UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

¿ES LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO UNA PROPOSICIÓN ABSOLUTAMENTE INDECIDIBLE? UN ESTUDIO FILOSÓFICO

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
(FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA)

PRESENTA:

MTRO. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ

TUTOR: DR. MARIO GÓMEZ TORRENTE (IIFs-UNAM)

COMITÉ TUTORAL:
DRA. VICTORIA IVONNE PALLARES VEGA (UAEMor)
DR. MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO TAPIA (UAM-I)
DR. AXEL ARTURO BARCELÓ ASPEITIA (IIFs-UNAM)
DR. LUIS ESTRADA GONZÁLEZ (IIFs-UNAM)

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F. AGOSTO DE 2015

ESTA TESIS FUE ELABORADA CON EL APOYO DE UNA BECA NACIONAL CONACyT

A María y Nicté mis dos grandes amores

A Mario y José Alfredo mis maestros

Me gustaría llevar la cuestión de la indecidibilidad absoluta
hacia un lugar más nítido al considerar resultados en
la teoría de conjuntos contemporánea que se aplican a ella.
La cuestión está íntimamente relacionada con la naturaleza de la razón
y la justificación de los nuevos axiomas y es por eso que parece
evasiva y difícil. Es mucho más fácil demostrar que una proposición
no es absolutamente indecidible que mostrar ya sea que
una proposición es absolutamente indecidible o que no hay proposiciones
absolutamente indecidibles. En el primer caso, basta con encontrar
y justificar nuevos axiomas que decidan el enunciado.
Pero este último requiere una caracterización (o al menos
una circunscripción) de lo que cuenta como justificación
y es difícil ver cómo podríamos estar en condiciones de hacerlo.
Peter Koellner, 2009.

Agradecimientos

Debo comenzar diciendo que mis agradecimientos serán muy largos, pues mucha gente me ha dado su apoyo para la elaboración de este trabajo. Creo ser una persona muy sociable, con una familia muy muy grande e involucrado en muchos (tal vez demasiados) equipos de trabajo. Es claro que son tantas las personas que deberían estar en esta lista que con toda seguridad faltaran la gran mayoría.

Agradezco en primero lugar a mi tutor, Mario Gómez Torrente. Es mucho lo que le debo. Mario no sólo ha sido mi tutor para la realización de esta tesis, sino que ha sido mi tutor a lo largo de más de diez años. Bajo su dirección escribí mi tesis de licenciatura y mi tesis de maestría. Siempre ha sido muy generoso conmigo y su guía me ha ayudado a continuar con mis estudios de posgrado (creo que con buenos resultados). Mario, te agradezco la gran paciencia que has tenido conmigo, tus cursos, tus asesorías y todo el apoyo. Creo que puedo afirmar, sin temor a equivocarme, que no hay un mejor tutor que tú.

También quiero agradecer a todos los miembros de mi comité tutoral; Max Fernández de Castro, Ivonne Pallares Vega, Axel Arturo Barceló Aspeitia y Luis Estrada González. Cada uno de ellos ha sido una influencia decisiva en mi formación como filósofo. Los considero mis maestros y mis amigos.

Quiero agredecer a todos mis amigos; Moisés Macías Bustos, Fernado Flores Galicia, Angélica María Pena Martínez, Álvaro Enríquez, María Martinéz, Rafael Gómez Choreño, Gabriela Hernández Deciderio, Aurora Quiterio, Javier García Salcedo, Genaro Wong Montoya, Nancy Nuñez, Yenco Almazán, Rafael Peralta, Samuel Lomelí, María Márquez, Esperanza Rodríguez Zaragoza, Paulina Raigosa, Claudia Olmedo, Víctor Peralta, Norma Aldana, Gabriel Ramos García, Karen González, Mauricio Algalán, Ana Márquez, Héctor Conde, Dayanira García, Pedro Ramos, Jesús Granados, Manuel Tapia y muchos muchos otros.

Agradezco en especial a Moisés Macías por apoyarme siempre que lo he necesitado, por discutir los contenidos de este trabajo durante largo tiempo, por discutir tantos otros temas y por tantas otras cosas. Moisés eres un gran amigo, el mejor.

También agradezco infinitamente a Carlos César Jiménez por su apoyo tanto en la discusión filosófica de los contenidos de esta tesis, como por su paciente y desinteresada ayuda en la corrección final de este trabajo. Sin duda, te debo una.

También quiero agradecer a los miembros del seminario de filosofía de las matemáticas (la *old school*); Axel Arturo Barceló, Max Fernández de Castro, Carmen Martínez Adame, Carlos Álvarez Jiménez, Jacobo Asse Dayan. Gracias por todo lo que pude aprender con ustedes.

También agradezco a los miembros del seminario de fundamentos de las matemáticas (los *jóvenes filósofos de las matemáticas*, aunque no tan jóvenes). Javier García Salcedo, Mauricio Algalán Meneses, Carlos César Jiménez, Pedro Ramos Villegas, Esperanza Hernández Huerta, Manuel Eduardo Tapia Navarro, Jesús Eduardo Granados Gúrrola, Samuel Lomelí Gómez, Luis Estrada González, César Escobedo Sánchez, Mariana Juárez, Ana García y todos aquellos que han estado con nosotros a lo largo de estos tres años.

Debo confesar que los miembros del seminario de teoría de conjuntos tienen un lugar especial en mi corazón. Chicos muchas gracias a todos por compartir este seminario conmigo los últimos cuatro años, sus observaciones y las discusiones que generamos fueron de gran ayuda para mí; Jesús Eduardo Granado Gúrrola, Manuel Eduardo Tapia Navarro, Samuel Lomelí Gómez, César Escobedo Sánchez, Jorge Serrano Arellano, Carlos César Jiménez, más los que se quedaron en el camino.

También agradezco a todos aquellos que han sido mis alumnos a lo largo de los años. Sin duda la docencia es una de las experiencias más gratificantes que he tenido en la vida. Gracias a todos, chicos; ustedes son para mí una gran inspiración.

También agradezco a mis compañeros de la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM. En especial a Leticia Flores Farfán, Gerardo de la Fuente Lora, Carlos Vargas Pacheco, Rafel Gómez Choreño, Ivette Sarmiento, Pedro Ramos, Gabriel Ramos García, Javier García Salcedo, Hugo Enrique Sánchez López, Gabriela Hernández Deciderio, Carlos Romero Castillo y Lourdes Valdivia Dounce.

Una mención especial la merecen Rafael Peralta Martínez y Genaro Wong Montoya; quienes en los últimos años han compartido conmigo la experiencia de estar frente al grupo. Ellos son dos hombres de los que he aprendido mucho y tengo la confianza de que serán mejor filósofos de lo que yo soy. Gracias.

Mi infinita gratitud para Marisela López Pérez y Elizabeth Barajas García. Ustedes me han apoyado a lo largo de todo mi proceso de doctorado. Sin ustedes no lo hubiera logrado. Muchas gracias.

También quiero agradecer a mis compañeros en el consultorio: Dr. Marco

Antonio Rocha, Dra. Veronica Rueda, Dra. Miriam, Sra. Lulú, Belem Cruz, Guillermo Moreno, Bruno Riquelme, César Delgadillo, Enrique Delgadillo, Analí Rocha, Pablo, etc. Ustedes me han ayudado a ver el mundo con otros ojos y a ser más feliz.

A todos los miembros del Instituto de Investigaciones de Filosóficas. Ustedes me dieron la mejor formación académica que pude haber tenido en este país. A lo largo de los 9 años que fui estudiante asociado, aprendí más de lo que jamás pude haber imaginado. Gracias a todos los miembros de esa gran comunidad. En especial a Norma Aldana, Olbeth Hansberg, Mario Gómez Torrente, Pedro Stepanenko, Guillermo Hurtado, Gustavo Ortiz Millán, Maite Ezcurdia, Axel Barceló, Alejandro Herrera, Miguel Ángel Sebastián, Marcela García, Luis Estrada y Noemí Vidal. Merecen una mención a parte mis compañeros estudiantes asociados (sólo pongo a algunos, la lista debería incluir a más de cien personas): Dayanira García, Héctor Hernández, Adriana Renero, María Martínez, Nancy Nuñez, Alejandro Mosqueda, Paulina Raigosa, Víctor Peralta, Claudia Olmedo, Mauricio Bieletto, Jorge Manero, Gerardo Sanjuán, Adielisa Espinosa, Marco Antonio Hernández, Cecilia Aguilera y todos aquellos que compartieron esa gran experiencia conmigo.

