



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – ANÁLISIS Y DISEÑO DE CIMENTACIONES

ANÁLISIS ESTOCÁSTICO DE ESTRUCTURAS TÉRREAS. ENFOQUE  
ESPECTRAL

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTORA EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ALMA ROSA PINEDA CONTRERAS

TUTOR PRINCIPAL  
GABRIEL AUVINET GUICHARD, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

COMITÉ TUTOR  
EFRAÍN OVANDO SHELLEY, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM  
RAÚL FLORES BERRONES, INST. MEXICANO DE TEC. DEL AGUA  
JUAN MANUEL MAYORAL VILLA, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM  
NORMA PATRICIA LÓPEZ ACOSTA, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D. F., AGOSTO DE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. EFRAÍN OVANDO SHELLEY

Secretario: DR. RAÚL FLORES BERRONES

Vocal: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

1<sup>er</sup>. Suplente: DR. JUAN MANUEL MAYORAL VILLA

2<sup>do</sup>. Suplente: DRA. NORMA PATRICIA LÓPEZ ACOSTA

Lugar donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

---

**FIRMA**



*Con amor,*

*a mi mamá y mis hermanos*



## **Agradecimientos**

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Ingeniería por permitirme ser parte de un mundo en constante movimiento, en donde se forjan grandes profesionistas y grandes seres humanos.

Al Dr. Gabriel Auvinet Guichard, mi más sincero agradecimiento, por darme esta oportunidad que tal vez nunca hubiera tenido. Gracias a su espíritu científico, fue posible navegar en un espacio diminuto del inmenso mundo de la ciencia.

A los doctores: Efraín Ovando, Raúl Flores, Rigoberto Rivera, Juan Manuel Mayoral y Norma Patricia López; por su disposición para ser parte de mi comité tutor y por sus comentarios emitidos durante la realización de este trabajo.

A todos los que he conocido en la Torre de Ingeniería, con quienes han surgido agradables compañías y grades amistades.



# ANÁLISIS ESTOCÁSTICO DE ESTRUCTURAS TÉRREAS. ENFOQUE ESPECTRAL

## ÍNDICE

	Pág.
RESUMEN .....	V
NOMENCLATURA.....	VII
LISTA DE FIGURAS.....	XIII
LISTA DE TABLAS .....	XXI
<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>2. ANÁLISIS DETERMINISTAS DE ESTRUCTURAS TÉRREAS CON EL MEF.....</b>	<b>3</b>
<b>2.1. Introducción.....</b>	<b>3</b>
<b>2.2. Antecedentes.....</b>	<b>4</b>
2.2.1. Teoría de elasticidad para suelos isótropos .....	4
2.2.1.1. Determinación de las constantes elásticas de rigidez .....	4
2.2.1.2. Elasticidad plana .....	7
2.2.2. Teoría de elasticidad para suelos anisótropos .....	9
2.2.2.1. Ortotropía .....	10
2.2.2.2. Isotropía transversal.....	10
2.2.2.3. Elasticidad plana para materiales anisótropos transversalmente .....	14
2.2.3. Aspectos importantes de los parámetros de elasticidad .....	14
2.2.3.1. Restricciones en las constantes elásticas.....	14
2.2.3.2. Características anisótropas de los suelos.....	16
2.2.3.3. Determinación de las constantes elásticas anisótropas en el laboratorio.....	18
2.2.3.4. Influencia de la anisotropía en el comportamiento elástico lineal del suelo.....	19
2.2.3.5. Correlación entre E y $\nu$ .....	20
<b>2.3. Comportamiento elástico lineal de estructuras térreas .....</b>	<b>22</b>
2.3.1. Antecedentes.....	22
2.3.1.1. Características físicas de una presa .....	22
2.3.1.2. Agrietamiento en presas de tierra y enrocamiento .....	23
2.3.1.3. Criterios de falla .....	25
2.3.2. Comportamiento in situ de los materiales constitutivos.....	26
2.3.3. Comportamiento cualitativo general .....	26
2.3.4. Influencia de E y $\nu$ en la formación de zonas de tensión.....	27
<b>3. ANÁLISIS ESTOCÁSTICO DE ESTRUCTURAS TÉRREAS CON EL MEFEE .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1 Introducción.....</b>	<b>29</b>
<b>3.2 Incertidumbre en la modelación de presas .....</b>	<b>31</b>
3.2.1 Fuentes de incertidumbre .....	31
3.2.2 Representación de la incertidumbre en geotecnia .....	31

3.2.2.1. Espacio de probabilidad.....	31
3.2.2.2. Variables aleatorias.....	31
3.2.2.3. Campos aleatorios .....	32
<b>3.3 Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) .....</b>	<b>32</b>
3.3.1 Representación de la incertidumbre .....	33
3.3.2 Representación de la respuesta .....	35
3.3.2.1. Expansión <i>caos polinomial</i> .....	35
3.3.2.2. Campo aleatorio de los desplazamientos .....	36
3.3.3 Formulación del MEFEE .....	37
3.3.3.1. Ecuación de equilibrio del Método del Elemento finito.....	38
3.3.3.2. Ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE.....	38
3.3.3.3. Cálculo de incertidumbre sobre los desplazamientos.....	40
<b>3.4 Extensión de la formulación del MEFEE.....</b>	<b>41</b>
3.4.1 Aspectos matemáticos.....	41
3.4.1.1. Expansión en series polinomiales.....	41
3.4.1.2. Representación de variables aleatorias $\xi_j$ mediante polinomios multidimensionales de Hermite .....	42
3.4.1.3. Campo aleatorio de la relación de Poisson $\nu$ .....	43
3.4.1.4. Producto de variables aleatorias expandidas en <i>caos polinomial</i> .....	43
3.4.1.5. Expansión en serie de <i>Karhunen-Loève</i> con expansión en <i>caos polinomial</i> .....	44
3.4.2 Procedimiento general para derivar la ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE para campos aleatorios diferentes de $E$ .....	44
3.4.3 Derivación de las ecuaciones de equilibrio estocásticas: caso isótropo .....	47
3.4.3.1. Matriz de elasticidad .....	47
3.4.3.2. Ecuación de equilibrio estocástica para $E$ aleatorio.....	47
3.4.3.3. Relación de Poisson $\nu$ aleatoria (estado plano de esfuerzo).....	48
3.4.3.4. Módulo de elasticidad $E$ y relación de Poisson $\nu$ (estado plano de esfuerzo) .....	54
3.4.4 Derivación de las ecuaciones de equilibrio estocásticas: caso anisótropo (estado plano de esfuerzo).....	58
3.4.4.1. Matriz de elasticidad para el estado plano de esfuerzo .....	58
3.4.4.2. Módulo de elasticidad vertical $E_v$ aleatorio.....	59
3.4.4.3. Módulo de elasticidad horizontal $E_h$ aleatorio .....	63
3.4.4.4. Módulo de elasticidad vertical $E_v$ y horizontal $E_h$ aleatorios.....	67
3.4.4.5. Relación de Poisson $\nu_{vh}$ aleatoria .....	72
3.4.4.6. Todos los parámetros ( $E_v$ , $E_h$ y $\nu_{vh}$ ) aleatorios .....	75
3.4.5 Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica: caso anisótropo (estado plano de deformación).....	81
3.4.5.1. Matriz de elasticidad para el estado plano de deformación .....	81
3.4.5.2. Matriz de elasticidad estocástica .....	83
3.4.5.3. Matriz de rigidez estocástica.....	85
3.4.5.4. Matriz de rigidez media .....	85
3.4.5.5. Módulo de elasticidad vertical $E_v$ aleatorio.....	85
3.4.5.6. Módulo de elasticidad horizontal $E_h$ aleatorio .....	87
3.4.5.7. Módulo de elasticidad vertical $E_v$ y horizontal $E_h$ aleatorios.....	90
3.4.5.8. Relación de Poisson $\nu_{vh}$ aleatoria .....	93
3.4.5.9. Relación de Poisson $\nu_{hh}$ aleatoria .....	96
<b>3.5 Tamaño de la base polinomial .....</b>	<b>99</b>

<b>3.6 Derivación de expresiones matemáticas para calcular incertidumbre en esfuerzos y deformaciones con el MEFEE .....</b>	<b>100</b>
3.6.1 Evaluación de incertidumbre en deformaciones.....	100
3.6.2 Evaluación de incertidumbre en esfuerzos.....	100
<b>3.7 Simulación Monte Carlo .....</b>	<b>102</b>
<b>3.8 Ejemplo de aplicación.....</b>	<b>102</b>
3.8.1 Planteamiento.....	102
3.8.2 Resultados.....	104
<b>4. APLICACIÓN A ESTRUCTURAS TÉRREAS .....</b>	<b>117</b>
<b>4.1 Introducción.....</b>	<b>117</b>
<b>4.2 Presa La Angostura .....</b>	<b>117</b>
<b>4.3 Hipótesis .....</b>	<b>118</b>
<b>4.4 Comparación del comportamiento entre estados planos de esfuerzo y deformación... </b>	<b>119</b>
<b>4.5 Análisis de sensibilidad.....</b>	<b>120</b>
4.5.1 Desplazamientos .....	121
4.5.2 Esfuerzos (zonas de tensión) .....	121
<b>4.6 Selección de las propiedades de los materiales en los análisis con el MEF .....</b>	<b>123</b>
<b>4.7 Análisis estocástico.....</b>	<b>123</b>
4.7.1 Estado plano de esfuerzo .....	124
4.7.1.1 Desplazamientos.....	124
4.7.1.2 Esfuerzo principal menor $\sigma_3$ .....	141
4.7.2 Estado plano de deformación .....	147
4.7.2.1 Desplazamientos.....	147
4.7.2.2 Esfuerzo principal menor $\sigma_3$ .....	163
4.7.3 Resumen de resultados.....	169
4.7.3.1 Desplazamientos.....	169
4.7.3.2 Esfuerzos .....	170
4.7.4 Cálculo de probabilidades de fractura .....	170
<b>5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>175</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS .....</b>	<b>179</b>
<b>ANEXO A.....</b>	<b>187</b>



## RESUMEN

Esta tesis propone una extensión del Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) en dos dimensiones al caso de materiales elásticos lineales anisótropos con que se construyen estructuras térreas. Con esta técnica numérica se estudió la influencia de la variabilidad espacial de los parámetros de los materiales, representada mediante campos aleatorios, sobre los resultados de la evaluación del estado de desplazamientos y esfuerzos de la cortina de una presa de tierra construida por capas. La extensión se desarrolló con base en las herramientas de la formulación matemática original de este método. Tal ampliación permite tratar la variabilidad espacial por medio de campos aleatorios Gaussianos y realizar investigaciones de la influencia de la incertidumbre sobre los parámetros elásticos lineales anisótropos (módulos de elasticidad y relaciones de Poisson) en forma aislada o conjunta. La extensión se planteó para estados planos de esfuerzo y deformación. Consistió inicialmente, en representar los elementos de la matriz de elasticidad en forma lineal a través de una expansión polinomial. Posteriormente, para derivar las ecuaciones de equilibrio estocásticas, los campos aleatorios de las propiedades del material a modelar se discretizaron con una expansión en serie de *Karhunen-Loève* con variables aleatorias expandidas en *caos polinomial*. El campo aleatorio de los desplazamientos nodales se representó a través de una expansión en *caos polinomial*. La ampliación del enfoque espectral desarrollada en este trabajo se validó con un sólido cúbico, en el que los resultados tuvieron buena concordancia con el método de Monte Carlo. La funcionalidad de la extensión del MEFEE a estructuras térreas se demostró con el análisis estocástico de la cortina de una presa de tierra, cuyos resultados permitieron conocer aspectos de la variabilidad espacial de las propiedades de los materiales que son relevantes para la evaluación del peligro de agrietamiento en este tipo de obras. Finalmente, se dieron algunas recomendaciones para mejorar la modelación de la incertidumbre en presas de tierra y enrocamiento mediante esta técnica.

## ABSTRACT

In this thesis an extension of Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM) in two dimensions to case of anisotropic linear elastic materials was proposed. With this numerical technique the influence of spatial variability, represented by random fields, on the results of the evaluation of the state of displacements and stress of an earth dam built by layers was studied. The extension was based on the original formulation tools of this method. This extension allows modeling the spatial variability by means of Gaussian random fields and studying the influence of the uncertainty on individual or combined anisotropic linear elastic material parameters (deformation modulus and Poisson's ratio). The extension was developed for plane stress and plane strain states. It consisted initially, in representing the elements of elasticity matrix linearly through a polynomial expansion. Subsequently, to derive equilibrium stochastic equations, random fields of material properties to model were discretized using *Karhunen-Loève* expansion with random variables expanded in *polynomial chaos*. Random nodal displacement field was represented through a *polynomial chaos* expansion. The extension of spectral approach developed in this study was validated by means of a cubic solid, where the results were in good agreement with Monte Carlo method. The functionality of the extension of SSFEM to analysis of earth structures was shown through of stochastic analysis of an earth dam, whose results led to know aspects of the spatial variability of the material properties that are relevant to the assessment of the danger of cracking in this type of works. Finally, to improve the modeling of uncertainty in earth and rockfill dams using this technique some recommendations were given.

# NOMENCLATURA

---

$B$	Matriz de forma
$C$	Matriz de elasticidad
$C_{ij}$	Constantes elásticas (matriz de elasticidad). También, definen los coeficientes de aproximación de las variables aleatorias, contenidas en la expansión de <i>Karhunen-Loève</i> , expandidas en <i>caos polinomial</i>
$CV$	Coefficiente de variación de un campo aleatorio $V_V(X, \theta)$
$C_V(X_1, X_2)$	Función de autocovarianza del campo aleatorio $V_V(X, \theta)$
$D$	Matriz de elasticidad
$D_0$	Matriz de elasticidad constante, evaluada con magnitudes unitarias para el o los respectivos campos aleatorios a modelar
$D_1, D_2$	Matrices de elasticidad constantes (estado plano de esfuerzo, isótropo)
$D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33}$	Submatrices de la matriz de elasticidad anisótropa
$D_{11p}, D_{12m}, D_{22n}, D_{331}$	Submatrices constantes de la matriz de elasticidad anisótropa, evaluadas con magnitudes unitarias para el o los respectivos campos aleatorios a modelar. $\{i=m=n=1,2,3\}$ para estado plano de esfuerzo, $\{i=1,..2,3; n=1,..,21; m=1,..12\}$ para estado plano de deformación
$\bar{D}$	Matriz de elasticidad evaluada para el valor esperado del campo aleatorio a modelar

$D_{det}$	Matrices de elasticidad evaluada para el valor esperado de más de un campo aleatorio a modelar
$D(X, \theta)$	Matriz de elasticidad estocástica
$E\{\}$	Operador de esperanza matemática
$F$	Vector de fuerzas exteriores y volumétricas. En la sección 3.2.1 se usa para definir el espacio de probabilidad, en donde $F$ es una clase aditiva completa
$h(\xi)$	Polinomio de Hermite unidimensional de variables normales Gaussianas
$K$	Matriz de rigidez
$K_0$	Matriz de rigidez media
$K_i$	Matriz de rigidez de pesos (caso isótropo). $i$ es función del número de variables aleatorias contenidas en la expansión de <i>Karhunen-Loève</i>
$K_{11m,i}, K_{12m,i}, K_{22m,i}, K_{331}$	Matrices de rigidez de pesos (caso anisótropo). $m$ depende del número de términos utilizados en la expansión en series geométricas e $i$ del de la expansión de <i>Karhunen-Loève</i>
$K(\theta)$	Matriz de rigidez aleatoria
$K_{11}(\theta), K_{12}(\theta), K_{22}(\theta), K_{33}(\theta)$	Matrices de rigidez aleatorias, caso anisótropo
$K^n(\theta)$	Matriz de rigidez aleatoria que resulta de los campos aleatorios elevados a una potencia entera positiva $n$
$L$	Distancia de correlación
$L_2(\Omega)$	Espacio de Hilbert de variables aleatorias Gaussianas
$n$	Grado de anisotropía
$p$	Orden del <i>chaos polinomial</i> . También denota dimensión del espacio en un campo aleatorio, sección A.1.3
$P$	Tamaño de la base polinomial. En la sección 3.2.1 se utiliza para definir la medida de probabilidad
$R^p$	Dominio de estudio en un campo aleatorio

$S_{ij}$	Constantes elásticas (matriz de elasticidad)
$U$	Vector de desplazamientos
$U(\theta)$	Vector de desplazamientos nodales aleatorios
$u(\theta)$	Desplazamientos nodales aleatorios
$V_{\sqrt{X}, \theta}$	Campo aleatorio. $X$ es una variable aleatoria (función del resultado del experimento, $\theta$ ) que representa la propiedad de interés
$W$	Energía de deformación
$Z$	Variable aleatoria normal estandarizada
$\alpha, \beta, \gamma, \omega$	Coeficientes de la expansión de los campos aleatorios en series geométricas. También, $\alpha$ se usa para denotar multi-índices en los polinomios multidimensionales de Hermite y anisotropía en 2.2.3; $\gamma$ para denotar deformación en sección 2.2.2 y peso volumétrico del suelo
$\alpha!$	Factorial de un multi-índice
$\Gamma_p(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_p}(\theta))$	<i>Caos polinomial</i>
$\Gamma_p(\xi_1, \dots, \xi_M)$	<i>Caos homogéneo</i> de orden $p$ y dimensión $M$
$\delta_{ij}$	Delta Kronecker
$\delta$	Desplazamientos
$\delta_h, \delta_x$	Desplazamientos máximos en dirección horizontal
$\delta_v, \delta_y$	Desplazamientos máximos en dirección vertical
$\delta D(X, \theta)$	Matriz de elasticidad que agrupa cantidades medias y aleatorias
$\Delta^n$	Multiplicación de los valores característicos $\sqrt{\eta_i}$ , funciones características $\varphi_i$ y los coeficientes de $C_{ij}$ de la expansión en <i>caos polinomial</i> que representa las variables aleatorias $\xi_i$
$\Delta D(X, \theta)$	Matriz de elasticidad aleatoria con media cero

## Nomenclatura

$\varepsilon$	Vector del tensor de deformaciones
$\eta_1, \eta_2, \dots$	Valores característicos de la expansión en serie de <i>Karhunen-Loève</i>
$\theta$	Elemento en el espacio muestral
$\lambda$ y $\mu$	Constantes de Lamé
$\xi(\theta)$	Variables aleatorias Gaussianas
$\rho_V(X_1, X_2)$	Función de autocovarianza normalizada
$\sigma$	Vector del tensor de esfuerzos
$\sigma_3$	Esfuerzo principal menor
$\sigma_{yt}$	Esfuerzo de fluencia a tensión
$\sigma_{yc}$	Esfuerzo de fluencia a compresión
$\sigma_V(X, \theta)$	Desviación estándar de un campo aleatorio $V_V(X, \theta)$
$\sigma_V^2(X, \theta) = \text{Var}[V(X, \theta)]$	Varianza del campo aleatorio $V_V(X, \theta)$
$\sigma_{\delta_h}$	Desviación estándar de los desplazamientos horizontales
$\sigma_{\delta_v}$	Desviación estándar de los desplazamientos verticales
$\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots$	Funciones características de la expansión en serie de <i>Karhunen-Loève</i>
$\Psi_\alpha(\theta)$	Polinomio multidimensional de Hermite asociado a la secuencia $\alpha_i$ . También llamado <i>caos polinomial</i>
$\Psi_i[\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M]$	$i$ -ésimo <i>caos polinomial</i> de dimensión $M$
$\Omega$	Espacio de resultados posibles $\theta$ de un experimento. También denota el dominio de análisis en la matriz de rigidez.
$\in_{M,P}$	Residuo generado por el truncamiento de la series en la formulación del MEFEE

$\langle \cdot \rangle$

Producto punto

$g(\xi)$

Medida Gaussiana



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Material con un plano de simetría (Kollár & Springer, 2003) .....	9
Figura 2.2	Material con tres planos de simetría (Kollár & Springer, 2003).....	10
Figura 2.3	Suelo estratificado con isotropía transversal (Zienkiewicz & Taylor, 1994) .....	11
Figura 2.4	Elemento para estado plano de esfuerzo (Barden, 1963) .....	13
Figura 2.5	Valores límites de $\nu_{vh}$ y $\nu_{hh}$ para material isótropo transversal (Pickering, 1970; Hooper, 1975) .....	15
Figura 2.6	Trayectorias de esfuerzo en pruebas triaxiales bajo carga y descarga elástica de un suelo isótropo ( $n=1$ ) y un suelo anisótropo ( $n\neq 1$ ) (Yu & Dakoulas, 1993).....	18
Figura 2.7	Variación de la relación de Poisson $\nu$ en función del módulo de elasticidad $E$ .....	21
Figura 2.8	Variación del módulo de elasticidad y relación de Poisson en función de los esfuerzos (Holubec, 1968) .....	21
Figura 2.9	Sección típica de una cortina de tierra y enrocamiento (Marsal & Reséndiz, 1975).	22
Figura 2.10	Zonas de tensión debidas a la geometría del valle. Presa La Angostura .....	24
Figura 2.11	Agrietamiento debido al efecto de interacción entre materiales (Marsal & Reséndiz, 1975) .....	24
Figura 2.12	Grietas por asentamientos diferenciales de la cimentación (Marsal & Reséndiz, 1975) .....	25
Figura 2.13	Grietas ocasionadas por sismo .....	25
Figura 2.14	Variación de los esfuerzos horizontales en la cresta para diferentes valores de la relación Poisson. Curva determinada por Covarrubias (Hansteen, 1995) .....	27

Figura 3.1	Sólido cúbico.....	103
Figura 3.2	Esperanza de los desplazamientos para el estado plano de esfuerzo .....	104
Figura 3.3	Esperanza de los desplazamientos para el estado plano de deformación .....	105
Figura 3.4	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos. $E$ aleatorio, comportamiento isótropo para estado plano de esfuerzo .....	106
Figura 3.5	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos. $\nu$ aleatorio, comportamiento isótropo para estado plano de esfuerzo .....	107
Figura 3.6	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales máximos en el punto B. $\nu$ aleatorio, comportamiento isótropo para estado plano de esfuerzo. Comparación entre MEFEE y Monte Carlo.....	107
Figura 3.7	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos. $E$ y $\nu$ aleatorios, comportamiento isótropo para estado plano de esfuerzo.....	108
Figura 3.8	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos. Comparación entre $E_v$ y $E_h$ aleatorios (estado plano de esfuerzo) .....	109
Figura 3.9	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos verticales para diferentes grados de anisotropía. $E_v$ aleatorio (estado plano de esfuerzo) .....	110
Figura 3.10	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía. $E_v$ aleatorio (estado plano de esfuerzo).....	110
Figura 3.11	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía. $\nu_{vh}$ aleatoria (estado plano de esfuerzo).....	111
Figura 3.12	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos verticales para diferentes grados de anisotropía. $E_v$ , $E_h$ y $\nu_{vh}$ aleatorios (estado plano de esfuerzo).....	112
Figura 3.13	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía. $E_v$ , $E_h$ y $\nu_{vh}$ aleatorios (estado plano de esfuerzo).....	112
Figura 3.14	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos. Comparación entre $E_v$ y $E_h$ aleatorios (estado plano de deformación) .....	113

Figura 3.15	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos verticales para diferentes grados de anisotropía. $E_v$ aleatorio (estado plano de deformación) .....	114
Figura 3.16	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía. $E_v$ aleatorio (estado plano de deformación).....	114
Figura 3.17	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía. $\nu_{vh}$ aleatoria (estado plano de deformación).....	115
Figura 4.1	Presa La Angostura (Marsal <i>et al.</i> , 1976) .....	118
Figura 4.2	Malla de elementos finitos para la sección longitudinal de la presa La Angostura .	119
Figura 4.3	Desplazamientos verticales para $E=50$ MPa y $\nu=0.3$ .....	120
Figura 4.4	Desplazamientos verticales para $E=80$ MPa y $\nu=0.3$ .....	120
Figura 4.5	Asentamientos medidos por el inclinómetro I-A6 durante el período de construcción. (CFE, 1976).....	120
Figura 4.6	Variación de los desplazamientos máximos en función de la relación de Poisson $\nu_{vh}$ . .....	121
Figura 4.7	Variación de las zonas de tensión para diferentes valores de la relación de Poisson $\nu_{vh}$ (Estado plano de esfuerzo).....	122
Figura 4.8	Variación de las zonas de tensión para diferentes relaciones valores de la Poisson $\nu_{vh}$ . (Estado plano de deformación).....	122
Figura 4.9	Variación de las zonas de tensión para diferentes valores de $E$ . (Estado plano de esfuerzo) .....	122
Figura 4.10	Variación de las zonas de tensión para diferentes grados de anisotropía. (Estado plano de esfuerzo) .....	123
Figura 4.11	Curvas de igual valor esperado de los desplazamientos para $n=1$ (Estado plano de esfuerzo) .....	125
Figura 4.12	Curvas de igual valor esperado de los desplazamientos para $n=0.714$ (Estado plano de esfuerzo) .....	125
Figura 4.13	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_v$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de esfuerzo).....	127
Figura 4.14	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_v$ aleatorio, $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo) .....	127

Lista de figuras

Figura 4.15	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $E_v$ aleatorio (Estado plano de esfuerzo) ..... 128
Figura 4.16	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de esfuerzo). ..... 128
Figura 4.17	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_h$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de esfuerzo)..... 130
Figura 4.18	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_h$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo) ..... 130
Figura 4.19	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $E_h$ aleatorio (Estado plano de esfuerzo) ..... 131
Figura 4.20	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de esfuerzo). ..... 131
Figura 4.21	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_v$ y $E_h$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de esfuerzo) ..... 133
Figura 4.22	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_v$ y $E_h$ aleatorios. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo) ..... 133
Figura 4.23	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $E_v$ y $E_h$ aleatorios (Estado plano de esfuerzo) ..... 134
Figura 4.24	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de esfuerzo). ..... 134
Figura 4.25	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $v_{vh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de esfuerzo) ..... 136
Figura 4.26	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $v_{vh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo) ..... 136
Figura 4.27	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $v_{vh}$ aleatoria (Estado plano de esfuerzo)..... 137
Figura 4.28	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de esfuerzo). ..... 137
Figura 4.29	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_h$ , $E_v$ y $v_{vh}$ aleatorios. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de esfuerzo) ..... 139

Figura 4.30	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_h$ , $E_v$ y $v_{vh}$ aleatorios. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo).....	139
Figura 4.31	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $E_h$ , $E_v$ y $v_{vh}$ aleatorios (Estado plano de esfuerzo).....	140
Figura 4.32	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de esfuerzo) .....	140
Figura 4.33	Configuración de la esperanza de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa (Estado plano de esfuerzo) .....	141
Figura 4.34	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $E_v$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo).....	142
Figura 4.35	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $E_v$ aleatorio (Estado plano de esfuerzo) .....	142
Figura 4.36	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $E_h$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo).....	143
Figura 4.37	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $E_h$ aleatorio (Estado plano de esfuerzo) .....	143
Figura 4.38	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $E_v$ y $E_h$ aleatorios. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo) .....	144
Figura 4.39	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $E_v$ y $E_h$ aleatorios .....	144
Figura 4.40	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $v_{vh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo).....	145
Figura 4.41	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $v_{vh}$ aleatoria (Estado plano de esfuerzo) .....	145
Figura 4.42	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $E_v$ , $E_h$ y $v_{vh}$ aleatorios. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo) .....	146
Figura 4.43	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $E_v$ , $E_h$ y $v_{vh}$ aleatorios (Estado plano de esfuerzo) .....	146
Figura 4.44	Curvas de igual valor esperado de los desplazamientos para $n=1$ (Estado plano de deformación) .....	148
Figura 4.45	Curvas de igual valor esperado de los desplazamientos para $n=0.714$ .....	148
Figura 4.46	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_v$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de deformación).....	149

Figura 4.47	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_v$ aleatorio, $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación) ..... 150
Figura 4.48	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $E_v$ aleatorio (Estado plano de deformación) ..... 151
Figura 4.49	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de deformación). ..... 151
Figura 4.50	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_h$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de deformación)..... 152
Figura 4.51	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_h$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación) ..... 153
Figura 4.52	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $E_h$ aleatorio (Estado plano de deformación) ..... 153
Figura 4.53	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de deformación). ..... 154
Figura 4.54	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_v$ y $E_h$ aleatorios. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de deformación) ..... 155
Figura 4.55	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $E_v$ y $E_h$ aleatorios. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación) ..... 155
Figura 4.56	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $E_v$ y $E_h$ aleatorios (Estado plano de deformación) ..... 156
Figura 4.57	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos). $E_v$ y $E_h$ aleatorios (Estado plano de deformación).... 156
Figura 4.58	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $v_{vh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de deformación) ..... 158
Figura 4.59	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $v_{vh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación) ..... 158
Figura 4.60	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $v_{vh}$ aleatoria (Estado plano de deformación)..... 159
Figura 4.61	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de deformación). ..... 159

Figura 4.62	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $\nu_{hh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=90$ m (Estado plano de deformación).....	160
Figura 4.63	Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para $\nu_{hh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación) .....	162
Figura 4.64	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. $\nu_{hh}$ aleatoria (Estado plano de deformación) .....	162
Figura 4.65	Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos) (Estado plano de deformación). .....	162
Figura 4.66	Configuración de la esperanza de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa (Estado plano de deformación) .....	163
Figura 4.67	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $E_v$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación).....	164
Figura 4.68	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $E_v$ aleatorio (Estado plano de deformación) .....	164
Figura 4.69	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $E_h$ aleatorio. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación).....	165
Figura 4.70	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $E_h$ aleatorio (Estado plano de deformación) .....	165
Figura 4.71	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $E_v$ y $E_h$ aleatorios. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación) .....	166
Figura 4.72	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $E_v$ y $E_h$ aleatorios (Estado plano de deformación) .....	166
Figura 4.73	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $\nu_{vh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación).....	167
Figura 4.74	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $\nu_{vh}$ aleatoria (Estado plano de deformación) .....	167
Figura 4.75	Configuración de la incertidumbre de $\sigma_3$ en el cuerpo de la presa para $\nu_{hh}$ aleatoria. $n=0.714$ y $L=\infty$ (Estado plano de deformación).....	168
Figura 4.76	Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de $\sigma_3$ . $\nu_{hh}$ aleatoria (Estado plano de deformación) .....	168
Figura 4.77	Probabilidad de fractura, %. Estado plano de esfuerzo .....	171
Figura 4.78.	Probabilidad de fractura, %. Estado plano de deformación .....	173

Lista de figuras

Figura A.1	Convergencia de los coeficientes $\alpha$ y $\beta$ de la expansión en series geométricas de los campos aleatorios $2\mu'(X, \theta)$ y $\lambda'(X, \theta)$ ..... 198
Figura A.2	Determinante de $D(X, \theta)$ ..... 199
Figura A.3	Relación de convergencia de la serie desarrollada para $D$ (estado plano de esfuerzo) ..... 204
Figura A.4	Relación de convergencia de la serie desarrollada para $D$ (estado plano de deformación) ..... 205

## LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1	Efecto del estado del material sobre los parámetros elásticos .....	18
Tabla 3.1	Términos del desarrollo en series geométricas de $D_{11}$ .....	82
Tabla 3.2	Términos del desarrollo en series geométricas de $D_{12}$ .....	82
Tabla 3.3	Términos del desarrollo en series geométricas de $D_{22}$ .....	83
Tabla 3.4	Característica de los campos aleatorios. Caso isótropo .....	104
Tabla 3.5	Característica de los campos aleatorios. Caso anisótropo $n=1$ .....	104
Tabla 3.6	Desviación estándar de los desplazamientos verticales y horizontales para una distancia de correlación grande. $E_v$ aleatorio (comportamiento anisótropo, estado plano de esfuerzo) .....	109
Tabla 3.7	Desviación estándar de los desplazamientos horizontales para una distancia de correlación grande. $\nu_{vh}$ aleatorio (comportamiento anisótropo, estado plano de esfuerzo) .....	111
Tabla 3.8	Desviación estándar de los desplazamientos horizontales para una distancia de correlación grande. $E_v, E_h, \nu_{vh}$ aleatorios (comportamiento anisótropo, estado plano de esfuerzo) .....	112
Tabla 3.9	Desviación estándar de los desplazamientos horizontales y verticales para una distancia de correlación grande. $E_v$ aleatorio (comportamiento anisótropo, estado plano de deformación) .....	113
Tabla 3.10	Desviación estándar de los desplazamientos horizontales para una distancia de correlación grande. $\nu_{vh}$ aleatoria (comportamiento anisótropo, estado plano de deformación) .....	115

Tabla 4.1	Casos analizados con la extensión del MEFEE a una ley constitutiva elástica lineal anisótropa. $n=1$ ..... 124
Tabla 4.2	Casos analizados con la extensión del MEFEE a una ley constitutiva elástica lineal anisótropa. $n=0.714$ ..... 124
Tabla 4.3	CV de los desplazamientos máximos para $n=1$ y $n=0.714$ . $L=\infty$ (Estado plano de esfuerzo) ..... 141
Tabla 4.4	CV del esfuerzo principal menor $\sigma_3$ , para $n=1$ y $n=0.714$ . $L=\infty$ . (Estado plano de esfuerzo) ..... 147
Tabla 4.5	CV de los desplazamientos máximos para $n=1$ y $n=0.714$ . $L=\infty$ (Estado plano de deformación) ..... 162
Tabla 4.6	CV del esfuerzo principal menor $\sigma_3$ para $n=1$ y $n=0.714$ . $L=\infty$ . (Estado plano de deformación) ..... 169
Tabla 4.7	CV máximo de los desplazamientos para estados planos de esfuerzo y deformación para $n=0.714$ ..... 169
Tabla 4.8	CV máximo de $\sigma_3$ para estados planos de esfuerzo y deformación para $n=0.714$ y $L=\infty$ ..... 170
Tabla A.1	Expansión de variables aleatorias en polinomios de Hermite ..... 195
Tabla A.2	Inserción de los coeficientes $C_j$ en el caos polinomial ..... 195
Tabla A.3	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{11}$ ( $E_v$ aleatorio) ..... 206
Tabla A.4	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{12}$ ( $E_v$ aleatorio) ..... 207
Tabla A.5	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{22}$ ( $E_v$ aleatorio) ..... 208
Tabla A.6	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{11}$ ( $E_h$ aleatorio) ..... 209
Tabla A.7	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{12}$ ( $E_h$ aleatorio) ..... 210
Tabla A.8	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{22}$ ( $E_h$ aleatorio) ..... 211
Tabla A.9	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{11}$ ( $E_v$ y $E_h$ aleatorios) ..... 212
Tabla A.10	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{12}$ ( $E_v$ y $E_h$ aleatorios) ..... 213
Tabla A.11	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{22}$ ( $E_v$ y $E_h$ aleatorios) ..... 214
Tabla A.12	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{11}$ ( $\nu_{vh}$ aleatoria) ..... 215
Tabla A.13	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{12}$ ( $\nu_{vh}$ aleatoria) ..... 216

Tabla A.14	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{22}$ ( $v_{vh}$ aleatoria).....	217
Tabla A.15	Términos del desarrollo en series geométricas de $D_{11}$ ( $v_{hh}$ aleatoria).....	218
Tabla A.16	Términos del desarrollo en series geométricas de $D_{12}$ ( $v_{hh}$ aleatoria).....	219
Tabla A.17	Términos del desarrollo en series geométricas de $D_{22}$ ( $v_{hh}$ aleatoria).....	220
Tabla A.18	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{11}$ ( $v_{hh}$ aleatoria).....	221
Tabla A.19	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{12}$ ( $v_{hh}$ aleatoria).....	222
Tabla A.20	Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de $D_{22}$ ( $v_{hh}$ aleatoria).....	223



# Capítulo 1

---

## INTRODUCCIÓN

Las presas de tierra y enrocamiento, desde su construcción hasta después del primer llenado, están sujetas a deformaciones que conducen al desarrollo de fuerzas de tensión que pueden originar el agrietamiento del terraplén. Este fenómeno puede desencadenar otros, como: erosión interna, fracturamiento hidráulico y tubificación, los cuales pueden provocar la falla de la presa. Para poder evaluar el comportamiento de este tipo de estructuras se ha recurrido al Método del Elemento Finito (MEF) (Alberro, 1975). Esta técnica numérica ha sido muy útil para cuantificar de forma anticipada, especialmente durante su construcción, desplazamientos, deformaciones y esfuerzos y con ello evaluar posibilidades de falla de la estructura.

Este tipo de estructuras se construyen de forma artificial con materiales que se caracterizan por ser heterogéneos y anisótropos. La heterogeneidad se debe a la historia geológica del suelo, la cual conduce a variaciones espaciales importantes de un punto a otro en las propiedades del suelo; además, las condiciones de colación durante la construcción puede agregar desviaciones importantes (Auvinet y González, 2000). La anisotropía es inducida por el proceso de construcción, que genera una deformabilidad mayor en dirección vertical que en dirección horizontal. Ambos factores inciden en la exactitud de los resultados de los análisis con el MEF, pero su incorporación en la modelación numérica puede mejorar el pronóstico del comportamiento de la estructura. La anisotropía, es un efecto que se incluye directamente dentro del modelo constitutivo del suelo. La variabilidad espacial, derivada de la heterogeneidad, se trata como una fuente de incertidumbre que se puede representar y cuantificar de forma racional mediante la teoría de probabilidad y el MEF, lo cual resulta en el Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE) (Cambou, 1974; Auvinet, 2002).

Los primeros análisis de agrietamiento en presas de tierra y enrocamiento con el MEF, se enfocaron al estudio de la formación de zonas de tensión (Covarrubias, 1970). En el caso de la modelación estocástica, el énfasis ha estado en evaluar el efecto de la incertidumbre de los parámetros del suelo sobre los desplazamientos y esfuerzos desarrollados en el cuerpo del terraplén (Louault, 1997; Pérez-Duarte, 2000). En estos análisis, generalmente se ha recurrido a la técnica de perturbaciones (Auvinet, 2002; Kleiber & Hien, 1992), en donde primero se calcula la

solución del sistema mediante el MEF y después, a través de las técnicas aplicables a funciones de variables aleatorias (perturbaciones), la incertidumbre. Sin embargo, cuando se requiere evaluar la variabilidad espacial, se recomienda recurrir al concepto de campo aleatorio (Auvinet, 2002), el cual permite tomar en cuenta la correlación espacial de las propiedades del suelo.

Una opción para tratar con la variabilidad espacial, son los métodos basados en expansiones ortogonales en el espacio de Hilbert (Matthies y Keese, 2005), específicamente el Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) propuesto por Ghanem y Spanos (1991). En este método la representación de la variabilidad y de la respuesta es de forma intrínseca, desde la formulación. El MEFEE, tal como lo formularon Ghanem y Spanos, representa solamente la variabilidad del módulo de elasticidad  $E$  mediante campos aleatorios Gaussianos. Algunos trabajos previos (Pineda, 2007), permiten concluir que, en el caso de análisis geotécnicos, el MEFEE es una herramienta útil para evaluar el comportamiento de presas de tierra y enrocamiento.

El objetivo de esta tesis es realizar una extensión del MEFEE en dos dimensiones al caso de materiales elásticos lineales anisótropos. Con esta técnica numérica se estudia la influencia de la variabilidad espacial, representada por campos aleatorios, sobre los resultados de la evaluación del estado de desplazamientos y esfuerzos de la cortina de una presa de tierra construida por capas.

La extensión se realiza con base en las herramientas matemáticas del MEFEE; permite tratar la variabilidad espacial mediante campos aleatorios Gaussianos y realizar investigaciones de la influencia de la incertidumbre sobre los parámetros elásticos lineales anisótropos en forma aislada o conjunta.

En la primera parte de este trabajo, se presentan los aspectos teóricos de la teoría de elasticidad para suelos isótropos y anisótropos. Como antecedentes, se proporciona un panorama de la influencia de la anisotropía sobre el comportamiento elástico lineal del suelo. También, se exponen los aspectos importantes del problema de agrietamiento en presas de tierra y enrocamiento. Posteriormente, se presentan las herramientas matemáticas básicas de la formulación del MEFEE. Se exponen las consideraciones importantes para la extensión del enfoque espectral al caso anisótropo, con las cuales es posible el desarrollo de las ecuaciones de equilibrio estocásticas del MEFEE. La extensión del MEFEE se valida con sólido cúbico y los resultados se comparan con el Método de Monte Carlo, asimismo se establecen conclusiones. Enseguida, se realiza el análisis estocástico de una presa de tierra y enrocamiento. Mediante la distancia de correlación se estudia cómo se propaga la variabilidad de los parámetros sobre la incertidumbre de los campos de desplazamientos y esfuerzos. Con los resultados obtenidos de este análisis, se calculan las probabilidades de fractura en la presa. Finalmente, se presentan conclusiones generales y se dan recomendaciones para mejorar la modelación de la incertidumbre en presas de tierra y enrocamiento mediante esta técnica numérica.

## Capítulo 2

---

### **ANÁLISIS DETERMINISTAS DE ESTRUCTURAS TÉRREAS CON EL MEF**

#### 2.1 Introducción

El estudio del fenómeno de agrietamiento en presas de tierra y enrocamiento ha sido un tema de gran interés para los ingenieros desde hace más de sesenta años. Entre ellos se puede mencionar a Casagrande y Sherard (Marsal & Reséndiz, 1975) quienes clasificaron los factores que se asocian con el desarrollo de grietas. Las primeras aportaciones del tema mediante análisis numéricos realizados con el Método del Elemento Finito (MEF) se debieron a Covarrubias (1970) y fueron un punto de partida para el entendimiento de los factores que influyen sobre el estado de esfuerzos y deformaciones que se desarrolla en la cortina de una presa de tierra y enrocamiento y que puede dar lugar al agrietamiento de la misma, siendo el MEF una herramienta útil para analizar tal problema.

En todos los análisis con el MEF se busca establecer simplificaciones que permitan que el problema sea fácil de estudiar, tal como lo señalaron Clough y Woodward (1967). La concordancia de los resultados numéricos con la realidad dependerá de las hipótesis implementadas en el modelo de elemento finito.

En el análisis de estructuras térreas, una primera simplificación está relacionada con el comportamiento constitutivo de los materiales. Alberro (1998) determinó (con base en mediciones de campo), que durante la construcción de una cortina, el comportamiento del material se puede aproximar como elástico-lineal, caracterizado por un módulo de deformación  $E$  y una relación de Poisson  $\nu$ . Otra hipótesis que ha simplificado la evaluación de esfuerzos y deformaciones en presas de tierra, es considerar que el comportamiento de los materiales constitutivos de la cortina es isótropo. Estas simplificaciones, han aportado conclusiones importantes acerca del fenómeno de agrietamiento en estructuras térreas, relacionado con la localización de las zonas de tensión (Covarrubias S. W., 1975; Hansteen, 1995; Louault, 1997). Asimismo, los resultados de estos análisis, han motivado a realizar investigaciones con el MEF considerando anisotropía (Pérez-Duarte, 2000), aspecto importante del comportamiento de los materiales con que se construyen las

presas de tierra y enrocamiento y que se ha constatado mediante mediciones de campo (Marsal, 1976).

Estos resultados han permitido estudiar de forma cualitativa el fenómeno de agrietamiento en estructuras térreas. Se ha podido establecer la sensibilidad a los parámetros del material de la formación y localización de zonas de tensión que conducen a la formación de grietas.

En este capítulo se presentan los aspectos teóricos de la teoría de elasticidad para suelos isotrópicos y anisótropos. Se proporciona un panorama útil de la influencia de la anisotropía en el comportamiento elástico-lineal del suelo. Finalmente, se habla del problema de agrietamiento en presas de tierra y enrocamiento, haciendo énfasis en la influencia de los parámetros constitutivos sobre la formación de zonas de tensión.

## 2.2 Antecedentes

### 2.2.1 Teoría de elasticidad para suelos isotrópicos

#### 2.2.1.1 Determinación de las constantes elásticas de rigidez

De acuerdo con la teoría de elasticidad los esfuerzos y deformaciones se pueden relacionar linealmente de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos,  $\varepsilon_{kl}$  es el tensor de deformación lineal y  $C_{ijkl}$  son llamadas constantes elásticas que corresponden a un tensor de cuarto orden con 81 componentes, este tensor relaciona nueve componentes del tensor esfuerzo con nueve componentes del tensor deformación. Si se considera simetría de los tensores esfuerzo y deformación, entonces el número de constantes elásticas independientes del tensor  $C_{ijkl}$  se reduce a 36, siendo una matriz de 6x6 (Lekhnitskii, 1963).

La ecuación (2.1) se expresa en forma matricial como:

$$(\sigma) = (c)(\varepsilon) \quad (2.2)$$

Con:

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

y

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{11222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

siendo  $x=1, y=2, z=3$ .

Las constantes elásticas  $C_{ijkl}$  caracterizan las propiedades del material y satisfacen que la energía de deformación debe ser positiva, la cual se expresa como:

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (2.5)$$

Si se asume que existe dicha energía, los esfuerzos se pueden expresar como la derivada de la energía de deformación  $W$  con respecto a la deformación  $\varepsilon_{ij}$  (Lekhnitskii, 1963):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.6)$$

Derivando la ecuación 2.5 nuevamente con respecto  $\varepsilon_{kl}$ , se tiene:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} \quad (2.7)$$

Realizando la segunda derivada de la ecuación (2.5) pero invirtiendo el orden de las derivadas, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij} \quad (2.8)$$

Por tanto:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.9)$$

Esta condición de simetría reduce la matriz de constantes elásticas independientes de 36 a 21 coeficientes independientes; este caso se conoce como anisotropía elástica. Cualquier otra reducción en el número de constantes se puede realizar mediante las restricciones impuestas por las propiedades de simetría del material (ver inciso 2.2).

Si las propiedades del material se consideran independientes de la rotación con respecto a un eje; este eje es llamado de simetría. Cuando el material tiene tres planos ortogonales de simetría (referidos al comportamiento esfuerzo-deformación), el material posee simetría elástica ortotrópica.

En el caso isótropo, el material se considera el mismo en cualquier dirección del sistema de coordenadas ortogonal y la ecuación constitutiva esfuerzo-deformación (2.1) no cambia con ninguna transformación de ejes coordenados. En este caso la matriz  $C_{ijkl}$  (de 21 coeficientes) se reduce a dos constantes elásticas (Lekhnitskii, 1963). Considerando una notación compacta  $C_{ijkl} = C_{ij}$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Donde  $C_{44}$  es una constante elástica que depende de  $C_{11}$  y  $C_{12}$ , se expresa como:

$$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \quad (2.11)$$

Para materiales elásticos lineales isótropos, la ley de Hooke generalizada (2.1) en un sistema de coordenadas espaciales se expresa (William & Soutas-Little, 1973):

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Donde  $\delta_{ij}$  es delta Kronecker expresada como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.13)$$

$\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé, definidas en términos de constantes ingenieriles, como:

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.14)$$

Siendo  $E$  el módulo de elasticidad y  $\nu$  la relación de Poisson, expresadas de la siguiente forma:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(1 + \mu)} \quad (2.15)$$

$G$  es frecuentemente usada en lugar de  $\mu$  y es llamada módulo de rigidez.

La ecuación constitutiva (2.1) se puede escribir en términos de deformaciones

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.16)$$

Donde  $S_{ijkl}$  son constantes elásticas, llamadas también coeficientes de deformación. Estas constantes conforman un tensor de cuarto orden. De acuerdo con la ecuación (2.16), la ley de Hooke generalizada también se expresa como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left\{ (1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right\} \quad (2.17)$$

### 2.2.1.2 Elasticidad plana

En elasticidad plana, los problemas se pueden estudiar considerando que prevalece: 1) un estado de plano de deformación que corresponde a un cuerpo largo (teóricamente infinito) en el que las cargas están uniformemente distribuidas en la dirección infinita y no tienen componentes normales a los planos finitos; 2) un estado plano de esfuerzo, el cual corresponde a una placa plana de espesor pequeño constante, en donde las fuerzas actúan en el plano de la placa.

#### *Estado plano de deformación*

En este estado el desplazamiento  $u_z$  en dirección  $z$  (dirección infinita) es cero, mientras que  $u_x$  y  $u_y$  son independientes de  $z$ , eso define la condición de deformación plana con:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.18)$$

Así, las relaciones constitutivas esfuerzo-deformación en términos de la ley de Hooke generalizada se expresan como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx}, & \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), & 0 &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (2.19)$$

En forma matricial

1) En términos de las constantes de Lamé:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

2) En términos de constantes elásticas:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

con:

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \quad (2.22)$$

### Estado plano de esfuerzo

La condición en estado plano de esfuerzo se define como:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (2.23)$$

Las relaciones constitutivas se escriben como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}, & \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ 0 &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz}, & \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (2.24)$$

En forma matricial

1) En términos de las constantes de Lamé:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

2) En términos de las constantes elásticas:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

con:

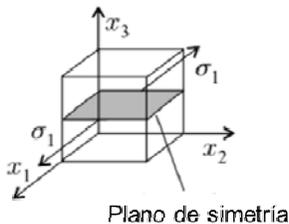
$$\varepsilon_{zz} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \end{cases} \quad (2.27)$$

y

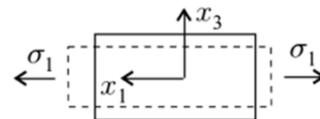
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \quad (2.28)$$

### 2.2.2 Teoría de elasticidad para suelos anisótropos

La respuesta esfuerzo-deformación de un material elástico-lineal es una función de las constantes elásticas  $C_{ijkl}$  que caracterizan las propiedades del material y cuyo número está determinado por los planos de simetría observados. Un plano se considera de simetría siempre y cuando, las deformaciones resultantes de la aplicación de cargas simétricas con respecto a tal plano, sean también simétricas. Por ejemplo, si se aplica una tensión en dirección  $\sigma_1$ , como se muestra en la Figura 2.1, la deformación  $\gamma_{13}$  es nula, por tanto las deformaciones en el plano  $x_1$ - $x_2$  son simétricas.



(a) Material con plano de simetría  $x_1$ - $x_2$



(b) Deformación  $\gamma_{13} = 0$

Figura 2.0.1 Material con un plano de simetría (Kollár & Springer, 2003)

### 2.2.2.1 Ortotropía

Cuando un material presenta tres planos de simetría que coinciden con los planos coordenados del sistema de referencia el material es ortotrópico, Figura 2.2. Un material ortotrópico es un material anisótropo. En este caso, el comportamiento esfuerzo-deformación de los materiales se aproxima con nueve constantes elásticas (Lekhnitskii, 1963).

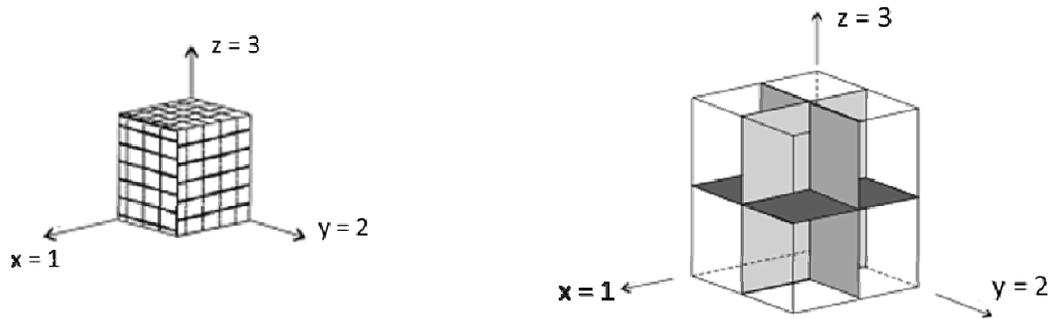


Figura 2.2 Material con tres planos de simetría (Kollár & Springer, 2003)

### 2.2.2.2 Isotropía transversal

Si en un material con tres planos de simetría (ortotrópico), uno de ellos se toma como un plano de isotropía (propiedades iguales en todas las direcciones), el material se nombra isótropo transversalmente. Las propiedades de los materiales esfuerzo-deformación serán diferentes en el plano de isotropía que las de un plano transversal a éste. La dirección vertical, normal al plano de isotropía, se considera un eje de simetría de rotación. La matriz de constantes elásticas  $C_{ijkl}$  está constituida por cinco coeficientes independientes de la siguiente forma:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Generalmente los suelos están constituidos por capas horizontales, lo que implica que las propiedades sean independientes de la dirección horizontal y el eje vertical, que representa la variabilidad de las propiedades del suelo, en cualquier punto es un eje de simetría radial, Figura . Las propiedades, entonces, son diferentes en el plano horizontal y en el vertical. En este caso un análisis de isotropía transversal permite aproximar el comportamiento esfuerzo-deformación de los suelos.

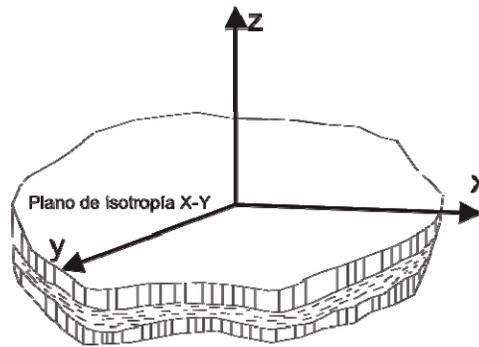


Figura 2.3 Suelo estratificado con isotropía transversal (Zienkiewicz & Taylor, 1994)

Tomando un sistema de coordenadas ortogonal cartesiano y definiendo x-y como el plano de isotropía y z como el eje de simetría de rotación. Las relaciones esfuerzo-deformación se escriben de la siguiente forma (Lekhnitskii, 1963):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz}, & \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_h}(\sigma_{xx} - \nu_{hh}\sigma_{yy}) - \frac{\nu_{vh}}{E_v}\sigma_{zz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{11}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_h}(\sigma_{yy} - \nu_{hh}\sigma_{xx}) - \frac{\nu_{vh}}{E_v}\sigma_{zz} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{13}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\nu_{vh}}{E_v}(-\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + \frac{1}{E_v}\sigma_{zz} \\
 \sigma_{yz} &= C_{44}\varepsilon_{yz}, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{vh}}\tau_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{44}\varepsilon_{xz}, & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{vh}}\tau_{xz} \\
 \sigma_{xy} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\varepsilon_{xy}, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{hh}}\tau_{xy} = \frac{2(1 + \nu_{hh})}{E_h}\tau_{xy}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Siendo:

$E_h$ : módulo de elasticidad en el plano de isotropía (plano horizontal x-y)

$E_v$ : módulo de elasticidad en la dirección vertical (eje de simetría z)

$\nu_{vh}$ : relación de Poisson que representa la deformación en el plano horizontal (x-y) debido a esfuerzos que actúan en la dirección vertical (eje de simetría z)

$\nu_{hh}$ : relación de Poisson que representa la deformación en el plano horizontal (x-y) debido a la deformación en ese mismo plano

$G_{hh}$ : módulo de rigidez al cortante en plano normal al plano de isotropía

$G_{vh}$ : módulo de rigidez al cortante en el plano paralelo al plano de simetría

La convención  $\nu_{ij}$  expresa:  $i$  es la dirección en donde se impone el esfuerzo o deformación;  $j$  se refiere a la dirección de la respuesta.

El grado de anisotropía se mide considerando  $E_h = nE_v$ . En el caso isótropo  $n = 1$ . Es conveniente notar que  $\nu_{hv} \neq \nu_{vh}$ , y que las constantes elásticas no son independientes y están correlacionadas por:

$$\frac{\nu_{hv}}{E_h} = \frac{\nu_{vh}}{E_v} = n \quad (2.31)$$

Las relaciones esfuerzo-deformación en notación matricial se expresa:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (2.32)$$

Las constantes elásticas  $C_{ij}$  en términos de  $E$ ,  $n$ ,  $\nu_{hh}$ ,  $\nu_{hv}$ ,  $\nu_{vh}$  se obtienen transponiendo  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\varepsilon_{zz}$  de 2.30 para obtener esfuerzos en términos de deformaciones (Barden, 1963), teniendo que:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{nE_v}{\phi} (1 - \nu_{vh}\nu_{hv}) \\ C_{12} &= \frac{nE_v}{\phi} (\nu_{hh} - \nu_{vh}\nu_{hv}) \\ C_{13} &= \frac{nE_v}{\phi} \nu_{vh} (1 + \nu_{hh}) \\ C_{33} &= \frac{E_v}{\phi} (1 - \nu_{hh}^2) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Con  $\phi = (1 + \nu_{hh})(1 - \nu_{hh} - 2\nu_{vh}\nu_{hv})$

La constante  $C_{44} = G_{vh}$  Barden (1963) la deduce considerando lo siguiente:

Para un estado de esfuerzo plano ( $\sigma_{xx} = 0$ ), Figura 2.4, el esfuerzo cortante  $\tau$  es igual al esfuerzo directo  $\sigma_{zz}$  y el elemento  $ABCD$  se deformará por lo que el ángulo derecho  $DAB$  se altera una cantidad  $\gamma$ . El triángulo  $OAB$ , después de la deformación es:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{1 + \varepsilon_{yy}}{1 + \varepsilon_{zz}} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

Para muy pequeños valores de  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  y  $\gamma$  la expresión de arriba es:

$$\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz} = -\gamma$$

De 2.28 y considerando  $\sigma_{xx} = 0$  y  $\sigma_{yy} = -\sigma_{zz}$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\sigma_{zz}}{E} \left( \frac{1}{n} + \nu_{vh} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \left( 1 + \frac{\nu_{hv}}{n} \right)$$

De esta forma, se tiene que:

$$\gamma = \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \left( 1 + \frac{\nu_{hv}}{n} + \frac{1}{n} + \nu_{vh} \right)$$

Substituyendo  $\sigma_{zz} = \tau$  y  $n = \frac{\nu_{hv}}{\nu_{vh}}$  se llega a:

$$\tau = G_{vh} \gamma = \left( \frac{E_v \nu_{hv}}{\nu_{hv} + \nu_{vh} + 2\nu_{hv}\nu_{vh}} \right) \gamma$$

A partir de la expresión anterior  $C_{44}$  se escribe como:

$$C_{44} = G_{hv} = G_{vh} = \frac{E_h}{(1 + n + 2n\nu_{vh})} \tag{2.34}$$

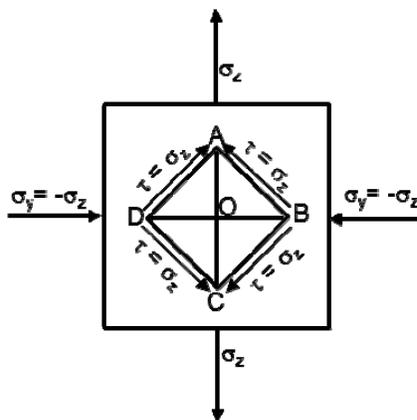


Figura 2.4 Elemento para estado plano de esfuerzo (Barden, 1963)

La ecuación (2.32) se puede escribir de forma invertida como:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \tag{2.35}$$

donde:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & -\frac{1}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{vh}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{vh}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{hh})}{E_h} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$C_{ij}$  y  $S_{ij}$  son también llamadas matrices de elasticidad

### 2.2.2.3 Elasticidad plana para materiales anisótropos transversalmente

#### Estado plano de deformación

En este caso las relaciones esfuerzo-deformación se expresan como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E_h(1-n\nu_{vh}^2) & E_h\nu_{vh}(1+\nu_{hh}) & 0 \\ E_h\nu_{vh}(1+\nu_{hh}) & E_v(1-\nu_{hh}^2) & 0 \\ 0 & 0 & G_{vh}m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Con:  $m = (1+\nu_{hh})(1-\nu_{hh}-2n\nu_{vh}^2)$

#### Estado plano de esfuerzo

Las relaciones esfuerzo-deformación son:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E_v}{1-n\nu_{vh}^2} \begin{pmatrix} n & n\nu_{vh} & 0 \\ n\nu_{vh} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{vh}}{E_v}(1-n\nu_{vh}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

## 2.2.3 Aspectos importantes de los parámetros de elasticidad

### 2.2.3.1 Restricciones en las constantes elásticas

Las constantes elásticas  $C_{ijk}$  se definen independientes, pero no pueden asumir cualquier valor arbitrario. Se requiere asegurar que la función de energía de deformación sea positiva y que la carga aplicada genere deformación en la dirección de la carga. Para un material isótropo esta condición se cumple si  $E > 0$  y  $-1.0 < \nu < 0.5$ . Para un material anisótropo las restricciones son (Pickering, 1970):

$$E_v, E_h, G_{vh} \geq 0, \quad -1 \leq \nu_{hh} \leq 1 - 2\nu_{vh}^2 \quad (2.39)$$

La superficie de frontera presentada por (Hooper, 1975) entre  $\nu_{hh} = 1$  y  $\nu_{hh} = -1$  en el espacio  $n = E_h/E_v, \nu_{hh}, \nu_{vh}$  se presenta en la Figura 2.5.

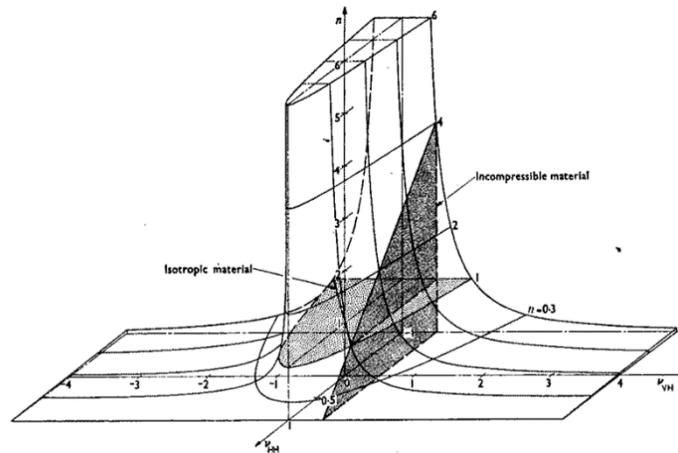


Figura 2.5 Valores límites de  $\nu_{vh}$  y  $\nu_{hh}$  para material isótropo transversal (Pickering, 1970; Hooper, 1975)

Las relaciones de Poisson son gobernadas por las siguientes relaciones, el comportamiento del material es incompresible (comportamiento no drenado) si:

$$\nu_{vh} = \frac{1}{2} \quad (2.40)$$

$$\nu_{hh} = 1 - \frac{n}{2} \quad (2.41)$$

Es posible verificar el aumento de volumen en compresión vertical u horizontal mediante (Magnan & Piyal, 1984):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} < \nu_{vh} & \quad \text{en compresión vertical} \\
 0 > 1 - \nu_{hh} - \frac{1}{n} \nu_{vh} & \quad \text{en compresión horizontal} \\
 0 > 2(1 - \nu_{hh} - \frac{1}{n} \nu_{vh}) + \frac{1}{n}(1 - 2\nu_{vh}) & \quad \text{en compresión isotrópa}
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

La relación de Poisson de la mayoría de los suelos registra valores positivos que van de 0 a 0.5, dependiendo del nivel de deformación impuesto, del grado de saturación y las condiciones de drenado durante la carga. En el trabajo realizado por Gazetas (1982) se expone que los valores negativos de la relación de Poisson son físicamente significativos, termodinámicamente aceptables y realistas para los suelos. Físicamente, un valor negativo de la relación de Poisson implica que cuando el suelo se sujeta a una compresión axial, éste sufre una contracción lateral en lugar de una expansión debido a que su rigidez horizontal es mayor que la vertical. Gazetas (1982) da ejemplos de suelos con estos valores, entre ellos una arcilla de Londres altamente sobreconsolidada (con una fuerte anisotropía) reportada por Hooper (1975), con valores drenados de:  $\nu_{hh} = -0.35$ ,  $\nu_{vh} = 0.0$ ,  $n = 2.5$ . De acuerdo con (2.41), el valor de  $\nu_{hh}$  es negativo en suelos caracterizados por una relación de  $n$  más grande que 2; sin embargo, este tipo de suelos son raramente encontrados en la realidad.

### 2.2.3.2 Características anisótropas de los suelos

La mayoría de los suelos en su respuesta a los esfuerzos exhiben algún grado de anisotropía. Esta anisotropía puede ser inherente o inducida por esfuerzos (Gazetas, 1982). La primera se refiere a la forma preferencial de los depósitos de suelos, en donde las partículas se orientan de forma horizontal, por tanto la fábrica no es idéntica en todas las direcciones. La anisotropía inducida está relacionada con el estado inicial de esfuerzos al final de la consolidación. La anisotropía inherente se refiere a que la naturaleza del material es anisótropa y el suelo se comporta anisotrópicamente aunque el estado de esfuerzos inicial sea isotrópo. La anisotropía inducida se debe exclusivamente a la deformación asociada a los esfuerzos aplicados. (Sivakugan *et al.*, 1993;). La anisotropía que posee un elemento de suelo *in situ*, el cual se encuentra bajo esfuerzos aplicados después de estar sujeto a una historia de esfuerzos particular, es una combinación de anisotropía inherente e inducida y es llamada anisotropía inicial (Zdravkovic & Potts, 1999). Estudios experimentales en suelos han mostrado algunos aspectos importantes de las características anisótropas de los depósitos de suelo, de los cuales se citan:

#### *Depósitos de arcilla uniformes*

La formación de depósitos de arcillas naturales por sedimentación seguidos por consolidación en una dirección por largos periodos de tiempo, establece una fábrica de suelo que se caracteriza por presentar anisotropía total o parcial. Las partículas del suelo están orientadas en un arreglo horizontal. La orientación ocurre principalmente durante la consolidación secundaria (Yong & Warkentin, 1975). Esta orientación y las fuerzas electromagnéticas son la causa del comportamiento anisótropo de las arcillas.

La magnitud del efecto de la anisotropía sobre los esfuerzos y deformaciones dependerá del grado de sobreconsolidación. Desde el punto de vista de compresibilidad, las arcillas normalmente consolidadas o ligeramente sobreconsolidadas presentan grados de anisotropía bajos con valores de  $n$  que van de 0.5 a 0.74 (Barden, 1963; Gazetas, 1981; Kempfert & Gebreselassie, 2006;

Ratananikom *et al.*, 2013;); mientras que las arcillas laminadas y sobreconsolidadas pueden exhibir una marcada anisotropía con  $1 < n < 4$  (Barden, 1963; Atkinson, 1975; Gazetas, 1981; Lings *et al.*, 2000; Yimsiri & Soga, 2011;). El sobre secado de contenidos de agua cerca o bajo el límite de contracción puede incrementar el grado de anisotropía con valores que pueden llegar a 4 (Frankiln & Matttson, 1972), confirmando la gran influencia de la preconsolidación en el comportamiento anisótropo (Gazetas, 1982).

### *Arenas*

La arena también exhibe una anisotropía inherente en su comportamiento, la cual se debe a la influencia de la gravedad y a la forma de las partículas en el proceso de deposición. Estudios basados en modelos estructurales probabilistas con partículas esféricas señalan que la anisotropía que puede presentar un medio granular de este tipo es consecuencia de la concentración de los puntos de contactos en ciertas zonas de la superficie de los granos (Auvinet, 1986). Esta concentración depende a su vez fuertemente del ángulo de fricción interparticular (Sánchez, Auvinet, & Cambou, 2014). En arenas con granos irregulares se ha observado que las partículas adoptan una orientación preferencial horizontal (Gazetas, 1982). En consecuencia la compresibilidad es mayor en dirección horizontal que en dirección vertical ( $E_v > E_h$ ) (Hoque & Tatsuoka, 1998).

En el caso de anisotropía inducida, el módulo de elasticidad es una función del estado de esfuerzos. La anisotropía en arenas bajo condiciones de esfuerzo isótropo se debe a la fábrica del suelo (Yimsiri & Soga, 2011b), por lo que las características de deformación elásticas de las arenas se vuelven más anisótropas bajo condiciones de esfuerzo anisótropo. El módulo de elasticidad axial  $E_a$  se incrementa fuertemente durante pruebas de compresión y decrece durante pruebas de extensión; el módulo de elasticidad radial  $E_r$  se mantiene constante. Por tanto, el módulo de elasticidad  $E_i$  en dirección  $i$  se relaciona principalmente con los esfuerzos  $\sigma_i$  en esta misma dirección. La relación de Poisson  $\nu_{vh}$  se incrementa con el incremento en la relación de esfuerzos  $\sigma_v/\sigma_h$  (Holubec, 1968; Hoque & Tatsuoka, 1998; Ezaoui & Benedetto, 2009).

### *Suelos compactados*

Los suelos compactados presentan una anisotropía inherente e inducida. La primera está relacionada con la naturaleza del material y la segunda se debe principalmente al estado de esfuerzos y a las condiciones de estado físico (saturación, densidad inicial y método de compactación). Zamhari (1999) mediante pruebas de laboratorio y adoptando el modelo matemático propuesto por Graham y Houlsby (1983) determinó el efecto de las condiciones de estado físico sobre los parámetros elásticos anisótropos, el cual se muestra en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Efecto del estado del material sobre los parámetros elásticos

Condición de estado	Compactación estática				Compactación dinámica			
	$\gamma_d$ (t/m <sup>3</sup> )	$S_r$ (%)	$n$ ( $E_v/E_h$ )	$E_v$ (MPa)	$\nu_{vh}$	$n$ ( $E_v/E_h$ )	$E_v$ (MPa)	$\nu_{vh}$
1.78		65	1.39	135	0.444	1.36	174	0.428
		75	1.20	137	0.390	1.14	122	0.363
		85	1.36	112	0.446	1.09	115	0.348
1.88		65	1.16	215	0.334	1.33	182	0.451
		80	1.08	177	0.395	1.34	175	0.468
		85	1.12	180	0.412	1.24	164	0.448
1.98		65	1.23	286	0.392	1.34	270	0.426
		85	1.18	331	0.393	1.37	287	0.492
		97	1.01	210	0.39	1.33	215	0.506

### 2.2.3.3 Determinación de las constantes elásticas anisótropas en el laboratorio

El grado de anisotropía de un suelo se puede conocer a partir de pruebas triaxiales estándar de las que se obtienen trayectoria de esfuerzos durante la recarga y descarga. En la gráfica de la Figura 2.6 se presenta las trayectorias de esfuerzo bajo condiciones no drenadas de tres suelos que tienen diferente grado de anisotropía. La gráfica está representada en términos de  $q' - p'$ , donde  $q' = \sigma_1' - \sigma_3'$ ; y  $p' = (\sigma_1' + 2\sigma_3')/3$ . Las direcciones de los esfuerzos dependen del valor de  $n = E_h/E_v$ . Si la trayectoria de esfuerzo es vertical el suelo es isótropo con  $n = 1$ ; sin embargo, la trayectoria vertical no garantiza la isotropía, se requiere que las relaciones de Poisson sean iguales (Yu & Dakoulas, 1993).

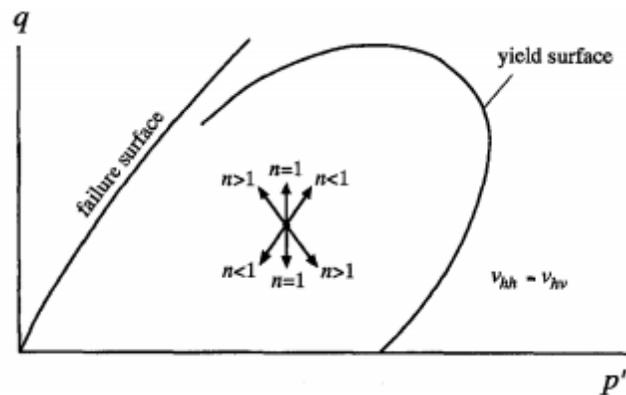


Figura 2.6 Trayectorias de esfuerzo en pruebas triaxiales bajo carga y descarga elástica de un suelo isótropo ( $n=1$ ) y un suelo anisótropo ( $n \neq 1$ ) (Yu & Dakoulas, 1993)

La determinación de las constantes elásticas anisótropas en el laboratorio requiere de un equipo más avanzado que para el caso isótropo. Con las pruebas triaxiales convencionales a compresión solamente se pueden determinar tres constantes elásticas de las cinco que se necesitan para representar un comportamiento anisótropo. Con las pruebas triaxiales cúbicas a compresión es posible evaluar directamente las relaciones de Poisson. El módulo de rigidez al cortante en el plano vertical se puede determinar mediante pruebas triaxiales estándar con elementos bender (geófonos) o con una prueba de corte simple torsional, en donde los esfuerzos cortantes son aplicados externamente a la superficie horizontal y vertical del espécimen

Entre los procedimientos experimentales para evaluar las constantes elásticas anisótropas se pueden nombrar los realizados por algunos autores, como:

Graham y Houlsby (1983) determinaron tres constantes elásticas mediante pruebas triaxiales de compresión en arcillas,  $K^*$ ,  $G^*$  y  $J$ . Las constantes elásticas en términos ingenieriles son:  $E^*$  (módulo de elasticidad modificado),  $\nu^*$  (relación de Poisson modificada) y  $\alpha$  (factor de anisotropía que define la relación de la rigidez horizontal a vertical,  $E_H/E_V$ ). Cuando  $\alpha > 1$  el material es más rígido en dirección horizontal que en vertical, para  $\alpha < 1$  el material es más rígido verticalmente que horizontalmente. El caso isótropo  $\alpha = 1$ . En resumen, este modelo reduce el número de parámetros elásticos anisótropos transversalmente de cinco a tres mediante  $\alpha$ , definidos como:  $E_V = E^*$ ,  $E_H = \alpha^2 E^*$ ,  $\nu_{hh} = \nu^*/\alpha$ ,  $\nu_{vh} = \nu^*$  y  $2G_{vh} = \alpha E^*/(1 + \nu^*)$ . Las ecuaciones explícitas,  $G^*$ ,  $K^*$  y  $J$  en términos de  $E^*$ ,  $\nu^*$  y  $\alpha$  fueron propuestas por Muir Wood (1990).

Kirkgard y Lade (1991) evaluaron  $\nu_{vh}$  y  $\nu_{hh}$  directamente de pruebas triaxiales cúbicas a compresión y  $n = E_H/E_V$  de pruebas triaxial estándar no drenadas.

Lings *et al.*, (2000) determinaron los cinco parámetros elásticos mediante pruebas triaxiales con sistemas de elementos bender (geófonos) montados horizontal y transversalmente. Los elementos bender permitieron medir por separado  $G_{vh}$  y  $G_{hh}$ ; posteriormente, combinando los resultados de las pruebas triaxiales se determinaron los cinco parámetros elásticos anisótropos. Se empleó un sistema de medición de deformaciones axiales y radiales de alta resolución.

Ratananikom (2013) describe el comportamiento anisótropo elástico de la arcilla de Bangkok mediante un aparato triaxial avanzado con sistemas de elementos bender. La determinación de las constantes elásticas ( $E_V$ ,  $E_H$ ,  $\nu_{vh}$ ,  $\nu_{hh}$ ,  $G_{vh}$  y  $G_{hh}$ ) se basó en las hipótesis de Gaham y Houlsby (1983) y fue una función de cuatro parámetros:  $A$  y  $n$  (parámetros adimensionales),  $\alpha$  (factor de anisotropía) y  $\nu^*$  (relación de Poisson modificada). Sus resultados muestran una mayor consistencia en los valores de  $E$  y  $G$  que en los valores de  $\nu$ . Los autores señalan que la fuente de error pudiera radicar en las dificultades para medir la relación de Poisson en pequeñas deformaciones.

Otros trabajos publicados relacionados con la descripción de las pruebas para determinar parámetros elásticos anisótropos se pueden consultar en: Atkinson, 1975; Saada & Ou, 1973; Simonini, 1987; Yu & Dakoulas, 1993; Hoque & Tatsuoka, 1998; Ezaoui & Benedetto, 2009; Yimsiri & Soga, 2011a.

#### 2.2.3.4 Influencia de la anisotropía en el comportamiento elástico lineal del suelo

Como se expuso en los incisos de arriba, la mayoría de los suelos exhibe algún grado de anisotropía; su comportamiento mecánico en algunas ocasiones se puede representar a través de un modelo elástico que permite obtener de forma sencilla predicciones razonables del comportamiento de la estructura. Se conoce que una buena aproximación de la respuesta de un suelo se basa en el modelo constitutivo que se utiliza, el cual se define mediante un cierto número de parámetros mecánicos. Un modelo anisótropo elástico (en el caso de que sea posible utilizarlo) permite reducir el error en la predicción de las deformaciones debido a que el número de parámetros empleados son cinco comparado con los dos del modelo isótropo elástico.

Si bien, en la literatura la atención al estudio de la anisotropía transversal elástica se ha puesto con mayor interés al análisis de la distribución de desplazamientos y esfuerzos dentro de la masa de suelo, los resultados muestran un panorama útil para comprender el efecto de cada parámetro

constitutivo anisótropo en el comportamiento de estructuras térreas. A continuación se presentan los resultados de algunos trabajos relacionados con análisis anisótropos:

Hooper (1975) estudió el efecto de la anisotropía transversal sobre los asentamientos superficiales en un medio homogéneo, si el módulo de elasticidad es constante con la profundidad, y heterogéneo, si el módulo incrementa con la profundidad, sometido a una carga superficial axisimétrica aplicada sobre un área circular. Para valores de  $n = E_H/E_V$  en el rango normalmente encontrados en los depósitos de suelo natural, los asentamientos calculados a largo plazo son relativamente sensibles a  $\nu'_{vh}$  (relación de Poisson en condiciones drenadas) pero insensibles a  $\nu'_{hh}$ . El autor hizo notar que los cálculos de los asentamientos diferenciales y totales pueden ser apreciablemente reducidos si se toma en cuenta la anisotropía transversal.

Gazetas (1982) analizó las implicaciones de la anisotropía transversal sobre los desplazamientos superficiales y distribución de esfuerzos de una masa de suelo homogénea sometida a carga superficial parabólica axisimétrica. Los resultados mostraron que los desplazamientos verticales y laterales, los esfuerzos laterales y los esfuerzos cortantes máximos son particularmente sensibles a la relación de  $n = E_H/E_V$ , a  $m = G_{vh}/E_V$  y a la relación de Poisson  $\nu_{vh}$ . Los esfuerzos normales bajo el centro de la carga son también afectados de forma apreciable por los valores considerados en estos parámetros, en comparación con los resultados obtenidos con la teoría de elasticidad isotrópica clásica que predicen que los esfuerzos verticales son independientes de la relación de Poisson. La relación de Poisson  $\nu_{hh}$  se encontró tener una influencia menor en los desplazamientos y esfuerzos verticales, mientras que en los esfuerzos radiales el efecto de  $\nu_{hh}$  resultó ser más visible.

Lee & Rowe (1989) realizaron análisis numéricos con elemento finito para estimar los asentamientos superficiales en túneles construidos en suelo blando. Los resultados sugirieron que se debe poner atención al efecto del módulo cortante  $G_{vh}$  y al del módulo de elasticidad vertical  $E_V$ , debido a las deformaciones por cortante que se pueden desarrollar alrededor del túnel como consecuencia de los mecanismos colocados para soportar el arqueo.

Con respecto al papel de la anisotropía en el análisis de estructuras térreas se ha puesto a la luz algunas cuestiones importantes acerca de la influencia de los parámetros anisótropos elásticos sobre los desplazamientos y esfuerzos. Dentro de la primeras contribuciones de este tema se puede citar el trabajo realizado por Halpern & Christiano (1978) quienes analizaron el efecto de la anisotropía sobre los desplazamientos y esfuerzos de un terraplén construido por capas. Aunque sus resultados no son muy explícitos, se señala que el valor de  $\nu_{vh}$  tiene una fuerte influencia en los resultados (desplazamientos verticales y horizontales, esfuerzos horizontales y cortantes). Un trabajo más detallado sobre el comportamiento anisótropo de estructuras térreas fue estudiado por Pérez\_Duarte (2000) y sus resultados se presentan en el inciso 2.3.

#### 2.2.3.5 Correlación entre $E$ y $\nu$

En la literatura no existe información que establezca una correlación explícita entre el módulo de elasticidad  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$ ; la razón puede deberse a que la determinación de estos parámetros está asociada a diversas condiciones (carga, características de las partículas, contenido de agua, historia de esfuerzos, cementación, etc.) que conducen a valores diferentes de estos dos parámetros.

En la gráfica de Figura 2. se presentan valores de  $E$  y  $\nu$  para diferentes tipos de materiales, se observa que no hay un patrón de correlación entre estos dos parámetros que muestren que a medida que aumente  $E$ , disminuye o decrece  $\nu$  y viceversa.

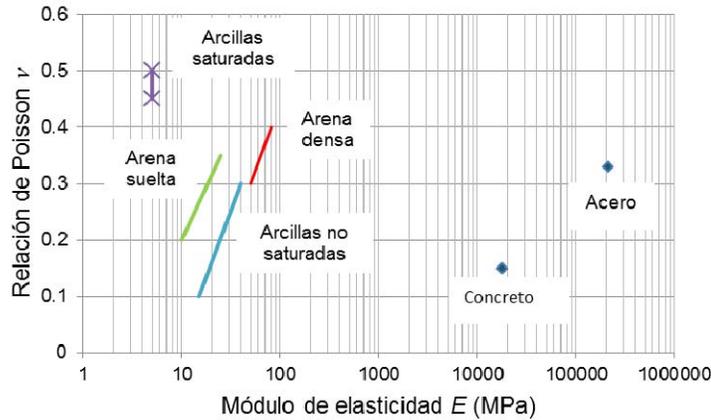


Figura 2.7 Variación de la relación de Poisson  $\nu$  en función del módulo de elasticidad  $E$

Un ejemplo que muestra que la correlación entre  $E$  y  $\nu$  depende de las condiciones de esfuerzo, es referido al estudio realizado por Holubec (1968). El estudio consistió en pruebas de compresión axial realizadas a una arena de Ottawa en donde se consideró que el material era anisótropo. La Figura 2.8 presenta la variación del módulo de elasticidad  $E_1$  (axial),  $E_3$  (lateral),  $\nu_1$  (axial) y  $\nu_3$  (lateral) para diferentes valores de esfuerzos. En la gráfica de esta figura se muestra que el módulo de elasticidad axial  $E_1$  incrementa con el esfuerzo normal medio y con el esfuerzo desviador. El módulo de elasticidad lateral  $E_3$  incrementa con el esfuerzo normal medio, pero decrece con el esfuerzo desviador. La relación de Poisson axial  $\nu_1$  decrece mientras que la relación de Poisson lateral  $\nu_3$  incrementa con los esfuerzos normal medio y el esfuerzo desviador. Se puede observar que existe una correlación entre  $E$  y  $\nu$ . Conforme incrementa el esfuerzo desviador,  $E_1$  aumenta y  $\nu_1$  disminuye, mientras que  $E_3$  disminuye y  $\nu_3$  aumenta. El incremento del esfuerzo medio provoca un aumento de  $E_1$  y en  $\nu_1$ , así como en  $E_3$  y  $\nu_3$ .

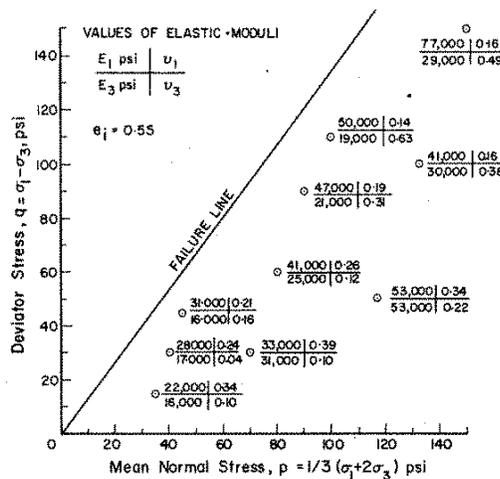


Figura 2.8 Variación del módulo de elasticidad y relación de Poisson en función de los esfuerzos (Holubec, 1968)

Otro resultado encontrado en el laboratorio sobre la correlación de  $E$  y  $\nu$  en arena densa es el proporcionado por Fawaz *et al.* (2002). Al aumentar el esfuerzo de confinamiento, el módulo de elasticidad inicial incrementa y la relación de Poisson disminuye.

En conclusión, es complejo establecer una correlación entre  $E$  y  $\nu$  debido a que es una función del estado del elemento del suelo que se relaciona con el tipo de material.

