UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ALGUNOS ASPECTOS RETICULARES Y ALGEBRAICOS DEL CONJUNTO DE DERIVADAS SOBRE UN MARCO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
LUIS ÁNGEL ZALDÍVAR CORICHI

DR. JOSÉ RÍOS MONTES
INSTITUO DE MATEMÁTICAS CU

DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
FACULTAD DE CIENCIAS-UNAM

DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA
FACULTAD DE CIENCIAS-UNAM

MÉXICO, D. F.22 DE ABRIL DE 2015

Dedicado a la memoria de María Elena Corichi Cortés.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi madre, padre y hermana por estar siempre conmigo, y hacerme notar el lado humano de muchas cosas. A mis amigos y hermanos de la carrera y de la vida, Minerva, Rodrigo, Allan, Mauricio, Jesús, Darío, Ramiro, Guillermo, Bernardo, Araceli, Ramón, Alejandro(Pandris), Alejandra, Violeta, Luis Eduardo, Lorena (Lotur), Gabriela, Lizbeth, Ilán, Rafael, y Cruz. Gracias por hacerme ver que no todo son matemáticas y pensamientos racionales. Sobre todo recordarme que las dimensiones como ser humano son en efecto infinitas. A todos los que estuvieron en esta etapa de mi vida y a los que están.

En particular quiero agradecerle al Dr. José Ríos Montes por haber dirigido este trabajo, por haber tenido la paciencia en formarme como matemático y además brindarme su amistad. A mis sinodales y a mi comité tutoral, al Dr. Hugo Rincón por todos sus comentarios, que además de mejorar sustancialmente el trabajo me ayudaron a ver mis errores. A mi tío Felipe que siempre me apoya y cuyos consejos son de gran ayuda.

A todos ustedes les quiero dedicar una porción del trabajo, espero les agrade.

Introducción

Behind this mask there is more than just flesh. Beneath this mask there is an idea... and ideas are bulletproof.

V for Vendetta

...The problems are solved, not by giving new information, but by arranging what we have known since long...

Ludwig Wittgenstein, Philosophical Investigations

En el estudio de anillos y sus categorías de módulos se emplean varias retículas para controlar ciertas situaciones de la categoría de módulos, por ejemplo localizaciones, álgebra homológica local y muchas otras más. Estas retículas son las retículas de prerradicales, retículas de clases de módulos, de clases propias, de teorías de torsión hereditarias, filtros lineales, retículas de submódulos, retícula de clases naturales entre muchas otras. Todas estás han sido extensamente estudiadas ver por ejemplo [RMR$^+$02], [Gol86], [DZ06] donde se dan varias caracterización de anillos y categorías de módulos en términos de las retículas mencionadas.

Por otro lado, una clase de retículas que tiene principal interés es la de marcos. La teoría de marcos (locales, álgebras de Heyting completas) tal como ahora la conocemos tiene sus orígenes en el estudio de espacios topológicos mediante el marco de abiertos([DP66]). A este análisis se le conoce como *point-free topology*, es decir, que se traducen conceptos topológicos a conceptos algebraicos y ahí realizarlos de tal manera, que cuando uno se especializa en el marco de abiertos de un espacio exista una relación entre éste y el concepto clásico. La teoría de marcos es un área activa de la matemáticas y hay excelentes textos sobre este tema [Joh86] y [PP12].

Siguiendo esta filosofía, en [Sim89] el autor considera una situación más general. Primero, para el estudio de marcos se introduce una clase mas general de retículas, a las cuales él llama *idiomas*. Estos no son más que retículas completas superiormente continuas modulares. En particular los marcos son idiomas distributivos. La idea detrás de este estudio es como sigue, dado un idioma A y dos elementos $a \leq b$ en A formamos el *intervalo* determinado por estos dos elementos, es decir, $[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}$ y denotamos por $\mathcal{I}(A)$ el conjunto de todos los intervalos de A. Notemos que A es el intervalo $[0, \bar{1}]$, donde 0 y $\bar{1}$ son el menor elemento y el mayor elemento de A respectivamente. A partir de $\mathcal{I}(A)$ consideramos propiedades en los intervalos:

Si $I, J \in \mathcal{I}(A)$ escribimos $J \longrightarrow I$ para indicar que J es un *subintervalo* de I, es decir, $J \subseteq I$. Explícitamente si $J = [x, y]$ e $I = [a, b]$ entonces

$$a \leq x \leq y \leq b.$$

Se dice que J es *similar* a I

$$J \sim I$$

si existen $l, r \in A$ tales que para los intervalos asociados a estos elementos

$$L = [l, l \vee r] \qquad R = [l \wedge r, r]$$

se tiene que $I = R$ y $J = L$ en algún orden.

Dos intervalos de la forma $[a, b]$ y $[b, c]$ de A se dicen *colindantes*. Con estas propiedades se definen conjuntos de intervalos, diremos que $\mathcal{A}$ es *abstracto* si no es vacío y es cerrado bajo $\sim$, es decir,

$$J \sim I \in \mathcal{A} \Longrightarrow J \in \mathcal{A}.$$

Diremos que $\mathcal{A}$ es *básico* si es abstracto y cerrado bajo subintervalos. Un conjunto de intervalos $\mathcal{A}$ es de *congruencia* si es básico y cerrado bajo intervalos colindantes. Un conjunto de intervalos $\mathcal{A}$ es de *división* si es de congruencia y siempre que

$$(\forall x \in X)[[a, x] \in \mathcal{A} \Rightarrow [a, \bigvee X] \in \mathcal{A}]$$

para cada $a \in A$ y $X \subseteq [a, \bar{1}]$. Todos estos conjuntos de intervalos se organizan en ciertas retículas completas, es decir, denotamos por $\mathcal{A}(A)$, $\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(A)$, a los conjuntos de conjuntos de intervalos abstractos, básicos, de congruencia y de división. Estos conjuntos distinguidos son en efecto retículas completas, de hecho son marcos. En este punto es donde las analogías con las técnicas de categorías de módulos empiezan a surgir, pensando al idioma base A como el anillo, después consideramos los intervalos sobre A, éstos de alguna forma se comportan como los módulos sobre el anillo y de ahí formamos $\mathcal{I}(A)$ Este es el análogo ordenado de la categoría de módulos sobre el anillo. Después tomamos conjuntos de intervalos cerrados bajo la propiedades mencionadas y por último consideramos los conjuntos de todos estos conjuntos de intervalos. En el caso de la categoría de módulos esto sería considerar clases de módulos sujetas a propiedades como ser, cerradas bajo isomorfismos, submódulos y cocientes, extensiones y coproductos arbitrarios, y así formar la clase de todas las clases cerradas bajo estas propiedades. Notemos que en este sentido $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son los análogos *idiomáticos* de las clases de Serre y la clase de torsión hereditarias sobre la categoría de módulos.

Otro ingrediente fundamental para el estudio de idiomas son las *derivadas* (*inflaciones*, operadores modales[Mac81]): Una *derivada* sobre un idioma A es una función

$$A \xrightarrow{d} A$$

tal que

(1) $a \leq d(a)$

(2) $a \leq b$ entonces $d(a) \leq d(b)$

para todo $a, b \in A$.

Las derivadas capturan propiedades del idioma, y muchos de los invariantes de éstos quedan determinados por ciertas derivadas. Existen varios tipos de derivadas: Un *operador de cerradura* sobre A es una derivada idempotente d, es decir, $d^2 = d$.

Un *núcleo* sobre A es una derivada d idempotente tal que

$$d(a \wedge b) = d(a) \wedge d(b)$$

para todo $a, b \in A$

Un *prenúcleo* sobre A es una derivada d tal que

$$d(a \wedge b) = d(a) \wedge d(b)$$

para todo $a, b \in A$

Una derivada d sobre A es *estable* si

$$d(a) \wedge b \leq d(a \wedge b)$$

para todos los $a, b \in A$, lo que se puede observar en este punto es que el conjunto de cada una de estas derivadas sobre A es una retícula completa. La importancia de los núcleos, es que capturan propiedades del idioma de una forma *local*, en el sentido que cada cociente de A ésta determinado de manera única por un núcleo. Es decir pensando al idioma A como categoría ordenada, los núcleos producen una *localización* de A. La retícula completa de todos los núcleos sobre A, denotada por $N(A)$, destaca por el siguiente resultado:

Teorema. *(Isbell-Simmons) Sea A un idioma, entonces la retícula completa $N(A)$ es un marco.*

En ese mismo manuscrito se muestra que hay correspondencias agradables entre los conjuntos de intervalos básicos de congruencia y de división con las derivadas. En particular el marco $N(A)$ es isomorfo al marco $\mathcal{D}(A)$. De nuevo, este resultado es el análogo en esta teoría del bien conocido hecho que, el conjunto de todas las teorías de torsión hereditarias sobre un anillo R, $\mathrm{R}-\mathrm{tors}$ es un marco. De hecho mediante las derivadas y los conjuntos de intervalos distinguidos uno puede asociarle invariantes importantes a un idioma. Unos de tales invariantes son las *dimensiones*. Así como a la categoría de módulos sobre un anillo R se le asocian dimensiones mediante filtraciones de teorías de torsión, las dimensiones para un idioma se construyen filtrando $\mathcal{D}(A)$.

Esto se puede observar mejor en el libro [GS88], los autores se enfoncan en el marco de teorías de torsión hereditarias sobre un anillo R, $\mathrm{R}-\mathrm{tors}$, ellos caracterizan muchos invariantes de la categoría en términos de derivadas sobre $\mathrm{R}-\mathrm{tors}$. En particular, muchas de las dimensiones clásicas (Gabriel, Boyle, Krull), quedan caracterizadas por sus respectivas derivadas sobre este marco. Al final del texto introducen la noción general de dimensión con respecto a una teoría de torsión hereditaria arbitraria. Esta noción ésta intrínsecamente relacionada con el marco teórico expuesto en [Gol77]. Después, en la serie de notas [Sim14c], [Sim14b], se destaca una noción de dimensión parecida a la mencionada en el texto [GS88]. Lo que no está claro, son las relaciones entre éstas, ni de lo que sería una teoría de dimensión para una categoría de módulos.

Por otro lado la definición dimensión en una categoría de módulos esta relacionada con la de descomposición en el sentido de [Gol77]. Ahí se destacan detalles sutiles entre estos dos conceptos. En [Sim10] se hace el análisis de descomposiciones pero en el ambiente idiomático, destacando de nuevo la analogía entre idiomas, categorías de módulos y espacios topológicos.

Este diccionario de trasladar nociones, técnicas, de la teoría de módulos al enfoque de idiomas, marcos y derivadas lleva a resultados interesantes (por ejemplo en [Sim14d] se prueba una versión del teorema de Hopkins-Levitzki) y a un mejor entendimiento de lo que está sucediendo.

Siguiendo esta línea de razonamiento, nuestra investigación se centra en dos situaciones:

1. Trasladar ciertas construcciones de la teoría de prerradicales a las derivadas, en específico los totalizadores e igualadores de prerradicales [RRR$^+$02], tienen su análogo en las derivadas.

2. Estudiar las nociones de dimensión y descomposición para categorías de mó-

dulos en el enfoque de Golan, [Gol77].

La organización de este trabajo es como sigue: En el capítulo uno se introducen todas las construcciones básicas de marcos e idiomas. El capítulo dos se introducen los totalizadores y los igualadores para una derivada haciendo énfasis en los totalizadores y en su relación con la dimensión de derivadas. El capítulo tres se exponen las nociones de descomposición y dimensión para idiomas, y se prueban las relaciones con las nociones clásicas en la categoría de módulos. En el primer apéndice se estudia el conjunto de derivadas idempotentes, junto con otras operaciones que están determinadas solamente por la composición de derivadas. El último apéndice es una nota sobre la construcción de la dimensión de Gabriel en el sentido de [NVO87] o de Lanski pero en idiomas. Resumiendo, la investigación llevada a cabo en este proyecto se encuentra en los capítulos 2, 3 y los apéndices.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a exponer las ideas fundamentales y necesarias para el desarrollo posterior de la teoría. Se introduce la categoría de marcos y el análisis de éstos mediante derivadas (operadores lógicos, análisis sin puntos). Después se introduce una categoría que contiene propiamente a la categoría de marcos, la categoría de idiomás. Se hacen analogías para el estudio de idiomás con respecto al de marcos y se introducen de manera rigurosa las nociones de dimensión, especializándonos en dimensión de Gabriel, Krull y Boyle. Para finalizar se da una conexión con la categoría de módulos izquierdos sobre un anillo y ciertas derivadas idempotentes sobre el idioma de ideales izquierdos de éste. Mucho de esta exposición se encuentra a detalle en [Sim89].

1.1. Marcos y Derivadas

Definición 1.1.1. *Un marco* $(\mathcal{M}, \wedge, \bigvee, 0, \bar{1})$ *es una retícula completa que satisface la siguiente ley distributiva (denotada por LDM):*

$$a \wedge \left(\bigvee X\right) = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}.$$

Para todo $a \in \mathcal{M}$ *y todo subconjunto* $X \subseteq \mathcal{M}$.

Un hecho importante de los marcos que utilizaremos más adelante es el siguiente: consideremos una retícula completa $\mathcal{M}$, definamos la siguiente operación $(\_ \succ \_)$

$$x \leq (a \succ b) \Leftrightarrow a \wedge x \leq b.$$

Para todo $x, a, b \in \mathcal{M}$ este elemento se le llama la *implicación* de a y b. No necesariamente la implicación de dos elementos en una retícula completa es único, pero cuando esto sucede se tiene:

Lemma 1.1.1. *Una retícula completa $\mathcal{M}$ es un marco si y sólo si tiene una implicación.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{M}$ es un marco , para $a, b \in \mathcal{M}$ pongamos

$$(b \succ a) = \bigvee \{x \in \mathcal{M} \mid b \wedge x \leq a\}$$

Entonces tenemos $b \wedge x \leq a \Rightarrow x \leq (b \succ a)$ para la otra implicación note que $b \wedge (b \succ a) = \bigvee \{b \wedge x \mid b \wedge x \leq a\} \leq a$ por LDM.

Recíprocamente supongamos que $\mathcal{M}$ tiene implicación y consideremos $a \in \mathcal{M}$ y $X \subseteq \mathcal{M}$ basta observar que

$$a \wedge \bigvee X \leq \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

(La otra desigualdad siempre se da), pongamos $h = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$ entonces $a \wedge x \leq h$ para cada $x \in X$ y como tenemos implicación $x \leq (a \succ h)$ para cada $x \in X$ es decir, $\bigvee X \leq (a \succ h)$ por lo que $a \wedge \bigvee X \leq h$ como se quería.

$\square$

Definición 1.1.2. *Una* derivada o inflación *en $\mathcal{M}$ es una función*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{d} \mathcal{M}$$

tal que

(1) $a \leq d(a)$

(2) $a \leq b$ *entonces* $d(a) \leq d(b)$

Para todo $a, b \in \mathcal{M}$

Denotamos por $D(\mathcal{M})$ el conjunto de todas las derivadas sobre $\mathcal{M}$

Ahora bien podemos comparar derivadas de la siguiente manera:

Definición 1.1.3. *Diremos que $d \leq d'$ si y sólo si $d(a) \leq d'(a)$ para todo $a \in \mathcal{M}$ con $d, d' \in D(\mathcal{M})$*

Observación 1.1.2. *(1) Por lo anterior $D(\mathcal{M})$ es un conjunto parcialmente ordenado, pero de hecho tiene más estructura. Dado un conjunto no vacío $A \subseteq D(\mathcal{M})$ definimos las derivadas $\bigwedge A\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ y $\bigvee A\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ como $\bigwedge A(a) = \bigwedge \{d(a) \mid d \in A\}$ y $\bigvee A(a) = \bigvee \{d(a) \mid d \in A\}$ esto para cada $a \in \mathcal{M}$.*

Estas dos funciones son derivadas y de hecho en vista de nuestro orden son el supremo y el ínfimo de la familia A, por lo tanto $D(\mathcal{M})$ es una retícula completa (pruebas de estos hechos se darán en un contexto más general en 1.3.17).

(2) *Veamos unas derivadas distinguidas en $D(\mathcal{M})$. $\mathrm{d}_{\underline{0}}$ es la derivada que en cada a se calcula como $\mathrm{d}_{\underline{0}}(a) = a$, es decir, la identidad en $\mathcal{M}$ y denotamos por $\bar{\mathrm{d}}$ a la derivada que se calcula en toda $a \in \mathcal{M}$ como $\bar{\mathrm{d}}(a) = \bar{1}$ donde $\bar{1}$ es el mayor elemento de $\mathcal{M}$, por lo que $\mathrm{d}_{\underline{0}}$ es el menor elemento en $D(\mathcal{M})$ y $\bar{\mathrm{d}}$ es el mayor elemento en $D(\mathcal{M})$. También tenemos para cualquier $a \in \mathcal{M}$ las siguientes derivadas:*

(2.1) *Dada cualquier $a \in \mathcal{M}$.*

$$\iota_a(b) = \begin{cases} a & si\ b = 0 \\ \bar{1} & si\ b \neq 0 \end{cases}$$

Notemos que $\iota_{\bar{1}} = \bar{d}$, además esto nos define un morfismo de retículas completas $\mathrm{e} : \mathcal{M} \to D(\mathcal{M})$ y de hecho es una inmersión en esta categoría, Por último si $d \in D(\mathcal{M})$ entonces $d \leq \iota_{d(0)}$, es decir, el conjunto $\{\iota_a \mid a \in \mathcal{M}\}$ es un conjunto cofinal en $D(\mathcal{M})$.

(2.2) *Dada cualquier $a \in \mathcal{M}$.*

$$q_a(b) = \begin{cases} a & si\ b \leq a \\ \bar{1} & si\ b \nleq a \end{cases}$$

Notemos que dadas cualesquiera dos derivadas d y d' sus respectivas composiciones $d \circ d'$ y $d' \circ d$ (las cuales denotaremos simplemente como dd' y $d'd$) vuelven a ser derivadas, es decir tenemos otra operación en la retícula $D(\mathcal{M})$, de hecho:

Proposición 1.1.4. *Sean $d, d' \in D(\mathcal{M})$ entonces $dd' \geq d \vee d'$*

Demostración. Por (1) de 1.1.2 tenemos que para toda $a \in \mathcal{M}$ $d(d'(a)) \geq d'(a)$ y de $d'(a) \geq a$ se tiene que $dd'(a) \geq d(a)$ por lo que $dd' \geq d \vee d'$

□

Proposición 1.1.5. *Para cualesquiera z, z'y $z'' \in D(\mathcal{M})$ se tiene que:*

(1) $z \leq z'$ *entonces* $z''z \leq z''z'$

(2) $z \leq z'$ *entonces* $zz'' \leq z'z''$

(3) $zz' \vee zz'' \leq z(z' \vee z'')$ *y* $zz' \wedge zz'' \geq z(z' \wedge z'')$
Más aún si $A \subseteq D(\mathcal{M})$ es no vacío entonces

(4) $(\bigvee A)z = \bigvee \{z'z \mid z' \in A\}$

(5) $(\bigwedge A)z = \bigwedge \{z'z \mid z' \in A\}$

Demostración. (1) y (2) se siguen directamente de las definiciones. Para (3) de (1) tenemos que $zz' \leq z(z' \vee z'')$ y $zz'' \leq z(z' \vee z'')$ por lo que se da la desigualdad. Para el ínfimo se tiene $zz' \geq z(z' \wedge z'')$ y $zz'' \geq z(z' \wedge z'')$ lo cual da la otra desigualdad, esto prueba (3).

Para (4), si $a \in \mathcal{M}$ entonces

$$((\bigvee A)z)(a) = (\bigvee A)(z(a)) = [\bigvee \{z'z(a) \mid z' \in A\}](a)$$

lo cual prueba (4) y (5) es similar.

□

En particular de (5) tenemos que $(z \wedge z')z'' = zz'' \wedge z'z''$ y también $z\iota_b = \iota_{z(b)}$, de hecho, $\iota_a \iota_b = \bar{d}$ para $b \neq 0$ mientras que para 0, $\iota_a \iota_0 = \iota_a$

Observación 1.1.3.

1. *Observe en (4) y (5) de 1.1.5 la forma en que se está haciendo el producto, es decir, de derecha a izquierda, y es la forma en que multiplicaremos derivadas.*

2. *En 1.1.5 no se está usando la ley distributiva para marcos, es decir, este resultado se puede usar en estructuras más generales como se verá posteriormente.*

3. *1.1.5 prueba que* $(D(\mathcal{M}), \leq, d_{\underline{0}}, \bar{d}, \vee, \wedge, \circ)$ *es un monoide ordenado(con la composición).*

Definición 1.1.6. *Un* operador de cerradura *en* $\mathcal{M}$ *es una derivada idempotente* d*, es decir,* $d^2 = d$ *(donde* $d^2 = d \circ d$*).*

Denotamos por $C(\mathcal{M})$ *al conjunto de todos los operadores de cerradura en* $\mathcal{M}$*. Claramente* $C(\mathcal{M}) \subseteq D(\mathcal{M})$*. Sea* $d \in D(\mathcal{M})$ *una derivada, diremos que* d *es un* prenúcleo *si para cualesquiera* $a, b \in \mathcal{M}$ *se cumple que*

$$d(a \wedge b) = d(a) \wedge d(b)$$

Denotemos al conjunto de prenúcleos en $\mathcal{M}$ por $P(\mathcal{M})$. Este es un subconjunto de $D(\mathcal{M})$ por lo tanto es un conjunto parcialmente ordenado. La estructura reticular de éste está dada como sigue el ínfimo de cualquier familia de prenúcleos se calcula de igual forma que en $D(\mathcal{M})$. En general, supremos de prenúcleos calculados puntualmente no son prenúcleo. En cambio para conjuntos dirigidos de prenúcleos éstos sí son prenucelos. Recordemos que una familia de derivadas $\mathcal{D}$ es *dirigida o directa* si para cada $d, z \in \mathcal{D}$ se tiene que existe $h \in \mathcal{D}$ tal que $d, z \leq h$. Con esto en mente tenemos:

Lemma 1.1.7. *El conjunto parcialmente ordenado $P(\mathcal{M})$ es cerrado bajo supremos puntuales de conjuntos dirigidos.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto dirigido de prenúcleos, para cada $a, b \in \mathcal{M}$ tenemos
$$(\bigvee \mathcal{D})(a) \wedge (\bigvee \mathcal{D})(b) = \bigvee \{d(a) \wedge z(b) \mid d, z \in \mathcal{D}\}$$
usando dos veces la propiedad distributiva de marcos en $\mathcal{M}$, claramente el lado derecho de la igualdad contiene todos los valores

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

para algún $h \in \mathcal{D}$ (tomando $h = z = d$). Siendo $\mathcal{D}$ dirigido, entonces para cada $z, d \in \mathcal{D}$ existe un $h \in \mathcal{D}$ tal que

$$d(a) \wedge z(b) \leq h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b)$$

por lo que

$$(\bigvee \mathcal{D})(a) \wedge (\bigvee \mathcal{D})(b) = \bigvee \{h(a \wedge b) \mid h \in \mathcal{D}\} = (\bigvee \mathcal{D})(a \wedge b)$$

□

Definición 1.1.8. *Un núcleo en $\mathcal{M}$ es un prenúcleo idempotente, denotamos al conjunto de todos los núcleos como $N(\mathcal{M})$.*

Claramente $N(\mathcal{M})$ es un conjunto parcialmente ordenado, los ínfimos puntuales son núcleos. Los supremos de familias de núcleos como en el caso de los prenúcleos no necesariamente se calculan puntualmente (la final de está sección daremos un ejemplo), para identificar al supremo de una familia de núcleos necesitamos introducir la siguiente construcción.

Considere una derivada $d \in D(\mathcal{M})$. Como $D(\mathcal{M})$ es cerrado bajo composiciones podemos definir la siguiente cadena de iteraciones de d poniendo para cada ordinal límite λ y sucesor α:

$$d^0 := d_{\underline{0}} \;\; d^{\alpha+1} := d \circ d^{\alpha} \;\; d^{\lambda} := \bigvee \{d^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}.$$

Por 1.1.4 se tiene:
$$d \leq d^2 \leq d^3 \leq \ldots \leq d^{\alpha} \leq \ldots$$

Ahora bien como $D(\mathcal{M})$ es un conjunto entonces existe un ordinal γ tal que $d^{\gamma} = d^{\gamma+1}$ además que podemos elegir al menor de tales ordinales, a este ordinal lo denotamos por ∞ y notemos que d^{∞} es un operador cerradura de hecho $d \leq d^{\infty}$ más aún es el menor operador cerradura por arriba de d.

Con esta construcción a la mano, tenemos lo siguiente.

Proposición 1.1.4. *El conjunto de derivadas idempotentes sobre un marco $\mathcal{M}$, $C(\mathcal{M})$ forman una retícula completa en la cual el supremo de cualquier familia $X \subseteq C(\mathcal{M})$ queda descrito como $(\bigvee X)^{\infty}$.*

□

En particular si consideramos un prenúcleo z y después hacemos el proceso transfinito para obtener z^{∞}. Este es ya un núcleo en $\mathcal{M}$. Con estas observaciones y en vista de 1.1.7, podemos calcular el supremo de una familia no vacía de núcleos en $\mathcal{M}$, digamos $\mathcal{J} \subseteq N(\mathcal{M})$, primero formemos el conjunto $\mathcal{J}^{\circ}$ que consiste en todas las composiciones

$$j_1 \circ \ldots \circ j_m$$

Con $j_1, \ldots, j_m \in \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{J}^{\circ}$ es un conjunto de prenúcleos cerrado bajo composición. Si $f, g \in \mathcal{J}^{\circ}$ se tiene que $fg \in \mathcal{J}^{\circ}$ y por 1.1.4 $f, g \leq fg$ por lo tanto $\mathcal{J}^{\circ}$ es dirigido e invocando 1.1.7 obtenemos el prenúcleo $\bigvee \mathcal{J}^{\circ}$ en $\mathcal{M}$ entonces aplicando el proceso transfinito antes descrito en $\bigvee \mathcal{J}^{\circ}$ construimos un núcleo en $\mathcal{M}$, $(\bigvee \mathcal{J}^{\circ})^{\infty}$. Además para cada $j \in \mathcal{J}$ se tiene que $j \leq (\bigvee \mathcal{J}^{\circ})^{\infty}$. Si k es otro núcleo en $\mathcal{M}$ tal que $j \leq k$ para cada $j \in \mathcal{J}$, entonces

$$j_1 \circ \ldots \circ j_m \leq k^m = k.$$

Por lo que $(\bigvee \mathcal{J}^{\circ})^{\infty} \leq k$, es decir, $(\bigvee \mathcal{J}^{\circ})^{\infty}$ es el supremo en $N(\mathcal{M})$ de la familia $\mathcal{J}$.

Proposición 1.1.5. *Sea $\mathcal{M}$ un marco, entonces el conjunto de núcleos $N(\mathcal{M})$ es una retícula completa en la cual el supremo de cualquier familia $\mathcal{J} \subseteq N(\mathcal{M})$ es $(\bigvee \mathcal{J}^{\circ})^{\infty}$.*

Definamos los siguientes núcleos sobre un marco. Dada $a \in \mathcal{M}$, tenemos asociados tres núcleos:

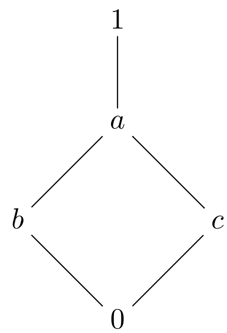
(1) $u_a(b) = a \vee b$

(2) $v_a(b) = (a \succ b)$

(3) $w_a(b) = ((b \succ a) \succ a)$

La prueba de que estos operadores son en efecto núcleos es directa. Nótesé además que para que estos núcleos tengan sentido si se necesita LDM.

Ejemplo 1.1.6. *Antes de terminar esta sección, damos un ejemplo de un marco en el que el supremo puntual de prenúcleos no es un prenúcleo. Considere el marco* *de* 5 *elementos :*



Consideremos los núcleos $j = v_b$, $k = v_c$ *entonces*

$$j(x) = (b \succ x)$$

y

$$k(x) = (c \succ x)$$

en cada x. *En particular tenemos que* $j(b) = 1$ $j(0) = c$ *y* $k(c) = 1$ *y* $k(0) = b$ *por lo que* $(j \vee k)(b) = 1$ *y* $(j \vee k)(c) = 1$ *mientras que* $(j \vee k)(b \wedge c) = (j \vee k)(0) = j(0) \vee k(0) = c \vee b = a$. *Por lo tanto* $j \vee k$ *no es un prenúcleo.*

1.2. El marco $N(\mathcal{M})$

Primero introduzcamos una nueva familia de derivadas en $\mathcal{M}$.

Definición 1.2.1. *Una derivada* $s \in D(\mathcal{M})$ *es* estable *si*

$$s(a) \wedge b \leq s(a \wedge b)$$

Para todos los $a, b \in \mathcal{M}$.

Denotemos por $S(\mathcal{M})$ al conjunto de todas las derivadas estables.

Con esta definición a la mano tenemos la cadena de subconjuntos de $D(\mathcal{M})$

$$N(\mathcal{M}) \subseteq P(\mathcal{M}) \subseteq S(\mathcal{M}) \subseteq D(\mathcal{M}).$$

En esta cadena no figura explícitamente el conjunto de derivadas idempotentes por lo que es bueno notar que de las definiciones se tiene

$$N(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M}) \cap C(\mathcal{M}).$$

De hecho:

Lemma 1.2.2. *Para cada marco $\mathcal{M}$ se tiene*

$$N(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}) \cap C(\mathcal{M})$$

Demostración. Basta ver que $S(\mathcal{M}) \cap C(\mathcal{M}) \subseteq N(\mathcal{M})$ (la otra contención es clara). Para esto escogemos una derivada estable idempotente s entonces

$$s(a) \wedge s(b) \leq s(a \wedge s(b)) \leq s^2(a \wedge b) = s(a \wedge b)$$

donde usamos dos veces la estabilidad de s y la última igualdad es por la idempotencia (esto para todo $a, b \in \mathcal{M}$). Por lo tanto $s(a) \wedge s(b) \leq s(a \wedge b)$ la otra desigualdad siempre se da por la monotonía de s. De esto se concluye que s es un núcleo.

□

Como hemos visto anteriormente con los otros conjuntos de derivadas introducidos, se tiene que $S(\mathcal{M})$ es un copo y el ínfimo de cualquier subconjunto de derivadas estables vuelve a ser una derivada estable, por lo tanto $S(\mathcal{M})$es un retícula completa lo que se debe de señalar a diferencia de la retícula de prenúcleos $P(\mathcal{M})$ se tiene:

Lemma 1.2.3. *Sea $\mathcal{M}$ un marco y consideremos un subconjunto no vacío de derivadas estables $A \subseteq S(\mathcal{M})$. Entonces la función (1.1.2)*

$$\bigvee A \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

es una derivada estable y de hecho es el supremo de la familia A en $S(\mathcal{M})$.

Demostración. Sabemos que $\bigvee A$ es una derivada y que está por arriba de cada elemento de A, entonces consideremos $a, b \in \mathcal{M}$ y así

$$(\bigvee A)(a) \wedge b = \bigvee \{s(a) \mid s \in A\} \wedge b = \bigvee \{s(a) \wedge b \mid s \in A\}$$
$$\leq \bigvee \{s(a \wedge b) \mid s \in A\} = (\bigvee A)(a \wedge b)$$

Donde en la segunda igualdad usamos la ley distributiva del marco $\mathcal{M}$.

□

Cabe mencionar que como $D(\mathcal{M})$ es cerrado bajo composición también lo son los subconjuntos $P(\mathcal{M})$ y $S(\mathcal{M})$.

Lemma 1.2.4. *Sea $\mathcal{M}$ un marco, sean $s \in S(\mathcal{M})$ y $k \in N(\mathcal{M})$. Entonces existe $l \in S(\mathcal{M})$ tal que*

$$s \wedge s' \leq k \Leftrightarrow s' \leq l.$$

Más aún $l \in N(\mathcal{M})$.

Demostración. Consideremos $\mathcal{G}$ la familia de todos los $s' \in S(\mathcal{M})$ tales que $s \wedge s' \leq k$ veamos que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo composición. Para esto tomemos $f, g \in \mathcal{G}$ y así para cada $x \in \mathcal{M}$ se tiene que

$$(s \wedge (fg))(x) = s(x) \wedge f(g(x)) \leq s(x) \wedge f(s(x) \wedge g(x)) \leq s(x) \wedge f(k(x)) \leq$$

$$s(k(x)) \wedge f(k(x)) \leq k^2(x) = k(x).$$

Por lo tanto $fg \in \mathcal{G}$. La segunda desigualdad es cierta pues f es estable. La tercera es por que $f \in \mathcal{G}$ y la quinta es porque f está en $\mathcal{G}$. Pongamos $l = \bigvee \mathcal{G}$ por lo anterior sabemos que $l \in S(\mathcal{M})$ y además

$$(s \wedge l)(x) = s(x) \wedge l(x) =$$

$$s(x) \wedge \bigvee \{g(x) \mid g \in \mathcal{G}\} = \bigvee \{s(x) \wedge g(x) \mid g \in \mathcal{G}\} \leq k(x).$$

Por lo tanto $l \in \mathcal{G}$ y como $\mathcal{G}$ es cerrado bajo composición se tiene que $l^2 \in \mathcal{G}$ por lo que $l^2 \leq l$ y por ende $l \in N(\mathcal{M})$.

Por construcción tenemos que si $s' \in S(\mathcal{M})$ es tal que $s \wedge s' \leq k \Rightarrow s' \leq l$ y recíprocamente si $g \leq l$ entonces $s \wedge g \leq s \wedge l \leq k$ puesto que $l \in \mathcal{G}$. □

Teorema 1.2.1. *Sea $\mathcal{M}$ un marco, entonces el conjunto de núcleos $N(\mathcal{M})$ es un marco.*

Demostración. En vista de 1.2.4 $N(\mathcal{M})$ tiene implicación y así por 1.1.1 se tiene el resultado.

□

Algunas veces llamaremos al marco $N(\mathcal{M})$ el *ensamble* de $\mathcal{M}$.

Un hecho interesante de las derivadas estables es el siguiente:

Teorema 1.2.5. *Sea $\mathcal{M}$ un marco entonces la retícula completa de derivadas estables sobre $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M})$ es un marco.*

Demostración. Probaremos que $S(\mathcal{M})$ satisface la ley distributiva para marcos 1.1.1. Para este fin sea $\mathcal{S} \subseteq S(\mathcal{M})$ y $s \in S(\mathcal{M})$. Queremos ver que vale la igualdad

$$s \wedge \bigvee \mathcal{S} = \bigvee \{s \wedge s' \mid s' \in \mathcal{S}\}$$

Para est,o evaluemos cada lado en cualquier $a \in \mathcal{M}$ y veamos que ambas evaluaciones son la misma. Es decir,

$$(s \wedge \bigvee \mathcal{S})(a) = s(a) \wedge \left(\bigvee \mathcal{S}\right)(a) = s(a) \wedge \bigvee \{s'(a) \mid s' \in \mathcal{S}\} =$$

$$= \bigvee \left\{ s(a) \wedge s'(a) \mid s' \in \mathcal{S} \right\} = \left(\bigvee \left\{ s \wedge s' \mid s' \in \mathcal{S} \right\} \right)(a).$$

En la tercera desigualdad usamos que $\mathcal{M}$ es un marco, es decir, vale la ley distributiva para marcos. □

Todo el análisis anterior, entre otras cosas, muestra unos de los resultados más importantes de la teoría de marcos, el hecho:

Para cualquier marco $\mathcal{M}$ el conjunto de núcleos $N(\mathcal{M})$ es un marco.

Como dicho resultado es importante veamos otras pruebas que en esencia son la misma pero las técnicas que introduciremos serán importantes en nuestro estudio posterior.

Con este nuevo conjunto de derivadas sobre un marco $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M})$, para dar otra descripción de los núcleos debemos introducir la génesis del nombre núcleo sobre un marco y a su vez resaltar la propiedad de la implicación o pseducomplementación relativa que estos llevan. Empecemos poniendo en orden todas estas ideas introduciendo la categoría de marcos Frm.

Primero recordemos el concepto de $\vee$-*semiretícula* y de $\wedge$-*semiretícula*.

Definición 1.2.6. *Una* $\vee$-semiretícula *es una estructura*

$$(S, \leq \vee, 0),$$

donde $(S, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado con elemento menor* 0 *y una operación binaria en* S*,* $\vee$ *tal que*

$$x \vee y \leq z \Leftrightarrow x \leq z \text{ y } y \leq z,$$

para todo $x, y, z \in S$*.*

Dualmente, una $\wedge$-semiretícula *es una estructura*

$$(S, \leq \wedge, 1)$$

donde $(S, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado con elemento mayor* 1 *y una operación binaria en* S*,* $\wedge$ *tal que*

$$z \leq x \wedge y \Leftrightarrow z \leq x \text{ y } z \leq y$$

Para todo $x, y, z \in S$*.*

Diremos que una $\vee$-semiretícula S *es completa si todo subconjunto* $X \subseteq S$ *tiene supremo en* S*, es decir,* $\bigvee X \in S$*. Análogamente, diremos que una* $\wedge$-semiretícula *es completa si para todo subconjunto* $X \subseteq S$ *tiene ínfimo en* S*, es decir, si* $\bigwedge X \in S$*. Denotaremos por* $\bigvee$-semiretícula *y* $\bigwedge$-semiretícula *a una semiretícula completa, respectivamente.*

Es claro de las definiciones que tenemos que una retícula es en particular una $\vee$-*semiretícula* y una $\wedge$-*semiretícula*. De igual manera, una retícula completa es un caso particular de una $\bigvee$-*semiretícula* y $\bigwedge$-*semiretícula*. Un morfismo entre $\bigvee$-*semiretículas* S y T es una función $f\colon S \to T$ tal que

$$f(0) = 0$$

y

$$f(\bigvee X) = \bigvee f(X).$$

Dualmente un morfismo entre $\bigwedge$-*semiretículas* S y T es una función $f : S \to T$ tal que

$$f(1) = 1$$

y

$$f(\bigwedge X) = \bigwedge f(X).$$

Así formamos dos categorías $Meet$ y Sup, la categoría de $\bigwedge$-*semiretículas* y la categoría de $\bigvee$-*semiretículas* respectivamente.

Un marco $(\mathcal{M}, \wedge, \bigvee, 0, \bar{1})$ es por definición tanto una $\bigvee$-*semiretícula* y una $\bigwedge$-*semiretícula* en donde se vale LDM, ahora un morfismo entre marcos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es una función $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tal que f es un morfismo de $\bigvee$-*semiretículas* y un morfimo de $\wedge$-*semiretículas*, es decir,

$$f(0) = 0$$

$$f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$$

y

$$f(\bar{1}) = \bar{1}$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

para todo $X \subseteq \mathcal{M}$ y todo $x, y \in \mathcal{M}$. Así obtenemos la categoría de marcos Frm, donde los objetos son marcos y los morfismos son los descritos anteriormente.

Empezamos con nuestras construcciones en Sup.

Definición 1.2.7. *Sea $A \in Sup$. Se dice que una relación de equivalencia $\sim$ en A es de* $\bigvee$-congruencia *si para cuales quiera $X, Y \subseteq A$ tales que $x_i \sim y_i$ para cada $x_i \in X$ y $y_i \in Y$ entonces $\bigvee X \sim \bigvee Y$. Muchas veces denotaremos esta situación por $X \sim Y$.*

Ahora supongamos que tenemos un $A \in Sup$ y una relación en A de $\bigvee$-congruencia, considere entonces el $A/\sim$. Queremos que éste sea un objeto de Sup. En vista de la congruencia el cociente hereda estructura ordenada. Considere un bloque $[\alpha] \in A/\sim$ y consideramos pues $\bigvee[\alpha]$ y sea $Y = \{\alpha\}$. Entonces en vista de que la relación es de $\bigvee$-congruencia se tiene que $\bigvee X \sim \bigvee Y = \alpha$ por lo que cada bloque tiene un elemento mayor. Esta observación que al parecer es trivial, nos ayuda a definir:

Definición 1.2.8. *Denotemos por $\sim$ la relación de $\bigvee$-congruencia en A, el* selectivo para $\sim$ *es la función $s : A \to A$ dada por $s(a) = \bigvee \{x \in A \mid a \sim x\}$ para cada $a \in A$.*

Por construcción de selectivo de $\sim$ se tiene:

(i) $a \sim s(a)$.

(ii) $x \sim a$ entonces $x \leq s(a)$.

En resumen tenemos lo que uno podría esperar de esta agradable situación:

Lemma 1.2.9. *Sea $A \in Sup$ entonces hay biyecciones entre:*

(i) Selectivos en A.

(ii) Operadores cerradura en A.

(iii) $\bigvee -$congrunecias en A.

Demostración. Todo se sigue del hecho: todo selectivo es un operador cerradura. Esto es sencillo ya que si $a \leq b$ entonces $a \sim s(a)$ y $b \sim s(b)$ entonces $b = a \vee b \sim s(a) \vee s(b)$ por congruencia así pues $s(a) \leq s(b) \vee s(a) \leq s(b)$ por lo tanto es monótono, por tanto cada selectivo en A pertenece $s \in D(A)$, por otro lado pongamos $b = s(s(a))$ para cualquier $a \in A$ entonces tenemos que $a \sim s(a) \sim b$ por lo que $a \sim b$ es decir $b \leq s(a)$ y así $s^2 = s$. Cada operador cerradura define una relación de $\bigvee -$congruencia. Tomemos $X, Y \subseteq A$ tales que $X \sim_c Y$ y c de cerradura en A entonces $y \leq c(y) = c(x) \leq c(\bigvee X)$ para cada $y \in Y$ y así $\bigvee Y \leq c(\bigvee X)$. Por la monotonía e idempotencia de c se tiene que $c(\bigvee Y) \leq c(\bigvee X)$, la otra desigualdad es análoga. Por las propiedades anteriores, el selectivo de la relación anterior es c. Para finalizar, basta observar que cada operador cerradura es el selectivo de una y sólo una relación de $\bigvee -$congruencia, para este fin tomemos un selectivo j, con relación $\sim_j$. Entonces observemos que:

$$x \sim_j y \Leftrightarrow j(x) = j(y)$$

Consideremos dos elementos de A ,x, y relacionados (como en 1.2.8), es decir, $x \leq j(y)$ y $y \leq j(x)$ y entonces $x = j(x)$ y $y = j(y)$ aplicando dos veces j vía la idempotencia, las igualdades anteriores se parafrasean a $j(x) = j(y)$ y si $j(x) \sim j(y)$ entonces $x \sim j(x)$ y $y \sim j(y)$ pero $x \sim j(x) = j(y) \sim y$ y así $x \sim y$. □

Definición 1.2.10. *Sea A una $\bigvee$-semiretícula.*

Un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq A$ es $\bigwedge$-cerrado *si $\bigwedge X \in \mathcal{F}$ para todo $X \subseteq \mathcal{F}$. Para un operador cerradura c en A, pongamos:*

$$A_c = c(A) = \{x \in A | c(x) = x\}$$

A este conjunto le llamaremos el conjunto de puntos fijos de c

Observese que si $\mathcal{F}$ es $\bigwedge$-cerrado en A entonces $\mathcal{F}$ es no vacío ya que como $\emptyset \subseteq \mathcal{F}$ entonces $\bar{1}_A = \bigwedge \emptyset \in \mathcal{F}$. Pero más importante aún:

Lemma 1.2.11. *Sea A una $\bigvee$-semiretícula.*

Para cada $j \in C(A)$ el subconjunto $A_j = \{x \in A \mid j(x) = x\}$ es $\bigwedge$-cerrado.

Para cada subconjunto $\bigwedge$-cerrado $\mathcal{F}$ de A existe un único operador cerradura j en A con $\mathcal{F} = A_j$.

Es decir existe una correspondencia biyectiva entre conjuntos $\bigwedge$-cerrados de A y $C(A)$.

Demostración. La prueba es sencilla, (esencialmente se sigue de 1.2.9). □

Lemma 1.2.12. *En la situación anterior, para cada $X \subseteq A_j$, el elemento $j(\bigvee X)$ es el supremo de la familia X en A_j.*

El copo $(A_j, \leq)$ es completo.

Y la función

$$A \xrightarrow{j^*} A_j$$

$$a \longmapsto j(a)$$

es un morfismo en Sup.

Demostración. Primero tomemos $X \subseteq A_j$, entonces

$$x \leq \bigvee X \leq j(\bigvee X) \in A_j$$

para cada $x \in X$ por lo tanto $j(\bigvee X)$ es cota superior de X y si $a \in A_j$ es cota superior de X, es decir, $\bigvee X \leq a$ entonces $j(\bigvee X) \leq j(a) = a$ por lo que $j(\bigvee X)$ es el supremo en A_j, por lo que A_j es una $\bigvee$-semiretícula completa.

Veamos que j^* es un morfismo en Sup para esto necesitamos demostrar que

$$j^*(\bigvee X) = \bigvee j^*(X)$$

para cada subconjunto X de A. Probar esta igualdad es lo mismo que probar la igualdad

$$j(\bigvee X) = j(\bigvee \{j(x) \mid x \in X\}).$$

Veámosla para cada $x \in X$ tenemos que

$$x \leq j(x) \leq \bigvee \{j(x) \mid x \in X\}.$$

es decir, $\bigvee X \leq \bigvee \{j(x) \mid x \in X\}$ y por monotonía de j se tiene

$$j(\bigvee X) \leq j(\bigvee \{j(x)|x \in X\}).$$

Recíprocamente, para cada $x \in X$ tenemos $x \leq \bigvee X$ entonces $j(x) \leq j(\bigvee X)$ y así obtenemos $\bigvee \{j(x)|x \in X\} \leq j(\bigvee X)$. Por lo tanto

$$j(\bigvee \{j(x) \mid x \in X\}) \leq j^2(\bigvee X) = j(\bigvee X)$$

por la idempotencia y monotonía de j.

$\square$

Así definimos:

Definición 1.2.13. *Para cada morfismo en la categoría Sup $f\colon A \to B$, el* núcleo de f *es el único operador de cerradura c en A tal que*

$$c(x) = c(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

para todo $x, y \in A$.

Lo anterior es equivalente a tener un relación de congruencia en A dada por $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$.

Observación 1.2.2. *La definición no asegura nada de cómo realmente debe de ser el operador c correspondiente al morfismo f. Para observar quién es, notemos primero que dado cualquier morfismo $f\colon A \to B$ en Sup podemos definir la siguiente función, para cada $b \in B$*

$$g(b) = \bigvee \{x \mid f(x) \leq b\}.$$

Notemos que si $f(a) \leq b$ en B entonces $a \leq g(b)$ en A. A esta última desigualdad le aplicamos f se tiene $f(a) \leq fg(b) = \bigvee f(\{x \mid f(x) \leq b\})$ puesto que f es un $\bigvee$-morfismo ahora para cada elemento y en la imagen de éste se tiene que existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$ y $y \leq b$. Por lo tanto $f(a) \leq \bigvee f(\{x \mid f(x) \leq b\}) \leq b$, es decir:

$$f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq g(b).$$

Dicho de otra manera cada morfismo en Sup tiene adjunto derecho, escribamos $f = f^*$ y $g = f_*$ y $f^* \dashv f_*$. Recordemos que dados dos conjuntos parcialmente ordenados $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$, un morfismo entre ellos $f : A \to B$ tiene adjunto derecho si existe $f_* : B \to A$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "f=f^*"'] & B \arrow[l, shift right, "f_*"'] \end{tikzcd}$$

$$f^*(a) \leq_B b \;\Leftrightarrow\; a \leq_A f_*(b).$$

Lemma 1.2.14. *Para cada Sup-morfismo f, $f^* \dashv f_*$. El núcleo de f es f_*f^*.*

Demostración. Es claro que la composición f_*f^* es un operador cerradura en A. Ahora basta observar que

$$f_*f^*(x) = f_*f^*(y) \Leftrightarrow f^*(x) = f^*(y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$. Pero esto es sencillo ya que si suponemos $\Leftarrow$ entonces es inmediato y si $\Rightarrow$ se tiene puesto que $f^*f_*f^* = f^*$.

$\square$

Corolario 1.2.15. *Para cada morfismo f en Sup su núcleo es el operador cerradura k tal que:*

$$x \leq k(y) \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

$\square$

Finalmente tenemos un teorema del tipo *primer teorema de isomorfismo*

Teorema 1.2.16. *Sea $j \in C(A)$ con $A \in Sup$ y sea*

$$f : A \to B$$

un morfismo en Sup con núcleo k. Además suponga que $j \leq k$, entonces existe un único Sup-morfismo $\bar{f}$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j^*"'] & B \\ & A_j \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. j^* es suprayectiva entonces sólo puede haber una forma de levantar j^*, para cada $a \in A$ tenemos

$$k(k(a)) = k(a)$$

tal que

$$f(k(a)) = f(a)$$

por lo anterior también note que $a \leq j(a) \leq k(a)$ y así $f(a) \leq f(j(a)) \leq f(k(a)) = f(a)$ y así $f(j(a)) = f(a)$ por lo tanto si tal función existe está es única y hace que el diagrama conmute. Ahora ciertamente esta función es:

$$\bar{f}(x) = f(x)$$

justo lo que acabamos de obtener es $\bar{f}j^* = fj = f$ resta ver que es un Sup-morfismo pero si $X \subseteq A_j$ entonces

$$\bar{f}(j(\bigvee X)) = \bigvee \bar{f}(X) = f(j(\bigvee X)) = f(X)$$

□

Lo que necesitamos es una versión del teorema anterior pero en la categoría de marcos Frm, en particular como cualquier marco $\mathcal{M}$ y cualquier morfismo de marcos es un Sup-morfismo entonces éste tiene núcleo y como tenemos más estructura debemos obtener $N(\mathcal{M})$ de este estudio.

Lemma 1.2.17. *El núcleo de cualquier morfismo de marcos es un núcleo en el marco dominio.*

Demostración. Pongamos nombres, sea $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morfismo entre marcos éste cumple $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{M}$ necesitamos esta igualdad pero para el operador cerradura j, entonces para cada $x \in \mathcal{M}$ tenemos que por la caracterización de j,

$$x \leq j(a \wedge b) \Leftrightarrow f(x) \leq f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq f(a) \text{y} f(x) \leq f(b)$$

$$\Leftrightarrow x \leq j(a) \text{ y } x \leq j(b) \Leftrightarrow x \leq j(a) \wedge j(b)$$

Por lo que

$$j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$$

□

Ahora queremos que cada núcleo provenga de un núcleo de algún morfismo de marcos para esto modificamos la definición 1.2.10

Definición 1.2.18. *Un conjunto de* puntos fijos en un marco $\mathcal{M}$ *es un conjunto* $\mathcal{F}$ $\bigwedge$*-cerrado tal que*

$$a \in \mathcal{F} \Rightarrow (x \succ a) \in \mathcal{F}$$

para toda $x \in \mathcal{M}$.

Refinamos 1.2.11:

Lemma 1.2.19. *Un operador de cerradura* j *en un marco* A *es un núcleo precisamente cuando* A_j *es un conjunto de puntos fijos.*

Demostración. Supongamos primero j es un núcleo y considere

$$h = (x \succ a)$$

Para $a \in A_j$ y un $x \in A$ se tiene que $x \wedge h \leq a$ y así $x \wedge j(h) \leq j(x) \wedge j(h) \leq j(x \wedge h) \leq j(a) = a$ y así $j(h) \leq h$ por lo que $h \in A_j$. Ahora si A_j es un conjunto de puntos fijos y considere $x, y \in A$, es suficiente probar que

$$j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge y)$$

Sea $a = j(x \wedge y)$ y así $a \in A_j$ y notando $x \wedge y \leq a$, es decir, $y \leq (x \succ a) \in A_j$ por lo que $j(y) \leq (x \succ a)$ y así $x \wedge j(y) \leq a$ se tiene, un argumento similar sólo cambiamos papeles de x y y da $j(x) \wedge j(y) \leq a$ lo cual demuestra lo que queríamos.

□

Lemma 1.2.20. *Sea* $j \in N(A)$ *en un marco* A. *Entonces el conjunto de puntos fijos* A_j *es un marco y la función*

$$A \xrightarrow{j^*} A_j$$

dado como $a \longmapsto j(a)$ *es un morfismo de marcos.*

Demostración. Por 1.1.1 basta ver que A_j tiene implicación pero eso es inmediato de 1.2.19 y por 1.2.11 se tiene que j^* es un $\bigvee$-morfismo pero en vista de que j es un núcleo entonces es claro que j^* es un núcleo.

□

Ahora ya podemos obtener la versión de 1.2.16 para la categoría Frm.

Teorema 1.2.21. *Sea $j \in N(A)$ y sea $f : A \to B$ un morfismo en Frm con núcleo k y suponga que $j \leq k$. Entonces existe un único morfismo de marcos $\bar{f}$ tal que:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j^*"'] & B \\ & A_j \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. La demostración es análoga a 1.2.16 sólo hay que notar que $\bar{f}$ es núcleo puesto que f es $\wedge$-morfismo. $\square$

Con esta nueva visión de lo que es un núcleo sobre un marco arbitrario podemos dar la otra prueba sobre la propiedad de ser marco de $N(\mathcal{M})$, primero recordemos una construcción introducida después de 1.1.8:

Dada cualquier derivada d en $\mathcal{M}$, obtenemos una cadena de derivadas

$$d_{\underline{0}} = d^0 \leq d^1 \leq ... \leq d^\alpha \leq ...$$

con α ordinal. Las derivadas sobre un marco forman un conjunto por lo que existe un ordinal γ(mínimo) tal que $d^\gamma = d^{\gamma+1}$ es decir $d^\alpha = d^\gamma$ para cada ordinal $\alpha \geq \gamma$. Denotemos a ésta derivada por d^∞, por construcción es idempotente y además $d \leq d^\infty$ (noten que si d es un prenúcleo entonces $d^\infty = d^*$). Por último notemos que si c es idempotente y $d \leq c$, entonces como $dc = c$ se sigue que $d^\infty \leq c$, es decir, d^∞ es el menor idempotente por arriba de d.