No puedo dejar de agradecer al equipo de la Olimpiada de Lógica que me ha dado tanta alegría. Agradezco especialmente a Karen González Fernández, pocas personas pueden ser tan dedicadas como tú. También agradezco a Christopher García Olvera, Gabriel Ramos García, Samuel Lomelí Gómez, Rafael Peralta Martínez, Esperanza Rodríguez Zaragoza, César López Pérez y a todos los miembros de la Academia Mexicana de Lógica que nos han apoya durante más de 10 años.

Muchos han sido los profesores que a lo largo de los años han influido de manera positiva en mi desarrollo académico, pero quiero mencionar a dos en especial, a la Maestra Lourdes Ramírez y al Dr. José Alfredo Amor. La maestra Lulú fue mi profesora en segundo y cuarto año de primaria. Siempre me apoyó para desarrollar al máximo mis habilidades. Si todos los profesores fuesen como ella, la educación en este país sería de excelencia. El Dr. José Alfredo Amor fue mi profesor de teoría de conjuntos y de Lógica. Él fue el que despertó en mí el interés en el universo de Cantor. Su pérdida ha sido muy dura, pues además de perder a un gran académico, perdimos a uno de los mejores seres humanos que ha pisado esta tierra.

Al final, pero no pero ello menos importante (sino todo lo contrario), quiero agradecer a mi familia. A mi tía Cristy, a mi tío Arturo, a mis primos Arturo y Luis. A mi hermano Ángel y a su familia. A mi tía Tere y a mi tío Martín que son los que ayudar a dar mis primeros pasas en el mundo de las letras. A mis primos Erik y Diana. A mi tía Ángeles, a su esposo y a sus hijos (Iván y Alejandro). A mi tía Alicia y toda su familia, mis primos Adán, Cecilia y Oscar. A mi tío Ausencio y su familia. A mi suegra y a mi suegro. A mis cuñados, a sus esposas y esposos. Especialmente a Angie y Gerardo. A todos mis sobrinos; Mateo, Ximena, Paulina, Rubén, David y Aurora. Pero especialmente quiero agradecer a mis padres (que me han apoyado desde antes de nacer y lo han hecho de maravilla), a mi esposa María (el amor de mi vida y seguramente la mujer más admirable que conozco y conoceré) y a mi hija Nicté (la niña más hermosa del mundo). Sin su apoyo nunca lo hubiera logrado.

Este trabajo fue apoyado por los proyectos PAPPIT IA401015 "Tras las consecuencias. Una visión universalista de la lógica (I)", CONACyT CB2011 166502 "Aspectos filosóficos de la modalidad" y PIFFYL 2013 012 "Fundamentos de las matemáticas".

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme brindado el apoyo económico necesario para la elaboración de este trabajo mediante una Beca Nacional CONACyT durante el periodo comprendido entre agosto de 2011 y julio de 2015.

Índice general

Introducción

Este trabajo recoge parte de las reflexiones filosóficas que he desarrollado a lo largo de los casi 10 años que he dedicado a estudiar la indecidibilidad (o independencia) de la Hipótesis del Continuo (HC) respecto al sistema estándar de la teoría de conjuntos, Zermelo Fraenkel más Axioma de Elección (ZFC) y sus equivalentes.

La HC es una proposición de la teoría de conjuntos que afirma que el cardinal del conjunto de los números reales es $\aleph_1$, i.e., el segundo cardinal transfinito.[1] La hipótesis fue propuesta originalmente por uno de los creadores de la teoría de conjuntos, Georg Cantor, quien nunca pudo demostrarla. Su relevancia es clara en teoría de conjuntos si se observa la enorme cantidad de estudios matemáticos y filosóficos que se han dedicado a analizarla. Incluso fue el primero de los 23 problemas matemáticos a resolver en el siglo XX de la lista dada por Hilbert en su conferencia de París en 1900. La relevancia de la HC se debe muy probablemente a los objetos que están involucrados en ella, en especial al conjunto de los números reales.

La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas que surgió como disciplina a finales del siglo XIX y que pretendía ofrecer un marco general para estudiar y justificar (fundamentar) con la mayor precisión posible algunos fenómenos del análisis matemático, el álgebra y la teoría de números.[2]

[1]Existen otras formas de expresar la HC. Todas son equivalentes desde el punto de vista de ZFC, pero no lo son en otros sistemas.

[2]Fundamentar o justificar a una disciplina matemática (o una de sus partes) puede significar muchas cosas. Una forma de fundamentar o justificar una disciplina puede ser reducir sus objetos y sus relaciones a objetos y relaciones de otra teoría que consideramos no necesita en sí misma un fundamentación (algo similar puede hacerse si se cree que lo relevante en la disciplina son las oraciones o las prácticas). Generalmente esta clase de fundamentación busca ser definitiva, se busca generar certeza en la corrección de la disciplina. Otra forma de fundamentar o justificar una disciplina matemática consiste en reconstruir sus objetos y sus relaciones usando objetos de otra teoría que consideramos mejor justificada. En esta clase de justificación no se busca certeza, pues no hay una reducción de los fenómenos de una disciplina a otra, más bien se busca explicar los fenómenos de la teoría original, establecer relaciones con fenómenos de la disciplina que sirve para realizar la reconstrucción. En este sentido, los proyectos de fundamentación de las matemáticas

En particular, el caso de la fundamentación del análisis es muy útil para comprender la relevancia de la HC en la teoría de conjuntos.

El cálculo es parte del análisis matemático y su relevancia en las ciencias es mayúscula, pues es la teoría matemática que se usa para modelar una gran cantidad de fenómenos de interés para las ciencias empíricas. El cálculo fue desarrollado en paralelo por Newton y Leibniz en el siglo XVII y fue una herramienta esencial en el desarrollo de la teoría física newtoniana. Sin embargo, la presentación original no tenía una justificación, que bajo parámetros estrictos, pudiera considerarse adecuada. En particular, el uso de números infinitesimales resultaba problemático para muchos teóricos. Los números infinitesimales eran números que se comportaban en algunas ocasiones como números mayores que el cero y en otras ocasiones como el cero (respecto a las operaciones aritméticas estándar). La razón de este comportamiento ambiguo se debe al algoritmo en que eran usados; un procedimiento que permitía calcular la derivada de una curva en un punto determinado. El procedimiento se realizaba en cuatro pasos.

1. Despejar la variable y de la ecuación que describe la curva; es decir, obtener una ecuación de la forma $y = f(x)$.

2. Calcular la diferencia de los valores de la función f entre el punto x y el punto $x + o$ y dividirla entre o; donde o es un infinitesimal. En otras palabras, calcular $\frac{f(x)-f(x+o)}{o}$.

3. Simplificar la ecuación obtenida.

4. Eliminar cualquier término de la ecuación que sea un múltiplo de o.

Como puede verse en la descripción del algoritmo, los infinitesimales se comportaban como un número mayor que el 0 al aplicarse el paso dos del procedimiento. Pues, la división no está definida para el número 0. Sin embargo, en el cuarto paso los infinitesimales se comportan como el 0; puesto que en la estructura de los reales, el 0 es el único número que permite realizar ese tipo cancelación de la multiplicación.

Este comportamiento ambiguo resultaba inadmisible para muchos matemáticos y filósofos. Hubo diversos intentos por ofrecer una justificación adecuada para este fenómeno; que no se concentraba necesariamente en dar una justificación de la existencia de los infinitesimales (ese sólo era una camino posible), sino en ofrecer una justificación del procedimiento en el que eran usados.

no nos comprometen con una epistemología fundacionista, ni con la búsqueda de certeza. Profundizaré un poco sobre este punto en el capítulo 4.

Una posible justificación del procedimiento consistía en aceptar la existencia de los números infinitesimales y concebirlos como números infinitamente pequeños en magnitud, pero más grandes que el cero. De esta forma, al ser sumados a cualquier otro número, el número original no era afectado de forma significativa, pero al ser mayores que cero podían ser el denominador de cualquier división sin tener problemas.[3]

Durante el siglo XIX, matemáticos como Cauchy, Weierstrass y Bolzano desarrollaron el programa de la aritmetización del análisis, con lo que lograron ofrecer un fundamento más sólido para la teoría, uno que no recurría a los números infinitesimales y, en este sentido, parecía evitar recurrir a la noción de infinito. Sin embargo, algunos elementos de la teoría generada apelaban a nociones que incluían elementos infinitarios, por ejemplo, el concepto de límite apela a una secuencia infinita de números. Algunos consideraron que no se podía ofrecer una justificación sólida del análisis si no se ofrecía también una clarificación de la noción de infinito.[4]

---

[3]Si bien la naturaleza de los números infinitesimales puede ser considerada extraña, esto no garantiza que sea en sí misma problemática. Después de todo, lo que se busca es obtener una estructura con objetos (los infinitesimales) que se comporten de tal forma que cada paso del algoritmo esté bien justificado. De hecho, en 1969 Abraham Robinson mostró existe por lo menos una estructura que contiene a los números reales y a objetos que se comportan como los infinitesimales, los hiperreales (la construcción recurre al teorema de compacidad de la lógica clásica de primer orden). Al parecer el rechazo inicial de los infinitesimales es análogo al rechazo que tuvieron otros objetos matemáticos cuando fueron propuesto originalmente, por ejemplo, los números irracionales, los números complejos, o los ordinales y cardinales transfinitos. Ninguno de ellos implica contradicción, su rechazo se debía más bien a que su existencia estaba en contra de algunas visiones matemáticas de la época en la que fueron formulados.