## 2.3 Comportamiento elástico lineal de estructuras térreas

### 2.3.1 Antecedentes

#### 2.3.1.1 Características físicas de una presa

Las características de una cortina típica de tierra y enrocamiento se describen a continuación

- |                                 |                           |
|---------------------------------|---------------------------|
| 1) Cresta o corona              | 10) Talud aguas arriba    |
| 2) Revestimiento de la roca     | 11) Talud aguas abajo     |
| 3) Filtros                      | 12) Pantalla de inyección |
| 4) Corazón o núcleo impermeable | 13) Galería               |
| 5) Trinchera                    | 14) Drenes                |
| 6) Transiciones                 | 15) Pozo de alivio        |
| 7) Enrocamientos                | 16) Embalse o vaso        |
| 8) Depósito aluvial             | 17) Bordo libre           |
| 9) Roca basal                   | 18) Altura de la cortina  |

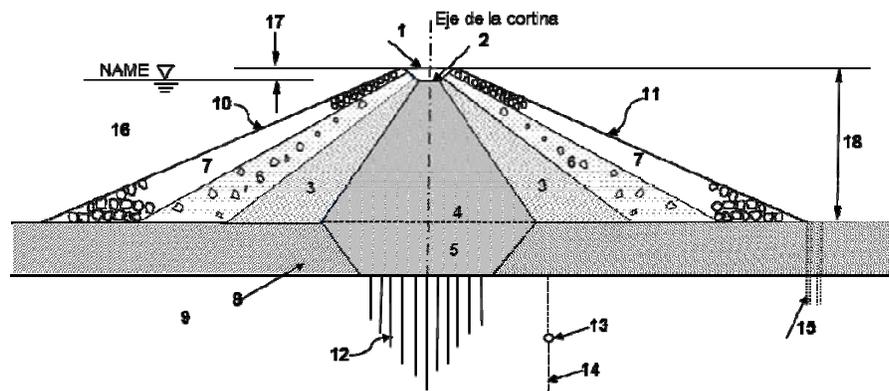


Figura 2.9 Sección típica de una cortina de tierra y enrocamiento (Marsal & Reséndiz, 1975)

### 2.3.1.2 Agrietamiento en presas de tierra y enrocamiento

El diseño de una presa se realiza con el fin que no se produzcan fallas graves a lo largo de su vida útil. Las principales causas de falla son: agrietamiento, deslizamiento del talud aguas abajo, tubificación y licuación. Sin embargo, el agrietamiento es una falla importante que puede desencadenar otros problemas como tubificación (Marsal & Reséndiz, 1975). Las investigaciones realizadas en este tema han permitido establecer el origen del agrietamiento, del cual se habla a continuación.

Las presas de tierra y enrocamiento son estructuras construidas con materiales térreos que por diversas razones pueden estar sometidos a esfuerzos negativos que conducen a la formación de zonas de tensión, las cuales se manifiestan en agrietamientos internos o externos que se propagan transversal o longitudinalmente al eje de la cortina. El problema de agrietamiento se asocia con la erosión del corazón impermeable que puede ocasionar falla por tubificación o fracturamiento hidráulico.

Las grietas se pueden presentar en dirección paralela o transversal al eje de la presa y se pueden formar horizontalmente, verticalmente o en planos inclinados, dependiendo de la causa de la falla. Las grietas longitudinales generalmente no se consideran críticas para la seguridad de la presa, excepto cuando ellas son una indicación de falla por cortante del talud o cuando el corazón es inclinado (Marsal & Reséndiz, 1975). Sin embargo, las grietas transversales sí son perjudiciales en presas con corazón impermeable.

Las primeras aportaciones en México con respecto a la determinación de las causas de agrietamiento se debieron a Covarrubias (1975). La investigación se basó en análisis numéricos con el MEF. Se consideró un comportamiento esfuerzo-deformación de los materiales elástico-lineal isótropo, definido por el módulo de deformación  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$ , y un estado de deformación plana para secciones longitudinales y transversales. Se consideró una sola capa de construcción. Los resultados de estos análisis establecieron que una de las principales causas de formación de zonas de tensión está relacionada con la geometría de la boquilla.

De acuerdo con la experiencia, los factores más importantes asociados con la formación de grietas están relacionados con:

- a) Geometría de la boquilla.
- b) Interacción entre los materiales de la cortina más compactados y menos compactados (corazón-respaldos o cortina-ladera).
- c) Asentamientos diferenciales debidos a la compresibilidad de los materiales con que se construye la cortina la cual induce deformaciones en la cimentación y en los empotramientos.
- d) Alta velocidad de deformación provocada por llenado rápido del embalse.
- e) Esfuerzos transitorios inducidos por temblores

Las grietas pueden ocurrir durante la construcción, durante el primer llenado o; muchos años después, durante la operación, debido a la consolidación y a los desplazamientos, (Covarrubias, 1975).

A continuación se presenta una descripción de los principales factores que inducen agrietamiento en presas:



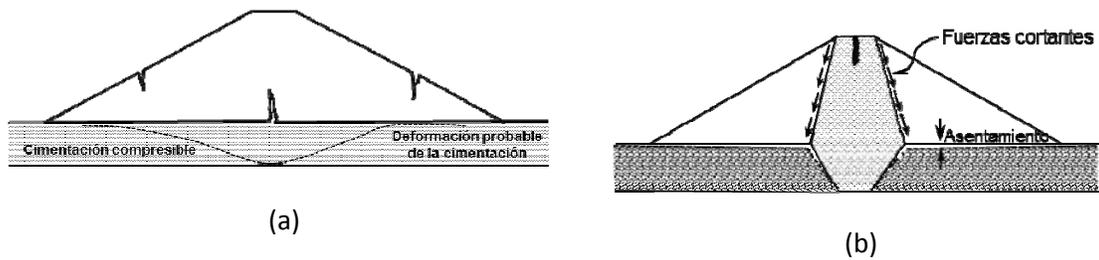


Figura 2.12 Grietas por asentamientos diferenciales de la cimentación (Marsal & Reséndiz, 1975)

- d) Alta velocidad de deformación provocada por llenado rápido del embalse: este efecto se debe a la saturación de los materiales en el respaldo aguas arriba de la presa y a la altura de carga de agua.
- e) Esfuerzos transitorios inducidos por temblores: este tipo esfuerzos ocasiona movimientos dinámicos en las diferentes partes de la cimentación y en la estructura de la presa que propician el desarrollo de grietas que pueden ser longitudinales (asociadas con grandes oscilaciones laterales), Figura 2.(a), o transversales (se asocian con grandes oscilaciones laterales y transversales), Figura 2.(b). De acuerdo con las mediciones de campo en la presa El caracol, se confirma que la parte superior de una presa de tierra y enrocamiento es la más sensible a los sismos (Alberro, 1986).

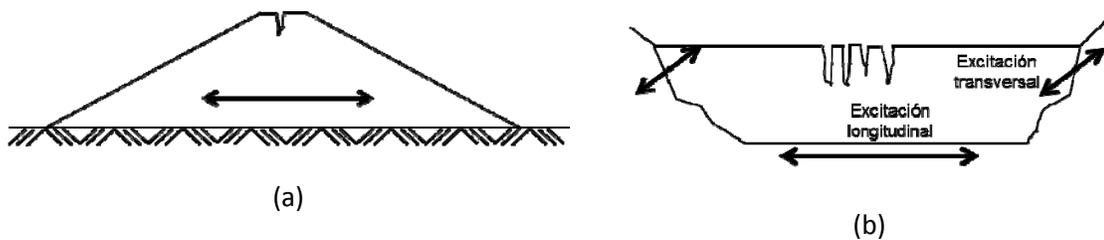


Figura 2.13 Grietas ocasionadas por sismo

### 2.3.1.3 Criterios de falla

El conocimiento del estado de esfuerzos que se desarrolla en el interior de la cortina permite conocer la localización y extensión de zonas de tensión. Los criterios de falla existentes en la mecánica de fracturas proporcionan una visión de la magnitud de esfuerzos y deformaciones que se pueden alcanzar en el interior de una presa.

Con base en los criterios de falla, cuando un material se somete a tensión simple, existen seis magnitudes que se alcanzan simultáneamente cuando inicia la fluencia:

- 1) El esfuerzo principal máximo
- 2) El esfuerzo cortante máximo
- 3) La deformación longitudinal unitaria máxima
- 4) La energía de deformación
- 5) La energía de distorsión
- 6) El esfuerzo tangente octaédrico

Sin embargo, en estado de tensión bidimensional o tridimensional estas seis magnitudes no se alcanzan simultáneamente. Es necesario seleccionar el criterio que se apegue más al tipo de falla que se analiza. En el caso de los materiales de una presa de tierra y enrocamiento, los más convenientes son:

*Criterio de esfuerzo principal máximo o criterio de Rankine*

Este criterio fue propuesto por Rankine, establece que en un punto de un sólido el límite del estado de esfuerzos inicia cuando uno de los esfuerzos principales alcanza un valor igual al esfuerzo límite a tensión o compresión, que se obtiene de pruebas de tensión o compresión simples, este criterio se expresa como:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{yt} \\ \sigma_3 &= \sigma_{yc}\end{aligned}\tag{2.43}$$

donde  $\sigma_{yt}$  es el esfuerzo de fluencia a tensión y  $\sigma_{yc}$  a compresión.

*Criterio de la deformación longitudinal unitaria máxima*

Este criterio es conocido como Saint-Venant, expresa que el estado de esfuerzos en un punto de un sólido inicia su estado límite cuando la deformación longitudinal unitaria máxima es igual a:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))\tag{2.44}$$

$\varepsilon_y$  se obtiene de una prueba de tensión en donde el material alcanza el esfuerzo último.

En arcillas de núcleos de presas Alberro (1986) reporta valores de deformación en la falla por tensión que varían entre 0.19% y 0.24%.

### 2.3.2 Comportamiento *in situ* de los materiales constitutivos

Durante la etapa de construcción de un terraplén, los materiales constitutivos tienen un comportamiento aproximadamente elástico-lineal que se puede caracterizar con un módulo de deformación  $E$  y una relación de Poisson  $\nu$ , siempre que se considere la no linealidad geométrica, construcción por capas (Alberro, 1998). Son aceptables entonces, los resultados de los análisis simplistas que consideran un comportamiento elástico lineal, los cuales han hecho posible caracterizar cualitativamente la influencia de los parámetros constitutivos sobre los desplazamientos y esfuerzos (Covarrubias, 1970; Louault, 1997; Pérez-Duarte, 2000).

### 2.3.3 Comportamiento cualitativo general

Clouhg (1967) analizó el efecto de construcción incremental sobre el estado de esfuerzos y deformaciones desarrollados en el terraplén, consideró un comportamiento elástico lineal de los materiales constitutivos. De sus análisis estableció que el comportamiento mecánico general cualitativo de un terraplén compactado puede ser determinado en función de las propiedades de los materiales, señaló que: a) los desplazamientos y las deformaciones calculadas varían en forma inversamente proporcional al módulo de deformación  $E$ , los esfuerzos no son afectados por este parámetro; b) los desplazamientos, las deformaciones y los esfuerzos, varían linealmente con el

peso volumétrico  $\gamma$ ; c) la variación de los desplazamientos, las deformaciones y los esfuerzos dependerá de la magnitud de la relación de Poisson  $\nu$ .

### 2.3.4 Influencia de $E$ y $\nu$ en la formación de zonas de tensión

En el caso de análisis con comportamiento constitutivo elástico lineal isótropo, Covarrubias (1975) señala, que generalmente para seleccionar las propiedades elásticas ( $E$  y  $\nu$ ) se considera, para el caso de terraplenes homogéneos, que la magnitud de los esfuerzos no depende del módulo de elasticidad, y cualitativamente, la influencia de la relación de Poisson  $\nu$  en la distribución de esfuerzo es pequeña, cuando se considera únicamente el intervalo de valores característicos de los materiales usados en la construcción de presas de tierra y enrocamiento. Cuando se trata de terraplenes heterogéneos, se considera que los esfuerzos están fuertemente relacionados con el módulo de elasticidad de los materiales en las diferentes zonas de la presa. En este caso se procede a exagerar el módulo de elasticidad para acentuar aquellos aspectos determinantes en la formación de grietas. Sin embargo, en su trabajo de investigación, Covarrubias (Hansteen, 1995) encontró que la relación de Poisson sí influye en la extensión de zonas de tensión. En la gráfica de la Figura 2., correspondiente al análisis en el que se consideró una sola capa de construcción, se observa que el área de tensión y la magnitud de la tensión máxima incrementa cuando la relación de Poisson decrece, la longitud de la cresta en tensión se encontró que es independiente de  $\nu$ . La influencia de la relación de Poisson sobre dichas zonas fue confirmado por Hansteen (1995) y Louault (1997).

En el caso de un comportamiento elástico lineal isótropo, el módulo de elasticidad no influye en la extensión de zonas de tensión, (Louault, 1997).

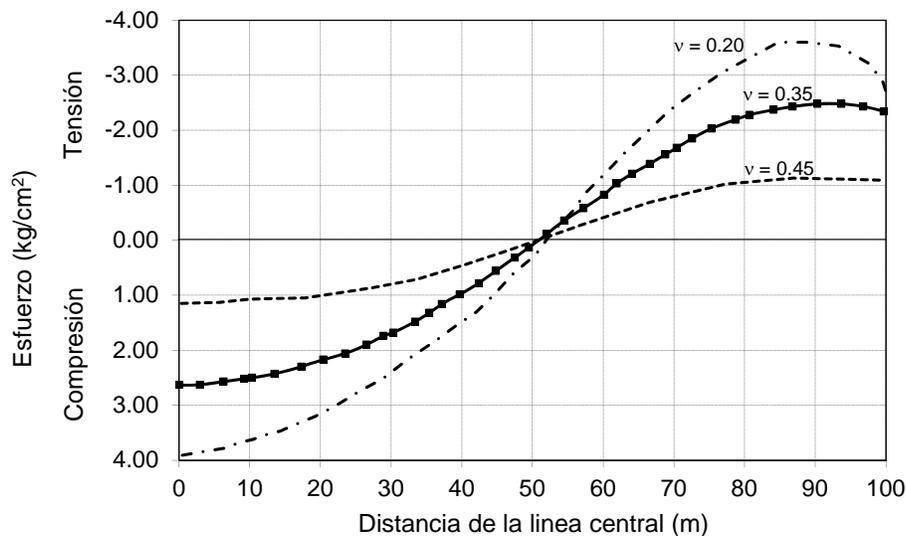


Figura 2.14 Variación de los esfuerzos horizontales en la cresta para diferentes valores de la relación Poisson. Curva determinada por Covarrubias (Hansteen, 1995)

Para el caso de un comportamiento elástico-lineal anisótropo, estudios realizados con el MEF han expuesto que la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  tiene una influencia importante en los desplazamientos y esfuerzos de un terraplén construido por capas, (Halpern y Christiano, 1978, Pérez-Duarte, 2000). Asimismo, en un análisis paramétrico realizado por Pérez-Duarte (2000) se concluyó que las zonas de tensión están relacionadas con el grado de anisotropía ( $n = E_v/E_h$ ), para valores pequeños de

$E_h$  las zonas de tensión son importantes. En cuanto al módulo de rigidez al cortante  $G_{vh}$ , se observó que actúa en la misma forma que  $n$ , es decir, que entre mayor sea este parámetro las zonas de tensión son más importantes.

Los resultados presentados en el párrafo anterior exponen que no solamente la relación de Poisson afecta localización y extensión de zonas de tensión; si no también el grado de anisotropía tiene un papel importante sobre estas zonas. Un análisis que tome en cuenta la variabilidad espacial de los parámetros de los materiales permitirá conocer más acerca del comportamiento de este tipo de obras.

## Capítulo 3

---

### **ANÁLISIS ESTOCÁSTICO DE ESTRUCTURAS TÉRREAS CON EL MEFEE**

#### 3.1 Introducción

Los suelos son altamente variables en sus propiedades por naturaleza. La variabilidad espacial es una de las principales fuentes de incertidumbre del suelo y se debe a las diferentes condiciones de depósito e historia de carga que varían de un punto a otro en la masa del suelo. Las estructuras térreas se construyen con este tipo de materiales y por tanto sus propiedades tienen un grado importante de incertidumbre. Aunque un terraplén se construya con un mismo tipo de material, los bancos de materiales se alejan de ser uniformes. Las desviaciones con respecto a las técnicas de compactación y las condiciones ambientales durante la construcción introducen variaciones espaciales adicionales (Auvinet & González, 2000). Asimismo, el proceso de construcción de este tipo de estructuras induce cierta anisotropía que genera deformaciones mayores en dirección vertical que en la horizontal. La variabilidad espacial en conjunción con la anisotropía, tienen un papel significativo en la precisión de los resultados de la modelación de estructuras térreas.

Un camino racional en nuestros días para cuantificar la incertidumbre que induce la dispersión de los parámetros de los materiales sobre los resultados de los análisis geotécnicos, es el Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE) que combina la teoría de probabilidad con el Método del Elemento Finito (MEF) (Cambou, 1974; Auvinet, 2002). En este método, la incertidumbre en los parámetros del material se representa a través de variables aleatorias o campos aleatorios. Generalmente, la incertidumbre sobre los resultados se cuantifica a través de la desviación estándar o coeficiente de variación. Las técnicas más comunes que permiten conocer la respuesta estadística (media, desviación estándar) son: la de perturbaciones (Auvinet, 2002; Kleiber & Hien, 1992) y la de simulación de Monte Carlo (MC) (Auvinet, 2002). Con el primer método, se procede a calcular la solución con el MEF y después la incertidumbre. En el segundo, el cálculo de la respuesta estadística es también independiente al planteamiento matemático de la ecuación diferencial, se recurre a repetidas simulaciones. En ambos casos la incertidumbre se puede modelar mediante variables aleatorias o campos aleatorios.

En la modelación estocástica de estructuras térreas, que consiste en evaluar el efecto de la incertidumbre de los parámetros sobre los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos,

generalmente se ha recurrido al método de perturbaciones considerando variables aleatorias. Los resultados de estos análisis han proporcionado referencias útiles acerca de la influencia de la incertidumbre de los parámetros sobre resultados de algunos análisis mecánicos como: elástico no lineal (Orlandi, 1996; Mellah, 1999, Vázquez, 2005), elástico lineal isótropo (Louault, 1997) y anisótropo (Peréz-Duarte, 2000).

Por ejemplo, dentro del fenómeno de agrietamiento en presas de tierra y enrocamiento, los análisis estocásticos elásticos lineales mediante variables aleatorias, han mostrado que la incertidumbre de la relación de Poisson tiene una influencia importante sobre las incertidumbres de los esfuerzos principales menores (Louault, 1997). Si se considera la anisotropía (Peréz-Duarte, 2000), la incertidumbre de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  tiene un efecto importante sobre las incertidumbres de los desplazamientos y esfuerzos. En este caso, también la correlación entre las incertidumbres de un grupo de mismos parámetros (por ejemplo: entre  $E_v$  y  $E_h$  o entre  $\nu_{vh}$  y  $\nu_{hh}$ ) tiende a aumentar las incertidumbres sobre los resultados de los análisis.

Sin embargo, cuando se requiere evaluar variabilidad espacial es conveniente recurrir a la modelación con campos aleatorios (Auvinet, 2002; Vanmarcke, 1983). Una opción es el método de MC, el cual permite obtener la solución del sistema a través de repetidas simulaciones de campos aleatorios que conllevan a esfuerzos computacionales muy altos. En el contexto del MEF, otra alternativa, es el método de perturbaciones en donde la variabilidad espacial se puede modelar desde la expansión en serie de Taylor o acomplándolo con las técnicas de discretización de campos aleatorios (Sudret & Der Kiureghian, 2000; Noh & Kwak, 2006). Una desventaja de este método es que el tiempo de cálculo es muy alto cuando se consideran coeficientes de variación grandes (Matthies *et al.*, 1997). Dentro de este mismo contexto, el Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) (Ghanem & Spanos, 1991) puede ser otro camino. En esta técnica, la representación de la incertidumbre se realiza de forma intrínseca, desde la formulación. Consiste en expandir la variabilidad por medio funciones base y posteriormente, la solución de la ecuación<sup>1</sup> se obtiene por un método de Galerkin (Matthies, 2008). El enfoque espectral está formulado para una ley constitutiva elástica lineal y solamente permite modelar la incertidumbre del módulo de elasticidad.

Para estudiar cómo la variabilidad espacial, que influye en la determinación de los parámetros, se propaga en el campo de desplazamientos y esfuerzos que ocurren durante la construcción de una presa de tierra y enrocamiento. En esta sección se presenta una extensión de la formulación del MEFEE a una ley constitutiva elástica lineal anisótropa para análisis en dos dimensiones. La extensión permite realizar investigaciones sobre la influencia de los diversos parámetros, en forma aislada o conjunta.

Cuando se modela la variabilidad espacial con el MEF, en rigor los campos aleatorios deberían ser tridimensionales. En un análisis de estado plano de deformación se considera una estricta homogeneidad en la dirección perpendicular al plano de análisis (Auvinet, 2002). Una posibilidad de análisis en dos dimensiones sería un estado plano de esfuerzo, en donde la dimensión longitudinal de la presa forma parte del plano de análisis. Sin embargo, con el fin tener herramientas de comparación, que permitan entender el efecto de la variabilidad espacial sobre los

---

<sup>1</sup> Es conveniente puntualizar que dentro del marco de la solución de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas, Monte Carlo también se puede utilizar, aunque no permite tener una relación funcional explícita entre las variables aleatorias independientes y la solución de la ecuación como en el caso del MEFEE. En la literatura se han realizado comparaciones entre los métodos de Galerkin y Monte Carlo (Matthies, 2008; Keese, 2003) y es difícil establecer ventajas de un método con respecto a otro.

resultados calculados con el MEF, se analiza el campo de desplazamientos y esfuerzos para estados planos de esfuerzo y deformación. Asimismo, se pretende explorar las ventajas del enfoque espectral en la modelación estocástica de este tipo de estructuras.

### 3.2 Incertidumbre en la modelación de presas

#### 3.2.1 Fuentes de incertidumbre

En los suelos compactados existen dos principales fuentes de incertidumbre que afectan la determinación de los parámetros elásticos lineales anisótropos:

- La variabilidad espacial que está relacionada con los procesos (geológicos, físico-químicos y ambientales) de formación del suelo. Esta situación conduce a que las propiedades del suelo varíen de un punto a otro. Este fenómeno se agudiza si existen desviaciones en las técnicas de compactación. Las condiciones ambientales, también introducen variaciones adicionales. La incertidumbre debida a la variabilidad espacial se puede reducir si se incrementa el número de sondeos o calas pero no desaparece totalmente.
- Los errores aleatorios y sistemáticos. Los aleatorios se cometen durante la realización de las pruebas de laboratorio; y los sistemáticos son debidos a un sesgo en la medición producido por ejemplo, por el remoldeo de muestras o por el uso de correlaciones aproximadas entre propiedades físicas y mecánicas.

En este trabajo el estudio de incertidumbre está limitado solamente a la variabilidad espacial.

#### 3.2.2 Representación de la incertidumbre en geotecnia

Se puede recurrir al concepto de variable aleatoria o campo aleatorio (Auvinet, 2002) para tratar, en términos probabilistas la incertidumbre de los parámetros que intervienen en los análisis con elementos finitos.

##### 3.2.2.1 Espacio de probabilidad

El espacio de probabilidad de variables aleatorias es denotado por  $(\Omega, F, P)$ , donde  $\Omega$  es el espacio de los resultados posibles  $\theta$  de un experimento,  $\theta$  pertenece a  $\Omega$ ,  $F$  forma una clase aditiva completa ( $\sigma$ -álgebra) asociada a ciertos subconjuntos de  $\Omega$  llamados eventos;  $P$  es la medida de probabilidad de  $F$ .

##### 3.2.2.2 Variables aleatorias.

Una variable aleatoria  $V$  se define como una función que asocia el resultado de un experimento

( $\theta$ ) a los números reales,  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Se recurre a este concepto cuando se necesita modelar la incertidumbre asociada a escasa información respecto al parámetro de interés  $V$ , en donde la modelación se realiza por subdominios que reúnen ciertas condiciones de homogeneidad. Se caracteriza por su valor esperado  $E\{V\}=\mu_V$  y su varianza  $Var[V]$ . La representación de la variabilidad espacial por variables aleatorias no toma en cuenta la posición específica de las muestras ni la dependencia existente entre ellas.

##### 3.2.2.3 Campos aleatorios

Un campo aleatorio  $V(X, \theta)$  es un conjunto de variables aleatorias que toman en cuenta la posición espacial  $X$ . Este concepto se utiliza para representar la variabilidad espacial en un dominio dado. La correlación espacial entre las distintas variables puntuales se describe por medio de la función de autocovarianza. Un campo aleatorio se define por medio de los siguientes parámetros y funciones (Auvinet, 2002):

- Valor esperado  $\mu_V(X, \theta) = E\{V(X, \theta)\}$
- Varianza:  $\sigma_V^2(X, \theta) = \text{Var}[V(X, \theta)]$
- Desviación estándar:  $\sigma_V(X, \theta) = \sqrt{\sigma_V^2(X, \theta)}$
- Coeficiente de variación:  $CV = \sigma_V / E\{V(X, \theta)\}$
- Función de autocovarianza:  $C_V(X_1, X_2) = E\{[V(X_1) - \mu_V(X_1)][V(X_2) - \mu_V(X_2)]\}$
- Función de autocovarianza normalizada:  $\rho_V(X_1, X_2) = C_V(X_1, X_2) / \sigma_V(X_1)\sigma_V(X_2)$

Un campo aleatorio es estacionario en el sentido amplio si el valor esperado de la variable de interés es constante en todo el dominio y si la función de autocovarianza depende solamente de la distancia entre dos puntos  $X_1$  y  $X_2$ .

Un campo aleatorio es Gaussiano si las variables que constituyen el campo tienen una densidad de probabilidad conjunta Gaussiana.

### 3.3 Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE)

En matemáticas existen herramientas que son un camino eficiente para representar la incertidumbre, contenida en los parámetros del modelo constitutivo, a través información probabilista y propagarla a la solución del sistema. Cuando estas herramientas se combinan con el método del elemento finito, los resultados de los análisis de incertidumbre se obtienen con buen nivel de aproximación. Entre estas herramientas matemáticas se puede nombrar el espacio de Hilbert (espacio ortogonal) que se define por el producto interno y dentro del cual se establece la esperanza matemática (Loève, 1977). Este espacio permite extender el concepto de ortogonalidad a espacios aleatorios de dimensiones infinitas, los cuales han sido útiles para desarrollar la teoría de campos aleatorios, así como la teoría de aproximación para problemas de valores en la frontera, como el procedimiento de Galerkin.

Un modelo de elemento finito estocástico formulado dentro de este espacio, representa la incertidumbre en un espacio funcional de dimensión nueva aleatoria, y la aproximación numérica a la solución del sistema, utiliza las mismas propiedades algebraicas inherentes de los análisis deterministas, tales como minimización de la norma y proyecciones ortogonales, adaptadas a este espacio ortogonal por medio de coeficientes aleatorios (variables aleatorias) (Ghanem, Doostan, & Red-Horse, 2008), tal es el caso del MEFEE.

El Método del Elemento Finito Estocástico Espectral<sup>2</sup> (MEFEE) fue propuesto por Ghanem y Spanos (1991) y está formulado en un espacio ortogonal de variables aleatorias de segundo

---

<sup>2</sup> El nombre espectral está relacionado al hecho de que la formulación de la ecuación de equilibrio estocástica del método, se realiza mediante series truncadas. Como es el caso de los llamados métodos espectrales, en los que la solución de una ecuación diferencial se realiza mediante una serie truncada que está constituida por funciones deterministas (funciones trigonométricas o polinomios ortogonales) las cuales definen el espacio de frecuencias (espacio característico), y los coeficientes de los términos que la integran son las incógnitas (Camacho-Glaván, Guardián-Soto, & Rodríguez\_Green, 2005).

orden. Está limitado al caso de un comportamiento constitutivo elástico-lineal. La formulación original del método consiste en representar la variabilidad del módulo de elasticidad  $E$  mediante campos aleatorios Gaussianos con una expansión truncada en serie llamada de *Karhunen-Loève* que utiliza un conjunto de variables aleatorias ortogonales que se define como una base en el espacio de Hilbert; el campo de desplazamientos se representa sobre una base de polinomios de Hermite (polinomios ortogonales) llamada *caos polinomial*, la cual se construye en términos de las variables aleatorias de la expansión de *Karhunen-Loève*.

A continuación se presentan las herramientas matemáticas que constituyen la base de la formulación del MEFEE.

### 3.3.1 Representación de la incertidumbre

Todo campo aleatorio estacionario en el sentido amplio se puede representar por medio de su espectro de potencia<sup>3</sup> y por tanto como una serie o integral de Fourier; dicha representación admite una descomposición espectral del campo aleatorio mediante productos de funciones deterministas (funciones trigonométricas, funciones características) en la región, en donde las funciones sólo dependen de variables aleatorias (Matthies, 2008). Una posibilidad de tratar con la incertidumbre bajo este criterio es a través de la expansión en serie de *Karhunen-Loève*<sup>4</sup> (Papoulis, 1991), también conocida como descomposición ortogonal, la cual se basa en la expansión espectral de la función de autocovarianza para aproximar el campo aleatorio mediante una combinación lineal de funciones deterministas ortonormales  $\varphi_i(X)$  y variables aleatorias  $\xi_i(\theta)$  no correlacionadas como coeficientes, con la siguiente forma general:

$$V(X, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(X) \xi_i(\theta) \quad (3.1)$$

La expresión (3.1) representa un campo aleatorio con media cero, cuya función de autocovarianza  $C_V(X_1, X_2)$  es:

$$C_V(X_1, X_2) = E\{V(X_1)V(X_2)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i(X_1)c_j(X_2)E\{\xi_i(\theta)\xi_j(\theta)\} \quad (3.2)$$

Tomando en cuenta la ortonormalidad de la base  $\xi_i(\theta)$  la función de autocovarianza se escribe:

$$C_V(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(X_1)c_i(X_2) \quad (3.3)$$

Por otra parte, la función de autocovarianza tiene la siguiente descomposición espectral:

$$C_V(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \varphi_i(X_1)\varphi_i(X_2) \quad (3.4)$$

<sup>3</sup> El espectro de potencia  $S_{VV}(w)$  de un proceso estocástico se puede definir como la transformada de Fourier (una relación lineal entre el espacio físico y de frecuencias) de su función de autocorrelación (Auvinet, 1987).

<sup>4</sup> Esta expansión es una serie tipo Fourier debido a que existe una similitud entre las funciones características y las funciones trigonométricas (Matthies, 2008).

Donde  $\varphi_i(X)$  son las funciones características y  $\eta_i$  los valores característicos de la función de autocovarianza  $C_V(X_1, X_2)$  que se pueden definir por la solución de la ecuación integral de Fredholm homogénea de segundo género con la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} C_V(X_1, X_2) \varphi_i(X_2) dx_2 = \eta_i \varphi_i(X_1) \quad (3.5)$$

Donde  $\Omega$  es el dominio espacial en el cual se define el campo aleatorio, y el núcleo  $C_V(X_1, X_2)$  que es la función de autocovarianza, es real simétrica y positiva. Esto garantiza que los valores característicos  $\eta_i$  sean positivos y ordenados decrecientemente  $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \eta_3 \dots \geq 0$ , y que las funciones características  $\varphi_i(X)$  sean un conjunto completo y ortonormal, por ejemplo:

$$\int_R \varphi_i(X) \varphi_j(X) = \delta_{ij} \quad (3.6)$$

La solución de la ecuación integral se puede obtener analítica y numéricamente, ambas soluciones fueron propuestas por Ghanem y Spanos (1991).

La función  $c_i$  de (3.1) se puede obtener de las expresiones (3.3) y (3.4) como:

$$c_i = \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \quad (3.7)$$

Finalmente, sustituyendo (3.7) en (3.1) el campo aleatorio  $V(X, \theta)$  se expresa como:

$$V(X, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \xi_i(\theta) \quad (3.8)$$

O, considerando el valor medio  $E\{V(X, \theta)\}$  del campo aleatorio, como:

$$V(X, \theta) = E\{V(X, \theta)\} + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \xi_i(\theta) \quad (3.9)$$

Donde  $\xi_i(\theta)$  son las coordenadas de realización con respecto al conjunto de funciones deterministas  $\{\varphi_i(X)\}$  y forman un conjunto de variables aleatorias no correlacionadas con media cero y varianza unitaria, dadas por:

$$E[\xi_i(\theta)] = 0 \quad (3.10)$$

$$E[\xi_i(\theta) \xi_k(\theta)] = \delta_{ik} \quad (3.11)$$

Las variables  $\xi_i(\theta)$  se pueden encontrar multiplicando la expresión (3.1) por  $\varphi_i(X)$ , teniendo que:

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\eta_i}} \int_D V(X) \varphi_i(X) dX \quad (3.12)$$

La serie de expansión de *Karhunen-Loève* permite discretizar de forma abstracta el campo aleatorio a través del truncamiento de la serie a  $M$  términos que a su vez definen la dimensión del campo, teniendo que la expansión del campo aleatorio se escribe:

$$V(X, \theta) = E\{V(X)\} + \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \xi_i(\theta) \quad (3.13)$$

En el caso de varios campos aleatorios correlacionados se requiere calcular una expansión de *Karhunen-Loève* conjunta. En el caso contrario, cada campo se puede expandir por sí solo (Matthies & Keese, 2005).

Las propiedades más importantes de la expansión de *Karhunen-Loève* son:

- Las variables aleatorias que aparecen en la expansión (3.13) son ortogonales si y sólo si las funciones deterministas  $\varphi_i(X)$  y las constantes  $\eta_i$  son las funciones características y los valores característicos, respectivamente, de la función de autocovarianza.
- La base formada por las funciones características de la función de autocovarianza es óptima en el sentido que error cuadrático medio es mínimo.
- Si el campo aleatorio tiene una densidad de probabilidad Gaussiana, entonces el conjunto de variables aleatorias es Gaussiano, lo que conduce a que sean no correlacionadas e independientes.
- La expresión (3.13) es óptima en el sentido que el error cuadrático medio entre la función de autocovarianza aproximada y la exacta del campo aleatorio se minimiza.

### 3.3.2 Representación de la respuesta

Un campo aleatorio se define por su función de autocovarianza, como en el caso del campo aleatorio de los desplazamientos no se conoce *a priori*, la representación mediante la serie de *Karhunen-Loève* no es posible. Se recurre entonces, a una expansión en *caos polinomial* (Ghanem & Spanos, 1991; Wiener, 1938) que permite representar los desplazamientos aleatorios desconocidos en términos de variables aleatorias conocidas  $\xi_i(\theta)$ : variables Gaussianas.

#### 3.3.2.1 Expansión caos polinomial

Las primeras investigaciones relacionadas con el *caos polinomial* se debieron a Wiener (1938), quien introdujo el concepto de *caos homogéneo* basado en el resultado del movimiento Browniano, el cual se estudió como un proceso representado espectralmente en términos de polinomios de Hermite de variables aleatorias Gaussianas.

El *caos polinomial* denotado por  $\Gamma_p(\xi_1(\theta), \dots, \xi_M(\theta))$ , se define como un conjunto de polinomios ortogonales de variables aleatorias. El espacio que ocupan dichos polinomios es un subespacio  $\Gamma_p$  en el espacio de Hilbert de variables aleatorias Gaussianas  $L_2(\Omega)$  (ver Anexo A.1) llamado *caos homogéneo* de orden  $p$  y dimensión  $M$ . El orden del *caos* representa la complejidad probabilista, y

la dimensión, el número de variables aleatorias contenidas en la expansión de *Karhunen-Loève*, caracteriza la complejidad espacial.

El *caos polinomial* forma una base de polinomios multidimensionales de Hermite en el  $L_2(\Omega, F, P)$ , los cuales se definen como el producto de polinomios de Hermite unidimensionales, como:

$$\Psi_{\alpha}(\theta) = (\alpha!)^{-1/2} \prod_{k=1}^M h_{\alpha_k}(\xi_k) \quad (3.14)$$

donde:  $\alpha$  es una secuencia de  $M$  enteros no negativos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ ,  $\Psi_{\alpha}(\theta)$  son los polinomios asociados a todas las posibles secuencias  $(\alpha)$  y  $h_{\alpha_k}$  es el polinomio de Hermite (ver Anexo A), de orden  $p$ , asociado a la secuencia  $\alpha$  (Dunkl & Yuan; Malliavin, 1997; Rosic, 2008).

Por ejemplo (Rosic, 2008), para una colección de multi-índices  $\alpha=\{1,0,1,0\}$  y para un conjunto de variables aleatorias  $\xi=\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ , tal que representa la dimensión, el polinomio multidimensional de Hermite es:

$$\Psi_{\alpha}(\theta) = h_{\alpha_1}(\xi_1)h_{\alpha_2}(\xi_2)h_{\alpha_3}(\xi_3)h_{\alpha_4}(\xi_4) \quad (3.15)$$

$$\Psi_{\alpha}(\theta) = h_1(\xi_1)h_0(\xi_2)h_1(\xi_3)h_0(\xi_4) = \xi_1 \cdot 1 \cdot \xi_3 \cdot 1 = \xi_1 \cdot \xi_3 \quad (3.16)$$

Una doble secuencia de  $M$  enteros no negativos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$  y  $\{i_1, \dots, i_M\}$  considera la posibilidad de repetir argumentos en el *caos polinomial*, lo que garantiza la ortogonalidad de la base polinomial (Ghanem & Spanos, 1991). Así, el *caos polinomial* se define como una colección de multi-índices que satisface:

$$\Gamma_p(\xi_1(\theta), \dots, \xi_p(\theta)) = \{\Psi_{i,\alpha}(\theta) \mid \sum_{k=1}^p \alpha_k \leq p\} \quad (3.17)$$

El factor  $(\alpha!)^{(-1/2)}$  definido como:  $\prod_{j=1}^{\alpha} (\alpha_j!)$  de (3.14) hace los polinomios multidimensionales ortonormales en el espacio  $L_2(\Omega)$  con medida Gaussiana estándar  $P(d\xi)$ , ver Anexo A.2.

Norbert Wiener (Wiener, 1938) mostró que cualquier variable aleatoria  $\xi \in L_2(\Omega)$  se puede expandir en series de polinomios de variables Gaussianas.

Sudret y Der Kiureghian (2000) propusieron un algoritmo recursivo que permite generar, mediante la utilización de un ábaco, la base polinomial, necesaria para calcular la esperanza de productos de polinomios que se requiere en la formulación del MEFEE.

### 3.3.2.2 Campo aleatorio de los desplazamientos

Cada desplazamiento nodal aleatorio  $u(\theta)$ , función de la variabilidad del módulo de elasticidad  $E$ , se puede expresar mediante funcionales no lineales  $\Psi_j[\xi_k(\theta)]$  (*caos polinomial*) de variables aleatorias Gaussianas  $\xi_k(\theta)$  y coeficientes deterministas  $u_j$  a calcular, la forma más general de esta representación se escribe como:

$$u(\theta) = u_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} u_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \quad (3.18)$$

donde los coeficientes aleatorios  $u_{i_p}$  de la variable aleatoria  $u(\theta)$  se asocian al orden  $p$  del caos homogéneo de dimensión  $M$ .

Una forma reducida de la representación del campo aleatorio de los desplazamientos se expresa como:

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i[\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M] \quad (3.19)$$

donde  $u_i$  y  $\Psi_i[\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M]$  corresponde a  $u_{i_p}$  y  $\Gamma_p(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_M}(\theta))$  respectivamente.

La aproximación del campo aleatorio de los desplazamientos, se obtiene con el truncamiento de la serie (3.19) a  $P$  términos. El número  $P$  de polinomios ortogonales necesarios para contener toda la estructura probabilista de cada desplazamiento nodal aleatorio  $u(\theta)$ , se determina por medio de una combinación binomial de la siguiente manera:

$$P = \sum_{k=0}^p \binom{M+k-1}{k} \quad (3.20)$$

donde  $p$  es el orden del caos polinomial y  $M$  el número de variables en la expansión de Karhunen-Loève. En la literatura los valores recomendados son  $M=4$  y  $p=2$ , por lo que  $P=15$ .

Considerando los  $P$  términos en la serie (3.19) y asumiendo por simplicidad que  $\Psi_i[\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M] = \Psi_i(\theta)$ , la representación aleatoria de los desplazamientos se escribe:

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{P-1} u_i \Psi_i(\theta) \quad (3.21)$$

Si se considera el término independiente ( $j=0$ ) de la expansión, el término máximo de la expansión es  $P-1$ .

### 3.3.3 Formulación del MEFEE

Las técnicas numéricas comúnmente empleadas en geotecnia, permiten cuantificar incertidumbre sobre el campo de respuesta de forma independiente a la formulación de la ecuación de equilibrio. En el MEFEE la cuantificación se realiza desde la formulación mediante campos aleatorios. Se basa en representar el campo aleatorio del módulo de elasticidad a través de la expansión en serie de Karhunen-Loève, el campo aleatorio de los desplazamientos se representa mediante la expansión en caos polinomial. Las características (esperanza, desviación estándar) del campo aleatorio de la respuesta (desplazamientos, deformaciones) se obtienen con un análisis de segundos momentos.

### 3.3.3.1 Ecuación de equilibrio del Método del Elemento finito

En el análisis lineal por el método del elemento finito clásico se establece un sistema de ecuaciones de equilibrio como:

$$K \cdot U = F \quad (3.22)$$

$F$  es un vector de fuerzas nodales y volumétricas;  $U$  es un vector de desplazamientos nodales y  $K$  es la matriz de rigidez total con forma:

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (3.23)$$

donde  $\Omega$  es el dominio de estudio;  $B$  es la matriz de forma y  $D$  es la matriz de elasticidad.

A continuación se presenta la derivación de la ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE de acuerdo a lo desarrollado por Ghanem y Spanos (1991).

### 3.3.3.2 Ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE

Considerando las características estocásticas ( $\theta$ ) de cada cantidad del sistema, la ecuación de equilibrio estocástica con condiciones de frontera mecánicas deterministas se escribe como:

$$K(\theta)U(\theta) = F \quad (3.24)$$

donde  $K(\theta)$  es la matriz de rigidez estocástica, cuya matriz de elasticidad  $D$ , que contiene la variabilidad del módulo de elasticidad  $E$ , se expresa como:

$$D(X, \theta) = V_E(X, \theta)D_0 \quad (3.25)$$

donde  $D_0$  es una matriz de elasticidad constante. La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$  que es linealmente dependiente del campo aleatorio de  $E$  ( $K(\theta) = K(V_E(X, \theta))$ ), se expresa entonces como:

$$K(\theta) = \int_{\Omega} B^T V_E(X, \theta) D_0 B d\Omega \quad (3.26)$$

Recurriendo a la expresión de *Karhunen-Loève* (3.13) para representar el campo aleatorio del módulo de elasticidad  $V_E(X, \theta)$ ,  $K(\theta)$  se escribe como:

$$K(\theta) = \int_{\Omega} B^T (E\{V_E(X, \theta)\} + \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \xi_i(\theta)) D_0 B \quad (3.27)$$

Agrupando la parte determinista y estocástica de la matriz de rigidez, se tiene que:

$$K(\theta) = K_0 + \sum_{i=1}^M K_i \xi_i(\theta) \quad (3.28)$$

Donde  $K_0$  es la matriz de rigidez evaluada para el valor esperado de  $E$  y  $K_i$  es una matriz determinista, escrita como:

$$K_i = \int_{\Omega} \sqrt{\eta_i} \varphi_i(\mathbf{x}) B^T D_0 B d\Omega \quad (3.29)$$

Considerando la representación aleatoria de la matriz de rigidez (3.28) y la de los desplazamientos (3.21), la ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE se expresa como:

$$\left( K_0 + \sum_{i=1}^M K_i \xi_i(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^P U_j \Psi_j(\theta) \right) - F = \epsilon_{M,P} \quad (3.30)$$

Debido al truncamiento de las series (3.30) se genera un error  $\epsilon_{M,P}$  que se requiere minimizar con el fin de obtener la mejor aproximación de los desplazamientos. Imponiendo las condiciones de Galerkin (Zienkiewicz & Taylor, 1994), la derivación de la ecuación equilibrio estocástica requiere, entonces, hacer el residuo cero: ortogonal al espacio que ocupa el caos *polinomial*  $\Psi_k(\theta)$ , cumpliéndose:

$$E\{\epsilon_{M,P} \cdot \Psi_k(\theta)\} = 0 \quad k = 0, \dots, P-1 \quad (3.31)$$

Para facilitar la lectura de las ecuaciones, el argumento  $(\theta)$  se omite en lo sucesivo.

La ecuación de equilibrio estocástica global se obtiene multiplicando la ecuación (3.30) por  $\Psi_k$  y tomando esperanza de ambos lados de la ecuación, como:

$$E\{\epsilon_{M,P} \cdot \Psi_k\} = \sum_{j=0}^{P-1} K_0 U_j E\{\Psi_j \Psi_k\} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{P-1} K_i U_j E\{\xi_i \Psi_j \Psi_k\} - E\{F \Psi_k\} \quad (3.32)$$

donde la esperanza entre polinomios y variables aleatorias (ver Anexo A.2) se representa como:

$$c_{ijk} = \begin{cases} E\{\Psi_j \Psi_k\} = E\{\Psi_j^2\}; & i = 0 \\ E\{\xi_i \Psi_j \Psi_k\}; & i = 1, \dots, M \end{cases} \quad (3.33)$$

$F_k$  definida como:

$$F_k = E\{F \Psi_k\} \quad (3.34)$$

En el caso de cargas deterministas  $F_k$  es cero para  $k > 0$ .

Tomando la siguiente notación para la matriz de rigidez, se tiene que:

$$K_{jk} = c_{0jk} K_0 + \sum_{i=1}^M c_{ijk} K_i \quad (3.35)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica (3.32) se escribe como:

$$\sum_{j=0}^{P-1} K_{jk} U_j = F_k \quad (3.36)$$

con un sistema de ecuaciones lineales que se expresa en términos de  $K_{jk}$  con dimensiones  $N \cdot P \times N \cdot P$ , donde  $N$  está determinado por el número físico de grados de libertad en el modelo de elemento finito y  $P$  por el número de coeficientes que se utilizan en la expansión en *caos polinomial*, el sistema se expresa como:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^M K_i c_{i11} & \cdots & \sum_{i=0}^M K_i c_{i1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^M K_i c_{ij1} & \cdots & \sum_{i=0}^M K_i c_{ijk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

La ec. 3.36 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $c_{ijk} = \{\xi_i \Psi_i \Psi_{kj}\}$ , cuando el módulo de elasticidad  $E$  es aleatorio.

### 3.3.3.3 Cálculo de incertidumbre sobre los desplazamientos

Con la solución del sistema de ecuaciones (3.37) solamente es posible conocer un conjunto de vectores  $U = \{U_j, j=0, \dots, P-1\}$  que se utiliza para aproximar los desplazamientos aleatorios mediante (3.21). Para determinar el valor esperado y la desviación estándar de los desplazamientos se recurre a un análisis de segundos momentos (Sudret & Der Kiureghian, 2000).

Cualquier cantidad de respuesta estocástica (desplazamientos, esfuerzos y deformaciones) del sistema, se puede representar sobre una base en *caos polinomial* (Sudret *et al.*, 2006) como:

$$R(\theta) = \sum_{j=0}^{P-1} R_j \Psi_j(\theta) \quad (3.38)$$

En un análisis de segundos momentos, el valor esperado de la respuesta  $R$  corresponde al primer momento, que es el primer término de la expansión (3.38), se tiene que:

$$E\{R\} \cong R_0 \quad (3.39)$$

La varianza de la respuesta se calcula con el segundo momento, expresada como:

$$\sigma_R^2 = E\{(R - E\{R\})(R - E\{R\})^T\} \approx \sum_{j=0}^{P-1} E\{\Psi_j^2\} R_j R_j^T \quad (3.40)$$

Siendo  $E\{\Psi_j^2\}$  el cuadrado de la norma (ver Anexo A.2).

### 3.4 Extensión de la formulación del MEFEE

En este inciso se presenta el desarrollo de la derivación de las ecuaciones de equilibrio estocásticas de la extensión del MEFEE. Se consideró que los parámetros elásticos lineales isótropos y anisótropos tienen una distribución Gaussiana. El principio de la extensión de la formulación es el mismo al original, consiste en:

- Representar la variabilidad espacial de los parámetros constitutivos mediante una expansión en serie de *Karhunen-Loève*.
- Representar los desplazamientos aleatorios con expansión en *caos polinomial*.
- Utilizar la proyección de Galerkin para hacer que el residuo, debido al truncamiento de las series, sea cero y obtener los coeficientes de la aproximación de la solución en términos del producto polinomios, por ejemplo  $E\{\Psi_i \Psi_j \Psi_k\}$ .

La extensión del MEFEE se realizó para los siguientes casos:

- Isótropo (estado plano de esfuerzo):
  - Relación de Poisson  $\nu$
  - Módulo de elasticidad  $E$  y relación de Poisson  $\nu$
- Anisótropo (estado plano de esfuerzo):
  - Módulo de elasticidad vertical  $E_v$
  - Módulo de elasticidad horizontal  $E_h$
  - Módulos de elasticidad  $E_v$  y  $E_h$
  - Relación de Poisson  $\nu_{vh}$
  - Parámetros conjuntos  $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$
- Anisótropo (estado plano de deformación):
  - Módulo de elasticidad vertical  $E_v$
  - Módulo de elasticidad horizontal  $E_h$
  - Módulos de elasticidad  $E_v$  y  $E_h$
  - Relación de Poisson  $\nu_{vh}$
  - Relación de Poisson  $\nu_{hh}$

#### 3.4.1 Aspectos matemáticos

Para la derivación de las ecuaciones de equilibrio estocásticas de campos aleatorios diferentes de  $E$ , se requiere del uso de las siguientes herramientas matemáticas que simplificarán la deducción de dichas ecuaciones.

##### 3.4.1.1 Expansión en series polinomiales

La relación de Poisson  $\nu$  es un parámetro que se representa en la matriz de elasticidad de forma no lineal, por ejemplo:  $1/2(1+\nu)$ . Para facilitar su representación mediante la expansión de *Karhunen-Lòeve* y conocer su contribución de forma independiente sobre la respuesta, se recurre a una expansión polinomial (Noh & Kwak, 2006), conocida como expansión en series geométricas y se expresa como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{p=1}^{\infty} x^{p-1}, \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \dots = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} x^{p-1}, \\ \frac{x}{1-x} &= x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{p=1}^{\infty} x^p\end{aligned}\tag{3.41}$$

De acuerdo con Noh y Kwak (2006) la expansión converge al valor exacto si la variable  $X$  está entre -1.0 y 1.0. La relación de convergencia de una serie geométrica se incrementa cuando la variable  $X$  a expandir se aproxima a cero. Por ejemplo, si la variable es de 0.1, solamente el segundo orden de la expansión da el 99 % del valor exacto. Si el valor de la variable se incrementa, el orden de la expansión que se requiere es mayor.

### 3.4.1.2 Representación de variables aleatorias $\xi_i$ mediante polinomios multidimensionales de Hermite

Debido a la expansión polinomial de la relación de Poisson  $\nu$ , se generan productos de campos aleatorios, que se pueden expresar como:  $V(X, \theta)^n$ . Para facilitar el álgebra de la deducción de la ecuación de equilibrio estocástica, el conjunto de variables aleatorias  $\xi_p$ , contenidas en la expansión de *Karhunen-Loève*, se representan en términos de polinomios de Hermite de variables normales estándar (ver Anexo A.2); es decir, las  $\xi_i$  se modelan como funciones de variables aleatorias Gaussianas (Matthies y Keese, 2005).

De acuerdo con los resultados clásicos (Matthies y Keese, 2005), cualquier variable aleatoria  $\omega$  con varianza finita ( $\omega_i \in L_2(\Omega)$ ), se puede expandir en series de polinomios de variables Gaussianas  $\xi$  (independientes y no correlacionadas), en particular en polinomios ortogonales de Hermite, convergentes en  $L_2(\Omega)$  (espacio de Hilbert Gaussiano), se tiene que:

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k h_k(\xi)\tag{3.42}$$

donde:  $\{\tilde{C}_k; k = 0, \dots, \infty\}$  son coeficientes a determinar y representan una medida de aproximación entre las variables normales estándar y el tipo de variable a aproximar. Los métodos numéricos existentes para evaluar dichos coeficientes son estudiados por Berveiller (2005).

La expresión (3.42) representa la expansión de una variable aleatoria en términos de polinomios de Hermite unidimensionales (una sola variable). Sin embargo, la formulación del MEFEE se realiza sobre una base de polinomios multidimensionales de Hermite (*caos polinomial*, inciso 3.4.2.1) en variables  $\{\xi_i\}_{i=1}^M$ . Se requiere, entonces, que las variables se representen como:

$$\omega_i = \sum_{k=0}^{P-1} C_k \Psi_k(\{\xi_k\}_{k=1}^M)\tag{3.43}$$

Para que las variables  $\omega_i$  cumplan con la expresión 3.43, es necesario que los coeficientes  $\tilde{C}_k$  correspondan con los coeficientes  $C_k$  del *caos polinomial*, en el Anexo A se explica este procedimiento (Sudret *et al.*, 2005).

La expresión (3.43) es útil para realizar transformaciones de variables no Gaussianas, lo que permite representar campos no Gaussianos con la expansión de *Karhunen-Loève*, porque se garantiza que las variables aleatorias contenidas en dicha expansión se encuentren en el espacio Gaussiano.

### 3.4.1.3 Campo aleatorio de la relación de Poisson $\nu$

Debido al intervalo de valores que la relación de Poisson  $\nu$  puede tomar, el campo aleatorio de este parámetro puede quedar mejor representado por medio de variables aleatorias con densidad de probabilidad Beta.

Como se explicó en el inciso anterior, la tarea principal para modelar campos no Gaussianos con el MEFEE, consiste en representar las variables  $\xi_i$  como funciones de series polinomiales (polinomios de Hermite). La formulación del MEFEE para el caso de campos no Gaussianos es idéntica que para el de campos Gaussianos, la única variante es la evaluación de los coeficientes  $\{C_k, k=0, \dots, \infty\}$ , los cuales se pueden calcular por diferentes métodos numéricos (Berveiller, 2005).

Si las variables aleatorias expandidas en *caos polinomial* son normales estándar, los coeficientes  $C_k$  se pueden evaluar (Sudret *et al.*, 2005) simplemente como:

$$C_0 = \mu, C_1 = \sigma \text{ y } C_i = 0 \text{ para } i \geq 2$$

Para facilitar los análisis de incertidumbre de parámetros conjuntos (por ejemplo  $E$  y  $\nu$ ), en este trabajo el campo aleatorio de la relación de Poisson  $\nu$  se consideró Gaussiano. Esto es posible, siempre y cuando la incertidumbre impuesta en este campo sea pequeña (Noh & Kwak, 2006).

### 3.4.1.4 Producto de variables aleatorias expandidas en caos polinomial

Dadas dos variables aleatorias  $a$  y  $b$ , expandidas cada una de ellas en *caos polinomial*, el producto de ellas se expresa como:

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^P a_i \Psi_i \sum_{j=0}^P b_j \Psi_j = c = \sum_{k=0}^P c_k \Psi_k \quad (3.44)$$

Donde  $c$  sigue siendo una variable aleatoria expresada como una suma finita de caos polinomiales (Malliavin, 1997; Debusschere *et al.*, 2005), con coeficientes  $c_k$ :

$$c_k = \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P c_{ijk} a_i b_j, \quad (\forall k \in 0, 1, \dots, P) \quad (3.45)$$

donde:

$$c_{ijk} = \frac{E\{\Psi_i \Psi_j \Psi_k\}}{E\{\Psi_k^2\}} \quad (\forall (i, j, k) \in \{0, \dots, P\}^3) \quad (3.46)$$

El cálculo de los coeficientes  $c_{ijk}$  y el producto de más de dos variables aleatorias se detalla en el Anexo A.3.

En las variables aleatorias (expresadas en *caos polinomial*) elevadas a exponentes positivos enteros se requiere que el orden  $p$  de la expansión del *caos polinomial* sea mayor que el orden de la potencia de la variable, para evitar que el error por truncamiento, que se anula vía proyección Galerkin, se propague en los coeficientes espectrales calculados (3.46) (Debusschere *et al.*, 2005). Tal error puede incrementarse, especialmente cuando se trata de repetidas multiplicaciones de variables.

### 3.4.1.5 Expansión en serie de Karhunen-Loève con expansión en caos polinomial

La representación de un campo aleatorio mediante la expansión en serie de *Karhunen-Loève*, cuyas variables aleatorias  $\xi_j$  se expanden en con *caos polinomial* (3.43), se escribe de la siguiente forma:

$$V(X, \theta) = \left( E\{v\} + \sigma \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \right) \quad (3.47)$$

### 3.4.2 Procedimiento general para derivar la ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE para campos aleatorios diferentes de $E$ .

La derivación de las ecuaciones de equilibrio estocásticas de la extensión del MEFEE para los casos aquí expuestos, es un procedimiento repetitivo que se realiza tanto en el comportamiento isótropo como anisótropo. A continuación se resumen los pasos más importantes requeridos en las subsiguientes deducciones.

Se sabe que:

(1) La forma de la ecuación de equilibrio del MEFEE se escribe como:

$$K(\theta)U(\theta) = F \quad (3.48)$$

donde  $F$  es determinista.

(2) La variabilidad de los parámetros aleatorios está contenida en la matriz constitutiva que en general se expresa como:

$$D(X, \theta) = \bar{D} + \Delta D(X, \theta) \quad (3.49)$$

donde  $\bar{D}$  es la matriz media del campo aleatorio  $D(X, \theta)$  y  $\Delta D(X, \theta)$  es la matriz constitutiva estocástica con media cero.

A partir de esto se enumera la siguiente:

- Se establece la matriz de elasticidad determinista, no existe incertidumbre en ningún parámetro, con cada término representado en forma lineal mediante una expansión en serie, por ejemplo:

$$D = \left( \frac{E}{1 + \nu} \right) D_0 = E(1 - \nu + \nu^2 + \dots) D_0 \quad (3.50)$$

donde:  $D_0$  representa una matriz constante: evaluada con magnitudes unitarias para el o los campos aleatorios en cuestión.

- Se representa la matriz de elasticidad estocástica a través del desarrollo en serie de *Karhunen-Loève* con expansión en *caos polinomial* (3.47). Por ejemplo, si sólo  $v$  es aleatorio (3.50), la matriz  $D(X, \theta)$  se expresa como:

$$\begin{aligned}
 D(X, \theta) &= V_v(X, \theta) D_0 \\
 D(X, \theta) &= E \left[ 1 - V_v(X, \theta) + V_v(X, \theta)^2 + \dots \right] D_0 \\
 D(X, \theta) &= E \left[ 1 - \left( E\{V_v(X, \theta)\} + \sigma_v \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \right) + \left( E\{V_v(X, \theta)\} + \sigma_v \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \right)^2 + \dots \right] D_0
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

El desarrollo de los binomios anteriores (3.51) permite establecer una expresión matemática simplificada de la forma:

$$\begin{aligned}
 D(X, \theta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_v b + \alpha_2 \sigma_v^2 b^2 + \dots + \alpha_n \sigma_v^n b^n \\
 \text{con:} \\
 b &= \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

donde:  $\{\alpha_i, i=0,1,2,\dots,n\}$  son coeficientes que agrupan términos deterministas que están representados por el valor esperado del campo y los coeficientes que corresponden al desarrollo de más de un binomio elevado a la  $n$   $\{n = 1,2,\dots,m\}$ . La convergencia de las  $\alpha$  está determinado por el número de binomios tomados en la expansión (ver Anexo A.4); la convergencia de la serie es función del orden  $n$ .

- Se expresa la matriz de rigidez estocástica  $K(\theta) = K(D(X, \theta))$ , que es linealmente dependiente de la variabilidad del campo aleatorio en cuestión, también en series geométricas como consecuencia de los términos no lineales, en este caso  $v$ . Una expresión general de esta matriz se escribe como:

$$K(\theta) = \alpha_1 \sigma_v K^1(\theta) + \alpha_2 \sigma_v^2 K^2(\theta) + \dots + \alpha_n \sigma_v^n K^n(\theta) \tag{3.53}$$

donde:  $n$  es el grado máximo tomado en cuenta en la serie. Se considera que los términos con orden mayor de 3, toman valores lo suficientemente pequeños que pueden despreciarse.

- Se calculan las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$ . Estas matrices dependen del producto de campos aleatorios, los cuales se desarrollan en expansión de *Karhunen-Loève* con *caos polinomial* (3.47). De acuerdo con las bases del MEFEE, se requiere que cada uno de los términos de  $K(\theta)$  tengan una forma conveniente para la formulación, como:

$$K(\theta) = \int_{\Omega} B^T V_v(X, \theta) D_0 B d\Omega = \sum_{i=1}^M K_i \xi_i(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j(\theta) \quad (3.54)$$

$$K(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j(\theta)$$

Al desarrollar los productos de  $K^n(\theta)$  de (3.53) y agruparlos, se puede llegar a:

$$K^1(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j(\theta)$$

$$K^2(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^2 \Psi_j(\theta)$$

$$\vdots$$

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j(\theta) \quad (3.55)$$

donde  $K_i$  es la matriz de rigidez de pesos y  $\Delta_j^n$  representan la multiplicación de los valores característicos  $\sqrt{\eta_i}$ , funciones características  $\varphi_i$  y los coeficientes de  $C_{ij}$  de la expansión en *caos polinomial* que representa las variables aleatorias  $\xi_i$ .

- Se escribe la ecuación de equilibrio (3.48) en términos  $K^n(\theta)$  y de la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), su forma es también una suma de términos como:

$$\left( \alpha_1 \sigma_v \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j + \alpha_2 \sigma_v^2 \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^2 \Psi_j + \dots + \alpha_n \sigma_v^n \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \Psi_k \right) = F \quad (3.56)$$

- Se minimiza el error por truncamiento de las series (*Karhunen-Loève* y *caos polinomial*), usando condiciones de proyección de Galerkin (Matthies, 2008), para encontrar una solución aproximada y única a la solución exacta de  $U(\theta)$ , cumpliéndose que:

$$E\{\in_{M,P} \cdot \Psi_l\} = 0 \quad l = 0, \dots, P-1 \quad (3.57)$$

Al hacer  $\in_{M,P} = 0$  se generan esperanzas de productos de polinomios (multidimensionales) denotadas por  $d_{jkl} = E\{\Psi_j \Psi_k \Psi_l\}$ , a partir de estos coeficientes se establece la ecuación de equilibrio estocástica, para el parámetro en cuestión, que se escribe en forma simplificada como:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \left( \alpha_1 \sigma_v \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl} + \alpha_2 \sigma_v^2 \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^2 d_{jkl} + \dots + \alpha_n \sigma_v^n \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl} \right) U_k = F$$

$$\text{Si, } K_{kl}^1 = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl} \quad (3.58)$$

$$\sum_{k=0}^{P-1} \left( \alpha_1 \sigma_v^1 K_{kl}^1 + \alpha_2 \sigma_v^2 K_{kl}^2 + \dots + \alpha_n \sigma_v^n K_{kl}^n \right) U_k = F$$

Los coeficientes aleatorios  $d_{kjl}$  están definidos por:

$j$ : la base polinomial de la transformación de las variables aleatorias  $\xi_j$ .

$k$ : la base polinomial de los desplazamientos aleatorios.

$l$ : la base polinomial debido a la minimización del error  $\in_{M,P}$ .

La expresión anterior permite establecer un sistema de ecuaciones lineales  $N \cdot P \times N \cdot P$ . Donde  $N$  es función del número físico de grados de libertad usado en el modelo de elemento finito y  $P$  es el número de caos polinomiales utilizado para aproximar los desplazamientos nodales.

### 3.4.3 Derivación de las ecuaciones de equilibrio estocásticas: caso isótropo

#### 3.4.3.1 Matriz de elasticidad

La matriz de elasticidad para un material elástico lineal isótropo se puede representar de la siguiente manera:

$$D = \begin{pmatrix} (2\mu' + \lambda')E & \lambda'E & 0 \\ \lambda'E & (2\mu' + \lambda')E & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu'E \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Con los constantes de  $\mu'$  y  $\lambda'$  expresadas como:

(a) Estado plano de esfuerzo

$$\mu' = \frac{1}{2(1+\nu)}; \quad \lambda' = \frac{\nu}{(1-\nu^2)} \quad (3.60)$$

(b) Estado plano de deformación

$$\mu' = \frac{1}{2(1+\nu)}; \quad \lambda' = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.61)$$

Así,  $D$  se puede escribir como:

$$D = E[2\mu'D_1 + \lambda'D_2] \quad (3.62)$$

Siendo  $D_1$  y  $D_2$  matrices deterministas escritas como:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

#### 3.4.3.2 Ecuación de equilibrio estocástica para $E$ aleatorio

En este apartado se deriva la ecuación de equilibrio estocástica para  $E$  aleatorio. Se representan las variables aleatorias del campo de entrada como funciones de variables gaussianas, las cuales se expanden en *caos polinomial*.

En el inciso 3.4.3 se presentó que la ecuación de equilibrio estocástica cuando el módulo de elasticidad  $E$  se considera aleatorio, se expresa como:

$$\left( K_0 + \sum_{i=1}^M K_i \xi_i \right) \left( \sum_{j=0}^P U_j \Psi_j \right) - F = \epsilon_{M,P} \quad (3.64)$$

Sustituyendo la expansión en *caos polinomial* de  $\xi_i$  (3.43), en (3.47), se obtiene que:

$$\left( K_0 + \sum_{i=1}^M K_i \sum_{k=0}^{P-1} c_{ik} \Psi_k \right) \left( \sum_{j=0}^P U_j \Psi_j \right) - F = \epsilon_{M,P} \quad (3.65)$$

Al minimizar el error  $\epsilon_{M,P}$ , se tiene:

$$\sum_{i=0}^M K_i \sum_{k=0}^{P-1} c_{ik} \sum_{j=0}^P U_j(\theta) E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\} = F_i \quad (3.66)$$

Reescribiendo:

$$\sum_{i=0}^M K_i \sum_{k=0}^{P-1} \Delta_k \sum_{j=0}^{P-1} d_{kjl} U_j = F_l = \sum_{j=0}^{P-1} K_{jl} U_j = F_l \quad (3.67)$$

Donde  $C_{jk}$  contiene los coeficientes de la transformación de las variables  $\xi_i$ ,  $d_{kjl}$  es la esperanza del producto de tres caos polinomiales (ver Anexo A.2). Cuando  $i = 0$ ,  $K = K_0$ .

La ecuación 3.67 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kjl} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_l\}$ , para  $E$  aleatorio.

### 3.4.3.3 Relación de Poisson $\nu$ aleatoria (estado plano de esfuerzo)

#### (a) Matriz de elasticidad para estado plano de esfuerzo

La matriz de elasticidad se puede expresar con la siguiente forma:

$$D = [2\mu' D_1 + \lambda' D_2] \quad (3.68)$$

Donde las matrices deterministas son:

$$D_1 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_2 = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

(b) *Matriz de elasticidad estocástica*

Para establecer la matriz de elasticidad estocástica, se requiere primero desarrollar los coeficientes  $2\mu'$  y  $\lambda'$  mediante series geométricas; posteriormente, representar la variabilidad espacial de  $\nu$  utilizando la expansión de *Karhunen-Loève* con variables aleatorias en caos *polinomial* (3.47), teniendo que:

$$2\mu' = \frac{1}{1+\nu} = \sum_{p=1}^{\infty} \nu^{p-1} = (1 - \nu + \nu^2 - \nu^3 + \dots); \quad V_{2\mu'}(X, \theta) = 1 - V_{\nu}(X, \theta) + V_{\nu}(X, \theta)^2 - V_{\nu}(X, \theta)^3 + \dots \quad (3.70)$$

$$\lambda' = \frac{\nu}{1-\nu^2} = \nu \sum_{p=1}^{\infty} \nu^{p-1} = \nu(1 + \nu^2 + \nu^4 + \dots); \quad V_{\lambda'}(X, \theta) = V_{\nu}(X, \theta) + V_{\nu}(X, \theta)^3 + V_{\nu}(X, \theta)^5 + \dots$$

En términos de la expansión de *Karhunen-Loève* (3.47):

$$V_{2\mu'}(X, \theta) = 1 - \left( E\{V_{\nu}(X, \theta)\} + \sigma_{\nu} \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \right) + \left( E\{V_{\nu}(X, \theta)\} + \sigma_{\nu} \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \right)^2 + \dots \quad (3.71)$$

$$V_{\lambda'}(X, \theta) = \left( E\{V_{\nu}(X, \theta)\} + \sigma_{\nu} \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \right) + \left( E\{V_{\nu}(X, \theta)\} + \sigma_{\nu} \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \right)^3 + \dots$$

Considerando un cambio de variable, para facilitar el álgebra de la deducción de la ecuación de equilibrio, como:

$$b(X, \theta) = \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \quad (3.72)$$

La variabilidad de  $2\mu'$  y  $\lambda'$  en forma simplificada se expresa como:

$$\begin{aligned} V_{2\mu'}(X, \theta) &= 1 - (E\{V_{\nu}(X, \theta)\} + \sigma_{\nu} b(X, \theta)) + (E\{V_{\nu}(X, \theta)\} + \sigma_{\nu} b(X, \theta))^2 + \dots \\ V_{\lambda'}(X, \theta) &= (E\{V_{\nu}(X, \theta)\} + \sigma_{\nu} b(X, \theta)) + (E\{V_{\nu}(X, \theta)\} + \sigma_{\nu} b(X, \theta))^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.73)$$

La expresión (3.73) representa la variabilidad de la relación de Poisson mediante campos aleatorios Gaussianos, cuya forma simplificada se obtiene al desarrollar los binomios (Noh & Kwak, 2006), ver Anexo A.4. Después del algebra, la expansión de  $2\mu'$  y  $\lambda'$  se expresan en términos  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, los cuales son coeficientes propios del desarrollo de los binomios y función del valor esperado del campo aleatorio. La convergencia de  $\alpha$  y  $\beta$  está determinada por el número de binomios tomados en la expansión y la de las funciones de  $2\mu'$  y  $\lambda'$  depende del orden de la serie, que en este caso es de tres debido a que se considera que los términos de orden mayor a éste toman valores lo suficientemente pequeños que pueden despreciarse, teniendo que:

Para  $2\mu'$

$$\begin{aligned}
 V_{2,\mu'}(X, \theta) &= \left( 1 + \sum_{k=0}^n (-1)^k k C_0 (E\{V_v(X, \theta)\})^k \right) + \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k k C_1 (E\{V_v(X, \theta)\})^{k-1} \right) \sigma_v b(X, \theta) + \\
 &\quad \left( \sum_{k=2}^n (-1)^k k C_2 (E\{V_v(X, \theta)\})^{k-2} \right) \sigma_v^2 b(X, \theta)^2 + \left( \sum_{k=3}^n (-1)^k k C_3 (E\{V_v(X, \theta)\})^{k-3} \right) \sigma_v^3 b(X, \theta)^3 \quad (3.74) \\
 V_{2,\mu'}(X, \theta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_v b(X, \theta) + \alpha_2 \sigma_v^2 b(X, \theta)^2 + \alpha_3 \sigma_v^3 b(X, \theta)^3
 \end{aligned}$$

Para  $\lambda'$

$$\begin{aligned}
 V_{\lambda'}(X, \theta) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) C_0 (E\{V_v(X, \theta)\})^{(2k-1)} + \left( \sum_{k=1}^n (2k-1) C_1 (E\{V_v(X, \theta)\})^{(2k-2)} \right) \sigma_v b(X, \theta) + \\
 &\quad \left( \sum_{k=2}^n (2k-1) C_2 (E\{V_v(X, \theta)\})^{2k-3} \right) \sigma_v^2 b(X, \theta)^2 + \left( \sum_{k=2}^n (2k-1) C_3 (E\{V_v(X, \theta)\})^{2k-4} \right) \sigma_v^3 b(X, \theta)^3 \quad (3.75) \\
 V_{\lambda'}(X, \theta) &= \beta_0 + \beta_1 \sigma_v b(X, \theta) + \beta_2 \sigma_v^2 b(X, \theta)^2 + \beta_3 \sigma_v^3 b(X, \theta)^3
 \end{aligned}$$

Con:

$$\begin{aligned}
 b(X, \theta) &= \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \quad (3.76) \\
 b(X, \theta) &= \sum_{i=1}^M b_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.74) y (3.75) en (3.68), la matriz de elasticidad estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned}
 D(X, \theta) &= (V_{2,\mu'}(X, \theta) D_1 + V_{\lambda'}(X, \theta) D_2) \\
 D(X, \theta) &= (\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_v b(X, \theta) + \alpha_2 \sigma_v^2 b(X, \theta)^2 + \alpha_3 \sigma_v^3 b(X, \theta)^3) D_1 + \\
 &\quad (\beta_0 + \beta_1 \sigma_v b(X, \theta) + \beta_2 \sigma_v^2 b(X, \theta)^2 + \beta_3 \sigma_v^3 b(X, \theta)^3) D_2 \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

Los términos  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  representan el valor esperado  $V_v(X, \theta)$ .

Los términos  $b(X, \theta)^n$ , por ejemplo  $n=2$  se expresa como:

$$b(X, \theta)^2 = b(X, \theta) b(X, \theta) = \sum_{i=1}^M b_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \sum_{i_1=1}^M b_{i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \Psi_{j_1}; \quad \xi_i = \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \quad (3.78)$$

La expresión anterior contiene variables aleatorias  $\xi_i$  elevadas a potencias enteras, para evaluarlas se considera el producto de variables aleatorias expandidas en caos *polinomial* (3.44) como:

$$\sum_{i_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \Psi_{j_1} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \Psi_{j_2} = \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}}; \quad C_{j_{A_1}} = \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \quad (3.79)$$

La expresión (3.78) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 b(X, \theta)^2 &= \sum_{i_1=1}^M b_{i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} \\
 b(X, \theta)^2 &= \sum_{i_1=1}^M b_{i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}}
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Para el desarrollo de  $b(X, \theta)^n$ , con  $n = 3, 4, \dots$ , ver Anexo A.6.

En (3.80) la potencia del binomio es  $n=2$ , la expansión en *caos polinomial* de la nueva variable aleatoria, resultante del producto de dos variables, se representa por  $j_{A_1}$ . Si  $n > 2$ , se crea el producto de tres variables aleatorias que se resuelve usando el producto de dos variables, y después el resultado se multiplica por una tercera, que conducirán a otro producto de dos variables que al final se expande mediante  $j_{A(n-1)}$ .  $A(n-1)$  es solamente un nombre que representa el producto de variables en *caos polinomial*, siendo posible escribir para simplificar  $j_{A(n-1)} = j$ .

(c) *Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica*

Matriz de rigidez estocástica

La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta) = K(D(X, \theta))$ , que es linealmente dependiente de la variabilidad de  $\nu$  contenida en  $D$ , se obtiene al sustituir la ec. (3.77) en (3.26), teniendo que:

$$\begin{aligned}
 K(\theta) &= \int_{\Omega} B^T D(X, \theta) B d\Omega \\
 K(\theta) &= \int_{\Omega} B^T \left( \alpha_1 \sigma_{\nu} b(X, \theta) + \alpha_2 \sigma_{\nu}^2 b(X, \theta)^2 + \alpha_3 \sigma_{\nu}^3 b(X, \theta)^3 \right) D_1 B d\Omega + \\
 &\quad \int_{\Omega} B^T \left( \beta_1 \sigma_{\nu} b(X, \theta) + \beta_2 \sigma_{\nu}^2 b(X, \theta)^2 + \beta_3 \sigma_{\nu}^3 b(X, \theta)^3 \right) D_2 B d\Omega \\
 K(\theta) &= \alpha_1 \sigma_{\nu} K_1^1(\theta) + \alpha_2 \sigma_{\nu}^2 K_1^2(\theta) + \alpha_3 \sigma_{\nu}^3 K_1^3(\theta) + \beta_1 \sigma_{\nu} K_2^1(\theta) + \beta_2 \sigma_{\nu}^2 K_2^2(\theta) + \beta_3 \sigma_{\nu}^3 K_2^3(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Con matrices de rigidez deterministas:

- Matriz de rigidez media:

$$K_0 = \int_{\Omega} B^T (\alpha_0 D_1 + \beta_0 D_2) B \tag{3.82}$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{1,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_1 B d\Omega; \\
 K_{2,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_2 B d\Omega;
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Donde los subíndices 1 y 2 corresponden a las matrices de rigidez de  $2\mu'$  y  $\lambda'$  respectivamente.

Matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$

Teniendo en cuenta que la matriz de rigidez estocástica se expresa como:

$$K(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \xi_i(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j(\theta) \quad (3.84)$$

Buscando tener esta misma forma de la matriz de rigidez, se desarrolla cada uno de los términos de  $K(\theta)$  (3.81) tomando en cuenta las  $b(X, \theta)^n$ , se obtiene que la expansión de cada término de la matriz rigidez se expresa de forma explícita como:

Para los términos de  $K(\theta)$  que contienen  $b(X, \theta)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} K_1^1(\theta) &= \int_{\Omega} B^T b(X, \theta) D_1 B d\Omega = \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j = \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \\ K_2^1(\theta) &= \int_{\Omega} B^T b(X, \theta) D_2 B d\Omega = \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j = \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \end{aligned} \quad (3.85)$$

Para  $K(\theta)$  con términos  $b(X, \theta)^2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} K_1^2(\theta) &= \int_{\Omega} B^T b(X, \theta)^2 D_1 B d\Omega = \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} \\ K_1^2(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_1}}^2 \Psi_{j_{A_1}}; \quad \Delta_{j_{A_1}}^2 = \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \\ K_2^2(\theta) &= \int_{\Omega} B^T b(X, \theta)^2 D_2 B d\Omega = \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} \\ K_2^2(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_1}}^2 \Psi_{j_{A_1}} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Para  $K(\theta)$  con  $b(X, \theta)^3$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} K_1^3(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{i_3=1}^M b_{i_3} \sum_{j_3=0}^{P-1} C_{i_3 j_3} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} C_{j_{A_1} j_3 j_{A_2}} \Psi_{j_{A_2}} \\ K_1^3(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_2}}^3 \Psi_{j_{A_2}}; \quad \Delta_{j_{A_2}}^3 = \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{i_3=1}^M b_{i_3} \sum_{j_3=0}^{P-1} C_{i_3 j_3} C_{j_{A_1} j_3 j_{A_2}} \\ K_2^3(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{i_3=1}^M b_{i_3} \sum_{j_3=0}^{P-1} C_{i_3 j_3} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} C_{j_{A_1} j_3 j_{A_2}} \Psi_{j_{A_2}} \\ K_2^3(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_2}}^3 \Psi_{j_{A_2}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Finalmente, la matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$  se escribe como:

$$K(\theta) = \left( \alpha_1 \sigma_v \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j + \alpha_2 \sigma_v^2 \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_1}}^2 \Psi_{j_{A_1}} + \alpha_3 \sigma_v^3 \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_2}}^3 \Psi_{j_{A_2}} \right) + \left( \beta_1 \sigma_v \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j + \beta_2 \sigma_v^2 \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_1}}^2 \Psi_{j_{A_1}} + \beta_3 \sigma_v^3 \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_2}}^3 \Psi_{j_{A_2}} \right) \quad (3.88)$$

Para simplificar, se asume que  $j_{A_1}, j_{A_2} = j$ , lo cual no altera el producto de variables aleatorias y permite escribir  $K(\theta)$  como:

$$K(\theta) = \sum_{a=1}^3 \alpha_a \sigma_v^a \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^a \Psi_j + \sum_{a=1}^3 \beta_a \sigma_v^a \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^a \Psi_j \quad (3.89)$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Sustituyendo la expansión de la matriz de rigidez  $K(\theta)$  (3.89) y la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), en la ecuación de equilibrio (3.24), se tiene que:

$$\left( \sum_{a=1}^3 \alpha_a \sigma_v^a \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^a \Psi_j + \sum_{a=1}^3 \beta_a \sigma_v^a \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^a \Psi_j \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \Psi_k \right) - F = \epsilon_{M,P} \quad (3.90)$$

### Minimizando el error por truncamiento:

Para minimizar el error por truncamiento, se requiere que el residuo  $\epsilon_{M,P}$  sea ortogonal al espacio que ocupan los polinomios  $\Psi_j$ , para ello, ambos lados de la ec. (3.90) se multiplican por  $\Psi_j$  y se toman esperanzas, teniendo que la ecuación equilibrio estocástica es:

$$\left( \sum_{a=1}^3 \alpha_a \sigma_v^a \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^a E\{\Psi_j \Psi_k \Psi_l\} + \sum_{a=1}^3 \beta_a \sigma_v^a \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^a E\{\Psi_j \Psi_k \Psi_l\} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) - E\{F \Psi_l\} = 0 \quad (3.91)$$

Considerando que  $E\{\Psi_j \Psi_k \Psi_l\} = d_{jkl}$  y definiendo que:

$$K_{1,kl}^m = \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^m d_{jkl}; \quad \forall m=1,\dots,3$$

$$K_{2,kl}^m = \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^m d_{jkl}; \quad \forall m=1,\dots,3 \quad (3.92)$$

Se obtiene finalmente que:

$$K_{kl} = \sum_{a=1}^3 \alpha_a \sigma_v^a K_{1,kl}^a + \sum_{a=1}^3 \beta_a \sigma_v^a K_{2,kl}^a$$

$$\sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k = F \quad (3.93)$$

La ecuación de equilibrio estocástica anterior, establece un sistema de ecuaciones de  $N \cdot P \times N \cdot P$  con el mencionado en el inciso (3.3.3).

La ec. 3.93 representa la ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE con coeficientes  $d_{kjl} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_l\}$ , para la relación de Poisson  $\nu$  aleatoria (estado de plano de esfuerzo).

En el Anexo A.12 se presenta la formulación de la ecuación de equilibrio estocástica para  $\nu$  aleatorio, en la cual el campo aleatorio se expande con serie de *Karhunen-Loève* sin cambio en la representación de las variables aleatorias.

#### 3.4.3.4 Módulo de elasticidad $E$ y relación de Poisson $\nu$ (estado plano de esfuerzo)

##### (a) Matriz de elasticidad

De acuerdo como se estableció la matriz de elasticidad en (3.62), se tiene que:

$$D = E[2\mu'D_1 + \lambda'D_2] \quad (3.94)$$

siendo  $D_1$  y  $D_2$  marices unitarias.

##### (b) Matriz de elasticidad estocástica

La matriz de elasticidad estocástica cuando  $E$  y  $\nu$  son aleatorios se escribe como:

$$D(X, \theta) = V_E(X, \theta) ([V_{2\mu'}(X, \theta) D_1 + V_{\lambda'}(X, \theta) D_2]) \quad (3.95)$$

Se observa que la matriz  $D(X, \theta)$  se desarrollada igual que en (3.77), solamente se necesita multiplicarla por la variabilidad de  $E$ , ( $V_E(X, \theta)$ ).

Recordando que un campo aleatorio expandido en serie de *Karhunen-Loève* y *caos polinomial* (3.47) se escribe como:

$$\begin{aligned} V_E(X, \theta) &= E\{V_E(X, \theta)\} + \sigma_E \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j = E\{V_E(X, \theta)\} + \sigma_E b_E(X, \theta) \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 \sigma_E b_E(X, \theta) \end{aligned} \quad (3.96)$$

donde:  $\gamma_0$  es igual al valor esperado del campo aleatorio de  $E$  y  $\gamma_1$  es igual a uno.

Tomando en cuenta (3.96) y  $D(X, \theta)$  que contiene  $\nu$  aleatorio (3.77), la matriz de elasticidad estocástica para los campos aleatorios  $E$  y  $\nu$  es:

$$D(X, \theta) = \gamma_0 + \sigma_E \gamma_1 b_E(X, \theta) \left( \begin{aligned} &(\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_\nu b_\nu(X, \theta) + \alpha_2 \sigma_\nu^2 b_\nu(X, \theta)^2 + \alpha_3 \sigma_\nu^3 b_\nu(X, \theta)^3) D_1 + \\ &(\beta_0 + \beta_1 \sigma_\nu b_\nu(X, \theta) + \beta_2 \sigma_\nu^2 b_\nu(X, \theta)^2 + \beta_3 \sigma_\nu^3 b_\nu(X, \theta)^3) D_2 \end{aligned} \right) \quad (3.97)$$

Considerando que la variabilidad  $E$  y  $\nu$  se representa mediante campos aleatorios Gaussianos y que cada campo aleatorio se expande con el mismo número de variables aleatorias  $\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$ , se puede escribir que:

$$b_E(X, \theta) = b_\nu(X, \theta) = b(X, \theta) = \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \quad (3.98)$$

Desarrollando la ec. (3.97), la matriz de elasticidad estocástica se escribe de forma explícita como:

$$D(X, \theta) = \left( \begin{array}{l} (\gamma_0 \alpha_0 + \gamma_0 \alpha_1 \sigma_\nu b(X, \theta) + \gamma_0 \alpha_2 \sigma_\nu^2 b(X, \theta)^2 + \gamma_0 \alpha_3 \sigma_\nu^3 b(X, \theta)^3) D_1 + \\ (\alpha_0 \gamma_1 \sigma_E b(X, \theta) + \alpha_1 \gamma_1 \sigma_E \sigma_\nu b(X, \theta)^2 + \alpha_2 \gamma_1 \sigma_E \sigma_\nu^2 b(X, \theta)^3 + \alpha_3 \gamma_1 \sigma_E \sigma_\nu^3 b(X, \theta)^4) D_1 + \\ (\gamma_0 \beta_0 + \gamma_0 \beta_1 \sigma_\nu b(X, \theta) + \gamma_0 \beta_2 \sigma_\nu^2 b(X, \theta)^2 + \gamma_0 \beta_3 \sigma_\nu^3 b(X, \theta)^3) D_2 + \\ (\beta_0 \gamma_1 \sigma_E b(X, \theta) + \beta_1 \gamma_1 \sigma_E \sigma_\nu b(X, \theta)^2 + \beta_2 \gamma_1 \sigma_E \sigma_\nu^2 b(X, \theta)^3 + \beta_3 \gamma_1 \sigma_E \sigma_\nu^3 b(X, \theta)^4) D_2 \end{array} \right) \quad (3.99)$$

La matriz de elasticidad estocástica (3.99) contiene términos representados por el producto entre  $E\{E\}$  y  $b(X, \theta)^n$ , sólo los elementos que contienen la variabilidad del módulo de elasticidad  $E$  se refleja en la respuesta.