Esta construcción define una función

$$D(\mathcal{M}) \xrightarrow{(\_)^\infty} C(\mathcal{M}) \ .$$

En vista de los anterior esta función es monótona e inflatoria, por lo tanto es una derivada en $D(\mathcal{M})$ (este hecho será importante en capítulos posteriores). Además notando que $(\_)^\infty_{|C(\mathcal{M})} = Id_{|C(\mathcal{M})}$ se sigue $C(\mathcal{M})$ es un retracto de $D(\mathcal{M})$. Pero si restringimos esta 2-derivada a $S(\mathcal{M})$ tenemos:

Teorema 1.2.22. *La 2-derivada $(\_)^\infty$ en el marco $S(\mathcal{M})$ (de derivadas estables) es un núcleo (2-núcleo).*

Demostración. Basta ver

$$s^\infty \wedge s'^\infty \leq (s \wedge s')^\infty$$

Para $s, s' \in S(\mathcal{M})$ (la otra comparación es inmediata). Pongamos

$$j = s^{\infty} \quad k = s'^{\infty} \quad l = (s \wedge s')^{\infty}$$

Notando que de las construcciones hechas con anterioridad se tiene que $k, j, l \in N(\mathcal{M})$ queremos ver que $j \wedge k \leq l$. Primero observemos:

$$s^{\alpha} \wedge s' \leq l.$$

Por inducción en el ordinal α. Notemos que se tiene $s \wedge s' \leq l$ $(*)$ ya que l es el operador cerradura de $s \wedge s'$.

El caso base de esto, es decir, $\alpha = 0$ es trivial. Para el paso inductivo $\alpha + 1$, tenemos para cada $x \in \mathcal{M}$:

$$(s^{\alpha+1} \wedge s')(x) = s(s^{\alpha}(x)) \wedge s'(x)$$

$$\leq (s^{\alpha}(x)) \wedge s'(s^{\alpha}(x)) \wedge s'(x) \leq l(s^{\alpha}(x)) \wedge s(x)$$
$$\leq l(s^{\alpha}(x) \wedge s'(x)) \leq l^2 = l(x).$$

La tercera comparación es de $(*)$ mientras que la quinta es la hipótesis de inducción sobre α. Ahora para un ordinal límite λ, tenemos para cada $x \in \mathcal{M}$

$$(s^{\lambda} \wedge s')(x) = s^{\lambda}(x) \wedge s'(x)$$

$$= \bigvee \{s^{\alpha}(x) \mid \alpha < \lambda\} \wedge s'(x) = \bigvee \left\{s^{\alpha}(x) \wedge s'(x) \mid \alpha < \lambda\right\} \leq (x)$$

ya que $\mathcal{M}$ es un marco. Por lo tanto para cada ordinal α se tiene $s^{\alpha} \wedge s' \leq l$ y así $j \wedge s' \leq l$. Por un argumento similar pero para s' se tiene que $j \wedge s'^{\alpha} \leq l$ y por ende $j \wedge k \leq l$. Esto muestra que $(\_)^{\infty} \in N(S(\mathcal{M}))$.

□

Con esto en mente obtenemos:

Teorema 1.2.23. *Para cada marco $\mathcal{M}$ el conjunto de núcleos sobre $\mathcal{M}$, $N(\mathcal{M})$ es el marco cociente del marco $S(\mathcal{M})$ de derivadas estables sobre $\mathcal{M}$.*

Demostración. Por el teorema 1.2.22 $(\_)^{\infty}$ es un núcleo en $S(\mathcal{M})$ y así por 1.2.20

$$(S(\mathcal{M}))_{\infty}$$

es un marco (cociente) consistente de las derivadas estables que son idempotentes y así por el lema 1.2.2 estas son los núcleos en $\mathcal{M}$.

□

1.2.1. Algunas propiedades de $N(\mathcal{M})$

En esta pequeña subsección veremos como los núcleos u_a y v_a introducidos en la sección 1 generan a todos los núcleos sobre $\mathcal{M}$.

Primero recordemos que en el principio del capítulo vimos que para todo marco $\mathcal{M}$ existe un monomorfismo de retículas completas de el en su retícula de derivadas $D(\mathcal{M})$

$$\iota_*\colon \mathcal{M} \to D(\mathcal{M})$$

Este morfismo existe independientemente que la estructura base sea un marco o no, es decir, no estamos ocupando la propiedad significativa del marco, la ley distributiva para marcos. En vista que cada marco $\mathcal{M}$ tiene asociado un marco $N(\mathcal{M})$ (y la construcción de éste si ocupamos la ley distributiva en $\mathcal{M}$) entonces nos preguntamos por una inmersión de $\mathcal{M}$ en $N(\mathcal{M})$ de tal forma que éste sea un morfismo de marcos, para responder esto introducimos:

Definición 1.2.24. *Para cada marco $\mathcal{M}$ sea $n_{\mathcal{M}}$ la función :*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{n_{\mathcal{M}}} N(\mathcal{M})$$

$$a \longmapsto u_a$$

Lemma 1.2.25. *Para cada $\mathcal{M}$ marco la función $n_{\mathcal{M}}$ es un morfismo inyectivo en la categoría Frm.*

Demostración. Debemos ver que $n_{\mathcal{M}}(0_{\mathcal{M}}) = 0_{N(\mathcal{M})}, n_{\mathcal{M}}(\bigvee X) = \bigvee \{n_{\mathcal{M}}(x) \mid x \in X\}$ y $n_{\mathcal{M}}(1_{\mathcal{M}}) = 1_{N(\mathcal{M})}$ $n_{\mathcal{M}}(a \wedge b) = n_{\mathcal{M}}(a) \wedge n_{\mathcal{M}}(b)$, es decir, $u_{0_{\mathcal{M}}} = 0_{N(\mathcal{M})}$, $u_{\bigvee X} = \bigvee \{u_x \mid x \in X\}$ y $u_{1_{\mathcal{M}}} = 1_{N(\mathcal{M})}$ $u_{a\wedge b} = u_a \wedge u_b$, para cada $a, b \in \mathcal{M}$ y $X \subseteq \mathcal{M}$.

Es inmediato de la definición de u_* que, $u_{0_{\mathcal{M}}} = 0_{N(\mathcal{M})}$, $u_{1_{\mathcal{M}}} = 1_{N(\mathcal{M})}$ y $u_{a\wedge b} = u_a \wedge u_b$, el último es porque el ínfimo en $N(\mathcal{M})$ se calcula puntualmente. Veamos $u_{\bigvee X} = \bigvee \{u_x \mid x \in X\}$, para esto pongamos $c = \bigvee X$ y $j = \bigvee \{u_x \mid x \in X\}$, necesitamos ver que $u_c = j$, entonces para cada $x \in X$ tenemos

$$u_x(y) = x \vee y \leq c \vee y = u_c(y)$$

para cada $y \in \mathcal{M}$ por lo que $u_x \leq u_c$ y así $j \leq u_c$. Por otro lado tenemos

$$u_c(y) = c \vee y = \bigvee \{x \vee y \mid x \in X\} \leq j(y)$$

Para cada $y \in \mathcal{M}$, por lo tanto $u_c \leq j$ y así obtenemos la igualdad, y por lo tanto $n_{\mathcal{M}}$ es un morfismo de marcos.

La inyectividad de este morfismo es sencilla puesto que

$$n_{\mathcal{M}}(a) = n_{\mathcal{M}}(b) \Rightarrow u_a = u_b \Rightarrow a = u_a(0) = u_b(0) = b.$$

$\square$

Corolario 1.2.26. *Para cada marco $\mathcal{M}$ el par de asignaciones*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{n_{\mathcal{M}}} N(\mathcal{M})$$

$$a \longmapsto u_a$$

$$N(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$j \longmapsto j(0)$$

forman una adjunción.

Demostración. Basta recordar que por el lema anterior es suficiente tener que

$$a \leq j(0) \Leftrightarrow u_a \leq j$$

para todo $a \in \mathcal{M}$ y $j \in N(\mathcal{M})$.

$\square$

Un hecho importante es el siguiente:

Teorema 1.2.27. *Para cada marco $\mathcal{M}$ y $a \in \mathcal{M}$ los núcleos u_a y v_a son complementarios en $N(\mathcal{M})$, es decir,*

$$u_a \vee v_a = 1_{N(\mathcal{M})} \quad u_a \wedge v_a = 0_{N(\mathcal{M})}.$$

Demostración. Pongamos $j = u_a \vee v_a$, necesitamos que $j(0) = \bar{1}$ y así se tendrá $j = 1_{N(\mathcal{M})}$, tenemos que como $u_a \leq j$ y $v_a \leq j$ entonces $a \leq j(0)$ y así $j(a) \leq j(0)$ y con esto tenemos que

$$\bar{1} = (a \succ a) = v_a(a) \leq j(a) \leq j(0).$$

De donde $j(0) = \bar{1}$. Para la otra igualdad, como los ínfimos en $N(\mathcal{M})$ se calculan puntualmente, se tiene que

$$(v_a \wedge u_a)(x) = v_a(x) \wedge u_a(x) = v_a(x) \wedge (a \vee x) = (v_a(x) \wedge a) \vee (v_a(x) \wedge x) = x$$

para todo $x \in \mathcal{M}$ ya que

$$v_a(x) \wedge a = (a \succ x) \wedge a \leq x \text{ y } v_a(x) \geq x.$$

Es decir:

$$v_a \wedge u_a = d_{\underline{0}} = 0_{N(\mathcal{M})}$$

□

A continuación veremos que todos los núcleos se pueden construir a partir de los núcleos de la forma u_* y v_*, pero antes hagamos unos cálculos necesarios.

Lemma 1.2.28. *Para $j, k \in N(\mathcal{M})$ si*

$$jk \leq kj$$

entonces

$$j \vee k = kj.$$

Demostración. Sabemos que $g = kj$ es un prenúcleo, pero usando la comparación dada tenemos

$$g^2 = kjkj \leq k^2 j^2 = kj = g.$$

Por lo tanto g es un núcleo. Por otro lado pongamos $h = j \vee k$ trivialmente tenemos que $h \leq g$ (por 1.1.4) de donde

$$g = kj \leq hh = h.$$

□

Con esto podemos generalizar un cálculo que se hizo en 1.2.27 para j cualquier núcleo.

Lemma 1.2.29. *Sea $\mathcal{M}$ un marco y sean $j \in N(\mathcal{M})$, $a, b \in \mathcal{M}$ pongamos*

$$l = v_b \vee j \vee u_a.$$

Entonces

$$l = v_b j u_a.$$

Es decir, $l(x) = (b \succ j(a \vee x))$ para todo $x \in \mathcal{M}$.

Demostración. Para un núcleo arbitrario k tenemos que en cualquier $x \in \mathcal{M}$

$$(kv_b)(x) = k((b \succ x)) \leq (b \succ k(x)) = (v_b k)(x)$$

y

$$(u_a k)(x) = a \vee k(x) \leq k(a \vee x) = (ku_a)(x)$$

simplemente porque k es inflatoria y por lo tanto de 1.2.28

$$v_b \vee k = v_b k$$

y

$$k \vee u_a = ku_a.$$

De donde obtenemos

$$l = v_b \vee j \vee u_a = (v_b j) \vee u_a = v_b j u_a.$$

$\square$

Un caso particular del lema anterior es $j = d_{\underline{0}} = id_{\mathcal{M}}$. Entonces

$$v_a \vee u_a = v_a \vee d_{\underline{0}} \vee u_a = v_a d_{\underline{0}} u_a = v_a u_a$$

de donde

$$(v_a \vee u_a)(0) = (a \succ a) = 1$$

y así $v_a \vee u_a = 1_{N(\mathcal{M})}$.

Ahora un poco de terminología. Dado un núcleo j en un marco, y dados elementos $a \leq b$ del marco diremos que j *colapsa el intervalo* $[a, b]$ si $b \leq j(a)$, por lo que j es el menor núcleo que colapsa los intervalos de la forma

$$[a, j(a)$$

.

Lemma 1.2.30. *Para cada marco $\mathcal{M}$ y elementos $a, b \in \mathcal{M}$ tenemos*

$$u_b \wedge v_a \leq j \Leftrightarrow b \leq j(a)$$

para cada $j \in N(\mathcal{M})$. En particular si $a \leq b$ entonces $u_b \wedge v_a$ es el menor núcleo que colapsa el intervalo $[a, b]$.

Demostración. Como u_a y v_a son núcleos complementarios tenemos que

$$u_b \wedge v_a \leq j \Leftrightarrow u_b \leq j \vee u_a \Leftrightarrow u_b \leq ju_a \Leftrightarrow b \leq j(a)$$

La primera equivalencia es porque son complementarios, la segunda es por el lema anterior y la última es por la evaluación en 0. $\square$

Definición 1.2.31. *Sea $(\mathcal{L}, \leq \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$ una retícula completa. Se dice que un elemento $a \in \mathcal{L}$ está* generado *por $X \subseteq \mathcal{L}$ si*

$$\bigvee X = a.$$

Diremos que a es representado *por X si*

$$\bigwedge X = a.$$

Con todo esto a la mano obtenemos:

Teorema 1.2.32. *Para cada marco $\mathcal{M}$ se tiene que*

$$j = \bigvee \left\{ u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in \mathcal{M} \right\},$$

para cada $j \in N(\mathcal{M})$ (en la terminología anterior todo núcleo está generado por los elementos de la forma u_* y v_*).

Demostración. Denotemos por

$$k = \bigvee \left\{ u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in \mathcal{M} \right\}.$$

No sabemos de inmediato que este supremo se calcule puntualmente, pero no necesitamos eso en la prueba ya que por 1.2.30

$$u_{j(a)} \wedge v_a \leq j,$$

para todo $a \in \mathcal{M}$ y por lo tanto $k \leq j$. Además para cada $a \in \mathcal{M}$ tenemos que

$$u_{j(a)} \wedge v_a \leq k$$

y así

$$j(a) \leq k(a),$$

simplemente evaluando en a, es decir, $j \leq k$.

$\square$

De este hecho relevante obtenemos suponiendo que el marco $\mathcal{M}$ sea finito, que todo núcleo es el supremo finito de una familia de núcleos complementados, por lo que él mismo es complementado es decir, en este caso particular $N(\mathcal{M})$ es booleano.

Teorema 1.2.33. *Si $\mathcal{M}$ es finito entonces $N(\mathcal{M})$ es booleana.*

$\square$

Para concluir esta sección veamos que todo núcleo tiene una representación en términos de una familia distinguida de núcleos, w_*.

Lemma 1.2.34. *Para cada marco $\mathcal{M}$ se tiene*

$$u_a \leq j \Leftrightarrow a \leq j(0)$$

$$v_a \geq j \Leftrightarrow j(a) = \bar{1}$$

$$j \leq w_a \Leftrightarrow j(a) = a$$

para cada núcleo j sobre $\mathcal{M}$ y cada elemento $a \in \mathcal{M}$

Demostración. Si $u_a \leq j$ entonces es claro que $a \leq j(0)$. Recíprocamente si $a \leq j(0)$ entonces $u_a(x) = a \vee x \leq j(0) \vee j(x) = j(x)$ para cada $x \in \mathcal{M}$ entonces $u_a \leq j$.

Si $v_a \leq j$ entonces $\bar{1} \leq j(a)$ por lo que $j(a) = \bar{1}$, recíprocamente si $j(a) = \bar{1}$ entonces considere

$$y = v_a(x) = (a \succ x)$$

para cualquier $x \in \mathcal{M}$ necesitamos $y \leq j(x)$. Pero note que

$$y \wedge a \leq x$$

y así

$$y \leq j(y) \wedge j(a) = j(y \wedge a) \leq j(x)$$

como se deseaba.

Por último si $j \leq w_a$ entonces $j(a) = a$ evaluando. Recíprocamente suponga que $j(a) = a$ y considere

$$y = j(x) \wedge (x \succ a)$$

para $x \in \mathcal{M}$ arbitrario, así tenemos

$$y \leq j(x) \quad x \wedge y \leq a$$

por lo que

$$y = y \wedge j(x) \leq j(x) \wedge j(y) = j(x \wedge y) \leq j(a) = a$$

de donde se obtiene

$$j(x) \leq ((x \succ a) \succ a) = w_a(x)$$

por lo tanto $j \leq w_a$ ya que x fue arbitrario. $\square$

De la tercera conclusión de lo anterior obtenemos la representación deseada.

Teorema 1.2.35. *Para cada marco $\mathcal{M}$ se tiene*

$$j = \bigwedge \{w_a \mid a \in \mathcal{M}_j\}$$

para cada núcleo j en $\mathcal{M}$.

Demostración. Dado $j \in N(\mathcal{M})$ sea

$$k = \bigwedge \{w_a \mid a \in \mathcal{M}_j\}$$

entonces tenemos que $j \leq k$por la tercera parte del lema anterior.

Ahora consideremos cualquier $x \in \mathcal{M}$ y pongamos $a = j(x)$ entonces $a \in \mathcal{M}_j$ y así $k \leq w_a$por lo que

$$k(x) \leq k(a) \leq w_a(a) = a = j(x),$$

por lo que $k \leq j$ ya que x fue arbitrario. $\square$

Proposición 1.2.36. *Si $f \in N(\mathcal{M})$ y si $a \in \mathcal{M}$ entonces $fu_a \in N(\mathcal{M})$ de hecho $f \vee u_a = fu_a$.*

Demostración. Si $b \in \mathcal{M}$ entonces $fu_a(b) = f(b \vee a) \leq f(b) \leq b$. Análogamente $f(b \vee a) \leq f(a) \leq a$ por lo que $(fu_a)^2(b) = fu_a(f(b \vee a)) = f(f(b \vee a) \vee a) = f^2(b \vee a) = f(b \vee a) = fu_a(b)$. Claramente es morfismo de orden, veamos que si $b, b' \in \mathcal{M}$ entonces $fu_a(b \wedge b') = f([b \wedge b'] \vee a) = f([b \vee a] \wedge [b' \vee a]) = f(b \vee a) \wedge f(b' \vee a) = fu_a(b) \wedge fu_a(b')$ por lo tanto $fu_a \in N(\mathcal{M})$. Por último notemos que por 1.1.5 $fu_a \geq f \vee u_a$ y recíprocamente si $b \in \mathcal{M}$ tenemos que $f \vee u_a(b) = (f \vee u_a)^2(b) \geq fu_a(b)$ por lo que $f \vee u_a \geq fu_a$.

$\square$

Proposición 1.2.37. *Para núcleos f y f' en $\mathcal{M}$ tenemos que*

$$(f' \succ f) = \bigwedge \left\{v_{f(a)} f' u_a \mid a \in \mathcal{M}\right\}.$$

Demostración. Sea $h = \bigwedge \{v_{f(a)} f' u_a \mid a \in \mathcal{M}\}$. Entonces para cada a en $\mathcal{M}$, tenemos que $(h \wedge f)(a) \leq v_{f(a)}(f' u_a(a)) \wedge f(a) = (f'(a) \succ f(a)) \wedge f(a) \leq f'(a)$. Ahora supongamos que h' es el elemento en $N(\mathcal{M})$ que satisface $h' \wedge f \leq f'$. Queremos probar que $h' \leq h$ y para esto necesitamos ver que $h' \leq v_{f(a)} f' u_a$ para toda $a \in \mathcal{M}$. De hecho se tiene que para cada una de esas $a \in \mathcal{M}$ y para $b \in \mathcal{M}$ tenemos $h'(b) \leq h'(b \vee a) \leq (h'(b \vee a) \succ f(a)) = (h'(b \vee a) \succ f(a) \wedge (f(b \vee a) \succ f(a))) \leq (f'(b \vee a) \succ f(a)) = v_{f(a)} f' u_a(b)$. Por lo que $h' = (f' \succ f)$.

$\square$

1.3. Derivadas sobre un Idioma

En esta sección analizaremos el estudio hecho anteriormente sobre un marco pero ahora lo haremos sobre una estructura de otra naturaleza (a primera vista más general pero conforme se verá, están intrínsecamente relacionados). Muchos de los resultados que daremos en esta sección, tienen pruebas análogas a las dadas en marcos. Cuando éste no sea el caso se hará un señalamiento del porqué. Esta exposición esta basada en [Sim14c] y parte de [Sim14a].

Empezamos introduciendo algunos conceptos de teoría general de retículas.

Definición 1.3.1. *Una retícula $(A, \vee, \wedge, \bar{1}, \underline{0})$ es* modular *si:*

$$(a \vee c) \wedge b = a \vee (c \wedge b)$$

para todos los $a, b, c \in A$ con $a \leq b$.

Claro que nuestras retículas las pediremos completas, pero esta definición tiene sentido en general.

Definición 1.3.2. *Una retícula $(A, \vee, \wedge, \bar{1}, \underline{0})$ es* distributiva *si*

$$(a \vee c) \wedge b = (a \wedge b) \vee (c \wedge b),$$

equivalentemente

$$(a \wedge c) \vee b = (a \vee b) \wedge (c \vee b),$$

para todo $a, b, c \in A$

Noten que un marco es claramente una retícula distributiva y por ende también modular, introduzcamos el objeto que unifica estas situaciones. Recordemos que dado un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{L}$ un subconjunto $X \subseteq \mathcal{L}$ es *dirigido* si es no vacío y para cualesquiera $x, y \in X$ existe $z \in X$ tal que $x, y \leq z$.

Definición 1.3.3. *Una retícula completa* $(A, \leq, \bigvee, \bigwedge, \underline{0}, \bar{1})$ *es* superiormente continua *si se cumple la siguiente ley distributiva:*

$$a \wedge (\bigvee X) = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

para todo subconjunto X *de* A *dirigido y todo* $a \in A$*.*

Definición 1.3.4. *Una retícula completa* $(A, \leq, \bigvee, \bigwedge, \underline{0}, \bar{1})$ *es un* idioma *si es superiormente continua y modular.*

Definición 1.3.5. *Un morfismo de idiomás es un* Sup*-morfismo que preserva ínfimos finitos.*

Denotemos por $\mathcal{ID}$ a la categoría de idiomás junto con sus morfismos.

Nótese que en cualquier retícula completa se tiene:

$$a \wedge (\bigvee X) \geq \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\} .$$

En un marco se tiene la igualdad y como se mencionó anteriormente, un marco es un idioma del siguiente tipo.

Lemma 1.3.6. *Sea* A *un idioma.* A *es un marco si y sólo si es una retícula distributiva.*

Demostración. Claramente, si A es un marco entonces es distributivo. Recíprocamente supongamos que A es un idioma distributivo, consideremos cualquier subconjunto $Y \subseteq A$ y cualquier $a \in A$ así basta observar que

$$a \wedge (\bigvee Y) \leq \bigvee \{a \wedge y \mid y \in Y\} .$$

Para esto formemos el conjunto X de todos los supremos de conjuntos finitos de Y. Un elemento $x \in X$ es de la forma $x = y_1 \vee \ldots \vee y_n$ con $y_1 \ldots y_n \in Y$. Notemos que el conjunto X es dirigido, pues es cerrado bajo supremos y también se tiene que $Y \subseteq X$ por lo que $\bigvee Y \leq \bigvee X$ por lo que

$$a \wedge (\bigvee Y) \leq a \wedge (\bigvee X) \leq \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\} -$$

La segunda desigualdad se da por la ley distributiva para idiomás. Ahora tomemos un $x = y_1 \vee \ldots \vee y_n$, entonces

$$a \wedge x = a \wedge y_1 \vee \ldots \vee a \wedge y_n \leq \bigvee \{a \wedge y \mid y \in Y\} .$$

Pues A es distributivo por lo que

$$\bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\} \leq \bigvee \{a \wedge y \mid y \in Y\}$$

y así se tiene la igualdad. $\square$

Lemma 1.3.7. *Sea A un idioma. Entonces*

$$(\bigvee X) \wedge (\bigvee Y) = \bigvee \{x \wedge y \mid x \in X, y \in Y\},$$

para cualesquiera X y Y subconjuntos dirigidos.

Demostración. Pongamos

$$a = \bigvee X \text{ y } b = \bigvee Y.$$

Por un lado se tiene

$$a \wedge b = a \wedge (\bigvee Y) = \bigvee \{a \wedge y \mid y \in Y\}$$

por la ley distributiva para idiomás. Por otro lado, para cada $y \in Y$ se tiene

$$a \wedge y = (\bigvee X) \wedge y = \{x \wedge y \mid x \in X\}.$$

Así

$$a \wedge b = \bigvee \{a \wedge y \mid y \in Y\} = \bigvee \left\{\bigvee \{a \wedge y \mid x \in X\} \mid y \in Y\right\}$$

los cual es igual a

$$\bigvee \{x \wedge y \mid x \in X, y \in Y\}$$

y esto es lo que queríamos probar. □

Los ejemplos fundamentales de esta teoría y mucho por lo que ésta motivad son:

1. La retícula de submódulos de un módulo M sobre un anillo asociativo con uno. Esta retícula es un idioma. En general, no es idioma distributivo, es decir, un marco.
2. La topológia de un espacio topológico S. Este es un marco, es por eso que la teoría de marcos se puede pensar como un análogo algebraico de la categoría de espacios topologicos.
3. El último ejemplo es probablemente donde éstas dos teorías se intersecan, el marco de todas las clases de torsión hereditarias sobre un anillo R, $R-\text{tors}$

.

Ahora empecemos recordando qué una derivada (una inflación) sobre un idioma A, es una función

$$d : A \to A$$

tal que
$$x \leq d(x) \qquad x \leq y \Rightarrow d(x) \leq d(y),$$

para $x, y \in A$.

Un *operador de cerradura* sobre A es una derivada idempotente d, es decir, $d^2 = d$.

Un *núcleo* sobre A es una derivada d idempotente tal que

$$d(a \wedge b) = d(a) \wedge d(b),$$

para todo $a, b \in A$.

Un *prenúcleo* o *prenúcleo binario* sobre A es una derivada d tal que

$$d(a \wedge b) = d(a) \wedge d(b)$$

para todo $a, b \in A$.

Una derivada d sobre A es *estable* o *prenúcleo unario* si

$$d(a) \wedge b \leq d(a \wedge b),$$

para todos los $a, b \in A$.

En la definición de prenúcleo como en la de núcleo basta pedir la desigualdad $d(a) \wedge d(b) \leq d(a \wedge b)$ ya que $a \wedge b \leq a, b \Rightarrow d(a \wedge b) \leq d(a) \wedge d(b)$ pues d infla.

Como en 1.1.4, el producto dz de dos derivadas sobre un idioma está por arriba del supremo: $d \vee z \leq dz$. La prueba de este hecho es la misma en el caso idiomático al igual que la de 1.1.5.

Denotemos por $D(A)$ el conjunto de derivadas sobre el idioma A. Este al igual que las derivadas sobre un marco, forman una retícula completa mediante el orden

$$d \leq z \Leftrightarrow (\forall x \in A)[d(x) \leq z(x)].$$

el mayor elemento de $D(A)$ lo denotamos como $d_{\bar{1}}$ y al menor elemento lo denotamos por $d_{\underline{0}}$ (que es sólo el morfismo identidad de A) el supremo está descrito puntualmente al igual que el ínfimo (justo como en la construcción para marcos). Con esto en mente, recordemos una construcción fundamental.

Definición 1.3.8. *Sea A un idioma y $d \in D(A)$ una derivada, las* iteraciones *de d sobre los ordinales*
$$(d^{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{O}rd)$$
están dadas como

$$d^0 = d_{\underline{0}} \quad d^{\alpha+1} = dd^{\alpha} \qquad d^{\lambda} = \bigvee \{d^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}$$

para cada ordinal sucesor y cada ordinal límite.

Con esta definición obtenemos:

Lemma 1.3.9. *Sea A un idioma y sea d una derivada sobre A, entonces cada una de las iteraciones de d sobre los ordinales es una derivada y toda la familia de éstas forman una cadena ascendente de derivadas en $D(A)$.*

Demostración. Veamos que cada d^{α} es una derivada en A. Procedemos por inducción, noten que el caso base es trivial y que como la composición de derivadas es de nuevo una derivada entonces si α es sucesor el resultado es cierto. Basta ver que d^{λ} es una derivada si λ es límite. Para este fin consideremos $x \leq y$ en A. Por hipótesis de inducción se tiene

$$d^{\alpha}(x) \leq d^{\alpha}(y)$$

para cada $\alpha < \lambda$. Esto da

$$d^{\alpha}(x) \leq d^{\lambda}(y),$$

por construcción de d^{λ}. De nuevo usando esta construcción se obtiene

$$d^{\lambda}(x) \leq d^{\lambda}(y).$$

Para lo segundo tomemos dos ordinales $\beta \leq \alpha$ y en cada $x \in A$ se tiene que

$$d^{\beta}(x) \leq d^{\alpha}(x)$$

por inducción y la definición de orden en $D(A)$.

$\square$

Así, la cadena construida anteriormente se ve como

$$d_{\underline{0}} \leq d \leq d^{2} \leq \cdots \leq d^{\alpha} \leq \ldots$$

y como los ordinales forman una clase no cardinable, entonces esta cadena se estabiliza en algún ordinal θ. Es decir, $d^{\theta} = d^{\alpha}$ si $\alpha \geq \theta$, pongamos tal derivada como

$$d^{\infty}.$$

Este es una derivada pues está en la cadena anterior y es idempotente por la estabilidad, así cada derivada sobre un idioma está por abajo de una derivada idempotente. De hecho esta construcción asegura que d^{∞} es la menor derivada idempotente por arriba de d.

En este punto daré un nuevo conjunto de derivadas. Simmons a estas derivadas les llama ¡derivas!, nosotros optamos por el siguiente nombre, una derivada d sobre un idioma A se llama un *derivado* si d^{∞} es un núcleo.

Lemma 1.3.10. *Sea A un idioma y sea d una derivada sobre A, entonces*

(1) Si d es un prenúcleo entonces cada d^α es un prenúcleo, en particular d^∞ es un núcleo.

(2) Si d es una derivada estable entonces cada d^α es una derivada estable y cada d^λ con λ límite es estable. En particular, d^∞ es un núcleo.

(3) Cada núcleo es un prenúcleo y cada prenúcleo es una derivada estable y cada derivada estable es un derivado.

Demostración. Veamos (1). Suponga que d es un prenúcleo, entonces para $a, b \in A$ fijos mostraremos por inducción que

$$d^\alpha(a) \wedge d^\alpha(b) \leq d^\alpha(a \wedge b).$$

El caso base es claro.

Ahora, el paso inductivo. Tenemos

$$d^{\alpha+1}(a)\wedge d^{\alpha+1}(b) = d(d^\alpha(a))\wedge d(d^\alpha)(b) \leq d(d^\alpha(a)\wedge d^\alpha(b)) \leq d(d^\alpha(a\wedge b)) = d^{\alpha+1}(a\wedge b).$$

Para el caso límite tenemos

$$\begin{aligned} d^\lambda(a) \wedge d^\lambda(b) &= (\bigvee \{d^\alpha(a) \mid \alpha < \lambda\}) \wedge (\bigvee \left\{d^\beta(b) \mid \beta < \lambda\right\}) \\ &\leq \bigvee \left\{d^\alpha(a) \wedge d^\beta(b) \mid \alpha, \beta < \lambda\right\} \\ &\leq \bigvee \{d^\gamma(a) \wedge d^\gamma(b) \mid \gamma < \lambda\} \\ &\leq \bigvee \{d^\gamma(a \wedge b) \mid \gamma < \lambda\} = d^\lambda(a \wedge b). \end{aligned}$$

Aquí se usa dos veces la ley distributiva para idiomás, después se usan la propiedad creciente de la cadena dada en 1.3.8 y la hipótesis de inducción.

La parte (2) se prueba de manera similar a la parte (1). Para ver que las iteraciones son en efecto prenúcleos tomemos un ordinal límite λ y elementos $a, b \in A$. Tenemos

$$d^\lambda(a) \wedge d^\lambda(b) \leq \bigvee \left\{d^\alpha(a) \wedge d^\beta(b) \mid \alpha, \beta < \lambda\right\}$$

usando la ley distributiva para idiomás como en (1). Ahora usando que éstos son estables se tiene

$$d^\lambda(a) \wedge d^\lambda(b) \leq \bigvee \left\{d^\alpha(a) \wedge d^\beta(b) \mid \alpha, \beta < \lambda\right\}$$

$$\leq \bigvee \left\{ d^{\alpha}(d^{\beta}(a \wedge b) \mid \alpha, \beta < \lambda \right\}$$
$$\leq \bigvee \left\{ d^{\alpha+\beta}(a \wedge b) \mid \alpha, \beta < \lambda \right\}$$
$$\leq d^{\lambda}(a \wedge b).$$

(3) se sigue de las definiciones.

□

En la sección 2 de este capítulo se hizo un estudio de los núcleos de los morfismos en la categoría Frm, usando la categoría Sup. Como todo idioma es un objeto en esta categoría este estudio se tiene para idiomás, es así que se puede hablar del idioma cociente de un idioma y de núcleo de un morfismo de idiomás. El detalle de este estudio radica en el hecho que dado un núcleo j sobre A, si consideramos el conjunto de puntos fijos A_j, éste es un idioma no un marco puesto que no tenemos la implicación definida en el idioma base. Algúnos resultados en el sentido idiomático son:

Lemma 1.3.11. *Un morfismo de idiomás visto como un morfismo en la categoría Sup*

$$A \xrightarrow{f} B$$

tiene núcleo k, y éste en efecto es un núcleo en el idioma dominio. k está dado por

$$x \leq k(a) \iff f(x) \leq f(a),$$

para cada $a, x \in A$.

□

Teorema 1.3.12. *Sea j un núcleo sobre un idioma A. El conjunto de puntos fijos de j:*

$$A_j$$

es una retícula completa que es un idioma. La asignación

$$A \xrightarrow{j^*} A_j$$

$$a \longmapsto j(a)$$

es un morfismo de idiomás y su núcleo es justamente j.

□

Teorema 1.3.13. *Considere cualquier núcleo j sobre un idioma A y cualquier morfismo de idiomás*

$$A \xrightarrow{f} B$$

con núcleo k, suponga que $j \leq k$. Entonces existe un único morfismo de idiomás $\bar{f} : A_j \Rightarrow B$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j^*"'] & B \\ & A_j \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

$\square$

1.3.1. El marco $N(A)$ de un idioma A

Una de las situaciones más agradables de introducir la categoría de idiomás es que cualquier resultado que probemos ahí es automáticamente cierto para marcos, lo cual no sucede en los resultados que tenemos para marcos. Es por eso que el hecho de que $N(A)$sea un marco para cualquier idioma, es un hecho realmente notable en el cual no podemos proceder como en marcos pues no hay implicación aunque la técnica en el fondo es la misma en la prueba.

Pongamos nombres a los conjuntos de derivadas que introducimos en el principio de esta sección.

Definición 1.3.14. *Dado un idioma A sean*

$$D(A) \quad C(A) \quad S(A) \quad P(A) \quad N(A)$$

los conjuntos parcialmente ordenados de, derivadas, derivadas idempotentes, derivadas estables, prenúcleos y núcleos sobre A.

Definición 1.3.15. *Sea A un idioma y sea $\mathcal{I}$ un conjunto de derivadas sobre A, el* ínfimo puntual $\bigwedge \mathcal{I}$ *de $\mathcal{I}$ es la función sobre A dada por:*

$$(\bigwedge \mathcal{I})(a) = \bigwedge \{f(a) \mid f \in \mathcal{I}\} .$$

De la definición de $\bigwedge \mathcal{I}$ se sigue que es una función en A. Además ésta es una derivada.

Lemma 1.3.16. *Sea A un idioma y $\mathcal{I} \subseteq D(A)$ entonces, $\bigwedge \mathcal{I}$ es el ínfimo de la familia $\mathcal{I}$ en $D(A)$ más aún:*

1. *Si $\mathcal{I} \subseteq S(A)$ entonces $\bigwedge \mathcal{I} \in S(A)$.*
2. *Si $\mathcal{I} \subseteq P(A)$ entonces $\bigwedge \mathcal{I} \in P(A)$.*
3. *Si $\mathcal{I} \subseteq C(A)$ entonces $\bigwedge \mathcal{I} \in C(A)$.*
4. *Si $\mathcal{I} \subseteq N(A)$ entonces $\bigwedge \mathcal{I} \in N(A)$.*

Demostración. Todo es inmediato.

□

El problema es construir los supremos de cada uno de las distintas derivadas y ver que en efecto con estos supremos cada conjunto se vuelve un idioma o un marco.

Sabemos que si $\mathcal{I} = \emptyset$ entonces

$$\bigwedge \mathcal{I} = \bar{d},$$

es decir, la derivada constante $\bar{1}$, el mayor elemento de A.

El menor elemento en $D(A)$ es la función identidad en A que denotamos por $d_{\underline{0}}$. Cada una de estas derivadas es un núcleo. Para el supremos primero:

Definición 1.3.17. *Sea A un idioma y sea $\mathcal{S} \subseteq D(A)$ no vacío. Denotemos por $\bigvee \mathcal{S} \colon A \to A$ a la función dada como:*

$$(\bigvee \mathcal{S})(a) = \bigvee \{f(a) \mid f \in \mathcal{S}\},$$

para cada $a \in A$.

Note que en la definición se necesita que el conjunto $\mathcal{S}$ sea no vacío puesto que de la definición de derivada se tendría que

$$(\bigvee \emptyset)(a) = \bigvee \emptyset = \underline{0}$$

el cual no es el menor elemento en $D(A)$.

Lemma 1.3.18. *Sea A un idioma y sea $\mathcal{S}$ un subconjunto no vacío de derivadas sobre A, entonces el supremo de $\mathcal{S}$ está descrito como la función*

$$\bigvee \mathcal{S}$$

Más aún, si suponemos que éste es dirigido se tiene:

1. *Si* $\mathcal{S} \subseteq S(A)$ *entonces* $\bigvee \mathcal{S} \in S(A)$.
2. *Si* $\mathcal{S} \subseteq P(A)$ *entonces* $\bigvee \mathcal{S} \in P(A)$.

Demostración. La prueba es análoga a la dada en 1.1.7 y 1.2.3 □

Un hecho destacable es:

Teorema 1.3.19. *Dado un idioma* A*, el conjunto* $S(A)$ *de derivadas estables sobre* A*, es un idioma.*

Demostración. Debemos ver que $S(A)$ satisface la ley distributiva para idiomas, es decir,

$$f \wedge (\bigvee \mathcal{G}) = \bigvee \{f \wedge g \mid g \in \mathcal{G}\}$$

para cualquier $f \in S(A)$ y cualquier subconjunto $\mathcal{G}$ de $S(A)$ dirigido. Este supremo y este ínfimo se describen puntualmente. Así que para cualquier $a \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}(f \wedge (\bigvee \mathcal{G}))(a) &= f(a) \wedge (\bigvee \mathcal{G})(a) \\ &= f(a) \wedge \bigvee \{g(a) \mid g \in \mathcal{G}\} \\ &= \bigvee \{f(a) \wedge g(a) \mid g \in \mathcal{G}\} \\ &= \bigvee \{(f \wedge g)(a) \mid g \in \mathcal{G}\} = (\bigvee \{f \wedge g \mid g \in \mathcal{G}\})(a)\end{aligned}$$

Las primeras igualdades son por la definición del supremo e ínfimo y la última es justo porque A es un idioma, puesto que $(\bigvee \mathcal{G})(a)$ es dirigido en el idioma. □

Note que a diferencia del caso de marcos aquí utilizamos explícitamente ley distributiva para idiomas(LDI), como en 1.2.22. Tenemos la versión para idiomás de ese hecho.

Teorema 1.3.20. *Sea* A *un idioma arbitrario, entonces el operador* $(\_)^{\infty}$ *sobre el idioma* $S(A)$ *es un núcleo (2-núcleo), cuyo conjunto de puntos fijos es* $N(A)$.

Demostración. Sabemos que $(\_)^{\infty}$ es un operador de cerradura sobre $S(A)$. Así basta probar:

$$f^{\infty} \wedge g \leq (f \wedge g)^{\infty},$$

para cualesquiera $f, g \in S(A)$. Procedemos como siempre por inducción. Sea

$$h = f \wedge g$$

debemos mostrar que

$$f^{\alpha}(a) \wedge g(a) \leq h^{\alpha}(a)$$

para cada $a \in A$ y α un ordinal.

El caso $\alpha = 0$ es trivial.

Para el paso inductivo tenemos

$$f^{\alpha+1}(a) \wedge g(a) = f(f^{\alpha}(a)) \wedge g(a) \leq f(f^{\alpha}(a) \wedge g(a)) \leq f(h^{\alpha}(a)).$$

Donde utilizamos que f es estable en la primera desigualdad y la tercera desigualdad es cierta por hipótesis de inducción. Así:

$$f^{\alpha+1}(a) \wedge g(a) \leq f(h^{\alpha}(a)) \wedge g(a) \leq f(f^{\alpha}(a) \wedge g(h^{\alpha}(a)) = h^{\alpha+1}(a)$$

para el caso límite tenemos

$$f^{\lambda}(a) \wedge g(a) = \bigvee \{f^{\alpha}(a) \mid \alpha < \lambda\} \wedge g(a)$$

$$= \bigvee \{f^{\alpha}(a) \wedge g(a) \mid \alpha < \lambda\}$$

$$\leq \bigvee \{h^{\alpha}(a) \mid \alpha < \lambda\} = h^{\lambda}(a).$$

Donde en la segunda igualdad se utiliza la ley distributiva del idioma A y la tercera usa la hipótesis de inducción.

Por último, si f es un núcleo entonces:

$$(f)^{\infty} = f^{\infty} = f \Longleftrightarrow f \in N(A).$$

□

Corolario 1.3.21. *Para cada idioma A, la retícula completa $N(A)$ es un idioma.*

Demostración. Por 1.3.20, $N(A)$ es el cociente canónico del núcleo $(\_)^{\infty}$ sobre el idioma $S(A)$ y entonces por 1.3.12 se tiene el resultado.

□

Lo anterior se puede mejorar, necesitamos el siguiente lema (que es una mejora considerable de 1.1.5).

Lemma 1.3.22. *Sean A un idioma arbitrario, $j \in N(A)$ y $k \in D(A)$, pongamos*

$$\mathcal{F} = \{f \in S(A) \mid f \wedge k \leq j\}$$

Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. *$\mathcal{F}$ es cerrado bajo composiciones.*

2. *$\mathcal{F}$ es dirigido.*

3. *$\mathcal{F}$ tiene un único elemento máximo.*

4. *Este único máximo es de hecho un núcleo en A.*

Demostración. Primero, tomemos dos derivadas en $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ y sea $f = f_1 f_2$, para cada $x \in A$ se tiene

$$f(x) \wedge k(x) = f_1(f_2(x)) \wedge k(x) \leq f_1(f_2(x) \wedge k(x)) \leq f_1(j(x)).$$

Donde la primera desigualdad es cierta puesto que f_1 es estable y la tercera es cierta puesto que $f_2 \in \mathcal{F}$. Ahora, como $f_1 \in \mathcal{F}$ tenemos que

$$f(x) \wedge k(x) \leq f_1(j(x)) \wedge k(x) \leq f_1(j(x)) \wedge k(j(x)) \leq j^2(x) = j(x).$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{F}$.

Por 1.1.4 y lo anterior se tiene que $\mathcal{F}$ es dirigido.

Ahora, pongamos

$$g = \bigvee \mathcal{F}.$$

Entonces para cada $a \in A$ tenemos que

$$g(a) = \bigvee \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

ahora como $\mathcal{F}$ es dirigido se tiene que g es una derivada. Como $\mathcal{F}$ es dirigido, utilizando la ley distributiva para idiomás se tiene que g es estable. Basta ver que $g \in \mathcal{F}$. Para esto sean $x, y \in A$ entonces

$$g(x) \wedge y = \bigvee \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \wedge y = \bigvee \{f(a) \wedge y \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

donde la segunda igualdad es válida puesto que utilizamos la LDI. Un caso particular de esto es:

$$g(x) \wedge k(x) = \bigvee \{f(x) \wedge k(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \leq j(x),$$

por lo que $g \in \mathcal{F}$.

Por último, note que $g^2 \in \mathcal{F}$ por la primera afirmación y entonces $g^2 \leq g$ pero por 1.1.4 se tiene $g^2 = g$.

$\square$

Con esto a la mano obtenemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.3.23. *Sea A un idioma. La retícula completa $N(A)$ es un marco.*

Demostración. Sabemos que $N(A)$ es una retícula completa. Por 1.1.1 basta ver que ésta tiene implicación. Considere dos núcleos $j, k \in N(A)$. Por el lema 1.3.21 existe un único núcleo $l \in N(A)$ tal que

$$f \wedge k \leq j \iff f \leq l,$$

para cada f. Por lo tanto l es la implicación

$$(k \succ j).$$

□

Observación 1.3.1. *Muchas veces al marco $N(A)$ se le llama el* ensamble *de A.*

Cabe mencionar que para calcular los supremos de una familia arbitraria de núcleos, digamos $\mathcal{J}$ se usa el mismo método descrito después de 1.1.8. Es decir, tomamos el conjunto de todas las composiciones de elementos de J, (así lo hacemos dirigido). Esto asegura el que el supremo es un prenúcleo. Después a este supremo le aplicamos el operador $(\_)^{\infty}$ por 1.3.9 (2).

1.3.23 y 1.3.22 se pueden establecer como:

Lemma 1.3.24. *Sea A un idioma y sea j un núcleo y f una derivada estable en A, entonces existe un núcleo*

$$(f \succ j)$$

en A tal que

$$g \leq (f \succ j) \iff f \wedge g \leq j$$

para cada $g \in S(A)$.

□

Si tomamos f la derivada estable anterior y consideramos su menor idempotente f^{∞}, resulta ser un núcleo. Pongamos $k = (f \succ j)$ y $l = (f^{\infty} \succ j)$. Sabemos que $f \leq f^{\infty}$ entonces,

$$f \wedge l \leq f^{\infty} \wedge l \leq j.$$

Por lo tanto $l \leq k$. Por otro lado aplicando el operador $(\_)^{\infty}$ a $f \wedge k \leq j$ se tiene

$$f^{\infty} \wedge k \leq (f \wedge k)^{\infty} \leq j^{\infty} = j.$$

Por lo tanto $k \leq l$.

En resumen:

Lemma 1.3.25. *Sea A un idioma, j un núcleo y f una derivada estable sobre A entonces*

$$(f \succ j) = (f^{\infty} \succ j).$$

□

1.4. El marco base de un idioma $\mathcal{B}(A)$

En esta sección introducimos los elementos básicos para la teoría que se desarrollará posteriormente alrededor de técnicas de dimensión en idiomás. Para esto analizaremos la estructura de un idioma A adjudicándole primero un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{I}(A)$, este es el conjunto de todos los intervalos que se pueden formar con elementos de A el cual se podría entender como el análogo reticular de la categoría de módulos sobre un anillo R. Justo ahí introduciremos para el idioma A en juego tres marcos

$$\mathcal{B}(A) \quad \mathcal{C}(A) \quad \mathcal{D}(A)$$

En estos marcos haremos un análisis de ciertas derivadas conectaremos este estudio con el hecho en capítulos anteriores.

Cabe mencionar que mucho de este análisis se puede hacer en cualquier retícula pero para adquirir resultados en el sentido algebraico necesitamos trabajar en un idioma.

Definición 1.4.1. *Sea A una retícula acotada. Para cada $a, b \in A$ con $a \leq b$ pongamos*

$$[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}$$

al cual llamaremos el intervalo *entre a y b*

Cada intervalo de A es por sí mismo una retícula acotada, en particular $[a, a] = \{a\}$ denota al intervalo trivial y $[\underline{0}, \bar{1}] = A$ el intervalo no propio.

Denotemos por $\mathcal{O}(A)$ al conjunto de todos los intervalos triviales y denotemos por $\mathcal{I}(A)$ al conjunto de todos los intervalos de A.

Definición 1.4.2. *Sea A una retícula acotada y considere $I, J \in \mathcal{I}(A)$. Escribimos*

$$J \longrightarrow I$$

para indicar que J es un subintervalo *de I, es decir, $J \subseteq I$. Explícitamente, si $J = [x, y]$ y $I = [a, b]$ entonces*

$$a \leq x \leq y \leq b.$$

Diremos que J es similar *a I*

$$J \sim I$$

si existen $l, r \in A$ tales que para los intervalos asociados a estos elementos

$$L = [l, l \vee r] \qquad R = [l \wedge r, r]$$

se tiene que $I = R$ y $J = L$ en algún orden.

La relación $\sim$ es simétrica, reflexiva y no es transitiva en $\mathcal{I}(A)$.

Supongamos ahora que tenemos un idioma A entonces el siguiente resultado es bien conocido.

Lemma 1.4.3. *Sea A una retícula modular y considere los intervalos similares*

$$L = [l, l \vee r] \quad R = [r \wedge l, l].$$

Entonces las funciones

$$r : L \to R$$

$$x \longmapsto x \wedge r$$

$$l : R \to L$$

$$y \longmapsto y \vee l$$

son isomorfismos de retículas.

$\square$

Regresando al caso en el que A solamente es acotada, para cada $I \in \mathcal{I}(A)$ y $a, b \in A$ tenemos

$$I \sim [a, a] \Longrightarrow I \in \mathcal{O}(A)$$

y

$$[a, a] \sim [a \vee b, a \vee b] \sim [b, b].$$

Es decir, el conjunto $\mathcal{O}(A)$ forma un bloque completo con respecto a la relación de equivalencia generada por $\sim$.

Definición 1.4.4. *Considere un subconjunto de intervalos $\mathcal{A}$ de una retícula acotada A, diremos que $\mathcal{A}$ es* abstracto *si no es vacío y es cerrado bajo $\sim$, es decir,*

$$J \sim I \in \mathcal{A} \Longrightarrow J \in \mathcal{A}$$

$I, J \in \mathcal{I}(A)$

Denotemos por $\mathcal{A}(A)$ el conjunto de todos los subconjunto de intervalos de A abstractos.

Definición 1.4.5. *Considere un subconjunto de intervalos $\mathcal{A}$ de una retícula acotada A.*

Diremos que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo subintervalos *si*

$$J \longrightarrow I \in \mathcal{A} \Longrightarrow J \in \mathcal{A}$$

para todo $I, J \in \mathfrak{I}(A)$.

Diremos $\mathcal{A}$ *es* cerrado bajo traslaciones *si*

$$[a, b] \in \mathcal{A} \Rightarrow [a \wedge x, b \wedge x] \quad , [a \vee x, b \vee x] \in \mathcal{A},$$

para cada intervalo $[a, b]$ *de* A *y cada* $x \in A$.

Diremos que $\mathcal{A}$ *es* básico *si es abstracto y cerrado bajo subintervalos.*

El siguiente lema es útil.

Lemma 1.4.6. *Sea* A *una retícula acotada y considere* $\mathcal{A}$ *un conjunto no vacío de intervalos de* A *entonces son equivalentes:*

1. $\mathcal{A}$ *es básico.*
2. $\mathcal{A}$ *es abstracto y cerrado bajo subintervalos.*
3. $\mathcal{A}$ *es cerrado bajo traslaciones.*

Demostración. $(1) \iff (2)$ se sigue de las definiciones.

$(2) \Rightarrow (3)$ Para cada intervalo $[a, b] \in \mathfrak{I}(A)$ y cada $x \in A$ tenemos

$$a \leq a \vee (x \wedge b) \leq b \qquad a \leq (a \vee x) \wedge b \leq b,$$

y así

$$[a \wedge x, b \wedge x] = [a \wedge (x \wedge b), x \wedge b] \sim [a, a \vee (a \wedge b)] \longrightarrow [a, b].$$

Ahora un argumento dual da

$$[a \vee x, b \vee x] = [a \vee x, b \vee (x \vee a)] \sim [(a \vee x) \wedge b, b] \longrightarrow [a, b].$$

$(3) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo traslaciones, entonces para $l, r \in A$ se tiene

$$[l, l \vee r] \in \mathcal{A} \Longrightarrow [l \wedge r, r] = [l \wedge r, (l \vee r) \wedge r] \in \mathcal{A}$$

$$[l \wedge r, r] \in \mathcal{A} \Longrightarrow [l, l \vee r] = [l \vee (l \wedge r), l \vee r] \in \mathcal{A}$$

y así $\mathcal{A}$ es abstracto. Para $a \leq x \leq y \leq b$ entonces

$$[a, b] \in \mathcal{A} \Rightarrow [x, b] = [a \vee x, b \vee x] \in \mathcal{A} \rightarrow [x, y] = [x \wedge y, b \wedge y] \in \mathcal{A},$$

por lo que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo subintervalos.

$\square$

Pongamos $\mathcal{B}(A)$ el conjunto parcialmente ordenado de todos los conjuntos básicos de intervalos de A ordenados con la inclusión.

Tenemos que $\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{A}(A)$. De las definiciones se tiene que la unión arbitraria de conjuntos abstractos es abstracto al igual que la intersección arbitraria de abstractos es abstracta. Por lo tanto $\mathcal{A}(A)$ es un marco, donde el mayor elemento es $\mathcal{I}(A)$ y el menor elemento es $\mathcal{O}(A)$. Claramente éstos también son básicos y de nuevo se tiene que $\mathcal{B}(A)$ es cerrado bajo uniones arbitrarias e intersecciones arbitrarias. Como estas operaciones son meramente conjuntistas, se sigue que $\mathcal{B}(A)$ es un marco al cual llamaremos el marco *base* de A.

Dos intervalos de la forma $[a, b]$ y $[b, c]$ de A se dicen ser *colindantes*.

Definición 1.4.7. *Para una retícula A diremos que $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(A)$ es un* conjunto de congruencia *si es cerrado bajo intervalos* colindantes*, es decir,*

$$[a, b]\ [b, c] \in \mathcal{A} \Rightarrow [a, c] \in \mathcal{A},$$

para cada $a, b, c \in A$.

