



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estados de Polarización en Fotones Individuales
Producidos por SPDC

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

JAVIER BERJÓN DE GORTARI

TUTOR

DR. VÍCTOR MANUEL VELÁZQUEZ
AGUILAR



Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

| | |
|---|---|
| <p>1. Datos del alumno.</p> <p>Apellido Paterno Apellido Materno Nombre(s) Teléfono Universidad Facultad Carrera Número de Cuenta</p> | <p>Berjón de Gortari Javier 55 73 07 87 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 305501549</p> |
| <p>2. Datos del tutor.</p> <p>Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno</p> | <p>Doctor Víctor Manuel Velázquez Aguilar</p> |
| <p>3. Datos del sinodal 1.</p> <p>Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno</p> | <p>Doctor Julio Javier Martinell Benito</p> |
| <p>4. Datos del sinodal 2.</p> <p>Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno</p> | <p>Doctor Javier Miranda Martín del Campo</p> |
| <p>5. Datos del sinodal 3.</p> <p>Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno</p> | <p>Doctor Carlos Pineda Zorrilla</p> |
| <p>6. Datos del sinodal 4.</p> <p>Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno</p> | <p>Doctor Juan Manuel García Islas</p> |
| <p>Datos del trabajo escrito.</p> <p>Título Número de páginas Año</p> | <p>Estados de Polarización en Fotones Individuales Producidos por SPDC 60 2015</p> |

*Este trabajo va dedicado
con un profundo cariño
y agradecimiento, a mis padres.*

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | v |
| 1. Cuantización del campo | 1 |
| 1.1. Ondas estacionarias | 2 |
| 1.2. Cuantización y estados de Fock | 5 |
| 1.3. Expansión multimodal | 8 |
| 2. Estadística y conteo de fotones | 13 |
| 2.1. Luz poissoniana y estados coherentes | 13 |
| 2.2. Ley de Mandel | 16 |
| 2.3. Luz subpoissoniana | 20 |
| 3. Polarización de fotones | 23 |
| 3.1. Polarización clásica | 23 |
| 3.2. Ley de Malus | 26 |
| 3.3. Estados cuánticos de polarización | 28 |
| 3.4. Espín del fotón | 33 |
| 4. Experimentación | 35 |
| 4.1. SPDC | 35 |
| 4.2. Procedimiento experimental | 39 |
| 5. Conclusiones y resultados | 43 |
| 5.1. Resultados | 43 |
| 5.2. Análisis y conclusiones | 45 |
| A. Fotocontadores | 49 |

Introducción

La naturaleza corpuscular de la luz ha sido, desde su surgimiento en la física moderna gracias al fenómeno del efecto fotoeléctrico, una parte tan esencial de la visión que de ella tenemos como la que nos presenta su teoría clásica ondulatoria; sin embargo, ya que la naturaleza ondulatoria de la luz fue el marco principal bajo el cual los fenómenos ópticos se estudiaron hasta poco después del comienzo del siglo 20, es claro que sería necesario hacer una revisión de los fenómenos ópticos previamente explicados apelando meramente a este comportamiento ondulatorio; pero utilizando ahora también el conocimiento de que la luz presenta igualmente un decidido comportamiento corpuscular. En el presente trabajo nos concentraremos en dilucidar cómo es que el carácter cuantizado de la luz encaja dentro de la ley de Malus, la cual fue formulada teniendo en mente al campo estrictamente como un fenómeno ondulatorio, y se reconocerá que, dentro del marco teórico estándar de la mecánica cuántica, es posible hacer compatible a dicha ley con el punto de vista corpuscular de la luz.

El marco teórico de la mecánica cuántica tiene como fundamento explicativo para los fenómenos de los que logra dar cuenta el llamado *principio de descomposición espectral*, el cual nos dice que para conocer los posibles resultados de una medición, al igual que las probabilidades de obtener alguno de estos resultados particulares, debemos obtener una expresión para el estado cuántico de nuestro sistema, dada como una combinación lineal de los eigenvectores correspondientes al operador asociado a nuestro observable de interés. Es en este respecto que, si quisiéramos lograr explicar de alguna manera los fenómenos clásicos desde el punto de vista cuántico, deberíamos, primeramente, poder exigir de nuestro sistema el ser descrito mediante el esquema antes mencionado de la descomposición espectral. Esto significa que sea posible encontrar un estado cuántico para nuestro sistema que pueda escribirse en términos de la base formada por los eigenestados de los operadores pertinentes. Con base en este objetivo, y el hecho de que la ley de Malus versa principalmente sobre el fenómeno de la polarización de la luz,

que por sus características altamente clásicas, a primera vista parecería insalvable desde una postura cuántica, es necesario preguntarnos en qué sentido el fenómeno de la polarización puede ser acarreado hasta el ámbito de la mecánica cuántica. Primero, el comportamiento probabilístico que esperaríamos y deberíamos encontrar en los fotones individuales, al considerar a éstos como entes cuánticos, se encuentra en el hecho de que al incidir un fotón sobre un analizador lineal, el cual clásicamente permitiría el paso (restringido) de una onda incidente, se tendrán únicamente dos posibles resultados[22, 24]: que el fotón atravesase el analizador o que no lo atravesase. Esta discretización de resultados, que además están regidos meramente por probabilidades de ocurrencia (como se encuentra experimentalmente), apuntan el camino para la conversión del fenómeno de polarización clásico hacia el ámbito de la mecánica cuántica. Dar este salto de la polarización clásica a la polarización cuántica es algo que nos concernirá a lo largo del presente proyecto, llevándonos al objetivo experimental de reconstruir el estado cuántico de polarización del haz emitido por un láser, permitiéndonos así dar cabida para la naturaleza corpuscular de la luz dentro del fenómeno de la ley de Malus. Primero, cumpliendo el requisito para el estado clásico de polarización de tener una equivalente contrapartida cuántica, y después, logrando también explicar satisfactoriamente los resultados descritos clásicamente por la ley de Malus, a partir de entender al número de fotones (es decir, haciendo una consideración cuántica para la luz) como el análogo de la propiedad clásica de la intensidad de un haz monocromático.

Para lograr la manipulación de fotones individuales lo que se hizo fue echar mano de la técnica conocida como Conversión Paramétrica Espontánea (o SPDC por sus siglas en inglés); ésta consiste en generar pares de fotones gracias al uso de materiales con propiedades ópticas no lineales (en nuestro caso se utilizó un cristal de borato de bario) para posteriormente hacer un conteo de fotones por separado para cada uno de los dos nuevos haces así generados. Esto tiene el propósito de hacer no conteos individuales sino de coincidencias de pares de fotones, cerciorándonos de esta forma de estar presenciando el carácter discreto de los fotones. La SPDC se ha vuelto una herramienta básica en el área de la óptica cuántica, ya que se presta muy fácilmente como una fuente de luz cuántica, pudiendo utilizarse en cualquier experimento donde se requiera estudiar el comportamiento granular de la luz, motivo por el cual fue utilizada en el experimento que aquí se llevó a cabo.

Capítulo 1

Cuantización del campo

El concepto del fotón, el elemento cuántico de la luz, hizo su primera aparición exitosa en el ámbito de los fenómenos aún sin resolver en los trabajos de Einstein concernientes al efecto fotoeléctrico en 1905, y desde ese entonces ha formado una parte esencial para la comprensión de los fenómenos radiativos. A su vez la idea de un fotón como una excitación del campo electromagnético cuantizado, surge de manera natural en la teoría de éste último (como veremos un poco más adelante), y sin embargo, dicha teoría no fue de un inmediato interés sino hasta hace algunas décadas, pues es cierto que es muy posible dar cuenta de distintos fenómenos recurriendo simplemente a una teoría semiclásica del campo. Esto suele hacerse, por ejemplo, en el estudio de la interacción entre el campo radiativo y la materia, en donde se hace un tratamiento clásico del campo y uno ya cuántico del átomo [4, 7]; pero a pesar del aparente éxito de la teoría semiclásica en algunos aspectos, también es verdad que muchos otros fenómenos no se prestan a una explicación cabal con esta mera aproximación y es necesario introducir la completa maquinaria teórica de la cuantización del campo electromagnético. Por ejemplo, una predicción muy importante que se logra con la teoría del campo cuantizado es la de las ‘fluctuaciones del vacío’ (las cuales se mencionan más adelante), y que permiten dar cuenta del efecto Lamb, la emisión espontánea, el efecto Casimir, etc.; otros problemas que no pueden ser explicados más que con la teoría del campo cuantizado (independientemente de las fluctuaciones del vacío) son los pulsos cuánticos¹ y la interferometría y producción de estados entrelazados para sistemas bifotónicos [4]. Es por esto que ahora centramos nuestra atención en la teoría cuántica del campo electromagnético.

¹En inglés se denominan *quantum beats*.

1.1. Ondas estacionarias

Comenzaremos el estudio de la cuantización del campo electromagnético considerando el problema unidimensional de una región del espacio sin carga eléctrica, delimitada por una cavidad rectangular de paredes conductoras y lado L . De esta forma, las ecuaciones de interés serán aquellas de Maxwell en el vacío, i.e. sin fuentes de radiación, que en mks se escriben como [1]

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

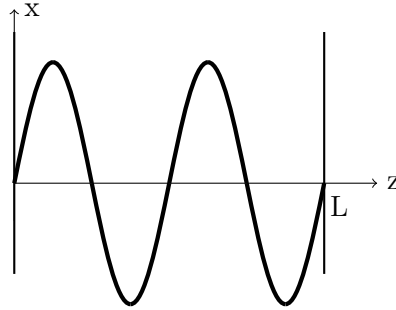
Al desacoplar este sistema de ecuaciones se obtiene que los campos \vec{E} y \vec{B} deben cumplir

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

es decir, que cada componente cartesiano de \vec{E} y \vec{B} satisface la ecuación de onda en tres dimensiones $\nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, con velocidad de propagación c , que es efectivamente la velocidad de la luz en el vacío.

Bajo las condiciones mencionadas, una posible solución para el campo eléctrico en (1.5), es una onda monocromática, polarizada en la dirección x , y propagándose en la dirección z : $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{i} E_x(z, t)$, donde \hat{i} es el vector unitario en la dirección x (ver figura 1.1). Más aún, debido a las paredes conductoras, tendremos como condiciones a la frontera: $E_x(0, t) = E_x(L, t) = 0$ para todo t .

Figura 1.1 Onda estacionaria para \vec{E} .

Una solución específica de este tipo es

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{i}a(t)\text{sen}(kz) \quad (1.6)$$

donde $k = \omega/c$, siendo ω la frecuencia angular de la onda, que por las condiciones de frontera, sólo puede tomar los valores de $\omega_n = cn\pi/L$, con $n = 0, 1, 2, \dots$. Además de esto, requerimos que $a(t)$ satisfaga la ecuación del oscilador armónico $\ddot{a} + \omega^2 a = 0$. De esta forma la solución (1.6) representa una familia de ondas estacionarias dentro de la cavidad conductora (una para cada valor de k), que son los llamados *modos normales* de la ecuación de onda, es decir, soluciones obtenidas gracias al método de separación de variables.

Para obtener ahora al campo magnético correspondiente a la solución (1.6), utilizamos la ecuación de Maxwell (1.4) y vemos que se cumple

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

de donde se sigue que

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{j} \frac{\dot{a}(t)\cos(kz)}{\omega c} \quad (1.7)$$

con \hat{j} el vector unitario en la dirección y .

El siguiente paso es encontrar el hamiltoniano de la solución estacionaria dada por (1.6) y (1.7), para lo cual requerimos la densidad de energía U del campo electromagnético, que en general es

$$U = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{\mu_0} \|\vec{B}\|^2 \right) \quad (1.8)$$

donde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y permeabilidad del vacío respectivamente. Luego, al sustituir las expresiones para \vec{E} y \vec{B} en (1.6) y (1.7) obtenemos

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left(a^2 \text{sen}(kz) + \frac{\dot{a}^2 \cos^2(kz)}{\omega^2} \right)$$

e integrando la expresión anterior dentro del volumen total V delimitado por nuestra cavidad, obtenemos el hamiltoniano del sistema

$$H = \frac{\epsilon_0 V}{4} \left(\frac{\dot{a}^2}{\omega^2} + a^2 \right) \quad (1.9)$$

La ecuación (1.9) cobra un aspecto mucho más familiar haciendo el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} q(t) &= a(t) \sqrt{\frac{V \epsilon_0}{2 \omega^2}} \\ p(t) &= \dot{q}(t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

pues ahora se tiene

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (1.11)$$

que reconocemos como el hamiltoniano para un oscilador armónico simple con masa $m = 1$, con $q(t)$ y $p(t)$ jugando el papel de la coordenada y momento generalizados respectivamente. Notamos que se cumplen las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= p = \dot{q} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} &= -\omega^2 q = \ddot{q} = \dot{p} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Así, hemos visto que el problema de nuestra onda estacionaria es formalmente equivalente al de un oscilador armónico con $m = 1$, con coordenada y momento generalizados dados por (1.10). El siguiente paso en la cuantización del campo electromagnético es llevar a cabo la llamada ‘cuantización canónica’ para posteriormente utilizar los resultados conocidos del oscilador armónico cuántico, que es el propósito de la siguiente sección.

1.2. Cuantización y estados de Fock

Para continuar con la cuantización de nuestro modo normal del campo lo primero que hacemos es promover a nuestras coordenadas canónicas a operadores: $(q(t), p(t)) \rightarrow (\hat{q}(t), \hat{p}(t))$, y afirmar que se cumple la usual relación conmutativa canónica entre ellas [3, 4]

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.13)$$

obteniendo así que la ecuación (1.11) se convierte en

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (1.14)$$

Mientras tanto, los operadores correspondientes para E_x y B_y serán

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \text{sen}(kz) \hat{q}(t) \\ \hat{B}_y(z, t) &= \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\text{cos}(kz)}{\omega c} \hat{p}(t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

En esta última expresión notamos la dependencia explícita del tiempo tanto de \hat{E}_x como de \hat{B}_y , lo cual sugiere que el escenario más natural para trabajar con nuestro campo electromagnético ya cuantizado, es el del llamado *esquema de Heisenberg* para la mecánica cuántica [2], en donde los operadores son quienes acarrear la dependencia temporal y no los vectores de estado $|\Psi\rangle$, que es como se trabaja en la mecánica ondulatoria de Schrödinger ². De esta forma nuestro problema se ha transformado de manera idéntica al de un oscilador armónico cuántico, lo cual nos permite simplemente utilizar los resultados de éste, como por ejemplo, que los eigenvalores de la energía, es decir, las parcelas energéticas permitidas para nuestro campo, están dados por

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.16)$$

²En esta otra formulación de la mecánica cuántica, la ecuación que deben de cumplir los operadores (ahora dependientes del tiempo) correspondientes a las variables observables de nuestro sistema, es la siguiente [17]

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) - \frac{i}{\hbar} [\hat{A}(t), \hat{H}(t)]$$

donde $\hat{A}(t)$ es el operador en cuestión y $\hat{H}(t)$ el hamiltoniano del sistema.

