



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

ANÁLISIS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR Y EFECTOS DE LAS  
CONDICIONES DE INTERFASE EN EL PROCESO DE ENFRIAMIENTO POR  
TRANSPIRACIÓN

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
M. EN C. MANUEL PERALTA GUTIÉRREZ

TUTOR PRINCIPAL  
DR. OSCAR ELADIO, BAUTISTA, GODÍNEZ, ESIME UA-IPN  
COMITÉ TUTOR  
DR. FEDERICO, MÉNDEZ, LAVIELLE, FACULTAD DE INGENIERÍA-UNAM  
DR. JAIME GONZALO, CERVANTES, DE GORTARI, FACULTAD DE  
INGENIERÍA-UNAM

MÉXICO, D. F. AGOSTO 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Cervantes de Gortari Jaime Gonzalo

Secretario: Dr. Méndez Lavielle Federico

Vocal: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier

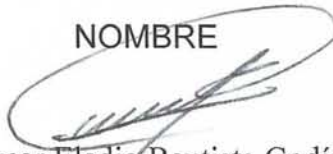
1 er. Suplente: Dr. Bautista Godínez Oscar Eladio

2 d o. Suplente: Dr. Arcos Hernández José Carlos

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Ingeniería - UNAM  
SEPI ESIME UA - IPN

**TUTOR DE TESIS:**

NOMBRE



Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez

-----  
**FIRMA**

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

TESIS DOCTORAL

---

Análisis de la transferencia de calor y  
efectos de las condiciones de interfase en  
el proceso de enfriamiento por  
transpiración

---

*Autor:*

Manuel PERALTA

*Asesor:*

Dr. Oscar BAUTISTA

*Tesis presentada en cumplimiento del requisito  
para obtener el grado de Doctor en Ingeniería Mecánica*

*en el*

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería  
Facultad de Ingeniería

12 de agosto de 2015

*“A quienes jamas encontraré la forma de agradecer el cariño, comprensión y apoyo brindado en los momentos buenos y malos de mi vida hago este triunfo compartido, solo esperando que comprendan que mis ideales y esfuerzos son inspirados en cada uno de ustedes, con profundo amor y agradecimiento. A mi familia.”*

Manuel Peralta

## *Agradecimientos*

Agradezco, con gran afecto al Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez, quien reivindicó mis metas. Por su amistad, su apoyo y solidaridad científica que han sido fundamentales para mi formación a lo largo de todos estos años, Gracias.

A los profesores: Dr. Federico Méndez Lavielle y Dr. Jaime G. Cervantes De Gortari, por los valiosos comentarios que ayudaron a enriquecer el presente trabajo.

Agradezco al CONACYT por el apoyo brindado para la realización de esta tesis. Parte del financiamiento para llevar a cabo la presente investigación proviene del proyecto 220900, SEP-CONACYT.

Con toda la fuerza de mi corazón les agradezco a mis padres: Julieta Gutiérrez y Manuel Peralta por su apoyo, trabajo y sacrificios, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy.

A la UNAM por ser mi hogar durante estos años y por todos los conocimientos brindados para obtener así el grado de Doctor en Ingeniería.

Agradezco al IPN, por las facilidades otorgadas para la realización de este trabajo.

*Dedicada/A mi Esposa e Hijos...*

## *Abstract*

In this work, a theoretical analysis of the transpiration cooling with liquid coolant phase-change in a porous medium is carried out. The evaporation of the liquid inside the porous medium causes the appearance of three regions inside of the porous medium: a liquid region, a two-phase region and a vapor region. This kind of physical problem has been widely studied based on the Separated Phase Model (SPM) or by using the two-phase mixture model (TPMM). Here, we propose a new model that permits numerically determine the relative position of the three regions that are formed inside of the porous medium. To analyze this phenomenon, the governing equations were appropriately non-dimensionalized, where suitable Péclet numbers for each region appear; these number represent eigen-values in the mathematical model, and when they are obtained, the relative position of the interfaces between each region is found.



## *Resumen*

En este trabajo de investigación se lleva a cabo un análisis teórico del proceso de enfriamiento por transpiración con cambio de fase de líquido refrigerante en un medio poroso. La evaporación del líquido en el interior del medio, provoca la aparición de tres regiones: una región del líquido, una región de dos fases y una región de vapor. Este tipo de problemas ha sido estudiado ampliamente, con base en dos modelos: el modelo de fases separadas (SPM, por sus siglas en inglés) y el modelo de la mezcla de dos fases (TPMM, por sus siglas en inglés). En esta investigación se propone un nuevo modelo, que permite determinar numéricamente la posición relativa de la interfase de las tres regiones que se forman en el interior del medio poroso. Para analizar este fenómeno, las ecuaciones de gobierno se adimensionalizaron apropiadamente, en las cuales aparecen números de Péclet definidos para las regiones de líquido, de dos fases y del vapor. Estos números de Péclet están directamente relacionados con las longitudes desconocidas de cada una de las regiones y representan valores característicos del modelo matemático formulado, los cuales se determinan numéricamente mediante un proceso iterativo.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| Agradecimientos  | II        |
| Abstract   | IV        |
| Resumen  | V         |
| Contenido  | VI        |
| Lista de figuras   | VIII      |
| Lista de tablas  | IX        |
| Constantes físicas   | X         |
| Símbolos   | XI        |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Motivación  | 1         |
| 1.1.1. Estructura de la tesis                                      | 2         |
| 1.2. Fenómenos multifásicos  | 2         |
| 1.3. Sistemas multifásicos (cambio de fase)                        | 3         |
| 1.4. Fenómenos de interfase  | 4         |
| <b>2. Antecedentes</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1. Enfriamiento por Transpiración                                | 5         |
| 2.1.1. Enfriamiento por transpiración utilizando una sola fase.    | 5         |
| 2.1.2. Cambio de fase del líquido refrigerante                     | 6         |
| 2.1.3. Experimentación   | 7         |
| 2.1.4. Modelo de la mezcla de dos fases                            | 8         |
| 2.1.5. Aproximación Numérica                                       | 9         |
| <b>3. Marco Teorico</b>  | <b>11</b> |
| 3.1. Volumen promedio  | 11        |
| 3.2. Ecuaciones de gobierno para flujos multifásico                | 13        |
| 3.2.1. Modelo de fases separadas <b>SPM</b> : regiones de una fase | 13        |

|                     |   |           |
|---------------------|---|-----------|
| 3.2.1.1.            | Ecuaciones para flujos bifásico. . . . .  | 14        |
| 3.2.2.              | Equilibrio Termico Local vs No Equilibrio Termico Local (LTE–LTNE). . . . .                   | 15        |
| 3.2.3.              | Modelo de fases separadas vs modelo de la mezcla de dos fases . . .                           | 16        |
| <b>4.</b>           | <b>Formulación matemática</b>   | <b>18</b> |
| 4.1.                | Ecuaciones de Gobierno . . . . .  | 18        |
| 4.1.1.              | Hipótesis . . . . .   | 18        |
| 4.1.2.              | Regiones de una fase . . . . .  | 19        |
| 4.1.3.              | Región de vapor . . . . .   | 20        |
| 4.1.3.1.            | Ecuaciones adimensionales. . . . .  | 21        |
| 4.1.4.              | Modelado de la zona de dos fases . . . . .  | 23        |
| 4.1.4.1.            | Ecuaciones para flujos bifásico . . . . .   | 23        |
| 4.1.4.2.            | Ecuación de la energía en la región de dos fases . . . . .                                    | 25        |
| 4.1.4.3.            | Condiciones de frontera de la ecuación de la energía y de<br>la continuidad de masa . . . . . | 26        |
| 4.1.4.4.            | Balances de energía en la interfaz. . . . .   | 27        |
| 4.1.5.              | Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno. . . . .                                    | 28        |
| 4.1.5.1.            | Ecuación de continuidad. . . . .  | 28        |
| 4.1.5.2.            | Adimensionalización de la ecuación de la energía. . . . .                                     | 30        |
| 4.1.6.              | Región de líquido . . . . .   | 32        |
| 4.1.6.1.            | Condiciones de frontera. . . . .  | 32        |
| 4.1.6.2.            | Variables adimensionales. . . . .   | 32        |
| 4.1.6.3.            | Adimensionalización . . . . .   | 33        |
| 4.2.                | Metodología de solución . . . . .   | 34        |
| <b>5.</b>           | <b>Análisis de Resultados</b>   | <b>38</b> |
| 5.1.                | Resultados . . . . .  | 38        |
| 5.1.1.              | Distribución de temperatura y saturación en el interior de la matriz<br>porosa. . . . .       | 38        |
| 5.1.2.              | Región de dos fases . . . . .   | 42        |
| <b>6.</b>           | <b>Conclusiones</b>   | <b>45</b> |
| 6.1.                | Conclusiones . . . . .  | 45        |
| 6.1.1.              | Trabajos futuros . . . . .  | 46        |
| <b>Bibliografía</b> |   | <b>47</b> |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Volumen promedio local . . . . .                  | 12 |
| 4.1. Esquema del modelo físico . . . . .               | 19 |
| 4.2. Balance en la interfase . . . . .                 | 27 |
| 4.3. Diagrama de flujo . . . . .                       | 36 |
| 5.1. Saturación . . . . .                              | 39 |
| 5.2. Temperatura . . . . .                             | 40 |
| 5.3. Tres zonas: Temperatura . . . . .                 | 41 |
| 5.4. Tres zonas: Saturación . . . . .                  | 41 |
| 5.5. Two-phase: Saturación . . . . .                   | 42 |
| 5.6. Two-phase: Temperatura . . . . .                  | 43 |
| 5.7. Two-phase: Variación del flujo de calor . . . . . | 44 |
| 5.8. Two-phase: Variación del flujo de calor . . . . . | 44 |

# Índice de cuadros

|   |    |
|---|----|
| 5.1. Propiedades de agua a 1 <i>atm</i> . . . . . | 38 |
|---|----|

# Constantes físicas

| Símbolo     | Descripción                             | Valor / Unidad                                       |
|-------------|---|--|
| $a$         | presión de vapor característica         | 0.19743, Pa  |
| $b$         | escala de la temperatura característica | 0.03525, K <sup>-1</sup>                             |
| $c_{pl}$    | calor específico del líquido            | 4217.0, J/kgK  |
| $c_{pv}$    | calor específico del vapor              | 2029.0, J/kgK  |
| $d_p$       | diámetro característico del poro        | $8.2007 \times 10^{-5}$ , m                          |
| $H$         | espesor de la placa porosa              | 0.1, m   |
| $h_{lv}$    | calor latente de evaporación            | $2.257 \times 10^5$ , J/kg                           |
| $k_l$       | conductividad térmica del líquido       | 2.5, W/mK  |
| $k_s$       | conductividad térmica del sólido        | 2.48, W/mK   |
| $k_v$       | conductividad térmica del vapor         | 1.0, W/mK  |
| $\dot{m}_0$ | flujo másico                            | 0.25 – 0.38, kg/m <sup>2</sup> s                     |
| $q''$       | flujo de calor                          | $1 \times 10^6 - 1.5 \times 10^6$ , W/m <sup>2</sup> |
| $T_{sat}$   | temperatura de saturación               | 380.0, K   |
| $T_0$       | temperatura del fluido de enfriamiento  | 300.0, K   |
| $\nu_l$     | viscosidad cinemática del líquido       | $2.5 \times 10^{-7}$ , m <sup>2</sup> /s             |
| $\nu_v$     | viscosidad cinemática del vapor         | $2.2 \times 10^{-5}$ , m <sup>2</sup> /s             |

# Símbolos

|  |   |
|--|---|
| $k_{rl}$   | permeabilidad relativa del líquido                |
| $k_{rv}$   | permeabilidad relativa del vapor                  |
| $k_{lv}$   | permeabilidad efectiva en la región de dos fases  |
| $s$  | saturación  |
| $T_{Top}$  | temperatura en la frontera superior del poroso, K |
| $T_{int}$  | temperatura en la interfaz vapor-dos fases, K     |
| $K = \frac{\varepsilon^2 d_p^2}{180(1-\varepsilon)^2}$ | permeabilidad, m <sup>2</sup>                     |
| $\Delta T_v$   | gradiente en la region del vapor, K               |

## Parámetros adimensionales

|   |   |
|---|---|
| $Bo = \frac{K\rho_l g}{\sigma}$   | número de Bond  |
| $(Ca_t)_m = \frac{\dot{m}_0 \nu_l}{\sigma}$   | número capilar modificado                             |
| $(Da)_m = \frac{(\varepsilon K)^{\frac{1}{2}}}{L_{lv}}$   | número de Darcy modificado                            |
| $Pe_l = \frac{\dot{m}_0 c_{pl} L_l}{k_{le}}$  | número de Péclet del líquido                          |
| $Pe_v = \frac{\dot{m}_0 c_{pv} H(1-\bar{L}_l - \bar{L}_{lv})}{k_{ve}}$                          | número de Péclet del vapor                            |
| $Q = \frac{c_{pv} \Delta T_v}{h_{lv}}$  | flujo de calor adimensional en la región de dos fases |
| $Q_l = \frac{q''}{\dot{m}_0 c_{pl} \Delta T_l}$   | flujo de calor adimensional en la región del líquido  |
| $Q_v = \frac{q''}{\dot{m}_0 c_{pv} \Delta T_v}$   | flujo de calor adimensional en la región del vapor    |
| $Ja = \frac{c_{pl} \Delta T_l}{h_{lv}}$   | número de Jakob                                       |
| $(Ja)_m = \frac{c_{pl} T_{sat}}{h_{lv}}$  | número de Jakob modificado                            |
| $(Le_c)_m = \frac{c_{pl} \sigma (\varepsilon K)^{1/2}}{k_l \nu_l}$                              | número de Lewis modificado                            |
| $k^* = \frac{k_s}{k_l} (1 - \varepsilon) + \varepsilon s + \frac{k_v}{k_l} \varepsilon (1 - s)$ | conductividad efectiva en la región de dos fases      |

## Letras griegas

|  |  |
|--|--|
| $\alpha = \frac{\rho_v}{\rho_l}$                                     | cociente de la densidad vapor-líquido                    |
| $\sigma$   | tension superficial, kg/s <sup>2</sup>                   |
| $\delta = \sigma \left( \frac{\varepsilon}{K} \right)^{\frac{1}{2}}$ | constante en la función de Leverett, kg/s <sup>2</sup> m |
| $\rho_l$   | densidad del líquido, kg/m <sup>3</sup>                  |
| $\rho_v$   | densidad del vapor, kg/m <sup>3</sup>                    |
| $\varepsilon$  | porosidad  |
| $\mu_l$  | viscosidad dinámica del líquido, kg/ms                   |
| $\mu_v$  | viscosidad dinámica del vapor, kg/ms                     |
| $\tau' = \frac{T_{int}}{\Delta T_v}$                                 |  |
| $\tau = \frac{T_{sat}}{\Delta T_v}$                                  |  |
| $\beta = \frac{T_{sat}}{T_{sat} - T_0}$                              |  |
| $\phi = bT_{sat}$  |  |
| $\xi = \frac{a}{\delta} \phi \exp[\phi]$                             |  |
| $\nu_l$  | viscosidad cinemática del líquido, m <sup>2</sup> /s     |
| $\nu_v$  | viscosidad cinemática del vapor, m <sup>2</sup> /s       |

## Subíndices

|       |                       |
|-------|-----------------------|
| $l$   | líquido               |
| $v$   | vapor                 |
| $s$   | sólido                |
| $0$   | condiciones iniciales |
| $sat$ | saturación            |
| $m$   | modificado            |
| $e$   | efectiva              |
| $lv$  | líquido-vapor         |



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Dado que existe una amplia variedad de sistemas ingenieriles que involucran el proceso de transferencia de calor y de masa en medios porosos con fluidos multifásicos, su análisis es de gran importancia para un diseño adecuado.