Denotemos por $\mathcal{C}(A)$ al conjunto de todos los conjuntos de congruencia en A. De nuevo, éste es un conjunto parcialmente ordenado, y de hecho tenemos

$$\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{A}(A).$$

La intersección arbitraria de conjuntos de congruencia es un conjunto de congruencia por lo tanto es una retícula completa sin embargo el supremo de una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(A)$ no necesariamente está en $\mathcal{C}(A)$, de hecho se tiene que

$$\bigvee \mathcal{C} \in \mathcal{B}(A).$$

Para ver que $\mathcal{C}(A)$ es un marco hay que introducir un poco más maquinaria sobre el marco $\mathcal{B}(A)$. Aquí es donde empezamos a hacer las construcciones de ciertas derivadas sobre él. Nuestros fundamentos generales afirman que como $\mathcal{B}(A)$ es un marco entonces tiene una implicación

$$(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \longmapsto (\mathcal{B} \succ \mathcal{A}).$$

A continuación la describiremos.

Lemma 1.4.8. *Sea A un idioma y considere $\mathcal{B}, \mathcal{A} \in \mathcal{B}(A)$, entonces*

$$I \in (\mathcal{B} \succ \mathcal{A}) \Longleftrightarrow (\forall\ K \subseteq I)[K \in \mathcal{B} \Rightarrow K \in \mathcal{A}],$$

para cada $I \in \mathcal{I}(A)$

Demostración. Para dos conjuntos básicos de intervalos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ sea $\mathcal{M}$ el conjunto de intervalos que cumplen la condición del lema. Veamos que $\mathcal{M}$ es abstracto.

Debemos mostrar que si
$$J \sim I \in \mathcal{M}$$
entonces $J \in \mathcal{M}$. Para esto consideremos cualquier $L \in \mathcal{B}$ tal que $L \subseteq J$, como A es modular. Como J es similar (isomorfo) a I entonces este isomorfismo nos lleva a $L \sim K \subseteq I$ para algún K. Pero $\mathcal{B}$ es abstracto y así $K \in \mathcal{B}$, y por lo tanto $K \in \mathcal{A}$. Así $I \in \mathcal{M}$ y en vista de la abstracción de $\mathcal{A}$ se sigue que $L \in \mathcal{A}$. Es decir, $J \in \mathcal{M}$. Claramente $\mathcal{M}$ es cerrado bajo subintervalos. Por lo tanto $\mathcal{M}$ es básico, por otro lado se tiene que
$$\mathcal{M} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}.$$
Considerando $I \in \mathcal{M} \cap \mathcal{B}$ y $I = K$ esto asegura
$$\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{B} \succ \mathcal{A}).$$
Para la otra contención tomemos
$$I \in (\mathcal{B} \succ \mathcal{A}) \quad K \in \mathcal{B} \quad K \subseteq I$$
y así
$$K \in \mathcal{B} \cap (\mathcal{B} \succ \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$$
es decir, $I \in \mathcal{M}$ como se deseaba.

□

En particular 1.4.8 muestra que todo conjunto básico tiene una única negación.

Ahora nos disponemos a hacer el análisis estructural de $\mathcal{C}(A)$.

Lemma 1.4.9. *Para cada retícula acotada A el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{C}(A)$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias y uniones directas.*

Demostración. Sencilla. □

Como $\mathcal{C}(A)$ tiene todos los ínfimos, éstos son las intersecciones y así es una retícula completa por lo tanto tiene todos los supremos. oObserve que
$$\mathcal{O}(A) \text{ y } \mathcal{I}(A)$$
son cerrados bajo colindancia y así son el menor elemento y el mayor elemento en $\mathcal{C}(A)$ respectivamente. Ahora para cualquier $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{C}(A)$ como se mencionó se tiene que
$$\bigcup \mathscr{A} \in \mathcal{B}(A)$$
y esta unión no necesariamente debe de estar en $\mathcal{C}(A)$. Más adelante veremos cómo convertir esta unión en un supremo de tal forma que éste viva en $\mathcal{C}(A)$.

Lemma 1.4.10. *Para una retícula A considere $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}(A)$. Entonces se tiene que*

$$(\vee) \quad [a,x],[a,y] \in \mathcal{C} \Rightarrow [a, x \vee y] \in \mathcal{C}.$$

$$(\wedge) \quad [x,b],[y,b] \in \mathcal{C} \Rightarrow [x \wedge y, b] \in \mathcal{C}$$

para todos los $a,b,x,y \in A$.

(A esta propiedad le llamaremos girar*).*

Demostración. Considere $[a,x],[a,y] \in \mathcal{C} \in \mathfrak{C}(A)$. Como $\mathcal{C}$ es cerrado bajo traslaciones tenemos

$$[y, x \vee y] = [a \vee y, x \vee y] \in \mathcal{C}.$$

Por lo tanto $[a, x \vee y] \in \mathcal{C}$ por ser $\mathcal{C}$ cerrado bajo intervalos colindantes. La otra afirmación es simétrica.

□

Veamos como surge la terminología de conjunto de congruencia. Recordemos que en 1.2.7 se introdujo el concepto de relación de congruencia en una sup-retícula. Una relación de equivalencia $\equiv$ en una sup-retícula es de congruencia si:

$$a_1 \equiv a_2$$

$$b_1 \equiv b_2$$

implica que

$$a_1 \vee b_1 \equiv a_2 \vee b_2$$

y

$$a_1 \wedge b_1 \equiv a_2 \wedge b_2.$$

Denotemos por

$$Cong(A)$$

al conjunto de todas las relaciones de congruencia en A.

Teorema 1.4.11. *Para una retícula acotada A existe una correspondencia biyectiva entre:*

$$Cong(A) \text{ y } \mathfrak{C}(A).$$

Dada por: $\equiv \longmapsto \mathcal{C}$, donde

$$[a,b] \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a \leq b \text{ y } a \equiv b$$

con invserso $\mathcal{C} \longmapsto \equiv$ *tal que*

$$a \equiv b \Leftrightarrow [a \wedge b, a \vee b] \in \mathcal{C},$$

para $a, b \in A$.

Demostración. Primero tomemos $\equiv$ una relación de congruencia en A, y consideremos el conjunto de intervalos asociado $\mathcal{C}$ dado como

$$[a, b] \in \mathcal{C}_{\equiv} \Leftrightarrow a \equiv b.$$

Veamos que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo traslaciones y así será básico. Sea $[a, b] \in \mathcal{C}$, es decir, $a \equiv b$. Entonces

$$a \vee x \equiv b \vee x$$

$$a \wedge x \equiv b \wedge x$$

pues $\equiv$ es de congruencia y así $[a \vee x, b \vee x], [a \wedge x, b \wedge x] \in \mathcal{C}_{\equiv}$. Ahora consideremos $[a, b], [b, c] \in \mathcal{C}_{\equiv}$, entonces $a \equiv b$ y $b \equiv c$ como la relación es transitiva se tiene que $a \equiv c$, es decir, $[a, c] \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C}_{\equiv}$ es cerrado bajo intervalos colindantes por lo que éste es de congruencia.

Ahora consideremos un conjunto de congruencia $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}(A)$ y pongamos $\equiv_{\mathcal{C}}$ dada por

$$a \equiv_{\mathcal{C}} b \Leftrightarrow [a \wedge b, a \vee b] \in \mathcal{C}.$$

Veamos primero que $\equiv_{\mathcal{C}}$ es de equivalencia. Claramente la relación es reflexiva y simétrica, basta ver que es transitiva. Para este fin, consideremos elementos $a, b, c \in A$ tales que

$$a \equiv_{\mathcal{C}} b \equiv_{\mathcal{C}} c.$$

Es decir

$$[a \wedge b, a \vee b], [b \wedge c, b \vee c] \in \mathcal{C}.$$

Como $a \wedge b \leq b \leq a \vee b$ entonces el intervalo $[a \wedge b, b] \in \mathcal{C}$. Y así por traslación tenemos

$$[a \wedge b \wedge c, b \wedge c] \in \mathcal{C}.$$

Así los intervalos $[a \wedge b \wedge c, b \wedge c]$ y $[b \wedge c, b \vee c]$ son colindantes por lo que $[a \wedge b \wedge c, b \vee c] \in \mathcal{C}$. Un argumento simétrico nos da $[a \wedge b \wedge c, a \vee b] \in \mathcal{C}$ por lo que $[a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c] \in \mathcal{C}$ por el lema 1.4.10. Finalmente como

$$a \wedge b \wedge c \leq a \wedge c \leq a \vee c \leq a \vee b \vee c$$

por lo que

$$[a \wedge c, a \vee c] \in \mathcal{C}$$

Para terminar esta parte de la prueba veamos que en efecto $\equiv_{\mathcal{C}}$ es de congruencia. Veamos que es de $\vee$-congruencia, la otra propiedad es similar. Sean

$$a_1 \equiv_{\mathcal{C}} a_2$$

y

$$b_1 \equiv_{\mathcal{C}} b_2.$$

Pongamos $a = a_1 \vee a_2$ y $b = b_1 \vee b_2$. Veamos que

$$a \equiv_{\mathcal{C}} b.$$

Por un lado tenemos que

$$[a_1 \wedge a_2, a_1 \vee a_2], [b_1 \wedge b_2, b_1 \vee b_2] \in \mathcal{C}.$$

Como $\mathcal{C}$ es cerrado bajo subintervalos, se tiene que $[a_i, a] \in \mathcal{A}$ y $[b_i, b] \in \mathcal{A}$ para $i = 1, 2$. Pero si trasladamos dos veces obtenemos $[a_i \vee b, a \vee b] \in \mathcal{A}$ y $[a_i \vee b_i, a_i \vee b] \in \mathcal{C}$. Así

$$[a_i \vee b_i, a \vee b] \in \mathcal{C}$$

por colindancia. Usando el lema 1.4.10 anterior, de nuevo obtenemos que

$$[(a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2), (a_1 \vee b_1) \vee (a_2 \vee b_2)] = [a \wedge b, a \vee b] \in \mathcal{C}.$$

Así

$$a \equiv_{\mathcal{C}} b.$$

Por último veamos que

$$\equiv \longmapsto \mathcal{A}_{\equiv} \longmapsto \equiv_{\mathcal{C}_{\equiv}}$$

y

$$\mathcal{C} \longmapsto \equiv_{\mathcal{C}} \longmapsto \mathcal{C}_{\equiv_{\mathcal{C}}}$$

son biyecciones. Primero si notamos $a \equiv_{\mathcal{C}_{\equiv}} b \Leftrightarrow [a \wedge b, a \vee b] \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a \wedge b \equiv a \vee b$. Por lo que $a \equiv b \Rightarrow a \equiv_{\mathcal{C}_{\equiv}} b$ la otra implicación es porque si $a \equiv_{\mathcal{C}_{\equiv}} b$ entonces para cada x tal que

$$a \wedge b \leq x \leq a \vee b,$$

tenemos

$$x = x \vee (a \wedge b) \equiv x \vee (a \vee b) = a \vee b.$$

Por lo que

$$a \equiv a \vee b \equiv b$$

con $x = a$ y $x = b$. Por lo que $a \equiv b$. Para la otra asignación notemos que

$$[a, b] \in \mathcal{C}_{\equiv_{\mathcal{C}}} \Leftrightarrow a \equiv b \Leftrightarrow [a, b] = [a \wedge b, a \vee b] \in \mathcal{A}.$$

Entonces $\mathcal{C}_{\equiv_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$. $\square$

Veamos que en efecto $\mathcal{C}(A)$ es un marco. Para esto primero notemos que como este conjunto es cerrado bajo intersecciones arbitrarias, entonces dado cualquier intervalo $[a, b]$ se tiene que existe el menor conjunto de congruencia $\mathcal{C}$. Es decir existe el menor cociente de A tal que $[a, b]$ se colapsa allí. Esto define obviamente una operación (un operador cerradura estable) en A, pero ahorita por un momento queremos ver esto de la manera más reticular posible, es decir con conjuntos de congruencia. Por eso ponemos:

Definición 1.4.12. *Para cada retícula acotada A y cada par de intervalos $[a, b] \in \mathcal{I}(A)$, sea $\langle a, b\rangle$ el menor conjunto de congruencia $\mathcal{A}$ tal que $[a, b] \in \mathcal{A}$.*

Es claro entonces que $\mathcal{O}(A) = \langle a, b\rangle$ para cada $a \in A$ y $\mathcal{I}(A) = \langle \underline{0}, \bar{1}\rangle$, ahora notamos que para cada $[a, b] \in \mathcal{A}$, entonces $\langle a, b\rangle \subseteq \mathcal{A}$ y viceversa. Por lo que

$$\mathcal{A} = \bigvee \left\{\langle a, b\rangle \mid [a, b] \in \mathcal{A}\right\}.$$

Este supremo no necesariamente es una unión (de hecho no tiene sentido ese supremo para nosotros aún, lo describiremos abajo), para esto primero veamos una descripción más concreta de $\langle a, b\rangle$.

Definición 1.4.13. *Para cada retícula A acotada y cada $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$ sea*

$$\mathcal{C}\, ng(\mathcal{B})$$

el conjunto de intervalos $[a, b]$ que pueden ser partidos *dentro de $\mathcal{B}$. Es decir, existe una sucesión finita*

$$a = x_0 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots \leq x_{m+1} = b$$

tal que $[x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{B}$ para cada $0 \leq i \leq m$.

Obviamente tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}\, ng(\mathcal{B})$ usando la partición trivial de cada intervalo de $\mathcal{B}$. Veamos que $\mathcal{C}\, ng(\_)$ define una operación en $\mathcal{B}(A)$. Primero observemos que dados $[a, b] \in \mathcal{C}\, ng(\mathcal{B})$, $y \in A$ y suponga que tenemos la partición del intervalo anterior

$$a = x_0 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots \leq x_{m+1} = b.$$

Es decir, $[x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{B}$. Entonces como $\mathcal{B}$ es básico se tiene $[x_i \wedge y, x_{i+1} \wedge y] \in \mathcal{B}$ entonces la nueva partición

$$a \wedge y = x_0 \wedge y \leq \ldots \leq x_i \wedge y \leq \ldots \leq x_{m+1} \wedge y = b \wedge y$$

asegura que $[a \wedge y, b \wedge y] \in \mathcal{C}\, ng(\mathcal{B})$. Similarmente se tiene $[a \vee y, b \vee y] \in \mathcal{C}\, ng(\mathcal{B})$. Este argumento muestra que $\mathcal{C}\, ng(\mathcal{B}) \in \mathcal{B}(A)$.

Lemma 1.4.14. *Para cada retícula A acotada y cada $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$, el conjunto básico $\mathcal{C}ng(\mathcal{B})$ es el menor conjunto de congruencia que contiene a $\mathcal{B}$.*

Demostración. Ya tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}ng(\mathcal{B}) \in \mathcal{B}(A)$. Es claro que $\mathcal{C}ng(\mathcal{B})$ es cerrado bajo intervalos colindantes por lo que $\mathcal{C}ng(\mathcal{B}) \in \mathcal{C}(A)$. Por último dado otro conjunto de congruencia $\mathcal{B}'$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Sea $[a, b] \in \mathcal{C}ng(\mathcal{B})$, consideremos su partición $a = x_0 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots \leq x_{m+1} = b$ con $[x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ para cada $0 \leq i \leq m$. Como $\mathcal{B}'$ es cerrado bajo intervalos colindantes de donde se concluye $[a, b] \in \mathcal{B}'$ como se deseaba. □

Con esto en mente tenemos.

Teorema 1.4.15. *Para cada retícula A la operación $\mathcal{C}ng$ en $\mathcal{B}(A)$ es un núcleo con conjunto de puntos fijos $\mathcal{C}(A)$.*

Demostración. Tenemos que $\mathcal{C}ng$ es inflatoria y monótona, además $\mathcal{C}ng(\mathcal{B}) \in \mathcal{C}(A)$ para cada $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$. ahora recordemos que dado cualquier $\mathcal{C} \in \mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intervalos colindantes por lo que $\mathcal{C}ng(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, es decir,

$$\mathcal{B} \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \mathcal{C}ng(\mathcal{B}) = \mathcal{B},$$

para cada $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$. En particular $\mathcal{C}ng$, es un operador de cerradura en $\mathcal{B}(A)$ con conjunto de puntos fijos $\mathcal{C}(A)$. Basta observar que

$$\mathcal{C}ng(\mathcal{A}) \cap \mathcal{C}ng(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}ng(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$. Para este fin, considere un intervalo $[a, b] \in \mathcal{C}ng(\mathcal{A}) \cap \mathcal{C}ng(\mathcal{B})$. Como $[a, b] \in \mathcal{C}ng(\mathcal{A})$ entonces existe una partición finita

$$a \leq \ldots \leq x \leq y \leq \ldots \leq b$$

donde $[x, y] \in \mathcal{A}$ para cada parte. Es decir, $[x, y] \to [a, b] \in \mathcal{C}ng(\mathcal{B})$, por lo que $[x, y] \in \mathcal{C}ng(\mathcal{B})$ y esta parte $[x, y]$ tiene una partición:

$$x \leq \ldots \leq u \leq v \leq \ldots \leq y,$$

donde $[u, v] \in \mathcal{B}$ para cada parte. Así $[u, v] \to [x, y] \in \mathcal{A}$, es decir, $[u, v] \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Continuando todas estas particiones tenemos $[a, b] \in \mathcal{C}ng(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ como se deseaba.

□

De este resultado y por la teoría desarrollada en la primera sección tenemos que $\mathcal{C}(A)$ es un marco. De hecho tenemos el cociente

$$\mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(A)$$

$$\mathcal{B} \longmapsto \mathcal{C}ng(\mathcal{B})$$

Resumiendo:

Proposición 1.4.16. *Sea A una retícula acotada entonces*

1. *Para cada $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$ el conjunto $\mathcal{C}ng(\mathcal{B})$ es el menor conjunto de congruencia que contiene a $\mathcal{B}$.*
2. *$\mathcal{C}ng \in N(\mathcal{B}(A))$.*
3. *$\mathcal{B}(A)_{\mathcal{C}ng} = \mathcal{C}(A)$.*

□

Este resultado también muestra, en vista de 1.4.11, que $Cong(A)$ es un marco, y a su vez

$$\bigvee \mathscr{A} = \mathcal{C}ng(\bigcup \mathscr{A})$$

para cada $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{C}(A)$. En particular cada intervalo nos define un conjunto de congruencia $\langle a, b \rangle$, de hecho:

Lemma 1.4.17. *Para cada retícula A acotada y cada intervalo $[a, b]$ de A el conjunto de congruencia asociado $\langle a, b \rangle$ es compacto en $\mathcal{C}(A)$.*

Demostración. Consideremos una familia de conjuntos de congruencia $\mathcal{X}$ tal que

$$\langle a, b \rangle \subseteq \bigvee \mathcal{X}.$$

Debemos exhibir una subfamilia finita $\mathcal{X}_1 \ldots \mathcal{X}_m \in \mathcal{X}$ tal que

$$\langle a, b \rangle \subseteq \mathcal{X}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{X}_m = \mathcal{X}^m.$$

Para esto sea $\mathcal{Y}$ la familia de todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{X}$, entonces $\bigvee \mathcal{X} = \bigvee \mathcal{Y} = \bigcup \mathcal{Y}$, donde la segunda igualdad se tiene puesto que $\mathcal{Y}$ es dirigido. Así tenemos que

$$\langle a, b \rangle \subseteq \bigcup \mathcal{Y},$$

por lo que

$$[a, b] \in \bigcup \mathcal{Y}.$$

Esto nos da

$$[a, b] \in \mathcal{Y},$$

es decir

$$\langle a, b \rangle \subseteq \mathcal{X}^m,$$

para algún $\mathcal{X}^m \in \mathcal{Y}$. □

En vista de que cada $\mathcal{C} \in \mathcal{C}(A)$ es el supremo de $\langle a, b \rangle \subseteq \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}(A)$, deducimos:

Corolario 1.4.18. *Para cada retícula acotada A, $\mathcal{C}(A)$ es compactamente generada ($\bigvee$-generada por sus elementos compactos).*

□

Como $\mathcal{C}(A)$ es un marco veamos qué sucede con la implicación.

Corolario 1.4.19. *Para cada retícula acotada se tiene*

$$(\mathcal{B} \succ \mathcal{C}) \in \mathcal{C}(A)$$

para cada $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$ y cada $\mathcal{C} \in \mathcal{C}(A)$.

Demostración. Pongamos

$$\mathcal{X} = (\mathcal{B} \succ \mathcal{C}).$$

Basta mostrar que

$$\mathcal{C}ng(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$$

es cierta. Dado que

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$$

se tiene

$$\mathcal{C}ng(\mathcal{X}) \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}ng(\mathcal{X}) \cap \mathcal{C}ng(\mathcal{B}) \quad \mathcal{C}ng(\mathcal{X} \cap \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}ng(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$$

de donde se sigue que

$$\mathcal{C}ng(\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{B} \succ \mathcal{C}) = \mathcal{X}.$$

□

A continuación introduciremos el subconjunto clave para considerar todas las posibles congruencias sobre el idioma A en juego.

Definición 1.4.20. *Un conjunto básico $\mathcal{B}$ es* laxo *si*

$$(\forall x \in X)[[a, x] \in \mathcal{B} \Rightarrow [a, \bigvee X] \in \mathcal{B}]$$

para cada $a \in A$ y $X \subseteq [a, \bar{1}]$.

Denotemos por $\curlyvee(A)$ al conjunto de todos los conjuntos laxos en A.

Definición 1.4.21. *Un conjunto $\mathcal{D}$ básico en A es de* división *si es de congruencia y laxo.*

Denotemos por $\mathcal{D}(A)$ al conjunto de todos los conjuntos de división sobre A. Noten que de las definiciones se tiene

$$\mathcal{C}(A) \cap \curlyvee(A) = \mathcal{D}(A).$$

Primero notamos que

Lemma 1.4.22. *Para cada idioma A se tiene que*

$$(\mathcal{B} \succ \mathcal{D}) \in \mathcal{D}(A),$$

para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$ y todo $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(A)$.

Demostración. Pongamos

$$\mathcal{X} = (\mathcal{B} \succ \mathcal{D})$$

para un conjunto básico $\mathcal{B}$ dado y un conjunto $\mathcal{D}$ de división. Por 1.4.20, como los conjuntos de división son de congruencia, se tiene que $\mathcal{X} \in \mathcal{C}(A)$. Por lo que basta ver que $\mathcal{X}$ es laxo.

Para este fin, tomemos cualquier $a \in A$ y cualquier $X \subseteq A$ tales que

$$[a, x] \in \mathcal{X}$$

para cada $x \in \mathcal{X}$. Sabemos $\mathcal{X}$ es de congruencia, entonces es cerrado bajo giros por lo que a X lo podemos suponer dirigido. Así consideramos elementos

$$a \leq y \leq z \leq \bigvee X$$

tales que $[y, z] \in \mathcal{B}$. Entonces por 1.4.8, basta probar que $[y, z] \in \mathcal{D}$.

Considere un elemento arbitrario $x \in X$ entonces

$$a \leq y \wedge x \leq z \wedge x \leq x$$

con $[y \wedge x, z \wedge x] \in \mathcal{B}$. Por lo tanto

$$[y, z \wedge x \vee y] \in \mathcal{D},$$

pues $[a, x] \in \mathcal{X}$ usando que

$$(y \vee x) \wedge z = y \vee (x \wedge z)$$

por modularidad. En vista de que X es dirigido tenemos

$$\bigvee \{y \vee x \wedge z \mid x \in X\} = y \vee (\bigvee X) \wedge z = z$$

usando la ley distributiva para idiomas. Por lo tanto obtenemos

$$[y, z] = [y, y \vee (\bigvee X) \wedge z] \in \mathcal{D}.$$

$\square$

De aquí se concluye que la negación de cualquier conjunto básico es un conjunto de división.

Lo anterior muestra que $\mathcal{D}(A)$ tiene implicación y claramente es una retícula completa (es cerrada bajo intersecciones arbitrarias). Por lo tanto, en vista de 1.1.1 se tiene:

Teorema 1.4.23. *Si A es un idioma entonces*

$$\mathcal{D}(A)$$

es un marco.

$\square$

Demos una descripción más explícita de lo que está sucediendo. En vista de que $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{B}(A)$ es un marco, se tiene que todo conjunto básico está contenido en un conjunto de división. Denotemos por $\mathcal{D}vs(\mathcal{B})$ al menor conjunto de división que contiene a $\mathcal{B}$.

Lemma 1.4.24. *Si A es un idioma entonces la operación $\mathcal{D}vs$ es un núcleo sobre el marco $\mathcal{B}(A)$.*

Demostración. Tomemos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}(A)$ pongamos

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}\, vs(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2).$$

Por construcción se tiene

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{D}.$$

Entonces

$$\mathcal{B}_1 \subseteq (\mathcal{B}_2 \succ \mathcal{D}).$$

Así por 1.4.22 se tiene $(\mathcal{B}_2 \succ \mathcal{D}) \in \mathcal{D}(A)$, por lo que $\mathcal{D}\, vs(\mathcal{B}_1) \subseteq (\mathcal{B}_2 \succ \mathcal{D})$, por lo que $\mathcal{D}\, vs(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{D}$. De esto se obtiene

$$\mathcal{B}_2 \subseteq (\mathcal{B}_2 \succ \mathcal{D}).$$

Por lo que $\mathcal{D}\, vs(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{D}(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{D}$. La otra contención es trivial y de la construcción es claro que $\mathcal{D}\, vs$ es inflatoria e idempotente.

$\square$

Claramente se tiene que

$$\mathcal{C}ng \leq \mathcal{D}vs$$

y estos dos núcleos determinan dos cocientes en $\mathcal{B}(A)$

$$\mathcal{B}(A) \xrightarrow{\mathcal{C}ng} \mathcal{C}(A) \xrightarrow{\mathcal{D}\, vs} \mathcal{D}(A)$$

A su vez noten que a un idioma le hemos asociado varias estructuras. En particular le asociamos dos marcos $\mathcal{D}(A)$ y $N(A)$. Veamos que estas construcciones están relacionadas. Lo que necesitamos es una forma de relacionarlas para esto introducimos:

Definición 1.4.25. *Sea A un idioma, para un conjunto básico $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$ definimos su* derivada asociada

$$|\mathcal{B}|$$

como

$$|\mathcal{B}|(a) = \bigvee X \text{ donde } x \in X \iff [a, x] \in \mathcal{B}$$

con $a \in A$

El nombre que le dimos a esta función no es coincidencia pues claramente se tiene que $a \leq |\mathcal{B}|(a)$ y si $a \leq b$ entonces para cualquier $x \in X$ con $[a, x] \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$[b, b \vee x] = [a \vee b, b \vee x] \in \mathcal{B},$$

por lo que

$$x \leq b \vee x \leq |\mathcal{B}|(b).$$

Y así $|\mathcal{B}|$ es monótona por lo tanto es una derivada, ahora observe que el conjunto $\mathcal{B}$ es laxo si

$$[a, b] \in \mathcal{B}$$

para cada $a \in A$ con $b = |\mathcal{B}|(a)$. Esto sugiere:

Teorema 1.4.26. *Sea A un idioma. Existe una correspondencia biyectiva entre:*

1. *$\curlyvee(A)$ conjuntos laxos de A.*
2. *$S(A)$ derivadas estables sobre A.*

Dada por

$$\bigcurlyvee(A) \longleftrightarrow S(A)$$

$$\mathcal{B} \longmapsto s_{\mathcal{B}} = |\mathcal{B}|$$

$$[a, b] \in \mathcal{B}_s \Leftrightarrow b \leq s(a) \quad \mathcal{B}_s \longleftarrow s$$

Demostración. Procedemos por etapas. Primero tomemos un conjunto laxo de A, $\mathcal{B}$ junto con su derivada asociada

$$|\mathcal{B}| = s_{\mathcal{B}}.$$

Veamos que ésta es estable. Para esto consideremos $a, b \in A$. En vista de la laxitud de $\mathcal{B}$ se tiene que

$$[a, s_{\mathcal{B}}(a)].$$

Pero

$$[a \wedge b, s_{\mathcal{B}}(a) \wedge b] \in \mathcal{B},$$

ya que $\mathcal{B}$ es básico y así $s_{\mathcal{B}}(a) \wedge b \leq s_{\mathcal{B}}(a \wedge b)$.

Ahora, dada una derivada estable $s \in S(A)$, sea $\mathcal{B}_s$ el conjunto dado como:

$$[a, b] \in \mathcal{B}_s \Leftrightarrow b \leq s(a).$$

Primero $\mathcal{B}_s$ es abstracto es decir,

$$[l, l \vee r] \in \mathcal{B}_s \Longleftrightarrow [l \wedge r, r] \in \mathcal{B}$$

para $l, r \in A$. Supongamos que $[l, l \vee r] \in \mathcal{B}_s$, es decir, $r \leq l \vee r \leq s(l)$. Usando la estabilidad de s se tiene que $r \leq s(l) \wedge r \leq s(l \wedge r)$, es decir $[r \wedge l, r] \in \mathcal{B}_s$. Recíprocamente, supongamos que $[r \wedge l, r] \in \mathcal{B}_s$ entonces $r \leq s(r \wedge l)$. Como es derivada se tiene que $l \leq s(l)$ y $r \leq s(l \wedge r) \leq s(l)$, por lo que $l \vee r \leq s(l)$. Es decir, $[l, l \vee r] \in \mathcal{B}_s$. Ahora veamos que $\mathcal{B}_s$ es básico. Para esto consideremos

$$a \leq c \leq d \leq b$$

entonces tal que $[a, b] \in \mathcal{B}_s$, es decir, $d \leq b \leq s(a) \leq s(c)$ por lo que $[c, d] \in \mathcal{B}_s$.

Por último, para esta etapa considere $a \in A$ y un subconjunto de $X \subseteq [a, \bar{1}]$, tal que $[a, x] \in \mathcal{B}_s$, entonces $x \leq s(a)$ para cada $x \in X$ y así $\bigvee X \leq s(a)$. Dicho de otra manera

$$[a, \bigvee X] \in \mathcal{B}_s.$$

Por lo tanto $\mathcal{B}_s$ es laxo.

Veamos que en efecto forman una biyección.

Primero

$$\mathcal{B} \longmapsto s_{\mathcal{B}} \longmapsto \mathcal{B}_{s_{\mathcal{B}}}$$

debemos mostrar que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{s_{\mathcal{B}}}$. Para este fin, considere un intervalo $[a, b] \in \mathcal{B}$ entonces de la construcción se tiene que $b \leq s_{\mathcal{B}}(a)$ es decir $[a, b] \in \mathcal{B}_{s_{\mathcal{B}}}$, recíprocamente si $[a, b] \in \mathcal{B}_{s_{\mathcal{B}}}$ entonces $a \leq b \leq s_{\mathcal{B}}(a)$ entonces por la construcción de éste se tiene que

$$[a, s_{\mathcal{B}}] \in \mathcal{B}.$$

Por lo que $[a, b] \in \mathcal{B}$ pues $\mathcal{B}$ es básico. Por lo tanto se tiene la igualdad

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{s_{\mathcal{B}}}.$$

Ahora tenemos

$$s \longmapsto \mathcal{B}_s \longmapsto s_{\mathcal{B}_s}.$$

debemos mostrar que

$$s = s_{\mathcal{B}_s}.$$

Note que de la construcción de $s_{\mathcal{B}_s}(a) = \bigvee X$, donde X es el conjunto de elementos x tales que $[a, x] \in \mathcal{B}_s$. Note que justamente uno de estos elementos es $s(a)$ por lo que $s(a) \leq s_{\mathcal{B}_s}(a)$. Pero también para cada $x \leq s(a)$, entonces $\bigvee X \leq s(a)$, por lo que $s(a) = s_{\mathcal{B}_s}(a)$ en cualquier $a \in A$. □

Corolario 1.4.27. *Sea A un idioma y considere la correspondencia anterior*

$$\curlyvee(A) \longleftrightarrow S(A).$$

Entonces un conjunto laxo $\mathcal{B}$ es de división precisamente cuando $|\mathcal{B}|$ es idempotente y así un núcleo en A.

Demostración. Supongamos que tenemos un conjunto laxo que es de división $\mathcal{B}$, es decir, es de congruencia y sea $a \in A$ cualquier elemento pongamos

$$b = s_{\mathcal{B}}(a)c = s^2_{\mathcal{B}}(a) = s_{\mathcal{B}}(b),$$

entonces $a \leq b \leq c$ la equivalencia de 1.4.26 da

$$[a, b], [b, c] \in \mathcal{B}.$$

Como $\mathcal{B}$ es de congruencia se tiene que $[a, c] \in \mathcal{B}$ lo cual da $c \leq s_{\mathcal{B}}(a) = b$ y por lo tanto $s_{\mathcal{B}}$ es un núcleo.

Recíprocamente supongamos que s es idempotente y considere $\mathcal{B}_s$. Necesitamos ver que $\mathcal{B}_s$ es cerrado bajo intervalos colindantes. Para esto considere $[a, b], [b, c] \in \mathcal{B}_s$, entonces

$$b \leq s(a)c \leq s(b).$$

De la idempotencia de s se tiene que $c \leq s(b) \leq s^2(a) = s(a)$ y así $[a, c] \in \mathcal{B}_s$. □

Teorema 1.4.28. *Sea A un idioma.*

1. *Para cada $\mathcal{B} \in \curlyvee(A)$ la derivada $|\mathcal{B}|$ es estable.*

2. *Para cada $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}(A)$ la derivada $|\mathcal{C}|$ es un prenúcleo.*

3. *Para cada $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(A)$ con $\mathcal{C} = \mathfrak{C}ng(\mathcal{B})$ la derivada $|\mathcal{B}|$ y el prenúcleo $|\mathcal{C}|$ tienen el mismo idempotente asociado. En particular $|\mathcal{B}|$ es un derivado.*

4. *Para cada $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(A)$, la derivada $|\mathcal{D}|$ es un núcleo.*

Demostración. (1) Suponga que $\mathcal{B}$ es laxo y considere la derivada asociada $d = |\mathcal{B}|$. Para cada elemento $a \in A$ se tiene que

$$[a, d(a)] \in \mathcal{B},$$

y así para cada $a, b \in A$ se tiene que

$$[a \wedge b, d(a) \wedge b] \in \mathcal{B},$$

pues $\mathcal{B}$ es básico. Esto da

$$d(a) \wedge b \leq d(a \wedge b).$$

(2)
Pongamos $d' = |\mathcal{C}|$. Sabemos que d' es una derivada, veamos que

$$d'(a \wedge b) \geq d'(a) \wedge d'(b),$$

para cualesquiera $a, b \in A$.

Considere los siguientes subconjuntos de A

$$X = \{x \in A \mid [a, x] \in \mathcal{C}\}$$

$$Y = \{y \in A \mid [b, y] \in \mathcal{C}\}$$

entonces

$$d'(a) = \bigvee X d'(b) = \bigvee Y.$$

En vista de que $\mathcal{C}$ es de congruencia se tiene que X y Y son dirigidos por 1.4.10. Entonces utilizando la ley distributiva del idioma A, se tiene

$$d'(a) \wedge d'(b) = \bigvee \{x \wedge y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

De nuevo como $\mathcal{C}$ es de congruencia se tiene que

$$[a \wedge b, a \wedge y] \in \mathcal{C}$$

para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$. Así

$$x \wedge y \leq d'(a \wedge b)$$

para x, y. Entonces

$$d'(a \wedge b) \leq d'(a) \wedge d'(b)$$

como se deseaba.

(3)

Pongamos $d = |\mathcal{B}|$ y $d' = |\mathcal{C}|$ por la parte (2) se tiene que d' es un prenúcleo y además para cada $a \in A$

$$d(a) \leq d'(a),$$

pues $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Ahora considérese cualquier $[a, x] \in \mathbb{C}ng(\mathcal{B})$. Existe una partición finita

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_l = x$$

tal que $[a_i, a_{i+1}] \in \mathcal{B}$ para cada $0 \leq i < l$. Pero entonces

$$a_{i+1} \leq d(a_i)$$

para cada i. Así

$$a \leq d^n(a) \leq d^\omega(a),$$

para esta $a \in A$. De esto se sigue que

$$d(a) \leq d'(a) \leq d^\omega,$$

de donde obtenemos dos cadenas descendentes de derivadas indicadas en los ordinales

$$(d^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{O}rd) \left(d'^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{O}rd\right)$$

que se intercalan y por lo tanto tienen la misma derivada cuando se estabilizan en ∞.

(4)

Considere cualquier $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(A)$ pongamos $h = |\mathcal{D}|$ y sea $a \in A$ se tiene que

$$[a, h(a)] \in \mathcal{D}$$

pues $\mathcal{D}$ es laxo. Ahora noten que

$$[a, h(a)], [h(a), h^2(a)] \in \mathcal{D},$$

aplicando dos veces este razonamiento y en vista de la colindancia se tiene que $[h(a), h^2(a)] \in \mathcal{D}$, por lo que

$$h^2(a) \leq h(a)$$

por construcción de h. Por lo tanto h es un operador de cerradura. La parte 2 afirma que es un prenúcleo y así es un núcleo.

□

Corolario 1.4.29. *Sea A un idioma, sea $\mathcal{B} \in \curlyvee(A)$ y sea $d = |\mathcal{B}|$, entonces*

$$[a, b] \in \mathcal{B} \Longleftrightarrow b \leq d(a),$$

para cada intervalo $[a, b]$.

Demostración. La implicación directa es cierta por construcción de d y es válida sea $\mathcal{B}$ laxo o no.

Y la otra implicación se tiene en vista de la laxitud de $\mathcal{B}$.

□

El siguiente teorema es fundamental para nuestra teoría.

Teorema 1.4.30. *Sea A un idioma entonces existe un isomorfismo de marcos*

$$N(A) \longleftrightarrow \mathscr{D}(A)$$

$$j \longleftrightarrow \mathcal{D}$$

dado por

$$j \longmapsto \mathcal{D}_j \quad [a, b] \quad \mathcal{D}_j \Longleftrightarrow b \leq j(a)$$

$$j \longleftarrow\!\shortmid \mathcal{D} \quad j = |\mathcal{D}|$$

Demostración. Mucho de este teorema ya está hecho, sólo hay que notar que las construcciones están en cada uno de los conjuntos indicados.

Dado un conjunto de división $\mathcal{D} \in \mathscr{D}(A)$, considere $j = |\mathcal{D}|$ entonces por 1.4.28 (4), se tiene que j es un núcleo en A y así por el corolario 1.4.29 tenemos que

$$[a, b] \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow b \leq j(a)$$

para cada intervalo.

Después pensemos en un núcleo $j \in N(A)$ y consideremos el conjunto de intervalos $\mathcal{D}_j$. Veamos que éste es de división. Para esto, como j es un prenúcleo se tiene que para cada $p, q \in A$

$$[p \wedge q, q] \in \mathcal{D}_j \Longleftrightarrow q \leq j(p \wedge q)$$

$$\Longleftrightarrow q \leq j(p) \wedge j(q)$$

$$\Longleftrightarrow q \leq j(p)$$

$$\Longleftrightarrow q \vee p \leq j(p) \Longleftrightarrow [p, p \vee q] \in \mathcal{D}_j,$$

por lo tanto es abstracto.

Para cada $a \leq x \leq y \leq b$ con $[a,b] \in \mathcal{D}_j$ se tiene que

$$y \leq b \leq j(a) \leq j(x)$$

por lo que $[x,y] \in \mathcal{D}_j$ y así $\mathcal{D}_j \in \mathcal{B}(A)$.

Para mostrar que $\mathcal{D}_j$ es de congruencia considere cualquier $[a,b],[b,c] \in \mathcal{D}_j$ entonces

$$b \leq j(a) \quad c \leq j(b)$$

entonces

$$c \leq j^2(a) = j(a)$$

y así $\mathcal{D}_j \in \mathcal{C}(A)$. Por último notemos que dado cualquier $X \subseteq A$ y $a \in A$ tales que

$$[a,x] \in \mathcal{D}_j$$

para cada $x \in X$, entonces $x \leq j(a)$ por lo que $\bigvee X \leq j(a)$ y así

$$[a, \bigvee X] \in \mathcal{D}_j.$$

Claramente de estas observaciones se tiene que estas asignaciones son inversa una de la otra, además de las construcciones cada una de éstas es monótona y así como cada uno de éstos es un marco se tiene que los morfismos son completos.

$\square$

Con esto podemos describir el núcleo $\mathcal{D}\,vs$ en $\mathcal{B}(A)$.

Teorema 1.4.31. *Sea A un idioma, considere cualquier $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$ y sea $d = |\mathcal{B}|$ entonces*

$$[a,b] \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow b \leq d^\infty(a)$$

define el menor conjunto de división que contiene a $\mathcal{B}$, es decir, $\mathcal{D} = \mathcal{D}\,vs(\mathcal{B})$.

Demostración. Por el teorema 1.4.28 (3) se tiene que d^∞ es un núcleo y así el teorema anterior nos dice que $\mathcal{D}$ definido de esta manera es de división. Para cada intervalo se tiene que

$$[a,b] \in \mathcal{B} \Rightarrow b \leq d(a) \leq d^\infty(a) \Rightarrow [a,b] \in \mathcal{D},$$

y así $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$. Ahora considere cualquier conjunto de división $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$. En vista de que $\mathcal{E}$ es laxo se tiene

$$(*) \quad (\forall a \in A)[[a, d(a)] \in \mathcal{E}]$$

por construcción de d. Veamos que

$$(\forall a \in A)[[a, d^{\infty}(a)] \in \mathcal{E}]$$

para cada ordinal α.

Por inducción. Fijemos $a \in A$.

El caso $\alpha = 0$ es claro. Para el paso inductivo tenemos que

$$[a, d^{\alpha}(a)], [d^{\alpha}(a), d^{\alpha+1}] \in \mathcal{E}$$

por hipótesis de inducción usando $(*)$ y así $[a, d^{\alpha+1}(a)] \in \mathcal{E}$ pues $\mathcal{E}$ es de congruencia. Para el caso límite tenemos que

$$[a, d^{\alpha}(a)] \in \mathcal{E}$$

por hipótesis de inducción para cada $\alpha < \lambda$. Pero

$$d^{\lambda}(a) = \bigvee \{d^{\alpha}(a) \mid \ \alpha < \lambda\}\,.$$

y como $\mathcal{E}$ es laxo se tiene que

$$[a, d^{\lambda}(a)] \in \mathcal{E}.$$

Así obtenemos que

$$[a, d^{\infty}] \in \mathcal{E},$$

de donde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ como se deseaba.

□

Con esto a la mano damos la descripción explícita que buscábamos.

Teorema 1.4.32. *Sea A un idioma. Considere cualquier conjunto básico $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$, entonces tenemos que*

$$[a, b] \in \mathcal{D}\,vs(\mathcal{B}) \iff (\forall a \leq x < b)(\exists x < y \leq b)[[x, y] \in \mathcal{B}]$$

para cada intervalo $[a, b]$.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}\,ng(\mathcal{B})$ y sea $d = |\mathcal{C}|$ su prenúcleo asociado. Por el Teorema 1.4.28 (3) se tiene que $|\mathcal{B}|$ y d tienen el mismo idempotente asociado. Así el Teorema 1.4.32 nos da

$$[a, b] \in \mathcal{D}\,vs(\mathcal{B}) \iff b \leq d^{\infty}(a),$$

para cada intervalo $[a, b]$. Primero veamos la implicación directa. Considere cualquier

$$[a, b] \in \mathcal{D}\, vs(\mathcal{B})$$

y cualquier $a \leq x < b$. Tenemos que

$$x \leq d(x) \wedge b.$$

Veamos que esta comparación es estricta. Suponga que

$$x = d(x) \wedge b,$$

veamos que

$$x = d^{\alpha}(x) \wedge b$$

para cada ordinal α. Viendo esto se tendría que

$$b \leq d^{\infty}(a) \wedge b \leq d^{\infty}(x) \wedge b = x$$

lo cual es un absurdo. Procedemos por inducción sobre α.

El caso base es trivial. Para el paso inductivo se tiene que

$$d(x) = d(d^{\alpha}(x) \wedge b) = d^{\alpha+1}(x) \wedge d(b),$$

donde en la primera igualdad usamos la hipótesis de inducción, entonces

$$x = d(x) \wedge b = d^{\alpha+1}(x) \wedge b$$

como se quería.

Para el caso límite tenemos

$$d^{\lambda}(x) = \bigvee \{d^{\alpha}(x) \mid \alpha < \lambda\}$$

para λ un ordinal límite. Entonces

$$d^{\lambda}(x) \wedge b = \bigvee \{d^{\alpha}(x) \mid \alpha < \lambda\} \wedge b = \bigvee \{d^{\alpha}(x) \wedge b \mid \alpha < \lambda\} = x$$

usando la hipótesis de inducción y la ley distributiva en el idioma A. Lo cual da el resultado.

De esto tenemos que

$$x < d(x) \wedge b = (\bigvee Z) \wedge b \text{ donde } z \in Z \Longleftrightarrow [x, z] \in \mathcal{C}.$$

Como $\mathcal{C}$ es de congruencia sabemos que Z es dirigido por 1.4.10. Y así

$$x < \bigvee \{z \wedge b \mid z \in Z\},$$

por lo que

$$x < z \wedge b \leq z.$$

En particular

$$[x, z \wedge b] \in \mathcal{C},$$

para algún $z \in Z$. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ se tiene que

$$x < y \leq z \wedge b \leq b$$

con $[x, y] \in \mathcal{B}$ como se quería.

($\Leftarrow$). Suponga que la condición derecha del teorema es cierta para el intervalo $[a, b]$. Sea

$$c = d^{\infty}(a),$$

debemos hacer ver que $b \leq j$. Note que $d(c) = c$. Sea

$$x = b \wedge c \quad \text{así } a \leq x \leq b.$$

Si mostramos que $x = b$ habremos terminado. Por contradicción suponga que $x < b$. Tenemos que

$$a \leq x < y \leq b \text{ tal que } [x, y] \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$$

y así $y \leq d(x)$. Pero

$$d(x) = d(b \wedge c) = d(b) \wedge d(c) = d(b) \wedge c \leq c,$$

de donde

$$y \leq d(x) \leq c,$$

y así

$$y \leq b \wedge c = x,$$

lo cual es la contradicción. $\square$

Como se verá en secciones posteriores el Teorema anterior es de suma importancia. El Teorema 1.4.30 se puede mejorar recordando la definición de $\bigvee$-congruencia dada en 1.2.7 sobre un semiretícula. En el caso que tengamos un idioma A a estas congruencias les llamaremos *idiomáticas*. Inmediatamente después de esta definición en 1.2.8 se definió el concepto de selectivo y se observo que éstos son derivadas idempotentes. De hecho probamos que éstas están en biyección con las $\bigvee$-congruencias. En nuestro caso particular, denotemos por $\mathcal{D}\,ong(A)$ al conjunto de todas las relaciones de congruencia idiomáticas sobre A. Es fácil ver que $\mathcal{D}ong(A)$ es un retícula completa. Como en la prueba después de 1.2.8, dada una relación $\equiv \in \mathcal{D}ong(A)$ pongamos

$$j(a) = \bigvee \{x \in A \mid x \equiv a\}.$$

Este operador es una derivada idempotente. Además

$$\bigvee X \equiv a,$$

donde

$$X \in X \iff x \equiv a.$$

Así X es dirigido y noten que simplemente renombramos

$$j(a) = \bigvee X,$$

por lo que usando la ley distributiva para idiomas se tiene que

$$j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b),$$

por lo que j es un núcleo en A. Por lo que el siguiente resultado no es sorpresa.

Teorema 1.4.33. *Para cada idioma A existen isomorfismos canónicos:*

$$\mathcal{D}ong(A) \longleftrightarrow N(A) \longleftrightarrow \mathcal{D}(A)$$

dadas por

$$(\equiv \longmapsto j) \quad j(a) = \bigvee \{x \in A \mid x \equiv a\} \quad (\equiv \longleftarrow j) \quad a \equiv b \iff j(a) = j(b)$$

$$j(a) = \bigvee \{x \in A \mid [a, x] \in \mathcal{D}\} \; (j \longleftarrow \mathcal{D}) \quad [a, b] \in \mathcal{D} \iff b \leq j(a) \quad (j \longmapsto \mathcal{D})$$

Demostración. Basta probar el lado derecho de las biyecciones, de lo mencionado arriba se tiene que cada relación en $\mathcal{D}ong(A)$ define un núcleo y dado un núcleo como en la prueba de 1.2.9 es fácil ver que esta relación $a \equiv b \iff j(a) = j(b)$ es idiomática, que estas dos asignaciones forman una biyección es claro de las definiciones, más aún, la estructura reticular de $N(A)$ convierte a $\mathcal{D}\,ong(A)$ en una retícula completa de tal manera que estas asignaciones constituyen un isomorfismo en Frm. $\square$

Sabemos que $\mathcal{B}(A)$ es un marco, este tiene su implicación $(\_ \succ \_)$ y también sabemos que $S(A)$ tiene una implicación parcial y ésta es la implicación en $N(A)$, $(\_ \succ \_)$. Veamos que éstas interaccionan de forma agradable.

Lemma 1.4.34. *Sea A un idioma, consideremos $\mathcal{B} \in \curlyvee(A)$ y $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(A)$ que por 1.4.28 se corresponden con $f = |\mathcal{B}| \in S(A)$ y $j = |\mathcal{D}| \in N(A)$. Entonces el conjunto de división $(\mathcal{B} \succ \mathcal{D})$ corresponde al núcleo $(f \succ j) \in N(A)$, es decir, $[a,b] \in (\mathcal{B} \succ \mathcal{D}) \Leftrightarrow b \leq (f \succ j)(a)$.*

Demostración. Pongamos $k = (f \succ j)$ y sea l el núcleo asociado a $(\mathcal{B} \succ \mathcal{D})$. Veamos que $k = l$, para esto utilicemos 1.4.8. Sea $a \in A$, entonces $a \leq f(a) \wedge l(a) \leq l(a)$ y $a \leq f(a) \wedge l(a) \leq f(a)$, es decir, $[a, l(a)] \in (\mathcal{B} \succ \mathcal{D})$ y $[a, f(a) \wedge l(a)] \in \mathcal{B}$ y así $[a, f(a) \wedge l(a)] \in \mathcal{D}$ por lo que $f(a) \wedge l(a) \leq j(a)$, es decir, $f \wedge l \leq j$ para cualquier $a \in A$ con lo que obtenemos $l \leq k$.

Para la otra comparación, tomemos cualquier $a \in A$ y considere $a \leq x \leq y \leq k(a)$ tal que $[x,y] \in \mathcal{B}$, entonces $y \leq f(x) \leq f(a)$ y así $y \leq f(a) \wedge k(a) \leq j(a) \leq j(x)$ de tal forma que $y \leq f(a) \wedge k(a) \leq j(a) \leq j(x)$, es decir, $[x,y] \in \mathcal{D}$ y en vista de 1.4.8 obtenemos $[a, k(a)] \in (\mathcal{B} \succ \mathcal{D})$ □

1.5. Derivadas zoclo, Cantor-Bendixson, Gabriel y Boyle para idiomás

En esta sección se introducen las derivadas fundamentales para un idioma A, se observarán las relaciones entre éstas, se introduce la noción de longitud y de dimensión de un idioma con respecto a una derivada, por último se mencionan resultados que serán importantes en los siguientes capítulos, cabe mencionar que algunas pruebas serán referidas a los textos [Sim14a], [Sim14e], [Sim14b] y [GS88]. Al final veremos unos ejemplos particulares de éstas en el marco de $\mathrm{R-tors}$ sobre un anillo R asociativo con uno.

Definición 1.5.1. *Sea A un idioma y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ conjuntos básicos, pongamos $\mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ el conjunto de intervalos $[a,b]$ tal que para todo $a \leq x \leq b$ se tiene que $[a,x] \in \mathcal{A}$ ó $[x,b] \in \mathcal{B}$.*

Lema 1.5.2. *Sea A un idioma, entonces el conjunto $\mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es básico para todos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es abstracto, para esto considere $l, r \in A$ e intervalos canónicos $I = [l, l \vee r]$ y $[l \wedge r, r] = J$ verifiquemos que

$$I \in \mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Leftrightarrow J \in \mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Supongamos que $I \in \mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, consideremos $l \wedge r \leq x \leq r$ en J entonces $l \leq l \vee x \leq l \vee r$ de tal forma que $[l, l \vee x]\mathcal{A}$ o $[l \vee x, l \vee r] \in \mathcal{B}$, pues $I \in \mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, de donde $[l \wedge r, (l \vee x) \wedge r] \in \mathcal{A}$ ó $[(l \vee x) \wedge r, r] \in \mathcal{B}$ pues los conjuntos son básicos y así cerrados bajo traslaciones, pero en vista de la modularidad obtenemos, $(l \vee x) \wedge r = (x \vee l) \wedge r = x \vee (l \vee r) = x$ y así $[l \wedge r, x] \in \mathcal{A}$ o $[x, r] \in \mathcal{B}$. Ahora supongamos que $J \in \mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y considere $l \leq x \leq l \vee r$ en I, entonces $l \wedge r \leq x \wedge r \leq r$ lo cual por la suposición da $[l \wedge r, x \wedge r] \in \mathcal{A}$ o $[x \wedge r, x] \in \mathcal{B}$, de donde $[l, l \vee (x \wedge r)] \in \mathcal{A}$ o $[l \vee (x \wedge r), l \vee r] \in \mathcal{B}$ pues los conjuntos son básicos , de nuevo por modularidad obtenemos $l \vee (x \wedge r) = l \vee (r \wedge x) = (l \vee r) \wedge x = x$, es decir, $[l, x] \in \mathcal{A}$ o $[x, l \vee r] \in \mathcal{B}$, como se deseaba.