Algunos autores, como Vickers, sostienen que el cálculo propuesto por Newton sí era contradictorio; pues, en el contexto en el que fue desarrollado se pedía que los infinitesimales fuesen diferentes de 0 e iguales a 0 (en diferentes momentos del desarrollo del procedimiento). Aunque simpatizó con la postura de Vickers, su posición no se opone a la expresada en el párrafo anterior; en tanto, lo que afirmo es que posible construir una estructura clásica consistente que contenga objetos que se comporten tal como los infinitesimales descritos en el procedimiento. Esto no me compromete a afirmar que la reconstrucción hecha por Robinson es la más fiel posible a los infinitesimales usados en los tiempos del origen del análisis. No profundizaré en este punto pues no es relevante para los objetivos de este trabajo. Para profundizar en este punto y en diferentes justificaciones posibles de los números infinitesimales, véase (Vickers, 2013, cap. 6).

[4]Un ejemplo que siempre me ayuda a entender la relevancia de clarificar la noción de infinito en matemáticas es la relación entre la cardinalidad del conjunto de los puntos de discontinuidad en una función y la existencia de su integral. Sabemos que una función acotada con una cantidad finita de puntos de discontinuidad es integrable, sabemos incluso que en algunos casos una función con un conjunto infinito puntos de discontinuidad es integrable. La pregunta interesante es que condiciones debe de cumplir un conjunto infinito de discontinuidades de una función dada para que la función sea integrable, ¿las condiciones

Cantor y Dedekind crearon la teoría de conjuntos, entre otras cosas, para poder clarificar, refinar y generalizar los conceptos y los resultados del análisis. Su objetivo era ofrecer un fundamento aún más fuerte y útil para esta disciplina, que el que se tenía hasta ese momento, uno que diera cuenta de los elementos infinitarios que estaban presentes en las teorías que aritmetizaron el análisis. Las nociones conjuntistas que fueron introducidas por estos pensadores ayudaron a clarificar toda una serie de fenómenos del análisis, apelando al conjunto de los números reales. Conocer la naturaleza de este conjunto parece ser de lo más relevante para completar la fundamentación del análisis, para muchos, no poder determinar el cardinal de este conjunto es algo que no se puede permitir.[5] Incluso si no es necesario conocer el cardinal del continuo para la justificación del análisis, es claro que el conjunto de los números reales es uno de los objetos más importantes de la teoría de conjuntos. No es extraño que resolver la HC haya guiado gran parte de los desarrollos de la teoría de conjuntos durante el siglo XX. Desde su formulación, muchos matemáticos de renombre han tratado de demostrar o refutar la HC, entre ellos Cantor, Hilbert y Gödel. Sin embargo, el problema continua abierto.

En las primeras dos décadas del siglo XX surgieron las teorías axiomáticas de conjuntos, que pretendían dar una formulación más clara y sólida de la teoría. Estas teorías axiomáticas ofrecieron un marco más preciso para evaluar la HC; la pregunta sobre su verdad o falsedad se acotó a si era o no teorema en estos sistemas (el más popular es ZFC). Sin embargo, la solución del problema eludía a los matemáticos más destacados de su época. Los primeros avances significativos sobre la HC surgieron a partir de los trabajos de Kurt Gödel en la década de los 30 del siglo XX.[6]

En 1938, Gödel demostró que la HC es consistente con ZFC, lo que prueba que su negación no puede ser teorema de la teoría de conjuntos. A partir de este resultado, las únicas posibilidades abiertas eran que, o bien la HC fuese

---

son de tamaño? Ahora sabemos que una función acotada f en el intervalo $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$ sii el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en $[a, b]$ tiene medida cero. Para los fines del ejemplo, los detalles no son muy relevantes, basta notar que el estudio de la propiedades de los conjuntos infinitos de discontinuidades es de lo más relevante para resolver un problema matemático.

[5] No es claro que el papel relevante del conjunto de los números reales en la fundamentación del análisis justifique por sí mismo la búsqueda de la solución del problema del continuo, pues en principio es posible que la cardinalidad del conjunto de los reales no tenga un papel relevante en la fundamentación del análisis.

[6] Esto no quiere decir que no hubiese avances importante antes de los trabajos de Gödel, por ejemplo, los resultados de Luzin y Suslin en teoría de conjuntos descriptiva. Sin embargo, dichos resultados no ofrecían mucha evidencia ni a favor ni en contra de la HC.

teorema de ZFC, o bien que no fuese decidible en el sistema. La respuesta definitiva fue dada por Paul Cohen, quien en 1963 demostró que la negación de la HC también es consistente con ZFC. Lo que tiene como consecuencia que esta proposición es indecidible desde ZFC, es decir, ni HC ni ¬HC son teoremas de ZFC. Pero como ya se dijo, esta respuesta no era satisfactoria para aquellos que creían que era necesario conocer la naturaleza del conjunto de los números reales.

A partir de las pruebas de independencia de la HC, e incluso antes, se generó una fuerte discusión filosófica en torno a ella. Algunos matemáticos y filósofos de las matemáticas sostenían que la HC era una proposición de tal naturaleza que no podía ser decidida nunca, es decir, que no había manera de generar un sistema de la teoría de conjuntos que extendiera o modificará ZFC, con axiomas bien justificados, tal que decidiese el problema (a favor o en contra de la hipótesis). Ellos consideraban que la HC era no sólo indecidible, sino absolutamente indecidible. Algunos otros matemáticos y filósofos, como Gödel y Kreisel, consideraban que si bien los resultados mostraban que ZFC no puede decidir el problema, deben existir otros sistemas bien justificados que sí lo hagan. Cada uno de los grupos en disputa ha reflexionado, escrito y argumentado extensamente a favor de su posición. Gödel y otros matemáticos afines a su postura propusieron y desarrollaron un programa de búsqueda de nuevos axiomas para ZFC, que tiene entre otros objetivos resolver el problema del continuo, pero todavía no hay resultados definitivos.

Se sabe que algunos axiomas propuestos hasta ahora deciden la HC. Por ejemplo, el Axioma de Constructibilidad implica la HC y el Axioma de Martin Máximo Acotado implica ¬HC. No todos los axiomas que resuelven el problema del continuo ofrecen el mismo resultado y, hasta ahora, ninguno es considerado lo suficientemente bien justificado para ser aceptado por toda la comunidad. El problema del continuo sigue abierto.

La justificación requerida para los nuevos axiomas introduce criterios de aceptación que no necesariamente son matemáticos, y que muy probablemente involucren una postura filosófica particular. Sólo hasta que establezcamos los criterios de aceptabilidad y la postura filosófica que nos ayude a justificar la adecuación de estos criterios, podremos decidir si el problema del continuo es o no resoluble.

Este trabajo tiene como objetivo responder a la pregunta ¿la HC es una proposición absolutamente indecidible?. De acuerdo a lo dicho, la pregunta se puede parafrasear como ¿existe algún sistema matemático formal (alguna teoría de teoría de conjuntos) cuyos axiomas estén bien justificados y tal que tenga como teorema a la HC o a su negación?

Para responder a esta pregunta será muy importante clarificar, entre otras cosas: 1) ¿Qué es un sistema formal', 2) ¿qué es una prueba en matemáticas?,

3) ¿cuándo una proposición es indecidible?, 4) ¿cuándo una proposición es absolutamente indecidible?, 5) ¿qué elementos están involucrados en la indecidibilidad absoluta de una proposición matemática?, 6) ¿qué postura filosófica se debe elegir para evaluar la justificación de los sistemas que extiendan o modifiquen ZFC? y 7) ¿cuáles son los criterios adecuados de aceptación para los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos (u otros posibles cambios en el sistema)?

