posible determinar la energía libre en presencia de un campo magnético haciendo un desarrollo análogo. Considérese un campo magnético aplicado de inducción magnética \vec{B} que genera una magnetización

$$(14) \quad \vec{M} = \mu_0^{-1}\chi_{\perp}\vec{B} + \mu_0\chi_a(\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

La densidad de energía magnética es $f_M = -\int_0^B \vec{M} \cdot d\vec{B}$, por lo cual la densidad de energía libre en presencia del campo magnético externo, nuevamente omitiendo el término que no depende de \mathbf{n} , es:

$$(15) \quad f = f_{FO} - \frac{1}{2}\mu_0^{-1}\chi_a(n \cdot B)^2$$

Las ecuaciones (13) y (15) implican la existencia de una longitud de coherencia eléctrica ξ_E o magnética ξ_H (Véase Figura 8), que mide la distancia en la que el campo director \mathbf{n} varía en presencia de un campo externo hasta finalmente alinearse con éste. Dicha longitud puede obtenerse al comparar la energía libre de Frank con la energía de alineamiento. Para el caso de un campo magnético y alguna de las constantes elásticas, se tiene:

$$(16) \quad \frac{1}{2}K\xi_H^{-2} = \frac{1}{2}\chi_a H^2 \Rightarrow \xi_H = [K/(\chi_a H^2)]^{\frac{1}{2}}$$

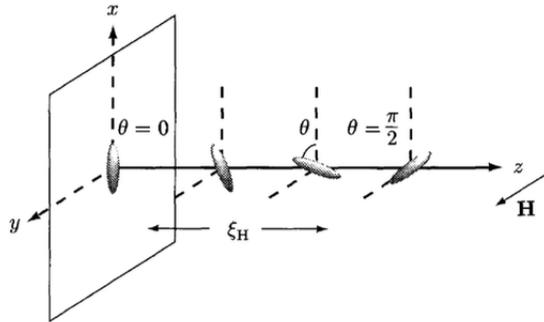


Figura 8. Longitud de penetración ξ_H . La dirección del eje de las moléculas de cristal líquido dentro de la celda se modifica con el campo externo \mathbf{H} hasta alinearse con él a una distancia ξ_H de la superficie de la celda. [27]

Además de interacción dieléctrica entre los campos externos y el cristal líquido, bajo la suposición inicial en que se desprecian los efectos de polarización superficial y de iones libres, se genera también un fenómeno llamado efecto flexoeléctrico. Este fenómeno se debe a que la curvatura del campo director de un cristal líquido causa polarización eléctrica [25]. El efecto flexoeléctrico es análogo al efecto piezoeléctrico en los cristales sólidos, y es evidente en cristales líquidos compuestos por moléculas anisométricas que tienen momentos dipolares permanentes, pues la geometría de las moléculas provoca un ordenamiento tal que los momentos dipolares no estén alineados, causando entonces una polarización. La polarización flexoeléctrica se acopla con el campo externo provocando una contribución a la energía libre:

$$(17) \quad F_{flex} = -\vec{P}_f \cdot \vec{E}$$

De modo que para dar una expresión general para la densidad de energía libre f considerando las interacciones electrostáticas (o magnetostáticas) en un cristal líquido en presencia de un campo externo; además de las ecuación (13) o (15) que incluye las ecuaciones (2) y (3) de la energía del campo, son necesarias la ecuación (4) de los términos de superficie y la ecuación (17) de polarización flexoeléctrica.

La energía libre total en un volumen V está dada por $F = \int_V f dV$, donde f es la densidad total de energía libre. Se puede obtener el campo director $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ en equilibrio al minimizar F utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange del cálculo variacional y las condiciones de frontera. Las ecuaciones de Euler-Lagrange, en este caso son:

$$(18) \quad \delta F = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial n_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial n_{i,j}} \right] \delta n_i dV = 0$$

De forma que el estado de mínima energía de la energía libre de Frank se produce cuando el campo director $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ es uniforme.

1.3. La transición de Frederiks

Considérese una celda de ancho L que contiene cristal líquido nemático. La placa inferior de la celda, en $z = 0$, impone la condición de que las moléculas estén alineadas formando un ángulo θ_0 entre el campo director y el eje x ; mientras que en la placa superior, en $z = L$, el ángulo que se forma es θ_L . Las dos restricciones anteriores se consiguen puliendo las caras de la celda como se muestra en la Figura 6. Dado lo anterior el campo director es $\mathbf{n} = [\cos\theta(z), \sin\theta(z), 0]$ con en ángulo θ

que depende únicamente de z . La deformación inducida es como en la Figura 4 y la energía libre es

$$(19) \quad F = \frac{1}{2} K_2 \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2$$

Cuya solución, de acuerdo con las condiciones de frontera es

$$(20) \quad \theta(z) = (\theta_L - \theta_0) \frac{z}{L} + \theta_0, \quad F = \frac{K_2(\theta_L - \theta_0)^2}{2L}$$

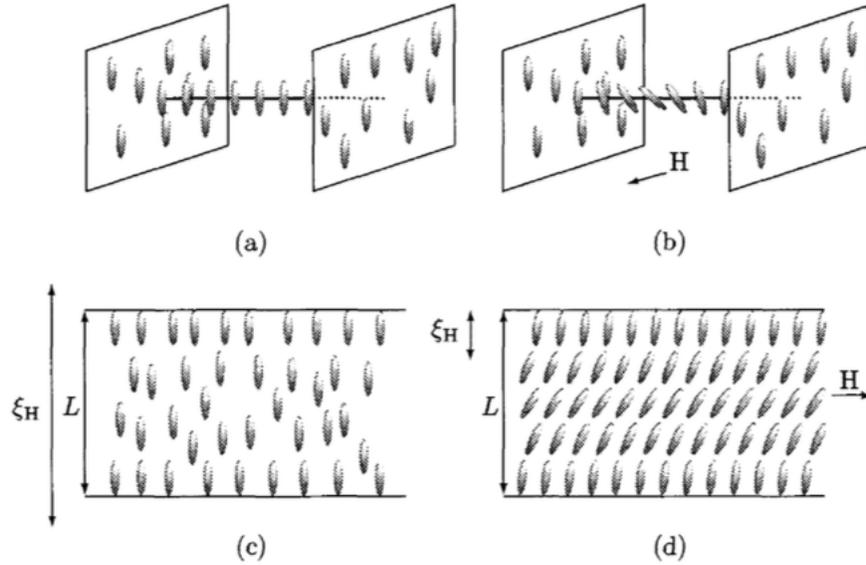


Figura 9. La transición de Frederiks debida a un campo magnético externo. Las moléculas están ancladas paralelamente a la superficie, con (a) $H < H_c$, (b) $H > H_c$. Las moléculas están alineadas perpendicularmente a la superficie para (c) $H < H_c$, (d) $H > H_c$ [27]

Para el caso en que $\theta_0 = \theta_L$, el campo director es uniforme, como en la configuración de equilibrio de la Figura 7. Al aplicar un campo externo por ejemplo en dirección z , si $\xi_M \gg L$, el campo será incapaz de superar el anclaje en la superficie. Sin embargo, si $\xi_M \ll L$, claramente \mathbf{n} intentará alinearse con el campo externo dentro de la celda; a excepción de las regiones de anclaje cercanas a las placas en $z = 0$ y $z = L$. Habrá entonces una transición de fase configuracional entre la no perturbada y la distorsionada por el campo. Dicha transición se conoce como la *transición de Frederiks* y ocurre cuando el campo externo supera el campo crítico H_c , o diferencia de potencial crítica V_c en el

caso de campo eléctrico. La distorsión en el caso de campo magnético externo se muestra en la Figura 9.

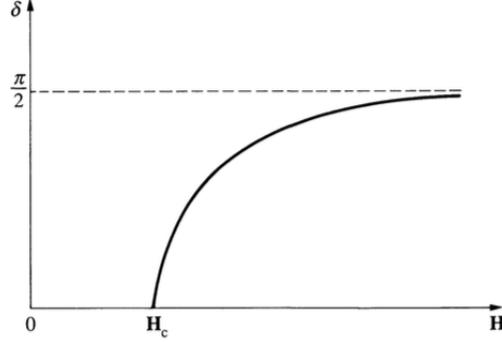


Figura 10. Ángulo de rotación δ como función del campo magnético aplicado. Se ha considerado que el campo externo \mathbf{H} es ortogonal al campo director en ausencia del campo aplicado.

Como se observa en la Figura10 el cristal líquido permanece inalterado para campos menores al campo crítico H_c y comienza a deformarse a partir del centro de la celda para ángulos mayores a este.

La ecuación (19) en presencia del campo magnético aplicado, para la misma configuración mencionada, se convierte entonces en:

$$(21) \quad F = \frac{1}{2}K_2 \int_0^L \left[\left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \chi_a H^2 \sin^2 \theta \right] dz$$

Que al minimizarla usando la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene [27]:

$$(22) \quad \xi_M^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = -\frac{1}{2} \frac{d \sin^2 \theta}{d\theta} \quad , \quad \xi_M = [K/(\chi_a H^2)]^{\frac{1}{2}}$$

La ecuación anterior puede reducirse de la siguiente forma [27] :

$$(23) \quad \xi_M^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = \cos^2 \theta + C$$

Para determinar el campo magnético crítico considérese la condición de que $\theta_0 = \theta_L = 0$, los ángulos respecto al eje x en $z = 0$ y $z = L$ respectivamente. Además que por simetría $\frac{d\theta}{dz} = 0$ en $z = \frac{L}{2}$, pues alcanza un máximo en el centro, y que $\theta(\frac{L}{2} - z) = \theta(\frac{L}{2} + z)$. Llamemos θ_c al ángulo que alcanza θ en $z = \frac{L}{2}$, como $\frac{d\theta}{dz} = 0$ cuando $\theta = \theta_c$ en $z = \frac{L}{2}$. Evidentemente, la constante C de la ecuación (23) es $C = -\cos^2 \theta_c$. Así, la ecuación para $\theta(z)$ es:

$$(24) \quad \frac{z}{\xi_M} = \int_0^{\theta(z)} \frac{d\theta}{[\cos^2\theta(z) - \cos^2\theta_c]^{\frac{1}{2}}}$$

Dado que θ_c es el ángulo que se desvía el campo director en $z = \frac{L}{2}$, cuando $H \rightarrow H_c$ se tiene que $\theta_c \rightarrow 0$. Expandiendo los cosenos en el cociente de la ecuación anterior en serie de Taylor, se tiene

$$\frac{L}{2\xi_M} \approx \int_0^{\theta_c} \frac{d\theta}{[\theta_c^2 - \theta^2 - (\theta_c^4 - \theta^4)/3]^{\frac{1}{2}}} \approx \int_0^{\theta_c} \frac{d\theta}{[\theta_c^2 - \theta^2]^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{1}{6} (\theta_c^2 + \theta^2) \right]$$

por lo cual,

$$(25) \quad \frac{L}{2\xi_M} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4}\theta_c^2 + O(\theta_c^4) \right]$$

Despreciando los términos de orden superior en θ_c y sustituyendo $\xi_M = [K/(\chi_a H^2)]^{\frac{1}{2}}$, es posible despejar θ_c^2 de la expresión (25)

$$(26) \quad \theta_c^2 = \frac{4L}{\pi} \left(\frac{\chi_a}{K} \right)^{\frac{1}{2}} H - 4 > 0$$

Pues para que haya una deformación, $\theta_c \neq 0 \Rightarrow \theta_c^2 > 0$. Despejando H de la ecuación anterior

$$(27) \quad H > \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{K}{\chi_a}}$$

Por lo cual, el campo crítico es

$$(28) \quad H_c = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{K}{\chi_a}}$$

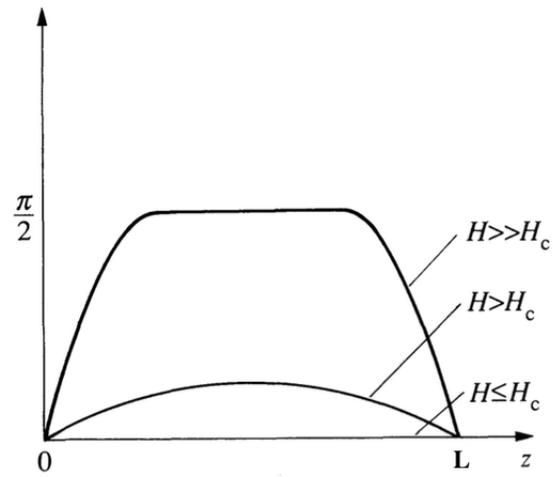


Figura 11. Etapas progresivas de la transición de Frederiks en diferentes puntos de la celda. [25]

Propagación de ondas en un colestérico.

Como se mencionó anteriormente, en la fase colestérica los cristales líquidos adquieren actividad óptica debido a la estructura helicoidal del arreglo molecular. Véase Figura 12. En este estado, el campo director $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ varía en el espacio de acuerdo a lo siguiente:

$$(29) \quad \begin{aligned} n_x &= \cos\theta \\ n_y &= \sin\theta \\ n_z &= 0 \end{aligned}$$

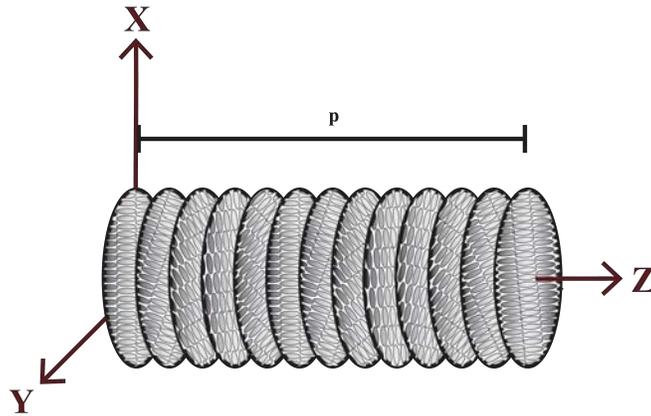


Figura 12. El cristal líquido colestérico. Las moléculas de cristal líquido se ordenan de manera casi paralela en planos. El vector director \mathbf{n} gira entre plano y plano, formando una hélice de periodo espacial \mathbf{p} a lo largo de la dirección ortogonal a los planos de alineamiento.

Considerando que el eje de la hélice está a lo largo del eje z, el ángulo es $\theta = qz$, con $q = \frac{2\pi}{p}$, donde p el paso o periodo espacial del colestérico. El tensor dieléctrico dado por la expresión (10) es entonces:

$$(30) \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \cos^2 qz & \epsilon_a \sin qz \cos qz & 0 \\ \epsilon_a \sin qz \cos qz & \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 qz & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

Utilizando identidades trigonométricas:

$$(31) \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2qz \right) & \epsilon_a \frac{1}{2} \sin 2qz & 0 \\ \epsilon_a \frac{1}{2} \sin 2qz & \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2qz \right) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la ecuación (11) el vector de desplazamiento eléctrico en un medio anisotrópico uniaxial como lo es el cristal líquido colestérico, está relacionado con el campo eléctrico mediante $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, con ϵ como en la ecuación (30).

Considérese el caso de una onda electromagnética que incide sobre una celda de cristal líquido colestérico, cuyo campo director está descrito por (29). La celda de cristal líquido consta de un bloque delgado (con espesor d aproximadamente de $100 \mu m$) en configuración de textura planar o textura de Grandjean como se muestran en la Figura 13. [25]

Ejemplos de la textura planar son los siguientes:

1. Un bloque con una superficie de vidrio pulida y la otra libre. En la superficie del vidrio ($z = 0$) el campo director está fijo en la dirección del pulido (Véase Figura 6), mientras que en la superficie libre ($z = d$), el ángulo que forma el campo director es libre de ajustarse.
2. Un bloque con dos superficies de vidrio pulidas, es decir, tanto la capa inferior ($z = 0$) como la capa superior ($z = d$) la dirección campo director está fija en la dirección del pulido de cada cara. En esta configuración, la hélice en general ajusta su periodo de forma que complete ciclos de giro en el ancho de la celda. Esto es que el espesor de la celda sea $d = n \frac{\pi}{q}$ con n un entero.

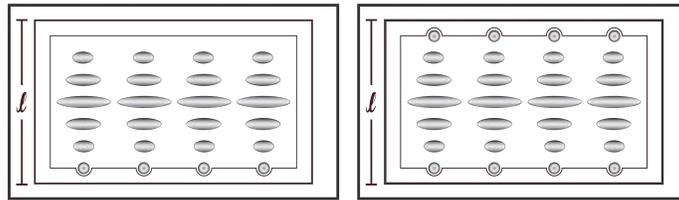


Figura 13. Ejemplos de estructura planar. Del lado izquierdo una sola superficie está pulida, anclando al vector director. Del lado derecho, ambas superficies, inferior y superior están pulidas obligando al colestérico a completar un número entero de periodos.

2.1. Incidencia normal

Considérese el caso de una onda electromagnética de frecuencia ω que se propaga a lo largo del eje z e incide de manera normal sobre la superficie de un bloque de cristal líquido colestérico en la configuración ya mencionada como se muestra en la Figura 14. En este caso, los vectores \vec{D} y \vec{E} son paralelos al plano xy . De las ecuaciones de Maxwell que involucran rotacionales se tiene:

$$(32) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(33) \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Aplicando el rotacional a la expresión (32) y combinando con la ecuación 33 se tiene

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

pero $\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$, el primer término de la igualdad se anula debido a que la onda se propaga en dirección z y el campo eléctrico oscila únicamente en las direcciones transversales, por lo cual $\nabla \cdot (E_x(z), E_y(z), 0) = 0$; sustituyendo se obtiene lo siguiente:

$$(34) \quad -\nabla^2 E + \mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 0$$

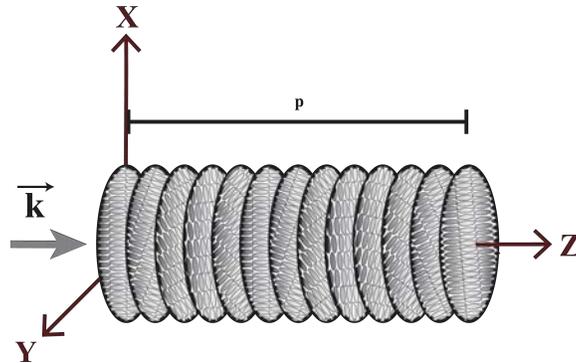


Figura 14. Onda electromagnética en incidencia normal sobre un cristal líquido colestérico.

La ecuación (34) es la ecuación de onda para el campo eléctrico con $D = \epsilon E$. Para dar solución a la ecuación anterior, se proponen las siguientes expresiones:

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0(r) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{D}(r, t) = \vec{D}_0(r) e^{-i\omega t}$$

Sustituyendo en la ecuación (34) se tiene

$$(35) \quad \nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \omega^2 \vec{D} = 0$$

En el caso de incidencia normal, el operador ∇^2 se reduce a $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. La ecuación de onda (34), para cada componente cartesiana se ve entonces:

$$(36) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_0 \omega^2 \epsilon \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con ϵ como en la ecuación (31), de lo cual se tienen únicamente dos ecuaciones para las componentes x e y del campo eléctrico, pues la componente del campo en la dirección de propagación es $E_z = 0$.

$$(37) \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \mu_0 \omega^2 \left(\epsilon_{\perp} E_x + \epsilon_a E_x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2qz \right) + \frac{\epsilon_a}{2} E_y \sin 2qz \right) = 0$$

$$(38) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \mu_0 \omega^2 \left(\frac{\epsilon_a}{2} E_x \sin 2qz + E_y \epsilon_{\perp} + \epsilon_a E_y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2qz \right) \right) = 0$$

Dado que las ecuaciones (37) y (38) no están desacopladas, se utiliza la representación de ondas circularmente polarizadas por medio de:

$$(39) \quad E^{\pm} = E_x \pm i E_y$$

Al multiplicar por i la ecuación (38) y sumarla o restarla a la ecuación (37) se tienen las ecuaciones para E^+ y E^- respectivamente.

$$(40) \quad \frac{\partial^2 E^+}{\partial z^2} + \mu_0 \omega^2 \left[\left(\epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) E^+ + \frac{\epsilon_a}{2} e^{2iqz} E^- \right]$$

$$(41) \quad \frac{\partial^2 E^-}{\partial z^2} + \mu_0 \omega^2 \left[\left(\epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) E^- + \frac{\epsilon_a}{2} e^{-2iqz} E^+ \right]$$

Las ecuaciones anteriores siguen estando acopladas, sin embargo nótese que los últimos términos involucran los factores $e^{\pm 2iqz}$ y la lateralidad de polarización restante por lo que se proponen las siguientes soluciones para E^+ y E^- :

$$(42) \quad \begin{aligned} E^+ &= a e^{i(l+q)z} \\ E^- &= b e^{i(l-q)z} \end{aligned}$$

Donde a y b son constantes, y l el número de onda de la onda electromagnética propagante. Sustituyendo las expresiones de (42) en (41), se tiene:

$$(43) \quad a(l+q)^2 - \mu_0\omega^2 \left[\left(\epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) a + \frac{\epsilon_a}{2} b \right] = 0$$

Al sustituir ahora en (40) se tiene:

$$(44) \quad b(l-q)^2 - \mu_0\omega^2 \left[\left(\epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) b + \frac{\epsilon_a}{2} a \right] = 0$$

Tomando $K_0^2 = \mu_0\omega^2 \left(\epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right)$ y $K_1^2 = \mu_0\omega^2 \frac{\epsilon_a}{2}$, es posible llevar al sistema de ecuaciones (43) y (44) a la forma matricial, así se tiene:

$$(45) \quad \begin{pmatrix} (l+q)^2 - K_0^2 & -K_1^2 \\ -K_1^2 & (l-q)^2 - K_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es de la forma $\overleftrightarrow{M} \vec{a} = \vec{0}$. Es decir un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Por ende su solución para $|\vec{a}| \neq 0$ está dada por la condición $\det(M) = 0$.

$$\left\| \begin{pmatrix} (l+q)^2 - K_0^2 & -K_1^2 \\ -K_1^2 & (l-q)^2 - K_0^2 \end{pmatrix} \right\| = 0$$

Por lo cual:

$$(46) \quad -K_1^4 + (-K_0^2 + l^2 + q^2)^2 - 4l^2q^2 = 0$$

Para una frecuencia dada ω , K_0^2 y K_1^2 son fijas y la ecuación (46) da 4 posibles valores de l . La relación entre ω y l se conoce como relación de dispersión.

Sustituyendo las constantes K_0^2 y K_1^2 en la expresión (46) se tiene:

$$-\left(\mu_0\omega^2 \frac{\epsilon_a}{2} \right)^2 + \left(-\mu_0\omega^2 \left(\epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) + l^2 + q^2 \right)^2 - 4l^2q^2 = 0$$

Es decir

$$(47) \quad \mu_0^2 \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \omega^4 - \mu_0 (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel}) (l^2 + q^2) \omega^2 + (l^2 - q^2)^2 = 0$$

Haciendo el cambio de variable $\Omega = \omega^2$, se tiene

$$(48) \quad \mu_0^2 \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \Omega^2 - \mu_0 (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel}) (l^2 + q^2) \Omega + (l^2 - q^2)^2 = 0$$

Que es una ecuación algebraica cuyas soluciones son:

$$\Omega^{\pm} = \frac{(l^2 + q^2) (\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}) \pm \sqrt{(\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})^2 (l^2 + q^2)^2 + 16 \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} l^2 q^2}}{2 \mu_0 \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}}$$

Sustituyendo $\Omega = \omega^2$ en Ω^{\pm} se tienen 4 posibles soluciones. Tomando únicamente las raíces positivas, las soluciones son:

$$(49) \quad \omega = \sqrt{\frac{(l^2 + q^2) (\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}) \pm \sqrt{(\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})^2 (l^2 + q^2)^2 + 16 \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} l^2 q^2}}{2 \mu_0 \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}}}$$

De las soluciones anteriores se tienen las 4 ramas que dan lugar a la estructura de bandas de la Figura 15.

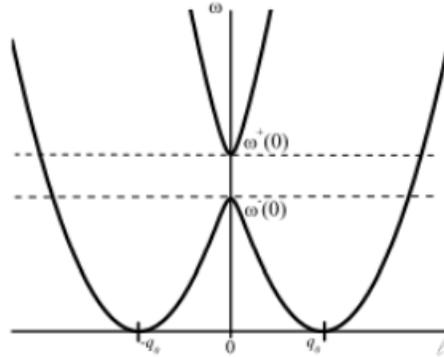


Figura 15. Espectro de bandas fotónicas en una hélice colestérica.

Nótese la presencia de una banda de reflexión parcial situada entre $\omega^+(0)$ y $\omega^-(0)$ para la cual se refleja el modo cuya helicidad coincide con el giro de la estructura, mientras que el modo restante puede atravesar la estructura [25]. Los bordes de la banda de reflexión resultan de pedir que $l = 0$ en la ecuación (47) y están dados por :

$$\mu_0^2 \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \omega^4 - \mu_0 (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel}) q^2 \omega^2 + q^2 = 0$$

Restando las dos soluciones para la ecuación anterior se obtiene el ancho de la banda. Claramente se nota que el ancho de banda depende tan solo de la anisotropía dieléctrica o birrefringencia del cristal líquido colestérico.

2.2. Incidencia oblicua

Considérese ahora el caso en que la onda electromagnética incide de manera oblicua sobre el bloque de cristal líquido colestérico. En este caso, las ecuaciones (10) y (11) con $\epsilon_{||} = \epsilon_{\perp} + \epsilon_a$ son una aproximación, pues se ha considerado el medio como uniaxial mas por simetría debe ser biaxial y con ello debe haber una componente del tensor dieléctrico ϵ_{zz} a lo largo del eje z. Sin embargo, las desviaciones de la uniaxialidad ($\epsilon_{\perp} - \epsilon_{zz}$) son del orden de $(qa)^2 \approx 10^{-4}$, lo cual permite que la aproximación uniaxial sea excelente. [25]

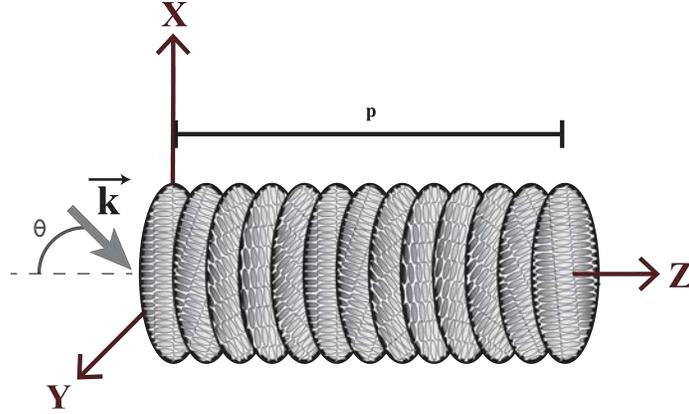


Figura 16. Onda electromagnética en incidencia oblicua sobre una celda de cristal líquido colestérico.