En términos generales la matriz de elasticidad estocástica se puede escribir como:

$$D(X, \theta) = \bar{D} + \Delta D(X, \theta) \quad (3.100)$$

En esta formulación,  $\bar{D}$  está formada por una matriz determinista  $D_{\det}$  y una matriz  $\delta D(X, \theta)$ , definida como:

$$\bar{D} = D_{\det} + \delta D(X, \theta) \quad (3.101)$$

donde:  $D_{\det}$ , agrupa  $E\{E\}$  y  $E\{\nu\}$ ; la matriz  $\delta D(X, \theta)$ , contiene los elementos del producto entre  $E\{E\}$  y los términos aleatorios de la expansión de  $\nu$ , las matrices se expresan como:

$$\begin{aligned} D_{\det} &= \gamma_0 \alpha_0 D_1 + \gamma_0 \beta_0 D_2 \\ \delta D(X, \theta) &= \sum_{m=1}^3 \gamma_0 \alpha_m \sigma_\nu^m b_\nu^m(X, \theta) D_1 + \sum_{n=1}^3 \gamma_0 \beta_n \sigma_\nu^n b_\nu^n(X, \theta) D_2 \end{aligned} \quad (3.102)$$

Los elementos aleatorios restantes se agrupan en la siguiente matriz:

$$\Delta D'(X, \theta) = \sum_{m=0}^3 \gamma_1 \sigma_E \alpha_m \sigma_\nu^m b^{(1+m)}(X, \theta) D_1 + \sum_{n=0}^3 \gamma_1 \sigma_E \beta_n \sigma_\nu^n b^{(1+n)}(X, \theta) D_2 \quad (3.103)$$

Así,  $\Delta D(X, \theta)$  es la contribución de  $\Delta D'(X, \theta)$  menos los elementos aleatorios considerados en la matriz  $\bar{D}$ , que se escribe como:

$$\Delta D(X, \theta) = \Delta D'(X, \theta) - \delta D(X, \theta) \quad (3.104)$$

Finalmente, sustituyendo  $\bar{D}$  (3.101) y  $D(X, \theta)$  (3.104) en (3.100) se llega a:

$$\begin{aligned} D(X, \theta) &= D_{\det} + \delta D(X, \theta) + \Delta D'(X, \theta) - \delta D(X, \theta) \\ D(X, \theta) &= D_{\det} + \Delta D'(X, \theta) \end{aligned} \quad (3.105)$$

Por tanto, las matrices son:

Matriz de rigidez media

$$\begin{aligned}\bar{D} &= D_{\text{det}} \\ \bar{D} &= \gamma_0 \alpha_0 D_1 + \gamma_0 \beta_0 D_2\end{aligned}\quad (3.106)$$

Matriz de rigidez estocástica

$$\Delta D(X, \theta) = \Delta D'(X, \theta) = \left( \begin{aligned} &(\gamma_1 \alpha_0 \sigma_E b(X, \theta) + \gamma_1 \alpha_1 \sigma_E \sigma_v b(X, \theta)^2 + \gamma_1 \alpha_2 \sigma_E \sigma_v^2 b(X, \theta)^3 + \gamma_1 \alpha_3 \sigma_E \sigma_v^3 b(X, \theta)^4) D_1 + \\ &(\gamma_1 \beta_0 \sigma_E b(X, \theta) + \gamma_1 \beta_1 \sigma_E \sigma_v b(X, \theta)^2 + \gamma_1 \beta_2 \sigma_E \sigma_v^2 b(X, \theta)^3 + \gamma_1 \beta_3 \sigma_E \sigma_v^3 b(X, \theta)^4) D_2 \end{aligned} \right) \quad (3.107)$$

(c) *Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica.*

Matriz de rigidez estocástica

La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$ , es una función de la variabilidad de  $E$  y  $\nu$  contenida en  $D$ . Se obtiene al sustituir  $\Delta D(X, \theta)$  (3.107) en (3.26), teniendo que:

$$\begin{aligned}K(\theta) &= \int_{\Omega} B^T \Delta D(X, \theta) B d\Omega \\ K(\theta) &= \gamma_1 \alpha_0 \sigma_E K_1^1(\theta) + \gamma_1 \alpha_1 \sigma_E \sigma_v K_1^2(\theta) + \gamma_1 \alpha_2 \sigma_E \sigma_v^2 K_1^3(\theta) + \gamma_1 \alpha_3 \sigma_E \sigma_v^3 K_1^4(\theta) + \\ &\quad \gamma_1 \beta_0 \sigma_E K_2^1(\theta) + \gamma_1 \beta_1 \sigma_E \sigma_v K_2^2(\theta) + \gamma_1 \beta_2 \sigma_E \sigma_v^2 K_2^3(\theta) + \gamma_1 \beta_3 \sigma_E \sigma_v^3 K_2^4(\theta)\end{aligned}\quad (3.108)$$

Las matrices de rigideces deterministas son:

- Matriz de rigidez media:

$$K_0 = \int_{\Omega} B^T \bar{D} B d\Omega \quad (3.109)$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$K_{m,i} = \int_{\Omega} B^T b_i D_m B d\Omega; \quad m = 1, 2; \quad b_i = \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \quad (3.110)$$

Matrices de rigidez aleatorias  $K^{\eta}(\theta)$

Recordando que una forma conveniente de representación de la matriz de rigidez para la formulación es:

$$K(\theta) = \int_{\Omega} B^T \Delta D(X, \theta) B d\Omega = \sum_{i=1}^M K_{m,i} \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j; \quad m = 1, 2 \quad (3.111)$$

Al desarrollar cada uno de los términos contenidos en  $K(\theta)$  (3.108) (ver Anexo A.7), se llega a una forma general como la expresión (3.111), teniendo las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
 K^2(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{m,i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1,j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2,j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1,j_2,j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} \\
 K^2(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{m,i_1} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_1}}^2 \Psi_{j_{A_1}} \\
 &\vdots \\
 K^n(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{m,i_1} \sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A(n-1)}}^n \Psi_{j_{A(n-1)}} ; \quad m=1,2
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A(n-1)}}^n &= \sum_{i_a=1}^M \left| \prod_{b=2}^n b_{i_b} \sum_{j_a=0}^{P-1} \right| \prod_{b=1}^n C_{i_b,j_b} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1,j_2,j_{A_1}} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} \left| \prod_{a=2}^{(n-1)} \prod_{b=3}^n C_{j_{A(b-2)},j_b,j_{A(b-1)}} \right| \\
 \text{Para } n=2; \quad \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} \left| \prod_{a=2}^{(n-1)} \prod_{b=3}^n C_{j_{A(b-2)},j_b,j_{A(b-1)}} \right| &\equiv 1
 \end{aligned}$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Una vez establecida la matriz estocástica  $K(\theta)$  (3.108), con sus correspondientes términos  $K^n(\theta)$ , y considerando la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), la ecuación de equilibrio (3.24), se escribe como:

$$\left( \begin{array}{l} \gamma_1 \alpha_0 \sigma_E \sum_{i=1}^M K_{1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{a=1}^3 \gamma_1 \alpha_a \sigma_E \sigma_v^a \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{j_{A_a}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_a}}^{(a+1)} \Psi_{j_{A_a}} \Psi_k + \\ \gamma_1 \beta_0 \sigma_E \sum_{i=1}^M K_{2,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{a=1}^3 \gamma_1 \beta_a \sigma_E \sigma_v^a \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{j_{A_a}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_a}}^{(a+1)} \Psi_{j_{A_a}} \Psi_k \end{array} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \tag{3.113}$$

Para simplificar, se asume que  $j_{A_1}, \dots, j_{A_n} = j$ , teniendo que (3.113) se escribe como:

$$\left( \sum_{a=0}^3 \gamma_1 \alpha_a \sigma_E \sigma_v^a \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(a+1)} \Psi_j \Psi_k + \sum_{a=0}^3 \gamma_1 \beta_a \sigma_E \sigma_v^a \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(a+1)} \Psi_j \Psi_k \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \tag{3.114}$$

### Minimización del error por truncamiento

Al aplicar la condición de minimización ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi\} = 0$ ) se obtiene la esperanza del producto de tres polinomios definidos como  $E\{\Psi_j \Psi_k \Psi_l\} = d_{jkl}$ , considerando esto y la siguiente simplificación:

$$K_{m,kl}^n = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad m=1,2; \quad n=1,2,3,4 \tag{3.115}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$K_{kl} = \sum_{a=0}^3 \gamma_1 \alpha_a \sigma_E \sigma_v^a K_{1,kl}^{(a+1)} + \sum_{a=0}^n \gamma_1 \beta_a \sigma_E \sigma_v^a K_{2,kl}^{(a+1)} \quad (3.116)$$

$$\sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k = F$$

La ec. 3.116 representa la ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE con coeficientes  $d_{kjl} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_l\}$ , para el módulo de elasticidad  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$  aleatorios (estado plano de esfuerzo).

### 3.4.4 Derivación de las ecuaciones de equilibrio estocásticas: caso anisótropo (estado plano de esfuerzo)

#### 3.4.4.1 Matriz de elasticidad para el estado plano de esfuerzo

La matriz constitutiva  $D$  para el estado plano de esfuerzo es como sigue:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{E_h}{1 - n\nu_{vh}^2} & \frac{E_h}{1 - n\nu_{vh}^2} \nu_{vh} & 0 \\ \frac{E_h}{1 - n\nu_{vh}^2} \nu_{vh} & \frac{E_v}{1 - n\nu_{vh}^2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{vh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

Con el grado de anisotropía definido como  $n = E_h / E_v$ .

Los elementos de la matriz  $D$  son funciones no lineales de los parámetros  $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$ . Al igual que en el caso isótropo, se recurre a una expansión en series geométricas para tener una representación lineal de cada término de  $D$ , teniendo lo siguiente:

$$D_{11} = \frac{E_h}{1 - \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2} = E_h \left( 1 + \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 + \left( \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 \right)^2 + \dots \right) = E_h + \frac{E_h^2}{E_v} \nu_{vh}^2 + \frac{E_h^3}{E_v^2} \nu_{vh}^4 + \dots$$

$$D_{12} = \frac{E_h \nu_{vh}}{1 - \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2} = E_h \nu_{vh} \left( 1 + \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 + \left( \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 \right)^2 + \dots \right) = E_h \nu_{vh} + \frac{E_h^2}{E_v} \nu_{vh}^3 + \frac{E_h^3}{E_v^2} \nu_{vh}^5 + \dots \quad (3.118)$$

$$D_{22} = \frac{E_v}{1 - \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2} = E_v \left( 1 + \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 + \left( \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 \right)^2 + \dots \right) = E_v + E_h \nu_{vh}^2 + \frac{E_h^2}{E_v} \nu_{vh}^4 + \dots$$

La variabilidad de la submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  se representó solamente con tres términos de la serie; la contribución de términos adicionales se consideró suficientemente pequeña para no tomarse en cuenta.

La submatriz  $D_{33}$  está representada por el parámetro  $G_{vh}$  que de acuerdo con Barden (1963) se puede expresar como:

$$G_{vh} = \frac{E_h}{(1 + n + 2n\nu_{vh})} \quad (3.119)$$

Sin embargo, este parámetro no fue posible representarlo mediante series geométricas debido a que la serie no convergía. La variabilidad de este parámetro se modeló como una función de la incertidumbre de  $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$ , donde su valor esperado y desviación estándar se calcularon mediante series de Taylor (Auvinet, 2000).

### 3.4.4.2 Módulo de elasticidad vertical $E_v$ aleatorio

#### (a) Matriz de elasticidad

Cuando se considera solamente la variabilidad del módulo de elasticidad vertical  $E_v$ , los elementos de la matriz de elasticidad  $D$  se pueden representar en forma matricial como:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \begin{pmatrix} E_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{E_v} \begin{pmatrix} E_h^2 \nu_{vh}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{E_v^2} \begin{pmatrix} E_h^3 \nu_{vh}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ D_{11} &= D_{111} + \frac{1}{E_v} D_{112} + \frac{1}{E_v^2} D_{113} \\ D_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & E_h \nu_{vh} & 0 \\ E_h \nu_{vh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{E_v} \begin{pmatrix} 0 & E_h^2 \nu_{vh}^3 & 0 \\ E_h^2 \nu_{vh}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{E_v^2} \begin{pmatrix} 0 & E_h^3 \nu_{vh}^5 & 0 \\ E_h^3 \nu_{vh}^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ D_{12} &= D_{121} + \frac{1}{E_v} D_{122} + \frac{1}{E_v^2} D_{123} \\ D_{22} &= E_v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_h \nu_{vh}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{E_v} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_h^2 \nu_{vh}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ D_{22} &= E_v D_{221} + D_{222} + \frac{1}{E_v} D_{223} \\ D_{33} &= G_{vh} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_{vh} D_{331} \end{aligned} \quad (3.120)$$

#### (b) Matriz de elasticidad estocástica

Sustituyendo la variabilidad del módulo de elasticidad vertical  $E_v$  en las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  y  $D_{33}$  se tiene que la matriz de elasticidad estocástica  $D(X, \theta)$  es:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= D_{111} + \frac{1}{V_E(X, \theta)} D_{112} + \frac{1}{V_E(X, \theta)^2} D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= D_{121} + \frac{1}{V_E(X, \theta)} D_{122} + \frac{1}{V_E(X, \theta)^2} D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= E_V D_{221} + D_{222} + \frac{1}{V_E(X, \theta)} D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= V_{G_{vh}}(X, \theta) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Se observa de (3.121) que el campo aleatorio del módulo de elasticidad  $E_V$  contenido en  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ , requiere nuevamente expandirse en series geométricas para tener una representación lineal de dicho campo. El álgebra de esta expansión se desarrolla en el Anexo A.8, de donde se obtienen diferentes expresiones para  $V_E(X, \theta)$ . En (3.73) se establece que  $V_V(X, \theta) = E\{V_V(X, \theta)\} + \sigma_V b_V(X, \theta)$ , en lo sucesivo se considera, por facilidad en el manejo de las ecuaciones, que  $b_V(X, \theta) = b_V$ , se tiene así que:

$$\begin{aligned}
 V(X, \theta) &= (E\{E_V\} + \sigma_{E_V} b_{E_V}) = \beta_{1,0} + \beta_{1,1} \sigma_{E_V} b_{E_V} \\
 \frac{1}{V(X, \theta)} &= \frac{1}{(E\{E_V\} + \sigma_{E_V} b_{E_V})} = \frac{1}{E\{E_V\} \left(1 + \frac{\sigma_{E_V} b_{E_V}}{E\{E_V\}}\right)} = \beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_V} b_{E_V} + \beta_{2,2} \sigma_{E_V}^2 b_{E_V}^2 \\
 \frac{1}{V(X, \theta)^2} &= \frac{1}{(E\{E_V\} + \sigma_{E_V} b_{E_V})^2} = \frac{1}{a_2^2 \left(1 + \frac{1}{a_2} (\sigma_{E_V} b_{E_V} - a_1)\right)^2} = \beta_{3,0} + \beta_{3,1} \sigma_{E_V} b_{E_V} + \beta_{3,2} \sigma_{E_V}^2 b_{E_V}^2
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

donde:  $\{\beta_{m,n}; m = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, \}$   $\beta$  son coeficientes propios de la expansión del campo,  $m$  representa la forma matemática del campo aleatorio y  $n$  el grado de cada término de la expansión polinomial.

Sustituyendo (3.122) en (3.120), las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  se expresan en forma simplificada como:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= D_{111} + (\beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_V} b_{E_V} + \beta_{2,2} \sigma_{E_V}^2 b_{E_V}^2) D_{112} + (\beta_{3,0} + \beta_{3,1} \sigma_{E_V} b_{E_V} + \beta_{3,2} \sigma_{E_V}^2 b_{E_V}^2) D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= D_{121} + (\beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_V} b_{E_V} + \beta_{2,2} \sigma_{E_V}^2 b_{E_V}^2) D_{122} + (\beta_{3,0} + \beta_{3,1} \sigma_{E_V} b_{E_V} + \beta_{3,2} \sigma_{E_V}^2 b_{E_V}^2) D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= (\beta_{1,0} + \beta_{1,1} \sigma_{E_V} b_{E_V}) D_{221} + D_{222} + (\beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_V} b_{E_V} + \beta_{2,2} \sigma_{E_V}^2 b_{E_V}^2) D_{223}
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

Seguindo con esta misma forma, la matriz  $D_{33}$  se puede expresar como:

$$D_{33}(X, \theta) = E\{V_{G_{vh}}(X, \theta)\} + \sigma_{G_{vh}} \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j = (\omega_0 + \omega_1 \sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}) D_{331} \tag{3.124}$$

donde:  $\omega_0$  es igual al valor esperado del campo aleatorio de  $G_{vh}$  y  $\omega_1$  es igual a uno.

Agupando términos, la matriz constitutiva aleatoria se puede expresar como:

$$D(X, \theta) = \bar{D} + \Delta D(X, \theta) \quad (3.125)$$

Teniendo:

Matriz elasticidad media

$$\begin{aligned} \bar{D} &= D_{111} + D_{121} + D_{222} + \beta_{1,0} D_{221} + \beta_{2,0} (D_{112} + D_{122}) + \beta_{3,0} (D_{113} + D_{123}) + \gamma_0 D_{331} \\ \bar{D} &= \sum_{n=2}^3 \sum_{m=1}^2 \beta_{n,0} D_{1mn} + D_{221} + \omega_0 D_{331} \end{aligned} \quad (3.126)$$

Matriz elasticidad aleatoria

$$\begin{aligned} \Delta D_{1,1}(X, \theta) &= (\beta_{2,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{112} + (\beta_{3,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{113} \\ \Delta D_{1,2}(X, \theta) &= (\beta_{2,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{122} + (\beta_{3,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{123} \\ \Delta D_{2,2}(X, \theta) &= (\beta_{1,1} \sigma_{E_v} b_{E_v}) D_{221} + (\beta_{2,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{223} \\ \Delta D_{3,3}(X, \theta) &= (\omega_1 \sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}) D_{331} \end{aligned} \quad (3.127)$$

(c) Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica

Matriz de rigidez estocástica

La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$ , es linealmente dependiente de la variabilidad de  $E_v$ , se obtiene al sustituir  $\Delta D(X, \theta)$  (3.127) en (3.26), teniendo que:

$$\begin{aligned} K(\theta) &= \int_{\Omega} B^T \Delta D(X, \theta) B d\Omega \\ K_{1,1}(\theta) &= \beta_{2,1} \sigma_{E_v} K_{112}^1(\theta) + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 K_{112}^2(\theta) + \beta_{3,1} \sigma_{E_v} K_{113}^1(\theta) + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 K_{113}^2(\theta) \\ K_{1,1}(\theta) &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=(n+1)}^3 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n K_{11m}^n(\theta) \\ K_{1,2}(\theta) &= \beta_{2,1} \sigma_{E_v} K_{122}^1(\theta) + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 K_{122}^2(\theta) + \beta_{3,1} \sigma_{E_v} K_{123}^1(\theta) + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 K_{123}^2(\theta) \\ K_{1,2}(\theta) &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=(n+1)}^3 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n K_{12m}^n(\theta) \\ K_{2,2}(\theta) &= \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{221}^1(\theta) + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} K_{223}^1(\theta) + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 K_{223}^2(\theta) \\ K_{2,2}(\theta) &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=n}^2 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n K_{22(2m-1)}^n(\theta) \\ K_{3,3}(\theta) &= \omega_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331}(\theta) \\ K(\theta) &= K_{1,1}(\theta) + K_{1,2}(\theta) + K_{2,2}(\theta) + K_{3,3}(\theta) \end{aligned} \quad (3.128)$$

Matrices de rigidez deterministas

- Matriz de rigidez media:

$$K_0 = \int_{\Omega} B^T \bar{D} B d\Omega \quad (3.129)$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned} K_{11m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega; & m = 2,3 \\ K_{12m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega; & m = 2,3 \\ K_{22m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega; & m = 1,3 \\ K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega \end{aligned} \quad (3.130)$$

### Matrices de rigidez aleatorias $K^n(\theta)$

De acuerdo con lo desarrollado en el Anexo A.7, las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$ , contenidas en  $K(\theta)$  (3.128), se expresan como sigue:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \quad (3.131)$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Una vez establecida la matriz estocástica  $K(\theta)$ , con sus correspondientes términos  $K^n(\theta)$ , y considerando la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), la ecuación de equilibrio estocástica (3.24), se escribe como:

$$\left( \begin{array}{l} \sum_{n=1}^2 \sum_{m=(n+1)}^3 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{n=1}^2 \sum_{m=(n+1)}^3 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{12m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{n=1}^2 \sum_{m=n}^2 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{22(2m-1),i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \omega_1 \sigma_{G_{vh}} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \end{array} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \quad (3.132)$$

### Minimización del error por truncamiento

Al aplicar la condición de minimización ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi_j\} = 0$ ) se obtiene que  $E\{\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l\} = d_{jkl}$  y se puede establecer la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned}
 K_{11m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; & n=1,2 \text{ y } m=2,3 \\
 K_{12m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; & n=1,2 \text{ y } m=2,3 \\
 K_{22m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; & n=1,2 \text{ y } m=1,2,3 \\
 K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl}
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned}
 K_{kl} &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=(n+1)}^3 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n K_{11m,kl}^n + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=(n+1)}^3 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n K_{12m,kl}^n + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=n}^2 \beta_{m,n} \sigma_{E_v}^n K_{22(2m-1),kl}^n + \omega_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331,kl} \\
 \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k &= F
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

La ec. 3.134 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para  $E_v$  aleatorio (estado plano de esfuerzo).

### 3.4.4.3 Módulo de elasticidad horizontal $E_h$ aleatorio

#### (a) Matriz de elasticidad

Los elementos de la matriz de elasticidad  $D$  cuando el módulo de elasticidad horizontal  $E_h$  es aleatorio son:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= E_h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E_h^2 \begin{pmatrix} \frac{v_{vh}^2}{E_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E_h^3 \begin{pmatrix} \frac{v_{vh}^4}{E_v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 D_{12} &= E_h \begin{pmatrix} 0 & v_{vh} & 0 \\ v_{vh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E_h^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_{vh}^3}{E_v} & 0 \\ \frac{v_{vh}^3}{E_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E_h^3 \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_{vh}^5}{E_v^2} & 0 \\ \frac{v_{vh}^5}{E_v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 D_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E_h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{vh}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E_h^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{vh}^4}{E_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 D_{33} &= G_{vh} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

(b) *Matriz de elasticidad estocástica*

Las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  y  $D_{33}$  para  $E_h$  aleatorio, con notación abreviada, se escriben como:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= V_{E_h}(X, \theta)D_{111} + V_{E_h}(X, \theta)^2 D_{112} + V_{E_h}(X, \theta)^3 D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= V_{E_h}(X, \theta)D_{121} + V_{E_h}(X, \theta)^2 D_{122} + V_{E_h}(X, \theta)^3 D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= D_{221} + V_{E_h}(X, \theta)D_{222} + V_{E_h}(X, \theta)^2 D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= V_{G_{vh}}(X, \theta)D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

Los binomios de la expresión anterior (3.136) se agrupan como sigue:

$$\begin{aligned}
 V_{E_h}(X, \theta) &= \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} \\
 V_{E_h}(X, \theta)^2 &= \alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 \\
 &\vdots \\
 V_{E_h}(X, \theta)^n &= \alpha_{n,0} + \alpha_{n,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \dots + \alpha_{n,m}\sigma_{E_h}^m b_{E_h}^m; \quad m = 0, \dots, n \\
 V_{G_{vh}}(X, \theta) &= \omega_0 + \omega_1\sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

donde:  $\{\alpha_{n,m}; n = 1, 2, 3; m = 0, 1, 2, \dots\}$   $\alpha$  son coeficientes del desarrollo de los binomios (ver ec. A.53) que contienen el valor esperado del campo aleatorio,  $n$  representa el exponente del binomio y  $m$  es el grado de cada término del desarrollo del binomio. En tanto que  $\omega_0$  es igual al valor esperado del campo aleatorio de  $G_{vh}$  y  $\omega_1$  es igual a uno.

Sustituyendo (3.137) en (3.136) se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{111} + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) D_{112} + \\
 &\quad (\alpha_{3,0} + \alpha_{3,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{3,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 + \alpha_{3,3}\sigma_{E_h}^3 b_{E_h}^3) D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{121} + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) D_{122} + \\
 &\quad (\alpha_{3,0} + \alpha_{3,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{3,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 + \alpha_{3,3}\sigma_{E_h}^3 b_{E_h}^3) D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= D_{221} + (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{222} + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= (\omega_0 + \omega_1\sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

Con matrices:

### Matriz de elasticidad media

$$\begin{aligned}
 \bar{D} &= \alpha_{1,0} D_{111} + \alpha_{2,0} D_{112} + \alpha_{3,0} D_{113} + \alpha_{1,0} D_{121} + \alpha_{2,0} D_{122} + \alpha_{3,0} D_{123} + \\
 &\quad D_{221} + \alpha_{1,0} D_{222} + \alpha_{2,0} D_{223} + \omega_0 D_{331} \\
 \bar{D} &= \sum_{r=1}^2 \sum_{n=r}^2 \sum_{m=r}^3 \alpha_0 D_{mmm} + D_{221} + \omega_0 D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.139}$$

### Matriz de elasticidad estocástica

$$\begin{aligned}
 \Delta D_{11}(X, \theta) &= (\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{111} + (\alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) D_{112} + \\
 &\quad (\alpha_{3,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{3,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 + \alpha_{3,3}\sigma_{E_h}^3 b_{E_h}^3) D_{113} \\
 \Delta D_{12}(X, \theta) &= (\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{121} + (\alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) D_{122} + \\
 &\quad (\alpha_{3,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{3,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 + \alpha_{3,3}\sigma_{E_h}^3 b_{E_h}^3) D_{123} \\
 \Delta D_{22}(X, \theta) &= (\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{222} + (\alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) D_{223} \\
 \Delta D_{33}(X, \theta) &= (\omega_1\sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.140}$$

(c) *Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica*

### Matriz de rigidez estocástica

La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$ , función de la variabilidad de  $E_h$ , se obtiene al sustituir  $\Delta D(X, \theta)$  (3.140) en (3.23), teniendo que:

$$\begin{aligned}
 K_{11}(\theta) &= \left( \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{111}^1(\theta) \right) + \left( \alpha_{2,1} \sigma_{E_h} K_{112}^1(\theta) + \alpha_{2,2} \sigma_{E_h}^2 K_{112}^2(\theta) \right) + \\
 &\quad \left( \alpha_{3,1} \sigma_{E_h} K_{113}^1(\theta) + \alpha_{3,2} \sigma_{E_h}^2 K_{113}^2(\theta) + \alpha_{3,3} \sigma_{E_h}^3 K_{113}^3(\theta) \right) \\
 K_{11}(\theta) &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=n}^3 \alpha_{m,n} \sigma_{E_h}^n K_{11m}^n(\theta) \\
 K_{12}(\theta) &= \left( \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{121}^1(\theta) \right) + \left( \alpha_{2,1} \sigma_{E_h} K_{122}^1(\theta) + \alpha_{2,2} \sigma_{E_h}^2 K_{122}^2(\theta) \right) + \\
 &\quad \left( \alpha_{3,1} \sigma_{E_h} K_{123}^1(\theta) + \alpha_{3,2} \sigma_{E_h}^2 K_{123}^2(\theta) + \alpha_{3,3} \sigma_{E_h}^3 K_{123}^3(\theta) \right) D_{123} \\
 K_{12}(\theta) &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=n}^3 \alpha_{m,n} \sigma_{E_h}^n K_{12m}^n(\theta) \\
 K_{22}(\theta) &= \left( \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{222}^1(\theta) \right) + \left( \alpha_{2,1} \sigma_{E_h} K_{223}^1(\theta) + \alpha_{2,2} \sigma_{E_h}^2 K_{223}^2(\theta) \right) \\
 K_{22}(\theta) &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=n}^2 \alpha_{m,n} \sigma_{E_h}^n K_{22(m+1)}^n(\theta) \\
 K_{33}(\theta) &= \omega_1 \sigma_{G_h} K_{331}(\theta) \\
 K(\theta) &= K_{11}(\theta) + K_{12}(\theta) + K_{22}(\theta) + K_{33}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.141}$$

### Matrices de rigidez deterministas

- Matriz de rigidez media:

$$K_0 = \int_{\Omega} B^T \bar{D} B d\Omega \tag{3.142}$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{11m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega; & m = 1, 2, 3 \\
 K_{12m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega; & m = 1, 2, 3 \\
 K_{22m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega; & m = 2, 3 \\
 K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.143}$$

### Matrices de rigidez aleatorias $K^n(\theta)$

Según lo desarrollado en el Anexo A.7, las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  contenidas en  $K(\theta)$  (3.141), se expresan como sigue:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \tag{3.144}$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Una vez establecida la matriz estocástica  $K(\theta)$ , con sus correspondientes términos  $K^n(\theta)$ , y considerando la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), la ecuación de equilibrio estocástica (3.24) se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=1}^3 \sum_{m=n}^3 \alpha_n \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j + \\ \sum_{n=1}^3 \sum_{m=n}^3 \alpha_n \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{12m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j + \\ \sum_{n=1}^2 \sum_{m=(n+1)}^3 \alpha_n \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{22m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j + \\ \omega_1 \sigma_{G_{vh}} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{P-1} U_k \end{pmatrix} = F \quad (3.145)$$

Minimización del error por truncamiento

Al minimizar el error por truncamiento ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi_j\}=0$ ) se obtiene que  $E\{\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l\}=d_{jkl}$ , y considerando la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned} K_{11m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2,3 \text{ y } m=1,2,3 \\ K_{12m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2,3 \text{ y } m=1,2,3 \\ K_{22m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2 \text{ y } m=2,3 \\ K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned} K_{kl} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=n}^3 \alpha_n \sigma_{E_h}^n K_{11m,kl}^n + \sum_{n=1}^3 \sum_{m=n}^3 \alpha_n \sigma_{E_h}^n K_{12m,kl}^n + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=(n+1)}^3 \alpha_n \sigma_{E_h}^n K_{22m,kl}^n + \omega_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331,kl} \\ \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k &= F \end{aligned} \quad (3.147)$$

La ec. 3.147 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para  $E_h$  aleatorio (estado plano de esfuerzo).

3.4.4.4 Módulo de elasticidad vertical  $E_v$  y horizontal  $E_h$  aleatorios

(a) Matriz de elasticidad

Los elementos de la matriz de elasticidad  $D$  para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios son:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= E_h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^2}{E_v} \begin{pmatrix} v_{vh}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^3}{E_v^2} \begin{pmatrix} v_{vh}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 D_{12} &= E_h \begin{pmatrix} 0 & v_{vh} & 0 \\ v_{vh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^2}{E_v} \begin{pmatrix} 0 & v_{vh}^3 & 0 \\ v_{vh}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^3}{E_v^2} \begin{pmatrix} 0 & v_{vh}^5 & 0 & 0 \\ v_{vh}^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 D_{22} &= E_v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E_h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{vh}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^2}{E_v} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{vh}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 D_{33} &= G_{vh} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_{vh} D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

(b) *Matriz de elasticidad estocástica*

Las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  y  $D_{33}$  para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios, se escriben de forma abreviada como:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= V_{E_h}(X, \theta) D_{111} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^2}{V_{E_v}(X, \theta)} D_{112} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^3}{V_{E_v}(X, \theta)^2} D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= V_{E_h}(X, \theta) D_{121} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^2}{V_{E_v}(X, \theta)} D_{122} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^3}{V_{E_v}(X, \theta)^2} D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= V_{E_v}(X, \theta) D_{221} + V_{E_h}(X, \theta) D_{222} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^2}{V_{E_v}(X, \theta)} D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= V_{G_{vh}}(X, \theta) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

Sustituyendo las expresiones de los campos aleatorios  $V_{E_h}(X, \theta)$  y  $V_{E_v}(X, \theta)$  desarrolladas en el Anexo A.8 y considerando  $D_{33}$  como se expresó en (3.124), se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{111} + \\
 &\quad (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) (\beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{112} + \\
 &\quad (\alpha_{3,0} + \alpha_{3,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{3,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 + \alpha_{3,3}\sigma_{E_h}^3 b_{E_h}^3) (\beta_{3,0} + \beta_{3,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{121} + \\
 &\quad (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) (\beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{122} + \\
 &\quad (\alpha_{3,0} + \alpha_{3,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{3,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 + \alpha_{3,3}\sigma_{E_h}^3 b_{E_h}^3) (\beta_{3,0} + \beta_{3,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= (\beta_{1,0} + \beta_{1,1}\sigma_{E_v} b_{E_v}) D_{221} + (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{222} + \\
 &\quad (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) (\beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= (\omega_0 + \omega_1\sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

Al tratarse de dos parámetros diferentes, la matriz de elasticidad contiene el producto entre términos deterministas y aleatorios. Considerando lo establecido en el inciso 3.4.3.4 (ec. 3.106), se tienen las siguientes matrices:

Matriz de elasticidad media

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0} D_{111} + \alpha_{2,0} \beta_{2,0} D_{112} + \alpha_{3,0} \beta_{3,0} D_{113} + \\ \alpha_{1,0} D_{121} + \alpha_{2,0} \beta_{2,0} D_{122} + \alpha_{3,0} \beta_{3,0} D_{123} + \\ \beta_{1,0} D_{221} + \alpha_{1,0} D_{222} + \alpha_{2,0} \beta_{2,0} D_{223} + \gamma_0 D_{33} \end{pmatrix} \tag{3.151}$$

Como cada campo aleatorio se expande con el mismo número de variables aleatorias  $\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$ , se considera que  $b_{E_h} = b_{E_v} = b_{G_{vh}} = b$ , teniendo que:

Matriz de elasticidad estocástica

$$\begin{aligned}
 \Delta D_{11}(X, \theta) &= (\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b^1) D_{111} + \left( \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^2 \alpha_{(r+1),n} \sigma_{E_h}^n \beta_{(r+1),m} \sigma_{E_v}^m b^{(n+m)} D_{11(r+1)} \right) \\
 \Delta D_{12}(X, \theta) &= (\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b^1) D_{121} + \left( \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^2 \alpha_{(r+1),n} \sigma_{E_h}^n \beta_{(r+1),m} \sigma_{E_v}^m b^{(n+m)} D_{12(r+1)} \right) \\
 \Delta D_{22}(X, \theta) &= (\beta_{1,1}\sigma_{E_v} b^1) D_{221} + (\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b^1) D_{222} + \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m b^{(n+m)}(\theta) \right) D_{223} \\
 \Delta D_{33}(X, \theta) &= (\omega_1\sigma_{G_{vh}} b^1) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

Las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  y  $D_{332}$  anteriores solamente contienen el producto de términos aleatorios.

(c) *Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica*

Matriz de rigidez estocástica

La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$ , que es función de la variabilidad de  $E_v$  y  $E_h$ , se obtiene al sustituir  $\Delta D(X, \theta)$  (3.152) en (3.26), teniendo que:

$$\begin{aligned}
 K_{11}(\theta) &= \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{111}^1(\theta) + \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^2 \alpha_{(r+1),n} \sigma_{E_h}^n \beta_{(r+1),m} \sigma_{E_v}^m K_{11(r+1)}^{(n+m)}(\theta) \\
 K_{12}(\theta) &= \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{121}^1(\theta) + \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^2 \alpha_{(r+1),n} \sigma_{E_h}^n \beta_{(r+1),m} \sigma_{E_v}^m K_{12(r+1)}^{(n+m)}(\theta) \\
 K_{22}(\theta) &= \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{221}^1(\theta) + \alpha_1 \sigma_{E_h} K_{222}^1(\theta) + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m K_{223}^{(n+m)}(\theta) \\
 K_{33}(\theta) &= \gamma_1 \sigma_{G_m} K_{331}(\theta) \\
 K(\theta) &= K_{11}(\theta) + K_{12}(\theta) + K_{22}(\theta) + K_{33}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.153}$$

### Matrices de rigidez deterministas

- Matriz de rigidez media:

$$K_0 = \int_{\Omega} B^T \bar{D} B d\Omega \tag{3.154}$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{11m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega; & m = 1, 2, 3 \\
 K_{12m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega; & m = 1, 2, 3 \\
 K_{22m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega; & m = 1, 2, 3 \\
 K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.155}$$

### Matrices de rigidez aleatorias $K^n(\theta)$

Las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  (ver Anexo A.7) contenidas en  $K(\theta)$  (3.153), se expresan como sigue:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \tag{3.156}$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Una vez establecida la matriz estocástica  $K(\theta)$ , con sus correspondientes términos  $K^n(\theta)$ , y considerando la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), la ecuación de equilibrio estocástica (3.24), se escribe como:

$$\left( \begin{array}{l}
 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{111,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \\
 \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^2 \alpha_{(r+1),n} \sigma_{E_h}^n \beta_{(r+1),m} \sigma_{E_v}^m \sum_{i=1}^M K_{11(r+1),i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m)} \Psi_j \Psi_k + \\
 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{121,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \\
 \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^2 \alpha_{(r+1),n} \sigma_{E_h}^n \beta_{(r+1),m} \sigma_{E_v}^m \sum_{i=1}^M K_{12(r+1),i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m)} \Psi_j \Psi_k + \\
 \beta_{1,1} \sigma_{E_v} \sum_{i=1}^M K_{221,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \alpha_1 \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{222,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \\
 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m \sum_{i=1}^M K_{223,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m)} \Psi_j \Psi_k \\
 \omega_1 \sigma_{G_v} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k
 \end{array} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \quad (3.157)$$

### Minimización del error por truncamiento

Al aplicar la condición de minimización ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi_j\} = 0$ ) se tiene que  $E\{\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l\} = d_{jkl}$ , y considerando que:

$$\begin{aligned}
 K_{11r,kl}^{(n+m)} &= \sum_{i=1}^M K_{11r,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m)} d_{jkl}; \quad n = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2; \quad r = 1, 2, 3 \\
 K_{12r,kl}^{(n+m)} &= \sum_{i=1}^M K_{12r,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m)} d_{jkl}; \quad n = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2; \quad r = 1, 2, 3 \\
 K_{22r,kl}^{(n+m)} &= \sum_{i=1}^M K_{22r,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m)} d_{jkl}; \quad n = 1, 2; \quad m = 1, 2; \quad r = 1, 2, 3 \\
 K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl}
 \end{aligned} \quad (3.158)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica es:

$$\begin{aligned}
 K_{kl} &= \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{111,kl}^1 + \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^2 \alpha_{(r+1),n} \sigma_{E_h}^n \beta_{(r+1),m} \sigma_{E_v}^m K_{11(r+1),kl}^{(n+m)} + \\
 &\quad \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{121,kl}^1 + \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^2 \alpha_{(r+1),n} \sigma_{E_h}^n \beta_{(r+1),m} \sigma_{E_v}^m K_{12(r+1),kl}^{(n+m)} + \\
 &\quad \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{221,kl}^1 + \alpha_1 \sigma_{E_h} K_{222,kl}^1 + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m K_{223,kl}^{(n+m)} + \\
 &\quad \omega_1 \sigma_{G_v} K_{331,kl} \\
 \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k &= F
 \end{aligned} \quad (3.159)$$

La ec. 3.159 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kil} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_l\}$ , para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (estado plano de esfuerzo).

### 3.4.4.5 Relación de Poisson $\nu_{vh}$ aleatoria

#### (a) Matriz de elasticidad

Los elementos de la matriz de elasticidad  $D$  cuando la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  es aleatoria son:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \begin{pmatrix} E_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu_{vh}^2 \begin{pmatrix} \frac{E_h^2}{E_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu_{vh}^4 \begin{pmatrix} \frac{E_h^3}{E_v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 D_{12} &= \nu_{vh} \begin{pmatrix} 0 & E_h & 0 \\ E_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu_{vh}^3 \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_h^2}{E_v} & 0 \\ \frac{E_h^2}{E_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu_{vh}^5 \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_h^3}{E_v^2} & 0 \\ \frac{E_h^3}{E_v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 D_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu_{vh}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu_{vh}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_h^2}{E_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 D_{33} &= G_{vh} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_{vh} D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.160}$$

#### (b) Matriz de elasticidad estocástica

Las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  y  $D_{33}$  para  $\nu_{vh}$  aleatorio, se escriben de forma abreviada como:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= D_{111} + V_{\nu_{vh}}(X, \theta)^2 D_{112} + V_{\nu_{vh}}(X, \theta)^4 D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= V_{\nu_{vh}}(X, \theta) D_{121} + V_{\nu_{vh}}(X, \theta)^3 D_{122} + V_{\nu_{vh}}(X, \theta)^5 D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= D_{221} + V_{\nu_{vh}}(X, \theta)^2 D_{222} + V_{\nu_{vh}}(X, \theta)^4 D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= V_{G_{vh}}(X, \theta) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.161}$$

Los binomios de la expresión anterior (3.161) se agrupan como sigue:

$$\begin{aligned}
 V_{v_{vh}}(X, \theta) &= \gamma_{1,0} + \gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} \\
 V_{v_{vh}}(X, \theta)^2 &= \gamma_{2,0} + \gamma_{2,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{2,2} \sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 \\
 &\vdots \\
 V_{v_{vh}}(X, \theta)^n &= \gamma_{n,0} + \gamma_{n,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \dots + \gamma_{n,m} \sigma_{v_{vh}}^m b_{v_{vh}}^m; \quad m = 0, \dots, n \\
 V_{G_{vh}}(X, \theta) &= \omega_0 + \omega_1 \sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}
 \end{aligned} \tag{3.162}$$

donde:  $\{\gamma_{n,m}; n = 1, 2, \dots m = 0, 1, 2, \dots\}$   $\gamma$  y  $\omega_0$  son coeficientes del desarrollo de los binomios que contienen el valor esperado del campo aleatorio,  $n$  representa el exponente del binomio y  $m$  el grado de cada término del desarrollo del binomio. El coeficiente  $\omega_1$  es igual a uno

Sustituyendo  $V_{v_{vh}}(X, \theta)^n$  (3.162) en (3.161) se llega a las siguientes matrices:

Matriz de elasticidad media

$$\begin{aligned}
 \bar{D} &= D_{111} + \gamma_{2,0} D_{112} + \gamma_{4,0} D_{113} \\
 &\quad \gamma_{1,0} D_{121} + \gamma_{3,0} D_{122} + \gamma_{5,0} D_{123} \\
 &\quad D_{221} + \gamma_{2,0} D_{222} + \gamma_{4,0} D_{223} + \omega_0 D_{33}
 \end{aligned} \tag{3.163}$$

Matriz de elasticidad aleatoria

$$\begin{aligned}
 \Delta D_{11}(X, \theta) &= (\gamma_{2,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{2,2} \sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2) D_{112} + \\
 &\quad (\gamma_{4,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{4,2} \sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 + \gamma_{4,3} \sigma_{v_{vh}}^3 b_{v_{vh}}^3 + \gamma_{4,4} \sigma_{v_{vh}}^4 b_{v_{vh}}^4) D_{113} \\
 \Delta D_{11}(X, \theta) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{2r} \gamma_{2r,n} \sigma_{v_{vh}}^n b_{v_{vh}}^n D_{11(r+1)} \\
 \Delta D_{12}(X, \theta) &= (\gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}}) D_{121} + (\gamma_{3,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{3,2} \sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 + \gamma_{3,3} \sigma_{v_{vh}}^3 b_{v_{vh}}^3) D_{122} + \\
 &\quad (\gamma_{5,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{5,2} \sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 + \gamma_{5,3} \sigma_{v_{vh}}^3 b_{v_{vh}}^3 + \gamma_{5,4} \sigma_{v_{vh}}^4 b_{v_{vh}}^4 + \gamma_{5,5} \sigma_{v_{vh}}^5 b_{v_{vh}}^5) D_{123} \\
 \Delta D_{12}(X, \theta) &= \gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} D_{121} + \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{(2r+1)} \gamma_{(2r+1),n} \sigma_{v_{vh}}^n b_{v_{vh}}^n D_{12(r+1)} \\
 \Delta D_{22}(X, \theta) &= (\gamma_{2,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{2,2} \sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2) D_{222} + \\
 &\quad (\gamma_{4,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{4,2} \sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 + \gamma_{4,3} \sigma_{v_{vh}}^3 b_{v_{vh}}^3 + \gamma_{4,4} \sigma_{v_{vh}}^4 b_{v_{vh}}^4) D_{223} \\
 \Delta D_{22}(X, \theta) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{2r} \gamma_{2r,n} \sigma_{v_{vh}}^n b_{v_{vh}}^n D_{22(r+1)} \\
 \Delta D_{33}(X, \theta) &= (\omega_1 \sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.164}$$

(c) *Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica*

Matriz de rigidez estocástica

La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$ , se obtiene al sustituir  $\Delta D(X, \theta)$  (3.164) en (3.23), teniendo que:

$$\begin{aligned}
 K_{11}(\theta) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{2r} \gamma_{2r,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11(r+1)}^n(\theta) \\
 K_{12}(\theta) &= \gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} K_{121}^1(\theta) + \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{(2r+1)} \gamma_{(2r+1),n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{12(r+1)}^n(\theta) \\
 K_{22}(\theta) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{2r} \gamma_{2r,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22(r+1)}^n(\theta) \\
 K_{33}(\theta) &= \omega_1 \sigma_{G_{vn}} K_{331}(\theta) \\
 K(\theta) &= K_{11}(\theta) + K_{12}(\theta) + K_{22}(\theta) + K_{33}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.165}$$

### Matrices de rigidez deterministas

- Matriz de rigidez media:

$$K_0 = \int_{\Omega} B^T \bar{D} B d\Omega \tag{3.166}$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{11m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega; & m = 2,3 \\
 K_{12m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega; & m = 1,2,3 \\
 K_{22m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega; & m = 2,3 \\
 K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.167}$$

### Matrices de rigidez aleatorias $K^n(\theta)$

Las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  (ver Anexo A.7) contenidas en  $K(\theta)$  (3.165), se expresan como sigue:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \tag{3.168}$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Se considera la matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$  (165), con sus correspondientes términos  $K^n(\theta)$ , y la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), para escribir la ecuación de equilibrio (3.24) como:

$$\left( \begin{aligned}
 &\sum_{r=1}^3 \sum_{n=1}^{2r} \gamma_{2r,n} \sigma_{v_{vh}}^n \sum_{i=1}^M K_{11(r+1),i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\
 &\gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} \sum_{i=1}^M K_{121,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{2r+1} \gamma_{(2r+1),n} \sigma_{v_{vh}}^n \sum_{i=1}^M K_{12(r+1),i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\
 &\sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{2r} \gamma_{2r,n} \sigma_{v_{vh}}^n \sum_{i=1}^M K_{22(r+1),i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \omega_1 \sigma_{G_{vn}} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k
 \end{aligned} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \tag{3.169}$$

Minimización del error por truncamiento

Al minimizar el error por truncamiento ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi\}=0$ ) se obtiene la esperanza del producto de tres polinomios, denotados por  $E\{\Psi_j \Psi_k \Psi_l\}=d_{jkl}$ . Para simplificar se considera que:

$$\begin{aligned}
 K_{11m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2,3,4 \quad \text{y} \quad m=2,3 \\
 K_{12m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2,3,4,5 \quad \text{y} \quad m=1,2,3 \\
 K_{22m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2,3,4 \quad \text{y} \quad m=2,3 \\
 K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl}
 \end{aligned}
 \tag{3.170}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned}
 K_{kl} &= \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{2r} \gamma_{2r,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11(r+1),kl}^n + \gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} K_{121,kl} + \\
 &\quad \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{(2r+1)} \gamma_{(2r+1),n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{12(r+1),kl}^n + \sum_{r=1}^2 \sum_{n=1}^{2r} \gamma_{2r,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22(r+1),kl}^n + \omega_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331,kl} \\
 \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k &= F
 \end{aligned}
 \tag{3.171}$$

La ec. 3.171 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para  $v_{vh}$  aleatoria (estado plano de esfuerzo).

3.4.4.6 Todos los parámetros ( $E_v$ ,  $E_h$  y  $v_{vh}$ ) aleatorios

(a) Matriz de elasticidad

Los elementos de la matriz de elasticidad  $D$  para  $E_v$ ,  $E_h$  y  $v_{vh}$  aleatorios son:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= E_h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^2 V_{vh}^2}{E_v} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^3 V_{vh}^4}{E_v^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 D_{12} &= E_h V_{vh} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^2 V_{vh}^3}{E_v} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^3 V_{vh}^5}{E_v^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 D_{22} &= E_v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E_h V_{vh}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{E_h^2 V_{vh}^4}{E_v} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 D_{33} &= G_{vh} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_{vh} D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.172}$$

(b) *Matriz de elasticidad estocástica*

Las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  y  $D_{33}$ , para todos los parámetros aleatorios, se escriben de forma abreviada como:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= V_{E_h}(X, \theta) D_{111} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^2 V_{V_{vh}}(X, \theta)^2}{V_{E_v}(X, \theta)} D_{112} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^3 V_{V_{vh}}(X, \theta)^4}{V_{E_v}(X, \theta)^2} D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= V_{E_h}(X, \theta) V_{V_{vh}}(X, \theta) D_{121} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^2 V_{V_{vh}}(X, \theta)^3}{V_{E_v}(X, \theta)} D_{122} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^3 V_{V_{vh}}(X, \theta)^5}{V_{E_v}(X, \theta)^2} D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= V_{E_v}(X, \theta) D_{221} + V_{E_h}(X, \theta) V_{V_{vh}}(X, \theta)^2 D_{222} + \frac{V_{E_h}(X, \theta)^2 V_{V_{vh}}(X, \theta)^4}{V_{E_v}(X, \theta)} D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= V_{G_{vh}}(X, \theta) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.173}$$

Sustituyendo las expresiones de los campos aleatorios  $V_{E_h}(X, \theta)^n$ ,  $V_{E_v}(X, \theta)^n$ ,  $V_{V_{vh}}(X, \theta)^n$  y  $V_{G_{vh}}(X, \theta)$  desarrolladas en los incisos (3.4.4.2, 3.4.4.3, 3.4.4.5) se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) D_{111} + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) (\beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) \dots \\
 &\quad (\gamma_{2,0} + \gamma_{2,1}\sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{2,2}\sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2) D_{112} + (\alpha_{3,0} + \alpha_{3,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{3,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 + \alpha_{3,3}\sigma_{E_h}^3 b_{E_h}^3) \dots \\
 &\quad (\beta_{3,0} + \beta_{3,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) (\gamma_{4,0} + \gamma_{4,1}\sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{4,2}\sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 + \gamma_{4,3}\sigma_{v_{vh}}^3 b_{v_{vh}}^3 + \gamma_{4,4}\sigma_{v_{vh}}^4 b_{v_{vh}}^4) D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) (\gamma_{1,0} + \gamma_{1,1}\sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}}) D_{121} + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) \dots \\
 &\quad (\beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) (\gamma_{3,0} + \gamma_{3,1}\sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{3,2}\sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 + \gamma_{3,3}\sigma_{v_{vh}}^3 b_{v_{vh}}^3) D_{122} + \\
 &\quad (\alpha_{3,0} + \alpha_{3,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{3,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2 + \alpha_{3,3}\sigma_{E_h}^3 b_{E_h}^3) (\beta_{3,0} + \beta_{3,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) \dots \\
 &\quad (\gamma_{5,0} + \gamma_{5,1}\sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{5,2}\sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 + \gamma_{5,3}\sigma_{v_{vh}}^3 b_{v_{vh}}^3 + \gamma_{5,4}\sigma_{v_{vh}}^4 b_{v_{vh}}^4 + \gamma_{5,5}\sigma_{v_{vh}}^5 b_{v_{vh}}^5) D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= (\beta_{1,0} + \beta_{1,1}\sigma_{E_v} b_{E_v}) D_{221} + (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\sigma_{E_h} b_{E_h}) (\gamma_{2,0} + \gamma_{2,1}\sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{2,2}\sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2) D_{222} + \\
 &\quad (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}\sigma_{E_h} b_{E_h} + \alpha_{2,2}\sigma_{E_h}^2 b_{E_h}^2) (\beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) \dots \\
 &\quad (\gamma_{4,0} + \gamma_{4,1}\sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \gamma_{4,2}\sigma_{v_{vh}}^2 b_{v_{vh}}^2 + \gamma_{4,3}\sigma_{v_{vh}}^3 b_{v_{vh}}^3 + \gamma_{4,4}\sigma_{v_{vh}}^4 b_{v_{vh}}^4) D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= (\omega_0 + \omega_1\sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}) D_{331}
 \end{aligned} \tag{3.174}$$

Para agrupar los términos de la matriz constitutiva aleatoria, se recuerda que:

$$D(X, \theta) = \bar{D} + \Delta D(X, \theta) \tag{3.175}$$

Debido a la consideración de la variabilidad de más de un parámetro, se genera el producto de campos aleatorios que conduce a que la matriz media  $\bar{D}$  contenga una contribución aleatoria como:

$$\bar{D} = D_{\det} + \delta D(X, \theta) \tag{3.176}$$

Donde  $\delta D(X, \theta)$  contiene los términos de cualquier combinación posible entre los tres campos aleatorios ( $E_v$ ,  $E_h$ ,  $v_{vh}$ ) que puedan contener el valor esperado de  $E\{E_h\}$  y/o  $E\{E_v\}$ , representados por  $\alpha_{0,a}$  y  $\beta_{0,b}$  respectivamente, cumpliéndose que:

$$\delta D(X, \theta) : \text{contiene } (\alpha_{n,a}\sigma_{E_h}^a \beta_{m,b}\sigma_{E_v}^b \gamma_{q,c}\sigma_{v_{vh}}^c b^{(a+b+c)}) \left| \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{Z} > 0; c \in \mathbb{Z} > -1 \\ a \text{ y/o } b = 0 \end{array} \right. \tag{3.177}$$

Así, la matriz de elasticidad aleatoria  $\Delta D(X, \theta)$ , es la contribución de la matriz de elasticidad aleatoria que contiene los términos:

$$\Delta D'(X, \theta) : \text{contiene } (\alpha_{n,a}\sigma_{E_h}^a \beta_{m,b}\sigma_{E_v}^b \gamma_{q,c}\sigma_{v_{vh}}^c b^{(a+b+c)}) \left| a, b \in \mathbb{Z} > 0; c \in \mathbb{Z} > -1 \right. \tag{3.178}$$

menos los términos aleatorios incluidos en  $\bar{D}$ , teniendo que:

$$\Delta D(X, \theta) = \Delta D'(X, \theta) - \delta D(X, \theta); \tag{3.179}$$

Lo anterior conduce a una expresión simplificada de la matriz de elasticidad con la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D(X, \theta) &= D_{\det} + \delta D(X, \theta) + \Delta D'(X, \theta) - \delta D(X, \theta) \\ \bar{D}(X, \theta) &= D_{\det} + \Delta D'(X, \theta) \end{aligned} \quad (3.180)$$

Con matrices:

Matriz de elasticidad media

$$\begin{aligned} \bar{D} = D_{\det} &= \alpha_0 D_{111} + \alpha_0 \beta_{2,0} \gamma_0 D_{112} + \alpha_0 \beta_{3,0} \gamma_0 D_{113} + \\ &\alpha_0 \gamma_0 D_{121} + \alpha_0 \beta_{2,0} \gamma_0 D_{122} + \alpha_0 \beta_{3,0} \gamma_0 D_{123} + \\ &\beta_{1,0} D_{221} + \alpha_0 \gamma_0 D_{222} + \alpha_0 \beta_{2,0} \gamma_0 D_{223} + \omega_0 D_{33} \end{aligned} \quad (3.181)$$

Matriz de elasticidad estocástica

$$\Delta D(X, \theta) = \Delta D'(X, \theta) \quad (3.182)$$

(c) *Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica*

Matriz de rigidez estocástica

La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$ , función de la variabilidad de  $E_v$ ,  $E_h$  y  $v_{vh}$ , se obtiene al sustituir  $\Delta D(X, \theta)$  (3.182) en (3.23). Se considera que cada campo aleatorio se expande con el mismo número de variables aleatorias  $\{\xi_p, \dots, \xi_M\}$ , entonces  $b_{E_h} = b_{E_v} = b_{v_{vh}} = b_{G_{vh}} = b$ , teniendo que:

$$\begin{aligned} K_{11}(\theta) &= \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{111}^1(\theta) + \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{2,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{112}^{(n+m+q)}(\theta) \right) + \\ &\left( \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^4 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{4,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{113}^{(n+m+q)}(\theta) \right) \\ K_{12}(\theta) &= \sum_{q=0}^1 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \gamma_{1,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{121}^{(1+q)}(\theta) + \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^3 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{3,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{122}^{(n+m+q)}(\theta) \right) + \\ &\left( \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^5 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{5,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{123}^{(n+m+q)}(\theta) \right) \\ K_{22}(\theta) &= \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{221}^1(\theta) + \sum_{q=0}^2 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \gamma_{2,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{222}^{(1+q)}(\theta) + \\ &\left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^4 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{4,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{223}^{(n+m+q)}(\theta) \right) \\ K_{33}(\theta) &= \omega_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331}(\theta) \\ K(\theta) &= K_{11}(\theta) + K_{12}(\theta) + K_{22}(\theta) + K_{33}(\theta) \end{aligned} \quad (3.183)$$

Matrices de rigidez deterministas

Considerando lo expresado en (3.182), las matrices de rigidez deterministas son:

- Matriz de rigidez media:

$$K_0 = \int_{\Omega} B^T \bar{D} B d\Omega \quad (3.184)$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned} K_{11m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega ; & m = 1, 2, 3 \\ K_{12m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega ; & m = 1, 2, 3 \\ K_{22m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega ; & m = 1, 2, 3 \\ K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega \end{aligned} \quad (3.185)$$

### Matrices de rigidez aleatorias $K^n(\theta)$

Las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  (ver Anexo A.7) contenidas en  $K(\theta)$  (3.183), se expresan como:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \quad (3.186)$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Una vez establecida la matriz estocástica  $K(\theta)$ , con sus correspondientes términos  $K^n(\theta)$ , y considerando la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), la ecuación de equilibrio (3.24), se escribe como:

$$\left( \begin{aligned}
 & \left( \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{111,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \right) + \\
 & \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{2,q} \sigma_{v_{vh}}^q \sum_{i_1=1}^M K_{112,i_1} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m+q)} \Psi_j \Psi_k \right) + \\
 & \left( \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^4 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{4,q} \sigma_{v_{vh}}^q \sum_{i_1=1}^M K_{113,i_1} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m+q)} \Psi_j \Psi_k \right) + \\
 & \left( \sum_{m=0}^1 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \gamma_{1,m} \sigma_{v_{vh}}^m \sum_{i=1}^M K_{121,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(1+m)} \Psi_j \Psi_k \right) + \\
 & \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^3 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{3,q} \sigma_{v_{vh}}^q \sum_{i_1=1}^M K_{122,i_1} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m+q)} \Psi_j \Psi_k \right) + \\
 & \left( \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^5 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{5,q} \sigma_{v_{vh}}^q \sum_{i_1=1}^M K_{123,i_1} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m+q)} \Psi_j \Psi_k \right) + \\
 & \left( \beta_{1,1} \sigma_{E_v} \sum_{i=1}^M K_{221,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \right) + \left( \sum_{q=0}^2 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \gamma_{2,q} \sigma_{v_{vh}}^q \sum_{i=1}^M K_{222,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(1+q)} \Psi_j \Psi_k \right) + \\
 & \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^4 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{4,q} \sigma_{v_{vh}}^q \sum_{i_1=1}^M K_{223,i_1} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m+q)} \Psi_j \Psi_k \right) + \\
 & \left( \omega_1 \sigma_{G_{vh}} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \right)
 \end{aligned} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \quad (3.187)$$

### Minimización del error por truncamiento

Al aplicar la condición de minimización ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi_j\} = 0$ ) se obtiene la esperanza del producto de tres polinomios denotados por  $E\{\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l\} = d_{jkl}$ , considerando esto y la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned}
 K_{11r,kl}^{(n+m+q)} &= \sum_{i=1}^M K_{11r,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m+q)} d_{jkl}; \quad n=1,2,3; \quad m=1,2; \quad q=0,1,2,3,4; \quad r=1,2,3 \\
 K_{12r,kl}^{(n+m+q)} &= \sum_{i=1}^M K_{11r,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m+q)} d_{jkl}; \quad n=1,2,3; \quad m=1,2; \quad q=0,1,2,3,4,5; \quad r=1,2,3 \\
 K_{22r,kl}^{(n+m+q)} &= \sum_{i=1}^M K_{11r,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+m+q)} d_{jkl}; \quad n=1,2; \quad m=1,2; \quad q=0,1,2,3,4; \quad r=1,2,3 \\
 K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl}
 \end{aligned} \quad (3.188)$$

La ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned}
 K_{kl} = & \left( \alpha_1 \sigma_{E_h} K_{111,kl} \right) + \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{2,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{112,kl}^{(n+m+q)} \right) + \\
 & \left( \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^4 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{4,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{113,kl}^{(n+m+q)} \right) + \\
 & \left( \sum_{m=0}^1 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \gamma_{1,m} \sigma_{v_{vh}}^m K_{121,kl}^{(1+m)} \right) + \\
 & \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^3 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{3,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{122,kl}^{(n+m+q)} \right) + \\
 & \left( \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^5 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{5,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{123,kl}^{(n+m+q)} \right) + \\
 & \left( \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{221,kl} \right) + \sum_{q=0}^2 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \gamma_{2,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{222,kl}^{(1+q)} + \\
 & \left( \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{q=0}^4 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,m} \sigma_{E_v}^m \gamma_{4,q} \sigma_{v_{vh}}^q K_{223,kl}^{(n+m+q)} \right) + \\
 & \left( \omega_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331,kl} \right) \\
 \\
 \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k = F
 \end{aligned} \tag{3.189}$$

La ec. 3.189 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para todos los parámetros aleatorios (estado plano de esfuerzo).

### 3.4.5 Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica: caso anisótropo (estado plano de deformación)

#### 3.4.5.1 Matriz de elasticidad para el estado plano de deformación

$$D = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E_h(1-nv_{vh}^2) & E_h v_{vh}(1+v_{hh}) & 0 \\ E_h v_{vh}(1+v_{hh}) & E_v(1-nv_{vh}^2) & 0 \\ 0 & 0 & G_{vh}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \tag{3.190}$$

Con:  $m = (1+v_{hh})(1-v_{hh}-2nv_{vh}^2)$

Para el desarrollo de cada uno de los elementos de  $D$  se asumieron tres términos de la serie geométrica, de acuerdo con la convergencia de la serie (ver Anexo A.10). Por la forma de esta matriz, se obtuvieron expresiones muy extensas para cada una de las submatrices de  $D$  (ver Anexo A.10) que se resumen en las siguientes tablas:

La submatriz de elasticidad  $D_{11}$  se conforma por 24 matrices de 3x3 cada una de ellas, los términos de estas matrices se presentan en la Tabla 3.1 y se localizan en la posición (1,1).

Tabla 3.1 Términos del desarrollo en series geométricas de  $D_{11}$

$D_{11,n}$	Término	$D_{11,n}$	Término	$D_{11,n}$	Término	$D_{11,n}$	Término
1	$E_h$	7	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^3$	13	$12 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^2$	19	$-8 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}$
2	$E_h v_{hh}^2$	8	$3 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^4$	14	$6 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^3$	20	$-16 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^2$
3	$E_h v_{hh}^4$	9	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^5$	15	$12 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^4$	21	$-8 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^3$
4	$\frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2$	10	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^6$	16	$6 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^5$	22	$-16 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^4$
5	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}$	11	$2 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4$	17	$10 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^6$	23	$-8 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^5$
6	$3 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^2$	12	$6 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}$	18	$-4 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6$	24	$-12 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^6$

La submatriz de elasticidad  $D_{12}$  se conforma por 21 matrices de 3x3 cada una de ellas, los términos de estas matrices se presentan en la Tabla 3.2 y se localizan en la posición (1,2) y (2,1).

Tabla 3.2 Términos del desarrollo en series geométricas de  $D_{12}$

$D_{12,n}$	Término	$D_{12,n}$	Término	$D_{12,n}$	Término	$D_{12,n}$	Término
1	$E_h v_{vh}$	7	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3$	13	$4 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^6$	19	$24 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^5$
2	$E_h v_{vh} v_{hh}$	8	$4 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}$	14	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^7$	20	$20 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^6$
3	$E_h v_{vh} v_{hh}^2$	9	$6 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^2$	15	$4 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5$	21	$12 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^7$
4	$E_h v_{vh} v_{hh}^3$	10	$6 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^3$	16	$12 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}$		
5	$E_h v_{vh} v_{hh}^4$	11	$6 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^4$	17	$24 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^2$		
6	$E_h v_{vh} v_{hh}^5$	12	$6 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^5$	18	$24 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^4$		

La submatriz de elasticidad  $D_{22}$  se conforma por 12 matrices de 3x3 cada una de ellas, los términos de estas matrices se presentan en la Tabla 3.3 y se localizan en la posición (2,2).

Tabla 3.3 Términos del desarrollo en series geométricas de  $D_{22}$

$D_{22,n}$	Término	$D_{22,n}$	Término	$D_{22,n}$	Término	$D_{22,n}$	Término
1	$E_v$	4	$2 E_h v_{vh}^2 v_{hh}^2$	7	$4 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4$	10	$-8 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4 v_{hh}^6$
2	$2 E_h v_{vh}^2$	5	$-2 E_h v_{vh}^2 v_{hh}^7$	8	$8 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4 v_{hh}$	11	$-12 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4 v_{hh}^7$
3	$2 E_h v_{vh}^2 v_{hh}$	6	$-2 E_h v_{vh}^2 v_{hh}^8$	9	$12 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4 v_{hh}^2$	12	$-E_v v_{hh}^6$

El parámetro  $G_{vh}$  se evalúa de la misma forma que el estado plano de esfuerzo como:

$$D_{33} = D_{33}(X, \theta) = V_{G_{vh}}(X, \theta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = V_{G_{vh}}(X, \theta) D_{331} \quad (3.191)$$

### 3.4.5.2 Matriz de elasticidad estocástica

Por la forma de los elementos de cada matriz constitutiva (Tablas 3.1, 3.2 y 3.3), al representar la variabilidad de cada parámetro, se generan, como en el caso de estado plano de esfuerzo, campos aleatorios elevados a un exponente. Nuevamente, para facilitar el manejo de tales campos y por tanto la derivación de la ecuación de equilibrio estocástica, los binomios se agrupan convenientemente como sigue:

Para  $E_v$ :

$$\begin{aligned} V_{E_v}(X, \theta) &= \beta_{1,0} + \beta_{1,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} \\ \frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)} &= \beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2 \\ &\vdots \\ \frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)^n} &= \beta_{(n+1),0} + \beta_{(n+1),1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{(n+1),2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2 \end{aligned} \quad (3.192)$$

Para  $E_h$ :

$$\begin{aligned} V_{E_h}(X, \theta) &= \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} b_{E_h} \\ &\vdots \\ V_{E_h}(X, \theta)^n &= \alpha_{n,0} + \alpha_{n,1} \sigma_{E_h} b_{E_h} + \dots + \alpha_{n,m} \sigma_{E_h}^m b_{E_h}^m; \quad m = n \end{aligned} \quad (3.193)$$

Para  $v_{vh}$ :

$$\begin{aligned}
 V_{v_{vh}}(X, \theta) &= \gamma_{1,0} + \gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} \\
 &\vdots \\
 V_{v_{vh}}(X, \theta)^n &= \gamma_{n,0} + \gamma_{n,1} \sigma_{v_{vh}} b_{v_{vh}} + \dots + \gamma_{n,m} \sigma_{v_{vh}}^m b_{v_{vh}}^m; \quad m = n
 \end{aligned} \tag{3.194}$$

Para  $v_{hh}$

$$\begin{aligned}
 V_{v_{hh}}(X, \theta) &= \omega_{1,0} + \omega_{1,1} b_{v_{vh}} \\
 &\vdots \\
 V_{v_{hh}}(X, \theta)^n &= \omega_{n,0} + \omega_{n,1} b_{v_{vh}} + \dots + \omega_{n,m} b_{v_{vh}}^m; \quad m = n
 \end{aligned} \tag{3.195}$$

Para  $G_{vh}$

$$V_{G_{vh}}(X, \theta) = \kappa_1 + \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}} \tag{3.196}$$

En (3.192)  $\{\beta_{m,n}; m = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2\}$ ,  $\beta$  son coeficientes propios de la expansión del campo aleatorio que contienen el valor esperado,  $m$  representa la forma matemática del campo aleatorio y  $n$  el grado de cada término de la expansión polinomial.

En (3.193 a 3.195)  $\{\alpha_{m,n}, \gamma_{m,n}, \omega_{m,n}; m = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, \dots, m\}$ ,  $\alpha, \gamma, \omega$  son coeficientes del desarrollo de los binomios que contienen el valor esperado del campo aleatorio,  $m$  representa el exponente del binomio y  $n$  el grado de cada término del desarrollo del binomio.

En (3.196)  $\kappa_0$  es igual al valor esperado del campo aleatorio de  $G_{vh}$  y  $\kappa_1$  es igual a uno

Para obtener una representación estocástica de la matriz de elasticidad  $D(X, \theta)$ , solamente se necesita sustituir el campo aleatorio del parámetro a analizar, como se estableció en las ecuaciones de 3.192 a 3.196, en las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  y  $D_{22}$  presentadas en las Tablas 3.1 a 3.3 y en  $D_{33}$  (3.191). La matriz estocástica resultante estará conformada por una matriz media  $\bar{D}_0$  evaluada para el valor esperado del o de los parámetros en cuestión y una matriz que agrupa términos aleatorios  $\Delta D(X, \theta)$ , teniendo:

$$D(X, \theta) = \bar{D} + \Delta D(X, \theta) \tag{3.197}$$

Siendo:

$$\bar{D} = D_{11}^0 + D_{12}^0 + D_{22}^0 + D_{33}^0 \tag{3.198}$$

y

$$\Delta D(X, \theta) = \Delta D_{11}(\theta) + \Delta D_{12}(\theta) + \Delta D_{22}(\theta) + \Delta D_{33}(\theta) \tag{3.199}$$

### 3.4.5.3 Matriz de rigidez estocástica

Una vez establecida  $\Delta D(X, \theta)$  y considerando que la matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$  se expresa como:

$$K(\theta) = \int_{\Omega} B^T \Delta D(X, \theta) B d\Omega \quad (3.200)$$

Se establecen las matrices de rigidez aleatorias  $K_{11}(\theta)$ ,  $K_{12}(\theta)$ ,  $K_{22}(\theta)$ , como se expresan en las Tablas A.3 a A.14 y A.18 a A.20 del Anexo A.11, las cuales se evalúan para  $\Delta D_{11}(\theta)$ ,  $\Delta D_{12}(\theta)$ ,  $\Delta D_{22}(\theta)$ , respectivamente. La matriz de rigidez estocástica  $K_{33}(\theta)$  se expresa como en el caso de estado plano de esfuerzo (ver ec. 3.128) y se evalúa también para  $\Delta D_{33}(\theta)$ .

### 3.4.5.4 Matriz de rigidez media

Las submatrices de rigidez media  $K_{11}^0$ ,  $K_{12}^0$ ,  $K_{22}^0$  y  $K_{33}^0$ , se evalúan para las matrices de elasticidad media  $D_{11}^0$ ,  $D_{12}^0$ ,  $D_{22}^0$ ,  $D_{33}^0$  respectivamente, y cuyos elementos contienen el valor esperado del campo aleatorio a evaluar.

### 3.4.5.5 Módulo de elasticidad vertical $E_v$ aleatorio

#### (a) Matriz de elasticidad

La matriz de elasticidad para  $E_v$  es como se expresó en las Tablas 3.1 a 3.3.

#### (b) Matriz de elasticidad estocástica

La matriz de elasticidad estocástica cuando el módulo de elasticidad vertical  $E_v$  es aleatorio se obtiene al sustituir la expresión (3.192) en las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  y  $D_{22}$  (Tablas 3.1 a 3.3), teniendo que los elementos que la componen son:

$$\Delta D_{11}(\theta), \Delta D_{12}(\theta), \Delta D_{22}(\theta) : \text{contiene } (\beta_{n,m} \sigma_{E_v}^m b^m) | n, m \in \mathbb{Z} > 0; \quad (3.201)$$

#### (c) Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica

#### Matriz de rigidez estocástica

La suma respectiva de los términos contenidos en las Tablas A.3 a A.5 expresa las matrices de rigidez aleatorias  $K_{11}(\theta)$ ,  $K_{12}(\theta)$ ,  $K_{22}(\theta)$ , incluyendo también  $K_{33}(\theta)$  (ver ec. 3.128) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 K_{11}(\theta) &= \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,m}^n(\theta) + \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,m}^n(\theta) + \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^2 \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,m}^n(\theta) \\
 K_{12}(\theta) &= \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,m}^n(\theta) + \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,m}^n(\theta) \\
 K_{22}(\theta) &= \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{22,1}(\theta) + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{22,m}^n(\theta) + \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{22,12}(\theta) \\
 K_{33}(\theta) &= \kappa_1 \sigma_{G_{\theta}} K_{331}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.202}$$

### Matrices de rigidez deterministas

De igual forma, de las Tablas A.3 a A.5 se obtienen las matrices de rigidez deterministas:

- Matriz de rigidez media:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^0 &= \sum_{m=1}^3 K_{11,m}^0 + \sum_{m=4}^{10} \beta_{2,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=11}^{17} \beta_{3,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=18}^{24} \beta_{4,0} K_{11,m}^0 \\
 K_{12}^0 &= \sum_{m=1}^6 K_{12,m}^0 + \sum_{m=7}^{14} \beta_{2,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=15}^{21} \beta_{3,0} K_{12,m}^0 \\
 K_{22}^0 &= \beta_{1,0} K_{22,1}^0 + \sum_{m=2}^6 K_{22,m}^0 + \sum_{m=7}^{11} \beta_{2,0} K_{22,m}^0 + \beta_{1,0} K_{22,12}^0 \\
 K_{33}^0 &= \kappa_0 K_{331}^0 \\
 K_0 &= K_{11}^0 + K_{12}^0 + K_{22}^0 + K_{33}^0
 \end{aligned} \tag{3.203}$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{11,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega ; & m = 4, \dots, 24 \\
 K_{12,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega ; & m = 7, \dots, 21 \\
 K_{22,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega ; & m = 1, 7, \dots, 12 \\
 K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.204}$$

### Matrices de rigidez aleatorias $K^n(\theta)$

Las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  (ver Anexo A.7) contenidas en  $K(\theta)$  (3.202), se representan en forma simplificada como:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \tag{3.205}$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Tomando en cuenta  $K(\theta)$  (3.202), con sus respectivas  $K(\theta)^n$ , y la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), la ecuación de equilibrio es:

$$\left( \begin{array}{l} \sum_{n=1}^2 \sum_{m=4}^{11} \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=12}^{17} \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{n=1}^2 \sum_{m=18}^{24} \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k \\ \sum_{n=1}^2 \sum_{m=7}^{14} \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=15}^{21} \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \\ \beta_{1,1} \sigma_{E_v} \sum_{i=1}^M K_{22,1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=7}^{11} \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \beta_{1,1} \sigma_{E_v} \sum_{i=1}^M K_{22,12,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \end{array} \right) \quad (3.206)$$

### Minimización del error por truncamiento

Al aplicar la condición de minimización ( $E\{\in_{M,P}, \Psi_j\}=0$ ), se obtienen la esperanza del producto de tres polinomios que se denota por  $E\{\Psi_j \Psi_k \Psi_l\}=d_{jkl}$ , para simplificar se considera que:

$$\begin{aligned} K_{11m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2 \text{ y } m=4,\dots,24 \\ K_{12m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2 \text{ y } m=7,\dots,21 \\ K_{22m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2 \text{ y } m=1,7,\dots,12 \\ K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl} \end{aligned} \quad (3.207)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned} K_{kl} &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=4}^{11} \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=12}^{17} \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=18}^{24} \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,m,kl}^n + \\ &\sum_{n=1}^2 \sum_{m=7}^{14} \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,m,kl}^n + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=15}^{21} \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,m,kl}^n + \\ &\beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{22,1,kl}^1 + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=7}^{11} \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{22,m,kl}^n + \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{22,12,kl}^1 + \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331,kl} \\ &\sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k = F \end{aligned} \quad (3.208)$$

La ec. 3.208 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para  $E_v$  aleatorio (estado plano de deformación).

### 3.4.5.6 Módulo de elasticidad horizontal $E_h$ aleatorio

(a) *Matriz de elasticidad*

La matriz de elasticidad es como se expresó en las Tablas 3.1 a 3.3.

(b) *Matriz de elasticidad estocástica*

La matriz de elasticidad estocástica para el módulo de elasticidad  $E_h$  aleatorio, se obtiene al sustituir la expresión (3.193) en las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  y  $D_{22}$  (Tablas 3.1 a 3.3), la cual contiene elementos como:

$$\Delta D_{11}(\theta), \Delta D_{12}(\theta), \Delta D_{22}(\theta) : \text{contiene } (\alpha_{n,m} \sigma_{E_h}^m b^m) | n, m \in \mathbb{Z} > 0 \quad (3.209)$$

(c) *Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica*

Matriz de rigidez estocástica

La respectiva suma de los términos contenidos en las Tablas A.6 a A.8 del Anexo A.11 expresa las matrices de rigidez aleatorias  $K_{11}(\theta)$ ,  $K_{12}(\theta)$ ,  $K_{22}(\theta)$ , incluyendo también  $K_{33}(\theta)$  (ver ec. 3.128) se tiene que las matrices son:

$$\begin{aligned} K_{11}(\theta) &= \sum_{m=1}^3 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{11,m}(\theta) + \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n K_{11,m}^n(\theta) + \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n K_{11,m}^n(\theta) + \\ &\quad \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^4 \alpha_{4,n} \sigma_{E_h}^n K_{11,m}^n(\theta) \\ K_{12}(\theta) &= \sum_{m=1}^6 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{12,m}(\theta) + \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n K_{12,m}^n(\theta) + \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n K_{12,m}^n(\theta) \\ K_{22}(\theta) &= \sum_{m=2}^6 \alpha_{1,n} \sigma_{E_h} K_{22,m}(\theta) + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n K_{22,m}^n(\theta) \\ K_{33}(\theta) &= \kappa_1 \sigma_{G_h} K_{331}(\theta) \end{aligned} \quad (3.210)$$

Matrices de rigidez deterministas

- Matriz de rigidez media:

$$\begin{aligned} K_{11}^0 &= \sum_{m=1}^3 \alpha_{1,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=4}^{10} \alpha_{2,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=11}^{17} \alpha_{3,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=18}^{24} \alpha_{4,0} K_{11,m}^0 \\ K_{12}^0 &= \sum_{m=1}^6 \alpha_{1,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=7}^{14} \alpha_{2,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=15}^{21} \alpha_{3,0} K_{12,m}^0 \\ K_{22}^0 &= K_{22,1}^0 + \sum_{m=2}^6 \alpha_{1,0} K_{22,m}^0 + \sum_{m=7}^{11} \alpha_{2,0} K_{22,m}^0 + K_{22,12}^0 \\ K_{33}^0 &= \kappa_0 K_{331}^0 \\ K_0 &= K_{11}^0 + K_{12}^0 + K_{22}^0 + K_{33}^0 \end{aligned} \quad (3.211)$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{11,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega; & m &= 1, \dots, 24 \\
 K_{12,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega; & m &= 1, \dots, 21 \\
 K_{22,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega; & m &= 2, \dots, 11 \\
 K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.212}$$

### Matrices de rigidez aleatorias $K^n(\theta)$

Las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  (ver Anexo A.7) contenidas en  $K(\theta)$  (3.210), se representan en forma simplificada como:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \tag{3.213}$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Para obtener la ecuación de equilibrio, se sustituyen las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  en  $K(\theta)$  (3.210), se toma en cuenta la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), y se obtiene que la forma de la ecuación de equilibrio es:

$$\left( \begin{aligned}
 &\sum_{m=1}^3 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\
 &\sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^4 \alpha_{4,n} \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\
 &\sum_{m=1}^6 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\
 &\sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\
 &\sum_{m=2}^6 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\
 &K_1 \sigma_{G_{wh}} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k
 \end{aligned} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \tag{3.214}$$

### Minimización del error por truncamiento

Al aplicar la condición de minimización ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi_j\} = 0$ ) se obtienen la esperanza del producto de tres polinomios que se denota por  $E\{\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l\} = d_{jkl}^p$  para simplificar se considera que:

$$\begin{aligned}
 K_{11m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,\dots,4 \text{ y } m=1,\dots,24 \\
 K_{12m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,\dots,3 \text{ y } m=1,\dots,21 \\
 K_{22m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1,2 \text{ y } m=2,\dots,11 \\
 K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl}
 \end{aligned} \tag{3.215}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned}
 K_{kl} &= \sum_{m=1}^3 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{11,m,kl} + \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^4 \alpha_{4,n} \sigma_{E_h}^n K_{11,m,kl}^n + \\
 &\sum_{m=1}^6 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{12,m,kl} + \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n K_{12,m,kl}^n + \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n K_{12,m,kl}^n + \\
 &\sum_{m=2}^6 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{22,m,kl} + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n K_{22,m,kl}^n + \kappa_1 \sigma_{G_{wh}} K_{331,kl} \\
 \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k &= F
 \end{aligned} \tag{3.216}$$

La ec. 3.216 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para  $E_h$  aleatorio (estado plano de deformación).

### 3.4.5.7 Módulo de elasticidad vertical $E_v$ y horizontal $E_h$ aleatorios

#### (a) Matriz de elasticidad

La matriz de elasticidad es como se expresó en las Tablas 3.1 a 3.3.