Responder a estas preguntas puede ser muy complicado, en especial si se quiere ofrecer una respuesta que valga para toda la historia de las matemáticas, la diversidad de temas que trata y las diferentes tradiciones que han existido en esta disciplina. Existe una gran discusión sobre la existencia de diferentes tipos de pruebas en matemáticas; sobre si los criterios para considerar una prueba como correcta son los mismos en todos los casos, sobre si una prueba sólo puede ser una cadena de oraciones o bien puede haber pruebas que sean puramente diagramáticas o, incluso, si pueden existir pruebas que sean otra clase de objetos, por ejemplos, objetos físicos. Yo me inclino a creer que existen diferentes tipos de pruebas y que en diferentes contextos históricos los elementos y los criterios de aceptación de una prueba han sido diferentes. Sin embargo, para los fines de este trabajo no tengo que comprometerme con una postura tan fuerte, ni ofrecer una defensa de ella. Hay que recordar que esta tesis tiene como objetivo saber si la HC es absolutamente indecidible o no respecto a las teorías de conjuntos más desarrolladas hasta el momento. Así que puedo restringir mi análisis a las tradiciones matemáticas que están relacionadas directamente con la HC.[7] En este sentido ni siquiera es necesario hacer un recuento histórico de todos los tratamientos que se han dado al problema del continuo matemático, basta con analizar la historia de las teorías matemáticas que tienen una influencia directa en la forma en la que actualmente se aborda el problema.

La estructura de la tesis es la siguiente. Se divide en tres partes. La primera parte de la tesis está dedicada a estudiar la noción de prueba generada

[7] Por tradición matemática entiendo una comunidad de profesionales de las matemáticas que comparten (por lo menos parcialmente) un objeto de estudio, un conjunto de problemas relevantes relacionado con su objeto de estudio, un conjunto de metodologías más o menos bien definidas y criterios para determinar la corrección de sus resultados. Respecto a qué tradiciones son aquellas que están relacionadas con el estudio del problema del continuo, puedo decir sin duda que son muchas. Sólo por mencionar algunos ejemplos; están los defensores del axioma de determinación, los defensores de los axiomas de simetría, los teóricos de las categorías que analizan los topos (entre ellos, la categoría SET) y los teóricos de conjuntos más ortodoxos. Más adelante dejaré en claro cuál es la tradición matemática que será mi objeto de estudio, pero puedo adelantar que concentraré mi análisis en la parte más ortodoxa; a saber, los miembros del grupo CABAL y teóricos de los conjuntos afines a este grupo.

a partir del programa de Hilbert, presentar las pruebas de indecidibilidad de la HC respecto a ZFC y dar una definición de proposición absolutamente indecidible que recupere todos los elementos relevantes involucrados en esta clase de fenómenos, que incluyen una posición filosófica de fondo y un conjunto de criterios para la aceptabilidad de nuevos axiomas y otras posibles modificaciones del sistema. Esta primera parte tiene como función establecer el marco conceptual en que se estudia la indecidibilidad absoluta de una proposición matemática. Esta parte está conformada por los primeros dos capítulos.

En el primer capítulo presentaré el programa de Hilbert y la noción de prueba que surge de él. Para comprender mejor la postura de este pensador, presentaré también la postura de los hermanos du Bois-Reymond, que defienden que existen proposiciones absolutamente indecidibles en matemáticas y en otras ciencias. Pondré un énfasis especial en remarcar que la postura de Hilbert descansa en una postura filosófica de fondo, a saber, el finitismo. Una vez hecho esto, presentaré un esbozo de los teoremas de incompleción de Gödel, que muestran que toda teoría formal consistente, recursivamente axiomatizable y con el suficiente poder para expresar las nociones básicas de la aritmética es incompleta, es decir, existen proposiciones indecidibles en ella (tales que ni ellas ni su negación son teoremas del sistema). También presentaré un mecanismo para decidir sobre esta clase de proposiciones indecidibles, que para poder ser aplicado requiere de una reflexión metateórica, misma que sobrepasaría los elementos aceptados por Hilbert, y que sólo puede aplicarse a proposiciones indecidibles cuya prueba está construida por mecanismo recursivos similares a los que Gödel usó en la demostración de sus teoremas.

En el segundo capítulo presentaré un esbozo de las pruebas de independencia de la HC respecto a ZFC. La presentación servirá para dos propósitos. El primero es mostrar que la HC no puede ser decidida apelando al mecanismo descrito en el capítulo anterior; el segundo, familiarizar al lector con algunas nociones importantes en teoría de conjuntos, que serán ocupadas en los últimos capítulos de la tesis. También ofreceré una definición de proposición absolutamente indecidible. La definición es esquemática; pues evalúa la indecidibilidad absoluta de una proposición respecto a un sistema matemático base, es decir, la definición no establece cuándo una proposición matemática es absolutamente indecidible *per se*, sino cuándo una proposición es absolutamente indecidible respecto al sistema tal y tal (en nuestro caso de estudio ese sistema será ZFC). Además, la definición tomará como factores relevantes, la postura filosófica de fondo y los criterios de modificación del sistema original que se emplearán para generar nuevos sistemas. Usando la definición, se establece un espacio de posibilidad para determinar la indecidibilidad absoluta de una proposición matemática que considera tres factores, el sistema original en el que es indecidible, los criterios de modificación de dicho sistema y la postura filosófica de fondo que sirve para evaluar si los sistemas generados están bien justificados. Para cada elección de estos tres factores, existe una respuesta sobre la indecidibilidad absoluta de una proposición dada.

La segunda parte de la tesis está dedicada a establecer los criterios de modificación del sistema ZFC y la postura filosófica de fondo que servirá para evaluarlos. Al final de esta segunda sección, ya estarán dados todos los elementos necesarios para evaluar la indecidibilidad absoluta de la HC. Esta parte está compuesta por el tercer y el cuarto capítulo.

En el capítulo tres presentaré dos posturas filosóficas que han sido consideradas influyentes en la evaluación de la indecidibilidad absoluta de la HC, la de Gödel y la de Feferman. Gödel defiende una postura realista; considera que el universo de los conjuntos existe de manera independiente y que la función de la teoría de conjuntos es ofrecer la mejor descripción posible de dicho universo. A partir de su realismo, Gödel defiende la búsqueda de nuevos axiomas que decidan la HC y que completen la descripción del universo conjuntista. Feferman sostiene que el realismo gödeliano es inaceptable y cree que la función de la teoría de conjuntos es fundamentar la matemática aplicada. Propone abandonar la búsqueda de nuevos axiomas que decidan la HC. Lo anterior tiene como consecuencia que, desde su postura, la HC es absolutamente indecidible; pues, ningún sistema bien justificado la tiene como teorema a ella o a su negación. La pregunta que queda abierta es ¿cómo determinar cuál es la mejor postura para evaluar la indecidibilidad absoluta de la HC respecto a ZFC?

En el cuarto capítulo ofreceré una postura alternativa tanto a la de Gödel como a la Feferman. La alternativa surge de los trabajos de Penelope Maddy. Ella propone cambiar la metodología filosófica tradicional por una metodología naturalista, que llama filosofía segunda. Su propuesta consiste en realizar el análisis filosófico después de comprender y conocer la práctica de la teoría de conjuntos, y no antes, como lo hace la filosofía tradicional. Además, toma a la práctica matemática como juez último para nuestras reflexiones filosóficas sobre la teoría de conjuntos. Una de las ventajas de esta metodología es que nos permitirá elegir criterios de aceptación de nuevos axiomas para ZFC, que sean aceptables para los teóricos de conjuntos[8] y, al mismo tiempo, construir una postura filosófica que justifica perfectamente estos criterios. La

[8]Los estudios de Maddy muestran que las modificaciones aceptadas por los teóricos de conjuntos sólo incluyen la inclusión de más axiomas en la teoría, pero mantienen estables otros elementos como la lógica.

principal desventaja es que sólo sirve para establecer estos resultados respecto de una comunidad matemática muy reducida.[9] Argumentaré que, a pesar de esto último, es el mejor camino a seguir. Así, la postura filosófica de fondo y los criterios de modificación de la teoría original que usaré para el análisis de la indecidibilidad de la HC respecto de ZFC son los generados a partir de los estudios de Maddy (que siguen la metodología de la filosofía segunda).

La tercera y última parte del trabajo está dedicada al análisis concreto de la indecidibilidad absoluta de la HC respecto a ZFC. Defenderé que la HC es absolutamente indecidible desde los parámetros dados en las dos primera partes de la tesis. Esta parte corresponde al quinto capítulo.