Procesos como la combustión, tubos de calor y enfriamiento por transpiración en alabes de turbinas; emplean fluidos que se evaporan en el interior de una matriz porosa. Dichos sistemas necesitan estudiarse ampliamente debido a que el proceso de transferencia de calor y masa con cambio de fase en el interior de un medio poroso presenta diversas complejidades, por ejemplo:

1. Inestabilidad en el seguimiento de la interfase de las distintas regiones.
2. La geometría compleja de la matriz porosa impide el estudio de los fluidos a nivel poro.
3. Numerosas ecuaciones no lineales que representan cada una de las fases en el sistema, mismas que necesitan ser acopladas.
5. Singularidad en las interfaces de las distintas regiones.

En la literatura existente observamos distintos análisis numéricos, analíticos y experimentales, tratando de responder a los problemas señalados anteriormente [1-3]. Esta investigación presenta un análisis detallado del fenómeno de enfriamiento por transpiración con cambio de fase del líquido refrigerante en el interior de una matriz porosa,

proponemos una solución semi-analítica desarrollando un nuevo modelo que permite determinar numéricamente la posición relativa de las interfaces entre las regiones que se forman en el interior del medio poroso.

### 1.1.1. Estructura de la tesis

La investigación se estructura de la siguiente forma:

- En el capítulo 1 se describe la motivación para realizar el presente estudio al iniciar con una breve introducción a los fenómenos multifásicos.
- En el capítulo 2 se presentan los antecedentes más relevantes del proceso de enfriamiento por transpiración.
- En el capítulo 3 se describe brevemente el marco teórico del proceso de transferencia de calor y de masa en medios porosos con cambio de fase.
- En el capítulo 4 se muestran las ecuaciones de gobierno, condiciones de frontera, adimensionalización del modelo y se desarrolla el análisis matemático para obtener la solución al problema.
- En el capítulo 5 se presentan los resultados al proceso de enfriamiento por transpiración con cambio de fase mediante perfiles de temperatura y saturación. Lo anterior involucra la determinación de la posición relativa de las interfaces que definen las regiones de vapor, dos fases y del líquido en el interior del medio poroso.
- En el capítulo 6 enumeramos las conclusiones alcanzadas al desarrollar esta investigación.

## 1.2. Fenómenos multifásicos

En los fenómenos multifásicos se encuentran presentes distintas fases de uno o más fluidos. Su análisis es de gran importancia en el diseño y la optimización de distintos sistemas ingenieriles para lograr una mayor eficiencia de éstos [4].

La presencia de diversas fases en el interior de un sistema puede alterarlo significativamente, lo que indudablemente complica su análisis. Algunas características de los sistemas multifásicos son:

- puede o no existir equilibrio termodinámico local entre las fases (fluido-sólido);
- conjuntos de múltiples propiedades termo-físicas referentes a cada una de las fases presentes;
- las interfaces que separan las distintas regiones incluyen transferencia de masa y calor de las regiones en contacto;
- en los procesos de enfriamiento por transpiración el calor latente es relevante en el proceso de cambio de fase;

Los fenómenos multifásicos requieren de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales (masa, cantidad de movimiento y energía) para cada una de las fases presentes en el modelo, así también analizar las condiciones de interfase donde se expresa la continuidad de energía entre cada región.

### 1.3. Sistemas multifásicos (cambio de fase)

Los problemas de cambio de fase, se clasifican como: (1) cambio de fase de sólido a líquido (fusión y solidificación), (2) cambio de fase de sólido a vapor (sublimación y deposición) y (3) cambio de fase de líquido a vapor (ebullición/evaporación y condensación).

Adicionalmente éstos se pueden clasificar por su configuración geométrica básica y la interfase que separa las distintas regiones; (1) problemas de cambio de fase externos en los cuales una fase es infinita, (2) problemas de cambio de fase internos en los cuales las diferentes fases están confinadas a un espacio limitado.

Otro método para clasificar los sistemas multifásicos (**MPS** por sus siglas en inglés) es considerar la estructura de las interfaces en: (1) fases separadas, (2) fases mezcladas y (3) fases dispersas.

La fase sólida se considera incomprensible debido a su densidad constante, esto para la mayoría de los casos; por ejemplo, cuando no existe solidificación o fusión la fase sólida no presenta una interfase con la fase de fluido.

En los **MPS** que presentan una fase líquida, el líquido puede ser considerado un continuo, (que contiene elementos dispersos del sólido (partículas), gases (burbujas) u otros líquidos (gotas)) o discontinuo (la formación de burbujas suspendidas en un gas o en otro líquido debido a que sus interfaces con otros fluidos, gases o líquidos es deformable).

La fase de vapor en los **MPS** pueden ser continua, debido a su densidad dada por la temperatura y la presión. Distintos flujos multifásicos que contienen la fase de vapor puede ser tratados como incompresible si la presión es alta.

Un **MPS** con fases separadas, puede ser considerado como un campo que se divide en regiones de una sola fase, con interfaces entre cada una de ellas. Las ecuaciones de gobierno para un **MPS** con fases separadas, pueden ser escritas usando el balance diferencial local, para cada fase, con sus apropiadas condiciones de frontera, acoplando la solución de estas ecuaciones con las interfaces. Este método de seguimiento de la interfase, nos lleva a resolver las ecuaciones en cada una de las fases de forma separada, en contraste el seguimiento explícito de las interfaces en mezclas y en fases dispersas es mucho más complejo y algunas veces imposible [4–6].

## 1.4. Fenómenos de interfase

Los fenómenos de interfase son extremadamente importantes, especialmente en procesos de dos fases líquido-vapor, algunos ejemplos de estos procesos son: la formación de nubes, transporte de agua en árboles, secado industrial de la madera y transporte de fluidos en materiales porosos. Condensadores para la ebullición, evaporación y condensación, tubos de calor (heat pipes), bombas de calor, sumideros de calor para el enfriamiento de componentes electrónicos, son algunos procesos típicos que se explotan en la industria a gran escala. Los fenómenos de interfase son de vital importancia para intercambiadores de calor compactos de dos fases, especialmente aquellos que contienen capilaridad en porosos, de hecho el desarrollo de la miniaturización en dispositivos de transferencia de calor que trabajan a elevados flujos de calor como por ejemplo; los chips computacionales. El uso de estas aplicaciones sería imposible sin la consideración del fenómeno físico de las interfaces sólido-líquido-vapor [4].

Ciertos fenómenos pueden ser observados en la región de la interfase entre dos distintas regiones de material, donde el flujo en la frontera se vuelve parte del problema; distintos dispositivos utilizan la transferencia de calor en dos fases y son diseñados en estos términos para que su creación y la potencialidad sean más significativa evitando condiciones que limiten su rendimiento.

## Capítulo 2

# Antecedentes

### 2.1. Enfriamiento por Transpiración

Se comprende que la evaporación de un líquido para enfriar un medio poroso posee un gran número de propiedades, comparadas con procesos similares en los cuales el disipador de calor es un gas. Las características de dicho proceso son: (1) se obtiene un incremento en la eficiencia del enfriamiento debido al alto calor latente, (2) además, solo es necesario pequeños flujos masicos del líquido refrigerante. En el presente trabajo, nuestra meta es desarrollar un método analítico para calcular el enfriamiento por transpiración de un medio poroso con un amplio rango de condiciones de acción, por medio de simulaciones numéricas que tomen en cuenta las características termodinámicas del proceso. En este capítulo se recopila información relevante sobre el enfriamiento por transpiración.

#### 2.1.1. Enfriamiento por transpiración utilizando una sola fase.

Muchos trabajos previos de transferencia de calor en medios porosos tratan con una sola fase, líquido o gas, que fluye a través del medio, absorbiendo el calor de éste [7]. Polezhaev and Seliverstov [8] realizaron cálculos para sugerir un modelo matemático con el cual optimizar los parámetros más importantes de los sistemas de protección de calor para alabes de turbinas de gas expuestas a altas temperaturas. Wolfersdorf [9] realizó un análisis para describir el efecto del enfriamiento por transpiración cuando se tienen dos capas porosas combinadas por medio de la teoría de equilibrio térmico local (**LTE**, por sus siglas en inglés). Shi and Wang [10] investigaron el problema inverso del enfriamiento por transpiración bajo condiciones de no equilibrio térmico local (**LTNE**, por sus siglas en inglés) con el método matemático conocido como gradiente conjugado (algoritmo para resolver numéricamente sistemas de ecuaciones lineales). Un problema

inverso es aquel en donde los valores de algunos parámetros del modelo se deben obtener de los datos observados.

El efecto de enfriamiento por el intercambio de calor entre el refrigerante y la matriz porosa fue investigado por Wang and Wang [11], quienes desarrollaron una solución analítica para el proceso de enfriamiento por transpiración, en su solución la conductividad térmica del líquido refrigerante fue despreciada, analizando sus resultados para las dos hipótesis **LTNE** y **LTE**. Sin embargo si un líquido se usa como refrigerante y además la temperatura es suficientemente elevada como para causar el cambio de fase, involucrara que en el enfriamiento por transpiración existan regiones de diferentes fases separadas por un interfase móvil [5].

### 2.1.2. Cambio de fase del líquido refrigerante

Uno de los trabajos pioneros en el estudio del cambio de fase en medios porosos fue desarrollado por Kent S. Udell [12], en el cual presento las características de la transferencia de masa y calor de un sistemas compuesto por arena-agua-vapor calentado por arriba y enfriado por la parte inferior. Udell observo en su experimento que en condiciones de estado estacionario el sistema se divide en tres regiones. La región superior una región predominantemente conductiva que contenia vapor supercalentado, la región central una región casi isotermica donde una mezcla de líquido-vapor se hace presente y finalmente una región inferior que contenia líquido. La longitud de la región de dos fases se evaluó a través de la aplicación de las ecuaciones de Darcy para el flujo de dos fases y las correlaciones de permeabilidad relativa y la presión capilar.

Una vez demostrada la existencia de una zona de cambio de fase llevo a muchos investigadores a desarrollar estudios para dar solución al problema de esta región.

En trabajos posteriores Udell y sus colaboradores presentaron distintos trabajos [13–16], Uno muy importante es el presentado en [13], donde realiza un análisis unidimensional en estado estacionario de la transferencia de calor y masa en un medio poroso saturado por las fases líquido y vapor de un mismo fluido, donde los efectos capilares, fuerza de gravedad y cambio de fase son incluidos obteniendo perfiles de temperatura y saturación en la región de dos fases, orientado a la aplicación de los tubos de calor.

En el entendimiento del flujo de fluidos y la transferencia de calor a través de medios porosos es de análisis central para distintas aplicaciones tecnológicas y ambientales. El suelo es uno de los materiales geológicamente de mayor interés; es poroso e impermeable para los líquidos y los gases, los cuales interactúan de manera natural, los depósitos

de residuos muchas veces requieren el transporte de fluidos a través de una estructura porosa así como la recolección de crudo donde efectos térmicos son significantes [17–19].

K. E. Torrance [20] investigo el proceso de ebullición en capas porosas saturadas de líquido, siendo calentada por su parte inferior y enfriada por la parte superior. Y al igual que Udell, Torrance observo en sus experimentos la zona de dos fases que se forma cerca a la superficie caliente cuando la temperatura local alcanza la temperatura de saturación. Un fenómeno importante que Torrance observo fue la evaporación oscilatoria (fenómenos de inestabilidad). Torrance junto con sus colaboradores presentaron observaciones experimentales de la ebullición en medios porosos saturados de agua, reportando la región de dos fases como una zona isotérmica que se forma en la superficie caliente. Reporto que el tamaño de la zona de dos fases se incrementaba al aumentar el flujo de calor y la transferencia de calor en la región de dos fases es dominada por un flujo a contracorriente de líquido y vapor reportando flujos de calor críticos, así como las oscilaciones periódicas que habia observado anteriormente. Estas oscilaciones son atribuidas a la formación de una capa de vapor en la superficie caliente. El periodo de las oscilaciones depende del flujo de calor y la permeabilidad [21]. Torrance también presentó análisis analíticos para tratar de resolver el problema del calentamiento de una matriz porosa saturada de líquido calentada por abajo y enfriada por su parte contraria, reportando resultados para números de Rayleigh críticos aplicando técnicas integrales para obtener la transferencia de calor estabilizando el proceso [22].

### 2.1.3. Experimentación

Recientemente, el enfriamiento por transpiración como mecanismo efectivo de disipación de calor conquisto la atención de numerosos investigadores, y sus correspondientes trabajos han sido extendidos en diferentes campos de aplicación tanto militares como industriales.

El enfriamiento por transpiración se uso eficientemente en: vehículos hipersónicos, alabes de turbinas de gas y en cámaras de combustión; por ello las investigaciones experimentales son clave para el desarrollo de aplicaciones ingenieriles; como por ejemplo el trabajo de Liu S. [23], en el cual investiga la protección térmica del enfriamiento por transpiración en vehículos hipersónicos los cuales estan sujetos a un severo calentamiento aerodinámico ambiental por el reingreso a la atmósfera. Liu investigó la capacidad de enfriamiento del proceso de enfriamiento por transpiración, observando que la temperatura de la estructura con el enfriamiento era mucho más baja que sin el enfriamiento a las mismas cargas de calor. El flujo de calor puede ser incrementado por arriba del 70 % cuando el enfriamiento esta activo.

La experimentación con aplicación en vehículos que reingresan a la atmósfera es desarrollada por Hald and Kuhn [24], donde analizan las capacidades de distintos materiales bajo diversos métodos de refrigeración donde gases son utilizados como refrigerante. Su conclusión fue que el enfriamiento por transpiración puede ser aplicado con éxito a estructuras calientes bajo condiciones de reingreso.

Estudios experimentales del cambio de fase de líquido refrigerante son presentados en [25–27]. Donde el cambio de fase se hace presente y se observan las tres distintas regiones. Las fronteras entre las zonas se determinan usando la temperatura y los campos de presión. El primer valor máximo en la curva de la temperatura corresponde a la frontera entre el líquido y la región de dos fases, el cambio de la temperatura de saturación del fluido corresponde a la frontera entre la región de dos fases y el vapor.

#### 2.1.4. Modelo de la mezcla de dos fases

En la literatura el dominio del fluido en el interior de la matriz porosa se clasifica en tres regiones; región de vapor, región de dos fases y región de líquido. Basados en esta clasificación el modelo de fases separadas (**SPM**, por sus siglas en ingles) se sugiere para describir el flujo del fluido y la transferencia de calor en cada región, este modelo consiste en un conjunto de ecuaciones para cada fase, las cuales serán acopladas con la interfase entre cada región [28].

Wang and Beckerman [29–31] desarrollaron los conceptos de densidad, presión, velocidad y entalpía de la mezcla, ellos presentaron una serie de relaciones algebraicas para combinar las ecuaciones diferenciales del **SPM** en las tres regiones, unificandolas en una sola expresión matemática, las ecuaciones combinadas son llamadas modelo de la mezcla de dos fases (Two-phase mixture model **TPMM**). El número de las ecuaciones diferenciales del **SPM** fueron reducidas por medio de relaciones algebraicas y el problema de seguimiento de la interfase fue evitado con el concepto de entalpía de la mezcla. El **TPMM** se usa ampliamente para resolver problemas de flujo de dos fases. Shi and Wang [32] modificaron el **TPMM** y sugirieron el modelo de la mezcla de dos fases no equilibrio térmico local (**LTNE-TPMM**).

En el **TPMM** las ecuaciones de la energía y cantidad de movimiento son resueltas por separado y ni los efectos de densidad y variaciones de la presión provocadas por el cambio de fase, ni la influencia de variar las propiedades termo-físicas en la ecuación de movimiento se toman en cuenta, esto es porque el modelo se basa en dos hipótesis, las cuales son: (1) La temperatura de la saturación es constante en la región de dos fases y (2) la entalpía solo es una función de la temperatura. En un trabajo posterior Wei y Wang [33], descubrieron que estas dos hipótesis dan lugar a un falso fenómeno



en simulaciones numéricas, por ejemplo: una capa térmicamente aislada se manifiesta en el interior de la matriz porosa. Para evitar este fenómeno Wei and Wang usaron la energía libre de Gibbs además variaciones de la entalpía y la presión fueron tomadas en cuenta. Aunque los efectos de la conducción de calor del fluido en la región de dos fases fue despreciada, la solución numérica de la región de vapor no fue posible debido a la incierta condición de frontera del lado caliente.