En particular, para $n = 0$ tenemos la llamada energía de punto cero $E_0 = \hbar\omega/2$.

Los correspondientes eigenestados con valor de energía E_n , que escribimos como $|n\rangle$, se denominan *estados de Fock* y cumplen la relación esperada

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (1.17)$$

Dichos estados de Fock no sólo son eigenestados de \hat{H} , sino que lo son también del llamado *operador de número* \hat{n} , el cual se define a través de los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} como $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$; para ver esto, definimos \hat{a}^\dagger y \hat{a} , conocidos también como operadores de creación y aniquilación respectivamente, así [3]

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (1.18)$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (1.19)$$

Veamos que

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2 - \hbar\omega)$$

así que en términos de \hat{a} y \hat{a}^\dagger podemos escribir al hamiltoniano (1.14) como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.20)$$

y al utilizar (1.16) se sigue que

$$\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (1.21)$$

ahora utilizamos que $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, y obtenemos el siguiente resultado

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.22)$$

es decir, que los estados de Fock son eigenestados de \hat{n} con eigenvalor n .

Volviendo a los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} , vemos que si a la ecuación (1.21) le aplicamos \hat{a} tendremos

$$\hbar\omega \left(\hat{a} \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle = E_n \hat{a} |n\rangle$$

y utilizando que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ (lo cual se sigue de la ecuación 1.13 y de que $[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0$), se tendrá [5]

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle \quad (1.23)$$

es decir que $\hat{a}|n\rangle$ es también un eigenestado de \hat{H} pero con eigenvalor $E_{n-1} = E_n - \hbar\omega$. De igual manera es posible encontrar que $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ es un eigenestado con eigenvalor $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$. Con estos resultados se puede ver que en general tendremos $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ y que $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, donde \sqrt{n} y $\sqrt{n+1}$ son constantes de normalización; entonces, si a partir del estado base $|0\rangle$ aplicamos repetidamente \hat{a}^\dagger podremos escribir muy fácilmente a cualquier estado de Fock como

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (1.24)$$

donde $1/\sqrt{n!}$ es una constante de normalización [4, 5].

Otra característica importante de los estados $|n\rangle$, es que al ser eigenestados de un operador hermitiano podemos asegurar que forman un conjunto vectorial completo, lo cual se puede expresar como [3, 4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad (1.25)$$

esto quiere decir que cualquier estado de excitación de nuestro campo puede ser escrito como una combinación lineal de los estados de Fock.

Utilizando los operadores de creación y aniquilación también podemos reescribir a \hat{E}_x y \hat{B}_y así

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= E_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\text{sen}(kz) \\ \hat{B}_y(z, t) &= iB_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\text{cos}(kz) \end{aligned} \quad (1.26)$$

en donde $E_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0 V)^{1/2}$ y $B_0 = (\mu_0^2 \epsilon_0 \hbar\omega^3/k^2 V)^{1/2}$; luego, con la ayuda de esta nueva expresión para los campos, podemos comprobar la importante propiedad de que su valor esperado para los estados $|n\rangle$ es cero

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{E}_x|n\rangle &= E_0\text{sen}(kz)(\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle) = 0 \\ \langle n|\hat{B}_y|n\rangle &= iB_0\text{cos}(kz)(\langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle - \langle n|\hat{a}|n\rangle) = 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

en donde hemos utilizado la propiedad de ortogonalidad de los estados $|n\rangle$. Usando este último resultado también podemos encontrar la incertidumbre, i.e. la desviación estándar, para $|n\rangle$

$$\begin{aligned}\sigma_E &= (\langle n | E_x^2 | n \rangle)^{1/2} = \sqrt{2E_0} \operatorname{sen}(kz) \left(n + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \\ \sigma_B &= (\langle n | B_y^2 | n \rangle)^{1/2} = \sqrt{2B_0} \operatorname{cos}(kz) \left(n + \frac{1}{2} \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (1.28)$$

Que la incertidumbre sea distinta de cero, para todo n , quiere decir que el campo *fluctúa*, es decir, que distintas mediciones arrojarán en general distintos valores para éste, y notamos que esto es verdad inclusive para el caso de $n = 0$, hecho que recibe el nombre de *fluctuaciones del vacío*.

1.3. Expansión multimodal

En esta sección nos interesará llevar a cabo la cuantización del campo no ya en una región específica del espacio, sino que trabajaremos en una cavidad cúbica de lado L pero que pensaremos como arbitraria, sin fronteras reales; para ello necesitaremos utilizar el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ sujeto a la condición de Coulomb: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. El potencial escalar $\Phi(\vec{r}, t)$ no nos concierne ya que estamos considerando nuevamente una región libre de fuentes de radiación, lo cual implica que $\Phi = 0$ [6, 8]. Bajo estas condiciones el potencial vectorial debe cumplir la ecuación de onda homogénea [1, 6, 7]

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (1.29)$$

y podemos obtener los campos a través de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \nabla \times \vec{A}\end{aligned}\quad (1.30)$$

Esta vez impondremos condiciones periódicas a la frontera, lo cual implica que una onda ‘viajera’ deberá cumplir, en la dirección x por ejemplo

$$\exp ik_x x = \exp ik_x (x + L)$$

lo cual se tiene si $k_x = 2\pi m_x / L$, con m_x entero, y tendremos lo mismo en las otras direcciones, por lo que el vector de onda sólo tomará los siguientes posibles valores

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (m_x, m_y, m_z) \quad (1.31)$$

con m_y y m_z enteros igualmente.

Tomando esto en cuenta, podemos hacer una expansión en términos de ondas planas para el potencial vectorial [3, 7]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{k,s} \hat{e}_{ks} \left(A_{ks}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + A_{ks}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \quad (1.32)$$

aquí la suma sobre k quiere decir una suma sobre todos los posibles enteros (m_x, m_y, m_z) y el subíndice $s = 1, 2$ hace referencia explícita a la posibilidad de dos polarizaciones para las ondas planas. Los vectores \hat{e}_{ks} son los vectores unitarios en la dirección de polarización de nuestras ondas planas y están restringidos por la condición de Coulomb a cumplir $\hat{e}_{ks} \cdot \vec{k} = 0$.

Cada uno de los componentes $A_{ks}(t)$ en (1.32) debe cumplir la ecuación armónica

$$\frac{d^2 A_{ks}}{dt^2} + \omega_k^2 A_{ks} = 0 \quad (1.33)$$

donde $\omega_k = kc$. La solución a (1.33) es

$$A_{ks}(t) = A_{ks} e^{-i\omega_k t} \quad (1.34)$$

donde hemos definido $A_{ks} \equiv A_{ks}(0)$.

Sustituyendo (1.34) en (1.32) tenemos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{k,s} \hat{e}_{ks} \left(A_{ks} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + A_{ks}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.35)$$

y utilizando (1.30) se obtiene que

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{k,s} \omega_k \hat{e}_{ks} \left(A_{ks} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - A_{ks}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.36)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{k,s} \omega_k (\hat{k} \times \hat{e}_{ks}) \left(A_{ks} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - A_{ks}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.37)$$

donde $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$.

Ahora necesitamos conocer la energía del sistema, para lo que emplearemos de nuevo la ecuación (1.8) y una vez más tomaremos la integral de ésta en el interior de nuestra cavidad de volumen $V = L^3$:

$$H = 2\epsilon_0 V \sum_{k,s} \omega_k^2 A_{ks}(t) A_{ks}^*(t) = 2\epsilon_0 V \sum_{k,s} \omega_k^2 A_{ks} A_{ks}^* \quad (1.38)$$

Definimos las nuevas variables q_{ks} y p_{ks} a través de las siguientes relaciones

$$A_{ks} = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{1/2}}(\omega_k q_{ks} + ip_{ks}) \quad (1.39)$$

$$A_{ks}^* = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{1/2}}(\omega_k q_{ks} - ip_{ks}) \quad (1.40)$$

y al sustituir en (1.38) obtenemos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k,s} (p_{ks}^2 + \omega_k^2 q_{ks}^2) \quad (1.41)$$

Esta última expresión es evidentemente la energía para un conjunto de osciladores armónicos simples con frecuencia angular ω_k y masa unitaria, de forma que hemos llegado al mismo resultado básico que cuando solamente consideramos una onda estacionaria para nuestro campo, así que el camino a seguir será completamente análogo al de las secciones anteriores.

Comenzamos promoviendo nuestras variables a operadores: $(q_{ks}, p_{ks}) \rightarrow (\hat{q}_{ks}, \hat{p}_{ks})$ y postulamos las relaciones conmutativas canónicas entre ellas

$$[\hat{q}_{ks}, \hat{p}_{k's'}] = i\hbar\delta_{kk'}\delta_{ss'} \quad (1.42)$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker.

De nuevo introducimos los operadores de creación y aniquilación para cada uno de los modos normales (ahora ondas ‘viajeras’), definidos de la misma forma que se hizo anteriormente

$$\hat{a}_{ks} = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}}(\omega_k \hat{q}_{ks} + i\hat{p}_{ks}) \quad (1.43)$$

$$\hat{a}_{ks}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}}(\omega_k \hat{q}_{ks} - i\hat{p}_{ks}) \quad (1.44)$$

y así se cumple que

$$[\hat{a}_{k's'}, \hat{a}_{ks}^\dagger] = \delta_{k'k}\delta_{s's} \quad (1.45)$$

También definiremos al nuevo operador de número para cada uno de los modos normales como $\hat{n}_{ks} = \hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks}$, así que podemos expresar a nuestro hamiltoniano, ahora ya convertido en operador, como

$$\hat{H} = \sum_{k,s} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{k,s} \hbar\omega_k \left(\hat{n}_{ks} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.46)$$

Por simplicidad ahora escribimos para el j -ésimo modo normal $\hat{n}_j \equiv \hat{n}_{ks}$ y de igual forma $\hat{a}_j^\dagger \equiv \hat{a}_{ks}^\dagger$, $\hat{a}_j \equiv \hat{a}_{ks}$, esto nos permite escribir (1.46) como

$$\hat{H} = \sum_j \hbar\omega_j \left(\hat{n}_j + \frac{1}{2} \right) \quad (1.47)$$

Para encontrar los eigenvalores de (1.46) sólo hace falta considerar el estado compuesto por los eigenestados de cada modo normal

$$|n_1\rangle |n_2\rangle |n_3\rangle \dots \equiv |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle \quad (1.48)$$

donde cada $|n_j\rangle$ cumple

$$\hat{H}_j |n_j\rangle = \hbar\omega_j \left(\hat{n}_j + \frac{1}{2} \right) |n_j\rangle = E_j |n_j\rangle \quad (1.49)$$

y por lo tanto, si escribimos (1.48) como $|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = |\{n_j\}\rangle$, tendremos que se cumplirá

$$\hat{H} |\{n_j\}\rangle = E |\{n_j\}\rangle \quad (1.50)$$

es decir que (1.48) es nuestro nuevo eigenestado con energía $E = \sum_j \hbar\omega_j (n_j + \frac{1}{2})$.

Nuevamente podemos escribir cualquier estado de Fock a partir del estado base $|0, 0, 0, \dots\rangle \equiv |\{0\}\rangle$ utilizando al operador de creación así

$$|\{n_j\}\rangle = \prod_j \frac{(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |\{0\}\rangle \quad (1.51)$$

y ya que cumplen como antes la condición de ortonormalidad

$$\langle n'_1, n'_2, \dots | n_1, n_2, \dots \rangle = \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots \quad (1.52)$$

también ahora podemos describir un estado cualquiera del campo a través de una combinación lineal de ellos [4]

$$|\varphi\rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots c_{n_1, n_2, \dots} |n_1, n_2, \dots\rangle \equiv \sum_{\{n_j\}} c_{\{n_j\}} |\{n_j\}\rangle \quad (1.53)$$

Para terminar con la cuantización del campo electromagnético, escribimos las expresiones finales para los operadores correspondientes a $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en términos de los operadores de creación y aniquilación

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{ks} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{e}_{ks} \left(\hat{a}_{ks} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{ks}^\dagger e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.54)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{ks} (\hat{k} \times \hat{e}_{ks}) \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \left(\hat{a}_{ks} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{ks}^\dagger e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.55)$$

Capítulo 2

Estadística y conteo de fotones

En este capítulo analizaremos los distintos tipos de distribuciones estadísticas que puede presentar la luz, a saber, las de tipo poissoniana, superpoissoniana y subpoissoniana. De estas tres solamente la subpoissoniana escapa completamente del marco teórico clásico, ya que puede explicarse únicamente a través de considerar la cuantización del campo electromagnético, mientras que de los otros dos tipos de luz se puede dar cuenta haciendo un estudio semiclásico, en donde el campo no se encuentra cuantizado pero la interacción de éste con la materia sí [5, 7, 10]. Esta teoría semiclásica tiene la ventaja de predecir los mismos resultados que la teoría cuántica, para algunos tipos de luz, pero siendo matemáticamente más sencilla, motivo por el cual comenzaremos nuestro estudio desde este punto de vista, aunque sin dejar de lado por completo la posibilidad de incorporar estos resultados en el contexto de un campo cuantizado; sin embargo, para el tipo de luz subpoissoniana sí habremos de hacer mención de resultados estrictamente cuánticos, aunque éstos no se derivarán de una manera rigurosa, sino que se utilizarán sólo en tanto nos permitan estudiar las propiedades estadísticas que son aquí de nuestro interés.

2.1. Luz poissoniana y estados coherentes

Si consideramos al campo electromagnético de manera clásica, pero mantenemos la hipótesis de que interactúa con la materia solamente a través de intercambios discretos de energía, es decir, de manera cuántica, entonces podemos entender muchos de los aspectos estadísticos de distintos campos, como por ejemplo el de la luz caótica, el de las líneas espectrales de alguna fuente, o el de un haz clásico totalmente coherente. Es por eso que comen-

zamos nuestro estudio de la estadística de la luz imaginando un haz clásico con una intensidad que puede variar espacial y temporalmente, incidiendo sobre un instrumento fotosensible, suponiendo que dicho instrumento tiene la capacidad de absorber un cuanto de energía cedido por nuestro campo clásico, y de transferir esta energía a alguno de sus electrones, existiendo entonces la posibilidad de que se libere uno de ellos debido a su excitación. A esta liberación de electrones le llamaremos *fotoevento*, y el número total n de éstos durante un intervalo dado de tiempo será el *fotocuento*.