El capítulo cinco está destinado a ofrecer un análisis concreto de la indecidibilidad de HC respecto a ZFC. De acuerdo a los criterios generados en el capítulo cuatro, los criterios de justificación para los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos se pueden clasificar en internos y externos. Mostraré que los criterios internos no pueden justificar ningún axioma que decida la HC. Para ello usaré algunos resultados limitativos que se deben a Peter Koellner, Hugh Woodin, Kurt Gödel, Paul Cohen, Per Lindström, Robert Solovay y Azriel Lévy. Sostendré además que la HC no puede ser decidida por axiomas que se justifiquen usando los criterios externos, dado que la aceptación de la HC o su rechazo no tiene consecuencias relevantes para otras disciplinas como el análisis. Así, la HC será absolutamente indecidible desde el marco dado. Analizaré la posibilidad de extender los criterios internos, y sostendré que en principio es posible decidir sobre la HC; sin embargo, esto requiere una ampliación del marco de análisis y de mucho trabajo matemático que todavía está pendiente.

Es importante aclarar que la tesis no tiene como objetivo generar resultados nuevos en teoría de conjuntos que sirvan como evidencia ni a favor ni en contra de la HC. La investigación pretende ofrecer un análisis filosófico de los resultados que ya han sido presentados y clarificar cuáles son las perspectivas actuales para resolver el problema del continuo.

---

[9] Los resultados dados sólo explican y justifican el trabajo de aquellos que continuaron con el programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas, casi todos son miembros del grupo CABAL.

Capítulo 1

Proposiciones absolutamente indecidibles. El agnosticismo matemático, el proyecto de Hilbert y los teoremas de incompleción de la aritmética.

Con relación al enigma del mundo físico, durante mucho tiempo el investigador de la naturaleza ha tenido la costumbre de pronunciar su 'Ignoramus' con resignación varonil. Mientras mira hacia atrás la carrera victoriosa sobre la que ha pasado, él se mantiene con la conciencia tranquila de que ahora es ignorante, pero que él puede, al menos bajo ciertas condiciones, ser iluminado y llegar a conocer. Pero en cuanto al enigma sobre qué son la materia y la fuerza, y cómo son concebidas, él debe de una vez por todas resignarse a la mucho más difícil confesión. '¡Ignorabimus!'.
Emil du Bois-Reymond

Nosotros no debemos creerles a los que hoy en día, adoptando un aire filosófico y un tono de superioridad, profetizan la decadencia de la cultura y están contentos con lo 'incognoscible' en un camino de autocomplacencia. Para nosotros no hay incognoscibles, y en mi opinión tampoco hay ninguno para las ciencias naturales. En lugar de este tonto 'incognoscible', dejemos que nuestro lema sea al contrario: Podemos conocer, conoceremos.
David Hilbert.

1.1. Una breve introducción.

Comenzaré este capítulo con el análisis del desarrollo del formalismo de Hilbert y su influencia en la Teoría de Conjuntos. Si bien una buena parte de la historia de la HC es previa al trabajo de Hilbert (basta pensar en los trabajos de Cantor, quien fue el primero en proponer la HC), el lenguaje, las pruebas y los métodos contemporáneos de las pruebas están insertos en la tradición que comienza con Hilbert. Así, puedo acotar el análisis a la tradición hilbertiana y a las tradiciones posteriores en teoría de conjuntos.[1]

Para comprender la noción de prueba, sus elementos y la definición de indecidibilidad, en este primer capítulo presentaré el programa de Hilbert y sus objetivos. Me centraré en especial en su uso de lenguajes artificiales para formalizar las proposiciones matemáticas, su elección de la lógica clásica de primer orden como la lógica detrás de las pruebas, su postura finitista y la función de la metamatemática en su programa.

Para facilitar la presentación del programa de Hilbert y su noción de prueba, presentaré en primer lugar la postura de quienes bien pueden ser considerados sus rivales más acérrimos, Emil y Paul du Bois-Reymond, quienes defendieron el agnosticismo en las ciencias y, en especial, en la matemática.[2] Como se verá más adelante, Hilbert retoma o comparte muchos puntos centrales de la propuesta agnóstica de Paul du Bois-Reymond; por ejemplo, acepta la postura de este autor sobre qué es una prueba en matemáticas, pero difieren con él sobre cuáles son los límites del conocimiento matemático. De hecho, una reconstrucción histórica plausible del programa de Hilbert (aunque no ha sido muy trabajada), puede hacerse presentando al programa como una respuesta a la filosofía de las matemáticas de los hermanos du Bois-Reymond, véase (McCarty, 2005) y (Torres, 2007).

Concluiré que las pruebas matemáticas están relativizadas a un sistema matemático particular[3] y que son secuencias de oraciones tales que todas las oraciones son axiomas del sistema o se obtuvieron a partir de oraciones anteriores en la secuencia aplicando reglas de la lógica. La última oración de la secuencia es un teorema del sistema. Una oración es indecidible en un

[1] Respecto al estudio de la postura de Hilbert, me acotaré al estudio de su noción de prueba. Esto no quiere decir que no se pueda ampliar el estudio a otras tradiciones cuando analice el caso de la HC.

[2] Tradicionalmente, se ha presentado a L.E.J. Brouwer (y a los intuicionistas) como el enemigo número uno del programa de Hilbert. Sin embargo, como trataré de mostrar, la postura agnóstica de los hermanos du Bois-Reymond es la postura rival más fuerte del programa de Hilbert.

[3] Un sistema matemático está compuesto por un conjuntos de oraciones que sirven como axiomas o principios del sistema y una lógica de fondo que permite extraer las consecuencias de los axiomas.

sistema si y sólo si ni ella ni su negación son teoremas del sistema. Con esto se da respuesta a las primeras tres preguntas.

Una vez presentada la propuesta hilbertiana y el análisis de la noción de prueba, presentaré en este mismo capítulo un esquema de prueba de los teoremas de Gödel de incompleción de la aritmética, poniendo un énfasis especial en la construcción recursiva de las oraciones G_{PA} y $CONS(PA)$.[4] El objetivo es doble: Por un lado, mostrar que el objetivo de Hilbert de dar una prueba del axioma de solubilidad no puede ser satisfecho desde los límites propios del programa. Por otro lado, mostrar que la prueba genera un par de proposiciones indecidibles en la aritmética de Peano de una naturaleza muy especial, proposiciones tales que reflexionando sobre su prueba de indecidibilidad se puede obtener un método para decidir sobre ellas.

1.2. Ignoramus et ignorabimus.

A continuación, presentaré la postura de Emil du Bois-Reymond sobre los límites del conocimiento científico y los argumentos que utiliza para defender que existen proposiciones indecidibles en las ciencias empíricas, proposiciones relacionadas con los fundamentos de las disciplinas y la naturaleza de los objetos que dichas ciencias estudian. Una vez hecho esto, analizaré la filosofía de las matemáticas defendida por su hermano menor, Paul du Bois-Reymond. Este último defendió que incluso en matemáticas existen proposiciones indecidibles, proposiciones que están relacionadas con la naturaleza de ciertos objetos matemáticos como el continuo.

1.2.1. Emil du Bois-Reymond y los límites del conocimiento en ciencias empíricas.

Durante el siglo XIX, un importante científico alemán propuso una postura muy fuerte respecto a los límites del conocimiento científico; defendió que hay preguntas científicas que nunca podrán ser resueltas (un tipo de agnosticismo para ciertas proposiciones de la ciencia). Su nombre era Emil du Bois-Reymond y fue uno de los fisiólogos más renombrados de la época, incluso llegó a ser rector de la Universidad de Berlín. Sus trabajos giraban en torno del funcionamiento electromecánico del sistema nervioso.

[4]Estas oraciones son fórmulas expresadas en el lenguaje formalizado de la aritmética de Peano. G_{PA} es una fórmula del lenguaje de la aritmética que una vez decodificada afirma de ella misma que no es demostrable. $CONS(PA)$, una vez decodificada afirma que el sistema mismo es consistente.

El 14 de agosto de 1872, Emil impartió una conferencia ante la Organización Alemana de Científicos y Físicos. Esta agrupación era una de las asociaciones científicas más importantes de la época, aglutinaba a científicos de distintas disciplinas, desde fisiólogos (como el mismo du Bois-Reymond) hasta matemáticos. El título de su presentación fue "Sobre los límites del conocimiento de la naturaleza" ("Über die Grenzen des Naturerkennens"). En la conferencia, daba su visión de la ciencia y defendía que había preguntas que la ciencia no podía responder, cuestiones como la naturaleza de la materia, el origen del movimiento, el origen de las sensaciones humanas y de la conciencia, etc. Para defender su postura usaba argumentos de indecidibilidad, que pretendían mostrar que estas cuestiones eran indecidibles desde el punto de vista científico.