#### (b) Matriz de elasticidad estocástica

La matriz de elasticidad estocástica para los módulos de elasticidad  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios se obtiene al sustituir las expresiones (3.192) y (3.193) en las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  y  $D_{22}$  (Tablas 3.1 a 3.3). La matriz de elasticidad estocástica  $\Delta D(X, \theta)$  solamente contiene elementos aleatorios como:

$$\Delta D_{11}(\theta), \Delta D_{12}(\theta), \Delta D_{22}(\theta): \text{ contiene } \left( \alpha_{m,a} \sigma_{E_h}^a b^a, \alpha_{m,a} \sigma_{E_h}^a \beta_{n,c} \sigma_{E_v}^c b^{(a+c)} \right) | m, n, a, c \in \mathbb{Z} > 0; \tag{3.217}$$

#### (c) Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica

##### Matriz de rigidez estocástica

La respectiva suma de los términos contenidos en las Tablas A.9 a A.11 del Anexo A.11 expresa las matrices de rigidez aleatorias  $K_{11}(\theta)$ ,  $K_{12}(\theta)$ ,  $K_{22}(\theta)$ , tomando en cuenta  $K_{33}(\theta)$  expresada en (3.128), las matrices son:

$$\begin{aligned}
 K_{11}(\theta) &= \sum_{m=1}^3 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{11,m}(\theta) + \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r K_{11,m}^{(n+r)}(\theta) + \\
 &\quad \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^3 \sum_{r=1}^2 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,r} \sigma_{E_v}^r K_{11,m}^{(n+r)}(\theta) + \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^4 \sum_{r=1}^2 \alpha_{4,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{4,r} \sigma_{E_v}^r K_{11,m}^{(n+r)}(\theta) \\
 K_{12}(\theta) &= \sum_{m=1}^6 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{12,m}(\theta) + \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r K_{12,m}^{(n+r)}(\theta) + \\
 &\quad \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^3 \sum_{r=1}^2 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,r} \sigma_{E_v}^r K_{12,m}^{(n+r)}(\theta) \\
 K_{22}(\theta) &= \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{22,1}(\theta) + \sum_{m=2}^6 \alpha_{1,n} \sigma_{E_h} K_{22,m}(\theta) + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r K_{22,m}^{(n+r)}(\theta) + \\
 &\quad \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{22,12}(\theta) \\
 K_{33}(\theta) &= \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.218}$$

### Matrices de rigidez deterministas

- Matriz de rigidez media:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^0 &= \sum_{m=1}^3 \alpha_{1,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=4}^{10} \alpha_{2,0} \beta_{2,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=11}^{17} \alpha_{3,0} \beta_{3,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=18}^{24} \alpha_{4,0} \beta_{4,0} K_{11,m}^0 \\
 K_{12}^0 &= \sum_{m=1}^6 \alpha_{1,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=7}^{14} \alpha_{2,0} \beta_{2,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=15}^{21} \alpha_{3,0} \beta_{3,0} K_{12,m}^0 \\
 K_{22}^0 &= \beta_{1,0} K_{22,1}^0 + \sum_{m=2}^6 \alpha_{1,0} K_{22,m}^0 + \sum_{m=7}^{11} \alpha_{2,0} \beta_{2,0} K_{22,m}^0 + \beta_{1,0} K_{22,12}^0 \\
 K_{33}^0 &= \kappa_0 K_{331}^0 \\
 K_0 &= K_{11}^0 + K_{12}^0 + K_{22}^0 + K_{33}^0
 \end{aligned} \tag{3.219}$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{11,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega; & m = 1, \dots, 24 \\
 K_{12,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega; & m = 1, \dots, 21 \\
 K_{22,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega; & m = 1, \dots, 12 \\
 K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.220}$$

### Matrices de rigidez aleatorias $K^n(\theta)$

Para poder establecer las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  (ver Anexo A.7) contenidas en  $K(\theta)$  (3.218), nuevamente se considera que cada campo aleatorio se expande con el mismo número de variables aleatorias  $\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$ , teniendo que  $b_{E_h} = b_{E_v} = b_{G_{vh}} = b$ , con:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \quad (3.221)$$

Ecuación de equilibrio estocástica

Una vez obtenida  $K(\theta)$  (3.218) con sus respectivas  $K^n(\theta)$ , se toma en cuenta la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), y se llega a que la forma de la ecuación de equilibrio es:

$$\left( \begin{array}{l} \sum_{m=1}^3 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^3 \sum_{r=1}^3 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,r} \sigma_{E_v}^r \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^4 \sum_{r=1}^4 \alpha_{4,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{4,r} \sigma_{E_v}^r \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=1}^6 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^3 \sum_{r=1}^3 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,r} \sigma_{E_v}^r \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} \Psi_j \Psi_k + \\ \beta_{1,1} \sigma_{E_v} \sum_{i=1}^M K_{22,1,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=2}^6 \alpha_{1,m} \sigma_{E_h} \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} \Psi_j \Psi_k + \\ \beta_{1,1} \sigma_{E_v} \sum_{i=1}^M K_{22,12,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \end{array} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \quad (3.222)$$

Minimización del error por truncamiento

Al aplicar la condición de minimización ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi_j\} = 0$ ) se obtiene  $E\{\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l\} = d_{jkl}$ , para simplificar se considera que:

$$\begin{aligned}
 K_{11m,kl}^{(n+r)} &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} d_{jkl}; \quad n=1,\dots,4, \quad r=1,2 \text{ y } m=1,\dots,24 \\
 K_{12m,kl}^{(n+r)} &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} d_{jkl}; \quad n=1,\dots,3, \quad r=1,2 \text{ y } m=1,\dots,21 \\
 K_{22m,kl}^{(n+r)} &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^{(n+r)} d_{jkl}; \quad n=1,2, \quad r=1,2 \text{ y } m=1,\dots,12 \\
 K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl}
 \end{aligned} \tag{3.223}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned}
 K_{kl} &= \sum_{m=1}^3 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{11,m,kl} + \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r K_{11,m,kl} + \\
 &\quad \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^3 \sum_{r=1}^2 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,r} \sigma_{E_v}^r K_{11,m,kl} + \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^4 \sum_{r=1}^2 \alpha_{4,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{4,r} \sigma_{E_v}^r K_{11,m,kl} + \\
 &\quad \sum_{m=1}^6 \alpha_{1,1} \sigma_{E_h} K_{12,m,kl} + \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r K_{12,m,kl} + \\
 &\quad \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^3 \sum_{r=1}^2 \alpha_{3,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{3,r} \sigma_{E_v}^r K_{12,m,kl} + \\
 &\quad \beta_{1,1} \sigma_{E_v} K_{22,1,kl} + \sum_{m=2}^6 \alpha_{1,m} \sigma_{E_h} K_{22,m,kl} + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \alpha_{2,n} \sigma_{E_h}^n \beta_{2,r} \sigma_{E_v}^r K_{12,m,kl} + \\
 &\quad \beta_{1,12} \sigma_{E_v} K_{22,12,kl} + \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331,kl} \\
 \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k &= F
 \end{aligned} \tag{3.224}$$

La ec. 3.224 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (estado plano de deformación).

### 3.4.5.8 Relación de Poisson $v_{vh}$ aleatoria

#### (a) Matriz de elasticidad

La matriz de elasticidad es como se expresó en las Tablas 3.1 a 3.3.

#### (b) Matriz de elasticidad estocástica

La matriz de elasticidad estocástica para la relación de Poisson  $v_{vh}$  aleatoria se obtiene al sustituir la expresión (3.194) en las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  y  $D_{22}$  (Tablas 3.1 a 3.3), teniendo que los términos aleatorios son:

$$\Delta D_{11}(\theta), \Delta D_{12}(\theta), \Delta D_{22}(\theta): \text{ contiene } (\lambda_{m,n} \sigma_{v_{vh}}^n b^n) | m, n \in \mathbb{Z} > 0; \tag{3.225}$$

(c) *Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica*

Matriz de rigidez estocástica

La suma respectiva de los términos contenidos en las Tablas A.12 a A.14 del Anexo A.11 expresa la matrices de rigidez aleatorias  $K_{11}(\theta)$ ,  $K_{12}(\theta)$ ,  $K_{22}(\theta)$ , tomando en cuenta  $K_{33}(\theta)$  (ver ec. 3.128) las matrices estocásticas son:

$$\begin{aligned}
 K_{11}(\theta) &= \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,m}^n(\theta) + \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,m}^n(\theta) + \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,m}^n(\theta) \\
 K_{12}(\theta) &= \sum_{m=1}^6 \gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} K_{12,m}(\theta) + \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{12,m}^n(\theta) + \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{12,m}^n(\theta) \\
 K_{22}(\theta) &= \sum_{m=2}^6 \sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,m}^n(\theta) + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,m}^n(\theta) \\
 K_{33}(\theta) &= \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.226}$$

Matrices de rigidez deterministas

- Matriz de rigidez media:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^0 &= \sum_{m=1}^3 K_{11,m}^0 + \sum_{m=4}^{10} \gamma_{2,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=11}^{17} \gamma_4 K_{11,m}^0 + \sum_{m=18}^{24} \gamma_6 K_{11,m}^0 \\
 K_{12}^0 &= \sum_{m=1}^6 \gamma_{1,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=7}^{14} \gamma_{3,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=15}^{21} \gamma_5 K_{12,m}^0 \\
 K_{22}^0 &= K_{22,1}^0 + \sum_{m=2}^6 \gamma_{2,0} K_{22,m}^0 + \sum_{m=7}^{11} \gamma_{4,0} K_{22,m}^0 + K_{22,12}^0 \\
 K_{33}^0 &= \kappa_0 K_{331}^0 \\
 K_0 &= K_{11}^0 + K_{12}^0 + K_{22}^0 + K_{33}^0
 \end{aligned} \tag{3.227}$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{11,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega; & m = 4, \dots, 24 \\
 K_{12,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega; & m = 1, \dots, 21 \\
 K_{22,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega; & m = 2, \dots, 11 \\
 K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.228}$$

Matrices de rigidez aleatorias  $K^{\eta}(\theta)$

Las matrices de rigidez aleatorias  $K^{\eta}(\theta)$  (ver Anexo A.7) contenidas en  $K(\theta)$  (3.226), se calculan con:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \quad (3.229)$$

Ecuación de equilibrio estocástica

Para obtener la ecuación de equilibrio estocástica, se sustituye  $K(\theta)$  (3.226) con sus respectivas matrices  $K^n(\theta)$  y la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21) en (3.24), se obtiene que:

$$\left( \begin{array}{l} \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v,wh}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v,wh}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v,wh}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=1}^6 \gamma_{1,1} \sigma_{v,wh} \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n} \sigma_{v,wh}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n} \sigma_{v,wh}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k \\ \sum_{m=2}^6 \sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v,wh}^n \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v,wh}^n \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ \kappa_1 \sigma_{G,wh} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \end{array} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \quad (3.230)$$

Minimización del error por truncamiento

Al minimizar el error ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi\} = 0$ ) se obtiene que  $E\{\Psi_p, \Psi_k, \Psi_j\} = d_{jkl}$ , para simplificar se considera que:

$$\begin{aligned} K_{11m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n = 2, 4, 6 \text{ y } m = 4, \dots, 24 \\ K_{12m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n = 1, 3, 5 \text{ y } m = 1, \dots, 21 \\ K_{22m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n = 2, 4 \text{ y } m = 2, \dots, 11 \\ K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl} \end{aligned} \quad (3.231)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned}
 K_{kl} = & \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=11}^{17} \sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=18}^{24} \sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=1}^6 \gamma_{1,1} \sigma_{v_{vh}} K_{12,m,kl}^1 + \\
 & \sum_{m=7}^{14} \sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{12,m,kl}^n + \sum_{m=15}^{21} \sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{12,m,kl}^n + \sum_{m=2}^6 \sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,m,kl}^n + \sum_{m=7}^{11} \sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,m,kl}^n + \\
 & \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331,kl} \\
 \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k = & F
 \end{aligned} \tag{3.232}$$

La ec. 3.232 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para  $v_{vh}$  aleatoria (estado plano de deformación).

### 3.4.5.9 Relación de Poisson $v_{hh}$ aleatoria

#### (a) Matriz de elasticidad

Para facilitar la deducción de la ecuación estocástica cuando la relación de Poisson  $v_{hh}$  es aleatoria, es conveniente reacomodar los términos de la matriz de elasticidad como se expresan en las Tablas A.15 a A.17 del Anexo A.11.

#### (b) Matriz de elasticidad estocástica

La matriz de elasticidad estocástica para la relación de Poisson  $v_{hh}$  aleatoria se obtiene al sustituir la expresión (3.195) en las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  y  $D_{22}$  (Tablas A.15 a A.17), teniendo que los elementos aleatorios que la compone son:

$$\Delta D_{11}(\theta), \Delta D_{12}(\theta), \Delta D_{22}(\theta) : \text{contiene}(\omega_{m,n} \sigma_{v_{hh}}^n b^n) | m, n \in \mathbb{Z} > 0; \tag{3.233}$$

#### (c) Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica

##### Matriz de rigidez estocástica

La suma de los términos contenidos en Tablas A.18 a A.20 del Anexo A.11 expresa las matrices de rigidez aleatorias  $K_{11}(\theta)$ ,  $K_{12}(\theta)$ ,  $K_{22}(\theta)$  respectivamente,  $K_{33}(\theta)$  se establece como en (3.128). Se obtiene que las matrices se escriben como:

$$\begin{aligned}
 K_{11}(\theta) &= \sum_{m=5}^7 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{11,m}(\theta) + \sum_{m=8}^{11} \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m}^n(\theta) + \sum_{m=12}^{14} \sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m}^n(\theta) + \\
 &\quad \sum_{m=15}^{18} \sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m}^n(\theta) + \sum_{m=19}^{21} \sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m}^n(\theta) + \sum_{m=22}^{24} \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m}^n(\theta) \\
 K_{12}(\theta) &= \sum_{m=4}^6 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{12,m}(\theta) + \sum_{m=7}^9 \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m}^n(\theta) + \sum_{m=10}^{11} \sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m}^n(\theta) + \\
 &\quad \sum_{m=12}^{14} \sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m}^n(\theta) + \sum_{m=15}^{17} \sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m}^n(\theta) + \sum_{m=18}^{19} \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m}^n(\theta) + \\
 &\quad \sum_{m=20}^{21} \sum_{n=1}^7 \omega_{7,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m}^n(\theta) \\
 K_{22}(\theta) &= \sum_{m=4}^5 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{22,m}(\theta) + \sum_{m=6}^7 \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{22,m}^n(\theta) + \sum_{m=8}^9 \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{22,m}^n(\theta) + \\
 &\quad \sum_{m=10}^{11} \sum_{n=1}^7 \omega_{7,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{22,m}^n(\theta) + \sum_{n=1}^8 \omega_{8,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{22,m}^n(\theta) \\
 K_{33}(\theta) &= \kappa_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.234}$$

### Matrices de rigidez deterministas

- Matriz de rigidez media:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^0 &= \sum_{m=1}^4 K_{11,m}^0 + \sum_{m=5}^7 \omega_{1,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=8}^{11} \omega_{2,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=12}^{14} \omega_{3,0} K_{11,m}^0 + \\
 &\quad \sum_{m=15}^{18} \omega_{4,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=19}^{21} \omega_{5,0} K_{11,m}^0 + \sum_{m=22}^{24} \omega_{6,0} K_{11,m}^0 \\
 K_{12}^0 &= \sum_{m=1}^3 K_{12,m}^0 + \sum_{m=4}^6 \omega_{1,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=7}^9 \omega_{2,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=10}^{11} \omega_{3,0} K_{12,m}^0 + \\
 &\quad \sum_{m=12}^{14} \omega_{4,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=15}^{17} \omega_{5,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=18}^{19} \omega_{6,0} K_{12,m}^0 + \sum_{m=20}^{21} \omega_{7,0} K_{12,m}^0 \\
 K_{22}^0 &= \sum_{m=1}^3 K_{22,m}^0 + \sum_{m=4}^5 \omega_{1,0} K_{22,m}^0 + \sum_{m=6}^7 \omega_{2,0} K_{22,m}^0 + \sum_{m=8}^9 \omega_{6,0} K_{22,m}^0 + \\
 &\quad \sum_{m=10}^{11} \omega_{7,0} K_{22,m}^0 + \omega_{8,0} K_{22,m}^0 \\
 K_{33}^0 &= \kappa_0 K_{331}^0 \\
 K_0 &= K_{11}^0 + K_{12}^0 + K_{22}^0 + K_{33}^0
 \end{aligned} \tag{3.235}$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned}
 K_{11,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{11m} B d\Omega; & m = 5, \dots, 24 \\
 K_{12,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{12m} B d\Omega; & m = 4, \dots, 21 \\
 K_{22,m,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{22m} B d\Omega; & m = 4, \dots, 12 \\
 K_{331,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i D_{331} B d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.236}$$

Matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$

Las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  (ver Anexo A.7) contenidas en  $K(\theta)$  (3.234), se representan en forma simplificada como:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \quad (3.237)$$

Ecuación de equilibrio estocástica

Para obtener la ecuación de equilibrio, se sustituyen las matrices de rigidez aleatorias  $K^n(\theta)$  en  $K(\theta)$  (3.234), se toma en cuenta la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21), y se obtiene, de acuerdo con (3.24), que la forma de la ecuación de equilibrio es:

$$\left( \begin{aligned} & \sum_{m=5}^7 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=8}^{11} \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=12}^{14} \sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=15}^{18} \sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=19}^{21} \sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=22}^{24} \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{11,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=4}^6 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=7}^9 \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=10}^{11} \sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=12}^{14} \sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=15}^{17} \sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=18}^{19} \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=20}^{21} \sum_{n=1}^7 \omega_{7,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{12,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=4}^5 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k + \sum_{m=6}^7 \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=8}^9 \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & \sum_{m=10}^{11} \sum_{n=1}^7 \omega_{7,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \sum_{n=1}^8 \omega_{8,n} \sigma_{v_{hh}}^n \sum_{i=1}^M K_{22,m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j \Psi_k + \\ & K_1 \sigma_{G_{vh}} \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j \Psi_k \end{aligned} \right) \left( \sum_{k=0}^{P-1} U_k \right) = F \quad (3.238)$$

### Minimización del error por truncamiento

Al minimizar el error generado por el truncamiento de las series ( $E\{\epsilon_{M,P}, \Psi\}=0$ ) se obtiene que  $E\{\Psi_j, \Psi_k, \Psi_l\}=d_{jkl}$  para simplificar se considera que:

$$\begin{aligned}
 K_{11m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1, \dots, 6 \text{ y } m=5, \dots, 24 \\
 K_{12m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1, \dots, 7 \text{ y } m=4, \dots, 21 \\
 K_{22m,kl}^n &= \sum_{i=1}^M K_{11m,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n d_{jkl}; \quad n=1, 2, 6, 7, 8 \text{ y } m=4, \dots, 12 \\
 K_{331,kl} &= \sum_{i=1}^M K_{331,i} \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 d_{jkl}
 \end{aligned} \tag{3.239}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio estocástica se escribe como:

$$\begin{aligned}
 K_{kl} &= \sum_{m=5}^7 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{11,m,kl} + \sum_{m=8}^{11} \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=12}^{14} \sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=15}^{18} \sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m,kl}^n + \\
 &\quad \sum_{m=19}^{21} \sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=22}^{24} \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,m,kl}^n + \sum_{m=4}^6 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{12,m,kl} + \sum_{m=7}^9 \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m,kl}^n + \\
 &\quad \sum_{m=10}^{11} \sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m,kl}^n + \sum_{m=12}^{14} \sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m,kl}^n + \sum_{m=15}^{17} \sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m,kl}^n + \sum_{m=18}^{19} \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m,kl}^n + \\
 &\quad \sum_{m=20}^{21} \sum_{n=1}^7 \omega_{7,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,m,kl}^n + \sum_{m=4}^5 \omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{22,m,kl} + \sum_{m=6}^7 \sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{22,m,kl}^n + \sum_{m=8}^9 \sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{22,m,kl}^n + \\
 &\quad \sum_{m=10}^{11} \sum_{n=1}^7 \omega_{7,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{22,m,kl}^n + \sum_{n=1}^8 \omega_{8,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{22,m,kl}^n + k_1 \sigma_{G_{vh}} K_{331,kl} \\
 \sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k &= F
 \end{aligned} \tag{3.240}$$

La ec. 3.240 representa la ecuación de equilibrio estocástica con coeficientes  $d_{kij} = E\{\Psi_k \Psi_j \Psi_i\}$ , para  $v_{hh}$  aleatoria (estado plano de deformación).

### 3.5 Tamaño de la base polinomial

En las ecuaciones de equilibrio de la extensión del MEFEE expuestas anteriormente, aparecen productos de variables aleatorias en *caos polinomial*. Como lo señaló Debusschere *et al.* (2005), las variables elevadas a exponentes positivos enteros requieren que el orden  $p$  de la expansión del *caos polinomial* sea mayor que la potencia  $n$  de la variable (inciso 3.4.1.4) para evitar que el error por truncamiento se propague en los coeficientes espectrales calculados. Cuando dichas variables son de tipo Gaussianas, los coeficientes existentes en la representación en *caos polinomial* (inciso 3.4.1.3) corresponden solamente a los términos de primer orden de la base polinomial (Anexo A.4), por lo que el orden de éste no afecta el cálculo de los coeficientes del producto de estas variables. Lo más significativo en las expansiones, es el número de variables utilizadas en la serie de

*Karhunen-Loève*, sobre todo en medios heterogéneos (distancias de correlación igual al dominio horizontal analizado). Por tal motivo, en los análisis realizados en el presente trabajo se consideró una base polinomial  $P=15$  con:  $M=4$  y  $p=2$ .

### 3.6 Derivación de expresiones matemáticas para calcular incertidumbre en esfuerzos y deformaciones con el MEFEE

La deducción de expresiones matemáticas para calcular la incertidumbre en deformaciones y esfuerzos se realizó con base en lo sugerido por Sudret *et al.* (2006). Las expresiones se derivan considerando la variabilidad de los desplazamientos, y en los esfuerzos se considera también la del o de los parámetros que se consideren aleatorios ( $E$ ,  $\nu$ ,  $E_h$ , etc.). En particular, el álgebra de la deducción de esfuerzos aleatorios se apoya en la propiedad del producto de polinomios (caos *polinomiales*).

#### 3.6.1 Evaluación de incertidumbre en deformaciones

En el elemento finito las deformaciones se calculan en cada elemento de la malla; para un punto  $X$  se escriben:

$$\varepsilon(X) = B(X)U_e \quad (3.241)$$

donde:  $U_e$  es el vector de desplazamientos aleatorios del elemento  $e$  que al expandirse en caos *polinomial* se escribe como:

$$U_e(\theta) \cong \sum_{j=0}^{P-1} U_{e,j} \Psi_j \quad (3.242)$$

Considerando (3.242), las deformaciones aleatorias se escriben como:

$$\varepsilon(X, \theta) = \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) \Psi_j \quad (3.243)$$

Con:

$$\varepsilon_j(X) = B(X)U_{e,j} \quad (3.244)$$

La expresión (3.243) cumple con la forma general de representación de cantidades aleatorias. De (3.38), se puede escribir el valor esperado y la varianza de las deformaciones como:

$$E\{\varepsilon\} \cong \varepsilon_0; \quad \text{Var}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{P-1} E\{\Psi_j^2\} \varepsilon_j^2 \quad (3.245)$$

#### 3.6.2 Evaluación de incertidumbre en esfuerzos

Para cada elemento de la malla, el vector de esfuerzos se expresa, para un punto  $X$ , como:

$$\sigma(X) = D\varepsilon(X) \quad (3.246)$$

En la expresión anterior (3.246), la matriz de elasticidad  $D$  contiene la variabilidad del parámetro a modelar ( $E, \nu, E_h$ , etc), su representación estocástica se realiza recurriendo a la expansión de *Karhunen-Loève* (3.13), teniendo:

$$D(X, \theta) = \left( E\{V_V(X, \theta)\} + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \xi_i(\theta) \right) D_0 \quad (3.247)$$

Considerando que el campo aleatorio  $D(X, \theta)$  se puede expandir en serie de *Karhunen-Loève* con variables aleatorias  $\xi_j$  en *caos polinomial* (3.47), y tomando en cuenta las deformaciones aleatorias (3.243), el vector de esfuerzos aleatorios es:

$$\sigma(X, \theta) = \left( E\{V_V(X, \theta)\} + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \sum_{k=0}^{P-1} C_{ik} \Psi_k \right) D_0 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) \Psi_j \quad (3.248)$$

donde  $C_{ik}$  son coeficientes a evaluar por medio de métodos numéricos (Berveiller, 2005). Cuando las variables que representan el campo aleatorio son Gaussianas los coeficientes se calculan simplemente como:  $C_{i0}=\mu$ ,  $C_{i1}=\sigma$  y  $C_{ik}=0$  para  $k \geq 2$ .

Reacomodando términos se tiene que:

$$\sigma(X, \theta) = \sum_{j=0}^{P-1} \left( E\{V_V(X, \theta)\} D_0 \varepsilon_j(X) \Psi_j + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \sum_{k=0}^{P-1} C_{ik} D_0 \varepsilon_j(X) \Psi_k \Psi_j \right) \quad (3.249)$$

Considerando el producto de *caos polinomiales* (ver Anexo A.3) se llega a:

$$\sigma(X, \theta) = \sum_{l=0}^{P-1} \left( E\{V_V(X, \theta)\} D_0 \varepsilon_l(X) \Psi_l + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{P-1} C_{ik} D_0 \varepsilon_j(X) d_{kjl} \Psi_l \right) \quad (3.250)$$

El primer término ( $l=0$ ) de la expansión anterior corresponde al valor esperado de los esfuerzos, expresado como:

$$E\{\sigma\} = E\{V_V(X, \theta)\} D_0 \varepsilon_0(X) \quad (3.251)$$

Para  $l > 0$  los esfuerzos se expresan:

$$\sigma(X, \theta) = \sum_{l=1}^{P-1} \sigma_l \Psi_l \quad (3.252)$$

Con:

$$\sigma_l = \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{P-1} C_{ik} D_0 \varepsilon_j(X) d_{kjl} \quad (3.253)$$

Siendo la varianza de los esfuerzos:

$$Var(\sigma) = \sum_{i=1}^{P-1} E\{\Psi_i^2\} \sigma_i^2 \quad (3.254)$$

El cálculo de la incertidumbre de los esfuerzos es una función de la variabilidad del o los parámetros aleatorios a modelar, los cuales están contenidos en la matriz de elasticidad,  $\sigma(\theta) = \sigma(D(X, \theta))$ ; dicha matriz tendrá la forma como la presentada en las expresiones anteriores. Como ejemplo, en el Anexo A.13 se presenta la deducción de los esfuerzos aleatorios para  $E_v$  aleatorio.

La extensión del MEFEE para una ley constitutiva elástica lineal anisótropa se implementó en una subrutina del programa FREUM versión 3 (Finite Element Reliability Using Matlab), llamada FERUMssfem (Sudret & Der Kiureghian, 2000). Esta subrutina permite realizar análisis de incertidumbre en dos dimensiones con el MEFEE para un comportamiento elástico lineal isótropo, en donde solamente se modela el efecto de la variabilidad del módulo de deformación  $E$  sobre el campo de desplazamientos.

### 3.7 Simulación Monte Carlo

La ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE se escribe como:

$$K(\theta)U(\theta) = F \quad (3.255)$$

En donde la matriz de rigidez estocástica en la ecuación anterior es función de la variabilidad del campo aleatorio a evaluar  $K(\theta) = K(D(X, \theta))$ . La solución de (3.255) mediante el método de Monte Carlo requiere la realización de los siguientes pasos.

1. Simular campos aleatorios Gaussianos
2. Realizar el análisis numérico
3. Con base en la solución del sistema, se obtiene la función de densidad de probabilidad  $\{U(\theta)\}$

### 3.8 Ejemplo de aplicación

#### 3.8.1 Planteamiento

Para analizar los resultados de la extensión del MEFEE a campos diferentes de  $E$  isótropo se consideró un sólido cúbico de dimensiones unitarias (1x1x1 m), constituido con un solo material y sometido a una presión vertical de 100 kPa. En la Figura 3.1 se observan las condiciones de apoyo que restringen los desplazamientos verticales y el central lo restringen horizontalmente también. Se realizó una malla de 100 elementos.

El análisis consistió en evaluar cómo la incertidumbre de los parámetros se propaga en el campo de desplazamientos. Se consideró, para todos los casos analizados, que el campo aleatorio a modelar es estacionario en el sentido amplio y la función de autocovarianza normalizada, que describe la variación de las propiedades de un punto a otro en la masa del suelo, es de tipo exponencial:

$$\rho_V(X_1, X_2) = e^{-\frac{2|X_1 - X_2|}{L}} \quad (3.256)$$

donde  $L$ , definida en forma convencional, como la distancia de correlación a partir de la cual la correlación se considera despreciable<sup>5</sup>, se consideró un parámetro de análisis.

La incertidumbre en el campo de desplazamientos se evaluó mediante la desviación estándar. Se analizó el punto central superior (A) y el punto de la esquina superior (B), Figura 3.1. Los casos que se analizaron fueron los siguientes:

- (a) Isótropo (estado plano de esfuerzo)
- (b) Anisótropo (estado plano de esfuerzo)
- (c) Anisótropo (estado plano de deformación)

En el caso anisótropo, se consideró un material con un grado de anisotropía ( $n=E_H/E_V$ )  $n=1$  y después se estudió el efecto de la variación de  $n$  sobre los resultados. Los análisis consistieron en considerar incertidumbre sólo en un parámetro y los demás deterministas. Se analizaron los siguientes casos:

- $E_V$  aleatorio y los demás deterministas
- $E_H$  aleatorio y los demás deterministas
- $\nu_{vh}$  aleatorio y los demás deterministas
- $\nu_{hh}$  aleatorio y los demás deterministas
- $E_V$ ,  $E_H$  y  $\nu_{vh}$  aleatorios (estado plano de esfuerzo)

Las propiedades de los parámetros elásticos lineales isótropos y anisótropos para el análisis estocástico se presentan en las Tabla 3.4 y Tabla 3.5, respectivamente. La incertidumbre de  $G_{vh}$  se calculó mediante series de Taylor (Auvinet, 2000). Para los análisis con diferentes grados de anisotropía se varió el valor de  $E_V$  a 2 y 4 MPa y  $\nu_{hh}$  se tomó como 0.2.

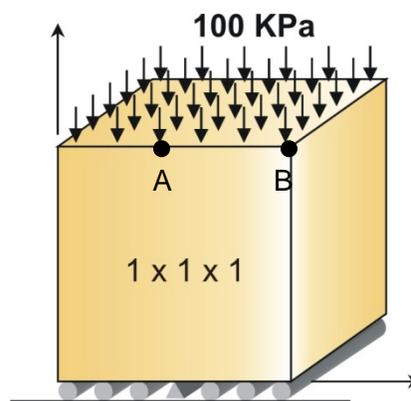


Figura 3.1 Sólido cúbico

<sup>5</sup> Los materiales con grandes distancias de correlación tienen propiedades muy uniformes en el espacio, mientras que los materiales con distancias de correlación pequeñas tienden a ser más heterogéneos (Vanmarcke, 1977).

Tabla 3.4 Característica de los campos aleatorios. Caso isótropo

Parámetro aleatorio	$E\{E\}$ MPa	$CV(E_v)$ %	$E\{\nu\}$	$CV(\nu)$ %
$\nu$	1	0	0.3	10
$E$ y $\nu$	1	10	0.3	10

Tabla 3.5 Característica de los campos aleatorios. Caso anisótropo  $n=1$

Parámetro aleatorio	$E\{E_v\}$ MPa	$CV(E_v)$ %	$E\{E_h\}$ MPa	$CV(E_h)$ %	$E\{\nu_{vh}\}$ MPa	$CV(\nu_{vh})$ %	$E\{\nu_{hh}\}$ MPa	$CV(\nu_{hh})$ %	$E\{G_{vh}\}$ MPa	$CV(G_{vh})$ %
$E_v$	1	10	1	0	0.30	0	0.30	0	0.3846	6.2
$E_h$	1	0	1	10	0.30	0	0.30	0	0.3837	3.8
$\nu_{vh}$	1	0	1	0	0.30	10	0.30	0	0.3844	2.2
$\nu_{hh}$	1	0	1	0	0.30	0	0.30	10	--	0.0
$E_v, E_h, \nu_{vh}$	1	10	1	10	0.30	10	0.30	10	0.3823	7.6

### 3.8.2 Resultados

En las gráficas de las Figura 3.2 y Figura 3.3 se observa la esperanza de los desplazamientos verticales y horizontales para estados planos de esfuerzo y de deformación, respectivamente. Las gráficas de los desplazamientos corresponden al caso isótropo y anisótropo con grado de anisotropía  $n=1$ . Para la condición de estado plano de esfuerzo, el máximo desplazamiento vertical es de 0.1 m y el horizontal es de 0.015 m, para el estado plano de deformación el máximo desplazamiento vertical es 0.1 m y para el horizontal es 0.02 m.

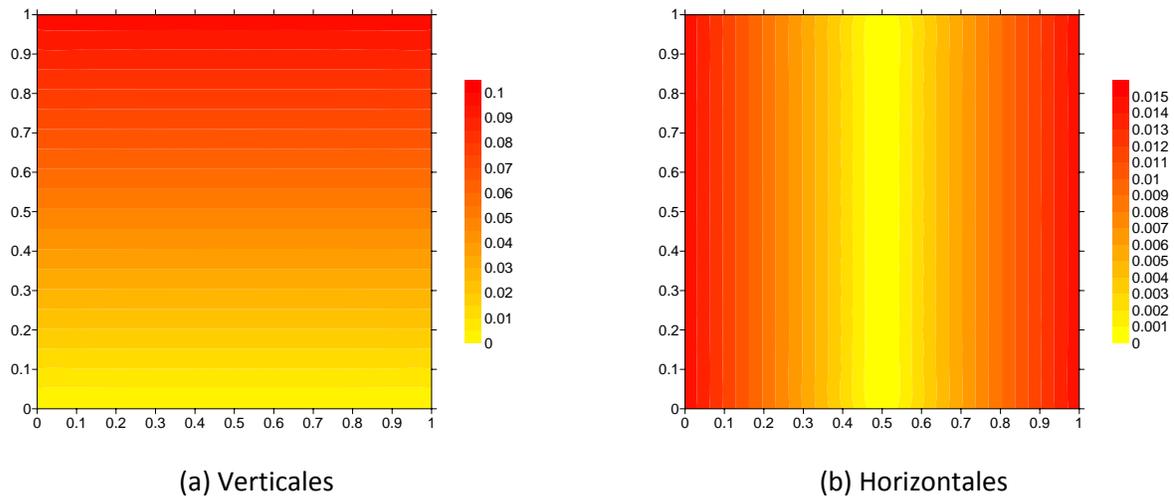


Figura 3.2 Esperanza de los desplazamientos para el estado plano de esfuerzo

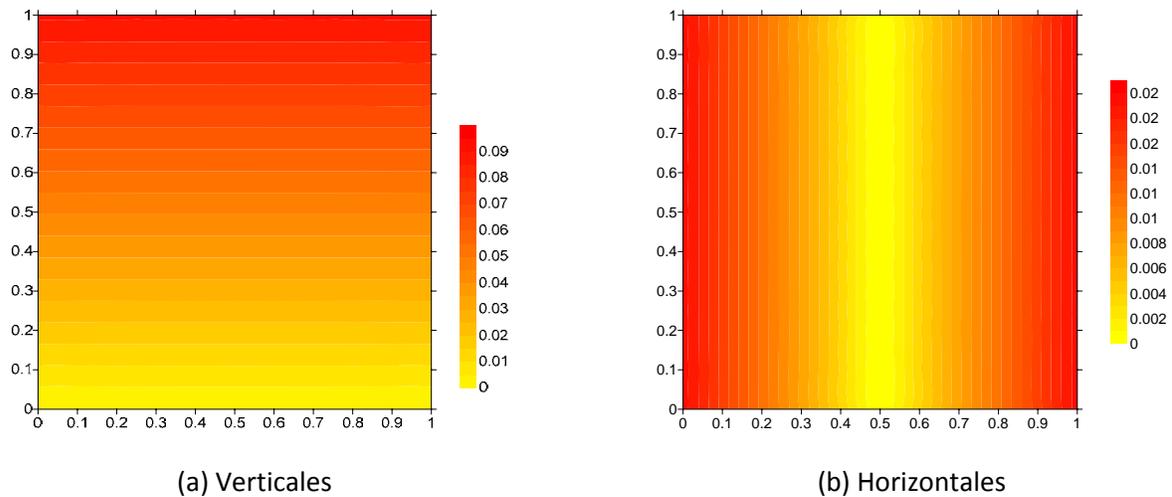


Figura 3.3 Esperanza de los desplazamientos para el estado plano de deformación

(a) Caso isótropo (estado plano de esfuerzo)

Módulo de elasticidad  $E$  aleatorio

Como un punto de comparación con los demás análisis, se presentan los resultados de los desplazamientos verticales y horizontales cuando el módulo de elasticidad  $E$  es aleatorio (Pineda-Contreras & Auvinet-Guichard, 2013).

En la gráfica de la Figuras 3.4a se ilustra la influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos verticales. Se observa que para el punto central (punto A) y el de la esquina superior (punto B) la incertidumbre de tal desplazamiento es nula para distancias de correlación pequeñas, debido a un efecto de *compensación estadística* que anula la desviación estándar y que es generado por la heterogeneidad del material. Conforme la distancia de correlación aumenta, la incertidumbre crece hasta alcanzar la magnitud de incertidumbre impuesta en el módulo de elasticidad (10%), el material se comporta estrictamente homogéneo. La incertidumbre es mayor para el punto B que para A, debido a que el número de materiales “puntuales” con baja correlación que interactúan es mayor en el punto central que en el de la esquina. Para distancias de correlación grandes la desviación estándar de los desplazamientos en el punto A y B es 0.0015m.

La influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales se presenta en la gráfica de la Figura 3.4b. Nuevamente, para distancias de correlación pequeñas la incertidumbre de tal desplazamiento es nula, también por un efecto de *compensación estadística*. Cuando la distancia de correlación es del mismo orden que la dimensión horizontal del dominio analizado, la incertidumbre alcanza su máximo valor; si la distancia de correlación sigue aumentando, el material comienza a estabilizarse estadísticamente y la desviación estándar de los desplazamientos comienza a disminuir, hasta alcanzar valores nulos lo que representa la simetría axial de los desplazamientos en el punto central superior (punto A). Para el punto B, el menor valor de incertidumbre que se alcanza para distancias de correlación grandes, está condicionado por la incertidumbre impuesta en el módulo de elasticidad.

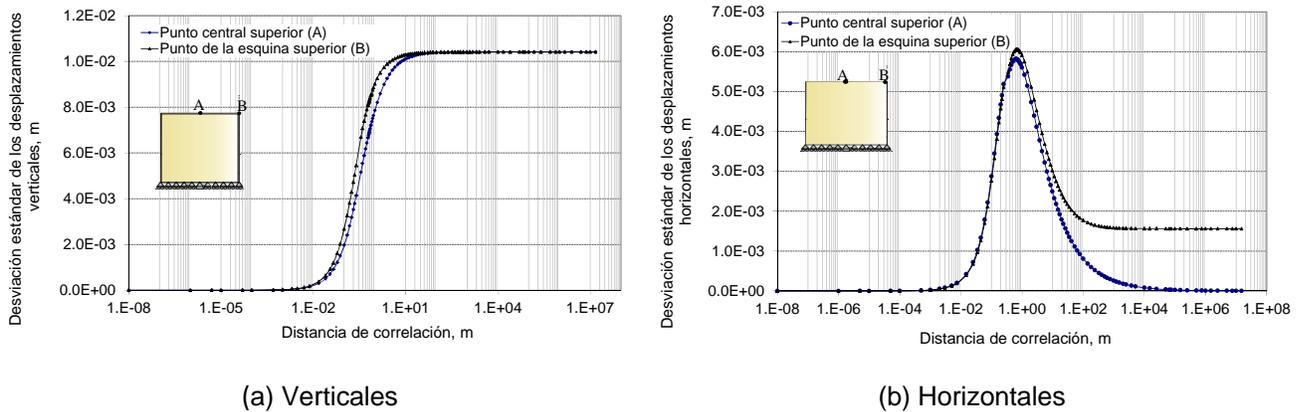


Figura 3.4 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos.  $E$  aleatorio, comportamiento isótropo para estado plano de esfuerzo

### Relación de Poisson $\nu$ aleatoria

La influencia de la variabilidad de la relación de Poisson  $\nu$  sobre los desplazamientos verticales en función de la distancia de correlación se presenta en la gráfica de la Figura 3.5a. Se observa que la desviación estándar máxima de los desplazamientos verticales en ambos puntos es muy baja, del orden de 0.00042 m ( $CV=0.4\%$ ); lo que conduce a considerar que el efecto de la incertidumbre de este parámetro sobre tales desplazamientos es nulo. La influencia de la incertidumbre de este parámetro sobre los desplazamientos horizontales se muestra en la gráfica de la Figura 3.5b. Se observa que para el punto central superior (punto A) la desviación estándar máxima alcanzada corresponde a una distancia de correlación intermedia, su magnitud es muy baja, del orden 0.0002m, por lo que la influencia de este parámetro se considera nula. La incertidumbre en el punto de la esquina superior (punto B) se incrementa conforme la distancia de correlación aumenta, la máxima se alcanza para una distancia de correlación muy grande, cuyo valor de 0.0015 m corresponden al 10% de la incertidumbre impuesta en el campo aleatorio de  $\nu$ .

En conclusión, el efecto de la incertidumbre de la relación de Poisson  $\nu$  solamente se refleja sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes al punto de la esquina superior (punto B). En la gráfica de la Figura 3.6 se presenta la desviación estándar de los desplazamientos horizontales en el punto B en función de la distancia de correlación. Se observa en general, que tal incertidumbre calculada con el MEFEE tiene buena concordancia con los resultados obtenidos con el método de MC. Para distancias de correlación muy pequeñas, MC requiere mallas muy finas para obtener valores de incertidumbres muy bajas.

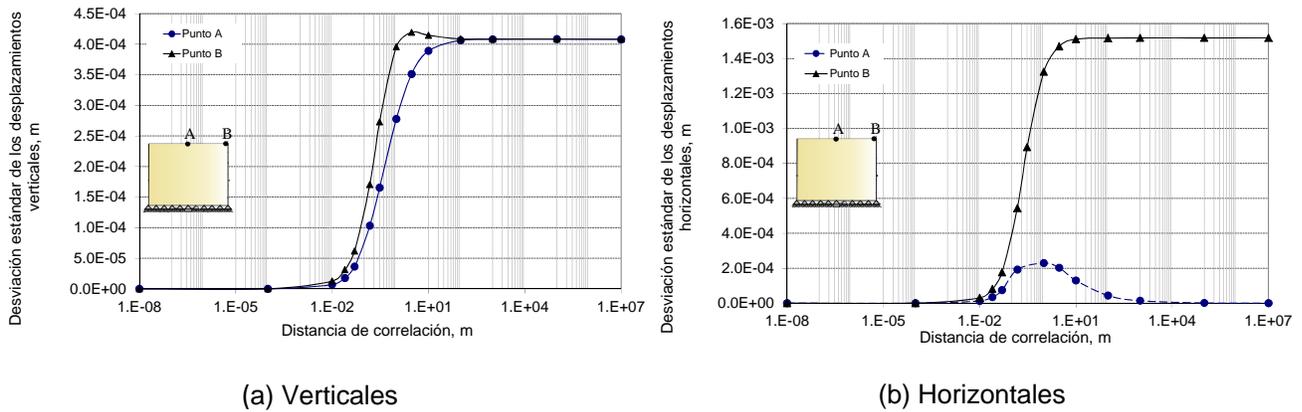


Figura 3.5 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos.  $\nu$  aleatorio, comportamiento isótropo para estado plano de esfuerzo

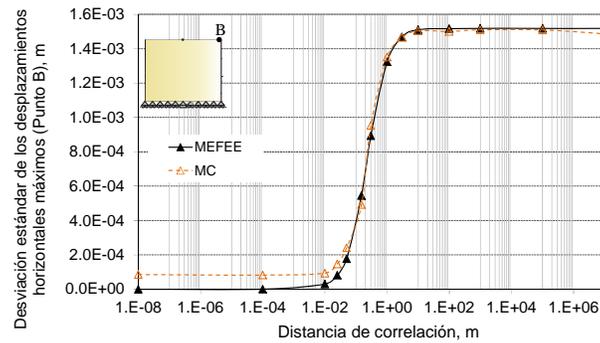


Figura 3.6 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales máximos en el punto B.  $\nu$  aleatorio, comportamiento isótropo para estado plano de esfuerzo. Comparación entre MEFEE y Monte Carlo

Módulo de elasticidad  $E$  y relación de Poisson  $\nu$  aleatorios.

La influencia de la distancia de correlación sobre los desplazamientos verticales se presenta en la gráfica de la Figura 3.7a. Se observa que el comportamiento del material es similar que para el caso en que únicamente se considera  $E$  aleatorio,  $\nu$  no tiene influencia sobre tales desplazamientos. En la misma figura se observa que los resultados del MEFEE tienen una buena aproximación con los resultados de la simulación con MC.

Para el caso de los desplazamientos horizontales, la influencia de la incertidumbre de  $E$  y  $\nu$  en función de la distancia de correlación se muestra en la gráfica de la Figura 3.7b. En este análisis el comportamiento del punto central superior (punto A) y el punto de la esquina superior (punto B) es idéntico que cuando sólo se considera  $E$  aleatorio, la diferencia es que para B la magnitud de la desviación estándar máxima alcanzada (0.00192m) para distancias de correlación grandes, es mayor del 10% de la incertidumbre impuesta en  $E$ , por lo que la incertidumbre de  $\nu$  sí influye sobre estos desplazamientos. En la misma gráfica se observa que estos resultados concuerdan con los resultados obtenidos con MC.

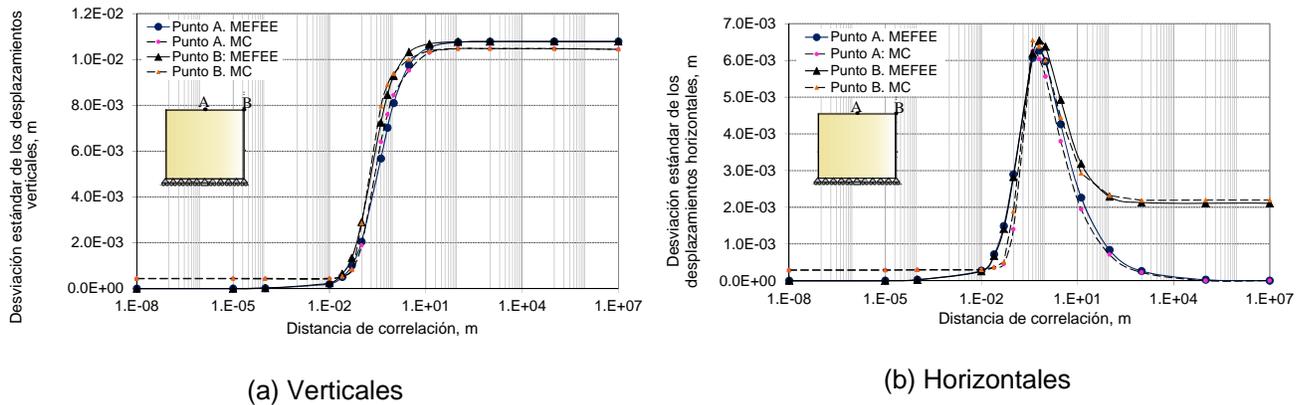


Figura 3.7 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos.  $E$  y  $\nu$  aleatorios, comportamiento isótropo para estado plano de esfuerzo

Los resultados de los análisis con respecto a  $\nu$  aleatorio y  $E$  y  $\nu$  aleatorios son congruentes con lo que presenta Noh (2004 y 2006), quien analiza el efecto individual y combinado de estos dos parámetros mediante un análisis de elemento finito que acopla el método de perturbaciones con la técnica de discretización de campos aleatorios (integrales de peso).

(b) Caso anisótropo (estado plano de esfuerzo)

Módulo de elasticidad aleatorio. Comparación entre  $E_v$  y  $E_h$

En las gráficas de las Figuras 3.8a y 3.8b se presenta la influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos verticales y horizontales, respectivamente. Se consideró un material isótropo ( $n=1$ ) y se analizó el efecto individual de la incertidumbre de los módulos de elasticidad sobre la incertidumbre de los desplazamientos. De las gráficas se observa que:

- $E_v$ : la incertidumbre de este parámetro tiene un efecto significativo sobre la incertidumbre de los desplazamientos debido a que los esfuerzos a los que está sometido el material son solamente verticales. La influencia de la incertidumbre en función de la distancia de correlación tiene el mismo comportamiento que para  $E$  (isótropo). El 10% de incertidumbre impuesto en  $E_v$  se refleja en los desplazamientos verticales (punto A y B) y horizontales (punto B) cuando la distancia de correlación es muy grande.
- $E_h$ : la incertidumbre de este parámetro no tiene efecto sobre la incertidumbre de los desplazamientos, tanto para el punto central superior (A) como para el de la esquina superior (B).

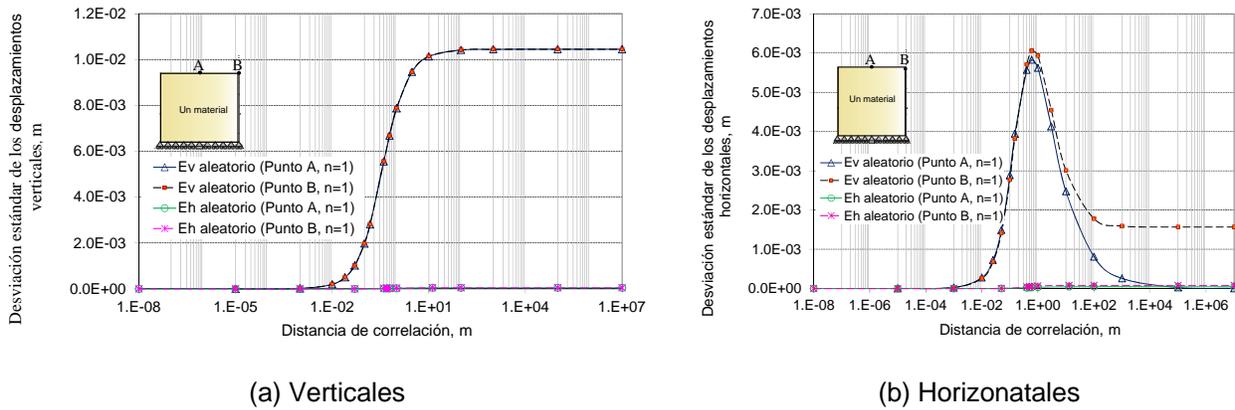


Figura 3.8 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos. Comparación entre  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (estado plano de esfuerzo)

Módulo de elasticidad  $E_v$  aleatorio

Se analizó cómo el grado de anisotropía ( $n=E_H/E_v$ ) influye sobre la incertidumbre de los desplazamientos verticales y horizontales. En las gráficas de las Figuras 3.9 y 3.10 se observa los respectivos resultados. El 10% de incertidumbre impuesta en  $E_v$  se refleja directamente sobre los desplazamientos cuando la distancia de correlación es muy grande. En la misma gráfica se comparan los resultados con el método de MC y se observa una buena aproximación. Un resumen del valor esperado  $E\{\delta\}$  y de la desviación estándar  $\sigma_\delta$  de los desplazamientos en los puntos A y B se presenta en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6 Desviación estándar de los desplazamientos verticales y horizontales para una distancia de correlación grande.  $E_v$  aleatorio (comportamiento anisótropo, estado plano de esfuerzo)

Punto	$n=E_H/E_v$	$E\{\delta_v\}$ (m)	$\sigma_{\delta_v}$ (m)	$E\{\delta_h\}$ (m)	$\sigma_{\delta_h}$ (m)
A	n=1	0.10	0.0105	0.00	0.00
	n=0.5	0.05	0.005	0.00	0.00
	n=0.25	0.025	0.0025	0.00	0.00
B	n=1	0.10	0.0105	0.015	0.0015
	n=0.5	0.05	0.005	0.0075	0.00075
	n=0.25	0.025	0.0025	0.00375	0.000375

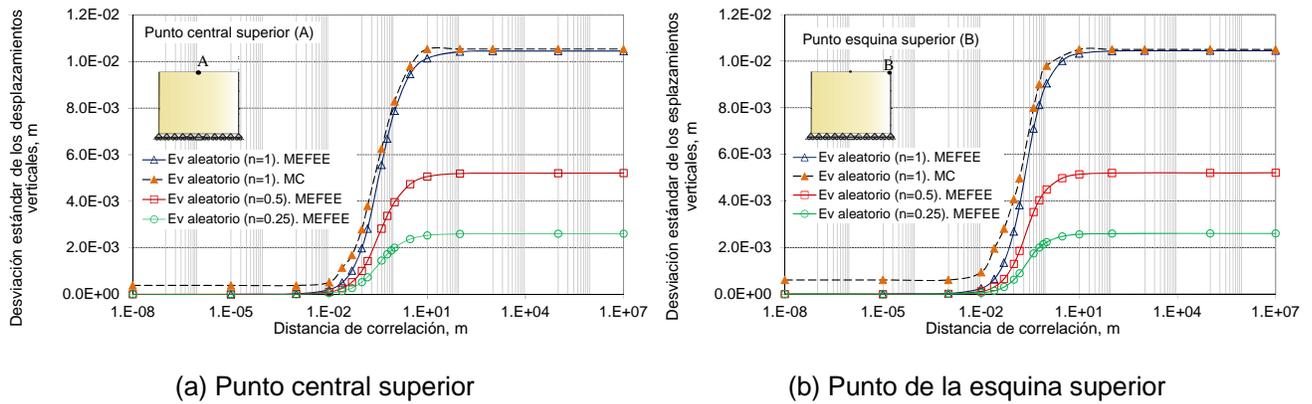


Figura 3.9 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos verticales para diferentes grados de anisotropía.  $E_v$  aleatorio (estado plano de esfuerzo)

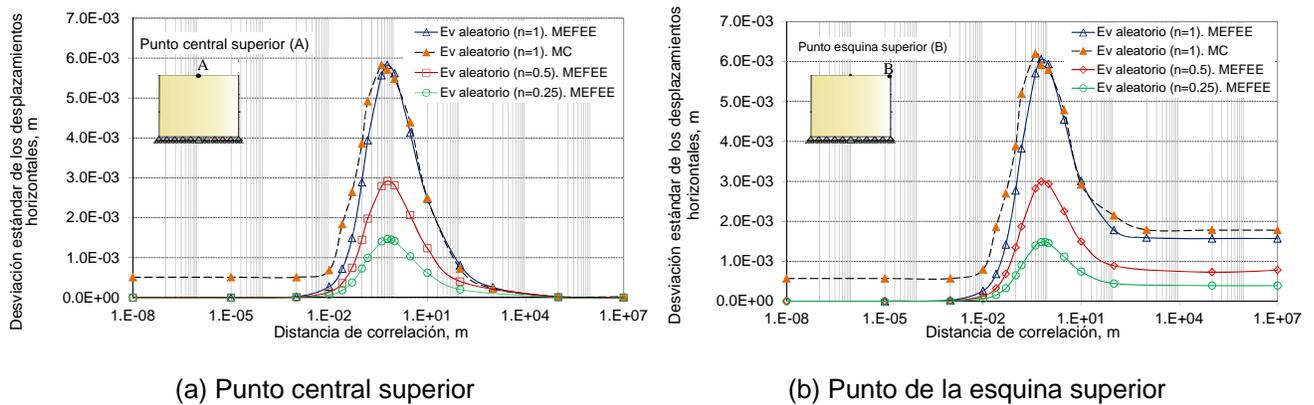


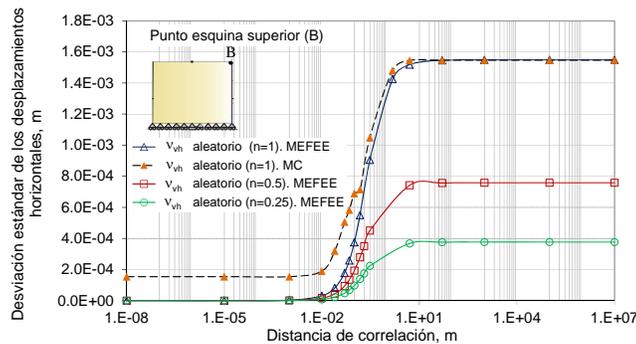
Figura 3.10 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía.  $E_v$  aleatorio (estado plano de esfuerzo)

### Relación de Poisson $\nu_{vh}$ aleatoria

Para los desplazamientos verticales la magnitud de la incertidumbre que refleja este parámetro es apenas 0.3%. En los desplazamientos horizontales, en el punto central superior (punto A) la incertidumbre también es muy baja. El mayor efecto se presenta en los desplazamientos horizontales localizados en el punto de la esquina superior (punto B), como se ilustra en la gráfica de la Figura 3.11. Efectivamente, la magnitud de la desviación estándar impuesta en  $\nu_{vh}$ , se refleja directamente sobre estos desplazamientos cuando la distancia de correlación es muy grande. Estos resultados se compararon con el método de Monte Carlo y se observa una buena concordancia entre ambos análisis. En la Tabla 3.7 se presenta un resumen de la incertidumbre de los desplazamientos horizontales en el punto B.

Tabla 3.7 Desviación estándar de los desplazamientos horizontales para una distancia de correlación grande.  $v_{vh}$  aleatorio (comportamiento anisótropo, estado plano de esfuerzo)

Punto	$n=E_H/E_V$	$E\{\delta_h\}$ (m)	$\sigma_{\delta_h}$ (m)
B	n=1	0.015	0.00154
	n=0.5	0.0075	0.00076
	n=0.25	0.00375	0.000376



Punto de la esquina superior

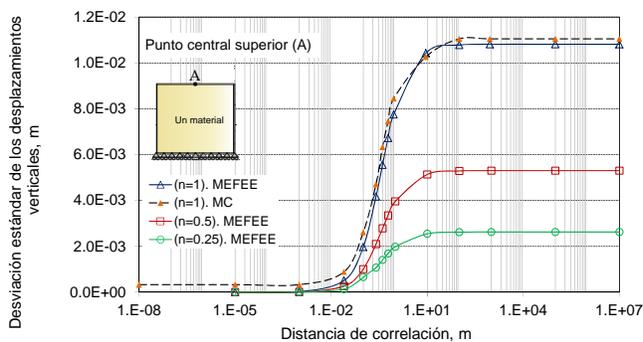
Figura 3.11 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía.  $v_{vh}$  aleatoria (estado plano de esfuerzo)

$E_v$ ,  $E_h$  y  $v_{vh}$  aleatorios

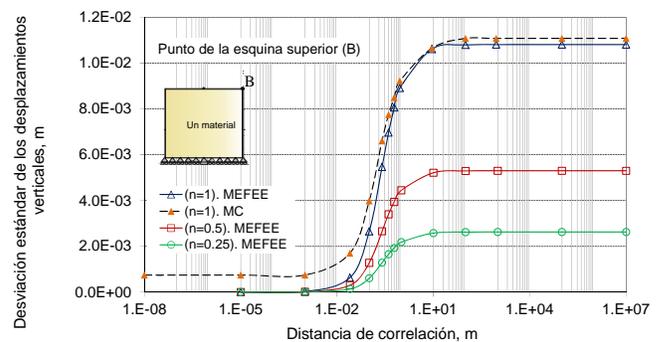
En gráficas de la Figura 3.12 se ilustra la influencia de la incertidumbre de estos tres parámetros sobre el campo de desplazamientos verticales calculado. El 10% de incertidumbre impuesta en los campos de entrada se refleja directamente sobre la incertidumbre de estos desplazamientos cuando la distancia de correlación tiende a ser grande. La influencia de la incertidumbre de los tres parámetros sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales se presenta en las gráficas de la Figura 3.13. Para el punto de la esquina superior (punto B, Figura 3.13b) se observa que cuando la distancia de correlación es muy grande, la incertidumbre máxima alcanzada en los desplazamientos es del orden del 13%, mayor del 10% del impuesto en los campos aleatorios de entrada, lo que muestra la influencia de  $v_{vh}$  sobre los desplazamientos horizontales. Los resultados obtenidos con el MEFEE concuerdan con los resultados de la simulación con Monte Carlo, como se muestra en las gráficas de las Figuras 3.12 y 3.13. Asimismo, se observa que la desviación estándar de los desplazamientos disminuye cuando el grado de anisotropía disminuye ( $n=E_H/E_V$ ); los resultados, correspondientes a los puntos A y B, se presentan en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8 Desviación estándar de los desplazamientos horizontales para una distancia de correlación grande.  $E_v$ ,  $E_h$ ,  $\nu_{vh}$  aleatorios (comportamiento anisótropo, estado plano de esfuerzo)

Punto	$n=E_h/E_v$	$E\{\delta_v\}$ (m)	$\sigma_{\delta_v}$ (m)	$E\{\delta_h\}$ (m)	$\sigma_{\delta_h}$ (m)
A	n=1	0.10	0.0108	0.00	0.00
	n=0.5	0.05	0.0053	0.00	0.00
	n=0.25	0.025	0.0026	0.00	0.00
B	n=1	0.10	0.0108	0.015	0.00217
	n=0.5	0.05	0.0053	0.0075	0.00108
	n=0.25	0.025	0.0026	0.00375	0.00054

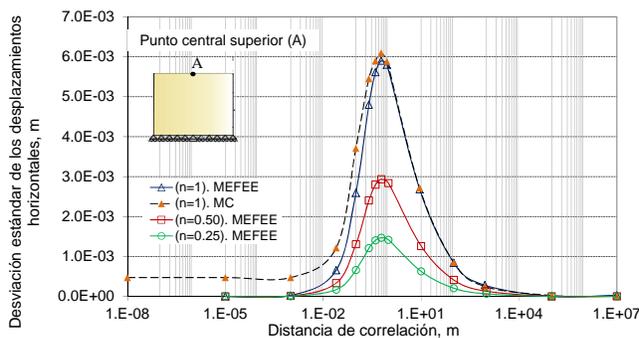


(a) Punto central superior

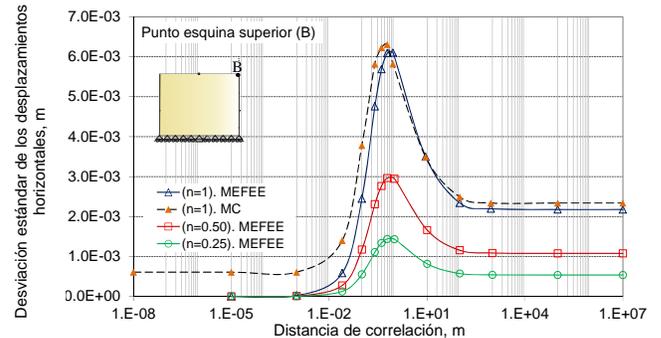


(b) Punto de la esquina superior

Figura 3.12 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos verticales para diferentes grados de anisotropía.  $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$  aleatorios (estado plano de esfuerzo)



(a) Punto central superior



(b) Punto de la esquina superior

Figura 3.13 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía.  $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$  aleatorios (estado plano de esfuerzo)

(c) Caso anisótropo (estado plano de deformación)

Módulo de elasticidad aleatorio. Comparación entre  $E_v$  y  $E_h$

Al igual que en el caso de estado plano de esfuerzo, se consideró un material isótropo ( $n=1$ ) y se analizó cómo la variabilidad de cada módulo de elasticidad por separado, se refleja en los desplazamientos. Los resultados de este análisis se muestran en las gráficas de la Figura 3.14. Nuevamente, la variabilidad del módulo de elasticidad horizontal  $E_h$  no influye sobre la incertidumbre de los desplazamientos. El módulo de elasticidad vertical  $E_v$  es el que tiene un efecto importante sobre los desplazamientos, la incertidumbre máxima se alcanza cuando la distancia de correlación es muy grande, del orden del 10% de la impuesta en este parámetro.

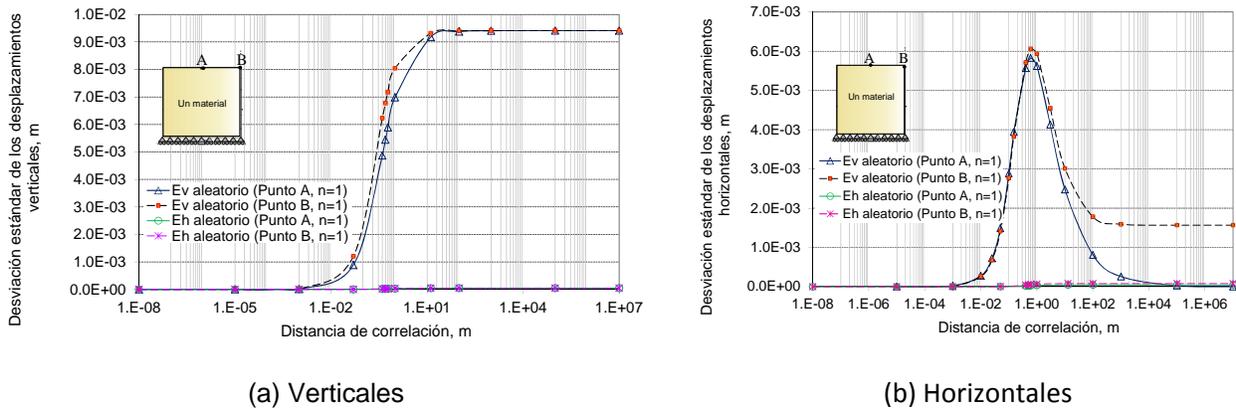


Figura 3.14 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos. Comparación entre  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (estado plano de deformación)

Módulo de elasticidad  $E_v$  aleatorio

En las gráficas de las Figuras 3.15 y 3.16 se observa cómo el grado de anisotropía ( $n=E_h/E_v$ ) influye sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales y verticales, respectivamente. Se observa también, que cuando la distancia de correlación es grande, el 10% de incertidumbre impuesta en  $E_v$  se propaga en los desplazamientos. Un resumen de la desviación estándar de los desplazamientos para una distancia de correlación grande y para diferentes grados de anisotropía se presenta en la Tabla 3.9.

Tabla 3.9 Desviación estándar de los desplazamientos horizontales y verticales para una distancia de correlación grande.  $E_v$  aleatorio (comportamiento anisótropo, estado plano de deformación)

	$n=E_h/E_v$	$E\{\delta_v\}$ (m)	$\sigma_{\delta_v}$ (m)	$E\{\delta_h\}$ (m)	$\sigma_{\delta_h}$ (m)
Punto A	n=1	0.98	0.098	0.00	0.00
	n=0.50	0.048	0.0048	0.00	0.00
	n=0.25	0.025	0.0025	0.00	0.00
Punto B	n=1	0.98	0.098	0.0201	0.0022
	n=0.50	0.048	0.0047	0.01	0.00098
	n=0.25	0.025	0.0025	0.005	0.00047

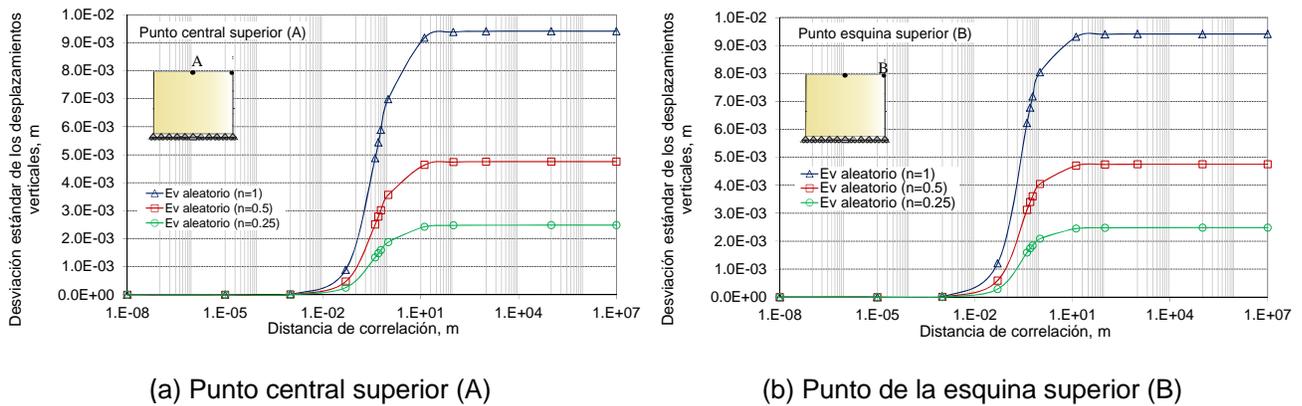


Figura 3.15 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos verticales para diferentes grados de anisotropía.  $E_v$  aleatorio (estado plano de deformación)

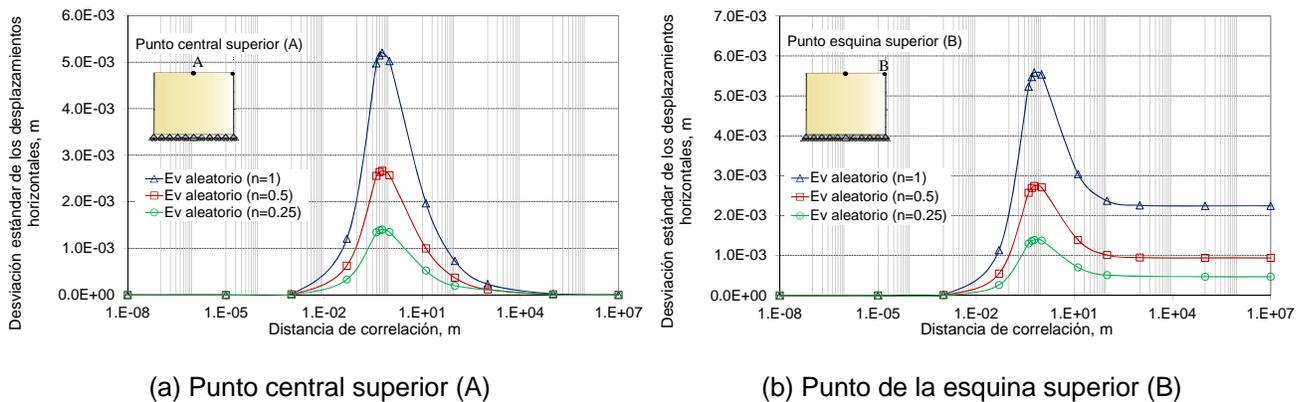


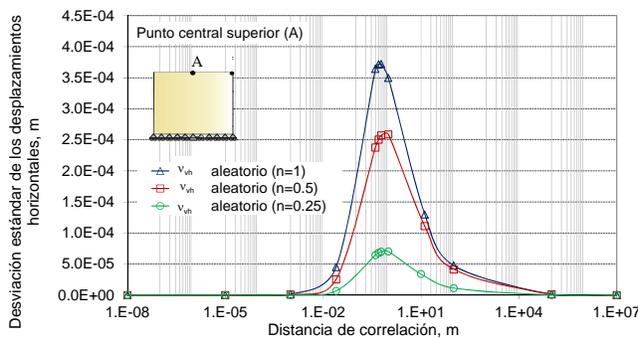
Figura 3.16 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía.  $E_v$  aleatorio (estado plano de deformación)

### Relación de Poisson $\nu_{vh}$ aleatoria

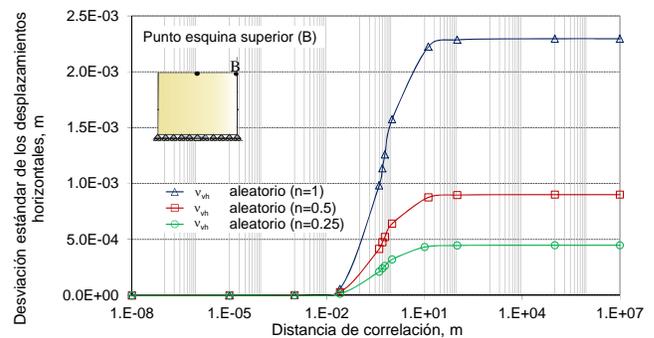
Nuevamente, la incertidumbre de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  solamente se propaga en el campo de desplazamientos horizontales, específicamente en el punto de la esquina superior (B). La incertidumbre máxima que se alcanza corresponde al de la imposta (10 %) en este parámetro, Figura 3.17b. Para el punto central superior (A), Figura 3.17a, la desviación estándar máxima se presenta cuando la distancia de correlación es aproximadamente 1m, con un valor muy bajo de 0.00037. El grado de anisotropía  $n$  influye de la misma forma que en los demás parámetros: si disminuye  $n$ , la incertidumbre decrece, como se muestra en la Tabla 3.10.

Tabla 3.10 Desviación estándar de los desplazamientos horizontales para una distancia de correlación grande.  $\nu_{vh}$  aleatoria (comportamiento anisótropo, estado plano de deformación)

Punto	$n=E_h/E_v$	$E\{\delta_h\}$ (m)	$\sigma_{\delta_h}$ (m)
A	n=1	0.00	0.00
	n=0.5	0.00	0.00
	n=0.33	0.00	0.00
B	n=1	0.0201	0.0022
	n=0.5	0.010	0.0009
	n=0.33	0.005	0.0045



(a) Punto central superior



(b) Punto de la esquina superior

Figura 3.17 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para diferentes grados de anisotropía.  $\nu_{vh}$  aleatoria (estado plano de deformación)

Relación de Poisson  $\nu_{hh}$  aleatoria

La relación de Poisson  $\nu_{hh}$  no influye sobre la incertidumbre de los desplazamientos verticales y horizontales, la incertidumbre máxima (CV) que se alcanza cuando la distancia de correlación es muy grande, es apenas del orden de 0.6%.

De los resultados de los análisis presentados en las gráficas anteriores, se puede concluir que la incertidumbre de los parámetros del material que tiene mayor significancia sobre las incertidumbres de los desplazamientos verticales y horizontales es la del módulo de elasticidad vertical  $E_v$ , mientras que la de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  solamente afecta las incertidumbres de los desplazamientos horizontales. Para este ejemplo en particular, el comportamiento de los parámetros elásticos lineales anisótropos del material es cualitativamente igual para los estados planos de esfuerzo y deformación.



# Capítulo 4

---

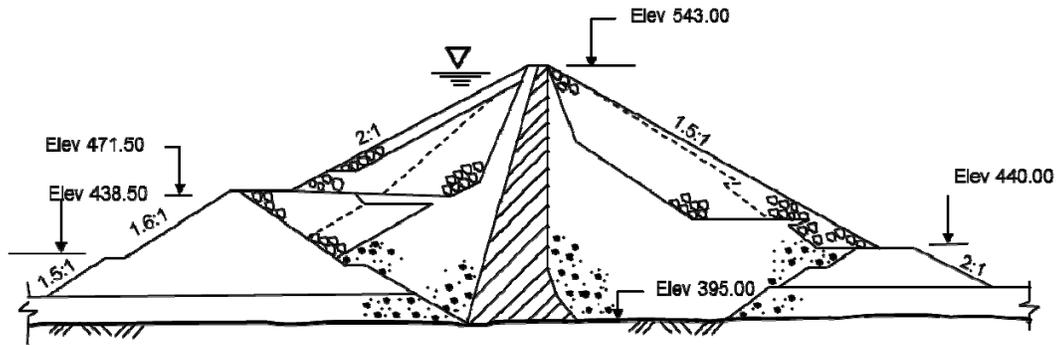
## **APLICACIÓN A ESTRUCTURAS TÉRREAS**

### 4.1 Introducción

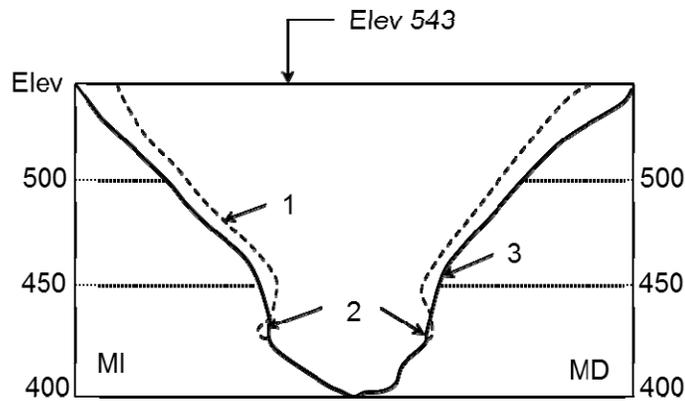
Hasta el momento está bien establecido que las variaciones en la relación de Poisson pueden conducir a grandes variaciones en la extensión de las zonas de tensión susceptibles de presentar agrietamiento en terraplenes (Covarrubias, 1970; Louault, 1997; Pérez-Duarte, 2000). Estas conclusiones se han obtenido con las aplicaciones del Método del Elemento Finito (MEF) al análisis de agrietamiento de la presa La Angostura. Dada esta referencia y considerando que las características físicas de la sección del valle son un ejemplo práctico para visualizar cómo la incertidumbre de los parámetros influye sobre el campo de desplazamientos y esfuerzos calculados con el MEF, en este capítulo se analiza la presa La Angostura con la extensión de la formulación del Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) al caso elástico lineal anisótropo, desarrollada en este trabajo.

### 4.2 Presa La Angostura

La Angostura es una presa de tierra y enrocamiento que se construyó en los años de 1970 como parte del proyecto hidroeléctrico, localizado sobre el río Grijalva en el estado de Chiapas. La altura máxima de la cortina es de 145 m; está constituida por un núcleo central de arcilla, respaldos de enrocamiento, arena y grava (Figura 4.1a). De acuerdo con un estudio con elemento finito (Covarrubias, 1970), se observó que la geometría original (Figura 4.1b, (1)) del cañón provocaba zonas de tensión potencial adyacentes a las márgenes, para removerlas se realizó una modificación de la sección, que implicó una excavación (Figura 4.1b, (3)) y rellenos de concreto en la parte inferior de la ladera cercana al fondo del valle (Figura 4.1b, (2)).



(a) Sección transversal de la cortina



(b) Sección longitudinal de la cortina

Figura 4.1 Presa La Angostura (Marsal *et al.*, 1976)

### 4.3 Hipótesis

Para el análisis de la presa La Angostura con el MEFEE se consideró lo siguiente:

- Se analizó la sección modificada longitudinal de la cortina (sección transversal al eje del río) que se consideró homogénea, constituida por un sólo material. Con un módulo de deformación  $E=50$  MPa, una relación de Poisson  $\nu=0.3$  y un peso volumétrico  $\gamma=20$  kN/m<sup>3</sup>.
- Se consideraron únicamente las fuerzas producidas por peso propio.
- Se tomó en cuenta la no linealidad geométrica, derivada de la construcción por 17 capas.
- Se analizó la sección máxima de la presa.
- Se utilizó una malla de elementos finitos con una altura máxima de 150 m, como la que se muestra en la Figura 4.2. El movimiento en los puntos de contacto entre la cortina y la ladera se consideró nulo.
- Los análisis se realizaron para estados planos de esfuerzo y deformación, con la finalidad de comparar los resultados.
- Se aceptó que la función de autocovarianza normalizada para representar la variabilidad del los parámetros es de tipo exponencial.

$$\rho_v(X_1, X_2) = e^{-\frac{2|X_1 - X_2|}{L}} \quad (4.1)$$

- h) La distancia de correlación  $L$ , que es la distancia a partir de la cual la correlación se considera despreciable, se tomó como un parámetro de análisis.

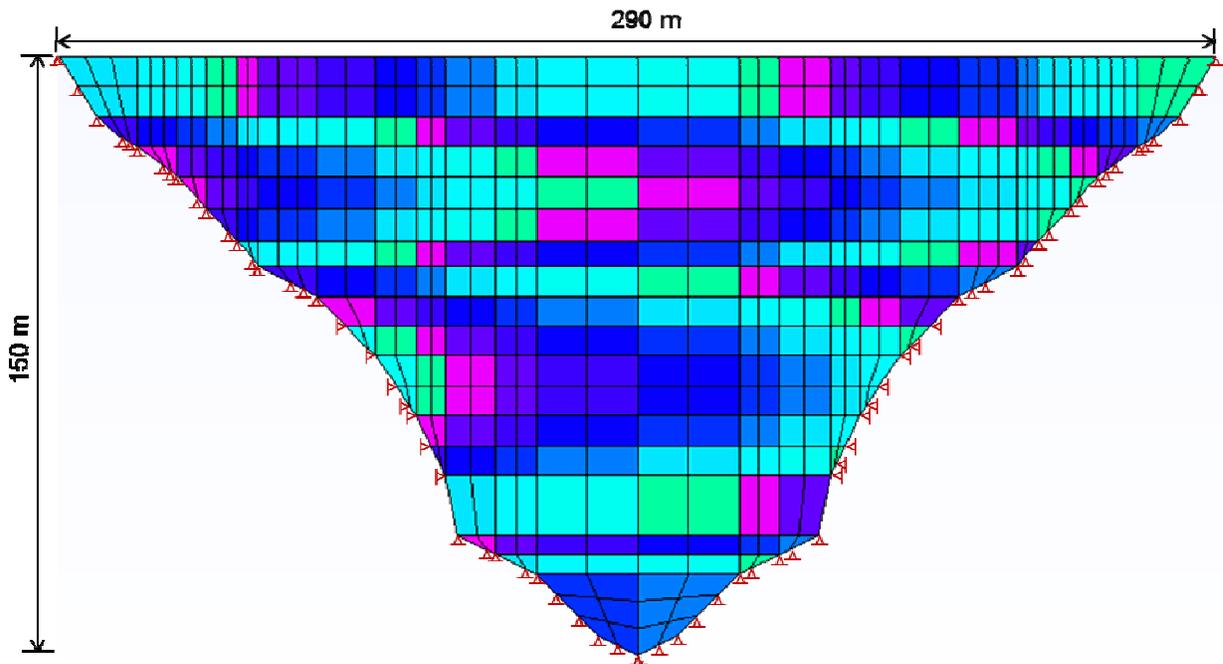


Figura 4.2 Malla de elementos finitos para la sección longitudinal de la presa La Angostura

#### 4.4 Comparación del comportamiento entre estados planos de esfuerzo y deformación

Para observar la diferencia del comportamiento de la presa entre los estados planos de esfuerzo y deformación, se analizaron los desplazamientos verticales para un análisis elástico lineal isótropo. En las gráficas de las Figura 4.3 se observan las curvas de igual desplazamiento vertical. Para el estado plano de esfuerzo, el desplazamiento vertical máximo es de 1.5 m mientras que para el estado plano de deformación es de 1.3 m, menor. Sin embargo, la diferencia entre los dos resultados se puede considerar pequeña comparada con la magnitud de los desplazamientos. Teniendo así, la posibilidad de un análisis de variación espacial en dos dimensiones. Para ambos análisis, el desplazamiento vertical máximo obtenido resulta ser mayor que el valor máximo medido (Figura 4.5), esto se debe a que en el análisis solamente se consideró un solo material, mientras que el corazón de la presa está constituido por dos materiales. Para un módulo de elasticidad de 80 MPa, los desplazamientos disminuyen como se observa en las gráficas de la Figura 4.4.