Trabajaremos bajo las siguientes hipótesis. Primero, que la probabilidad de que se libere un electrón en un intervalo de tiempo $t \rightarrow t + \Delta t$, pequeño comparado con el tiempo de coherencia del haz, es proporcional a dicho intervalo de tiempo, al área A iluminada de nuestro instrumento fotosensible, y a la intensidad $I(x, y, t)$ del haz incidente sobre la región en cuestión, por lo tanto la probabilidad de tener un fotoevento está dada por

$$P(1, \Delta t, A) = \alpha \Delta t A I(x, y, t) \quad (2.1)$$

donde α es una constante de proporcionalidad.

Nuestra segunda hipótesis será que la probabilidad de tener dos fotoeventos en el pequeño intervalo de tiempo Δt es despreciablemente pequeña, es decir, que solamente podrá tener lugar un fotoevento durante intervalos pequeños de tiempo. Y por último, suponemos que los fotoeventos que ocurran en intervalos distintos de tiempo son estadísticamente independientes. Bajo estas tres hipótesis se puede mostrar [5, 10] que la probabilidad $P(n)$ de tener n fotoeventos durante el intervalo de tiempo $t \rightarrow t + \tau$ está dada por

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (2.2)$$

donde el promedio de fotoeventos \bar{n} está dado por

$$\bar{n} = \alpha \iint_A \int_t^{t+\tau} I(x, y, s) ds dx dy = \alpha W \quad (2.3)$$

donde W es la energía total incidente sobre el área fotosensible A durante el intervalo $t \rightarrow t + \tau$, es decir

$$W = \iint_A \int_t^{t+\tau} I(x, y, s) ds dx dy \quad (2.4)$$

En términos de la energía total W , podemos expresar a (2.2) como

$$P(n) = \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} \quad (2.5)$$

Si pensamos que cada fotón del haz incidente tiene una energía $h\bar{\nu}$ entonces podemos también expresar el promedio de fotoeventos como

$$\bar{n} = \alpha W = \frac{\eta W}{h\bar{\nu}} \quad (2.6)$$

donde h es la constante de Planck, $\bar{\nu}$ es la frecuencia promedio del haz y η es la *eficiencia cuántica* característica de nuestro instrumento fotosensible, cuyo valor representa el número promedio de fotoeventos por cada fotón incidente.

El resultado general obtenido de esta forma en la ecuación (2.2) es claramente una distribución de tipo poissoniana, con un promedio dado por (2.6). La distribución poissoniana tiene muchas propiedades interesantes y se presenta de manera natural en varias ramas de estudio en física; sin embargo, aquí mencionamos simplemente su característica más relevante para nuestro caso, que es la relación entre su desviación estándar Δn y su promedio, a saber: $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$.

Habiendo llegado hasta aquí, debemos tomar nota de una hipótesis extra que hemos hecho de manera implícita, esto es, que la intensidad de nuestro haz luminoso es una función bien conocida. Esta hipótesis deberá ser desechada más adelante, ya que de manera más realista la intensidad de la mayoría de las fuentes luminosas presenta un comportamiento estocástico [10]. Sin embargo, aquí podemos analizar un caso muy particular pero de obvio interés, el cual se presta al análisis hecho arriba para una intensidad bien conocida, a saber, el campo emitido por un láser. Los láseres presentan fluctuaciones despreciables en su intensidad y se pueden aproximar como una onda de intensidad constante I_0 de manera muy satisfactoria, lo cual permite que su estadística esté perfectamente bien descrita por la ecuación (2.5), con la energía dada por $W = I_0 A \tau$. Más aún, aquí podemos también obtener, a partir de consideraciones cuánticas, la misma distribución poissoniana para la estadística del láser. Para lograr esto, primero afirmamos que el estado cuántico correspondiente a un láser es aquel denominado *estado coherente* y cuya propiedad distintiva es la de ser un eigenestado del operador de aniquilación \hat{a} [11, 12, 14], esto es, si escribimos al estado coherente como $|\alpha\rangle$, se cumplirá que

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.7)$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ (ya que los operadores de creación y aniquilación no son hermitianos, su espectro puede ser complejo).

Para obtener la estadística de los estados coherentes, escribimos a éstos en términos de los estados de Fock

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle 0|\hat{a}^n/\sqrt{n!}|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.8)$$

donde se utilizaron las ecuaciones (1.24) y (2.7). Ahora, dado que el estado coherente debe estar normalizado tenemos

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \quad (2.9)$$

por lo que $\langle 0|\alpha\rangle = e^{i\theta-|\alpha|^2/2}$, escogemos $\theta = 0$ (por simplicidad), y finalmente obtenemos que [13, 14]

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.10)$$

Con esta última expresión encontramos la probabilidad de que el estado coherente $|\alpha\rangle$ contenga un número n de fotones así

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (2.11)$$

Vemos que esta probabilidad, obtenida bajo consideraciones cuánticas, es completamente análoga a la derivada con argumentos semiclásicos en tanto que ambas son exactamente del mismo tipo, esto es, poissonianas. Aquí cabe destacar, sin embargo, que la ecuación (2.11) corresponde a la estadística pura del estado $|\alpha\rangle$, es decir, no es la estadística de los fotoconteos obtenida mediante un experimento que utilice un haz coherente, sino la estadística misma de los fotones del haz. Por supuesto, estas dos estadísticas están conectadas mediante la eficiencia cuántica η , y mientras mejor sea nuestro instrumento fotosensible, es decir su eficiencia cuántica sea mayor, de mejor manera se reproducirá la estadística pura del campo en cuestión.

2.2. Ley de Mandel

Ya que para el estado coherente descrito en la sección anterior obtuvimos como característica distintiva que $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$, entonces es razonable comparar

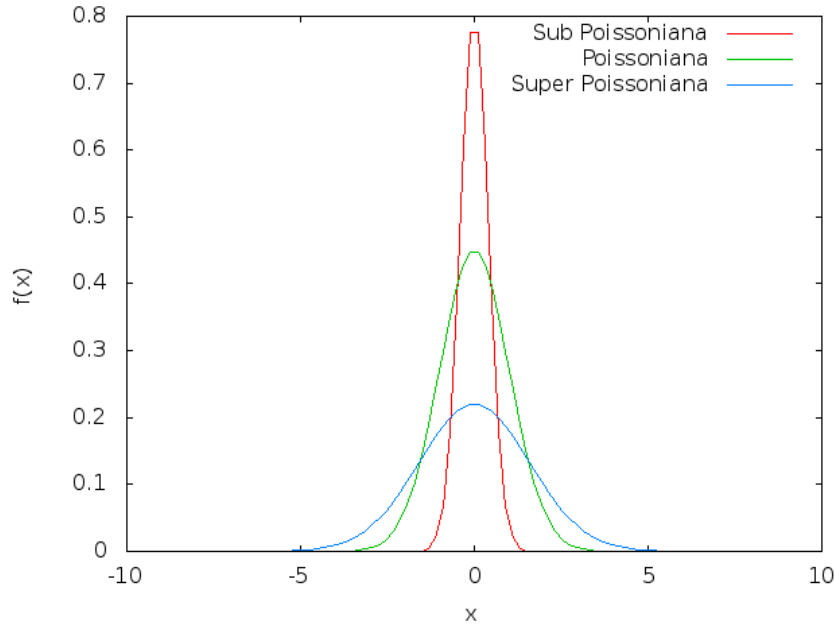


Figura 2.1: Distintos tipos de estadísticas.

los atributos estadísticos de los distintos tipos de radiación con respecto a esta propiedad. En general hablaremos de tres tipos diferentes de luz, a saber: luz poissoniana, para la cual se cumple que $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$, luz superpoissoniana, para la cual $\Delta n > \sqrt{\bar{n}}$ y luz subpoissoniana que cumple $\Delta n < \sqrt{\bar{n}}$. Estas diferencias nos hablan, claro está, sobre la dispersión de las distribuciones correspondientes, así como del comportamiento relativo entre ellas, como se puede apreciar en la figura (2.1), donde vemos que la luz subpoissoniana es relativamente menos dispersa que la superpoissoniana, mientras que la poissoniana se sitúa en un punto intermedio entre estas dos.

Habiendo estudiado la luz de tipo poissoniana ahora centramos nuestra atención en la de tipo superpoissoniano, para lo cual deberemos hacer caso de la advertencia mencionada con respecto al conocimiento explícito de la intensidad $I(t)$. Como dijimos arriba, en la derivación de la ecuación (2.5) supusimos que conocíamos de manera explícita a la intensidad, y por tanto a W . Sin embargo, debido a la naturaleza estocástica de la intensidad de la luz y por lo tanto la también estocástica interacción entre nuestro fotodetector y la luz incidente sobre éste, es mucho más realista considerar a (2.5) como una distribución condicional con respecto al conocimiento explícito de W [10], lo

cual expresamos como $P(n|W)$. La expresión más general, en donde no se supone el conocimiento de W , está dada por

$$P(n) = \int_0^\infty P(n|W)p_w(W)dW = \int_0^\infty \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} p_w(W)dW \quad (2.12)$$

donde $p_w(W)$ es la densidad de probabilidad para W . La expresión anterior se conoce como *fórmula de Mandel*, y será nuestra herramienta principal para el estudio de la luz superpoissoniana. De dicha fórmula se vuelve claro también que cuando el comportamiento de la intensidad es estocástico, se pierde la estadística poissoniana que se había obtenido previamente, y en efecto adelante mostraremos un ejemplo para el cual la distribución es de tipo superpoissoniano y ya no poissoniano.

Antes de pasar a los ejemplos concretos de luz no poissoniana, necesitaremos algunas propiedades generales de la fórmula de Mandel. En particular, requerimos una expresión para los llamados momentos factoriales, los cuales, para una distribución $P(a)$, se definen como [15] el valor esperado de $a(a-1)\dots(a-k+1)$, entonces para (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{n(n-1)\dots(n-k+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)P(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \int_0^\infty \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} p_w(W)dW \end{aligned} \quad (2.13)$$

ahora intercambiamos los signos de integración y de sumatoria, y utilizando el hecho de que [10] para una distribución poissoniana el k -ésimo momento factorial es simplemente n^k , tenemos

$$\overline{n(n-1)\dots(n-k+1)} = \int_0^\infty (\alpha W)^k p_w(W)dW = \alpha^k \overline{W^k} \quad (2.14)$$

Con este resultado podemos calcular la expresión general para la varianza [12] así

$$(\Delta n)^2 = \overline{n(n-1)} + \bar{n} - \bar{n}^2 = \alpha \overline{W} + \alpha^2 (\Delta W)^2 \quad (2.15)$$

Como ejemplo para estudiar el comportamiento de la luz no poissoniana comenzamos considerando radiación térmica polarizada y un intervalo de

conteo τ mucho más pequeño que el tiempo de coherencia de dicha radiación. Bajo estas condiciones podemos considerar como constante a la intensidad $I(t)$ durante dicho intervalo de tiempo τ , obteniendo así que

$$W = I(t)A\tau \quad (2.16)$$

y se puede mostrar que la densidad de probabilidad para W está dada por [10]

$$p_w = (\overline{W})^{-1} \exp(-W/\overline{W}) \quad (2.17)$$

El siguiente paso es sustituir esta expresión para p_w en la fórmula de Mandel y simplemente integrar

$$\begin{aligned} P(n) &= \int_0^\infty \frac{(\alpha W)^n}{n!} e^{-\alpha W} \frac{1}{\overline{W}} e^{-W/\overline{W}} dW \\ &= \frac{\alpha^n}{n! \overline{W}} \int_0^\infty W^n \exp\left(-W\left(\alpha + \frac{1}{\overline{W}}\right)\right) dW = \frac{1}{1 + \alpha \overline{W}} \left(\frac{\alpha \overline{W}}{1 + \alpha \overline{W}}\right)^n \end{aligned} \quad (2.18)$$

en términos de \bar{n} esta última expresión se convierte en

$$P(n) = \frac{1}{1 + \bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}\right)^n \quad (2.19)$$

que reconocemos como una distribución de tipo Bose-Einstein [5, 12].

Ahora queremos mostrar que esta distribución corresponde a luz de tipo superpoissoniano, así que debemos hallar su desviación estándar, para lo cual usamos el resultado derivado en (2.15) y el hecho [10] de que los momentos factoriales de la distribución de Bose-Einstein están dados por $n(n-1)\dots(n-k+1) = k!(\bar{n})^k$. Entonces tenemos que $k!(\overline{W})^k = \overline{W}^k$, obteniendo así que

$$(\Delta n)^2 = \alpha \overline{W} + \alpha^2 (\overline{W}^2 - (\overline{W})^2) = \bar{n} + (\bar{n})^2 \quad (2.20)$$

mostrando así que esta luz es de tipo superpoissoniano.

Así concluimos el análisis de este caso particular de luz térmica para el corto intervalo de fotoconteo τ , aunque claro está, se pueden considerar hipótesis distintas, como un intervalo de conteo muy largo comparado con el tiempo de coherencia, además del caso general para un intervalo arbitrario. Sin embargo el resultado sería el mismo, a saber, una distribución de tipo

superpoissoniana, lo cual se pudo haber previsto desde la aparición de la forma general para la varianza (2.15), ya que la intensidad siempre presentará fluctuaciones (haciendo así que $(\Delta W)^2$ sea distinta de cero) excepto en el caso muy particular de que sea una constante I_0 (en cuyo caso se tendría que $p_w = \delta(W - W_0)$ con $W_0 = I_0 A \tau$, y se recobraría la distribución poissoniana). Bajo estas circunstancias parecería imposible también que se cumpliera la condición subpoissoniana de: $\Delta n < \sqrt{\bar{n}}$. De hecho, en el contexto semiclásico no podemos tener semejante situación, pero en la siguiente sección veremos cómo en el ámbito del campo cuantizado sí se puede presentar este comportamiento.