El esquema de estos argumentos de indecidibilidad es:

1. Las leyes de la ciencia son cuantitativas. Ofrecen una descripción matemática del comportamiento de los objetos que pertenecen a su dominio de estudio, pero no establecen cuál es la naturaleza profunda de estos objetos.[5]

2. Supongamos que tenemos un conjunto de leyes científicas cuantitativas que describen perfectamente el comportamiento de la materia en el universo.

3. Supongamos que tenemos toda la información posible en términos cuantitativos del estado del universo en un momento determinado, t. (Tenemos una imagen completa del universo en t).

4. Además, supongamos que contamos con un ser ideal (un demonio de Laplace) que tiene poderes inferenciales infalibles, que tiene memoria infinita y es capaz de procesar una cantidad infinita de información usando un conjunto de leyes dado.

5. Si a este ser le damos las leyes y la información descritas en los puntos 2 y 3, él podría calcular todos los estados del universo, pasados y futuros respecto a t, es decir, podría contar con una descripción cuantitativa completa del universo en todo momento.

6. Este ser, a pesar de poder calcular el estado del universo en cualquier punto del tiempo, no podría (sólo con esta información) responder a preguntas como: ¿Cuál es el origen del movimiento?, ¿cuál es el origen

[5]Este punto es central en su defensa de la existencia de proposiciones indecidibles, pues las preguntas que no pueden ser respondidas son de corte cualitativo.

de la conciencia humana?, ¿cuál es la naturaleza última de la materia?, etcétera.

7. Pero, lo que puede saber este ser ideal en estas circunstancias es todo lo que, en principio, un científico puede saber usando estas leyes más información empírica. Los límites del conocimiento del ser ideal son los límites del conocimiento científico.

8. Por lo tanto, la ciencia no puede responder a preguntas como: ¿Cuál es el origen del movimiento?, ¿cuál es el origen de la sensaciones o de la conciencia?, ¿cuál es la naturaleza última de la materia?, etcétera.[6]

Esta postura se difundió en forma de eslogan como 'Ignoramus et ignorabimus' (desconocemos y desconoceremos). Parte central del argumento consiste en sostener que la respuesta a estas preguntas no se puede obtener únicamente con base en el conocimiento de las leyes físicas cuantitativas y de mediciones del mundo, por más perfectas que sean. Por decirlo de otro modo, estas preguntas son de una naturaleza que no pueden ser abordadas por métodos puramente científicos. La postura de Emil du Bois-Reymond fue muy influyente a finales del siglo XIX y fue discutida por muchos científicos y filósofos ya bien entrado el siglo XX.

La parte de esta historia que es relevante para este trabajo, no es la parte que tiene que ver con la discusión sobre los límites del conocimiento en las ciencias empíricas o la existencia de proposiciones indecidibles en dichas disciplinas. Para este trabajo es relevante la discusión que tiene que ver con los límites del conocimiento matemático. En esta historia el personaje principal es Paul du Bois-Reymond, el hermano menor de Emil, quien ofreció argumentos para extender la postura agnóstica de su hermano a las matemáticas.

1.2.2. Paul du Bois-Reymond y las proposiciones indecidibles en matemáticas.

Paul comenzó su carrera científica como fisiólogo, al igual que su hermano, pero pronto reorientó su formación para ocuparse de temas de física y matemáticas. En esta última disciplina llegó a ser muy reconocido por sus resultados en análisis matemático. Paul no sólo estaba preocupado por cuestiones puramente matemáticas, también tenía intereses en cuestiones de fundamentación y filosofía de las matemáticas. Una muestra de esto es su

[6] Para tener información más detallada de este argumento puede verse (McCarty, 2005), en especial pp. 63-66. O bien, puede verse directamente (du Bois-Reymond, 1872).

libro más famoso, Teoría General de las Funciones (Die allgemeine Funktionentheorie), publicado en 1882. En este libro, Paul presentó, además de resultados matemáticos originales, su postura filosófica sobre los fundamentos de las matemáticas. Justo en este contexto es en el que ofrece su argumento para afirmar que existen proposiciones indecidibles en matemáticas.

> En el libro, Paul du Bois-Reymond también trató de demostrar precisamente lo que más tarde Hilbert tan a menudo negaba: que, en matemáticas, hay Ignorabimus y en abundancia. Específicamente, él sostuvo que las matemáticas incluyen, en sus fundamentos, preguntas sin respuesta de la clase que antes Emil había pensado se albergaban en la puerta de entrada de la física matemática y la psicología. [Paul] llegó a creer que, debido a los límites de nuestras facultades cognitivas, los límites de la percepción, la imaginación y la visualización, los matemáticos nunca resolverían los desacuerdos básicos sobre la naturaleza del continuo. (McCarty, 2005, p. 73)[7]

Paul du Bois-Reymond tenía como objetivo extender la doctrina de su hermano a las matemáticas, argumentando que la naturaleza del continuo matemático no puede ser conocida, no por lo menos desde las matemáticas mismas. Para sustentar su postura usó argumentos muy similares a los usados por su hermano en el caso de las ciencias naturales. El objetivo de los argumentos es mostrar que ningún matemático (incluso sin limitaciones de poder computacional o de memoria) puede dar una respuesta última sobre cuál es la naturaleza del continuo y no puede decidir sobre proposiciones relacionadas con dicha naturaleza.

Para reconstruir el argumento de Paul, primero enlistaré algunos puntos relevantes de su postura, referentes a su noción de prueba y los elementos involucrados en ella[8]:

I Las pruebas matemáticas son manipulaciones de representaciones sujetas a reglas. Es decir, en las pruebas no están involucrados los objetos mismos o nuestras intuiciones sobre ellos, más bien las pruebas están compuestas por representaciones de objetos y conceptos matemáticos. Dichas representaciones son lingüísticas y pueden ser obtenidas a partir

[7] "In the book, Paul du Bois-Reymond also sought to demonstrate precisely what Hilbert would later so often deny: that, in mathematics, there is Ignorabimus and plenty of it. Speci?cally, he maintained that mathematics includes, at its foundations, unanswerable questions of the sort Emil had earlier thought to lodge at the gatehouse of mathematical physics and psychology. [Paul] came to believe that, due to limits on our cognitive powers, limits on perception, imagination and visualization, mathematicians would never resolve basic disagreements over the nature of the continuum." La traducción es mía.

[8] En este punto sigo casi al pie de la letra la presentación de David McCarty. Véase (McCarty, 2006), p. 525 y ss.

de la percepción directa o por medio de abstracciones del pensamiento mismo. Las pruebas son entonces combinaciones de representaciones lingüísticas de objetos y conceptos matemáticos, con la condición de que dichas combinaciones respeten ciertos criterios matemáticos. Estos criterios de combinación de representaciones, deben incluir ciertas reglas de sintaxis del lenguaje matemático y la lógica que empleamos para manipular las representaciones.

II Las pruebas matemáticas son finitas. Este requisito está fundado en los límites de las capacidades cognitivas de los matemáticos, que son los que realizan las manipulaciones de las representaciones que conforman una prueba.

III Existen diferentes construcciones o representaciones del continuo matemático que recuperan todos los resultados conocidos (hay más de una representación del continuo). Paul du Bois-Reymond construyó un modelo no estándar del continuo que contenía números infinitesimales. El modelo usaba representaciones de objetos geométricos que no tenían correlato empírico, pues sus magnitudes no eran finitas.

IV Los elementos infinitarios en la matemática sólo funcionan como elementos ideales; es decir, no representan nada que sea percibido o intuido y no podemos tener seguridad sobre su existencia o su naturaleza.

Ahora tenemos los elementos suficientes para reconstruir el argumento de Paul du Bois-Reymond a favor de la existencia de indecidibles en matemáticas; en particular, su argumento a favor de la indecidibilidad de algunas proposiciones relacionadas con el continuo matemático.

En su libro, Teoría General de la Funciones, Paul presentó un diálogo entre dos matemáticos con diferentes posturas filosóficas, uno empirista y el otro idealista. Cada uno de ellos utiliza diferentes representaciones de los objetos y de los conceptos matemáticos involucrados en las pruebas sobre el continuo matemático. A continuación ofrezco una reconstrucción del argumento de du Bois-Reymond.

1. El idealista usa representaciones geométricas muy permisivas, que no necesariamente representan objetos accesibles o existentes en el mundo físico (representaban objetos trascendentes); por ejemplo, usa representaciones de objetos con magnitudes infinitas y representaciones de objetos con magnitudes infinitesimales.

2. El empirista usa representaciones geométricas sólo de objetos que son accesibles mediante la percepción o mediante la intuición (representa sólo objetos inmanentes), todos ellos de magnitud finita.