Por otro lado para ver que $\mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es cerrado bajo subintervalos, considere $[a, b] \in \mathcal{M}id(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y cualquier $a \leq c \leq x \leq d \leq b$ entonces $[a, x] \in \mathcal{A}$ o $[x, b] \in \mathcal{B}$ por hipótesis de $[a, b]$ y como los conjuntos son básicos trasladando por c y por d respectivamente obtenemos $[c, x] \in \mathcal{A}$ o $[x, d] \in \mathcal{B}$.

□

Ahora considere el caso particular $\mathcal{M}id(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ y $\mathcal{M}id(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, es decir, un intervalo $[a, b] \in \mathcal{M}id(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ si para todo $a \leq x \leq b$ $a = x$ o $[x, b] \in \mathcal{B}$, de igual manera $[a, b] \in \mathcal{M}id(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ si para todo $a \leq x \leq b$ $[a, x] \in \mathcal{B}$ ó $[x, b] \in \mathcal{B}$.

Definición 1.5.3. *Pongamos* $\mathcal{C}rt(\mathcal{B}) := \mathcal{M}id(\mathcal{O}, \mathcal{B})$*, a este conjunto le llamaremos el conjunto de intervalos* $\mathcal{B}$-críticos *y* $\mathcal{S}mp(\mathcal{B}) := \mathcal{M}id(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ *le llamaremos el conjunto de intervalos* $\mathcal{B}$-simples.

De 1.5.2 obtenemos:

Corolario 1.5.4. *Sea A un idioma y $\mathcal{B}$ cualquier conjunto básico en A, entonces los conjuntos $\mathcal{C}rt(\mathcal{B})$ y $\mathcal{S}mp(\mathcal{B})$ son básicos.*

Definición 1.5.5. *Sea A un idioma, un intervalo $[a, b]$ es* simple *si* $[a, b] \in \mathcal{S}mp := \mathcal{S}mp(\mathcal{O})$

De las definiciones se tiene que $\mathcal{C}rt(\mathcal{O}) = \mathcal{S}mp$ y además para cualquier $\mathcal{B}$ básico $\mathcal{C}rt(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{S}mp(\mathcal{B})$. Por otro lado estos nuevos conjuntos básicos definen dos derivadas en el marco base de cualquier idioma, $\mathcal{C}rt \leq \mathcal{S}mp \in D(\mathcal{B}(A))$ de hecho:

Proposición 1.5.6. *Sea A un idioma, entonces $\mathcal{C}rt \in P(\mathcal{B}(A))$ y $\mathcal{S}mp \in S(\mathcal{B}(A))$.*

Demostración. Para $\mathcal{C}rt$ basta ver que $\mathcal{C}rt(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{C}rt(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{C}rt(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2))$ para cualesquiera $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}(A)$. Sea $[a, b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{C}rt(\mathcal{B}_2)$ y tomemos $a < x \leq b$, por lo que $[x, b] \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, por lo que $\mathcal{C}rt$ es un prenúcleo. Para $\mathcal{S}mp$ necesitamos verificar que $\mathcal{S}mp(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{S}mp(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$, con $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}(A)$. Considere $[a, b] \in \mathcal{S}mp(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{B}_2$ y cualquier $a \leq x \leq b$ entonces $[a, x] \in \mathcal{B}_1$ ó $[x, b] \in \mathcal{B}_1$ y como $[a, b] \in \mathcal{B}_2$ entonces $[a, x], [x, b] \in \mathcal{B}_2$, es decir, $[a, x] \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ ó $[x, b] \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, lo cual prueba lo requerido. □

A continuación introducimos otros conjuntos de intervalos fundamentales.

Definición 1.5.7. *Sea A un idioma y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ conjuntos básicos, pongamos $\mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$ el conjunto de intervalos $[a,b]$ tal que para todo $a \leq x \leq b$ existe $a \leq y \leq b$ tal que $[a, x \wedge y] \in \mathcal{A}$ y $[x \vee y, b] \in \mathcal{B}$.*

Lema 1.5.8. *Sea A un idioma, entonces el conjunto $\mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es básico para todos $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es abstracto, para esto considere $l, r \in A$ e intervalos canónicos $I = [l, l \vee r]$ y $[l \wedge r, r] = J$ verifiquemos que

$$I \in \mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B}) \Leftrightarrow J \in \mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

suponga que $I \in \mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$ y sea $l \wedge r \leq x \leq r$ en J, entonces $l \leq l \vee x \leq l \vee r$ por lo que existe $l \leq u \leq l \vee r$ tal que $[l, (l \vee x) \wedge u] \in \mathcal{A}$ y $[l \vee x \vee u, l \vee r] \in \mathcal{B}$, pongamos $y = u \wedge r$ para obtener un elemento en J, de la condición para u tenemos que $[x \vee u, l \vee r] \in \mathcal{B}$ y así trasladando por r, tenemos $[(x \vee u) \wedge r, r] \in \mathcal{B}$, por modularidad de A tenemos $(x \vee u) \wedge r = x \vee (u \wedge r) = x \vee y$ y así $[x \vee y, r] \in \mathcal{B}$ y así obtenemos uno de los requerimientos. Para el otro requerimiento, de $[l, (l \vee x) \wedge u] \in \mathcal{A}$ se sigue que $[l \wedge r, (l \vee x) \wedge u \wedge r = y] \in \mathcal{A}$ pues $\mathcal{A}$ es básico, de nuevo modularidad da $(l \vee x) \wedge r = (x \vee l) \wedge r = x \vee (l \wedge r) = x$ pues $x \leq r$ y así $(l \vee x) \wedge u \wedge r = (l \vee x) \wedge r \wedge u \wedge r = x \wedge u \wedge r = x \wedge y$. Ahora suponga $J \in \mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$ y considere cualquier $l \leq x \leq l \vee r$ en I, entonces $l \wedge r \leq x \wedge r \leq r$ y así $x \wedge r \in J$ entonces existe $l \wedge r \leq u \leq r$ tal que $[l \wedge r, x \wedge r \wedge u] \in \mathcal{A}$ y $[(x \wedge r) \vee u, r] \in \mathcal{B}$, poniendo $y = l \vee u$ $[l \wedge r x \wedge u] \in \mathcal{A}$ pues $x \leq r$, por lo que $[l, l \vee (x \wedge u)] \in \mathcal{A}$, pero la modularidad de A nos lleva a $l \vee (x \wedge u) = l \vee (u \wedge x) = (l \vee u) \wedge x = x \wedge y$ por lo tanto $[l, x \wedge y] \in \mathcal{A}$, lo cual es una de las condiciones.

Para la otra condición, como $[(x \wedge r) \vee u, r] \in \mathcal{B}$ entonces $[l \vee (x \wedge r) \vee u, l \vee r] \in \mathcal{B}$ y en vista de la modularidad obtenemos $l \vee (x \wedge r) = l \vee (r \wedge x) = (l \vee r) \wedge x = x$ y así $l \vee (x \wedge r) \vee u = l \vee (x \wedge r) \vee l \vee u = x \vee y$ con lo cual obtenemos el resultado.

Resta probar que $\mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es cerrado bajo subintervalos, para este fin considere $a \leq c \leq x \leq d \leq b$ con $[a,b] \in \mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ciertamente $[a, x \wedge y] \in \mathcal{A}$ y $[x \vee y, b] \in \mathcal{B}$ para algún $a \leq y \leq b$, entonces poniendo $z = c \vee y \wedge d$ donde la modularidad nos asegura que no necesitamos los corchetes y así $[c, (x \wedge y) \vee c] \in \mathcal{A}$ y $[(x \vee y) \wedge d, d] \in \mathcal{B}$ pues estos conjuntos son básicos, de nuevo la modularidad de A nos da $x \wedge z = (c \vee (y \wedge d)) \wedge x = c \vee (y \wedge d \wedge x) = c \vee (x \wedge y)$ y $x \vee z = (c \vee (y \wedge d)) \vee x = x \vee (y \wedge d) = (x \vee y) \wedge d$ por lo tanto $[c, x \vee z] \in \mathcal{A}$ y $[x \wedge z, d] \in \mathcal{B}$. □

Definición 1.5.9. *Sea A un idioma, y $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(A)$*

1. *Un intervalo* $[a,b]$ *es* $\mathcal{B}$-complementado *si* $[a,b] \in \mathcal{N}id(\mathcal{B},\mathcal{B})$*, es decir para todo* $a \leq x \leq b$ *existe* $a \leq y \leq b$ *tal que* $[a, x \wedge y] \in \mathcal{B}$ *y* $[x \vee y, b] \in \mathcal{B}$*.*

2. *Un intervalo* $[a,b]$ *es* $\mathcal{B}$-pleno *si* $[a,b] \in \mathcal{N}id(\mathcal{O},\mathcal{B})$*, es decir, para todo* $a \leq x \leq b$ *existe* $a \leq y \leq b$ *tal que* $a = x \wedge y$ *y* $[x \vee y, b] \in \mathcal{B}$*.*

Denotemos por $\mathcal{C}mp(\mathcal{B})$ y $\mathcal{F}ll(\mathcal{B})$ a los conjuntos de intervalos B-complementados y $\mathcal{B}$-plenos respectivamente, notando que $\mathcal{C}mp(\mathcal{O}) = \mathcal{F}ll(\mathcal{O})$ éste es el conjunto de intervalos complementados, es decir cada elemento de estos intervalos tiene al menos un complemento. También note que $\mathcal{F}ll \leq \mathcal{C}mp$ determinan dos derivadas en el barco base $\mathbb{B}(A)$ y de hecho tenemos más:

Proposición 1.5.10. *Sea* A *un idioma, entonces* $\mathcal{F}ll \in P(\mathbb{B}(A))$ *y* $\mathcal{C}mp \in S(\mathbb{B}(A))$*.*

Demostración. Basta ver para el primer caso que $\mathcal{F}ll(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{F}ll(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{F}ll(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{F}ll(\mathcal{B}_2))$ para cualesquiera $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ básicos. Considere entonces $[a,b] \in \mathcal{F}ll(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{F}ll(\mathcal{B}_2)$ y $a \leq x \leq b$ entonces en particular existe $a \leq y \leq b$ tal que $x \wedge y = a$ y $[x \vee y, b]\mathcal{B}_1$, además que $y \leq y \vee x \leq b$ y $[y, b] \in \mathcal{F}ll(\mathcal{B}_2)$ pues este conjunto es básico, y así $(x \vee y) \wedge z = y$ y $[x \vee y, b = [x \vee y \vee z, b] \in \mathcal{B}_2$ para algún $y \leq z \leq b$, también tenemos que $[x \vee z, b] \in \mathcal{B}_1$ por lo que $[a \vee z, b] \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Además de $y \leq z$ se sigue $y = (y \vee x) \wedge z = y \vee (x \wedge z)$ por lo que $x \wedge z \leq y$, por lo tanto $a \leq x \wedge z \leq x \wedge y = a$ lo cual prueba lo deseado.

Para $\mathcal{C}mp$ considere cualquier $[a,b] \in \mathcal{C}mp(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{B}_2$ entonces para todo $a \leq x \leq b$ existe $a \leq y \leq b$ tal que $[a, x \wedge y] \in \mathcal{B}_1$ y $[a \vee y, b] \in \mathcal{B}_1$ y de hecho $[a, x \wedge y] \in \mathcal{B}_2$ y $[x \vee y, b] \in \mathcal{B}_2$ pues $\mathcal{B}_2$ es básico de esto se sigue que $[a, x \wedge y]\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ y $[x \vee y, b] \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ lo cual prueba lo que queríamos. $\square$

Proposición 1.5.11. *Sea* A *un idioma, entonces*

$$\mathcal{S}mp(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}mp(\mathcal{B})$$

$$\mathcal{C}rt(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}ll(\mathcal{B})$$

para cada conjunto básico $\mathcal{B} \in \mathbb{B}(A)$*.*

Demostración. Primero consideremos $[a,b] \in \mathcal{S}mp(\mathcal{B})$ y cualquier $a \leq x \leq b$ entonces $[a,x] \in \mathcal{B}$ ó $[x,b] \in \mathcal{B}$ por definición de $\mathcal{B}$-simple, poniendo $y = b$ ó $y = a$ obtenemos $[a, x \wedge y] = [a,x] \in \mathcal{B}$ y $[x \vee y, b] = [b,b] \in \mathcal{B}$ ó $[a, x \wedge y] = [a,a] \in \mathcal{B}$ y $[a \vee y, b] = [x,b] \in \mathcal{B}$, por lo tanto $\mathcal{S}mp(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}mp(\mathcal{B})$.

Para la siguiente contención, considere $[a,b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{B})$ y cualquier $a \leq x \leq b$, entonces por definición de críticos se tiene $a = x$ ó $[x,b] \in \mathcal{B}$ entonces con $y = b$ ó $y = a$ se tiene $a = x = x \wedge y$ y $[x \vee y, b] = [b,b] \in \mathcal{B}$ ó $a = y = x \wedge y$ y $[x \vee y, b] = [x,b] \in \mathcal{B}$.

$\square$

Un argumento similar muestra lo siguiente:

Proposición 1.5.12. *Para un idioma A se tiene*

$$\mathcal{M}id(\mathcal{A},\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{N}id(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

para cada par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de conjuntos básicos sobre A.

$\square$

Definición 1.5.13. *Sea A un idioma, y considere los conjuntos básicos $\mathcal{S}mp := \mathcal{S}mp(\mathcal{O})$ y $\mathcal{C}mp := \mathcal{C}mp(\mathcal{O})$, entonces por 1.4.25 tenemos las derivadas sobre A asociadas a estos, $|\mathcal{S}mp|$ y $|\mathcal{C}mp|$. Estas son la derivada zoclo, soc y la derivada de Cantor-Bendixson, cbd, note que por construcción siempre se tiene $soc \leq cdb$.*

1.5.1. Derivadas Relativas a un núcleo

Aquí introducimos una forma general de construir derivadas con respecto aún núcleo $j \in N(A)$ sobre un idioma A, es decir en vista de 1.3.11, A_j es un idioma, por lo tanto este tiene sus propias derivadas soc y cbd, veremos que el estudio de éstas dan un mejor análisis en A. Considere la situación anterior para un núcleo j sobre A, entonces por 1.2.2 y 1.3.11 como $j = j^* : A \to A_j$ es un morfismo de idiomás además tiene adjunto derecho, $j_* : A_J \to A$ que es simplemente la inclusión. Sea d^{A_j} una derivada sobre A_j, tenemos el siguiente diagrama

$$A \xrightarrow{j^*} A_j \xrightarrow{d^{A_j}} A_j \xrightarrow{j_*} A$$

entonces $j_* \cdot d^{A_j} \cdot j^*$ es una derivada en A, que se podría entender como la versión relativa a j de la derivada d^{A_j}.

Definición 1.5.14. *Sea A un idioma y j un núcleo sobre A, denotemos por $soc^{A_j} : A_j \to A_j$ la derivada zoclo en el idioma A_j, denotamos por $soc[j] = j_* \circ soc^{A_j} \circ j^*$ la derivada en A obtenida a partir de soc^{A_j}.*

Observación 1.5.15. *Inmediatamente notamos que $soc[j]$ es una derivada y además como $j^* \circ j_* = id_{A_j}$ se sigue que $soc[j]^\alpha = j_* \circ (soc^{A_j})^\alpha \circ j^*$ para todo ordinal α por lo que $soc[j]^\infty$ es idempotente, veremos que de hecho es un núcleo. Otro elemento importante que hay que destacar es, en vista de 1.4.33 al núcleo j le corresponde un único conjunto de división $\mathcal{D}_j$ en A, entonces tomando $\mathcal{S}mp(\mathcal{D}_j)$, por 1.5.4 este conjunto es básico y así genera una derivada en A, $|\mathcal{S}mp(\mathcal{D}_j)|$.*

Los siguientes lemas son sencillos de probar.

Lema 1.5.16. *Sea A un idioma y j un núcleo en A con conjunto de división asociado $\mathcal{D}_j$ entonces*

$$[j(a), j(b)] \text{ es simple en } A_j \Leftrightarrow [a, b] \in \mathcal{S}mp(\mathcal{D}_j)$$

para cada $[a, b] \in \mathcal{I}(A)$.

□

Lema 1.5.17. *Sea A un idioma y j un núcleo en A con conjunto de división asociado $\mathcal{D}_j$ entonces, $soc[j] = j \circ |\mathcal{S}mp(\mathcal{D}_j)|$.*

Los detalles de estos están en [Sim14e].
Ahora por 1.5.11 tenemos en particular

$$\mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j) \subseteq \mathcal{S}mp(\mathcal{D}_j)$$

lo cual da $|\mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)| \leq |\mathcal{S}mp(\mathcal{D}_j)|$.

Definición 1.5.18. *Sea A un idioma y j un núcleo sobre A, pongamos $crt_j = |\mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)| \leq |\mathcal{S}mp(\mathcal{D}_j)| = smp_j$*

Definición 1.5.19. *Sea A un idioma y j un núcleo sobre A, pongamos $soc_j = j \circ crt_j = j \circ |\mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)|$*

Esta es la versión *correcta* del zoclo relativo a j sobre A, el siguiente teorema que no probaremos aquí justifica esta terminología.

Teorema 1.5.20. *Sea A un idioma y considere $j \in N(A)$, entonces*

$$soc[j] = soc_j \circ j$$

□

La prueba de este teorema está en [Sim14e] 2,15. Para analizar mejor esta situación y entender lo que está sucediendo introducimos un nuevo conjunto de intervalos para un idioma A, aquí daremos más detalle, ya que ciertas construcciones son importantes.

Definición 1.5.21. *Sea A un idioma y $j \in N(A)$, un intervalo $[a, b]$ es j-*semi-crítico *si existe un subconjunto $Z \subseteq [a, b]$ con $b \leq j(\bigvee Z)$ y cada $[a, z] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$. Denotemos $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ el conjunto de todos los intervalos j-semi-críticos.*

Lema 1.5.22. *Sea A un idioma y j un núcleo sobre A, entonces para cada $a \leq b \leq c \leq j(b)$ se tiene*

$$[a, b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j) \Leftrightarrow [a, c] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$$

Demostración. Suponga que $[a,b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$, entonces $b \leq j(\bigvee Z) \leq j(b)$ para algún subconjunto $Z \subseteq [a,b]$ con $[a,z] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ para cada $z \in Z$, pero como $Z \subseteq [a,c]$ y $c \leq j(b) \leq j(\bigvee Z)$ entonces $[a,c] \in\in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$. Suponiendo la otra posición para $[a,c]$, se tiene que existe un $Y \subseteq [a,c]$ con $[a,y] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ para cada $y \in Y$ y $c \leq j(\bigvee Y) \leq j(c)$, poniendo $Z = \{y \wedge b \mid y \in Y\}$, obtenemos $Z \subseteq [a,b]$ y en vista de $\mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ es básico, se tiene que $[a,z] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ para cada $z \in Z$ y además $j(y) \leq j(c) \leq j(b)$ de tal manera que $j(z) = j(y \wedge b) = j(y) \wedge j(b) = j(y)$, lo cual nos lleva a $j(\bigvee Z) = j(\bigvee j[Z]) = j(\bigvee j[Y]) = j(\bigvee Y)$, de donde $b \leq c \leq j(\bigvee Y) = j(\bigvee Z)$, es decir, $[a,b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ □

Un corolario inmediato poniendo $c = j(b)$ es el siguiente

Corolario 1.5.23. *Sea A un idioma y j un núcleo sobre A, entonces*

$$[a,b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j) \Leftrightarrow [a,j(b)] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$$

□

Lema 1.5.24. *Sea A un idioma y considere $j \in N(A)$ entonces*

$$[a,b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j) \Rightarrow b \leq soc_j(a)$$

para cada $a \in A$

Demostración. Para cualquier $a \in A$ tenemos que por construcción de soc_j

$$soc_j(a) = j(\bigvee X) \text{ donde } x \in X \Leftrightarrow [a,x] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$$

suponiendo entonces que $[a,b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ se tiene $b \leq j(\bigvee Z)$ y así $Z \subseteq X$ de donde $b \leq j(\bigvee Z) \leq j(\bigvee X) = soc_j(a)$. □

Veamos que $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ es abstracto.

Lema 1.5.25. *Sea A un idioma entonces el conjunto $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j) \in \mathcal{A}(A)$ para cada $j \in N(A)$.*

Demostración. Considere elementos $l, r \in A$ e intervalos canónicos $I = [l, l \vee r]$ y $J = [l \wedge r, r]$, como A es modular, estos intervalos son isomorfos, sean $\phi : I \to J$ y $\psi : J \to I$ los isomorfismos canónicos, es decir, $\phi(x) = x \wedge r$ y $\psi(y) = l \vee y$, suponga entonces que $I \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$, de donde $\psi(r) = l \vee r \leq j(\bigvee Z)$ para algún $Z \subseteq I$ y $l \leq z \leq \psi(r)$ con $[l,z] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ para cada $z \in Z$, sea $Y = \phi[Z]$, entonces $y = \phi(z)$ para algún $z \in Z$ y así $l \wedge r = \phi(l) \leq y \leq r$ $[l \wedge r, y] = [l \wedge r, z \wedge r] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ pues este conjunto es básico, además

$$r \leq j(\bigvee Z) \wedge r \leq j((\bigvee Z) \wedge r) = j(\phi(\bigvee Z)) = j(\bigvee \phi[Z]) = j(\bigvee Y)$$

Para probar la otra implicación suponga que $J \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$, entonces tenemos un subconjunto $Y \subseteq [l \wedge r, r]$ y $r \leq j(\bigvee Y)$ con $[l \wedge r, y] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ para cada $y \in Y$, poniendo $Z = \psi[Y]$ de tal forma que $Z \subseteq I$ y además para cada $z \in Z$ con $y = \phi(z) \in Y$ obtenemos que $[l, z] \sim [l \wedge r, y] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ por lo que $[l, z] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$, pues este conjunto es básico en particular abstracto , finalmente $\bigvee Z = l \vee \bigvee Y$ de tal manera que $l \vee r \leq l \vee j(\bigvee Y) \leq j(\bigvee Z)$. esto prueba lo deseado. □

A continuación veremos que $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ es básico, para probar esto necesitamos la noción de *independencia* y algunos resultados, estos serán necesarios para resultados en capítulos posteriores.

Definición 1.5.26. *Sea A un idioma y sea $c \in A$, un subconjunto $X \subseteq [c, \bar{1}]$ es* independiente sobre *c si*

$$\bigvee L \wedge \bigvee R = c$$

para cada $L, R \subseteq X$ con $L \cap R = \emptyset$.

Noten que de la definición el único subconjunto con un elemento independiente sobre c es $\{c\}$, un conjunto de la forma $\{x, y\}$ es independiente sobre c si $x \wedge y = c$, al ir agregando más elementos a los conjuntos independientes la forma de visualizar lo que está sucediendo se torna cada vez más complicado, la ley distributiva para idiomas ayuda a manejar esto de maneras más amables.

Lema 1.5.27. *Sea A un idioma y sea $c \in A$. Un subconjunto $X \subseteq [c, \bar{1}]$ es independiente sobre c si y sólo si para cada $Y \subseteq X$ finito es independiente sobre c.*

Demostración. Una implicación es clara, para la otra suponga que tenemos cualquier subconjunto $Y \subseteq X$ finito, independiente sobre c y considere $L, R \subseteq X$ ajenos, pongamos

$$\mathcal{L} = \{Y \mid Y \subseteq L, Y \text{ finito }\} \quad \mathcal{R} = \{Z \mid Z \subseteq R, R \text{ finito }\}$$

con

$$L_f = \left\{\bigvee Y \mid Y \in \mathcal{L}\right\} \quad R_f = \left\{\bigvee Z \mid Z \in \mathcal{R}\right\}$$

de tal forma que

$$\bigvee L = \bigvee L_f \quad \bigvee R = \bigvee R_f$$

donde cada L_f, R_f son directos, por lo tanto

$$\bigvee L \wedge \bigvee R = \bigvee \left\{\bigvee Y \wedge \bigvee Z \mid Y \in \mathcal{L}, Z \in \mathcal{R}\right\}$$

vía dos usos de la ley distributiva en A , y como cada Z y Y son finitos y $Y \cap Z = \emptyset$ entonces $\bigvee Y \wedge \bigvee Z = c$ lo cual lleva al resultado. □

Lema 1.5.28. *Sea A un idioma, suponga que X es un subconjunto independiente sobre el elemento $c \in A$ y además*

$$z \wedge \bigvee X = z$$

para algún $z \in A - X$, entonces $X \cup \{z\}$ es independiente sobre c.

Demostración. Basta verificar por 1.5.27 que $(z \vee \bigvee L) \wedge (\bigvee R) = c$ para cada $L, R \subseteq X$ ajenos finitos, procedemos por inducción en la cardinalidad de L. El caso base $R = \emptyset$ es trivial por las condiciones sobre z en las hipótesis. Para el paso inductivo consideremos cualquier conjunto finito no vacío L ajeno a R, sea $l \bigvee L$ $r = \bigvee R$ y $s = z \vee l$ de tal forma que $l \wedge r = c$ pues X es independiente sobre c y $s \wedge r = c$ es lo que queremos concluir, de hecho es suficiente observar $s \wedge r \leq$. Considere cualquier $y \in L$, pongamos $L^- = L - \{y\}$ y $R^+ = R \cup \{y\}$ y sea $l^- = \bigvee L^-$, $r^+ = \bigvee R^+$ y $s^- = z \vee l^-$ de tal manera que $s^- \wedge r^+ = c$ se tiene por hipótesis de inducción, en vista de la modularidad obtenemos $s \wedge r \leq (y \vee s^-) \wedge r^+ = y \vee (s^- \wedge r^+) = y \vee c = y$ y así $s \wedge r \leq y \wedge r \leq l \wedge r = c$ □

Lema 1.5.29. *Para un idioma A y $c \in A$, sea $x_0, x_1, x_2 \ldots$ una lista de elementos de un conjunto numerable $X \subseteq [c, \bar{1}]$, suponga que $(x_0 \vee \ldots \vee x_i) \wedge x_{i+1} = c$ para cada i, entonces X es independiente sobre c.*

Demostración. Por inducción sobre i, ocupando el lema 1.5.28 el cual nos asegura que $x_0, x_1, x_2 \ldots x_i$ es independiente sobre c. □

Con esto a la mano podemos probar que $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ es básico, daremos la prueba ya que la técnica resulta ser de interés.

Lema 1.5.30. *Sea A un idioma. Considere cualquier núcleo j sobre A, y cualquier intervalo $[a, b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ y cualquier $a \leq c \leq b$. Entonces existe un elemento $a \leq d \leq b$ tal que:*

(1) $a = c \wedge b$.

(2) $b \leq j(c \vee d)$.

(3) $[a, d] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$.

Demostración. Como $[a, b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$, tenemos un subconjunto $Z \subseteq [a, b]$ tal que $[a, z] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ para cada $z \in Z$ y $\bigvee Z \leq b \leq j(\bigvee Z)$. Consideremos el conjunto Y tal que :

(4) $Y \subseteq Z$ (5) Y es independiente sobre a

formemos el conjunto $\mathcal{Y}$ de todos los conjuntos que satisfacen $1, 4, 5$, este conjunto no es vacío ya que $Y = \emptyset$ satisface las condiciones pues $\bigvee \emptyset = a$ visto en $[a, \bar{1}]$, noten también que por 4 cualquiera de los elementos de $\mathcal{Y}$ satisface 3, verificaremos 2 por medio de Zorn, para esto considere cualquier familia de elementos de $\mathcal{Y}$, digamos $\mathcal{Y}$ directa (si no fuera directa, consideramos su versión directa y en ésta se verifica Zorn), el conjunto $\bigcup \mathcal{Y}$ ciertamente satisface 4 y 5, para ver que también cumple 1 como $\bigvee \bigcup \mathcal{Y} = \bigvee \{\bigvee Y \mid Y \in \mathcal{Y}\}$ del lado derecho tenemos un supremo de un conjunto dirigido, entonces por la ley distributiva en el idioma A se concluye

$$c \wedge \bigvee \bigcup \mathcal{Y} = \bigvee \left\{ c \wedge \bigvee Y \mid Y \in \mathcal{Y} \right\} = a$$

por hipótesis en cada $Y \in \mathcal{Y}$ por lo tanto podemos aplicar Zorn, es decir, existe un elemento máximo Y de $\mathcal{Y}$ que satisface $1, 4$ y 5. Veamos que $d = \bigvee Y$ satisface 2, es decir, $b \leq j(c \vee d)$, pongamos $e = c \vee d$ de tal manera que $b \leq j(e)$ es lo que se desea. Mostraremos que $x \in Z \Rightarrow z \leq j(e)$ de donde $\bigvee Z \leq j(e)$ y así $b \leq j(\bigvee Z) \leq j^2(e) = j(e)$ es lo requerido. Considere entonces cualquier $z \in Z$, si $z \in Y$ entonces $z \leq d \leq e \leq j(e)$ y así basta trabajar con $z \in Z - Y$. Sea entonces $z \in Z - Y$, tenemos que $a \leq e \wedge z \leq z$ y $[a, z] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ entonces $a = e \wedge z$ ó $[e \wedge z, z] \in \mathcal{D}_j$, verifiquemos que la segunda condición es la que se tiene, supongamos que no es así es decir tenemos que $a = e \wedge z$, entonces $a \leq d \wedge z \leq e \wedge z = a$ de tal forma que $Y \cup \{z\}$ es independiente sobre a por 1.5.28 también por modularidad se tiene que:

$$c \wedge (d \vee z) \leq (d \vee z) \wedge e = d \vee (z \wedge e) = d \vee a = d$$

de tal forma que $a \leq c \wedge (d \vee z) \leq c \wedge d = a$ por lo tanto $Y \cup \{z\}$ satisface $1, 4$ y 5, esto contradice la maximalidad de Y, por lo tanto $[e \wedge z, z] \in \mathcal{D}_j$ se tiene, de donde $z \leq j(e \wedge z) \leq j(e)$ lo cual prueba lo requerido y así el lema. □

Lema 1.5.31. *Sea A un idioma, j un núcleo sobre A y $[a, b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$, entonces*

$$(i) \ \ [a, c] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j) \ \ (ii) \ [c, b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$$

para cada $a \leq c \leq b$

Demostración. Considere cualquier $a \leq c \leq b$ por1.5.30 existe $a \leq d \leq b$ tal que

(1) $a = c \wedge b$.

(2) $b \leq j(c \vee d)$.

(3) $[a, d] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$.

Verifiquemos (i), como $[a, c \vee d] \sim [c \wedge d, d] = [a, d] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$, usando 1 y 3 dos veces, por lo que $[a, c \vee d] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ pues este conjunto es abstracto por 1.5.24 y usando 2 obtenemos $c \leq c \vee d \leq b \leq j(c \vee d)$, de donde se sigue que $[c, b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ por 1.5.22. Ahora usando la misma d obtenemos $[d, b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ y en vista de (i) aplicado al intervalo $a \leq d \leq b$ obtenemos $d \leq c \vee d \leq b \leq j(c \vee d)$ y así de nuevo usando 1.5.24 obtenemos $[a, c] = [c \wedge d, c] \sim [d, c \vee d] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ lo cual dice por la abstracción de este conjunto que $[a, c] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$. □

De 1.5.31 es directo que $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ es cerrado bajo subintervalos y así es básico, pero tenemos más:

Teorema 1.5.32. *Sea A un idioma entonces el conjunto básico $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ es laxo.*

Demostración. Sea $a \in A$ y $X \subseteq [a, \bar{1}]$ tal que $[a, x] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ para cada $x \in X$, para cada uno de estos x pongamos $Y(x) \subseteq [a, x] \subseteq [a \bigvee X]$ con $x \leq j(\bigvee Y(x))$ y $[a, y] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$ para cada $y \in Y(x)$, sea $Y = \bigvee \{Y(x) \mid x \in X\}$ de tal forma que $Y \subseteq [a, \bigvee X]$ y claramente $[a, y] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$, además $b \leq j(\bigvee Y(x)) \leq j(\bigvee Y)$ por lo tanto $\bigvee X \leq j(\bigvee Y)$ y así se tiene el resultado. □

Teorema 1.5.33. *Sea A un idioma, entonces*

$$soc_j = |\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)| \;\; y \;\; [a, b] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j) \Leftrightarrow b \leq soc_j(a)$$

Demostración. De 1.5.31 se tiene que $[a, soc_j(b)] \in \mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$ y la definición de $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_j)$. □

Corolario 1.5.34. *Sea A un idioma y $j \in N(A)$, entonces las derivadas $soc[j]$ y soc_j son estables*

Demostración. Se sigue de 1.5.33 y 1.4.28 1. □

Resumiendo:

Teorema 1.5.35. *Sea A un idioma y considere un núcleo j sobre A entonces:*

$$soc_j = j \circ |\,\mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)| \text{ y } soc[j] = j \circ |\mathcal{S}(\mathcal{D}_j)| = soc_j \circ j$$

□

Una de las consecuencias que se tienen de la estabilidad de $soc[j]$ y soc_j es la siguiente

Teorema 1.5.36. *Sea A un idioma y $j \in N(A)$, entonces*

1. $soc[j]^{\alpha+1} = soc_j^{\alpha+1} \circ j$ *para cada ordinal* α.

2. *$soc[j]^\lambda = soc_j^\lambda$ para cada ordinal límite λ incluyendo $\lambda = 0$.*

□

Por lo tanto tenemos un núcleo $soc_j^\infty \in N(A)$.

Observación 1.5.37. *(1) Tomando $j = id_A$, considere $\mathcal{S}ct(\mathcal{D}_{id}) := \mathcal{SS}p$ obtenemos por 1.5.32 un conjunto laxo, a este conjunto de intervalos se le conoce como* el conjunto de intervalos semisimples*, de aquí se sigue que soc es una derivada estable en A.*

(2) Con los intervalos simples se introducen nuevos conjuntos de intervalos: Un intervalo $[a, b]$ es atómico *si para cada $a < d \leq b$ existe un $a < z \leq d$ tal que $[a, z] \in \mathcal{S}mp$. Un intervalo $[a, b]$ es* fuertemente atómico *si para cada $a \leq c < d \leq b$ existe $c < z \leq d$ con $[c, z] \in \mathcal{S}mp$ y se dice que A es* fuertemente atómico *si cada intervalos es fuertemente atómico. Sea $\mathcal{S}\mathcal{A}$ el conjunto de intervalos fuertemente atómicos. Un intervalo $[a, b]$ es* débilmente atómico *si para cada subintervalo $a \leq c < d \leq b$ existe $c \leq x < y \leq d$ con $[x, y] \in \mathcal{S}mp$. Sea $\mathcal{W}\mathcal{A}$ el conjunto de intervalos débilmente atómicos y así diremos que A es* débilmente atómico *si cada intervalo es débilmente atómico. Un intervalo $[a, b]$ es* atómicamente decrépito *si para cada uno de sus subintervalos complementados $a \leq c < d \leq b$ existe $c < z \leq d$ con $[c, z] \in \mathcal{S}mp$. Sea $\mathcal{F}\mathcal{A}$ el conjunto de intervalos atómicamente decrépitos, el idioma A se dice* atómicamente decrépito ó decrépito atómico *si cada intervalo es atómicamente decrépito. Estos conjuntos de intervalos son estudiados a detalle en [Sim14a], de ese análisis se conluye que $\mathcal{S}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\mathcal{A}$*

(3) Además se prueba en [Sim14a] Teorema $7{,}2$ que, para cada módulo izquierdo M sobre un anillo R el idioma de submódulos de M., $\mathrm{Sub_R(M)}$ *es débilmente atómico (esencialmente se sigue del hecho que los submódulos de un módulo constituyen un idioma* compactamente generado *en el sentido usual). Y para cada espacio topológico S, el marco de abiertos $\mathcal{O}(S)$ es atómicamente decrépito.*

(4) De hecho $\mathcal{S}\mathcal{A} \cap \mathcal{C}mp = \mathcal{SS}p$ (lo cual es de esperarse).

(5) De hecho $\mathcal{W}\mathcal{A} = \neg\neg\mathcal{S}mp$ la doble negación calculada en $\mathcal{B}(A)$, en particular por 1.4.22 $\mathcal{W}\mathcal{A}$ es de división, por lo tanto le corresponde un único núcleo, a saber, $\neg\neg soc^\infty$.

(6) En ese mismo documento [Sim14a] se prueba (Teorema $7{,}15$) que $\mathcal{F}\mathcal{A} = (\mathcal{C}mp \succ \mathcal{SS}p) = (\mathcal{C}mp \succ \mathcal{S}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}mp \succ \mathcal{W}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}mp \succ \mathcal{F}\mathcal{A})$,

y así el conjunto de intervalos atómicamente decrépitos es un conjunto de división, cuyo núcleo asociado se denota por fbl.

(7) *Uno de los teoremas más importantes de la teoría de derivadas es el Teorema* 7,17 *de [Sim14a], que establece $soc = fbl \wedge cbd$.*

Ahora hagamos un análisis análogo pero para cbd, a este estudio se le conoce como *cbd análisis*.

Como en 1.5.14, consideremos un núcleo j, sobre el idioma A y sea cbd^{A_j} la derivada de Cantor-Bendixson del idioma A_j.

Definición 1.5.38. *Sea A un idioma y j un núcleo sobre A, denotamos por $cbd[j] = j_* \circ cbd^{A_j} \circ j^*$ la derivada en A obtenida a partir de cbd^{A_j}.*

De nuevo como en el caso atómico, en vista de 1.5.11.

Definición 1.5.39. *Sea A un idioma y j cualquier núcleo sobre A, pongamos*

$$fll_j = |\mathcal{F}ll(\mathcal{D}_j)| \leq |\,\mathcal{C}mp(\mathcal{D}_j)| = cmp_j$$

Definición 1.5.40. *Sea A un idioma y j cualquier núcleo sobre A, pongamos*

$$fll_j = |\mathcal{F}ll(\mathcal{D}_j)| = cbd_j$$

Esta es la versión *correcta* de la derivada de Cantor-Bendixson relativa, es un tanto distinta que la versión relativa correcta para el zoclo, esto es, por que el conjunto de intervalos plenos con respecto cualquier conjunto de división (basta con que sea de congruencia) tiene un comportamiento más ameno al de los simples.

El siguiente teorema justifica esta terminología, la prueba está contenida en [Sim14a] 4,15.

Teorema 1.5.41. *Sea A un idioma y considere cualquier núcleo j en A, entonces*

$$cbd[j] = cbd_j \circ j$$

□

Veamos ahora que estas derivadas son estables, para esto como en el caso del zoclo, probaremos que $\mathcal{F}ll(\mathcal{B})$, con $\mathcal{B}$ laxo, es laxa

Definición 1.5.42. *Sea A un idioma, y $a \in A$ un elemento $x \in A$ se dice estar* esencialmente por arriba de *a, $a \lessdot x$, si $a \leq x$ y $x \wedge u \leq a$ para cada u entonces $u \leq a$. Note que esta definición tomada en el intervalo $[a, \bar{1}]$ coincide con el de esencial usual.*

Lema 1.5.43. *Sea A un idioma, $j \in N(A)$ y $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(A)$. Entonces para cada intervalo $[a, b]$ son equivalentes:*

(i) $[a, b] \in \mathfrak{F}ll(\mathcal{B})$.

(ii) Para todo $x \in A$, tal que $a \lessdot x$ entonces $[x \wedge b, b] \in \mathcal{B}$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Considere cualquier intervalo $[a, b] \in \mathfrak{F}ll(\mathcal{B})$, y cualquier $a \lessdot x$ entonces $a \leq x \wedge b \leq b$ y por lo tanto $x \wedge y = a \wedge b \wedge y = a$ y $[(x \wedge b) \vee y, b] \in \mathcal{B}$, para algún $y \in [a, b]$, pero $a \lessdot x$ da $y \leq a \leq x \wedge b$ y así $[(x \wedge b), b] \in \mathcal{B}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Considere un intervalo $[a, b]$ con la propiedad en listada y un $a \leq x \leq b$, sea entonces Y el conjunto de los elementos de $y \in A$ tales que $x \wedge y = a$, por ejemplo $a \in Y$, como A es idioma entonces Y es cerrado bajo supremos de conjuntos dirigidos allí por lo tanto por Zorn, tenemos que en Y hay elementos máximos, sea y uno de tales, por construcción este elemento satisface $a = x \wedge y$, para el otro requerimiento pongamos $u = x \vee y$ de tal forma que $a \leq u \leq y$, sea entonces v tal que $u \wedge v \leq a$, poniendo $w = y \vee u$ se tiene que $y \leq w$ y $y \leq u$ y en vista de la modularidad se sigue que

$$y \vee (x \wedge w) = (y \vee x) \wedge w = u \wedge w = (y \vee v) \wedge u = y \vee (v \wedge u) \leq y \vee a = y$$

lo que lleva a $x \wedge w \leq y$ por ende $x \wedge w \leq x \wedge y = a$ de aquí se sigue que $w = y$ pues este es máximo con tal propiedad y por lo tanto $v \leq w = y \leq u$, por lo tanto $v \leq u \wedge v \leq a$, que es lo que se deseaba. Finalmente $u \leq b$ y por la hipótesis se sigue $[x \vee, b] = [u, b] = [u \wedge b, b] \in \mathcal{B}$. □

Lema 1.5.44. *Sea A un idioma y considere $\mathcal{B}$ laxo, entonces $\mathfrak{F}ll(\mathcal{B})$ es laxo.*

Demostración. Sea $a \in A$ y $Z \subseteq [a, \bar{1}]$ con $[a, z] \in \mathfrak{F}ll(\mathcal{B})$ para cada $z \in Z$, sea $b = \bigvee Z$, suponga entonces que tenemos $a \lessdot x$ para algún x, entonces por el lema 1.5.43 se sigue que $[x \wedge z, z] \in \mathcal{B}$ para cada $z \in Z$, como $\mathcal{B}$ es abstracto $[x, x \vee z] \in \mathcal{B}$ de donde $[a, x \vee b] \in \mathcal{B}$. □

Teorema 1.5.45. *Sea A un idioma y $j \in N(A)$ entonces*

$$[a, b] \in \mathfrak{F}ll(\mathcal{D}_j) \Leftrightarrow b \leq cbd_j(a)$$

Demostración. Es directo en vista de 1.5.44. □

Corolario 1.5.46. *Sea A un idioma, entonces para cada núcleo j en A las derivadas cbd_j y $cbd[j]$ son estables.*

Demostración. Se sigue de 1.5.45 y de 1.4.28 1. □

De hecho:

Teorema 1.5.47. *Sea A un idioma y sea j un núcleo sobre A entonces*

$$cdb_j = |\mathcal{F}ll(\mathcal{D}_j)| \quad cdb[j] = |\mathcal{C}mp(\mathcal{D}_j)| = cbd_j \circ j$$

y éstos son estables.

□

Al igual que en 1.5.36 en vista de la estabilidad de estas derivadas obtenemos.

Teorema 1.5.48. *Sea A un idioma y $j \in N(A)$, entonces*

1. $cbd[j]^{\alpha+1} = cbd_j^{\alpha+1} \circ j$ *para cada ordinal α.*
2. $cbd[j]^{\lambda} = cbd_j^{\lambda}$ *para cada ordinal límite λ incluyendo $\lambda = 0$.*

□

Observación 1.5.49. *(1) Notando que si $j = id$, entonces $cbd_j = cbd$ es una derivada estable, esto para todo idioma A, se sabe que en el caso de ser A un marco entonces estas derivadas son prenúcleos, sólo que las pruebas son de una naturaleza totalmente distinta (éstas usan la implicación del marco), un análisis de esta situación se encuentra en [Sim06b] , a su vez mucho de esta derivada ha sido estudiado una reciente exposición de este se encuentra en [Sim14g], más aún la descripción de la derivada de cantor-bendixson expuesta aquí se puede relacionar con la mencionada en marcos, esto está contenido en [Sim14e] teorema $6{,}5$ y $6{,}7$.*

(2) La derivada de Cantor-Bendixson está relacionada con la idea de encontrar reflexiones Booleanas para un marco (este problema sigue abierto), hay aproximaciones a él y en éstas se destaca que esta relfexión ,si existe está controlada por la derivada cbd, algunas ideas alrededor de este problema se encuentran en [Joh86], [Sim14g] y en [Wil94].

1.5.2. Derivadas de Gabriel, Boyle y sus dimensiones

En esta subsección definiremos las derivadas de Gabriel y Boyle para idiomás, además se estudiará la noción de dimensión que producen éstas, en esta revisión se omitirán algunas pruebas, el detalle de éstas y mucho de su contenido se encuentra en [Sim14b], probablemente la primera vez que esta teoría apareció de la manera descrita durante todo este capítulo fue [Sim89].

En vista de 1.5.11, tenemos que para cada idioma A,

$$\mathcal{S}mp(\_) \leq \mathcal{C}mp(\_)$$

$$\mathcal{C}rt(\_) \leq \mathcal{F}ll(\_)$$

como derivadas sobre $\mathcal{B}(A)$, y así por 1.4.24

$$\mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{S}mp(\_) \leq \mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{C}mp(\_)$$

$$\mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{C}rt(\_) \leq \mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{F}ll(\_)$$

No es complicado observar, por 1.4.32 que:

Lema 1.5.50. *Sea A un idioma, entonces*

$$\mathcal{S}mp(\mathcal{B}) \subseteq (\mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{C}\,rt)(\mathcal{B}) \quad \mathcal{C}\,mp(\mathcal{B}) \subseteq (\mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{F}ll)(\mathcal{B})$$

□

Corolario 1.5.51. *Sea A un idioma, entonces $\mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{S}mp = \mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{C}\,rt \quad \mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{C}\,mp = \mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{F}ll$*

Demostración. Se sigue de 1.5.50 y de la idempotencia de $\mathcal{D}\,vs(\_)$. □

Definición 1.5.52. *Sea A un idioma, pongamos*

$$\mathcal{G}ab = \mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{C}\,rt \quad \mathcal{B}oy = \mathcal{D}\,vs \circ \mathcal{F}ll$$

éstas son las derivadas de Gabriel y Boyle en $\mathcal{B}(A)$

Notemos que, dado un núcleo $j \in N(A)$ por 1.4.33 a éste le corresponde un único conjunto de división $\mathcal{D}_j \in \mathcal{D}(A)$, por lo que aplicando $\mathcal{G}ab(\mathcal{D}_j) = \mathcal{D}_k$ y $\mathcal{B}\,oy(\mathcal{D}_j) = \mathcal{D}_k$ obtenemos nuevos conjuntos de división que a su vez les corresponden únicos núcleos, es decir:

Definición 1.5.53. *Sea A un idioma, denotemos por Gab y Boy las derivadas sobre $N(A)$, dadas por $\mathcal{G}ab(\mathcal{D}_j) = \mathcal{D}_{Gab(j)}$ y $\mathcal{B}oy(\mathcal{D}_j) = \mathcal{D}_{Boy(j)}$*

Lema 1.5.54. *Sea A un idioma, entonces Gab y Boy son prenúcleos sobre $N(A)$.*

Demostración. Consideremos j, k núcleos sobre A, entonces $\mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k\wedge k}$, por construcción de los conjuntos de división, pero ahora, digamos en el caso de Gab obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{Gab(j)\wedge Gab(k)} &= \mathcal{D}_{Gab(j)} \cap \mathcal{D}_{Gab(k)} \\ &= \mathcal{G}ab(\mathcal{D}_j) \cap \mathcal{G}ab(\mathcal{D}_k) \\ &\subseteq \mathcal{G}ab(\mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k) \\ &= \mathcal{G}ab(\mathcal{D}_{j\wedge k}) = \mathcal{D}_{Gab(j\wedge k)}\end{aligned}$$

puesto que $\mathcal{G}ab$ es un prenúcleo en el marco base, el caso para Boy es análogo. $\square$

En vista de este resultado $Gab(j)$ y $Boy(j)$ son núcleos en A, para determinar éstos sólo hay que recordar algunas cosas que ya tenemos.

Teorema 1.5.55. *Sea A un idioma entonces,*

$$soc_j^{\infty} = Gab(j) \quad cbd_j^{\infty} = Boy(j)$$

para cada núcleo $j \in N(A)$.

Demostración. Utilizando 1.4.31, para cada intervalo $[a, b]$ tenemos

$$b \leq soc_j^{\infty}(a) \Leftrightarrow [a, b] \in \mathcal{D}\,vs(\mathcal{C}\,rt(\mathcal{D}_j)) = \mathcal{G}ab(\mathcal{D}_j) = \mathcal{D}_{Gab(j)} \Leftrightarrow b \leq Gab(j)(a)$$

$$b \leq cbd_j^{\infty}(a) \Leftrightarrow [a, b] \in \mathcal{D}\,vs(\mathcal{F}ll(\mathcal{D}_j)) = \mathcal{B}oy(\mathcal{D}_j) = \mathcal{D}_{Boy(j)} \Leftrightarrow b \leq Boy(j)(a)$$

$\square$

En este sentido los prenúcleos Gab y Boy son extensiones al *primer nivel* $N(A)$ de las derivadas $soc_{\bullet}$ y $cbd_{\bullet}$ del *nivel cero* A

Ahora como $N(A)$ es un marco, éste tiene por sí mismo sus respectivas derivadas Soc y Cbd, veamos cómo compararlas con Gab y Boy.

Observación 1.5.56. *(1) Dada una retícula A, este tiene asociado tres retículas completas $\mathcal{A}(A)$, $\mathcal{B}(A)$ y $\mathcal{C}(A)$, por lo tanto para cualquier intervalo $[a, b]$ existe el menor conjunto , abstracto $\mathcal{A}(a, b)$, básico $\mathcal{B}(a, b)$ y de congruencia $\mathcal{C}(a, b)$ que lo contiene, en particular cuando la retícula A es idioma éstos son marcos y existe otro marco importante $\mathcal{D}(A)$, notando entonces que para cualquier intervalo $[a, b]$ existe $\mathcal{D}(a, b)$ el menor conjunto de división que lo contiene, esta construcción es el análogo reticular (idiomático), de la teoría de torsión generada por un módulo M, $\xi(M)$, así también cabe mencionar* *que el núcleo correspondiente a este conjunto de división lo denotaremos por $\xi(a,b)$ y queda caracterizado por:*

$$\xi(a,b) \leq k \Leftrightarrow b \leq k(a)$$

es decir, es el menor núcleo que colapsa al intervalo.

(2) En este sentido se puede observar ([Sim14b] 3.1 y [Grä03]) que $J \subseteq K \sim I \Rightarrow J \sim L \subseteq I$ para algún intervalo L, donde J, K, I son intervalos, con esto en mente se puede caracterizar a la derivada de Gabriel en $N(A)$ para todo idioma, simplemente se considera cualquier conjunto de división $\mathcal{D}$ sobre A y un $[a,b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}) - \mathcal{D}$, entonces si denotamos a $\mathcal{E} = \mathcal{D}vs(\mathcal{D} \cup \mathcal{B}(a,b))$ se tiene que $[\mathcal{D}, \mathcal{E}]$ es un intervalo simple en $\mathcal{D}(A)$, con esto en mente si denotamos por $j\langle a,b\rangle$ al núcleo asociado a cada $[a,b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$, para algún núcleo j, entonces se puede observar que, para cada uno de estos intervalos que no estén en $\mathcal{D}_j$, satisfacen que, $[j, j\langle a,b\rangle]$ es simple en $N(A)$ por lo tanto $j\langle a,b\rangle \leq Soc(j)$.

En vista de las observaciones previas, el siguiente teorema es inmediato.

Teorema 1.5.57. *Sea A y considere cualquier núcleo j en A entonces*

$$Gab(j) = \bigvee \{j\langle a,b\rangle \mid [a,b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)\}$$

donde el supremo es en $N(A)$.

□

Este teorema es importante para algunas observaciones en el capítulo siguiente y además da una de las comparaciones fundamentales:

Corolario 1.5.58. *Sea A un idioma, entonces*

$$Gab \leq Soc$$

□

En este análisis también se puede observar que:

Teorema 1.5.59. *Sea A un idioma, entonces*

$$Boy \leq Cbd$$

Observación 1.5.60. *(1) Este teorema aparece como corolario en [Sim14b] 3.12*

(2) Notando que de aquí siempre se tiene

$$Gab \leq Cbd$$

y claro

$$Soc \leq Cbd$$

Lo siguiente a exponer es el concepto de dimensión y de longitud de un idioma A con respecto a una derivada.

Definición 1.5.61. *Sea A un idioma, y consideremos cualquier derivada U en $N(A)$, tal que U^{∞} sea un núcleo, pongamos para cada núcleo j en $N(A)$*

$$LU(j) = (RU(j) \succ j) \quad RU(j) = (U(j) \succ j)$$

así obtenemos dos operaciones sobre $N(A)$

La definición estándar pide que U sea estable y además $U \leq Cbd$, esto es por las derivadas fundamentales Soc, Gab, Boy y Cbd satisfacen lo anterior. También notemos que LU y RU están en términos de la implicación de $N(A)$, además cada una de estas nuevas operaciones es inflatoria e idempotente pero no son monótonas.

Definición 1.5.62. *Sea A un idioma, y considere cualquier derivada U, sobre $N(A)$ tal que $U^{\infty} \in N(N(A))$, diremos que un núcleo $j \in N(A)$ tiene Unp-*dimensión *si*

$$U^{\infty}(j) = tp$$

*y Unp-*dimensión débil *si*

$$LU(j) = tp$$

donde tp denota al mayor elemento en $N(A)$

Definición 1.5.63. *Sea A un idioma y d una derivada sobre A, diremos que A tiene* d-longitud *si $d^{\infty}(0) = \bar{1}$*

Observación 1.5.64. *(1) En este sentido diremos que U* clasifica *al idioma A y cada derivada d sobre A* mide la complejidad de A.

(2) Muchas otras veces diremos que el idioma A tiene U dimensión, si $U^{\infty}(d_{\underline{0}} = id_A) = tp$, hay que tener cuidado con esta noción, por ejemplo muchas veces se trabajará con derivadas estables U_j sobre $N(A_j)$ tales que $U_j(a) = U(a) = U_{d_{\underline{0}}}(a)$ para cada $a \in A_j$, las derivadas fundamentales que tenemos cumplen esta condición y nótese, que por ejemplo si $Gab^{\infty}(id_A) = soc^{\infty} = tp$ entonces A tiene soc-longitud, pero $Soc^{\infty}(id_A) = tp$ no implica soc-longitud, sólo que A tiene Soc- dimensión.