2.3. Luz subpoissoniana

Ahora es momento de revisar el último tipo de luz que nos concierne, a saber, la de tipo subpoissoniano, para el cual, como ya se mencionó, deberemos hacer uso de la maquinaria cuántica para la teoría de las fotodetecciones. Lamentablemente, una derivación completa de muchos de los resultados de dicha teoría están más allá de las intenciones y objetivos del presente proyecto, por lo que simplemente se citarán algunos de los resultados más relevantes para nuestros propósitos, en aras de explicar meramente lo que aquí es de nuestro interés: la estadística de la luz subpoissoniana. Recalcamos que las predicciones arrojadas por la teoría completamente cuántica y la semiclásica son básicamente iguales para los dos tipos de luz que ya hemos tenido ocasión de investigar.

Comenzamos con un poco de la teoría cuántica de la fotodetección, en donde ya no es solamente la interacción entre el campo y la materia aquello que se encuentra cuantizado sino también el campo mismo, cuya teoría ya fue desarrollada anteriormente. La teoría cuántica de la fotodetección pretende estudiar la relación entre los fotoconteos que se puedan obtener experimentalmente y la estadística pura del haz luminoso en cuestión.

El número de fotones que inciden sobre nuestro fotodetector, en un tiempo T está representado por el operador [7]

$$\hat{M}(t, T) = \int_t^{t+T} dt' \hat{a}^\dagger(t') \hat{a}(t') \quad (2.21)$$

donde \hat{a}^\dagger y \hat{a} son los usuales operadores de creación y aniquilación.

Aquí es muy importante tener en mente que la ecuación anterior representa no el número de fotoeventos, sino de fotones incidentes. Esto quiere decir que dicha expresión no será necesariamente el resultado de un experimento

particular, lo cual en última instancia depende de la eficiencia cuántica η de nuestro fotodetector, que definimos como la razón entre el número promedio de fotoeventos y de fotones incidentes. Entonces podemos escribir el número promedio de fotoeventos como

$$\langle N \rangle = \eta \langle \hat{M}(t, T) \rangle \quad (2.22)$$

donde los corchetes se refieren al promedio cuántico usual. También es posible encontrar el segundo momento factorial de los fotoeventos. Se tiene que [7]

$$\langle N(N-1) \rangle = \eta^2 \langle \hat{M}(t, T)[\hat{M}(t, T) - 1] \rangle \quad (2.23)$$

Utilizando la ecuaciones (2.22) y (2.23) podemos ver que la varianza para los fotoeventos está dada por

$$(\Delta N)^2 = \eta^2 (\Delta \hat{M}(t, T))^2 + \eta(1-\eta) \langle \hat{M}(t, T) \rangle \quad (2.24)$$

De la ecuación (2.24) podemos obtener algunas conclusiones importantes. Primero, que la eficiencia cuántica juega un papel primordial para la fiel reproducción de la estadística pura de nuestros fotones a partir de aquella para los fotoeventos. Como se puede ver, si nuestra eficiencia es igual a uno, entonces tenemos que $(\Delta N)^2 = (\Delta n)^2$. El otro aspecto importante en que debemos reparar es cuando η es muy pequeña, pues siendo así se tiene que $(\Delta N)^2 = \eta \bar{n} = \bar{N}$, es decir que independientemente de la estadística de nuestros fotones, la estadística correspondiente para los fotoeventos que obtendremos será de tipo poissoniano, habiendo perdido así la información sobre los fotones incidentes. Esto es de particular interés para nosotros ya que la observación directa de luz subpoissoniana se presenta entonces como un reto experimental, en tanto que la eficiencia cuántica es una propiedad inherente tan sólo de nuestro fotodetector. Es imperativo contar con una alta eficiencia para poder observar este tipo de luz, ya que como dijimos, es la que presenta el mayor grado de ‘ordenamiento’ (dada la característica que le define i.e., que $\Delta n < \sqrt{\bar{n}}$), inclusive por encima de un láser, que representa el paradigma de la luz coherente. Esto hace que su estadística sea endeble, en el sentido de que puede perderse fácilmente con una eficiencia baja, pues como ya vimos esto tiende a reproducir la estadística poissoniana sin importar la estadística de los fotones incidentes, ocultando así las propiedades estadísticas intrínsecas a éstos.

Aquí vale la pena completar la teoría cuántica de la fotodetección mencionando el resultado más importante de ésta. Dicho resultado fue derivado por primera vez en [16] y es la herramienta que más cabalmente nos permitiría estudiar la estadística de cualquier tipo de luz puesto que a ésta se le

considera cuantizada, al igual que a su interacción con los instrumentos de fotodetección. Se tiene que la probabilidad de obtener m fotoeventos en un intervalo de tiempo T , está dada por

$$P_m(t, T) = \left\langle : \frac{[\eta \hat{M}(t, T)]^m}{m!} \exp[-\eta \hat{M}(t, T)] : \right\rangle \quad (2.25)$$

donde los dos puntos $\langle \dots \rangle$ se refieren al ‘ordenamiento normal’ de los operadores de creación y aniquilación, es decir que si se expandiese la exponencial involucrada en esta ecuación, entonces los operadores de creación antecederían siempre a los de aniquilación.

Así concluimos esta segunda sección sobre el estudio de las estadísticas posibles para las distribuciones de la luz y las distribuciones de los fotoconteos asociados a éstas. Recapitulamos brevemente haciendo mención de las 3 formas que aquí se trataron y sus características distintivas. La luz superpoissoniana, cuyo promedio y desviación estándar cumplen que $\Delta n > \sqrt{\bar{n}}$; es el tipo de luz más fácilmente encontrado de manera cotidiana y se caracteriza por ser el tipo menos ‘ordenado’ de luz. Después tenemos a la luz con estadística poissoniana que se define como aquella luz para la cual $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$; este tipo de luz es relativamente menos ‘difusa’ que la de tipo superpoissoniano y tiene como mejor representante a los láseres, que se caracterizan por ser el arquetipo clásico de la luz coherente. Por último, tenemos a la luz subpoissoniana para la cual $\Delta n < \sqrt{\bar{n}}$, cuyo más puro ejemplo son los estados de Fock, para los cuales no existe un análogo clásico, y es que en general la luz subpoissoniana se presenta como una característica exclusivamente cuántica, haciendo así, además, que la observación de estadísticas subpoissonianas constituya una corroboración empírica de la cuantización del campo electromagnético.

Capítulo 3

Polarización de fotones

En este capítulo estudiaremos la teoría cuántica de la luz polarizada, comenzando con una revisión de la teoría clásica de la misma. También analizaremos con detalle la contraparte cuántica de la conocida ley de Malus, ya que será el elemento clave para la parte experimental del presente proyecto.

3.1. Polarización clásica

Decimos que la luz se encuentra en algún estado de polarización, cuando el campo eléctrico que le conforma, presenta alguna regularidad o restricción; por ejemplo, la luz que se encuentra polarizada linealmente, tiene la sencilla particularidad de que su campo eléctrico, se encuentra confinado dentro de un plano, llamado *plano de vibración*. Otro ejemplo se halla en la luz con polarización elíptica, en donde el campo eléctrico, visto desde la dirección de propagación de la luz, está restringido a una elipse. Estos dos ejemplos serán analizados con más detalle a continuación.

Como ya se mencionó, en la luz polarizada linealmente tenemos que el campo eléctrico se encuentra confinado al plano de vibración, en donde también se halla el vector de propagación (ver figura 3.1). Esto quiere decir que \vec{E} , solamente cambiará su magnitud pero no su dirección, por lo cual, si tenemos que la luz se propaga, por ejemplo, en la dirección z , con un número de onda k , frecuencia angular ω y amplitud E_0 , podrá describirse como

$$\vec{E}(z, t) = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (3.1)$$

haciendo así evidente que la dirección del campo eléctrico es constante en el tiempo, que es en este caso la dirección x , dada por el usual vector unitario \hat{i} . La consecuencia geométrica de dicha restricción será que \vec{E} trazará un

segmento de línea recta durante la propagación de la onda, motivo por el cual se le llama *polarización lineal*. A la luz en este estado la denotaremos como \mathbf{P} .

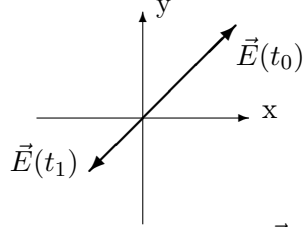


Figura 3.1 Polarización lineal. Se muestra a \vec{E} , en dos tiempos distintos.

La otra forma de luz polarizada que se mencionó es la luz *elíptica*, que se refiere al caso en que el campo \vec{E} traza una elipse cuando se le observa desde la dirección de propagación. Para ver esto, consideramos dos ondas \mathbf{P} , propagándose en la dirección z de la siguiente forma

$$\vec{E}_x(z, t) = \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (3.2)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \quad (3.3)$$

donde ϵ es el *desfase* entre ambas ondas y \hat{j} es el vector unitario en la dirección y . De la ecuación (3.2) tenemos que

$$\sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} = \text{sen}(kz - \omega t)$$

y además tenemos que

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \epsilon = -\text{sen}(kz - \omega t) \text{sen}(\epsilon)$$

Entonces, sustituyendo y elevando al cuadrado, tenemos

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \epsilon\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right] \text{sen}^2(\epsilon)$$

y tras reordenar, obtenemos

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right) \cos \epsilon = \text{sen}^2(\epsilon) \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) es efectivamente la ecuación de una elipse, en el plano (E_x, E_y) , y cuyos ejes principales, forman un ángulo α con respecto a los ejes coordenados (E_x, E_y) , tal que

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos(\epsilon)}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (3.5)$$

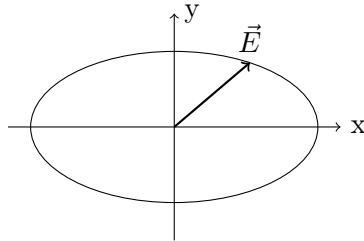


Figura 3.2 Polarización elíptica, con $\alpha = 0$.

Como caso de interés particular, consideremos que las dos ondas originales poseen la misma amplitud, i.e. $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, y que también, el ángulo de inclinación es cero, $\alpha = 0$, o de manera equivalente, que $\epsilon = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2 \dots$ en este caso, tenemos que

$$E_y^2 + E_x^2 = E_0^2$$

que es la ecuación para un círculo, en el mismo plano (E_x, E_y) . Esto quiere decir, que como caso particular de la luz con polarización elíptica, se tiene a la luz polarizada circularmente, que como su nombre indica, se refiere al hecho de que \vec{E} , trazará un círculo durante la propagación de la onda; más aún, haremos una distinción entre las dos direcciones de giro del campo en este tipo de polarización, denotando a la luz circular dextrógira (i.e. girando en el sentido de las agujas del reloj) por **R**, y a la levógira (girando contra las manecillas) por **L**. A estos dos tipos de polarización también se les suele llamar, simplemente, luz circular derecha e izquierda, respectivamente. Además de esto, también tenemos como caso particular, a la luz en estado **P**, cuando $\epsilon = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), ya que en este caso, de la ecuación (3.4) se sigue que

$$E_y = \pm \frac{E_{0y}E_x}{E_{0x}}$$

que es la ecuación de una recta (el signo positivo corresponde a m par, y el negativo a m impar).

Ahora podemos intentar hacer una descripción de la luz ‘natural’. Consideremos una fuente luminosa natural, como una bombilla, una vela encendida, etc.; dicha fuente está constituida por un gran número de emisores atómicos excitados, los cuales logran irradiar una onda electromagnética polarizada durante aproximadamente $10^{-8}s$ [19]. Sin embargo, las ondas producidas en general por estos emisores, no podrán combinarse para dar lugar a una polarización de larga duración ya que su proceso de emisión será altamente irregular, dando lugar, más bien, a una polarización ‘aleatoria’, y haciendo así imposible, una descripción detallada de la luz emitida. Es a esta impredecible y poco regular emisión de una fuente luminosa a la que llamamos *luz natural*.

3.2. Ley de Malus

Ya hemos estudiado la naturaleza de la polarización de la luz, ahora debemos enfocar la atención, en cómo se puede producir este fenómeno.

Los dispositivos que tienen la capacidad de transmitir luz polarizada a partir de la incidencia de luz natural, se conocen como *polarizadores*. Existen polarizadores de muchas formas y materiales distintos, pero todos ellos operan bajo los mismos mecanismos básicos, que pueden ser categorizados de acuerdo a cuatro tipos: la *absorción selectiva*, la *reflexión*, la *dispersión* y la *birrefringencia* [19]. Aquí analizaremos brevemente, el funcionamiento de acuerdo al mecanismo de la absorción selectiva, el cual se presenta en algunos minerales, como por ejemplo la turmalina, y en algunos compuestos orgánicos [20]. Por ejemplo, si recordamos que podemos escribir a la luz natural como una combinación de cualesquiera dos estados \mathbf{P} , ortogonales, de igual amplitud e incoherentes entre sí (i.e. ondas cuya diferencia de fase relativa, varía en el tiempo) [21]. Entonces, llamaremos *polarizador lineal* a un dispositivo que permita la transmisión de solamente uno de estos dos estados \mathbf{P} que conforman a la luz natural. De igual forma existen polarizadores *circulares* y *elípticos* que seleccionan, i.e. permiten la transmisión, de luz con polarización elíptica o circular [19].

Un dispositivo que nos puede servir para ilustrar cómo funciona un polarizador lineal es una malla de hebras paralelas entre sí, hechas de algún material conductor. Supongamos que sobre dicho dispositivo hacemos incidir luz natural que se propaga en la dirección z , y que escribimos nuevamente como una combinación de dos estados \mathbf{P} ortogonales, escogiendo la dirección de uno de éstos, como la dirección de las hebras de nuestra malla, digamos, la dirección y , es decir, tendremos los estados \mathbf{P}_x y \mathbf{P}_y . Cuando este haz

incida sobre la malla conductora, el componente \mathbf{P}_y , paralelo a las hebras, hará que los electrones de ésta comiencen a moverse, generando una corriente y obteniendo así energía del campo eléctrico incidente. Ahora, ya que los electrones conductores de la malla se aceleran por el campo eléctrico, éstos a su vez irradiarán una nueva onda en la dirección z y otra en la dirección $-z$. La nueva onda irradiada hacia z tenderá a cancelar la propagación de la onda original en esta dirección, inhibiendo la transmisión en la dirección de las hebras conductoras. Por otro lado, ya que los electrones no pueden moverse más que en la dirección y , la componente \mathbf{P}_x , no sufrirá ningún cambio, transmitiéndose de manera íntegra. Entonces lo que hemos visto es que, al incidir la luz natural sobre nuestra malla conductora, el resultado ha sido la transmisión de solamente uno de sus componentes, en este caso, \mathbf{P}_x , mientras que el otro componente, en la dirección y , se ha cancelado por completo, por lo que la luz transmitida se encuentra ahora únicamente en el estado \mathbf{P}_y .