3. Las pruebas que se pueden hacer usando las diferentes representaciones no son las mismas. Pero, ambas posturas pueden probar todas las proposiciones que se han demostrado hasta ahora (sobre la parte del dominio de objetos que comparten, la que sólo recurre a representaciones de objetos inmanentes); es decir, ambas posturas recuperan nuestro conocimiento matemático previo, el conocimiento aplicable al mundo empírico.

4. Las proposiciones en las que difieren ambas posiciones tienen que ver con la naturaleza de los objetos matemáticos en cuestión y sus representaciones; tienen que ver con la naturaleza del continuo.

5. Por ello, no hay ningún argumento puramente matemático que pueda decidir entre estas dos posturas.[9]

6. Por lo tanto, existen proposiciones indecidibles en matemáticas; a saber, proposiciones relacionadas con la naturaleza última del continuo matemático.[10]

Este argumento nos ayuda a dar otro par de puntos característicos de la postura de Paul:

V Rechaza el Axioma de Solubilidad (AS), que sostiene que todo problema matemático bien planteado puede ser resuelto.

VI Las matemáticas no son una disciplina autónoma y completamente independiente del resto de las disciplinas científicas. Esto se debe a que

[9]Aquí cabe aclarar que el trabajo del matemático desde el punto de vista de Paul du Bois-Reymnod se centra en la manipulación de representaciones; es decir, el trabajo del matemático es principalmente hacer pruebas. No es parte del trabajo del matemático analizar la naturaleza de las representaciones, ni cuenta con herramientas para hacerlo. Es por ello que no puede decidir sobre proposiciones cuya aceptación depende de adoptar un análisis particular sobre la naturaleza de una representación.

[10]Un ejemplo de dichas proposiciones indecidibles es la proposición que afirma la existencia del límite de una serie tal que no todos sus elementos pueden ser representados por un matemático que opte por la postura empirista. Si una serie numérica infinita no es construida mediante una regla bien establecida no podrá ser representada por un matemático empirista. Por ejemplo, si una serie es construida usando tiros de un dado, entonces no hay ninguna regla constructiva que pueda describir dicho proceso. Para un matemático empirista, dicha serie y su límite no existen. Pero, un matemático idealista puede hacer una representación de la serie usando elementos ideales, que corresponden a objetos trascendentes, y con ello no sólo probar la existencia de dicha serie, sino incluso puede llegar a mostrar que tiene límite y determinarlo. Este mismo ejemplo es usado por algunos intuicionistas para mostrar que no todas las proposiciones matemáticas son ya sea verdaderas o falsas.

> las representaciones de las magnitudes y de los conceptos matemáticos tienen un rol central en las pruebas matemáticas y la representación es un fenómeno que debe ser estudiado por la psicología y la fisiología, no por las matemáticas. A esta clase de estudio, du Bois-Reymond lo llamó "Metamatemática".

Cabe resaltar que, desde el punto de vista de du Bois-Reymond, un problema matemático es indecidible si existen dos sistemas de representaciones que dan resultados diferentes respecto a él. Es decir, para que un problema matemático pueda ser decidido tiene que suceder que todos los sistemas de representaciones aceptados den el mismo veredicto sobre el problema. Este puede ser un requisito muy fuerte, sobre todo considerando que en principio pueden existir muchos sistemas de representaciones que den resultados diferentes para una gran cantidad de proposiciones matemáticas.

1.3. Wir müssen wissen - wir werden wissen.

En esta sección presentaré el programa de Hilbert y sus motivaciones. Desde mi reconstrucción, son dos las motivaciones principales; dar una prueba del AS y ofrecer una prueba que muestre que incluir elementos ideales en las teorías no genera contradicciones en el sistema. Para esto último, requiere de pruebas de consistencia para los sistemas matemáticos.

1.3.1. El axioma de solubilidad, los cambios en la noción de prueba y en la Metamatemática.

Presentaré el programa de Hilbert como una respuesta directa al agnosticismo matemático de Paul du Bois-Reymond. Hilbert conocía esta postura agnóstica y su programa comparte mucho con ella.

Siendo todavía un estudiante, David Hilbert conoció la postura de Emil y Paul du Bois-Reymond sobre los límites del conocimiento científico y matemático. Hilbert aceptó e incluyó en su propia postura gran parte de los planteamientos y argumentos de Paul du Bois-Reymond sobre los fundamentos de las matemáticas, aunque su postura difiere en algunos detalles relevantes con la postura de los agnósticos. Hilbert aceptaba la caracterización de prueba de du Bois-Reymond; una prueba es una sucesión finita de representaciones de objetos y conceptos matemáticos, que respeta ciertas reglas. Incluso coincide con du Bois-Reymond en que los elementos infinitos en las pruebas eran sólo elementos ideales, introducidos para lograr una mayor unidad y mayor poder deductivo en el sistema. Además, Hilbert aceptaba que es necesario un estudio metamatemático, pero propone un enfoque diferente. El punto central de la disputa con du Bois-Reymond era el axioma de solubilidad.

Los principales puntos de divergencia son: 1) Hilbert impuso límites a qué lenguajes eran adecuados para representar a los objetos y a los conceptos matemáticos, 2) estableció cuál era la lógica adecuada en el caso de las pruebas matemáticas y 3) propuso que la matemática misma es la mejor disciplina para analizar las pruebas matemáticas, es decir, la metamatemática para Hilbert es un estudio de la matemática desde la matemática misma, sin apelar a herramientas de otras disciplinas como la psicología o la fisiología.

Hilbert esperaba que estos reajustes fuesen suficientes para bloquear los argumentos agnósticos de du Bois-Reymond. Esperaba que un análisis metateórico de las teorías matemáticas expresadas en un lenguaje formal le permitiese probar el AS, que es la primera motivación de su programa. Hilbert estaba plenamente convencido de que era posible resolver cualquier problema matemático bien planteado. Así lo expresó en muchos textos, por ejemplo:

> Probablemente este hecho importante es lo que, junto con otras razones filosóficas, da lugar a la convicción (que todo matemático comparte, pero que nadie hasta ahora ha apoyado con una prueba) de que todo problema matemático definido debe ser necesariamente susceptible de una solución exacta, ya sea en forma de una respuesta de hecho a la pregunta formulada, o por la prueba de la imposibilidad de su solución y con ello del necesario fracaso de todos los intentos. (Hilbert, 1900, p. 6)[11]

En este sentido, la confianza de Hilbert en la solubilidad de todo problema matemático bien planteado es un punto central de su pensamiento.[12] Es, según creo, una de las dos motivaciones principales de su programa.

La convicción de Hilbert sobre la verdad del AS no fue la única motivación para desarrollar su programa de fundamentación de las matemáticas. Otra motivación era evitar las paradojas y los problemas de consistencia en las teorías matemáticas.[13]

[11] "It is probably this important fact along with other philosophical reasons that gives rise to the conviction (which every mathematician shares, but which no one has as yet supported by a proof) that every definite mathematical problem must necessarily be susceptible of an exact settlement, either in the form of an actual answer to the question asked, or by the proof of the impossibility of its solution and therewith the necessary failure of all attempts." La traducción es mía.

[12] Hilbert no sólo creía que no existían límites para el conocimiento matemático, tampoco creía que hubiese límites para el conocimiento de la naturaleza. Para ver una discusión sobre la postura de Hilbert sobre las tesis de Emil du Bois-Reymond respecto a los límites del conocimiento científico, véase (McCarty, 2005).

[13] Paul du Bois-Reymond también consideraba inaceptable la existencia de paradojas e inconsistencias en las matemáticas, pues consideraba que un sistema de representaciones de objetos y conceptos matemáticos adecuado no puede incluirlas.

1.3.2. Las críticas intuicionistas al programa de Hilbert y la necesidad de pruebas de consistencia.

A finales del siglo XIX, Cantor, Dedekind y otros matemáticos crearon la teoría de conjuntos. Esta teoría originalmente pretendía servir para completar el programa de aritmetización del cálculo. Uno de sus objetivos originales era dar un tratamiento completo y adecuado de las series trigonométricas infinitas.[14] Pronto la teoría mostró un gran potencial como una teoría de fundamentación de las matemáticas. Poco tiempo después, surgieron algunas paradojas famosas dentro de esta teoría, la primera de ellas fue la paradoja de Cantor. La paradoja surgía al considerar un conjunto que tuviese como elementos a todos los conjuntos. Muchos atribuyeron los problemas de las paradojas al uso de conjuntos infinitos, otros a la autorreferencialidad, etcétera.