Tomando la aproximación uniaxial, el tensor dieléctrico es como en (10)

$$(50) \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \cos^2 qz & \epsilon_a \sin qz \cos qz & 0 \\ \epsilon_a \sin qz \cos qz & \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 qz & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

Por simplicidad en la notación, denotaremos al tensor dieléctrico de la siguiente forma:

$$(51) \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de Maxwell involucradas son nuevamente (32) y (33). Nótese que a diferencia de lo que ocurre en un medio isotrópico y homogéneo, para el cual los coeficientes de estas ecuaciones diferenciales parciales son constantes, en este caso los coeficientes son funciones explícitas de la coordenada z , como es evidente de la expresión (30) para el tensor dieléctrico. En consecuencia es imposible en primera instancia encontrar soluciones exactas para estas ecuaciones del tipo de onda plana $Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ en donde \vec{k} y ω son el vector de onda y la frecuencia de la onda, respectivamente. Sin embargo, el hecho de que el tensor dieléctrico no dependa de las coordenadas transversales x y y , permite suponer que el comportamiento de la solución en tales direcciones sigue siendo el de una onda plana. Por lo tanto si toda la dependencia en z del campo electromagnético se queda en las amplitudes de los campos eléctrico y la inducción magnética, es decir, $(\varepsilon_x(z), \varepsilon_y(z), \varepsilon_z(z))$ y $(\beta_x(z), \beta_y(z), \beta_z(z))$, entonces en el caso más general:

$$(52) \quad \begin{aligned} \vec{E}(r, t) &= (\varepsilon_x(z), \varepsilon_y(z), \varepsilon_z(z)) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ \vec{H}(r, t) &= \frac{1}{\mu_0} (\beta_x(z), \beta_y(z), \beta_z(z)) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \end{aligned}$$

Es posible sustituir lo anterior en la Ecuación de Maxwell que involucra al rotacional del campo eléctrico

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Separando lo anterior por componentes, se tienen tres ecuaciones:

$$(53) \quad \frac{\partial \varepsilon_y(z)}{\partial z} - ik_y \varepsilon_z(z) = -i\omega \beta_x(z)$$

$$(54) \quad \frac{\partial \varepsilon_x(z)}{\partial z} - ik_x \varepsilon_z(z) = i\omega \beta_y(z)$$

$$(55) \quad k_x \varepsilon_y(z) - k_y \varepsilon_x(z) = \omega \beta_z(z)$$

En las ecuaciones anteriores se ha cancelado el término exponencial pues está presente en cada miembro de la igualdad. Haciendo un procedimiento análogo con la otra ecuación de Maxwell para el campo magnético:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Tomando al vector de desplazamiento eléctrico como en (11) y el tensor dieléctrico como en (50) se tiene una forma explícita del vector de desplazamiento eléctrico en términos de las componentes del campo eléctrico de la ecuación (52). Sustituyendo lo anterior en la ecuación de Maxwell se tiene una ecuación en términos de las amplitudes de los campos eléctrico y magnético y de las componentes del tensor dieléctrico. Separando por componentes en ambos lados, se tienen nuevamente tres ecuaciones:

$$(56) \quad \frac{\partial \beta_y(z)}{\partial z} - ik_y \beta_z(z) = \mu_0 (i\omega \epsilon_{11} \varepsilon_x(z) + i\omega \epsilon_{12} \varepsilon_y(z))$$

$$(57) \quad \frac{\partial \beta_x(z)}{\partial z} - ik_x \beta_z(z) = -\mu_0 (i\omega \epsilon_{12} \varepsilon_x(z) + i\omega \epsilon_{22} \varepsilon_y(z))$$

$$(58) \quad k_y \beta_x(z) - k_x \beta_y(z) = \mu_0 \omega \epsilon_{\perp} \varepsilon_z(z)$$

Nótese que las ecuaciones (55) y (58) son ecuaciones algebraicas por lo cual es posible expresar a $\varepsilon_z(z)$ y $\beta_z(z)$ en términos de las componentes x e y .

De la ecuación (55), se tiene que

$$(59) \quad \beta_z(z) = -\frac{k_y}{\omega} \varepsilon_x(z) + \frac{k_x}{\omega} \varepsilon_y(z)$$

Y de la ecuación (58) se tiene

$$(60) \quad \varepsilon_z(z) = \frac{k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} \beta_x(z) - \frac{k_x}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} \beta_y(z)$$

Sustituyendo la ecuación (60) para $\varepsilon_z(z)$ en (53) y (54) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(61) \quad \frac{d\varepsilon_x(z)}{dz} = i \frac{k_x k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} \beta_x(z) + i \left(\omega - \frac{k_x^2}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} \right) \beta_y(z)$$

$$(62) \quad \frac{d\varepsilon_y(z)}{dz} = i \left(\frac{k_y^2}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} - \omega \right) \beta_x(z) - i \frac{k_x k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} \beta_y(z)$$

Análogamente, sustituyendo la ecuación (59) para $\beta_z(z)$ en (56) y (57)

$$(63) \quad \frac{d\beta_x(z)}{dx} = i \left(-\mu_0\omega\epsilon_{12} - \frac{k_x k_y}{\omega} \right) \varepsilon_x(z) + i \left(\frac{k_x^2}{\omega} - \mu_0\omega\epsilon_{22} \right) \varepsilon_y(z)$$

$$(64) \quad \frac{d\beta_y(z)}{dz} = i \left(\mu_0\omega\epsilon_{11} - \frac{k_y^2}{\omega} \right) \varepsilon_x(z) + i \left(\mu_0\omega\epsilon_{12} + \frac{k_x k_y}{\omega} \right) \varepsilon_y(z)$$

Obsérvese que las ecuaciones (61),(62),(63) y(64) forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes para las componentes $\varepsilon_x(z)$, $\varepsilon_y(z)$, $\beta_x(z)$ y $\beta_y(z)$. Juntando dichas ecuaciones y expresándolas en una forma matricial, se tiene:

$$(65) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \varepsilon_x(z) \\ \varepsilon_y(z) \\ \beta_x(z) \\ \beta_y(z) \end{pmatrix} = iM \begin{pmatrix} \varepsilon_x(z) \\ \varepsilon_y(z) \\ \beta_x(z) \\ \beta_y(z) \end{pmatrix}$$

Con

$$(66) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{k_x k_y}{\mu_0\omega\epsilon_{\perp}} & \omega - \frac{k_x^2}{\mu_0\omega\epsilon_{\perp}} \\ 0 & 0 & \frac{k_y^2}{\mu_0\omega\epsilon_{\perp}} - \omega & -\frac{k_x k_y}{\mu_0\omega\epsilon_{\perp}} \\ -\mu_0\omega\epsilon_{12} - \frac{k_x k_y}{\omega} & \frac{k_x^2}{\omega} - \mu_0\omega\epsilon_{22} & 0 & 0 \\ \mu_0\omega\epsilon_{11} - \frac{k_y^2}{\omega} & \mu_0\omega\epsilon_{12} + \frac{k_x k_y}{\omega} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que se puede escribir como

$$(67) \quad \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial z} = iM \vec{\psi}$$

donde el vector $\vec{\psi}$ esta formado con las componentes transversales de los campos electromagnéticos de la forma:

$$(68) \quad \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(z) \\ \varepsilon_y(z) \\ \beta_x(z) \\ \beta_y(z) \end{pmatrix}$$

La forma anterior de representar a las ecuaciones de Maxwell es conocida como la formulación de *Marcuvitz-Schwinger*. [26] Sustituyendo las componentes del tensor dieléctrico ϵ_{11} , ϵ_{12} y ϵ_{22} en M .

$$(69) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_{13} & M_{14} \\ 0 & 0 & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & 0 & 0 \\ M_{41} & M_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$M_{13} = \frac{k_x k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}}$$

$$M_{14} = \omega - \frac{k_x^2}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}}$$

$$M_{23} = \frac{k_y^2}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} - \omega$$

$$M_{24} = -\frac{k_x k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}}$$

$$M_{31} = -\mu_0 \omega \epsilon_a \sin qz \cos qz - \frac{k_x k_y}{\omega}$$

$$M_{32} = \frac{k_x^2}{\omega} - \mu_0 \omega (\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 qz)$$

$$M_{41} = \mu_0 \omega (\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \cos^2 qz) - \frac{k_y^2}{\omega}$$

$$M_{42} = \mu_0 \omega \epsilon_a \sin qz \cos qz + \frac{k_x k_y}{\omega}$$

En este punto, es importante recordar que el sistema forma una hélice, como la que se muestra en la Figura 12, que es guiada por el vector director \mathbf{n} a través del ángulo $\theta = \theta(z)$. Sin embargo, contemplando al sistema plano por plano, éste tiene la apariencia de un medio que es anisotrópico pero también es homogéneo. Por tal razón es conveniente aplicar una rotación respecto al eje z en sentido inverso a la asociada al vector director. Con esto en mente introducimos la variable ϕ relacionada con la variable ψ de la ecuación (67), mediante la expresión $\phi = R\psi$, en donde R representa una rotación en el plano xy que es perpendicular al eje de la hélice. Despejando la variable ψ se tiene $\psi = R^{-1}\phi$ y sustituyendo en la ecuación (67) se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (R^{-1}\phi) = \frac{\partial R^{-1}}{\partial z} \phi + R^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial z} = iMR^{-1}\phi$$

es decir

$$\frac{\partial R^{-1}}{\partial z} \phi + R^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial z} = iMR^{-1} \phi$$

Multiplicando por la matriz de rotación R del lado izquierdo

$$R \frac{\partial \psi}{\partial z} = iRM\psi$$

Es decir

$$R \frac{\partial R^{-1}}{\partial z} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} = iRM R^{-1} \phi$$

despejando, se tiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(iRM R^{-1} - R \frac{\partial R^{-1}}{\partial z} \right) \phi$$

Con la finalidad de llevar la ecuación anterior a una forma similar a la de la ecuación (67), se renombra lo anterior de la forma:

$$(70) \quad T = \left(iRM R^{-1} - R \frac{\partial R^{-1}}{\partial z} \right)$$

Por lo cual

$$(71) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = T \phi$$

La matriz R es una matriz de 4×4 y contiene dos rotaciones, una para los campos eléctricos ε_x y ε_y y otra para los campos magnéticos β_x y β_y . Dichas rotaciones se realizan sólo en los planos perpendiculares al eje de la hélice y se efectúan de manera independiente. Explícitamente, la rotación es de la siguiente forma

$$(72) \quad R = \begin{pmatrix} \cos qz & \sin qz & 0 & 0 \\ -\sin qz & \cos qz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos qz & \sin qz \\ 0 & 0 & -\sin qz & \cos qz \end{pmatrix}$$

El cálculo de la matriz T de la ecuación (71) requiere de conocer tanto $Q = RMR^{-1}$ como $R \cdot \frac{dR^{-1}}{dz}$. La matriz R es una transformación ortogonal, por lo cual la inversa es igual a la transpuesta. La multiplicación de las matrices $Q = RMR^{-1}$ conduce a la expresión explícita:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_{13} & Q_{14} \\ 0 & 0 & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & 0 & 0 \\ Q_{41} & Q_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde las componentes de la matriz son:

$$(73) \quad \begin{aligned} Q_{13} &= \frac{k_x k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} (\cos^2 qz - \sin^2 qz) + \frac{1}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} (k_y^2 - k_x^2) \sin qz \cos qz \\ Q_{14} &= -\frac{2k_x k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} \sin qz \cos qz - \frac{1}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} (k_y^2 \sin^2 qz + k_x^2 \cos^2 qz) + \omega \\ Q_{23} &= -\frac{2k_x k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} \sin qz \cos qz + \frac{1}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} (k_y^2 \cos^2 qz + k_x^2 \sin^2 qz) - \omega \\ Q_{24} &= \frac{k_x k_y}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} (\sin^2 qz - \cos^2 qz) - \frac{1}{\mu_0 \omega \epsilon_{\perp}} (k_y^2 - k_x^2) \sin qz \cos qz \\ Q_{31} &= \frac{k_x k_y}{\omega} (\sin^2 qz - \cos^2 qz) + \frac{1}{\omega} (k_x^2 - k_y^2) \sin qz \cos qz \\ Q_{32} &= \frac{2k_x k_y}{\omega} \sin qz \cos qz - \mu_0 \omega \epsilon_{\perp} + \frac{1}{\omega} (k_y^2 \sin^2 qz + k_x^2 \cos^2 qz) \\ Q_{41} &= \mu_0 \omega (\epsilon_a + \epsilon_{\perp}) + \frac{2k_x k_y}{\omega} \sin qz \cos qz - \frac{1}{\omega} (k_y^2 \cos^2 qz + k_x^2 \sin^2 qz) \\ Q_{42} &= \frac{k_x k_y}{\omega} (\cos^2 qz - \sin^2 qz) + \frac{1}{\omega} (k_y^2 - k_x^2) \sin qz \cos qz \end{aligned}$$

Por otro lado, para el cálculo de $\frac{\partial R^{-1}}{\partial z}$ derivamos directamente elemento por elemento de la rotación inversa de R dada por la ecuación (72) por lo que se tiene:

$$\frac{\partial R^{-1}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -q \sin qz & -q \cos qz & 0 & 0 \\ q \cos qz & -q \sin qz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q \sin qz & -q \cos qz \\ 0 & 0 & q \cos qz & -q \sin qz \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces que al multiplicar por la matriz de rotación R del lado izquierdo

$$-R \frac{\partial R^{-1}}{\partial z} = - \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & 0 \\ -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & -q & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la matriz definida en la ecuación (70) adopta la forma:

$$(74) \quad T = \begin{pmatrix} 0 & q & iQ_{13} & iQ_{14} \\ -q & 0 & iQ_{23} & iQ_{24} \\ iQ_{31} & iQ_{32} & 0 & q \\ iQ_{41} & iQ_{42} & -q & 0 \end{pmatrix}$$

Además, el vector que contiene a las componentes transversales del campo electromagnético $\phi = R\psi$ resulta ser:

$$(75) \quad \phi = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \cos qz + \varepsilon_y \sin qz \\ -\varepsilon_x \sin qz + \varepsilon_y \cos qz \\ \beta_x \cos qz + \beta_y \sin qz \\ -\beta_x \sin qz + \beta_y \cos qz \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (72)

$$(76) \quad \frac{\partial}{\partial z} \phi = \begin{pmatrix} 0 & q & iQ_{13} & iQ_{14} \\ -q & 0 & iQ_{23} & iQ_{24} \\ iQ_{31} & iQ_{32} & 0 & q \\ iQ_{41} & iQ_{42} & -q & 0 \end{pmatrix} \phi$$

La ecuación (71) reformula la ecuación gobernante de los campos eléctrico y magnético dentro de la celda de cristal líquido y en general, de un medio estratificado anisotrópico cuando la onda electromagnética incide de forma oblicua al eje del cristal líquido colestérico o a la dirección de estratificación de forma que al menos una de las componentes del vector de onda k_x y k_y no es nula.

Reduciendo bajo este procedimiento al caso en que la incidencia es normal, es decir, el vector de onda y el campo director son paralelos, ambos en dirección z , entonces $k_x = k_y = 0$.

Reformulando el problema de la sección anterior, en donde se describe una onda electromagnética que viaja paralelamente al eje del cristal líquido colestérico; descrito con esta formulación, basta con tomar $k_x = k_y = 0$ en las ecuaciones (73), con lo cual se tiene:

$$(77) \quad T_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & i\omega \\ -q & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & -i\mu_0\omega\epsilon_{\perp} & 0 & q \\ i\mu_0\omega\epsilon_{\parallel} & 0 & -q & 0 \end{pmatrix}$$

En donde $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\perp} + \epsilon_a$, lo cual reduce la ecuación (71) a

$$(78) \quad \frac{\partial}{\partial z} \phi = T_{\perp} \phi$$

Es claro que si se reescribe la ecuación anterior como un sistema de ecuaciones acopladas lineales para las componentes de los campos electromagnéticos podríamos eliminar dichas variables hasta reducir al sistema a una sola ecuación diferencial de orden cuarto también con coeficientes constantes cuya solución, es bien sabido, es de la forma $Ae^{\lambda x}$. Por esta razón proponemos que la solución general de la ecuación (78) se puede escribir como:

$$(79) \quad \phi = v_0 e^{ilz}$$

donde v_0 un vector constante no nulo. Sustituyendo la solución anterior en la ecuación (78) se tiene:

$$il v_0 = T_{\perp} v_0$$

en donde hemos cancelado el término exponencial en ambos lados de la igualdad, de tal forma que

$$(il\mathbb{I} - T_{\perp}) v_0 = 0$$

cuya solución no nula existe cuando $\det(il\mathbb{I} - T_{\perp}) = 0$

$$\begin{vmatrix} il & -q & 0 & -i\omega \\ q & il & i\omega & 0 \\ 0 & i\mu_0\omega\epsilon_{\perp} & il & -q \\ -i\mu_0\omega\epsilon_{\parallel} & 0 & q & il \end{vmatrix} = 0$$

entonces:

$$(80) \quad \mu_0^2 \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \omega^4 - \mu_0 (\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}) (l^2 + q^2) \omega^2 + (l^2 - q^2)^2 = 0$$

Que es igual a la ecuación (47), cuyas soluciones están dadas por la ecuación (49).

$$(81) \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{(l^2 + q^2) (\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}) \pm \sqrt{(\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})^2 (l^2 + q^2)^2 + 16\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}l^2q^2}}{2\mu_0\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}}}$$

Tomando los cambios de variable $\tilde{\omega} = \frac{\omega c}{q}$ y $\tilde{l} = \frac{l}{q}$ bajo las cuales escalamos tanto la frecuencia como el número de onda en números de onda q de la hélice del colestérico. Es posible llevar la ecuación anterior a una forma adimensional que no dependa del periodo espacial del colestérico y con ello sea posible un manejo más general. Para ello, es necesario expresar a los índices de refracción ordinario n_o y extraordinario n_e en términos de las constantes dieléctricas de la siguiente manera:

$$n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$$

$$n_e = \sqrt{\epsilon_{\parallel}}$$

Utilizando lo anterior, las soluciones positivas de la ecuación (49) son:

$$(82) \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}n_o} \sqrt{\left(\tilde{l}^2 + 1\right) \left(n_e^2 + n_o^2\right) \pm \sqrt{\left(n_e^2 - n_o^2\right)^2 \left(\tilde{l}^2 + 1\right)^2 + 16n_o^2n_e^2\tilde{l}^2}}$$

Que se muestran en el siguiente gráfico:

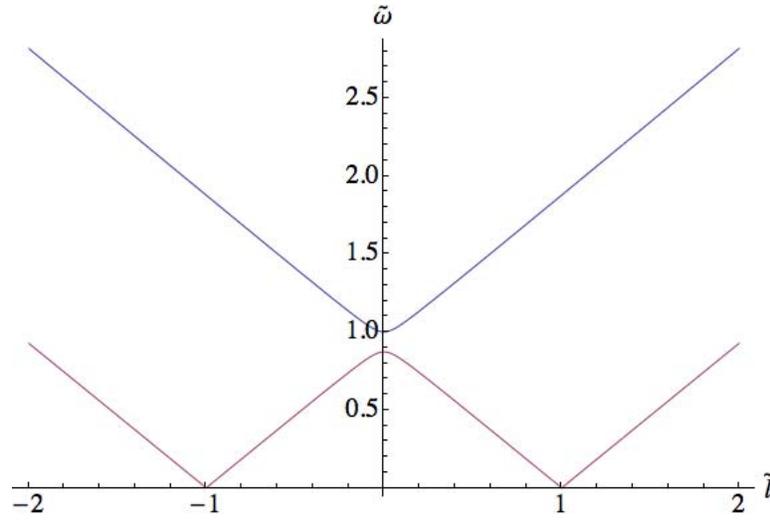


Figura 17. Espectro de bandas fotónicas de un cristal líquido colestérico Cholesteryl Carbonate con índices de refracción $n_o = 1.72$ y $n_e = 1.5$ [30]. Las curvas representan las soluciones de la ecuación 82.

El ancho de la banda se tiene en $l = 0$ restando dos de las soluciones anteriores

$$(83) \quad \Delta\omega = \frac{2}{n_o\sqrt{2}} \left(\sqrt{(1+l^2)(n_e^2+n_o^2) + \sqrt{16l^2n_e^2n_o^2 + (1+l^2)^2(n_e^2-n_o^2)^2}} - \sqrt{(1+l^2)(n_e^2+n_o^2) + \sqrt{16l^2n_e^2n_o^2 + (1+l^2)^2(n_e^2-n_o^2)^2}} \right)$$

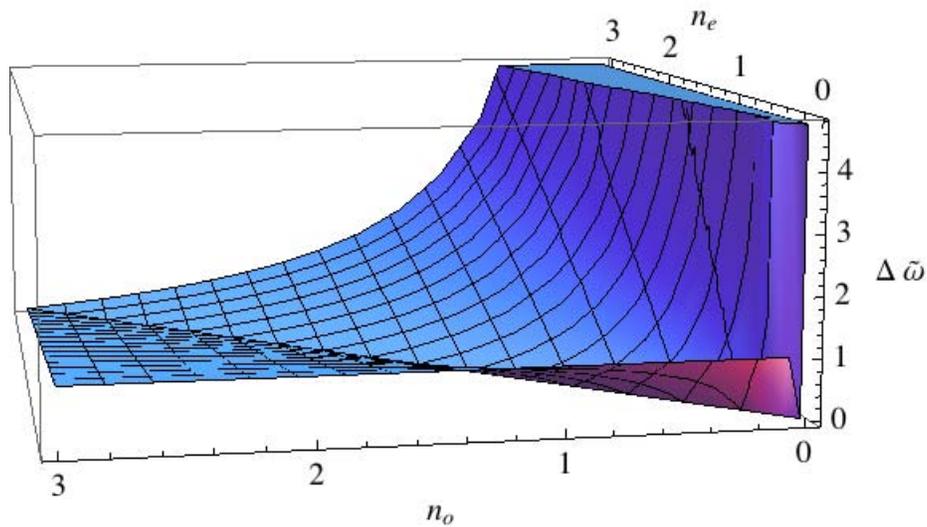


Figura 18. Ancho de banda fotónica como función de los índices ordinario y extraordinario n_o y n_e .

Nótese que el ancho de banda se anula cuando $n_o = \pm n_e$,

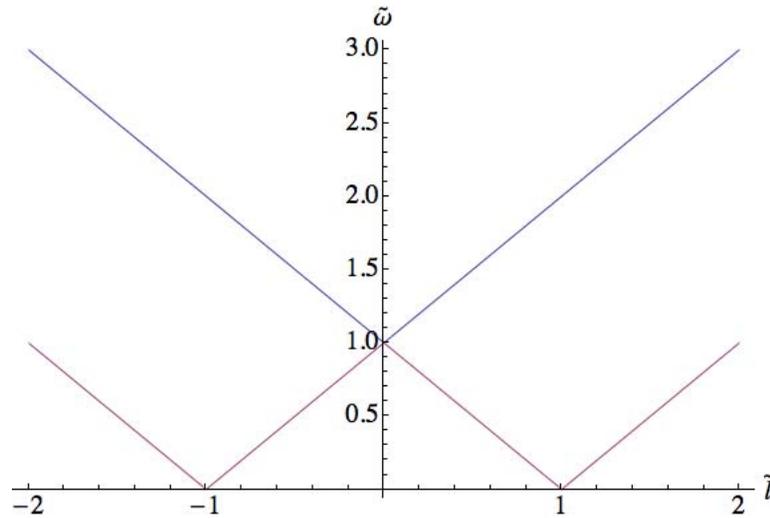


Figura 19. El ancho de banda se anula cuando $n_o = n_e$.

En este capítulo hemos formulado y resuelto la propagación de ondas electromagnéticas a través de un cristal líquido colestérico tanto para incidencia normal como oblicua, siguiendo para ello dos métodos distintos que consistentemente llevan a los mismos resultados. En los siguientes capítulos se describe un sistema con simetría helicoidal pero en sus propiedades elásticas.

Capítulo 3

Teoría de elasticidad en el medio continuo

En este capítulo se revisa la dinámica de los sistemas elásticos en general para poder describir a un sistema helicoidal elástico construido a partir de la deposición de capas delgadas de un material sólido anisotrópico, girando el sustrato sobre el cual se depositan. El análisis de dicho sistema se lleva a cabo utilizando las ecuaciones de la dinámica de medios continuos. Se formula dicho problema utilizando herramientas análogas a las utilizadas en el caso electromagnético del capítulo anterior.

Si bien la materia está compuesta por elementos discretos, es decir por moléculas, es posible hacer una descripción del estado de tensiones y deformaciones de un medio considerándolo como un continuo, condición necesaria para que esta descripción sea adecuada. Para ello, al describir un elemento de el medio continuo, siempre se considera que por muy pequeño que éste sea, es mayor a la longitud molecular característica del medio.

3.1. El tensor de esfuerzos

Considérese un cuerpo de volumen V limitado por una superficie S que se encuentra en estado de equilibrio. La fuerza interna resultante, que representa las interacciones moleculares del cuerpo, es nula. Si el cuerpo en equilibrio se corta por un plano, el estado de equilibrio se altera y cada porción producida por el corte siente una fuerza externa \vec{F} sobre la superficie S que el corte indujo, de tal forma que es posible definir el vector de esfuerzos como:

$$t_i^{\hat{n}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta S}$$

Nótese que cada componente del vector de esfuerzos tiene unidades de $\frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}}$. El vector de esfuerzos está definido para un punto P sobre el área de corte y el área alrededor de dicho punto, queda indicada por el vector normal \hat{n} . Si el cuerpo se cortara por un plano con otra inclinación, el vector de esfuerzos sería diferente.