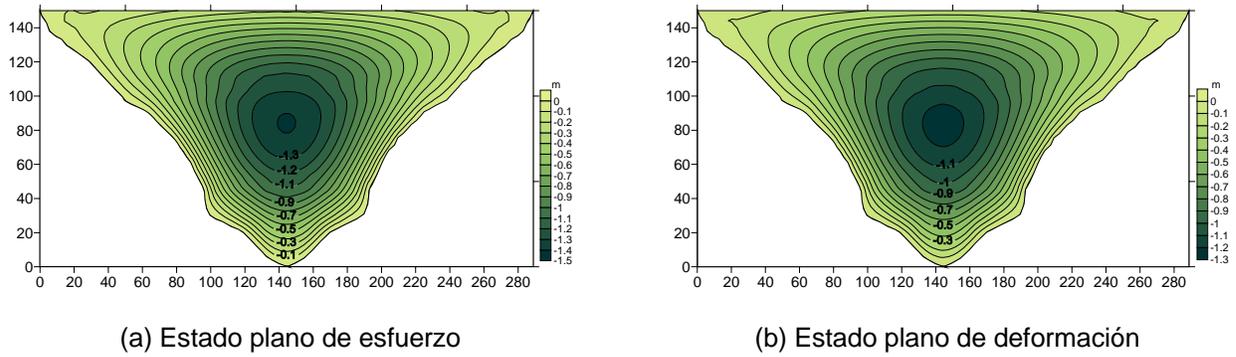


Figura 4.3 Desplazamientos verticales para  $E=50$  MPa y  $\nu=0.3$

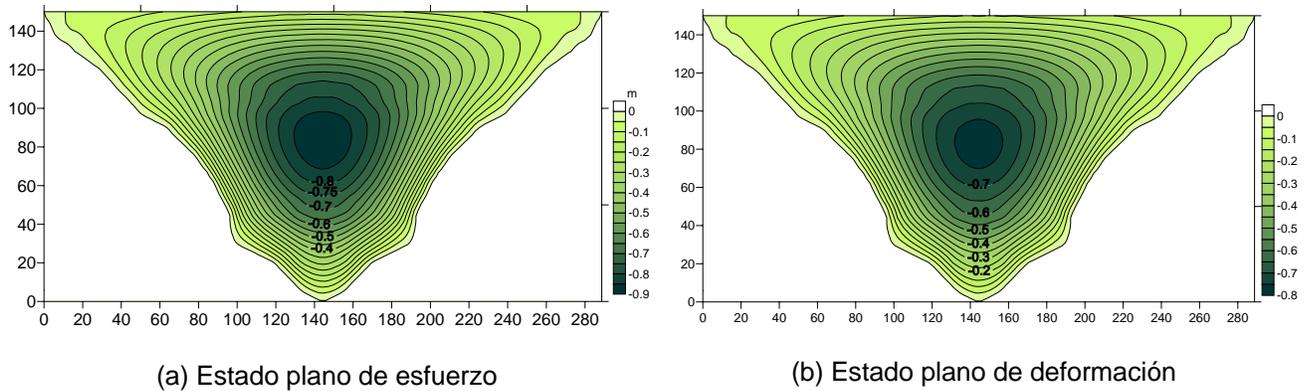


Figura 4.4 Desplazamientos verticales para  $E=80$  MPa y  $\nu=0.3$

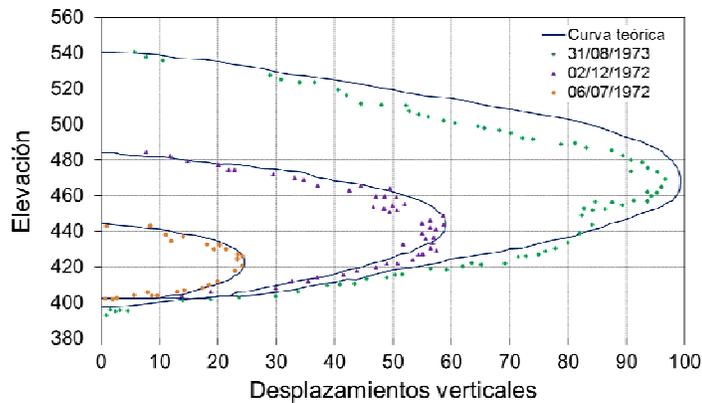


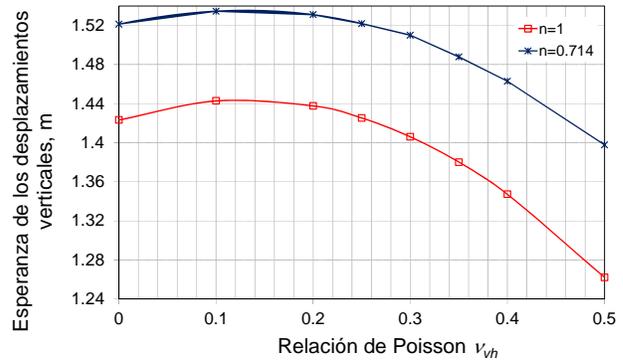
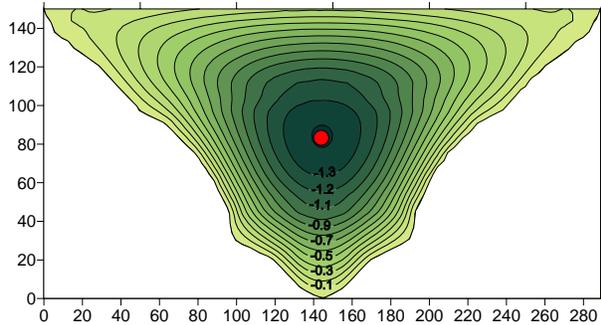
Figura 4.5 Asentamientos medidos por el inclinómetro I-A6 durante el período de construcción. (CFE, 1976)

#### 4.5 Análisis de sensibilidad

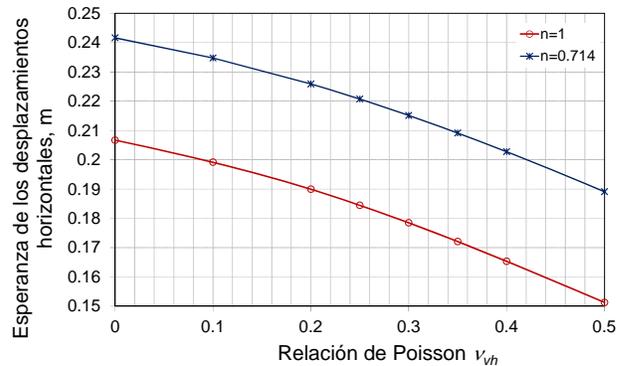
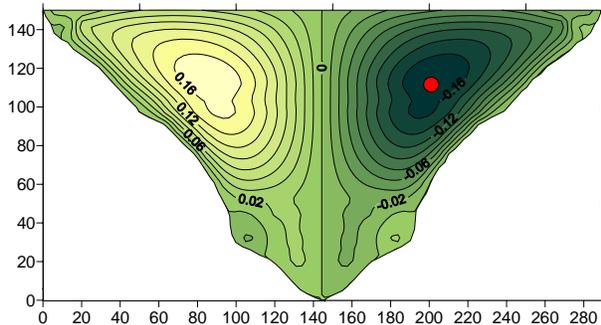
Sin considerar incertidumbre en los parámetros, se realizó un análisis de sensibilidad para estudiar la importancia de los parámetros sobre los desplazamientos y en el desarrollo de las zonas de tensión para una ley constitutiva elástica lineal anisótropa. El análisis se realizó en los puntos de mayor desplazamiento para un estado plano de esfuerzo.

### 4.5.1 Desplazamientos

En las gráficas de la Figura 4.6, se muestran los desplazamientos en función de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$ , para grados de anisotropía ( $n=E_h/E_v$ )  $n=1$  y  $n=0.714$  (suelos compactados; Zamhari, 1999). Como se observa en estas gráficas, si la relación de Poisson aumenta, los desplazamientos son menores. Cuando  $n < 1$ , es decir cuando  $E_h$  disminuye, los desplazamientos aumentan, y decrecen si la magnitud de  $\nu_{vh}$  incrementa.



(a) Verticales



(b) Horizontales

Figura 4.6 Variación de los desplazamientos máximos en función de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$ .  
(Estado plano de esfuerzo)

### 4.5.2 Esfuerzos (zonas de tensión)

Las curvas de igual esfuerzo principal menor de las Figuras 4.7 y 4.8 ilustran las zonas de tensión (zona achurada) generadas por diferentes valores de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  como: 0.0, 0.3 y 0.5. Efectivamente,  $\nu_{vh}$  influye de forma determinante en la localización y extensión de zonas de tensión. Los resultados son más evidentes para el estado plano de esfuerzo, Figura 4.7, que para el estado plano de deformación, Figura 4.8.

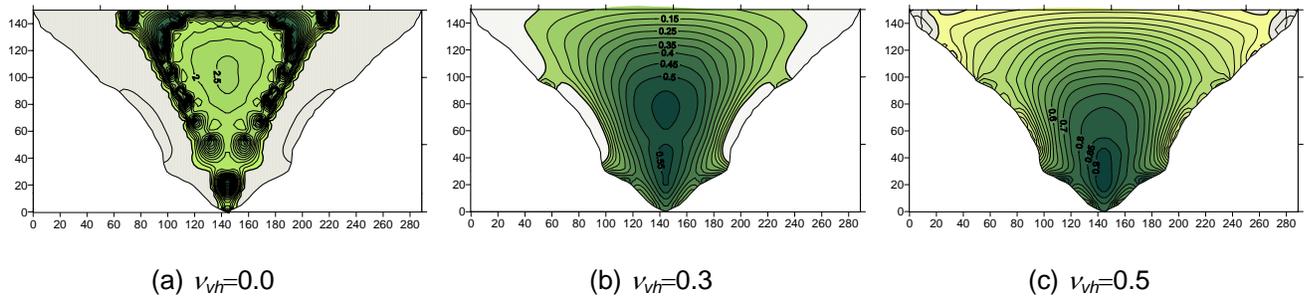


Figura 4.7 Variación de las zonas de tensión para diferentes valores de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  (Estado plano de esfuerzo)

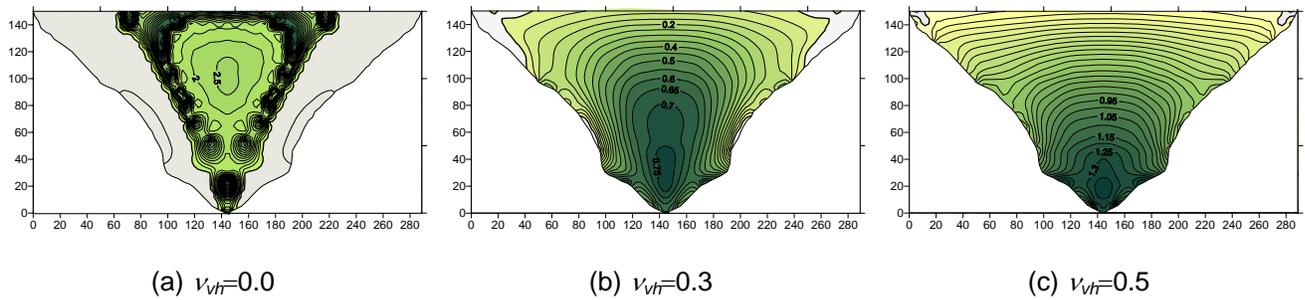


Figura 4.8 Variación de las zonas de tensión para diferentes relaciones valores de la Poisson  $\nu_{vh}$ . (Estado plano de deformación)

Las variaciones de las zonas de tensión son independientes de la magnitud del módulo de deformación, como se presenta en la Figura 4.9.

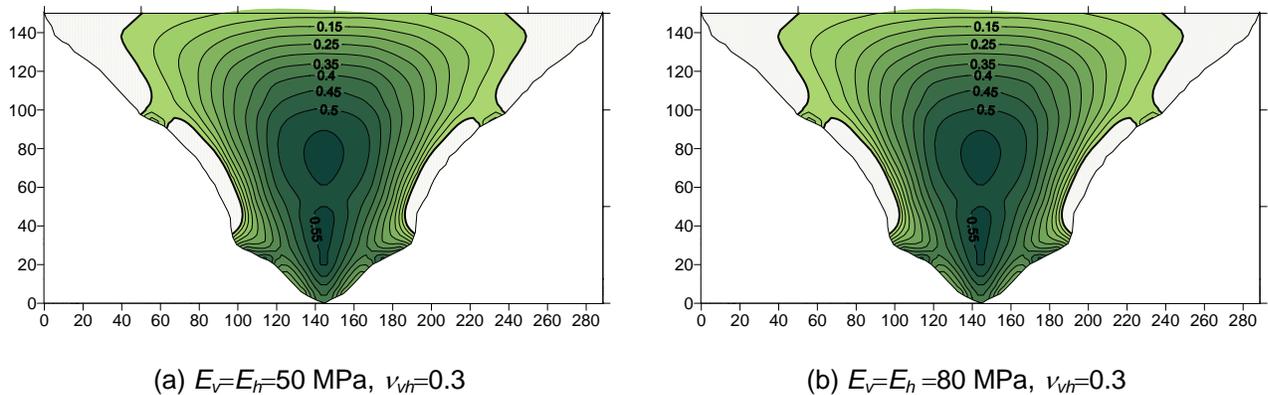


Figura 4.9 Variación de las zonas de tensión para diferentes valores de  $E$ . (Estado plano de esfuerzo)

El grado de anisotropía ( $n=E_h/E_v$ ) influye también de forma importante en las variaciones de las zonas de tensión. Si el valor del módulo de deformación horizontal  $E_h$  disminuye, dichas zonas aumentan, Figura 4.10. Para suelos compactados,  $n=0.714$ , la respectiva zona de tensión que se pueden generar para un estado plano de esfuerzo es como la que se presentan en la gráfica de la Figura 4.10b.

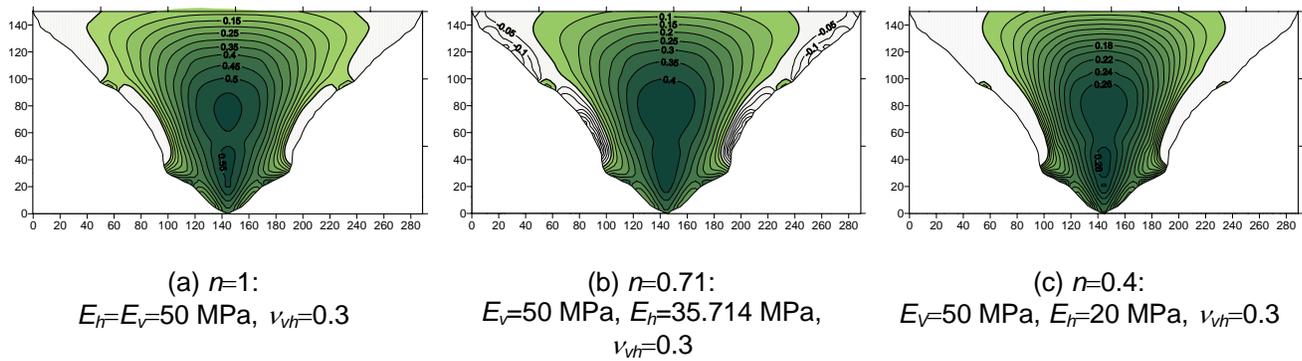


Figura 4.10 Variación de las zonas de tensión para diferentes grados de anisotropía. (Estado plano de esfuerzo)

Como se observa de estas gráficas, las variaciones en la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  y el grado de anisotropía  $n$  repercuten de forma evidente en la localización y extensión de las zonas de tensión; se confirma lo estudiado por Covarrubias (1970), Louault (1997). El módulo de deformación  $E$  no tiene efecto sobre estas zonas.

#### 4.6 Selección de las propiedades de los materiales en los análisis con el MEF

De acuerdo con lo presentado en el inciso anterior, las variaciones de las propiedades de los suelos sí tienen un efecto importante sobre los resultados de la modelación numérica de estructuras térreas con el MEF. En la práctica estas variaciones ocurren porque la selección de las propiedades de los materiales en ocasiones se basa en criterios empíricos que toman en cuenta mediciones de campo, otras veces se consideran resultados de laboratorio. Por ejemplo, se tienen referencias en la práctica, que la magnitud de  $\nu$  puede variar entre 0.22 (valor determinado para la presa El caracol; Alberro, 1986) y 0.45 (valor supuesto para El Infiernillo; Alberro, 1975). Esta situación muestra la importancia de establecer un criterio para la selección, que es tan delicada, de las propiedades del suelo, cuando se trata de análisis con el MEF. Un análisis estocástico de este tipo de estructuras, puede ayudar a visualizar la importancia de cada parámetro sobre el estado de desplazamientos y esfuerzos; útil para refinar los valores estimados o empíricos de las propiedades de los materiales.

A continuación, se presentan los resultados del análisis estocástico de la sección longitudinal de la presa La Angostura, el cual se realizó con la extensión del MEFEE, desarrollada en este trabajo, a una ley constitutiva elástico lineal anisótropa.

#### 4.7 Análisis estocástico

Se analizó el efecto de la incertidumbre de cada parámetro sobre el campo de desplazamientos y esfuerzos, para estados planos de esfuerzo y deformación. Asimismo, se estudió la influencia del grado de anisotropía sobre dichos resultados, se consideró  $n=1$  y  $n=0.714$ . La metodología de análisis consistió en asignarle incertidumbre a un parámetro y los demás se consideraron deterministas, en el caso que se evalué el efecto de una sola propiedad.

El parámetro  $G_{vh}$  que se puede expresar como (Barden, 1963):

$$G_{vh} = \frac{E_h}{(1 + n + 2n\nu_{vh})} \quad (4.2)$$

es función de la incertidumbre de  $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$ , por lo que la esperanza y la desviación estándar de  $G_{vh}$  se evaluaron con series de Taylor (Auvinet, 2000). Los casos analizados se resumen en la Tabla 4.1 y 4.2.

Tabla 4.1 Casos analizados con la extensión del MEFEE a una ley constitutiva elástica lineal anisótropa.  $n=1$

Parámetro aleatorio	$E\{E_v\}$ MPa	$CV(E_v)$ %	$E\{E_h\}$ MPa	$CV(E_h)$ %	$E\{\nu_{vh}\}$ MPa	$CV(\nu_{vh})$ %	$E\{\nu_{hh}\}$ MPa	$CV(\nu_{hh})$ %	$E\{G_{vh}\}$ MPa	$CV(G_{vh})$ %
$E_v$	50	10	50	0	0.30	0	0.30	0	19.1852	6.1
$E_h$	50	0	50	10	0.30	0	0.30	0	19.1852	3.8
$E_v$ y $E_h$	50	10	50	10	0.30	0	0.30	0	19.0536	7.3
$\nu_{vh}$	50	0	50	0	0.30	10	0.30	0	19.2305	2.3
$\nu_{hh}$	50	0	50	0	0.30	0	0.30	10	--	0.0
$E_v, E_h, \nu_{vh}$	50	10	50	10	0.30	10	0.30	10	19.0531	7.6

Tabla 4.2 Casos analizados con la extensión del MEFEE a una ley constitutiva elástica lineal anisótropa.  $n=0.714$

Parámetro aleatorio	$E\{E_v\}$ MPa	$CV(E_v)$ %	$E\{E_h\}$ MPa	$CV(E_h)$ %	$E\{\nu_{vh}\}$ MPa	$CV(\nu_{vh})$ %	$E\{\nu_{hh}\}$ MPa	$CV(\nu_{hh})$ %	$E\{G_{vh}\}$ MPa	$CV(G_{vh})$ %
$E_v$	50	10	35.71	0	0.30	0	0.30	0	16.622	5.3
$E_h$	50	0	35.71	10	0.30	0	0.30	0	16.625	4.6
$E_v$ y $E_h$	50	10	35.71	10	0.30	0	0.30	0	16.496	7.1
$\nu_{vh}$	50	0	35.71	0	0.30	10	0.30	0	16.666	2.0
$\nu_{hh}$	50	0	35.71	0	0.30	0	0.30	10	---	---
$E_v, E_h, \nu_{vh}$	50	10	35.71	10	0.30	10	0.30	10	16.483	7.4

En la teoría de probabilidad, la desviación estándar se representa con la letra griega  $\sigma$ , para evitar confusiones con el esfuerzo principal menor  $\sigma_3$ , de aquí en adelante este parámetro estadístico se denota como  $DE$ .

#### 4.7.1 Estado plano de esfuerzo

##### 4.7.1.1 Desplazamientos

En las gráficas de la Figura 4.11 y 4.12, se ilustra la configuración en todo el cuerpo de la presa de la esperanza de los desplazamientos verticales y horizontales para una distancia de correlación muy grande,  $L=\infty$ . Para  $n=1$ , Figura 4.11, se observa que la esperanza del máximo desplazamiento vertical corresponde al punto A (144.36m, 82.5m) con un valor de 1.5 m, el máximo horizontal se localiza en el punto B (89.06m, 111.9m) con una magnitud de 0.18 m. Cuando  $n=0.714$ , Figura 4.12, el máximo vertical es de 1.60 m y el máximo horizontal es de 0.22 m

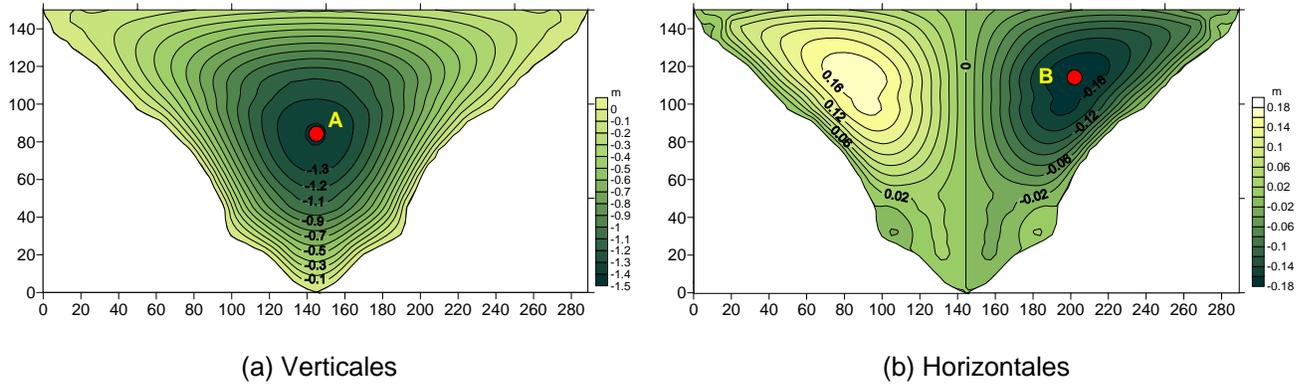


Figura 4.11 Curvas de igual valor esperado de los desplazamientos para  $n=1$  (Estado plano de esfuerzo)

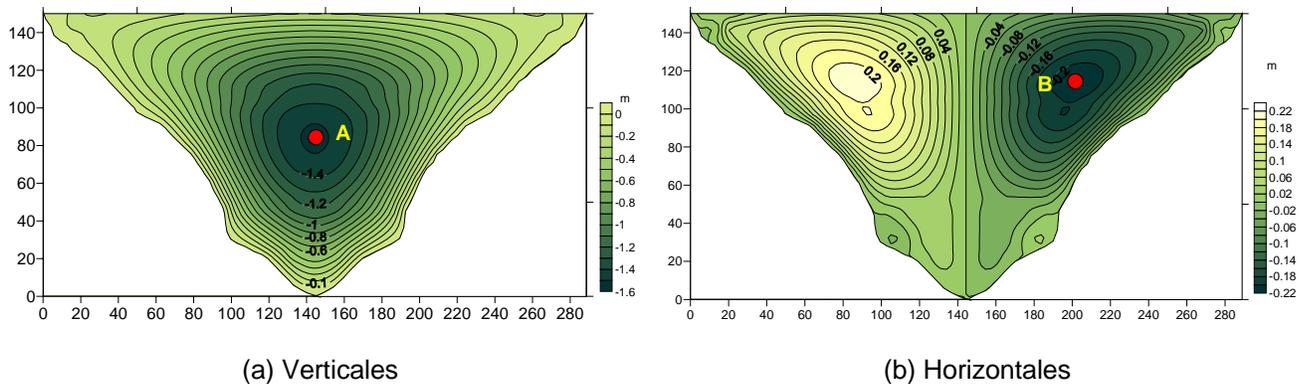


Figura 4.12 Curvas de igual valor esperado de los desplazamientos para  $n=0.714$  (Estado plano de esfuerzo)

El análisis de incertidumbre de los desplazamientos en todo el cuerpo de presa, debida a la incertidumbre de cada uno de los parámetros elásticos lineales anisótropos, se presenta mediante las curvas de igual desviación estándar ( $DE$ ) e igual coeficiente de variación ( $CV$ ), para distancias de correlación intermedia ( $L=90m$ ) y muy grande ( $L=\infty$ ). Asimismo, se analiza la influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos; para comparar, el análisis se realizó para  $n=1$  y  $n=0.714$ . A continuación se estudia la influencia de cada parámetro sobre los desplazamientos.

(a)  $E_v$  aleatorio

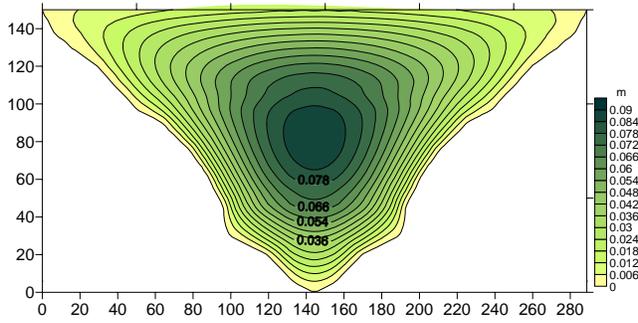
La configuración de la incertidumbre en el cuerpo de la presa se presenta en las gráficas de las Figuras 4.13 y 4.14, las cuales corresponden a un grado de anisotropía  $n=0.714$ , se observa lo siguiente:

–Distancia de correlación intermedia ( $L=90$  m): la  $DE$  máxima alcanzada (0.089 m) de los desplazamientos verticales se localiza en el punto A, en donde se presentan los máximos (Figura 4.13a); el mayor  $CV$  se concentra en las partes laterales superiores de la presa con un valor máximo alcanzado de 10% (Figura 4.13b). Para los desplazamientos horizontales la  $DE$  máxima se localiza en el punto de mayor desplazamiento (punto B), sin embargo en el eje de simetría la heterogeneidad del material ocasiona variaciones ( $DE_{m\acute{a}x.}=0.011$  m) alrededor de su valor esperado que es nulo (Figura 4.13c), lo que conduce a que el  $CV$  tienda a infinito (Figura 4.13d).

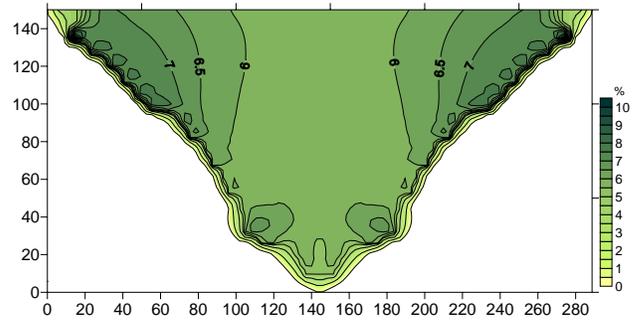
–Distancia de correlación muy grande  $L=\infty$ : la  $DE$  máxima alcanzada (Figura 4.14a) en los desplazamientos verticales se localiza en el punto A y el CV máximo (14 %) alcanzado se sigue presentado en las zonas altas de la ladera (Figura 4.14b). En los desplazamientos horizontales, la  $DE$  máxima alcanzada se localiza en el punto donde se presentan los desplazamientos máximos (punto B), Figura 4.14c; el CV, como se observa en la gráfica de la Figura 4.14d, es nulo en el eje de simetría y tiende a infinito entre la altura 20m y 40m debido a un cambio brusco de pendiente que ocasiona desplazamientos de signo contrario, por consecuencia el CV tiende a infinito en la región donde los desplazamientos son cero.

La influencia de la variabilidad de este parámetro en función de la distancia de correlación sobre los desplazamientos máximos, se presenta en las gráficas de la Figura 4.15, que corresponden a grados de anisotropía  $n=1$  y  $n=0.714$ . Se tiene, que para distancias de correlación pequeñas el CV es nulo debido a un efecto de *compensación estadística* que anula la desviación estándar; el material es muy heterogéneo pero se comporta como un material homogéneo no aleatorio. Conforme la distancia de correlación aumenta, la incertidumbre sobre los desplazamientos crece, hasta alcanzar su máximo valor para una distancia de correlación de aproximadamente 1000 m, en donde el material es homogéneo pero aleatorio. Para el punto A, que es el punto con mayor desplazamiento vertical, el CV máximo es aproximadamente de 8.1% ( $n=0.714$ , 8.2%), mientras que para el punto B (desplazamiento horizontal máximo) el CV máximo es aproximadamente 4.2% (para  $n=0.714$ , 4.95%). Por tanto,  $E_v$  influye más sobre los desplazamientos verticales que sobre los horizontales.

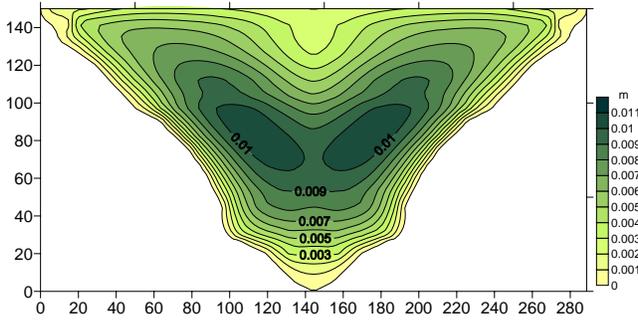
En la gráfica de la Figura 4.16 se observa la comparación de la influencia de la distancia de correlación sobre la desviación estándar del desplazamiento horizontal, entre un punto localizado en el eje de simetría (punto A) y el punto B (desplazamientos máximos) para ambos grados de anisotropía. Para distancias de correlación pequeñas, la desviación estándar es nula (efecto de compensación estadística), el material tiene un comportamiento homogéneo determinista; para una distancia de correlación intermedia (90 m), la incertidumbre alcanzada en el desplazamiento del punto A es máxima, mientras que la del punto B sigue aumentado (para  $n=0.714$ ), el material es fuertemente heterogéneo; posteriormente para distancias de correlación grandes el material se estabiliza estadísticamente y la incertidumbre es nuevamente nula en el punto A y en el B es máxima, su comportamiento es homogéneo pero aleatorio. Se observa una simetría axial de la incertidumbre de los desplazamientos horizontales del punto A. El valor de incertidumbre ( $DE$ ) máxima en el eje de simetría (punto A) es similar para ambos grados de anisotropía.



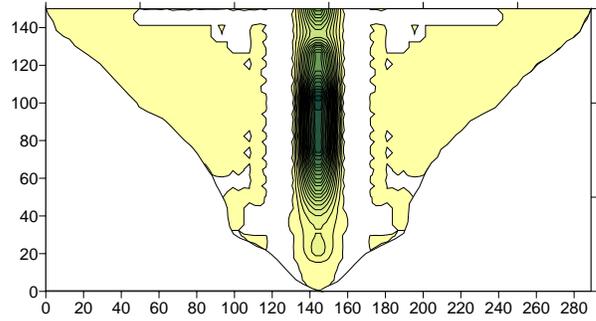
(a) DE de los desplazamientos verticales



(d) CV de los desplazamientos verticales

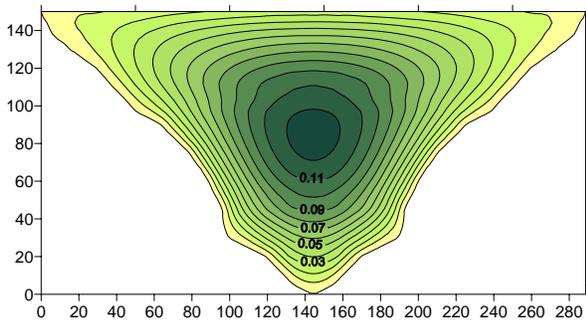


(c) DE de los desplazamientos horizontales

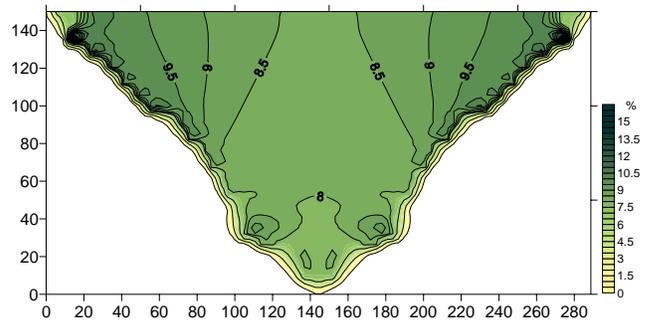


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.13 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de esfuerzo)

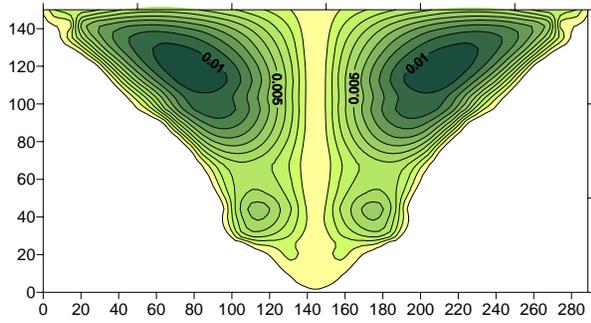


(a) DE de los desplazamientos verticales

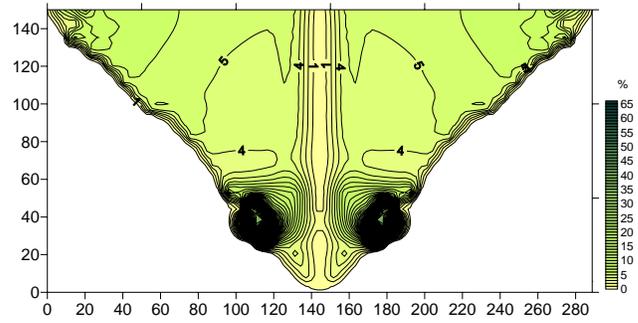


(b) CV de los desplazamientos verticales

Figura 4.14 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  aleatorio,  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

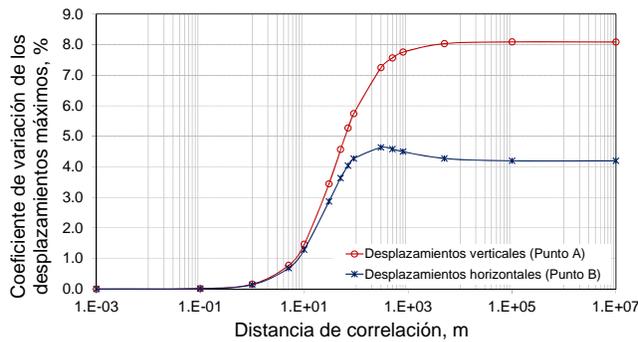


(c) DE de los desplazamientos horizontales

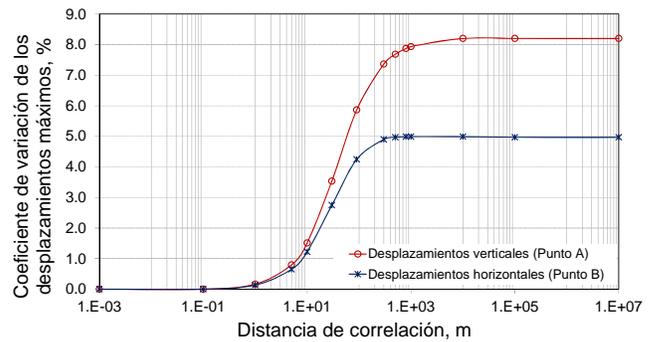


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.14 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  aleatorio,  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo) (continuación)

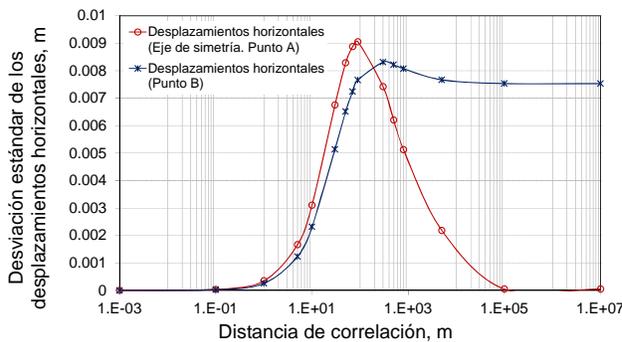


(a)  $n=1$

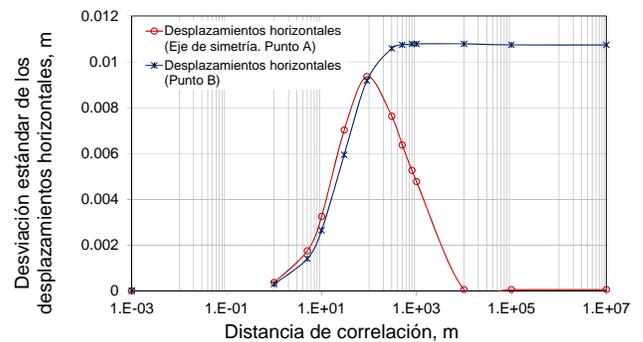


(b)  $n=0.714$

Figura 4.15 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $E_v$  aleatorio (Estado plano de esfuerzo)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.16 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $E_v$  aleatorio (Estado plano de esfuerzo)

(b)  $E_h$  aleatorio

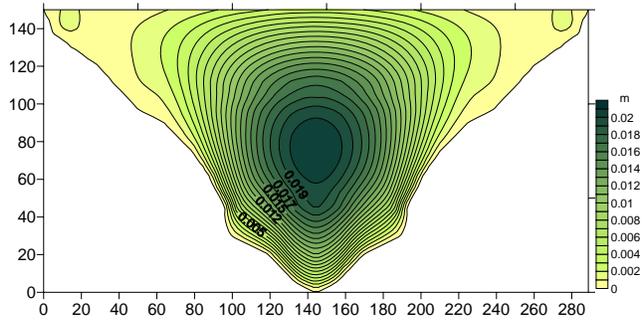
La distribución de la  $DE$  y del  $CV$  en el cuerpo de la presa se muestra en las gráficas de las Figuras 4.17 y 4.18 para  $n=0.714$ , de ellas se tiene lo siguiente:

– Distancia de correlación intermedia ( $L=90$  m): en los desplazamientos verticales la mayor  $DE$  (0.013 m) se localiza en el punto de mayor desplazamiento (punto A), Figura 4.17a, con un correspondiente  $CV$  de 1.38 %; el  $CV$  máximo (2 %) se localiza en el fondo de la presa, Figura 4.17b. En los desplazamientos horizontales la mayor  $DE$  (0.013m) se presenta en el eje de simetría (punto A), Figura 4.17c, con un  $CV$  que tiende a infinito debido a que la esperanza en el eje es nula, como se observa en la Figura 4.17d.

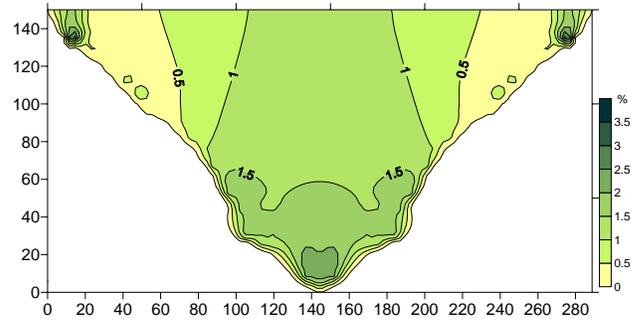
– Distancia de correlación muy grande ( $L=\infty$ ): la máxima  $DE$  de los desplazamientos verticales se presenta en el punto A (0.03m), Figura 4.18a, y el  $CV$  máximo se sigue presentado en la parte inferior de la presa, Figura 4.18b. En los desplazamientos horizontales (Figura 4.18c), la máxima  $DE$  (0.012m) se localiza en el punto B (mayor desplazamiento) y en el eje de simetría es nula, el  $CV$  tiende a infinito entre la altura 20 m y 40 m, como se observa en la Figura 4.18d, debido a un cambio de pendiente que genera desplazamientos de signo contrario y por tanto un valor nulo en la esperanza.

La influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos se presenta en las gráficas de la Figura 4.19, para grados de anisotropía  $n=1$  y  $n=0.714$ . Se observa, nuevamente que cuando la distancia de correlación es pequeña el  $CV$  de los desplazamientos es nulo, la máxima incertidumbre se alcanza para distancias de correlación de aproximadamente 1000 m. Para los desplazamientos verticales (punto A) el  $CV$  es aproximadamente 2% (para  $n=0.714$ , 1.97%), para los horizontales (punto B), el  $CV$  máximo es del orden de 5.95% (para  $n=0.714$ , 5.2%). Este parámetro influye más sobre los desplazamientos horizontales que sobre los verticales, además su efecto es menos marcado sobre los desplazamientos verticales que el que  $E_v$  tiene sobre los desplazamientos horizontales.

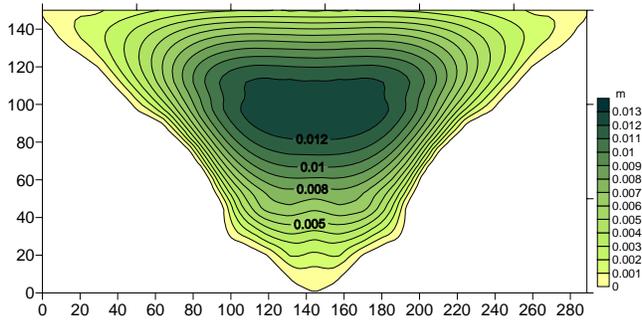
Con respecto a la influencia de la distancia de correlación sobre los desplazamientos horizontales en el eje de simetría (punto A), Figura 4.20, se observa una simetría axial de la desviación estándar de los desplazamientos horizontales, con un valor máximo de 0.012 m, para ambos grados de anisotropía, que se alcanza cuando  $L=90$  m y que es ligeramente mayor a la máxima alcanzada en los desplazamientos máximos (punto B). Nuevamente se observa que para distancias de correlación intermedias el material tiene un comportamiento estadísticamente muy heterogéneo. El efecto de este parámetro sobre estos desplazamientos es muy significativo.



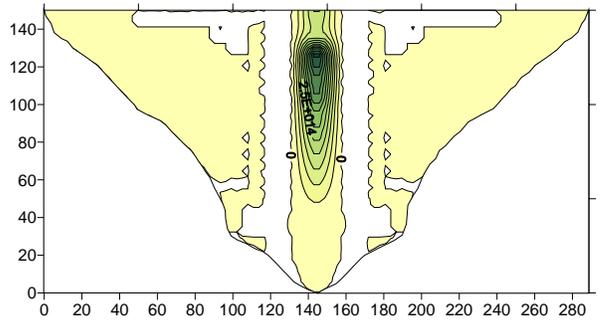
(a) *DE* de los desplazamientos verticales



(b) *CV* de los desplazamientos verticales

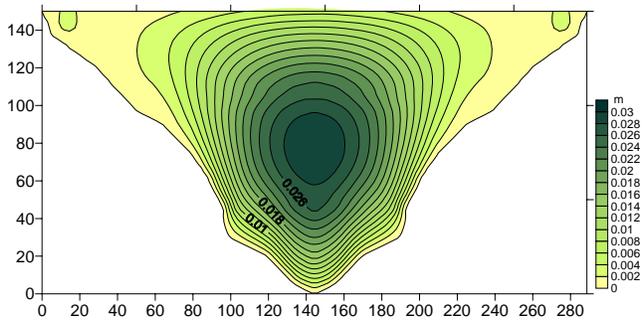


(c) *DE* de los desplazamientos horizontales

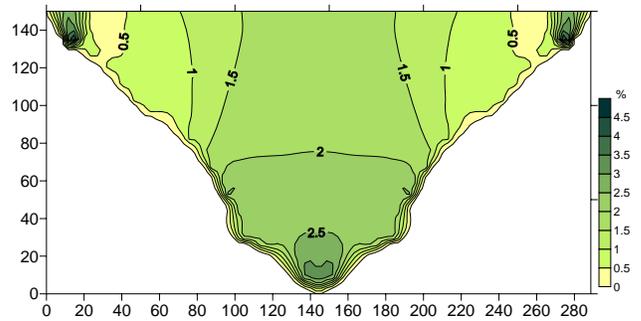


(d) *CV* de los desplazamientos horizontales

Figura 4.17 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_n$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de esfuerzo)

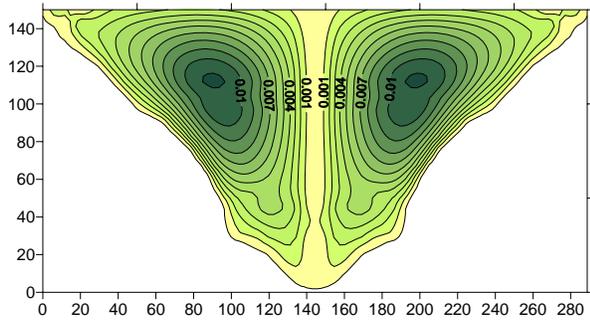


(a) *DE* de los desplazamientos verticales

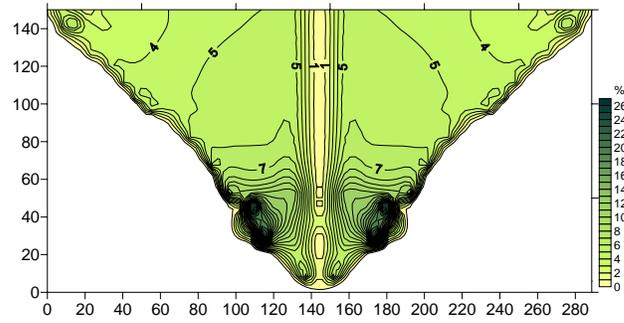


(b) *CV* de los desplazamientos verticales

Figura 4.18 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_n$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

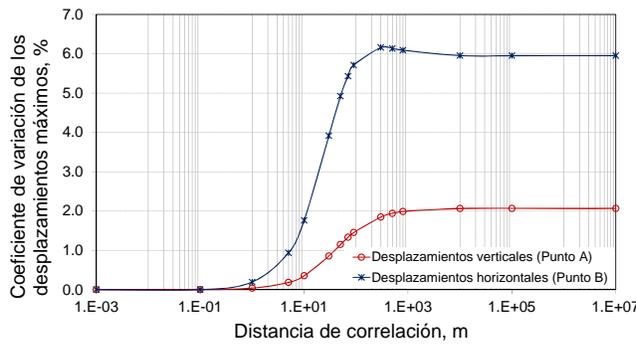


(c) DE de los desplazamientos horizontales

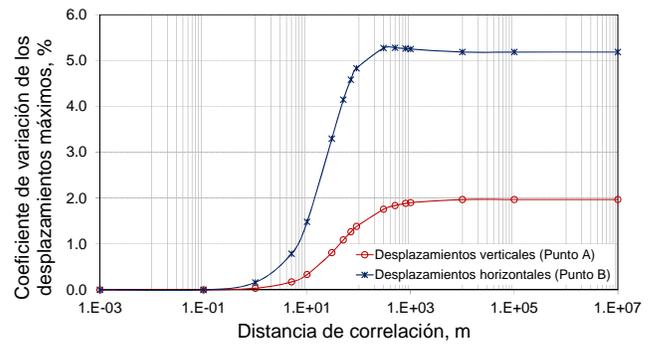


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.18 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_h$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo) (Continuación)

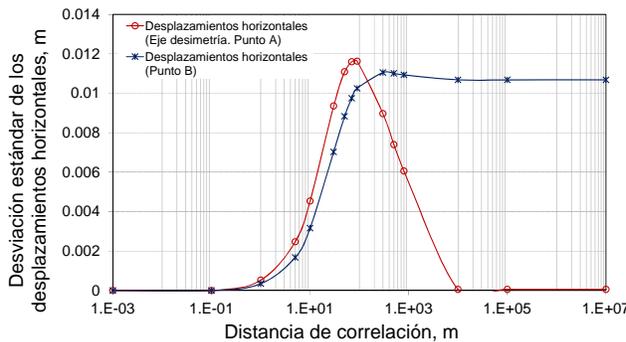


(a)  $n=1$

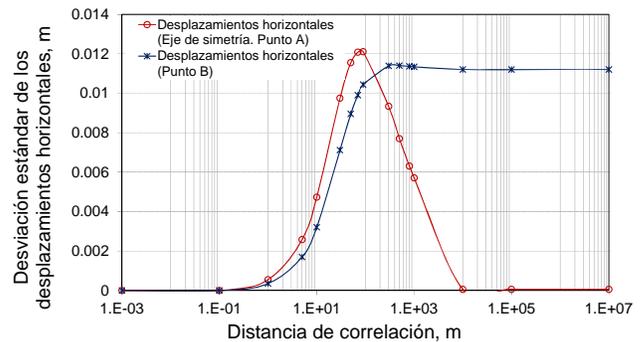


(b)  $n=0.714$

Figura 4.19 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $E_h$  aleatorio (Estado plano de esfuerzo)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.20 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $E_h$  aleatorio (Estado plano de esfuerzo)

(c)  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios

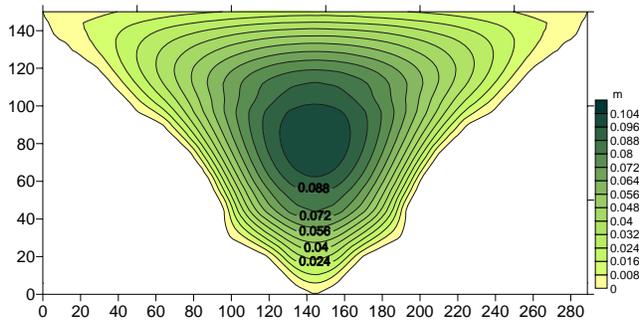
Las gráficas de la Figuras 4.21 y 4.22 muestran la configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en toda la presa para  $n=0.714$ , de las cuales se explica lo siguiente:

– Distancia de correlación intermedia ( $L=90$  m): la  $DE$  máxima (0.104m) de los desplazamientos verticales se presenta en el punto A (mayor desplazamiento), Figura 4.21a; el  $CV$  en este punto es de 6.7 %, y el máximo de 9 % se presenta en la ladera y en la parte inferior de la presa (Figura 4.21b). Se observa un efecto combinado de ambos parámetros,  $E_v$  contribuye mayormente en los costados superiores de la presa y  $E_h$  en la parte inferior. En los desplazamientos horizontales, la máxima  $DE$  (0.016 m) se presenta en el punto B de mayor desplazamiento (Figura 4.21c); en el eje de simetría también existen variaciones pero menores en comparación con las que se tienen cuando se modelan los módulos por separado, esta situación indica un efecto de compensación entre dichos módulos, el  $CV$  tiende a infinito porque la esperanza de los desplazamientos es nula en el eje, Figura 4.21d.

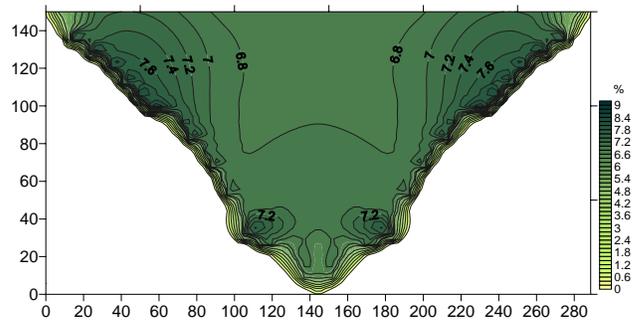
– Distancia de correlación grande ( $L=\infty$ ): el comportamiento de la incertidumbre de los desplazamientos verticales es la misma que para distancias intermedias, la diferencia es la magnitud; la máxima  $DE$  (0.104) se localiza en el punto A (Figura 4.22a) y el  $CV$  en este punto es de 9.6%, Figura 4.22b. En los desplazamientos horizontales, la máxima  $DE$  (0.026m) se encuentra en el punto B (Figura 4.22c) con un  $CV$  máximo de 11.15% (Figura 4.22d); en el eje de simetría la incertidumbre es nula, y nuevamente en el cambio de pendiente (altura 20 m y 40 m) el  $CV$  tiende a infinito.

La influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos se ilustra en las gráficas de la Figura 4.23, las cuales corresponden a grados de anisotropía  $n=1$  y  $n=0.714$ . Se observa que la influencia combinada de estos dos parámetros es mayor sobre las incertidumbres de los desplazamientos verticales y horizontales que el efecto que tiene cada uno por separado. Para distancias de correlación menor de 90m el efecto de ambos parámetros sobre los desplazamientos es el mismo; a partir de esta distancia el  $CV$  de los desplazamientos horizontales (punto B) es mayor que el de los verticales (punto A). Para distancias de correlación muy grandes, el máximo  $CV$  de los desplazamientos verticales que se alcanza es de 9.6% (para  $n=0.714$ , 9.6%), mientras que para los horizontales el  $CV$  es de 11.15% (para  $n=0.714$ , 11.32%). La magnitud del coeficiente de variación refleja que la contribución de  $E_v$  sobre los desplazamientos horizontales es importante, se confirma para el caso  $n=0.714$  (Figura 4.23b).

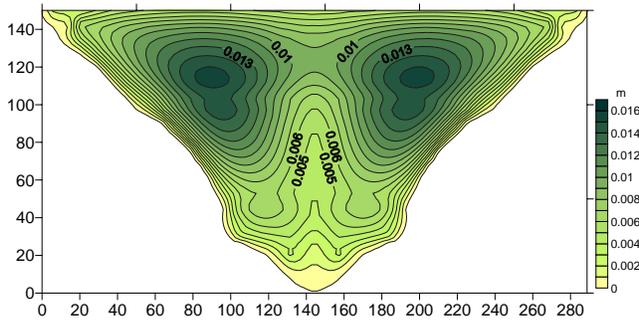
La comparación de la influencia de la distancia de correlación sobre la desviación estándar de los desplazamientos horizontales entre el eje de simetría (punto A) y el punto B (máximo desplazamiento) se presenta en las gráficas de la Figura 4.24. Se observa que dicha influencia es menos significativa en el eje de simetría que la del punto B, debido a que existe un efecto de compensación estadística entre los módulos de deformación. El grado de anisotropía  $n$  no influye sobre la incertidumbre de los desplazamientos del punto A.



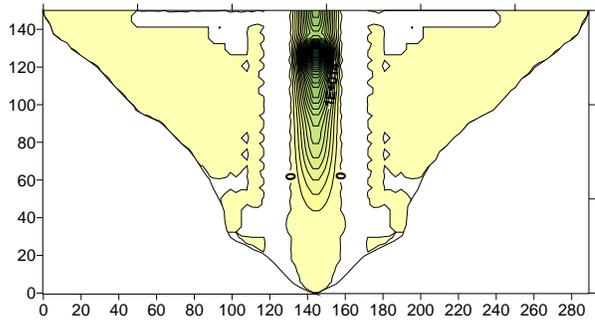
(a) *DE* de los desplazamientos verticales



(b) *CV* de los desplazamientos verticales

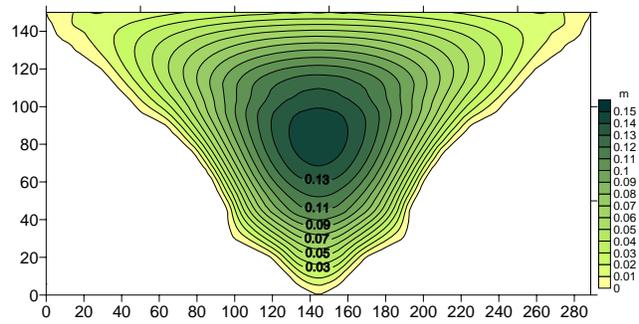


(c) *DE* de los desplazamientos horizontales

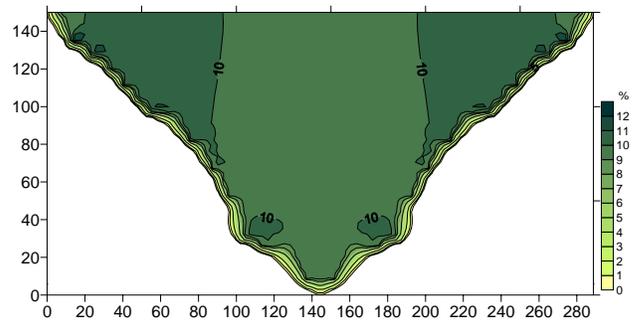


(d) *CV* de los desplazamientos horizontales

Figura 4.21 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de esfuerzo)

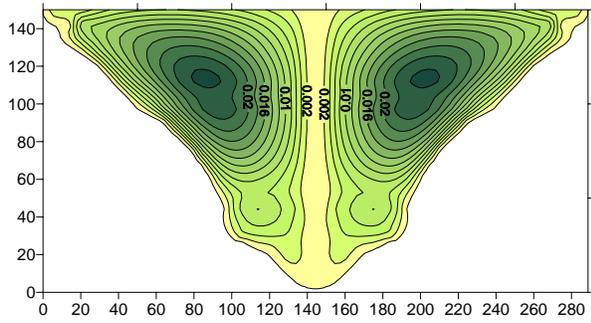


(a) *DE* de los desplazamientos verticales

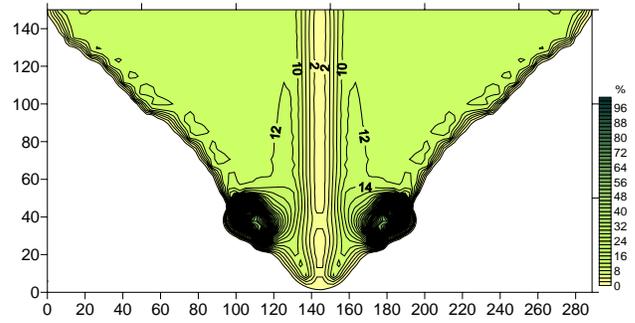


(b) *CV* de los desplazamientos verticales

Figura 4.22 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

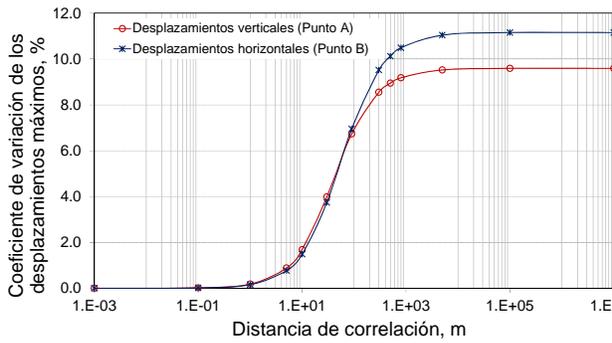


(c) DE de los desplazamientos horizontales

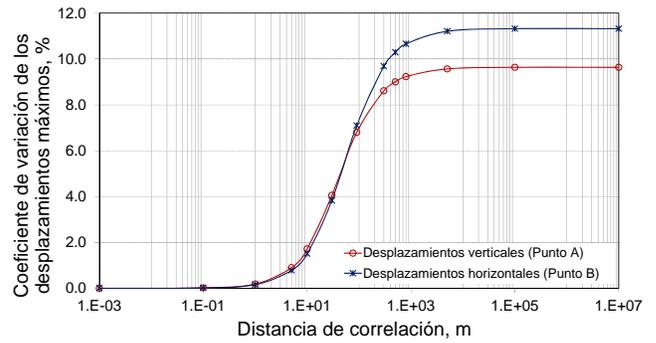


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.22 Configuración de la incertumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo) (Continuación)

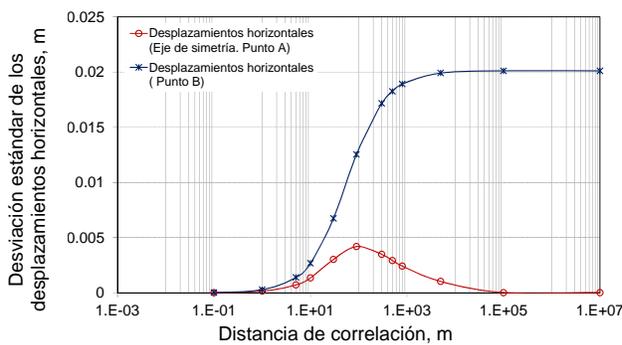


(a)  $n=1$

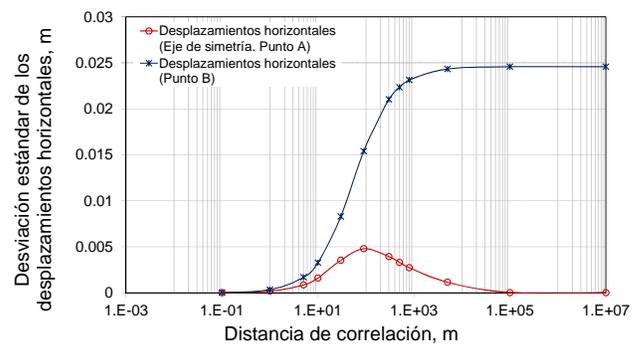


(b)  $n=0.714$

Figura 4.23 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertumbre de los desplazamientos máximos.  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (Estado plano de esfuerzo)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.24 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (Estado plano de esfuerzo)

(d)  $v_{vh}$  aleatoria

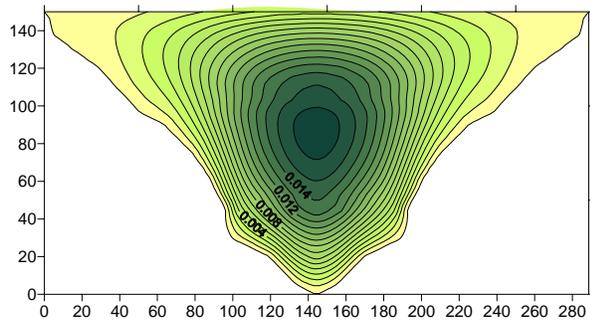
La distribución de la incertidumbre de los desplazamientos en todo el cuerpo de la presa para  $n=0.714$ , se presenta en las curvas de isovalores de las Figuras 4.25 y 4.26, de ellas se observa lo siguiente:

– Distancia de correlación intermedia ( $L=90$  m): la máxima  $DE$  (0.104 m) de los desplazamientos verticales se localiza en el punto A, correspondiente al máximo desplazamiento (Figura 4.25a), el  $CV$  máximo se presenta en la longitud media de la presa, en la parte inferior y superior, como se observa en la Figura 4.25b. En cuanto a los desplazamientos horizontales, la máxima  $DE$  (0.013 m) se presenta en el eje de simetría (Figura 4.25c) con un  $CV$  que tiende a infinito debido a que el valor esperado es nulo (Figura 4.25b).

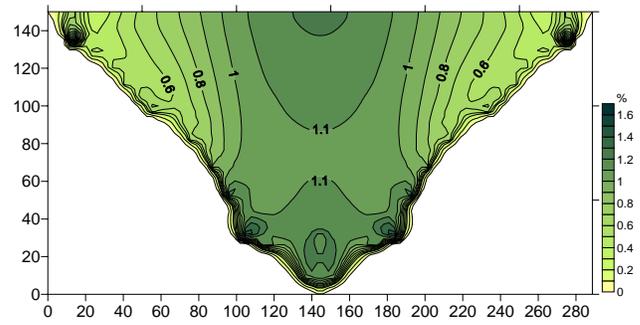
– Distancia de correlación muy grande ( $L=\infty$ ): en los desplazamientos verticales, la  $DE$  máxima (0.022 m) corresponde al punto de mayor desplazamiento (punto A), como se observa en la Figura 4.26a, y el  $CV$  en ese punto es alrededor de 1.46%, el máximo  $CV$  se localiza en la parte superior media de la sección (Figura 4.26b), este parámetro afecta más la zona en donde se presentan los desplazamientos verticales mayores. Con respecto a los desplazamientos horizontales, la máxima  $DE$  (0.0024 m) se localiza en el punto con mayor desplazamiento (punto B) (Figura 4.26c) y el  $CV$  en este punto es de 0.88% (Figura 4.26d); el  $CV$  es nulo en el eje de simetría y tiende a infinito entre la altura de 20 m y 40 m en donde existe un cambio de signo en el valor esperado de estos desplazamientos.

El efecto de este parámetro sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos, en función de la distancia de correlación, se observa en las gráficas de la Figura 4.27 que corresponden a grados de anisotropía  $n=1$  y  $n=0.714$ . Para los desplazamientos verticales (punto A), el  $CV$  se comporta de forma creciente conforme la distancia de correlación se incrementa, alcanza su máximo valor de 1.95% (para  $n=0.714$ , 1.46%) para una distancia de correlación del orden de 1000 m. Para los desplazamientos horizontales (punto B), el efecto es nulo cuando la distancia de correlación es pequeña, si la distancia aumenta, el  $CV$  crece y alcanza su mayor valor de 5.0% (para  $n=0.714$ , 3.91%) para una distancia de correlación del orden de 90m. A partir de esta distancia la incertidumbre comienza a disminuir hasta alcanzar una magnitud aproximadamente de 1.15% (para  $n=0.714$ , 0.86%) cuando la distancia de correlación tiende a infinito. Por tanto, la incertidumbre  $v_{vh}$  tiene mayor influencia sobre los desplazamientos horizontales cuando se trata de materiales heterogéneos (distancias de correlación del orden de la dimensión analizada).

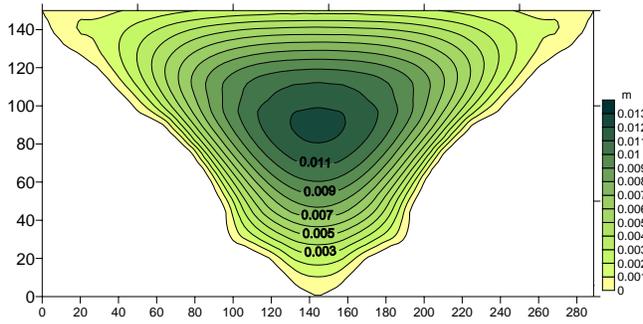
En la gráfica de la Figura 4.28 se compara la influencia de la distancia de correlación sobre la desviación estándar de los desplazamientos horizontales entre el punto A que se encuentra el eje de simetría y el punto B (que corresponde a los desplazamientos máximos). El mayor efecto de este parámetro se alcanza cuando  $L=90$  m, es más significativo en el punto A. El grado de anisotropía  $n$  no influye en la incertidumbre de estos desplazamientos.



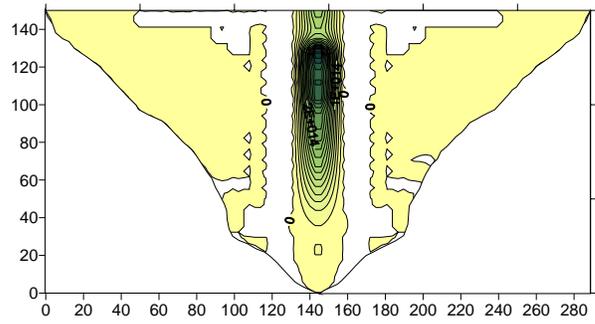
(a) DE de los desplazamientos verticales



(b) CV de los desplazamientos verticales

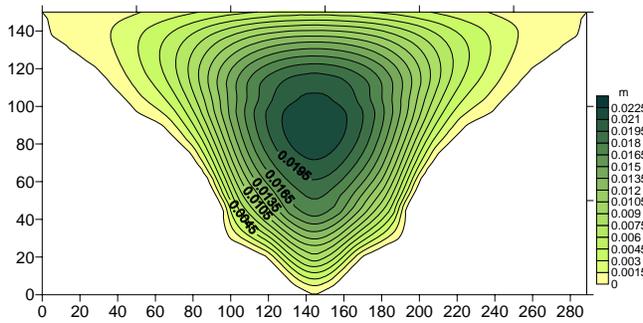


(c) DE de los desplazamientos horizontales

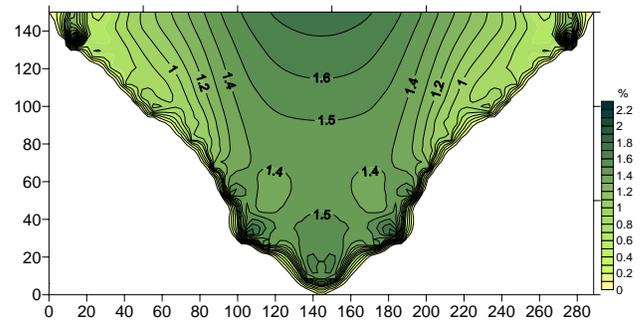


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.25 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{vh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de esfuerzo)

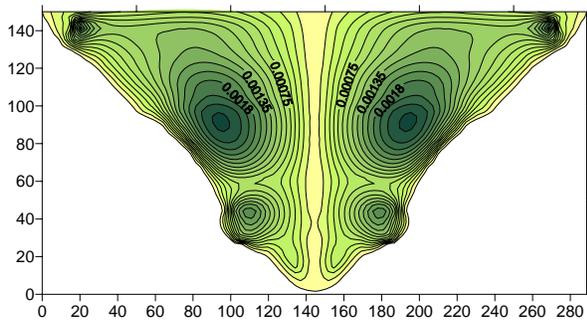


(a) DE de los desplazamientos verticales

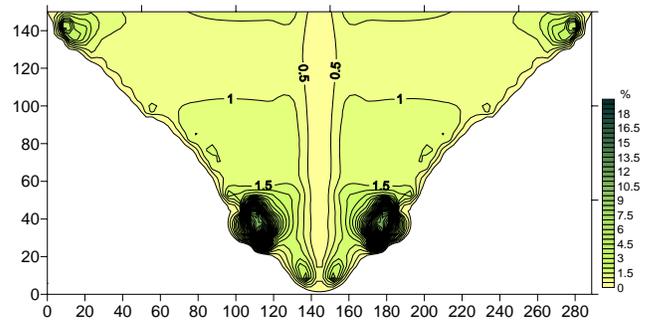


(b) CV de los desplazamientos verticales

Figura 4.26 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{vh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

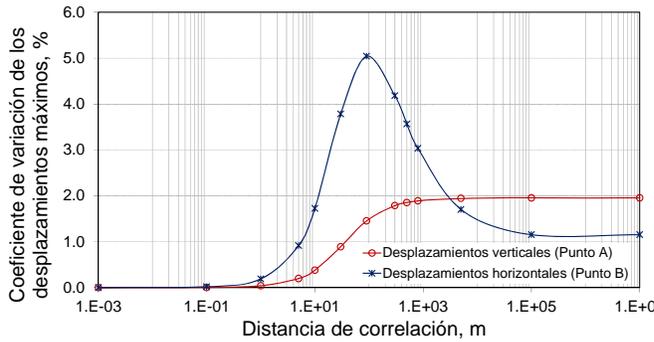


(c) DE de los desplazamientos horizontales

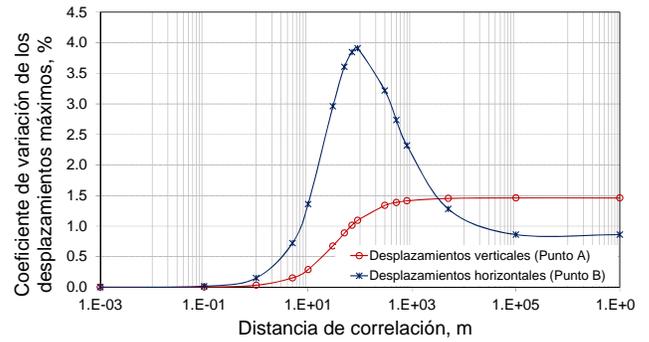


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.26 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{vh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo) (Continuación)

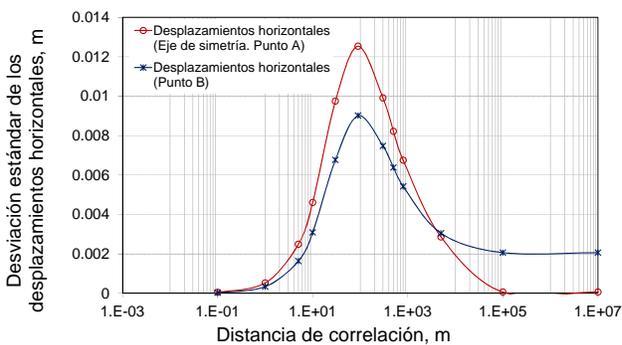


(a)  $n=1$

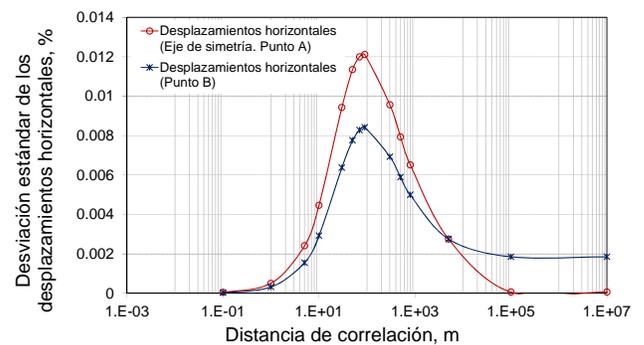


(b)  $n=0.714$

Figura 4.27 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $v_{vh}$  aleatoria (Estado plano de esfuerzo)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.28 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).

$v_{vh}$  aleatoria (Estado plano de esfuerzo)

(e)  $E_v$ ,  $E_h$  y  $v_{vh}$  aleatorios

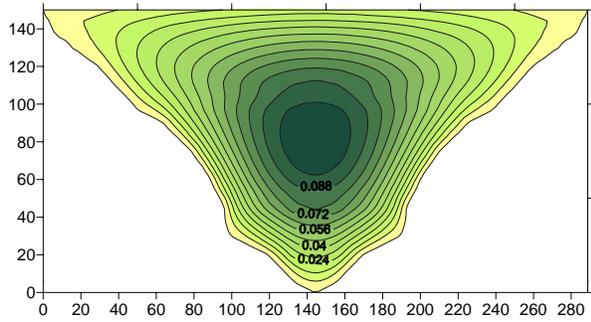
La distribución de la incertidumbre de los desplazamientos en todo el cuerpo de la presa se presenta en las gráficas de las Figuras 4.29 y 4.30, que corresponden a  $n=0.714$ , de las cuales se enuncia la siguiente:

– Distancia de correlación intermedia ( $L=90$  m): nuevamente, en el punto de mayor desplazamiento vertical (punto A) se presenta la  $DE$  máxima (0.1m) y el  $CV$  es de 6.8%, como se observa en las Figuras 4.29a y 4.29b, respectivamente. Los valores máximos del  $CV$  se presentan en la zona superior lateral e inferior de la presa; en la zona central superior se presenta un efecto de compensación estadística entre estos materiales y los de la ladera, como ocurre en el caso combinado de  $E_v$  y  $E_h$ . Para los desplazamientos horizontales, la máxima  $DE$  (0.016 m) se localiza en el punto de mayor desplazamiento (punto B), Figura 4.29c; en el eje de simetría la  $DE$  es menor, se presenta un efecto de compensación entre los parámetros, y el  $CV$  tiende a infinito porque la esperanza de los desplazamientos es nula en el eje, Figura 4.29d.

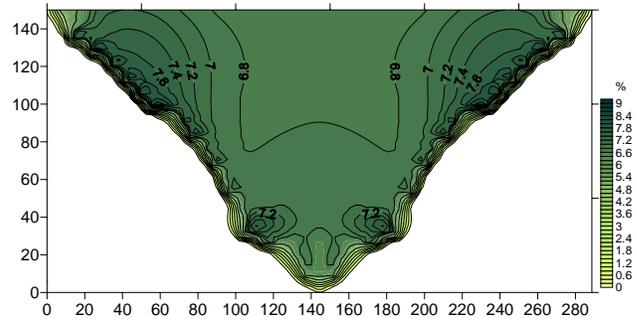
– Distancia de correlación grande ( $L=\infty$ ): de igual forma que en el caso anterior, en el punto A se presenta la máxima  $DE$  (0.15 m) de los desplazamientos verticales (Figura 4.30a), con un  $CV$  de 9.54%, Figura 4.30b. En los desplazamientos horizontales, la  $DE$  máxima (0.025 m) se presenta en el punto B (Figura 4.30c), al cual le corresponde un  $CV$  de 11.35% (Figura 4.30d); el  $CV$  en el eje de simetría es nulo y en la altura entre 20 m y 40 m tiende a infinito debido al cambio de pendiente ya comentado anteriormente.

La influencia combinada de estos tres parámetros se observa en las gráficas de la Figura 4.31, que corresponden a grados de anisotropía  $n=1$  y  $n=0.714$ . La influencia de la incertidumbre de estos parámetros sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales y verticales es la misma hasta distancias de correlación de aproximadamente 90m; a partir de esta distancia el  $CV$  de los desplazamientos horizontales (punto B) se incrementa más que para los verticales (punto A), con valores máximos alcanzados de 11.22% (para  $n=0.714$ , 11.35%) y 9.49% (para  $n=0.714$ , 9.54%), respectivamente.

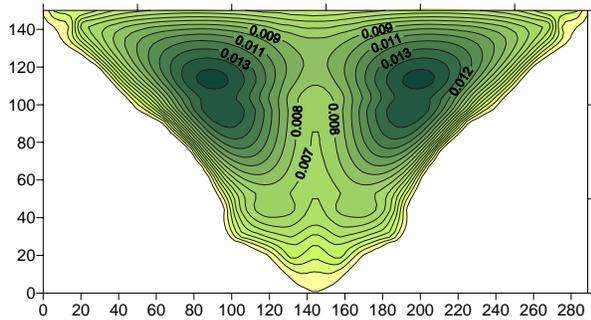
En la gráfica de la Figura 4.32, se observa el efecto combinado de estos tres parámetros sobre los desplazamientos horizontales para un punto localizado en el eje de simetría (punto A) y el punto B, dicho efecto es menor en el punto A que el B.



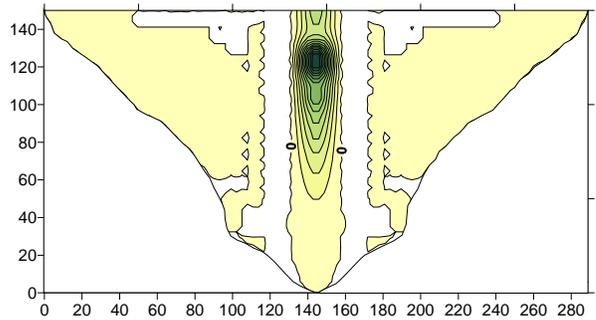
(a) *DE* de los desplazamientos verticales



(b) *CV* de los desplazamientos verticales

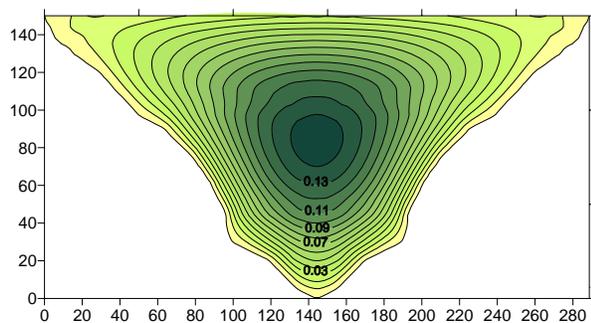


(c) *DE* de los desplazamientos horizontales

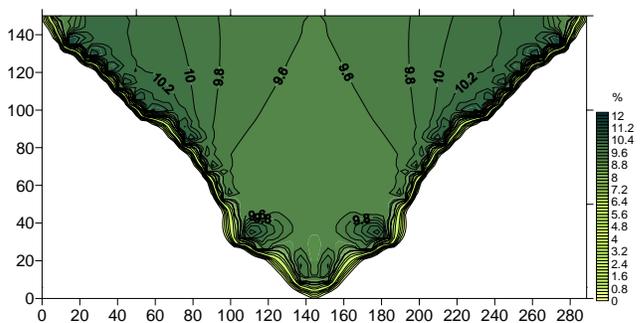


(d) *CV* de los desplazamientos horizontales

Figura 4.29 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_n$ ,  $E_v$  y  $\nu_{vh}$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de esfuerzo)

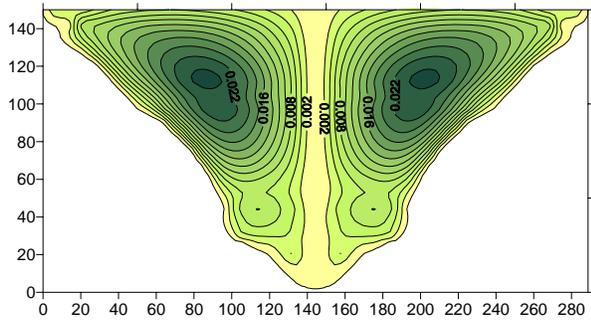


(a) *DE* de los desplazamientos verticales

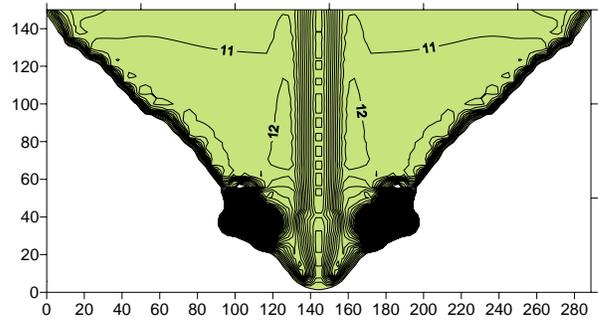


(b) *CV* de los desplazamientos verticales

Figura 4.30 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_n$ ,  $E_v$  y  $\nu_{vh}$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

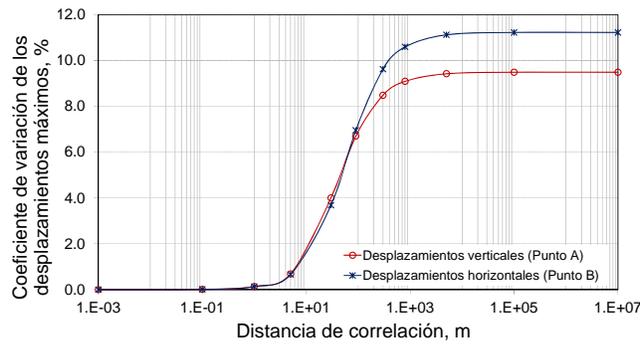


(c) DE de los desplazamientos horizontales

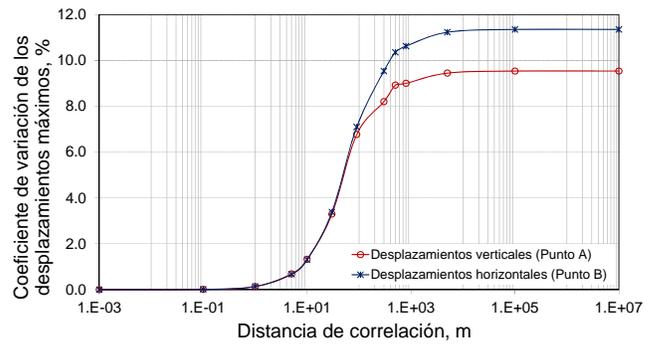


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.30 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_h$ ,  $E_v$  y  $v_{vh}$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo) (Continuación)

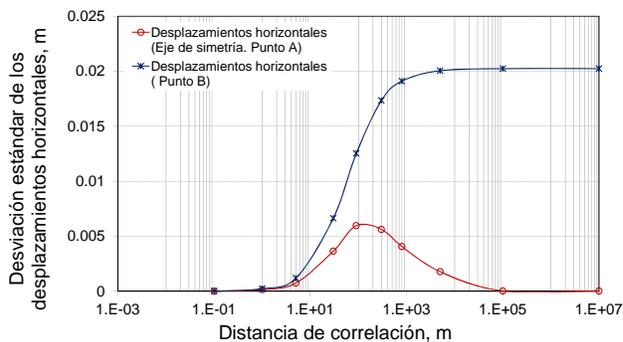


(a)  $n=1$

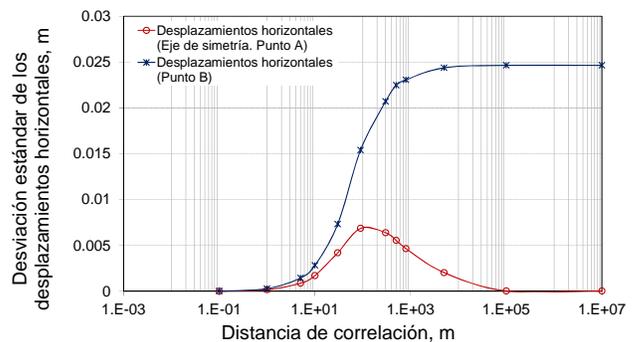


(b)  $n=0.714$

Figura 4.31 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $E_h$ ,  $E_v$  y  $v_{vh}$  aleatorios (Estado plano de esfuerzo)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.32 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $E_h$ ,  $E_v$  y  $v_{vh}$  aleatorios (Estado plano de esfuerzo)

Un resumen de los resultados del análisis estocástico para los grados de anisotropía  $n=1$  y  $n=0.714$ , cuando la distancia de correlación es muy grande, se presentan en la Tabla 4.3. Se observa que si el grado de anisotropía disminuye, el efecto individual de los campos aleatorios  $E_h$  y  $\nu_{vh}$  sobre las incertidumbres de los desplazamientos disminuye. En el caso del campo aleatorio  $E_v$  y de los combinados ( $E_v$  y  $E_h$ ) y ( $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$ ), el efecto de las incertidumbres que afectan los desplazamientos aumentan ligeramente.

Tabla 4.3 CV de los desplazamientos máximos para  $n=1$  y  $n=0.714$ .  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

Grado de anisotropía, $n$	$CV_\delta$ (%)	$E_v$	$E_h$	$E_v$ y $E_h$	$\nu_{vh}$	$\nu_{vh}$	$E_v, E_h$ y $\nu_{vh}$
		$L=\infty$	$L=\infty$	$L=\infty$	$L=90$	$L=\infty$	$L=\infty$
1	$\delta x_{\text{máx}}$ (Punto A)	4.20	6.95	11.15	5.04	1.15	11.22
	$\delta y_{\text{máx}}$ (Punto B)	8.08	2.06	9.59	1.46	1.95	9.49
0.714	$\delta x_{\text{máx}}$ (Punto A)	4.97	5.19	11.32	3.91	0.86	11.35
	$\delta y_{\text{máx}}$ (Punto B)	8.20	1.97	9.64	1.10	1.46	9.54

#### 4.7.1.2 Esfuerzo principal menor $\sigma_3$

La configuración de la esperanza del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  en todo el cuerpo de la presa se presenta en la Figura 4.33. De acuerdo con esta gráfica, los valores mínimos del esfuerzo de compresión  $\sigma_3$  se presentan en la cresta, los máximos se localiza en el eje vertical de simetría entre la altura 60 m y 80 m (punto A) con un valor de 0.6 MPa (0.5 MPa para  $n=0.714$ ).