(3) *Observe que un núcleo j tiene U-dimensión si y sólo si A_j tiene U-dimensión (esto no es directo y se probara en el capítulo siguiente), también note que $U^\infty(j) = tp$ entonces $U^\infty(k) = tp$ para todo $j \leq k$ en $N(A)$.*

(4) *De lo anterior se puede deducir suponiendo que U es estable y está por debajo de la derivada Cbd que $U = Cbd$.*

(5) *Como $U \leq LU$ entonces cualquier núcleo con U-dimensión tiene automáticamente dimensión débil con respecto a U, el regreso no es necesariamente cierto, simplemente considere la derivada de Gabriel, Gab, entonces como se ilustra en 5.11 de [Sim14b], Gab^∞ y $LG = LGab$ pueden diferir.*

(6) *En esta dirección se puede probar*

$$A_j \text{ es fuertemente atómico si y sólo si } Gab(j) = tp$$

$$A_j \text{ es débilmente atómico si } LG(j)=tp$$

para cada núcleo j, es decir, soc-longitud si y sólo si fuertemente atómico.

(7) *En particular, por 1.3.25 $RG(j) = (Gab(j) \succ j) = (Gab^\infty(j) \succ j)$, entonces de lo anterior se sigue que $A_{RG(j)}$ es débilmente atómico.*

El documento [Sim14b] se centra en la dimensión de Gabriel, recapitulemos un poco de este análisis. Por definición, un núcleo j sobre un idioma A tiene dimensión de Gabriel o GD si $Gab^\infty = (j) = tp$, claro que a j le podríamos asociar el menor ordinal θ para el cual $Gab^\theta(j) = tp$, determinar este ordinal para ciertos casos es una labor ingeniosa e importante, aquí no haremos eso, en capítulos posteriores veremos cómo determinar si una derivada tiene dimensión o no.

Ejemplo 1.5.65. *Sea A un álgebra de Boole completa, sin átomos, es conocido que en este caso, A, $N(A)$ y $N(N(A))$ son canónicamente isomorfos, pero observe que en vista de ser A sin átomos, se sigue que no hay intervalos simples no triviales en A, esto asegura que Gab es la identidad sobre $N(A)$, es decir, el menor elemento de $N(N(A))$, y por lo tanto sólo tp tiene GD.*

De la definición de RG se sigue que j tiene GD precisamente cuando $RG(k) = k$ para cada núcleo $k \leq j$, en este sentido el operador RG determina la sección de $N(A)$ para la cual j tiene GD, por lo que dar una descripción de éste es interesante como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.5.66. *Sea A un idioma y considere j cualquier núcleo sobre A entonces*

$$RG(j) = \bigwedge \{(j \langle a, b\rangle \succ j) \mid [a, b] \in \mathcal{G}(j)\}$$

donde $\mathcal{G}(j) = \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j) - \mathcal{D}_j$

Demostración. Esencialmente se sigue de 1.5.57 y propiedades básicas de la implicación. □

Detalles alrededor de esta descripción se encuentran en [Sim14b] teorema 7.7.

Dentro de este análisis, una de las partes más importantes es el reconocimiento de ciertos puntos del marco $N(A)$ vía la derivada de Gabriel (y las otras derivadas fundamentales), recapitulemos algunas de estas nociones.

Definición 1.5.67. *Sea A un marco, un* punto *de A es un elemento $p \in A$ con $p \neq \bar{1}$ tal que*

$$x \wedge y \leq p \Rightarrow x \leq p \text{ ó } y \leq p$$

es decir, un punto es un elemento $\wedge$-irreducible *de A*

Estos elementos son importantes, de hecho el conjunto de todos estos $\mathrm{pt(A)}$ para un marco, forman un espacio topológico y $\mathrm{pt(\_)}$ es parte de la adjunción estudiada en [Joh86] y [Sim06c].

Definición 1.5.68. *Sea A un idioma, un* $\mathrm{G}-$ punto *de A es un punto π de $N(A)$ tal que $RG(\pi) = \pi$*

Como lo menciona el autor la G es por Goldman, quien introduce esta noción (un tanto distinta pero en el fondo son la misma) para estudiar descomposiciones generales de módulos, cabe mencionar que existe una teoría de descomposición para idiomás, esto es el contenido de [Sim84], [Sim10] y parte de [Gol77] en el capítulo 3 describimos una teoría general de estas nociones. Unos de los ingredientes principales para determinar G-puntos y que usaremos más adelante es la siguiente construcción.

Lema 1.5.69. *Para cada intervalo $[a, b]$ de un idioma A existe una única derivada estable l mayor con respecto a las derivadas estables que satisfacen*

$$l(a) \wedge b = a$$

Más aún esta l es un núcleo en A.

Demostración. Consideremos la familia s en A tales que $s(a) \wedge b = a$, es decir,

$$\mathcal{F} = \{s \in S(A) \mid s(a) \wedge b = a\}$$

notemos que esta familia no es vacía la identidad está en $\mathcal{F}$, ahora sean $f, g \in \mathcal{F}$ entonces

$$(gf)(a) \wedge b = g(f(a)) \wedge g(b) \wedge b = g(f(a) \wedge b) \wedge b = g(a \wedge b) \wedge b = g(a) \wedge b = a$$

por lo tanto $\mathcal{F}$ es cerrado bajo productos y así es dirigido por 1.3.18

$$l = \bigvee \mathcal{F}$$

es estable en A, noten ahora que usando la ley distributiva sobre conjuntos dirigidos de A obtenemos que

$$l(a) \wedge b = \bigvee \{s(a) \wedge b \mid s \in \mathcal{F}\} = a$$

por lo que $l \in \mathcal{F}$ por lo que l es el mayor elemento de $\mathcal{F}$ que cumple lo anterior y del hecho $l^2 \geq l$ se tiene que $l^2 = l$ por lo tanto es un núcleo en A. □

Definición 1.5.70. *Sea A un idioma, para cada intervalo $[a, b]$ sea $\chi(a, b)$ el núcleo dado por 1.5.69, que en vista de su construcción está caracterizado por:*

$$j \leq \chi(a, b) \Leftrightarrow j(a) \wedge b = a$$

para cada núcleo j.

Definición 1.5.71.

1. *También diremos que un intervalo $[a, b]$ es* uniforme *si no es trivial, es decir, $a < b$ y $a = x \wedge y \Rightarrow a = x$ ó $y = a$*

2. *Un intervalo $[a, b]$ en un idioma A es* inerte *si $a < b$ y si $a < x \leq b$ entonces*

$$\chi(a, x) = \chi(a, b)$$

para cada $x \in A$.

Lema 1.5.72. *Sea A un idioma entonces*

(1) Si $[a, b]$ es uniforme, entonces es inerte.

(2) Si $[a, b]$ es inerte, entonces $\chi(a, b)$ es un punto de $N(A)$

Demostración. (1)

Considere cualquier $a < x \leq b$ y sea $j = \chi(a, x)$ claramente se tiene que $\chi(a, b) \leq j$ y además $j(a) \wedge b \wedge x = b \wedge j(a) \wedge x = b \wedge a = a$ entonces $j(a) \wedge b = a$ por la uniformidad del intervalo por lo tanto $j \leq \chi(a, b)$ y así la igualdad. (2) Sea $\pi = \chi(a, b)$, ahora primero π no es el mayor elemento de $N(A)$ ya que si lo fuera se tendría que $\pi(a) = 1$ entonces $b = \pi(a) \wedge b = a$ lo cual contradice el hecho $a < b$. Ahora considere núcleos j y k tal que $j \wedge k \leq \pi$ y supongamos que $k \nleq \pi$, pongamos $x = k(a) \wedge b$ entonces $a < x \leq b$ pues $k \nleq \pi$ por lo que la inercia de $[a, b]$ nos da $\chi(a, x) = \chi(a, b) = \pi$ y así $j(a) \wedge x = j(a) \wedge k(a) \wedge b = \pi(a) \wedge b = a$ y así $j \leq \chi(a, b) = \pi$ como se deseaba.

□

Observación 1.5.73. *(1) El núcleo $\chi(a,b)$ es la construcción idiomática de la teoría de torsión cogenerada por un módulo M, es decir es el mayor núcleo para el cual $[a,b]$ es libre de torsión (división).*

(2) Los conceptos de uniformidad, inercia y dimensión de Gabriel están intrínsecamente relacionados, se puede probar que si $\mathcal{C}$ es de congruencia en A entonces todo intervalo $[a,b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{C}) - \mathcal{C}$ es uniforme, el núcleo $\chi(a,b)$ es un G*-punto.*

(3) En esta dirección, se puede probar que todo G*-punto proviene de un intervalo uniforme, además poniendo $\Gamma(j)$ al conjunto de* G*-puntos de la forma $\chi(a,b)$ con $[a,b] \in \mathcal{G}(j)$ se tiene que $RG(j) = \bigwedge \Gamma(j)$ (teorema 7.19 de [Sim14b]). En ese mismo documento está probada (Teorema 7.20) una parte de un teorema tipo* correspondencia de Gabriel.

(4) El núcleo $\chi(a,b)$ está relacionado con teorías de descomposición para idiomas en el sentido de [Sim10], esto se verá en mejor detalle en el contexto del capítulo 3.

(5) Cuando el idioma base A, es un marco suceden cosas extremás, se puede ver que $Gab = Soc$ y $Boy = Cbd$, además en este sentido, todo intervalo $[a,b]$ es uniforme si y sólo es inerte si y sólo si $p = (b \succ a)$ es un punto en A.

(6) La derivada $\mathcal{G}ab$ sobre el marco $\mathcal{B}(A)$ se puede obtener por medio de otras derivadas sobre el marco base de A, a saber la derivada de Krull y la derivada Neteriana, es decir conjuntos de intervalos que satisfacen condiciones descendentes de cadenas y ascendentes de cadena sobre subintervalos, esto se puede observar en [Sim14b] 9.3, además cabe resaltar que estas derivadas y de hecho todas las que se han estudiado en esta sección dan lugar a filtraciones en el sentido usual de[Gol86], [CRT03], [PRMB05] y [PRM07].

1.6. Derivadas universales en R-Mod

En esta sección se destacará la importancia del estudio de derivadas en la teoría de anillos con un resultado que está ligado intrínsecamente con la estructura del anillo, veremos cómo podemos definir algunas dimensiones en términos de las dimensiones obtenidas en la sección pero vistas en el idioma de submódulos de un módulo. Esta exposición está basada en [Sim88], [Sim12] y parte de [Sim14d].

Notemos que, dado un morfismo de R-módulos izquierdos $f : M \to N$ éste define dos funciones

$$f_* : Sub_R(N) \to Sub_R(M)$$

y

$$f^* : Sub_R(M) \to Sub_R(N)$$

dadas como $f_*(K) = f^{-1}(K)$ y $f^*(L) = f(L)$ respectivamente, estas funciones son morfismos monótonos, es decir, tenemos un funtor:

$$\Lambda : R - \mathrm{Mod} \longrightarrow \mathcal{P}os$$

donde $\mathcal{P}os$ denota a la categoría de conjuntos parcialmente ordenados junto con sus respectivos morfismos, lo que hace el funtor Λ en objetos es a cada módulo M le asigna $\Lambda(M) = Sub_R(M)$, en los morfismos tenemos que hacer una elección puesto que podemos mandar a cada morfismo de módulos f le podemos asignar f^* ó f_* aquí optaremos por mandar f a $\Lambda(f) = f_*$, antes de seguir con esto veamos algunas propiedades de estos dos morfismos definidos en $\Lambda(M)$.

Antes un poco más de notación, siguiendo a Simmons, sea $f : M \to N$ un R-morfismo para cada $B \leq M$ y $A \leq N$ submódulos de M y N respectivamente pongamos

$$f^*(B) = \exists(B)$$

$$f_*(A) =_f |(A)$$

Definición 1.6.1. *Sea $f : M \to N$ un R-morfismo para submódulos $B \leq M$ y $A \leq N$:*

$$x \in \exists(B) \Leftrightarrow \textit{existe } y \in M \textit{ tal que } f(y) = x \textit{ con } y \in B$$

y

$$y \in_f |(A) \Leftrightarrow f(y) \in A$$

para $y \in M$ $x \in N$

Con esto extraemos dos subconjuntos de cada módulo de hecho son submódulos y así que

$$\exists(B) \leq N$$

$${}_f|(A) \leq M$$

claramente las funciones $\exists$ y ${}_f|$ son monótonas, lo interesante es:

Lemma 1.6.2. *Cada morfismo de R-módulos f induce una adjunción:*

$$\Lambda(M) \underset{\exists}{\overset{{}_f|}{\leftrightarrows}} \Lambda(N)$$

entre los idiomás de submódulos.

Demostración. Para $A \leq N$ y $B \leq M$ tenemos

$$\exists(B) \leq A \Leftrightarrow (\forall y \in M)[y \in B \Rightarrow f(y) \in A]$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in M)[y \in B \Rightarrow y \in_f |(A)] \Leftrightarrow B \leq_f |(A)$$

□

Algunas propiedades que cumplen $\exists$ y $_f|$ son las siguientes.

Lemma 1.6.3. *Consideremos un morfismo de módulos f con la adjunción inducida por el $\exists \dashv_f |$. Entonces*

$$\exists(B) \wedge A = \exists(B \wedge_f |(A))$$

para todos los $A \in \Lambda(N)$ y $B \in \Lambda(M)$.

Demostración. Veamos las dos inclusiones, primero sea $x \in \exists(B) \wedge A$ entonces para algún $y \in A$ entonces $f(y) = x$ y $y \in B$ con $x \in A$ por definición de $\exists$ pero $y \in B \wedge_f |(A)$ entonces usando de nuevo la definición de $\exists$ se tiene que $x \in \exists(B \wedge_f |(A))$.

Para la otra contención consideremos un $y \in \exists(B \wedge_f |(A))$ entonces para algún $y \in M$ tenemos que $x = f(y)$ $y \in B$ y $y \in_f |(A)$ por definición de $\exists$ pero $x \in A$ por definición de $_f|$ y por lo tanto $x \in \exists(B) \wedge A$.

□

Lemma 1.6.4. *Considere un morfismo de R-módulos como arriba con adjunción inducida por f, $\exists \dashv_f |$. Entonces*

$$_f|(A) \vee B =_f |(A \vee \exists(B))$$

para todos los $A \in \Lambda(N)$ y $B \in \Lambda(M)$

Demostración. De nuevo veamos las contenciones.

Considere cualquier $y \in_f |(A) \vee B$ entonces

$$y = a + b$$

con $a, b \in M$ y $f(a) \in A$ $b \in B$ por defineión de $_f|$ pero aplicando f se tiene que

$$f(y) - f(b) = f(a) \in A$$

por lo que $f(y) \in A \vee \exists(B)$,es decir, $y \in_f |(A \wedge \exists(B))$ por definición de $_f|$.

Ahora considere cualquier $y \in_f |(A \vee \exists(B))$ y así

$$f(y) \in A \vee \exists(B)$$

por definición de $_f|$ y así existen $x, n \in N$ con

$$f(y) = x + n$$

donde $x \in A$ y $a \in \exists(B)$ y así

$$n = f(m)$$

para algún $m \in B$ por definición de $\exists$ pero

$$f(y - m) = f(y) - f(m) = f(y) - n = x \in A$$

por lo que $y - m \in_f |(A)$ por definición de $_f|$ y así $y \in_f |(A) \vee B$ como se quería. $\square$

Definición 1.6.5. *Una derivada* universal o global *en* R-Mod *es una asignación* $k_\bullet$ *tal que en cada* $M \in R-\mathrm{Mod}$ k_M *es un derivada en* $\Lambda(M)$ *y dado cualquier* $f : M \to N$ *R-morfismo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \Lambda(N) \arrow[r, "k_N"] \arrow[d, "_f|"'] & \Lambda(N) \arrow[d, "_f|"] \\ \Lambda(M) \arrow[r, "k_M"'] & \Lambda(M) \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{P}os$, *es decir,*

$$k_M \circ {_f|} = {_f|} \circ k_N$$

Esto a su vez nos dice que ya estamos eligiendo que a cada morfismo de R-módulos f el funtor $\Lambda(\_)$ le asigna $\Lambda(f) = {_f|}$. Ahora como en la categoría de módulos tenemos un objeto distinguido es decir el anillo R entonces éste tiene su propia retícula de submodulos izquierdos $\Lambda(R)$ y así tiene definido su propias derivadas, ahora como R es un anillo es natural considerar la siguiente familia de derivadas sobre R.

Definición 1.6.6. *Una derivada* $k \in D(\Lambda(R))$ *es* R-lineal ó deferente *si*

$$k((I : r)) = (k(I) : r)$$

para cada $I \in \Lambda(R)$ *y cada* $r \in R$.

Nuestro primer objetivo es ligar el concepto de derivada universal en R-Mod y derivada deferente en $\Lambda(R)$. Antes de esto veamos unas propiedades de estos nuevos objetos.

Lemma 1.6.7. *Sea $k_\bullet$ una derivada global, entonces para cada M módulo y cada $N \leq M$ submódulo se tiene que*

$$k_N(A \cap N) = k_M(A) \cap N$$

para cada $A \in \Lambda(M)$

Demostración. Sea

$$\Lambda(M) \xrightarrow{|} \Lambda(N)$$

el morfismo inducido por la inclusión, entonces $|(A) = A \cap N$ para cada $A \in \Lambda(M)$ como $k_\bullet$ es global se tiene que

$$k_N(A \cap N) = (k_N|)(A) = (|k_M)(A) = k_M(A) \cap N$$

□

Corolario 1.6.8. *Sea $k_\bullet$ una derivada global entonces*

$$k_N(A) = k_M(A) \cap N$$

para cada $A \leq N \leq M$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del anterior. □

Corolario 1.6.9. *Sea $k_\bullet$ una derivada global, para cada módulo M la componente k_M es una derivada estable en $\Lambda(M)$.*

Demostración. Considere $A, B \in \Lambda(M)$ entonces poniendo $N = B$ por 1.6.7 y 1.6.8 se tiene

$$k_M(A) \cap B = k_B(A \cap B) = k_M(A \cap B) \cap B \leq k_M(A \cap B)$$

□

Teorema 1.6.10. *Sea R un anillo asociativo con uno y $k_\bullet$ una derivada global en R-Mod. Entonces para cada módulo M la componente k_M es un prenúcleo en $\Lambda(M)$.*

Demostración. Sean $A, B \in \Lambda(M)$ junto con

$$\rho : M \to M/A$$

$$\varrho : M \to M/B$$

las proyecciones canónicas a los cocientes de A y B respectivamente. Pongamos $N = M/A \times M/B$ y así tenemos $f : M \to N$ $g : M \to N$ $h : M \to N$ dados como $f(m) = (\rho(m), 0)$ $g(m) = (0, \varrho(m))$ y $h(m) = (\rho(m), \varrho(m))$ y claro también tenemos que $h(m) = \rho(m) + \varrho(m)$ usando las imágenes inversas de estos 3 morfismos tenemos que

$$\Lambda(N) \xrightarrow{fgh|} \Lambda(M)$$

Sea entonces Y un submódulo de N y consideremos $x \in M$ tal que $x \in_f |(Y) \cap_g (Y)$ entonces $f(x) \in Y$ y $g(x) \in Y$ por lo que $f(x) + g(x) = h(x) \in Y$, es decir, $x \in_h |(Y)$ y así $_f|(Y) \cap_g (Y) \subseteq_h |(Y)$. Ahora observe que $_f|(0) = A$ $_g(0) = B$ y $_h|(0) = A \cap B$ entonces poniendo $Y = k_N(0)$ se tiene que

$$k_M(A) \cap k_M(B) = (k_{Mf}|)(0) \cap (k_{Mg}|)(0) =_f |(Y) \cap {}_g|(Y) \subseteq_h |(Y)$$

y esto es igual a

$$(k_{Mh}|)(0) = k_M(A \cap B))$$

usando tres veces la propiedad global de k_M.

□

En particular tenemos:

Corolario 1.6.11. *Sea $k_\bullet$ una derivada global en R-Mod, entonces $k = k_R$ es un prenúcleo en $\Lambda(R)$.*

□

Lemma 1.6.12. *Sea $k_\bullet$ una derivada global en R-Mod. Entonces*

$$(k_M(A) : x) = k_R(A : x)$$

para cada $A \in \Lambda(M)$ y cada $x \in M$.

Demostración. Para cada $x \in M$ considere el morfismo

$$R \xrightarrow{f} M$$

dado por $r \longmapsto rx$ notemos que $_f|(A) = (A : x)$ para cada $A \in \Lambda(M)$ con esto y la propiedad global de k_M se tiene que

$$k_M(A) = (_f|k_M)(A) = (k_{R\,f}|)(A) = k_R(A : x)$$

$\square$

Corolario 1.6.13. *Sea $k_\bullet$ global en R-*Mod *entonces la componente en R, k_R es deferente.*

Corolario 1.6.14. *Sea $k_\bullet$ global en R-*Mod *entonces*

$$x \in k_M(A) \Leftrightarrow k_R(A : x) = R$$

para cada par de módulos $A \leq M$ y cada $x \in M$.

Demostración.

$$x \in k_M(A) \Leftrightarrow k_R(A : x) = (k_R(A) : x) = R$$

$\square$

Esto muestra que la componente en R, k_R determina a toda la derivada global $k_\bullet$. Además de que consideramos cualquier derivada global $k_\bullet$ y ésta definió un prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$

$$k_\bullet \longmapsto k$$

Definición 1.6.15. *Sea k un prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$. Para cada módulo M y cada $A \leq M$ sea $k_M(A)$ el subconjunto de M dado por*

$$x \in k_M(A) \Leftrightarrow k_R(A : x) = R.$$

Lemma 1.6.16. *Sea k un prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$. Para cada $A \leq M$ módulos el subconjunto k_M es un submódulo de M.*

Demostración. Veamos esto paso a paso, primero consideremos un $x \in k_M(A)$ es decir, $k((A : x)) = R$ y así para cada $r \in R$ tenemos

$$(A : rx) = ((A : x) : r)$$

entonces la deferencia de k nos da

$$k((A : rx)) = k((A : x) : r) = (k((A : x)) : r) = (R : r) = R$$

es decir, $rx \in k_M(A)$.

Ahora veamos que $k_M(A)$ es un grupo abeliano considere $x, y \in k_M(A)$ y pongamos

$$I = (A : x) \quad J = (A : y)$$

Ahora para cada $r \in R$ tenemos

$$r \in I \cap J \Rightarrow rx, ry \in A \Rightarrow r(x+y) = rx + ry \in A$$

por lo que

$$I \cap J \subseteq (A : x + y)$$

Y por construcción de k_M tenemos que

$$k(I) = R = k(J)$$

entonces como k es prenúcleo se tiene

$$R = k(I \cap J) \subseteq k((A : (x+y)))$$

por lo que $x + y \in k_M(A)$. Con los inversos es análogo. $\square$

Ahora como tenemos que para cada módulo M y cada $x \in A \in \Lambda(M)$

$$(A : x) = R$$

entonces las propiedades de k obtenemos que $A \leq k_M(A)$ y si $A \leq B$ entonces $k_M(A) \leq k_M(B)$ con $A, B \in \Lambda(M)$. Por lo que k define una derivada en $\Lambda(M)$ para cada módulo M.

Lemma 1.6.17. *Sea k un prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$. Entonces la familia asociada k_M con $M \in R - \mathrm{Mod}$ define una derivada global $k_\bullet$ en R-*Mod.

Demostración. La observación anterior nos dice que para cada módulo M, k_M es una derivada en $\Lambda(M)$ veamos que este se comporta bien con los morfismos. Sea pues

$$M \xrightarrow{f} N$$

cualquier R-morfismo, con su respectivo ${}_f|$, considere cualquier $A \leq M$ y $y \in N$ recordemos que

$$({}_f|(A) : y) = (A : f(y))$$

así se tiene

$$y \in (k_N {}_f|)(A) \Leftrightarrow k(({}_f|(A) : y)) = R$$

$$\Leftrightarrow k((A : f(y))) = R \Leftrightarrow f(y) \in k_M(A) = R \Leftrightarrow y \in ({}_f|k_M)(A)$$

Por lo que esto nos da la propiedad global. $\square$

Ahora de todo lo anterior obtenemos dos construcciones

$$k \longmapsto k_\bullet$$

$$k_\bullet \longmapsto k$$

Debemos verificar que las asignaciones

$$k \longmapsto k_\bullet \longmapsto k'$$

y

$$k_\bullet \longmapsto k \longmapsto k'_\bullet$$

regresen al mismo elemento, eso lo veremos a continuación.

Lemma 1.6.18. *Las construcciones anteriores determinan una biyección entre prenúcleos deferentes en $\Lambda(R)$ y derivadas globales en R-*Mod*.*

Demostración. Primero consideremos una derivada global en R-Mod $k_\bullet$ y al prenúcleo deferente que este define $k = k_R$ y después considere la derivada global que este define $k'_\bullet$, entonces para cada módulo M y cada A submódulo de M y $x \in M$ tenemos

$$x \in k'_M(A) \Leftrightarrow k((A:x)) = R \Leftrightarrow k_R((A:x)) = R \Leftrightarrow x \in k_M(A)$$

y esto para cada módulo M como antes por lo que $k'_\bullet = k_\bullet$. Donde la primera equivalencia es justo la definición 1.6.15 y la última equivalencia es el corolario 1.6.14.

Segundo consideremos un prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$ k y a la derivada global que este define $k_\bullet$ y a su vez consideramos el prenúcleo deferente que este define $k' = k_R$, para cada ideal izquierdo $I \in \Lambda(R)$ y un elemento $x \in R$ tenemos

$$x \in k'(I) = k_R(I) \Leftrightarrow k(I:x) = R \Leftrightarrow (k(I):x) = R \Leftrightarrow x \in k(I)$$

es decir, $k' = k$ la primera equivalencia es por el corolario 1.6.14 para el caso $I \leq R$ la segunda equivalencia es porque k es deferente y la tercera es la definición del trasladado.

□

Ahora notemos que si pedimos que la derivada global $k_\bullet$ sea un operador cerradura, es decir, sea idempotente entonces en cada M, k_M es idempotente en particular k_R es idempotente por lo tanto en vista de lo anterior éste sería un núcleo deferente en $\Lambda(R)$. Veamos que el regreso es válido, es decir, si el prenúcleo deferente es un núcleo deferente entonces $k_\bullet$ es un operador de cerradura global en R-Mod.

Necesitamos el siguiente lema.

Lemma 1.6.19. *Para un anillo R sea $k_\bullet$ una derivada global y $k = k_R$ su respectivo prenúcleo deferente asociado. Entonces para cada par de módulos $A \leq M$ se tiene*

$$(k_M(A) : x) = k(A : x)$$

para cada $x \in M$

Demostración. Sea M un módulo y A un sobmódulo de M considere cualquier $x \in M$, pongamos $I = (A : x)$ ahora sabemos que para cada $r \in R$

$$(A : rx) = (I : r)$$

con esto tenemos

$$r \in (k_M(A) : x) \Leftrightarrow rx \in k_M(A) \Leftrightarrow k(A : rx) = R$$

$$\Leftrightarrow k(I : r) = R \Leftrightarrow (k(I) : r) = R \Leftrightarrow r \in k(I)$$

lo cual nos da la igualdad, la segunda iguladad es por la definición 1.6.15 y las demás son por ser k derefente.

□

Con esto en mente.

Lemma 1.6.20. *Para un anillo R sea $k_\bullet$ una derivada global con prenúcleo deferente $k = k_R$. Entonces $k_\bullet$ es idempotente prescisamente cuando k lo es.*

Demostración. Como k es idempotente,, consideremos M un módulo y A un sobmódulo de M y cualquier elemento $x \in M$ sea

$$I = (A : x)$$

entonces

$$x \in k_M(A) \Leftrightarrow k(I) = R$$

por la correspondencia entre $k_\bullet$ y k y en vista del lema 1.6.19 tenemos que

$$(k_M(A) : x) = k(I)$$

en vista de esto se tiene

$$x \in k_M^2(A) \Rightarrow x \in k_M(k_M(A))$$

$$\Rightarrow k(k_M(A) : x) = R$$

$$\Rightarrow k(k(I)) = k(I) = R$$

por lo que $x \in k_M(A)$, es decir, k_M es idempotente para todo módulo M.

□

Ahora juntemos 1.6.10, 1.6.11, 1.6.13, 1.6.17 y 1.6.18 así obtenemos:

Teorema 1.6.21. *Sea R un anillo asociativo con uno y R-*Mod *su categoría de módulos izquierdos, sea $\Lambda(R)$ el idioma de ideales izquierdos de R. Entonces hay una biyección entre derivadas globales en R-*Mod

$$k_\bullet$$

y prenúcleos deferentes en $\Lambda(R)$

$$k$$

dada por

$$k_\bullet \longmapsto k_R = k$$

y

$$k \longmapsto k_M$$

$$x \in k_M(A) \Leftrightarrow k((A:x)) = R$$

para cualesquiera $M \in R-\mathrm{Mod}$ $A \in \Lambda(M)$ y $x \in M$.

□

Y en vista de esto junto con 1.6.20 tenemos:

Teorema 1.6.22. *Sea R un anillo asociativo con uno y R-*Mod *su categoría de módulos izquierdos, sea $\Lambda(R)$ el idioma de ideales izquierdos de R. Entonces hay una biyección entre derivadas idempotentes globales en R-*Mod

$$k_\bullet$$

y núcleos deferentes en $\Lambda(R)$

$$k$$

□

Nos disponemos a demostrar un teorema que refleja la importancia del estudio de derivadas globales en una categoría de módulos y derivadas deferentes en la retícula de ideales izquierdos de R y a su vez este teorema dice que el estudio por sí sólo de estos entes en el caso general es de gran importancia teórica en el análisis de propiedades globales-locales de una categoría de módulos (de forma más general estos teoremas se pueden trasladar a una categoría de gavillas sobre un marco ó una categoría de Grothendieck).

Primero recordemos un teorema importante en el estudio conciso de la categoría de módulos sobre un anillo R.

Teorema 1.6.23. *Sea R un anillo asociativo con uno. Entonces existen correspondencias biyectivas entre:*

1. *Prerradicales exactos izquierdos en R-Mod.*
2. *Teorías de pretorsión hereditarias en R-Mod.*
3. *Filtros lineales izquierdos en R.*

$\square$

Agregando la idempotencia a cada uno de los involucrados se tiene:

Teorema 1.6.24. *Sea R un anillo asociativo con uno. Entonces existen correspondencias biyectivas entre:*

1. *Radicales exactos izquierdos en R-Mod.*
2. *Teorías de torsión hereditarias en R-Mod.*
3. *Filtros izquierdos de Gabriel en R.*

$\square$

Nos disponemos a agregar dos incisos más a los teorema anteriores, primero:

Lemma 1.6.25. *Sea R un anillo asociativo con uno, sea k un prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$ pongamos $\mathcal{K}$:*

$$I \in \mathcal{K} \Leftrightarrow k(I) = R.$$

Entonces $\mathcal{K}$ así definido es un filtro lineal izquierdo en R.

Demostración. Como k es inflatoria se tiene

$$k(R) = R$$

esto asegura que $R \in \mathcal{K}$.

Considere un par de ideales I y J con $I \subseteq J$ y $I \in \mathcal{K}$, como k es monótona se tiene que

$$R = k(I) \subseteq k(J) \subseteq R$$

por lo que $k(J) = R$ y así $J \in \mathcal{K}$ Por lo tanto $\mathcal{K}$ es no vacío y es una sección superior de $\Lambda(R)$. Veamos que es filtro consideremos I y J elementos en $\mathcal{K}$, entonces

$$k(I) = R = k(J)$$

por lo que siendo k un prenúcleo tenemos

$$R = k(I) \cap k(J) \subseteq k(j \cap I) \subseteq R$$

lo que da

$$k(I \cap J) = R$$

y así

$$I \cap J \in \mathcal{K}.$$

Finalmente veamos que $\mathcal{K}$ es lineal. Considere cualquier ideal $I \in \mathcal{K}$ para cada $r \in R$ tenemos

$$k((I : r)) = (k(I) : r) = (R : r) = R$$

por lo tanto $(I : r) \in \mathcal{K}$.

□

Lemma 1.6.26. *Sea R un anillo asociativo con uno, y $\mathcal{K} \in R - fil$ y sea k la función dada como:*

$$r \in k(I) \Leftrightarrow (I : r) \in \mathcal{K}$$

para cada $r \in R$ y cada $I \in \Lambda(R)$ Entonces k es un prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$.

Demostración. Considere cualquier ideal izquierdo de R, I y sea $r \in I$. Entonces $(I : r) = R$ y así $(I : r) = R$ por lo que $(I : r) \in \mathcal{K}$ y por lo tanto $r \in k(I)$ y así k es inflatoria.

Ahora veamos la monotonía, sean $I \subseteq J$ ideales izquierdos en R y sea $r \in k(I)$ cualquier elemento, entonces $(I : r) \subseteq (J : r)$ por lo que en vista de la definición de k se tiene que $(I : r) \in \mathcal{K}$ y como $\mathcal{K}$ es filtro lineal se tiene que $(J : r) \in \mathcal{K}$ por lo que k es monótona.

Considere cualesquiera ideales I y J y $r \in k(I) \cap k(J)$, entonces

$$(I \cap J : r) = (I : r) \cap (J : r) \in \mathcal{K}$$

como $\mathcal{K}$ es filtro entonces $r \in k(I \cap J)$ por lo que k es un prenúcleo. Por último veamos que k es deferente, para esto considere un ideal izquierdo arbitrario I y $r \in R$ entonces para cualquier $s \in R$ tenemos

$$s \in k((I : r)) \Leftrightarrow ((I : r) : s) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow (I : sr) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow sr \in k(I) \Leftrightarrow s \in (k(I) : r)$$

lo cual da el resultado.

□

Ahora veamos que estas asignaciones forman una biyección.

Lemma 1.6.27. *Las asignaciones definidas en 1.6.25 y 1.6.26 son inversas mutuas.*

Demostración. Sea k un prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$ y sea $\mathcal{K}_k$ su filtro lineal asociado pongamos $k' = k_{\mathcal{K}_k}$. Entonces: Para cada ideal izquierdo I de R y cada elemento $r \in R$ tenemos

$$r \in k'(I) \Leftrightarrow (I : r) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow k((I : r)) = R \Leftrightarrow r \in k(I)$$

por lo tanto $k = k'$.

Ahora sea $\mathcal{K}$ un filtro lineal en R y pongamos $k_{\mathcal{K}}$ su prenúcleo deferente asociado sea $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_{k_{\mathcal{K}}}$ el filtro que este determina. Entonces para cada ideal izquierdo I de R tenemos

$$I \in \mathcal{K}' \Leftrightarrow k(I) = R \Leftrightarrow 1 \in k(I) \Leftrightarrow I = (I : 1) \in \mathcal{K}$$

por lo tanto $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$. □

Por último agreguemos la condición de idempotencia a nuestras construcciones.

Lemma 1.6.28. *Sea R un anillo asociativo con uno y sean k y $\mathcal{K}$ el prenúcleo deferente en $\Lambda(R)$ y el filtro lineal en R tales que $k = k_{\mathcal{K}}$ y $\mathcal{K}_k = \mathcal{K}$ respectivamente. Entonces k es idempotente precisamente cuando $\mathcal{K}$ es un filtro de Gabriel.*

Demostración. Supongamos que k es idempotente, entonces basta ver que $\mathcal{K}_k = \mathcal{K}$ su filtro asociado cumple la condición para cualquier ideal izquierdo $J \in \mathcal{K}$ y cualquier I ideal izquierdo de R tal que :

$$(\forall r \in R)(r \in J \Rightarrow (I : r) \in \mathcal{K})$$

entonces $I \in \mathcal{K}$.

Para cada $r \in R$ tenemos

$$r \in J \Rightarrow (I : r) \in \mathcal{K} \Rightarrow r \in k(I)$$

por construcción de k, entonces $J \subseteq k(I)$ obtenemos

$$k(J) \subseteq k^2(I) = k(I)$$

por ser k idempotente pero en vista de $J \in \mathcal{K}$ se tiene que $k(J) = R$ y así $k(I) = R$ por lo que $I \in \mathcal{K}$ como se deseaba.

Ahora supongamos que $\mathcal{K}$ es un filtro de Gabriel, basta ver que $k^2 \leq k$, para este fin consideremos cualquier ideal izquierdo I y cualquier $s \in k^2(I)$, necesitamos que $s \in k(I)$, es decir, $(I : s) \in \mathcal{K}$. Pongamos $J = (I : r)$, como k es deferente tenemos que

$$k(J) = k((k(I) : s)) = (k^2(I) : s) = R$$

por lo que $J \in \mathcal{K}$ ahora aquí es justo donde utilizamos la propiedad de ser filtro de Gabriel, para cada elemento $r \in$ tenemos que:

$$r \in J \Rightarrow rs \in k(I) \Rightarrow (I : sr) \in \mathcal{K} \Rightarrow ((I : s) : r) \in \mathcal{K}$$

y entonces $(I : s) \in \mathcal{K}$ como se deseaba.

□

En vista de 1.6.21, 1.6.27 y de 1.6.23 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.6.29. *Sea R un anillo asociativo con uno. Entonces existen correspondencias biyectivas entre:*

1. *Prerradicales exactos izquierdos en R-*Mod*.*

$$R - \mathrm{lep}$$

2. *Teorías de Pretorsión Hereditarias en R-*Mod*.*

$$R - \mathrm{pretors}$$

3. *Filtros lineales izquierdos en R.*

$$R - \mathrm{fil}$$

4. *Derivadas globales en R-*Mod*.*

$$D(R - \mathrm{Mod})$$

5. *prenúcleos deferentes en $\Lambda(R)$.*

$${}_R P(\Lambda(R))$$

□

Y por 1.6.28, 1.6.22 y el teorema 1.6.24 se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.6.30. *Sea R un anillo asociativo con uno. Entonces existen correspondencias biyectivas entre:*

1. *Radicales exactos izquierdos en* R-Mod.

$$R - \mathrm{ler}$$

2. *Teorías de Torsión Hereditarias en* R-Mod.

$$R - \mathrm{tors}$$

3. *Filtros izquierdos de Gabriel en* R.

$$R - \mathrm{gab}$$

4. *Operadores cerradura globales en* R-Mod.

$$C(R - \mathrm{Mod})$$

5. *Núcleos deferentes en* $\Lambda(R)$.

$$_R N(\Lambda(R))$$

□

Este último teorema muestra la importancia del estudio de derivadas sobre $\Lambda(R)$ además que los dos últimos incisos nos dicen que el estudio global en R-Mod equivale al estudio local en $\Lambda(R)$.

1.6.1. Dimensiones para módulos

Para finalizar esta sección veremos cómo el análisis descrito en 1.4 en particular en 1.5, se puede mimetizar a la categoría de módulos, esto sólo se mencionará, el contenido está en [Sim14f] y [Sim14d].

Definición 1.6.1. *Sea R un anillo asociativo con uno, y* $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$ *su categoría de módulos*

(1) Una clase de módulos $\mathcal{A}$ es abstracta*, si es cerrada bajo isomorfismos. Denotemos por $\mathbb{A}(R)$ a la familia de todas las clases abstractas en* $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$.

(2) *Una clase de módulos $\mathcal{B}$ es* básica *si es abstracta y cerrada bajo subcocientes. Denotemos por $\mathbb{B}(R)$ a la familia de dichas clases.*

(3) *Una clase de módulos $\mathcal{C}$ es de* congruencia *si es básica y cerrada bajo extensiones, es decir, es una clase de Serre. Denotemos por $\mathbb{C}(R)$ a la familia de dichas clases.*

(4) *Una clase de módulos $\mathcal{D}$ es de* división *si es de congruencia y además es cerrada bajo coproductos arbitrarios de familias en $\mathcal{D}$. Denotemos por $\mathbb{D}(R)$ a la familia de tales clases.*

Observación 1.6.2. *(1) Notemos que podemos identificar $\mathbb{D}(R)$ con $\mathrm{R-tors}$, ya que la definición de clase de división es simplemente la definición de clase de torsión hereditaria ó clase localizante de la categoría de módulos.*

(2) *También nótese que en este contexto podemos definir, las derivadas $\mathbb{C}ng$ y $\mathbb{D}vs$ por lo que $\mathbb{C}(R)$ y $\mathbb{D}(R)$ son marcos y claro $\mathbb{B}(R)$ es un gran marco.*

(3) *En esta terminología se puede, mejorar 1.6.29, simplemente observe que podemos debilitar la noción de clase de división y obtener el concepto de clase* laxa*, es decir, una clase básica de módulos cerrada bajo coproductos arbitrarios, y como se hace en [Sim14d] teorema 8.7, se puede probar que hay una correspondencia biyectiva entre clases laxas en una categoría de módulos y derivadas globales en la categoría.*

(4) *También se pueden definir los conjuntos básicos en $\mathbb{B}(R)$, de $\mathbb{C}rt$, $\mathbb{S}mp$, $\mathbb{D}cc$, $\mathbb{A}cc$, $\mathbb{C}mp$, $\mathbb{F}ll$, $\mathbb{M}id$ y $\mathbb{N}id$ de módulos $\mathcal{B}$*-críticos, simples, artinianos, neterianos, complementados, plenos *éstos determinan derivadas en $\mathbb{B}(R)$, y la prueba de que en efecto son derivadas y éstas forman conjuntos básicos se sigue del hecho de $\mathbb{M}id$ y $\mathbb{N}id$ dan a lugar a conjuntos básicos, las pruebas de esto están contenidas en [Sim14d] y [Sim14f], las pruebas son análogas a las dadas en 1.5.2 y 1.5.7. En [Sim14d] se introduce una nueva derivada sobre las clases básicas y conjuntos básicos sobre una categoría y sobre cualquier idioma, a saber el conjunto de módulos e intervalos acotados.*

(5) *Es importante mencionar que también tenemos $\mathbb{G}ab = \mathbb{D}vs \circ \mathbb{S}mp = \mathbb{D}vs \circ \mathbb{C}rt = \mathbb{D}vs \circ \mathbb{D}cc$, esto se sigue, de la descripción de $\mathbb{D}vs$, como en el caso para idiomás 1.4.32, sólo que aquí si se utilizan propiedades de la categoría de módulos (capsulas inyectivas), la descripción está en la proposición 2.5 de [Ste75] y el análogo de 1.4.32 en el caso de módulos está en [Sim14d] lema 8.23.*

La forma de ligar el análisis hecho en 1.5, es como sigue:

Definición 1.6.3. *Sea R un anillo y M un módulo izquierdo sobre R, para una clase arbitraria de módulos $\mathcal{A}$, pongamos*

$$\langle M \rangle (\mathcal{A})$$

el conjunto de intervalos $[A, B]$ de $\Lambda(M)$ dado por

$$[A, B] \in \langle M \rangle (\mathcal{A}) \Leftrightarrow B/A \in \mathcal{A}$$

*a ese conjunto de intervalos se le llama M-*rebanada *de $\mathcal{A}$.*

Con esto en mente, no es difícil probar el siguiente lema.

Lema 1.6.4. *Sea R un anillo, y M un módulo izquierdo sobre R, entonces:*

1. *Si $\mathcal{A} \in \mathbb{A}(R)$, entonces $\langle M \rangle (\mathcal{A}) \in \mathcal{A}(\Lambda(M))$*
2. *Si $\mathcal{B} \in \mathbb{B}(R)$, entonces $\langle M \rangle (\mathcal{B}) \in \mathcal{B}(\Lambda(M))$.*
3. *Si $\mathcal{C} \in \mathbb{C}(R)$, entonces $\langle M \rangle (\mathcal{C}) \in \mathcal{C}(\Lambda(M))$.*
4. *Si $\mathcal{D} \in \mathbb{D}(R)$, entonces $\langle M \rangle (\mathcal{D}) \in \mathcal{D}(\Lambda(M))$.*

$\square$

De hecho se puede mejorar lo anterior.

Lema 1.6.5. *Sea R un anillo y M un módulo izquierdo sobre R, entonces la construcción de la rebanada por M, determina una función $\langle M \rangle (\_) : \mathbb{B}(R) \to \mathcal{B}(\Lambda(M))$, más aún esta función es un morfismo de retículas completas, es decir, pasa a través de supremos e ínfimos arbitrarios.*

$\square$

Definición 1.6.6. *Sea R un anillo y M un módulo izquierdo sobre R, consideremos derivadas $(\mathbb{O}pr, \mathcal{O}pr)$ sobre $\mathbb{B}(R)$ y $\mathcal{B}(\Lambda(M))$, diremos que éstas están* empareja-das *o que forman un* encuentro *para R si:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(R) \arrow[r, "\langle M \rangle (_)"] \arrow[d, "\mathbb{O}pr"'] & \mathcal{B}(\Lambda(M)) \arrow[d, "\mathcal{O}pr"] \\
\mathbb{B}(R) \arrow[r, "\langle M \rangle (_)"'] & \mathcal{B}(\Lambda(M))
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, para cada $\mathcal{B} \in \mathbb{B}(R)$, se tiene que $\langle M \rangle (\mathbb{O}pr(\mathcal{B})) = \mathcal{O}pr(\langle M \rangle (\mathcal{B}))$.

Observación 1.6.7. *(1) Ya tenemos varias derivadas asociadas a* $\mathbb{B}(R)$ *y* $\mathcal{B}(\Lambda(M))$ *que forman un encuentro para* R*, esta son* $(\mathbb{C}ng, \mathcal{C}ng)$*,* $(\mathbb{D}vs, \mathcal{D}vs)$*,* $(\mathbb{C}rt, \mathcal{C}rt)$*,* $(\mathbb{S}mp, \mathcal{S}mp)$*,* $(\mathbb{D}cc, \mathcal{D}cc)$*,* $(\mathbb{A}cc, \mathcal{A}cc)$*,* $(\mathbb{C}mp, \mathcal{C}mp)$*,* $(\mathbb{F}ll, \mathcal{F}ll)$*,* $(\mathbb{G}ab, \mathcal{G}ab)$*,* $(\mathbb{B}oy, \mathcal{B}oy)$*.*

(2) Es importante mencionar otros tipos de técnicas ligadas con la rebanada, por ejemplo considere $\mathbb{S}mp(\mathcal{O})$ *la clase básica de todos los simples, defina* $soc_M(A) = \sum\{X \mid A/X \in \mathbb{S}mp(\mathcal{O})\}$*, para un módulo* M *y un submódulo* A *de* M*, esta operación determina una derivada en* $\Lambda(M)$*, de hecho* $soc_M(A)/A = Zoc(M/A)$*, por lo que iterando este proceso obtenemos la serie de Loewy usual, relativizando esta construcción con respecto a una clase de división (una clase de torsión hereditaria)* $\mathcal{T}$ *y usando en vez de los simples, los módulos* $\mathcal{T}$*-críticos,* $\mathbb{C}rt(\mathcal{T})$*, y utilizando el núcleo global determinado por* $\mathcal{T}$*,* $j_\bullet$*, se puede definir* $Soc_{\mathcal{T}}(M) = j_M(\sum\{X\})$ *tales que* $X \subseteq M$ *con* $X \in \mathbb{C}rt(\mathcal{T})$ *y a su vez rebanando* $\mathcal{T}$ *por* M *obtenemos un conjunto de división y a éste por 1.4.32 le corresponde un único núcleo sobre el idioma* $\Lambda(M)$*, que es justamente* j_M *y así relativizando el zoclo,* $soc_{j_M} = soc_{\mathcal{T},M}$ *como en 1.5.35, por lo tanto tenemos una asignación* $(\mathcal{T}, M) \longmapsto soc^{\infty}_{\mathcal{T},M}$ *éste es el núcleo en* Λ *obtenido como en 1.5.36, ésta es una versión de la rebanada de la derivada de Gabriel* $\mathbb{G}ab$ *en* $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$*, es decir, cada núcleo global deferente en la categoría de módulos* $j_\bullet$ *o lo que es lo mismo cada clase de división determina de manera única un núcleo en cada idioma* $\Lambda(M)$*, que esta asignación es biyectiva se sigue de estas observaciones y de 1.6.24.*

En este sentido un resultado fundamental en esta teoría es:

Teorema 1.6.8. *Sea* R *un anillo y* $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ *entonces,*

$$\langle M\rangle(\mathbb{G}ab^{\alpha}(\mathcal{B})) = \mathcal{G}ab^{\alpha}(\langle M\rangle(\mathcal{B}))$$

$$\langle M\rangle(\mathbb{B}oy^{\alpha}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}oy^{\alpha}(\langle M\rangle(\mathcal{B}))$$

para cada clase básica $\mathcal{B}$ *y cada ordinal* α

□

Observación 1.6.9. *(1) Este es uno de los puntos esenciales de esta teoría, para medir la dimensión* $\mathbb{K}pr$ *relativa a una clase básica* $\mathcal{B}$ *de un módulo* M *basta con observar que está en el idioma* $\Lambda(M)$ *con respecto a* $\mathcal{K}pr$ *relativa al conjunto básico* $\langle M\rangle(\mathcal{B})$*, aquí* $\mathbb{K}pr$ *y* $\mathcal{K}pr$ *son Gabriel y Boyle en cada caso.*

(2) Con estas ideas se puede probar una versión del teorema del de Hopkins-Levitzki, [Sim14d].

(3) Por último es importante mencionar que las iteraciones de $(\mathbb{G}ab, \mathcal{G}ab)$ y $(\mathbb{B}oy, \mathcal{B}oy)$ definen filtraciones en la categoría de módulos y en el conjunto de todos los intervalos del idioma respectivo, un análisis más detallado de esto lo podemos encontrar en [Sim14f] y un enfoque distinto se verá en el capítulo 3.

1.7. Ejemplos

En esta sección daremos ejemplos de derivadas sobre idiomás particulares.

(1) Considere un espacio topológico S, denotemos por $\mathcal{C}(S)$ y $\mathcal{O}(S)$, los cerrados y los abiertos de S. Para dos cerrados de S, X y Y diremos que Y es una *parte esencial* de X, si $Y \subset X$ y $X = (X - Y)^-$, donde $^-$ denota la cerradura, esta es la noción 1.5.42, pongamos $lim_S(X) = (\bigcup \{Y \in \mathcal{C}(S) \mid Y \subset \cdot X\})^-$, esta operación se le conoce como *proceso de Cantor-Bendixson* de S, se puede probar que si el espacio topológico es T_0 entonces $lim_S(X)$ consta de los puntos límite de X, de hecho tomando complementos de los cerrados, es decir, viendo todo en el marco $\mathcal{O}(S)$, $lim_S(X)$ corresponde a la derivada de Cantor-Bendixson del espacio S. De aquí el nombre de derivadas, un análisis formal de esta situación se encuentra en [Sim06b] y [Sim14g].

(2) Si Γ es un conjunto parcialmente ordenado, podemos considerar los intervalos de Γ, y así poder definir

$$[a, b] \in drf(\mathcal{A})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall f : \mathbb{Q} \to [a, b] \text{ monótona, existen } p < q \text{ con } [f(p), f(q)] \in \mathcal{A}$$

donde $\mathbb{Q}$ son los racionales y $\mathcal{A}$ es un conjunto básico de intervalos de Γ, uno puede observar que dfr es un operador de cerrado sobre los conjuntos básicos, algunas ideas alrededor de esto se centran en el concepto de desviación de un copo, ver por ejemplo [Sim91].

(3) Si uno ve a $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ como conjuntos linealmente ordenados entonces se puede probar que aquí los intervalos simples son todos los intervalos triviales.

(4) Muchas derivadas interesantes están definidas en el marco $\mathrm{R-tors}$ de teorías de torsión hereditarias de un anillo R.

(i) La derivada de Gabriel.

Dada $\tau \in R{-}tors$ definimos $d_g(\tau) = \tau \vee (\bigvee \{\xi(M) \mid M \text{ es } \tau - \text{cocrítico}\})$, note que esta derivada no es más que 1.5.57, para este caso particular.

(ii) Dadas dos teorías de torsión τ y σ, como estamos en un marco, entonces éste tiene implicación. Diremos que τ es *prima derecha* para σ si $\sigma = (\tau \succ \sigma)$ también σ es grande sobre τ si y sólo si $\tau \leq \sigma$ y σ es prima derecha para τ, lo cual denotamos por $\tau << \sigma$

Con esta notación tenemos una derivada $d_{cb}(\tau) = \bigwedge \{\sigma \mid \tau << \sigma\}$ a esta derivada se le conoce como la *derivada de Cantor-Bendixson*.

(iii) Dada un teoría de torsión τ, diremos que un módulo M es τ-*pleno* si y sólo si M es libre de τ-torsión y un submódulo de M es τ-denso en M siempre y cuando éste es esencial en M.

Con esto en mente definimos la siguiente derivada en $R - tors$,

$$d_b(\tau) = \tau \vee (\bigvee \xi(M) \mid M \text{ es } \tau - \text{ pleno })$$

En efecto de la definición tenemos que $\tau \leq d_b(\tau)$ para toda τ, ahora bien si $\sigma \leq \tau$, sea M σ-denso, si M no es de $d_b(\tau)$-torsión entonces $M' = M/t_\tau(M)$ es libre de τ-torsión, si $N' = N/t_\tau(M)$ es esencial en M' entonces N es esencial en M por lo que N' es σ-denso en M' y por lo tanto τ-denso ahí por lo que M' es τ-pleno y así de $d_b(\tau)$-torsión. Entonces de la sucesión

$$0 \longrightarrow t_\tau(M) \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

vemos que M es de $d_b(\tau)$-torsión. Por lo tanto $d_b(\sigma) \leq d_b(\tau)$, a esta derivada se le llama la derivada de *Boyle*.