Ahora, a sabiendas del funcionamiento de los polarizadores lineales, analicemos con más detalle qué ocurre con la onda transmitida por uno de ellos. Imaginemos que sobre un polarizador lineal hacemos incidir luz natural. Sabemos que la luz transmitida por dicho polarizador se encontrará en un estado \mathbf{P} , con una amplitud, digamos, E_{01} . Si después de él, colocamos otro polarizador lineal, llamado *analizador*, cuyo eje de transmisión forme un ángulo θ con el del primero, la luz que transmitirá este analizador, estará de nuevo en un estado \mathbf{P} , pero en la dirección del nuevo eje de transmisión, y con una amplitud dada por $E_{01} \cos \theta$. Ya que la irradiancia de un haz con polarización lineal está dada por $I = \frac{c\epsilon_0}{2} E^2$, podemos escribir, que la irradiancia de la luz transmitida por el analizador será

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (3.6)$$

donde $I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2} E_{01}^2$, es la irradiancia máxima posible (obtenida cuando $\theta = 0$).

La ecuación (3.6) se conoce como la ley de Malus, y nos dice que la irradiancia transmitida por nuestro analizador, depende de la alineación relativa entre los ejes de transmisión de éste, y el primer polarizador. Si ambos ejes son paralelos ($\theta = 0$), entonces la irradiancia original no se verá afectada, y en cambio, si se encuentran perpendiculares ($\theta = \pi/2$), la nueva irradiancia será cero.

3.3. Estados cuánticos de polarización

Ya hemos tratado la teoría esencial de la polarización desde la perspectiva del electromagnetismo clásico. Ahora es momento de reformular dicha teoría desde el marco de la mecánica cuántica. Para esto, comenzamos introduciendo a nuestro agente principal en la teoría cuántica de la luz, i.e. el fotón, afirmando que, un haz de luz polarizada (lineal, circular o elípticamente), está conformado por fotones, encontrándose cada uno de los cuales a su vez en el mismo estado (cuántico) de polarización [22]. Esto quiere decir que la propiedad de polarización, que previamente se asignaba a la onda en su totalidad, ha pasado a ser una característica individual y propia de cada uno de sus constituyentes. En lo que resta de esta sección analizaremos la relación entre la asignación de dichos estados cuánticos de polarización para los fotones y la teoría clásica desarrollada anteriormente, además, veremos cómo dar la usual interpretación probabilística, gracias al principio de superposición cuántica, a nuestros fotones polarizados.

Lo primero que debemos dilucidar es la conexión entre el nuevo punto de vista cuántico y algunos resultados experimentales ya muy bien entendidos desde la teoría clásica. Por ejemplo, como ya sabemos, si luz polarizada linealmente en la dirección, digamos y , perpendicular a la del eje de transmisión de un polarizador lineal, digamos x , incide sobre éste, entonces la onda será absorbida en su totalidad. Ahora, si imaginamos a este haz como constituido por fotones en un estado cuántico de polarización ‘vertical’, que designaremos por $|V\rangle$ ¹, deberemos entender que cada uno de estos fotones será absorbido por el polarizador, reproduciendo así el resultado conocido. Luego, si el haz está polarizado paralelamente al eje de transmisión, los fotones se encuentran en un estado de polarización ‘horizontal’, denotado $|H\rangle$, y tendremos que cada uno de ellos atravesará al polarizador, manteniéndose en su estado cuántico original de $|H\rangle$ ², que es lo equivalente a que se transmita la onda en su totalidad, como de hecho ocurre. Hasta aquí no ha habido gran dificultad en extender la teoría cuántica a los resultados conocidos; sin embargo, es más interesante considerar el caso de una onda polarizada oblicuamente. Supongamos entonces que tenemos una onda en un estado \mathbf{P}_θ , i.e., formando un ángulo θ con respecto al eje del polarizador, y aquí la pregunta es: ¿qué ocurrirá cuando uno de los fotones de esta onda incida sobre el polarizador?, y de igual manera podemos tener un haz polarizado

¹Como veremos adelante, dichos estados (escritos en la notación de Dirac), son elementos de un espacio de Hilbert de dos dimensiones.

²Sabemos que permanece en este estado ya que si colocamos otro polarizador, después del primero, el fotón atravesará este segundo polarizador el 100% de las veces [23].

circularmente, hacia la derecha $|R\rangle$ o la izquierda $|L\rangle$, y preguntarnos qué ocurrirá con los fotones que le conforman, al incidir sobre nuestro polarizador lineal. El punto crucial para entender lo que ocurrirá en estos casos, es que los posibles resultados, para cualquiera que sea la polarización de nuestros fotones, son únicamente dos: atravesar o ser absorbido. Jamás se verá que ‘atravesase una fracción de fotón’ a nuestro polarizador, independientemente de la polarización que los fotones puedan tener y del tipo de polarizador que se utilice [22, 24].

Entonces, tenemos el hecho de que el 100 % de los fotones en el estado $|V\rangle$ son absorbidos, y el 100 % de los fotones en el estado $|H\rangle$ atraviesan al polarizador; esto nos sugiere que dichos estados son *eigenresultados* para nuestro experimento, y por tanto que son ortogonales entre sí. El operador del cual son eigenestados $|H\rangle$ y $|V\rangle$, es llamado *operador de polarización*, denotado por \hat{P}_{HV} y los eigenvalores correspondientes pueden escogerse como +1 para $|H\rangle$ y -1 para $|V\rangle$, lo cual nos permite escribir al operador de polarización en esta eigenbase como [2]

$$\hat{P}_{HV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ya que los estados cuánticos de la luz polarizada, son elementos de un espacio de Hilbert [25], expresamos la condición de ortogonalidad de estos eigenestados, mediante su usual producto punto (ver apéndice X): $\langle V|H\rangle = \langle H|V\rangle = 0$. Además, les pediremos a ambos que estén normalizados, es decir, $\langle V|V\rangle = \langle H|H\rangle = 1$. Ahora, como nuestros grados de libertad, para los estados \mathbf{P} , son solamente dos (vertical u horizontal), se tiene que el espacio de Hilbert en cuestión es bidimensional. Entonces, como nuestros dos eigenestados son ortonormales entre sí, son candidatos perfectos para conformar una base de nuestro espacio (al igual que los estados clásicos de polarización lineal); esto quiere decir que cualquier otro estado de polarización $|P\rangle$ puede escribirse como una combinación lineal de éstos

$$|P\rangle = u_1 |H\rangle + u_2 |V\rangle \quad (3.7)$$

donde $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$, permitiéndonos escribir un estado cualquiera como un vector de dos dimensiones [25]

$$|P\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Que podamos escribir cualquier estado de polarización como una superposición de eigenestados, nos permite implementar la interpretación probabilística usual de la mecánica cuántica, a saber, que la probabilidad de hallar a

nuestro fotón en el estado $|H\rangle$ está dada por

$$P_H = |\langle H|P\rangle|^2 = |u_1|^2 \quad (3.9)$$

y de hallarlo en el estado $|V\rangle$

$$P_V = |\langle V|P\rangle|^2 = |u_2|^2 \quad (3.10)$$

claro que entonces también debemos requerir que $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$, ya que el fotón debe de encontrarse en *algún* estado. También, de acuerdo a la representación matricial de \hat{P}_{HV} , tendremos que el valor esperado para un estado arbitrario será: $\langle P|\hat{P}_{HV}|P\rangle = |u_1|^2 - |u_2|^2$.

Como un ejemplo de esto, veamos el caso de la luz polarizada diagonalmente (es decir, en una dirección tal que $\theta = 45^\circ$, con respecto al eje de transmisión de nuestro polarizador), cuyos fotones están en un estado cuántico denotado por $|D\rangle$, y el estado ‘antidiagonal’ $|A\rangle$ (es decir, aquél estado con $\theta = -45^\circ$). Cuando los fotones en alguno de los dos estados $|D\rangle$ o $|A\rangle$, incide sobre nuestro polarizador, tendremos que el 50% de ellos será absorbido y el otro 50% atravesará [23]. Estas condiciones implican que

$$\begin{aligned} \langle D|A\rangle &= \langle A|D\rangle = 0 \\ |\langle D|H\rangle|^2 &= |\langle D|V\rangle|^2 = 0.5 \\ |\langle A|H\rangle|^2 &= |\langle A|V\rangle|^2 = 0.5 \end{aligned} \quad (3.11)$$

y si suponemos que $|D\rangle$ y $|A\rangle$ se pueden escribir como una combinación lineal de $|H\rangle$ y $|V\rangle$, encontramos que

$$\begin{aligned} |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \\ |A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde notamos que se cumple $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$.

En general, los coeficientes de los estados \mathbf{P} de la luz, estarán determinados por la dirección de polarización de la onda electromagnética correspondiente. Si nuestra onda se puede escribir como $\vec{E}(z, t) = E_o(z, t)\hat{e}_\theta$, donde el vector director $\hat{e}_\theta = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta$ (ver figura 3.3), entonces tendremos que el estado cuántico correspondiente para los fotones de la onda, estará dado por

$$|P_\theta\rangle = \cos \theta |H\rangle + \sin \theta |V\rangle \quad (3.13)$$

De esta última expresión para $|P\rangle$, se sigue que la probabilidad de que nuestro fotón atraviese al polarizador horizontal, es $\cos^2 \theta$, y la probabilidad de que sea absorbido es $\sin^2 \theta$. Si mandáramos una cantidad N de fotones hacia nuestro polarizador, dadas las probabilidades individuales mencionadas de cada fotón, se tendría que le atravesarían $N \cos^2 \theta$ fotones, y obviamente serían absorbidos los otros $N \sin^2 \theta$. De aquí podemos ver cómo hemos sido capaces de reproducir la ley de Malus clásica (ecuación (3.6)), desde el contexto cuántico, si pensamos en la irradiancia de la onda como la contraparte clásica del número N de fotones que le conforman.

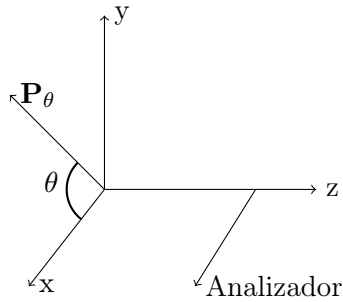


Figura 3.3 Ley de Malus.

Otro caso interesante es el de los estados $|R\rangle$ y $|L\rangle$ de polarización circular. Si consideramos ahora, en lugar de nuestro polarizador lineal, uno que seleccione entre el tipo de polarización circular (**R** o **L**), y recordamos que cualquier tipo de polarización (lineal, circular o elíptica), en el sentido de la teoría clásica, puede escribirse como una combinación lineal de estados **R** y **L** [19], entonces podemos repetir los argumentos hechos para el polarizador lineal, y concluir que los estados cuánticos $|R\rangle$ y $|L\rangle$, cumplen igualmente la condición de ortonormalidad

$$\begin{aligned}\langle R|L\rangle &= \langle L|R\rangle = 0 \\ \langle R|R\rangle &= \langle L|L\rangle = 1\end{aligned}\tag{3.14}$$

Más aun, si mandamos un fotón en alguno de los estados $|R\rangle$ o $|L\rangle$, a través de un polarizador *lineal*, observaremos que el 50 % de las veces el fotón será absorbido, y el otro 50 % logrará atravesar [23], e igualmente para un polarizador cuyos ejes estén alineados en la dirección $\theta = 45^\circ$ y $\theta = -45^\circ$ [2]; todo esto quiere decir que se satisfará

$$\begin{aligned} |\langle R|H\rangle|^2 &= |\langle R|V\rangle|^2 = 1/2 \\ |\langle L|H\rangle|^2 &= |\langle L|V\rangle|^2 = 1/2 \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} |\langle R|D\rangle|^2 &= |\langle R|A\rangle|^2 = 1/2 \\ |\langle L|D\rangle|^2 &= |\langle L|A\rangle|^2 = 1/2 \end{aligned}$$

Utilizando estos resultados podemos encontrar expresiones para $|R\rangle$ y $|L\rangle$. Para este fin, escribimos $|L\rangle$ en la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ de la siguiente manera

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta} |H\rangle + e^{i\phi} |V\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \left(|H\rangle + e^{i(\phi-\theta)} |V\rangle \right)$$

Escrito $|L\rangle$ así, el coeficiente $e^{i\theta}$ ha pasado a ser una fase global del estado, por lo que podemos asignarle cualquier valor a θ , que por simplicidad escogeremos como $\theta = 0$, obteniendo

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|H\rangle + e^{i\phi} |V\rangle \right) \quad (3.15)$$

Utilizando la expresión en la base horizontal-vertical para $|D\rangle$ tenemos

$$|\langle L|D\rangle|^2 = \frac{1}{4} |(\langle H| + e^{i\phi} \langle V|)(|H\rangle + |V\rangle)|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos \phi)$$

y ya que $|\langle L|D\rangle|^2 = 1/2$, se sigue que $\phi = \pm\pi/2$. Ahora bien, del hecho de que $\langle R|L\rangle = 0$ se puede mostrar que, si escribimos $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|H\rangle + e^{i\phi'} |V\rangle \right)$, se cumplirá $\phi' - \phi = \pi$. Por lo tanto, escogiendo $\phi = \pi/2$, se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle) \\ |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Es interesante también analizar los estados puros descritos por la ecuación (3.8), mediante el uso de la matriz de densidad ρ . En este caso, ρ es una matriz Hermitiana, de 2 x 2, con traza igual a 1 [25] :

$$\rho = |P\rangle \langle P| = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (u_1^* \quad u_2^*) = \begin{pmatrix} |u_1|^2 & u_1 u_2^* \\ u_2 u_1^* & |u_2|^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

de donde se sigue que para los estados $|P\rangle$

$$\det(\rho) = |u_1|^2|u_2|^2 - |u_1|^2|u_2|^2 = 0 \quad (3.18)$$

Una manera muy conveniente de trabajar con la matriz de densidad en este caso, es utilizando los parámetros de Stokes, que para el estado de la ecuación (3.8) se definen como [25]

$$\begin{aligned} s_0 &= u_1^*u_1 + u_2^*u_2 = 1 \\ s_1 &= u_1^*u_2 + u_2^*u_1 \\ s_2 &= i(u_2^*u_1 - u_1^*u_2) \\ s_3 &= u_1^*u_1 - u_2^*u_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

obteniendo que

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & s_0 - s_3 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

donde notamos que $\det(\rho) = \frac{1}{4}(s_0^2 - \mathbf{s}^2)$, lo cual implica, por la ecuación (3.18), que $\mathbf{s}^2 = s_0^2 = 1$. Por lo tanto, tenemos el resultado de que para los estados puros, $\mathbf{s}^2 = 1$.