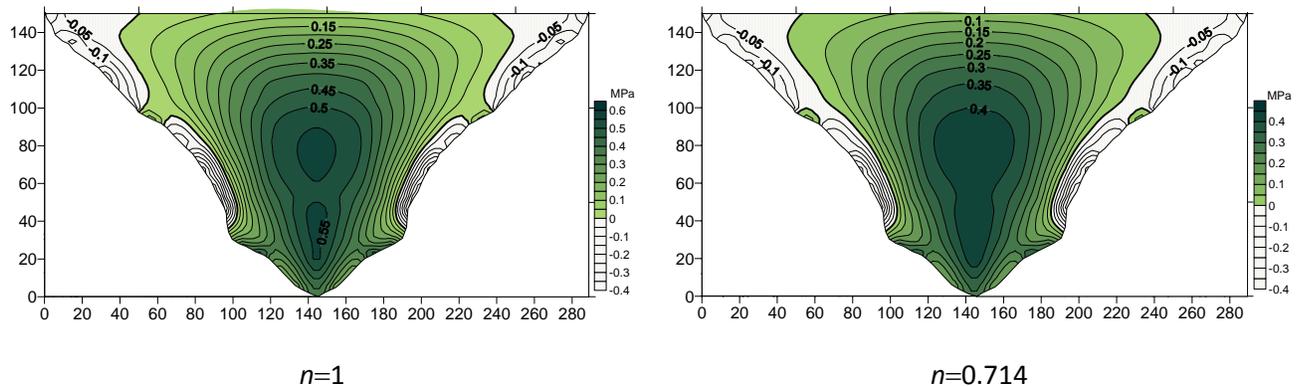


Figura 4.33 Configuración de la esperanza de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa (Estado plano de esfuerzo)

El efecto de la incertidumbre de los parámetros elásticos lineales anisótropos sobre la incertidumbre del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$ , se estudia mediante las curvas de isovalores de la desviación estándar  $DE$  y del coeficiente de variación  $CV$ , las cuales corresponden a un grado de anisotropía  $n=0.714$  y  $L=\infty$ . El análisis de la influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de  $\sigma_3$ , se realiza con el  $CV$ ; se estudian puntos con desviación estándar máxima: el punto A que se localiza en parte central de la presa con coordenadas (144.36, 825.5), el punto B el cual se ubica en la parte inferior de la ladera y fuera de la zona de tensión (coordenadas: 174.56, 22.8), el punto C que se encuentra en la zona de tensión (coordenadas: 196.16, 52.5) y el punto D que corresponde a la zona de tensión en la cresta (coordenadas: 288.72, 170). Se analiza  $n=1$  y  $n=0.714$ . A continuación se explican los resultados.

(a)  $E_v$  aleatorio

Las gráficas de la Figura 4.34 muestran las curvas de igual incertidumbre en toda la presa. Se aprecia que la influencia de este parámetro sobre la  $DE$  de  $\sigma_3$  es mayor en la parte adyacente inferior y adyacente central de la ladera, en donde existen cambios de pendiente bruscos; en la cresta la incertidumbre es nula debido a que el efecto de este parámetro es creciente con la profundidad, Figura 4.34a. El CV de  $\sigma_3$  se incrementa del centro hacia la zona de la ladera, de forma vertical, Figura 4.34b; este parámetro estadístico tiende a infinito en las zonas donde el valor esperado es nulo (frontera en la que los esfuerzos cambian de signo). El efecto de este parámetro sobre la incertidumbre de  $\sigma_3$  es de forma vertical.

En la gráfica de la Figura 4.35, se observa que cuando  $L=90$  m se presenta el mayor efecto de este parámetro, el cual es más evidente en el punto B (ladera: inferior) con un CV de 4% ( $n=0.714$ , 5.7%). Cuando la distancia de correlación es muy grande  $L=\infty$  y  $n=1$ , el CV mayor (2.3%) corresponde al punto C (zona de tensión, ladera central) y el menor (0.8%) al punto A (eje de simetría); en el caso del grado de anisotropía  $n=0.714$ , el CV de los puntos B, C y D es el mismo, del orden de 1.8%. Por tanto, la influencia de este parámetro es más importante para distancias de correlación intermedias y para la zona inferior de la ladera, fuera de la zona de tensión.

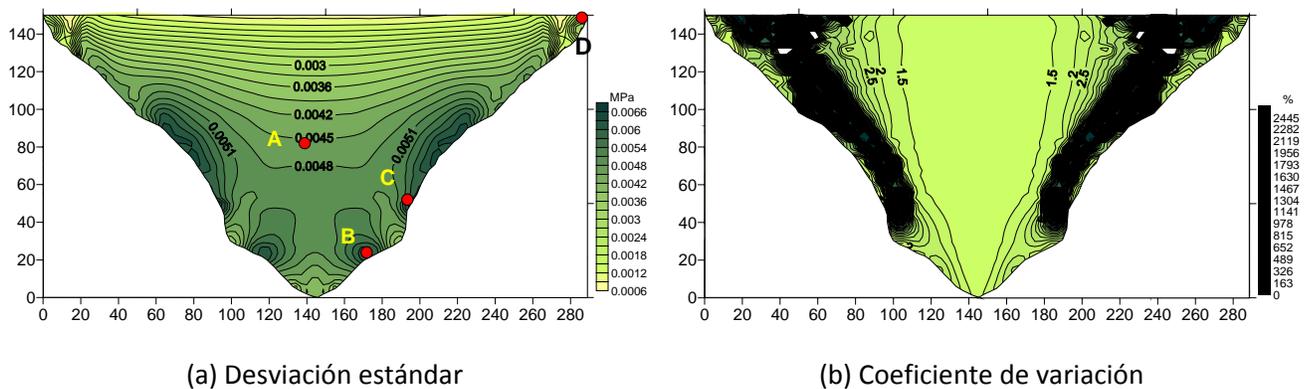


Figura 4.34 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $E_v$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

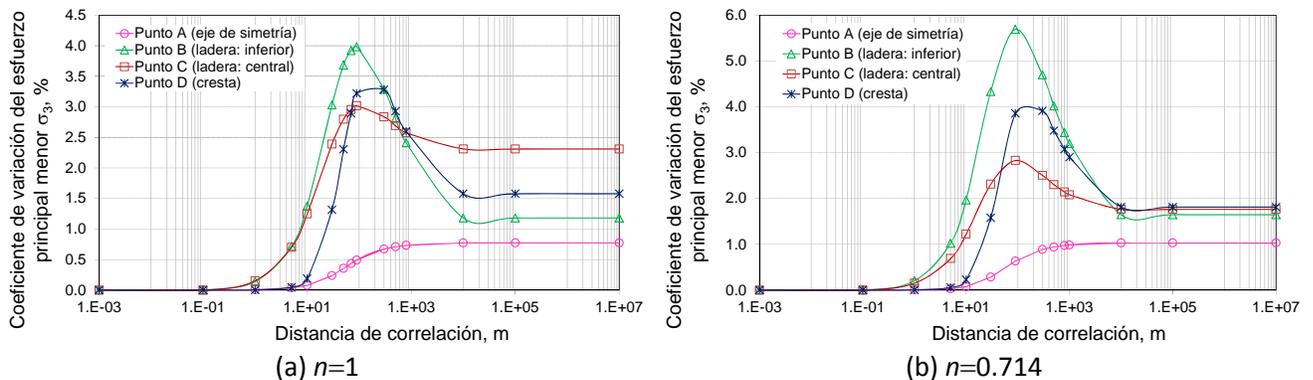


Figura 4.35 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $E_v$  aleatorio (Estado plano de esfuerzo)

(b)  $E_h$  aleatorio

En la gráfica de la Figura 4.36a se ilustra la configuración en todo el cuerpo de la presa de la  $DE$  de  $\sigma_3$ , se observa que la incertidumbre mayor se presenta en la zona adyacente a la ladera; en la zona cercana a los esfuerzos de tensión la  $DE$  es casi nula. Este efecto se confirma con las curvas de isovalores del CV, Figura 4.36b; se puede ver que la incertidumbre en la zona central de la presa crece de la parte inferior hacia la cresta. Este parámetro estadístico también tiende a infinito en donde el valor esperado de  $\sigma_3$  es cero. En conclusión, el efecto de este parámetro es principalmente en la zona adyacente a la ladera; en la zona central de la presa, la influencia es horizontal, de abajo hacia arriba.

En las gráficas de la Figura 4.37 se observa que el CV de  $\sigma_3$  se comporta de forma creciente conforme la distancia de correlación aumenta, el máximo valor ( $n=1$ ,  $CV=9.8\%$ ;  $n=0.714$ ,  $CV=10\%$ ) se alcanza para distancias de correlación muy grandes y corresponde al punto D que se localiza en la cresta (zona de tensión). El menor CV ( $n=1$ ,  $CV=0.85\%$ ;  $n=0.714$ ,  $CV=0.60\%$ ) corresponde al punto B localizado en la parte inferior de la ladera.

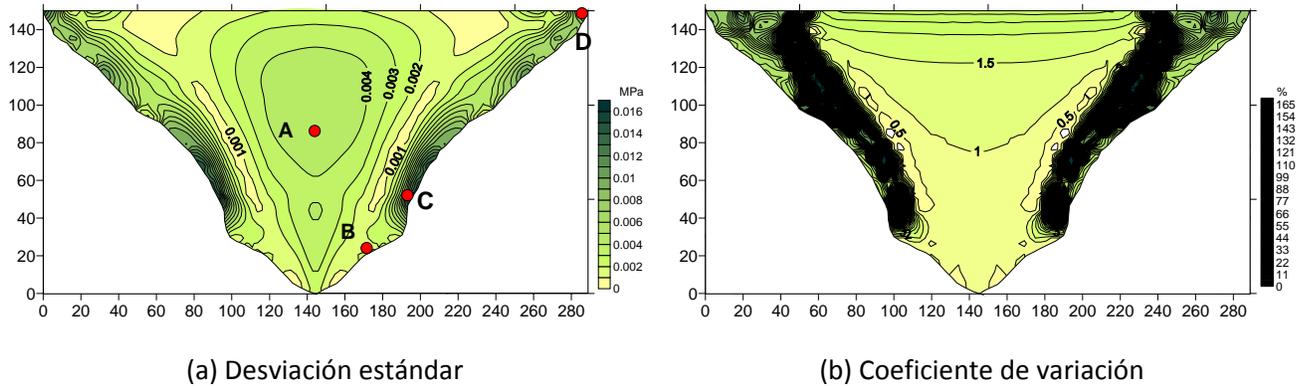


Figura 4.36 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $E_h$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

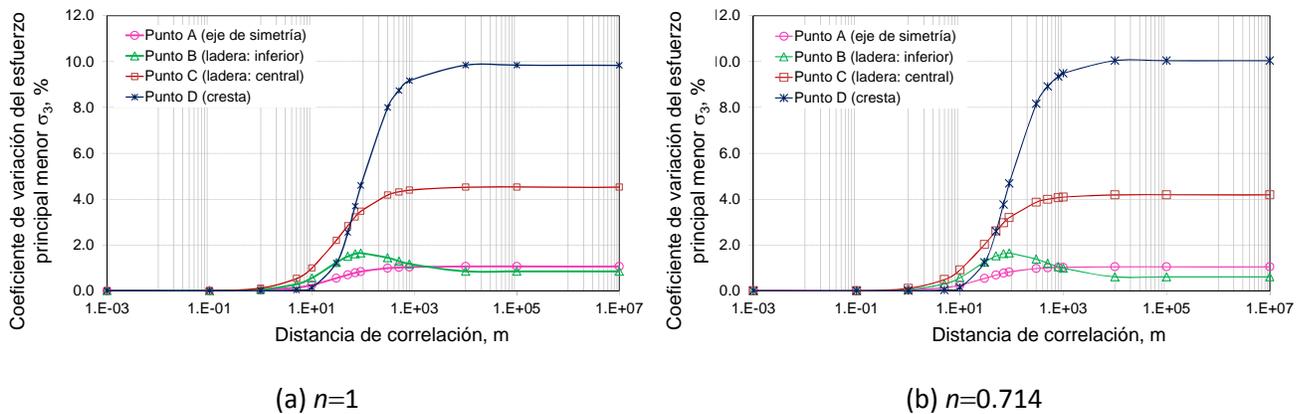


Figura 4.37 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $E_h$  aleatorio (Estado plano de esfuerzo)

(c)  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios

En las curvas de isovalores de la Figura 4.38a, se aprecia el efecto combinado de estos dos parámetros sobre la  $DE$  de  $\sigma_3$ , el cual es mayor en todo el cuerpo de la presa que el que tiene cada uno por separado. En la parte adyacente a la ladera, la  $DE$  estándar máxima es un poco menor que la debida a  $E_h$  (parámetro que afecta mayormente esta zona). La configuración del CV de  $\sigma_3$ , Figura 4.38b, es similar al caso cuando  $E_h$  es aleatorio, lo que expone que la influencia de este parámetro es predominante sobre  $\sigma_3$ .

La influencia de la distancia de correlación sobre  $\sigma_3$  se aprecia en las gráficas de la Figura 4.39. Cuando la distancia de correlación es intermedia  $L=90$  m, en el punto B (ladera inferior) se alcanza el CV mayor ( $n=1,4.8\%$ ,  $n=0.714, 5\%$ ) que es igual al del punto D (zona de tensión, cresta), el efecto combinado se mantiene igual al efecto que cada uno tiene por separado. Cuando  $L=\infty$ , el máximo CV se presenta en el punto D ( $n=1, 9\%$ ;  $n=0.714, 9.3\%$ ), ligeramente menor que en el caso de sólo  $E_h$  aleatorio; el CV menor corresponde a los puntos A y B.

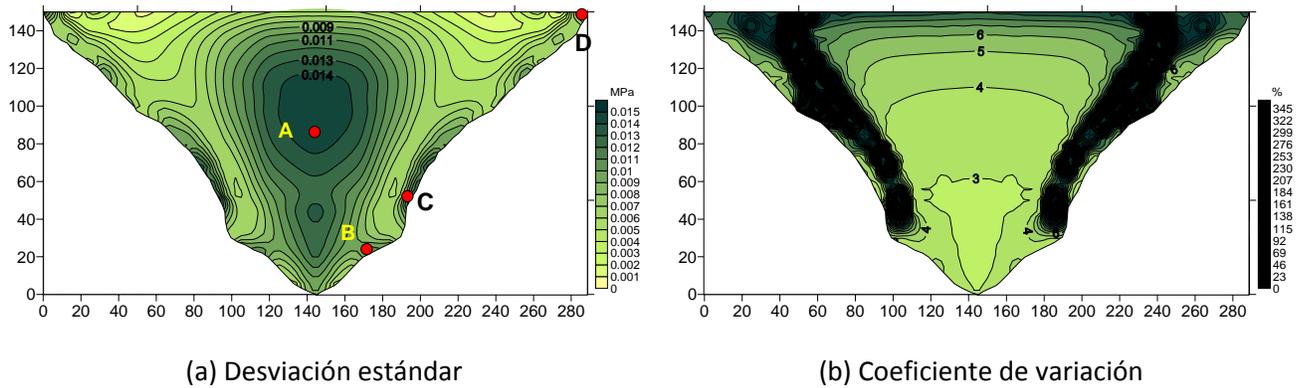


Figura 4.38 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

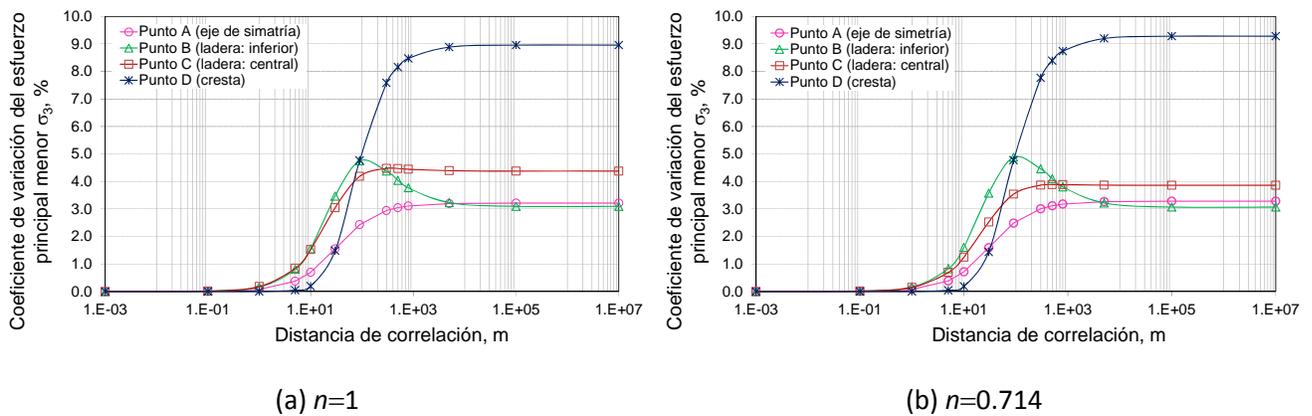


Figura 4.39 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (Estado plano de esfuerzo)

(d)  $\nu_{vh}$  aleatoria

La configuración de la *DE* de  $\sigma_3$  en todo el cuerpo de la presa se ilustra en las curvas de isovalores de la Figura, 4.40a. Se aprecia que el efecto de este parámetro es bajo, se concentra en la parte central y en la parte inferior de las laderas. En las curvas de igual CV (Figura 4.40b), se observa que en el cuerpo de la presa la incertidumbre de  $\nu_{vh}$  influye sobre la incertidumbre de  $\sigma_3$  de forma creciente con la altura y se concentra en los costados de ésta.

En la gráfica de la Figura 4.41, se aprecia que cuando la distancia de correlación es intermedia  $L=90$  m (materiales heterogéneos), el CV mayor (2.0% para ambos grados de anisotropía) se presenta en el punto B (ladera inferior). Para distancias de correlación muy grandes  $L=\infty$  (materiales homogéneos), el CV máximo alcanzado corresponde al punto D (zona de tensión, cresta) con un valor de 2.3%, también para ambos grados de anisotropía; el menor valor alcanzado es de 1.5 % ( $n=0.714$ ,  $CV=1.0\%$ ) y se localiza en el punto C (zona de tensión, ladera central), se ratifica que en esta zona de las laderas la influencia de este parámetro es baja.

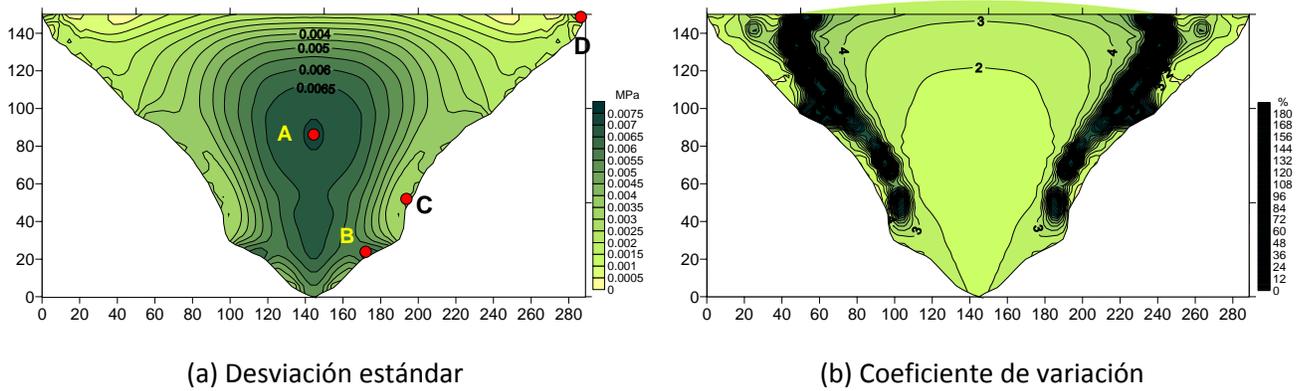


Figura 4.40 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $\nu_{vh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

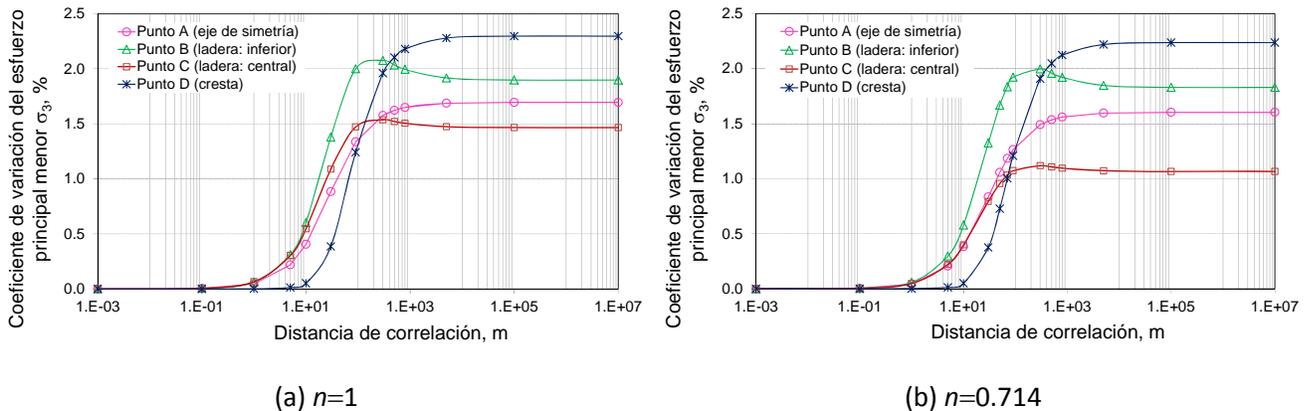


Figura 4.41 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $\nu_{vh}$  aleatoria (Estado plano de esfuerzo)

(e)  $E_h$ ,  $E_v$  y  $\nu_{vh}$  aleatorios

La configuración de la  $DE$  en el cuerpo de la presa se ilustra en la gráfica de la Figura 4.42a, se observa que el efecto combinado de estos tres parámetros es similar al efecto conjunto de los módulos de deformación, los valores mayores se presentan en la parte central y en las zonas adyacentes central y superior de las laderas. El  $CV$  de  $\sigma_3$  (Figura 4.42b) se distribuye en la zona central de la presa, de forma ascendente, nuevamente el módulo de deformación  $E_h$  influye predominantemente.

En la gráfica de la influencia de la distancia de correlación sobre el  $CV$  de los esfuerzos principales menores  $\sigma_3$ , Figura 4.43, se observa que cuando  $L=90$  m el efecto de estos tres parámetros es mayor en el punto B (ladera inferior) y en el punto D (zona de tensión, cresta). Cuando  $L=\infty$ , el punto D presenta el mayor valor de  $CV$  ( $n=1$ , 9.11%;  $n=0.714$ , 9.33%).

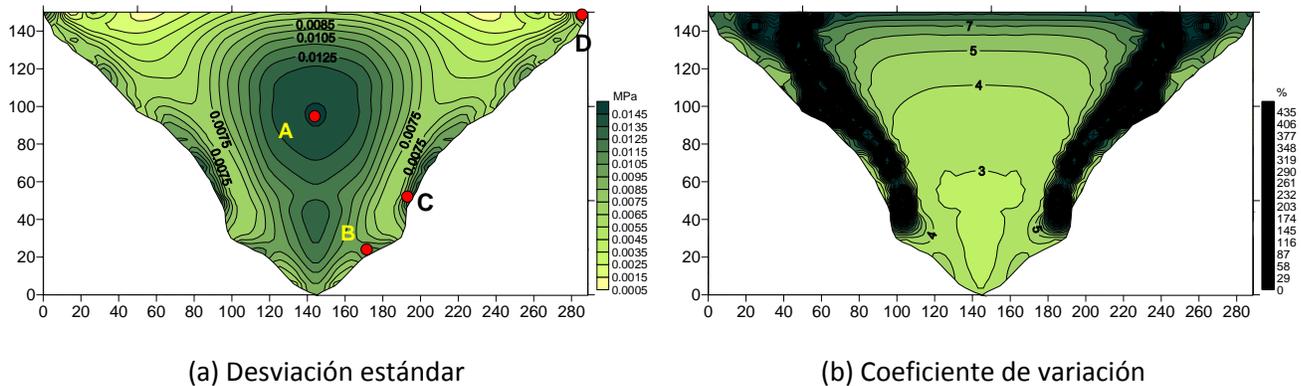


Figura 4.42 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de esfuerzo)

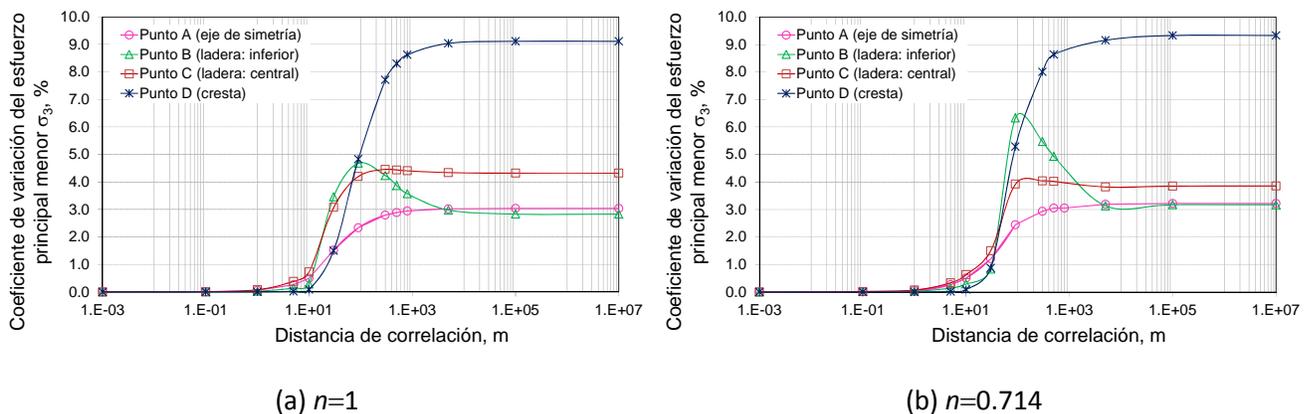


Figura 4.43 Influencia de la distancia de correlación sobre el  $CV$  de  $\sigma_3$ .  $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$  aleatorios (Estado plano de esfuerzo)

En la Tabla 4.4 se presenta un resumen de la influencia de la incertidumbre de los parámetros sobre la incertidumbre ( $CV$ ) del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  para  $n=1$  y  $n=0.714$ . El efecto de las incertidumbres del módulo de deformación horizontal  $E_h$  es significativamente mayor sobre las

incertidumbres de los esfuerzos de tensión localizados en la cresta (punto D), incluso el efecto es mayor que el de los campos aleatorios combinados ( $E_v$  y  $E_h$ ) y ( $E_v$ ,  $E_h$  y  $\nu_{vh}$ ). La variabilidad espacial del módulo de deformación horizontal  $E_h$  y de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  influyen muy poco en las incertidumbres que afectan los esfuerzos de tensión. En particular, si el grado de anisotropía disminuye, la incertidumbre en los esfuerzos de tensión localizados en la cresta (punto D) aumenta, en todos los casos analizados.

Tabla 4.4 CV del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$ , para  $n=1$  y  $n=0.714$ .  $L=\infty$ . (Estado plano de esfuerzo)

Grado de anisotropía	CV de $\sigma_3$ (%)	$E_v$ aleatorio	$E_h$ aleatorio	$E_v$ y $E_h$ aleatorios	$\nu_{vh}$ aleatorio	$E_v$ , $E_h$ y $\nu_{vh}$ aleatorios
$n=1$	(punto A)	0.77	1.06	3.21	1.69	3.04
	(punto B)	1.18	0.84	3.10	1.89	2.83
	(punto C)	2.30	4.52	4.38	1.47	4.32
	(punto D)	1.58	9.80	8.98	2.30	9.11
$n=0.714$	(punto A)	1.03	1.04	3.28	1.60	3.22
	(punto B)	1.64	0.60	3.07	1.07	3.17
	(punto C)	1.76	4.18	3.86	1.83	3.86
	(punto D)	1.81	10.04	9.28	2.24	9.33

En conclusión, el efecto de las incertidumbres de los parámetros elásticos lineales anisótropos sobre las incertidumbres en los esfuerzos principales menores  $\sigma_3$  es muy bajo en la zona central de la presa, la mayor influencia se presenta en la zona adyacente a las laderas. En materiales heterogéneos ( $L=90$  m), la incertidumbre del módulo de deformación vertical  $E_v$  tiene mayor influencia sobre las incertidumbres en los esfuerzos de compresión (Punto B). En materiales homogéneos ( $L=\infty$ ), la variabilidad del módulo de deformación horizontal  $E_h$  se refleja mayormente sobre la incertidumbre en los esfuerzos de tensión localizados en la cresta.

#### 4.7.2 Estado plano de deformación

##### 4.7.2.1 Desplazamientos

El valor esperado de los desplazamientos en todo el cuerpo de la presa se muestra en las gráficas de la Figura 4.44 y 4.45, la cual corresponde a una distancia de correlación  $L=\infty$ . Cuando el grado de anisotropía  $n=1$  (Figura 4.44), la esperanza del máximo desplazamiento vertical corresponde al punto A(144.36, 82.5) con un valor de 1.3 m, el máximo horizontal se localiza en el punto B (89.06, 111.9) con una magnitud de 0.16 m. Para  $n=0.714$ , el máximo vertical es de 1.40 m y el máximo horizontal es de 0.20 m, Figura 4.45.

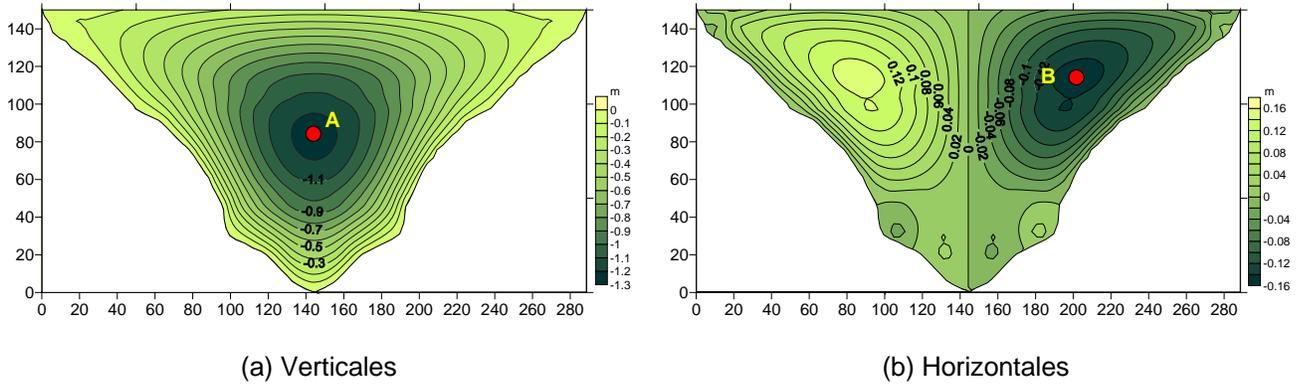


Figura 4.44 Curvas de igual valor esperado de los desplazamientos para  $n=1$  (Estado plano de deformación)

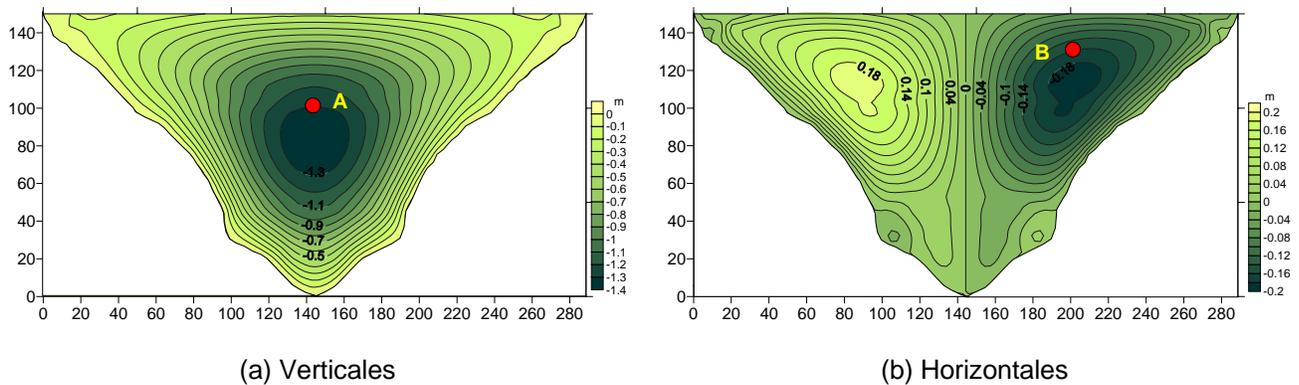


Figura 4.45 Curvas de igual valor esperado de los desplazamientos para  $n=0.714$  (Estado plano de deformación)

El efecto de la variabilidad de cada parámetro sobre la incertidumbre de los desplazamientos en todo el cuerpo de la presa se analizó mediante las curvas de igual  $DE$  y  $CV$  para distancias de correlación intermedia ( $L=90$  m) y muy grande ( $L=\infty$ ). Se consideró un grado de anisotropía  $n=0.714$ . Por medio de la distancia de correlación se estudió la influencia de la incertidumbre de los parámetros del material sobre los desplazamientos máximos. Se tiene lo siguiente:

(a)  $E_v$  aleatorio

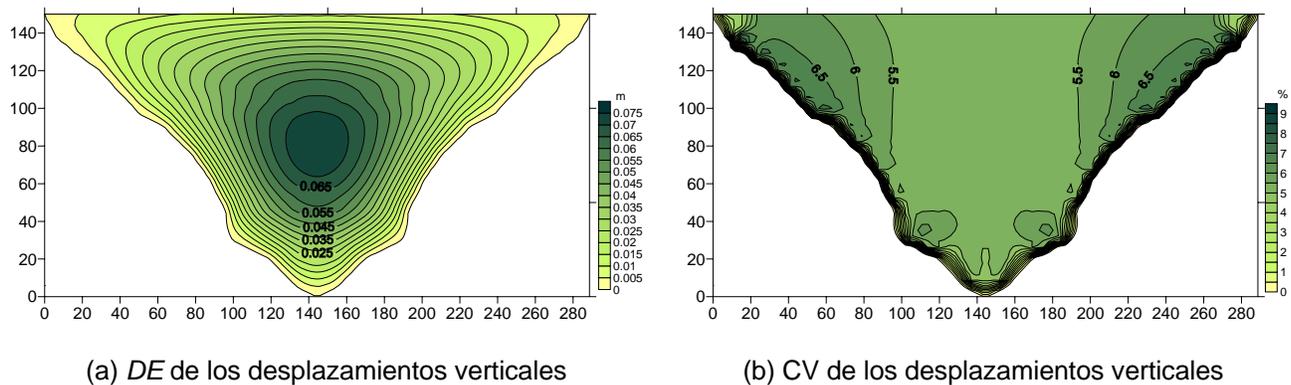
– Distancia de correlación intermedia,  $L=90$  m: en los desplazamientos verticales se alcanza una  $DE$  máxima de 0.075 m en el punto A (Figura 4.46a), el  $CV$  máximo se localiza en las zonas adyacentes superiores a las laderas con un valor de 9%, Figura 4.46b. En los desplazamientos horizontales, el mayor valor de la  $DE$  (0.012 m) se localiza en el eje de simetría (Figura 4.46c) y el  $CV$  en esa zona tiende a infinito, Figura 4.46d, debido a que el valor esperado de estos desplazamientos es nulo.

– Distancia de correlación muy grande,  $L=\infty$ : en los desplazamientos verticales la  $DE$  máxima (0.10 m) se alcanza en el punto A (Figura 4.47a) y el  $CV$  máximo (13%) se sigue presentado en la zona superior adyacente a las laderas, Figura 4.47b; la influencia de este parámetro es del centro hacia la parte superior del valle. En los desplazamientos horizontales, la  $DE$  máxima (0.009 m) se presenta en el punto B que corresponde a los máximos desplazamientos, Figura 4.47c; el  $CV$  máximo se localiza en la parte superior lateral de la cortina, en la zona en

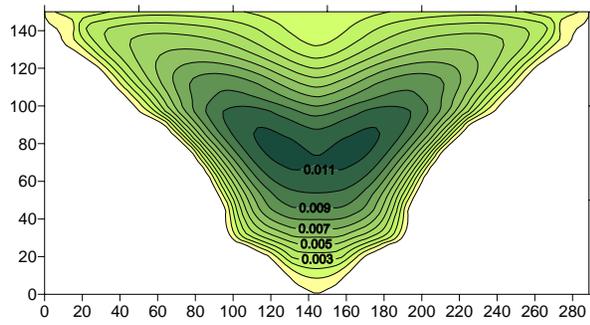
donde existe un cambio de pendiente brusco (altura 20 m y 40 m) el CV tiende a infinito como consecuencia de la existencia de valores nulos en el valor esperado de estos desplazamientos, Figura 4.47d.

La influencia de la incertidumbre de este parámetro sobre los desplazamientos máximos, en función de la distancia de correlación se presenta en la gráfica de la Figura 4.48. Reiterando que para distancias de correlación pequeñas el material tiene un comportamiento homogéneo determinista debido a un efecto de *compensación estadística* que conduce a un valor nulo del CV. Para los desplazamientos verticales, con forme la distancia de correlación crece, la incertidumbre también crece y alcanza su máximo valor cuando  $L$  es del orden de 1000 m, distancia para la cual el material se estabiliza estadísticamente y se comporta como homogéneo pero aleatorio. El CV máximo en el punto A es de 6.72 % ( $n=0.714$ ,  $CV=7.40\%$ ). En cuanto a los desplazamientos horizontales (punto B) se observa que el CV máximo ( $n=1$ ,  $CV=5.27\%$ ;  $n=0.714$ ,  $CV= 4.80\%$ ) se presenta para distancias de correlación intermedias aproximadamente  $L=90$  m, Figura 4.48, en donde el material es muy heterogéneo. Este parámetro tiene menor efecto sobre la incertidumbre de los desplazamientos comparado con el que se presenta en el estado plano de esfuerzo.

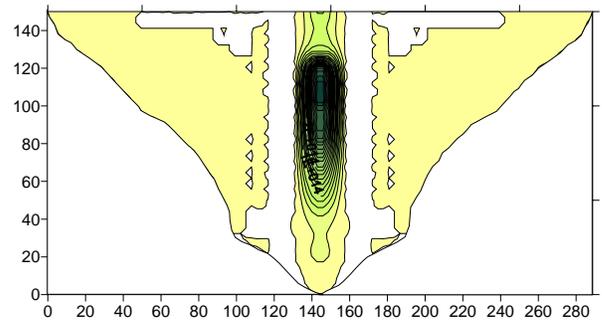
En la gráfica de la Figura 4.49 se observa la influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre ( $DE$ ) de los desplazamientos horizontales localizados en el eje de simetría (punto A) y en el punto en donde se presentan los máximos (punto B). En el punto A el comportamiento del material es simétrico. Para distancias de correlación pequeñas y muy grandes la incertidumbre es nula; cuando  $L=90$  m la  $DE$  es máxima y el material tiene un comportamiento fuertemente heterogéneo. Cuando se trata de materiales heterogéneos el efecto de este parámetro se refleja mayormente sobre las incertidumbres de los desplazamientos horizontales localizados en el eje de simetría. En materiales homogéneos, este parámetro tiene mayor influencia sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes al punto B.



(a)  $DE$  de los desplazamientos verticales (b) CV de los desplazamientos verticales  
 Figura 4.46 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de deformación)

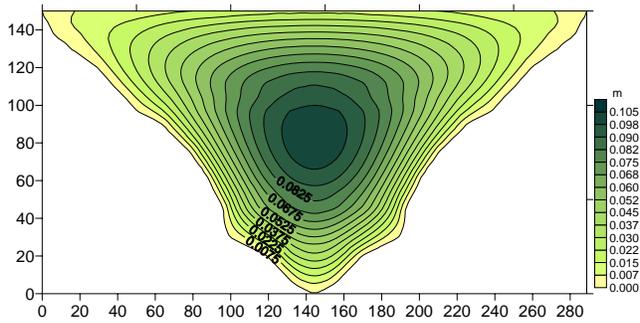


(c) DE de los desplazamientos horizontales

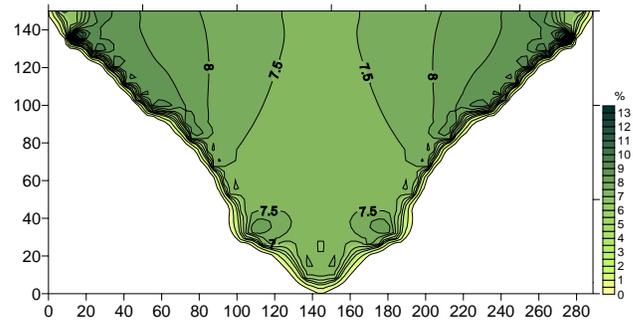


(d) CV de los desplazamientos horizontales

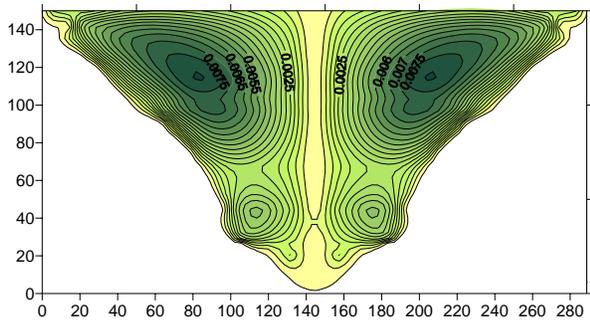
Figura 4.46 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de deformación) (continuación)



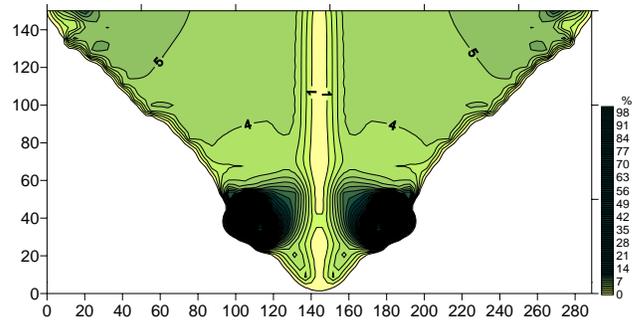
(a) DE de los desplazamientos verticales



(b) CV de los desplazamientos verticales

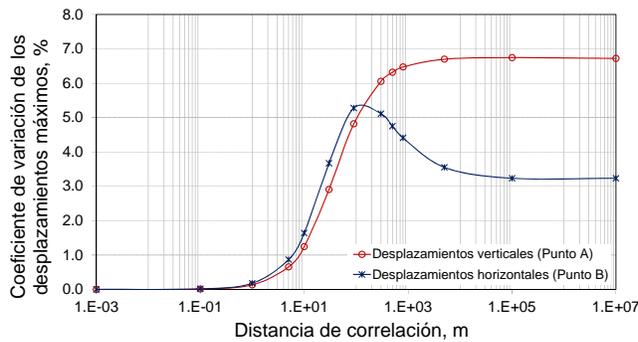


(c) DE de los desplazamientos horizontales

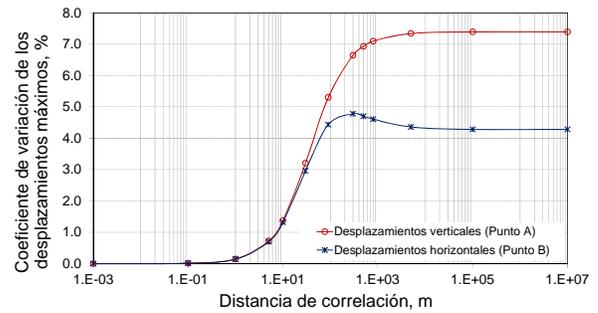


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.47 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  aleatorio,  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

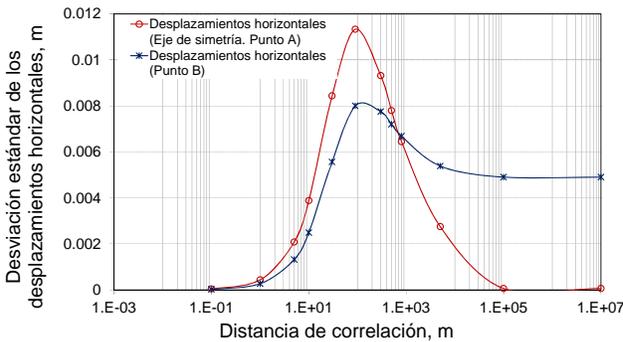


(a)  $n=1$

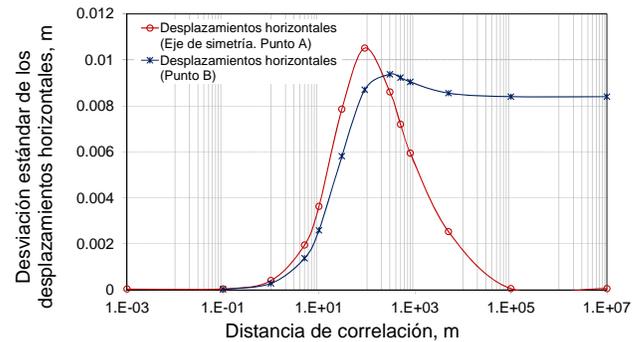


(b)  $n=0.714$

Figura 4.48 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $E_v$  aleatorio (Estado plano de deformación)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.49 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $E_v$  aleatorio (Estado plano de deformación)

(b)  $E_h$  aleatorio

El efecto de este parámetro en el cuerpo de la presa se ilustra con las curvas de igual  $DE$  y  $CV$  de las Figuras 4.50 y 4.51 de las cuales se tiene lo siguiente:

– Distancia de correlación intermedia,  $L=90$  m: en los desplazamientos verticales la  $DE$  máxima se presenta en el punto con mayor valor esperado (punto A) con un valor de 0.028 m, Figura 4.50a; el  $CV$  en este punto es de 1.93%, el máximo se presenta en la parte inferior de la presa con un valor de 2.7%, Figura 4.50b. En los desplazamientos horizontales, el mayor valor de la  $DE$  (0.015 m) se localiza en el eje de simetría (Figura 4.50c) y el  $CV$  en esa zona tiende a infinito debido a que el valor esperado es nulo, Figura 4.50d.

– Distancia de correlación muy grande,  $L=\infty$ : en los desplazamientos verticales la máxima  $DE$  (0.036 m) (Figura 4.51a) se sigue presentando en el punto A, con un correspondiente  $CV$  de 2.7%, Figura 4.51b. El efecto de este parámetro se refleja principalmente en la zona central, en la parte superior junto a las laderas la incertidumbre disminuye; sin embargo, en la cresta, en los puntos adyacentes a las laderas se presenta zonas pequeñas con un  $CV$  igual que el de la parte

inferior. En los desplazamientos horizontales, la incertidumbre en el eje de simetría desaparece, la *DE* máxima (0.012 m) se localiza en el punto B, el CV crece de la zona superior de las laderas hacia la zona inferior en donde se presenta el cambio de pendiente.

La influencia de la variabilidad de este parámetro sobre los desplazamientos máximos es ligeramente mayor que en el caso de estado plano de esfuerzos. Asimismo, si el grado de anisotropía disminuye la incertidumbre es menor. Como se muestra en la Figura 4.52, el CV del desplazamiento vertical máximo (punto A) es creciente conforme la distancia de correlación aumenta, el valor máximo de 3.3% ( $n=0.714$ , 2.71%) se alcanza cuando  $L=1000$  m. En los desplazamientos horizontales (punto B) el CV es mayor que el de los verticales. Se observa que cuando  $L=90$  m se presenta el CV máximo ( $n=1,8.2\%$ ;  $n=0.714$ , 6.3%) y para  $L=\infty$  el CV es menor ( $n=1,6.8\%$ ;  $n=0.714$ , 5.85%). La variación del CV entre las dos distancias de correlación ( $L=90$  m y  $L=\infty$ ) es más acentuada cuando  $n=1$ .

El efecto de la variabilidad de este parámetro sobre los desplazamientos horizontales es mayor en el eje de simetría cuando se trata de materiales heterogéneos ( $L=90$ ), en materiales homogéneos ( $L=\infty$ ) dicho efecto es más significativo en el punto B, en donde se presentan los desplazamientos máximos, como se observa en la gráfica de la Figura 4.53.

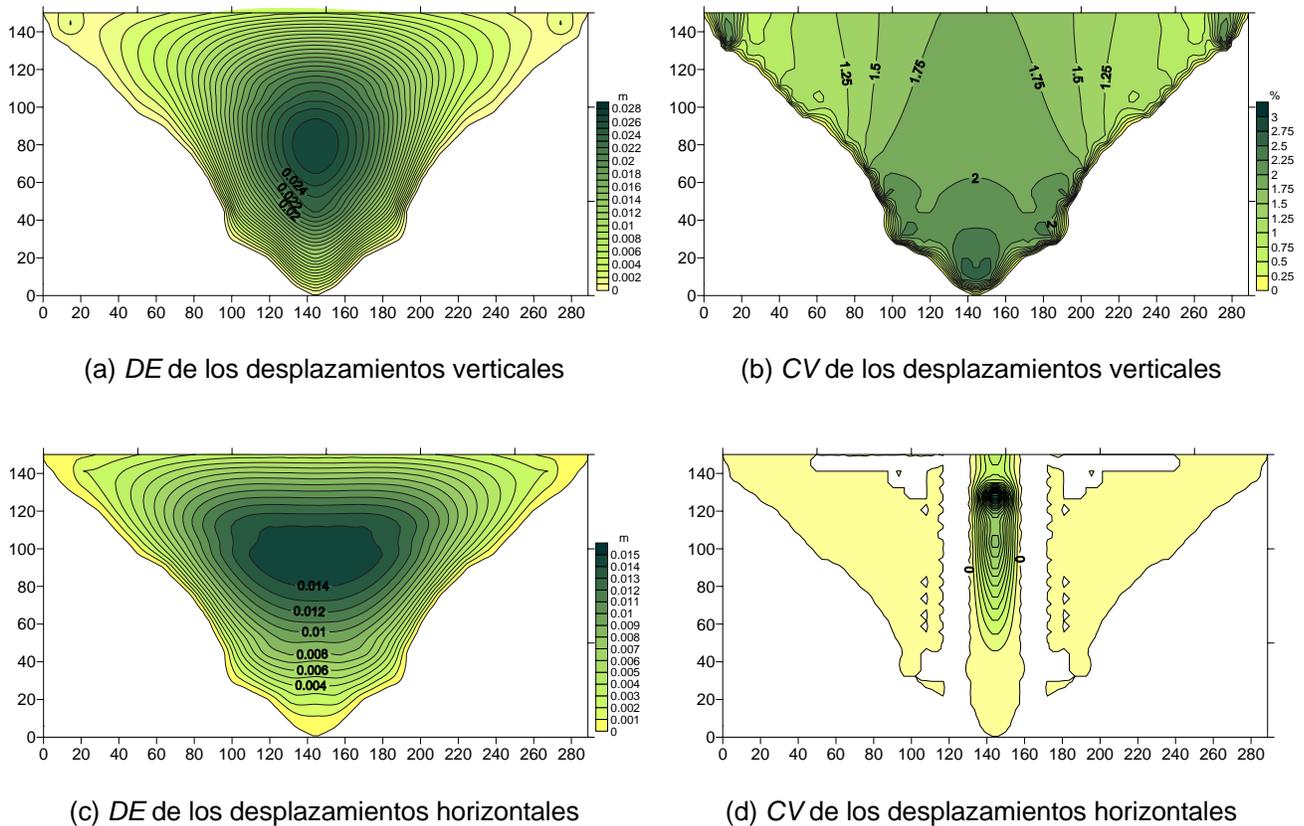
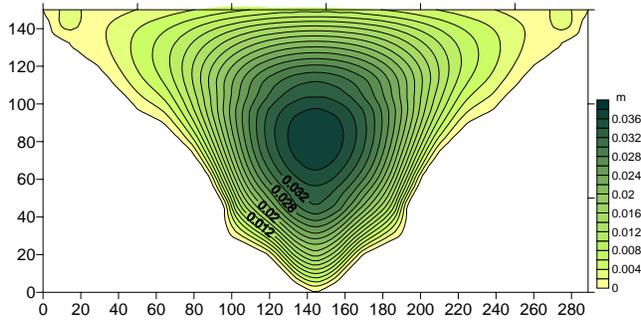
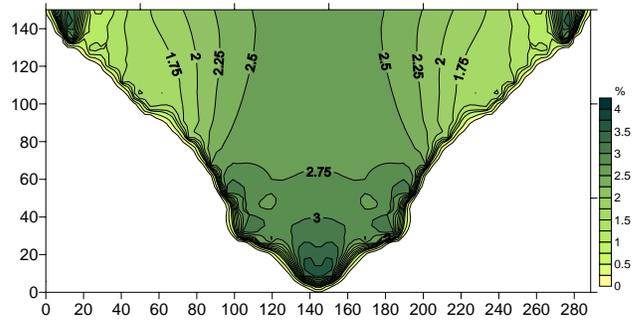


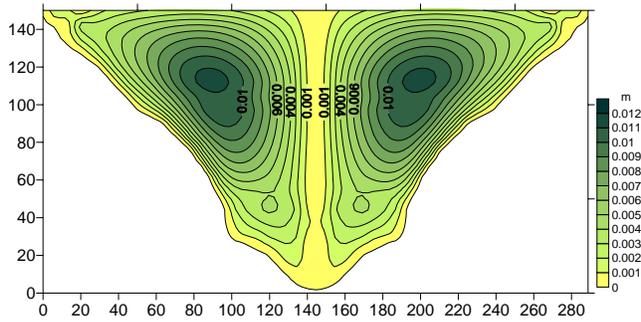
Figura 4.50 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_n$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de deformación)



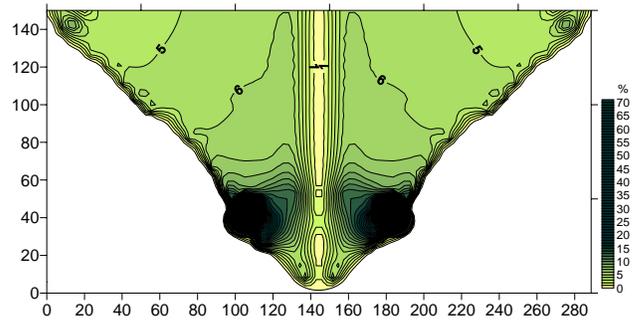
(a) DE de los desplazamientos verticales



(b) CV de los desplazamientos verticales

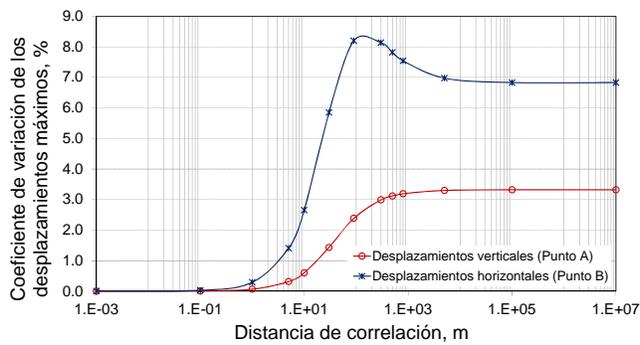


(c) DE de los desplazamientos horizontales

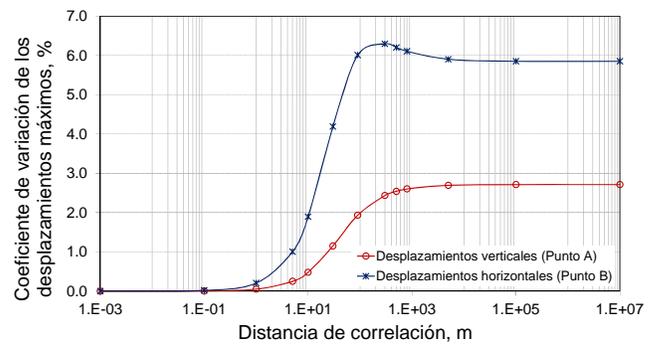


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.51 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_h$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

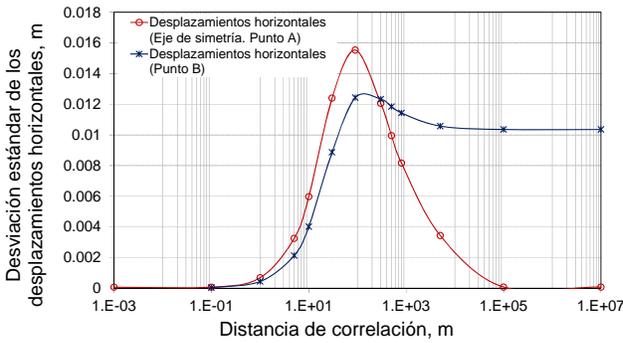


(a)  $E_h$  aleatorio para  $n=1$

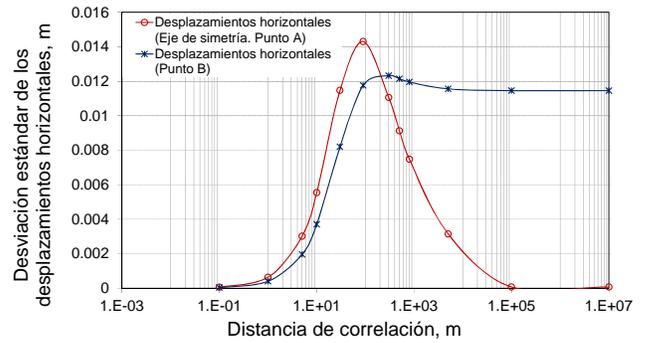


(b)  $E_h$  aleatorio para  $n=0.714$

Figura 4.52 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $E_h$  aleatorio (Estado plano de deformación)



(a)  $E_h$  aleatorio para  $n=1$



(b)  $E_h$  aleatorio para  $n=0.714$

Figura 4.53 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $E_h$  aleatorio (Estado plano de deformación)

(c)  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios

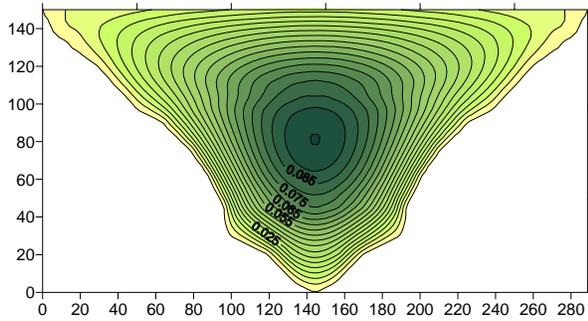
El efecto combinado de los módulos de deformación sobre el campo de desplazamientos en el cuerpo de la presa se observa en las curvas de isovalores de las Figuras 4.54 y 4.55. Los aspectos más importantes del análisis se mencionan a continuación:

–Distancia de correlación intermedia,  $L=90$  m: en los desplazamientos verticales, como se ha anotado en los puntos anteriores, el mayor efecto de la variabilidad de los módulos se presenta en el punto A en donde existen los máximos, en el caso del efecto combinado la incertidumbre se incrementa en comparación con el efecto individual; la  $DE$  es 0.0246 m y  $CV$  es de 6%, Figuras 4.54a y 4.54b respectivamente. En los desplazamientos horizontales, se presentan variaciones en el eje de simetría que son menores que las que se presentan en el punto B, un efecto de compensación estadística entre los dos módulos reduce la incertidumbre en esta zona (Figura 4.54c); el  $CV$ , como se observa en la Figura 4.54d, tiende a infinito en el eje de simetría.

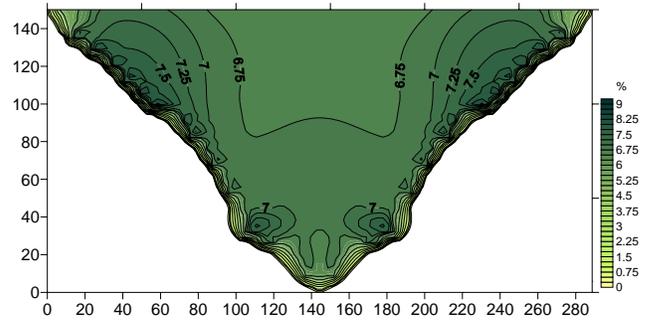
–Distancia de correlación muy grande,  $L=\infty$ : en los desplazamientos verticales, la máxima  $DE$  (0.14 m) se presenta en el punto A, Figura 4.55a; el  $CV$  mayor se presenta en las zonas adyacentes a las laderas (con valores cercanos al 10%), Figura 4.55b. En los desplazamientos horizontales, la incertidumbre en el eje de simetría desaparece, la  $DE$  máxima (0.024 m) se localiza en el punto B (Figura 4.55c); el  $CV$  crece de la zona superior de las laderas (con un valor aproximado del 10%) hacia la zona inferior en donde se presenta el cambio de pendiente que origina que este parámetro estadístico tienda a infinito, Figura 4.55d. El efecto combinado de estos dos parámetros intensifica la incertidumbre sobre los desplazamientos.

La influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos se muestra en las gráficas de la Figura 4.56. Se observa que el efecto de estos dos parámetros es muy similar al que se presenta en el estado plano de esfuerzos. Para distancias de correlación menores de 90 m, el efecto combinado de ambos parámetros sobre los desplazamientos es el mismo; a partir de esta distancia el  $CV$  de los desplazamientos horizontales es mayor que el de los verticales. El  $CV$  máximo del desplazamiento vertical (punto A) es de 9.43 % ( $n=0.714$ , 9.57%) y el del desplazamiento horizontal (punto B) es de 10.95% ( $n=0.714$ , 11.22%).

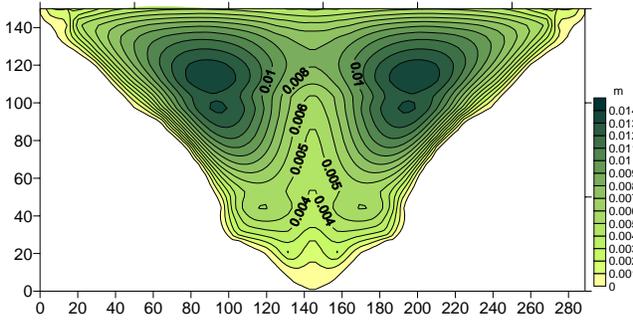
El efecto de la distancia de correlación sobre los desplazamientos horizontales en el eje de simetría se observa en la gráfica de la Figura 4.57. Es evidente el efecto de compensación entre los dos módulos en esta zona, el CV del desplazamiento horizontal en el punto A (eje de simetría) es menor que el que se presenta en el punto B (desplazamiento máximo).



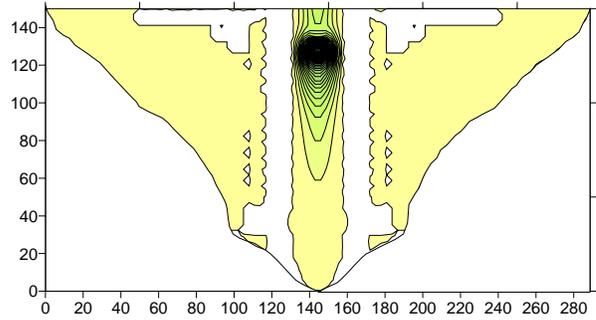
(a) DE de los desplazamientos verticales



(b) CV de los desplazamientos verticales

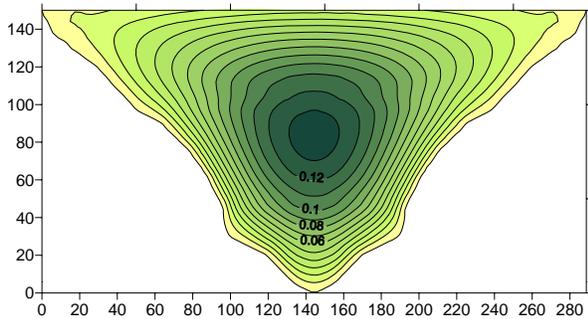


(c) DE de los desplazamientos horizontales

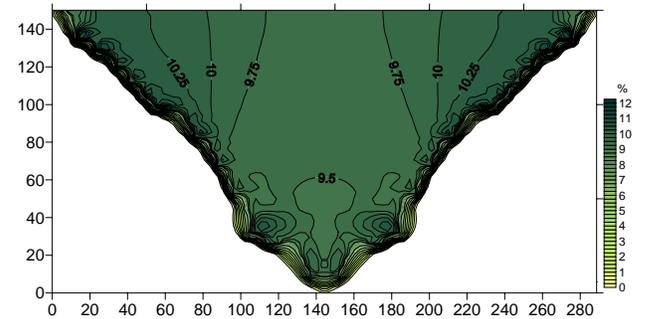


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.54 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de deformación)

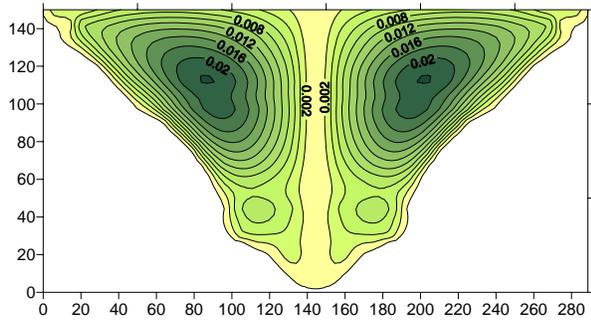


(a) DE de los desplazamientos verticales

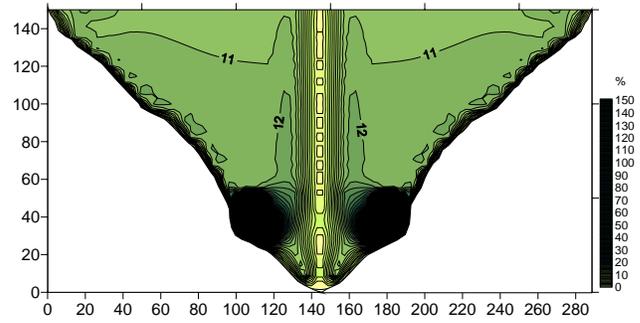


(b) CV de los desplazamientos verticales

Figura 4.55 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

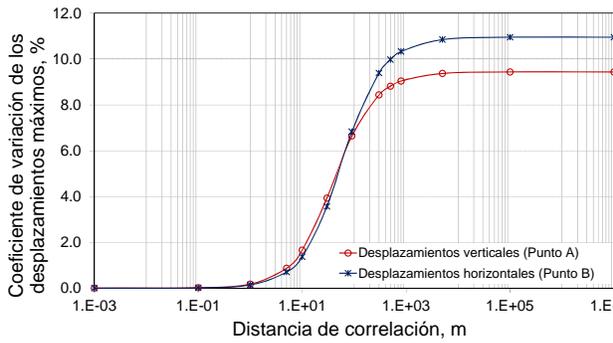


(c) DE de los desplazamientos horizontales

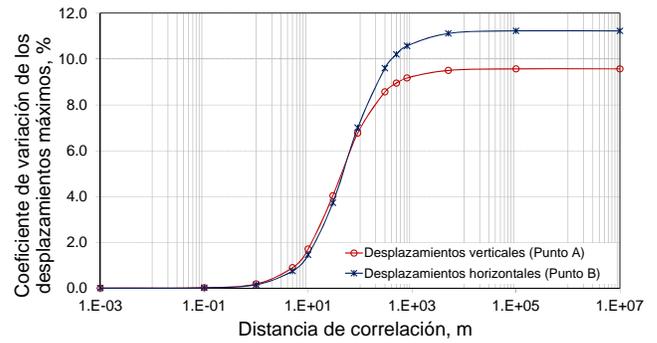


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.55 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación) (Continuación)

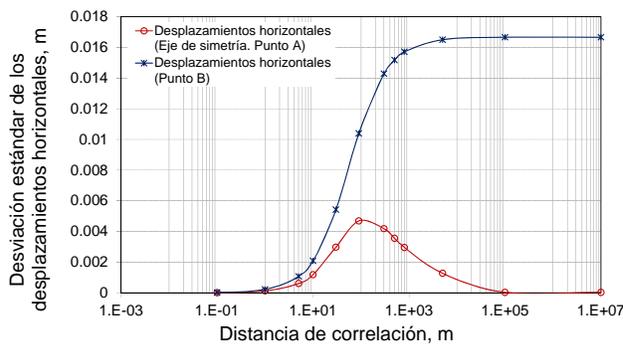


(a)  $n=1$

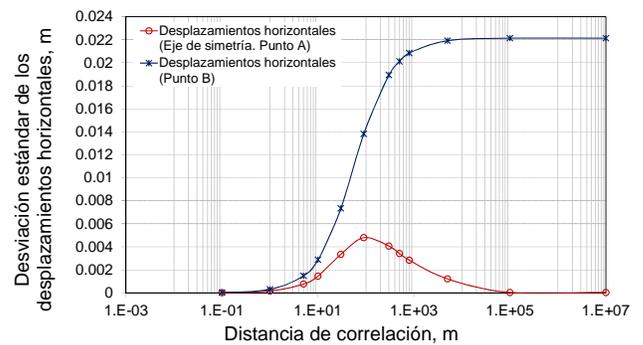


(b)  $n=0.714$

Figura 4.56 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (Estado plano de deformación)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.57 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (Estado plano de deformación)

(d)  $v_{vh}$  aleatoria

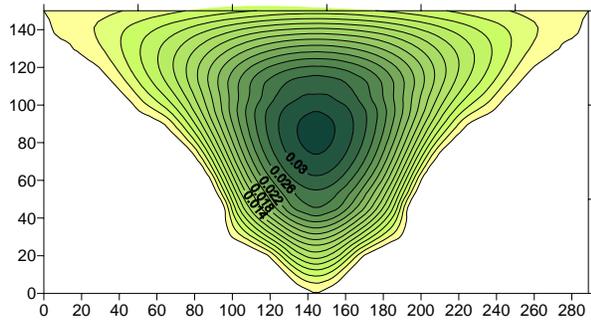
La influencia de la variabilidad de este parámetro sobre la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa se muestra en las curvas de isovalores de las Figuras 4.58 y 4.59, de ellas se explica lo siguiente:

– Distancia de correlación intermedia,  $L=90\text{m}$ : en los desplazamientos verticales, la influencia de este parámetro es baja, la  $DE$  mayor (0.032 m) se localiza en el punto A, Figura 4.58a, en este punto el  $CV$  es de alrededor 2.3%, los mayores valores de este parámetro estadístico se localizan en las zonas superior central e inferior lateral, Figura 4.58b. En los desplazamientos horizontales, existe incertidumbre importante en el eje de simetría; la  $DE$  en el punto A, localizado en el centro de la presa, tiene un valor alrededor de 0.016 m (Figura 4.58c) y el  $CV$  tiende a infinito (Figura 4.58d).

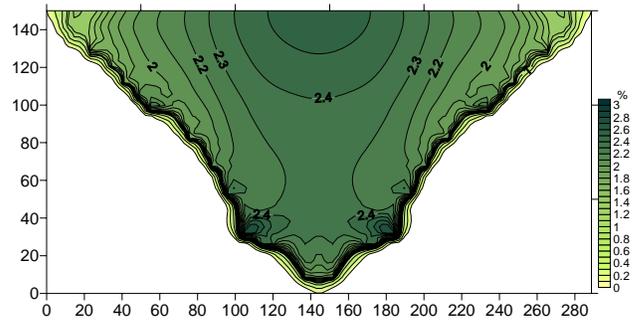
– Distancia de correlación muy grande,  $L=\infty$ : en los desplazamientos verticales, la  $DE$  máxima (0.045 m) alcanzada se localiza en el punto A con mayor desplazamiento (Figura 4.59a), el  $CV$  crece de las zonas cercanas a las laderas hacia el centro superior de la presa con valores máximos de 4%, en la parte inferior cerca del cambio de pendiente se presentan también valores máximos del  $CV$  del orden de 4%, Figura 4.59b. Con respecto a los desplazamientos horizontales, las variaciones aleatorias del material en el eje de simetría son nulas y máximas en el punto B ( $DE=0.0039$ ) que es el de mayor desplazamiento (Figura 4.59c); el  $CV$ , Figura 4.59d, ilustra el efecto de  $v_{vh}$  sobre estos desplazamientos que es mayor en la zona central superior y en la zona inferior de la presa, en el cambio de pendiente.

En la gráfica de la Figura 4.60 se ilustra la influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos. Para el desplazamiento vertical máximo (punto A), el  $CV$  mayor se presenta para una distancia de correlación aproximadamente de 10000 m con una magnitud de 4.7% ( $n=0.714$ , 3.15%). Para el desplazamiento horizontal (punto B), el máximo  $CV$  se alcanza cuando  $L=90$  m con un valor de 8.93% ( $n=0.714$ , 5.65%). Cuando se trata de medios heterogéneos, el efecto de este parámetro sobre las incertidumbres de los desplazamientos horizontales es similar al efecto que los módulos de deformación tienen sobre las incertidumbres de los desplazamientos en medios homogéneos. El efecto de la incertidumbre de este parámetro sobre la incertidumbre de los desplazamientos tiene mayor significancia en el estado plano de deformación que en el estado plano de esfuerzos.

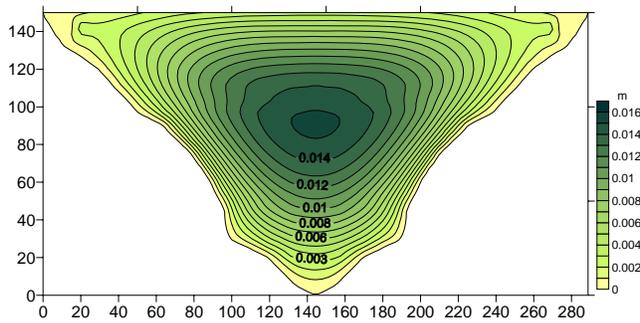
La influencia de la distancia de correlación sobre la desviación estándar de los desplazamientos horizontales en el eje de simetría y en el punto B se presenta en la gráfica de la Figura 4.61. En la zona central de la presa la incertidumbre de estos desplazamientos es simétrica, la  $DE$  en el punto A con valor de 0.0178 m ( $n=0.714$ , 0.015 m) es mayor que la del punto B ( $n=1$ ,  $DE=0.0135\text{m}$ ;  $n=0.714$ ,  $DE=0.011$ ), estos valores corresponden a una distancia de correlación intermedia de 90 m.



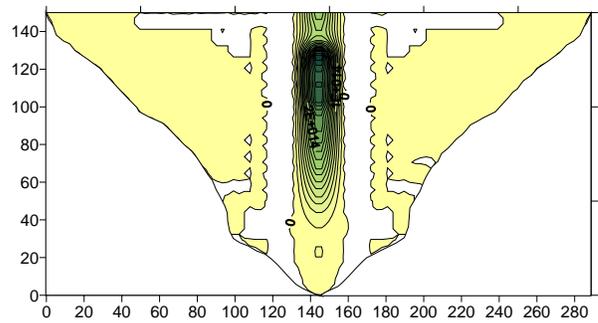
(a) DE de los desplazamientos verticales



(b) CV de los desplazamientos verticales

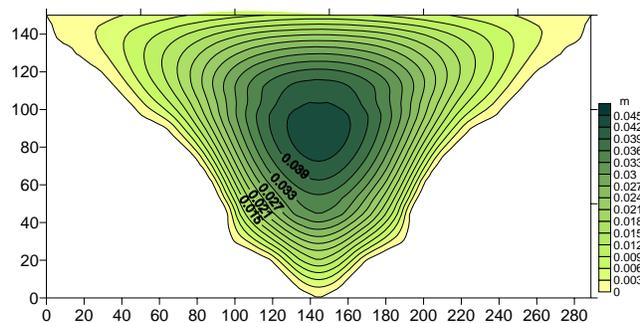


(c) DE de los desplazamientos horizontales

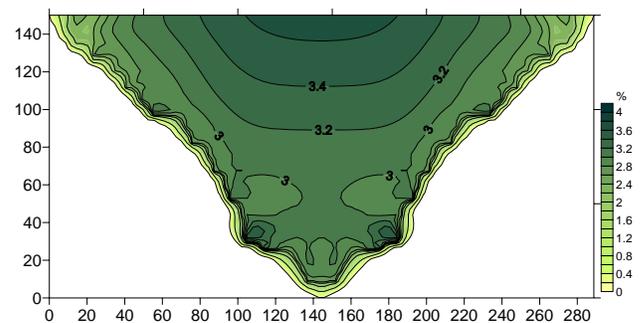


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.58 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{vh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de deformación)

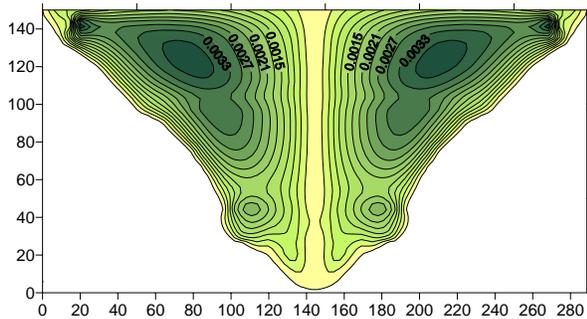


(a) DE de los desplazamientos verticales

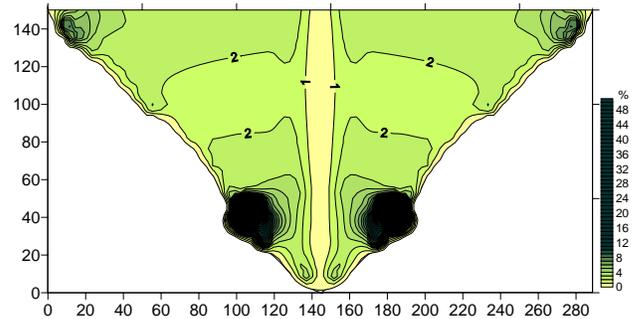


(b) CV de los desplazamientos verticales

Figura 4.59 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{vh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

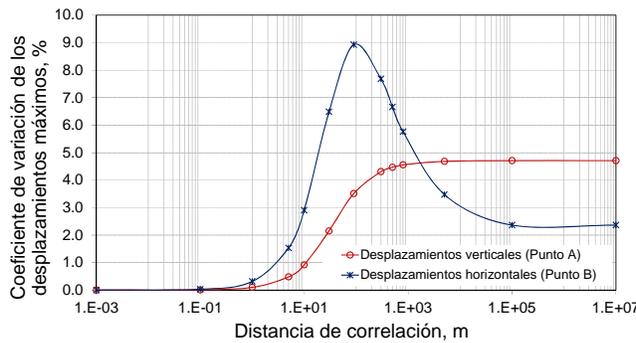


(c) DE de los desplazamientos horizontales

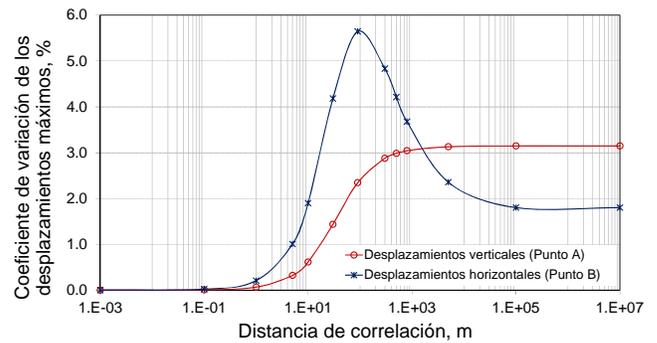


(d) CV de los desplazamientos horizontales

Figura 4.59 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{vh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación) (Continuación)

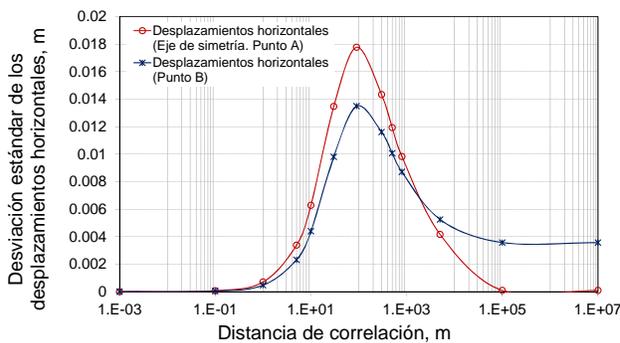


(a)  $n=1$

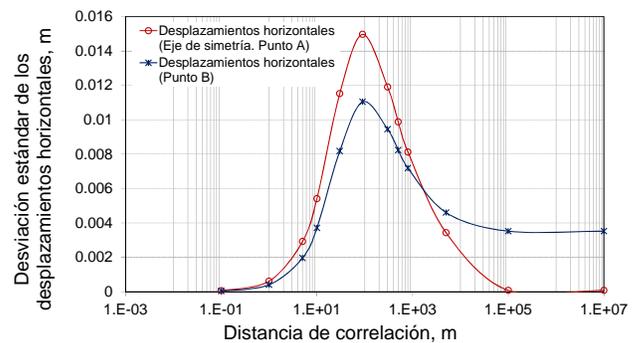


(b)  $n=0.714$

Figura 4.60 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $v_{vh}$  aleatoria (Estado plano de deformación)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.61 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $v_{vh}$  aleatoria (Estado plano de deformación)

(e)  $v_{hh}$  aleatoria

El efecto de este parámetro sobre la incertidumbre de los desplazamientos se explica con las gráficas de isovalores de las Figuras 4.62 y 4.63.

–Distancia de correlación intermedia,  $L=90$  m: aunque la incertidumbre es muy baja, la  $DE$  máxima (0.0035 m) de los desplazamientos verticales se localiza en el punto A y el correspondiente  $CV$  es de 0.25%, como se observa en las Figuras 4.62a y 4.62b, respectivamente. De acuerdo con la configuración del  $CV$  (Figura 4.62b) los valores máximos se localizan en la parte superior de la presa. En los desplazamientos horizontales, existen variaciones muy pequeñas en el eje de simetría del orden de 0.0032 m (Figura 4.62c), lo que conduce a que el  $CV$  tienda a infinito, como se muestra en la Figura 4.62d.

–Distancia de correlación grande,  $L=\infty$ : en los desplazamientos verticales la mayor  $DE$  se sigue presentando en el punto A con un valor muy bajo de 0.0048 m (Figura 4.63a) y el  $CV$  es de 0.33%, Figura 4.63b; el mayor  $CV$  (0.40 %) se presenta en la parte superior de la presa. En los desplazamientos horizontales, la  $DE$  máxima de 0.0016 m se presenta en el punto B (Figura 4.63c), al cual le corresponde un  $CV$  de 0.75% (Figura 4.63d); el  $CV$  en el eje de simetría es nulo y entre la altura 20 m y 40 m tiende a infinito debido al cambio de pendiente.

La influencia de este parámetro sobre el  $CV$  de los desplazamientos, en función de la distancia de correlación se observa en las gráficas de la Figura 4.64. El efecto es muy bajo en los desplazamientos verticales, en el punto A el  $CV$  máximo es del orden de 0.73% ( $n=0.714$ , 0.33%). La mayor influencia de  $v_{hh}$  se presenta en los desplazamientos horizontales (punto B) para distancias de correlación intermedias (materiales heterogéneos) en donde el  $CV$  máximo que se alcanza es de 3.0% ( $n=0.714$ , 1.2%).

En la gráfica de la Figura 4.65 se presenta la influencia de la distancia de correlación sobre la  $DE$  de los desplazamientos horizontales de los puntos A y B. En el eje de simetría (punto A) el comportamiento estos desplazamientos es simétrico; la  $DE$  máxima, que es mayor que la del punto B, se alcanza cuando la distancia de correlación es intermedia  $L=90$  m, con un valor de alrededor de 0.0066 m ( $n=0.714$ ,  $DE=0.0033$  m), para distancias de correlación pequeñas y muy grandes la incertidumbre es nula. En el punto B la  $DE$  que se tiene para  $L=\infty$  es de alrededor de 0.0024 m ( $n=0.714$ ,  $DE=0.0015$  m), muy baja.