Capítulo 2

Totalizadores y Dimensiones para derivadas sobre un idioma

En este capítulo veremos algunos resultados de la investigación realizada en este proyecto, como su nombre lo dice estudiaremos *totalizadores* de derivadas sobre un idioma. En vista de 1.6 en particular 1.6.29 y 1.6.30, vemos cómo de alguna manera, las derivadas en ese caso particular están relacionadas con los prerradicales, por lo que, varios métodos del estudio de éstos pueden ser trasladados al contexto de derivadas. En la serie de artículos [RMR+02], [RRR+02], [RSR+04],[RRR+05] y [RRR+09], los autores estudian prerradicales desde un punto de vista reticular, obteniendo resultados interesantes propios de la teoría de prerradicales con aplicaciones a la teoría de anillos y módulos, en particular en [RRR+02] se introducen operadores en los prerradicales, definidos en base a las operaciones adicionales que $\mathrm{R}-\mathrm{pr}$ tiene, éstos son igualadores, totalizadores, anuladores, coigualadores. En base a esto, el producto de derivadas (la composición), que se puede entender, como un buen análogo al coproducto $(\_ : \_)$ en los prerradicales, introducimos con este producto dos operadores de derivadas, el totalizador y el igualador de una derivada, esto en la primera sección, damos algunas propiedades básicas de estos. Después nos especializamos en los totalizadores y encontramos cómo éstos están relacionados con las nociones de dimensión en derivadas estables y así caracterizamos algunas de éstas. Por último se mencionan algunas nociones de los usos de los igualadores.

2.1. Operadores en $D(A)$

En esta sección introducimos los totalizadores y los igualadores de una derivada d sobre un idioma A, veremos cómo éstos generan bloques de derivadas en vista de la relación de equivalencia que nos definen.

Definición 2.1.1. Fijemos una derivada $d \in D(A)$ y consideremos los conjuntos siguientes:

$$\mathcal{I}_e(d) = \{z \in D(A) \mid zd = d\}$$

y

$$\mathcal{I}_t(d) = \left\{z \in D(A) \mid zd = \bar{d}\ \right\}$$

El conjunto de *igualadores* y *totalizadores* de d.

Los conjuntos anteriores son no vacíos ya que en (1) está $d_{\underline{0}}$ y en (2) está $\bar{d}$ entonces es natural pensar en

$$\bigvee \mathcal{I}_e(d) := e(d)$$

y

$$\bigwedge \mathcal{I}_t(d) := t(d).$$

A estas derivadas les llamaremos el *igualador* de d y el *totalizador* de d respectivamente, noten que en vista de 1.1.5 (4) y (5) tenemos, $e(d)d = d$ y $t(d)d = \bar{d}$.

Proposición 2.1.2. Sea A un idioma, $d, d' \in D(A)$ cualesquiera derivadas, y $\mathcal{I}$ una familia no vacía de derivadas sobre A. Entonces:

(1) $e(d)$ es idempotente.

(2) $e(d) \leq d$.

(3) $e(d) = d$ si y sólo si $d \in C(\mathcal{M})$.

(4) Si $d \leq d'$ entonces $t(d') \leq t(d)$.

(5) $t(d_{\underline{0}}) = \bar{d}$ y $t(\bar{d}) = d_{\underline{0}}$.

(6) $t(\bigvee \mathcal{I}) \leq \bigwedge \{t(d) \mid d \in \mathcal{I}\}$.

(7) $t(\bigwedge \mathcal{I}) \geq \bigvee \{t(d) \mid d \in \mathcal{I}\}$.

Demostración. (1)

$[e(d)e(d)]d = e(d)[e(d)d] = e(d)d = d$ por lo tanto $e(d)e(d) \leq e(d)$ por lo que la igualdad se sigue de 1.1.4.

(2)

Si $z \in \mathcal{D}_e(d)$ entonces $zd = d$ pero por 1.1.4 se tiene que $z \leq d$ por lo que $e(d) \leq d$.

(3)

Es obvio de (2) ya que $d^2 = d$ por lo que $d \leq e(d)$. Las propiedades para el totalizador son directas. $\square$

La derivada $e(d)$ tiene la siguiente representación.

Proposición 2.1.3. Sea $d \in D(A)$ una derivada entonces $e(d) = \bigvee \{z^\infty \mid z \in \mathcal{I}_e(d)\}$ en $C(A)$.

Demostración. Primero notemos que por definición se tiene que $z \leq e(d)$ para toda $z \in \mathcal{I}_e(d)$ por lo que $z^\infty \leq e(d)$ por lo tanto $\bigvee \{z^\infty \mid z \in \mathcal{I}_d\} \leq e(d)$ en $C(A)$ siendo $e(d)$ idempotente se tiene la igualdad.

$\square$

Para tener una mejor descripción del totalizador de una derivada d, consideremos la siguiente derivada.

Dada $b \in A$ fija y cualquier a.

$$O_b(a) = \begin{cases} \bar{1} & \text{si } a \geq b \\ a & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Proposición 2.1.4. Dada cualquier derivada $d \in D(A)$ se tiene que su totalizador $t(d)$ es justamente la derivada $O_{d(0)}$.

Demostración. Para derivada $O_{d(0)}$ notamos que $O_{d(0)}(d(0)) = \bar{1}$ por definición de $O_{d(0)}$ siendo d derivada se tiene que siempre $d(0) \leq d(a)$ por lo que $O_{d(0)}d = d_{\bar{1}}$, ahora notemos que

$$O_{d(0)} = \bigwedge \{z \in D(A) | z(d(0)) = \bar{1}\} = h$$

Claramente $O_{d(0)} \leq h$ y $O_{d(0)}(d(0)) = \bar{1}$ por lo tanto se da la igualdad ahora noten que este es justamente $t(d)$. $\square$

También observe que $O_b^2 = O_b$ sencillamente de la definición, por lo tanto $t(d) \in C(A)$.

Así tenemos dos familias distinguidas de derivadas en A:

$$\mathrm{Eq}(D(A)) = \{e(d) \mid d \in D(A)\}$$

y

$$\mathrm{Tot}(D(A)) = \left\{O_{d(0)} \mid d \in D(A)\right\}$$

Proposición 2.1.5. $O_{d(0)} \leq O_{d'(0)}$ si y sólo si $d'(0) \leq d(0)$

Demostración. Supongamos que $O_{d(0)} \leq O_{d'(0)}$, entonces si $d'(0) > d(0)$ se tiene que $o_{d(0)}(d(0)) = 1$ y $O_{d'(0)}(d(0)) = d(0)$ pero por hipótesis $\bar{1} \leq d(0)$ lo cual no sucede, ahora si $d'(0)$ y $d(0)$ no son comparables entonces sucedería lo mismo por lo tanto $d'(0) \leq d(0)$.

Si $d'(0) \leq d(0)$, sea $a \in A$. Tenemos casos

(1) $d'(0) < a < d(0)$ entonces $O_{d(0)}(a) = a \leq O_{d'(0)}(a) = \bar{1}$

(2) $d'(0) \leq d(0) \leq a$ entonces $O_{d(0)}(a) = \bar{1} = O_{d'(0)}(\bar{1}) = \bar{1}$

(3) $a > d'(0)$ y $d(0) > d'(0)$ entonces $O_{d(0)}(a) = a \leq O_{d'(0)}(a) = \bar{1}$

(4) $d(0) \geq a$ entonces $O_{d(0)}(a) = a = O_{d'(0)}(a)$

(5) Si no se compara con ninguna entonces $O_{d(0)}(a) = O_{d'(0)}(a)$

□

Tomemos un subconjunto no vacío $\mathcal{G}$ de $\operatorname{Tot}(D(A))$ y consideremos $\mathcal{I} = \left\{d \in D(A) \mid O_{d(0)} \in \mathcal{G}\right\} = t^{-1}(\mathcal{G})$, pongamos $\bigvee \mathcal{I} = \Phi$ y $\bigwedge \mathcal{I} = \Psi$, ahora notemos que $O_{d(0)} \leq \bigvee \mathcal{G}$ con $O_{d(0)} \in \mathcal{G}$ pero (2.1.5) $O_{d(0)} \leq O_{\Psi(0)}$ para cada $O_{d(0)} \in \mathcal{G}$ es decir, $O_{\Psi(0)}$ es cota superior de la familia $\mathcal{G}$, por otro lado si existe $O_{z(0)} \in \operatorname{Tot}(D(A))$ tal que $O_{d(0)} \leq O_{z(0)}$ para todo $O_{d(0)} \in \mathcal{G}$ entonces por 2.1.5 $d(0) \geq z(0)$ para toda $d \in \mathcal{I}$, por lo que $O_{\Psi(0)} \leq O_{z(0)}$, es decir, $O_{\Psi(0)}$ es el supremo de la familia $\mathcal{G}$ en $\operatorname{Tot}(D(A))$, análogamente se demuestra que $O_{\Phi(0)}$ es el ínfimo de la familia $\mathcal{G}$ en $\operatorname{Tot}(D(A))$ (denotemos por $\bigvee_t$ y $\bigwedge_t$ al supremo e ínfimo en $\operatorname{Tot}(D(A))$). Por lo tanto $\operatorname{Tot}(D(A))$ es una retícula completa, resumiendo:

Proposición 2.1.1. *Sea A un idioma, y $\operatorname{Tot}(D(A))$ el conjunto de totalizadores sea $\mathcal{G}$ una familia no vacía de totalizadores con $\mathcal{I}$ su conjunto asociado de derivadas, entonces:*

1. $O_{\bigwedge \mathcal{I}(\underline{0})}$ *es el supremo de la familia $\mathcal{G}$.*
2. $O_{\bigvee \mathcal{I}(\underline{0})}$ *es el ínfimo de la familia $\mathcal{G}$.* □

Observación 2.1.2. *(1) De la descripción del totalizador, se sigue que*

$$t(t(d)) = \bar{d}.$$

(2) Un hecho interesante del comportamiento de los ínfimos y supremos en $\operatorname{Tot}(D(A))$ con respecto a las distributividades de A, es que éstas se invierten en los totalizadores, dependiendo si A es idioma o marco.

(3) Notemos que para cualquier derivada z sobre A, tenemos

(3.1) $zO_a = z \vee O_a$.

(3.2) El producto como derivadas en $\operatorname{Tot}(D(A))$ *es conmutativo.*

3.1 Sea $b \in A$ entonces $(z \vee O_a)(b) = z(b) \vee O_a(b) = 1$ si $b \geq a$ en el otro caso cuando $O_a(b) = b$ se tiene que $z(b) \vee O_a(b) = z(b)$ y esto es igual a zO_a.

3.2 es consecuencia inmediata de 3.1 ya que:

$$O_aO_b = O_a \vee O_b = O_b \vee O_a = O_bO_a.$$

2.2. Particiones inducidas por el totalizadores y derivadas

En esta sección consideramos los operadores $e(d)$ y $t(d)$ éstos definen particiones en $D(A)$.

Dadas dos derivadas d_1 y d_2 en A diremos que $d_1 \sim_t d_2$ si y sólo si $t(d_1) = t(d_2)$ es decir, en vista de 2.1.4 $d_1 \sim_t d_2$ si y sólo $O_{d_1(0)} = O_{d_2(0)}$ (es decir, $d_1(0) = d_2(0)$). Entonces consideramos el conjunto de clases de equivalencia $D(A)/\sim_t$, y por 1.1.5 se tiene que los bloques de la relación anterior son intervalos, denotemos a estos bloques como $[d]_t$.

Para describir estos intervalos primero recordemos la derivada 1.1.2 2.1, ι_a, para cada $a \in A$, notemos que si $z \in [d_{\underline{0}}]_t$ entonces $d_{\bar{1}} = t(d_{\underline{0}}) = t(z)$ entonces, para toda d' distinta de $\bar{d}$ se tiene $d'z \neq \bar{d}$ en particular $\iota_a z \neq \bar{d}$ por lo que existe $b \in A$ tal que $z(b) = 0$ y recordando que a en este caso tiene que ser $a = z(0) = 0$, es decir, $\iota_a = \iota_{z(0)} = \iota_0$ por lo que $\iota_0 \in [d_{\underline{0}}]_t$ y así $[d_{\underline{0}}]_t = [d_{\underline{0}}, \iota_0]$ y para $\bar{d}$ se tiene que $[\bar{d}]_t = \{\bar{d}\}$.

Ahora observemos qué sucede para las derivadas de la forma ι_a (2.1 1.1.2), primero sea $d \in D(A)$ tal que $d\iota_a = \bar{d}$, es decir, $d\iota_a = \iota_{d(a)} = \bar{d} = \iota_{\bar{1}}$ por lo que $d(a) = \bar{1}$, es decir d totaliza a ι_a si y sólo si $d(a) = \bar{1}$, también $\iota_a^2 = \bar{d}$ entonces $O_{\iota_a(0)=a} \leq \iota_a$.

Por otro lado si d es una derivada en A tal que $O_a d = \bar{d}$ entonces por definición de O_a se tiene que $d(b) \geq a$ para todo $b \in A$, y así considerando $\bigwedge \{d \mid O_a d = \bar{d}\} = h$ notamos que, $h(a) = a$ y para cualquier otro $b \neq a$ en A se tiene que $h(b) \geq a$ es decir, $h \leq u_a$ ($u_a(b) = a \vee b$), pero claramente u_a es totalizada por O_a por lo que $u_a = h$, de hecho $t(u_a) = O_a$, es decir, $u_a \in [\iota_a]_t$ por lo que $[\iota_a]_t = [u_a, \iota_a]$.

Ahora en el caso general, si consideramos $d \in D(A)$ ya es sencillo describir $[d]_t$ puesto que d siempre ésta relacionado con $\iota_{d(0))}$, por lo que $[d]_t = [\iota_{d(0)}]_t =$

$[u_{d(0)}, \iota_{d(0)}] = [d]_t$, y estos intervalos son colapsados por $t(\_)$. Denotemos por $D(A)_t := D(A)/\sim_t$.

Todo lo anterior muestra:

Proposición 2.2.1. Sea A un idioma entonces:

(1) Para cada $d \in D(A)$ su bloque en $D(A)_t$, $[d]_t$ es el intervalo $[u_{d(0)}, \iota_{d(0)}]$.

(2) Hay una biyección entre entre $\mathrm{Tot}(D(A))$ y el conjunto de estos intervalos.

$\square$

Aquí hay que mencionar que, utilizamos los operadores u_a éstos en el caso de que A no sea marco resultan ser sólo derivadas idempotentes y no núcleo, pero en las observaciones previas a 2.2.1 no se utiliza esta propiedad.

Por otro lado fijemos un $z \in D(A)$ diremos que d_1 y d_2 derivadas están relacionadas por z, $d_1 \sim_z d_2$ si y sólo si $d_1 z = d_2 z$, claramente esta relación es de equivalencia denotemos por $[d]_z$ la clase equivalencia de d con respecto a z. Observe que tenemos definido una función $D(A) \xrightarrow{\mu^z} D(A)$ dada por $\mu^z(d) = dz$ y así $\mu^{-1}(dz) = [d]_z$, y también en vista de 1.1.5 se tiene que $[d]_z$ es un intervalo, pongamos $[d]_z = [{}_z d, d^z]$ y note que $[d_{\underline{0}}]_z = [d_{\underline{0}}, e(z)]$ y $[\bar{d}]_z = [t(z), \bar{d}] = [O_{z(0)}, \bar{d}]$. Denotemos por $D(A)_z$ a las clases de equivalencia de esta relación.

Para $z \in D(A)$ fija y $d \in D(A)$ pongamos $\eta = dz$. Supongamos por un momento que $z \in C(A)$ entonces $\mu^z(\eta) = \eta$ por lo que $\eta \leq d^z$ pero por otro lado $d^z z = \eta z = \eta$ y así $d^z \leq \eta$, es decir, en este caso $d^z = \eta$.

Por otro lado si z no es idempotente, notemos que $dz = \eta = e(\eta)\eta = e(\eta)d^z z$ es decir, $d^z \leq e(z)d^z \leq d^z$ por lo que $e(\eta)d^z = d^z$, y así

$$e(\eta) \leq e(d^z)$$

Y si $\eta = dz = d^z z = e(d^z)d^z z = e(d^z)dz$ por lo que

$$e(d^z) \leq e(\eta)$$

Por lo tanto $e(\eta) = e(d^z)$.

Ahora consideremos $\mathcal{E} = \{a \mid a = \eta(b) \text{ para algún } b\}$ y formemos las derivadas q_a para cada $a \in \mathcal{E}$, 1.1.2 2.2 notemos que por definición de q_a se tiene $q_a z \geq \eta$ ($z(a) \leq \eta(a)$) por lo que $q_a \geq \eta$ para cada $a \in \mathcal{E}$ por lo tanto $\delta = \bigwedge \{q_a \mid a \in \mathcal{E}\} \geq \eta$ y así $\delta z = \eta$ por lo que ${}_z d \leq \delta \leq d^z$ por lo tanto δ es el mayor idempotente en $[d]_z$ (por A.1.11 δ es idempotente de hecho si η es idempotente entonces $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\eta$ y por lo tanto $\delta = \eta$). Resumiendo:

Proposición 2.2.2. Sea $z \in D(A)$ fija y $d \in D(A)$ pongamos $\eta = dz$ y $\delta = \bigwedge_{a \in \mathcal{E}} q_a$ con $\mathcal{E} = \{a \mid a = \eta(b) \text{ para algún } b\}$ se tiene que:

(1) Si z es idempotente, entonces $\eta = d^z$.

(2) $e(\eta) = e(d^z)$.

(3) $\delta \in [d]_z$ es el mayor idempotente en el intervalo $[d]_z$.

Cabe mencionar que $D(A)/\sim_{d_{\underline{0}}} = D(A)$.

2.3. Totalizadores y dimensión de derivadas estables

Como vimos en 2.2.1 $\mathrm{Tot}(D(A))$ consiste de ciertos intervalos, esta situación es útil por ejemplo, consideremos $A = R\text{-tors}$ donde R es un anillo asociativo con uno, en $R\text{-tors}$ se tiene un prenúcleo,

$$d_g(\tau) = \tau \vee (\bigvee \{\xi(M) \mid M \text{ es } \tau - \text{ cocrítico}\})$$

Es claro que es derivada en A, además de ser prenúcleo, no necesariamente es idempotente, a esta derivada se le conoce como la derivada de *Gabriel* ésta en efecto *mide* la dimensión de Gabriel de la categoría $R - \mathrm{Mod}$, ya que $\mathrm{Tot}(D(A))$ son intervalos podemos considerar $[d_g]_t = [u_{d_g(\xi)}, \iota_{d_g(\xi)}]$, notemos que en el caso extremo $d_g = u_{d_g(\xi)}$ tenemos lo siguiente:

Proposición 2.3.1. Para un anillo R son equivalentes:

(1) $u_{d_g(\xi)} = d_g$.

(2) $R - \mathrm{sp} = \{\chi(S) \mid S \in R - simp\}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $\tau \in R - \mathrm{sp}$ entonces existe un módulo τ-cocrítico tal que $\chi(M) = \tau$, por definición de d_g, tenemos que:

$$d_g(\chi(M)) = \chi(M) \vee \xi(M) = \chi(M) \vee (\bigvee_{S \in R - simp} \xi(S))$$

Por lo que existe un S tal que $t_{\xi(s)}(M) \neq 0$ por lo que $S \leq M$ y así S es esencial en M por lo tanto $E(S) = E(M)$ es decir, $\chi(S) = \chi(M)$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea τ una teoría de torsión propia y M un módulo τ-cocrítico entonces $\chi(M) \in R - \mathrm{sp}$ por lo tanto existe un simple S tal que $\chi(M) = \chi(S)$ por lo tanto $S \in \mathcal{F}_\tau$ por lo que S es τ-cocritico, y así $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(S)$, o lo que es lo mismo $u_{d_g(\xi)} = d_g$

□

Con esta observación a la mano la siguiente afirmación es inmediata.

Proposición 2.3.2. *Son equivalentes para un anillo R :*

(1) R *es semiartiniano izquierdo.*

(2) $d_g = \iota_{d_g(\xi)}$.

(3) $u_{d_g(\xi)} = d_g = \iota_{d_g(\xi)}$

$\square$

Podemos mejorar lo anterior, recordemos que en 1.5.57, para cualquier idioma A, se tiene la derivada de Gabriel $Gab : N(A) \to N(A)$ y está descrita como

$$Gab(j) = \bigvee \{\xi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)\}$$

para cualquier núcleo j, aquí usamos la notación para los núcleos asociados a los conjuntos de división dados por 1.5.56 1.

Proposición 2.3.1. *Son equivalentes para un idioma A:*

(1) $u_{Gab(d_0)} = Gab$*.*

(2) $\mathrm{Gpt}(N(A)) = \{\chi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{S}mp\}$*. Aquí* $\mathrm{Gpt}(N(A))$ *son los puntos de* $N(A)$ *dados por intervalos críticos con respecto a algún núcleo.*

Demostración. Supongamos 1, consideremos cualquier intervalo $[a,b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j) - \mathcal{D}_j$ con respecto a un núcleo j sobre A, y sea $\chi(a,b)$ el núcleo construido en 1.5.72 y por 2 de 1.5.73, $\chi(a,b)$ es un punto en $N(A)$ (más aún en la terminología de [Sim14b] este punto es un G-punto y así $Gab(\chi(a,b)) \neq \chi(a,b)$), como por hipótesis tenemos $Gab(\chi(a,b)) = \bigvee \left\{\xi(x,y) \mid [x,y] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_{\chi(a,b)})\right\} = \chi(a,b) \vee \bigvee \{\xi(x,y) \mid [x,y] \in \mathcal{S}mp\}$, entonces existe un intervalo $[x,y] \in \mathcal{S}mp$ tal que $\xi(x,y)$ no colapsa el intervalo $[a,b]$, por lo que $a \leq \xi(x,y)(a) \wedge b \leq b$ y así $[a, \xi(x,y)(a) \wedge b] \in \mathcal{D}_{\xi(x,y)}$, de hecho por construcción este conjunto de división es $\mathcal{D}vs(\mathcal{B}(x,y))$ (esto esencialmente se sigue de 1.5.56), entonces por 1.4.32 podemos encontrar un subintervalo propio de $[a, \xi(x,y)(a) \wedge b]$, similar al intervalo $[x,y]$ (y por lo tanto es subintervalo de $[a,b]$), esto es por que este intervalo es simple. Ahora notemos que si se tuviera $\chi(a,b)(x) \wedge y = y$ entonces $\xi(x,y) \leq \chi(a,b)$, lo cual no sucede por el razonamiento de arriba, por lo tanto $j \leq \chi(a,b) \leq \chi(x,y)$ Para la otra desigualdad, suponga que $a < \chi(x,y)(a) \leq b$ por lo tanto como $[a,b]$ es j-crítico, entonces $[\chi(x,y)(a) \wedge b, b] \in \mathcal{D}_j$ es decir $b \leq j(\chi(x,y)(a)) \leq b$ entonces $j(b) \leq \chi(x,y)(a)$ (pues $j \leq \chi(x,y)$ y ambos son idempotentes) pero esto implica que el intervalo $[a,b]$ es colapsado por $\chi(x,y)$ y así $[x,y]$ también, lo cual es una contradicción de la propiedad de $\chi(x, y)$, por lo tanto $\chi(x, y)(a) \wedge b = a$, es decir, $\chi(x, y) = \chi(a, b)$.

Ahora suponiendo 2, si consideramos cualquier $[a, b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j) - \mathcal{D}_j$ con j un núcleo distinto de $\bar{d}$, este por [Sim14b] $7{,}14$ es uniforme y así inerte por tanto $\chi(a, b)$ es un punto, entonces por hipótesis existe un intervalo simple $[x, y]$ tal que $\chi(a, b) = \chi(x, y)$, de donde se sigue que $j \leq \chi(x, y)$ (esencialmente por la misma proposición de [Sim14b]), observemos que para el núcleo $\xi(a, b)$ se tiene que $x \leq \xi(a, b)(x) \wedge y \leq y$ y como por la simplicidad de este intervalo y la definición de $\xi(a, b)$ se tiene que $\xi(a, b)(x) \wedge y = y$, es decir, este núcleo colapsa el intervalo $[x, y]$ por lo tanto $\xi(x, y) \leq \xi(a, b)$, ahora notemos que si $\xi(x, y)(a) \wedge b < b$ entonces como $[a, b] \in \mathcal{C}rt(\mathcal{D}_j)$, $[\xi(x, y)(a) \wedge b, b] \in \mathcal{D}_j$, por lo que $b \leq j(\xi(x, y)(a))$, es decir, $b \leq j \vee \xi(x, y)(a)$, y así $\xi(a, b) \leq j \vee \xi(x, y)$, pero $\xi(x, y) \leq \xi(a, b)$, entonces $j \vee \xi(x, y) \leq j \vee \xi(a, b)$, por lo tanto $j \vee \xi(x, y) = j \vee \xi(a, b)$, es decir, $Gab(j) = u_{Gab(d_{\underline{0}})}(j)$. □

De 2.3.1 y de 2 1.5.37 obtenemos:

Corolario 2.3.2. *Son equivalentes para un idioma A :*

(1) A es fuertemente atómico.

(2) $u_{Gab(d_{\underline{0}})} = Gab = \iota_{Gab(\underline{0})}$.

(3) $Gab = \iota_{Gab(d_{\underline{0}})}$

□

Recordemos que antes de 2.2.2, en la descripción de la relación producto con una derivada, ésta produjo una función $D(A) \xrightarrow{\mu^z} D(A)$ dada por $\mu^z(d) = dz$, cuyas fibras son los bloques de la relación dada por z, la función μ^z, en cada $d \in D(A)$ le asigna la derivada $d \leq dz$ (1.1.4), notemos que $\mu^z(d \wedge d') = (d \wedge d')z = dz \wedge d'z = \mu^z(d) \wedge \mu^z(d')$, la penúltima igualdad es por 5 de 1.1.5.

Proposición 2.3.3. *Sea A un idioma y $D(A)$ la retícula completa de derivadas sobre A. Para cada $z \in D(A)$, $\mu^z : D(A) \to D(A)$ es una derivada sobre $D(A)$, más aún ésta es un prenúcleo.*

□

La derivada μ^z se llama *la derivada producto* de z.

Nótese que además esta asignación determina una función inyectiva $\mu^{(\_)} \colon D(A) \to P(D(A))$, en particular para cada derivada estable s sobre A, μ^s es un prenúcleo, como el producto de derivadas estables es estable (en particular el producto de prenúcleos es prenúcleo), tenemos que la derivada producto con s, μ^s es un prenúcleo sobre el idioma $S(A)$ (en particular si s es prenúcleo entonces μ^s es un prenúcleo sobre $P(A)$). También recordemos que por 1.3.25 si s es estable sobre A y j es cualquier núcleo entonces $(s \succ j)$ es un núcleo en A que de hecho $(s \succ j) = (s^\infty \succ j) \in N(A)$, esto en particular asegura lo siguiente: para la derivada producto μ^z con $z \in D(A)$ este es un prenúcleo por lo que $(\mu^z \succ J) \in N(D(A))$ es un núcleo sobre $D(A)$ para cualquier J núcleo en $D(A)$, en particular si consideramos la menor derivada sobre $D(A)$, que es la identidad $id_{D(A)}$, obtenemos la negación, $(\mu^z \succ id_{D(A)}) = \neg(\mu^z) \in N(D(A))$.

Proposición 2.3.4. *Sea z cualquier derivada sobre un idioma A entonces, $\neg(\mu^z) \leq \mu^{t(z)}$ en $N(D(A))$*

Demostración. Sabemos que $\neg(\mu^z) \wedge \mu^z = id_{D(A)}$, entonces por 5 de 1.1.5 si multiplicamos por $\mu^{t(z)}$ a la igualdad anterior, obtenemos $\neg(\mu^z)\mu^{t(z)} \wedge \mu^z\mu^{t(z)} = \mu^{t(z)}$. Ahora, consideremos cualquier d sobre A. Entonces, $(\mu^z\mu^{t(z)})(d) = \mu^z(dt(z)) = (dt(z))z = d(t(z)z) = d\bar{d} = \bar{d}$ por lo que $\mu^z\mu^{t(z)} = Tp$, donde Tp es el mayor elemento en $N(D(A))$. De esto obtenemos $\neg(\mu^z)\mu^{t(z)} = \mu^{t(z)}$, es decir, $\neg(\mu^z) \leq \mu^{t(z)}$. □

Observación 2.3.5. *Dada cualquier derivada d sobre un idioma A, a ésta le asociamos su totalizador, en particular si ésta es estable o es un prenúcleo, éstas tienen su propio totalizador, en vista de la definición del totalizador, si consideremos $\mathcal{S}_t(s) = \left\{s' \in S(A) \mid s's = \bar{d}\right\}$ con $s \in S(A)$ de nuevo este conjunto es no vacío y por 1.3.16 $\bigwedge \mathcal{S}_t(s) = \mathfrak{t}(s) \in S(A)$, notando además que $\mathcal{S}_t(s) \subseteq \mathcal{I}_t(s)$ de donde $t(s) \leq \mathfrak{t}(s)$, éste es el* totalizador parcial *de s como derivada estable. Este mismo razonamiento se puede aplicar a un prenúcleo y a un núcleo: $\mathfrak{t}(f) = \bigwedge \mathcal{P}_t(f) = \bigwedge \left\{k \in P(A) \mid kf = \bar{d}\right\}$ y $\jmath(j) = \bigwedge \mathcal{N}_t(j) = \bigwedge \left\{k \in N(A)) \mid (kj)^\infty = \bar{d}\right\}$, note la sutil diferencia en el totalizador parcial de un núcleo, $(kj)^\infty$ esto lo hacemos porque el producto de núcleos no necesariamente es núcleo y de hecho en este caso por 1.3.1 $k \vee j = (kj)^\infty$, es decir aplicando lo último podemos considerar una derivada estable s, y su núcleo s^∞ entonces por un lado $t(s^\infty) \leq t(s)$y además $\mathfrak{t}(s^\infty) \leq \mathfrak{t}(s) \leq (\mathfrak{t}(s))^\infty$, por último notemos que $t(s^\infty) \leq t(s) \leq \mathfrak{t}(s) \leq (\mathfrak{t}(s))^\infty$ y $\jmath(s\infty) \leq (\mathfrak{t}(s))^\infty$.*

Corolario 2.3.6. *Si s es una derivada estable sobre un idioma A, entonces $\neg s \leq t(s)$ en $C(A)$. En particular, $\neg s \leq \jmath(s^\infty)$ en $N(A)$, para cualquier núcleo j en A tenemos $\neg j \leq \jmath(j)$ en $N(A)$.*

Demostración. Por 2.3.4, tenemos $\neg(\mu^s) \leq \mu^{t(s)}$. Evaluando en $d_{\underline{0}}$ obtenemos que $\neg(\mu^s)(d_{\underline{0}}) \leq \mu^{t(s)}(d_{\underline{0}})$ y así $\neg(\mu^s)(d_{\underline{0}}) \leq t(s)$. Ahora, para el elemento

$$\neg(\mu^s) = \bigvee \left\{\varrho \in S(D(A)) \mid \varrho \wedge \mu^s = id_{D(A)}\right\} = \bigvee \mathcal{P}$$

obtenemos $\left(\bigvee\mathcal{P}\right)(d_{\underline{0}}) = \bigvee\left\{\varrho(d_{\underline{0}}) \mid \varrho \in \mathcal{P}\right\}$, es decir, para cualquier $\varrho \in \mathcal{P}$ deducimos que $\varrho(d_{\underline{0}}) \wedge \mu^s(d_{\underline{0}}) = d_{\underline{0}}$. Pero como $\mu^s(d_{\underline{0}}) = s$, entonces $\bigvee\mathcal{P}(d_{\underline{0}}) \leq \neg s$, y como $\mu^{\neg s} \in \mathcal{P}$, entonces $\neg s = \bigvee\mathcal{P}(d_{\underline{0}})$, y por lo tanto $\neg s \leq t(s)$. La última afirmación se sigue de 1.3.25, $\neg s^\infty = \neg s$, entonces $\neg s^\infty \leq t(s^\infty) \leq \mathfrak{t}(s^\infty) \leq \jmath(s^\infty)$, entonces $\neg s^\infty \leq (\mathfrak{t}(s^\infty))^\infty \leq \jmath(s^\infty)$, la última afirmación se sigue de este hecho. ☐

Proposición 2.3.7. *Si s es una derivada sobre un idioma A y si $\neg(\mu^s) = \mu^{t(s)}$, entonces s es idempotente. En particular, si s es una derivada estable entonces es un núcleo.*

Demostración. Como $\neg(\mu^s) \wedge \mu^s = \mu^{t(s)}) \wedge \mu^s = id_{I(A)}$, evaluando en $d_{\underline{0}}$ encontramos que$t(s) \wedge s = d_{\underline{0}}$ y entonces $t(s)s \wedge s^2 = s$. Pero de $t(s)s = \bar{d}$, se sigue $s^2 = s$. La última afirmación es directa. ☐

Proposición 2.3.8. *Sea A un idioma. Entonces, para cualquier $s \in S(A)$ son equivalentes:*

(1) $\neg s = \mathfrak{t}(s)$

(2) $s \leq \neg\mathfrak{t}(s)$

Demostración. Si $\neg s = \mathfrak{t}(s)$, entonces $\neg\neg s = \neg\mathfrak{t}(s)$, y como $s \leq \neg\neg s$, se sigue que $s \leq \neg\mathfrak{t}(s)$. Ahora, de $s \leq \neg\mathfrak{t}(s)$ se tiene que $s \wedge \mathfrak{t}(s) = d_{\underline{0}}$, entonces $\mathfrak{t}(s) \leq \neg s$, la otra comparación es justamente el corolario 2.3.6.

☐

De todo lo anterior vemos que sucede en el caso extremo, es decir cuando $s = t(s)$ para toda s estable sobre A.

Corolario 2.3.9. *Sea A un idioma. Entonces, son equivalentes:*

(1) $\neg s = t(s)$ *para toda* $s \in S(A)$.

(2) $S(A)$ *es un álgebra Booleana.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$: De la proposición 2.3.7 obtenemos que $S(A) = P(A) = N(A)$. Ahora, como el producto de cualquiera prenúcleos es un prenúcleo, entonces ss' es un prenúcleo idempotente, y además $s \vee s' = ss'$, por A.1.13. Así, de (1) obtenemos $\neg ss = \bar{d} = \neg s \vee s$, es decir, $\neg s = t(s)$ es el complemento s, y por lo tanto $S(A)$ es booleana.

$(2) \Rightarrow (1)$: Todo s tiene complemento $\neg s$, esto implica que $\neg ss = \bar{d}$, es decir, $t(s) \leq \neg s$. ☐

Recordemos que en 1.5.63, para una derivada d sobre A, A tiene d-longitud si $d^{\infty}(0) = \bar{1}$, esto en términos de totalizadores se traduce como, A tiene d-longitud si $t(d^{\infty}) = d_{\underline{0}}$, por 2.1.2 (5), esto sugiere que los totalizadores están ligados de alguna manera con las nociones de dimensión dadas en 1.5.63. Para hacer esto mas claro, observemos:

Proposición 2.3.10. *Sea A un idioma y U cualquier derivada estable sobre $N(A)$. Entonces,*

$$\widehat{\mu^{U^{\infty}(d_{\underline{0}})}} \leq U^{\infty},$$

donde $\widehat{\mu^{U^{\infty}(d_{\underline{0}})}}$ es el idempotente asociado a $(\infty\mu^{U^{\infty}(d_{\underline{0}})})$.

Demostración. Tenemos que $U^{\infty}(d_{\underline{0}}) \leq U^{\infty}(j)$ para todo j núcleo y $j \leq U^{\infty}(j)$. Esta última desigualdad implica que, $jU^{\infty}(j) = U^{\infty}(j)$ por que $U^{\infty}(j)$ es en particular idempotente (precisando lo anterior estamos utilizando A.1.1). Entonces, la primera comparación implica que $jU^{\infty}(d_{\underline{0}}) \leq U^{\infty}(j)$, es decir, $\mu^{U^{\infty}(d_{\underline{0}})} \leq U^{\infty}$, y por lo tanto $\widehat{\mu^{U^{\infty}(d_{\underline{0}})}} \leq U^{\infty}$.

□

Proposición 2.3.10 implica que todo núcleo j en A, con $\widehat{\mu^{U^{\infty}(d_{\underline{0}})}}$-dimensión tiene U^{∞}-dimensión.

Recordemos que para toda derivada estable s en A podemos considerar el prenúcleo $\mu^{s^{\infty}}$ en $S(A)$. Notemos que si k es un prenúcleo en A tal que $\mu^{s^{\infty}}(k) = \bar{d}$, entonces $\mathfrak{t}(s^{\infty}) \leq k$. Podemos decir entonces que k tiene $\mu^{s^{\infty}}$-dimensión. De $\mu^{s^{\infty}} \leq \infty\mu^{s^{\infty}} \leq \widehat{\mu^{s^{\infty}}}$ vemos que todo $\mathfrak{t}(s^{\infty}) \leq k$ tiene $\widehat{\mu^{s^{\infty}}}$-dimensión. El punto de este análisis esta hecho sobre $S(A)$ que por 1.3.19 es un idioma, podemos entonces considerar $N(S(A))$: Para cada derivada estable s sobre A, μ^{s} es un prenúcleo sobre $S(A)$, y así $(\mu^{s})^{\infty} = \mu^{s^{\infty}}$ es un núcleo sobre $S(A)$.

Teorema 2.3.11. *Sea A un idioma. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes para $s \in S(A)$ y una $J \in S(S(A))$:*

(1) $\Xi(\mu^{s^{\infty}})(J^{\infty}) = Tp$.

(2) $\mathfrak{t}(\mu^{s^{\infty}}) \leq J^{\infty}$.

(3) s^{∞} *tiene J-dimensión.*

Aquí $\Xi(\mu^{s^{\infty}})(K) = K\mu^{s^{\infty}}$ y Tp es el mayor elemento en $S(S(A))$.

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2): $\Xi(\mu^{s^{\infty}})(J) = tp \Leftrightarrow J\mu^{s^{\infty}} = tp \Leftrightarrow \mathfrak{t}(\mu^{s^{\infty}}) \leq J$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $J(s^{\infty}) = \bar{d}$ por (2) y evaluando en $d_{\underline{0}}$. Entonces $J^{\infty}(s^{\infty}) = \bar{d}$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Por (3) tenemos $J^\infty(s^\infty) = tp$. Entonces, $J^\infty((\mu^{s^\infty})(d_{\underline{0}})) = tp$ y por lo tanto $J^\infty \mu^{s^\infty} = tp$.

□

Veamos ahora algunos ejemplos de ciertas situaciones que se dan con los totalizadores de las derivadas construidas en 1.5.2.

De 1.5.58, 1.5.59 y 1.5.60 tenemos que para cualquier idioma A, $Gab \leq Soc$ y $Boy \leq Cbd$, además todas estas derivadas están por debajo de Cbd, entonces por 2.1.2 4 obtenemos:

Proposición 2.3.12. *1* $t(Soc^\infty) \leq t(Soc) \leq t(Gab)$.

2 $t(Cbd^\infty) \leq t(Cbd) \leq t(Boy)$.

3 $t(Boy) \leq t(Gab)$.

4 $t(Cbd) \leq t(Soc)$ *and* $t(Cbd^\infty) \leq t(Soc^\infty)$. *son* Soc *y* Cbd *son las derivadas zoclo y cantor-bendixson de* $N(A)$.

Observación 2.3.13. *(1) Supongamos que* $t(Gab) = Id_{N(A)}$ *entonces por* 1 *de 2.3.12 se sigue que* $Gab = Soc = Soc^\infty = Tp$*, es decir,* $N(A)$ *tiene* Soc*-longitud, en particular* $Gab(d_{\underline{0}}) = \bar{d}$ *e invocando 1.5.55 obtenemos que* $Gab(d_{\underline{0}}) = \bar{d} = soc^\infty$*, es decir,* A *tiene soc-longitud, en este caso* 3 *de 2.3.12 nos dice que* $Gab = Boy$ *lo cual implica que* $soc^\infty = cbd^\infty$.

(2) De $Gab \leq Soc$ *tenemos* $Gab(j) \leq Soc(j)$ *para cualquier núcleo, entonces* $t(Soc(j)) \leq t(Gab(j))$ *y* $t(Gab^\infty(j))$*, por lo que si* $t(Gab(j)) = d_{\underline{0}}$ *entonces* $Gab(j) = \bar{d}$ *en particular* j *tiene* Gab*-dimensión y* $soc_j^\infty = tp$*, este es el caso cuando* A_j *es fuertemente atómico. Esta situación nos dice que* $t(Soc(j)) \leq t(soc_j^\infty) \leq j_* t(soc_{A_j}^\infty) j^*$ *donde la última comparación es inmediata relativizando el zoclo a* j*, entonces si* A_j *es fuertemente atómico se tiene que* $Soc(j) = \bar{d}$ *en particular* $t(Soc(d_{\underline{0}})) \leq t(soc^\infty) \leq t(soc)$.

2.4. Algunas Observaciones sobre los igualadores de derivadas

Uno de los problemas esenciales de determinar la estructura de un idioma A, mediante una derivada d, es calcular el ordinal asociado a d mediante el proceso transfinito descrito en 1.1 y en 1.3.9, en particular qué tanto se aleja una derivada d de ser idempotente, los igualadores dan algunos indicios de éstas consideraciones.

Sabemos que para una derivada d sobre un idioma A, por 2.1.2 $e(d)$ es idempotente, $e(d) \leq d$ y $e(d) = d$ si y sólo si d es idempotente.

Definición 2.4.1. *Sea d una derivada en un idioma A, el intervalo de* idempotencia *de d es*

$$[e(d), d^{\infty}]$$

donde d^{∞} es el menor idempotente por arriba de d.

Notemos que de la definición este intervalo es trivial si y sólo si d es idempotente. Ahora sea k una derivada tal que $e(d) \leq k \leq d^{\infty}$ y $d \wedge k = e(d)$, supongamos por un momento que estas derivadas son estables, entonces en este caso la derivada $(\_)^{\infty}$ es estable, y así $e(d) = (d \wedge k)^{\infty} = d^{\infty} \wedge k^{\infty} = k^{\infty}$ por lo que $e(d) \leq k \leq k^{\infty} = e(d)$, es decir $e(d) = k$.

Lema 2.4.2. *Sea d una derivada estable sobre un idioma A, entonces d es un elemento esencial en $[e(d), d^{\infty}]$. Este intervalo es en derivadas estables.*

$\square$

Algunos otros aspectos en torno a a los igualadores, son:

Definición 2.4.3. *Una derivada d sobre un idioma A es* $\wedge$-prima *si es propia y siempre que $k \wedge l = d$ entonces $k = d$ ó $l = d$.*

De donde tenemos que toda derivada $\wedge$-irreducible es $\wedge$-prima

Lema 2.4.4. *Supongamos que d es idempotente y $\wedge$-prima entonces, d es $\wedge$-irreducible.*

Demostración. Sean $k_1, k_2 \in D(A)$ tales que $k_1 \wedge k_2 \leq d$, pongamos $z_1 = k_1 \vee d$ y $z_2 = k_2 \vee d$ entonces $d \leq z_1 \wedge z_2 = (k_1 \vee d) \wedge (k_2 \vee d) \leq (k_1 d) \wedge (k_2 d) = (k_1 \wedge k_2)d$, la primera desigualdad es por 1.1.3 y la igualdad por 1.1.5, en vista de la idempotencia de d y por la hipótesis se sigue que $d = (k_1 \wedge k_2)d$ por lo que $d = z_1 \wedge z_2$ entonces siendo d $\wedge$-prima se tiene el resultado. $\square$

Proposición 2.4.5. *Supongamos que d es $\wedge$-prima entonces $e(d)$ también lo es.*

Demostración. Notemos que siendo d $\wedge$-irreducible entonces $e(d) \neq \bar{d}$, suponga que $d_1 \wedge d_2 \leq e(d)$ entonces $(d_1 \wedge d_2)d = d$, de donde $d_1 d = d$ ó $d_2 d = d$, es decir, $d_1 \leq e(d)$ ó $d_2 \leq e(d)$. $\square$

Observación 2.4.6. *(1) Los resultados obtenidos en 2.1 y 2.2 se pueden entender como los análogos en este contexto de la teoría de prerradicales, ver por ejemplo [RRR+02], en particular 2.3.6 es el análogo en idiomas del Lema* 20 *en [RMW01], 2.2.2 ésta inspirado en el teorema 4.2 de [RRR+02], 2.3 varios resultados de esta sección son las versiones en idiomas del análisis hecho en [RSR+04]. Los resultados sobre dimensiones y totalizadores están invocados por [Sim14b].*

(2) Para los igualadores y sus conexiones con nociones irreducibles y primas, uno puede comparar estos resultados con los establecidos para prerradicales en [RRR$^+$05]. En vista de estas analogías, sugieren hacer una investigación más profunda de los resultados de 2.4 para las derivadas en particular obtener condiciones de la simplicidad del intervalo de idempotencia en vía de alguna derivada.

Capítulo 3

Teorías de descomposición y dimensión para idiomas

Las nociones de dimensión y descomposición para categorías de módulos han sido sumamente estudiadas desde el caso conmutativo, las nociones de descomposiciones primarias (entre muchas otras) y dimensión Krull han sido llevadas al caso no-conmutativo ([Gol75], [Mic70] y [GR73]), a su vez han sido extendidas a categorías abelianas, ver por ejemplo [Pop73] capítulo 5 sección 5.11. En el libro [Gol77] el autor organiza estas nociones de descomposición y dimensión en categorías de módulos desde un punto de vista general a través de funciones *radicales*, de *quasi-descomposición* y de *quasi-dimensión*, y como se observa una herramienta fundamental de estas generalizaciones, es asociar estructuras retículares que controlen las descomposiciones y dimensiones en la categoría de módulos, en particular el marco R-tors juega un papel fundamental, más adelante en [Sim10] se describe una teoría de descomposición para idiomas, introduciendo el análogo de las funciones de quasi-descomposición al ambiente retícular, los *lugares* son este análogo. En este capítulo desarrollaremos la parte idiomática del concepto de función de quasi-dimensión estudiado en la exposición de [Gol77] (el cual no está desarrollado en [Sim10]), estas consideraciones llevan a un tratado general de filtraciones en los intervalos de un idioma A que como veremos están ligadas con las dimensiones clásicas definidas en la categoría de módulos izquierdos sobre un anillo.

3.1. Lugares y Aspectos

Definición 3.1.1. *Sea Λ una retícula completa, para un idioma A un* Λ-lugar *es una función*

$$\varphi\colon \mathfrak{I}(A) \to \Lambda$$

tal que se satisface lo siguiente:

1. $\varphi(l \wedge r, r) = \varphi(l, l \vee r)$ *con* $r, l \in A$.

2. $\varphi(a, b) \leq \varphi(a, c)$ *con* $a \leq c \leq b$.

3. $\varphi(a, c) \wedge \varphi(c, b) \leq \varphi(a, b)$ *con* $a \leq c \leq b$.

4. $\varphi(a, \bigvee X) = \bigwedge \{\varphi(a, x) \mid x \in X\}$ *con* $a \in A$ *y* $X \subseteq [a, \bar{1}]$, *dirigido. Aquí* $\varphi(a, b)$ *quiere decir* $\varphi([a, b])$.

Siguiendo [Sim10] el punto 4 es equivalente a que el subconjunto $X \subseteq [a, \bar{1}]$ sea independiente sobre a 1.5.26. Como se muestra en [Sim10] la construcción dada en 1.5.69, determina una función $\chi(\_) : \mathfrak{I}(A) \to N(A)$, en ese mismo documento teorema 6.3 se muestra que esta asignación es un $N(A)$-lugar.

Definición 3.1.1. *Dado un idioma A, y una retícula completa Λ denotemos por* $\mathrm{Sit}(A, \Lambda) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es un } \Lambda\text{-lugar}\}$, *al conjunto de todos los lugares de A con respecto a Λ.*

Observación 3.1.2. *(1) Notemos que* $\mathrm{Sit}(A, \Lambda) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es un } \Lambda\text{-lugar}\}$ *es un conjunto parcialmente ordenado: Para cualesquiera* $\varphi, \phi \in \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$ $\varphi \leq \phi \Leftrightarrow \varphi(a, b) \leq \phi(a, b)$ *para todo* $[a, b] \in \mathfrak{I}(A)$, *más aún en vista de este orden podemos definir para una familia de* $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$, *la función* $\bigvee \mathcal{L}$ *poniendo* $\bigvee \mathcal{L}(a, b) = \bigvee \{\varphi(a, b) \mid \varphi \in \mathcal{L}\}$, *inmediatamente notamos que esta función es un Λ-lugar y en vista del orden en* $\mathrm{Sit}(A, \Lambda)$ *está función describe al supremo de la familia $\mathcal{L}$, por lo que* $\mathrm{Sit}(A, \Lambda)$ *es una retícula completa.*

(2) Considere $f\colon A \longrightarrow A'$ *un morfismo de idiomas y* $\varphi \in \mathrm{Sit}(A', \Lambda)$. *Entonces, tenemos un morfismo monótono* $\mathfrak{I}(f)\colon \mathfrak{I}(A) \to \mathfrak{I}(A')$ *y la composición* $\varphi \circ \mathfrak{I}(f)\colon \mathfrak{I}(A) \to \Lambda$. *De la definición de lugar y siendo f monótono obtenemos que* $\varphi \circ \mathfrak{I}(f) \in \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$. *Pongamos* $f^*\colon\ \mathrm{Sit}(A', \Lambda) \to \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$

(3) Fijando ahora la primera componente, considere cualquier morfismo de retículas completas, $\varrho\colon \Lambda \to \Gamma$. *Entonces, para cualquier Λ-lugar φ la composición* $\varrho \circ \varphi\colon \mathfrak{I}(A) \to \Gamma$, *es un Γ-lugar.*

De estas consideraciones lo siguiente es inmediato.

Proposición 3.1.3. *(1) Sea* Λ *una retícula completa. Entonces,* $\mathrm{Sit}(\_, \Lambda)\colon \mathcal{ID} \longrightarrow \mathfrak{CL}$ *es un funtor contravariante de la categoría de idiomas* $\mathcal{ID}$ *a la categoría de retículas completas* $\mathfrak{CL}$.

(2) Si A *is un idioma, entonces* $\mathrm{Sit}(A, \_)\colon \mathfrak{CL} \longrightarrow \mathfrak{CL}$ *es un endofuntor covariante en la categoría de retículas completas y éste preserva monomorfismos.*

$\square$

Proposición 3.1.4. *Sea* Λ *una retícula completa y* A *un idioma. Entonces, podemos definir una función* $\mathcal{Q} : \mathrm{Sit}(A, \Lambda) \times \Lambda \to \mathcal{C}(A)$ *dada por* $[a, b] \in \mathcal{Q}(\varphi, \alpha) \Leftrightarrow \alpha \leq \varphi(x, b)$ *para todo* $x \in [a, b]$. *Más aún*

(1) *Para todo* $\varphi \in \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$*, la función* $\mathcal{Q}(\varphi, \_)\colon \Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}(A)$ *es un* $\bigwedge$*-morfismo.*

(2) *Para todo* $\alpha \in \Lambda$*, la función* $\mathcal{Q}(\_, \alpha)\colon\ \mathrm{Sit}(A, \Lambda) \to \mathcal{C}(A)$ *es un* $\bigwedge$*-morfismo.*

Demostración. Primero mostraremos que $\mathcal{Q}(\varphi, \alpha) \in \mathcal{B}(A)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$ todo $\alpha \in \Lambda$. De 3.1.1 (1) se sigue que $\mathcal{Q}(\varphi, \alpha)$ es abstracto. Sea $[a, d] \in \mathcal{Q}(\varphi, \alpha)$ y tomemos $a \leq b \leq c \leq d$. Para cualquier $b \leq x \leq c$, tenemos que $\varphi(x, d) \geq \alpha$. Pero de 3.1.1 (2) obtenemos $\varphi(x, d) \leq \varphi(x, c)$, es decir, $[b, c] \in \mathcal{Q}(\varphi, \alpha)$. Ahora considere $[a, b], [b, c] \in \mathcal{Q}(\varphi, \alpha)$, y sea $x \in [a, c]$. Por lo que, $a \leq b \wedge x \leq b$ y $b \leq x \vee b \leq c$. Por hipótesis, $\varphi(x \wedge b, b) \geq \alpha$ y $\varphi(b \vee x, c) \geq \alpha$. Por otro lado, tenemos que $\varphi(x, c) \geq \varphi(x, b \vee x) \wedge \varphi(b \vee x, c)$, y en vista de la modularidad deducimos que $[x \wedge b, b] \cong [x, x \vee b]$. La última desigualdad por (1) de 1.5.1, es $\varphi(x, b \vee x) \wedge \varphi(b \vee x, c) = \varphi(x \wedge b, b) \wedge \varphi(b \vee x, c)$. Pero este ínfimo está por arriba de α, y así $\varphi(x, c) \geq \alpha$, es decir, $\mathcal{Q}(\varphi, \alpha) \in \mathcal{C}(A)$.

Ahora, para probar la parte (1), note que si $\alpha \leq \alpha'$ en Λ, entonces $\mathcal{Q}(\varphi, \alpha') \leq \mathcal{Q}(\varphi, \alpha)$ por definición. Por lo que, si $X \subseteq \Lambda$ tenemos que:

$$\mathcal{Q}(\varphi, \bigvee X) \leq \bigcap \{\mathcal{Q}(\varphi, \alpha) \mid \alpha \in X\}$$

Pero para cualquier intervalo $[a, b] \in \bigcap \{\mathcal{Q}(\varphi, \alpha) \mid \alpha \in X\}$ se tiene que $\varphi(x, b) \geq \alpha$ para todo $\alpha \in X$. Por lo tanto, $\varphi(x, b) \geq \bigvee X$, es decir, $[a, b] \in \mathcal{Q}(\varphi, \bigvee X)$, y así $\bigcap \{\mathcal{Q}(\varphi, \alpha) \mid \alpha \in X\} = \mathcal{Q}(\varphi, \bigvee X)$.