En el caso particular en que el plano que corta al cuerpo es paralelo a uno de los planos que forman dos de los ejes coordenados, el vector normal \hat{n} será paralelo al otro eje coordenado. La componente del vector de esfuerzos paralela a éste último corresponde a un esfuerzo normal, mientras que las otras corresponden a esfuerzos de corte. Los tres vectores de esfuerzos que corresponden a hacer cortes con planos paralelos a cada uno de los planos que inducen los ejes coordenados dan lugar al tensor de esfuerzos definido como:

$$(84) \quad \sigma_{ij} = t_j^{\hat{e}_i}$$

donde \hat{e}_i describe el vector normal en cada caso de corte. El tensor de esfuerzos es, en representación matricial:

$$(85) \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

De la misma manera que en el vector de esfuerzos, en el tensor de esfuerzos los elementos de la diagonal corresponden a esfuerzos normales mientras que los demás corresponden a esfuerzos de corte.

Además de los esfuerzos superficiales sobre un cuerpo del medio continuo, también hace falta considerar las fuerzas volumétricas $\rho \vec{f}_V$ que actúan sobre todo el cuerpo como por ejemplo la fuerza gravitacional y las fuerzas inerciales provocadas por el movimiento relativo de los sistemas. De acuerdo a lo anterior es posible generalizar la segunda ley de Newton de la forma:

$$(86) \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_{V_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

que en equilibrio es

$$(87) \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_{V_i} = 0$$

Debido a que las fuerzas de superficie no son uniformes y en general varían de punto, podrían existir una torca interna y una torca externa que actúen sobre el sistema. Es decir

$$(88) \quad \int_S \epsilon_{ijk} x_j f_{S_k} dS + \int_V \rho \epsilon_{ijk} x_j f_{V_k} dV = 0$$

Considerando que las fuerzas superficiales son $f_{S_K} = \sigma_{mk}n_m$ y aplicando el Teorema de Gauss al primer término se tiene

$$\begin{aligned} \int_S \epsilon_{mjk} x_j \sigma_{mk} n_m dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_m} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{mk}) dV \\ &= \int_V \epsilon_{imk} \sigma_{mk} dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} dV \end{aligned}$$

En donde se ha sacado de la integral el símbolo de Levi-Civita ya que es constante y se ha efectuado la derivada restante usando la regla de Leibnitz.

Sustituyendo en la ecuación (88) y asociando los términos que contienen a x_j se llega a

$$\int_V \epsilon_{imk} \sigma_{mk} dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \left(\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + \rho f_{V_k} \right) dV = 0$$

que por la ecuación (87) después de renombrar índices, se reduce a

$$(89) \quad \int_V \epsilon_{imk} \sigma_{mk} dV = 0$$

Dado que el volumen V de control es arbitrario, entonces

$$(90) \quad \epsilon_{imk} \sigma_{mk} = 0$$

Además, ya que ϵ_{imk} es un tensor completamente antisimétrico, el tensor de esfuerzos σ_{mk} es tensor simétrico para que se cumpla la ecuación anterior, debido a la identidad que afirma que la contracción de un tensor simétrico con un antisimétrico es nula, esto significa que

$$(91) \quad \sigma_{mk} = \sigma_{km}$$

Por lo cual, el tensor de esfuerzos simétrico es:

$$(92) \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

3.2. El tensor de elongación

Considérese un punto P_0 en un cuerpo elástico inicialmente estático. Si se desprecia el movimiento de cuerpo rígido, es decir, los movimientos de rotación o traslación del cuerpo entero, los desplazamientos de los puntos del cuerpo elástico serán debidos únicamente a las deformaciones.

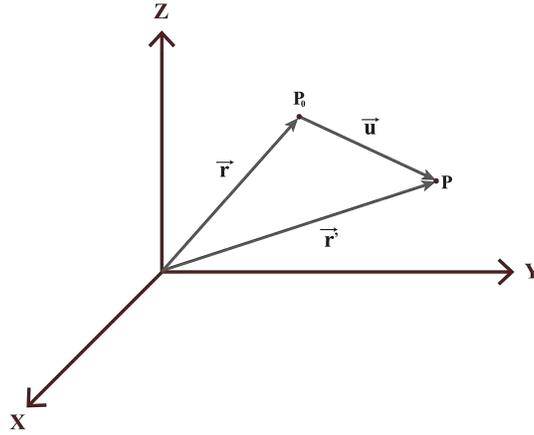


Figura 20. Desplazamiento de un punto sobre un cuerpo del medio continuo después de una deformación.

Supóngase que el punto P_0 está localizado en \vec{r} . (Véase Figura 20). Después de una deformación, el punto estará localizado en \vec{r}' , así el vector de desplazamiento asociado a la deformación es $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$. Donde $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r}' = (x', y', z')$. Considerando la componente i del desplazamiento se tiene $u_i = x'_i - x_i$ o bien $x'_i = x_i + u_i$. Diferenciando lo anterior se tiene

$$(93) \quad dx'_i = dx_i + du_i$$

y definimos los elementos de línea tanto en el medio deformado como en el sin deformar de la siguiente forma

$$(94) \quad dl^2 = dx_i dx_i \quad , \quad dl'^2 = dx'_i dx'_i$$

Sustituyendo (93) en dl'^2 se tiene

$$dl'^2 = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i)$$

pero la diferencial de las componentes del vector de desplazamiento se puede escribir como

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$$

sustituyendo se tiene

$$dl'^2 = dx_i dx_i + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_k dx_j$$

luego, si se toma en cuenta que las componentes con índices repetidos son mudas, se tiene que

$$dl'^2 = dl^2 + u_{ik} dx_i dx_k$$

con

$$(95) \quad u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$$

donde u_{ik} es entonces el tensor de elongación, que en aproximación lineal se simplifica como

$$(96) \quad u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Por otro lado, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ es un tensor de segundo orden que puede descomponerse en una parte simétrica y una antisimétrica, es decir:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Dado que la primera parte del lado derecho de la igualdad es el tensor de elongación, se tiene que éste último es simétrico, es decir

$$(97) \quad u_{ik} = u_{ki}$$

entonces

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{ik} + \Omega_{ik}$$

con Ω_{ik} el tensor de rotación antisimétrico definido por

$$\Omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Es claro en este desarrollo que las rotaciones no involucran deformaciones.

3.3. Termodinámica de las deformaciones

Un sistema elástico es también un sistema termodinámico y para describir sus propiedades termodinámicas es necesario calcular el trabajo realizado por las fuerzas elásticas. Considérese un cuerpo lineal que se deforma una cantidad pequeña δu_i . Las componentes de las fuerzas externas que efectúan la deformación son $F_i = -\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ de modo que el trabajo efectuado por los esfuerzos internos es

$$dW = -\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i.$$

Integrando sobre el volumen del cuerpo, se tiene

$$(98) \quad \int_V dW = - \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dV$$

Si se toma en cuenta que el integrando se puede expresar como un producto de derivadas mediante la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_{ik} \delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i + \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k}$$

despejando el primer término del lado derecho de la igualdad y sustituyendo en la ecuación (98)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i &= \frac{\partial \sigma_{ik} \delta u_i}{\partial x_k} - \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \\ \int_V dW &= - \int_V \frac{\partial \sigma_{ik} \delta u_i}{\partial x_k} dV + \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Gauss a la primera integral se tiene

$$\int_V dW = - \oint \sigma_{ik} \delta u_i n_k dS + \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV$$

Considerando el medio elástico suficientemente grande de modo que las deformaciones en la superficie son prácticamente nulas siempre que las fuentes de las deformaciones estén confinadas; la primer integral es despreciable, por lo cual

$$(99) \quad \int_V dW = \int_V \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dV$$

Como es claro la derivada involucrada está relacionada con el tensor de elongaciones. De hecho, basta con renombrar índices en un término adicional para mostrar que

$$\int_V dW = \int \sigma_{ik} \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] dV$$

es decir

$$(100) \quad W = \int \sigma_{ik} \delta u_{ik} dV$$

Si la deformación es suficientemente pequeña para que el medio elástico vuelva a su estado original y además es cuasiestática, de modo que el sistema está en equilibrio termodinámico en cada punto del proceso. Tomando U como la energía interna por unidad de volumen y S la entropía por unidad de volumen, la primera ley de la termodinámica establece:

$$dU = TdS + \bar{d}W$$

de la ecuación (100) se tiene que $\bar{d}W = \sigma_{ik} \delta u_{ik}$ y sustituyendo en la primera ley de la termodinámica

$$(101) \quad dU = dU(S, u_{ik}) = TdS + \sigma_{ik} \delta u_{ik}$$

Tomando como variables termodinámicas a la temperatura T y el tensor de elongación u_{ik} , entonces el potencial termodinámico adecuado para describir el sistema es la energía libre de Helmholtz F

$$F = F(T, u_{ij}) = U - TS$$

diferenciando la ecuación anterior y sustituyendo en (101) se obtiene

$$(102) \quad dF = \sigma_{ik} \delta u_{ik} - SdT$$

Así mismo diferenciando la ecuación (101) se llega a

$$(103) \quad dU(S, u_{ik}) = S\delta u_{ik} + u_{ik}dS$$

Como F es una función de u_{ik} y T entonces a partir de la ecuación (102) se debe cumplir

$$(104) \quad \sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T, \quad S = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{u_{ik}}$$

Análogamente, U es función de S y u_{ik} por lo que los coeficientes de las diferenciales deben cumplir

$$(105) \quad \sigma_{ik} = \left(\frac{\partial U}{\partial u_{ik}} \right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{u_{ik}}$$

De la ecuación (87) es claro ver que en el caso de un proceso isotérmico se tiene que

$$dF = \sigma_{ik} \delta u_{ik}$$

que coincide con el trabajo, además, por otro lado

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T du_{ik}$$

De modo que si σ_{ik} es una función lineal de u_{ik} , entonces

$$(106) \quad dF = \sigma_{ik}(u_{ik}) du_{ik}$$

Integrando respecto a u_{ik}

$$F = \frac{1}{2} \sigma_{ik} u_{ik}$$

es decir

$$(107) \quad F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right) u_{ik}$$

Para un medio elástico general la ecuación constitutiva que relaciona los tensores de esfuerzos y elongación es la siguiente

$$(108) \quad \sigma_{ik} = \lambda_{ikmn} u_{mn}$$

donde λ_{ikmn} es el tensor de rigidez, un tensor de orden 4. Entonces, de las ecuaciones (107) y (108) se tiene que

$$(109) \quad F = \frac{1}{2} \lambda_{ikmn} u_{mn} u_{ik}$$

La expresión anterior garantiza la existencia de una energía libre de Helmholtz que únicamente depende de los elementos del tensor de deformaciones. Debido a que F sólo depende de las componentes del tensor de elongación y es una función continua y diferenciable, al menos hasta segundo orden, entonces sus segundas derivadas cruzadas deben ser iguales, es decir

$$(110) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_{ik} \partial u_{mn}} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_{mn} \partial u_{ik}}$$

Por otro lado, debido a que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir $\sigma_{mk} = \sigma_{km}$, se tiene que en coordenadas cartesianas hay en general seis componentes independientes, las cuales son

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$$

Es conveniente construir un vector con las seis correspondientes componentes independientes de σ_{ik} de la forma

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Cuyas componentes se denotarán en adelante como $\bar{\sigma}_i$. De lo anterior y de la ecuación (108) se tiene que

$$(111) \quad \bar{\sigma}_i = C_{ik} \bar{u}_k$$

Donde el tensor de elongaciones también lo hemos escrito como un vector de seis componentes \bar{u}_k de la forma

$$\bar{u}_k = \begin{pmatrix} u_{xx} \\ 2u_{xy} \\ u_{yy} \\ 2u_{xz} \\ 2u_{yz} \\ u_{zz} \end{pmatrix}$$

El factor de 2 en los términos correspondientes a los elementos fuera de la diagonal del tensor de elongación aparecen en el vector \bar{u}_k ya que en la ecuación (108) dichos términos aparecen repetidos [34]. Debido a que $\bar{\sigma}_i$ y \bar{u}_i son vectores de 6 entradas, entonces C_{ik} es una matriz de 6×6 . Además, sabemos que el tensor de esfuerzos se puede calcular de la ecuación (106). Reescribiendo en esta representación la ecuación (110) se tiene

$$(112) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_i \partial \bar{u}_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_k \partial \bar{u}_i}$$

Luego si sustituimos σ_{ik} en la ecuación (111) en la ecuación (106) se encuentra que

$$(113) \quad F = \frac{1}{2} \bar{C}_{ik} \bar{u}_i \bar{u}_k$$

Al insertar esta función en la condición (112) se tiene que la matriz C_{ik} es simétrica con $6 \times 6 = 36$ componentes de las cuales únicamente 21 son independientes, 6 en la diagonal mas $\frac{36-6}{2} = 15$ fuera de ella.

Reescribiendo la ecuación (111) dadas las simetrías, se tiene

$$(114) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ 2u_{xy} \\ u_{yy} \\ 2u_{xz} \\ 2u_{yz} \\ u_{zz} \end{pmatrix}$$

A continuación se considerarán algunas simetrías bajo las cuales la matriz C_{ik} tiene una forma específica.[34]

Un medio que es simétrico bajo una reflexión por el plano xy , es decir, a lo largo del eje z , se conoce como Monoclínico. La matriz de módulos elásticos para un medio con simetría monoclínica es de la siguiente forma

$$C_{monoclínico} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

Un medio que posee tres planos de simetría ortogonales es llamado ortotrópico, para el caso en que esos planos son los que forman los ejes coordenados, la matriz de módulos elásticos para un medio con simetría ortotrópica es:

$$C_{ortotrópico} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & 0 & C_{14} \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ C_{14} & 0 & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

Un medio cuyo grupo de simetrías contiene rotaciones a lo largo de un eje por ángulos $\theta = \frac{2\pi}{3}$ y $\theta = \frac{4\pi}{3}$ se llama medio trigonal, la matriz de módulos en este caso es:

$$C_{trigonal} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ 0 & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} & 0 & C_{15} & -C_{14} & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{11} & -C_{14} & -C_{15} & C_{16} \\ C_{14} & C_{15} & -C_{14} & C_{44} & 0 & 0 \\ C_{15} & -C_{14} & -C_{15} & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{16} & 0 & C_{16} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

Un medio cuyo grupo de simetrías contiene cuatro rotaciones y reflexiones a lo largo del plano que contiene el eje de rotación se conoce como sistema tetragonal. La matriz de módulos elásticos en este caso de simetría tetragonal es:

$$C_{tetragonal} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{11} & 0 & 0 & C_{16} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{16} & 0 & C_{16} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

Un medio con simetría cúbica, tiene simetrías bajo rotaciones de un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ a lo largo de dos ejes que son ortogonales entre sí. Considerando a los ejes x y z dichos ejes, la matriz de módulos elásticos está dada por:

$$C_{cúbico} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{11} & 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{13} & 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix}$$

Por último, un medio que contiene todas las simetrías posibles es un medio isotrópico, en este tipo de medios todos los sistemas de coordenadas son equivalentes para describir al medio, es decir, no hay orientación particular requerida. La matriz que contiene los módulos elásticos para un medio isotrópico es :

$$C_{isotr\acute{o}pico} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{11} - 2C_{44} & 0 & 0 & C_{11} - 2C_{44} \\ 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} - 2C_{44} & 0 & C_{11} & 0 & 0 & C_{11} - 2C_{44} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{11} - 2C_{44} & 0 & C_{11} - 2C_{44} & 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix}$$

Entonces, un medio isotrópico contiene únicamente dos módulos elásticos independientes que comúnmente son descritos en términos de los coeficientes de Lamé

$$\begin{cases} \lambda := C_{11} - 2C_{44} \\ \mu := C_{44} \end{cases}$$

Así, la matriz de módulos elásticos en términos de los coeficientes de Lamé es:

$$C_{isotr\acute{o}pico} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

A pesar de los casos anteriores mencionados en los que de acuerdo a las simetrías en número de módulos elásticos se reduce, en este trabajo se considerará un medio muy general de tal forma que los 21 coeficientes elásticos sean distintos.

3.4. Representación matemática de un medio helicoidal

Considérese un sólido helicoidal construido, por ejemplo, mediante el proceso de deposición física de vapor. El sólido helicoidal tiene una estructura similar a la del cristal líquido colestérico en el que las moléculas están ordenadas de forma que los vectores directores son en promedio paralelos sobre cada plano, pero en la dirección perpendicular a dichos planos el vector director gira formando una hélice. En el caso del sólido a considerar, se tienen estratos de espesor pequeño cuyos vectores que caracterizan a la red cristalina giran en torno a un eje formando una hélice. Tómese el caso en el que los vectores principales de la estructura cristalina giran en torno al eje \hat{z} como se muestra en la Figura 21.

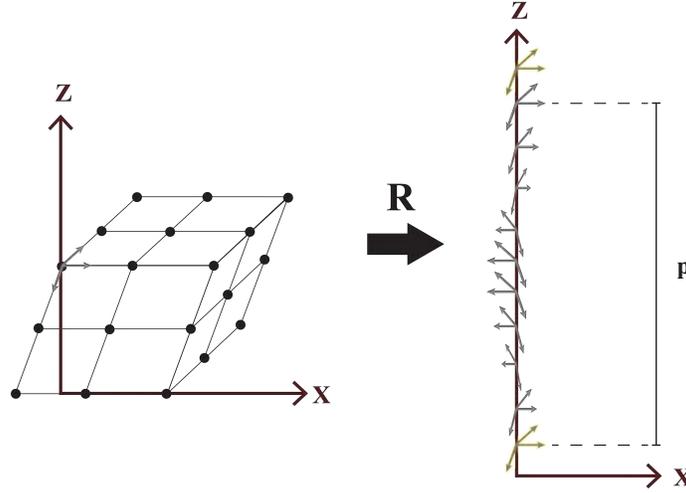


Figura 21. Estructura helicoidal del sólido cristalino. La rotación R induce la hélice que forman los vectores de la red cristalina a lo largo del eje z .

Las ecuaciones que describen las propiedades elástica en el sólido helicoidal en ausencia de fuerzas volumétricas son: la segunda ley de Newton del medio continuo (87) y ecuación constitutiva general para un medio elástico (108):

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\sigma_{ik} = \lambda_{ikmn}(z) u_{mn}$$

donde las componentes del tensor de elongación u_{ik} pueden expresarse en términos de las componentes del vector de desplazamientos u_i mediante la ecuación (96). Además, en la representación de componentes independientes, la ecuación constitutiva elástica se expresa como

$$(115) \quad \bar{\sigma}_i = S_{ik}(z) \bar{u}_k$$

La matriz $S_{ik}(z)$ es equivalente a la matriz C_{ik} de la ecuación (111) pero en el medio helicoidal, en este caso, cada una de las componentes de $S_{ik}(z)$ son funciones de z y de las componentes de la matriz C_{ik} que contiene a los módulos elásticos del material. Para conocer la forma explícita de la matriz S_{ik} hace falta saber cómo se transforman el tensor de esfuerzos σ_{ik} y el vector de desplazamientos u_i .

El tensor de esfuerzos se transforma de la siguiente manera:

$$\sigma'_{ik} = R_{ik} \sigma_{km} R_{mj}$$

donde R es la matriz de rotación por el ángulo qz que describe el giro del vector director a lo largo del eje z del material helicoidal, explícitamente:

$$(116) \quad R = \begin{pmatrix} \cos(qz) & -\sin(qz) & 0 \\ \sin(qz) & \cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que la matriz de rotación R corresponde a una transformación ortogonal, de tal forma que $R^{-1} = R^T$. Así, en la representación de vectores de 6 dimensiones con las componentes independientes del tensor de esfuerzos, se tiene que dicha transformación se reescribe como

$$(117) \quad \bar{\sigma}'_i = R_r \bar{\sigma}_i$$

en donde la matriz R_r es ahora como sigue:

$$(118) \quad R_r = \begin{pmatrix} -\cos^2(qz) & \sin(2qz) & -\sin^2(qz) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin(2qz) & -\cos(2qz) & \frac{1}{2}\sin(2qz) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin^2(qz) & -\sin(2qz) & -\cos^2(qz) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(qz) & \sin(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(qz) & -\cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, para el vector que contiene las componentes independientes del tensor de elongación:

$$(119) \quad \bar{u}'_k = M_R \bar{u}_k$$

Con

$$M_R = F R_r F^{-1}$$

donde F es la matriz diagonal que resulta de la forma en que se construyó el vector \bar{u}_k . [34]

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices R_r y R_u resultan de acomodar las ecuaciones tensoriales en sistemas de ecuaciones y posteriormente, volver a la notación de vectores de 6 dimensiones

Además, se tiene que en el medio homogéneo y en el medio helicoidal se cumplen las siguientes relaciones constitutivas

$$(120) \quad \bar{\sigma}_i = C_{ik}\bar{u}_k \quad , \quad \bar{\sigma}'_i = S_{ik}\bar{u}'_k$$

Entonces

$$\bar{\sigma}'_i = R_r\bar{\sigma}_i = S_{ik}M_R\bar{u}_k$$

Multiplicando ambos lados por R_r^{-1} para despejar z se tiene

$$(121) \quad \bar{\sigma}_i = R_r^{-1}S_{ik}M_R\bar{u}_k$$

Pero se puede demostrar del álgebra lineal que $R_r^{-1} = M_R^T$ [35]. Entonces, utilizando la ecuación (120),

$$(122) \quad \bar{\sigma}_i = M_R^T S_{ik} M_R \bar{u}_k.$$

Por lo tanto

$$(123) \quad C_{ik} = M_R^T S_{ik} M_R$$

Despejando S_{ik} , considerando que $M_R^{-1} = M_R^T$,

$$(124) \quad S_{ik} = M_R C_{ik} M_R^T$$

De lo anterior se tiene que la matriz S_{ik} también es simétrica con 21 módulos independientes para cada ángulo de giro. Lo cual es congruente con la formulación que se hizo partiendo de las variables termodinámicas. La forma explícita de las componentes de la matriz S_{ik} para el medio helicoidal como función de z y en términos de los módulos elásticos del material en la matriz C_{ik} se presentan en el Apéndice A.

Ondas elásticas en un medio helicoidal

De manera similar a lo expuesto en el Capítulo 2 sobre propagación de ondas electromagnéticas en un cristal líquido colestérico, en este capítulo se revisa la propagación de ondas elásticas en un sólido helicoidal elástico cuyas características se describieron en la última sección del capítulo anterior. (Véase Figura 21).

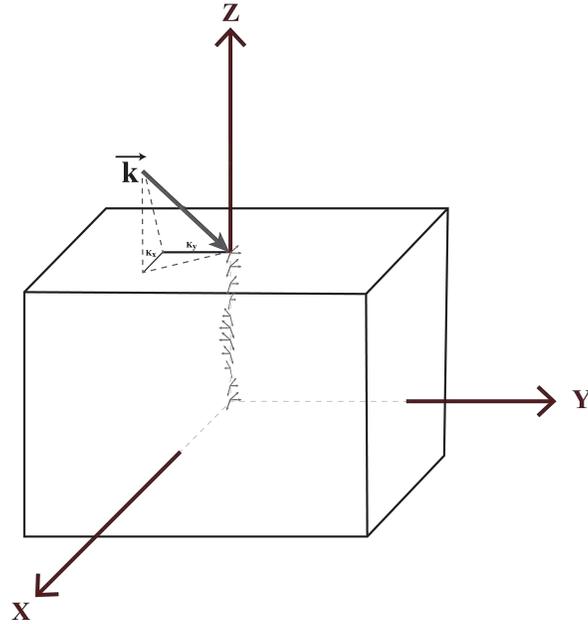


Figura 22. Onda elástica en incidencia oblicua sobre un sólido helicoidal.

Siguiendo el mismo razonamiento utilizado para la propagación de ondas electromagnéticas en el cristal líquido colestérico, en este caso se proponen soluciones de ondas cuasiplanas para las componentes del tensor de esfuerzos y del vector de desplazamientos de la siguiente forma

$$(125) \quad \begin{aligned} \sigma_{ik}(x, y, z) &= \sigma_{ik}(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ u_i(x, y, z) &= u_i(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \end{aligned}$$

En este caso, $\sigma_{ik}(z)$ y $u_i(z)$ son amplitudes con dependencia únicamente en z , pues hemos supuesto que el eje de la hélice del sólido helicoidal va en esta dirección. La ecuación constitutiva para medios elásticos en la representación de componentes independientes $\bar{\sigma}_i = S_{ik}\bar{u}_k$ en términos del vector de desplazamientos es

$$(126) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En este punto es importante reiterar la argumentación empleada en el capítulo anterior para justificar la propuesta de soluciones dada por la ecuación (125). En efecto dado que los elementos de la matriz S_{ik} en la ecuación (126) son funciones de z (ver Apéndice A), no es posible esperar que las soluciones de las ecuaciones para las ondas elásticas resultantes sean ondas planas como ocurre para medios homogéneos en los cuales los elementos C_{ik} son constantes. Sin embargo el hecho de que los elementos de S_{ik} no dependan de x , y y t permite conservar la misma dependencia en dichas variables que se tendría en una onda plana como lo muestra la solución de prueba (125).