3.4. Espín del fotón

En esta última sección es conveniente analizar la relación entre los estados cuánticos de polarización circular, y el momento angular intrínseco, o *espín*, del fotón.

El tratamiento cuántico del momento angular de un haz polarizado circularmente se encuentra ya en los trabajos de R.A. Beth [28], en donde se encontró que se obtenían los mismos resultados cuantitativos, utilizando tanto la teoría clásica del electromagnetismo, como la asignación de un momento angular, igual a \hbar ($-\hbar$), a los fotones con polarización circular izquierda (derecha). Para ver esto de una manera sencilla, imaginamos que un haz de luz circular incide sobre algún material, y teniendo como resultado, que los electrones presentes, comenzarán a tener un movimiento circular, con una frecuencia ω igual a la frecuencia de la onda, obteniendo así una energía E_0 del campo eléctrico incidente [19], es decir, tendrá lugar una transferencia de momento angular del haz hacia los electrones. Esto quiere decir que se ejercerá una torca Γ sobre los electrones, que estará relacionada con la potencia $P = \frac{dE_0}{dt}$ como

$$P = \frac{dE_0}{dt} = \omega\Gamma = \omega \frac{dL}{dt}$$

de donde se sigue que $E_0 = \omega L$. Por otra parte, sabemos que la energía de cada fotón está dada por $E = \omega \hbar$, entonces tendremos que se transferirá un momento angular a los electrones igual a \hbar . Lo cual nos lleva a pensar que el momento angular intrínseco de los fotones es $\pm \hbar$.

Otra manera de ver que estos son los valores para el momento angular del fotón es utilizando el operador de rotación \hat{R}_θ , el cual cambia la dirección de polarización de un estado $\hat{R}_\theta |P_\phi\rangle \rightarrow |P_{\phi+\theta}\rangle$. Aquí suponemos, claro está, que la propagación se da en la dirección z y que el ángulo de polarización se toma con respecto a la dirección x (ver figura 3.3). Este operador, en la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, puede escribirse como [2]

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

y vemos que al actuar sobre un estado de polarización circular izquierda, de acuerdo a la ecuación (3.16), se tiene que

$$\hat{R}_\theta |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta - i \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta + i \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ ie^{-i\theta} \end{pmatrix} = e^{-i\theta} |L\rangle$$

es decir que $|L\rangle$ es un eigenestado de \hat{R}_θ con eigenvalor $e^{i\theta}$. De igual manera, $|R\rangle$ es un eigenestado de \hat{R}_θ , pero con eigenvalor $e^{i\theta}$.

Ahora utilizaremos una expresión distinta para el operador de rotación, según la cual se tiene que $\hat{R}_\theta = e^{-i\theta \hat{J}_z / \hbar}$, donde \hat{J}_z es el operador de momento angular total en la dirección z [26, 2], y así obtenemos que

$$\hat{R}_\theta |L\rangle = e^{-i\theta \hat{J}_z / \hbar} |L\rangle = e^{-i\theta} |L\rangle \quad (3.22)$$

pero para que se cumpla esta última expresión es necesario que

$$\hat{J}_z |L\rangle = \hbar |L\rangle \quad (3.23)$$

En otras palabras, hemos visto que $|L\rangle$ es un eigenestado de \hat{J}_z , con eigenvalor igual a \hbar , tal y como esperábamos. También se puede obtener fácilmente por este mismo método que el estado $|R\rangle$ es un eigenestado de \hat{R}_θ , pero con eigenvalor $-\hbar$.

En general un fotón puede tener tanto momento angular orbital como intrínseco o de espín, sin embargo, comúnmente sólo tendrá momento angular de espín, por lo cual $\hat{J}_z = \hat{S}_z$ [2, 29]. Esto quiere decir que los estados de polarización circular son eigenestados del operador de espín \hat{S}_z , con eigenvalores $\pm \hbar (m_s = \pm 1)$, lo cual también nos lleva a notar que los fotones tienen espín $s = 1$ [26, 27, 2].

Capítulo 4

Experimentación

En este capítulo se dará una exposición del experimento que se llevó a cabo para el presente proyecto. El objetivo principal es la corroboración del principio probabilístico de descomposición espectral en el caso de fotones polarizados linealmente. Los detalles del experimento se darán a continuación así como la teoría adicional necesaria para la comprensión cabal del mismo.

4.1. SPDC

En las secciones anteriores ya hemos desarrollado básicamente toda la maquinaria requerida para la comprensión del experimento aquí realizado. Sin embargo, para un conocimiento completo de los fenómenos presentes en la experimentación, han de faltar dos piezas claves, a saber: el funcionamiento de las llamadas láminas de media onda, con la cuales el lector probablemente ya se encuentra familiarizado, y el fenómeno conocido como conversión paramétrica espontánea, o por sus siglas en inglés: SPDC (*Spontaneous Parametric Downconversion*).

La SPDC se refiere a la creación de un par de fotones a partir de solamente uno de ellos, lo cual se logra a través de algún mecanismo óptico no lineal, como por ejemplo los que se presentan en cristales con propiedades justamente no lineales. La característica clave de esta generación de dos fotones nuevos es la frecuencia de cada uno de éstos, ya que la frecuencia no puede afectarse mediante procesos ópticos lineales [2]. El proceso de la SPDC comienza con un fotón, llamado fotón fuente, con una frecuencia angular ω_f , el cual se altera, por ejemplo, haciéndole incidir sobre un cristal ópticamente no lineal, y dando como resultado la emisión de dos nuevos fotones, que a partir de ahora llamaremos *señal* y *testigo*. Estos dos nuevos fotones se crean

de manera simultánea [30, 34]. La figura 4.1 muestra esquemáticamente el proceso.

Utilizando los estados de Fock y los operadores de creación y aniquilación, discutidos previamente, podemos representar la SPDC de un fotón fuente de la siguiente forma [3]

$$|1\rangle_f |0\rangle_s |0\rangle_t \rightarrow \hat{a}_f \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_t^\dagger |1\rangle_f |0\rangle_s |0\rangle_t = |0\rangle_f |1\rangle_s |1\rangle_t \quad (4.1)$$

donde los subíndices f , s y t se refieren a los fotones fuente, señal y testigo respectivamente .

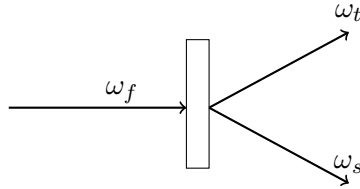


Figura 4.1 La creación de los fotones señal y testigo.

Claro está que este proceso deberá de estar restringido de alguna forma puesto que la energía de los fotones está determinada por su frecuencia, y así es fácil adivinar una primera restricción para los fotones involucrados en la SPDC, a saber [31, 32]

$$\begin{aligned} \hbar\omega_f &= \hbar\omega_s + \hbar\omega_t \\ \omega_f &= \omega_s + \omega_t \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde ω_s y ω_t son las frecuencias de los fotones señal y testigo respectivamente. Esto se muestra a continuación mediante uno de los llamados *diagramas de energía*. En estos diagramas la línea horizontal ininterrumpida representa un nivel atómico basal, mientras que las líneas punteadas representan los llamados niveles virtuales de energía, los cuales no son eigenestados atómicos de energía, sino que representan una combinación energética de estos estados y de los fotones del campo incidente [33].

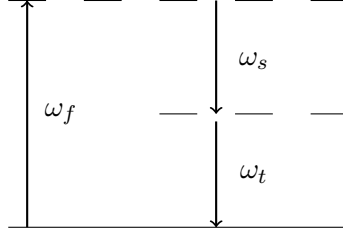


Figura 4.2 Diagrama de energía para la SPDC.

Por otra parte, el momento (dado como $\vec{p} = \hbar\vec{k}$) también deberá de conservarse, por lo que como segunda restricción tendremos que los vectores de onda deberán cumplir

$$\begin{aligned}\hbar\vec{k}_f &= \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_t \\ \vec{k}_f &= \vec{k}_s + \vec{k}_t\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde recordamos que la relación entre el vector de onda e índice de refracción del medio no lineal, por ejemplo para el fotón fuente, está dada por $k_f = n_f\omega_f/c$, y de igual manera para los fotones señal y testigo.

Existen dos tipos de SPDC, llamadas simplemente tipo 1 y tipo 2, pero aquí solamente analizaremos la de tipo 1 ya que fue la utilizada durante la experimentación. En el tipo 1 de SPDC la dirección de polarización de los fotones señal y testigo es la misma y ésta depende de la orientación del cristal en donde éstos se generan, además, cuando se tiene una eficiencia máxima (con respecto a la potencia del haz incidente sobre el cristal y la emitida subsecuentemente), la polarización de éstos será perpendicular a la de los fotones fuente. Notemos que dada la forma de las restricciones (4.2) y (4.3), las frecuencias y los vectores de onda de la señal y el testigo no están restringidas de manera individual, sino sólo su suma; esto quiere decir que los ángulos de salida de los fotones señal y testigo pueden variar, al igual que su longitud de onda, aunque la variación es en realidad pequeña y podemos suponer que los fotones son emitidos en un cono de luz [2, 34]. El tipo 2 de SPDC se distingue del tipo 1 ya que los fotones señal y testigo presentan una polarización ortogonal en el tipo 2 [35].

Las características ópticamente no lineales de este tipo de materiales son un reflejo de cómo reaccionan éstos a la polarización eléctrica suscitada por el campo incidente, lo cual podemos expresar aseverando que la polarización, o el momento dipolar por unidad de volumen $P(t)$ dentro del material, depende de la intensidad del campo incidente $E(t)$ de la siguiente forma [33]

$$P(t) = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) \dots \right) \quad (4.4)$$

El término $\chi^{(1)}$ es el llamado factor de susceptibilidad lineal, y es el único término presente en los medios ópticamente lineales; el resto de los factores $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$..., son los factores de susceptibilidad no lineal de segundo orden, tercer orden, etc. Aquí por simplicidad hemos considerado solamente como escalares a $P(t)$ y al campo eléctrico, pero cuando se toma en cuenta su naturaleza vectorial, en la ecuación (4.4) se deberá tomar a $\chi^{(1)}$ como un tensor de segundo rango, a $\chi^{(2)}$ como uno de tercer rango, etc. [33]. En el caso de la SPDC, el término de susceptibilidad que caracteriza a este fenómeno en los medios no lineales es el de segundo orden $\chi^{(2)}$ [36].

Ahora describiremos el funcionamiento del otro elemento experimental mencionado al comienzo de este capítulo, a saber, las llamadas *láminas de media onda*, así como el efecto que éstas tienen sobre los estados de polarización de la luz. Las láminas de media onda son en realidad miembros particulares de una familia más amplia de instrumentos ópticos llamados *retardadores*, los cuales por lo general son cristales con cierta geometría intrínseca que les permiten cambiar el estado de polarización de alguna onda incidente sobre ellos, como por ejemplo, son capaces de modificar el estado de polarización elíptico para obtener uno de tipo circular, o uno lineal a uno elíptico, etcétera. El funcionamiento básico de los retardadores consiste en introducir un cambio relativo de fase entre las ondas constituyentes de la onda original, haciendo que el tipo de polarización de la onda final emitida sea distinto.

Supongamos que tenemos una onda incidente sobre un retardador, lo que tendrá lugar dentro de éste es la bifurcación o separación de esta primera onda en dos ondas secundarias [19], llamadas ondas ordinaria y extraordinaria, o simplemente onda-*o* y onda-*e*; estas dos ondas nuevas se verán afectadas por distintos índices de refracción dentro del material: n_e y n_o . Esto ocasionará un desfase entre ellas puesto que se propagarán a distintas velocidades dentro del material, de tal forma que la onda final emitida a través del retardador, conformada por la superposición de estas ondas secundarias, tendrá una polarización distinta. La diferencia de fase $\Delta\varphi$ será [19]

$$\Delta\varphi = \frac{d2\pi}{\lambda_0} (|n_o - n_e|) \quad (4.5)$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío, y d es la distancia que recorre la onda dentro del material, i.e. su grosor.

En nuestro caso particular, es decir, la lámina de media onda, la diferencia de fase entre las ondas secundarias es simplemente $\Delta\varphi = \pi$. Supongamos entonces que una onda monocromática linealmente polarizada incide sobre una lámina de media onda, y que el plano de vibración de la onda forma un ángulo θ con respecto al llamado *eje rápido*¹ de la lámina. Entonces la dirección de polarización se verá rotada por un ángulo de 2θ ; esto se muestra esquemáticamente en la figura 4.3. Entonces el efecto neto de la lámina de media onda es simplemente rotar la dirección de polarización, pero manteniendo el estado de polarización lineal de nuestra onda incidente.

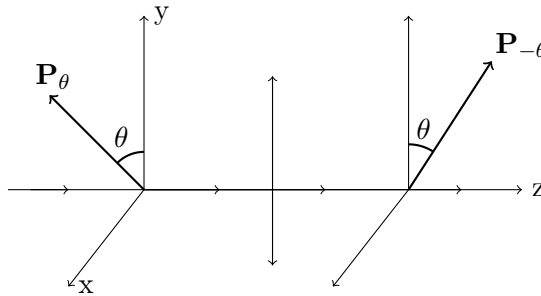


Figura 4.3. Lámina de media onda (con eje rápido paralelo a la dirección OY).

4.2. Procedimiento experimental

Describiremos ahora el experimento llevado a cabo. Ya que los objetivos del presente proyecto son concernientes a ciertas características cuánticas de fotones, era necesario poder echar mano, por así decirlo, de fotones de manera individual; para lograr esto se escogió la técnica de fotoconteo por coincidencias (el cual se explica adelante), obteniendo los pares de fotones gracias a un cristal de borato de bario, el cual cuenta con las propiedades ópticas no lineales necesarias para llevar a cabo una SPDC, produciendo así los pares de fotones requeridos. Como fuente inicial de fotones se utilizó un láser con una longitud de onda de 405 nm; éste se dirigió hacia el cristal de borato de bario, y así subsecuentemente se emitían dos nuevos haces correspondientes a los fotones testigo y señal. Cada uno tiene el doble de longitud de onda y la mitad de energía, de tal manera que estos dos haces

¹El eje rápido se define como la dirección del eje óptico en un retardador uniaxial negativo [19], pero en nuestro caso sólo será necesario tratarlo en tanto a su efecto sobre la onda incidente se refiere.

nuevos formaban un ángulo de 5° entre ellos. El dispositivo básico consistía de los materiales mencionados arriba, además de dos monturas que servían para recolectar a los fotones señal y testigo, las cuales contaban con un filtro de onda de 810 nm para minimizar la entrada de fotones no deseados². Las monturas estaban comunicadas por medio de fibra óptica con un par de fotodiodos que a su vez se comunicaban con una tarjeta contadora, en donde se recolectaba entonces la información del número de fotones incidentes sobre las monturas. En la figura 4.4 se muestra esquemáticamente el dispositivo.