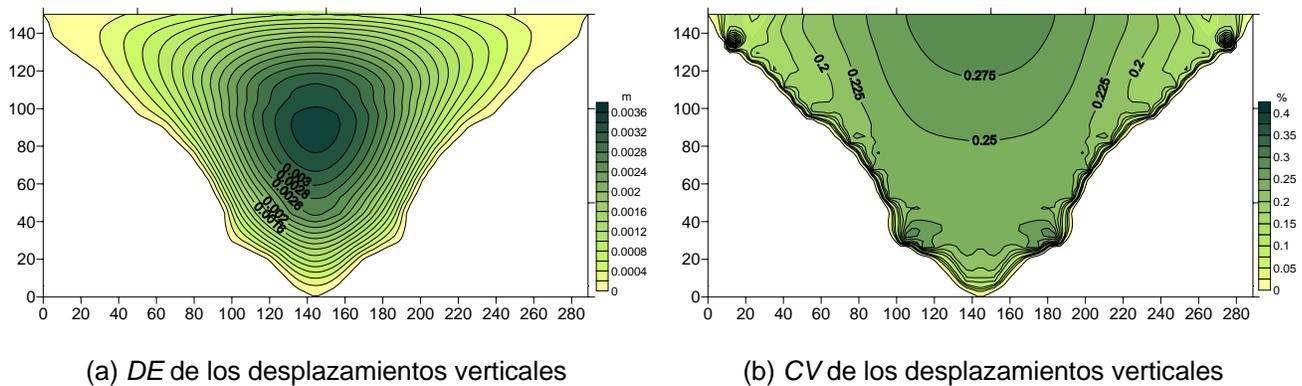
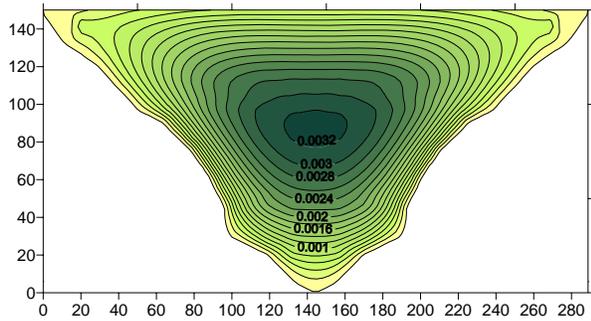
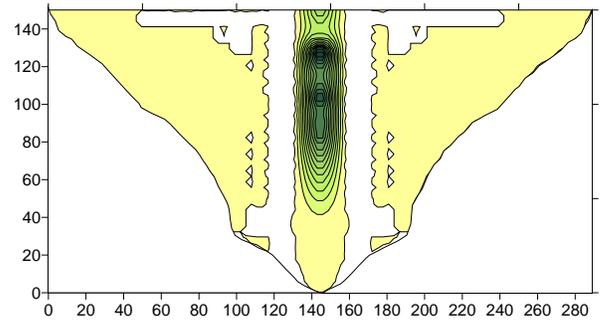


Figura 4.62 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{hh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de deformación)

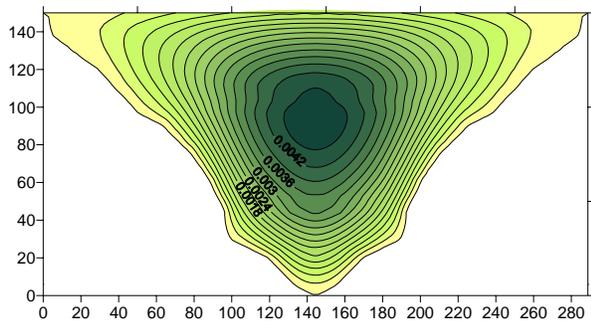


(c) *DE* de los desplazamientos horizontales

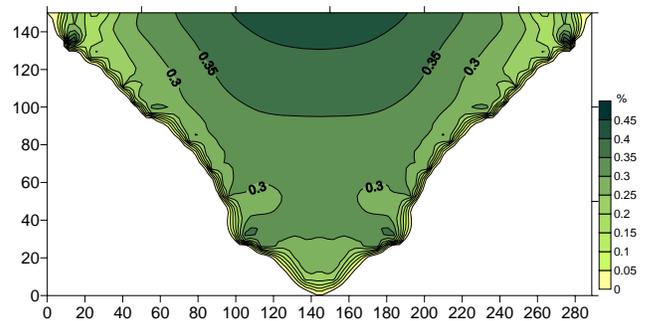


(d) *CV* de los desplazamientos horizontales

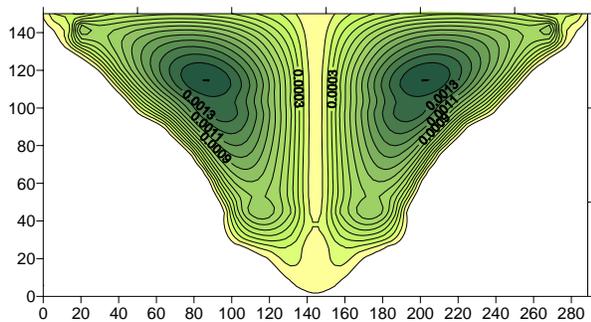
Figura 4.62 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{hh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=90$  m (Estado plano de deformación) (Continuación)



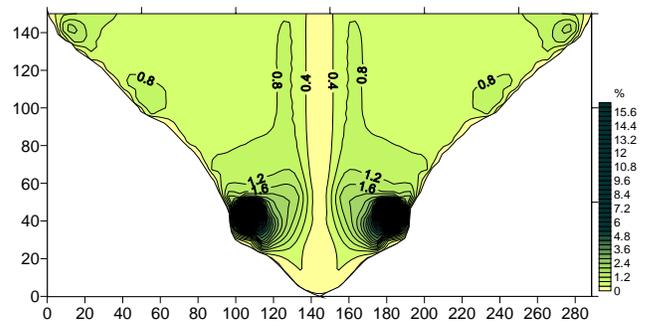
(a) *DE* de los desplazamientos verticales



(b) *CV* de los desplazamientos verticales

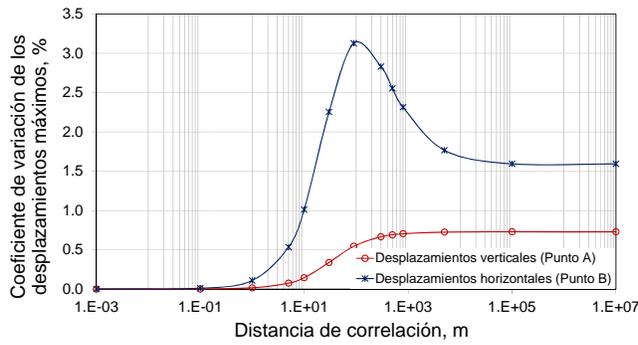


(c) *DE* de los desplazamientos horizontales

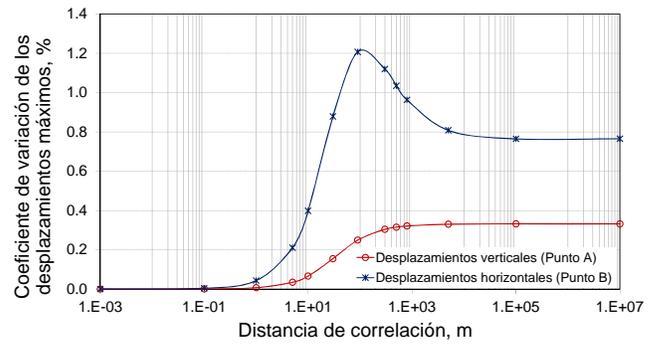


(d) *CV* de los desplazamientos horizontales

Figura 4.63 Configuración de la incertidumbre de los desplazamientos en el cuerpo de la presa para  $v_{hh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

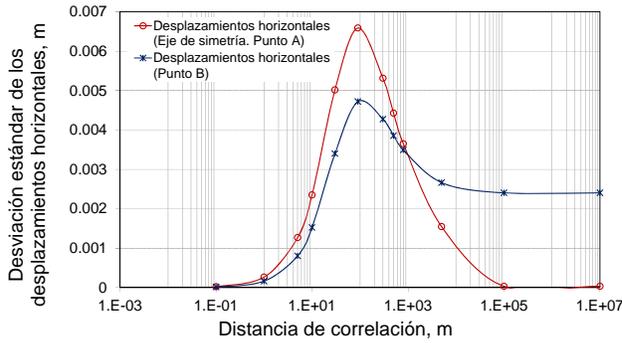


(a)  $n=1$

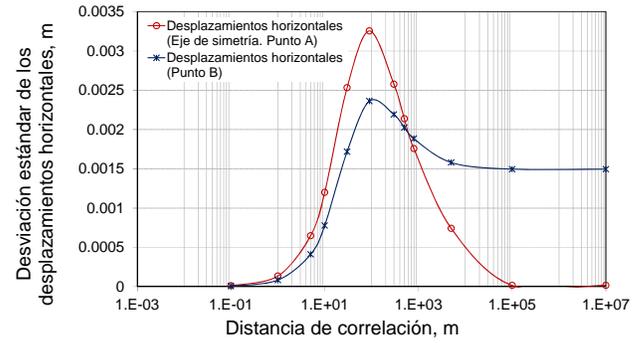


(b)  $n=0.714$

Figura 4.64 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos máximos.  $v_{hh}$  aleatoria (Estado plano de deformación)



(a)  $n=1$



(b)  $n=0.714$

Figura 4.65 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos horizontales correspondientes a los puntos A (eje de simetría) y B (máximos desplazamientos).  $v_{hh}$  aleatoria (Estado plano de deformación)

En la Tabla 4.5 se presenta un resumen del CV de los desplazamientos máximos para los grados de anisotropía  $n=1$  y  $n=0.714$ , se considera una distancia de correlación grande. Si el grado de anisotropía disminuye, el efecto de las incertidumbres  $E_h$ ,  $v_{vh}$  y  $v_{hh}$  sobre el CV de los desplazamientos disminuye. En cambio cuando  $E_v$  es aleatorio, las incertidumbres que afectan los desplazamientos aumentan. Esta misma situación se presenta para el caso de campos aleatorios combinados ( $E_v$  y  $E_h$ ), aunque el incremento es pequeño.

Tabla 4.5 CV de los desplazamientos máximos para  $n=1$  y  $n=0.714$ .  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

Grado de anisotropía, $n$	$CV_{\delta}$ (%)	$E_v$	$E_h$	$E_v$ y $E_h$	$v_{vh}$	$v_{vh}$	$v_{hh}$
		$L=\infty$	$L=\infty$	$L=\infty$	$L=90$ m	$L=\infty$	$L=\infty$
1	$\delta x_{\text{máx}}$ (Punto A)	3.23	6.82	10.95	8.93	2.36	1.59
	$\delta y_{\text{máx}}$ (Punto B)	6.72	3.32	9.44	3.52	4.70	0.73
0.714	$\delta x_{\text{máx}}$ (Punto A)	4.28	5.85	11.23	5.65	1.80	0.76
	$\delta y_{\text{máx}}$ (Punto B)	7.40	2.70	9.57	2.35	3.15	0.33

#### 4.7.2.2 Esfuerzo principal menor $\sigma_3$

En las gráficas de la Figura 4.66 se muestra la distribución del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa. El valor esperado mínimo de  $\sigma_3$  se presenta en la cresta y los mayores en la parte central de la presa (punto A) con un valor máximo de 0.75 MPa (0.55 MPa para  $n=0.714$ ).

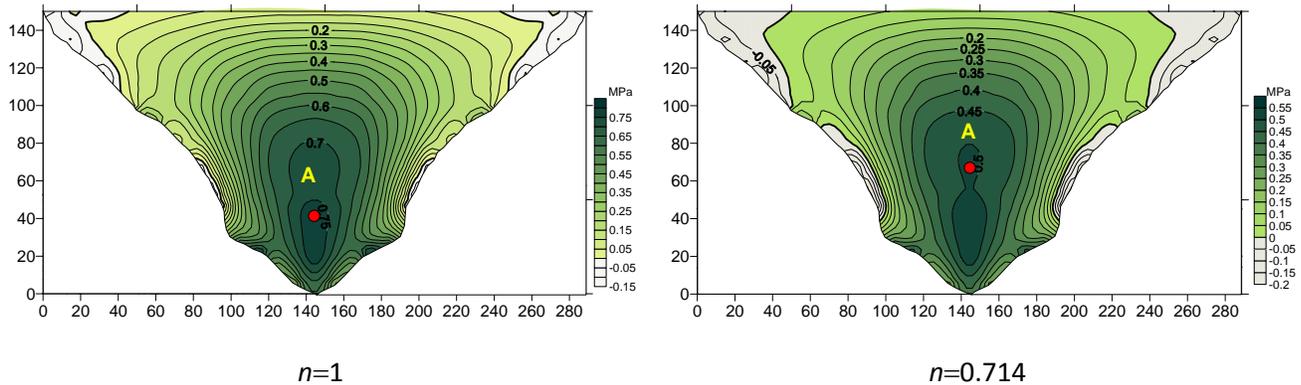


Figura 4.66 Configuración de la esperanza de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa (Estado plano de deformación)

Se estudia la influencia de la incertidumbre de los parámetros del material sobre la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa, mediante las curvas de igual desviación estándar ( $DE$ ) y coeficiente de variación ( $CV$ ), se considera  $n=0.714$  y  $L=\infty$ . Asimismo, se analiza el efecto de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de  $\sigma_3$  en puntos con  $DE$  máxima como: punto A que se localiza en parte central de la presa (144.36 m, 825.5 m), punto B el cual se ubica en la parte inferior de la ladera y fuera de la zona de tensión (174.56 m, 22.8 m), punto C que se encuentra en la zona de tensión (196.16 m, 52.5 m) y punto D que corresponde a la zona de tensión en la cresta (288.72 m, 170 m). A continuación se exponen los resultados.

##### (a) $E_v$ aleatorio

El efecto de este parámetro se aprecia en las gráficas de la Figura 4.67. De acuerdo con la distribución de la  $DE$  de  $\sigma_3$  (Figura 4.67a) los máximos valores se concentran en las zonas intermedias adyacentes a las laderas, los nulos se localizan en la cresta. El menor  $CV$  de  $\sigma_3$  se localiza a lo largo de la parte central de presa, se incrementa hacia las laderas de forma vertical; en la zona en donde el valor esperado de  $\sigma_3$  es nulo o muy bajo el  $CV$  tiende a infinito, Figura 4.67b.

La influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre ( $CV$ ) de  $\sigma_3$  se muestra en la gráfica de la Figura 4.68. Los puntos que presentan mayor  $CV$  corresponden a C (zona de tensión, ladera central) y D (zona de tensión, cresta). Cuando  $n=1$  el  $CV$  del punto C es muy alto, esto se debe a que la zona de tensión es casi nula lo que conduce a valores de esfuerzo de tensión muy bajos que incrementan el  $CV$ , Figura 4.68a. Cuando el grado de anisotropía  $n$  disminuye, la zona de tensión en la parte central adyacente a las laderas aumenta, por lo que el  $CV$  en esa zona (punto C) disminuye, Figura 4.68b. En conclusión, el efecto mayor de este parámetro es en la zona central adyacente a las laderas (zona de tensión), el cual se acentúa cuando  $L=300$  m.

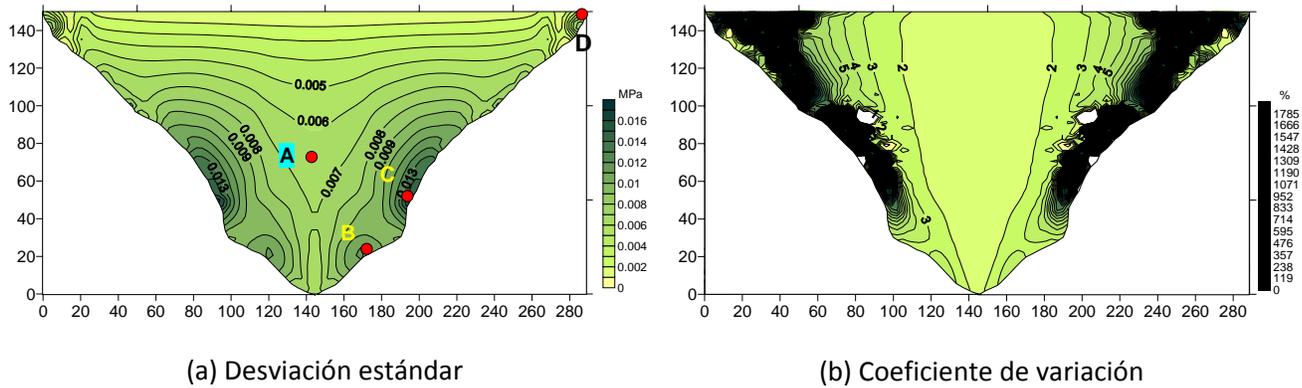


Figura 4.67 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $E_v$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

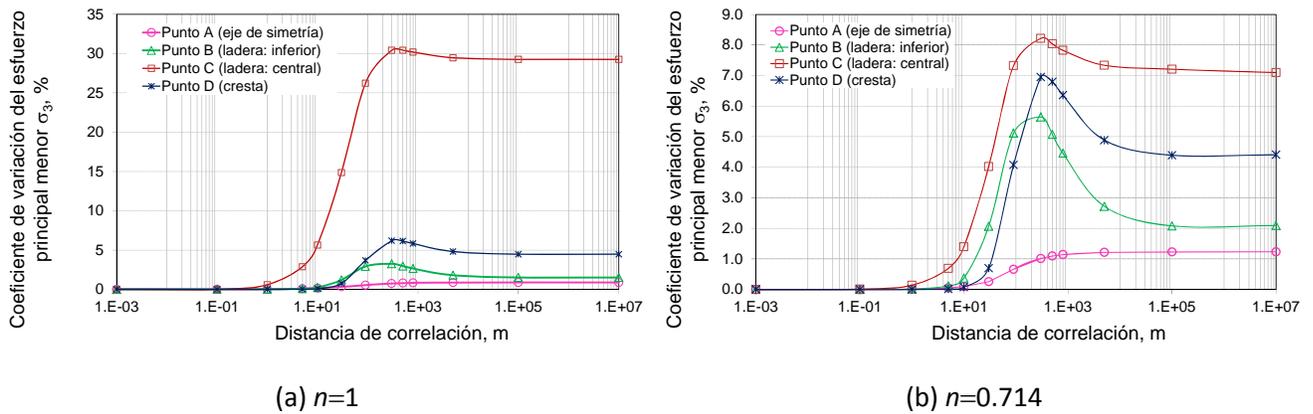


Figura 4.68 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $E_v$  aleatorio (Estado plano de deformación)

(b)  $E_h$  aleatorio

La configuración de la  $DE$  de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa se presenta en la gráfica de la Figura 4.69a, en ella se observa que los mayores valores se localizan en la parte central de la presa y en la zona adyacente a las laderas; los menores en la zona central de la cresta y en el área muy cercana en donde los esfuerzos cambian de signo. El efecto de este parámetro sobre  $\sigma_3$  se puede apreciar mejor con las curvas de igual CV de la Figura 4.69b, se tiene que el efecto de este parámetro en el centro de la presa crece de la parte inferior hacia la cresta de forma horizontal; en las zonas cercanas a las laderas, el CV se incrementa y tiende a infinito cuando  $\sigma_3$  es nulo o muy bajo.

La influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$  se presenta en las gráficas de la Figura 4.70, en donde se observa que los máximos valores se alcanzan cuando dicha distancia es muy grande. Nuevamente, si  $n=1$  el CV del punto C es muy grande debido a que el valor esperado de los esfuerzos de tensión es casi nulo. El efecto de este parámetro sobre los puntos analizados,

se puede apreciar mejor cuando  $n=0.714$ , se tiene que el CV de  $\sigma_3$  es mayor en el punto D (zona de tensión) que se localiza en la cresta, adyacente a la ladera, con un valor 10%, el menor valor se localiza en el punto A (eje de simetría) y en el punto B (ladera inferior) con un valor de alrededor de 1.8%.

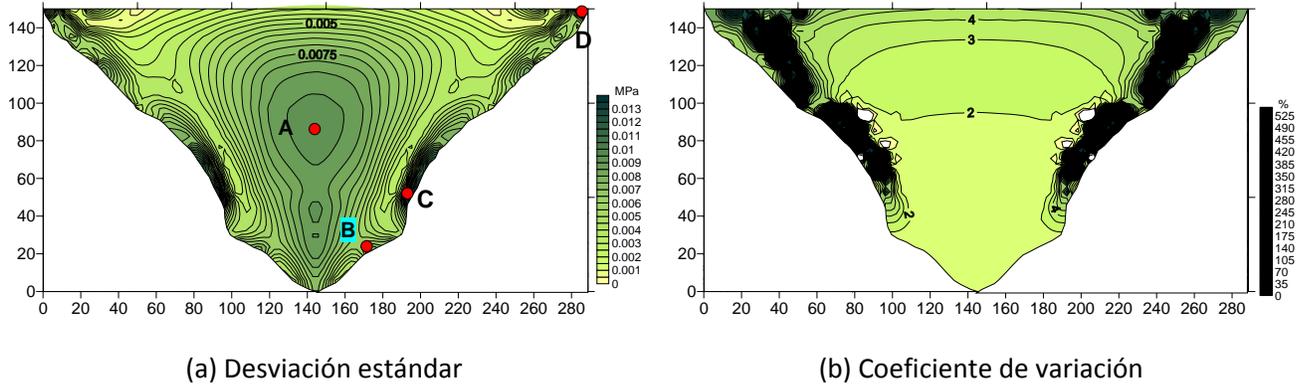


Figura 4.69 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $E_h$  aleatorio.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

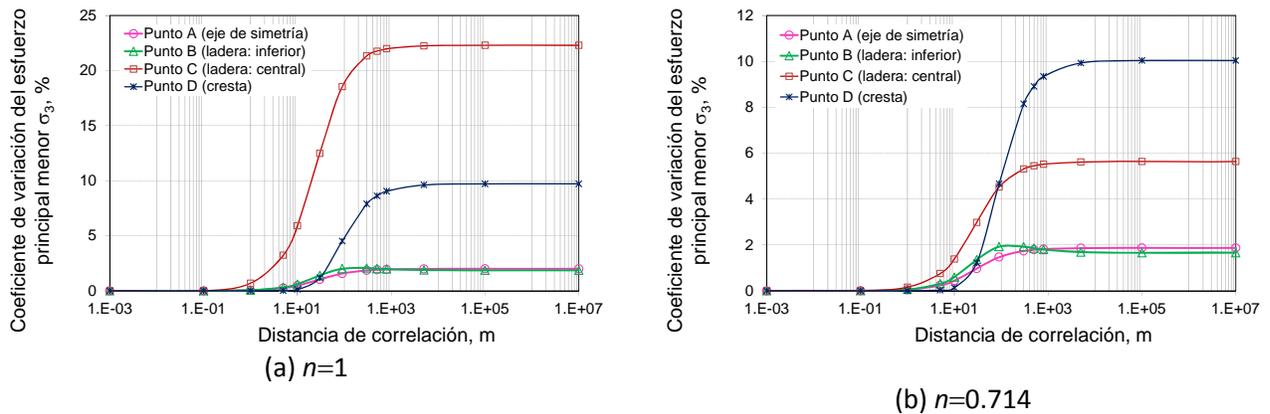


Figura 4.70 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $E_h$  aleatorio (Estado plano de deformación)

(c)  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios

El efecto combinado de la incertidumbre de los módulos de deformación sobre la incertidumbre de  $\sigma_3$  en todo el cuerpo de la presa se presenta en las curvas de isovalores de la Figura 4.71. Se observa que la configuración de la incertidumbre ( $DE$  y  $CV$ ) en el cuerpo de la presa es similar a la de  $E_h$ . La magnitud de la  $DE$  (Figura 4.71a) en el centro de la presa es mayor que la debida a cada módulo por separado; en la ladera la  $DE$  es ligeramente menor que en el centro, debido a un efecto de compensación estadística entre los dos módulos. El  $CV$  en el centro de la presa crece de forma horizontal de la parte inferior hacia la cresta, con un valor máximo de alrededor de 9 %, mayor que el debido a la incertidumbre en  $E_h$ .

La influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$  se aprecia en las gráficas de la Figura 4.72. Como se muestra en Figura 4.72b, correspondiente a  $n=0.714$ , cuando la distancia de correlación es menor de 90 m, el efecto combinado de estos parámetros sobre el CV de  $\sigma_3$  es mayor en el punto C (zona de tensión, ladera central), después de esta distancia el CV en el punto D (zona de tensión, cresta) crece y alcanza el máximo valor de 9% cuando  $L=5000$  m. El CV en este punto es menor que el debido al efecto de  $E_h$  individual. El menor CV se presenta en los punto A (eje de simetría) y punto B (ladera inferior).

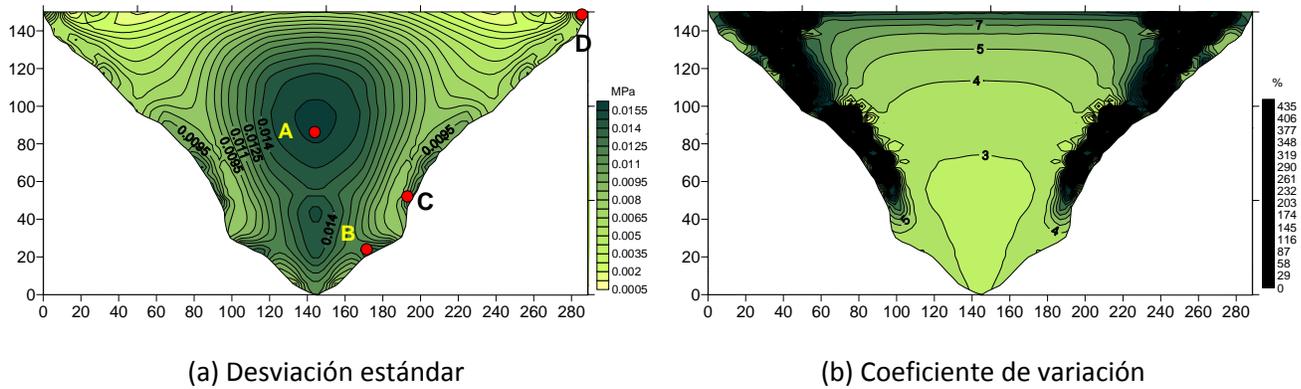


Figura 4.71 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

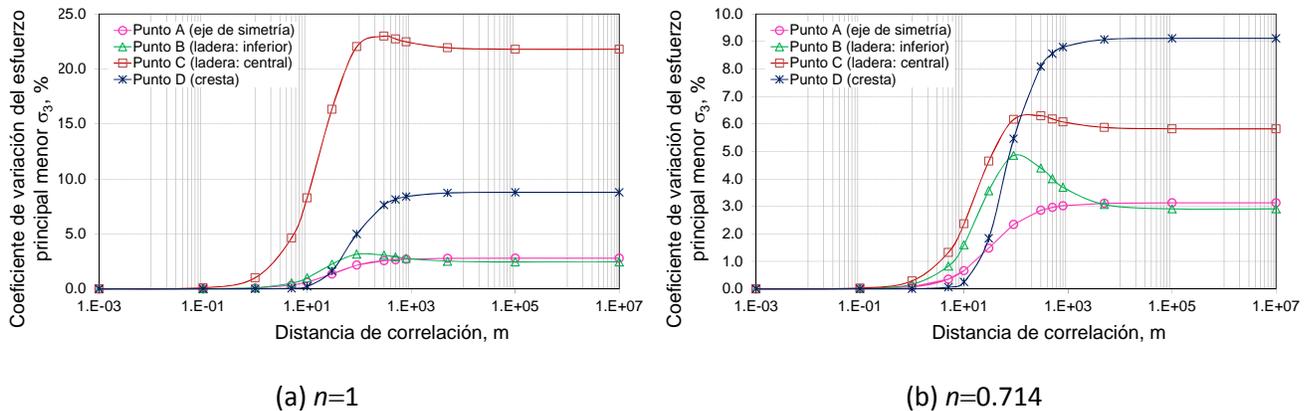


Figura 4.72 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $E_v$  y  $E_h$  aleatorios (Estado plano de deformación)

(d)  $v_{vh}$  aleatoria

La distribución de la incertidumbre en el cuerpo de la presa se ilustra en las gráficas de la Figura 4.73. De acuerdo con los curvas de igual  $DE$  (Figura 4.73a), el valor máximo se localiza en la zona inferior de la presa. El efecto de este parámetro sobre la incertidumbre de  $\sigma_3$  se puede apreciar con la configuración del CV de la Figura 7.73b, en donde los valores menores se presentan en la parte central de la presa y crecen con magnitudes hasta infinito hacia las laderas en donde el valor esperado de  $\sigma_3$  es nulo. En la parte central de la cresta la incertidumbre es baja.

En la gráfica de la Figura 4.74 se presenta la influencia de la distancia de correlación sobre el CV  $\sigma_3$ . El mayor efecto de este parámetro se alcanza cuando el material es homogéneo (distancias de correlación muy grandes) y afecta principalmente la zona central de las laderas (punto C, zona de tensión) con valores del orden 4%, el menor efecto se presenta en el punto D (zona de tensión, cresta). El efecto de este parámetro sobre el CV de  $\sigma_3$  en estos dos puntos, es contrario al que se presenta en el estado plano de esfuerzo.

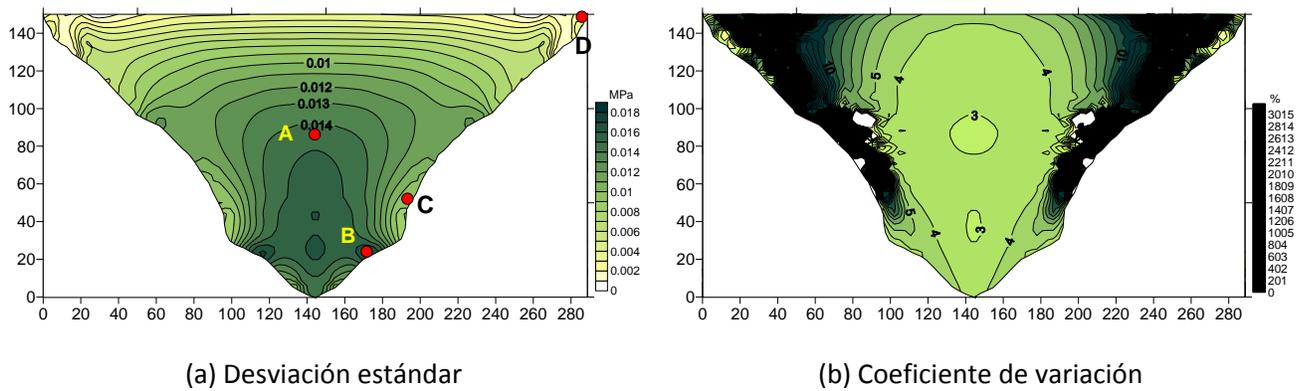


Figura 4.73 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $\nu_{vh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

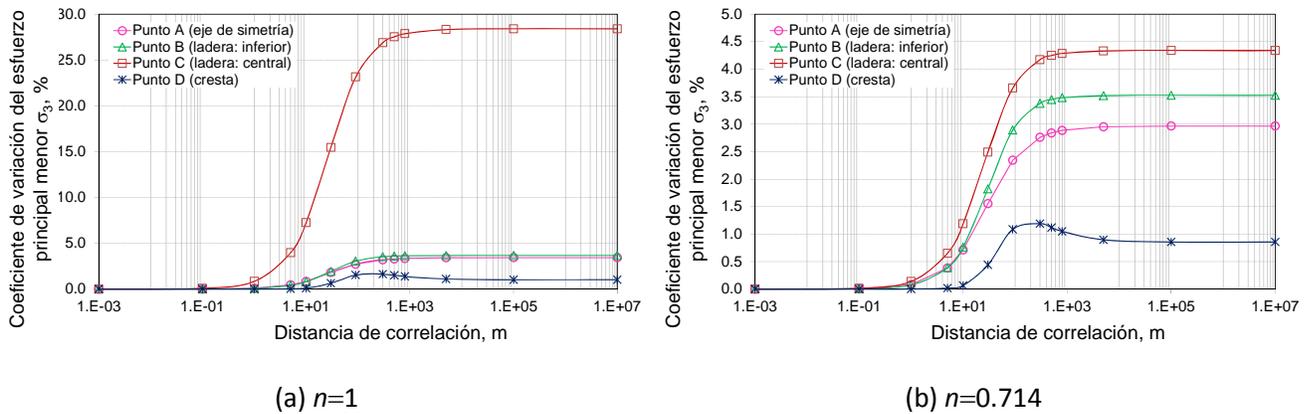


Figura 4.74 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $\nu_{vh}$  aleatoria (Estado plano de deformación)

(e)  $\nu_{hh}$  aleatoria

La distribución de la incertidumbre ( $DE$  y  $CV$ ) de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa se observa en las curvas de isovalores de la Figura 4.75. El mayor valor de la  $DE$  se presenta en zona central y su magnitud es muy baja del orden de 0.0022 m, Figura 4.75a. El  $CV$  aumenta de forma horizontal del centro de la presa hacia la parte superior con valores máximos de alrededor de 1%, como se observa en las curvas de isovalores de la Figura 4.75b.

La influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$  se muestra en la gráfica de la Figura 4.43. En el caso de  $n=1$  (Figura 4.43a) el CV del punto C, que se localiza en el centro de la ladera, es muy grande debido a que la zona de tensión es muy pequeña y entonces el valor esperado de  $\sigma_3$  es también muy pequeño. El efecto de  $\nu_{hh}$  se visualiza mejor cuando  $n$  disminuye como se muestra en la Figura 4.43b, de donde se tiene que cuando  $L=\infty$  el CV en el cuerpo de la presa es muy bajo, los máximos valores corresponden a los puntos C y D (zona de tensión) y son del orden de 0.75%, los mínimos corresponden a los punto A y B (fuera de la zona de tensión) con un valor de 0.4%. La incertidumbre de este parámetro no tiene efecto sobre la incertidumbre de  $\sigma_3$ .

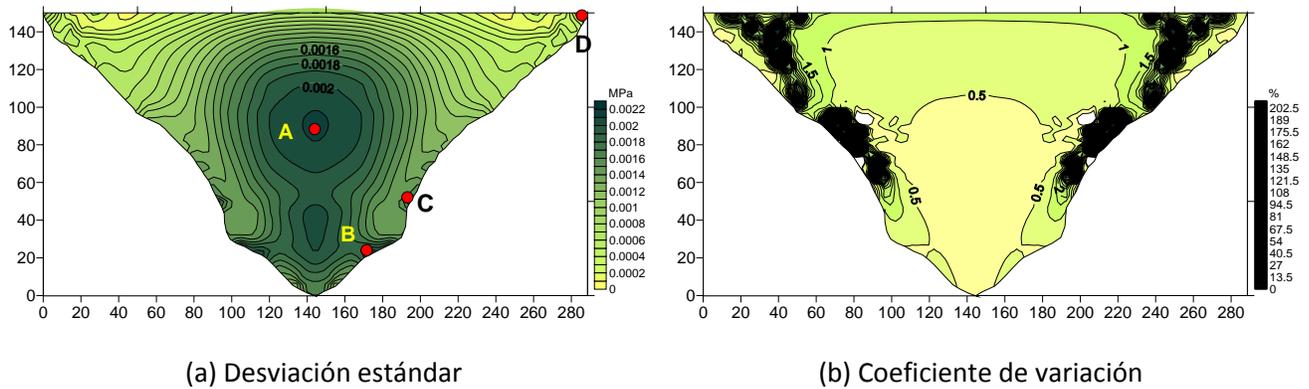


Figura 4.75 Configuración de la incertidumbre de  $\sigma_3$  en el cuerpo de la presa para  $\nu_{hh}$  aleatoria.  $n=0.714$  y  $L=\infty$  (Estado plano de deformación)

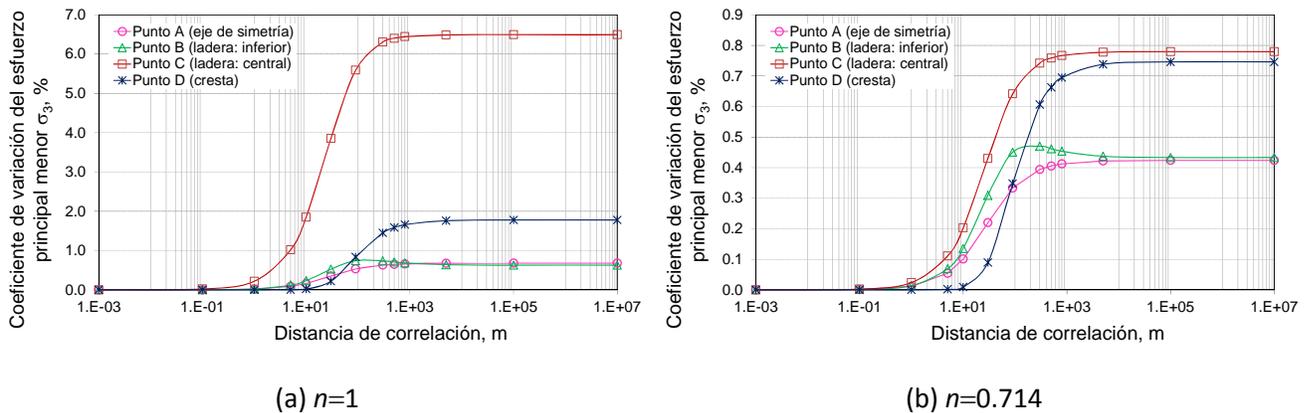


Figura 4.76 Influencia de la distancia de correlación sobre el CV de  $\sigma_3$ .  $\nu_{hh}$  aleatoria (Estado plano de deformación)

Para una distancia de correlación grande, la influencia de las incertidumbres de los parámetros sobre el CV de  $\sigma_3$  para  $n=1$  y  $n=0.714$  se resume en la Tabla 4.6. El efecto individual de las incertidumbres de los módulos de deformación  $E_v$  y  $E_h$  se refleja mayormente sobre las incertidumbres de los esfuerzos de tensión localizados en los puntos C (ladera central) y D (cresta), respectivamente. En particular, la influencia de las incertidumbres de  $E_h$  sobre la incertidumbres de  $\sigma_3$  es más notable, por lo que efecto combinado de las incertidumbres de los

módulos de deformación ( $E_v$  y  $E_h$ ) es más significativo sobre las incertidumbres de los esfuerzos de tensión localizados en el punto D. En cuanto a las incertidumbres de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$ , su efecto es mayor sobre las incertidumbres de los esfuerzos de tensión  $\sigma_3$  localizados en el punto C (ladera central), pero menor que el de los módulos de deformación. Finalmente, el efecto de las incertidumbres de  $\nu_{hh}$  sobre las incertidumbres de  $\sigma_3$  es casi nulo.

Tabla 4.6 CV del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  para  $n=1$  y  $n=0.714$ .  $L=\infty$ . (Estado plano de deformación)

Grado de anisotropía	CV de $\sigma_3$ (%)	$E_v$ aleatorio	$E_h$ aleatorio	$E_v$ y $E_h$ aleatorios	$\nu_{vh}$ aleatorio	$\nu_{hh}$ aleatorio
$n=1$	(punto A)	0.88	2.0	2.79	3.43	0.68
	(punto B)	1.50	1.87	2.45	3.67	0.63
	(punto C)	---	---	---	---	---
	(punto D)	4.47	9.72	8.78	1.02	1.78
$n=0.714$	(punto A)	1.23	1.87	3.13	2.97	0.43
	(punto B)	2.09	1.66	2.90	3.50	0.43
	(punto C)	7.10	5.64	5.82	4.34	0.78
	(punto D)	4.41	10.04	9.11	0.85	0.75

#### 4.7.3 Resumen de resultados

A continuación se presenta un resumen de los resultados de los análisis estocásticos de la presa La Angostura, realizados con la extensión de la formulación del MEFEE anisótropo, desarrollada en este trabajo. Se comparan los resultados obtenidos para los estados planos de esfuerzo y deformación.

##### 4.7.3.1 Desplazamientos

La influencia de las incertidumbres de los parámetros elásticos lineales anisótropos sobre las incertidumbres de los desplazamientos máximos, correspondientes a un grado de anisotropía  $n=0.714$ , se presenta en la Tabla 4.7. Se observa que efecto individual de la variabilidad espacial de los módulos de deformación  $E_v$  y  $E_h$  tiene más significancia sobre las incertidumbres de los desplazamientos en materiales homogéneos ( $L=\infty$ ). También se observa, que las incertidumbres que afectan los desplazamientos son ligeramente mayores en el estado plano de esfuerzo cuando  $E_v$  es aleatorio, y en el estado plano de deformación cuando  $E_h$  es aleatorio. Las incertidumbres del módulo de deformación horizontal  $E_h$  y las de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$ , en cuanto a desplazamientos horizontales se refiere, tienen mayor efecto en materiales heterogéneos ( $L=90$  m). En particular, el efecto  $\nu_{vh}$  sobre el CV de los desplazamientos es mayor en el estado de deformación plana, esto debido a la forma de la matriz de elasticidad en donde este parámetro tiene una mayor intervención.

Tabla 4.7 CV máximo de los desplazamientos para estados planos de esfuerzo y deformación para  $n=0.714$

Estado plano	$CV_\delta$ (%)	$E_v$ $L=\infty$	$E_h$ $L=\infty$	$E_h$ y $E_v$ $L=\infty$	$\nu_{vh}$ $L=90m$	$\nu_{vh}$ $L=\infty$	$\nu_{hh}$ $L=\infty$	$E_h, E_v$ y $\nu_{vh}$ $L=\infty$
Esfuerzo	$\delta_{x\text{máx.}}$ (punto A)	4.97	5.19	11.32	3.91	0.86	---	11.35
	$\delta_{y\text{máx.}}$ (punto B)	8.20	1.97	9.64	1.10	1.46	---	9.54
Deformación	$\delta_{x\text{máx.}}$ (punto A)	4.28	5.85	11.23	5.65	1.80	0.76	---
	$\delta_{y\text{máx.}}$ (punto B)	7.40	2.70	9.57	2.35	3.15	0.73	---

#### 4.7.3.2 Esfuerzos

El efecto de la incertidumbre de los parámetros del material sobre la incertidumbre (CV) del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  para  $n=0.714$  y  $L=\infty$ , se presenta en la Tabla 4.8. Las incertidumbres del módulo de deformación vertical  $E_v$  afectan notablemente los esfuerzos  $\sigma_3$  de tensión que se localizan en la zona central (punto C), solamente para la condición plana de deformación. La influencia de la variabilidad espacial del módulo de deformación horizontal  $E_h$  tiene mayor significancia sobre las zonas de tensión, en particular sobre la zona de la cresta (punto D), este efecto se presenta para estados planos de esfuerzo y deformación. El efecto combinado de las incertidumbres de los módulos de elasticidad se refleja más sobre las incertidumbres de los esfuerzos de tensión que se localizan en el punto D (cresta). El mayor efecto de las incertidumbres de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  sobre las incertidumbres de los esfuerzos de tensión se presenta para el estado de deformación plana, específicamente en la zona central (punto C).

Tabla 4.8 CV máximo de  $\sigma_3$  para estados planos de esfuerzo y deformación para  $n=0.714$  y  $L=\infty$

Estado plano	CV de $\sigma_3$ (%)	$E_v$	$E_h$	$E_v$ y $E_h$	$\nu_{vh}$	$\nu_{hh}$	$E_h, E_v$ y $\nu_{vh}$
Esfuerzo	(punto A)	1.03	1.04	3.28	1.60	---	3.22
	(punto B)	1.64	0.60	3.70	1.07	---	3.17
	(punto C)	1.76	4.18	3.86	1.83	---	3.86
	(punto D)	1.81	10.04	9.28	2.24	---	9.33
Deformación	(punto A)	1.23	1.87	3.13	2.97	0.43	---
	(punto B)	2.09	1.66	2.90	3.50	0.43	---
	(punto C)	7.10	5.64	5.82	4.34	0.78	---
	(punto D)	4.41	10.04	9.11	0.85	0.75	---

#### 4.7.4 Cálculo de probabilidades de fractura

A partir de los resultados del análisis de incertidumbre, es posible calcular las probabilidades de fractura en la zona de la ladera. De acuerdo con el criterio de Rankine existirá una fractura, cuando los esfuerzos alcancen un valor límite de cero o cambien de signo  $\sigma_3 \leq 0$  ( $\sigma_3$  es el esfuerzo principal menor).

Para el cálculo de probabilidades se supone que la densidad de probabilidad de los esfuerzos calculados en todo el cuerpo de la presa es Gaussiana, por la que la variable estandarizada se escribe como:

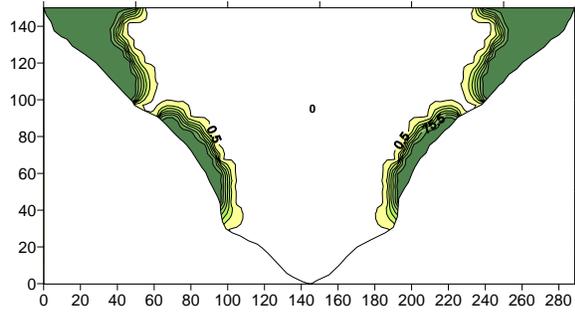
$$Z = \frac{\sigma_3 - \mu_{\sigma_3}}{DE(\sigma_3)} \quad (4.3)$$

Entonces, la probabilidad de que  $\sigma_3$  sea cero o negativo se calcula como:

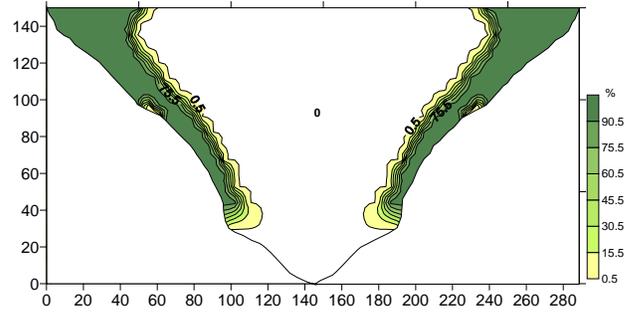
$$P \left\{ Z \leq -\frac{\mu_{\sigma_3}}{DE(\sigma_3)} \right\} \quad (4.4)$$

En las gráficas de la Figura 4.77 y 4.78 se presenta las curvas de igual probabilidad de fractura, calculadas para  $L=\infty$ ,  $n=1$  y  $n=0.714$ , correspondientes para los estados planos de esfuerzo y

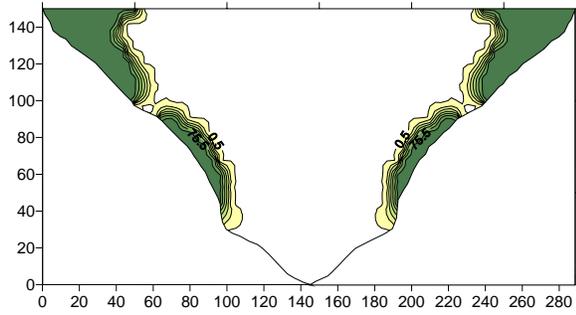
deformación. Se observa que existe una relación entre la localización y extensión de las zonas de tensión y la de las zonas de probabilidad de fractura, las cuales son mayores para  $n=0.714$  y para el estado plano de esfuerzo. También se observa, que la localización y extensión de las zonas de probabilidad de fractura son independientes del campo aleatorio analizado.



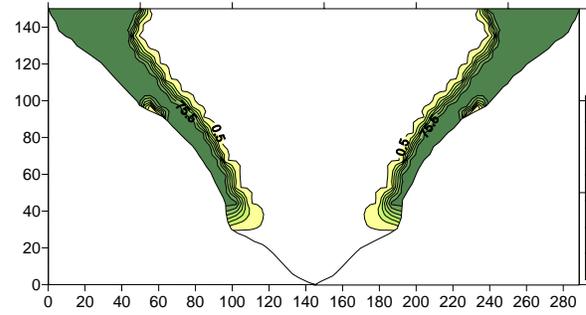
(c)  $E_v$  aleatorio,  $n=1$



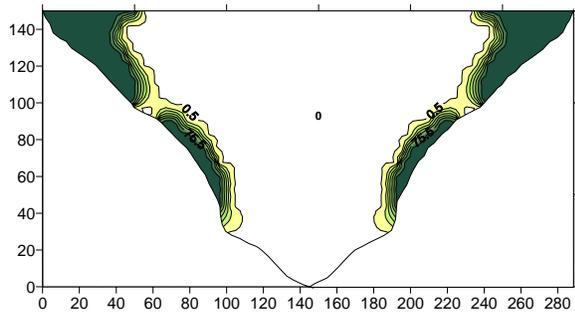
(d)  $E_v$  aleatorio,  $n=0.714$



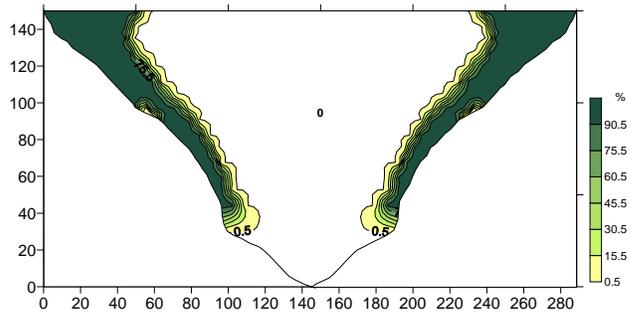
(a)  $E_h$  aleatorio,  $n=1$



(b)  $E_h$  aleatorio,  $n=0.714$

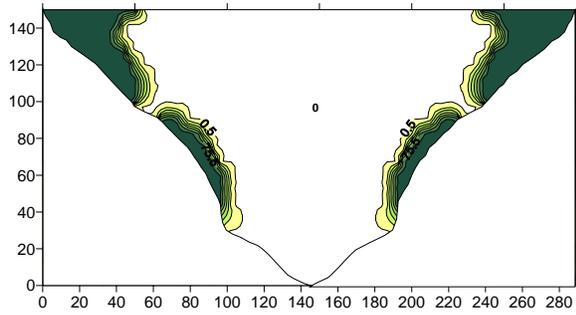


(c)  $E_v$  y  $E_h$  aleatorio,  $n=1$

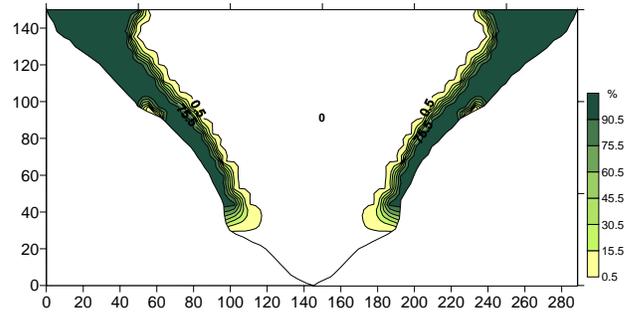


(d)  $E_v$  y  $E_h$  aleatorio,  $n=0.714$

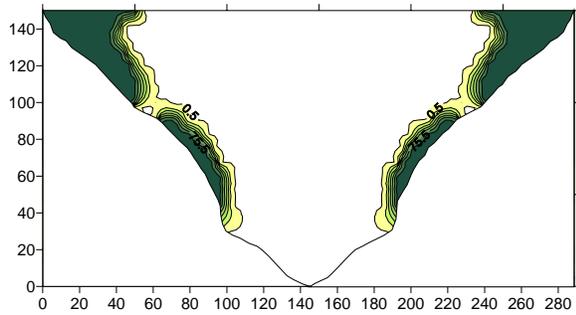
Figura 4.77 Probabilidad de fractura, %. Estado plano de esfuerzo



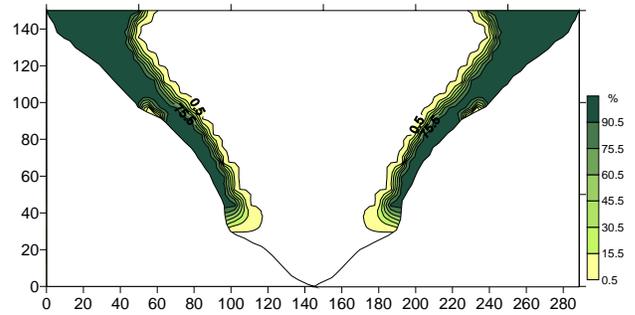
(e)  $v_{vh}$  aleatorio,  $n=1$



(f)  $v_{vh}$  aleatorio,  $n=0.714$

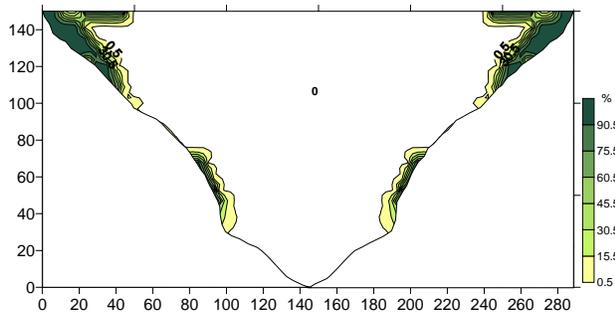


(g)  $E_h$ ,  $E_v$  y  $v_{vh}$  aleatorios,  $n=1$

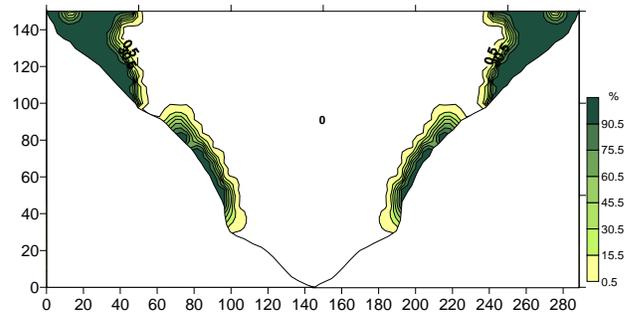


(h)  $E_h$ ,  $E_v$  y  $v_{vh}$  aleatorios,  $n=0.714$

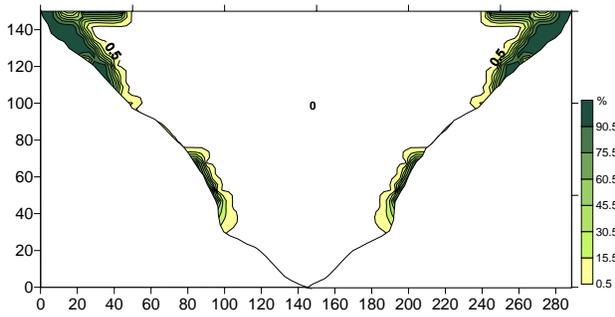
Figura 4.77 Probabilidad de fractura, %. Estado plano de esfuerzo (Continuación)



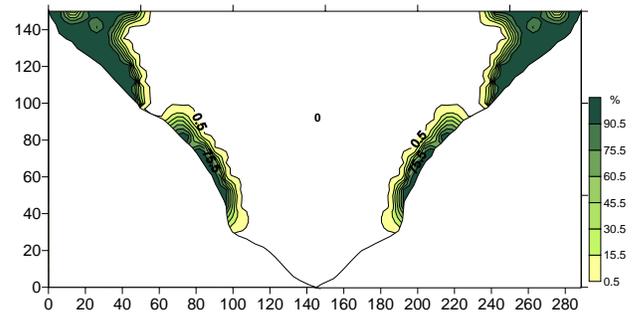
(a)  $E_v$  aleatorio,  $n=1$



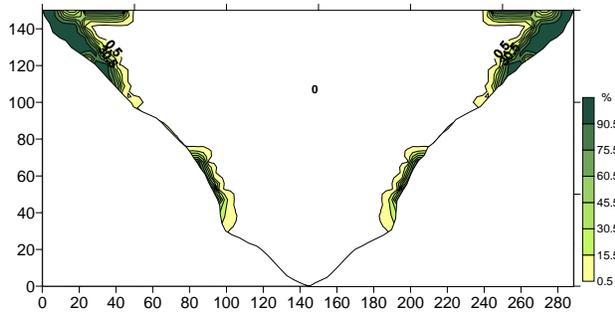
(b)  $E_v$  aleatorio,  $n=0.714$



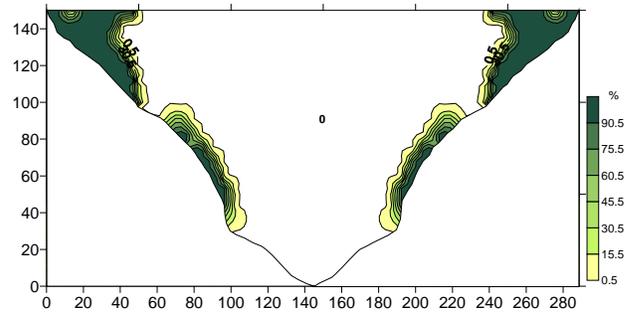
(c)  $E_h$  aleatorio,  $n=1$



(d)  $E_h$  aleatorio,  $n=0.714$

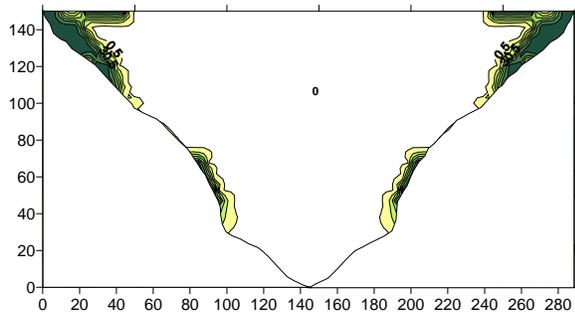


(e)  $E_v$  y  $E_h$  aleatorio,  $n=1$

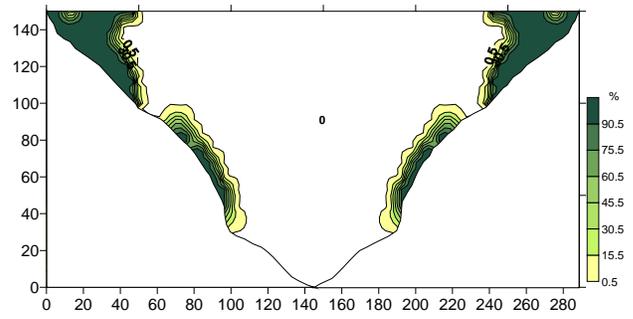


(f)  $E_v$  y  $E_h$  aleatorio,  $n=0.714$

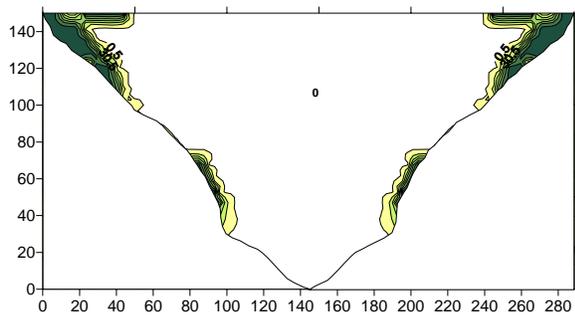
Figura 4.78. Probabilidad de fractura, %. Estado plano de deformación



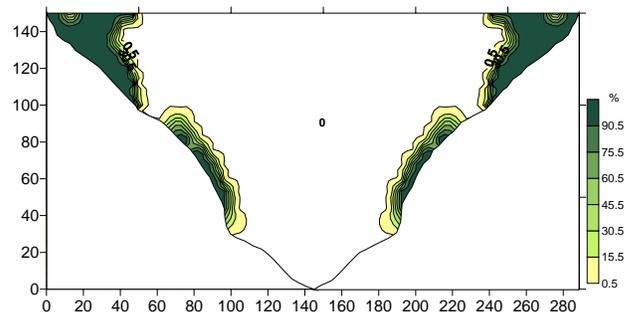
(g)  $\nu_{vh}$  aleatorio,  $n=1$



(h)  $\nu_{vh}$  aleatorio,  $n=0.714$



(i)  $\nu_{hh}$  aleatorio,  $n=1$



(j)  $\nu_{hh}$  aleatorio,  $n=0.714$

Figura 4.78 Probabilidad de fractura, %. Estado plano de deformación (Continuación)

## Capítulo 5

---

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esta tesis propuso una extensión del Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) en dos dimensiones al caso de materiales elásticos lineales anisótropos con que se construyen estructuras térreas. Con esta herramienta numérica se estudió la influencia de la variabilidad espacial de los parámetros de los materiales, representada mediante campos aleatorios, sobre los resultados de la evaluación del estado de desplazamientos y esfuerzos de la cortina de una presa de tierra construida por capas.

La extensión del MEFEE se desarrolló a partir de las herramientas matemáticas originales del método, propuestas por Ghanem y Spanos (1991). Esta ampliación permite tratar la variabilidad espacial por medio de campos aleatorios Gaussianos y realizar investigaciones de la influencia de la incertidumbre sobre los parámetros elásticos lineales anisótropos ( $E_v$ ,  $E_h$ ,  $\nu_{vh}$ ,  $\nu_{hh}$  y  $G_{vh}$ ) en forma aislada o conjunta. La extensión se planteó para estados planos de esfuerzo y deformación.

Una de las tareas principales para la extensión del MEFEE, fue la representación lineal de los elementos de la matriz de elasticidad mediante una expansión polinomial, con el fin de conocer su contribución de forma independiente sobre la respuesta. Con los elementos de la matriz de elasticidad representados en forma lineal fue posible derivar las ecuaciones de equilibrio estocásticas. Los campos aleatorios de las propiedades del material a modelar se representaron con una expansión en serie de *Karhunen-Loève* y los desplazamientos nodales a través de una expansión en *caos polinomial*. Para facilitar la solución de la ecuación de equilibrio estocástica, cada variable aleatoria que conforma el campo aleatorio de entrada se modeló como una función de variables aleatorias Gaussianas mediante una expansión en *caos polinomial*.

Con la extensión del MEFEE desarrollada en este trabajo se analizó un sólido cúbico. Se concluyó que esta herramienta es adecuada para modelar la variabilidad espacial de las propiedades de los materiales elásticos lineales anisótropos y evaluar sus efectos sobre los resultados de los análisis mecánicos, como una medida de riesgo.

A continuación se exponen las siguientes observaciones con respecto a la variabilidad espacial:

- La distancia de correlación refleja la heterogeneidad local de un material estadísticamente homogéneo.
- Los materiales heterogéneos con distancias de correlación pequeñas se comportan como materiales homogéneos no aleatorios sin riesgo de mal comportamiento de la estructura debido a que la varianza de los resultados del análisis es pequeña como consecuencia de un promedio espacial.
- Los materiales heterogéneos aleatorios con distancias de correlación intermedias (del orden de la dimensión horizontal de la estructura analizada) son los más críticos. La varianza de los resultados del análisis es grande y por tanto existe mayor riesgo de mal comportamiento.
- Los materiales con distancias de correlación grandes se comportan como materiales homogéneos aleatorios. La varianza de los resultados del análisis puede ser grande pero el riesgo de mal comportamiento es generalmente menor que en el caso anterior.

La aplicación de la extensión del MEFEE a la modelación de estructuras térreas constituidas por materiales elásticos anisótropos (con parámetros  $E_v$ ,  $E_h$ ,  $\nu_{vh}$ ,  $\nu_{hh}$  y  $G_{vh}$ ) conduce a las conclusiones siguientes:

Desplazamientos:

- Los campos aleatorios de los módulos de deformación vertical  $E_v$  y horizontal  $E_h$  influyen de forma importante en las incertidumbres que afectan los desplazamientos verticales y horizontales.
- Los campos aleatorios del módulo de deformación horizontal  $E_h$  y la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  son los que más inciden en las incertidumbres respecto a los desplazamientos horizontales.
- La influencia del campo aleatorio de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  se refleja mayormente sobre las incertidumbres de los desplazamientos en el estado plano de deformación que en el estado plano de esfuerzo.

Esfuerzos:

- Para el estado plano de esfuerzo, el campo aleatorio del módulo de deformación horizontal  $E_h$  influye significativamente sobre las incertidumbres en los esfuerzos de tensión (esfuerzo principal menor  $\sigma_3$ ), principalmente en la zona de la cresta.
- En el caso de estado plano de deformación, los campos aleatorios de los módulos de deformación vertical  $E_v$  y horizontal  $E_h$  influyen de forma importante sobre las incertidumbres en los esfuerzos de tensión (esfuerzo principal menor), siendo el de  $E_h$  más notable en las incertidumbres localizadas en la cresta.
- Se observa, que el efecto de la variabilidad de la relación de Poisson  $\nu_{vh}$  sobre las incertidumbres de los esfuerzos es mayor en el estado plano de deformación que en el estado plano de esfuerzo.

Los resultados anteriores son relevantes para la evaluación del peligro de agrietamiento en obras de tierra como la analizada en el presente trabajo.

Los resultados de los análisis con la extensión del MEFEE se compararon con el método de Monte Carlo (MC). Se obtuvo una buena concordancia entre los resultados de los dos métodos. El MEFEE tiene una gran ventaja sobre MC porque no requiere ningún refinamiento de la malla para representar el campo aleatorio de la propiedad en cuestión, lo que incrementa excesivamente el tiempo de cálculo.

Los resultados de la extensión del MEFEE se pueden mejorar si se incorporan otras consideraciones como:

- Introducir algoritmos de funciones regresivas que permitan mejorar la eficiencia del manejo de matrices y con ello disminuir el tiempo de cálculo, sobre todo en la modelación de más de un campo aleatorio.
- Extender el análisis a tres dimensiones para poder modelar con mayor rigor la variabilidad espacial de los materiales. La formulación del MEFEE en tres dimensiones ya ha sido realizada para problemas de electromagnetismo (Gaignaire *et al.*, 2006) y para cuerpos elasto-plásticos (Anders & Hori, 2001).
- Considerar el efecto de la correlación entre los distintos campos aleatorios que tiende a aumentar las incertidumbres sobre el campo de resultados, para lo cual se necesita una expansión de *Karhunen-Loève* conjunta.

Finalmente, es conveniente resaltar que existen otras aportaciones del MEFEE, las cuales pueden ser de interés para el campo de la Geotecnia, entre ellas se pueden citar, por ejemplo: la formulación del MEFEE al caso elasto-plástico (Anders & Hori, 1999; Sett *et al.*, 2011); la reconstrucción del campo aleatorio de las propiedades del material a partir de datos experimentales empleando las herramientas de la técnica espectral (Mehrez *et al.*, 2012).

Se espera que este trabajo contribuya a ayudar a los ingenieros geotecnistas a tomar en cuenta en forma racional en sus análisis las incertidumbres que afectan las propiedades de los materiales.



## BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Alberro, A. (1986). Efectos en la Presa Carlos Ramírez Ulloa (El Caracol), Gro. En *Memorias del Simposio, Los Sismos de 1985: Casos de Mecánica de Suelos*, México, SMMS, 103-114.
- Alberro, A. (1998). Deformabilidad in situ de los materiales constitutivos de varias presas de tierra y enrocamiento, *Series del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México (pp 604).
- Alberro, J. (1975). Aplicaciones del método de elementos finitos, *Presas de Tierra y Enrocamiento*, Limusa, México, D. F., 317-338.
- Amarasinghe, S. F. & Parry, R. H. (1975). Anisotropy in heavily overconsolidated kaolin, *Journal of Geotechnical Engineering*, 101(12), 1277-1292.
- Anders, M. & Hori, M. (1999). Stochastic finite element method for elasto-plastic body, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(11), 1897-1916.
- Anders, M. & Hori, M. (2001). Three-dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic bodies, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(4), 449-478.
- Atkinson, J. H. (1975). Anisotropic elastic deformations in laboratory test on undisturbed London Clay, *Géotechnique*, 25(2), 357-384.
- Auvinet, G. (1986). Estructura de medios granulares, *Tesis doctoral*, UNAM, México.
- Auvinet, G. (1987). Procesos estocásticos, *Apuntes del curso de procesos estocásticos*, DEPMI, UNAM, México.
- Auvinet, G. (1998). Probabilistic modeling of granular media anisotropy, *PROBAMAT-21st century: Probabilities and Materials, Tests, Models and Applications for the 21st Century*, 455-464.
- Auvinet, G. (2000). Probabilidad y estadística, *Apuntes del curso de confiabilidad*, DEPMI, UNAM, México.
- Auvinet, G. (2002). Incertidumbre en geotecnia, *Decimosexta Conferencia Nabor Carrillo*, Publicación bilingüe *SMM*, Querétaro, México.
- Auvinet, G. & González, J. (2000). Three-dimensional reliability analysis of earth slopes, *Computers and Geotechnics*, 26, 247-261.

- Barden, L. (1963). Stress and displacements in a cross-anisotropic soil, *Géotechnique*, 198-210.
- Berveiller, M. (2005). Éléments finis stochastiques: approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité, *Thèse de doctorate* (Spécialité: Génie Mécanique), Université BLAISE PASCAL-Clermont II, France.
- Bishop, A. W. (1966). The strength of soils as engineering materials, *Géotechnique*, 16, 91-128.
- Camacho-Glaván, A., Guardián-Soto, B., & Rodríguez-Green, M. (2005). Solución numérica de problemas de valores en la frontera con alta exactitud por métodos espectrales, *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, VI(3), 207-217.
- Cambou, B. & Auvinet, G (1974). *Método del Elemento Finito. Análisis de Incertidumbre de Primer Orden*, Publicación (339) del Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- CFE. (1976). Comportamiento de presas construidas en México, Presa La Angostura, C. I. SRH, México, Parte I, 313-391.
- Clough, W. & Woodward, J. (1967). Analysis of embankment stresses and deformations, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, 93 (SM4), 529-548.
- Courant & Hilbert (1953). *Methods of mathematical physics*, Interscience, New York.
- Covarrubias, S. (1970). Análisis de agrietamiento mediante el método del elemento finito de la presa La Angostura, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D. F.
- Covarrubias, S. W. (1975). Agrietamiento en Presas, *Presas de Tierra y Enrocamiento*, Limusa-Wily, México, 349-357.
- Debusschere, B., Najm, H., Pébay, P., Knio, O., Ghanem, G., & Le Maître, O. (2005). Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes, *Journal on Scientific Computing*, SIAM, 698-719.
- Duncan, I. M. & Seed, H. B. (1966). Anisotropy and stress reorientation in clay, *Journal of Soil Mechanics and Foundation*, ASCE, 92(5), 21-50.
- Dunkl, C., & Yuan, X. (2001). *Orthogonal Polynomials of Several Variable*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, United Kingdom.
- Ezaoui, A. & Benedetto, H. D. (2009). Experimental measurements of the global anisotropic elastic behavior of dry Houston sand during triaxial test, and effect of sample preparation. *Géotechnique*, 59(7), 621-635.
- Fawaz, A., Boulon, M. & Flavigny, E. (2002). Parameters deduced from the pressuremeter test. *Canadian Geotechnical Journal*, 39, 1333-1340.
- Franklin, A. G. & Mattson, P. A. (1972). Directional variation of elastic wave velocities in oriented clay, *Clays and Clay Minerals*, 20, 285-293.
- Gaignaire, R., Clénet, S., Sudret, B. & Moreau, M. (2007). 3D Spectral stochastic finite element method in electromagnetism, *Magnetics, IEEE Transactions on*, 43, 1209-12012.

- Gazetas, G. (1981). Strip foundations on a cross-anisotropic soil layer subjected to dynamic loading, *Géotechnique*, 31(2), 161-179.
- Gazetas, G. (1982). Stresses and displacements in cross-anisotropic soils, *Journal of the Geotechnical Engineering Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, ASCE, 108, 532-553.
- Ghanem, R. G. (1999). Stochastic finite elements with multiple random non-Gaussian properties, *Journal of Engineering Mechanics*, 125(1), 26-40.
- Ghanem, R., Doostan, A., & Red-Horse, J. (2008). A probabilistic construction of model validation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 197, 2585-2595.
- Ghanem, R.-G. & Spanos, P.-D. (1991). *Stochastic finite elements, A spectral approach*, Springer-Verlag, New York.
- Graham, J. & Houlsby, G. T. (1983). Anisotropic elasticity of a natural clay, *Géotechnique*, 33(2), 165-180.
- Halpern, M. & Christiano, P. (1978). Stresses and displacements in anisotropic embankments, *Journal of the Geotechnical Engineering Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineerings*, ASCE, 104, 387-391.
- Hansteen, O. (1995). Transverse cracking in embankment dams. *Aliterature Review and Finite Element Study*. Norwegian Geotechnical Institute, Norwegian.
- Holubec, I. (1968). Elastic behavior of cohesionless soil, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, (SM6), 1216-1231.
- Hooper, J. (1975). Elastic settlement of a circular raft in adhesive contact with a transversely isotropic medium, *Géotechnique*, 25(4), 691-711.
- Hoque, E. & Tatsuoka, F. (1998). Anisotropy in elastic deformation of granular materials, *Soils and Foundations*, 38(1), 163-179.
- Keese, A. (2003). A review of recent developments in the numerical solution of stochastic PDEs (stochastic finite elements), *Technical Report*, Institute of Scientific Computing, Department of Mathematics and Computer Science, Technical University Braunschweig, Brunswick, Germany: <http://opus.tu-bs.de/opus/volltexte/2003/504/>.
- Kempfert, H.-G. & Gebreselassie, B. (2006). *Excavations and Foundations in Soft Soil*, Springer-Verlag, Berlin.
- Kirkgard, M. M. & Lade, P. V. (1991). Anisotropy of normally consolidate San Francisco bay mud, *Geotechnical Testing Journal*, 14(3), 231-246.
- Kleiber, M. & Hien, T. (1992). *The Stochastic Finite Element Method. Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*, John Wiley and Sons.
- Kollár, L. & Springer, G. (2003). *Mecahanics of Composite Structures*, Cambridge University Press, New York.

- Lee, K. M. & Rowe, R. K. (1989). Deformations caused by surface loading and tunnelling: the role of elastic anisotropy, *Géotechnique*, 39(1), 125-140.
- Lekhnitskii, S. G. (1963). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day, Inc, San Francisco.
- Lings, M. L., Penning, D. S. & Nash, D. F. (2000). Anisotropic stiffness parameters and their measurement in a stiff natural clay, *Géotechnique*, 50(2), 109-125.
- Loève, M. (1977). *Probability Theory* (4<sup>ta</sup> ed.), Springer, New York.
- Louault, B. (1997). Approche probabiliste de l'évaluation des zones de tension dans les barrages en terre et en enrochement, *Mémoire de fin d'études*, CUST, Clermont Ferrand, France. (Estudio realizado en el Instituto de Ingeniería, UNAM, Dir. G. Auvinet).
- Magnan, J., & Piyal, M. (1984). *Paramètres d'élasticité anisotrope de l'argile molle organique de Cubzac-les-Ponts à l'état surconsolidé*. Rapport de recherche LPC n° 131, LCPC.
- Malliavin, P. (1997). *Stochastic Analysis*, Springer-Verlag.
- Marsal, R. (1976). *Presa La Angostura, Comportamiento de Presas Construidas en México* (Vol. I). Secretaría de Recursos Hidráulicos, Comisión federal de Electricidad e Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Marsal, R. & Reséndiz, D. (1975). *Presas de Tierra y Enrocamiento*, Limusa, México.
- Matthies, H., Brenner Ch., Bucher Ch. & Soares C. (1997). Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids. Stochastic finite elements, *Structural Safety*, 19 (3), 283-336.
- Matthies, H. (2008). Stochastic finite elements: Computational approaches to stochastic partial differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, ZAMM, 88(11), 849-873.
- Matthies, H. & Keese, A. (2005). Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ELSEVIER, 194, 1295-1331.
- Mellah, R. (1999). Modélisation stochastique par éléments finis en élasto-plasticité appliquée à la géomécanique, Thèse de Doctorat, ENSG, INPL-Nancy. (Dir. G. Auvinet).
- Mehrez, L., Doostan, A., Moens, D. & Vandepitte, D. (2012). Stochastic identification of composite material properties from limited experimental databases, Part II: Uncertainty modelling, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 27, 484-498.
- Muir Wood, D. (1990). *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ngah, M. & Young, A. (2007). Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures, *Composite Structures* (78), 447-456.

- Noh, H.C. (2004). A formulation for stochastic finite element analysis of plate structures with uncertain Poisson's ratio. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ELSEVIER (193), 4857-4873.
- Noh, H.C. & Kwak, H.-G. (2006). Response variability due to randomness in Poisson's ratio for plane-strain and plane-stress states. *International Journal of Solids and Structures*, ELSEVIER, 43, 1093-1116.
- Noh, H.C. (2006). Effect of multiple uncertain material properties on the response variability of in-plane and plate structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ELSEVIER, (195), 2697-2718.
- Orlandi, S. (1996). Método del elemento finito estocástico en geotecnia: Análisis no lineal, *Tesis* (Maestría en ingeniería), DEPMI, UNAM, México. (Estudio realizado en el Instituto de Ingeniería, UNAM, Dir. G. Auvinet).
- Papoulis, A. (1991). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw Hill.
- Pérez-Duarte, A. (2000). Modélisation stochastique de la construction des barrages en terre en Anisotropie. *Rapport de Stage D'option Scientifique. Mémoire de Fin D'études*, École Polytechnique, Paris. (Trabajo de fin de estudios realizado en el Instituto de Ingeniería, UNAM, Dir. G. Auvinet).
- Pickering, D. J. (1970). Anisotropic elastic parameters for soil, *Géotechnique*, 20(3), 271-276.
- Pineda-Contreras, A. R. (2007). Método del elemento finito estocástico en geotecnia: Enfoque espectral, *Tesis* (Maestría en ingeniería), UNAM, México. (Estudio realizado en el Instituto de Ingeniería, UNAM, Dir. G. Auvinet)
- Pineda-Contreras, A. & Auvinet-Guichard, G. (2013). Método del elemento finito estocástico en geotecnia. Enfoque espectral, *Ingeniería Investigación y Tecnología*, XIV(1), 11-22.
- Puig, B., Poirion, F. & Soize, C. (2002). Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion: convergences and algorithms, *Probabilistic Engineering Mechanics*, ELSEVIER, 17, 253-264.
- Ratananikom, W., Likitlersuang, S. & Yimsiri, S. (2013). An Investigation of anisotropic elastic parameters of Bangkok clay from vertical and horizontal cut specimens, *Geomechanics and Geoengineering: An International Journal*, 8(1), 15-27.
- Robert William, S.-L. (1973). *Elasticity*, Dover publications, inc, New York.
- Rosic, B. (2008). *A review of computational stochastic elastoplasticity*. Braunschweig: Institut für Wissenschaftliches Rechnen. <http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00024317>.
- Saada, A. S. & Bianchini, G. F. (1975). Strength of one-dimensionally consolidated clay, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 101 (11), 1151-1164.
- Saada, A. S. & Ou, C. D. (1973). Stress-strain relations and failure of anisotropic clays, *Journal Geotechnical Engineering Division*, ASCE, 99 (12), 1091-1111.

- Sánchez, J., Auvinet, G. & Cambou, B. (2014). Fabric of monosized granular media, *Internacional Symposium on Geomechanics from Micro to Macro*, Cambridge, UK.
- Schevenels M., Lombaert, G. & Degrande, G. (2004). Application of the stochastic finite element method for Gaussian and non-Gaussian systems, *Proceedings of ISMA*, 3299-3313. <http://bwk.kuleuven.be/apps/bwm/papers/scheip04a.pdf>
- Sett, K., Jeremic, M. & Levent, M. (2011). Stochastic elastic-plastic finite elements, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 200 (2011), 997-1007.
- Sherard, J. (1952). Influence of soil properties and construction methods on the performance of homogeneous earth Dams, Thesis (Doctor of Philosophy), University of Harvard, Cambridge, Mass.
- Simonini, P. (1987). Elastic modelling of inherently anisotropic behavior in sands. [http://www.associazionegeotecnica.it/sites/default/files/rig/RIG\\_1987\\_1\\_25.pdf](http://www.associazionegeotecnica.it/sites/default/files/rig/RIG_1987_1_25.pdf).
- Sivakugan, N., Chameau, J. L. & Holtz, R. D. (1993). Anisotropy studies on cuboidal shear device, *Journal of Geotechnical Engineering*, 119 (6), 973-983.
- Sudret, B. & Der Kiureghian, A. (2000). *Stochastic Finite Element Methods and Reliability. A State-of-the-Art Report*. University of California, Berkeley, USA, Report N° UCB/SEMM-200/08, Department of Civil & Environmental Engineering.
- Sudret, B., Berveiller, M. & Lemaire, M. (2005). Comparison of methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis, <http://bruno.sudret.free.fr/docs/>.
- Sudret, B., Berveiller, M., & Lemaire, M. (2006). A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15:7-8, 825-866, <http://dx.doi.org/10.3166/remn.15.799-824>.
- Sutcu, M. (1992). Orthotropic and transversely isotropic stress-strain relations with built-in coordinate transformations, *International Journal of Solids Structures*, 29(4), 503-518.
- Ting, T. (1996). *Anisotropic Elasticity. Theory and Applications*, Oxford University Press, New York:
- Vanmarcke, E. (1977). Probabilistic modeling of soil profiles. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 103 (GT11), 1227-1245.
- Vanmarcke, E. (1983). *Random Fields: Analysis and Synthesis*, MIT Press, Cambridge.
- Vázquez, F. (2005). Incertidumbre en el modelado de la construcción de presas de tierra mediante elementos finitos, *Tesis (Maestría en ingeniería)*, DEPMI, UNAM, México. (Dir. G. Auvinet)
- Wiener, N. (1938). The homogeneous chaos, *American Journal of Mathematics*, 60 (4), 897-936.
- William, R. & Soutas-Little. (1973). *Elasticity*, Dover Publications, INC, New York.
- Yimsiri, S. & Soga, K. (2011a). Cross-anisotropic elastic parameters of two natural stiff clays, *Géotechnique*, 61 (9), 809-814.

- Yimsiri, S. & Soga, K. (2011b). Effects of soil fabric on behaviors of granular soil: Microscopic modeling. *Computers and Geotechnics*, (38), 861-874.
- Yu, S. & Dakoulas, P. (1993). General stress-dependent elastic moduli for cross-anisotropic soils, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 119 (10), 1568-1586.
- Zamhari, K. (1999). Effects of state factors on elastic parameters of anisotropic subgrade soil. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 3(3), 133-143.
- Zdravkovic, L. & Potts, D. M. (1999). Advances in modelling soil anisotropy, *Constitutive Modelling of Granular Materials*, Kolymbas, Springer, Berlin.
- Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (1994). *El método de los Elementos Finitos* (4a ed.), Vol. 1, MacGraw, Hill, Madrid, España.



# Anexo A

---

## A.1 Espacios matemáticos

### A.1.1 Espacio vectorial

Un *espacio vectorial*  $V$  es un conjunto constituido por un número infinito de vectores (matrices, funciones, operadores, etc.) para los cuales se han definido las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, (Courant y Hilbert, 1953). Asimismo, un *espacio vectorial* se puede definir, a partir de su producto interno para cada par de vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  en  $V$ , si se cumple que:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad (\geq 0) \quad (\text{A.1})$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \quad (\geq 0) \quad (\text{A.2})$$

La *dimensión* de un *espacio vectorial* se define por el número máximo de vectores linealmente independientes en el espacio.

Un espacio es llamado de dimensión infinita,  $L$ , si para cada entero  $n$ , hay más que  $n$  vectores linealmente independientes en el espacio; el tamaño de dicha dimensión está determinado por los valores característicos.

En el análisis funcional un *espacio funcional* puede verse como un *espacio vectorial* de dimensión infinita, cuyos vectores base son funciones, no vectores. Esto significa que cada función en el *espacio funcional* puede representarse como una combinación lineal de funciones base. Mientras que el espacio bidimensional está generado únicamente por dos vectores. Un *espacio funcional* es de dimensión infinita.

### A.1.2 Espacio de probabilidad

El espacio de probabilidad de variables aleatorias es denotado por  $(\Omega, F, P)$ , en donde  $\Omega$  es el espacio de los resultados posibles  $\theta$  de un experimento  $E$ ;  $F$  forma una clase aditiva completa ( $\sigma$ -

álgebra) asociada a ciertos subconjuntos de  $\Omega$  llamados eventos;  $P$  es la medida de probabilidad de  $F$ .

### A.1.3 Espacio de Hilbert de variables aleatorias

El *espacio vectorial* de variables aleatorias de segundo orden denotado por  $L_2(\Omega, F, P)$  se considera un espacio de Hilbert si el operador de la esperanza matemática permite definir el producto interno:

$$\langle XY \rangle = E\{XY\} \quad (A.3)$$

Un espacio de Hilbert tiene propiedades convenientes para desarrollar soluciones aproximadas de problemas de valores en la frontera, tales como el procedimiento de Galerkin. Estos espacios también son útiles para el desarrollo de polinomios de Hermite.

Un campo aleatorio  $V(X, \theta)$ , se puede definir dentro del espacio probabilista de Hilbert  $L_2(\Omega, F, P)$  como un conjunto de variables aleatorias  $V(X)$ , tal que cada variable se define en los puntos  $X$  del dominio estudiado  $R^p$  ( $p=1, 2, \text{ ó } 3$ ), (Auvinet, 2002). Cualquier realización del campo es un elemento del espacio de Hilbert  $L_2(\Omega)$ .

## A.2 Polinomios de Hermite

### A.2.1 Polinomios unidimensionales

Sea un espacio de probabilidad denotado por  $L_2(\Omega, F, P)$ . Para cualquier  $\xi \in \mathbb{R}$  los polinomios de Hermite de variables aleatorias se definen (Rosic, 2008; Puig *et al.*, 2002) como:

$$h_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2/2}) \quad (A.4)$$

Una propiedad básica que sirve para definir los polinomios de Hermite en forma iterativa es la función generatriz, que se expresa como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(\xi)}{n!} y^n = e^{\xi y - \frac{y^2}{2}} \quad (A.5)$$

Derivando la ecuación (A.4) se obtiene:

$$h'_n(\xi) = \xi h_n(\xi) - h_{n+1}(\xi) \quad (A.6)$$

Las siguientes derivadas se obtienen a partir de la función generatriz (A.5):

$$h'_n(\xi) = n h_{n-1}(\xi) \quad (A.7)$$

$$h''_n(\xi) = \xi h'_n(\xi) - n h_n(\xi) \quad (A.8)$$

Combinando (A.7) y (A.8), se obtiene la fórmula recursiva para polinomios de Hermite no normalizados:

$$h_{n+1}(\xi) = \xi h_n(\xi) - n h_{n-1}(\xi) \quad (\text{A.9})$$

con:  $h_{-1}(\xi)=0$ ,  $h_0(\xi)=1$ .