### 2.1.5. Aproximación Numérica

Distintos trabajos numéricos se desarrollaron utilizando la técnica implementada por Wang y Beckermann [29]. Ya que la formulación simplifica la solución numérica, pero su uso ocasiona errores numéricos. Zhao et al [34], presentó una solución numérica al flujo inducido por flotación y la transferencia de calor del cambio de fase en una estructura capilar, calentada simétricamente por los lados utilizando **TPMM**, obteniendo campos vectoriales para la saturación y concluyendo que el punto de secado siempre ocurre en la pared muy cerca de la salida del canal sin llegar a dar una explicación clara del fenómeno de cambio de fase debido a los problemas que causa el modelo utilizado.

En trabajos subsecuentes a la presentación de su formulación Wang [35], desarrollo simulaciones numéricas del flujo de dos fases en el interior de una matriz porosa utilizando **TPMM** tratando de corregir algunos errores en su modelo. Este modelo continuo utilizándose por la simplificación que ofrece, Brige and Wetton [36] desarrollaron un modelo para capturar el frente de evaporación basado en **TPMM**, con el problema que en su modelo la región de líquido no fue considerada, esta simplificación al fenómeno necesita investigarse.

En esta investigación presentaremos una nueva formulación para el problema unidimensional en estado estacionario del cambio de fase del líquido refrigerante utilizado en el proceso de enfriamiento por transpiración basado en las hipótesis de **SPM**. El modelo del problema para la temperatura y la saturación del líquido en el interior de la matriz porosa será formulado mediante un método iterativo sobre valores característicos del sistema, siendo capaces de localizar las posiciones relativas de las interfaces que existen entre cada región. Las ecuaciones para cada región se presentan, acoplando las tres regiones por medio de condiciones de interfase las cuales fueron derivadas de balances de energía. La región de dos fases es formulada permitiendo una dependencia explícita de la temperatura, la saturación y la presión de vapor, misma que es dependiente explícitamente de la saturación para presiones capilares bajas, con ello somos capaces de resolver no solamente la saturación si no también la temperatura, identificando claramente la

---

región de dos fases obteniendo perfiles de saturación y temperatura sobre el dominio completo.

## Capítulo 3

# Marco Teorico

### 3.1. Volumen promedio

Un medio poroso es un sistema heterogéneo que se constituye por una matriz sólida, donde materiales y/o fibrilares encierra un sistema disperso de espacios vacíos, denominados poros, total o parcialmente conectados que pueden ser ocupados por fluido en sus diferentes estados: vapor, líquido y mezclas bifásicas. No obstante el sistema se puede considerar como un continuo siempre que se tenga en cuenta el papel de cada fase en los fenómenos de transporte, transferencia de masa y de calor que en él ocurran.

Como sucede en otros ámbitos de la ciencia aplicada, el desarrollo del conocimiento del flujo de fluidos y de la transferencia de calor en medios porosos es el resultado de una combinación de aportaciones empíricas directas y de la elaboración de modelos teóricos a partir de principios fundamentales. Fue a partir del año 1900, que inicia un interés creciente por el estudio de los fenómenos de transporte a nivel del poro (análisis microscópico), motivado por los nuevos descubrimientos sobre fuerzas de superficie y dinámica de los fenómenos de humedad [6].

Para la mayoría de los medios porosos de interés, las dimensiones del poro son pequeñas, lo que acentúa los efectos de tensión superficial en caso de medios porosos parcialmente saturados o no saturados, y, además, dificulta la medida de los valores de las variables del sistema; tal como la presión individual de cada fase, la velocidad del fluido a nivel del poro y la geometría de la interfase líquido-vapor.

En los sistemas multifásicos se definen tres escalas: la escala macroscópica, asociada con las dimensiones globales del sistema; la escala microscópica, que es mucho menor que las dimensiones de los espacios vacíos entre la matriz sólida, y una escala intermedia denominada mesoscópica.

A nivel de la escala macroscópica las variables dependientes son únicamente funciones del tiempo. A nivel de la escala microscópica, las variables dependientes son funciones de la posición dentro de los intersticios y del tiempo. En la escala mesoscópica, las variables dependientes son funciones de la posición en el medio poroso y del tiempo, por lo que un dispositivo de medida determinaría un valor local promedio en el medio poroso más que un valor verdadero en el interior de la fase.

Por consiguiente, las magnitudes fundamentales de cada fase a escala microscópica se deben promediar para establecer un nuevo *continuo* que esté definido en la misma escala que la de la medida de multifase (escala mesoscópica).

No obstante, promediando las ecuaciones fundamentales para cada fase, se pierde en cada una de ellas la información acerca de los detalles de las condiciones en la escala microscópica; por ejemplo, la forma y el área de la superficie de los poros, y los perfiles de velocidad del flujo en su interior.

El procedimiento de promediación consiste en seleccionar un volumen elemental representativo, entendiendo por tal el mínimo volumen a considerar del medio poroso para que en él se encuentren representadas todas las propiedades del mismo y de los procesos de transporte y transferencia que son objeto de estudio, Fig 3.1.

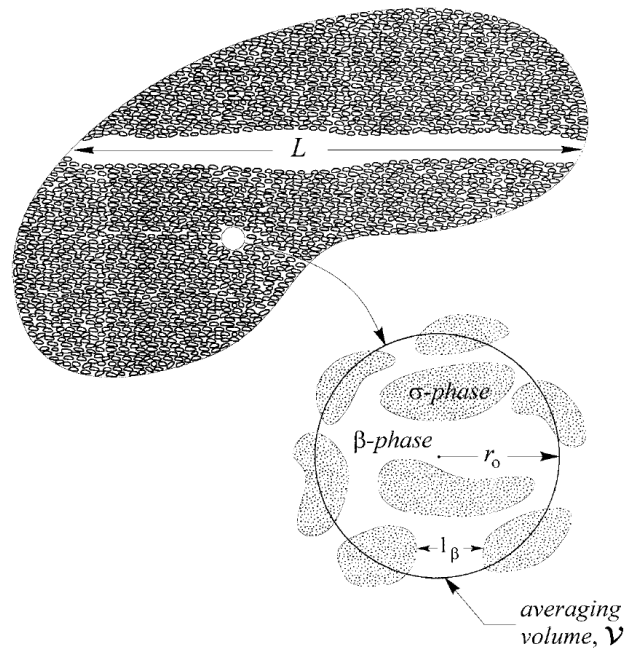


FIGURA 3.1: Region macroscópica y volumen promedio para un sistema de dos fases [37].

El algoritmo de promediación en volumen, se utiliza para el desarrollo de las ecuaciones que gobiernan los procesos de transporte en los medios porosos. Frecuentemente se emplean dos tipos de promedios, el volumétrico y el intrínseco.

Para cualquier función de posición,  $\psi$  (velocidad, densidad, presión, temperatura, etc.) asociada con el fluido, Whitaker [38] dedujo el siguiente teorema entre gradientes para funciones definidas en la fase sólida y en la fase vacía que sufren una discontinuidad tipo escalón en la interfaz, la expresión que Whitaker desarrollo para volúmenes promedio, se expresa de la forma:

$$\langle \nabla \psi \rangle = \nabla \langle \psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_\sigma} \psi \cdot \hat{n} \cdot dA, \quad (3.1)$$

donde el promedio volumétrico local de  $\psi$  se define como:

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \psi \cdot dV, \quad (3.2)$$

donde  $A$  es la superficie que limita el volumen  $V$  y  $A_\sigma$  es el área de la interfaz sólido-fluido contenida en el interior de  $V$ . Para el análisis del flujo de calor y masa a través de un medio heterogéneo a escala macroscópica, se utilizan propiedades promediadas en volumen (propiedades efectivas), tales como la capacidad calorífica efectiva  $\langle \rho c_p \rangle$  y la conductividad térmica efectiva  $\langle k \rangle \equiv k_e$ .

## 3.2. Ecuaciones de gobierno para flujos multifásico

### 3.2.1. Modelo de fases separadas SPM: regiones de una fase

Con base en la teoría del “volumen promedio local”, descrita previamente; presentamos las ecuaciones y relaciones termodinámicas que describen los procesos de transferencia de calor y masa con cambio de fase en un medio poroso [37]. Las ecuaciones que describen los procesos en regiones de una sola fase (líquido y vapor) son la de continuidad, cantidad de movimiento y de la energía dadas por:

#### Ecuación de continuidad.

En la región del vapor:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon \rho_v \rangle = -\nabla \cdot \langle \rho_v \varepsilon \vec{u}_v \rangle \quad (3.3)$$

En la región del líquido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon \rho_l \rangle = -\nabla \cdot \langle \rho_l \varepsilon \vec{u}_l \rangle \quad (3.4)$$

donde,  $\varepsilon$  es la porosidad,  $\rho$  representa la densidad del fluido,  $\nabla$  es el operador nabla,  $\vec{u}$  es el vector velocidad, los subíndices  $l$  y  $v$  representan la fase líquida y la fase de vapor respectivamente.

### Ecuación de cantidad de movimiento.

En la región del vapor:

$$\rho_v \frac{\partial \vec{u}_v}{\partial t} = -\nabla p_v + \rho_v \vec{g} - \frac{\mu_v}{K_v} \varepsilon \vec{u}_v \quad (3.5)$$

En la región del líquido:

$$\rho_l \frac{\partial \vec{u}_l}{\partial t} = -\nabla p_l + \rho_l \vec{g} - \frac{\mu_l}{K_l} \varepsilon \vec{u}_l \quad (3.6)$$

donde,  $\nabla p$  representa el gradiente de presión,  $\vec{g}$  es el vector gravedad,  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $K$  representa la permeabilidad del medio poroso.

### Ecuación de la energía.

En la región del vapor:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varepsilon) \rho_s h_s + \varepsilon \rho_v h_v] = -\nabla \cdot (\rho_v h_v \varepsilon \vec{u}_v) + \nabla \cdot (k_{ve} \nabla T) \quad (3.7)$$

En la región del líquido:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varepsilon) \rho_s h_s + \varepsilon \rho_l h_l] = -\nabla \cdot (\rho_l h_l \varepsilon \vec{u}_l) + \nabla \cdot (k_{le} \nabla T) \quad (3.8)$$

donde,  $h$  representa la entalpía,  $k_e$  es la conductividad térmica efectiva,  $T$  se refiere a la temperatura y el subíndice  $s$  representa la fase sólida.

#### 3.2.1.1. Ecuaciones para flujos bifásico.

Las ecuaciones de la conservación de masa en la región de dos fases (líquido-vapor) con cambio de fase en el interior de una matriz porosa se expresan como:

#### Conservación de la masa.

$$\frac{\partial \varepsilon \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \vec{u}_l) = -\langle \dot{n} \rangle \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon (1-s) \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \vec{u}_v) = \langle \dot{n} \rangle \quad (3.10)$$

donde,  $\langle \dot{n} \rangle$  es la rapidez de evaporación y  $s$  representa la saturación.

**Cantidad de movimiento.**

$$\vec{u}_l = -K \frac{k_{rl}}{\mu_l} [\nabla p_l - \rho_l \vec{g}] \quad (3.11)$$

$$\vec{u}_v = -K \frac{k_{rv}}{\mu_v} [\nabla p_v - \rho_v \vec{g}] \quad (3.12)$$

donde,  $k_{rl}$  y  $k_{rv}$  representan las permeabilidades relativas que son función de la saturación.

**Ecuación de la energía.**

$$\nabla \cdot (k_{lv} \nabla T_{lv}) - \nabla \cdot (\dot{m}_v h_v + \dot{m}_l h_l) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l U_l \varepsilon s_l + \rho_v U_v \varepsilon s_v) + \rho_s c_s (1-\varepsilon) \frac{\partial T_{lv}}{\partial t} \quad (3.13)$$

donde,  $\dot{m}$  representa el flujo másico,  $U$  es la energía interna y  $c$  es el calor específico.

### 3.2.2. Equilibrio Termico Local vs No Equilibrio Termico Local (LTE-LTNE).

En algunos estudios donde se asocia la transferencia de calor y el flujo de fluidos en medios porosos, utilizan la hipótesis de que el fluido y la matriz sólida en el medio poroso tienen la misma temperatura. El modelo que se basa en esta hipótesis se le conoce como Equilibrio Termico Local (**LTE**, por sus siglas en inglés), este modelo emplea una sola ecuación diferencial de segundo orden con dos condiciones de frontera necesarias para su solución.

$$\left[ \varepsilon (\rho c_p)_f + (1-\varepsilon) (\rho c_p)_s \right] \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + (\rho c_p)_f \vec{u} \cdot \nabla \langle T \rangle = (\rho c_p)_f \nabla \cdot \left\langle \vec{D} \cdot \nabla \langle T \rangle \right\rangle, \quad (3.14)$$

donde  $\langle T \rangle^s = \langle T \rangle^f = \langle T \rangle$ , y el tensor de difusión total es  $\vec{D} = k_e / (\rho c_p)_f$

En algunos estudios se ha concluido que el modelo de LTE será válido cuando la razón de conductividades efectivas del sólido/fluido sea baja. Investigaciones muestran que

no siempre la temperatura del fluido y de la matriz sólida es la misma, especialmente cuando el número de Reynolds es alto o a elevados números de Darcy. En este último caso, se sugiere utilizar el modelo de no equilibrio termico local (**LTNE**) el cual consta de dos ecuaciones diferenciales; una es la ecuación de la energía para el fluido y la otra es la ecuación de la energía para la matriz porosa.

$$(\rho c_p)_f \left( \frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial t} + \vec{u}_f \cdot \nabla T_f \right) = \nabla \cdot k_f \nabla T_f \quad \text{in } V_f, \quad (3.15)$$

$$(\rho c_p)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot k_s \nabla T_s \quad \text{in } V_s, \quad (3.16)$$

donde  $V_f$  y  $V_s$  representa la fase del fluido y del sólido respectivamente.

Wang and Wang [39] presentaron un análisis a problemas de enfriamiento por transpiración utilizando ambos modelos LTE y LTNE obteniendo una solución analítica y calculando el error que provoca la hipótesis de LTE comparada con LTNE.