Continuando con el desarrollo, al hacer el producto en la ecuación (126) se tienen 6 ecuaciones

$$(127) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} = & S_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + S_{12} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + S_{13} \frac{\partial u_y}{\partial y} + S_{14} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\ & S_{15} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + S_{16} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$(128) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy} = & S_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + S_{22} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + S_{23} \frac{\partial u_y}{\partial y} + S_{24} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\ & S_{25} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + S_{26} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$(129) \quad \begin{aligned} \sigma_{yy} = & S_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + S_{23} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + S_{33} \frac{\partial u_y}{\partial y} + S_{34} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\ & S_{35} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + S_{36} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$(130) \quad \sigma_{xz} = S_{14} \frac{\partial u_x}{\partial x} + S_{24} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + S_{34} \frac{\partial u_y}{\partial y} + S_{44} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + S_{45} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + S_{46} \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$(131) \quad \sigma_{yz} = S_{15} \frac{\partial u_x}{\partial x} + S_{25} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + S_{35} \frac{\partial u_y}{\partial y} + S_{45} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + S_{55} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + S_{56} \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$(132) \quad \sigma_{zz} = S_{16} \frac{\partial u_x}{\partial x} + S_{26} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + S_{36} \frac{\partial u_y}{\partial y} + S_{46} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + S_{56} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + S_{66} \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Para posteriormente sustituir las expresiones para el tensor de esfuerzos y el vector de desplazamientos de (125) en las seis ecuaciones anteriores y efectuando las derivadas indicadas, se tiene:

$$(133) \quad \sigma_{xx}(z) = ik_x S_{11} u_x(z) + S_{12} i (k_y u_x(z) + k_x u_y(z)) + ik_y S_{13} u_y(z) + S_{14} \left(\frac{du_x(z)}{dz} + ik_x u_z(z) \right) + S_{15} \left(\frac{du_y(z)}{dz} + ik_y u_z(z) \right) + S_{16} \frac{du_z(z)}{dz}$$

$$(134) \quad \sigma_{xy}(z) = ik_x S_{12} u_x(z) + S_{22} i (k_y u_x(z) + k_x u_y(z)) + ik_y S_{23} u_y(z) + S_{24} \left(\frac{du_x(z)}{dz} + ik_x u_z(z) \right) + S_{25} \left(\frac{du_y(z)}{dz} + ik_y u_z(z) \right) + S_{26} \frac{du_z(z)}{dz}$$

$$(135) \quad \sigma_{yy}(z) = ik_x S_{13} u_x(z) + S_{23} i (k_y u_x(z) + k_x u_y(z)) + ik_y S_{33} u_y(z) + S_{34} \left(\frac{du_x(z)}{dz} + ik_x u_z(z) \right) + S_{35} \left(\frac{du_y(z)}{dz} + ik_y u_z(z) \right) + S_{36} \frac{du_z(z)}{dz}$$

$$(136) \quad \sigma_{xz}(z) = ik_x S_{14} u_x(z) + S_{24} i (k_y u_x(z) + k_x u_y(z)) + ik_y S_{34} u_y(z) + S_{44} \left(\frac{du_x(z)}{dz} + ik_x u_z(z) \right) + S_{45} \left(\frac{du_y(z)}{dz} + ik_y u_z(z) \right) + S_{46} \frac{du_z(z)}{dz}$$

$$(137) \quad \sigma_{yz}(z) = ik_x S_{15} u_x(z) + S_{25} i (k_y u_x(z) + k_x u_y(z)) + ik_y S_{35} u_y(z) + S_{45} \left(\frac{du_x(z)}{dz} + ik_x u_z(z) \right) + S_{55} \left(\frac{du_y(z)}{dz} + ik_y u_z(z) \right) + S_{56} \frac{du_z(z)}{dz}$$

$$(138) \quad \sigma_{zz}(z) = ik_x S_{16} u_x(z) + S_{26} i (k_y u_x(z) + k_x u_y(z)) + ik_y S_{36} u_y(z) + S_{46} \left(\frac{du_x(z)}{dz} + ik_x u_z(z) \right) + S_{56} \left(\frac{du_y(z)}{dz} + ik_y u_z(z) \right) + S_{66} \frac{du_z(z)}{dz}$$

Sustituyendo también en la segunda ley de Newton en equilibrio dada por la ecuación (87) se tienen tres ecuaciones

$$(139) \quad ik_x \sigma_{xx}(z) + ik_y \sigma_{xy}(z) + \frac{d\sigma_{xz}(z)}{dz} + i\omega^2 \rho u_x(z) = 0,$$

$$(140) \quad ik_x \sigma_{yx}(z) + ik_y \sigma_{yy}(z) + \frac{d\sigma_{yz}(z)}{dz} + i\omega^2 \rho u_y(z) = 0,$$

$$(141) \quad ik_x \sigma_{zx}(z) + ik_y \sigma_{zy}(z) + \frac{d\sigma_{zz}(z)}{dz} + i\omega^2 \rho u_z(z) = 0.$$

Las ecuaciones anteriores involucran derivadas únicamente en los elementos σ_{xz} , σ_{yz} y σ_{zz} , por esta razón se sustituyen los elementos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} a partir de las ecuaciones (133), (134) y (135) respectivamente, en las seis ecuaciones restantes, que son tres componentes de la ecuación constitutiva (136), (137) y (138); y tres de la segunda ley de Newton (139), (140) y (141). Con lo anterior se tienen seis ecuaciones para las derivadas respecto a z de $u_x(z)$, $u_y(z)$, $u_z(z)$, $\sigma_{xz}(z)$, $\sigma_{yz}(z)$ y $\sigma_{zz}(z)$ expresadas como combinaciones lineales de esos mismos elementos. Las ecuaciones resultantes se muestran en el Apéndice B.

Agrupando las variables independientes en las ecuaciones mencionadas del Apéndice B es posible definir el vector de seis componentes en analogía a la expresión (68)

$$(142) \quad \Psi = \begin{pmatrix} u_x(z) \\ u_y(z) \\ u_z(z) \\ \sigma_{xz}(z) \\ \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{zz}(z) \end{pmatrix}$$

con lo cual, el sistema de 6 ecuaciones para las componentes del vector Ψ , mostradas en el apéndice B, se puede llevar a una expresión matricial análoga a la ecuación (67) del caso electromagnético, en este caso

$$(143) \quad \frac{d}{dz}\Psi = M\Psi.$$

Con M una matriz de 6×6 cuyos elementos se muestran en el Apéndice C.

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{pmatrix}$$

Si la onda elástica incide de manera normal, como se muestra en la Figura 23, se tiene que $k_x = k_y = 0$. Por lo anterior, en la ecuación (143) la matriz M se reduce a:

$$(144) \quad M_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_5 & a_6 \\ \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

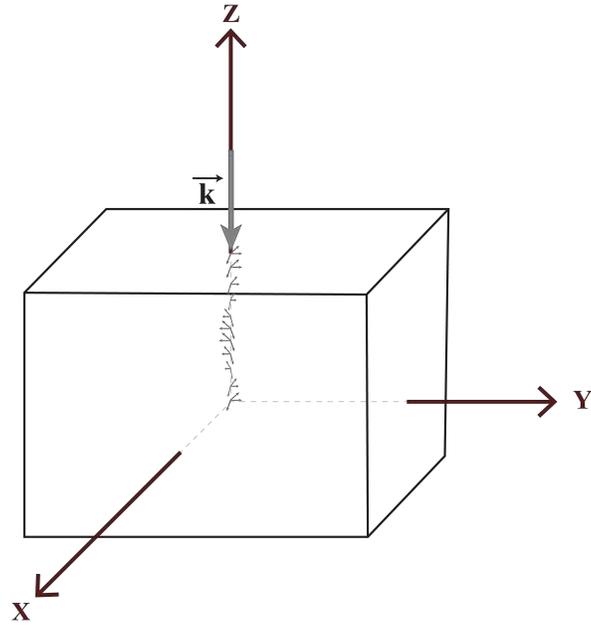


Figura 23. Onda elástica en incidencia normal sobre un sólido helicoidal.

En este caso, la ecuación (143) se expresa de la siguiente manera

$$(145) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_x(z) \\ u_y(z) \\ u_z(z) \\ \sigma_{xz}(z) \\ \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{zz}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_5 & a_6 \\ \omega^2 \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x(z) \\ u_y(z) \\ u_z(z) \\ \sigma_{xz}(z) \\ \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{zz}(z) \end{pmatrix}$$

Donde las constantes a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 y a_6 son:

$$a_1 = \frac{S_{55}S_{66} - S_{56}^2}{A_1}$$

$$a_2 = \frac{S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66}}{A_1}$$

$$a_3 = \frac{S_{45}S_{56} - S_{46}S_{55}}{A_1}$$

$$a_4 = \frac{S_{44}S_{66} - S_{46}^2}{A_1}$$

$$a_5 = \frac{S_{45}S_{46} - S_{44}S_{56}}{A_1}$$

$$a_6 = \frac{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}{A_1}$$

Nuevamente, el medio elástico sobre el que incide la onda es un medio estratificado helicoidal que está rotado un ángulo $\theta = qz$ respecto al medio anisotrópico natural. Véase Figura 21. Las componentes de la matriz S_{ik} del apéndice A que están presentes en las constantes a_i con $i = 1, 2, \dots, 6$ están expresadas en términos de los elementos de la matriz C_{ik} que contiene los módulos elásticos del material, bajo una rotación.

4.1. Solución de las ecuaciones gobernantes

Para resolver analíticamente la Ecuación (145) se procede de manera similar a lo elaborado en el Capítulo 2. Es decir, se aplica al sistema la rotación inversa a la asociada a la geometría helicoidal. Siguiendo este razonamiento, haciendo el cambio de variable $\Phi = R\Psi$ en la ecuación (143), al multiplicar por la izquierda la inversa de R en ambos lados de la igualdad, $\Psi = R^{-1}\Phi$, entonces

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (R^{-1}\Phi) = \frac{\partial R^{-1}}{\partial z}\Phi + R^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = M\Psi = MR^{-1}\Phi$$

es decir

$$\frac{\partial R^{-1}}{\partial z}\Phi + R^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = MR^{-1}\Phi$$

Multiplicando por R del lado izquierdo

$$R\frac{\partial\Psi}{\partial z} = RM\Psi$$

lo cual es

$$R\frac{\partial R^{-1}}{\partial z}\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z} = RMR^{-1}\Phi$$

despejando el término que contiene la derivada respecto a z , se tiene:

$$(146) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = T\Phi$$

en donde

$$(147) \quad T = \left(RMR^{-1} - R\frac{\partial R^{-1}}{\partial z} \right)$$

La ecuación (146) es de la misma forma que la ecuación (143) pero para el sistema transformado por la rotación R . En este caso, debido a que el sistema se ha creado mediante la rotación de un sistema anisotrópico, la matriz de rotación R necesaria para anular el giro original no es la rotación inversa convencional, sin embargo, es resultado de rotar el tensor de esfuerzos σ_{ik} y el vector de desplazamientos u_i siguiendo un razonamiento análogo al que se usó para transformar la matriz C_{ik} pero con la rotación opuesta. Para conocer la forma explícita de la matriz de rotación R , es necesario aplicar las rotaciones correspondientes a σ_{ik} y u_i por separado, y posteriormente reacomodar los elementos transformados (rotados) de las ecuaciones resultantes de acuerdo a la notación utilizada en el vector Ψ de seis componentes.

El vector de desplazamientos por su naturaleza vectorial se transforma de la siguiente manera:

$$(148) \quad u'_i(z) = Q_{ik}u_k(z)$$

donde Q_{ik} es la matriz inversa de rotación por el ángulo $\theta = qz$

$$(149) \quad Q_{ik} = \begin{pmatrix} \cos q(qz) & \operatorname{sen}(qz) & 0 \\ -\operatorname{sen}(qz) & \cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Explícitamente la transformación del vector de desplazamientos es:

$$(150) \quad \begin{pmatrix} u'_x(z) \\ u'_y(z) \\ u'_z(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q(qz) & \operatorname{sen}(qz) & 0 \\ -\operatorname{sen}(qz) & \cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x(z) \\ u_y(z) \\ u_z(z) \end{pmatrix}$$

El tensor de esfuerzos por su naturaleza de tensor de segundo rango se transforma de la siguiente manera:

$$(151) \quad \sigma'_{ij}(z) = Q_{ik}\sigma_{kl}(z)Q_{lj}^{-1}$$

donde

$$\sigma_{kl}(z) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(z) & \sigma_{xy}(z) & \sigma_{xz}(z) \\ \sigma_{xy}(z) & \sigma_{yy}(z) & \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{xz}(z) & \sigma_{yz}(z) & \sigma_{zz}(z) \end{pmatrix}$$

es decir

$$\sigma'_{ij}(z) = \begin{pmatrix} \cos q(qz) & \text{sen}(qz) & 0 \\ -\text{sen}(qz) & \cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_{ik}(z) \begin{pmatrix} \cos q(qz) & -\text{sen}(qz) & 0 \\ \text{sen}(qz) & \cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto de estas tres matrices y reordenando en términos de las componentes independientes en forma de vector de seis elementos,

$$(152) \quad \bar{\sigma}'_k(z) = P_{ik}(z) \bar{\sigma}_i(z)$$

donde

$$(153) \quad P_{ik}(z) = \begin{pmatrix} -\cos^2(qz) & -\sin(2qz) & -\sin^2(qz) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin(2qz) & -\cos(2qz) & -\frac{1}{2}\sin(2qz) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin^2(qz) & \sin(2qz) & -\cos^2(qz) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(qz) & -\sin(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(qz) & -\cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz $P_{ik}(z)$ se puede separar por bloques por lo cual es posible dividir el sistema de ecuaciones anterior en dos subsistemas independientes, es decir

$$(154) \quad \begin{pmatrix} \sigma'_{xx}(z) \\ \sigma'_{xy}(z) \\ \sigma'_{yy}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^2(qz) & -\sin(2qz) & -\sin^2(qz) \\ \frac{1}{2}\sin(2qz) & -\cos(2qz) & -\frac{1}{2}\sin(2qz) \\ -\sin^2(qz) & \sin(2qz) & -\cos^2(qz) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(z) \\ \sigma_{xy}(z) \\ \sigma_{yy}(z) \end{pmatrix}$$

y

$$(155) \quad \begin{pmatrix} \sigma'_{xz}(z) \\ \sigma'_{yz}(z) \\ \sigma'_{zz}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(qz) & -\sin(qz) & 0 \\ \sin(qz) & -\cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xz}(z) \\ \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{zz}(z) \end{pmatrix}$$

Nuevamente, como se mostró arriba solo los elementos de σ_{ik} que tienen al menos uno de sus índices en la dirección z están involucrados en la ecuación matricial (146). Además, por construcción del vector Ψ de la expresión (142), la matriz de rotación necesaria para rotarlo contiene un bloque de rotación para las componentes del vector de desplazamientos de (150) y otro bloque para las componentes en dirección z del tensor de esfuerzos (155).

Por lo anterior, la matriz de Rotación R que permite regresar al sistema que gira localmente plano por plano con la hélice y que satisface el cambio de variable $\Phi = R\Psi$, es:

$$(156) \quad R = \begin{pmatrix} \cos q(qz) & \operatorname{sen}(qz) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}(qz) & \cos(qz) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(qz) & -\operatorname{sen}(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen}(qz) & -\cos(qz) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo la matriz de rotación resultante en la ecuación (146), la matriz T es de la forma

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{pmatrix}$$

cuyas componentes se muestran en el Apéndice D. En el caso de incidencia normal ($k_x = 0$, $k_y = 0$) la matriz T de la ecuación (147) se reduce a lo siguiente:

$$(157) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = T_{\perp} \Phi$$

La matriz T se reduce a T_{\perp} de la siguiente forma:

$$T_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & -q & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ q & 0 & 0 & b_2 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & b_5 & b_6 \\ -\omega^2 \rho & 0 & 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & -\omega^2 \rho & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$b_1 = \frac{1}{A_1} \{ (S_{56}^2 - S_{55}S_{66}) \cos^2(qz) + (S_{46}^2 - S_{44}S_{66}) \sin^2(qz) - (S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66}) \sin(2qz) \}$$

$$b_2 = \frac{1}{2A_1} \{(-2S_{46}S_{56} + 2S_{45}S_{66}) \cos(2qz) + (S_{46}^2 - S_{56}^2 - S_{44}S_{66} + S_{55}S_{66}) \sin(2qz)\}$$

$$b_3 = \frac{1}{A_1} \{(S_{46}S_{55} - S_{45}S_{56}) \cos(qz) + (S_{44}S_{56} - S_{45}S_{46}) \sin(qz)\}$$

$$b_4 = \frac{1}{A_1} \{(S_{46}^2 - S_{44}S_{66}) \cos^2(qz) + (S_{56}^2 - S_{55}S_{66}) \sin^2(qz) + (S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66}) \sin(2qz)\}$$

$$b_5 = \frac{(S_{44}S_{56} - S_{45}S_{46}) \cos(qz) + (S_{45}S_{56} - S_{46}S_{55}) \sin(qz)}{A_1}$$

$$b_6 = \frac{S_{45}^2 - S_{44}S_{55}}{A_1}$$

Como se ha mencionado antes, las componentes de la matriz que contiene a los módulos elásticos del medio helicoidal S_{ik} son funciones de z , su forma explícita se muestra en el Apéndice C. Sustituyendo cada una de las componentes S_{ik} , la matriz T_{\perp} se reduce a lo siguiente:

$$b_1 = \frac{C_{56}^2 - C_{55}C_{66}}{G}$$

$$b_2 = \frac{C_{45}C_{66} - C_{46}C_{56}}{G}$$

$$b_3 = \frac{C_{46}C_{55} - C_{45}C_{56}}{G}$$

$$b_4 = \frac{C_{46}^2 - C_{44}C_{66}}{G}$$

$$b_5 = \frac{C_{44}C_{56} - C_{45}C_{46}}{G}$$

$$b_6 = \frac{C_{45}^2 - C_{44}C_{55}}{G}$$

donde

$$G = C_{46}^2 C_{55} - 2C_{45} C_{46} C_{56} + C_{44} C_{56}^2 + C_{45}^2 C_{66} - C_{44} C_{55} C_{66}$$

Nótese que análogamente al caso de la onda electromagnética incidiendo normalmente en una celda de cristal líquido colestérico, para una onda elástica con una frecuencia dada, que incide sobre el medio elástico estratificado helicoidal, los elementos de la matriz T_{\perp} son constantes; por lo cual la ecuación (146) es equivalente a un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con coeficientes constantes, que a su vez se pueden desacoplar para dar lugar a una sola ecuación diferencial de sexto orden con coeficientes constantes y cuya solución es de la forma:

$$(158) \quad \Phi(z) = \Phi_0 e^{ilz}$$

Donde Φ_0 es un vector constante no nulo. Sustituyendo la solución propuesta en la ecuación (146) y cancelando el término exponencial presente en ambos lados, se tiene

$$il\Phi_0 = T_{\perp}\Phi_0$$

es decir

$$(159) \quad (T_{\perp} - il\mathbb{I})\Phi_0 = 0$$

Así, el sistema tiene solución no trivial cuando $\det(T_{\perp} - l\mathbb{I}) = 0$, es decir

$$\begin{vmatrix} -il & q & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -q & -il & 0 & b_2 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & -il & b_3 & b_5 & b_6 \\ -\omega^2\rho & 0 & 0 & -il & q & 0 \\ 0 & -\omega^2\rho & 0 & -q & -il & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2\rho & 0 & 0 & -il \end{vmatrix} = 0$$

Que al resolver el determinante da lugar a la ecuación siguiente

$$(160) \quad \Gamma_1\omega^6 + \Gamma_2\omega^4 + \Gamma_3\omega^2 + \Gamma_4 = 0$$

donde los coeficientes Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 y Γ_4 son funciones de l , cuyas expresiones explícitas son:

$$\Gamma_1 = -\rho^3 (b_3^2 b_4 - 2b_2 b_3 b_5 + b_2^2 b_6 + b_1 (b_5^2 - b_4 b_6))$$

$$\Gamma_2 = \rho^2 \left((b_3^2 + b_5 - (b_1 + b_4) b_6) q^2 + (b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_4 + b_5^2 - b_1 b_6 - b_4 b_6) l^2 \right)$$

$$\Gamma_3 = \rho \left(b_6 q^4 + (b_1 + b_4 - 2b_6) q^2 l^2 + (b_1 + b_4 + b_6) l^4 \right)$$

$$\Gamma_4 = -l^6 + 2q^2 l^4 - q^4 l^2$$

Con la finalidad de definir variables adimensionales, se utilizan los cambios de variable $l^2 = q^2 \tilde{l}$ y $\rho \omega^2 = \tilde{\omega} q^2$, que nuevamente escalan el vector de onda y la frecuencia de la señal elástica en unidades del número de onda q del sólido helicoidal. Así, la ecuación (160) tiene la forma:

$$(161) \quad \tilde{\omega}^3 + \Lambda_1 \tilde{\omega}^2 + \Lambda_2 \tilde{\omega} + \Lambda_3 = 0.$$

En la ecuación anterior se han sustituido las constantes b_i , con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; que son los elementos del bloque superior derecho de la matriz T_{\perp} de la ecuación (157); además, se dividió entre el coeficiente de la máxima potencia de $\tilde{\omega}$. Los coeficientes Λ_1 , Λ_2 y Λ_3 son funciones de \tilde{l} de la forma:

$$\Lambda_1 = -C_{66} \tilde{l} - (C_{44} + C_{55}) (1 + \tilde{l})$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = & -C_{45}^2 (\tilde{l} - 1)^2 - (C_{46}^2 + C_{56}^2 - C_{55} C_{66}) \tilde{l} (1 + \tilde{l}) + \\ & C_{44} \left(C_{55} (\tilde{l} - 1)^2 + C_{66} \tilde{l} (1 + \tilde{l}) \right) \end{aligned}$$

$$\Lambda_3 = (C_{46}^2 C_{55} - 2C_{45} C_{46} C_{56} + C_{45}^2 C_{66} + C_{44} (C_{56} - C_{55} C_{66})) (\tilde{l} - 1)^2 \tilde{l}.$$

Es posible dar solución a la ecuación (161) mediante el método de Cardano para resolver ecuaciones algebraicas de tercer grado con coeficientes reales [36]. De tal forma que las soluciones son:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 = & -\frac{\Lambda_1}{3} - \left(\sqrt[3]{2} (3\Lambda_2 - \Lambda_1) \right) / \left(3(-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3 + \right. \\ & \left. \left[4(3\Lambda_2 - \Lambda_1^2)^3 + (-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + \\ & \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \left(-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3 + \right. \\ & \left. \sqrt{4(3\Lambda_2 - \Lambda_1^2)^3 + (-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3)^2} \right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_2 = & -\frac{\Lambda_1}{3} + \left((1 + i\sqrt{3}) (3\Lambda_2 - \Lambda_1^2) \right) / \left(3\sqrt[3]{4}(-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - \right. \\ & \left. 2\Lambda_1^3 + \sqrt{4(3\Lambda_2 - \Lambda_1^2)^3 + (-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg) - \\ & \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} \left(1 - i\sqrt{3} \right) \left(-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3 + \right. \\ & \left. \sqrt{4(3\Lambda_2 - \Lambda_1^2)^3 + (-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3)^2} \right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_3 = & -\frac{\Lambda_1}{3} + \left((1 - i\sqrt{3}) (3\Lambda_2 - \Lambda_1^2) \right) / \left(3\sqrt[3]{4}(-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - \right. \\ & \left. 2\Lambda_1^3 + \sqrt{4(3\Lambda_2 - \Lambda_1^2)^3 + (-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg) - \\ & \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} \left(1 + i\sqrt{3} \right) \left(-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3 + \right. \\ & \left. \sqrt{4(3\Lambda_2 - \Lambda_1^2)^3 + (-27\Lambda_3 + 9\Lambda_2\Lambda_1 - 2\Lambda_1^3)^2} \right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

donde las constantes Λ_1 , Λ_2 y Λ_3 están únicamente en términos de los módulos elásticos del material del cual está compuesto el sólido helicoidal.

Graficando las tres soluciones anteriores para l como función de ω en términos de variables adimensionales, se da lugar a la estructura de bandas parciales como se muestra en el gráfico siguiente.

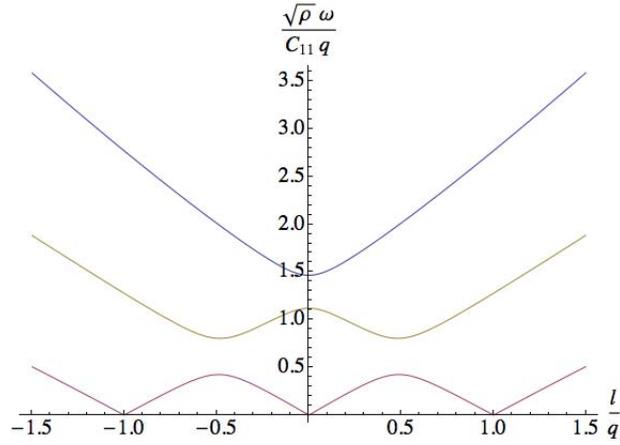


Figura 24. Estructura de bandas fonónicas para un sólido helicoidal con constantes elásticas adimensionadas $C_{44} = 1.5$, $C_{45} = 0.4$, $C_{46} = 0$, $C_{55} = 1.9$, $C_{56} = 1.5$ y $C_{66} = 2.5$.

Para la banda central se pueden calcular de forma analítica los bordes de banda si se toma $\frac{l}{q} = 0$, las raíces son:

$$\tilde{\omega}_{0-} = \frac{1}{2} \left(C_{44} + C_{55} - \sqrt{(C_{44} - C_{55})^2 + 4C_{45}^2} \right)$$

$$\tilde{\omega}_{0+} = \frac{1}{2} \left(C_{44} + C_{55} + \sqrt{(C_{44} - C_{55})^2 + 4C_{45}^2} \right)$$

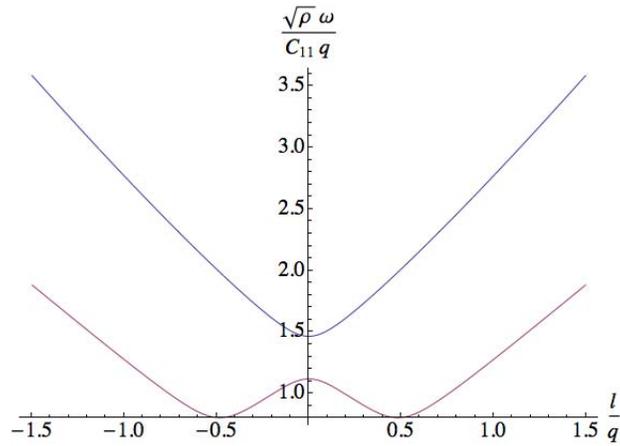


Figura 25. Banda central entre $\tilde{\omega}_1$ y $\tilde{\omega}_3$ en $l = 0$ para un sólido helicoidal con constantes elásticas adimensionadas $C_{44} = 1.5$, $C_{45} = 0.4$, $C_{46} = 0$, $C_{55} = 1.9$, $C_{56} = 1.5$ y $C_{66} = 2.5$.

Por lo cual el ancho de banda central está dado por

$$\Delta\omega = \omega_{\tilde{0}+} - \omega_{\tilde{0}-}$$

$$\Delta\omega = \sqrt{(C_{44} - C_{55})^2 + 4C_{45}^2}$$

Nótese que el ancho de banda central está expresado únicamente en términos de tres de los 21 módulos elásticos y éste se anula cuando $C_{44} = C_{55}$ y $C_{45} = 0$.