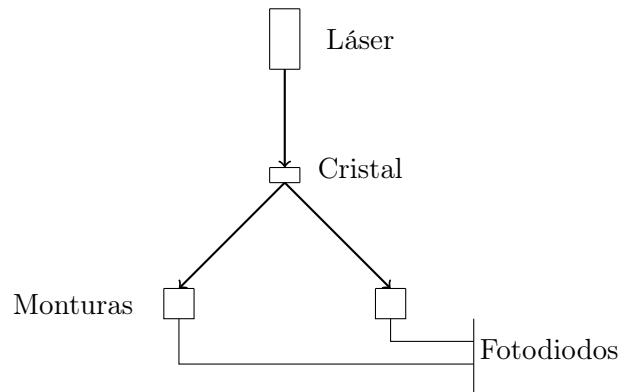


Figura 4.4. Dispositivo básico.

El método de conteo que se utilizó, como se dijo arriba, fue el llamado método por coincidencias. Éste consiste en considerar como un fotoconteo el registro simultáneo de un fotón señal y uno testigo, aunque en la práctica se establece un intervalo de tolerancia para considerar dicho evento como simultáneo y que en nuestro caso fue de 30 nanosegundos, esto es, si dentro de dicho intervalo de tiempo, tanto un fotón señal como uno testigo eran registrados, entonces se tenía un fotoconteo. Este método se empleó principalmente para poder aislar a los fotones deseados, i.e. los fotones señal, del resto de la 'luz de fondo' que pudiera accidentalmente detectarse en vez de ellos, aunque claro está, también se tomaron otras medidas para prevenir dicha detección no deseada. Un ejemplo es el filtro de onda de 810 nm y el haber trabajado solamente con pequeñas bombillas de color azul tipo 'navideñas' sobre la mesa, cuya longitud de onda está bastante por debajo de los 810 nm.

Al dispositivo básico mencionado arriba se le agregó un analizador lineal, interpuesto entre los fotones señal emitidos por el cristal y la montura correspondiente, y se buscó su alineación tal que el conteo fuera máximo, i.e. se

²El del filtro de onda lo que hace es simplemente no permitir el paso de las longitudes de onda que están por debajo de cierto umbral, en este caso 810 nm.

alineó con la dirección de polarización de los fotones señal. Habiendo hecho esto se recopilaron los datos para 500 conteos llevados a cabo durante un intervalo de 1 segundo cada uno.

El siguiente paso en la experimentación fue colocar una lámina de media onda entre el analizador y la montura de los fotones señal, como se muestra en la figura 4.5. El eje del analizador permaneció alineado con el de los fotones señal, pero gracias a la presencia de la lámina de media onda, su dirección ahora podía ser rotada, pues para ello simplemente se debía rotar el eje rápido de la lámina de media onda. Esto quiere decir que la dirección de polarización de los fotones señal a su llegada al analizador era ahora ajustable. Lo que se hizo a continuación fue tomar una serie de datos correspondientes a diferentes ángulos del eje rápido de la lámina de media onda, i.e. de la dirección de polarización de los fotones señal. El eje rápido de la lámina se fue rotando en pasos de 2° , lo cual equivalía a rotar los fotones por 4° y para cada uno de estos ángulos se hicieron cinco tomas de datos, igualmente por un intervalo de 1 cada uno. Posteriormente se repitió de forma idéntica el procedimiento descrito arriba pero ahora con el analizador alineado perpendicularmente a la dirección de polarización de los fotones señal, es decir, en la dirección ortogonal a la que se utilizó previamente.

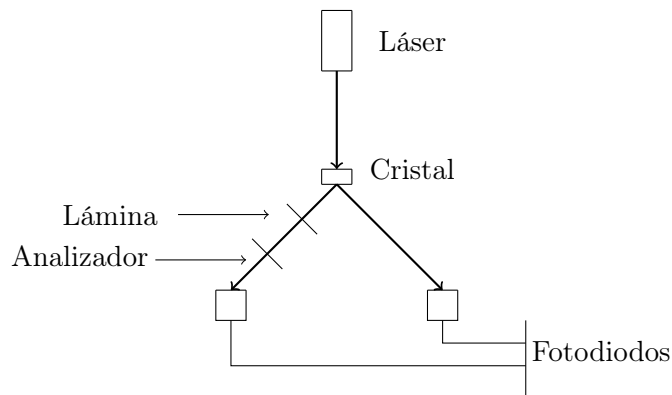


Figura 4.5. Dispositivo con lámina de media onda y analizador.

A continuación se muestra una imagen del dispositivo experimental utilizado. En la parte inferior se puede apreciar el láser que se encuentra alineado con el cristal (de tamaño más bien pequeño en la imagen), y más adelante podemos ver los dos recolectores para los fotones señal y testigo, con el analizador lineal por delante del recolector del fotón señal. También se pueden notar las bombillas azules utilizadas durante la experimentación, mencionadas anteriormente.

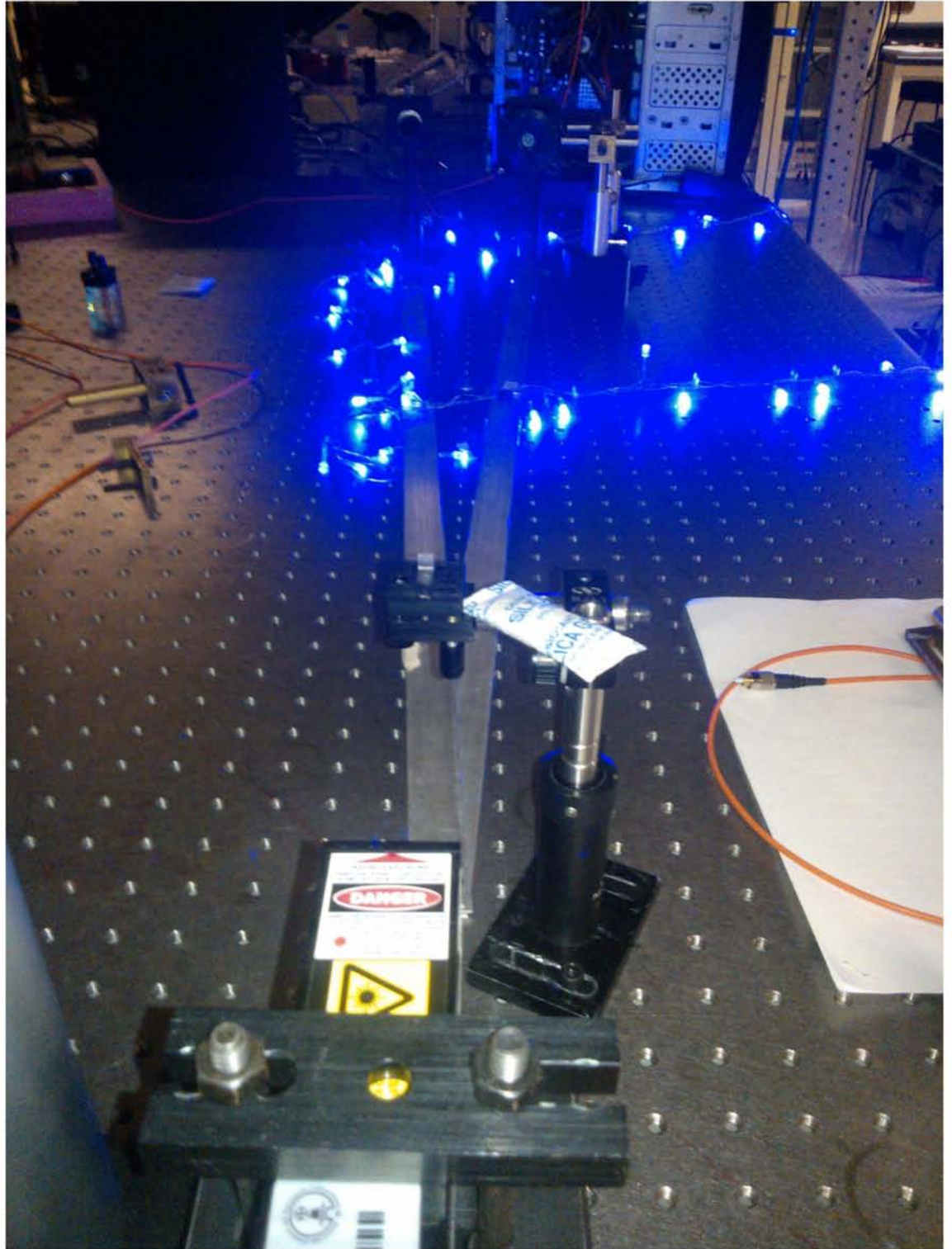


Figura 4.6. Arreglo experimental.

Capítulo 5

Conclusiones y resultados

En este último capítulo presentaremos los resultados obtenidos en el experimento llevado a cabo para el presente proyecto (el cual fue delineado en el capítulo anterior) y derivaremos a su vez las posibles y pertinentes conclusiones que se puedan extraer de los mismos.

5.1. Resultados

Para la primera parte de la experimentación, es decir, el fotoconteo llevado a cabo solamente utilizando el analizador alineado con la dirección de polarización de los fotones señal. En promedio, el número de fotones fue de $X_0 = 13346(118)$, esta distribución se muestra en la figura (5.1). A su vez de aquí podemos obtener el tipo de distribución estadística del haz, que es de tipo poissoniana ya que $\Delta n = 118 \approx \sqrt{13346}$.¹

En la figura (5.2) se muestran los conteos en función del ángulo que formaban los fotones tras pasar por la lámina de media onda, obtenidos durante la segunda parte del experimento, esto es, las coincidencias registradas ya utilizando tanto el analizador como la lámina de media onda y con el analizador en la posición horizontal, es decir, alineado con la dirección de los fotones al salir del cristal. A su vez, en la figura (5.3) se muestran los resultados análogos para el analizador colocado en la posición vertical.

Para los datos correspondientes al analizador en la posición horizontal se hizo un ajuste utilizando una función del tipo $A_H \cos^2(\theta + \phi_H)$ donde A_H y ϕ_H fueron parámetros de ajuste, y se obtuvieron los siguientes resultados para éstos:

¹La diferencia es despreciable puesto que $\Delta n/\sqrt{n} = 1.02$

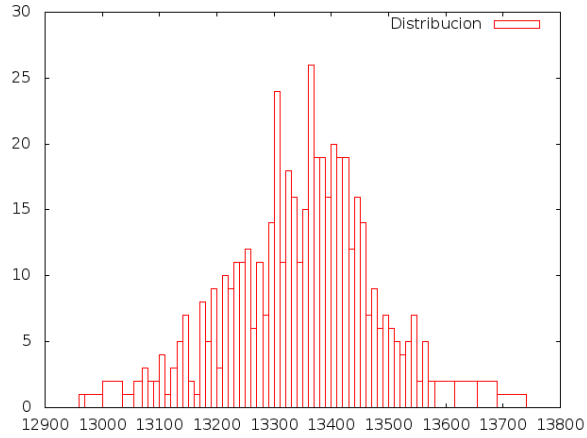


Figura 5.1: Distribución de los fotoconteos.

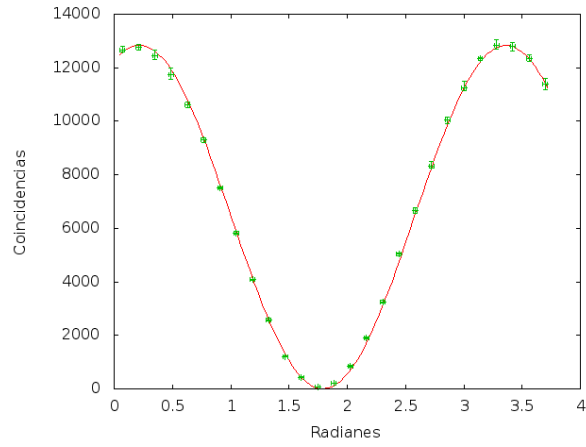


Figura 5.2: Fotoconteos en función del ángulo de rotación con el analizador en la posición horizontal.

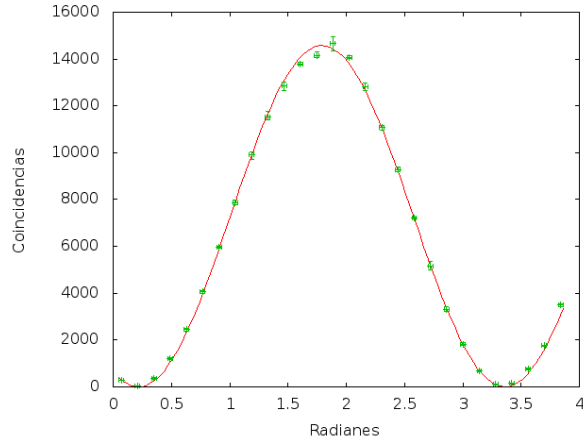


Figura 5.3: Fotoconteos en función del ángulo de rotación con el analizador en la posición vertical.

$$A_H = 12846.7(23.04), \quad \phi_H = -0.208(0.001)$$

De igual manera para los datos con el analizador en la posición vertical se hizo un ajuste con una función del tipo $A_V \sin^2(\theta + \phi_V)$, y se obtuvo

$$A_V = 14570(60), \quad \phi_V = -0.218(0.003)$$

5.2. Análisis y conclusiones

Primero vemos que los resultados sobre el tipo de estadística (i.e. que ésta permaneció poissoniana), significa que la presencia del cristal de borato de bario y la creación de pares de fotones no modificó la estadística del haz inicial (recordamos que los láseres en efecto tienen este mismo tipo de estadística). Más aún, que la estadística sea poissoniana implica que [5], el haz no presenta el fenómeno de ‘amontonamiento’, ni de ‘anti-amontonamiento’², lo cual quiere decir que los fotones del haz están espaciados aleatoriamente entre

²Estos reciben en inglés el nombre de *bunching* y *antibunching* respectivamente, y se definen a través de la llamada función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(\tau)$. En nuestro caso (un haz coherente) se tiene que $g^{(2)}(0) = 1$.

sí. Y esto nos permite concluir que la pérdida de información en nuestro conteo de coincidencias que podría deberse a la detección de dos (o más) fotones como solamente uno (debido a su posible proximidad), es un evento improbable o despreciablemente ocurrente.