### 3.2.3. Modelo de fases separadas vs modelo de la mezcla de dos fases

El problema del flujo de dos fases en medios porosos se trató tradicionalmente con el modelo de flujos separados SPM [40, 41], el cual se apoya en la formulación de continuidad entre las distintas fases, en este modelo la fase de gas y la fase líquida se consideran como fluidos distintos con propiedades termodinámicas individuales y con diferente velocidad de flujo. Entonces el fenómeno se describe matemáticamente mediante las leyes de conservación para cada fase y con condiciones de interfase apropiadas entre las dos regiones. La permeabilidad relativa de ambas fases se introduce para tomar en cuenta la disminución del flujo efectivo cuando existe la presencia de otro fluido. Por la inherente no linealidad de los problemas de flujo de dos fases, las soluciones exactas son limitadas y además se requieren demasiadas hipótesis para simplificar el problema; por ello se requieren algoritmos numéricos robustos para resolver el sistema de ecuaciones. Mientras que el modelo SPM provee una descripción sencilla y rigurosa del flujo de dos fases en medios porosos. Su formulación es generalmente inconveniente para uso directo en simulaciones numéricas, esto por, la gran cantidad de ecuaciones diferenciales que necesitan ser resueltas, para reducir el número de ecuaciones distintas formulaciones se desarrollaron. El modelo de la mezcla de dos fases (Two-Phase Mixture Model **TPMM**) asume que las fases son distintas y de componentes separados pero sin ninguna área de interfase y su mezcla representa un solo material donde todas sus propiedades físicas son consecuencia de sus constituyentes, reduciendo la cantidad de ecuaciones de gobierno necesarias para el modelo y simplificando en gran medida las simulaciones numéricas



[29, 30]. Las ecuaciones para el modelo de la mezcla de dos fases **TPMM** son las ecuaciones de conservación de masa, Cantidad de movimiento, conservación de la masa del líquido y de la energía:

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.17)$$

$$\vec{u} = -\frac{K}{\mu(s)} [\nabla p - \rho_k(s) \vec{g}] \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial (\rho_l \cdot s)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \vec{u} \lambda(s)] = \nabla \cdot [D(s) \nabla s] - \nabla \cdot \left[ f(s) \frac{K \Delta \rho}{\nu_v} \vec{g} \right] + \dot{m}_l \quad (3.19)$$

$$[(\rho c)_s \varepsilon + \rho c(1 - \varepsilon)] \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_k \vec{u} \cdot \nabla T + (c_l - c_v) \vec{j} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_{eff} \nabla T) + \dot{Q} \quad (3.20)$$

donde:  $K$ ,  $s$ ,  $k_{rl}$ ,  $k_{rv}$ ,  $\rho_l$ ,  $\rho_v$ ,  $p_c$ , son las permeabilidad del medio, saturación, permeabilidad relativa del líquido y el vapor, densidad del líquido y vapor, presión capilar respectivamente, además las funciones de la mezcla seran definidas acontinuación:

$$\text{densidad de mezcla: } \rho = \rho_l s + \rho_v (1 - s),$$

$$\text{velocidad de mezcla: } \rho \vec{u} = \rho_l \vec{u}_l + \rho_v \vec{u}_v,$$

$$\text{densidad cinética: } \rho_k(s) = \rho_l \lambda_l(s) + \rho_v \lambda_v(s),$$

$$\text{viscosidad: } \mu = \frac{\rho_l s + \rho_v (1-s)}{(k_{rl}/\nu_l) + (k_{rv}/\nu_v)},$$

$$\text{funcion de obstaculo: } f(s) = \frac{k_{rl} k_{rv} / \nu_l}{(k_{rl}/\nu_l) + (k_{rv}/\nu_v)},$$

$$\text{viscosidad cinemática: } \lambda_s \equiv \lambda_l = \nu(s) k_{rl} / \nu_v,$$

$$\text{flujo masico total: } \vec{j} = -D(s) \nabla s + f(s) \frac{K \Delta \rho}{\nu_v} \vec{g},$$

$$\text{coeficiente de difusión capilar: } D(s) = \frac{K}{\nu_s} \lambda (1 - \lambda) \cdot [-p'_c(s)],$$

$$\text{calor específico de la mezcla: } c_k = c_l \lambda + c_v (1 - \lambda).$$

## Capítulo 4

# Formulación matemática

El modelo físico en este estudio se muestra en la Fig. 4.1. Una matriz porosa con un espesor  $H$ , es expuesta a un flujo de calor  $q''$  en su superficie superior, provocando que esta frontera se encuentre a una temperatura,  $T_{top}$ , que es mayor que la temperatura de saturación del líquido refrigerante, éste es inyectado a través de la matriz porosa desde su superficie inferior; el líquido refrigerante es suministrado al medio poroso con un flujo másico  $\dot{m}_0$  desde un depósito a temperatura  $T_0$ . Si el flujo de calor  $q''$ , es suficiente para estimular el cambio de fase del líquido en el interior de la matriz porosa, se formarán tres regiones; una región de líquido con espesor  $L_l$ , que se encuentra en contacto con una región de dos fases con espesor  $L_{lv}$  (donde ocurre el cambio de fase) y finalmente una región de vapor de espesor  $L_v$ , estas longitudes son desconocidas.

El propósito de este trabajo es presentar una metodología semi-analítica para determinar la transferencia de calor y de masa en el proceso de enfriamiento por transpiración cambio de fase del líquido refrigerante en el interior de la matriz porosa, resolviendo el problema de las posiciones relativas de cada región.

### 4.1. Ecuaciones de Gobierno

#### 4.1.1. Hipótesis

Para realizar la formulación matemática de este problema, se plantean las siguientes hipótesis:

- El refrigerante se considera newtoniano e incomprensible.
- Todas las propiedades físicas son constantes.

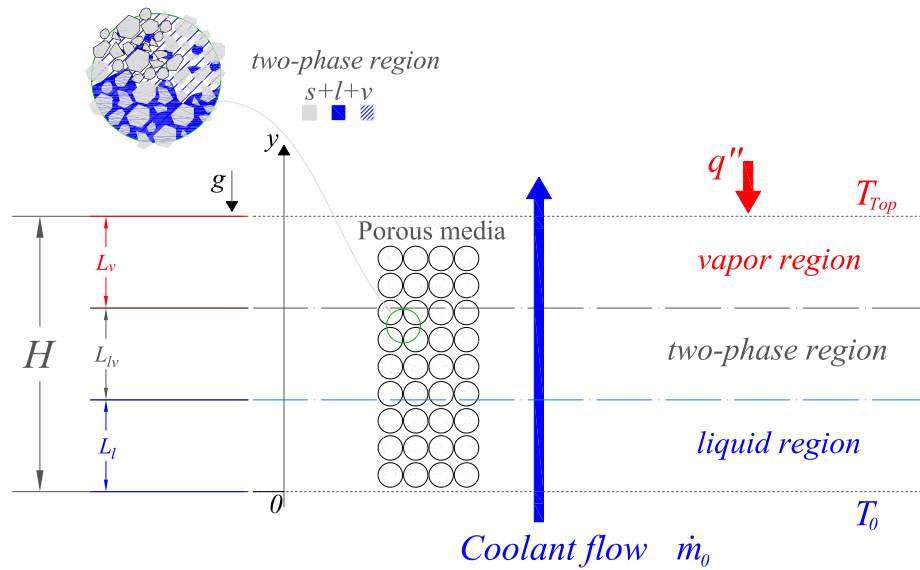


FIGURA 4.1: Esquema del modelo físico en estudio.

- La disipación viscosa es despreciable.
- El sistema heterogéneo sólido-fluido se considera como un continuo despreciando la estructura porosa en orden de aplicar ecuaciones de gobierno promediadas.
- Las variaciones de la saturación y la temperatura en la dirección horizontal son despreciables en comparación con la variaciones del eje longitudinal.
- El cambio de fase ocurre en el interior del medio poroso.
- El flujo es dominado por fuerzas viscosas y puede ser descrito por la ley de Darcy.
- El flujo es lo suficientemente lento de tal manera que la temperatura del sólido y el fluido sean iguales, por lo que se aplica el modelo de equilibrio térmico local LTE.
- Todas las variables son funciones promediadas y se evitará el uso del símbolo que denota promedio, p. ej.,  $\langle f \rangle = f$ .

#### 4.1.2. Regiones de una fase

Las ecuaciones que describen el proceso de transferencia de calor en la región de líquido y de vapor son las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento y de la energía, dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_l u_l) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_l v_l) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\mu_l}{K_l} (u_l + v_l) = - \left( \frac{\partial p_l}{\partial x} + \frac{\partial p_l}{\partial y} \right) + \rho_l (g_x + g_y), \quad (4.2)$$

En la ecuación de continuidad el flujo másico  $\dot{m}_0$  se asume constante obteniendo:

$$\dot{m}_0 = \rho_l v_l = \text{const} \quad (4.3)$$

La ecuación de continuidad es satisfecha y no es necesario considerar la ecuación de cantidad movimiento, como ya se mencionó el modelo de **LTE** presentado por Wang and Wang [39] se satisface, y de acuerdo a este modelo la ecuación de la energía es:

$$(\rho c_p)_l \left( u_l \frac{\partial T_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial T_l}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{le} \frac{\partial T_l}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{le} \frac{\partial T_l}{\partial y} \right) \quad (4.4)$$

En las Ecs. (4.1)–(4.4),

$$k_{le} = (1 - \varepsilon) k_s + \varepsilon k_l, \quad (4.5)$$

$$(\rho c_p)_{le} = \varepsilon (\rho c_p)_l, \quad (4.6)$$

son, la conductividad térmica efectiva y el calor específico respectivamente.

### 4.1.3. Región de vapor

La ecuación de la energía para la región de vapor, en estado estacionario y unidimensional es de la forma:

$$k_{ve} \frac{d^2 T_v}{dy^2} - \dot{m}_0 c_{pv} \frac{dT_v}{dy} = 0 \quad (4.7)$$

donde,  $\dot{m}_0 = \rho_v u_v$  que expresa el flujo másico del líquido que es inyectado al medio poroso.

Las condiciones de frontera asociadas a la Ec. (4.7) son las siguientes:

$$\text{en } y = H \quad q_v'' = k_{ve} \frac{dT_v}{dy} \quad \text{y} \quad T_v = T_{top} \quad (4.8)$$

donde,  $T_{top}$  es la temperatura de la superficie del medio poroso que esta en contacto con el flujo de calor .

En la interfaz entre la región de dos fases y la de vapor se tiene:

$$\text{en } y = L_{lv} + L_l, \quad T_v = T_{lv} = T_{int} \quad (4.9)$$

que expresa la igualdad de la temperatura de la región de dos fases hacia la región de vapor.

#### 4.1.3.1. Ecuaciones adimensionales.

Para adimensionalizar la ecuación de la energía así como sus condiciones de frontera, se proponen las siguientes variables adimensionales:

$$Y = \frac{y - (L_l + L_{lv})}{H - (L_l + L_{lv})}, \quad \theta_v = \frac{T_v - T_{int}}{\Delta T_v}.$$

La variable adimensional  $Y$  se define en términos de las longitudes de cada región, que al ser desconocidas, nos llevan a tener un problema de valores característicos, así mismo,  $\Delta T_v = T_{top} - T_{int}$  es la diferencia de temperaturas en la región de dos fases, valor que se obtiene al realizar el balance de energía del sistema.

#### Balance de energía del sistema

Un balance de energía entre  $y = 0$  y  $y = H$  es de la forma:

$$q'' = \dot{m}_0 [h_{lv} + c_{pl} (T_{sat} - T_0) + C_{pv} (T_{top} - T_{int})] \quad (4.10)$$

El significado físico de la Ec. (4.10) es que el flujo de calor que actua sobre el medio poroso se utiliza para: (1) calentar el líquido desde  $T_0$  hasta  $T_{sat}$  en la región del líquido, (2) evaporar el líquido en la región de dos fases incrementando la entalpia y (3) elevar la temperatura del vapor desde  $T_{int}$  hasta  $T_{top}$  en su región.

Podemos representa el cambio de temperatura característica en la región de vapor de la forma:

$$\Delta T_v = (T_{top} - T_{int}) = \frac{q''}{\dot{m}_0 c_{pv}} - \frac{h_{lv}}{c_{pv}} - \frac{c_{pl}}{c_{pv}} (T_{sat} - T_0) \quad (4.11)$$

La versión adimensional de la ecuación de la energía en la región de vapor está dada de la forma:

$$\frac{d^2\theta_v}{dY^2} - Pe_v \frac{d\theta_v}{dY} = 0. \quad (4.12)$$

La Ec. (4.12) se debe resolver con las siguientes ecuaciones de frontera:

$$\text{en } Y = 1 : \quad \frac{d\theta_v}{dY} = \frac{q_v'' H - (L_l + L_{lv})}{k_{ve} \Delta T_v}, \quad (4.13)$$

$$\text{en } Y = 0 : \quad \theta_v = \frac{T_{sat}}{\Delta T_v} \theta_{lv}|_{z=1} - \frac{T_{int}}{\Delta T_v} = \tau \theta_{lv}|_{z=1} - \tau', \quad (4.14)$$

los parametros adimensionales en las ecuaciones anteriores son definidos como:

$$Pe_v = \frac{\dot{m}_0 c_{pv} H (1 - \bar{L}_l - \bar{L}_{lv})}{k_{ve}}, \quad \bar{L}_l = \frac{L_l}{H}, \quad \bar{L}_{lv} = \frac{L_{lv}}{H}, \quad \Delta T_v = T_{top} - T_{int},$$

$$\tau = \frac{T_{sat}}{\Delta T_v}, \quad \tau' = \frac{T_{int}}{\Delta T_v},$$

$$k_{ve} = (1 - \varepsilon) k_s + \varepsilon k_v \quad (4.15)$$

donde  $Pe_v$  es el número de Péclet en la región de vapor y es un parámetro desconocido que representa un valor característico de la ecuación diferencial Ec. (4.12).

La solución analítica de la Ec. (4.12) es:

$$\theta_v = C_1 + C_2 \exp [Pe_v Y]. \quad (4.16)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  se determinan al aplicar las condiciones de frontera (4.13) y (4.14), de donde se obtiene

$$C_2 = \frac{q_v''}{\dot{m}_0 c_{pv} \Delta T_v \exp [Pe_v]} \quad (4.17)$$

$$C_1 = \tau \theta_{lv}|_{z=1} - \tau' - \frac{q_v''}{\dot{m}_0 c_{pv} \Delta T_v \exp [Pe_v]} \quad (4.18)$$

La solución de la temperatura en la interfase de la región de dos fases,  $\theta_{lv}|_{z=1}$  aun es desconocida por lo tanto la solución sera:

$$\theta_v = \tau \theta_{lv}|_{z=1} - \tau' - C_2 + C_2 \exp [Pe_v Y] \quad (4.19)$$

$$\theta_v = \tau \theta_{lv}|_{z=1} - \tau' + \frac{Q_v}{\exp [Pe_v]} [\exp (Pe_v Y) - 1] \quad (4.20)$$

donde

$$Q_v = \frac{q_v''}{\dot{m}_0 c_{pv} \Delta T_v}$$

Adicionalmente, en la Ec. (4.74) el valor de  $Pe_v$  es desconocido ya que contienen a  $L_v$ , por lo que se requiere de resolver el proceso de cambio de fase en la región de dos fases.

#### 4.1.4. Modelado de la zona de dos fases

##### 4.1.4.1. Ecuaciones para flujos bifásico

Las ecuaciones clásicas para flujos bifásicos han sido expresadas en el capítulo 3.2.1.1.

La simplificación de las ecuaciones clásicas con ayuda de las hipótesis son de la forma:

**Conservación de la masa para flujos bifásicos:**

$$\frac{\partial \varepsilon s \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \bar{u}_l) = - \langle \dot{n} \rangle, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \varepsilon (1 - s) \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \bar{u}_v) = \langle \dot{n} \rangle, \quad (4.22)$$

donde  $\langle \dot{n} \rangle$  es la rapidez de evaporación.

##### **Cantidad de movimiento (Ley de Darcy)**

La ecuación de la cantidad de movimiento esta dada por la ley de Darcy.

$$u_\alpha = - \frac{K K_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \left[ \frac{dp_\alpha}{dy} + \rho_\alpha g \right] \quad \alpha = l, v \quad (4.23)$$

donde  $\rho$  es la densidad, y los subíndices  $l$  y  $v$  refieren a las fases líquido y vapor respectivamente;  $K$  es la permeabilidad del medio poroso y estará dada por la ecuación de Carman-Kozeny [5];  $g$  es la aceleración debido a la gravedad y  $k_{rl} = s^3$ ,  $k_{rv} = (1 - s)^3$  son las permeabilidades relativas en función de la saturación;  $s$  representa la saturación del líquido, cuando la saturación  $s = 1$ , es igual a la unidad representa la fase líquida, si  $s = 0$  representa la fase de vapor. La permeabilidad relativa toma en cuenta la disminución en la movilidad de una fase por la presencia de la otra fase.

La presión capilar,  $p_c$ , es definida como la diferencia entre la presión del vapor y la presión del líquido,

$$p_c = p_v - p_l \quad (4.24)$$

$$p_c = \sigma \left( \frac{\varepsilon}{K} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1.417(1 - s) - 2.120(1 - s)^2 + 1.263(1 - s)^3 \right] = \delta J(s) \quad (4.25)$$

La función  $J(s)$ , de la presión capilar es conocida como la función de Leverett, donde  $\sigma$  es la tensión superficial entre el líquido-vapor, y  $\varepsilon$  es la porosidad del medio, la presión del vapor en un medio poroso puede expresarse en función de la temperatura como  $p_v = p_{sat} = a \exp(bT)$  donde  $p_{sat}$  es la presión de saturación del vapor, para las constantes  $a$  y  $b$ . Temperaturas cercanas a 370 K, que es relevante a nuestro modelo, obtenemos cantidades para  $a = 0.19743 \text{ Pa}$  y  $b = 0.03525 \text{ K}^{-1}$  [42].