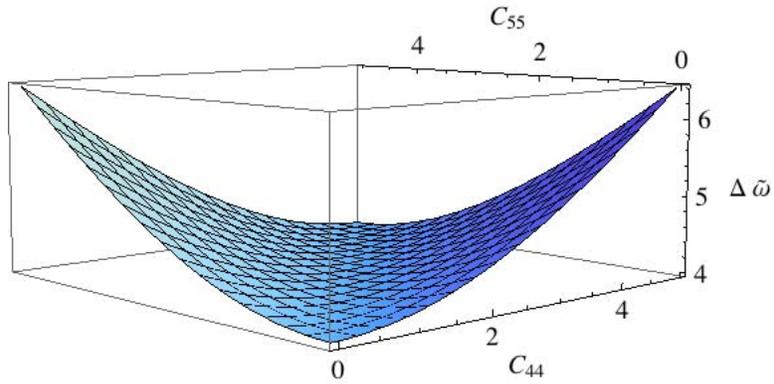


Figura 26. Ancho de banda central como función de los parámetros C_{44} y C_{55} para C_{45} fijo.

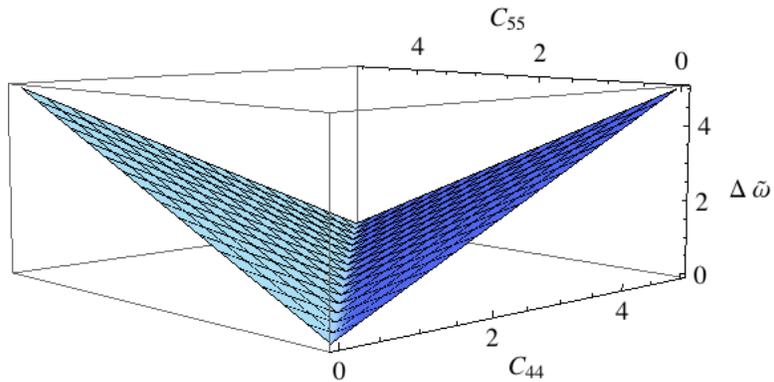


Figura 27. Ancho de banda central como función de los parámetros C_{44} y C_{55} para $C_{45} = 0$

Además, para un medio isotrópico, como se mostró en la sección 3.4, $C_{44} = C_{55} = \mu$ y $C_{45} = 0$, por lo cual no hay banda central.

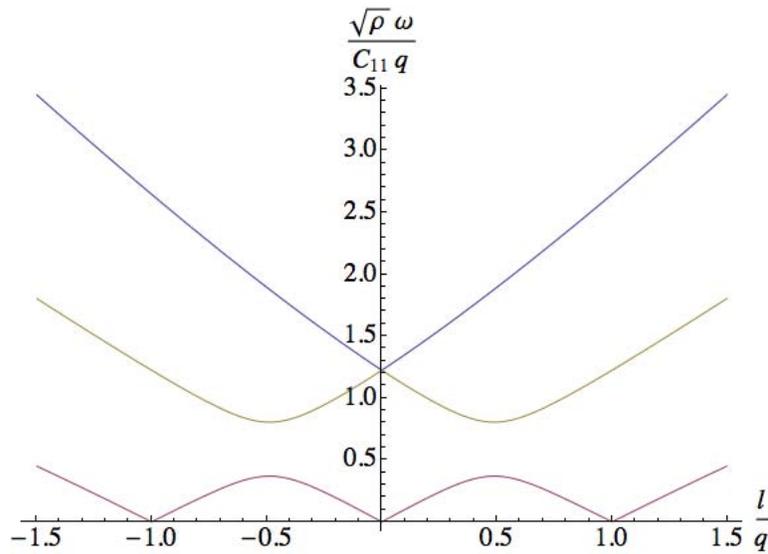


Figura 28. Estructura de bandas en que la banda central se anula, constantes elásticas adimensionadas $C_{44} = 1.5 = C_{55}$, $C_{45} = 0$, $C_{46} = 0$, $C_{56} = 1.5$ y $C_{66} = 2.5$.

Para las bandas laterales, entre las soluciones $\tilde{\omega}_2$ y $\tilde{\omega}_3$

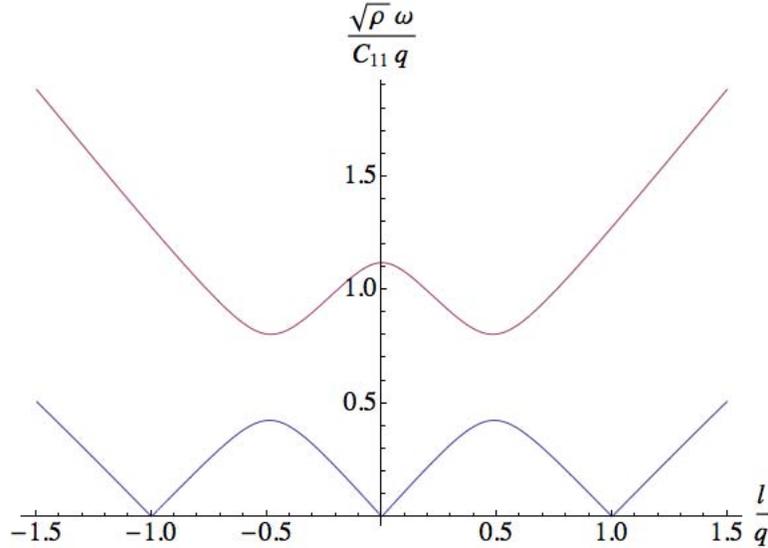


Figura 29. Bandas laterales entre $\tilde{\omega}_2$ y $\tilde{\omega}_3$ en $\frac{l}{q} = 0.5$ para un sólido helicoidal con constantes elásticas adimensionadas $C_{44} = 1.5$, $C_{45} = 0.4$, $C_{46} = 0$, $C_{55} = 1.9$, $C_{56} = 1.5$ y $C_{66} = 2.5$.

Utilizando métodos numéricos se determinó que la banda se encuentra aproximadamente para valores de $\frac{l}{q} = \pm 0.5$. El ancho de banda en este caso depende de los 6 parámetros C_{44} , C_{45} , C_{46} , C_{55} , C_{56} y C_{66} .

También se encuentra que el ancho de la banda lateral se anula cuando las constantes b_3 y b_5 de la matriz T se anulan, es decir, cuando

$$C_{46}C_{55} - C_{45}C_{56} = 0$$

y

$$C_{44}C_{56} - C_{45}C_{46} = 0$$

Por ejemplo, si $C_{46} = C_{56} = 0$, se obtiene lo siguiente:

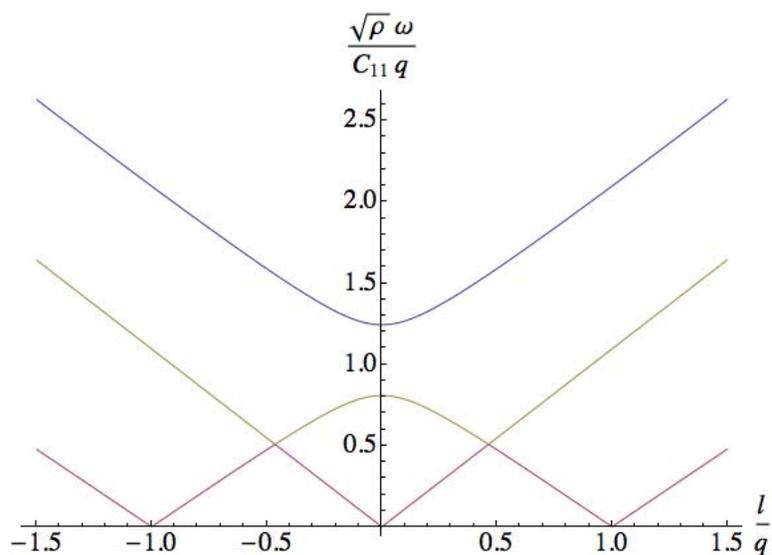


Figura 30. Estructura de bandas en que las bandas laterales se anulan para un sólido helicoidal con constantes elásticas $C_{44} = 0.7$, $C_{45} = 0.2$, $C_{55} = 1.5$, $C_{66} = 1.2$

Considerando lo anterior, en el caso en que $C_{44} = C_{55}$, $C_{45} = 0$ y además $C_{46} = C_{56} = 0$, ambas bandas deben cerrarse.

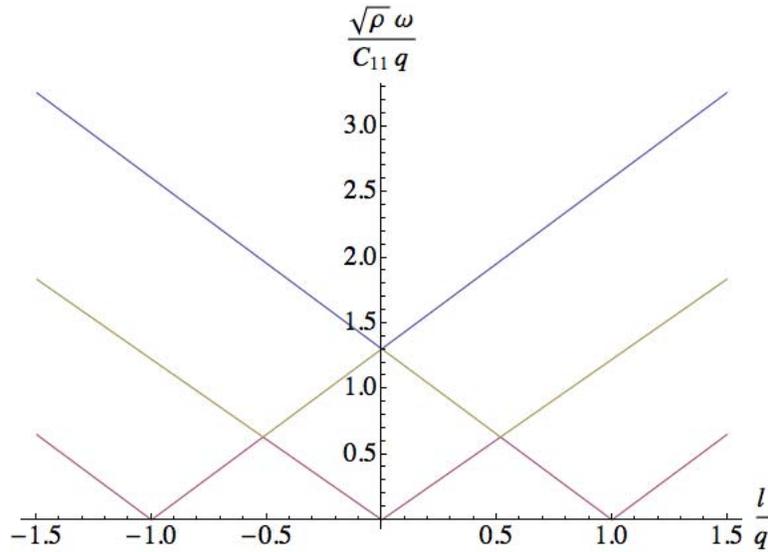


Figura 31. Estructura de bandas cerradas para un sólido elástico con constantes elásticas $C_{44} = C_{55} = 1.7$, $C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0$, $C_{66} = 1.5$

Para un medio isotrópico se cumple que $C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0$ por lo cual se cierran las bandas como se muestra en la figura 31.

Partiendo del sólido helicoidal más general posible, en este capítulo se estudió la propagación de ondas elásticas en analogía al caso de ondas electromagnéticas que se propagan en cristales líquidos colestéricos. Se resolvió analíticamente el caso de ondas que inciden sobre el sólido de manera paralela el eje de la hélice que inducen los vectores característicos de la red cristalina del medio. Siguiendo el mismo razonamiento del caso electromagnético, la ecuación resultante de resolver las ecuaciones gobernantes es una ecuación algebraica de tercer orden que se resuelve analíticamente mediante el método de Cardano. En la figura 24 se muestra una gráfica donde están presentes las tres soluciones de la ecuación de tercer orden resultante para valores dados de los módulos elásticos del material utilizando variables adimensionales de frecuencia y número de onda. Se calculó también el ancho de la banda central calculando los bordes de la banda en el centro de la gráfica para $l = 0$ y se observó que, incluso para el caso más general posible, éste depende únicamente de tres de los veintiún módulos elásticos del material. Por último se verificó que para un medio anisotrópico las bandas efectivamente están cerradas.

Conclusiones

En este trabajo se estudia la propagación de ondas electromagnéticas y elásticas a través de medios helicoidales. Se comenzó tratando el problema de una celda de cristal líquido colestérico sobre la cual incide una onda electromagnética plana con una frecuencia dada. El cristal líquido colestérico es un material que a pesar de su fluidez tiene un ordenamiento molecular en promedio paralelo sobre planos. Además, debido a la geometría de las moléculas de cristal líquido, en la dirección perpendicular a los planos de ordenamiento paralelo se induce un giro formando una estructura helicoidal.

Se resolvieron analíticamente las ecuaciones de Maxwell dentro del cristal líquido colestérico en la representación matricial de Marcuvitz-Schwinger aplicando una rotación a las componentes de los campos eléctricos y magnéticos de manera independiente pero simultáneamente en el sentido opuesto del giro del colestérico. La rotación se aplicó a todo el sistema con la finalidad de anular la dependencia de la variable asociada al eje de la hélice. En dicha representación de las ecuaciones de Maxwell en forma matricial, la solución se expresa como una ecuación de eigenvalores que da origen a una relación de frecuencia de la onda incidente en función del número de onda. Si la onda electromagnética incide de manera normal a la superficie de la celda que contiene al cristal líquido, es decir, incide de manera perpendicular a los planos de ordenamiento molecular, la relación entre el número de onda y la frecuencia de la onda da origen a una banda de reflexión parcial que prohíbe el paso de la luz caracterizada por ciertas frecuencias.

Se analizó el ancho de la banda como función de los índices de refracción ordinario y extraordinario, y se encontró que se éste se anula cuando ambos índices de refracción son iguales en magnitud.

En analogía al caso del cristal líquido colestérico se consideró un medio en sólido con estructura helicoidal sobre el cual incide una onda elástica con frecuencia dada. El sólido helicoidal se construye artificialmente de manera que el número de láminas por cada periodo sea suficientemente grande para poder considerar el giro como continuo. Las ecuaciones que describen el estado de deformaciones del material debido

a la onda elástica son la segunda ley de Newton del medio continuo que detalla el estado de esfuerzos del medio y la ecuación constitutiva del medio elástico que relaciona linealmente los desplazamientos en puntos sobre el cuerpo con los esfuerzos aplicados sobre el mismo. Utilizando que el tensor de esfuerzos es simétrico por conservación del momento angular y en la teoría lineal de deformaciones, el tensor de elongación también lo es; es posible utilizar una representación de vectores con las seis componentes independientes tanto del tensor de elongación como del de esfuerzos. En tal representación, la forma lineal de la ecuación constitutiva relaciona al vector de las seis componentes independientes del vector de esfuerzos con el vector de las seis componentes del tensor de elongación mediante una matriz de 6×6 . Haciendo un estudio termodinámico de las deformaciones se deduce que la matriz de 6×6 es simétrica con únicamente 21 componentes independientes. Para el sólido helicoidal la matriz de 6×6 proviene de ordenar los elementos independientes de la matriz de la ecuación constitutiva del medio natural que contiene a los módulos elásticos del material que compone al medio, a la cual se le aplicó una rotación asociada al giro de la hélice, es decir, el ángulo con el que se depositaron las capas de sustratos en el sólido como función de la variable asociada al eje de la hélice; en este caso z . Con ello, los elementos de la matriz de 6×6 en el medio helicoidal son funciones tanto de z como de los módulos elásticos del medio natural.

Debido a las condiciones del sistema, las soluciones del tensor de esfuerzos y el vector de desplazamientos tienen amplitudes reales dependientes de la coordenada en dirección del eje de la hélice (z) y una parte compleja oscilatoria dependiente de la posición, el vector de onda, el tiempo y la frecuencia de la onda incidente.

Las componentes del tensor de esfuerzos que no están en dirección del eje de la hélice se describen por ecuaciones algebraicas las cuales se eliminan para reducir el número de variables. Las otras tres componentes independientes del tensor de esfuerzos más las tres componentes del vector de desplazamientos pueden arreglarse convenientemente dando lugar a un vector de seis componentes que permita escribir las ecuaciones que describen al sistema en una representación matricial análoga a la de Marcuvitz-Schwinger en el caso electromagnético, pero en términos de los esfuerzos y desplazamientos.

Ya que el sistema fue construido aplicando una rotación a un sólido anisotrópico, es útil aplicar la rotación inversa a todo el sistema para anular la dependencia de la variable del eje de la hélice. En el caso en que la onda elástica incide de manera normal a la superficie del material, es decir, cuando el vector de onda es paralelo al eje de la hélice,

la solución de la ecuación de eigenvalores da una relación de dispersión entre el número de onda y la frecuencia de la onda incidente. Dicha relación da origen a una estructura de bandas que impide el paso de ondas que porten ciertas frecuencias para intervalos de número de onda. Expresando dicha relación en términos de variables adimensionales, se obtiene como resultado que es posible crear dispositivos que, variando la longitud de la hélice o el material que se utilice, es decir, la densidad y las constantes elásticas, las bandas de reflexión se localicen en intervalos seleccionados.

Se observa que el ancho de la banda central depende únicamente de tres de los veintidós módulos elásticos del material y ambas bandas se cierran cuando los elementos fuera de la diagonal de la matriz de módulos elásticos son cero y los elementos de la diagonal son iguales. Esto pasa en particular en el caso de un material isotrópico, lo cual explica que no se presenten bandas de reflexión para estos materiales.

Para materiales con ciertas simetrías, el número de módulos elásticos se reduce y es posible encontrar el intervalo de frecuencias prohibidas. Así, es posible diseñar un dispositivo que impida el paso de un intervalo de frecuencias a elegir, escogiendo el material de acuerdo a sus módulos elásticos y su densidad.

Queda como motivación para trabajos posteriores plantear numéricamente la solución a los problemas estudiados, ahora en el caso en que las ondas inciden de manera oblicua, así como el estudio de los coeficientes de reflexión y transmisión del medio helicoidal para hacer una caracterización más completa de estos dispositivos.

Apéndice A

Los 21 elementos de la matriz simétrica de la ecuación constitutiva que corresponde al sistema con simetría helicoidal S_{ik} como función de z pueden expresarse en términos de los 21 módulos elásticos del material. Para calcularlos se aplican rotaciones en torno al eje de la hélice del material, en este caso z , tanto al tensor de esfuerzos como al tensor de elongaciones, las cuales en la representación de vectores de seis componentes están dadas por las ecuaciones (150) y (155). Esto permite encontrar las siguientes expresiones explícitas para los elementos de $S_{ik}(z)$.

$$S_{11} = C_{11}\cos^4(qz) - 2C_{12}\cos^3(qz)\sin(qz) - 2C_{23}\cos(qz)\sin^3(qz) + \frac{1}{4}(4C_{33}\sin^4(qz) + (2C_{13} + C_{22})\sin^2(2qz))$$

$$S_{12} = \frac{1}{2}\{(C_{12} - C_{23})\cos(4qz) + (C_{11} - C_{33})\sin(2qz) + \cos(2qz) \times (C_{12} + C_{23} + (C_{11} - 2C_{13} - C_{22} + C_{33})\sin(2qz))\}$$

$$S_{13} = \frac{1}{8}\{C_{11} + 6C_{13} - C_{22} + C_{33} - (C_{11} - 2C_{13} - C_{22} + C_{33}) \times \cos(4qz) + 2(C_{12} - C_{23})\sin(4qz)\}$$

$$S_{14} = C_{14}\cos^3(qz) - (C_{15} + C_{24})\cos^2(qz)\sin(qz) + (C_{25} + C_{34}) \times \cos(qz)\sin^2(qz) - C_{35}\sin^3(qz)$$

$$S_{15} = C_{15}\cos^3(qz) + (C_{14} - C_{25})\cos^2(qz)\sin(qz) - (C_{24} - C_{35}) \times \cos(qz)\sin^2(qz) + C_{34}\sin^3(qz)$$

$$S_{16} = C_{16}\cos^2(qz) + C_{36}\sin^2(qz) - \frac{1}{2}C_{26}\sin(2qz)$$

$$S_{22} = \frac{1}{2} \{C_{11} - 2C_{13} + C_{22} + C_{33} - (C_{11} - 2C_{13} - C_{22} + C_{33}) \times \cos(4qz) + 2(C_{13} - C_{23}) \sin(4qz)\}$$

$$S_{23} = \frac{1}{2} \{(C_{23} - C_{12}) \cos(4qz) + (C_{11} - C_{33}) \sin(2qz) + \cos(2qz) \times (C_{12} + C_{23} - (C_{11} - 2C_{13} - C_{22} + C_{33}) \sin(2qz))\}$$

$$S_{24} = \cos(qz) (C_{24} \cos(2qz) + (C_{14} - C_{34}) \sin(2qz)) - \sin(qz) \times (C_{25} \cos(2qz) + (C_{15} - C_{35}) \sin(2qz))$$

$$S_{25} = \sin(qz) (C_{24} \cos(2qz) + (C_{14} - C_{34}) \sin(2qz)) + \cos(qz) (C_{25} \cos(2qz) + (C_{15} - C_{35}) \sin(2qz))$$

$$S_{26} = C_{26} \cos(2qz) + (C_{16} - C_{36}) \sin(2qz)$$

$$S_{33} = C_{33} \cos^4(qz) + 2C_{23} \cos^3(qz) \sin(qz) + 2C_{12} \cos(qz) \sin^3(qz) + \frac{1}{4} (4C_{11} \sin^4(qz) + (2C_{13} + C_{22}) \sin^2(2qz))$$

$$S_{34} = C_{34} \cos^3(qz) + (C_{24} - C_{35}) \cos^2(qz) \sin(qz) + (C_{14} - C_{25}) \times \cos(qz) \sin^2(qz) - C_{15} \sin^3(qz)$$

$$S_{35} = C_{35} \cos^3(qz) + (C_{25} + C_{34}) \cos^2(qz) \sin(qz) + (C_{15} + C_{24}) \times \cos(qz) \sin^2(qz) + C_{14} \sin^3(qz)$$