Por otra parte, con respecto al resto de los resultados lo primero que analizamos es algo que salta de inmediato a la vista, y es que las gráficas mostradas en las figuras (5.2) y (5.3) se encuentran ligeramente recorridas a la derecha (esto es, con respecto a las funciones $\sin^2 \theta$ y $\cos^2 \theta$), como también ponen en evidencia los desfases relativos ϕ_H y ϕ_V . Esto es muy fácil de explicar pues muy probablemente se deba simplemente a un ligero problema de alineación entre el analizador, la lámina de media onda y/o el cristal mismo. Sin embargo, ya que se trata de un error sistemático, en realidad no presenta un gran obstáculo para las conclusiones que mostraremos a continuación.

Para analizar los resultados obtenidos, primero recordamos que la forma general del estado de polarización de un fotón en la base horizontal-vertical es la siguiente

$$|\Phi\rangle = c_H |H\rangle + c_V |V\rangle \quad (5.1)$$

donde en general los coeficientes c_H y c_V son complejos. De esta última expresión se sigue que las amplitudes de probabilidad de encontrar al fotón en los estados horizontal y vertical, respectivamente, están dadas por

$$\begin{aligned} |\langle H|\Phi\rangle|^2 &= |c_H|^2 \\ |\langle V|\Phi\rangle|^2 &= |c_V|^2 \end{aligned}$$

Así, al recurrir a los resultados obtenidos experimentalmente, podemos concluir que la amplitud de probabilidad del estado $|H\rangle$, i.e. $|c_H|^2$ para los fotones utilizados en el experimento, está dada por

$$|c_H|^2 = \cos^2(\theta + \phi_H) \quad (5.2)$$

donde $\phi_H = -0.208(0.001)$. Y de igual forma para la amplitud correspondiente al estado $|V\rangle$ se tiene

$$|c_V|^2 = \sin^2(\theta + \phi_V) \quad (5.3)$$

donde $\phi_V = -0.218(0.003)$.

Para cerciorarnos más aún de que las funciones obtenidas efectivamente conforman las amplitudes de probabilidad mencionadas, veamos simplemente que cumplen

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = |c_H|^2 + |c_V|^2 = 1$$

donde hemos considerado que $\phi_H = \phi_V$ ya que su diferencia es en verdad despreciable.

Con estos resultados en mano pensaríamos que somos capaces de reconstruir el estado cuántico de los fotones inmediatamente después de salir del cristal de borato de bario; sin embargo esto sería un error, lo cual se pone en evidencia reescribiendo los coeficientes complejos c_H y c_V del estado general (5.1) así:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= c_H |H\rangle + c_V |V\rangle \\ &= |c_H| e^{i\varphi_H} |H\rangle + |c_V| e^{i\varphi_V} |V\rangle \\ &= e^{i\varphi_H} \left(|c_H| |H\rangle + |c_V| e^{i(\varphi_V - \varphi_H)} |V\rangle \right) \end{aligned}$$

entonces, ya que la fase global para un sistema cuántico (en este caso $e^{i\varphi_H}$) puede escogerse de manera arbitraria, tomamos el valor $\varphi_H = 0$ y renombramos $\varphi_V = \phi$, obteniendo

$$|\Phi\rangle = |c_H| |H\rangle + e^{i\phi} |c_V| |V\rangle \quad (5.4)$$

se observa así que a pesar de haber encontrado el módulo de las constantes complejas c_H y c_V , sigue existiendo una fase relativa desconocida que nos impide reconstruir *por completo* el estado $|\Phi\rangle$ de los fotones. Es decir que hemos sido capaces de reconstruir el estado cuántico de los fotones, a excepción de dicha fase relativa, pudiendo así concluir que dicho estado cuántico tiene la siguiente forma

$$|\Phi\rangle = \cos(\theta + \phi_H) |H\rangle + e^{i\phi} \text{sen}(\theta + \phi_V) |V\rangle \quad (5.5)$$

Por otra parte, dadas las formas de las funciones de ajuste $A_H \cos^2(\theta + \phi_H)$ y $A_V \text{sen}^2(\theta + \phi_V)$ vemos una clara consonancia entre éstas y la vieja fórmula para la intensidad I de un haz de luz al atravesar un polarizador según la ley de Malus: $I = I_0 \cos^2 \theta$, donde I_0 es la intensidad antes de atravesar el polarizador y θ es el ángulo que forma la dirección de polarización del haz incidente con respecto al eje de transmisión del polarizador.

Sobre la relación entre las funciones de ajuste y la ley de Malus valen la pena mencionar y analizarse dos cosas.

La primera es que no obstante el hecho de estar trabajando, por un lado, desde el marco de la mecánica cuántica (utilizando vectores, sí, pero como

representantes de un estado cuántico) y por el otro lado, desde la mecánica clásica (de nuevo con cantidades vectoriales), el núcleo de ambas partes permanece intacto, a saber, que la cantidad de interés en cada caso (la intensidad I y el número de fotones) está siendo modulada por la proyección del estado (cuántico o clásico) del haz incidente hacia el estado (de nuevo, cuántico o clásico, es indistinto) en el cual la cantidad de interés no se ve afectada una vez que la luz ha atravesado al analizador. En el caso clásico este estado es aquel cuya polarización es paralela al eje de transmisión del analizador y en el caso cuántico, es el estado (cuántico) de polarización representado por $|H\rangle$ (o por $|V\rangle$ dependiendo de la orientación del analizador).

La segunda es que a pesar de la evidente semejanza entre ambas, también es clara la muy significativa discrepancia en cuanto que por un lado se está tratando con una variable clásica, a saber, la intensidad del haz luminoso, y por el otro lado se está considerando su naturaleza granular al cuantificar el número de fotones que logran atravesar al analizador.

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad \rightarrow \quad N = N_0 \cos^2 \theta \quad (5.6)$$

Estas diferencias y semejanzas nos permiten concluir el hecho de que la ley de Malus, en el contexto clásico, tiene efectivamente una contraparte en la teoría cuántica, i.e. granular de la luz, siempre y cuando consideremos [37], al número de fotones como el análogo cuántico de la intensidad de la luz.

Apéndice A

Fotocontadores

En el experimento realizado aquí, se utilizó un fotocontador SPCM-AQ4C, fabricado por Excelitas Technologies. Este fotocontador es capaz de detectar fotones individuales cuya frecuencia se encuentre en el intervalo de 400 nm a 1060 nm y presenta un tiempo muerto de 50 ns.

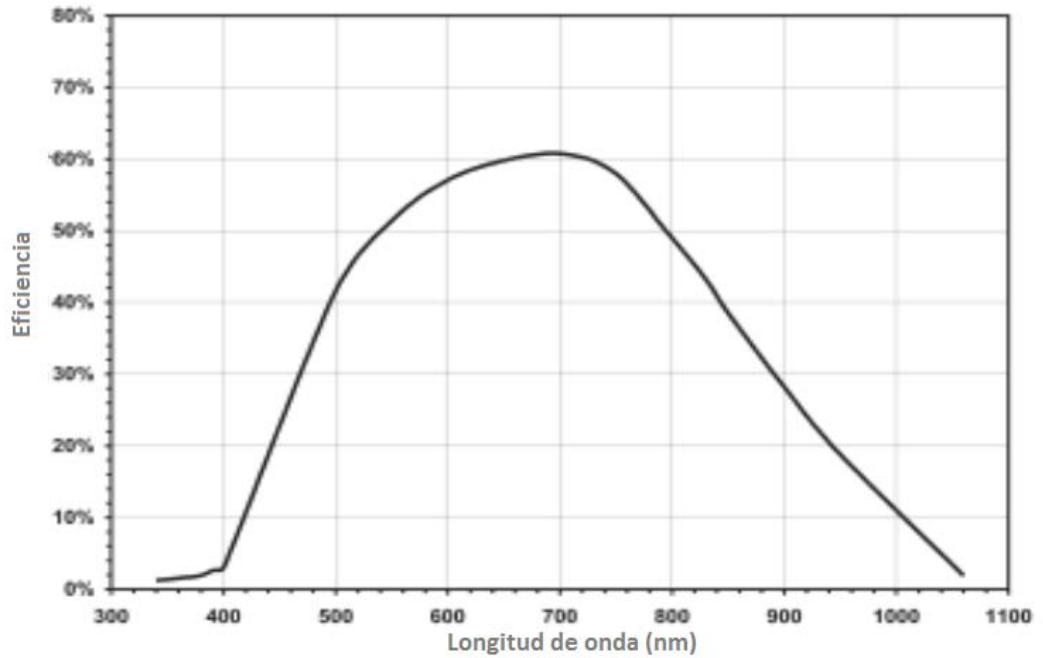
La eficiencia de dicho fotodetector se muestra a continuación para algunas frecuencias (estas eficiencias corresponden a una temperatura ambiente de 22°C)

| Eficiencia para una frecuencia de | Mínima | Típica |
|-----------------------------------|--------|--------|
| 400 nm | 0.01 | 0.025 |
| 650 nm | 0.45 | 0.6 |
| 830 nm | 0.35 | 0.45 |
| 1060 nm | 0.1 | 0.015 |

De inmediato interés para nosotros obviamente es la eficiencia en la frecuencia de los fotones al salir del cristal BBO, es decir a 810 nm, cuya correspondiente eficiencia en el fotocontador ronda el 35 %.

A continuación se muestra una gráfica igualmente de la eficiencia en función de la frecuencia de los fotones incidentes.¹

¹Los datos mencionados arriba sobre el fotodetector así como la gráfica que se muestra a continuación, se encuentran en el manual para el fotocontador, disponible en www.excelitas.com



Otro hecho que vale la pena mencionar sobre nuestro fotodetector es que puede caracterizarse como un fotodetector cuántico y no uno clásico. Los fotodetectores clásicos difieren de los cuánticos en la manera en que recopilan y analizan la información que les es accesible gracias a los fotones que inciden sobre ellos. Los fotodetectores clásicos lo que hacen es llevar a cabo un promedio del total de señales que se disparan por los fotones incidentes, mientras que los fotodetectores cuánticos pueden efectivamente llevar a cabo un conteo uno a uno de los fotones; aunque también debemos recalcar aquí que nuestro fotodetector sólo puede considerarse cuántico en el sentido aquí mencionado, cuando los fotones que inciden sobre él lo hacen de manera individual, pues de arribar más de un fotón simultáneamente al fotodetector, entonces esto será detectado como un solo fotón y no dos.

Bibliografía

- [1] D.J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Addison Wesley, 3ra ed. (1999), pp.375, 421.
- [2] M. Beck. *Quantum Mechanics: Theory and Experiment*. Oxford University Press (2012), pp.66-67, 56-57, 137-138, 383-392, 435-438.
- [3] C. Gerry, P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press (2005), pp.10-25, 214-216.
- [4] M.O. Scully, M.S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press (1997), pp.1-13.
- [5] M. Fox. *Quantum Optics*. Oxford University Press (2006), pp. 75-103,115,116,126-135, 155-156.
- [6] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 3ra ed. (1999), pp.241-242.
- [7] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 3ra ed. (2000), pp.126-144, 271-278.
- [8] W.P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH (2001), pp.256-272.
- [9] R.R. Puri. *Mathematical Methods of Quantum Optics*. Springer (2001), pp.119-120.
- [10] J.W. Goodman. *Statistical Optics*. John Wiley and Sons (1985), pp. 465-474.
- [11] S.M. Barnett, P.M. Radmore. *Methods in Theoretical Quantum Optics*. Oxford Science Publications (1997), p. 57.

- [12] L. Mandel, E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press (1995), pp. 450, 522.
- [13] P. Meystre, M. Sargent III. *Elements of Quantum Optics*. Springer 4ta ed. (2007), pp. 309-310.
- [14] U. Leonhardt. *Essential Quantum Optics*. Cambridge University Press (2010), pp. 48, 52.
- [15] J. Riordan. *An Introduction to Combinatorial Analysis*. John Wiley and Sons 4ta ed. (1967), p. 30.
- [16] P.L. Kelley, W.H. Kleiner, "Theory of electromagnetic field measurement and photoelectron counting," *Phys. Rev. A*, **136**, 316-34 (1964).
- [17] I.B. Birula, Z.B. Birula. *Quantum Electrodynamics*. Pergamon Press (1975), p.12.
- [18] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 2da ed. (2005), p.130.
- [19] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 4ta ed. (2002), pp. 325-333, 353.
- [20] F.A. Jenkins, H.E. White. *Foundamentals of Optics*. McGraw-Hill, 4ta ed. (2001), p.504.
- [21] M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon, 6ta ed. (1986), p.716.
- [22] P.A.M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 4ta ed. (1967), pp. 4-7.
- [23] Hans-A. Bachor, T.C. Ralph. *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. Wiley VCH, 2da ed. (2004), p.46-51.
- [24] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë. *Quantum Mechanics*. Wiley and Sons, pp.15-17.
- [25] J.R. Klauder, E.C.G. Sudarshan. *Fundamentals of Quantum Optics*. W.A. Benjamin (1968), pp. 71-73.
- [26] J.J. Sakurai, J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, 2da ed. (2011), pp.475-476.
- [27] J.J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. Benjamin Cummings (1967), p.31.

- [28] R.A. Beth, Phys. Rev. **50**, 115(1936)
- [29] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman, Phys. Rev. A **45** (1992) 8185.
- [30] D. C. Burnham, D. L. Weinberg, Phys. Rev. Lett., **25** (1970), 84.
- [31] Y.R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. John Wiley and Sons (1984), pp.134-135.
- [32] P. Hariharan, B. C. Sanders, “Quantum phenomena in optical interferometry,” Prog. Opt. **36**, 60, 1996.
- [33] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 3ra. ed. (2008), pp. 1,2,6.
- [34] D. Dehlinger, M. W. Mitchell, “Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory,” Am. J. Phys. **70**, 903 (2002).
- [35] Feng-Kuo Hsu, Chih-Wei Lai, “Absolute instrument spectral response measurements using angle-resolved parametric fluorescence,” Optics Express, Vol. 21, número 15, pp. 18538-18552 (2013)
- [36] D.N. Klyshko. *Photons and Nonlinear Optics*. Gordon and Breach Science Publishers (1988), pp. 2-3.
- [37] Arthur Beiser. *Concepts of Modern Physics*. McGraw-Hill, 6ta. ed. (2003), p.64.