Analizando las ecuaciones (4.21) y (4.22) tenemos:

$$\frac{d}{dy} (\rho_l u_l + \rho_v u_v) = 0 \quad (4.26)$$

La ecuación de continuidad puede ser integrada obteniendo:

$$\rho_l u_l + \rho_v u_v = C_1 \quad (4.27)$$

para obtener la constante  $C_1$  observamos que en las interfaces de la región de dos fases, el flujo másico que entra y que cambia de fase es el mismo que sale de la región de dos fases por lo tanto:

$$y|^{-L_l} = \dot{m}_0 \quad \text{en} \quad \rho_l u_l = C_1 \quad \therefore C_1 = \dot{m}_0 \quad (4.28)$$

en la frontera superior de la región de dos fases:



$$y|^{+L_l+L_{lv}} = \dot{m}_0 \quad \text{en} \quad \rho_v u_v = C_1 \quad \therefore \quad C_1 = \dot{m}_0 \quad (4.29)$$

por lo tanto la ecuación de continuidad sera:

$$\rho_l u_l + \rho_v u_v = \dot{m}_0 \quad (4.30)$$

donde  $\dot{m}_0$  representa la cantidad de flujo másico de refrigerante que es inyectado al medio poroso.

#### 4.1.4.2. Ecuación de la energía en la región de dos fases

Una región de dos fases o la región donde se presenta el cambio de fase, usualmente se considera como una región isotérmica, en el presente trabajo se demuestra que esta región tiene un gradiente de temperatura, que aunque es mínimo descarta el hecho de que sea una región isotérmica, así mismo el uso de esta ecuación hace posible la solución del problema.

En el interior de la region de dos fases el transporte de energía es dominado por la evaporación y el fenómeno de capilaridad, el resultado de esta interacción es una zona de temperatura aproximadamente constantante a la temperatura de saturación.

Aplicando la primera ley de la termodinámica a un volumen de control nos conduce a la siguiente ecuación de la energía [43].

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( k_{eff} \frac{\partial T_{lv}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\dot{m}_v h_v + \dot{m}_l h_l) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l U_l \varepsilon s_l + \rho_v U_v \varepsilon s_v) + \rho_s c_s (1 - \varepsilon) \frac{\partial T_{lv}}{\partial y} \quad (4.31)$$

En estado estacionario, la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d}{dy} \left( k_{eff} \frac{dT_{lv}}{dy} \right) - h_v \frac{d\dot{m}_v}{dy} - h_l \frac{d\dot{m}_l}{dy} = 0 \quad (4.32)$$

en el interior de la zona de dos fases la cantidad de flujo másico del vapor generado debiera de ser igual al flujo másico del líquido evaporado.

$$\dot{m}_l = -\dot{m}_v \quad (4.33)$$

sustituyendo en la ecuación tenemos

$$\frac{d}{dy} \left( k_{eff} \frac{dT_{lv}}{dy} \right) = h_v \frac{d\dot{m}_v}{dy} - h_l \frac{d\dot{m}_v}{dy} \quad (4.34)$$

la definición de entalpía nos da la siguiente simplificación

$$\frac{d}{dy} \left( k_{eff} \frac{dT_{lv}}{dy} \right) = (h_v - h_l) \frac{d\dot{m}_v}{dy} \quad (4.35)$$

$$\frac{d}{dy} \left( k_{eff} \frac{dT_{lv}}{dy} \right) = h_{lv} \frac{d\dot{m}_v}{dy} \quad (4.36)$$

La ecuación de la energía será

$$\frac{d}{dy} \left( k_{eff} \frac{dT_{lv}}{dy} \right) - h_{lv} \frac{d\dot{m}_v}{dy} = 0 \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dy} \left[ k_{eff} \frac{dT_{lv}}{dy} - \dot{m}_v h_{lv} \right] = 0 \quad (4.38)$$

La ecuación de la energía (4.38) describe la transferencia de calor y el cambio de fase en la región de dos fases, esta ecuación es necesaria para la solución del problema al permitir que la presión del vapor sea una función de la temperatura en la región de dos fases.

Las Ecuaciones (4.30) y (4.38) forman un sistemas acoplado de dos ecuaciones para las variables  $p_l$ ,  $p_v$ ,  $k_{rl}$ ,  $k_{rv}$  y  $T_{lv}$ .

#### 4.1.4.3. Condiciones de frontera de la ecuación de la energía y de la continuidad de masa

El sistema (4.30) y (4.38) es de segundo orden para  $s$  y  $T$ , entonces requerimos cuatro condiciones de frontera. En la frontera superior de la zona de dos fases representando la interfaz con la región de vapor la saturación es cero  $s = 0$ . El flujo de calor debido

a la continuidad mostrada en los balances de energía en la interfase tenemos que  $q''$ , se utiliza en el gradiente de temperatura y para generar la evaporación del liquido en la frontera.

Las dos condiciones de frontera son:

$$y = L_l + L_{lv} \quad T_{lv} = T_{int} \approx T_{sat}, \quad s = 0 \quad (4.39)$$

Las condiciones en la frontera inferior son

$$T_l = T_{lv} = T_{sat}, \quad s = 1, \quad \text{en} \quad y = L_l \quad (4.40)$$

#### 4.1.4.4. Balances de energía en la interfaz.

Considerando la energía que entra y sale de la interfase, se realiza un balance de energía en las interfaces con lo que se obtendrán condiciones de frontera necesarias para el problema. Fig. 4.2.

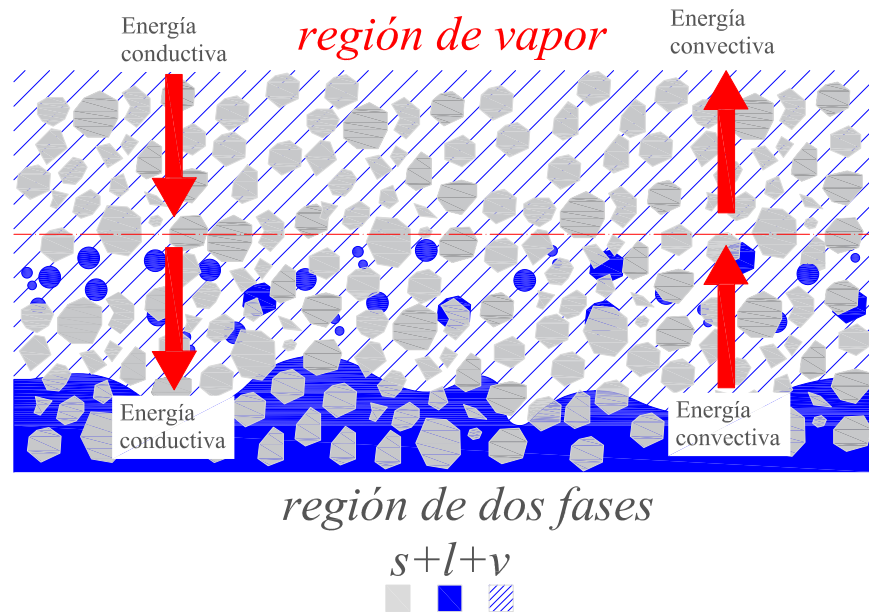


FIGURA 4.2: Diagrama del balance de energía en la interfase vapor-dos fases.

En la interfase región de vapor-dos fases tenemos:

$$y = L_l + L_{lv} \quad k_{ve} \frac{dT_v}{dy} = k_{lv} \frac{dT_{lv}}{dy} - \dot{m}_0 h_{lv} \quad (4.41)$$

en la interfase de la región de dos fases y la región de líquido tenemos:

$$y = L_l \quad k_{lv} \frac{dT_{lv}}{dy} = k_{le} \frac{dT_l}{dy} + \dot{m}_0 h_{lv} \quad (4.42)$$

Anteriormente se presentaron las ecuaciones así como sus respectivas condiciones de frontera, el siguiente paso sera adimensionalizar el modelo.

#### 4.1.5. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno.

##### 4.1.5.1. Ecuación de continuidad.

Introduciendo las variables adimensionales:

$$z = \frac{y - L_l}{L_{lv}}, \quad \theta_{lv} = \frac{T_{lv}}{T_{sat}}, \quad k^* = \frac{k_{lv}}{k_l} \quad (4.43)$$

al sustituir la ley de Darcy para el líquido y el vapor en la ecuación de continuidad tenemos:

$$\rho_l \left( -\frac{KK_{rl}}{\mu_l} \left[ \frac{dp_l}{dy} + \rho_l g \right] \right) + \rho_v \left( -\frac{KK_{rv}}{\mu_v} \left[ \frac{dp_v}{dy} + \rho_v g \right] \right) = \dot{m}_0 \quad (4.44)$$

sustituyendo las relaciones de la presión capilar y las permeabilidades relativas la ecuación es de la forma:

$$\frac{s^3}{\nu_l} \left( \frac{d}{dy} [a \exp(bT_{lv}) - \delta J(s)] + \rho_l g \right) + \frac{(1-s)^3}{\nu_v} \left( \frac{d}{dy} [a \exp(bT_{lv})] + \rho_v g \right) = -\frac{\dot{m}_0}{K} \quad (4.45)$$

al introducir las variables adimensionales la ecuación de continuidad toma la forma de:

$$s^3 \left( \frac{1}{L_{lv} \rho_l g} \frac{d}{dz} [a \exp(bT_{sat} \theta_{lv}) - \delta J(s)] + 1 \right) + \dots \\ \dots (1-s)^3 \bar{\nu} \left( \frac{1}{L_{lv} \rho_l g} \frac{d}{dz} [a \exp(bT_{sat} \theta_{lv})] + \alpha \right) = -\frac{\dot{m}_0 \nu_l}{K \rho_l g} \quad (4.46)$$

Introduciendo el parámetro  $\phi$  definido por  $\phi = bT_{sat}$ , tenemos  $\exp[bT_{sat}\theta_{lv}] = \exp[\phi\theta_{lv}] = \exp[\phi] \exp[\phi(\theta_{lv} - 1)]$ . Así la derivada que contiene al exponencial se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dz} (\exp[\phi(\theta_{lv} - 1)]) = \phi \exp[\phi(\theta_{lv} - 1)] \frac{d\theta_{lv}}{dz} \quad (4.47)$$

Donde:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu_l}{\nu_v}, \quad \alpha = \frac{\rho_v}{\rho_l}$$

Reacomodando los términos en la ecuación de continuidad obtenemos:

$$s^3 \left( \frac{(Da)_m}{Bo \bar{L}_{lv}} \xi \exp[\phi(\theta_{lv} - 1)] \frac{d\theta_{lv}}{dz} - \frac{(Da)_m}{Bo \bar{L}_{lv}} J' \frac{ds}{dz} + 1 \right) + \dots \\ \dots (1-s)^3 \bar{\nu} \left( \frac{(Da)_m}{Bo \bar{L}_{lv}} \xi \exp[\phi(\theta_{lv} - 1)] \frac{d\theta_{lv}}{dz} + \alpha \right) = -\frac{Ca}{Bo} \quad (4.48)$$

los distintos parámetros adimensionales están definidos por:

$$\xi = \frac{a\phi \exp[\phi]}{\delta}, \quad \phi = bT_{sat}, \quad (Da)_m = \frac{(\varepsilon K)^{\frac{1}{2}}}{H}, \quad Bo = \frac{K\rho_l g}{\sigma}, \quad (4.49) \\ Ca = \frac{\dot{m}_0 \nu_l}{\sigma}, \quad J' = 2.823 - 4.240(s) - 3.708(1-s)^2$$

donde  $\bar{\nu}$  representa razón de viscosidades cinemáticas del líquido y el vapor,  $\alpha$  representa la razón de densidades del vapor respecto al líquido,  $(Da)_m$  es el número de Darcy modificado para este estudio y representa la permeabilidad del medio con respecto a la longitud del sistema;  $Bo$  es el número de adimensional de Bond que indica el cociente entre la fuerza de flotación y la fuerza que ejerce la tensión superficial; el número adimensional capilar denotado por  $Ca$  representa los efectos viscosos contra la tensión superficial y  $\bar{L}_{lv}$  que indica el valor característico adimensional de la región de dos fases.

#### 4.1.5.2. Adimensionalización de la ecuación de la energía.

La ecuación de la energía que describe la transferencia de calor y el cambio de fase en la zona de dos fases es

$$\frac{d}{dy} \left[ k_{lv} \frac{dT_{lv}}{dy} - \dot{m}_v h_{lv} \right] = 0 \quad (4.50)$$

$h_{lv}$  es el calor latente del fluido,  $k_{lv}$  es la conductividad térmica efectiva y  $T_{lv}$  es la temperatura de la zona.

Podemos escribir la ecuación en termino de la presión del vapor  $p_v$ , como:

$$\frac{d}{dy} \left[ k_{lv} \frac{dT_{lv}}{dy} + \frac{K \rho_v h_{lv} k_{rv}}{\mu_v} \left( \frac{dp_v}{dy} + \rho_v g \right) \right] = 0 \quad (4.51)$$

Tras realizar una primer integral

$$k_{lv} \frac{dT_{lv}}{dy} + \frac{K \rho_v h_{lv} k_{rv}}{\mu_v} \left( \frac{dp_v}{dy} + \rho_v g \right) = C_3 \quad (4.52)$$

Para obtener el valor de la constantes  $C_3$  analizamos la condicion de frontera en la interfase con la región de vapor

$$k_{ve} \frac{dT_v}{dy} = k_{lv} \frac{dT_{lv}}{dy} - \dot{m}_0 h_{lv}, \quad \text{en} \quad y = L_l + L_{lv} \quad (4.53)$$

del balance de energía en la frontera claramente podemos decir que la constante de integracion  $C_3$  es igual al gradiente que se conduce a la región de vapor.

$$k_{lv} \frac{dT_{lv}}{dy} + \frac{K \rho_v h_{lv} k_{rv}}{\mu_v} \left( \frac{dp_v}{dy} + \rho_v g \right) = k_{ve} \frac{dT_v}{dy} \Big|_{y=L_l+L_{lv}} \quad (4.54)$$

Adimensionalizando la ecuación de la energía

$$\frac{k_l k^* T_{sat}}{L_{lv}} \frac{d\theta_{lv}}{dz} + \frac{K h_{lv}}{\nu_v} (1-s)^3 \left( \frac{1}{L_{lv}} \frac{d}{dz} [a \exp(b T_{sat} \theta_{lv})] + \rho_v g \right) = \frac{k_{ve} \Delta T_v}{H (1 - \bar{L}_l - \bar{L}_{lv})} \frac{d\theta_v}{dY} \Big|_{Y=0} \quad (4.55)$$

Al evaluar el gradiente que proviene de la región de vapor y agrupar las variables en términos de parámetros adimensionales obtenemos:

$$\frac{(Ja)_m (Da)_m}{Ca (Le_c)_m} k^* \frac{d\theta_{lv}}{dz} + \frac{Bo}{Ca} (1-s)^3 \bar{\nu} \left( \frac{(Da)_m}{Bo \bar{L}_{lv}} \xi \exp[\phi(\theta_{lv}-1)] \frac{d\theta_{lv}}{dz} + \alpha \right) = \frac{Q}{\exp[Pe_v]}$$

donde los nuevos valores adimensionales son:

$$(Ja)_m = \frac{c_{pl} T_{sat}}{h_{lv}},$$

$$(Le_c)_m = \frac{c_{pl} \sigma (\varepsilon K)^{1/2}}{k_l \nu_l}, \quad Q = \frac{q_v''}{\dot{m}_0 h_{lv}}$$

Reacomodando los terminos podremos obtener la ecuación diferencial que describe la distribución de saturación en el interior de la región de dos fases.

$$\frac{ds}{dz} = \frac{\left[ \left( \frac{Q \exp[-Pe_v] Ca}{Bo} - \frac{(Ja)_m (Da)_m}{Bo (Le_c)_m} k^* \frac{d\theta_{lv}}{dz} \right) + s^3 \left( \frac{(Da)_m}{Bo \bar{L}_{lv}} \xi \exp[\phi(\theta_{lv}-1)] \frac{d\theta_{lv}}{dz} + 1 \right) + \frac{Ca}{Bo} \right]}{\frac{s^3 (Da)_m J'}{Bo \bar{L}_{lv}}} \quad (4.56)$$

La Ec. (4.75) es la solución que describe el comportamiento de la saturación en el interior de la región de dos fases, para su solución necesitamos conocer el gradiente de la temperatura y los parámetros de valor característico.