Usando la formula recursiva (A.9) se obtienen los siguientes polinomios de Hermite:

$$\begin{aligned} h_1(\xi) &= \xi \\ h_2(\xi) &= \xi^2 - 1 \\ h_3(\xi) &= \xi^3 - 3\xi \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

### Ortogonalidad

Los polinomios de Hermite son ortogonales con respecto a una medida Gaussiana

$$\langle h_n, h_m \rangle = E\{h_n(\xi)h_m(\xi)\} = n! \delta_{nm} \quad (\text{A.11})$$

donde  $\delta_{nm}$  es delta de Kronecker que es igual a 1 si  $n$  y  $m$  son iguales y 0 en caso contrario.

### A.2.2 Polinomios multidimensionales

Los polinomios de Hermite multidimensionales (*caos polinomial*) se definen como el producto de polinomios unidimensionales de variables Gaussianas, de la siguiente forma:

$$\Psi_\alpha = (\alpha!)^{-1/2} \prod_{k=1}^{\infty} h_{\alpha_k}(\xi_k) \quad (\text{A.12})$$

donde  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots\}$  es una secuencia de enteros no negativos que cumplen con la condición

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$ ; es decir, la suma de las secuencias  $\alpha$  debe ser menor o igual que el orden (grado) del polinomio de Hermite multidimensional.

Por ejemplo (Rosic, 2008), para una colección de multi-índices  $\alpha=\{1,0,1,0\}$  y para un conjunto de variables aleatorias  $\xi=\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ , el polinomio de Hermite multidimensional es:

$$\Psi_\alpha = \prod_{k=1}^4 h_{\alpha_k}(\xi_k) = h_{\alpha_1}(\xi_1)h_{\alpha_2}(\xi_2)h_{\alpha_3}(\xi_3)h_{\alpha_4}(\xi_4) \quad (\text{A.13})$$

$$\Psi_\alpha = h_1(\xi_1)h_0(\xi_2)h_1(\xi_3)h_0(\xi_4) = \xi_1 \cdot 1 \cdot \xi_3 \cdot 1 = \xi_1 \cdot \xi_3 \quad (\text{A.14})$$

Si se requiere, por ejemplo, que el orden del polinomio multidimensional sea  $p = 2$ , entonces el polinomio multidimensional (A.112) cumple con la condición  $\sum_{k=1}^4 \alpha_k = 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \leq 2$ .

### Ortogonalidad

Los polinomios de Hermite multidimensionales son también ortogonales con respecto a una medida Gaussiana

$$E\{\Psi_\alpha \Psi_\beta\} \equiv \int \dots \int \Psi_\alpha(\theta) \Psi_\beta(\theta) g(\xi_1) \dots g(\xi_M) d\xi_1 \dots d\xi_M \quad (\text{A.15})$$

donde la medida Gaussiana es:

$$g(\xi) = \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{A.16})$$

El factor  $(\alpha!)^{-1/2}$ , definido como:  $\prod_{j=1}^{\infty} (\alpha_j!)$ , de la ecuación (A.12) hace los polinomios  $\Psi_\alpha$  ortonormales en el espacio  $L_2(\Omega)$  con medida Gaussiana estándar  $P(d\xi)$ , satisfaciendo que:

$$E\{\Psi_\alpha \Psi_\beta\} = \prod_{j=1}^{\infty} \alpha_j! \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.17})$$

Siendo  $\delta_{\alpha\beta}$  delta de Kronecker, la cual cumple que:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} \delta_{\alpha\beta} = 0, & \alpha \neq \beta \\ \delta_{\alpha\beta} = 1, & \alpha = \beta \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

### A.2.3 Producto de polinomios

#### (a) Polinomios unidimensionales de Hermite

Los polinomios de Hermite en  $\mathbb{R}$  constituyen una base lineal en el espacio de los polinomios. Por lo que es posible expresar el producto de polinomios (Malliavin, 1997; Matthies & Keese, 2005; Rosic, 2008;). Para el caso de los polinomios de unidimensionales se tiene que:

$$h_i(\xi) \cdot h_j(\xi) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} c_{ijk} h_k(\xi) \quad (\text{A.19})$$

donde:  $c_{ijk}$  expresa una estructura algebraica en  $\mathbb{R}^{\mathbb{E}}$  y se determina como:

$$c_{ijk} = \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(j+1)}{\Gamma(q-j+1)\Gamma(q-i+1)\Gamma(q-k+1)} = \frac{i!j!}{(q-i)!(q-j)!(q-k)!} \quad (\text{A.20})$$

Con  $q = \frac{1}{2}(i+j+k)$ , siendo diferente de cero si  $q \geq i \wedge q \geq j \wedge q \geq k$ . Cuando  $q$  no es entero  $c_{ijk}=0$ .

#### (b) Polinomios multidimensionales de Hermite

Para los polinomios multidimensionales se extiende la misma propiedad del producto como:

$$\Psi_\alpha \Psi_\beta = \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^\gamma \Psi_\gamma \quad (\text{A.21})$$

Con coeficientes definidos como:

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = \prod_{j=0}^{\infty} c_{\alpha_j\beta_j}^{\gamma_j} \quad (\text{A.22})$$

donde  $j$  es el número de variables que representan la dimensión del *caos polinomial*.

#### A.2.4 Esperanzas de polinomios de Hermite

La formulación del MEFE requiere minimizar el error que se genera por el truncamiento de las series de expansión (*Karhunen-Loève* y *caos polinomial*). Para anular el error se recurre a la propiedad de ortogonalidad de los polinomios que hace necesario el cálculo de esperanzas entre polinomios multidimensionales de Hermite y variables aleatorias.

##### (a) Polinomios unidimensionales de Hermite

La esperanza del producto de dos polinomios unidimensionales se define como el cuadrado de la norma de la función base  $h(\xi)_p$ , se expresa como:

$$d_i = E\{h(\xi)_i^2\} = i! \quad (\text{A.23})$$

Considerando las propiedades del producto de dos polinomios (A.19 y A.20), el cálculo de la esperanza del producto de tres polinomios es sencillo de calcular (Sudret *et al.*, 2006), teniendo que:

$$\begin{aligned} d_{ijk} &= E\{h_i(\xi)h_j(\xi)h_k(\xi)\} = c_{ijk} E\{h_k(\xi)h_i(\xi)\} = c_{ijk} i! \\ d_{ijk} &= \frac{i! j! k!}{(q-i)!(q-j)!(q-k)!} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Siguiendo con la misma secuencia de (A.24), la esperanza del producto de cuatro polinomios es:

$$d_{ijklm} = E\{h_i(\xi)h_j(\xi)h_l(\xi)h_m(\xi)\} = c_{ijklm} E\{h_m(\xi)h_l(\xi)h_j(\xi)h_i(\xi)\} = \sum_{k \geq 0} c_{ijk} d_{klm} \quad (\text{A.25})$$

##### (b) Polinomios multidimensionales de Hermite

Los polinomios  $\Psi_\alpha$  son ortogonales y por tanto satisfacen:

$$E\{\Psi_\alpha \Psi_\beta\} = \prod_{j=1}^{\infty} \alpha_j! \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.26})$$

De lo establecido en A.12, un polinomio multidimensional se denota como:

$$\Psi_i = \prod_{k=1}^{\infty} h_{\alpha_k^i}(\xi_k) \quad (\text{A.27})$$

Entonces la esperanza del producto de tres polinomios multidimensionales (o *caos polinomiales*), siguiendo con ecuación (A.24), es:

$$D_{ijl} = E\{\Psi_i(\xi)\Psi_j(\xi)\Psi_l(\xi)\} = \prod_{k=1}^{\infty} d_{\alpha_k^i \beta_k^j \gamma_k^l} \quad (\text{A.28})$$

Similarmente, como se estableció en (A.25), la esperanza del producto de cuatro polinomios multidimensionales de Hermite, se escribe

$$D_{ijklm} = E\{\Psi_i(\xi)\Psi_j(\xi)\Psi_l(\xi)\Psi_m(\xi)\} = \prod_{k=1}^{\infty} d_{\alpha_k^i \beta_k^j \gamma_k^l \delta_k^m} \quad (\text{A.29})$$

### A.2.5 Esperanza de polinomios de Hermite multidimensionales y variables aleatorias

#### (a) Producto de tres polinomios de Hermite multidimensionales y una variable aleatoria

Por definición se tiene:

$$c_{ijk} \equiv E\{\xi_i \Psi_{\alpha} \Psi_{\beta}\} = E\left\{\xi_i h_{\alpha_i^i}(\xi_i) h_{\beta_i^k}(\xi_i)\right\} \cdot \prod_{l \neq i}^M E\left\{h_{\alpha_l^j}(\xi_l) h_{\beta_l^k}(\xi_l)\right\} \quad (\text{A.30})$$

Donde  $M$  es la dimensión del *caos polinomial*. Para cualquier  $j_0 \neq i$ ,  $\alpha_{i_0}^{j_0}$  y  $\beta_{i_0}^{k_0}$  son diferentes y el producto de A.30 desaparece debido a la ortogonalidad  $h_{\alpha_{i_0}^{j_0}}$  y  $h_{\beta_{i_0}^{k_0}}$ . Cuando las secuencias  $\alpha$  y  $\beta$  difieren sólo por su  $i$ -ésima componente, la expresión anterior se reduce (Sudret y Der Kiureghian, 2000) a:

$$c_{ijk} \equiv E\{\xi_i \Psi_{\alpha} \Psi_{\beta}\} = E\left\{\xi_i h_{\alpha_i^j}(\xi_i) h_{\beta_i^k}(\xi_i)\right\} \cdot \prod_{l \neq i} \alpha_l! \quad (\text{A.31})$$

El cálculo de los coeficientes  $c_{ijk}$  solamente requiere calcular  $E\{\xi h_p(\xi) h_q(\xi)\}$ , donde  $h_p$  y  $h_q$  son polinomios de Hermite de variables normales estándar. Con base en la fórmula recursiva para generar estos polinomios (A.9), tal esperanza se puede obtener como (Sudret & Der Kiureghian, 2000; Ngah & Young, 2007):

$$E\{\xi h_p(\xi) h_q(\xi)\} = (p+1)! \delta_{p,q-1} + p! \delta_{p,q+1} \quad (\text{A.32})$$

Mediante la fórmula recursiva (A.9), se puede obtener las siguientes esperanzas:

$$E\{\xi^2 h_p(\xi) h_q(\xi)\} = (p+2)! \delta_{p,q-2} + p!(2p+1) \delta_{p,q} + p! \delta_{p,q+2} \quad (\text{A.33})$$

$$E\{\xi^3 h_p(\xi) h_q(\xi)\} = (p+3)! \delta_{p,q-3} + (p+1)! (3(p+1)^2) \delta_{p,q-1} + p! (3p) \delta_{p,(q+1)} + p! \delta_{r,q+3} \quad (\text{A.34})$$

Una vez establecidas las expresiones para evaluar esperanzas de producto de polinomios y variables aleatorias, el coeficiente  $c_{ijk}$  se puede calcular a partir de A.32. Esto es, para cada índice  $k$ , existe  $(2M+1)$  valores diferentes de cero con índices  $j$  evaluados como sigue (Nghah & Young, 2007):

1) Para  $i=0$  ( $\xi_0=1$ ), los únicos  $c_{ijk}$  diferentes de cero es cuando cada índice  $j$  es igual al correspondiente índice  $k$ , es decir las dos secuencias de enteros no negativos son iguales,  $\alpha_l^j = \beta_l^k$  para  $l=1, \dots, M$ , teniendo que:

$$c_{0jk} \equiv \prod_{l=1}^M \alpha_l^k! \quad (\text{A.35})$$

2) Para  $i \neq 0$ , existen por lo menos dos coeficientes  $c_{ijk}$  diferentes de cero asociados con cada índice  $k$ :

- Uno en donde  $j$  se determina por  $\alpha_i^j = \beta_i^k + 1$  con  $(\beta_i^k \leq p-1)$  y  $\alpha_l^j = \beta_l^k$  para  $(l \neq i)$ , teniendo:

$$c_{ijk} \equiv \prod_{l=1}^M \alpha_l^j! \quad (\text{A.36})$$

- Otro coeficiente, en donde  $j$  se determina por  $\alpha_i^j = \beta_i^k - 1$  con  $(\beta_i^k \geq 1)$  y  $\alpha_l^j = \beta_l^k$  para  $(l \neq i)$ , teniendo:

$$c_{ijk} \equiv \prod_{l=1}^M \beta_l^k! \quad (\text{A.37})$$

### A.3 Productos de variables aleatorias expandidas en *caos polinomial*

Para la extensión del MEFEE al caso de más de dos campos aleatorios, se requiere realizar productos entre variables aleatorias expandidas en *caos polinomial*. La forma en que estos se calculan se conoce como aproximación espectral (Debusschere *et al.*, 2005) y se presentan a continuación:

Se considera dos variables aleatorias expandidas en *caos polinomial*

$$a = \sum_{i=0}^P a_i \Psi_i \quad (\text{A.38})$$

$$b = \sum_{j=0}^P b_j \Psi_j \quad (\text{A.39})$$

El producto de las dos variables aleatorias se expresa como:

$$c = \sum_{k=0}^P c_k \Psi_k = a \cdot b = \sum_{i=0}^P a_i \Psi_i \sum_{j=0}^P b_j \Psi_j \quad (\text{A.40})$$

con:

$$c_k = \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P c_{ijk} a_i b_j, \quad (\forall k \in 0, 1, \dots, P) \quad (\text{A.41})$$

Para obtener los coeficientes  $c_{ijk}$  se recurre a la minimización por Galerkin; que permite anular el residuo debido al truncamiento de las series, con:  $E\{\in_{ijk} \cdot \Psi_k\} = 0$ . Al multiplicar ambos lados de la expresión (A.41) por  $\Psi_k$  y tomando esperanzas, se tiene que:

$$E\left\{\sum_{k=0}^P \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P c_{ijk} a_i b_j \Psi_i \Psi_j \Psi_k\right\} = E\left\{\sum_{i=0}^P a_i \Psi_i \sum_{j=0}^P b_j \Psi_j \Psi_k\right\} \quad (\text{A.42})$$

$$c_{ijk} = \frac{E\{\Psi_i \Psi_j \Psi_k\}}{E\{\Psi_k^2\}} \quad (\forall (i, j, k) \in \{0, \dots, P\}^3) \quad (\text{A.43})$$

De la misma forma se puede obtener el producto de tres variables aleatorias a, c y d, teniendo que:

$$d = \sum_{l=0}^P d_l \Psi_l = a \cdot b \cdot c = \sum_{i=0}^P a_i \Psi_i \sum_{j=0}^P b_j \Psi_j \sum_{k=0}^P c_k \Psi_k \quad (\text{A.44})$$

Con:

$$d_l = \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \sum_{k=0}^P d_{ijkl} a_i b_j c_k, \quad (\forall l \in 0, 1, \dots, p)$$

y

$$d_{ijkl} = \frac{E\{\Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_l\}}{E\{\Psi_l^2\}} \quad (\forall (i, j, k, l) \in \{0, \dots, P\}^4) \quad (\text{A.45})$$

Un procedimiento que evita el cálculo de un tensor de cuarto orden  $d_{ijkl}$  consiste en obtener el producto de dos variables aleatorias  $d=ab$ , y después el resultado se multiplica por una tercera variable  $c$  para obtener la variable  $d$  en términos de un tensor de tercer orden  $d_{ijk}$  (Debusschere et al.,2005).

Es importante notar que cuando se trata de variables aleatorias (expresadas en *caos polinomial*) elevadas a exponentes positivos enteros, por ejemplo:

$$x^4 = ((x * x) * x) * x \quad (\text{A.46})$$

el orden de la expansión de la base polinomial debe ser mayor que el orden de la potencia de la variable, para evitar que el error por truncamiento, que se anula vía proyección Galerkin, se propague en los coeficientes espectrales calculados (Debusschere *et al.*, 2005).

#### A.4 Inserción de los coeficientes de los polinomios de Hermite en el *caos polinomial*

Una variable aleatoria expandida en polinomios de Hermite se expresa:

$$Z^i = \sum_{j=0}^{n_i} \tilde{C}_j h_j(\xi_i) \quad i = 1, \dots, M \quad (A.47)$$

donde  $\tilde{C}_j$  son los coeficientes de la variable. Por ejemplo, si se tienen tres variables  $M=3$  y el orden del polinomio es  $n_i=2$ , la expansión de cada variable en polinomios de Hermite es como se muestra en la Tabla A.1.

Tabla A.1 Expansión de variables aleatorias en polinomios de Hermite

$Z^i$	1	$\xi$	$\xi^2 - 1$
$Z^1$	$\tilde{C}_0^1$	$\tilde{C}_1^1$	$\tilde{C}_2^1$
$Z^2$	$\tilde{C}_0^2$	$\tilde{C}_1^2$	$\tilde{C}_2^2$
$Z^3$	$\tilde{C}_0^3$	$\tilde{C}_1^3$	$\tilde{C}_2^3$

Puesto que el *caos polinomial* es un conjunto de polinomios de Hermite unidimensionales (Ghanem y Spanos, 1991), la expansión anterior (A.47) está contenida en el *caos polinomial* y se puede escribir como:

$$Z^i = \sum_{j=0}^{P-1} C_j \Psi_j \left( \left\{ \xi_k \right\}_{k=1}^M \right) \quad (A.48)$$

La representación de las variables  $Z^i$  mediante el *caos polinomial* requiere vincular los coeficientes  $C_j$  con los coeficientes  $\tilde{C}_j$ . Un algoritmo para este procedimiento fue propuesto por (Berveiller, 2005). En la Tabla A.2 se muestra de forma esquemática, la inserción de los coeficientes  $C_j$  en la base polinomial de orden  $p=2$  y dimensión  $M=3$ .

Tabla A.2 Inserción de los coeficientes  $C_j$  en el *caos polinomial*

$Z^i$	1	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_1^2 - 1$	$\xi_1 \xi_2$	$\xi_1 \xi_3$	$\xi_2^2 - 1$	$\xi_2 \xi_3$	$\xi_3^2 - 1$
$Z^1$	$C_0^1$	$C_1^1$			$C_2^1$					
$Z^2$	$C_0^2$		$C_1^2$					$C_2^2$		
$Z^3$	$C_0^3$			$C_1^3$						$C_2^3$

#### A.5 Representación simplificada de la expansión $2\mu'(X, \theta)$ y $\lambda'(\theta)$

Los coeficientes  $2\mu'(X, \theta)$  y  $\lambda'(\theta)$  son funciones no lineales de la relación de Poisson  $\nu$ , un desarrollo en series geométricas (Noh & Kwak, 2005) permite una representación lineal como:

$$\begin{aligned}
 2\mu'(X, \theta) &= \frac{1}{1+\nu} = (1-\nu+\nu^2-\nu^3+\dots) = 1 - V_\nu(X, \theta) + V_\nu(X, \theta)^2 - V_\nu(X, \theta)^3 + \dots \\
 \lambda'(X, \theta) &= \frac{\nu}{1-\nu^2} = \nu(1+\nu^2+\nu^4+\dots) = V_\nu(X, \theta) + V_\nu(X, \theta)^3 + V_\nu(X, \theta)^5 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.49}$$

Los coeficientes  $2\mu'(\theta)$  y  $\lambda'(\theta)$  en términos de la expansión de *Karhunen-Loève* se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 2\mu'(X, \theta) &= 1 - \left( E\{\nu\} + \sigma_\nu \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i \xi_i(\theta) \right) + \left( E\{\nu\} + \sigma_\nu \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i \xi_i(\theta) \right)^2 + \dots \\
 \lambda'(X, \theta) &= \left( E\{\nu\} + \sigma_\nu \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i \xi_i(\theta) \right) + \left( E\{\nu\} + \sigma_\nu \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i \xi_i(\theta) \right)^3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.50}$$

Para facilitar el álgebra, se considerando un cambio de variable como:

$$V_\nu(X, \theta) = E\{\nu\} + \sigma_\nu \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i \xi_i(\theta) = a + b
 \tag{A.51}$$

Teniendo que:

$$\begin{aligned}
 2\mu'(X, \theta) &= 1 - (a + b) + (a + b)^2 - (a + b)^3 + \dots \\
 \lambda'(X, \theta) &= (a + b) + (a + b)^3 + (a + b)^5 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.52}$$

El teorema binomial establece que:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n nC_r a^{n-r} b^r; \quad \text{con: } nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}
 \tag{A.53}$$

Desarrollando los binomios para  $2\mu'(\theta)$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^1 1C_r a^{1-r} b^r &= -1C_0 a^1 b^0 - 1C_1 a^0 b^1 \\
 \sum_{r=0}^2 2C_r a^{2-r} b^r &= 2C_0 a^2 b^0 + 2C_1 a^1 b^1 + 2C_2 a^0 b^2 \\
 &\vdots \\
 \sum_{r=0}^n nC_r a^{n-r} b^r &= nC_0 a^{n-0} b^0 + \dots + nC_n a^0 b^n
 \end{aligned}
 \tag{A.54}$$

Agrupando los términos  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  de los binomios desarrollados arriba, el coeficiente  $2\mu'(\theta)$  se escribe:

$$2\mu'(X, \theta) = \left(1 + \sum_{k=0}^n (-1)^k k C_0 a^k\right) + \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k k C_1 a^{k-1}\right) b + \left(\sum_{k=2}^n (-1)^k k C_2 a^{k-2}\right) b^2 + \left(\sum_{k=3}^n (-1)^k k C_3 a^{k-3}\right) b^3 + \dots \quad (\text{A.55})$$

Escribiendo que:

$$2\mu'(X, \theta) = \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 b^3 + \dots \quad (\text{A.56})$$

De la misma forma, para  $\lambda'(\theta)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^1 1C_r a^{1-r} b^r &= 1C_0 a^1 b^0 + 1C_1 a^0 b^1 \\ \sum_{r=0}^3 3C_r a^{3-r} b^r &= 3C_0 a^3 b^0 + 3C_1 a^2 b^1 + 3C_2 a^1 b^2 + 3C_3 a^0 b^3 \\ \sum_{r=0}^5 5C_r a^{5-r} b^r &= 5C_0 a^5 b^0 + 5C_1 a^4 b^1 + 5C_2 a^3 b^2 + 5C_3 a^2 b^3 + 5C_4 a^1 b^4 + 5C_5 a^0 b^5 \\ &\vdots \\ \sum_{r=0}^n nC_r a^{n-r} b^r &= nC_0 a^{n-0} b^0 + \dots + nC_n a^0 b^n \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Agrupando también los términos  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  de los binomios desarrollados en (A.57) se tiene que  $\lambda'(X, \theta)$  es:

$$\lambda(X, \theta)' = \sum_{k=1}^n (2k-1)C_0 a^{(2k-1)} + \left(\sum_{k=1}^n (2k-1)C_1 a^{(2k-2)}\right) b + \left(\sum_{k=2}^n (2k-1)C_2 a^{2k-3}\right) b^2 + \left(\sum_{k=3}^n (2k-1)C_3 a^{2k-4}\right) b^3 + \dots \quad (\text{A.58})$$

Escribiendo que:

$$\lambda(\theta)' = \beta_0 + \beta_1 b + \beta_2 b^2 + \beta_3 b^3 + \dots \quad (\text{A.59})$$

El orden de expansión que se utilizó en el desarrollo de los binomios para calcular los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  fue de acuerdo con su convergencia, el cual se presenta en las siguientes gráficas:

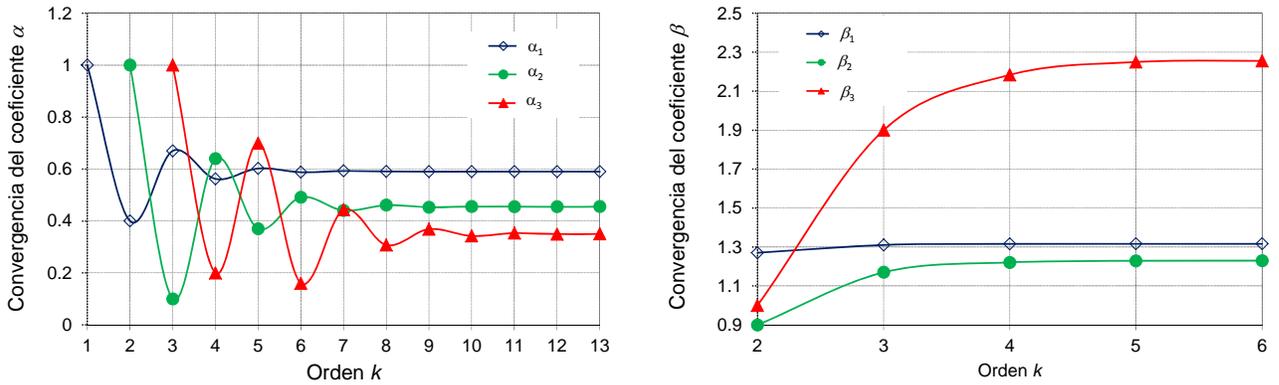


Figura A.1 Convergencia de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  de la expansión en series geométricas de los campos aleatorios  $2\mu'(X, \theta)$  y  $\lambda'(X, \theta)$

En la gráfica de la Figura A.1 se observa que los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  convergen aproximadamente para un orden  $k$  alrededor de ocho, mientras que los coeficientes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  convergen para un orden cinco.

Considerando las expansiones de  $2\mu'(X, \theta)$  y  $\lambda'(X, \theta)$ , la matriz de elasticidad para  $\nu$  aleatorio se escribe como:

$$D(X, \theta) = \begin{pmatrix} 2\mu' + \lambda' & \lambda' & 0 \\ \lambda' & 2\mu' + \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n \sigma_\nu^n + \beta_n \sigma_\nu^n & \beta_n \sigma_\nu^n & 0 \\ \beta_n \sigma_\nu^n & \alpha_n \sigma_\nu^n + \beta_n \sigma_\nu^n & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \sigma_\nu^n \end{pmatrix} b_i^n \quad (A.60)$$

donde:  $\sigma_\nu$  es la desviación estándar de la relación de Poisson.

Para conocer la influencia del orden  $n$  en la expansión de la matriz de elasticidad estocástica  $D(\theta)$ , se obtiene el determinante de esta matriz (Noh & Kwak, 2005), como una medida del tamaño de la matriz, que es:

$$|D(X, \theta)| = (\alpha_n \sigma_\nu^n + 2\beta_n \sigma_\nu^n) \alpha_n^2 \sigma_\nu^{2n} \quad (A.61)$$

En la gráfica de la Figura A.2 se observa que la contribución de ordenes mayores de dos es despreciable en la expansión de  $D(X, \theta)$ , esto conduce a legitimar el truncamiento de A.56 y A.59 a tres términos sin pérdida de exactitud.

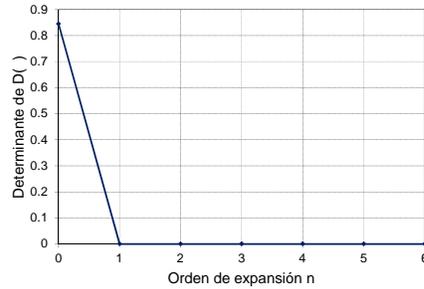


Figura A.2 Determinante de  $D(X, \theta)$

### A.6 Desarrollo de potencias de campos aleatorios

El desarrollo en series geométricas de los elementos de la matriz de elasticidad aleatoria  $D(X, \theta)$  contiene términos con exponente mayor de dos, lo que conduce a campos aleatorios, representados con *Karhunen-Loève*, elevados a potencias enteras. A continuación se expone el desarrollo de potencias de campos aleatorios requeridos en la deducción de las ecuaciones de equilibrio de la extensión del MEFEE.

Considerando que un campo aleatorio se puede expresar como:

$$b(X, \theta) = \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j = \sum_{i=1}^M b_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j \quad (\text{A.62})$$

en donde cada variable aleatoria  $\xi_i$  se expresa con expansión en *caos polinomial*.

El producto de dos campos aleatorios se escribe:

$$b(X, \theta)^2 = b(X, \theta)b(X, \theta) = \sum_{i_1=1}^M b_{i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \Psi_{j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \Psi_{j_2} \quad (\text{A.63})$$

Considerando que el producto de polinomios de *caos polinomiales* (inciso A.3) es:

$$\sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \Psi_{j_1} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \Psi_{j_2} = \sum_{j_{A_1}=1}^{P-1} C_{j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}}; \quad \text{con: } C_{j_{A_1}} = \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \quad (\text{A.64})$$

Se llega a:

$$\begin{aligned} b(X, \theta)^2 &= \sum_{i_1=1}^M b_{i_1}(X) \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2}(X) \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} \\ b(X, \theta)^2 &= \sum_{i_1=1}^M b_{i_1}(X) \sum_{i_2=1}^M b_{i_2}(X) \sum_{j_{A_1}}^{P-1} C_{j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Similarmente, para potencias de tres se tiene que:

$$\begin{aligned}
 b(X, \theta)^3 &= \sum_{i_1=1}^M b_{i_1}(X) \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2}(X) \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} \sum_{i_3=1}^M b_{i_3}(X) \sum_{j_3=0}^{P-1} C_{i_3 j_3} \Psi_{j_3} \\
 b(X, \theta)^3 &= \sum_{i_1=1}^M b_{i_1}(X) \sum_{i_2=1}^M b_{i_2}(X) \sum_{i_3=1}^M b_{i_3}(X) \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} C_{j_{A_2}} \Psi_{j_{A_2}}
 \end{aligned} \tag{A.66}$$

con:

$$C_{j_{A_2}} = \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{j_3=0}^{P-1} C_{i_3 j_3} C_{j_{A_1} j_3 j_{A_2}}$$

Para potencias de  $n > 2$

$$\begin{aligned}
 b(X, \theta)^n &= \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M b_{i_1}(X) b_{i_2}(X) \cdots b_{i_n}(X) \cdots \sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} C_{j_{A(n-1)}} \Psi_{j_{A(n-1)}} \\
 \text{con:} & \tag{A.67}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} C_{j_{A(n-1)}} = \sum_{j_1=0}^{P-1} \sum_{j_2=0}^{P-1} \cdots \sum_{j_n=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} C_{i_2 j_2} \cdots C_{i_n j_n} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} C_{j_{A(n-2)} j_n j_{A(n-1)}}$$

Considerando la notación de Debusschere *et al.* (2005) para simplificar  $b(X, \theta)^n$ , se tiene que:

$$\sum_{i_a=1}^M \Big|_{a=1}^n \equiv \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M \tag{A.68}$$

Finalmente, se llega a:

$$\begin{aligned}
 b(X, \theta)^n &= \sum_{i_a=1}^M \Big|_{a=1}^n \prod_{b=1}^n b_{i_b}(X) \sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} C_{j_{A(n-1)}} \Psi_{j_{A(n-1)}} \\
 \sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} C_{j_{A(n-1)}} &= \sum_{j_a=0}^{P-1} \Big|_{a=1}^n \prod_{b=1}^n C_{i_b j_b} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} \Big|_{a=2}^{(n-1)} \prod_{b=3}^n C_{j_{A(b-2)} j_b j_{A(b-1)}} \tag{A.69} \\
 b(X, \theta)^n &= \sum_{i_a=1}^M \Big|_{a=1}^n \prod_{b=1}^n b_{i_b}(X) \sum_{j_a=0}^{P-1} \Big|_{a=1}^n \prod_{b=1}^n C_{i_b j_b} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{j_{A_2}=0}^{P-1} \Big|_{a=2}^{(n-1)} \prod_{b=3}^n C_{j_{A(b-2)} j_b j_{A(b-1)}} \Psi_{j_{A(n-1)}}
 \end{aligned}$$

El producto de dos variables aleatorias en *caos polinomial*, es otra variable aleatoria cuya expansión está representada por  $j_{A_1}$ . Si el exponente a la que se eleva la variable es  $n > 2$ , la variable resultante se expande en  $j_{A(n-1)}$ . Sin embargo, como  $j_{A(n-1)}$  es solamente una identificación del número de productos de variables en *caos polinomial*, es posible escribir  $j_{A(n-1)} = j$ .

### A.7 Desarrollo de $K^n(\theta)$

La matriz de rigidez estocástica se escribe:

$$K(\theta) = \int_{\Omega} B^T D(X, \theta) B d\Omega = \int_{\Omega} B^T V_V(X, \theta) D_0 B d\Omega \tag{A.70}$$

Considerando la representación de las variables aleatorias en *caos polinomial*, se tiene que la matriz de rigidez estocástica es:

$$\sum_{i=1}^M K_i \xi_i(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^1 \Psi_j(\theta) \quad (\text{A.71})$$

Cuando el campo aleatorio esta elevado a una potencia mayor de uno, la matriz de rigidez se escribe como:

$$K^n(\theta) = \int_{\Omega} B^T b(X, \theta)^n D_0 B d\Omega \quad (\text{A.72})$$

Para el desarrollo de las matrices de rigidez  $K^n(\theta)$ , se considera (A.69) y se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} K^2(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{i_1} \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2}(X) \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=1}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} \\ K^2(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{i_1} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A_1}}^2 \Psi_{j_{A_1}} \\ &\vdots \\ K^n(\theta) &= \sum_{i_1=1}^M K_{i_1} \sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A(n-1)}}^n \Psi_{j_{A(n-1)}} \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

con:

$$\sum_{j_{A(n-1)}=0}^{P-1} \Delta_{j_{A(n-1)}}^n = \sum_{i_a=1}^M \left| \prod_{a=2}^n b_{i_a}(X) \sum_{j_a=0}^{P-1} \prod_{a=1}^n C_{i_a j_a} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{j_{A_b}=0}^{P-1} \prod_{a=2}^{(n-1)} \prod_{b=3}^n C_{j_{A(b-2)} j_b j_{A(b-1)}} \right|$$

$$\text{Para } n=2: \sum_{j_{A_b}=0}^{P-1} \prod_{a=2}^{(n-1)} \prod_{b=3}^n C_{j_{A(b-2)} j_b j_{A(b-1)}} \equiv 1$$

Para simplificar es posible nombrar  $j_{A(n-1)} = j$  debido a que el producto de variables aleatorias no se altera, escribiendo que:

$$K^n(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \sum_{j=0}^{P-1} \Delta_j^n \Psi_j ; \quad (\text{A.74})$$

### A.8 Desarrollo en series geométricas de $V_{E_v}(X, \theta)$

En la expansión en series geométricas de la matriz constitutiva  $D$  (ver capítulo 3, ec. 3.118), el módulo de elasticidad vertical  $E_v$  queda expresado en forma no lineal. Cuando este parámetro se considera aleatorio, se requiere expandir este campo nuevamente, teniendo que:

Para  $\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)}$ :

$$\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)} = \frac{1}{(E\{V_{E_v}(X, \theta)\} + \sigma_{E_v} b_{E_v})} = \frac{1}{(a + \sigma_{E_v} b_{E_v})} = \frac{1}{a \left(1 + \frac{\sigma_{E_v} b_{E_v}}{a}\right)} \quad (\text{A.75})$$

El desarrollo de una serie geométrica se satisface si el rango de valores cumple con  $|x| < 1$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (\text{A.76})$$

La serie de (A.75) es convergente para

$$\left| \frac{\sigma_{E_v} b_{E_v}}{a} \right| < 1 \text{ es decir, } |\sigma_{E_v} b_{E_v}| < |a| \quad (\text{A.77})$$

Desarrollando (A.75) de acuerdo con (A.76) se tiene que:

$$\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)} = \frac{1}{a} - \frac{\sigma_{E_v} b_{E_v}}{a^2} + \frac{\sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2}{a^3} = \beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2 \quad (\text{A.78})$$

donde:  $\{\beta_{m,n}; m = 2; n = 0, 1, 2\}$   $\beta$  son coeficientes propios de la expansión del campo,  $m$  representa la forma matemática del campo aleatorio y  $n$  el grado de cada término de la expansión, cuyo grado máximo es dos.

Para  $\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)^2}$

$$\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)^2} = \frac{1}{(E\{V_{E_v}(X, \theta)\} + \sigma_{E_v} b_{E_v})^2} = \frac{1}{(a + \sigma_{E_v} b_{E_v})^2} = \frac{1}{a_2^2 \left(1 + \frac{1}{a_2} (\sigma_{E_v} b_{E_v} - a_1)\right)^2} \quad (\text{A.79})$$

Con  $a_1 = a - 1$  y  $a_2 = a^2 - a_1^2$ .

La serie de (A.79) es convergente para:

$$\left| \frac{1}{a_2} (\sigma_{E_v} b_{E_v} - a_1) \right| < 1 \text{ es decir } |(\sigma_{E_v} b_{E_v} - a_1)| < |a_2| \quad (\text{A.80})$$

Desarrollando la serie (A.79) se llega a:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)^2} &= \frac{1}{a_2^2} \sum_{n=0}^m \binom{-2}{n} \left( \frac{\sigma_{E_v} b_{E_v}}{a_2} \right)^n \\
&= \left( \frac{1}{a_2^2} + \frac{2a_1}{a_2^3} + \frac{3a_1^2}{a_2^4} \right) + \left( -\frac{2}{a_2^3} - \frac{3a_1}{a_2^4} \right) \sigma_{E_v} b_{E_v} + \left( \frac{3}{a_2^4} \right) \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2 \\
&= \beta_{3,0} + \beta_{3,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2
\end{aligned} \tag{A.81}$$

Para  $\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)^3}$

$$\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)^3} = \frac{1}{a_2^3 \left( 1 + \frac{1}{a_2} (\sigma_{E_v} b_{E_v} - a_1) \right)^3}; \quad \left| (\sigma_{E_v} b_{E_v} - a_1) \right| < |a_2| \tag{A.82}$$

Desarrollando la serie de (A.82) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_{E_v}(X, \theta)^2} &= \left( \frac{1}{a_2^3} + \frac{3a_1}{a_2^4} + \frac{6a_1^2}{a_2^5} \right) + \left( -\frac{3}{a_2^4} - \frac{12a_1}{a_2^5} \right) \sigma_{E_v} b_{E_v} + \left( \frac{6}{a_2^5} \right) \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2 \\
&= \beta_{4,0} + \beta_{4,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{4,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2
\end{aligned} \tag{A.83}$$

#### A.9 Convergencia de la expansión polinomial de $D$ (estado plano de esfuerzo)

Las submatrices  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  que constituyen la matriz de elasticidad  $D$  son función no lineal de  $E_v$ ,  $E_h$ ,  $\nu_{vh}$ , la cual se expresa en series geométricas como:

$$D_{11} = D_{12} = D_{22} = f \left( \frac{1}{1 - \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2} \right) = f \left( 1 + \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 + \left( \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 \right)^2 + \dots \right) \tag{A.84}$$

La serie de la expresión (A.84) es convergente para:

$$\left| \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}^2 \right| < 1 \quad \text{es decir} \quad |E_h \nu_{vh}^2| < |E_v| \tag{A.85}$$

La expansión de cada una de las submatrices de  $D$  se realizó considerando tres términos, lo cual permitió obtener una aproximación de 100% y 98.5% para valores de  $\nu$  entre 0 y 0.5 respectivamente, como se muestra en la gráfica de la Figura A.3.

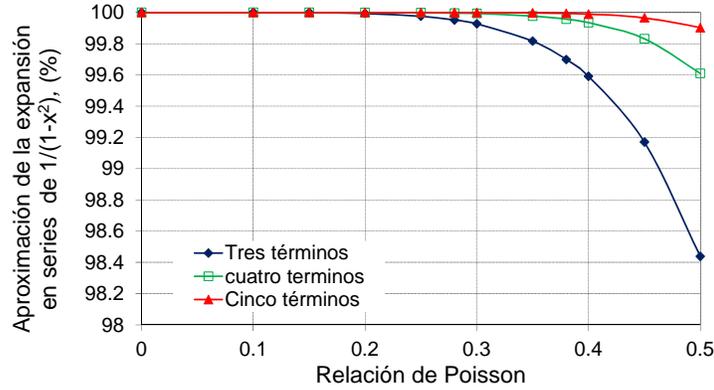


Figura A.3 Relación de convergencia de la serie desarrollada para  $D$  (estado plano de esfuerzo)

### A.10 Desarrollo y convergencia de la serie geométrica de $m$ (estado plano de deformación)

La matriz de elasticidad para el estado plano de deformación es:

$$D = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E_h(1 - \nu_{vh}^2) & E_h\nu_{vh}(1 + \nu_{hh}) & 0 \\ E_h\nu_{vh}(1 + \nu_{hh}) & E_v(1 - \nu_{vh}^2) & 0 \\ 0 & 0 & G_{vh}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.86})$$

Con:  $m = (1 + \nu_{hh})(1 - \nu_{hh} - 2\nu_{vh}^2)$

Para poder desarrollar  $m$  en series de geométricas se realizó la siguiente factorización:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \nu_{hh})(1 - \nu_{hh} - 2\nu_{vh}^2)} &= \frac{1}{1 - 2\nu_{vh}^2 - \nu_{hh}^2 - 2\nu_{vh}^2\nu_{hh}^2} \\ &= \frac{1}{(1 - \nu_{hh}^2) + (-2\nu_{vh}^2 - 2\nu_{vh}^2\nu_{hh}^2)} \\ &= \frac{1}{(1 + \nu_{hh}^2)[(1 - \nu_{hh}^2) - 2\nu_{vh}^2]} \\ &= \frac{1}{(1 - \nu_{hh}^2) \left(1 - \frac{2\nu_{vh}^2}{1 - \nu_{hh}^2}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

La serie geométrica de  $(1/m)$  es convergente para:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - \nu_{hh}^2)}; & \quad |\nu_{hh}^2| < 1 \\ \frac{1}{\left(1 - \frac{2\nu_{vh}^2}{1 - \nu_{hh}^2}\right)}; & \quad |2\nu_{vh}^2| < |1 - \nu_{hh}^2| \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Desarrollando la serie de  $(1/m)$  de (A.87), considerando (A.76) se tiene que:

$$\frac{1}{(1-v_{hh}^2)\left(1-\frac{2nv_{vh}^2}{1-v_{hh}}\right)} = 1 + v_{hh}^2 + v_{hh}^4 + \dots \left[ 1 + \left(\frac{2nv_{vh}^2}{1-v_{hh}}\right) + \left(\frac{2nv_{vh}^2}{1-v_{hh}}\right)^2 + \dots \right] \quad (A.89)$$

Considerando que:

$$\frac{1}{(1+x)^n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!} x^2 \dots \quad (A.90)$$

La serie de la expresión (A.87) se escribe como:

$$\frac{1}{(1-v_{hh}^2)\left(1-\frac{2nv_{vh}^2}{1-v_{hh}}\right)} = 1 + v_{hh}^2 + v_{hh}^4 + \dots \left[ 1 + 2nv_{vh}^2(1 + v_{hh} + v_{hh}^2 + \dots) + 4n^2v_{vh}^4(1 + 2v_{hh} + 3v_{hh}^2 + \dots) + \dots \right] \quad (A.91)$$

La aproximación al valor exacto de la serie anterior dependerá de los valores que tomen  $v_{vh}$  y  $v_{hh}$ . Por ejemplo, si  $v_{vh}$  y  $v_{hh}$  toman valores de 0.4 se necesita una expansión en toda la serie de orden sexto (siete términos) para tener una aproximación de alrededor de 95%. Sin embargo, esto conduce a que el número de elementos de la serie (A.87) sea muy grande, que implica que el tiempo de cálculo sea muy costoso. Por este motivo, esta serie se evaluó considerando solamente tres términos, cuya convergencia es función de la relación Poisson, como se muestra en la gráfica de la Figura A.4.

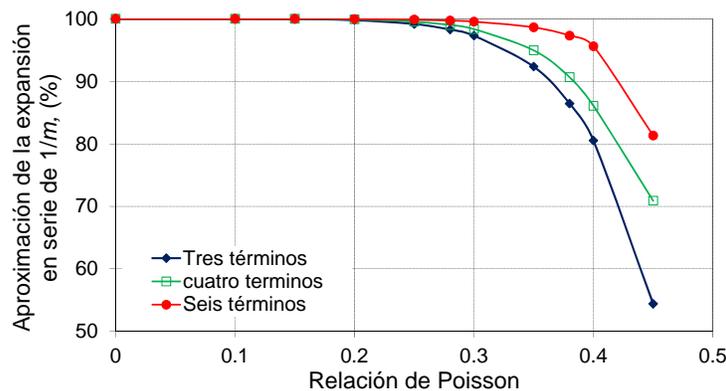


Figura A.4 Relación de convergencia de la serie desarrollada para  $D$  (estado plano de deformación)

Tomando en cuenta tres términos en todos los elementos de la serie (A.87), se llega a lo siguiente:

$$\frac{1}{(1-v_{hh}^2)\left(1-\frac{2nv_{vh}^2}{1-v_{hh}}\right)} = \left( \begin{aligned} &1 + 2nv_{vh}^2 + 2nv_{vh}^2v_{hh} + 4nv_{vh}^2v_{hh}^2 + 4n^2v_{vh}^4 + 8n^2v_{vh}^4v_{hh} + \\ &16n^2v_{vh}^4v_{hh}^2 + v_{hh}^2 + 2nv_{vh}^2v_{hh}^3 + 4nv_{vh}^2v_{hh}^4 + 8n^2v_{vh}^4v_{hh}^3 + \\ &16n^2v_{vh}^4v_{hh}^4 + v_{hh}^4 + 2nv_{vh}^2v_{hh}^5 + 2nv_{vh}^2v_{hh}^6 + 8n^2v_{vh}^4v_{hh}^5 + 12n^2v_{vh}^4v_{hh}^6 \end{aligned} \right) \quad (A.92)$$

A.11 Matrices de rigidez aleatorias y medias para el caso anisótropo (estado plano de deformación).

Tabla A.3 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{11}$  ( $E_v$  aleatorio)

$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$
1	---	$K_{11,1}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,9}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{11,9}^0$	17	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,17}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{11,17}^0$
2	---	$K_{11,2}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,10}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{11,10}^0$	18	$\sum_{n=1}^2 \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,18}^n(\theta)$	$\beta_{4,0} K_{11,18}^0$
3	---	$K_{11,3}^0$	11	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,11}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{11,11}^0$	19	$\sum_{n=1}^2 \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,19}^n(\theta)$	$\beta_{4,0} K_{11,19}^0$
4	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,4}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{11,4}^0$	12	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,12}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{11,12}^0$	20	$\sum_{n=1}^2 \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,20}^n(\theta)$	$\beta_{4,0} K_{11,20}^0$
5	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,5}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{11,5}^0$	13	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,13}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{11,13}^0$	21	$\sum_{n=1}^2 \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,21}^n(\theta)$	$\beta_{4,0} K_{11,21}^0$
6	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,6}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{11,6}^0$	14	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,14}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{11,14}^0$	22	$\sum_{n=1}^2 \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,22}^n(\theta)$	$\beta_{4,0} K_{11,22}^0$
7	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,7}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{11,7}^0$	15	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,15}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{11,15}^0$	23	$\sum_{n=1}^2 \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,23}^n(\theta)$	$\beta_{4,0} K_{11,23}^0$
8	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,8}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{11,8}^0$	16	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,16}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{11,16}^0$	24	$\sum_{n=1}^2 \beta_{4,n} \sigma_{E_v}^n K_{11,24}^n(\theta)$	$\beta_{4,0} K_{11,24}^0$

Tabla A.4 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{12}$  ( $E_v$  aleatorio)

$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$
1	---	$K_{12,1}^0$	8	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,8}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{12,8}^0$	15	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,15}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{12,15}^0$
2	---	$K_{12,2}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,9}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{12,9}^0$	16	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,16}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{12,16}^0$
3	---	$K_{12,3}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,10}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{12,10}^0$	17	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,17}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{12,17}^0$
4	---	$K_{12,4}^0$	11	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,11}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{12,11}^0$	18	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,18}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{12,18}^0$
5	---	$K_{12,5}^0$	12	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,12}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{12,12}^0$	19	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,19}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{12,19}^0$
6	---	$K_{12,6}^0$	13	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,13}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{12,13}^0$	20	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,20}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{12,20}^0$
7	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,7}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{12,7}^0$	14	$\sum_{n=1}^2 \beta_{2,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,14}^n(\theta)$	$\beta_{2,0} K_{12,14}^0$	21	$\sum_{n=1}^2 \beta_{3,n} \sigma_{E_v}^n K_{12,21}^n(\theta)$	$\beta_{3,0} K_{12,21}^0$

Tabla A.5 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{22}$  ( $E_v$  aleatorio)

$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$
1	$\beta_{1,1}\sigma_{E_v}K_{22,1}(\theta)$	$\beta_{1,0}K_{22,1}^0$	5		$K_{22,5}^0$	9	$\sum_{n=1}^2\beta_{2,n}\sigma_{E_v}^nK_{22,9}^n(\theta)$	$\beta_{2,0}K_{22,9}^0$
2	---	$K_{22,2}^0$	6	---	$K_{22,6}^0$	10	$\sum_{n=1}^2\beta_{2,n}\sigma_{E_v}^nK_{22,10}^n(\theta)$	$\beta_{2,0}K_{22,10}^0$
3	---	$K_{22,3}^0$	7	$\sum_{n=1}^2\beta_{2,n}\sigma_{E_v}^nK_{22,7}^n(\theta)$	$\beta_{2,0}K_{22,7}^0$	11	$\sum_{n=1}^2\beta_{2,n}\sigma_{E_v}^nK_{22,11}^n(\theta)$	$\beta_{2,0}K_{22,11}^0$
4	---	$K_{22,4}^0$	8	$\sum_{n=1}^2\beta_{2,n}\sigma_{E_v}^nK_{22,8}^n(\theta)$	$\beta_{2,0}K_{22,8}^0$	12	$\sum_{n=1}^2\beta_{2,n}\sigma_{E_v}^nK_{22,12}^n(\theta)$	$\beta_{2,0}K_{22,12}^0$

Tabla A.6 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{11}$  ( $E_h$  aleatorio)

$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$
1	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h}K_{11,1}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{11,1}^0$	9	$\sum_{n=1}^2\alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,9}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{11,9}^0$	17	$\sum_{n=1}^3\alpha_n\sigma_{E_h}^nK_{11,17}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{11,17}^0$
2	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h}K_{11,2}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{11,2}^0$	10	$\sum_{n=1}^2\alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,10}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{11,10}^0$	18	$\sum_{n=1}^4\alpha_n\sigma_{E_h}^nK_{11,18}^n(\theta)$	$\alpha_{4,0}K_{11,18}^0$
3	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h}K_{11,3}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{11,3}^0$	11	$\sum_{n=1}^3\alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,11}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{11,11}^0$	19	$\sum_{n=1}^4\alpha_n\sigma_{E_h}^nK_{11,19}^n(\theta)$	$\alpha_{4,0}K_{11,19}^0$
4	$\sum_{n=1}^2\alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,4}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{11,4}^0$	12	$\sum_{n=1}^3\alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,12}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{11,12}^0$	20	$\sum_{n=1}^4\alpha_n\sigma_{E_h}^nK_{11,20}^n(\theta)$	$\alpha_{4,0}K_{11,20}^0$
5	$\sum_{n=1}^2\alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,5}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{11,5}^0$	13	$\sum_{n=1}^3\alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,13}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{11,13}^0$	21	$\sum_{n=1}^4\alpha_n\sigma_{E_h}^nK_{11,21}^n(\theta)$	$\alpha_{4,0}K_{11,21}^0$
6	$\sum_{n=1}^2\alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,6}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{11,6}^0$	14	$\sum_{n=1}^3\alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,14}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{11,14}^0$	22	$\sum_{n=1}^4\alpha_n\sigma_{E_h}^nK_{11,22}^n(\theta)$	$\alpha_{4,0}K_{11,22}^0$
7	$\sum_{n=1}^2\alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,7}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{11,7}^0$	15	$\sum_{n=1}^3\alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,15}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{11,15}^0$	23	$\sum_{n=1}^4\alpha_n\sigma_{E_h}^nK_{11,23}^n(\theta)$	$\alpha_{4,0}K_{11,23}^0$
8	$\sum_{n=1}^2\alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,8}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{11,8}^0$	16	$\sum_{n=1}^3\alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^nK_{11,16}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{11,16}^0$	24	$\sum_{n=1}^4\alpha_n\sigma_{E_h}^nK_{11,24}^n(\theta)$	$\alpha_{4,0}K_{11,24}^0$

Tabla A.7 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{12}$  ( $E_h$  aleatorio)

$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$
1	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,1}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,1}^0$	8	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,8}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{12,8}^0$	15	$\sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,15}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{12,15}^0$
2	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,2}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,2}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,9}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{12,9}^0$	16	$\sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,16}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{12,16}^0$
3	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,3}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,3}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,10}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{12,10}^0$	17	$\sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,17}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{12,17}^0$
4	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,4}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,4}^0$	11	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,11}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{12,11}^0$	18	$\sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,18}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{12,18}^0$
5	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,5}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,5}^0$	12	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,12}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{12,12}^0$	19	$\sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,19}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{12,19}^0$
6	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,6}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,6}^0$	13	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,13}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{12,13}^0$	20	$\sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,20}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{12,20}^0$
7	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,7}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{12,7}^0$	14	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,14}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{12,14}^0$	21	$\sum_{n=1}^3 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n K_{12,21}^n(\theta)$	$\alpha_{3,0}K_{12,21}^0$

Tabla A.8 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{22}$  ( $E_h$  aleatorio)

$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$
1	---	$K_{22,1}^0$	5	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,5}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,5}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{22,9}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{22,9}^0$
2	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,2}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,2}^0$	6	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,6}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,6}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{22,10}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{22,10}^0$
3	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,3}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,3}^0$	7	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{22,7}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{22,7}^0$	11	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{22,11}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{22,11}^0$
4	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,3}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,4}^0$	8	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{22,8}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{22,8}^0$	12	$\sum_{n=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n K_{22,12}^n(\theta)$	$\alpha_{2,0}K_{22,12}^0$

Tabla A.9 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{11}$  ( $E_v$  y  $E_h$  aleatorios)

$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$
1	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{11,1}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{11,1}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,9}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{11,9}^0$	17	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,17}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{11,17}^0$
2	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{11,2}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{11,2}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,10}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{11,10}^0$	18	$\sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^2 \alpha_{4,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{4,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,18}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{4,0}\beta_{4,0}K_{11,18}^0$
3	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{11,3}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{11,3}^0$	11	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,11}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{11,11}^0$	19	$\sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^2 \alpha_{4,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{4,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,19}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{4,0}\beta_{4,0}K_{11,19}^0$
4	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,4}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{11,4}^0$	12	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,12}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{11,12}^0$	20	$\sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^2 \alpha_{4,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{4,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,20}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{4,0}\beta_{4,0}K_{11,20}^0$
5	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,5}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{11,5}^0$	13	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,13}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{11,13}^0$	21	$\sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^2 \alpha_{4,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{4,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,21}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{4,0}\beta_{4,0}K_{11,21}^0$
6	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,6}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{11,6}^0$	14	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,14}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{11,14}^0$	22	$\sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^2 \alpha_{4,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{4,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,22}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{4,0}\beta_{4,0}K_{11,22}^0$
7	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,7}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{11,7}^0$	15	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,15}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{11,15}^0$	23	$\sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^2 \alpha_{4,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{4,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,23}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{4,0}\beta_{4,0}K_{11,23}^0$
8	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,8}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{11,8}^0$	16	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,16}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{11,16}^0$	24	$\sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^2 \alpha_{4,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{4,m}\sigma_{E_v}^m K_{11,24}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{4,0}\beta_{4,0}K_{11,24}^0$

Tabla A.10 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{12}$  ( $E_v$  y  $E_h$  aleatorios)

$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$
1	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,1}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,1}^0$	8	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,8}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{12,8}^0$	15	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,15}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{12,15}^0$
2	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,2}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,2}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,9}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{12,9}^0$	16	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,16}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{12,16}^0$
3	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,3}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,3}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,10}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{12,10}^0$	17	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,17}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{12,17}^0$
4	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,4}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,4}^0$	11	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,11}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{12,11}^0$	18	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,18}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{12,18}^0$
5	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,5}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,5}^0$	12	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,12}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{12,12}^0$	19	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,19}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{12,19}^0$
6	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{12,6}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{12,6}^0$	13	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,13}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{12,13}^0$	20	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,20}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{12,20}^0$
7	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,7}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{12,7}^0$	14	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,14}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{12,14}^0$	21	$\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^2 \alpha_{3,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{3,m}\sigma_{E_v}^m K_{12,21}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{3,0}\beta_{3,0}K_{12,21}^0$

Tabla A.11 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{22}$  ( $E_v$  y  $E_h$  aleatorios)

$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$
1	$\beta_{1,1}\sigma_{E_v} K_{22,1}(\theta)$	$\beta_{1,0}K_{22,1}^0$	5	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,5}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,5}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{22,9}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{22,9}^0$
2	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,2}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,2}^0$	6	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,6}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,6}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{22,10}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{22,10}^0$
3	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,3}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,3}^0$	7	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{22,7}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{22,7}^0$	11	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{22,11}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{22,11}^0$
4	$\alpha_{1,1}\sigma_{E_h} K_{22,3}(\theta)$	$\alpha_{1,0}K_{22,4}^0$	8	$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{2,n}\sigma_{E_h}^n \beta_{2,m}\sigma_{E_v}^m K_{22,8}^{(n+m)}(\theta)$	$\alpha_{2,0}\beta_{2,0}K_{22,8}^0$	12	$\beta_{1,1}\sigma_{E_v} K_{22,12}(\theta)$	$\beta_{1,0}K_{22,12}^0$

Tabla A.12 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{11}$  ( $v_{vh}$  aleatoria)

$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$
1	---	$K_{11,1}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,9}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{11,9}^0$	17	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,17}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{11,17}^0$
2	---	$K_{11,2}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,10}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{11,10}^0$	18	$\sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,18}^n(\theta)$	$\gamma_{6,0} K_{11,18}^0$
3	---	$K_{11,3}^0$	11	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,11}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{11,11}^0$	19	$\sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,19}^n(\theta)$	$\gamma_{6,0} K_{11,19}^0$
4	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,4}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{11,4}^0$	12	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,12}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{11,12}^0$	20	$\sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,20}^n(\theta)$	$\gamma_{6,0} K_{11,20}^0$
5	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,5}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{11,5}^0$	13	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,13}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{11,13}^0$	21	$\sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,21}^n(\theta)$	$\gamma_{6,0} K_{11,21}^0$
6	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,6}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{11,6}^0$	14	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,14}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{11,14}^0$	22	$\sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,22}^n(\theta)$	$\gamma_{6,0} K_{11,22}^0$
7	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,7}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{11,7}^0$	15	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,15}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{11,15}^0$	23	$\sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,23}^n(\theta)$	$\gamma_{6,0} K_{11,23}^0$
8	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,8}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{11,8}^0$	16	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,16}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{11,16}^0$	24	$\sum_{n=1}^6 \gamma_{6,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{11,24}^n(\theta)$	$\gamma_{6,0} K_{11,24}^0$

Tabla A.13 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{12}$  ( $v_{vh}$  aleatoria)

$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$
1	$\gamma_{1,1}\sigma_{v_{vh}} K_{12,1}(\theta)$	$\gamma_{1,0}K_{12,1}^0$	8	$\sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,8}^n(\theta)$	$\gamma_{3,0}K_{12,8}^0$	15	$\sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,15}^n(\theta)$	$\gamma_{5,0}K_{12,15}^0$
2	$\gamma_{1,1}\sigma_{v_{vh}} K_{12,2}(\theta)$	$\gamma_{1,0}K_{12,2}^0$	9	$\sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,9}^n(\theta)$	$\gamma_{3,0}K_{12,9}^0$	16	$\sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,16}^n(\theta)$	$\gamma_{5,0}K_{12,16}^0$
3	$\gamma_{1,1}\sigma_{v_{vh}} K_{12,3}(\theta)$	$\gamma_{1,0}K_{12,3}^0$	10	$\sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,10}^n(\theta)$	$\gamma_{3,0}K_{12,10}^0$	17	$\sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,17}^n(\theta)$	$\gamma_{5,0}K_{12,17}^0$
4	$\gamma_{1,1}\sigma_{v_{vh}} K_{12,4}(\theta)$	$\gamma_{1,0}K_{12,4}^0$	11	$\sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,11}^n(\theta)$	$\gamma_{3,0}K_{12,11}^0$	18	$\sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,18}^n(\theta)$	$\gamma_{5,0}K_{12,18}^0$
5	$\gamma_{1,1}\sigma_{v_{vh}} K_{12,5}(\theta)$	$\gamma_{1,0}K_{12,5}^0$	12	$\sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,12}^n(\theta)$	$\gamma_{3,0}K_{12,12}^0$	19	$\sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,19}^n(\theta)$	$\gamma_{5,0}K_{12,19}^0$
6	$\gamma_{1,1}\sigma_{v_{vh}} K_{12,6}(\theta)$	$\gamma_{1,0}K_{12,6}^0$	13	$\sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,13}^n(\theta)$	$\gamma_{3,0}K_{12,13}^0$	20	$\sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,20}^n(\theta)$	$\gamma_{5,0}K_{12,20}^0$
7	$\sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,7}^n(\theta)$	$\gamma_{3,0}K_{12,7}^0$	14	$\sum_{n=1}^3 \gamma_{3,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,14}^n(\theta)$	$\gamma_{3,0}K_{12,14}^0$	21	$\sum_{n=1}^5 \gamma_{5,n}\sigma_{v_{vh}}^n K_{12,21}^n(\theta)$	$\gamma_{5,0}K_{12,21}^0$

Tabla A.14 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{22}$  ( $v_{vh}$  aleatoria)

$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$
1	---	$K_{22,1}^0$	5	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,5}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{22,5}^0$	9	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,9}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{22,9}^0$
2	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,2}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{22,2}^0$	6	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,6}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{22,6}^0$	10	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,10}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{22,10}^0$
3	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,3}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{22,3}^0$	7	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,7}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{22,7}^0$	11	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,11}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{22,11}^0$
4	$\sum_{n=1}^2 \gamma_{2,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,4}^n(\theta)$	$\gamma_{2,0} K_{22,4}^0$	8	$\sum_{n=1}^4 \gamma_{4,n} \sigma_{v_{vh}}^n K_{22,8}^n(\theta)$	$\gamma_{4,0} K_{22,8}^0$	12	---	$K_{22,12}^0$

Tabla A.15 Términos del desarrollo en series geométricas de  $D_{11}$  ( $v_{hh}$  aleatoria)

$D_{11,n}$	Término	$D_{11,n}$	Término	$D_{11,n}^{\circ}$	Término	$D_{11,n}$	Término
1	$E_h$	7	$-8 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}$	13	$6 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^3$	19	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^5$
2	$\frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2$	8	$E_h v_{hh}^2$	14	$-8 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^3$	20	$6 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^5$
3	$2 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4$	9	$3 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^2$	15	$E_h v_{hh}^4$	21	$-8 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^5$
4	$-4 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6$	10	$12 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^2$	16	$3 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^4$	22	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^6$
5	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}$	11	$-16 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^2$	17	$12 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^4$	23	$10 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}^6$
6	$6 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^4 v_{hh}$	12	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^2 v_{hh}^3$	18	$-16 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^4$	24	$-12 \frac{E_h^4}{E_v^3} v_{vh}^6 v_{hh}^6$

Tabla A.16 Términos del desarrollo en series geométricas de  $D_{12}$  ( $v_{hh}$  aleatoria)

$D_{12,n}$	Término	$D_{12,n}$	Término	$D_{12,n}$	Término	$D_{12,n}$	Término
1	$E_h v_{vh}$	7	$E_h v_{vh} v_{hh}^2$	13	$6 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^4$	19	$20 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^6$
2	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3$	8	$6 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^2$	14	$24 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^4$	20	$2 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^7$
3	$4 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5$	9	$24 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^2$	15	$E_h v_{vh} v_{hh}^5$	21	$12 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^7$
4	$E_h v_{vh} v_{hh}$	10	$E_h v_{vh} v_{hh}^3$	16	$6 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^5$		
5	$4 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}$	11	$6 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^3$	17	$24 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}^5$		
6	$12 \frac{E_h^3}{E_v^2} v_{vh}^5 v_{hh}$	12	$E_h v_{vh} v_{hh}^4$	18	$4 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^3 v_{hh}^6$		

Tabla A.17 Términos del desarrollo en series geométricas de  $D_{22}$  ( $v_{hh}$  aleatoria)

$D_{22,n}$	Término	$D_{22,n}$	Término	$D_{22,n}$	Término	$D_{22,n}$	Término
1	$E_v$	4	$2 E_h v_{vh}^2 v_{hh}$	7	$12 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4 v_{hh}^2$	10	$-2 E_h v_{vh}^2 v_{hh}^7$
2	$2 E_h v_{vh}^2$	5	$8 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4 v_{hh}$	8	$-8 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4 v_{hh}^6$	11	$-12 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4 v_{hh}^7$
3	$4 \frac{E_h^2}{E_v} v_{vh}^4$	6	$2 E_h v_{vh}^2 v_{hh}^2$	9	$-E_v v_{hh}^6$	12	$-2 E_h v_{vh}^2 v_{hh}^8$

Tabla A.18 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{11}$  ( $v_{hh}$  aleatoria)

$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$	$D_{11,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{11,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{11,m}^0$
1	---	$K_{11,1}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,9}^n(\theta)$	$\omega_{2,0} K_{11,9}^0$	17	$\sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,17}^n(\theta)$	$\omega_{4,0} K_{11,17}^0$
2	---	$K_{11,2}^0$	10	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,10}^n(\theta)$	$\omega_{2,0} K_{11,10}^0$	18	$\sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,18}^n(\theta)$	$\omega_{4,0} K_{11,18}^0$
3	---	$K_{11,3}^0$	11	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,11}^n(\theta)$	$\omega_{2,0} K_{11,11}^0$	19	$\sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,19}^n(\theta)$	$\omega_{5,0} K_{11,19}^0$
4	---	$K_{11,4}^0$	12	$\sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,12}^n(\theta)$	$\omega_{3,0} K_{11,12}^0$	20	$\sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,20}^n(\theta)$	$\omega_{5,0} K_{11,20}^0$
5	$\omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{11,5}^n(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{11,5}^0$	13	$\sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,13}^n(\theta)$	$\omega_{3,0} K_{11,13}^0$	21	$\sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,21}^n(\theta)$	$\omega_{5,0} K_{11,21}^0$
6	$\omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{11,6}^n(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{11,6}^0$	14	$\sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,14}^n(\theta)$	$\omega_{3,0} K_{11,14}^0$	22	$\sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,22}^n(\theta)$	$\omega_{6,0} K_{11,22}^0$
7	$\omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{11,7}^n(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{11,7}^0$	15	$\sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,15}^n(\theta)$	$\omega_{4,0} K_{11,15}^0$	23	$\sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,23}^n(\theta)$	$\omega_{6,0} K_{11,23}^0$
8	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,8}^n(\theta)$	$\omega_{2,0} K_{11,8}^0$	16	$\sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,16}^n(\theta)$	$\omega_{4,0} K_{11,16}^0$	24	$\sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{11,24}^n(\theta)$	$\omega_{6,0} K_{11,24}^0$

Tabla A.19 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{12}$  ( $v_{hh}$  aleatoria)

$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$	$D_{12,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{12,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{12,m}^0$
1	---	$K_{12,1}^0$	8	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,8}^n(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{12,8}^0$	15	$\sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,15}^n(\theta)$	$\omega_{5,0} K_{12,15}^0$
2	---	$K_{12,2}^0$	9	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,9}^n(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{12,9}^0$	16	$\sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,16}^n(\theta)$	$\omega_{5,0} K_{12,16}^0$
3	---	$K_{12,3}^0$	10	$\sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,10}^n(\theta)$	$\omega_{3,0} K_{12,10}^0$	17	$\sum_{n=1}^5 \omega_{5,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,17}^n(\theta)$	$\omega_{5,0} K_{12,17}^0$
4	$\omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{12,4}(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{12,4}^0$	11	$\sum_{n=1}^3 \omega_{3,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,11}^n(\theta)$	$\omega_{3,0} K_{12,11}^0$	18	$\sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,18}^n(\theta)$	$\omega_{6,0} K_{12,18}^0$
5	$\omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{12,5}(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{12,5}^0$	12	$\sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,12}^n(\theta)$	$\omega_{4,0} K_{12,12}^0$	19	$\sum_{n=1}^6 \omega_{6,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,19}^n(\theta)$	$\omega_{6,0} K_{12,19}^0$
6	$\omega_{1,1} \sigma_{v_{hh}} K_{12,6}(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{12,6}^0$	13	$\sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,13}^n(\theta)$	$\omega_{4,0} K_{12,13}^0$	20	$\sum_{n=1}^7 \omega_{7,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,20}^n(\theta)$	$\omega_{7,0} K_{12,20}^0$
7	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,7}^n(\theta)$	$\omega_{1,0} K_{12,7}^0$	14	$\sum_{n=1}^4 \omega_{4,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,14}^n(\theta)$	$\omega_{4,0} K_{12,14}^0$	21	$\sum_{n=1}^7 \omega_{7,n} \sigma_{v_{hh}}^n K_{12,21}^n(\theta)$	$\omega_{7,0} K_{12,21}^0$

Tabla A.20 Matriz de rigidez aleatoria y media para cada término de  $D_{22}$  ( $v_{hh}$  aleatoria)

$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$	$D_{22,m}$	Matriz de rigidez aleatoria $K_{22,m}^n(\theta)$	Matriz de rigidez media $K_{22,m}^0$
1	---	$K_{22,1}^0$	5	$\omega_{1,1}\sigma_{v_{hh}} K_{22,5}(\theta)$	$\omega_{1,0}K_{22,5}^0$	9	$\sum_{n=1}^6 \omega_{6,n}\sigma_{v_{hh}}^n K_{22,9}^n(\theta)$	$\omega_{6,0}K_{22,9}^0$
2	--	$K_{22,2}^0$	6	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n}\sigma_{v_{hh}}^n K_{22,6}^n(\theta)$	$\omega_{2,0}K_{22,6}^0$	10	$\sum_{n=1}^7 \omega_{7,n}\sigma_{v_{hh}}^n K_{22,10}^n(\theta)$	$\omega_{7,0}K_{22,10}^0$
3	---	$K_{22,3}^0$	7	$\sum_{n=1}^2 \omega_{2,n}\sigma_{v_{hh}}^n K_{22,7}^n(\theta)$	$\omega_{2,0}K_{22,7}^0$	11	$\sum_{n=1}^7 \omega_{7,n}\sigma_{v_{hh}}^n K_{22,11}^n(\theta)$	$\omega_{7,0}K_{22,11}^0$
4	$\omega_{1,1}\sigma_{v_{hh}} K_{22,4}(\theta)$	$\omega_{1,0}K_{22,4}^0$	8	$\sum_{n=1}^6 \omega_{6,n}\sigma_{v_{hh}}^n K_{22,8}^n(\theta)$	$\omega_{6,0}K_{22,8}^0$	12	$\sum_{n=1}^8 \omega_{8,n}\sigma_{v_{hh}}^n K_{22,12}^n(\theta)$	$\omega_{8,0}K_{22,12}^0$

### A.12 Formulación de la ecuación equilibrio del MEFEE para $\nu$ aleatoria con campos aleatorios de entrada expandidos sólo con Karhunen-Loève

La extensión de la formulación del MEFEE al caso isótropo ( $\nu$  aleatoria,  $E$  y  $\nu$  aleatorios) y anisótropo, se realizó representando cada una de las variables aleatorias  $\xi_i$  del desarrollo en serie de *Karhunen-Loève* mediante una expansión en *caos polinomial*, el fin: simplificar el cálculo de esperanzas. Como ejemplo, a continuación se presenta la formulación del MEFEE para  $\nu$  aleatoria con la representación de campos aleatorios sin expansión de las variables aleatorias  $\xi_i$ .

En el capítulo 3 se estableció que la matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$  se expresa de la siguiente forma:

$$K(\theta) = \alpha_1 \sigma_\nu K_1^1(\theta) + \alpha_2 \sigma_\nu^2 K_1^2(\theta) + \alpha_3 \sigma_\nu^3 K_1^3(\theta) + \beta_1 \sigma_\nu K_2^1(\theta) + \beta_2 \sigma_\nu^2 K_2^2(\theta) + \beta_3 \sigma_\nu^3 K_2^3(\theta) \quad (\text{A.93})$$

donde:  $\alpha_i$  y el subíndice 1 de  $K(\theta)$  corresponden a los coeficientes del desarrollo en series geométricas de  $2\mu$ ,  $\beta_i$  y el subíndice 2 de  $K(\theta)$  corresponden a los de la serie de  $\lambda$ .

Las matrices de rigidez deterministas son:

- Matriz de rigidez media:

$$K_0 = \int_{\Omega} B^T (\alpha_0 D_1 + \beta_0 D_2) B \quad (\text{A.94})$$

- Matriz de rigidez de pesos

$$\begin{aligned} K_{1,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i(X) D_1 B d\Omega; & b_i(X) &= \sqrt{\eta_i} \varphi_i(X) \\ K_{2,i} &= \int_{\Omega} B^T b_i(X) D_2 B d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Teniendo en cuenta que la matriz de rigidez estocástica en términos del desarrollo en serie de *Karhunen-Loève* se expresa como:

$$K(\theta) = \sum_{i=1}^M K_i \xi_i(\theta) \quad (\text{A.96})$$

La potencias de  $K(\theta)^n$  de (A.93) se escriben como:

$$\begin{aligned} K_j^2(\theta) &= \int_{\Omega} B^T b(X, \theta)^2 D_j B d\Omega = \sum_{i_1=1}^M K_{j,i_1} \xi_{i_1}(\theta) \sum_{i_2=1}^M b_{i_2}(X) \xi_{i_2}(\theta); & j=1,2 \\ K_j^3(\theta) &= \int_{\Omega} B^T b(X, \theta)^2 D_j B d\Omega = \sum_{i_1=1}^M K_{j,i_1} \xi_{i_1}(\theta) \sum_{i_2=1}^M b_{i_2}(X) \xi_{i_2}(\theta) \sum_{i_3=1}^M b_{i_3}(X) \xi_{i_3}(\theta); & j=1,2 \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

Por sencillez, se considera que:  $\xi_i(\theta) = \xi_i$  y  $b(X) = b$ . La matriz de rigidez estocástica  $K(\theta)$  se escribe como:

$$\begin{aligned}
K(\theta) = & \alpha_1 \sigma_v^1 \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \xi_{i_1} + \alpha_2 \sigma_v^2 \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \xi_{i_1} \xi_{i_2} + \alpha_3 \sigma_v^3 \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{i_3=1}^M b_{i_3} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \xi_{i_3} \\
& + \beta_1 \sigma_v^1 \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \xi_{i_1} + \beta_2 \sigma_v^2 \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \xi_{i_1} \xi_{i_2} + \beta_3 \sigma_v^3 \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{i_3=1}^M b_{i_3} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \xi_{i_3}
\end{aligned} \tag{A.98}$$

### Ecuación de equilibrio estocástica

Sustituyendo la expansión de la matriz de rigidez  $K(\theta)$  (A.98) y la expansión de los desplazamientos  $U(\theta)$  (3.21) en (3.24), y minimizando el error por truncamiento, la ecuación de equilibrio estocástica es:

$$\begin{aligned}
K_{kl} = & \alpha_1 \sigma_v^1 \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} c_{i_1,kl} + \alpha_2 \sigma_v^2 \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} d_{i_1 i_2,kl} + \alpha_3 \sigma_v^3 \sum_{i_1=1}^M K_{1,i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{i_3=1}^M b_{i_3} e_{i_1 i_2 i_3,kl} + \\
& \beta_1 \sigma_v^1 \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} c_{i_1,kl} + \beta_2 \sigma_v^2 \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} d_{i_1 i_2,kl} + \beta_3 \sigma_v^3 \sum_{i_1=1}^M K_{2,i_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2} \sum_{i_3=1}^M b_{i_3} e_{i_1 i_2 i_3,kl}
\end{aligned} \tag{A.99}$$

$$\sum_{k=0}^{P-1} K_{kl} U_k = F$$

con:

$$\begin{aligned}
c_{i_1,kl} &= E\{\xi_{i_1} \Psi_k \Psi_l\} \\
d_{i_1 i_2,kl} &= E\{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \Psi_k \Psi_l\} \\
e_{i_1 i_2 i_3,kl} &= E\{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \xi_{i_3} \Psi_k \Psi_l\}
\end{aligned} \tag{A.100}$$

Los coeficientes anteriores se pueden calcular de acuerdo con (A.30, A.33 y A.34).

La ecuación de equilibrio estocástica (A.99), establece un sistema de ecuaciones de  $N \cdot P \times N \cdot P$ .

### A.13 Desarrollo de expresiones para el cálculo de esfuerzos aleatorios

Como ejemplo, la deducción de los esfuerzos aleatorios se explica para  $E_v$  aleatorio, para los demás campos aleatorios la metodología es la misma, lo que cambia es la matriz de elasticidad.

La matriz de elasticidad para  $E_v$  es aleatorio, se expresa como:

$$\begin{aligned}
D_{11}(X, \theta) &= D_{111} + (\beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{112} + (\beta_{3,0} + \beta_{3,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{113} \\
D_{12}(X, \theta) &= D_{121} + (\beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{122} + (\beta_{3,0} + \beta_{3,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{123} \\
D_{22}(X, \theta) &= (\beta_{1,0} + \beta_{1,1} \sigma_{E_v} b_{E_v}) D_{221} + D_{222} + (\beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} b_{E_v} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 b_{E_v}^2) D_{223} \\
D_{33}(X, \theta) &= (\omega_0 + \omega_1 \sigma_{G_{vh}} b_{G_{vh}}) D_{331}
\end{aligned} \tag{A.101}$$

De acuerdo con (3.135) la matriz de elasticidad  $D(X, \theta)$  es:

$$D(X, \theta) = D_{11}(X, \theta) + D_{12}(X, \theta) + D_{22}(X, \theta) + D_{33}(X, \theta) \tag{A.102}$$

Tomando en cuenta el desarrollo de potencias de campos aleatorios expresado en A.62 a A.69, el producto de campos aleatorios  $b_{E_v}, \dots, b_{E_v}^3$  se puede expresar de forma simplificada como:

$$\begin{aligned}
 b(X, \theta) &= \sigma \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \varphi_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j = \sigma \sum_{i=1}^M b_i \sum_{j=0}^{P-1} C_{ij} \Psi_j = \sum_{j=0}^{P-1} A_j^1 \Psi_j \\
 b(X, \theta)^2 &= \sum_{i_1=1}^M b_{i_1}(X) \sum_{j_1=0}^{P-1} C_{i_1 j_1} \sum_{i_2=1}^M b_{i_2}(X) \sum_{j_2=0}^{P-1} C_{i_2 j_2} \sum_{j_{A_1}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \Psi_{j_{A_1}} = \sum_{j=0}^{P-1} A_j^2 \Psi_j \\
 &\vdots \\
 b(X, \theta)^n &= \sigma^n \sum_{i_a=1}^M \left| \prod_{a=1}^n b_{i_a}(X) \sum_{j_a=0}^{P-1} C_{i_a j_a} \sum_{a=1}^n \prod_{b=1}^{a-1} C_{i_b j_b} \sum_{j_{A_b}=0}^{P-1} C_{j_1 j_2 j_{A_1}} \sum_{j_{A_b}=0}^{P-1} \right| \prod_{a=2}^{(n-1)} \prod_{b=3}^n C_{j_{A_{(b-2)}} j_b j_{A_{(b-1)}}} \Psi_{j_{A_{(n-1)}}} = \sum_{j=0}^{P-1} A_j^n \Psi_j
 \end{aligned} \tag{A.103}$$

Los esfuerzos aleatorios se expresan:

$$\sigma(X, \theta) = D(X, \theta) \varepsilon(X, \theta) \tag{A.104}$$

Con (ver 3.250 y 3.251):

$$\varepsilon(X, \theta) = \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) \Psi_j \tag{A.105}$$

Considerando (A.101) y (A.103) la matriz de elasticidad  $D(X, \theta)$  se expresa como:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(X, \theta) &= D_{111} + \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{112} + \\
 &\quad \left( \beta_{3,0} + \beta_{3,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{113} \\
 D_{12}(X, \theta) &= D_{121} + \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{122} + \\
 &\quad \left( \beta_{3,0} + \beta_{3,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{123} \\
 D_{22}(X, \theta) &= \left( \beta_{1,0} + \beta_{1,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k \right) D_{221} + D_{222} + \\
 &\quad \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{223} \\
 D_{33}(X, \theta) &= \left( \omega_0 + \omega_1 \sigma_{G_{vh}} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k \right) D_{331}
 \end{aligned} \tag{A.106}$$

Sustituyendo A.105 y A.106 en A.104, los esfuerzos aleatorios se expresan como:

$$\sigma(X, \theta) = \left( \begin{array}{l} D_{111} + \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{112} + \\ \left( \beta_{3,0} + \beta_{3,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{3,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{113} + \\ D_{121} + \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{122} + \\ \left( \beta_{3,0} + \beta_{3,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{3,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{123} + \\ \left( \beta_{1,0} + \beta_{1,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k \right) D_{221} + D_{222} + \\ \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \Psi_k \right) D_{223} + \\ \left( \omega_0 + \omega_1\sigma_{G_{vh}} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \Psi_k \right) D_{331} \end{array} \right) \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) \Psi_j \quad (\text{A.107})$$

Considerando el producto de dos polinomios (A.40) se tiene que:

$$\sigma(X, \theta) = \left( \begin{array}{l} D_{111} + \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 d_{kjl} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 d_{kjl} \right) D_{112} + \\ \left( \beta_{3,0} + \beta_{3,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 d_{kjl} + \beta_{3,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 d_{kjl} \right) D_{113} + \\ D_{121} + \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 d_{kjl} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 d_{kjl} \right) D_{122} + \\ \left( \beta_{3,0} + \beta_{3,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 d_{kjl} + \beta_{3,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 d_{kjl} \right) D_{123} + \\ \left( \beta_{1,0} + \beta_{1,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 d_{kjl} \right) D_{221} + D_{222} + \\ \left( \beta_{2,0} + \beta_{2,1}\sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 d_{kjl} + \beta_{2,2}\sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 d_{kjl} \right) D_{223} + \\ \left( \omega_0 + \omega_1\sigma_{G_{vh}} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 d_{kjl} \right) D_{331} \end{array} \right) \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) \sum_{l=0}^{P-1} \Psi_l \quad (\text{A.108})$$

Teniendo que los esfuerzos aleatorios finalmente se expresan como:

$$\sigma(X, \theta) = \sum_{l=0}^{P-1} \sigma_l \Psi_l \quad (\text{A.109})$$

La esperanza de los desplazamientos corresponde al primer término ( $l=0$ ) de la expansión anterior, teniendo que:

$$\begin{aligned}
 E\{\sigma\} \approx & D_{111} + \beta_{2,0}D_{112} + \beta_{3,0}D_{113} + \\
 & D_{121} + \beta_{2,0}D_{122} + \beta_{3,0}D_{123} + \\
 & \beta_{1,0}D_{221} + D_{222} + \beta_{2,0}D_{223} + \\
 & \omega_0 D_{331}
 \end{aligned} \tag{A.110}$$

La varianza de los esfuerzos es:

$$\text{Var}(\sigma) \approx \sum_{i=1}^{P-1} E\{\Psi_i^2\} \sigma_i^2 \tag{A.111}$$

Con:

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \left( \beta_{2,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} \right) D_{112} + \\ \left( \beta_{3,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} \right) D_{113} + \\ \left( \beta_{2,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} \right) D_{122} + \\ \left( \beta_{3,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} + \beta_{3,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} \right) D_{123} + \\ \left( \beta_{1,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} \right) D_{221} \\ \left( \beta_{2,1} \sigma_{E_v} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} + \beta_{2,2} \sigma_{E_v}^2 \sum_{k=0}^{P-1} A_k^2 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} \right) D_{223} + \\ \left( \omega_1 \sigma_{G_{vh}} \sum_{k=0}^{P-1} A_k^1 \sum_{j=0}^{P-1} \varepsilon_j(X) d_{kjl} \right) D_{331} \end{pmatrix} \tag{A.112}$$