$$S_{36} = C_{36} \cos^2(qz) + C_{26} \cos(qz) \sin(qz) + C_{16} \sin^2(qz)$$

$$S_{44} = C_{44} \cos^2(qz) + C_{55} \sin^2(qz) - C_{45} \sin(2qz)$$

$$S_{45} = \frac{1}{2} (2C_{45} \cos(2qz) + (C_{44} - C_{55}) \sin(2qz))$$

$$S_{46} = C_{46} \cos(qz) - C_{56} \sin(qz)$$

$$S_{55} = C_{55}\cos^2(qz) + C_{44}\sin^2(qz) + C_{45}\sin(2qz)$$

$$S_{56} = C_{56}\cos(qz) + C_{46}\sin(qz)$$

$$S_{66} = C_{66}$$

Apéndice B

Al sustituir los elementos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} de las ecuaciones (133), (134) y (136) en las tres componentes de la ecuación constitutiva para σ_{xz} , σ_{yz} y σ_{zz} de (136), (137) y (138); así como en las tres ecuaciones de la segunda ley de Newton de (139), (140) y (141), se tienen seis ecuaciones para las derivadas respecto a z de los elementos del vector Ψ de la expresión (142). Dichas ecuaciones están expresadas en términos de los elementos restantes del vector Ψ . Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} \frac{du_x(z)}{dz} = & -\frac{1}{A_1 S_{66}} \{ (S_{56}^2 - S_{55} S_{66}) (S_{66} (ik_x S_{14} u_x(z) + ik_y S_{24} u_x(z) + \\ & ik_x S_{24} u_y(z) + ik_y S_{34} u_y(z) + ik_x S_{44} u_z(z) + ik_y S_{45} u_z(z) - \\ & \sigma_{xz}(z)) - S_{46} (ik_x S_{16} u_x(z) + ik_y S_{26} u_x(z) + ik_x S_{26} u_y(z) + \\ & ik_y S_{36} u_y(z) + ik_x S_{46} u_z(z) + ik_y S_{56} u_z(z) - \sigma_{zz}(z)) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_y(z)}{dz} = & -\frac{1}{A_1} \{ -ik_x S_{16} S_{45} S_{46} u_x(z) - ik_y S_{26} S_{45} S_{46} u_x(z) + ik_x \times \\ & S_{15} S_{46}^2 u_x(z) + ik_y S_{25} S_{46}^2 u_x(z) + ik_x S_{16} S_{44} S_{56} u_x(z) + \\ & ik_y S_{26} S_{44} S_{56} u_x(z) - ik_x S_{14} S_{46} S_{55} u_x(z) - ik_y S_{24} S_{46} \times \\ & S_{56} u_x(z) - ik_x S_{15} S_{44} S_{66} u_x(z) - ik_y S_{25} S_{44} S_{66} u_x(z) + \\ & ik_x S_{14} S_{45} S_{66} u_x(z) + ik_y S_{24} S_{45} S_{66} u_x(z) - ik_x S_{26} \times \\ & S_{45} S_{46} u_y(z) - ik_y S_{36} S_{45} S_{46} u_y(z) + ik_x S_{25} S_{46}^2 u_y(z) + \\ & ik_y S_{35} S_{46}^2 u_y(z) + ik_x S_{26} S_{44} S_{56} u_y(z) + ik_y S_{36} S_{44} \times \\ & S_{56} u_y(z) - ik_x S_{24} S_{46} S_{56} u_y(z) - ik_y S_{34} S_{46} S_{56} u_y(z) - \\ & ik_x S_{25} S_{44} S_{66} u_y(z) - ik_y S_{35} S_{44} S_{66} u_x(z) + ik_x S_{24} S_{45} \times \\ & S_{66} u_y(z) + ik_y S_{34} S_{45} S_{66} u_y(z) + ik_y S_{46}^2 S_{55} u_z(z) - \\ & 2ik_y S_{45} S_{46} S_{56} u_z(z) + ik_y S_{44} S_{56}^2 u_z(z) + ik_y S_{45}^2 S_{66} u_z(z) - \\ & ik_y S_{44} S_{55} S_{66} u_z(z) + S_{46} S_{56} \sigma_{xz}(z) - S_{45} S_{66} \sigma_{xz}(z) - \\ & S_{46}^2 \sigma_{yz}(z) + S_{44} S_{66} \sigma_{yz}(z) + S_{45} S_{46} \sigma_{zz}(z) - S_{44} S_{56} \sigma_{zz}(z) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{du_z(z)}{dz} = & -\frac{1}{A_1} \left\{ ik_x S_{16} S_{45}^2 u_x(z) + ik_y S_{26} S_{45}^2 u_x(z) - ik_x S_{15} S_{45} S_{46} \times \right. \\
 & u_x(z) - ik_y S_{25} S_{45} S_{46} u_x(z) - ik_x S_{16} S_{44} S_{55} u_x(z) - ik_y S_{26} \times \\
 & S_{44} S_{55} u_x(z) + ik_x S_{14} S_{46} S_{55} u_x(z) + ik_y S_{24} S_{46} S_{55} u_x(z) + \\
 & ik_x S_{15} S_{44} S_{56} u_x(z) + ik_x S_{15} S_{44} S_{56} u_x(z) + ik_y S_{25} S_{44} S_{56} \times \\
 & u_x(z) - ik_x S_{14} S_{45} S_{56} - ik_y S_{24} S_{45} S_{56} u_x(z) + ik_x S_{26} S_{45}^2 \times \\
 & u_y(z) + ik_y S_{36} S_{45}^2 u_y(z) - ik_x S_{25} S_{45} S_{46} u_y(z) - ik_y S_{35} S_{45} \times \\
 & S_{46} u_y(z) - ik_x S_{26} S_{44} S_{55} u_y(z) - ik_y S_{36} S_{44} S_{55} u_y(z) + ik_x \times \\
 & S_{24} S_{46} S_{55} u_y(z) + ik_y S_{34} S_{46} S_{55} u_y(z) + ik_x S_{25} S_{44} S_{56} \times \\
 & u_y(z) + ik_y S_{35} S_{44} S_{56} u_y(z) - ik_x S_{24} S_{45} S_{56} u_y(z) - ik_y \times \\
 & S_{34} S_{45} S_{56} u_y(z) - S_{46} S_{55} \sigma_{xz}(z) + S_{45} S_{56} \sigma_{xz}(z) + S_{45} \times \\
 & \left. S_{46} \sigma_{yz}(z) - S_{44} S_{56} \sigma_{yz}(z) - S_{45}^2 \sigma_{zz}(z) + S_{44} S_{55} \sigma_{zz}(z) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{xz}(z)}{dz} = & k_x^2 S_{11} u_x(z) + 2k_x k_y S_{12} u_x(z) + k_y^2 S_{22} u_x(z) - \omega^2 \rho u_x(z) + \\
 & k_x^2 S_{12} u_y(z) + k_x k_y S_{13} u_y(z) + k_x k_y S_{22} u_y(z) + k_y^2 S_{23} \times \\
 & u_y(z) + k_x^2 S_{14} u_z(z) + k_x k_y S_{15} u_z(z) + k_x k_y S_{24} u_z(z) + \\
 & k_y^2 S_{25} u_z(z) - S_{66}^{-1} \times (k_x S_{16} + k_y S_{26}) ((k_x S_{16} + k_y S_{26}) \times \\
 & u_x(z) + (k_x S_{26} + k_y S_{36}) u_y(z) + k_x S_{46} u_z(z) + k_y S_{56} u_z(z) \\
 & + i\sigma_{zz}(z)) - ((k_x S_{16} S_{56} + k_y S_{26} S_{56} - k_x S_{15} S_{66} - \\
 & k_y S_{25} S_{66}) ((k_x S_{16} S_{46} + k_y S_{26} S_{46} - k_x S_{14} S_{66} - \\
 & k_y S_{24} S_{66}) u_x(z) + (k_x S_{26} S_{46} + k_y S_{36} S_{46} - k_x S_{24} S_{66} \\
 & - k_y S_{34} S_{66}) u_y(z) + k_x S_{46}^2 u_z(z) + k_y S_{46} S_{56} u_z(z) - \\
 & k_x S_{44} S_{66} u_z(z) - k_y S_{45} S_{66} u_z(z) - iS_{66} \sigma_{xz}(z) + \\
 & iS_{46} \sigma_{zz}(z)) / (S_{66} (S_{45} S_{66} - S_{46} S_{56})) + \\
 & ((k_x (-S_{16} S_{45} S_{46} + S_{15} S_{46}^2 + S_{16} S_{44} S_{56} - S_{14} S_{46} S_{56} - \\
 & S_{15} S_{44} S_{66} + S_{14} S_{45} S_{66}) + k_y \times (-S_{26} S_{45} S_{46} + S_{25} \times \\
 & S_{46}^2 + S_{26} S_{44} S_{55} - S_{24} S_{46} S_{56} - S_{25} S_{44} S_{66} + S_{24} S_{45} S_{66})) \\
 & ((k_x (S_{16} S_{46} S_{55} - S_{16} S_{45} S_{56} - S_{15} S_{46} S_{56} + S_{14} S_{56}^2 + \\
 & S_{15} S_{45} S_{66} - S_{14} S_{55} S_{66}) + k_y (S_{26} S_{46} S_{55} - S_{26} S_{45} S_{56} - \\
 & S_{25} S_{46} S_{56} + S_{24} S_{56}^2 + S_{25} S_{45} S_{66} - S_{24} S_{55} S_{66})) u_x(z) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (k_y (S_{26}S_{46}S_{55} - S_{26}S_{45}S_{56} - S_{25}S_{46}S_{56} + S_{24}S_{56}^2 + S_{25}S_{45}S_{66} - \\
 & S_{24}S_{55}S_{66}) + k_y (S_{36}S_{46}S_{55} - S_{36}S_{45}S_{56} - S_{35}S_{46}S_{56} + S_{34}S_{56}^2 + \\
 & S_{35}S_{45}S_{66} - S_{34}S_{55}S_{66})) u_y(z) + k_x S_{46}^2 S_{55} u_z(z) - 2k_x S_{45} S_{46} \times \\
 & S_{56} u_z(z) + k_x S_{44} S_{56}^2 u_z(z) + k_x S_{45}^2 S_{66} u_z(x) - k_x S_{44} S_{55} S_{66} u_z(z) + \\
 & i S_{56}^2 \sigma_{xz}(z) - i S_{55} S_{66} \sigma_{xz}(z) - i S_{46} S_{56} \sigma_{yz}(z) + i S_{45} S_{66} \sigma_{yz}(z) + \\
 & i S_{46} S_{55} \sigma_{zz}(z) - i S_{45} S_{56} \sigma_{zz}(z)) / ((S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66}) \times \\
 & (S_{46}^2 S_{55} - 2S_{45} S_{46} S_{56} + S_{45}^2 S_{66} + S_{44} (S_{56}^2 - S_{55} S_{66})))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{yz}(z)}{dz} = & k_x^2 S_{12} u_x(z) + k_x k_y (S_{13} + S_{22}) u_x(z) + k_y^2 S_{23} u_x(z) + k_x^2 \times \\
 & S_{22} u_y(z) + 2k_x k_y S_{23} u_y(z) + k_y^2 S_{33} u_y(z) - \omega^2 \rho u_y(z) + \\
 & k_x^2 S_{24} u_z(z) + k_x k_y (S_{25} + S_{34}) u_z(z) + k_y^2 S_{35} u_z(z) - \\
 & S_{66}^{-1} (k_x S_{26} + k_y S_{36}) ((k_x S_{16} + k_y S_{26}) u_x(z) + (k_x S_{26} + \\
 & k_y S_{36}) u_y(z) + k_x S_{46} u_z(z) + k_y S_{56} u_z(z) + i \sigma_{zz}(z)) - \\
 & ((k_x S_{26} S_{56} + k_y S_{36} S_{56} - k_x S_{25} S_{66} - k_y S_{35} S_{66}) \times \\
 & ((k_x S_{16} S_{46} + k_y S_{26} S_{46} - k_x S_{14} S_{66} - k_y S_{24} S_{66}) u_x(z) + \\
 & (k_x S_{26} S_{46} + k_y S_{36} S_{46} - k_x S_{24} S_{66} - k_y S_{34} S_{66}) u_y(z) + \\
 & k_x S_{46}^2 u_z(z) + k_y S_{46} S_{56} u_z(z) - k_x S_{44} S_{66} u_z(z) - k_y S_{45} \times \\
 & S_{66} u_z(z) - i S_{66} \sigma_{xz}(z) + i S_{46} \sigma_{zz}(z))) / (S_{66} \times \\
 & (S_{45} S_{66} - S_{46} S_{56})) + ((k_x (-S_{26} S_{45} S_{46} + S_{25} S_{46}^2 + \\
 & S_{26} S_{44} S_{56} - S_{24} S_{46} S_{56} - S_{25} S_{44} S_{66} + S_{24} S_{45} S_{66}) + \\
 & k_y (-S_{36} S_{45} S_{46} + S_{35} S_{46}^2 + S_{36} S_{44} S_{56} - S_{34} S_{46} S_{56} - \\
 & S_{35} S_{44} S_{66} + S_{34} S_{45} S_{66})) ((k_x (S_{16} S_{46} S_{55} - S_{16} \times \\
 & S_{45} S_{56} - S_{15} S_{46} S_{56} + S_{14} S_{56}^2 + S_{15} S_{45} S_{66} - S_{14} S_{55} \times \\
 & S_{66}) + k_y (S_{26} S_{46} S_{55} - S_{26} S_{45} S_{56} - S_{25} S_{46} S_{56} + \\
 & S_{24} S_{56}^2 + S_{25} S_{45} S_{66} - S_{24} S_{55} S_{66})) u_x(z) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (k_x (S_{26}S_{46}S_{55} - S_{26}S_{45}S_{56} - S_{25}S_{46}S_{56} + S_{24}S_{56}^2 + S_{25}S_{45} \times \\
& S_{66} - S_{24}S_{55}S_{66}) + k_y (S_{36}S_{46}S_{55} - S_{36}S_{45}S_{56} - S_{35}S_{46}S_{56} + \\
& S_{34}S_{56}^2 + S_{35}S_{45}S_{66} - S_{34}S_{55}S_{66})) u_y(z) + k_x S_{46}^2 S_{55} u_z(z) - \\
& 2k_x S_{45} S_{46} S_{56} u_z(z) + k_x S_{44} S_{56}^2 u_z(z) + k_x S_{45}^2 S_{66} u_z(z) - k_x \times \\
& S_{44} S_{55} S_{66} u_z(z) + i S_{56}^2 \sigma_{xz}(z) - i S_{55} S_{66} \sigma_{xz}(z) - i S_{46} S_{56} \sigma_{yz}(z) + \\
& i S_{45} S_{66} \sigma_{yz}(z) + i S_{46} S_{55} \sigma_{zz}(z) - i S_{45} S_{56} \sigma_{zz}(z)) / \\
& ((S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66}) (S_{46}^2 S_{55} - 2 S_{45} S_{46} S_{56} + S_{45}^2 S_{66} + \\
& (S_{56}^2 - S_{55} S_{66})))
\end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma_{zz}(z)}{dz} = -\omega^2 \rho u_z(z) - ik_x \sigma_{xz}(z) - ik_y \sigma_{yz}(z)$$

Apéndice C

Es posible ordenar las seis ecuaciones del Apéndice B en una representación matricial de la forma $\frac{d}{dz}\Psi = M\Psi$ como se muestra en la ecuación (143) donde Ψ es el vector que contiene las tres componentes independientes del tensor de esfuerzos y las tres componentes del vector de desplazamientos como se muestra en (142). Como resultado de ordenar las ecuaciones mencionadas M es una matriz de 6×6 cuyos elementos son explícitamente como se muestra a continuación.

$$M_{11} = \frac{i}{A_1} (D_2 k_x + D_3 k_y)$$

$$M_{12} = \frac{i}{A_1} (D_3 k_x + D_{12} k_y)$$

$$M_{13} = i k_x$$

$$M_{14} = \frac{1}{A_1} (S_{55} S_{66} - S_{56}^2)$$

$$M_{15} = \frac{1}{A_1} (S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66})$$

$$M_{16} = \frac{1}{A_1} (S_{45} S_{56} - S_{46} S_{55})$$

$$M_{21} = \frac{i}{A_1} (D_9 k_x + D_5 k_y)$$

$$M_{22} = \frac{i}{A_1} (D_5 k_x + D_4 k_y)$$

$$M_{23} = i k_y$$

$$M_{24} = \frac{1}{A_1} (S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66})$$

$$M_{25} = \frac{1}{A_1} (S_{44} S_{66} - S_{46}^2)$$

$$M_{26} = \frac{1}{A_1} (S_{45}S_{46} - S_{44}S_{56})$$

$$M_{31} = \frac{1}{A_1} (D_{10}k_x + D_8k_y)$$

$$M_{32} = \frac{i}{A_1} (D_8k_x + D_{13}k_y)$$

$$M_{33} = 0$$

$$M_{34} = \frac{1}{A_1} (S_{45}S_{56} - S_{46}S_{55})$$

$$M_{35} = \frac{1}{A_1} (S_{45}S_{46} - S_{44}S_{56})$$

$$M_{36} = \frac{1}{A_1} (S_{44}S_{55} - S_{45}^2)$$

$$\begin{aligned} M_{41} = & -\frac{1}{A_1} \{ 2k_x k_y (-D_5 S_{15} + D_6 S_{16} - S_{14} S_{26} S_{46} S_{55} + S_{12} S_{46}^2 S_{55} + \\ & S_{14} S_{26} S_{45} S_{56} + S_{14} S_{25} S_{46} S_{56} - 2S_{12} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{14} S_{24} S_{56}^2 + \\ & S_{12} S_{44} S_{56}^2 - S_{14} S_{25} S_{45} S_{66} + S_{12} S_{45}^2 S_{66} + S_{14} S_{24} S_{55} S_{66} - \\ & S_{12} S_{44} S_{55} S_{66}) + k_x^2 (S_{11} S_{46}^2 S_{55} + S_{16}^2 (S_{44} S_{55} - S_{45}^2) - \\ & 2S_{11} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{14}^2 S_{56}^2 + S_{11} S_{44} S_{56}^2 + 2S_{16} (S_{15} S_{45} S_{46} - \\ & S_{14} S_{46} S_{55} - S_{15} S_{44} S_{56} + S_{14} S_{45} S_{56}) + S_{11} S_{45}^2 S_{66} + \\ & S_{14}^2 S_{55} S_{66} - S_{11} S_{44} S_{55} S_{66} + S_{15}^2 (S_{44} S_{66} - S_{46}^2) + \\ & 2S_{14} S_{15} (S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66})) + k_y^2 (2D_7 S_{26} + S_{22} S_{46}^2 S_{55} + \\ & S_{26}^2 (S_{44} S_{55} - S_{45}^2) - 2S_{22} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24}^2 S_{56}^2 + S_{22} S_{44} S_{56}^2 + \\ & S_{22} S_{45}^2 S_{66} + S_{24}^2 S_{55} S_{66} - S_{22} S_{44} S_{55} S_{66} + S_{25}^2 (S_{44} S_{66} - S_{46}^2) + \\ & 2S_{24} S_{25} (S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66})) - A_1 \omega^2 \rho \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{42} = & -\frac{1}{A_1} \left\{ k_x^2 (D_5 S_{15} + D_6 S_{16} - S_{14} S_{26} S_{46} S_{55} + S_{12} S_{44}^2 S_{55} + \right. \\
& S_{14} S_{26} S_{45} S_{56} + S_{14} S_{25} S_{46} S_{56} - 2S_{12} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{14} S_{24} \times \\
& S_{56}^2 + S_{12} S_{44} S_{56}^2 - S_{14} S_{25} S_{45} S_{66} + S_{12} S_{45}^2 S_{66} + S_{14} S_{24} \times \\
& S_{55} S_{66} - S_{12} S_{44} S_{55} S_{66}) + k_x k_y (D_1 S_{16} + 2D_7 S_{26} + \\
& S_{15} S_{36} S_{45} S_{46} - S_{25}^2 S_{46}^2 - S_{15} S_{35} S_{46}^2 - S_{14} S_{36} S_{46} S_{55} + \\
& S_{13} S_{46}^2 S_{55} + S_{22} S_{46}^2 S_{55} + S_{26}^2 (S_{44} S_{55} - S_{45}^2) - S_{15} S_{36} \times \\
& S_{44} S_{56} + S_{14} S_{36} S_{45} S_{56} + 2S_{24} S_{25} S_{46} S_{56} + S_{15} S_{34} S_{46} S_{56} + \\
& S_{14} S_{35} S_{46} S_{56} - 2S_{13} S_{45} S_{46} S_{56} - 2S_{22} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24}^2 S_{56}^2 - \\
& S_{14} S_{34} S_{56}^2 + S_{13} S_{44} S_{56}^2 + S_{22} S_{44} S_{56}^2 + S_{25}^2 S_{44} S_{66} + S_{15} S_{35} \times \\
& S_{44} S_{66} - 2S_{24} S_{25} S_{45} S_{66} - S_{15} S_{34} S_{45} S_{66} - S_{14} S_{35} S_{45} S_{66} + \\
& S_{13} S_{45}^2 S_{66} + S_{22} S_{45}^2 S_{66} + S_{24}^2 S_{55} S_{66} + S_{14} S_{34} S_{55} S_{66} - \\
& S_{13} S_{44} S_{55} S_{66} - S_{22} S_{44} S_{55} S_{66}) + k_y^2 (D_{11} S_{25} + D_1 S_{26} - \\
& S_{24} S_{36} S_{46} S_{55} + S_{23} S_{46}^2 S_{55} + S_{24} S_{36} S_{45} S_{56} + S_{24} S_{35} S_{46} S_{56} \\
& - 2S_{23} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24} S_{34} S_{56}^2 + S_{23} S_{44} S_{56}^2 - S_{24} S_{35} \times \\
& S_{45} S_{66} + S_{23} S_{45}^2 S_{66} + S_{24} S_{34} S_{55} S_{66} - S_{23} S_{44} S_{55} S_{66}) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$M_{43} = 0$$

$$M_{44} = \frac{i}{A_1} (D_2 k_x + D_3 k_y)$$

$$M_{45} = \frac{i}{A_1} (D_9 k_x + D_5 k_y)$$

$$M_{46} = \frac{i}{A_1} (D_{10} k_x + D_8 k_y)$$

$$\begin{aligned}
 M_{51} = & -\frac{1}{A_1} \left\{ k_x^2 \left(-D_5 S_{15} + D_6 S_{16} - S_{14} S_{26} S_{46} S_{55} + S_{12} S_{46}^2 S_{55} + \right. \right. \\
 & S_{14} S_{26} S_{45} S_{56} + S_{14} S_{25} S_{46} S_{56} - 2S_{12} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{14} S_{24} S_{56}^2 + \\
 & S_{12} S_{44} S_{56}^2 - S_{14} S_{25} S_{45} S_{66} + S_{12} S_{45}^2 S_{66} + S_{14} S_{24} S_{55} S_{66} - \\
 & S_{12} S_{44} S_{55} S_{66} \left. \right) + k_x k_y \left(D_1 S_{16} + 2D_7 S_{26} + S_{15} S_{36} S_{45} S_{46} - \right. \\
 & S_{25}^2 S_{46}^2 - S_{15} S_{35} S_{46}^2 - S_{14} S_{36} S_{46} S_{55} + S_{13} S_{46}^2 S_{55} + S_{22} S_{46}^2 S_{55} \\
 & + S_{26}^2 \left(S_{44} S_{55} - S_{45}^2 \right) - S_{15} S_{36} S_{44} S_{56} + S_{14} S_{36} S_{45} S_{56} + \\
 & 2S_{24} S_{25} S_{46} S_{56} + S_{15} S_{34} S_{46} S_{56} + S_{14} S_{35} S_{46} S_{56} - 2S_{13} S_{45} S_{46} S_{56} - \\
 & 2S_{22} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24}^2 S_{56}^2 - S_{14} S_{34} S_{56}^2 + S_{13} S_{44} S_{56}^2 + S_{22} S_{44} S_{56}^2 + \\
 & S_{25}^2 S_{44} S_{66} + S_{15} S_{35} S_{44} S_{66} - 2S_{24} S_{25} S_{45} S_{66} - S_{15} S_{34} S_{45} S_{66} - \\
 & S_{14} S_{35} S_{45} S_{66} + S_{13} S_{45}^2 S_{66} + S_{22} S_{45}^2 S_{66} + S_{24}^2 S_{55} S_{66} + S_{14} S_{34} \times \\
 & S_{55} S_{66} - S_{13} S_{44} S_{55} S_{66} - S_{22} S_{44} S_{55} S_{66} \left. \right) + k_y^2 \left(D_{11} S_{25} + D_1 S_{26} - \right. \\
 & S_{24} S_{36} S_{46} S_{55} + S_{23} S_{46}^2 S_{55} - \\
 & S_{24} S_{36} S_{45} S_{56} + S_{23} S_{46}^2 S_{55} + S_{24} S_{36} S_{45} S_{56} + S_{24} S_{35} S_{46} S_{56} - \\
 & 2S_{23} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24} S_{34} S_{56}^2 + S_{23} S_{44} S_{56}^2 - S_{24} S_{35} S_{45} S_{66} + \\
 & \left. S_{23} S_{45}^2 S_{66} + S_{24} S_{34} S_{55} S_{66} - S_{23} S_{44} S_{55} S_{66} \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{52} = & -\frac{1}{A_1} \left\{ 2k_x k_y \left(D_{11} S_{25} + D_1 S_{26} - S_{24} S_{36} S_{46} S_{55} + S_{23} S_{46}^2 S_{55} + \right. \right. \\
 & S_{24} S_{36} S_{45} S_{56} + S_{24} S_{35} S_{46} S_{56} - 2S_{23} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24} S_{34} S_{56}^2 \\
 & S_{23} S_{44} S_{56}^2 - S_{24} S_{35} S_{45} S_{66} + S_{23} S_{45}^2 S_{66} + S_{24} S_{34} S_{55} S_{66} - \\
 & S_{23} S_{44} S_{55} S_{66} \left. \right) + k_x^2 \left(2D_7 S_{26} + S_{22} S_{46}^2 S_{55} + S_{26}^2 \left(S_{44} S_{55} - \right. \right. \\
 & S_{45}^2 \left. \right) - 2S_{22} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24}^2 S_{56}^2 + S_{22} S_{44} S_{56}^2 + S_{22} S_{45}^2 S_{66} + \\
 & S_{24}^2 S_{55} S_{66} - S_{22} S_{44} S_{55} S_{66} + S_{25}^2 \left(S_{44} S_{66} - S_{46}^2 \right) + 2S_{24} S_{25} \times \\
 & \left(S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66} \right) \left. \right) + k_y^2 \left(S_{33} S_{46}^2 S_{55} + S_{36}^2 \left(S_{44} S_{55} - S_{45}^2 \right) - \right. \\
 & 2S_{33} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{34}^2 S_{56}^2 + S_{33} S_{44} S_{56}^2 + 2S_{36} \left(S_{35} S_{45} S_{46} - \right. \\
 & S_{34} S_{46} S_{55} - S_{35} S_{44} S_{56} + S_{34} S_{45} S_{56} \left. \right) + S_{33} S_{45}^2 S_{66} + \\
 & S_{34}^2 S_{55} S_{66} - S_{33} S_{44} S_{55} S_{66} + S_{35}^2 \left(S_{44} S_{66} - S_{46}^2 \right) + 2S_{34} S_{35} \times \\
 & \left. \left(S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66} \right) \right) - A_1 \omega^2 \rho \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$M_{53} = 0$$

$$M_{54} = \frac{i}{A_1} (D_3 k_x + D_{12} k_y)$$

$$M_{55} = \frac{i}{A_1} (D_5 k_x + D_4 k_y)$$

$$M_{56} = \frac{i}{A_1} (D_8 k_x + D_{13} k_y)$$

$$M_{61} = 0$$

$$M_{62} = 0$$

$$M_{63} = \omega^2 \rho$$

$$M_{64} = i k_x$$

$$M_{65} = i k_y$$

$$M_{66} = 0$$

En donde, para simplificar, se utilizaron las siguientes sustituciones:

$$A_1 = S_{46}^2 S_{55} - 2S_{45} S_{46} S_{56} + S_{44} S_{56}^2 + S_{45}^2 S_{66} - S_{44} S_{55} S_{66}$$

$$D_1 = -S_{36} S_{45}^2 + S_{35} S_{45} S_{46} + S_{36} S_{44} S_{55} - S_{34} S_{46} S_{55} - S_{35} S_{44} S_{56} + S_{34} S_{45} S_{56}$$

$$D_2 = S_{16} S_{46} S_{55} - S_{16} S_{45} S_{56} - S_{15} S_{46} S_{56} + S_{14} S_{56}^2 + S_{15} S_{45} S_{66} - S_{14} S_{55} S_{66}$$

$$D_3 = S_{26} S_{46} S_{55} - S_{26} S_{45} S_{56} - S_{25} S_{46} S_{56} + S_{24} S_{56}^2 + S_{25} S_{45} S_{66} - S_{24} S_{55} S_{66}$$

$$D_4 = -S_{36} S_{45} S_{46} + S_{35} S_{46}^2 + S_{36} S_{44} S_{56} - S_{34} S_{46} S_{56} - S_{35} S_{44} S_{66} + S_{34} S_{45} S_{66}$$

$$D_5 = -S_{26} S_{45} S_{46} + S_{25} S_{46}^2 + S_{26} S_{44} S_{56} - S_{24} S_{46} S_{56} - S_{25} S_{44} S_{66} + S_{24} S_{45} S_{66}$$

$$D_6 = -S_{25} S_{45}^2 + S_{25} S_{45} S_{46} + S_{24} S_{44} S_{55} - S_{24} S_{46} S_{55} - S_{25} S_{44} S_{56} + S_{24} S_{45} S_{56}$$

$$D_7 = S_{25} S_{45} S_{46} - S_{24} S_{46} S_{55} - S_{25} S_{44} S_{56} + S_{24} S_{45} S_{56}$$

$$D_8 = -S_{25} S_{45} S_{46} + S_{24} S_{46} S_{55} + S_{26} (S_{45}^2 - S_{44} S_{55}) + S_{25} S_{44} S_{56} - S_{24} S_{45} S_{56}$$

$$D_9 = -S_{16} S_{45} S_{46} + S_{15} S_{46}^2 + S_{16} S_{44} S_{56} - S_{14} S_{46} S_{56} - S_{15} S_{44} S_{66} + S_{14} S_{45} S_{66}$$

$$\begin{aligned}
D_{10} &= -S_{15}S_{45}S_{46} + S_{14}S_{46}S_{55} + S_{16} (S_{45}^2 - S_{44}S_{55}) + S_{15}S_{44}S_{56} - S_{14}S_{45}S_{56} \\
D_{11} &= S_{36}S_{45}S_{46} - S_{35}S_{46}^2 - S_{36}S_{44}S_{56} + S_{34}S_{46}S_{56} + S_{35}S_{44}S_{66} - S_{34}S_{45}S_{66} \\
D_{12} &= S_{35}S_{46}S_{55} - S_{36}S_{45}S_{56} - S_{35}S_{46}S_{56} + S_{34}S_{56}^2 + S_{35}S_{45}S_{66} - S_{34}S_{55}S_{66} \\
D_{13} &= -S_{35}S_{45}S_{46} + S_{34}S_{46}S_{55} + S_{36} (S_{45}^2 - S_{44}S_{55}) + S_{35}S_{44}S_{56} - S_{34}S_{45}S_{56}
\end{aligned}$$

Apéndice D

Por la manera en que se construyó el medio helicoidal, depositando capas delgadas de un material anisotrópico sobre un sustrato que rota, las componentes de la matriz M de la ecuación (143), que se muestran explícitamente en el Apéndice C, tienen dependencia en la coordenada del eje de la hélice. Por ello, es conveniente aplicar una rotación en el sentido opuesto del giro de la hélice con la finalidad de resolver analíticamente la ecuación (143) lo cual, siguiendo el cálculo, lleva la ecuación mencionada, bajo un cambio de variable, a otra similar de la forma $\frac{d}{dz}\Phi = T\Phi$ como en la ecuación (146) donde T es también una matriz de 6×6 pero ahora con elementos constantes. Éstos se muestran explícitamente a continuación.