La ecuación de la energía será:

$$\frac{d\theta_{lv}}{dz} = \frac{Q \exp[-Pe_v] - \frac{Bo}{Ca} \alpha (1-s)^3 \bar{\nu}}{\frac{(Ja)_m (Da)_m}{Ca (Le_c)_m} k^* + \frac{(Da)_m}{Ca \bar{L}_{lv}} \xi \exp[\phi(\theta_{lv}-1)] (1-s)^3 \bar{\nu}} \quad (4.57)$$

Las Ec. (4.75) y (4.76) son dos ecuaciones diferenciales simultaneas para el campo de saturación y temperaturas en la zona de dos fases. Su solución nos proporcionará los resultados de la región de dos fases.

Para finalizar la solución debemos de resolver la región del líquido y finalmente acoplar el sistema completo con ayuda de las condiciones de interfaz.

#### 4.1.6. Región de líquido

La ecuación de la energía para la región de líquido bajo las hipótesis presentadas en capítulos anteriores es:

$$[\varepsilon(\rho c_p)_l + (1 - \varepsilon)(\rho c_p)_s] \frac{\partial T_l}{\partial t} + (\rho c_p)_l u_l \frac{\partial T_l}{\partial y} = k_{le} \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \quad (4.58)$$

en estado estacionario

$$k_{le} \frac{d^2 T_l}{dy^2} - \dot{m}_l c_{pl} \frac{dT_l}{dy} = 0 \quad (4.59)$$

##### 4.1.6.1. Condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera asociadas a la Ec. (4.59) son las siguientes:

En la interfaz con la región de dos fases tenemos continuidad de la temperatura así como el balance de energía en dicha interfaz.

$$y = L_l \quad k_{lw} \frac{dT_{lw}}{dy} = k_{le} \frac{dT_l}{dy} + \dot{m}_0 h_{lw} \quad T_{lw} = T_l = T_{sat} \quad (4.60)$$

$$y = 0 \quad T_l = T_0 \quad (4.61)$$

que expresa la temperatura a la cual el líquido es inyectado hacia el medio poroso desde el depósito que se encuentra a temperatura  $T_0$ .

##### 4.1.6.2. Variables adimensionales.

Las variables adimensionales utilizadas en la región del líquido son:

$$\eta = \frac{y}{L_l} \quad \theta_l = \frac{T_l - T_0}{T_{sat} - T_0} \quad (4.62)$$

$\eta$  junto con  $z$  y  $Y$  son las variables adimensionales que nos permiten formular el modelo en forma de valores característicos.



### 4.1.6.3. Adimensionalización

Al emplear las variables adimensionales la ecuación de la energía toma la forma de:

$$\frac{d^2\theta_l}{d\eta^2} - Pe_l \frac{d\theta_l}{d\eta} = 0 \quad (4.63)$$

condiciones de frontera adimensionales

$$\eta = 1 \quad \frac{k_l T_{sat}}{L_{lv}} k^* \frac{d\theta_{lv}}{dz} = \frac{k_{le} (T_{sat} - T_0)}{L_l} \frac{d\theta_l}{d\eta} + \dot{m}_0 h_{lv} \quad \theta_{lv} = \theta_l = 1 \quad (4.64)$$

$$\eta = 0 \quad \theta_l = 0 \quad (4.65)$$

donde

$$Pe_l = \frac{\dot{m}_0 c_{pl} L_l}{k_{le}}, \quad k_{le} = (1 - \varepsilon) k_s + \varepsilon k_l \quad (4.66)$$

El número de  $Pe_l$  es el valor característico que posee información relacionada a la longitud del líquido, éste junto con  $Pe_v$  serán los valores a encontrar por medio de un procedimiento iterativo.

La solución analítica de la ecuación de la energía adimensional es:

$$\theta_l = C_1 + C_2 \exp [Pe_l \eta] \quad (4.67)$$

para obtener el valor de las constantes de integración se aplicaran las condiciones de frontera en la interfaz:

$$\eta = 1 \quad \left. \frac{d\theta_l}{d\eta} \right|_{\eta=1} = \frac{k_l L_l T_{sat}}{k_{le} L_{lv} (T_{sat} - T_0)} k^* \Big|_{z=0} \left. \frac{d\theta_{lv}}{dz} \right|_{z=0} - \frac{Pe_l}{Ja} \quad (4.68)$$

antes de aplicar las condiciones de frontera se derivara la solución de la ecuación de la energía.

$$\left. \frac{d\theta_l}{d\eta} \right|_{\eta=1} = C_2 Pe_l \exp [Pe_l] \quad (4.69)$$

al sustituir la condición de frontera y analizar el gradiente proveniente de la región de dos fases obtenemos que la constante  $C_2$  es:

$$C_2 = \frac{Q\beta}{Ja \exp [Pe_l] \exp [Pe_v]} - \frac{1}{Ja \exp [Pe_l]}$$

al utilizar la segunda condición de frontera podemos dar la solución a la ecuación de la energía en la región del líquido que es de la forma:

$$\eta = 0 \quad \theta_l = 0 \quad (4.70)$$

$$\theta_l = \left[ \frac{Q\beta}{Ja \exp [Pe_l] \exp [Pe_v]} - \frac{1}{Ja \exp [Pe_l]} \right] [\exp (Pe_l \eta) - 1] \quad (4.71)$$

La Ec. (4.71) es la solución al campo de temperaturas en la región del líquido, como podemos observar en la ecuación aparecen los valores característicos del problema  $Pe_v$  y  $Pe_l$ , valores que nos proporcionarán las longitudes de las distintas regiones.

Para obtener la solución general aplicaremos la condición de frontera.

$$\eta = 1 \quad \theta_{lv} = \theta_l = 1 \quad (4.72)$$

obteniendo:

$$1 - \left[ \frac{Q\beta}{Ja \exp [Pe_l] \exp [Pe_v]} - \frac{1}{Ja \exp [Pe_l]} \right] [\exp (Pe_l) - 1] = 0 \quad (4.73)$$

Esta ecuación puede ser resuelta si se propone uno de los dos valores característicos  $Pe_l$  o  $Pe_v$  al considerar un valor el segundo se obtendrá con ayuda de métodos numéricos. La última condición de frontera  $\theta_{lv} = 1$  será utilizada en el programa de Runge Kutta de cuarto orden para programar las ecuaciones que describen la región de dos fases.

## 4.2. Metodología de solución

A continuación se presentará el resumen de las ecuaciones y la metodología de solución al modelo físico.

Solución en la **región de vapor**

$$\theta_v = \tau \theta_{lv}|_{z=1} - \tau' + \frac{Q_v}{\exp[Pe_v]} [\exp(Pe_v Y) - 1] \quad (4.74)$$

donde

$$Q_v = \frac{q_v''}{\dot{m}_0 c_{pv} \Delta T_v}$$

Ecuaciones diferenciales simultaneas en la **región de dos fases:**

**ecuación de la saturación:**

$$\frac{ds}{dz} = \frac{\left[ \left( \frac{Q \exp[-Pe_v] Ca}{Bo} - \frac{(Ja)_m (Da)_m}{Bo (Le_c)_m L_{lv}} k^* \frac{d\theta_{lv}}{dz} \right) + s^3 \left( \frac{(Da)_m}{Bo L_{lv}} \xi \exp[\phi(\theta_{lv} - 1)] \frac{d\theta_{lv}}{dz} + 1 \right) + \frac{Ca}{Bo} \right]}{\frac{s^3 (Da)_m J'}{Bo L_{lv}}} \quad (4.75)$$

**ecuación de la energía:**

$$\frac{d\theta_{lv}}{dz} = \frac{Q \exp[-Pe_v] - \frac{Bo}{Ca} \alpha (1-s)^3 \bar{\nu}}{\frac{(Ja)_m (Da)_m}{Ca (Le_c)_m L_{lv}} k^* + \frac{(Da)_m}{Ca L_{lv}} \xi \exp[\phi(\theta_{lv} - 1)] (1-s)^3 \bar{\nu}} \quad (4.76)$$

Las Ec. (4.75) y (4.76) son dos ecuaciones diferenciales simultaneas para el campo de saturación y temperaturas en la región de dos fases.

Solución en la **región de líquido**

$$1 - \left[ \frac{Q\beta}{Ja \exp[Pe_l] \exp[Pe_v]} - \frac{1}{Ja \exp[Pe_l]} \right] [\exp(Pe_l) - 1] = 0 \quad (4.77)$$

**Solución numérica**

Para determinar las longitudes desconocidas de las tres regiones,  $L_v$ ,  $L_{lv}$ ,  $L_l$ , hacemos uso de un procedimiento iterativo como se indica en el diagrama de flujo Fig. 4.3:

1. En la Ec. (4.77) proponemos un valor para  $Pe_v$ , entonces la ecuación es resuelta por el metodo de la secante [44] obteniendo  $Pe_l$ .
2. Con el valor propuesto de  $Pe_v$  y el correspondiente valor obtenido de  $Pe_l$  las ecuaciones de gobierno en la región de dos fases, Ecs. (4.75) y (4.76), son resueltas usando el método numérico de Runge Kutta de cuarto orden” [44] , con las condiciones de frontera  $\theta_{lv} = 1$  y  $s = 1$  en  $z = 0$ . En este paso llevamos acabo un

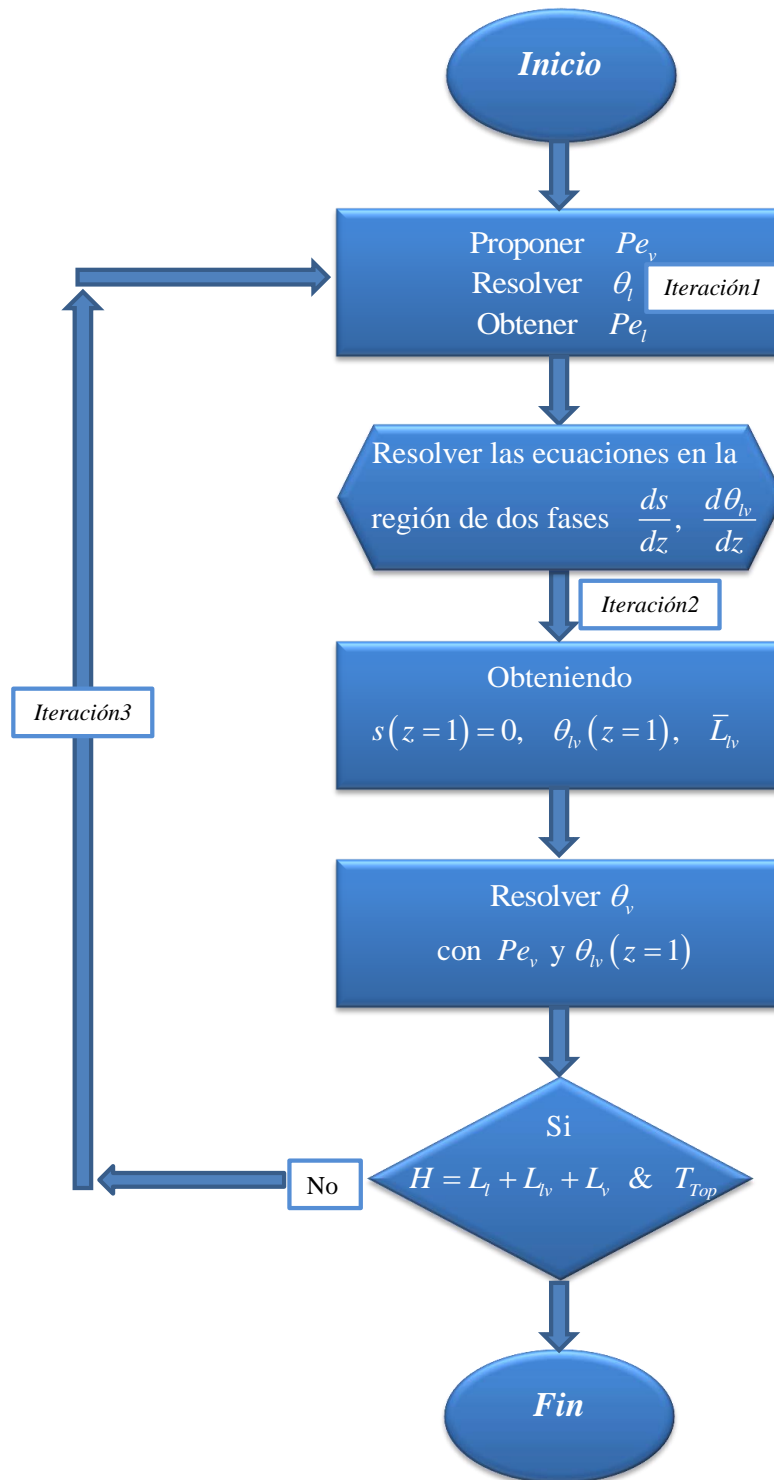


FIGURA 4.3: Diagrama de flujo que muestra la solución al problema.

proceso iterativo para encontrar el valor de  $L_{lv}$  hasta que la condición  $s = 0$  en  $z = 0$  es satisfecha; entonces, la temperatura en la interfase entre la región de dos fases y la región de vapor,  $\theta_{lv}|_{z=1}$ , se determina.

3. Basados en los resultados obtenidos en los pasos 1 – 3, la distribución de temperatura en la región del vapor, dada por la Ec. (4.74) puede ser evaluada; los valores de  $Pe_l$ ,  $Pe_v$  y  $L_{lv}$ , deben ser verificados para la condición  $1 - \bar{L}_l - \bar{L}_{lv} - \bar{L}_v \leq 1 \times 10^{-6}$ . Si la condición anterior no es satisfecha, el procedimiento iterativo es repetido desde el paso 1.
4. Una vez que la solución converge, perfiles de temperatura son obtenidos en las tres regiones así como campos de la saturación en la región de dos fases.

# Capítulo 5

## Análisis de Resultados

### 5.1. Resultados

Los cálculos numéricos se realizan para agua pura, la cual se emplea como refrigerante. Los parámetros físicos y las propiedades térmicas del refrigerante a la temperatura de  $380\text{ K}$  y a presión de  $1\text{ atm}$  se muestran en la Tabla. El espesor de la matriz porosa es de  $H = 10\text{ cm}$ . Además el calor latente de evaporación  $h_{lv} = 2.5 \times 10^6\text{ J/kg}$ , la temperatura del deposito  $T_0 = 300\text{ K}$ , porosidad igual a  $\varepsilon = 0.38$  y un diametro de poro  $d_p = 8.2 \times 10^{-5}$ .

| Propiedad             | Líquido                | vapor                 | Unidad   |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|----------|
| Densidad              | 1044                   | 1.679                 | $kg/m^3$ |
| Calor específico      | $4.1217 \times 10^3$   | $2.029 \times 10^3$   | $J/kgK$  |
| Viscosidad cinemática | $2.694 \times 10^{-7}$ | $7.16 \times 10^{-6}$ | $m^2/s$  |
| Conductividad térmica | 0.68                   | 0.0248                | $W/mK$   |

CUADRO 5.1: Propiedades térmicas de agua a la presión de  $1\text{ atm}$ .