Para la parte (2), observe que si $\varphi \leq \varphi'$, entonces $\mathcal{Q}(\varphi, \alpha) \leq \mathcal{Q}(\varphi', \alpha)$. Y el resultado se sigue directo. $\square$

De 1.4.24 sabemos que $\mathcal{D}vs(\_)\colon \mathcal{B}(A) \to \mathcal{B}(A)$ es un núcleo, por lo que en vista de 1.2.20 $\mathcal{D}vs(\_)\colon \mathcal{C}(A) \to \mathcal{D}(A)$ es un morfismo de marcos en particular un $\wedge$-morfismo.

Corolario 3.1.5. *Sea Λ una retícula completa y A un idioma. Entonces,*

(1) *Para todo $\varphi \in \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$, la función $\mathcal{D}vs(\_) \circ \mathcal{Q}(\varphi, \_) : \Lambda^{op} \to \mathcal{D}(A)$ es un $\wedge$-morfismo en $\mathfrak{CL}$.*

(2) *Para todo $\alpha \in \Lambda$, La función $\mathcal{D}vs(\_) \circ \mathcal{Q}(\_, \alpha) : \mathrm{Sit}(A, \Lambda) \to \mathcal{D}(A)$ es un $\wedge$-morfismo en $\mathfrak{CL}$.*

Demostración. Directo de la proposición 3.1.4 y la observación previa. □

Para todo idioma A y cualquier retícula completa Λ, tenemos una función $\mathcal{S} \colon \Lambda \to \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$ dada por $\mathcal{S}(\alpha)(a, b) = \alpha$. La siguiente proposición es inmediata.

Proposición 3.1.6. *Sea Λ una retícula completa y A un idioma. Entonces, la función $\mathcal{S} \colon \Lambda \to \mathrm{Sit}(A, \Lambda)$ dada como $\mathcal{S}(\alpha)(a, b) = \alpha$, es un encaje en la categoría de retículas completas.*

□

Definición 3.1.7. *Sea Λ una retícula completa. Para un idioma A, un* Λ-aspecto *es una función $\varphi \colon \mathcal{I}(A) \longrightarrow \Lambda$ que satisface lo siguiente:*

1. *$\varphi(l \wedge r, r) = \varphi(l, l \vee r)$, para cualesquiera $r, l \in A$.*
2. *$\varphi(a, c) \vee \varphi(c, b) = \varphi(a, b)$, para todo $a \leq c \leq b$.*
3. *$\varphi(a, \bigvee X) = \bigvee \{\varphi(a, x) \mid x \in X\}$, con $a \in A$ y $X \subseteq [a, \bar{1}]$ dirigido.*

Definición 3.1.8. *Dado un idioma A, y una retícula completa Λ denotemos por $\mathrm{App}(A, \Lambda) = \{\varphi \mid \varphi$ es un Λ-aspecto$\}$, al conjunto de aspecto de A con respecto a Λ.*

Observación 3.1.9. *(1) Como en el caso de los lugares tenemos que $\mathrm{App}(A, \Lambda)$ es una retícula completa.*

(2) Considere cualquier morfismo de idiomas $f \colon A \longrightarrow A'$ y $\varphi \in \mathrm{App}(A', \Lambda)$. Para el morfismo monótono inducido por f, $\mathcal{I}(f) \colon \mathcal{I}(A) \to \mathcal{I}(A')$, tenemos que $\varphi \circ \mathcal{I}(f) \colon \mathcal{I}(A) \to \Lambda$, y de la definición y la monotonía de f obtenemos que $\varphi\mathcal{I}(f) \in \mathrm{App}(A, \Lambda)$. Pongamos $f^* \colon \mathrm{App}(A', \Lambda) \to \mathrm{App}(A, \Lambda)$ la función obtenida.

(3) Consideremos ahora cualquier morfismo de retículas completas, $\varrho : \Lambda \to \Gamma$. Entonces, dado cualquier Λ-aspecto φ, tenemos $\varrho \circ \varphi : \mathcal{I}(A) \to \Gamma$, es sencillo ver que éste es un Γ-aspecto.

De estas observaciones es inmediato:

Proposición 3.1.10. *(1) Sea Λ una retícula completa. Entonces,* $\mathrm{App}(\_, \Lambda)\colon \mathcal{ID} \longrightarrow \mathfrak{CL}$ *es un funtor contravariante de la categoría de idiomas $\mathcal{ID}$ a la categoría de retículas completas $\mathfrak{CL}$.*

(2) Si A es un idioma entonces, $\mathrm{App}(A, \_)\colon \mathfrak{CL} \longrightarrow \mathfrak{CL}$ *es un endofuntor covariante en la categoría de retículas completas y éste preserva monomorfismos.*

Proposición 3.1.11. *Sea Λ una retícula completa y A un idioma. Entonces, podemos definir una función* $\mathcal{M}\colon\ \mathrm{App}(A, \Lambda) \times \Lambda \to \mathcal{C}(A)$ *dada por* $[a, b] \in \mathcal{M}(\varphi, \alpha) \Leftrightarrow \varphi(a, b) \leq \alpha$ *que satisface:*

(1) *Para todo $\varphi \in \mathrm{App}(A, \Lambda)$, la función $\mathcal{M}_\varphi\colon\ \Lambda \to \mathcal{C}(A)$ es un $\bigwedge$-morfismo en $\mathfrak{CL}$.*

(2) *Para toda $\alpha \in \Lambda$, la función $\mathcal{M}_\alpha\colon\ \mathrm{App}(A, \Lambda) \to \mathcal{C}(A)$ es un $\bigwedge$-morfismo en $\mathfrak{CL}$.*

Demostración. Tomemos $(\varphi, \alpha) \in \mathrm{App}(A, \Lambda)$. Por (1) de la definición 3.1.7 tenemos que $\mathcal{M}(\varphi, \alpha)$ es abstracto. Ahora, considere $[a, d] \in \mathcal{M}(\varphi, \alpha)$ y $a \leq b \leq c \leq d$. Entonces por (2) de la definición 3.1.7 se tiene que $\varphi(a, c) \leq \varphi(a, d) \leq \alpha$, de nuevo por (3) de 3.1.7, $\varphi(a, c) = \varphi(a, b) \vee \varphi(b, c) \leq \alpha$. Entonces, $\varphi(b, c) \leq \alpha$, y así $\mathcal{M}(\varphi, \alpha)$ es básico. Ahora, tomemos $[a, b], [b, c] \in \mathcal{M}(\varphi, \alpha)$. Entonces, $\alpha \geq \varphi(a, b) \vee \varphi(b, c) = \varphi(a, c)$, es decir, $[a, c] \in \mathcal{M}(\varphi, \alpha)$. Los puntos (1) y (2) son directos. $\square$

Como en el caso de los Λ-lugares, para cualquier $\alpha \in \Lambda$ tenemos una función $\mathcal{R}(\alpha) \in \mathrm{App}(A, \Lambda)$ dada por $\mathcal{R}(\alpha)(a, b) = \alpha$. Un cálculo directo da:

Proposición 3.1.12. *Sea Λ una retícula completa y A un idioma. Entonces, la función $\mathcal{R}\colon\ \Lambda \to \mathrm{App}(A, \Lambda)$ definida por $\mathcal{R}(\alpha)(a, b) = \alpha$, es un encaje en la categoría de retículas completas.*

$\square$

Ejemplo 3.1.13. *Un ejemplo de aspecto está dado por, $\xi\colon \mathcal{I}(A) \to \mathcal{D}(A)$ donde $\xi(a, b) = \mathcal{D}(a, b)$, es el núcleo correspondiente a $\mathcal{D}(a, b)$ para el intervalo $[a, b]$ 1.5.56 (1). Es claro que $\xi(\_)$ es un $\mathcal{D}(A) \cong N(A)$-aspecto de A.*

Teorema 3.1.14. *Sea A cualquier idioma y Λ una retícula completa. Entonces, existe un morfismo en $\mathcal{P}os$*

$$\mathcal{H}\colon\ \mathrm{App}(A, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Sit}(A, \Lambda)^{\mathrm{op}}$$

dado como $\psi \in \mathrm{App}(A,\Lambda)$ *entonces* $\mathcal{H}(\psi)(a,b) = \bigvee\{\alpha \in \Lambda \mid [a,b] \in \mathcal{D}vs(\mathcal{M}(\psi,\alpha))\}$. *Aquí* $\mathcal{P}os$ *es la categoría de conjuntos parcialmente ordenados junto con sus morfismos.*

Demostración. Debemos verificar que $\mathcal{H}(\psi) \in \mathrm{Sit}(A,\Lambda)$. Primero observe que (1) de 3.1.1 claramente se satisface. Para los otros requerimientos de 3.1.1, considere cualquier intervalo $[a,c]$ en A y tomemos $a \le b \le c$. De la definición de $\mathcal{H}(\psi)$ tenemos que $\mathcal{H}(\psi)(a,c) \le \mathcal{H}(\psi)(a,b)$. Ahora, del hecho $\psi(a,b) \vee \psi(b,c) = \psi(a,c)$ deducimos que $\mathcal{H}(\psi)(a,b) \wedge \mathcal{H}(\psi)(b,c) \le \mathcal{H}(\psi)(a,c)$. Sea $X \subseteq [a,\bar{1}]$ dirigido. Del párrafo anterior tenemos $\mathcal{H}(\psi)(a,\bigvee X) \le \bigwedge\{\mathcal{H}(\psi)(a,x) \mid x \in X\}$. Para la otra comparación, observe que siendo ψ un Λ-aspecto, tenemos $\psi(a,\bigvee X) = \bigvee\{\psi(a,x) \mid x \in X\}$. Entonces, $\psi(a,x) \le \psi(a,\bigvee X)$. Y así, $\psi(a,\bigvee X) \le \mathcal{H}(\psi)(a,x)$ para todo $x \in X$, y entonces $\psi(a,\bigvee X) \le \bigwedge\{\mathcal{H}(\psi)(a,x) \mid x \in X\}$. Por lo que, $\bigwedge\{\mathcal{H}(\psi)(a,x) \mid x \in X\} \le \mathcal{H}(\psi)(a,\bigvee X)$. Por último, considere cualquier $\psi \le \psi'$ en $\mathrm{App}(A,\Lambda)$. Entonces, de la definición de $\mathcal{H}$ tenemos que $\mathcal{H}(\psi') \le \mathcal{H}(\psi)$, es decir, $\mathcal{H}$ es un morfismo monótono. □

3.2. Algunas construcciones en Sit(A,Γ)

En esta sección analizamos cómo los elementos de $\mathrm{Sit}(A,\Gamma)$ llevan a teorías de descomposición para el idioma A. Comenzamos extendiendo el concepto de lugar. Como en el caso de categorías de módulos, el concepto de función radical en idiomas es natural (ver, por ejemplo [Gol77] y [Sim84]):

Definición 3.2.1. *Sea* A *un idioma y* Ω *un conjunto parcialmente ordenado. Una función* $\rho\colon \mathcal{I}(A) \longrightarrow \Omega$ *es un* función radical *si:*

1. $\rho(l \wedge r, r) = \rho(l, l \vee r)$ *para todos* $r, l \in A$, *y*
2. $\rho(a,c) \le \rho(a,b)$ *para todo* $a \le b \le c$.

Ejemplo 3.2.2. *Ejemplos de estas funciones son, por supuesto, cualquier* Γ*-lugar para* A. *En particular, el* $N(A)$*-lugar* χ. *Claro otros ejemplos de estas funciones provienen de la teoría general de módulos: Recordemos que* $\Lambda(M)$ *denota el idioma de sub-modulos de un* R*-modulo* M, *y considere cualquier función radical en* R-Mod *en el sentido de [Gol77] capítulo* 3. *Entonces, la* restricción *de cualquier función radical a los intervalos de* $\Lambda(M)$ *determina una función radical en nuestro sentido. Si* Ω *es una retícula y* $\rho \in \mathrm{Rad}(A,\Omega)$, *para* $l \in \Omega$ *defina* $\rho'\colon \mathcal{I}(A) \to \Omega$ *por* $\rho'(a,b) = \rho(a,b) \wedge l$. *Entonces,* ρ' *es una función radical en* A *con valores en la retícula* Ω.

Observación 3.2.3. *Denotemos por* $\mathrm{Rad}(A,\Omega) = \{\rho\colon \mathcal{I}(A) \to \Omega \mid \rho \text{ es radical }\}$. *Definimos un orden parcial en* $\mathrm{Rad}(A,\Omega)$ *usando el orden de* Ω *como sigue:* $\rho \leq \varrho \Leftrightarrow \rho(a,b) \leq \varrho(a,b)$ *para todo* $[a,b] \in \mathcal{I}(A)$. *Como en el caso de* $\mathrm{Sit}(A,\Gamma)$*, tenemos que* $\mathrm{Rad}(A,\_)\colon \mathcal{P}os \longrightarrow \mathcal{P}os$ *es un funtor covariante y* $\mathrm{Rad}(\_,\Omega)\colon \mathcal{ID} \longrightarrow \mathcal{P}os$ *es un funtor contravariante. Si* Γ *es una retícula completa, entonces* $\mathrm{Sit}(A,\Gamma)$ *está sumergido en* $\mathrm{Rad}(A,\Gamma)$.

Definición 3.2.4. *Sea* $\rho \in \mathrm{Rad}(A,\Omega)$. *Un intervalo* $[a,b]$ *es* ρ-estable *ó* ρ-inerte *si y solo si* $a < b$ *y* $\rho(a,b) = \rho(a,x)$ *para todo* $a < x \leq b$.

Observación 3.2.5. *Para* $\chi \in \mathrm{Sit}(A,N(A))$*, los intervalos* χ*-estables son precisamente los intervalos inertes 1.5.71* 2*, en particular cualquier intervalo uniforme es inerte. De hecho, en [Sim10] el autor describe en detalle la teoría de descomposición generada por* χ*, y da aplicaciones a geo-retículas (retículas complementadas).*

Definición 3.2.6. *Para* $\rho \in \mathrm{Rad}(A,\Omega)$*, el* soporte *de* ρ*, es el conjunto*

$$\Sigma_\rho(a,b) = \{\rho(a,x) \mid a < x \leq b \text{ es } \rho\text{-estable}\}\,.$$

Proposición 3.2.7. *La función* $\Sigma_\rho\colon \mathcal{I}(A) \to \mathcal{P}(\Omega)^{\mathrm{op}}$ *que asigna a cada intervalo* $[a,b]$ *el soporte de la función radical* ρ *es un* $\mathcal{P}(\Omega)^{\mathrm{op}}$*-lugar.*

Demostración. Sea $\rho \in \mathrm{Rad}(A,\Omega)$. Por definición de función radical, el primer requerimiento de lugar se satisface, es decir, $\Sigma_\rho(r \wedge l, r) = \Sigma_p(l, r \vee l)$ para cualesquiera $l, r \in A$. Considere cualquier intervalo $[a,c]$ y $a \leq b \leq c$. Entonces $\Sigma_\rho(a,b) \subseteq \Sigma_\rho(a,c)$. Tomemos ahora cualquier $\rho(a,x) \in \Sigma_\rho(a,c)$. Si $a < b \wedge x$, entonces $\rho(a,x) = \rho(a, b\wedge x) \in \Sigma_\rho(a,b)$, y si $a = b \wedge x$ tenemos $\rho(a,x) = \rho(b\wedge x, x) = \rho(b, b \vee x)$. Por lo que, de lo anterior, este último intervalo es ρ-estable y así $\rho(a,x) \in \Sigma_\rho(b,c)$, es decir, $\Sigma_\rho(a,c) \subseteq \Sigma_\rho(a,b) \cup \Sigma_\rho(b,c)$. Para el último requisito consideremos $X \subseteq [a,\bar{1}]$ dirigido, para algún $a \in A$ y tomemos $\rho(a,y) \in \Sigma_\rho(a, \bigvee X)$. Entonces, de la ley distributiva para idiomas tenemos, $y = y \wedge (\bigvee X) = \bigvee\{y \wedge x \mid x \in X\}$. Por lo que, $a < y \wedge x \leq x$ para algún $x \in X$, de $a < y \wedge x \leq y$ deducimos que $\rho(a,y) = \rho(a, y\wedge x) \in \Sigma_\rho(a,x)$. Esto prueba que $\Sigma_\rho(a,\bigvee X) \subseteq \bigcup\{\Sigma_\rho(a,x) \mid x \in X\}$. Las otras comparaciones se siguen inmediatamente de la primera propiedad. $\square$

Observación 3.2.8. *(1) Suponga que* Ω *es una retícula completa y considere* $\varphi \in \mathrm{Sit}(A,\mathcal{P}(\Omega)^{\mathrm{op}})$. *Defina la función* $\varrho_\varphi\colon \mathcal{I}(A) \to \Omega$ *por* $\varrho_\varphi(a,b) = \bigwedge \varphi(a,b)$. *Esta función es claramente una función radical. Entonces tene-*

mos dos funciones

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sit}(A, \mathcal{P}(\Omega)^{\mathrm{op}}) \arrow[r, bend right, "\varrho"'] & \mathrm{Rad}(A, \Omega) \arrow[l, bend right, "\Sigma"'] \end{tikzcd}$$

donde $\Sigma(\rho) = \Sigma_\rho$ *y* $\varrho(\varphi) = \varrho_\varphi$*. Observe que estas consideraciones realizan un diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sit}(A, \Omega) \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\{\_\}^*"'] & \mathrm{Rad}(A, \Omega) \arrow[d, bend right, "\Sigma"'] \\ & \mathrm{Sit}(A, \mathcal{P}(\Omega)^{op}) \arrow[u, bend right, "\varrho"'] \end{tikzcd}$$

donde $\{\_\}^* : \mathrm{Sit}(A, \Omega) \to \mathrm{Sit}(A, \mathcal{P}(\Omega)^{\mathrm{op}})$ *es el morfismo inducido por la inclusión* $\Omega \to \mathcal{P}(\Omega)^{\mathrm{op}}$*. Note que* $\varrho \circ \{\_\}^* = \iota$ *y así ese triangulo es conmutativo, pero el otro no necesariamente tiene que conmutar.*

Definición 3.2.9. *Para* $\rho \in \mathrm{Rad}(A, \Omega)$*, un intervalo* $[a, b]$ *es* ρ-atómico *si* $\Sigma_\rho(a, b) = \{*\}$*. Para* $\rho \in \mathrm{Rad}(A, \Omega)$*, el idioma* A *es* ρ-adecuado *si* $\Sigma_\rho(a, b)$ *si no es vacío para todo intervalo no trivial* $[a, b]$ *de* A*. Para* $\rho \in \mathrm{Rad}(A, \Omega)$ *y un elemento* $p \in \Omega$*, un intervalo* $[a, b]$ *es* p-inercial *si* $\rho(a, b) = p$ *y* $[a, b]$ *es* ρ*-estable.*

De esto observamos que cualquier intervalo ρ-estable $[a, b]$ es $p = \rho(a, b)$-inercial. Usaremos intervalos p-inerciales para generar descomposiciones del idioma en consideración A.

Usando intervalos p-inertes con respecto alguna $\varphi \in \mathrm{Sit}(A, \Omega)$, podemos dar otra manera de ver lugares, como sigue: Para $p \in \Omega$, considere el marco 2 con dos elementos $0 < 1$, y defina la función $p\colon \mathcal{I}(A) \longrightarrow 2$ por

$$p(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } [a, b] \text{ es } p\text{-inercial} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para cada intervalo $[a, b]$.

Proposición 3.2.10. *Para cada* $p \in \Omega$*, la función* $p : \mathcal{I}(A) \longrightarrow 2$ *es un* 2*-lugar, es decir:*

(1) Para $l, r \in A$*,* $[l \wedge r, r]$ *es p-inerte* $\Leftrightarrow$ $[l, l \vee r]$ *es p-inerte.*

(2) Para $a \le b \le c$*,* $[a, c]$ *p-inerte* $\Rightarrow$ $[a, b]$ *es p-inerte.*

(3) Para $a \le b \le c$*,* $[a, b]$ *y* $[b, c]$ *p-inerte* $\Rightarrow$ $[a, c]$ *es p-inerte.*

(4) Para $a \in A$ y $X \subseteq [a,1]$, $[a,\bigvee X]$ es p-inerte $\Leftrightarrow (\forall x \in X)\,[[a,x]$ es p-inerte$]$.

Demostración. (1): Para cualesquiera $l, r \in A$, supongamos primero que $[l \wedge r, r]$ es p-inerte y considere $l < x \leq l \vee r$. Usando el isomorfismo canónico $[l \wedge r, r] \cong [l, l \vee r]$ tenemos que $x = y \vee l$ para algún $y < l \wedge r \leq r$. Entonces, $\varphi(l,x) = \varphi(l, y \vee l) = \varphi(l \wedge r, y) = \varphi(l \wedge r, r) = p$, donde la segunda igualdad es por los axiomas de lugares y la tercera es por la hipótesis. El recíproco es similar.

(2): Sea $a \leq b \leq c$ con $[a,c]$ $p = \varphi(a,c)$-inerte. Entonces, para cualquier $a < x \leq b$ se tiene $\varphi(a,x) = \varphi(a,c) = \varphi(a,b)$.

(3): Dado $[a,b]$ y $[b,c]$ intervalos p-inertes, para cualquier $a < x \leq c$ tenemos que $p = \varphi(a,b) \wedge \varphi(b,c) \leq \varphi(a,c) \leq \varphi(a,x)$. Sólo queda probar que $\varphi(a,x) \leq p$. Primero observe que $a \leq b \wedge x \leq b$. Ahora, si $a = b \wedge x$ tenemos que $b < b \vee x \leq c$, y entonces $\varphi(a,x) = \varphi(b \wedge x, x) = \varphi(b, b \vee x) = \varphi(b,c) = p$, la segunda igualdad viene del hecho $[b, b \vee x] \cong [b \wedge x, x]$.

(4): Sea $a \in A$ y $X \subseteq [a, \bar{1}]$ dirigido. Es suficiente probar:

$$(\forall x \in X)\,[[a,x] \text{ es } p\text{-inerte}]$$

implica que $[a, \bigvee X]$ es p-inerte. Para ver esto, note que X siendo dirigido se tiene que, $\varphi(a, \bigvee X) = \bigwedge \{\varphi(a,x) \mid x \in X\} = p$. Considere $a < y \leq \bigvee X$. Entonces, $p = \varphi(a, \bigvee X) \leq \varphi(a,y)$. Para la otra comparación notemos que $y = y \wedge (\bigvee X) = \bigvee \{y \wedge x \mid x \in X\}$ en vista de la ley distributiva para idiomas. Entonces, para algún $x \in X$ tenemos que $a \leq y \wedge x \leq y$ y $a < y \wedge x \leq x$. Se sigue que $\varphi(a,y) \leq \varphi(a, y \wedge x) = \varphi(a,x) = p$. $\square$

Ahora para, $\varphi \in \text{Sit}(A,\Omega)$, sea $\mathcal{D}_p = \{[a,b] \mid [a,b] \text{ es } p\text{-inerte}\}$. La última proposición nos dice que $\mathcal{D}_p$ es un conjunto de congruencia en A 1.4.7. Más aún sabemos que para cualquier conjunto de congruencia $\mathcal{C}$ se tiene que, si $[a,x], [a,y] \in \mathcal{C}$ entonces $[a, x \vee y], [a, x \wedge y] \in \mathcal{C}$ 1.4.10. De esta propiedad es fácil ver que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo supremos finitos.

Corolario 3.2.11. *El conjunto $\mathcal{D}_p$ es un conjunto de división en A.*

Demostración. Tomemos cualquier $a \in A$ y $X \subset [a, \bar{1}]$ con $[a,x]$ p-inerte para toda $x \in X$. Sea Y el conjunto de los elementos de la forma $x_1 \vee x_2 \ldots \vee x_n$, con $x_i \in X$ para $0 \leq i \leq n$. Este conjunto es dirigido y $[a,y]$ es p-inerte. Usando el mismo razonamiento que en la prueba (4) de la proposición 3.2.10, tenemos que $p = \varphi(a, \bigvee Y) = \bigwedge \{\varphi(a,y) \mid y \in Y\} \leq \varphi(a, \bigvee X) \leq \bigwedge \{\varphi(a,x) \mid x \in X\} = p$, y para cualquier $a < z \leq \bigvee X \leq \bigvee Y$ existe algún $y \in Y$ con $a < z \wedge y \leq y$ entonces $\varphi(a,z) \leq \varphi(a, z \wedge y) = \varphi(a,y) = p$. La otra comparación es clara. $\square$

Definición 3.2.12. *Sea $[a,b]$ un intervalo sobre un idioma A. Un elemento $a \leq x \leq b$ es un p-*punto inercial *o un p-*punto estable *en $[a,b]$, con $p \in \Omega$, si $[a,x]$ es p-inercial y si $x \wedge y = a$ entonces $[a,y]$ no es p-inercial para cada $a \leq y \leq b$. El elemento x es un* punto inercial *o 76un* punto estable *en $[a,b]$, si es un punto p-inercial para algún $p \in \Omega$.*

Para el resto de la sección usaremos los conceptos de independencia introducidos en 1.5.26. Empecemos mostrando que en un idioma hay suficientes puntos de inercia:

Proposición 3.2.13. *Sea $[a,b]$ un intervalo en un idioma A, y $\rho \in \mathrm{Sit}(A,\Omega)$ con Ω una retícula completa sea $p \in \Sigma_\rho(a,b)$. Entonces, para cada $a \leq z \leq b$ tal que $[a,z]$ es p-inercial existe un punto p-inercial $z \leq x \leq b$ en $[a,b]$.*

Demostración. Usamos el lema de Zorn en el siguiente conjunto: Considere la familia Π de subconjuntos $X \subseteq [a,b]$ tales que:

1. $z \in X$.
2. X es independiente sobre a.
3. Para cada $x \in X$ el intervalo $[a,x]$ es p-inercial.

Por hipótesis, z es un punto inercial esto nos da un elemento $\{z\}$ en Π. La inclusión es un orden parcial en Π. Considere entonces cualquier cadena de elementos $\mathcal{Z}$ de Π, y su unión $\bigcup \mathcal{Z}$. Claramente, $\bigcup \mathcal{Z} \in \Pi$ y entonces por el lema de Zorn existe un miembro X de Π máximo. Si $x = \bigvee X$, entonces $a \leq x \leq b$ y por 3.2.10 se sigue que $[a,x]$ es p-inercial.

Por último considere $a \leq y \leq b$ con $x \wedge y = a$. Entonces, la familia $X \cup \{y\}$ es independiente sobre a en vista de la maximalidad de X se sigue que $[a,y]$ no es p-inercial. □

Lema 3.2.14. *Sea A un idioma $\varphi \in \mathrm{Sit}(A,\Omega)$. Suponga que A is φ-adecuado. Entonces, para cada intervalo $[a,b]$ tenemos que*

$$\chi(a,b) = \bigwedge \{\chi(a,x) \mid a < x \leq b \textit{ con } [a,x] \ \varphi\textit{-estable}\}\,.$$

Donde $\chi(a,b)$ es el núcleo dado en 1.5.69.

Demostración. Como χ es un $N(A)$-lugar,

$$\chi(a,b) \leq \bigwedge \{\chi(a,x) \mid a < x \leq b \text{ con } [a,x] \ \varphi\text{-estable}\}\,.$$

Para la otra comparación, sea $\Xi = \{\chi(a, x) \mid a < x \leq b$ es φ-estable$\}$ y $k = \bigwedge \Xi$. Si $a < k(a) \wedge b$, por hipótesis existe $a < x \leq k(a) \wedge b$ con $[a, x]$ φ-estable. Entonces, $\chi(a, x) \in \Xi$ y así $k \leq \chi(a, x)$. Entonces, $x \leq k(a) \leq \chi(a, x)(a)$ y por lo tanto $x = \chi(a, x)(a) \wedge x = a$, lo cual es una contradicción. □

El concepto de punto p-inercial está relacionado con el concepto de elemento esencial:

Lema 3.2.15. *Sea A un idioma, φ-adecuada para algún $\varphi \in \mathrm{Sit}(A, \Omega)$ suponga que $[a, b]$ es φ-atómico, es decir, $\Sigma_\varphi(a, b) = \{p\}$. Entonces, cualquier punto p-inercial en $[a, b]$ es esencial en $[a, b]$.*

Demostración. Suponga que x es un punto p-inercial en $[a, b]$. Entonces, $[a, x]$ es p-inerte en $[a, b]$. Considere cualquier $y \in [a, b]$ con $a = x \wedge y$ y suponga que $a < y$. Como A es φ-adecuado, existe un $a < z \leq y$ con $[a, z]$ φ-estable. Entonces $a \leq z \wedge x \leq x \wedge y = a$, lo cual contradice la propiedad p-punto de x. □

Podemos extender la definición de descomposición ([Sim10] teorema 8.2) para un intervalo $[a, b]$ sobre un idioma A.

Definición 3.2.16. *Sea A un idioma y $\varphi \in \mathrm{Sit}(A, \Omega)$. Una φ-*descomposición *de un intervalo $[a, b]$ de A es una familia $X = \{x_p \mid p \in \Sigma_\varphi(a, b)\}$ de elementos de $[a, b]$ indicada en el soporte de φ tal que:*

(1) X es independiente sobre a.

(2) $\bigvee X$ es esencial en $[a, b]$.

(3) El intervalo $[a, x_p]$ es p-inerte para cada $p \in \Sigma_\varphi(a, b)$.

Teorema 3.2.17. *Para un idioma A y φ un Ω-lugar, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) Cada intervalo no trivial de A tiene una φ-descomposición.

(2) A es φ-adecuado.

Demostración. Suponga (1). Entonces todo intervalo no trivial $[a, b]$ en A tiene una φ-descomposición X de $[a, b]$, con $\bigvee X$ esencial en $[a, b]$. Entonces, este elemento no es a y así X es no vacío. Entonces, $\Sigma_\varphi(a, b)$ no es vacío.

Suponga ahora (2) y considere cualquier intervalo no trivial $[a, b]$ de A. Por la proposición 3.2.13 existe una familia $X = \{x_p \mid p \in \Sigma_\varphi(a, b)\} \subseteq [a, b]$ tal que x_p es un punto p-inercial en $[a, b]$, y $[a, x_p]$ son intervalos p-inertes. Para verificar las partes (1) y (2) de la definición 3.2.16 es suficiente probar que X es independiente sobre a. Entonces en vista de 1.5.27, basta verificar que cada subconjunto finito de X es independiente sobre a. Sea Y un subconjunto finito de X. Haremos inducción sobre la cardinalidad de Y, notando que 3.2.13 da la base de la inducción. Considere $p, p_1 \ldots, p_n$ elementos distintos de $\Sigma_\varphi(a,b)$ tales que $Y = \{p, p_1 \ldots, p_n\}$. Por la hipótesis de inducción sabemos que $x_{p_1} \ldots, x_{p_n}$ son independientes sobre a. Para mostrar la independencia de $Y \cup x_p$ sobre a, sea $y = \bigvee Y$. Entonces, $\Sigma_\varphi(a,y) = \bigwedge\{p_1, \ldots, p_n\}$ por que Σ_φ es un $\mathcal{P}(\Omega)$-lugar, y también se tiene que $\Sigma_\varphi(a, x_p) = p$. Entonces, $\Sigma_\varphi(a, y \wedge x_p) = \Sigma_\varphi(a,y) \cap \Sigma_\varphi(a,x_p) = \emptyset$ por (2) de la definición 1.5.1. En vista de ser A φ-adecuado, se tiene que $x \wedge x_p = a$ y así $Y \cup x_p$ es independiente sobre a. Verifiquemos (2) de la definición 3.2.16 suponga que $x = \bigvee X$ no es esencial en $[a,b]$, es decir, existe $a < y \leq b$ con$x \wedge y = a$. Por la hipótesis (2) podemos asumir que $[a,y]$ es φ-inerte con $\varphi(a,y) = p \in \Sigma_\varphi(a,b)$. Entonces, el elemento x_p es un punto p-inercial en $[a,b]$ y $x_p \wedge y \leq x \wedge y = a$, lo cual es una contradicción. □

El Teorema 3.2.17 es un poco más general que el Teorema $8{,}2$ en [Sim10] que es el caso especial del NA-lugar χ. En [Sim10] el autor aplica esto a georetículas y la teoría de descomposición generada por χ está en conexión con ciertas propiedades del idioma A, es decir, cualquier intervalo χ-estable $[a,b]$ da un punto de $N(A)$ 1.5.72. Entonces, la teoría de descomposición generada por χ tiene un sabor más de teoría general de módulos, es decir, es desde cierta forma la teoría de descomposición generada por módulos crocríticos en el ambiente idiomático. Por último dejamos nuestra definición de teoría de descomposición.

Definición 3.2.18. *Sea A un idioma y Ω una retícula completa, una* teoría de descomposición *para A es un lugar $\varphi \in \mathrm{Sit}(A,\Omega)$ tal que el par (A,φ) satisface las condiciones del Teorema 3.2.17.*

3.3. Algunas construcciones en App(A,Λ)

El concepto de dimensión para un idioma se puede formular de distintas maneras, dependiendo del contexto, por ejemplo vía derivadas y núcleos como en 1.5.62 ó como en [GS88] capítulo 4. En está sección daremos las construcciones retículares de dimensión en términos de $\mathrm{App}(A,\Lambda)$. Estas construcciones se pueden entender como las versiones idiomáticas de las situaciones desarrolladas en [Gol77]. En la siguiente definición introducimos un formalismo para nuestras construcciones posteriores.

Definición 3.3.1. *Sea Λ una retícula completa con $\top, \bot$ su mayor y menor elemento, respectivamente. Denote por $\propto(\Lambda)$ el mínimo de todos los cardinales ι tales* *que* $\iota > \#\Lambda$. *Sea* $\infty(\Lambda) = \{\kappa \mid \kappa$ *es un ordinal y* $\kappa \leq \propto(\Lambda)\}$. *Defina*

$$\operatorname{seq}(\Lambda) = \{h : \infty(\Lambda) \to \Lambda \mid h \text{ es creciente y } h(0) = \bot, \;\; h(\propto(\Lambda)) = \top\}\,.$$

Note que $\operatorname{seq}(\Lambda)$ *es una retícula completa en la forma usual. Ahora, sea* $h \in \operatorname{seq}(A)$*; entonces, existe un ordinal* $\alpha < \propto(\Lambda)$ *tal que* $h(\alpha) = h(\alpha+1) = \cdots$ *(esto se sigue del hecho de que cada elemento en* $\operatorname{seq}(\Lambda)$ *es una función creciente). El menor de tales ordinales lo denotamos por* $\operatorname{Bnd}(h)$*.*

Definición 3.3.2. *Sea* A *un idioma* Λ *una retícula completa, para* $\psi \in \operatorname{App}(A,\Lambda)$ *y* $h \in \operatorname{seq}(\Lambda)$*. Definimos* $\mathfrak{d}_h^{\psi} : \mathcal{I}(A) \to \infty(\Lambda)$ *inductivamente como sigue:*

(i) $\mathfrak{d}_h^{\psi}(a) = 0$ *para todo* $a \in A$.

(ii) *Si* $[a,b] \in \mathcal{I}(A)$ *es no trivial, entonces*

$$\mathfrak{d}_h^{\psi}(a,b) = \operatorname{ínf}\{0 \leq \iota \leq \propto(\Lambda) \mid \psi(a,b) \leq h(\iota)\}.$$

Proposición 3.3.3. *Sea* A *un idioma y* Λ *una retícula completa. Entonces, la función* $\mathfrak{d}_h^{\psi}$ *es un* $\infty(\Lambda)$*-aspecto para cada* $\psi \in \operatorname{App}(A,\Lambda)$ *y* $h \in \operatorname{seq}(\Lambda)$*. Más aún:*

(1) Para todo $\psi \in \operatorname{App}(A,\Lambda)$*, la función* $\mathfrak{d}^{\psi} : \operatorname{seq}(\Lambda)^{op} \to \operatorname{App}(A,\infty(\Lambda))$ *es un* $\bigvee$*-morfismo.*

(2) Para cada $h \in \operatorname{seq}(\Lambda)$*, la función* $\mathfrak{d}_h : \operatorname{App}(A,\Lambda) \to \operatorname{App}(A,\infty(\Lambda))$ *es un* $\bigvee$*-morfismo.*

Demostración. Sea $\psi \in \operatorname{App}(A,\Lambda)$ y $h \in \operatorname{seq}(\Lambda)$. El primer requerimiento de 3.1.7 claramente se satisface. Ahora considere cualquier intervalo no trivial $[a,c]$ en A y tomemos $a \leq b \leq c$. Entonces, $\psi(a,c) = \psi(a,b) \vee \psi(b,c)$ y así $\mathfrak{d}_h^{\psi}(a,c) = \sup\{\mathfrak{d}_h^{\psi}(a,b), \mathfrak{d}_h^{\psi}(b,c)\}$. Si X es un subconjunto dirigido de $[a,\bar{1}]$, entonces $\psi(a,\bigvee X) = \bigvee\{\psi(a,x) \mid x \in X\}$. Por lo tanto $\mathfrak{d}_h^{\psi}(a,\bigvee X) = \sup\{\mathfrak{d}_h^{\psi}(a,x) \mid x \in X\}$.

Sea $H = \{h_j \mid j \in J\}$ una familia en $\operatorname{seq}(\Lambda)$, y $h = \bigwedge H$. Considere cualquier intervalo $[a,b]$ en A, y sea $\iota = \mathfrak{d}_h^{\psi}(a,b)$, $B(j) = \mathfrak{d}_{h_j}^{\psi}(a,b)$, y $B = \sup\{B(j) \mid j \in J\}$, para cada $j \in J$. Entonces, $\psi(a,b) \leq h(\iota) \leq h_j(\iota)$ y así $\iota \geq B(j)$, para cada $j \in J$. Por lo tanto $\iota \geq B$. Para la otra comparación tenemos que $\psi(a,b) \leq h_j(B)$ para cada $j \in J$. Entonces, $\psi(a,b) \leq h(B)$ y por ende $\iota \leq B$, es decir, $\iota = B$. Esto prueba (1).

Considere ahora $\psi = \bigvee\{\psi_j \mid j \in J\}$ en $\operatorname{App}(A,\Lambda)$ y $[a,b]$ un intervalo sobre A. Si $\iota = \mathfrak{d}_h^{\psi}(a,b)$, $B(j) = \mathfrak{d}_h^{\psi_j}(a,b)$, y poniendo $B = \sup\{B(j) \mid j \in J\}$, para cada $j \in J$, se tiene que $\psi_j(a,b) \leq h(B(j)) \leq h(B)$ para cada $j \in J$. Entonces, $\psi(a,b) \leq h(B)$ y así $\iota \leq B$. Ahora, si la desigualdad anterior es estricta, existe un $j \in J$ tal que $B(j) > \iota$. Por lo que, $\psi_j(a,b) \nleq h(\iota)$ de donde $\psi(a,b) \nleq h(\iota)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto debemos tener $\iota = B$, y esto prueba la afirmación (2). $\square$

Notemos que para cada $\alpha \in \Lambda$ tenemos un encaje Λ dentro de $\mathrm{seq}(\Lambda)$ dado como $\alpha \mapsto h^\alpha$, donde $h^\alpha(\iota) = \alpha$. Con esta definición tenemos:

Corolario 3.3.4. *Sea A un idioma y Λ una retícula completa. Entonces, para cualquier elemento $\alpha \in \Lambda$ el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{App}(A,\Lambda)^{op} \arrow[rr, "\mathfrak{d}_{h^\alpha}"] \arrow[dr, "\mathcal{M}(\_,\alpha)"'] & & \mathrm{App}(A,\infty(\Lambda)) \arrow[dl, "\mathcal{M}(\_,0)"] \\ & \mathcal{C}(A) & \end{tikzcd}$$

conmuta.

$\square$

El método descrito en la proposición 3.3.3 es la versión idiomática descrita en [Gol77]. Por otro lado recordemos que de 1.5, tenemos descritas ciertas derivadas sobre $\mathcal{B}(A)$ para cualquier idioma A, es decir ciertos, $\mathcal{O}pr\colon \mathcal{B}(A) \to \mathcal{B}(A)$. Con estos podemos definir sucesiones $h_{\psi,\alpha} \in \mathrm{seq}(\Lambda)$, para cada $\psi \in \mathrm{App}(A,\Lambda)$ y $\alpha \in \Lambda$, como sigue:

Definición 3.3.5. *Sea A un idioma y $\mathcal{O}pr : \mathcal{B}(A) \to \mathcal{B}(A)$ una derivada sobre el marco base $\mathcal{B}(A)$, definimos la $\mathcal{O}pr$-*filtración *en A como:*

(1) $h_{\psi,\alpha}(0) = \alpha$.

(2) Si $0 < \iota < \propto(\Lambda)$, entonces

$$h_{\psi,\alpha}(\iota) = h_{\psi,\alpha}(\iota-1) \vee \Big(\bigvee \{\psi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{O}pr(\mathcal{M}(\psi, h_{\psi,\alpha}(\iota-1)))\} \Big).$$

(3) Si $0 < \iota < \propto(\Lambda)$ es un ordinal límite, entonces $h_{\psi,\alpha}(\iota) = \bigvee \{h_{\psi,\alpha}(\lambda) \mid \lambda < \iota\}$. Aquí estamos utilizando la función $\mathcal{M}$ definida en 3.1.11.

Definición 3.3.6. *De 3.3.5 podemos aplicar la construcción de 3.3.3, $\mathfrak{d}$ a ψ y a la $\mathcal{O}pr$-*filtración *para obtener $\mathfrak{d}^{\psi}_{h_{\psi,\alpha}} \in \mathrm{App}(A,\infty(\Lambda))$. Llamaremos a este aspecto la (ψ,α)-*dimensión*, o (ψ,α)-dim.*

Observación 3.3.7. *Considere el caso particular $\Lambda = \mathcal{D}(A)$, con A un idioma. Entonces, tomemos el $\mathcal{D}(A)$-aspecto $\xi(\_)$ 3.1.13 y la derivada $\mathcal{D}vs \circ \mathcal{O}pr := \mathcal{K}pr$, definamos la $(\mathcal{D},\mathcal{K}pr)$-filtración para cualquier $\mathcal{D} \in \mathcal{D}(A)$ como sigue:*

(1) $\mathcal{K}pr^0(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

(2) $\mathcal{K}pr^{\gamma+1}(\mathcal{D}) = \mathcal{K}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma}(\mathcal{D}))$.

(3) $\mathcal{K}pr^{\lambda}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}vs(\bigcup\{\mathcal{K}pr^{\beta}(\mathcal{D}) \mid \beta < \lambda\})$. *Para cada ordinal γ y cada ordinal límite λ.*

Proposición 3.3.8. *Sea A un idioma. Con la terminología anterior se tiene que, la $\mathcal{O}pr$-filtración y la $(\mathcal{D}, \mathcal{K}pr)$-filtración son la misma.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre los ordinales γ y ordinales límite λ. El caso $\gamma = 0$ es trivial. Para el paso inductivo, $\gamma \mapsto \gamma + 1$ observe que por definición de la sucesión

$$h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma) = h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma-1) \vee \Big(\bigvee \{\xi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{O}pr(\mathcal{M}(\xi(\_), h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma-1)))\}\Big)$$

tenemos que el conjunto congruencia $\mathcal{M}(\xi(\_), h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma-1)) = \mathcal{M}(\xi(\_), \mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))$. Recordemos que $[a,b] \in \mathcal{M}(\xi(\_), h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma-1))$ justamente cuando $\xi(a,b) \leq h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma-1)$, es decir, $\xi(a,b) \subseteq \mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D})$. Entonces, $\mathcal{M}(\xi(\_), h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma-1)) = \mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D})$, y de lo anterior y la hipótesis de inducción obtenemos

$$h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma) = \mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}) \vee \Big(\bigvee \{\xi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))\}\Big)$$

en $\mathcal{D}(A)$, es decir,

$$\mathcal{D}vs(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}) \cup \mathcal{D}vs(\bigcup\{\xi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))\})) =$$

$$= \mathcal{D}vs(\bigcup\{\xi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))\})$$

por que $\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}\mathcal{D})$.

Sea $\mathcal{B} = \mathcal{D}vs(\bigcup\{\xi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))\})$. Por 1.4.32 (la descripción de $\mathcal{D}vs(\mathcal{B})$), tenemos que para cualquier intervalo $[a,b] \in \mathcal{B}$,existe un subinterval propio $[x,y]$ de $[a,b]$ tal que $[x,y] \in \bigcup\{\xi(a,b) \mid [a,b] \in \mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))\}$. Entonces, $[x,y] \in \xi(a',b')$ para algún $[a',b'] \in \mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))$. De esto podemos encontrar $[a',b']$ similar a un subintervalo de $[x,y]$, digamos I, y este intervalo esta en $\mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))$. Este es el caso cuando $[a,b] \in \mathcal{D}vs(\mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D})))$. Por lo que

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}vs(\mathcal{O}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma-1}(\mathcal{D}))).$$

La otra inclusión es obvia. Por lo tanto, de la definición de $\mathcal{D} - \mathcal{K}pr$-filtración concluimos que $\mathcal{K}pr^{\gamma+1}(\mathcal{D}) = \mathcal{K}pr(\mathcal{K}pr^{\gamma}(\mathcal{D})) = h_{\xi(\_),\mathcal{D}}(\gamma)$.

Ahora, para el caso límite, tenemos

$$\begin{aligned} h_{\xi,\mathcal{D}}(\lambda) &= \bigvee \{h_{\xi,\mathcal{D}}(\beta) \mid \beta < \gamma\} = \mathcal{D}vs\left(\bigcup \{h_{\xi,\mathcal{D}}(\beta) \mid \beta < \gamma\}\right) \\ &= \mathcal{D}vs\left(\bigcup \left\{\mathcal{K}pr^{\beta}(\mathcal{D}) \mid \beta < \gamma\right\}\right) = \mathcal{K}pr^{\lambda}(\mathcal{D}), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por definición del supremos en $\mathcal{D}(A)$ y la hipótesis de inducción, la tercera igualdad es por la definición de filtración de $\mathcal{K}pr$ con respecto a $\mathcal{D}$ en el caso límite. □

En vista de 3.3.8 podemos considerar las derivadas fundamentales de 1.5 y aplicar lo anterior para obtener las filtraciones determinadas por las derivadas $\mathcal{G}ab$ y $\mathcal{B}oy1$:

Corolario 3.3.9. *Si A es un idioma, entonces la $\mathcal{C}rt$-filtración es exactamente la $\mathcal{D}$-Gabriel filtración y la $\mathcal{F}ll$-filtración es precisamente la $\mathcal{D}$-Boy filtración.*

□

3.4. Dimensiones en categorías de módulos

En esta sección veremos cómo, los resultados obtenidos a lo largo de la sección anterior 3.3 se conectan de manera agradable con la teoría de dimensión para módulos sobre un anillo.

En [Gol77] el siguiente marco teórico es introducido para lidiar con la mayoría de las dimensiones en categorías de módulos. Recordemos algo de ese material. Fijemos una retícula completa Γ y considere un anillo R, y la categoría de módulos izquierdos R-Mod.

Definición 3.4.1. *Una función de* quasi-dimensión *en* R-Mod *es una función*

$$R\text{-Mod} \xrightarrow{D} \Gamma,$$

que satisface:

1. *Si $0 \to N \to M \to K \to 0$ es una sucesión exacta en R-Mod entonces $D(M) = D(N) \vee D(K)$.*

2. *Si M es un módulo que es unión directa de la familia $\{N_i \mid i \in \Omega\}$ de submódulos de M, entonces $D(M) = \bigvee \{D(N_i) \mid i \in \Omega\}$.*

Si $D(M) = \perp \Leftrightarrow M = 0$, diremos que D es de pre-dimensión*. Si la imagen de D es linealmente ordenada, diremos que D es* lineal*. Una función de pre-dimensión lineal se dice ser una* función de dimensión.

Observación 3.4.2. *(1) Denotemos por $Q\text{-}\dim(R,\Gamma)$ la colección de todas las funciones de quasi-dimensión en R-Mod con valores en Γ. Sea R-mod el conjunto de clases de isomorfismo de módulos finitamente generados. Se observa fácilmente que cualquier función de quasi-dimensión queda completamente determinada por sus valores en R-mod. Por lo tanto, Q-dim(R,Γ) es un conjunto, y de hecho, es una retícula completa.*

(2) Observe que cualquier $D \in Q\text{-}\dim(R,\Gamma)$ define un Γ-aspecto para cada módulo como sigue: Sea M un módulo y $D_M : \mathfrak{I}(\Lambda(M)) \longrightarrow \Gamma$ definida por $D_M(K,L) = D(L/K)$. De la definición de función de quasi-dimensión se tiene que la función D_M es en efecto un Γ-aspecto para $\Lambda(M)$. En particular, D_R define un Γ-aspecto para $\Lambda(R)$.

Lema 3.4.3. *Para cada R-módulo M se tiene un morfismo de retículas completas*

$$[M] \colon Q\text{-}\dim(R,\Gamma) \longrightarrow \mathrm{App}(M,\Gamma)$$

dado por $[M](D) = D_M$.

Demostración. Sea $\mathfrak{D} \subseteq Q\text{-}\dim(R,\Gamma)$ una familia de funciones de quasi-dimensión. Entonces, $[M](\bigvee \mathfrak{D}) = \bigvee \mathfrak{D}_M$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\big(\bigvee \mathfrak{D}_M\big)(K,L) &= \big(\bigvee \mathfrak{D}\big)(L/K) = \bigvee \{D(L/K) \mid D \in \mathfrak{D}\} \\ &= \bigvee \{D_M(K,L) \mid D \in \mathfrak{D}\} = \bigvee \{[M](D) \mid D \in \mathfrak{D}\}\,,\end{aligned}$$

como se requería. Para $[M](\bigwedge \mathfrak{D}) = \bigwedge \{[M](D) \mid D \in \mathfrak{D}\}$ la prueba es similar. $\square$

Ejemplo 3.4.4. *Un ejemplo de lo anterior es considerar la función de quasi-dimensión dada por $\xi \in Q$-dim$(R,\mathbb{D}(\mathbb{R}))$, generar la menor teoría de torsión para un R-módulo M ([Gol77] 8.1), entonces el $\mathbb{D}(R)$-aspecto inducido no es más que $[M](\xi) = \xi_M$, en el sentido de 3.1.13.*

Observación 3.4.5. *(1) Las situaciones descritas en 3.3.8 y 3.3.9 son las versiones idiomaticas expuestas en [Gol77], pero en nuestro contexto. De hecho podemos recuperar las nociones de la exposición de Golan, simplemente recordando que de 1.6.2 4, tenemos las derivadas fundamentales definidas en $\mathbb{B}(R)$, por ejemplo la filtración para $\mathcal{C}rt$ en $\mathbb{D}(R)$ es la conocida filtración de Gabriel ([Sim14f]), dada por el prenúcleo $\mathcal{G}ab := \mathbb{D}vs \circ \mathcal{C}rt$ en $\mathbb{D}(R)$.*

(2) Recordemos que dado un módulo M y una clase de módulos $\mathcal{A}$ podemos relativizar ésta a un conjunto de intervalos sobre el idioma $\Lambda(M)$ con la técnica de la rebanada descrita en 1.6.5 y de hecho 1.6.6 nos dice que estas rebanadas caen donde deben.

(3) Otra observación importante que debemos considerar, ésta dada en [Gol77] Proposición 9.1 en donde se define una función: Para cada $a \in \Gamma$, $\mathcal{N}_a : Q\text{-}\dim(R,\Gamma) \longrightarrow \mathbb{D}(R)^{op}$ dada como $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{N}(D,a)}$ si y sólo si $D(M) \leq a$, es función es un morfismo de retículas completas, aquí $\mathcal{T}_{\mathcal{N}(D,a)}$ es la teoría de torsión determinada por (D,a). Observe que esta situación es el análogo a la descrita por nosotros en 3.1.11, pongamos entonces $\mathcal{N}_a : \mathrm{App}(\Lambda(M),\Gamma) \longrightarrow \mathcal{D}(\Lambda(M))$, donde $\mathcal{N}_a := \mathcal{D}vs \circ \mathcal{M}_a$ para cada $a \in \Gamma$.