$$T_{11} = \frac{i}{A_1} \left\{ (D_2 k_x + D_3 k_y) \cos^2(qz) + (D_5 k_x + D_4 k_y) \sin^2(qz) + \frac{1}{2} ((D_3 + D_9) k_x + (D_{12} + D_5) k_y) \sin(2qz) \right\}$$

$$T_{12} = \frac{i}{2A_1} \left\{ D_3 k_x - D_9 k_x + D_{12} k_y - D_5 k_y - 2iA_1 q + ((D_3 + D_9) k_x + (D_{12} + D_5) k_y) \cos(2qz) + ((D_5 - D_2) k_x + (D_4 - D_3) k_y) \sin(2qz) \right\}$$

$$T_{13} = i (k_x \cos(qz) + k_y \sin(qz))$$

$$T_{14} = \frac{1}{A_1} \left\{ (S_{56}^2 - S_{55} S_{66}) \cos^2(qz) + (S_{46}^2 - S_{44} S_{66}) \sin^2(qz) - (S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66}) \sin(2qz) \right\}$$

$$T_{15} = \frac{1}{2A_1} \left\{ (2S_{45} S_{66} - 2S_{46} S_{56}) \cos(2qz) + (S_{46}^2 - S_{56}^2 - S_{44} S_{66} + S_{55} S_{66}) \sin(2qz) \right\}$$

$$T_{16} = \frac{1}{A_1} \{(S_{46}S_{55} - S_{45}S_{56}) \cos(qz) + (S_{44}S_{56} - S_{45}S_{46}) \sin(qz)\}$$

$$T_{21} = \frac{i}{2A_1} \{(D_9 - D_3)k_x + (D_5 - D_{12})k_y + 2iA_1q + ((D_3 + D_8)k_x + (D_{12} + D_5)k_y) \cos(2qz) + ((D_5 - D_2)k_x + (D_4 - D_3)k_y) \sin(2qz)\}$$

$$T_{22} = \frac{i}{2A_1} \{2(D_5k_x + D_4k_y) \cos^2(qz) + 2(D_2k_x + D_3k_y) \sin^2(qz) - ((D_3 + D_9)k_x + (D_{12} + D_5)k_y) \sin(2qz)\}$$

$$T_{23} = i \{k_y \cos(qz) - k_x \sin(qz)\}$$

$$T_{24} = \frac{1}{2A_1} \{(2S_{45}S_{66} - S_{46}S_{56}) \cos(2qz) + (S_{46}^2 - S_{56}^2 - S_{44}S_{66} + S_{55}S_{66}) \sin(2qz)\}$$

$$T_{25} = \frac{1}{A_1} \{(S_{46}^2 - S_{44}S_{66}) \cos^2(qz) + (S_{56}^2 - S_{55}S_{66}) \sin^2(qz) + (S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66}) \sin(2qz)\}$$

$$T_{26} = \frac{1}{A_1} \{(S_{44}S_{56} - S_{45}S_{46}) \cos(qz) + (S_{45}S_{56} - S_{46}S_{55}) \sin(qz)\}$$

$$T_{31} = \frac{i}{A_1} \{(D_{10}k_x + D_8k_y) \cos(qz) + (D_8k_x + D_{13}k_y) \sin(qz)\}$$

$$T_{32} = \frac{i}{A_1} \{(D_8k_x + D_{13}k_y) \cos(qz) - (D_{10}k_x + D_8k_y) \sin(qz)\}$$

$$T_{33} = 0$$

$$T_{34} = \frac{1}{A_1} \{(S_{46}S_{55} - S_{45}S_{56}) \cos(qz) + (S_{44}S_{56} - S_{45}S_{46}) \sin(qz)\}$$

$$T_{35} = \frac{1}{A_1} \{(S_{44}S_{56} - S_{45}S_{46}) \cos(qz) + (S_{45}S_{56} - S_{46}S_{55}) \sin(qz)\}$$

$$T_{36} = \frac{1}{A_1} (S_{45}^2 - S_{44}S_{55})$$

$$\begin{aligned}
 T_{41} = & \frac{1}{A_1} \{ (-2D_5k_xk_yS_{15} + 2D_6k_xk_yS_{16} + 2D_7k_y^2S_{26} - k_x^2S_{16}^2S_{45}^2 - \\
 & k_y^2S_{26}^2S_{45}^2 + 2k_x^2S_{15}S_{16}S_{45}S_{46} - k_x^2S_{15}^2S_{46}^2 - k_y^2S_{25}^2S_{46}^2 + k_x^2 \times \\
 & S_{16}^2S_{44}S_{55} + k_y^2S_{26}^2S_{44}S_{55} - 2k_x^2S_{14}S_{16}S_{46}S_{55} - 2k_xk_yS_{14} \times \\
 & S_{26}S_{46}S_{55} + k_x^2S_{11}S_{46}^2S_{55} + 2k_xk_yS_{12}S_{45}^2S_{55} + k_y^2S_{22}S_{46}^2S_{55} - \\
 & 2k_x^2S_{15}S_{16}S_{44}S_{56} + 2k_x^2S_{14}S_{16}S_{45}S_{56} + 2k_xk_yS_{14}S_{26}S_{45}S_{56} + \\
 & 2k_x^2S_{14}S_{15}S_{46}S_{56} + 2k_xk_yS_{14}S_{25}S_{46}S_{56} + 2k_y^2 \times S_{24}S_{25}S_{46} \\
 & S_{56} - 2k_x^2S_{11}S_{45}S_{46}S_{56} - 4k_xk_yS_{12}S_{45}S_{46}S_{56} - 2k_y^2S_{22}S_{45} \times \\
 & S_{46}S_{56} - k_x^2S_{14}^2S_{56}^2 - 2k_xk_yS_{14}S_{24}S_{56}^2 - k_y^2S_{24}^2S_{56}^2 + k_x^2S_{11} \times \\
 & S_{44}S_{56}^2 + 2k_xk_yS_{12}S_{44}S_{56}^2 + k_y^2S_{22}S_{44}S_{56}^2 + k_x^2S_{15}^2S_{44}S_{66} + \\
 & k_y^2S_{25}^2S_{44}S_{66} - 2k_x^2S_{14}S_{15}S_{45}S_{66} - 2k_xk_yS_{14}S_{25}S_{45}S_{66} - \\
 & 2k_y^2S_{24}S_{25}S_{45}S_{66} + k_x^2S_{11}S_{45}^2S_{66} + 2k_xk_yS_{12}S_{45}^2S_{66} + k_y^2 \times \\
 & S_{22}S_{45}^2S_{66} + k_x^2S_{14}^2S_{55}S_{66} + 2k_xk_yS_{14} \times S_{24}S_{55}S_{66} + \\
 & k_y^2S_{24}^2S_{55}S_{66} - k_x^2S_{11}S_{44}S_{55}S_{66} - 2k_xk_yS_{12}S_{44}S_{55}S_{66} - \\
 & k_y^2S_{22}S_{44}S_{55}S_{66} - A_1\omega^2\rho) \cos^2(qz) + (2D_{11}k_xk_yS_{25} + \\
 & 2D_7k_x^2S_{26} + 2D_{11}k_xk_yS_{26} - k_x^2S_{26}^2S_{45}^2 - k_y^2S_{36}^2S_{45}^2 + 2k_y^2S_{35} \times \\
 & S_{36}S_{45}S_{46} - k_x^2S_{25}^2S_{46}^2 - k_y^2S_{35}^2S_{46}^2 + k_x^2S_{26}^2S_{44}S_{55} + k_y^2S_{35}^2 \times \\
 & S_{44}S_{55} - 2k_xk_yS_{24}S_{36}S_{46}S_{55} - 2k_y^2S_{34}S_{36}S_{46}S_{55} + k_x^2S_{22} \times \\
 & S_{46}^2S_{55} + 2k_xk_yS_{23}S_{46}^2S_{55} + k_y^2S_{33}S_{46}^2S_{55} - 2k_y^2S_{35}S_{36} \times \\
 & S_{44}S_{56} + 2k_xk_yS_{24}S_{36}S_{45}S_{56} + 2k_y^2S_{34}S_{36}S_{45}S_{56} + 2k_x^2 \times \\
 & S_{24}S_{25}S_{46}S_{56} + 2k_xk_yS_{24}S_{35}S_{46}S_{56} + 2k_y^2S_{34}S_{35}S_{46}S_{56} - \\
 & 2k_x^2S_{22}S_{45}S_{46}S_{56} - 4k_xk_yS_{23}S_{45}S_{46}S_{56} + 2k_y^2S_{33}S_{45} \times \\
 & S_{46}S_{56} - k_x^2S_{24}^2S_{56}^2 - 2k_xk_yS_{24}S_{34}S_{56}^2 - k_y^2S_{34}^2S_{56}^2 + k_x^2S_{22} \times \\
 & S_{44}S_{56}^2 + 2k_xk_yS_{23}S_{44}S_{56}^2 + k_y^2S_{33}S_{44}S_{56}^2 + k_x^2S_{25}^2S_{44}S_{66} + \\
 & k_y^2S_{35}^2S_{44}S_{66} - 2k_x^2S_{24}S_{25}S_{45}S_{66} - 2k_xk_yS_{24}S_{35}S_{45}S_{66} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2k_y^2 S_{34} S_{35} S_{45} S_{66} + k_x^2 S_{22} S_{45}^2 S_{66} + 2k_x k_y \times S_{23} S_{45}^2 S_{66} + k_y^2 S_{33} \times \\
& S_{45}^2 S_{66} + k_x^2 S_{24}^2 S_{55} S_{66} + 2k_x k_y S_{24} S_{34} S_{55} S_{66} + k_y^2 S_{34}^2 S_{55} S_{66} - \\
& k_x^2 S_{22} S_{44} S_{55} S_{66} - 2k_x k_y S_{23} S_{44} S_{55} S_{66} - k_y^2 S_{33} S_{44} S_{55} S_{66} - \\
& A_1 \omega^2 \rho) \sin^2(qz) - (D_5 k_x^2 S_{15} - D_6 k_x^2 S_{16} - D_1 k_x k_y S_{16} - \\
& D_{11} k_y^2 S_{25} - 2D_7 k_x k_y S_{26} - D_1 k_y^2 S_{26} + k_x k_y S_{26}^2 S_{45}^2 - k_x k_y S_{15} S_{36} \times \\
& S_{45} S_{46} + k_x k_y S_{25}^2 S_{46}^2 + k_x k_y S_{15} S_{35} S_{46}^2 - k_x k_y S_{26}^2 S_{44} S_{55} + \\
& k_x^2 S_{14} \times S_{26} S_{46} S_{55} + k_x k_y S_{14} S_{36} S_{46} S_{55} + k_y^2 S_{24} S_{36} S_{46} S_{55} - \\
& k_x^2 S_{12} S_{46}^2 S_{55} - k_x k_y S_{13} S_{46}^2 S_{55} - k_x k_y S_{22} S_{46}^2 S_{55} - k_y^2 S_{23} S_{46}^2 S_{55} + \\
& k_x k_y S_{15} S_{36} S_{44} S_{56} - k_x^2 S_{14} S_{26} S_{45} S_{56} - k_x k_y S_{14} S_{36} S_{45} S_{56} - \\
& k_y^2 S_{24} S_{36} S_{45} S_{56} - k_x^2 S_{14} S_{25} S_{46} S_{56} - 2k_x k_y S_{24} S_{25} S_{46} S_{56} - k_x k_y S_{15} \times \\
& S_{34} S_{46} S_{56} - k_x k_y S_{14} S_{35} S_{46} S_{56} - k_y^2 S_{24} S_{35} S_{46} S_{56} + 2k_x^2 S_{12} S_{45} \times \\
& S_{45} S_{56} + 2k_x k_y S_{13} S_{45} S_{46} S_{56} + 2k_x k_y S_{22} S_{45} S_{46} S_{56} + 2k_y^2 S_{23} S_{45} \times \\
& S_{46} S_{56} + k_x^2 S_{14} S_{24} S_{56}^2 + k_x k_y S_{24}^2 S_{56}^2 + k_x k_y S_{14} S_{34} S_{56}^2 + k_y^2 S_{24} S_{34} S_{56}^2 - \\
& k_x^2 S_{12} S_{44} S_{56}^2 - k_x k_y S_{13} S_{44} S_{56}^2 - k_x k_y S_{22} S_{44} S_{56}^2 - k_y^2 S_{23} S_{44} S_{56}^2 - \\
& k_x k_y S_{25}^2 S_{44} S_{66} - k_x k_y S_{15} S_{35} S_{44} S_{66} + k_x^2 S_{14} S_{25} S_{45} S_{66} + 2k_x k_y \times \\
& S_{24} S_{25} S_{45} S_{66} + k_x k_y S_{15} S_{34} S_{45} S_{66} + k_x k_y S_{14} S_{35} S_{45} S_{66} + k_y^2 S_{24} \times \\
& S_{35} S_{45} S_{66} - k_x^2 S_{12} S_{45}^2 S_{66} - k_x k_y S_{13} S_{45}^2 S_{66} - k_x k_y S_{22} S_{45}^2 S_{66} - \\
& k_y^2 S_{23} S_{45}^2 S_{66} - k_x^2 S_{14} S_{24} S_{55} S_{66} - k_x k_y S_{24}^2 S_{55} S_{66} - k_x k_y S_{14} S_{34} S_{55} S_{66} - \\
& k_y^2 S_{24} S_{34} S_{55} S_{66} + k_x^2 S_{14} S_{44} S_{55} S_{66} + k_x k_y S_{13} S_{44} S_{55} S_{66} + k_x k_y \times \\
& S_{22} S_{44} S_{55} S_{66} + k_y^2 S_{23} S_{44} S_{55} S_{66}) \sin(2qz) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{42} = & -\frac{1}{A_1} \{ \sin(qz) ((2k_x k_x (-D_5 S_{15} + D_6 S_{16} - S_{14} S_{26} S_{46} S_{55} + \\
& S_{12} S_{46}^2 S_{55} + S_{14} S_{26} S_{45} S_{56} + S_{14} S_{25} S_{46} S_{56} - 2S_{12} S_{45} S_{46} S_{56} - \\
& S_{14} S_{24} S_{56}^2 + S_{12} S_{44} S_{56}^2 - S_{14} S_{25} S_{45} S_{66} + S_{12} S_{45}^2 S_{66} + S_{14} S_{24} \times \\
& S_{55} S_{66} - S_{12} S_{44} S_{55} S_{66}) + k_x^2 (S_{11} S_{46}^2 S_{55} + S_{16}^2 (S_{44} S_{55} - S_{45}^2) - \\
& 2S_{11} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{14}^2 S_{56}^2 + S_{11} S_{44} S_{56}^2 + 2S_{16} (S_{15} S_{45} S_{46} - S_{14} \times \\
& S_{46} S_{55} - S_{15} S_{44} S_{56} + S_{14} S_{45} S_{56}) + S_{11} S_{45}^2 S_{66} + S_{14}^2 S_{55} S_{66} - \\
& S_{11} S_{44} S_{55} S_{66} + S_{15}^2 (S_{44} S_{66} - S_{46}^2) + 2S_{14} S_{15} (S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66})) \\
& + k_y^2 (2D_7 S_{26} + S_{22} S_{46}^2 S_{55} + S_{26}^2 (S_{44} S_{55} - S_{45}^2) - 2S_{22} S_{45} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{46}S_{56} - S_{24}^2S_{56}^2 + S_{22}S_{44}S_{56}^2 + S_{22}S_{45}^2S_{66}S_{24}^2S_{55}S_{66} - S_{22}S_{44}S_{55}S_{66} + \\
& S_{25}^2(S_{44}S_{66} - S_{46}^2) + 2S_{24}S_{25}(S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66}) - A_1\omega^2\rho) \cos(qz) + \\
& (k_x^2(-D_5S_{15} + D_6S_{16} - S_{14}S_{26}S_{46}S_{55} + S_{12}S_{46}^2S_{55} + S_{14}S_{26}S_{45}S_{56} + \\
& S_{14}S_{25}S_{46}S_{56} - 2S_{12}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{14}S_{24}S_{56}^2 + S_{12}S_{44}S_{56}^2 - S_{14}S_{25} \times \\
& S_{45}S_{66} + S_{12}S_{45}^2S_{66} + S_{14}S_{24}S_{55}S_{66} - S_{12}S_{44}S_{55}S_{66}) + k_xk_y(D_1S_{16} + \\
& 2D_7S_{26} + S_{15}S_{36}S_{45}S_{46} - S_{25}^2S_{46}^2 - S_{15}S_{35}S_{46}^2 - S_{14}S_{36}S_{46}S_{55} + \\
& S_{13}S_{46}^2S_{55} + S_{22}S_{46}^2S_{55} + S_{26}^2(S_{44}S_{55} - S_{45}^2) - S_{15}S_{36}S_{44}S_{56} + S_{14} \times \\
& S_{36}S_{45}S_{56} + 2S_{24}S_{25}S_{46}S_{56} + S_{15}S_{34}S_{46}S_{56} + S_{14}S_{35}S_{46}S_{56} - \\
& 2S_{13}S_{45}S_{46}S_{56} - 2S_{22}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{24}^2S_{56}^2S_{14}S_{34}S_{56}^2 + S_{13}S_{44}S_{56}^2 + \\
& S_{22}S_{44}S_{56}^2 + S_{25}^2S_{44}S_{66} + S_{15}S_{35}S_{44}S_{66} - 2S_{24}S_{25}S_{45}S_{66} - S_{15}S_{34} \times \\
& S_{45}S_{66} - S_{14}S_{35}S_{45}S_{66} + S_{13}S_{45}^2S_{66} + S_{22}S_{45}^2S_{66} + S_{24}^2S_{55}S_{66} + \\
& S_{14}S_{34}S_{55}S_{66} - S_{13}S_{44}S_{55}S_{66} - S_{22}S_{44}S_{55}S_{66}) + k_y^2(D_{11}S_{25} + \\
& D_1S_{26} - S_{24}S_{36}S_{46}S_{55} + S_{23}S_{46}^2S_{55} + S_{24}S_{36}S_{45}S_{56} + S_{24}S_{35}S_{46} \times \\
& S_{56} - 2S_{23}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{24}S_{34}S_{56}^2 + S_{23}S_{44}S_{56}^2 - S_{24}S_{35}S_{45}S_{66} + \\
& S_{23}S_{45}^2S_{24}S_{34}S_{55}S_{66} - S_{23}S_{44}S_{55}S_{66})) \sin(qz) - \cos(qz) \times \\
& ((k_x^2(-D_5S_{15} + D_6S_{16} - S_{14}S_{26}S_{46}S_{55} + S_{12}S_{46}^2S_{55} + S_{14}S_{26} \times \\
& S_{45}S_{56} + S_{14}S_{25}S_{46}S_{56} - 2S_{12}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{14}S_{24}S_{56}^2 + S_{12}S_{44} \times \\
& S_{56}^2 - S_{14}S_{25}S_{45}S_{66} + S_{12}S_{45}^2S_{66} + S_{14}S_{24}S_{55}S_{66} - S_{12}S_{44}S_{55}S_{66}) + \\
& k_xk_y(D_1S_{16} + 2D_7S_{26}S_{15}S_{36}S_{45}S_{46} - S_{25}^2S_{46}^2 - S_{15}S_{35}S_{46}^2 - S_{14}S_{36} \times \\
& S_{46}S_{55} + S_{13}S_{46}^2S_{55} + S_{22}S_{46}^2S_{55} + S_{26}^2(S_{44}S_{55} - S_{45}^2) - S_{15}S_{36}S_{44} \times \\
& S_{56} + S_{14}S_{36}S_{45}S_{56} + 2S_{24}S_{25}S_{46}S_{56} + S_{15}S_{34}S_{46}S_{56} + S_{14}S_{35}S_{46} \times \\
& S_{56} - 2S_{13}S_{45}S_{46}S_{56} - 2S_{22}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{24}^2S_{56}^2 - S_{14}S_{34}S_{56}^2 + S_{13} \times \\
& S_{44}S_{56}^2 + S_{22}S_{44}S_{56}^2 + S_{25}^2S_{44}S_{66} + S_{15}S_{35}S_{44}S_{66} - 2S_{24}S_{25}S_{45}S_{66} - \\
& S_{15}S_{34}S_{45}S_{66} - S_{14}S_{35}S_{45}S_{66} + S_{13}S_{45}^2S_{66} + S_{22}S_{45}^2S_{66} + S_{24}^2S_{55} \times \\
& S_{66} + S_{14}S_{34}S_{55}S_{66} - S_{13}S_{44}S_{55}S_{66} - S_{22}S_{44}S_{55}S_{66}) + k_y^2 \times \\
& (D_{11}S_{25} + D_1S_{26} - S_{24}S_{36}S_{46}S_{55} + S_{23}S_{46}^2S_{55} + S_{24}S_{36}S_{45}S_{56} + \\
& S_{24}S_{35}S_{46}S_{56} - 2S_{23}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{24}S_{34}S_{56}^2 + S_{23}S_{44}S_{56}^2 - S_{24} \times \\
& S_{35}S_{45}S_{66} + S_{23}S_{45}^2S_{66} + S_{24}S_{34}S_{55}S_{66} - S_{23}S_{44}S_{55}S_{66})) \times \\
& \cos(qz) + (2k_xk_y(D_{11}S_{25} + D_1S_{26} - S_{24}S_{36}S_{46}S_{55} + S_{23}S_{46}^2 \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S_{55} + S_{24}S_{36}S_{45}S_{56} + S_{24}S_{35}S_{46}S_{56} - 2S_{23}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{24}S_{34} \times \\
 & S_{56}^2 + S_{23}S_{44}S_{56}^2 - S_{24}S_{35}S_{45}S_{66} + S_{23}S_{45}^2S_{66} + S_{24}S_{34}S_{55}S_{56} - \\
 & S_{23}S_{44}S_{55}S_{66}) + k_x^2 (2D_7S_{26} + S_{22}S_{46}^2S_{55} + S_{26}^2 (-S_{45}^2 + \\
 & S_{44}S_{55}) - 2S_{22}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{24}^2S_{56}^2 + S_{22}S_{44}S_{56}^2 + S_{22}S_{45}^2S_{66} + \\
 & S_{24}^2S_{55}S_{66} - S_{22}S_{44}S_{55}S_{66} + S_{25}^2 (S_{44}S_{66} - S_{46}^2) + 2S_{24}S_{25} \times \\
 & (S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66})) + k_y^2 (S_{33}S_{46}^2S_{55} + S_{36}^2 (S_{44}S_{55} - S_{45}^2) - \\
 & 2S_{33}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{34}^2S_{56}^2 + S_{33}S_{44}S_{56}^2 + 2S_{36} (S_{35}S_{45}S_{46} - \\
 & S_{34}S_{46}S_{55} - S_{35}S_{44}S_{56} + S_{34}S_{45}S_{56}) + S_{33}S_{45}^2S_{66} + \\
 & S_{34}^2S_{55}S_{66} - S_{33}S_{44}S_{55}S_{66} + S_{35}^2 (S_{44}S_{66} - S_{46}^2) + 2S_{34}S_{35} \times \\
 & (S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66})) - A_1\omega^2\rho) \sin(qz)) \}
 \end{aligned}$$

$$T_{43} = 0$$

$$\begin{aligned}
 T_{44} &= \frac{i}{A_1} \{ (D_2k_x + D_3k_y) \cos^2(qz) + (D_5k_x + D_4k_y) \sin^2(qz) + \\
 & \frac{1}{2} ((D_3 + D_9) k_x + (D_{12} + D_5) k_y) \sin(2qz) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{45} &= \frac{i}{2A_1} \{ (D_9 - D_3) k_x + (D_5 - D_{12}) k_y - 2iA_1q + ((D_3 + D_9) k_x + \\
 & (D_{12} + D_5) k_y) \cos(2qz) + ((D_5 - D_2) k_x + (D_4 - D_3) k_y) \\
 & \sin(2qz) \}
 \end{aligned}$$

$$T_{46} = \frac{i}{A_1} \{ (D_{10}k_x + D_8k_y) \cos(qz) + (D_8k_x + D_{13}k_y) \sin(qz) \}$$