#### 5.1.1. Distribución de temperatura y saturación en el interior de la matriz porosa.

En la Fig. (5.1) observamos las tres regiones para un flujo de calor igual a  $q'' = 1 \times 10^6\text{ W/m}^2$  y un flujo másico de  $m = 0.3\text{ kg/m}^2\text{s}$ . vapor. Las longitudes de la región de líquido, dos fases y vapor son:  $L_l = 0.06172\text{ m}$ ,  $L_{lv} = 0.02303\text{ m}$  y  $L_v = 0.01525\text{ m}$  respectivamente. Donde  $s = 1$  se refiere a la fase líquida y  $s = 0$  describe la fase de vapor. El fenómeno de enfriamiento por transpiración es un método de protección térmico sumamente eficiente, el líquido que se emplea como refrigerante es agua y con una

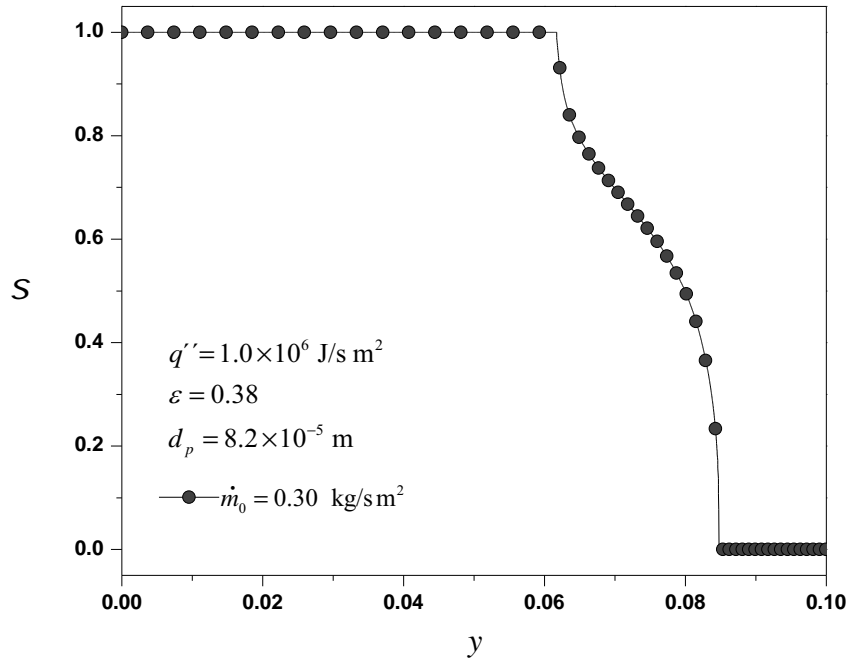


FIGURA 5.1: Localización de la región de dos fases.

pequeña cantidad de líquido inyectado al medio poroso eliminamos una gran cantidad de calor evitando así la destrucción del material que se encuentra en contacto con el flujo de calor. Fig. 5.2.

En la Fig. 5.2 observamos que el flujo de calor aplicado al medio poroso es muy elevado y podría destruir la matriz, para protegerlo introducimos al medio un flujo másico con lo que, controlamos la temperatura máxima que tienen el sólido. Para la configuración, la temperatura de la superficie que se encuentra en contacto con el flujo de calor es de  $T_{Top} = 744.2 \text{ K}$ . Las diferentes temperaturas nos ayudan a observar la separación de las regiones, el líquido que es inyectado al medio poroso se encuentra a temperatura ambiente a  $300 \text{ K}$ , una vez que alcanza la temperatura de saturación  $380 \text{ K}$  la región de dos fases se hace presente, en dicha región coexiste tanto líquido como vapor, se observa un ligero gradiente que descarta la teoría de que la región de dos fases es una región isotérmica a la temperatura de saturación. En la región del vapor la pendiente de temperatura es más pronunciada, donde los efectos convectivos de la ecuación de la energía en las regiones de una sola fase deben de ser consideradas, debido a la inyección del refrigerante al medio poroso, en distintas investigaciones las zonas de una sola fase son consideradas totalmente conductivas.

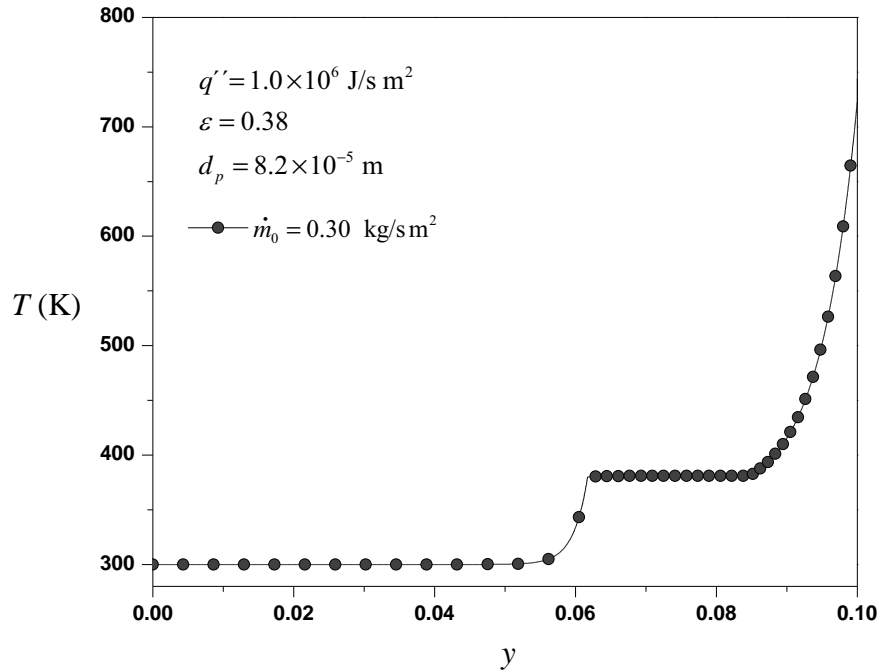


FIGURA 5.2: Curva de temperaturas de las tres regiones.

En la Fig. 5.3 y Fig. 5.4 se muestran las variaciones de temperatura y la distribución de la saturación en el interior de la matriz porosa para diferentes flujos máxicos del refrigerante,  $\dot{m}_0 = 0.25, 0.3, \text{ y } 0.8 \text{ kg/m}^2\text{s}$ . Cuando el flujo de calor es de  $q'' = 1.0E6 \text{ J/m}^2\text{s}$ , la porosidad es  $\varepsilon = 0.38$  y el diámetro de poro es de  $d_p = 8.2E - 5 \text{ m}$ .

Las variaciones de los flujos máxicos fueron puestas a prueba ya que, para valores menores a  $\dot{m}_0 = 0.25 \text{ kg/m}^2\text{s}$  la temperatura en la superficie es demasiado elevada superando los  $T_{Top} = 1200 \text{ K}$ , ocasionando problemas a la matriz porosa y para valores cercanos a  $\dot{m}_0 = 0.40 \text{ kg/m}^2\text{s}$  el flujo de calor no es suficiente para provocar la evaporación del refrigerante, por ello los valores de  $\dot{m}_0$  empleados. Se observa que a mayores flujos máxicos el área de la región de dos fases y la región del vapor se reduce, estos resultados son razonables e idénticos con Peterson [45] y Jun [46], ya que se requiere mayor energía para evaporar la fase líquida. Observamos en las variaciones de la temperatura en la Fig. 5.3 la gran eficiencia que posee el enfriamiento por transpiración ya que con un mínimo flujo máxico podemos disipar una gran energía.



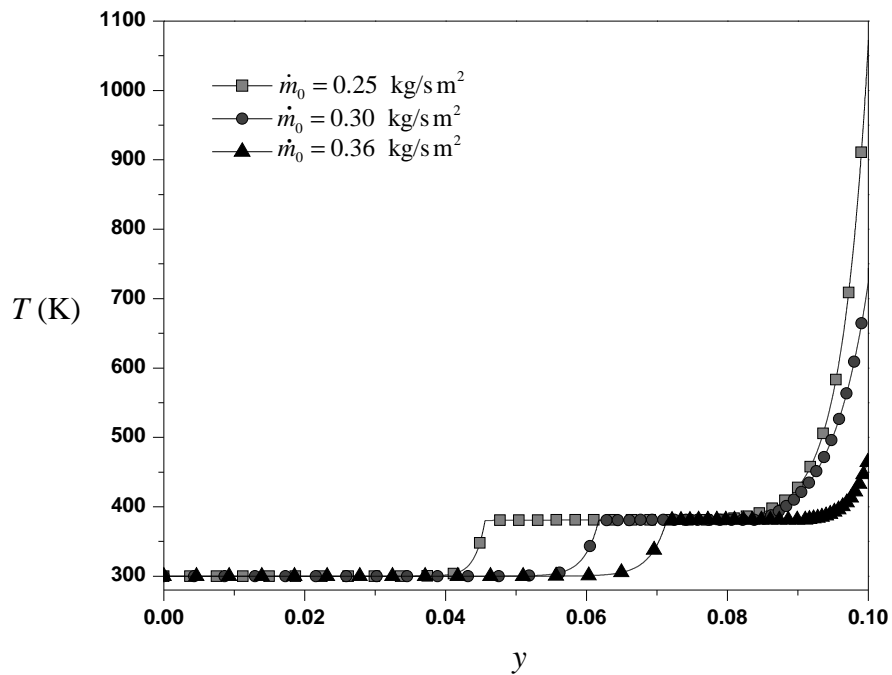


FIGURA 5.3: Variación de la temperatura para distintos flujos máxicos.

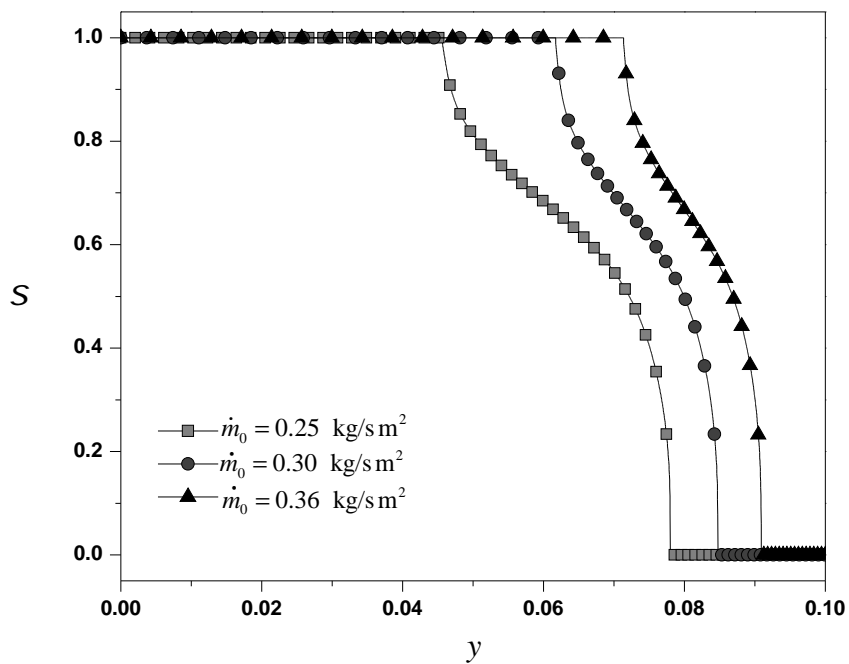


FIGURA 5.4: Variación de la saturación para distintos flujos máxicos.

### 5.1.2. Región de dos fases

La región de dos fases es la más importante y la que muestra una gran complejidad, debido a la teoría de multi-fases que es necesaria para dar solución a esta región donde encontramos tanto líquido, vapor y sólido, las curvas que presenta muestran las variaciones en el interior de la región de dos fases para los distintos parámetros del sistema.

En la Fig. 5.5 observamos las variaciones de la saturación en el interior de la región de dos fases para distintos flujos máscicos, ésta región describe el cambio de fase del líquido a vapor representado por la saturación donde  $s = 1$  representa la fase líquida y  $s = 0$  la fase de vapor, El flujo máscico es una variable del sistema localizada en el número adimensional capilar  $Ca = \frac{\dot{m}_0 \nu_l}{\sigma}$ , al incrementar el flujo máscico el valor de  $Ca$  incrementa observando así las variaciones que presenta los perfiles de saturación, el incremento en las curvas es debido al aumento del líquido refrigerante en el interior del medio poroso ya que la evaporación será más difícil de alcanzar conforme se aumenta el flujo máscico.

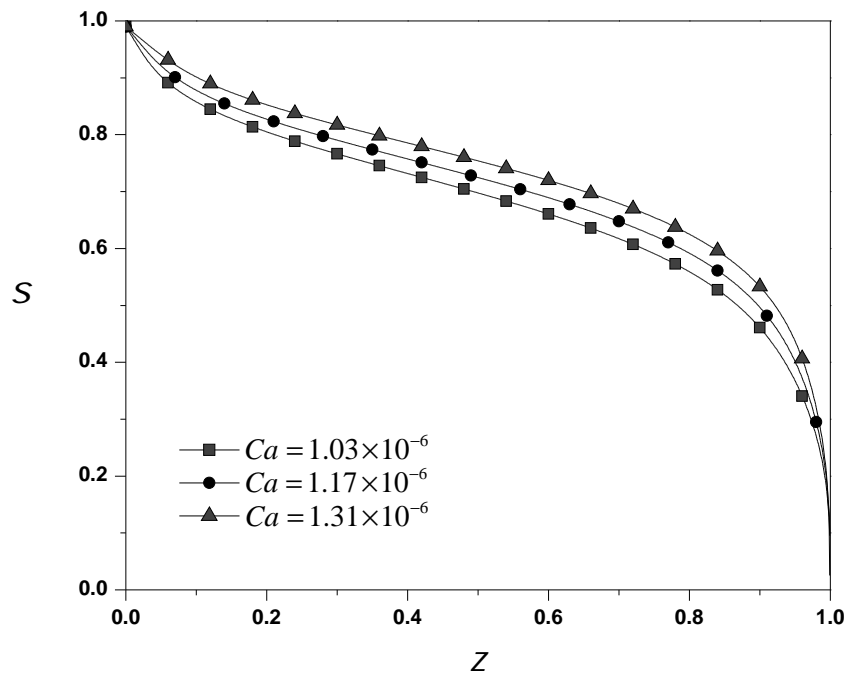


FIGURA 5.5: Variación de la saturación para  $\dot{m}_0 = 0.30 - 0.34 - 0.38$  [ $kg/m^2s$ ],  $q'' = 1.0 \times 10^6$  [ $W/m^2$ ],  $\varepsilon = 0.38$ ,  $d_p = 8.2 \times 10^{-5}$  [ $m$ ].

En la Fig. 5.6 se muestran los perfiles de temperatura para la región de dos fases cuando variamos el flujo máscico  $\dot{m}_0$ , la región de dos fases misma donde se presenta el cambio de fase ha sido considerada como una región isotérmica a la temperatura de saturación,

en el presente trabajo al hacer uso de la ecuación de la energía hemos sido capaces de observar las variaciones que existen en dicha región que aunque son mínimas no la podemos considerar como isotermica, como observamos cuando incrementamos el número adimensional capilar  $Ca$ , los perfiles disminuyen esto debido a la presencia de una mayor cantidad de líquido refrigerante en el medio poroso, induciendo que la temperatura disminuya; efecto de protección térmica que se busca en este tipo de fenómenos de enfriamiento por transpiración.

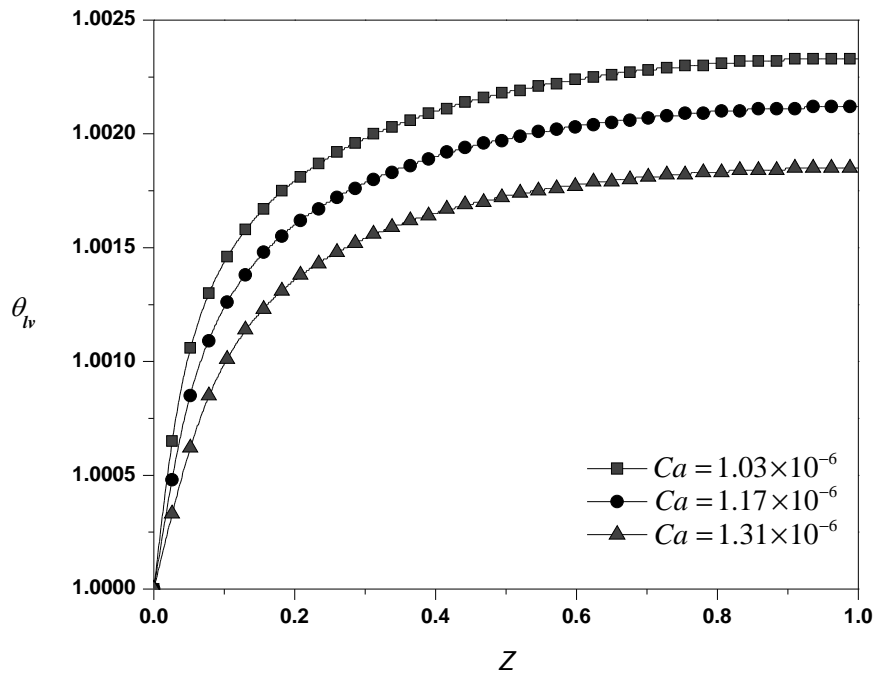


FIGURA 5.6: Variación de la temperatura para para  $\dot{m}_0 = 0.30 - 0.34 - 0.38 [kg/m^2 s]$ ,  $q'' = 1.0 \times 10^6 [W/m^2]$ ,  $\varepsilon = 0.38$ ,  $d_p = 8.2 \times 10^{-5} [m]$ .