Con todo lo anterior podemos probar lo siguiente:

Teorema 3.4.6. *Sea Γ una retícula completa, y R-Mod la categoría de módulos izquierdos sobre un anillo R. Para cada $a \in \Gamma$ y cada R-módulo M el siguiente cuadrado*

$$\begin{tikzcd} Q\text{-}\dim(R,\Gamma) \arrow[r, "{[M](\_)}"] \arrow[d, "\mathcal{N}_a"'] & \mathrm{App}(M,\Gamma) \arrow[d, "\mathcal{N}_a"] \\ \mathbb{D}(R)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\langle M\rangle(\_)"'] & \mathcal{D}(\Lambda(M))^{\mathrm{op}} \end{tikzcd}$$

conmuta en la categoría de retículas completas

Demostración. Sabemos que todos los morfimos involucrados en este caso son morfismos en la categoría de retículas completas, por lo que sólo resta probar la conmutatividad del cuadro. Considere cualquier $D \in Q\text{-}\dim(R,\Gamma)$, y recordemos que $\mathcal{N}_a([M](D)) = \mathcal{D}vs(\mathcal{M}_a(D_M)$. Entonces, $[K,L] \in \mathcal{N}_a([M](D)) = \mathcal{D}vs(\mathcal{M}_a(D_M)$ si y sólo si para todo $K \leq H < L$ existe $H < N \leq M$ tal que $N/H \in \mathcal{M}_a(D_M)$. Es decir, $D_M([H,N]) = D(N/H) \leq a$. Pero esta condición es justamente que N/H pertenezca a $\mathcal{T}_{\mathcal{N}_a(D)}$, y esto sucede precisamente cuando $[H,N] \in \langle M\rangle(\mathcal{N}_a(D))$ (esencialmente por 1.4.32). Por lo tanto, $[K,L] \in \langle M\rangle(\mathcal{N}_a(D))$. De donde concluimos que, $\mathcal{N}_a([M](D)) = \langle M\rangle(\mathcal{N}_a(D))$, para toda D, y así el diagrama conmuta. $\square$

De este teorema es inmediato:

Corolario 3.4.7. *Sea Γ una retícula completa y considere la retícula completa $\infty(\Gamma)$. Sea R-Mod la categoría de módulos izquierdos sobre un anillo R. Entonces, para cualquier $a \in \infty(\Gamma)$ y cualquier R-módulo M, el siguiente diagrama conmuta en la categoría de retículas completas:*

$$\begin{tikzcd} Q\text{-}\dim(R,\infty(\Gamma)) \arrow[r, "{[M](\_)}"] \arrow[d, "\mathcal{N}_a"'] & \mathrm{App}(M,\infty(\Gamma)) \arrow[d, "\mathcal{N}_a"] \\ \mathbb{D}(R)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\langle M\rangle(\_)"'] & \mathcal{D}(\Lambda(M))^{\mathrm{op}}. \end{tikzcd}$$

□

Ejemplo 3.4.8. *Sea* Γ *una retícula completa y considere* $D \in Q\text{-}\dim(R,\Gamma)$*,* $a \in \Gamma$*. Siguiendo [Gol77, Capítulo 12] definamos la sucesión* $k_{D,a}$*, llamada la* la filtración de Gabriel *de* (D,a)*, mimetizando nuestra construcción en 3.3.7:*

(1) $k_{D,a}(0) = a$*.*

(2) Si $0 < \iota < \propto(\Gamma)$*, entonces*

$$k_{D,a}(\iota) = k_{D,a}(\iota - 1) \vee (\bigvee\{D(M) \mid M \textit{ es un } \mathcal{N}(D, k_{D,a}(\iota - 1))\textit{-módulo cocrítico izquierdo}\}).$$

(3) Si $0 < \iota < \propto(\Gamma)$ *es un ordinal límite, entonces* $k_{D,a}(\iota) = \bigvee\{k_{D,a}(\lambda) \mid \lambda < \iota\}$*.*

Por lo que, tomamos esta filtración y aplicamos la proposición 3.3.3, en este contexto, obtenemos la función de quasi-dimensión $\lambda(D, k_{D,a})$ *en* $Q\text{-}\dim(R, \infty(\Gamma))$*. Ahora sí consideramos cualquier* R*-módulo* M *y* $[M](\lambda(D, k_{D,a})) = \lambda(D, k_{D,a})_M \in \mathrm{App}(M, \infty(\Gamma))$*. Entonces, el* $\infty(\Gamma)$*-aspecto para* M *es justamente la* (D_M, a)*-dimensión.*

Capítulo 4

Posibles líneas de investigación y preguntas abiertas

En este capítulo mencionaremos algunas situaciones que surgieron alrededor de esta investigación además de algunas preguntas abiertas.

(1) El teorema 3.2.17 caracteriza a los idiomas que tienen una descomposición con respecto a algún lugar, este resultado como se menciona es una generalización del teorema $8{,}2$ en [Sim10], en ese documento el autor describe la teoría de descomposición para geo-retículas con respecto al lugar χ. Para llegar a esa descomposición se hace uso del siguiente objeto:

Dado un idioma A, un elemento $a \in A$ es *distributivo* si satisface las siguientes condiciones equivalentes:

1. $(\forall x, y \in A[a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)])$.
2. $(\forall x, y \in A[a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)])$.
   Denotemos por $F(A)$ a todos los elementos distributivos de A. Notemos que $F(A)$ es no vacío para todo idioma A, en el caso extremo $F(A) = \{0, \bar{1}\} \cong 2$ y de hecho se puede probar:
3. $F(A)$ es un sub-idioma de A y así es un marco.
   A $F(A)$ se le conoce como *la parte localica* de A. Denotemos por $C(A)$ el conjunto de elementos de $F(A)$ que tiene complemento en A a $C(A)$ se le llama *el centro* de A.
4. Para todo idioma A, $C(A)$ es una álgebra booleana.
5. Para cada idioma A y cada $a \in F(A)$ se tiene que $u_a \in N(F(A))$ y $u_\bullet : F(A) \to N(A)$ es un encaje de marcos.

Con la parte distributiva de A y en particular con el centro de A se puede observar que ciertas situaciones de la descomposición generada por χ se simplifican, de hecho si uno observa con detenimiento se emplean técnicas análogas al considerar descomposiciones de Tipos de Kaplansky. Una de las observaciones principales:

6. Para todo morfismo suprayectivo $f : A \to B$ de idiomas se tiene que $f(a) \in F(B)$ para cada $a \in F(A)$, es decir los morfismo suprayectivos inducen morfismos en las partes localicas.

   En la categoría de marcos Frm la construcción de $N(A)$ es funtorial, $N(\_) : Frm \to Frm$ esta agradable situación deja de ser válida en la categoría de idiomas $\mathcal{ID}$. Remediar este *defecto* parece ser complicado, pero en vista de las consideraciones anteriores podemos hacer la siguiente modificación:

   Denotemos por $\mathcal{ID}^*$ la subcategoría plena de $\mathcal{ID}$ cuyos objetos son idiomas y los morfismos son morfismos suprayectivos de idiomas en particular para cada núcleo j sobre un idioma A se tiene que $(j = j^* : A \to A_j) \in \mathcal{ID}^*$. Así tenemos un funtor $F(\_) : \mathcal{ID}^* \to Frm$ que manda a cada idioma en su parte localica y los morfimos se calculan por medio de restricciones. Todo esto nos induce

$$N(\_) \circ F(\_) : \mathcal{ID}^* \to Fmr$$

   de esta manera obtenemos un funtor parcialmente definido en $\mathcal{ID}$.

(2) Esta situación esta inspirada en 6.5 de [DZ06], en este mismo texto se introduce el concepto de clase natural universal y se examinan los tipos de descomposición que estas generan. Sería interesante desarrollar la parte idiomática de tales construcciones en términos de los elementos antes mencionados.

(3) En el ya texto mencionado [Sim10] sección 10 se esboza como dado un espacio topológico (con ciertas características, es decir, sobrio) queda caracterizado por la descomposición de χ, es decir, tal descomposición existe precisamente si el espacio es *disperso* (ver [Sim06a] para detalles) y de hecho este tipo de espacios se pueden *reconstruir* a partir de sus partes discretas mediante la descomposición inducida por χ.

   Un tratado análogo se debe investigar para un módulo (con ciertas restricciones, digamos ser distributivo, es decir, el idioma de submodulos del módulo es una retícula distributiva (y así un marco)).

(4) En 3.4.6 determinamos la conmutatividad de ciertos cuadros, éstos sugieren que de alguna manera se puede reconstruir $Q\text{-}\dim(R,\Gamma)$ cómo

un *pegado* (aquí pegado entiéndase como un colímite de ciertos diagramas) de $\mathrm{App}(\mathrm{M}, \Gamma)$ posiblemente las técnicas usadas en [Sim94] dan indicios de como se debería realizar tal pegado, en esta dirección tenemos algunas consideraciones.

(5) Como se observó a lo largo del trabajo el producto de derivadas determina muchos objetos importantes por ejemplo los totalizadores e igualadores. Además de las menciones hechas en 2 2.4, existe otra situación emergente: En vista del producto es natural pensar en objetos *primos* pero a la luz de la *inflación* del producto, es decir, $d, d' \leq dd'$, sugiere entonces considerar derivadas *duprimas*: Una derivada π es *duprima* si $\pi \neq \bar{d}$ y siempre que $\pi \leq d_1 d_2$ entonces $\pi \leq d_1$ ó $\pi \leq d_2$. Estudiar esta nueva clase de derivadas es importante ya que objetos duprimos abundan en la teoría de módulos por ejemplo [RMW05], [WW09], [VDBW01] y [GdVPVP94], algunas de estas situaciones se han iniciado como investigación en nuestro grupo.

(6) Una pregunta que surge es la siguiente: Dado un anillo R sabemos que tiene asociado un marco, el marco de teorías de torsión hereditarias $\mathrm{R}-\mathrm{tors}$, sería interesante determinar una técnica de representación, es decir, dado un marco A existirá un anillo R tal que $\mathrm{R}-\mathrm{tors} \cong \mathrm{A}$. Esta pregunta lleva a otras consideraciones del mismo tipo por ejemplo de 1.6 tenemos un funtor $\Lambda : \mathrm{R}-\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathcal{P}\mathrm{os}$ sería agrdable que el codominio de este funtor fuera $\mathcal{ID}$ (al parecer no es el caso), más aún, que Λ tuviera adjunto izquierdo y así realizar algunas situaciones análogas a las que se tiene de la adjunción de Top en Frm. Hay más preguntas alrededor de la teoría de idiomas muchas de estas se encuentran en la serie de documentos de H. Simmons.

Uno de los principales programas que sugiera toda esta teoría es por supuesto trasladar nociones, técnicas y situaciones de teoría general de módulos al contexto idiomático de tal manera que las consideraciones idiomáticas no sólo esclarezcan parte de la teoría de módulos si no a su vez se usen como herramienta para la clasificación de estas estructuras clásicas y las técnicas de módulos ayuden a resolver problemas en la teoría de idiomas y marcos.

Apéndices

Apéndice A

$D(\mathcal{M})$ como monoide ordenado

Ya que $D(\mathcal{M})$ es un monoide ordenado para cualquier idioma $\mathcal{M}$, entonces podemos estudiar las propiedades de esta estructura que están totalmente determinadas por el producto que introducimos en el capítulo 1. Mucho de este análisis está inspirado en [Gol87] y [GS88].

A.1. Operaciones

Definición A.1.1. Sean k_1 y k_2 derivadas en $\mathcal{M}$ el *producto simétrico de* k_1 y k_2 es la derivada $k_1 \nabla k_2$=$k_1 k_2 \wedge k_2 k_1$.

Inmediatamente notamos que, como $k_1 k_2 \geq k_1 \vee k_2$ entonces

$$k_1 k_2 \geq k_1 \nabla k_2 \geq k_1 \vee k_2$$

También de la definición como $\wedge$ es conmutativo tenemos que $k_1 \nabla k_2 = k_2 \nabla k_1$ y $k \nabla d_{\underline{0}} = k$ y $k \nabla d_1 = d_1$.

Definición A.1.2. Dada $k \in D(\mathcal{M})$ definimos el *ideal principal izquierdo generado por* k en $D(\mathcal{M})$ es $\mathrm{L}(k) = \{dk \mid d \in D(\mathcal{M})\}$, análogamente se define el *ideal principal derecho generado por* k, $\mathrm{D}(k) = \{kd \mid d \in D(\mathcal{M})\}$.

Proposición A.1.3. Todo ideal izquierdo (derecho) principal en $D(\mathcal{M})$ tiene un único generador.

Demostración. Sea I el ideal principal izquierdo generado por k y k' entonces como $d_{\underline{0}} k = k$ para toda k se tiene que existen d_1 y d_2 tal que $k = d_1 k'$ y $k' = d_2 k$ y entonces por 1.1.3 se sigue que $k \leq k'$ y $k' \leq k$.

□

Proposición A.1.4. Sean k, d y z derivadas en $\mathcal{M}$ entonces se cumple:

(1) $(d \wedge z)(d \vee z) \geq d\nabla z$.

(2) $(d \wedge z)\nabla k \geq (d\nabla k) \wedge (z\nabla k)$.

(3) Si $d \leq z$ entonces $d\nabla k \leq z\nabla k$.

Demostración. (1)

De 1.1.5 (5) y (3) tenemos que $(d \wedge z)(d \vee z) = d(d \vee z) \wedge z(d \vee z) \geq (d^2 \vee dz) \wedge (zd \vee z^2) \geq d\nabla z$.

(2)

$(d \wedge z)\nabla k = (d \wedge z)k \wedge k(d \wedge z) = (dk \wedge zk) \wedge (kd \wedge kz) = (d\nabla k) \wedge (z\nabla k)$

Para (3)

Si $d \leq z$ entonces por (1) y (2) de 1.1.5 se tiene que $dk \wedge kd \leq zk \wedge kz$

□

Proposición A.1.5. Sean d y z derivadas en $\mathcal{M}$ tal que $d \wedge z = d_{\underline{0}}$. Entonces:

(1) $d \vee z = d\nabla z$.

(2) Si $k \in D(\mathcal{M})$ tal que $d \leq zk$ entonces $d \leq k$.

(3) Si $k \in D(\mathcal{M})$ entonces $k = dk \wedge zk = (z \vee d) \wedge (d \vee k)$.

(4) Si $k \leq d \vee z$ entonces $k = (k \wedge d) \vee (k \wedge z) = (k \vee d) \wedge (k \vee z)$.

(5) Si $k \in D(\mathcal{M})$ entonces $k \wedge (d \vee z) = (k \wedge d) \vee (k \wedge z)$.

Demostración. (1) Por 1.1.4 tenemos que $d \vee z \leq dz \wedge zd$ pero en vista de 1.1.5 tenemos que $d \vee z = d_{\underline{0}}(d \vee z) = (d \wedge z)(d \vee z) = d(d \vee z) \wedge z(d \vee z) \geq dz \wedge zd$

(2)

$k = d_{\underline{0}}k = (d \wedge z)k = (dk \wedge zk) \geq d$.

(3)

$k = (d \wedge z)k = dk \wedge zk \geq (d \vee k) \wedge (z \vee k) \geq k$.

(4)

Tenemos que $(k \wedge d) \vee (k \wedge z) \leq k \leq (k \vee d) \wedge (k \vee z)$. Ahora por el inciso anterior tenemos $[(k \wedge d) \vee (k \wedge z)]d \wedge [(k \wedge d) \vee (k \wedge z)]z = (k \wedge d) \vee (k \wedge z) \geq (k \wedge z)d \wedge (k \wedge d)z = (kd \wedge zd) \wedge (kz \wedge dz) \geq (k \vee d) \wedge (k \vee z)$ donde la última desigualdad es por $kd \geq k \vee d$ y $zd \geq z \vee d = d \vee (z \vee d) \geq k \vee d$ análogo para $k \vee z$.

Por último para (5) por (4) tenemos que $k \wedge (d \vee z) = [k \wedge (d \vee z) \wedge z] \vee [k \wedge (d \vee z) \wedge d] = (k \wedge d) \vee (k \wedge z)$. □

Proposición A.1.6. Si k, d y z son derivadas en $\mathcal{M}$ tales que $z \wedge d = d_{\underline{0}} = z \wedge k$. Entonces:

(1) $z \wedge (dk) = d_{\underline{0}} = z \wedge (kd)$.

(2) $z \wedge (d \vee k) = d_{\underline{0}}$.

Demostración. Para (1) tenemos que $k = (z \wedge d)k = zk \wedge dk$ y así $z \wedge k \wedge dk = z \wedge dk = z \wedge k = d_{\underline{0}}$ la otra igualdad es análoga.

Para (2) de nuevo por 1.1.4 se sigue que $z \wedge (d \vee k) \leq z \wedge (dk) = d_{\underline{0}}$ la última igualdad es por el inciso anterior.

□

Sea z y z' derivadas en $\mathcal{M}$ consideremos el conjunto $\mathfrak{L} = \{d \mid dz' \geq z\}$ este es no vacío pues z cumple la propiedad así $\bigwedge \mathfrak{L}$ es tal que $(\bigwedge \mathfrak{L})z' \geq z$, denotemos a esta derivada como zz'^{-1}, y le llamaremos el *residuo izquierdo de* z por z'.

Proposición A.1.7. Sean z, z' y z'' derivadas en $\mathcal{M}$ entonces:

(1) $zz'^{-1} \leq z$.

(2) $z' \leq z$ entonces $z''z^{-1} \leq z''z'^{-1}$.

(3) $z' \leq z$ entonces $z'z''^{-1} \leq zz''^{-1}$.

(4) $z \leq z'z''$ si y sólo si $zz''^{-1} \leq z'$.

(5) $(zz')z''^{-1} = z(z''z')^{-1}$.

(6) $(zz')z''^{-1} \leq z(z'z''^{-1})$.

(7) $(zz''^{-1})(z'z''^{-1}) \leq zz'^{-1}$.

(8) $z \leq z'$ si y sólo si $zz'^{-1} = d_{\underline{0}}$.

(9) $z = zd_{\underline{0}}^{-1}$.

(10) $(z' \vee z'')z^{-1} = z'z^{-1} \vee z''z^{-1}$.

(11) $z' = (z'z)z^{-1}$ si y sólo si existe $d \in D(\mathcal{M})$ tal que $z' = dz^{-1}$.

(12) $z' = (z'z^{-1})z$ si y sólo si existe $d \in D(\mathcal{M})$ tal que $z' = dz$.

Demostración. (1) Por 1.1.4 $zz' \geq z$ y así por definición de residuo se tiene $zz'^{-1} \leq z$.

(2) Por definición $z' \leq z \leq (zz''^{-1})z''$ entonces $z'z''^{-1} \leq zz''^{-1}$.

(3) Por 1.1.5 (1) y por definición de residuo se tiene $z'' \leq (z''z'^{-1})z' \leq (z''z'^{-1})z$ y así $z''z^{-1} \leq z''z'^{-1}$.

(4) Si $z \leq z'z''$ entonces $zz''^{-1} \leq z'$ por definición de residuo, recíprocamente si $zz''^{-1} \leq z'$ entonces por 1.1.5 $z \leq (z''z'^{-1})z'' \leq z'z''$.

(5) Primero observemos como $z \leq (zz'^{-1})z'$ y $zz'^{-1} \leq [(zz'^{-1})z''^{-1}]z''$ entonces por la asociatividad del producto tenemos $z \leq (zz'^{-1})z' \leq [(zz'^{-1})z''^{-1}](z''z')$, esto implica que $z(z''z')^{-1} \leq (zz'^{-1})z''^{-1}$, recíprocamente tenemos que $z \leq [z(z''z')^{-1}](z''z') = ([z(z''z')^{-1}]z'')z'$, es decir, $zz'^{-1} \leq [z(z''z')^{-1}]z''$, por lo que $(zz'^{-1})z''^{-1} \leq z(z''z')^{-1}$ esto prueba la igualdad.

(6) Por definición se tiene que $z' \leq (z'z''^{-1})z''$ y así $zz' \leq z[(z'z''^{-1})z''] = [z(z'z''^{-1})]z''$, es decir, $(zz')z''^{-1} \leq z(z'z''^{-1})$.

(7) Tenemos que $z' \leq (z'z''^{-1})z''$ y así $z \leq (zz'^{-1})z \leq (zz'^{-1})[(z'z''^{-1})z''] = [(zz'^{-1})(z'z''^{-1})]z''$ de donde se sigue que $zz''^{-1} \leq (zz'^{-1})(z'z''^{-1})$.

(8) Suponga que $z \leq z'$ entonces $d_{\underline{0}}z' = z' \geq z$ entonces $(zz'^{-1}) \leq d_{\underline{0}}$ la otra desigualdad es obvia.

(9) Es inmediato de las definiciones.

(10) Por definición tenemos que $z \vee z' \leq [(z \vee z')z^{-1}]z$ y asi $z'z^{-1} \vee z''z^{-1} \leq (z' \vee z'')z^{-1}$, para la otra desigualdad por 1.1.4 tenemos que $z' \vee z'' \leq (z'z^{-1})z \vee (z''z^{-1})z \leq [(z'z^{-1}) \vee (z''z^{-1})]z$.

(11) Suponga que existe tal derivada d, con $z' = dz^{-1}$ entonces $d \leq (dz^{-1})z$ y así $z' = dz^{-1} \leq [(dz^{-1})z]z^{-1}$ pero de la definición de residuo se tiene que $z' = dz^{-1} \geq [(dz^{-1})z]z^{-1}$ y así $z' = dz^{-1} = [(dz^{-1})z]z^{-1} = (z'z)z^{-1}$, el regreso es inmediato.

(12) Suponga que existe tal derivada d tal que $z' = dz$ entonces $(dz)z^{-1} \leq d$ y así $[(dz)z^{-1}]z \leq dz = z'$. Por otro lado $z')dz \leq [(dz)z^{-1}]z$ por definición luego $z' = [(dz)z^{-1}]z = (z'z^{-1})z$, y de nuevo el regreso es inmediato.

□

A.1.1. El conjunto de derivadas idempotentes: $C(\mathcal{M})$

En el capítulo 1 definimos un operador cerradura en $\mathcal{M}$ como una derivada $d \in D(\mathcal{M})$ tal que es idempotente, es decir,

$$d^2 = d.$$

En esta sección examinaremos propiedades específicas de éstas, haciendo notar analogías con filtros idempotentes ó radicales de [Gol87].

Observación A.1.1. *Notemos que en general si d y d' son derivadas en $\mathcal{M}$ idempotentes entonces su producto dd' no necesariamente es una derivada idempotente, pero si $d \leq k$ con $k \in C(\mathcal{M})$ entonces multiplicando por k se tiene $dk = k^2 = k$ análogamente $kd \in C(\mathcal{M})$.*

Proposición A.1.8. Si $c, c' \in D(\mathcal{M})$ con tales que $cc', c'c \in C(\mathcal{M})$ entonces $cc' = c'c$, el recíproco se cumple si $c, c' \in C(\mathcal{M})$.

Demostración. Como $c \leq c'c$ por la observación anterior en vista de que $c'c \in C(\mathcal{M})$ se tiene que $c(c'c) = c'c$ asociando se tiene que $cc' \leq c'c$ la otra desigualdad es análoga por lo que se da la igualdad. Ahora suponiendo que c y c' son idempotentes tales que $cc' = c'c$ se tiene que $(cc')(cc') = c(c'c)c' = c(cc')c' = c^2c'^2$ por lo que $c'c = cc' \in C(\mathcal{M})$.

□

Recordemos que como $C(\mathcal{M}) \subseteq D(\mathcal{M})$ entonces $C(\mathcal{M})$ es un conjunto parcialmente ordenado, pero no es una subretícula de $D(\mathcal{M})$ pero $C(\mathcal{M})$ por sí sola tiene estructura de retícula completa, donde el ínfimo de una familia de derivadas idempotentes X, $\bigwedge X$ esta descrito como en $D(\mathcal{M})$ y el supremo de la familia $\bigvee X$ está descrito como $(\bigvee_{D(\mathcal{M})} X)^\infty$.

Proposición A.1.9. Sea d una derivada en $\mathcal{M}$ y d^∞ su idempotente asociado entonces

$$\mathcal{M}_d = \mathcal{M}_{d^\infty}$$

Demostración. Como $d \leq d^\infty$ entonces $\mathcal{M}_d \supseteq \mathcal{M}_{d^\infty}$ para la otra contención en vista de $d^\infty d = d^\infty$ entonces si $a \in \mathcal{M}_d$ se tiene que $a \in Im(d^\infty) = \mathcal{M}_{d^\infty}$ y así la igualdad se tiene.

□

Ahora consideremos un conjunto $\bigwedge$-cerrado en $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$, para cada $a \in \mathcal{F}$, definamos

$$j(a)_{\mathcal{F}} = \bigwedge \{x \geq a \mid a \in \mathcal{F}\}$$

Claramente $j_{\mathcal{F}}$ así definido satisface:

(i) $j_{\mathcal{F}}(a) \geq a$ para toda $a \in \mathcal{M}$.

(ii) Si $a \leq b$ entonces $j_{\mathcal{F}}(a) \leq j_{\mathcal{F}}(b)$.

Y notemos que es idempotente, en vista de $j_{\mathcal{F}}(a) \in \mathcal{F}$ para toda a por lo que $j_{\mathcal{F}}(j_{\mathcal{F}}(a)) = j_{\mathcal{F}}(a)$. Por lo que a partir de cualquier conjunto $\bigwedge$-cerrado, construimos un operador cerradura en $\mathcal{M}$. (Esto es análogo a 1.2.8 y 1.2.9).

Con esto a la mano obtenemos:

Proposición A.1.10. Sean $c, c' \in C(\mathcal{M})$, entonces $c = c'$ si y sólo si $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_{c'}$.

Demostración. Dado cualquier $a \in \mathcal{M}$ entonces si $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_{c'}$, se tiene que $c'c(a) = c(a)$, es decir, $c'c = c$ y esto como vimos anteriormente sucede si y sólo si $c' \leq c$ y viceversa por lo que $c = c'$, el recíproco es obvio.

□

Ahora notemos que si $d \in D(\mathcal{M})$ entonces le asociamos su $d^{\infty} \in C(\mathcal{M})$ y este define su conjunto de puntos fijos $\mathcal{M}_{d^{\infty}}$ y de este construimos otro operador cerradura $j_{\mathcal{M}_{d^{\infty}}}$ y observe que si $a \in \mathcal{M}_{d^{\infty}}$ entonces trivialmente $a \in \mathcal{M}_{j_{d^{\infty}}}$ y si $j_{\mathcal{M}_{d^{\infty}}}(a) = a$ es decir $a \in \mathcal{M}_{d^{\infty}}$, por lo tanto en vista de A.1.9 y A.1.10 se tiene que

$$d^{\infty} = j_{\mathcal{M}_d} = j_{\mathcal{M}_{d^{\infty}}}$$

Recordemos la siguiente derivada que se definió con anterioridad como:
Para cualquier $a \in \mathcal{M}$.

$$q_a(b) = \begin{cases} a & \text{si } b \leq a \\ \bar{1} & \text{si } b \nleq a \end{cases}$$

Con esta podemos representar derivadas idempotentes

Proposición A.1.11. Sea $z \in C(\mathcal{M})$ entonces

$$z = \bigwedge \{q_b \mid b \in \mathcal{M}_z\}$$

En $D(\mathcal{M})$

Demostración. Primero es claro que $z \leq q_b$ para toda $b \in \mathcal{M}_z$ por lo que $z \leq \bigwedge \{q_b | b \in \mathcal{M}_z\}$, ahora dada d operador cerradura en $\mathcal{M}$ tal que $d \leq \bigwedge \{q_b | b \in \mathcal{M}_z\}$ en particular tenemos que dado cualquier $a \in \mathcal{M}$ poniendo $b = z(a)$ entonces $d \leq q_b$ por lo que en a tenemos que $d(a) \leq z(a)$ y esto lo hacemos para cada a y así $d \leq z$ por lo que $z = \bigwedge \{q_b \mid b \in \mathcal{M}_z\}$.

□

Proposición A.1.12. Sean d, z derivadas en $\mathcal{M}$ y c una derivada idempotente en $\mathcal{M}$, entonces, $d \vee z \leq c$ si y sólo si $dz \leq c$.

Demostración. Claramente si $dz \leq c$ entonces por 1.1.4 se tiene $d \vee z \leq c$, recíprocamente por las observaciones hechas al principio de la sección basta ver que $(dz)c = c$, ahora como $d \vee z \leq c$ entonces $dc = c$ y $zc = c$ y así $(dz)c = d(zc) = dc = c$.

□

Por último veamos que $d \vee z = dz$ para toda d y z implica consecuencias fuertes.

Proposición A.1.13. Sea $\mathcal{M}$ un marco, son equivalentes:

(1) $D(\mathcal{M}) = C(\mathcal{M})$.

(2) $d \vee z = dz$ para todos $d, z \in D(\mathcal{M})$.

(3) $d \vee zd^{-1} = d \vee z$ para todos $d, z \in D(\mathcal{M})$.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$

Sean $d, z \in D(\mathcal{M})$ entonces como son idempotentes por 1.2.11 estos quedan determinados por su conjunto de puntos fijos, por lo que si $a \in \mathcal{M}_{d \vee z}$ entonces $a \in \mathcal{M}_d \cap \mathcal{M}_z$ por lo que $dz(a) = d(a) = a$ es decir, $\mathcal{M}_{d \vee z} \subseteq \mathcal{M}_{dz}$ la otra contención siempre se da, y de nuevo por 1.2.11 se tiene la igualdad.

$(2) \Rightarrow (1)$

Como $d \vee z = dz$ para todos $d, z \in D(\mathcal{M})$, en particular $z = z \vee z = z^2$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Como $(zd^{-1})d \geq z$ entonces $(zd^{-1}) \vee d \geq z \vee d$ la otra desigualdad siempre se tiene por definición de residuo izquierdo.

$(3) \Rightarrow (2)$

$(zd)d^{-1} \leq zd^{-1} \leq z$ por A.1.7 (3) y así $(zd)d^{-1} \vee d \leq z \vee d$ y así por (3) $zd \leq (zd)d^{-1}d \leq z \vee d$.

□

Apéndice B

La versión de Lanski de la dimensión de Gabriel para idiomas

En este apéndice consideramos la construcción para módulos de la dimensión de Gabriel de Lanski y la reescribimos para idiomas, siguiendo el análisis en módulos de ésta, dado por Simmons en [Sim14f]. Al parecer la definición de Lanski apareció en su forma reticular en el libro [NVO87], entonces nuestra nota se puede considerar como una re-interpretación de ésta en el enfoque idiomático.

La siguiente definición está tomada literalmente de [NVO87], principio de la página 135:

> "Let be A a modular upper-continuous lattice with 0 and 1. We define the *Gabriel dimension* of A, denoted by $Gdim(A)$, using transfinite recursion. We put $Gdim(A) = 0$ if and only if $A = \{0\}$. Let α be a nonlimit ordinal and assume that the Gabriel dimension $Gdim(A') = \beta$ has already been defined for lattices with $\beta < \alpha$. We say that A is it $\alpha - simple$ is for each $a \neq 0$ in A we have $Gdim[0, a] \nless \alpha$ and $Gdim[a, 1] < \alpha$. We then say that $Gdim(A) = \alpha$ if $Gdim(A) \nless \alpha$ but for every $a \neq 1$ in A there exist a $b > 0$ such that $[a, b]$ is β-simple for some $\beta \leq \alpha$."

En el segundo párrafo de esa misma página se estatua lo siguiente:

> "Consider $a \in A$. If $Gdim(0, a) = \alpha$ then we say that α is the *Gabriel dimension* of a and we write $Gdim(a) = \alpha$. If $[0, a]$ is α-simple then a is said to be an α-simple element of A."

Concretamente nuestro propósito en esta nota es reescribir esta definición en el contexto idiomático, mimetizando la construcción de la dimensión de Gabriel, en la categoría de módulos, dada en 5.1 de [Sim14f]. Básicamente, las pruebas son las mismas que en [Sim14f]. De hecho estas, éstan relacionada mediante rebanar por un módulo.

B.1. Dimensión de Gabriel para idiomas

Fijemos un idioma A y sea $\mathcal{I}(A)$ el conjunto de intervalos de A, y $[a, b] \in \mathcal{I}(A)$.

Definición B.1.1. *Definamos la* Gabriel dimensión*, $Gdim$ de $[a, b]$ como:*

1. $Gdim(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.
2. $Gdim(a, b) = \alpha' \Leftrightarrow Gdim(a, b) \nleq \alpha$ *y*

$$(\forall a \leq x < b)\, [\exists x < y \leq b] \left[\exists \beta \leq \alpha'\right] [[x, y] \textit{ es } \beta\textit{-simple}]\,,$$

   para ordinales α y α' su sucesor.

3. $Gdim(a, b) = \lambda \Leftrightarrow (\forall a \leq x < b)\, (\exists x < y \leq b)\, [\exists \beta < \lambda]\, [[x, y] \textit{ es } \beta\textit{-simple}]\,,$ *para ordinales límite λ.*

*Aquí, β-simple quiere decir, que para el ordinal sucesor β, el intervalo $[a, b]$ es β-*simple *si:*

$$(\forall a < x \leq b)\, [Gdim(a, x) \nless \beta \text{ y } Gdim(x, b) < \beta]$$

Siguiendo a Simmons, diremos que los únicos intervalos 0-simples y λ-simples, para todo los ordinales límite λ, son los triviales, es decir, $\mathcal{O}(A)$. La condición (3) de la definición B.1.1 se re interpreta como:

$$Gdim(a, b) = \lambda \Leftrightarrow (\forall a \leq x < b)\, (\exists x < y \leq b)\, [\exists \beta \leq \lambda]\, [[x, y] \text{ es } \beta\text{-simple}]\,.$$

Lo siguiente es hacer estas definiciones acumulativas (queremos crear filtraciones adecuadas). Siguiendo [Sim14f], defina el conjunto $\mathcal{S}[\alpha]$ de intervalos α-simples, con α un ordinal, como

$$[a, b] \in \mathcal{S}[\alpha] \Leftrightarrow (\forall a < x \leq b)\, (Gdim(a, x) \nleq \alpha \text{ y } Gdim(x, b) \leq \alpha)\,,$$

y entonces procedemos paso a paso:

1. $\mathcal{D}(0) = \mathcal{O}(A)$.

2. $\mathcal{D}(\alpha') = \mathcal{D}(\alpha) \cup \mathcal{S}[\alpha]$
3. $\mathcal{D}(\lambda) = \bigcup \{\mathcal{D}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$,

para cada ordinal α y cada ordinal límite λ.

En la definición B.1.1 hay una (extraña) cuantificación $(\exists\beta)$ en los puntos (2) y (3). Para lidiar con esta cuantificación y hacer todo más claro, introducimos las siguientes definiciones:

Definición B.1.2. *Para cada $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}(A)$, pongamos:*

$$[a, b] \in (\forall\exists)(\mathcal{C}) \Leftrightarrow (\forall a \leq x < b)\,(\exists x < y \leq b)\,[[x, y] \in \mathcal{C}]\,.$$

Inmediatamente uno observa que, si $\mathcal{C}$ es básico entonces $(\forall\exists)(\mathcal{C}) = \mathcal{D}vs(\mathcal{C})$. Note también que este operador $(\forall\exists)(\_)$ es monótono (justamente es la descripción de $\mathcal{D}vs$ 1.4.32 sólo que relajada a todo conjunto de intervalos). Con éste re definimos:

Definición B.1.3 (construcción$\mathcal{L}$)**.** *Para cada intervalo $[a, b]$ y cada ordinal α y cada ordinal límite λ, :*

1. $[a, b] \in \mathcal{L}[0] \Leftrightarrow a = b$,
2. $[a, b] \in \mathcal{L}[\alpha'] \Leftrightarrow [a, b] \in (\forall\exists)\,(\mathcal{D}(\alpha'))$ *y* $[a, b] \notin \mathcal{L}(\alpha)$,
3. $[a, b] \in \mathcal{L}[\lambda] \Leftrightarrow [a, b] \in (\forall\exists)(\mathcal{D}(\lambda))$,

donde:

1. $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}(A)$
2. $\mathcal{L}(\alpha') = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{L}[\alpha']$
3. $\mathcal{L}(\lambda) = \bigcup \{\mathcal{L}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \cup \mathcal{L}[\lambda]$,

y

1. $\mathcal{D}(0) = \mathcal{O}(A)$
2. $\mathcal{D}(\alpha') = \mathcal{D}(\alpha) \cup \mathcal{S}[\alpha]$
3. $\mathcal{D}(\lambda) = \bigcup \{\mathcal{D}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$,

donde nuevo

$$[a, b] \in \mathcal{S}[\alpha] \Leftrightarrow (\forall a < x \leq b)\,[[a, x] \notin \mathcal{L}(\alpha) \text{ y } [x, b] \in \mathcal{L}(\alpha)]\,,$$

es la versión acumulativa de la α-simplicidad. Aquí $\mathcal{L}[\alpha]$ es el conjunto de intervalos con $Gdim(a, b) = \alpha$ y $\mathcal{L}(\alpha) = \bigcup \{\mathcal{L}[\beta] \mid \beta \leq \alpha\}$ es el conjunto de intervalos con $Gdim(a, b) \leq \alpha$.

Lema B.1.4. *Para cada ordinal α tenemos*

$$\mathcal{L}(\alpha') = \mathcal{L}(\alpha) \cup (\forall\exists)(\mathcal{D}(\alpha')).$$

Demostración. Para cada intervalo $[a, b]$ tenemos:

$$\begin{aligned}[a,b] \in \mathcal{L}(\alpha') &\Leftrightarrow [a,b] \in \mathcal{L}(\alpha) \text{ or } \mathcal{L}[\alpha'] \\ &\Leftrightarrow [a,b] \in \mathcal{L}(\alpha) \text{ ó } \big([a,b] \in (\forall\exists)(\mathcal{D}(\alpha')) \text{ y } [a,b] \notin \mathcal{L}(\alpha)\big) \\ &\Leftrightarrow [a,b] \in \mathcal{L}(\alpha) \text{ ó } [a,b] \in (\forall\exists)(\mathcal{D}(\alpha')).\end{aligned}$$

□

Definición B.1.5 (Construcción-$\mathcal{L}$ acumulativa)**.** *Para cada ordinal α y cada ordinal límite λ, introduzcamos:*

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathcal{L}(0) &=& \mathcal{O}(A) & & \mathcal{D}(0) &=& \mathcal{O}(A) \\ \mathcal{L}(\alpha') &=& \mathcal{L}(\alpha) \cup (\forall\exists)(\mathcal{D}(\alpha')) & & \mathcal{D}(\alpha') &=& \mathcal{D}(\alpha) \cup \mathcal{S}[\alpha] \\ \mathcal{L}(\lambda) &=& \bigcup\{\mathcal{L}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \cup (\forall\exists)(\mathcal{D}(\lambda)) & & \mathcal{D}(\lambda) &=& \bigcup\{\mathcal{D}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \end{array}$$

De nuevo, en el paso:

$$[a,b] \in \mathcal{S}[\alpha] \Leftrightarrow (\forall a < x \leq b)\,[[a,x] \notin \mathcal{L}(\alpha) \text{ y } [x,b] \in \mathcal{L}(\alpha)]$$

para cada intervalo.

Como dice Simmons, esto se vuelve más sencillo de leer, y la construcción provee dos cadenas de conjuntos de intervalos

$$\mathcal{L}(0) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}(\alpha) \subseteq \cdots \qquad \text{y} \qquad \mathcal{D}(0) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{D}(\alpha) \subseteq \cdots,$$

el punto ahora en esta nota es mostrar que $\mathcal{L}(-)$ produce la filtración de Gabriel de A para $\mathcal{O}(A)$, es decir,

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{G}ab^{\alpha}(\mathcal{O}(A)).$$

Entonces, debemos probar primero que:

Teorema B.1.6. *Para cada ordinal α, la colección $\mathcal{L}(\alpha)$ es un conjunto de división en A.*

Demostración. Claramente $\mathcal{L}(\alpha)$ es un conjunto abstracto. Para probar las propiedades de congruencia y de $\bigvee$-laxidad, invocamos la Proposición 3.4.1, el corolario 3.4.2, y 3.4.3 de [NVO87]. □

Definición B.1.7. *Para cada ordinal α sea*

$$\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{S}[\alpha]$$

donde $\mathcal{S}[\alpha]$ es el conjunto de intervalos α'-simples.

Lema B.1.8. *Para cada ordinal α,*

$$\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}rt(\mathcal{L}(\alpha)).$$

Demostración. Debemos mostrar:

$$[a,b] \in \mathcal{C}(\alpha) \Leftrightarrow \forall\ a \leq x \leq b \ \ a = x \text{ ó } [x,b] \in \mathcal{L}(\alpha).$$

Asuma que $[a,b] \in \mathcal{C}(\alpha)$, entonces por la definición B.1.7, si $[a,b] \in \mathcal{L}(\alpha)$, entonces la conclusión es clara del hecho de ser $\mathcal{L}(\alpha)$ básico. Si $[a,b] \in \mathcal{S}[\alpha]$, considere $a \leq x \leq b$; por definición de éste debemos tener que $[x,b] \in \mathcal{L}(\alpha)$.

Recíprocamente, si $[a,b] \in \mathcal{S}[\alpha]$ entonces no hay nada que probar. Suponga entonces que $[a,b] \notin \mathcal{S}[\alpha]$, entonces existe un $a < x \leq b$ tal que $[a,x] \in \mathcal{L}(\alpha)$ ó $[x,b] \notin \mathcal{L}(\alpha)$. Pero la condición dice $[x,b] \in \mathcal{L}(\alpha)$ y $\mathcal{L}(\alpha)$ es un conjunto de congruencia entonces, $[a,b] \in \mathcal{L}(\alpha)$. □

Proposición B.1.9. *Tenemos:*

$$\mathcal{D}(\alpha) \subseteq \mathcal{L}(\alpha)$$

para cada ordinal α.

Demostración. Por inducción, el caso $\alpha = 0$ es obvio de, $\mathcal{D}(0) = \mathcal{O}(A) = \mathcal{L}(0)$ por definición de estos conjuntos. Para el paso $\alpha \mapsto \alpha'$, suponga que $[a,b] \in \mathcal{D}(\alpha')$. Las definiciones de estos conjuntos llevan a dos posibilidades: Primero, si $[a,b] \in \mathcal{D}(\alpha)$ entonces por la hipótesis de inducción $[a,b] \in \mathcal{L}(\alpha) \subseteq \mathcal{L}(\alpha')$. Ahora, si $[a,b] \notin \mathcal{L}(\alpha)$ entonces $[a,b] \in \mathcal{S}[\alpha]$ y en este caso mostraremos que $[a,b] \in (\forall\exists)(\mathcal{D}(\alpha'))$ y en vista de $(\forall\exists)(\mathcal{D}(\alpha')) \subseteq \mathcal{L}(\alpha')$, habremos terminado. Para probar esta afirmación, considere $a \leq x < b$. Produciremos un $x < y \leq b$ de tal forma que $[x,y] \in \mathcal{D}(\alpha')$ y veremos que $y = b$ es el elemento requerido. Si $a = x$, no hay nada que probar. Si $a \neq x$ entonces $[a,b] \in \mathcal{S}[\alpha]$ por lo que $[a,x] \notin \mathcal{L}(\alpha)$ y $[x,b] \in \mathcal{L}(\alpha)$. Si $[a,x] \notin \mathcal{L}(\alpha)$, la hipótesis de inducción da $[x,b] \in \mathcal{L}(\alpha) \subseteq \mathcal{D}(\alpha) \subseteq \mathcal{D}(\alpha')$, por lo que hemos terminado.

Para el caso límite λ tenemos que

$$\mathcal{D}(\lambda) = \bigcup\{\mathcal{D}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \bigcup\{\mathcal{L}(\lambda) \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{L}(\lambda),$$

donde la inclusión $\bigcup\{\mathcal{D}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \bigcup\{\mathcal{L}(\lambda) \mid \alpha < \lambda\}$ es por hipótesis de inducción. □

De la proposición B.1.9, lema B.1.8 y la definición B.1.7, se sigue que

$$\mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{S}[\alpha] = \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}rt(\mathcal{L}(\alpha)).$$

De ser $\mathcal{C}(\alpha)$ básico aplicando $\mathcal{G}ab$ tenemos $\mathcal{G}(\mathcal{L}(\alpha)) = \mathcal{D}vs(\mathcal{C}(\alpha)) = (\forall\exists)(\mathcal{C}(\alpha))$ ya que estos dos operadores $\mathcal{D}vs$ y $(\forall\exists)$ coinciden en conjuntos básicos. Todo esto se resume en lo siguiente

Teorema B.1.10. *Con la notación anterior tenemos que*

$$\mathcal{G}ab(\mathcal{L}(\alpha)) = \mathcal{L}(\alpha')$$

para cada ordinal α.

Demostración. De la proposición B.1.9 y la definición de$\mathcal{D}(\alpha')$ tenemos que $\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{S}[\alpha] \subseteq \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{D}(\alpha') \subseteq \mathcal{L}(\alpha')$. Se sigue que $\mathcal{G}ab(\mathcal{L}(\alpha)) = \mathcal{D}vs(\mathcal{C}(\alpha)) \subseteq \mathcal{L}(\alpha')$ por la observación antes de este teorema y del hecho $\mathcal{L}(\alpha')$ es de división. Para la otra inclusión $\mathcal{D}(\alpha') = \mathcal{D}(\alpha) \cup \mathcal{S}[\alpha] \subseteq \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{S}[\alpha] = \mathcal{C}(\alpha)$ de nuevo por la proposición B.1.9. De la monotonicidad de $(\forall\exists)(\_)$ se sigue que $(\forall\exists)(\mathcal{D}(\alpha')) \subseteq (\forall\exists)(\mathcal{C}(\alpha)) = \mathcal{G}ab(\mathcal{L}(\alpha))$, y entonces $\mathcal{L}(\alpha') = \mathcal{L}(\alpha) \cup (\forall\exists)(\mathcal{D}(\alpha')) \subseteq \mathcal{G}ab(\mathcal{L}(\alpha))$ pues $\mathcal{G}ab$ es una derivada. □

Podemos ahora probar el resultado principal de esta nota:

Teorema B.1.11. *Con la misma notación tenemos,*

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{G}ab^{\alpha}(\mathcal{O})$$

para cada ordinal α. Aquí $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A)$.

Demostración. Por inducción sobre α, el caso base $\alpha = 0$, es claro. El paso inductivo es justamente el Teorema B.1.10. Para el caso limite λ sea $\mathfrak{L} = \bigcup\{\mathcal{L}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$. Como $\mathcal{L}(\alpha)$ es básico para cada ordinal, entonces $\mathfrak{L}$ también es básico. Por lo que, la hipótesis de inducción da

$$\mathcal{G}ab^{\lambda}(\mathcal{O}) = \mathcal{D}vs(\mathfrak{L}),$$

y por la versión acumulativa de la construcción-$\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathfrak{L} \cup (\forall\exists)(\mathcal{D}(\lambda))$$

y

$$\begin{aligned}
(\forall\exists(\mathcal{D}(\lambda))) &= (\forall\exists)(\bigcup\{\mathcal{D}(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}) \\
&= (\forall\exists)(\bigcup\{\mathcal{D}(\alpha') \mid \alpha < \lambda\}) \subseteq (\forall\exists)(\bigcup\{\mathcal{L}(\alpha') \mid \alpha < \lambda\}) = (\forall\exists)(\mathfrak{L}) \\
&= \mathcal{D}vs(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es la definición de $\mathcal{D}(\lambda)$ en el caso límite, la segunda igualdad es porque la construcción de $\mathcal{D}(-)$ es una cadena ascendente. La inclusión en el segundo renglón es por B.1.10 y la monotonía de $(\forall\exists)(\_)$. La última igualdad es por que $\mathcal{D}vs$ y $(\forall\exists)$ coinciden en conjuntos básicos. Finalmente, con esto en mente y la descripción de $\mathcal{L}(-)$ en el caso límite podemos concluir que

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathfrak{L} \cup \mathcal{D}vs(\mathfrak{L}) = \mathcal{D}vs(\mathfrak{L}) = \mathcal{G}ab^{\lambda}(\mathcal{O})$$

□

Para finalizar este apéndice, dejo unas palabras que H. Simmons me comentó en un mail. En dicho mail le pregunté sobre estas construcciones pero en el sentido de módulos.

Often when ordinal measures are used the write looks at 'measure = ordinal'. I find it better to consider 'measure less than or equal to ordinal or sometimes 'measure strictly less than ordinal. This seems to simplify the constructions. I think this was a lot of the problem with the Lanski construction...

Bibliografía

[CRT03] J Castro, J Ríos, and M Teply, *Torsion theoretic dimension and relative'gabriel correspondence,. 1*, J. Pure Appl. Algebra **178** (2003), no. 1, 101–114.

[DP66] CH Dowker and Dona Papert, *Quotient frames and subspaces*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1966), no. 1, 275–296.

[DZ06] John Dauns and Yiqiang Zhou, *Classes of modules*, CRC Press, 2006.

[GdVPVP94] Jonathan S Golan, Ana M de Viola-Prioli, and Jorge E Viola-Prioli, *Ducompact filters and prime kernal functors*, Communications in Algebra **22** (1994), no. 12, 4637–4651.

[Gol75] Oscar Goldman, *Elements of noncommutative arithmetic i*, Journal of Algebra **35** (1975), no. 1, 308–341.

[Gol77] Jonathan S Golan, *Decomposition and dimension in module categories*, vol. 33, CRC Press, 1977.

[Gol86] ______, *Torsion theories*, vol. 29, Longman scientific & technical, 1986.

[Gol87] ______, *Linear topologies on a ring: an overview*, vol. 159, Halsted Press, 1987.

[GR73] Robert Gordon and James Christopher Robson, *Krull dimension*, vol. 133, American Mathematical Soc., 1973.

[Grä03] George Grätzer, *General lattice theory*, Springer, 2003.

[GS88] Jonathan S Golan and Harold Simmons, *Derivatives, nuclei and dimensions on the frame of torsion theories*, Pitman research notes in mathematics series (1988), 119.

[Joh86] Peter T Johnstone, *Stone spaces*, vol. 3, Cambridge University Press, 1986.

[Mac81] DS Macnab, *Modal operators on heyting algebras*, Algebra Universalis **12** (1981), no. 1, 5–29.

[Mic70] Gerhard Michler, *Goldman's primary decomposition and the tertiary decomposition*, Journal of Algebra **16** (1970), no. 1, 129–137.

[NVO87] Constantin Nastasescu and Freddy Van Oystaeyen, *Dimensions of ring theory*, Springer Science & Business Media, 1987.

[Pop73] Nicolae Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, vol. 3, Academic Press New York, 1973.

[PP12] J Picardo and A Pultra, *Frames and locales*, 2012.

[PRM07] Jaime Castro Pérez, Francisco Raggi, and José Ríos Montes, *Decisive dimension and other related torsion theoretic dimensions*, Journal of pure and applied algebra **209** (2007), no. 1, 139–149.

[PRMB05] Jaime Castro Pérez, Francisco Raggi, José Ríos Montes, and John van den Berg, *On the atomic dimension in module categories*, Communications in Algebra® **33** (2005), no. 12, 4679–4692.

[RMR+02] Francisco Raggi, José Ríos Montes, Hugo Rincón, Rogelio Fernández-Alonso, and Carlos Signoret, *The lattice structure of preradicals*, Communications in Algebra **30** (2002), no. 3, 1533–1544.

[RMW01] Francisco Raggi, José Ríos Montes, and Robert Wisbauer, *The lattice structure of hereditary pretorsion classes*, Communications in Algebra **29** (2001), no. 1, 131–140.

[RMW05] ______, *Coprime preradicals and modules*, Journal of Pure and Applied Algebra **200** (2005), no. 1, 51–69.

[RRR+02] Francisco Raggi, José Ríos, Hugo Rincón, Rogelio Fernández-Alonso, and Carlos Signoret, *The lattice structure of preradicals ii: Partitions*, Journal of Algebra and its Applications **1** (2002), no. 02, 201–214.

[RRR+05] ______, *Prime and irreducible preradicals*, Journal of Algebra and its Applications **4** (2005), no. 04, 451–466.

[RRR+09] Francisco Raggi, Jose Rios, Hugo Rincon, Rogelio Fernández-Alonso, and Carlos Signoret, *Semiprime preradicals*, Communications in Algebra® **37** (2009), no. 8, 2811–2822.

[RSR+04] Hugo Rincón, Carlos Signoret, Francisco Raggi, Rogelio Fernández-Alonso, and José Ríos, *The lattice structure of preradicals iii: operators*, Journal of pure and applied algebra **190** (2004), no. 1, 251–265.

[Sim84] Harold Simmons, *Torsion theoretic points and spaces*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics **96** (1984), no. 3-4, 345–361.

[Sim88] ______, *The semiring of topologizing filters of a ring*, Israel Journal of Mathematics **61** (1988), no. 3, 271–284.

[Sim89] ______, *Near-discreteness of modules and spaces as measured by gabriel and cantor*, Journal of Pure and Applied Algebra **56** (1989), no. 2, 119–162.

[Sim91] ______, *Generalized deviations of posets*, Discrete mathematics **98** (1991), no. 2, 123–139.

[Sim94] ______, *The glueing construction and lax limits*, Mathematical Structures in Computer Science **4** (1994), no. 04, 393–431.

[Sim06a] H Simmons, *The fundamental triangle of a space*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/FRAMES/D-FUNDTRIANGLE.pdf, 2006.

[Sim06b] ______, *The higher level cb properties of frames*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/TEMP/HigherAssemb.pdf, 2006.

[Sim06c] ______, *The point space of a frame*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/FRAMES/C-POINTSPACE.pdf, 2006.

[Sim10] Harold Simmons, *A decomposition theory for complete modular meet-continuous lattices*, Algebra universalis **64** (2010), no. 3-4, 349–377.

[Sim12] H Simmons, *How to generate g-topologies for module presheaf categories*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/FOR-TOMMY/G-GTOPS.pdf, 2012.

[Sim14a] ______, *Cantor-bendixson, socle, and atomicity*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/00-IDSandMODS/002-Atom.pdf, 2 2014.

[Sim14b] ______, *The gabriel and the boyle derivatives for a modular idiom*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/00-IDSandMODS/004-GandB.pdf, 3 2014.

[Sim14c] ______, *An introduction to idioms*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/00-IDSandMODS/001-Idioms.pdf, 2 2014.

[Sim14d] ______, *A lattice theoretic analysis of a result due to hopkins and levitzki*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/00-IDSandMODS/007-HL.pdf, 3 2014.

[Sim14e] ______, *The relative basic derivatives for an idiom*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/00-IDSandMODS/003-Rel.pdf, 2 2014.

[Sim14f] ______, *Various dimensions for modules and idioms*, http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/00-IDSandMODS/006-MvI.pdf, 3 2014, En [Sim14c] este documento aparece como el item 6.

[Sim14g] Harold Simmons, *Cantor-bendixson properties of the assembly of a frame*, Leo Esakia on Duality in Modal and Intuitionistic Logics, Springer, 2014, pp. 217–255.

[Ste75] Bo Stenström, *Rings of quotients: An introduction to methods of ring theory*, vol. 217, Springer Berlin, 1975.

[VDBW01] John E Van Den Berg and Robert Wisbauer, *Duprime and dusemiprime modules*, Journal of Pure and Applied Algebra **165** (2001), no. 3, 337–356.

[Wil94] J Todd Wilson, *The assembly tower and some categorical and algebraic aspects of frame theory*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 1994.

[WW09] Indah Emilia Wijayanti and Robert Wisbauer, *On coprime modules and comodules*, Communications in Algebra® **37** (2009), no. 4, 1308–1333.