$$\begin{aligned}
T_{51} = & \frac{1}{A_1} \{ \sin(qz) ((2k_x k_y (D_{11} S_{25} + D_1 S_{26} - S_{24} S_{35} S_{46} S_{55} + S_{23} \times \\
& S_{46}^2 S_{55} + S_{24} S_{36} S_{45} S_{56} + S_{24} S_{35} S_{46} S_{56} - 2S_{23} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24} \times \\
& S_{34} S_{56}^2 + S_{23} S_{44} S_{56}^2 - S_{24} S_{35} S_{45} S_{66} + S_{23} S_{45}^2 S_{66} + S_{24} S_{34} \times \\
& S_{55} S_{66} - S_{23} S_{44} S_{55} S_{66}) + k_x^2 (2D_7 S_{26} + S_{22} S_{46}^2 S_{55} + S_{26}^2 \times \\
& (S_{44} S_{55} - S_{45}^2) - 2S_{22} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24}^2 S_{56}^2 + S_{22} S_{44} S_{56}^2 + S_{22} \times \\
& S_{45}^2 S_{66} + S_{24}^2 S_{55} S_{66} - S_{22} S_{44} S_{55} S_{66} + S_{25}^2 (S_{44} S_{66} - S_{46}^2) + \\
& 2S_{24} S_{35} (S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66})) + k_y^2 (S_{33} S_{46}^2 S_{55} + S_{36}^2 (S_{44} S_{55} - \\
& S_{45}^2) - 2S_{33} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{34}^2 S_{56}^2 + S_{33} S_{44} S_{56}^2 + 2S_{36} \times \\
& (S_{35} S_{45} S_{46} - S_{34} S_{46} S_{55} - S_{35} S_{44} S_{56} + S_{34} S_{45} S_{56}) + S_{33} S_{45}^2 \times \\
& S_{66} + S_{34}^2 S_{55} S_{66} - S_{33} S_{44} S_{55} S_{66} + S_{35}^2 (S_{44} S_{66} - S_{46}^2) + 2S_{34} \times \\
& S_{35} (S_{46} S_{56} - S_{45} S_{66})) - A_1 \omega^2 \rho) \cos(qz) - (k_x^2 (-D_5 S_{15} + \\
& D_6 S_{16} - S_{14} S_{26} S_{46} S_{55} + S_{12} S_{46}^2 S_{55} + S_{14} S_{26} S_{45} S_{56} + S_{14} S_{25} \times \\
& S_{46} S_{56} - 2S_{12} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{14} S_{24} S_{56}^2 + S_{12} S_{44} S_{56}^2 - S_{14} S_{25} \times \\
& S_{45} S_{66} + S_{12} S_{45}^2 S_{66} + S_{14} S_{24} S_{55} S_{66} - S_{12} S_{44} S_{55} S_{66}) + k_x \times \\
& k_y (D_1 S_{16} + 2D_7 S_{26} + S_{15} S_{36} S_{45} S_{46} - S_{25}^2 S_{46}^2 - S_{15} S_{35} S_{46}^2 - \\
& S_{14} S_{36} S_{46} S_{55} + S_{13} S_{46}^2 S_{55} + S_{22} S_{46}^2 S_{55} S_{26}^2 (S_{44} S_{55} - S_{45}^2) - \\
& S_{15} S_{36} S_{44} S_{56} + S_{14} S_{36} S_{45} S_{56} + 2S_{24} S_{25} S_{45} S_{56} + S_{15} S_{34} \times \\
& S_{46} S_{56} + S_{14} S_{35} S_{46} S_{56} - 2S_{13} S_{45} S_{46} S_{56} - 2S_{22} S_{45} S_{46} S_{56} - \\
& S_{24}^2 S_{56}^2 - S_{14} S_{34} S_{56}^2 + S_{13} S_{44} S_{56}^2 + S_{22} S_{44} S_{56}^2 + S_{25}^2 S_{44} S_{66} + \\
& S_{15} S_{35} S_{44} S_{66} - 2S_{24} S_{25} S_{45} S_{66} - S_{15} S_{34} S_{45} S_{66} - S_{14} S_{35} \times \\
& S_{45} S_{66} + S_{13} S_{45}^2 S_{66} + S_{22} S_{45}^2 S_{66} + S_{24}^2 S_{55} S_{66} + S_{14} S_{34} \times \\
& S_{55} S_{66} - S_{13} S_{44} S_{55} S_{66} - S_{22} S_{44} S_{55} S_{66}) + k_y^2 (D_{11} S_{25} + \\
& D_1 S_{26} - S_{24} S_{36} S_{46} S_{55} + S_{23} S_{46}^2 S_{55} + S_{24} S_{36} S_{45} S_{56} + \\
& S_{24} S_{35} S_{46} S_{56} - 2S_{23} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{24} S_{34} S_{56}^2 + S_{23} S_{44} S_{56}^2 - \\
& S_{24} S_{35} S_{45} S_{66} + S_{23} S_{45}^2 S_{66} + S_{24} S_{34} S_{55} S_{66} - S_{23} S_{44} \times \\
& S_{55} S_{66})) \sin(qz) + \cos(qz) ((k_x^2 \times (-D_5 S_{15} + D_6 S_{16} - \\
& S_{14} S_{26} S_{46} S_{55} + S_{12} S_{46}^2 S_{55} + S_{14} S_{26} S_{45} S_{56} + S_{14} S_{25} \times \\
& S_{46} S_{56} - 2S_{12} S_{45} S_{46} S_{56} - S_{14} S_{24} S_{56}^2 + S_{12} S_{44} S_{56}^2 - S_{14} \times \\
& S_{25} S_{45} S_{66} + S_{12} S_{45}^2 S_{66} + S_{14} S_{24} S_{55} S_{66} - S_{12} S_{44} S_{55} S_{66}) + \\
& k_x k_y (D_1 S_{16} + 2D_7 S_{26} + S_{15} S_{36} S_{45} S_{46} - S_{25}^2 S_{46}^2 - S_{15} S_{35} S_{46}^2 - \\
& S_{14} S_{36} S_{45} S_{55} + S_{13} S_{46}^2 S_{55} + S_{22} S_{46}^2 S_{55} + S_{26}^2 (S_{44} S_{55} - S_{45}^2) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{15}S_{36}S_{44}S_{56} + S_{14}S_{36}S_{45}S_{56} + 2S_{24}S_{25}S_{46}S_{56} + S_{15}S_{34} \times \\
& S_{46}S_{56} + S_{14}S_{35}S_{46}S_{56} - 2S_{13}S_{45}S_{46}S_{56} - 2S_{22}S_{45}S_{45}S_{56} - \\
& S_{24}^2S_{56}^2 - S_{14}S_{34}S_{56}^2 + S_{13}S_{44}S_{56}^2 + S_{22}S_{44}S_{56}^2 + S_{25}^2S_{44}S_{66} + \\
& S_{15}S_{35}S_{44}S_{66} - 2S_{24}S_{25}S_{45}S_{66} - S_{15}S_{34}S_{45}S_{66} - S_{14}S_{35} \times \\
& S_{45}S_{66} + S_{13}S_{45}^2S_{66} + S_{22}S_{45}^2S_{66} + S_{24}^2S_{55}S_{66} + S_{14}S_{34} \times \\
& S_{55}S_{66} - S_{13}S_{44}S_{55}S_{66} - S_{22}S_{44}S_{55}S_{66}) + k_y^2 \times \\
& (D_{11}S_{25} + D_1S_{26} - S_{24}S_{36}S_{46}S_{55} + S_{23}S_{46}^2S_{55} + S_{24}S_{36}S_{45} \times \\
& S_{56} + S_{24}S_{35}S_{46}S_{56} - 2S_{23}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{24}S_{34}S_{56}^2 + S_{23}S_{44}S_{56}^2 - \\
& S_{24}S_{35}S_{45}S_{66} + S_{23}S_{45}^2S_{66} + S_{24}S_{34}S_{55}S_{66} - S_{23}S_{44}S_{55}S_{66})) \times \\
& \cos(qz) - (2k_xk_y(-D_5S_{15} + D_6S_{16} - S_{14}S_{26}S_{46}S_{55} + S_{12}S_{46}^2S_{55} + \\
& S_{14}S_{26}S_{45}S_{56} - S_{14}S_{25}S_{46}S_{56} - 2S_{12}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{14}S_{24}S_{56}^2 + \\
& S_{12}S_{44}S_{56}^2 - S_{14}S_{25}S_{45}S_{66} + S_{12}S_{45}^2S_{66} + S_{14}S_{24}S_{55}S_{66} - \\
& S_{12}S_{44}S_{55}S_{66}) + k_x^2(S_{11}S_{46}^2S_{55} + S_{16}^2(S_{44}S_{55} - S_{45}^2) - 2S_{11}S_{45} \times \\
& S_{46}S_{56} - S_{14}^2S_{56}^2 + S_{11}S_{44}S_{56}^2 + 2S_{16}(S_{15}S_{45}S_{46} - S_{14}S_{46}S_{55} - \\
& S_{15}S_{44}S_{56} + S_{14}S_{45}S_{56}) + S_{11}S_{45}^2S_{66} + S_{14}^2S_{55}S_{66} - S_{11}S_{44}S_{55}S_{66} + \\
& S_{15}^2(S_{44}S_{66} - S_{46}^2) + 2S_{14}S_{15}(S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66})) + k_y^2(2D_7S_{26} + \\
& S_{22}S_{46}^2S_{55}S_{26}^2(S_{44}S_{55} - S_{45}^2) - 2S_{22}S_{45}S_{46}S_{56} - S_{24}^2S_{56}^2 + S_{22} \times \\
& S_{44}S_{56}^2 + S_{22}S_{45}^2S_{66} + S_{24}^2S_{55}S_{66} - S_{22}S_{44}S_{55}S_{66} + S_{25}^2(S_{44}S_{66} - \\
& S_{46}^2) + 2S_{24}S_{25}(S_{46}S_{56} - S_{45}S_{66})) - A_1\omega^2\rho \sin(qz)) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{52} = & \frac{1}{A_1} \{ (2D_{11}k_xk_yS_{25} + 2D_7k_x^2S_{26} + 2D_1k_xk_yS_{26} - k_x^2S_{26}^2S_{45}^2 - \\
& k_y^2S_{36}^2S_{45}^2 + 2k_y^2S_{35}S_{36}S_{45}S_{46} - k_x^2S_{25}^2S_{46}^2 - k_y^2S_{35}^2S_{46}^2 + k_x^2 \times \\
& S_{26}^2S_{44}S_{55} + k_y^2S_{36}^2S_{44}S_{55} - 2k_xk_yS_{24}S_{36}S_{46}S_{55} - 2k_y^2S_{34} \times \\
& S_{36}S_{46}S_{55} + k_x^2S_{22}S_{46}^2S_{55} + 2k_xk_yS_{23}S_{46}^3S_{55} + k_y^2S_{33}S_{46}^2 \times \\
& S_{55} - 2k_y^2S_{35}S_{36}S_{44}S_{56} + 2k_xk_yS_{24}S_{35}S_{45}S_{56} + 2k_y^2S_{34} \times \\
& S_{36}S_{45}S_{56} + 2k_x^2S_{24}S_{25}S_{46}S_{56} + 2k_xk_yS_{24}S_{35}S_{46}S_{56} + \\
& 2k_y^2S_{34}S_{35}S_{46}S_{56} - 2k_x^2S_{22}S_{45}S_{46}S_{56} - 4k_xk_yS_{23}S_{45} \times \\
& S_{46}S_{56} - 2k_y^2S_{33}S_{45} \times S_{46}S_{56} - k_x^2S_{24}^2S_{56}^2 - 2k_xk_yS_{24}S_{34} \times \\
& S_{56}^2 - k_y^2S_{34}^2S_{56}^2 + k_x^2S_{22}S_{44}S_{56}^2 + 2k_yS_{23}S_{44}S_{56}^2 + k_y^2S_{33} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{44}S_{56}^2 + k_x^2S_{25}^2S_{44}S_{55} + k_y^2S_{35}^2S_{44}S_{66} - 2k_x^2S_{24}S_{25}S_{45}S_{66} - \\
& 2k_xk_yS_{24}S_{35}S_{45}S_{66} - 2k_x^2S_{34}S_{35}S_{45}S_{66} + \\
& k_x^2S_{22}S_{45}^2S_{66} + 2k_xk_yS_{23}S_{45}^2S_{66} + k_y^2S_{33}S_{45}^2S_{66} + k_x^2S_{24}^2S_{55}S_{66} + \\
& 2k_xk_yS_{24}S_{34}S_{55}S_{66} + k_y^2S_{34}^2S_{55}S_{66} - k_x^2S_{22}S_{44}S_{55}S_{66} - 2k_xk_y \times \\
& S_{23}S_{44}S_{55}S_{66} - k_y^2S_{33}S_{44}S_{55}S_{66} - A_1\omega^2\rho) \cos^2(qz) + \\
& (-2D_5k_xk_yS_{15} + 2D_6k_xk_yS_{16} + D_7k_y^2S_{26} - k_x^2S_{16}^2S_{45}^2 - k_y^2S_{26}^2S_{45}^2 + \\
& 2k_x^2S_{15}S_{16}S_{45}S_{46} - k_x^2S_{15}^2S_{46}^2 - k_y^2S_{25}^2S_{46}^2 + k_x^2S_{16}^2S_{44}S_{55} + k_y^2S_{26}^2 \times \\
& S_{44}S_{55} - 2k_x^2S_{14}S_{16}S_{46}S_{55} - 2k_xk_yS_{14}S_{26}S_{46}S_{55} + k_x^2S_{11}S_{46}^2S_{55} + \\
& 2k_xk_yS_{12}S_{46}^2S_{55} + k_x^2S_{22}S_{46}^2S_{55} - 2k_x^2S_{15}S_{16}S_{44}S_{56} + 2k_x^2S_{14}S_{16} \times \\
& S_{45}S_{56} + 2k_xk_yS_{14}S_{26}S_{45}S_{56} + 2k_x^2S_{14}S_{15}S_{46}S_{56} + 2k_xk_yS_{14}S_{25} \times \\
& S_{46}S_{56} + 2k_y^2S_{24}S_{25}S_{46}S_{56} - 2k_x^2S_{22}S_{45}S_{46}S_{56} - k_x^2S_{14}^2S_{56}^2 - 2k_xk_y \times \\
& S_{14}S_{24}S_{56}^2 - k_y^2S_{24}^2S_{56}^2 + k_x^2S_{11}S_{44}S_{56}^2 + 2k_xk_yS_{12}S_{44}S_{56}^2 + k_y^2S_{22} \times \\
& S_{44}S_{56}^2 + k_x^2S_{15}^2S_{44}S_{66} + k_y^2S_{25}^2S_{44}S_{66} - 2k_x^2S_{14}S_{15}S_{45}S_{66} - 2k_xk_y \times \\
& S_{14}S_{25}S_{45}S_{66} - 2k_y^2S_{24}S_{25}S_{45}S_{66} + k_x^2S_{11}S_{45}^2S_{66} + 2k_xk_yS_{12}S_{45}^2S_{66} + \\
& k_y^2S_{22}S_{45}^2S_{66} + k_x^2S_{14}^2S_{55}S_{66} + 2k_xk_yS_{14}S_{24}S_{55}S_{66} + k_y^2S_{24}^2S_{55}S_{66} - \\
& k_x^2S_{11}S_{44}S_{55}S_{66} - 2k_xk_yS_{12}S_{44}S_{55}S_{66} - k_y^2S_{22}S_{44}S_{55}S_{66} - A_1\omega^2\rho) \times \\
& \sin^2(qz) + (D_5k_x^2S_{15} - D_6k_x^2S_{16} - D_1k_xk_yS_{16} - D_{11}k_y^2S_{25} - 2 \times \\
& D_7k_xk_yS_{26} - D_1k_y^2S_{26} + k_xk_yS_{26}^2S_{45}^2 - k_xk_yS_{15}S_{36}S_{45}S_{46} + k_xk_yS_{25}^2 \times \\
& S_{46}^2 + k_xk_yS_{15}S_{35}S_{46}^2 - k_xk_yS_{26}^2S_{44}S_{55} + k_x^2S_{14}S_{26}S_{46}S_{55} + k_xk_y \times \\
& S_{14}S_{36}S_{45}S_{55} + k_y^2S_{24}S_{36}S_{46}S_{55} - k_x^2S_{12}S_{46}^2S_{55} - k_xk_yS_{13}S_{46}^2S_{55} - \\
& k_xk_yS_{22}S_{46}^2S_{55} - k_y^2S_{23}S_{46}^2S_{55} + k_xk_yS_{15}S_{36}S_{44}S_{56} - k_x^2S_{14}S_{26} \times \\
& S_{45}S_{56} - k_xk_yS_{14} \times S_{36}S_{45}S_{56} - k_y^2S_{24}S_{36}S_{45}S_{56} - k_x^2S_{14}S_{25}S_{46}S_{56} - \\
& 2k_xk_yS_{24}S_{25}S_{46}S_{56} - k_xk_yS_{15}S_{34}S_{46}S_{56} - k_xk_yS_{14}S_{35}S_{46}S_{56} - \\
& k_y^2S_{24}S_{35}S_{46}S_{56} + 2k_x^2S_{12}S_{45}S_{46}S_{56} + 2k_y^2S_{23}S_{45}S_{46}S_{56} + \\
& k_x^2S_{14}S_{24}S_{56} + k_xk_yS_{24}^2S_{56}^2 + k_xk_yS_{14}S_{34}S_{56}^2 + k_y^2S_{24}S_{34}S_{56}^2 - \\
& k_x^2S_{12}S_{44}S_{56}^2 - k_xk_yS_{13}S_{44}S_{56}^2 - k_xk_yS_{22}S_{44}S_{56}^2 - k_y^2S_{23}S_{44}S_{56}^2 - \\
& k_xk_yS_{25}^2S_{44}S_{66} - k_xk_yS_{15}S_{35}S_{44}S_{56} + k_x^2S_{14}S_{25}S_{45}S_{66} + \\
& 2k_xk_yS_{24}S_{24}S_{45}S_{66} + k_xk_yS_{15}S_{34}S_{45}S_{66} + k_xk_yS_{14}S_{35}S_{45}S_{66} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_y^2 S_{24} S_{35} S_{45} S_{66} - k_x^2 S_{12} S_{45}^2 S_{66} - k_x k_y S_{13} S_{45}^2 S_{66} - k_x k_y S_{22} S_{45}^2 S_{66} - \\
& k_y^2 S_{23} S_{45}^2 S_{66} - k_x^2 S_{14} S_{24} S_{55} S_{66} - k_x k_y S_{24} S_{55} S_{66} - k_x k_y S_{14} S_{34} \times \\
& S_{55} S_{66} - k_y^2 S_{24} S_{34} S_{55} S_{66} + k_x^2 S_{12} S_{44} S_{55} S_{66} + k_x k_y S_{13} S_{44} S_{55} S_{66} + \\
& k_x k_y S_{22} S_{44} S_{55} S_{66} + k_y^2 S_{23} S_{44} S_{55} S_{66} \sin(2qz) \}
\end{aligned}$$

$$T_{53} = 0$$

$$\begin{aligned}
T_{54} = \frac{i}{2A_1} \{ & (D_3 - D_9) k_x + (D_{12} - D_5) k_y + 2iA_1 q + ((D_3 + \\
& D_9) k_x + (D_{12} + D_5) k_y) \cos(2qz) + ((D_5 - D_2) k_x + \\
& (D_4 - D_3) k_y) \sin(2qz) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{55} = \frac{i}{2A_1} \{ & 2(D_5 k_x + D_4 k_y) \cos^2(qz) + 2(D_2 k_x + D_3 k_y) \times \\
& \sin^2(qz) - ((D_3 + D_9) k_x + (D_{12} + D_5) k_y) \sin(2qz) \}
\end{aligned}$$

$$T_{56} = \frac{i}{A_1} \{ (D_8 k_x + D_{13} k_y) \cos(qz) - (D_{10} k_x + D_8 k_y) \sin(qz) \}$$

$$T_{61} = 0$$

$$T_{62} = 0$$

$$T_{63} = -\omega^2 \rho$$

$$T_{64} = i(k_x \cos(qz) + k_y \sin(qz))$$

$$T_{65} = i(k_y \cos(qz) - k_x \sin(qz))$$

$$T_{66} = 0$$

Con

$$A_1 = S_{46}^2 S_{55} - 2S_{45} S_{46} S_{56} + S_{44} S_{56}^2 + S_{45}^2 S_{66} - S_{44} S_{55} S_{66}$$

$$D_1 = -S_{36}S_{45}^2 + S_{35}S_{45}S_{46} + S_{36}S_{44}S_{55} - S_{34}S_{46}S_{55} - S_{35}S_{44}S_{56} + S_{34}S_{45}S_{56}$$

$$D_2 = S_{16}S_{46}S_{55} - S_{16}S_{45}S_{56} - S_{15}S_{46}S_{56} + S_{14}S_{56}^2 + S_{15}S_{45}S_{66} - S_{14}S_{55}S_{66}$$

$$D_3 = S_{26}S_{46}S_{55} - S_{26}S_{45}S_{56} - S_{25}S_{46}S_{56} + S_{24}S_{56}^2 + S_{25}S_{45}S_{66} - S_{24}S_{55}S_{66}$$

$$D_4 = -S_{36}S_{45}S_{46} + S_{35}S_{46}^2 + S_{36}S_{44}S_{56} - S_{34}S_{46}S_{56} - S_{35}S_{44}S_{66} + S_{34}S_{45}S_{66}$$

$$D_5 = -S_{26}S_{45}S_{46} + S_{25}S_{46}^2 + S_{26}S_{44}S_{56} - S_{24}S_{46}S_{56} - S_{25}S_{44}S_{66} + S_{24}S_{45}S_{66}$$

$$D_6 = -S_{25}S_{45}^2 + S_{25}S_{45}S_{46} + S_{24}S_{44}S_{55} - S_{24}S_{46}S_{55} - S_{25}S_{44}S_{56} + S_{24}S_{45}S_{56}$$

$$D_7 = S_{25}S_{45}S_{46} - S_{24}S_{46}S_{55} - S_{25}S_{44}S_{56} + S_{24}S_{45}S_{56}$$

$$D_8 = -S_{25}S_{45}S_{46} + S_{24}S_{46}S_{55} + S_{26}(S_{45}^2 - S_{44}S_{55}) + S_{25}S_{44}S_{56} - S_{24}S_{45}S_{56}$$

$$D_9 = -S_{16}S_{45}S_{46} + S_{15}S_{46}^2 + S_{16}S_{44}S_{56} - S_{14}S_{46}S_{56} - S_{15}S_{44}S_{66} + S_{14}S_{45}S_{66}$$

$$D_{10} = -S_{15}S_{45}S_{46} + S_{14}S_{46}S_{55} + S_{16}(S_{45}^2 - S_{44}S_{55}) + S_{15}S_{44}S_{56} - S_{14}S_{45}S_{56}$$

$$D_{11} = S_{36}S_{45}S_{46} - S_{35}S_{46}^2 - S_{36}S_{44}S_{56} + S_{34}S_{46}S_{56} + S_{35}S_{44}S_{66} - S_{34}S_{45}S_{66}$$

$$D_{12} = S_{35}S_{46}S_{55} - S_{36}S_{45}S_{56} - S_{35}S_{46}S_{56} + S_{34}S_{56}^2 + S_{35}S_{45}S_{66} - S_{34}S_{55}S_{66}$$

$$D_{13} = S_{34}S_{46}S_{55} - S_{35}S_{45}S_{46} + S_{36}(S_{45}^2 - S_{44}S_{55}) + S_{35}S_{44}S_{56} - S_{34}S_{45}S_{56}$$

Bibliografía

- [1] M. Jaskólski. "Integrating biocrystallography into traditional biology and chemistry curricula". *J. App. Cryst.* (2001). 34, 371-374
- [2] S. Chandrasekhar, F.R.S "Liquid Crystals" Segunda Edición. Cambridge University Press 1992
- [3] I. V. Dindel, "Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media", Artech House, Boston USA, 1994
- [4] E. Hecht y A. Zajac, *Óptica*, Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware USA, 19986
- [5] H. de Vries, "Acta Crystallogr". 4, 219 (1951)
- [6] E. I. Kats, *Soviet Physics JETP*, 32 5, 1004 (1971)
- [7] C. G. Avendaño, S. Ponti, J. A. Reyes y C. Oldano, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38, 8821-8840 (2005)
- [8] V. I. Kopp, B. Fan, H. K. M. Vithana y A. Z. Genack, "Low-threshold lasing at the edge of a photonic stop band in cholesteric liquid crystals", *Opt. Lett* 23, 1707 (1988)
- [9] S. F. Nagle, A. Lakhtakia y W. J. Thompson, *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 42 (1995)
- [10] C. Oldano y S. Ponti, *Phys. Rev. E* 63, 011703 (2000)
- [11] C. Oldano, J. A. Reyes y S. Ponti. *Phys. Rev. E*, 67, 056624 (2003)
- [12] M. Warner y E. M. Terentjev. "Liquid Crystals Elastomers", Oxford University Press, Oxford, UK, 2003. Capítulo 9
- [13] A. Lakhtakia, R. Messier, M. J. Brett y K. Robbie, "Innovations Mater". *Res.* 1. 165 (1996)
- [14] A. Lakhtakia y R. Messier, "Sculptured thin films-I" *Concepts, Mater Res Innovat* 1 (1997), 145-148
- [15] K. Robbie, M. J. Brett y A. Lakhtakia, "First thin film realization of a helicoidal bianisotropic medium" *J Vac Sci Technol A* 13 (1995), 2991-2993
- [16] K. Robbie, M. J. Brett y A. Lakhtakia, "Chiral sculptured thin films" *Nature* 384 (1996), 616
- [17] N. O. Young y J. Kowal, "Optically active fluorite films. *Nature* 183 (1959), 104-105
- [18] J- J. Hodgkinson, Q. H. Wu, K. E. Thorn, A. Lakhtakia y M. W. McCall, *Opt. Commun.* 184, 57 (2000)
- [19] M. Bechi, S. Ponti, J. A. Reyes y C. Oldano, *Phys. Rev. B* 70, 033103 (2004)
- [20] C. Oldano, *Phys. Rev. Lett.* 91, 259401 (2003)
- [21] A. Lakhtakia, "Sensors and Actuators", *A.* 80, 216 (2000)
- [22] J. Schmidtke, W. Stille y H. Finkelmann, *Phys. Rev. Lett.* 90, 83902 (2003)
- [23] M. Ozaki, R. Ozaki, T. Matsui y K. Yoshino, *Jpn J. Appl. Phys, Part 2* 42, L472 (2003)

- [24] M. Kleman, O. D. Lavrentovich, "Soft Matter Physics. An Introduction". Springer 2003
- [25] P. G. de Gennes, J. Prost. "The Physics of Liquid Crystals" Segunda Edición. Clarendon Press. Oxford 1993
- [26] Seoktae Lee. Solution of Maxwell's Equations. arXiv:10008.5045 (physics.gen-ph) 2010
- [27] P. M. Chaikin, T.C. Lubensky "Principle of condensed matter physics". Cambridge University Press 1995
- [28] S. Pikin, L. Blinov, "Cristales Líquidos". Editorial Mir Moscú. 1985.
- [29] David J. Griffiths. Introduction to Electrodynamics. Reed Colege. Tercera Edición. Prentice Hall 1999.
- [30] Rajiv Manohar, J. P. Shukla. Refractive indices, order parameter an principal polarizability of cholesteric liquid crystals and their homogeneous mixtures. Journal of Physics and Chemistry of Solids. 65 (2004) 1643-1650
- [31] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. "Theory of Elasticity" Course of Theoretical Physics. Volume 7. Tercera Edición. Pergamon Press (1986)
- [32] R. M. Velasco Belmont, "Introducción a la Elasticidad", Universidad Autónoma Metropolitana, Primera Edición 2009
- [33] B.G. Lívshits, V. S. Kraposhin, Ya. L. Linetski. "Propiedades físicas de los metales y aleaciones" Editorial Mir-Moscú. 1980. Traducción por K. Steinberg. 1982
- [34] Michael A. Slawinski, "Waves and rays in elastic continua". Segunda edición. World Scientific Publishing Company. 2010 pp. 93-117
- [35] Chapman, C. (20014) "Fundamentals of seismic wave propagation. Cambridge University Press, pp. 92-94
- [36] Allan Clark. "Elements of Abstract Algebra" Purdue University, Dover Publications, Inc. New York. 1984