Las Fig. 5.7 y Fig. 5.8 muestra las variaciones en la saturación y la temperatura en el interior de la región de dos fases para distintos valores del parametro adimensional que relacionado al flujo de calor.

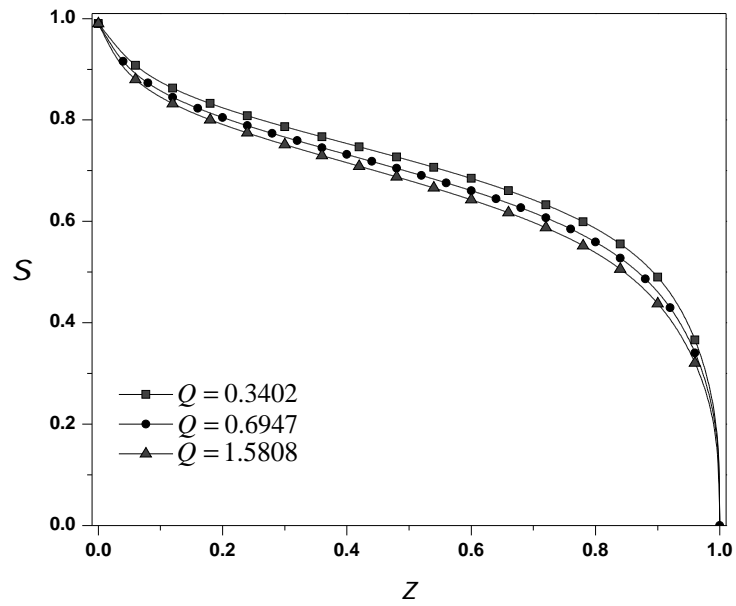


FIGURA 5.7: Variación de la saturación para  $q'' = 8.0 \times 10^5 - 1.0 \times 10^6 - 1.5 \times 10^6$   $[W/m^2]$ ,  $\dot{m}_0 = 0.30$   $[kg/m^2s]$ ,  $\varepsilon = 0.38$ ,  $d_p = 8.2 \times 10^{-5}$   $[m]$ .

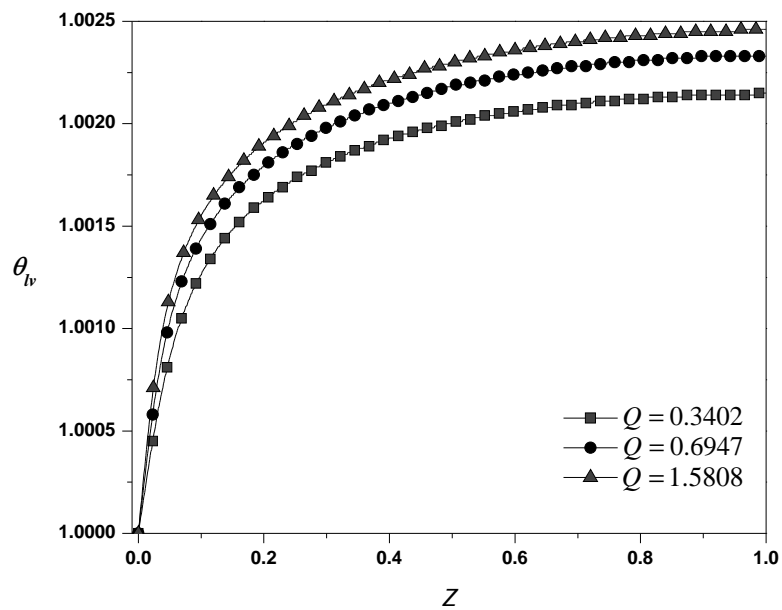


FIGURA 5.8: Variación de la temperatura para  $q'' = 8.0 \times 10^5 - 1.0 \times 10^6 - 1.5 \times 10^6$   $[W/m^2]$ ,  $\dot{m}_0 = 0.30$   $[kg/m^2s]$ ,  $\varepsilon = 0.38$ ,  $d_p = 8.2 \times 10^{-5}$   $[m]$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1. Conclusiones

En este trabajo de investigación se realizó un análisis teórico-numérico del proceso de enfriamiento por transpiración con cambio de fase del líquido refrigerante en un medio poroso; proponemos una nueva formulación para el problema unidimensional, en estado estacionario de la transferencia de calor y de masa en un medio poroso con cambio de fase. Las variaciones de la temperatura a través de la región de dos fases fueron clave para la solución del problema. Las ecuaciones de gobierno se adimensionalizaron apropiadamente, en las cuales aparecen números de Péclet definidos para las regiones de líquido, de dos fases y del vapor. Estos números de Péclet están directamente relacionados con las longitudes desconocidas de cada una de las regiones y representan valores característicos del modelo matemático formulado, los cuales se determinan numéricamente mediante un proceso iterativo.

Las conclusiones obtenidas a través de este estudio pueden ser numeradas:

1. Las variables empleadas en la adimensionalización del modelo matemático nos permitió plantearlo como un problema de valores característicos.
2. El análisis revela singularidades en los perfiles de saturación en la frontera superior e inferior de la región de dos fases.
3. Los perfiles de temperatura en las regiones de una fase, región de líquido y de vapor muestran que los efectos convectivos de la ecuación de la energía deben ser considerados.

4. La temperatura del líquido y el vapor así como la temperatura de la región de dos fases y la saturación es controlable a través del cambio de los parámetros característicos del sistema.
5. Se detectaron variaciones de la temperatura en la región de dos fases descartando la hipótesis de que la región de cambio de fase es una región isotérmica a la temperatura de saturación.
6. El método iterativo desarrollado para localizar la longitud y la posición de la región de dos fases, bajo ciertas condiciones estacionarias, no se ha presentado en trabajos previos.
7. La transferencia de calor de cada fase separada: región de líquido, región de dos fases y región de vapor fueron acopladas por medio de condiciones de interfase, condiciones desarrolladas por balances de energía en las interfaces.
8. El problema iterativo se resolvió para los perfiles de saturación y temperatura, obteniendo resultados cercanos a los publicados en investigaciones previas (analíticas, numéricas y experimentales).

### 6.1.1. Trabajos futuros

Trabajos adicionales son necesarios para que el fenómeno de enfriamiento por transpiración con cambio de fase sea entendido completamente. Los siguientes puntos muestran aspectos que se pueden estudiar para enriquecer la literatura existente:

- Incluir en el modelo variables dependientes de la temperatura, esto debido a los elevados gradientes presentes en el sistema, adicionalmente se debe estudiar la influencia de la dispersión térmica en el proceso.
- Implementar un modelo para el problema bidimensional del cambio de fase en el interior de medios poroso.
- Realizar el análisis en estado transitorio.
- Incluir en el modelo otros líquidos refrigerantes diferentes al agua.
- Llevar a cabo el análisis considerando que no existe equilibrio térmico local entre la matriz porosa y el líquido refrigerante.
- Aplicar la formulación presentada en este trabajo de investigación para resolver problemas de condensación en el interior de medios poroso.

# Bibliografía

- [1] V. M. Epifanov and E. A. Manushin. Some results of the investigation of transpiration cooling of gas turbine blades. *Journal of engineering physics and thermophysics*, 28(3):396–405, March 1975.
- [2] C. Trevi no and A. Medina. Analysis of the transpiration cooling of a thin porous plate in a hot laminar convective flow. *European Journal of mechanics - b/fluids*, 18(2):245–260, October 1999.
- [3] V. A. Mairov. Boundary conditions for a forced transpiration cooling system. *Journal of engeneering physics*, 47(4):1170–1176, October 1984.
- [4] Yuwen Zhang Amir Faghri. Transport phenomena in multiphase systems. *Elsevier*, (First Edition).
- [5] Kaviany M. Principles of heat transfer in porous media. *Mechanical Engineering Series*, Springer(Second Edition), October .
- [6] Adrian Bejan Donald A. Nield. Convection in porous media. *Springer*, (Third Edition), 2006.
- [7] J. Polezhaev. The transpiration cooling for blades of high temperature gas turbine. *Energy Convers.*, 38(10):1123–1133, 1997. URL .
- [8] Yu. V. Polezhaev and E. M. Seliverstov. Universal model of heat transfer in systems with penetration cooling. *Heat and mass transfer and physical gasdynamics.*, 40(6): 856–864, March 2002.
- [9] J. Von Wolfersdorf. Effect of coolant side heat transfer on transpiration cooling. *Heat and mass transfer.*, 41(4):327–337, July 2005. URL .
- [10] Juanxiang Shi. and Jianhua Wang. Inverse problem of transpiration cooling for estimating wall heat flux by ltne model and cgm method. *International Journal of Heat and Mass Transfer.*, 52(11):2714–2720, February 2009. URL .

- [11] Wang H. N. Wang, J. H. A discussion of transpiration cooling problems through an analytical solution of local thermal non-equilibrium model. *ASME J. Heat Transf.*, 128(10):1093–1098, October 2006.
- [12] K. S. Udell. Heat transfer in porous media heated from above with evaporation, condensation, and capillary effects. *J. Heat Transf.*, 105(3):485–491, August 1983. URL .
- [13] K. S. Udell. Heat transfer in porous media considering phase change and capillarity—the heat pipe effect. *J. Heat and Mass Transfer.*, 28(2):485–495, July 1985. URL .
- [14] Udell K. S. Stewart L. D., Basel M. D. The effect of gravity on steam propagation in porous media. *Multiphase transport in porous media*, pages 31–42, 1988.
- [15] Udell K. S. Jannings, J. D. The heat pipe effect in heterogeneous porous media. *Heat transfer in porous media and particulate flows, ASME HTD*, 46:93–101, 1985.
- [16] K. S. Basel M. D., Udell. Two dimensional study of steam injection into porous media. *Multiphase transport in porous media, ASME HTD*, 127:39–46, 1989.
- [17] Joe M. S. Gerald S. Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal systems. *J. geophysical research*, 85(B11):6505–6512, 1980.
- [18] Turcotte D. L. Carl H. Sondergeld. An experimental study of two-phase convection in a porous medium with applications to geological problems. *Journal of Geophysical research*, 82(14):2045–2053, 1977.
- [19] Smirnov G. F. Approximate theory of heat transfer with boiling on surfaces covered with capillary-porous structures. *Thermal engineering*, 24(9):55–58, 1977.
- [20] Torrance K. E. Boiling in porous media. *ASME/JSME Thermal engineering joint conference proceedings*, 1:593–606, 1983.
- [21] Torrance K. E Bau H. H. Thermal convection and boiling in porous medium. *Letters in heat and mass transfer*, 9(6):431–441, 1982.
- [22] Torrance K. E Bau H. H. Low rayleigh number thermal convection in a vertical cylinder filled with porous materials and heated from below. *J. Heat Transfer*, 104(1):166–172, February 1982.
- [23] Liu S. Zhang B. Experimental study on a transpiration cooling thermal protection system. *Science China technological sciences*, 53(10):2765–2771, 2010.
- [24] H. Hald. M. Kuhn. Application of transpiration cooling for hot structures. *Technologies for reusable Space Systems*, pages 82–103, 2008.



- [25] KEndall T. H. A. G. Agwu., A. Haji-Sheikh. Experimental study of local thermal non-equilibrium phenomena during phase change in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 47(19):4365–4375, April 2004.
- [26] V. M. Polyakov. Yu. A. Zeigarnik. Heat exchange and hydrodynamics of two-phase media under conditions of forced motion in porous structures. *J. Engineering Physics Thermophysics.*, 73(6):1093–1101, June 2000.
- [27] L. Tadriss. J. Pantaloni. O. Rahli., F. Topin. Analysis of heat transfer with liquid-vapor phase change in a forced-flow fluid moving through porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 36:3959–3975, 1993.
- [28] V. I. Kovenskii. Yu. S. Teplitskii. Concerning the filtration cooling of a heat-releasing granular bed in the presence of a first-order phase transition. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.*, 80(2):311–321, 2007.
- [29] C. Beckermann. W. Chao-Yang. A two-phase mixture model of liquid-gas flow and heat transfer in capillary porous media-i. formulation. *International Journal of Heat and Mass Transfer.*, 36:96–104, 1993.
- [30] C. Beckermann. W. Chao-Yang. A two-phase mixture model of liquid-gas flow and heat transfer in capillary porous media-ii. application to pressure-driven boiling flow adjacent to a vertical heated plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer.*, 36(11):2759–2768, 1993.
- [31] C. Fan. W. Chao-Yang., C. Beckermann. Numerical study of boiling and natural convection in capillary porous media using the two-phase mixture model. *Numerical Heat Transfer part a Applications.*, 26(4):375–398, 1994.
- [32] J. H. Wang. J. X. Shi. A numerical investigation of transpiration cooling with liquid coolant phase change. *Transport in Porous Media*, 87(3):703–716, January 2011.
- [33] M. Mao. K. Wei., J. Wang. Model discussion of transpiration cooling with boiling. *Transport in Porous Media*, 94(1):303–318, 2012.
- [34] C. Y. Wang T. S. Zhao., P. Cheng. Bouyancy-induced flows and phase-change heat transfer in a vertical capillary structure with symmetric heating. *Chemical Engineering Science*, 55(14):2653–2661, 2000.
- [35] C. Y. Wang. A fixed-grid numerical algorithm for two-phase flow and heat transfer in porous media. *Numerical Heat Transfer*, 32(1):85–105, 1997.
- [36] B. R. Wetton L. J. Bridge. A mixture formulation for numerical capturing of a two-phase/vapor interface in a porous medium. *Journal of computational Physics*, 22(2):2043–2068, 2007.

- 
- [37] Whitaker. S. Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media: a theory of drying. *Advanced Heat Transfer*, pages 119–203, 1977.
- [38] Whitaker. S. Flow in porous media: A theoretical derivation of darcy’s law. *Transport in Porous Media*, 1(1):3–25, December 1986.
- [39] Wang H. N. Wang J. H. A discussion of transpiration cooling problems through an analytical solution of local thermal nonequilibrium model. *Journal of Heat Transfer*, 128(10):1093–1098, 2006.
- [40] A. E. Scheidegger. The physics of flow through porous media. *Soil science*, 86(6), 1958.
- [41] J. Bear. Dynamics of fluids in porous media. *Elsevier*, 1972.
- [42] M. M. Abbott and H. C. Van Ness. Theory and problems of thermodynamics. *McGraw-Hill*, (2):717–724, January 1972.
- [43] Kent S. Udell. An exact solution to high temperature drying of high permeability capillary porous media. *ASME National heat transfer conference*, (85):717–724, Denver 1985.
- [44] J. D. Hoffman. Numerical methods for engineers and scientists. *Marcel Dekker, Inc.*, 2nd edn., 2001.
- [45] G.P. Peterson and C.S. Chan. Heat transfer analysis and evaluating for two-phase flow in porous-channel heat sink. *Numerical Heat Transfer, part A Applications*, 31(2):113–130, January 1997.
- [46] Jun A. Hidetoshi H. Saburo T. Kazuhisa, Y. Numerical investigation of thermo-fluids flow characteristics with phase change against high heat flux in porous media. *ASME Journal of Heat Transfer*, 130(1), January 2008.