Incluso antes de que Hilbert enfrentase directamente estos problemas de paradojas y contradicciones en la teoría de conjuntos, él ya había comenzado con un programa de fundamentación de las matemáticas. Su trabajo comenzó en la década de 1890, con sus trabajos sobre Los Elementos de Euclides y la fundamentación de la geometría. Durante estos años Hilbert preparó su propio sistema axiomático[15] para la geometría plana, mismo que presentó en 1899 junto con una versión de Los Elementos de Euclides. Su trabajo sobre fundamentación continuó por algunos años más hasta aproximadamente 1904, cuando se concentró en sus estudios sobre física matemática. Y no es hasta mediados de la década de 1910 cuando regresa a trabajar temas sobre fundamentación.[16] Los trabajos de Hilbert sobre fundamentación escritos a partir de 1917 tenían como interlocutores a los agnósticos, pero también a los intuicionistas matemáticos como Brouwer.

Los intuicionistas de esta época, en especial Brouwer,[17] diferían en muchos puntos con la propuesta de Hilbert y su postura no tiene una influencia directa en los desarrollos que se examinarán en los siguientes capítulos. Por ejemplo, la postura de estos intuicionistas sobre el continuo matemático aun-

[14] En el capítulo cuatro profundizaré en los objetivos originales de la teoría de conjuntos.

[15] Como veremos un poco más adelante las diferencia con Paul du Bois-Reymond queda perfectamente expresada en la adopción de sistemas axiomáticos formales para las matemáticas.

[16] Es posible que durante los años previos a 1917, Hilbert estuviese enfocado casi exclusivamente a ofrecer un filosofía de las matemáticas y de la física que mermara la postura de los hermanos du Bois-Reymond. Algunos de sus famosos 23 problemas, pretendía mostrar que no había límites en el conocimiento en física.

[17] En esta sección al hablar de los intuicionistas me refiero en especial a Brouwer y otros intuicionista de la misma época. La tradición intuicionista actual no sostiene las posturas aquí expresadas, o por lo menos no todas

que es muy original, no influyo en mayor medida los trabajos contemporáneos sobre la HC (dentro de la tradición que analizaré).[18] Es por ello que no profundizaré en su postura, pero diré lo suficiente como para explicar, *grosso modo*, su influencia en el programa de Hilbert.

Los intuicionistas consideraban que el lenguaje de la matemática no era relevante y en el mejor de los casos sólo servía como vehículo de transmisión de los resultados matemáticos. "Ni el lenguaje ordinario ni ningún lenguaje simbólico puede tener ninguna otra función que la de servir como un auxiliar no matemático, para ayudar a la memoria matemática o para habilitar a diferentes individuos para construir el mismo conjunto." (Brouwer, 1912, p. 81)[19] Para ellos, las pruebas operaban directamente sobre nuestras intuiciones matemáticas. Rechazan además las pruebas en las cuales se incluían objetos que no pudiesen intuirse. Por ejemplo, rechazaban las series que se describían asumiendo algún proceso de descripción no-constructivo. Rechazaban el uso de elementos ideales y de algunas reglas de la lógica clásica, pues desde su punto de vista esas reglas no se pueden aplicar cuando se están haciendo demostraciones matemáticas, pues, entre otras cosas, es posible que una proposición no sea demostrable y su negación tampoco sea demostrable. Y hasta no tener una prueba de una o de la otra, no se puede afirmar que la proposición es verdadera o falsa. En palabras de Brouwer, cuando se habla de la construcción de una serie numérica y su límite, "para este propósito o bien tenemos que inventar un proceso para la construcción de una serie elemental de tales pares de dígitos iguales, o bien tenemos que deducir una contradicción de la hipótesis de la existencia de tal serie elemental." (Brouwer, 1912, p. 88)[20] Usando estas herramientas, ellos respondieron a las paradojas de la teoría de conjuntos afirmando que se debían justo a que sus pruebas no eran constructivas; argüían que se usan elementos ideales de cuya existencia no podemos decir nada, además de no poder tener intuiciones directa de ellos. Su propuesta incluía el abandono de la teoría de conjuntos. [21] En resumen:

> Las matemáticas rigurosamente tratadas desde este punto de vista, incluyendo la deducción de teoremas exclusivamente por medio de la construcción

[18]Los intuicionistas rechazan el tratamiento que se daba del continuo matemático como un conjunto de puntos. Desde su punto de vista, una característica fundamental del continuo en matemáticas era su unidad, misma que se perdía en el análisis conjuntista.

[19]"[N]either the ordinary language nor any symbolic language can have any other role than that of serving as a nonmathematical auxiliary, to assist the mathematical memory or to enable different individuals to build up the same set." La traducción es mía.

[20]?for this purpose we should either have to invent a process for constructing an elementary series of such pairs of equal digits, or to deduce a contradiction from the assumption of the existence of such an elementary series.? La traducción es mía.

[21]Véase, por ejemplo, (Brouwer, 1912, p. 80 y ss.).

> introspectiva, se llaman matemáticas intuicionistas. En muchos aspectos se apartan de la matemática clásica. En primer lugar, porque la matemática clásica utiliza la lógica para generar teoremas, cree en la existencia de verdades desconocidas, y, en particular, se aplica el principio del tercero excluido expresando que cada afirmación matemática (es decir, cada asignación de una propiedad matemática a una entidad matemática) o bien es una verdad o no puede ser una verdad. En segundo lugar, porque la matemática clásica se limita a sí misma a predeterminar secuencias infinitas para las cuales desde el principio el elemento n-ésimo está fijo para cada n. (Brouwer, 1949, p. 90)[22]

Los puntos de disputa más relevantes entre el programa de Hilbert y la postura intuicionista eran:

1. La función que el lenguaje y las intuiciones desempeñaban en las pruebas matemáticas. Para Hilbert, el lenguaje tenía una función muy importante en la construcción de las pruebas. Para los intuicionistas, el lenguaje es una herramienta auxiliar para recordar y transmitir pruebas.

2. Los principios lógicos que se deben permitir en las pruebas. Hilbert acepta todos los principios de la lógica clásica, aunque admitía que debía dar una prueba de que no se generarán inconsistencias. Los intuicionistas sólo aceptan principios lógicos constructivos, por ejemplo, rechazan el principio de tercio excluso y la prueba por reducción al absurdo.

3. El uso de representaciones de objetos que no eran accesibles a la intuición; a saber, la representación de objetos ideales. Hilbert los aceptaba para completar sus sistemas y darles mayor poder deductivo. Los intuicionistas los rechazan.

4. El axioma de solubilidad. Hilbert lo acepta y busca dar una prueba de él. Los intuicionistas lo rechazan.

[22] "Mathematics rigorously treated from this point of view, including deducing theorems exclusively by means of introspective construction, is called intuitionistic mathematics. In many respects it deviates from classical mathematics. In the first place because classical mathematics uses logic to generate theorems, believes in the existence of unknown truths, and in particular applies the principle of the excluded third expressing that every mathematical assertion (i.e. every assignment of a mathematical property to a mathematical entity) either is a truth or cannot be a truth. In the second place because classical mathematics confines itself to predeterminate infinite sequences for which from the beginning the nth element is fixed for each n." La traducción es mía.

Sobre el punto 1), a mi parecer no puede haber una discusión estructurada y fructífera entre ambas posturas. Esto se debe a que es un punto fundamental en ambas propuestas; es uno de los rasgos definitorios de cada una de ellas. En el caso de los puntos 2) a 4), creo que sí puede haber una discusión que aporte elementos sustanciales al debate filosófico entre ambas posturas. Esto se debe a que, más que rasgos fundamentales de ambas propuestas, son consecuencias de la postura que cada autor tenga sobre 1) y algunos otros elementos. El rechazo de los intuicionistas de ciertos principios lógicos, de los elementos ideales y del axioma de solubilidad se debe a su concepción de prueba matemática y de los elementos que garantizan la corrección de una prueba, que para ellos eran las intuiciones matemáticas. El rechazo de 2), 3) y 4) más que una cuestión de principio, se debe a que ellos no reciben el apoyo de la intuición. No tenemos intuiciones que nos garanticen que ciertos elementos ideales o ciertas reglas lógicas no nos lleven a una contradicción o a un absurdo. Ahora bien, si Hilbert puede ofrecer una prueba de que sus sistemas (aunque no tengan el apoyo de la intuición, no por lo menos directamente) no nos llevan al absurdo o a contradicciones y además nos ofrecen una respuesta para cada pregunta planteada. Entonces, no parece haber razón en principio para que estos puntos generen desacuerdo entre Hilbert y los intuicionistas. La única condición es que el sistema mismo (visto como objeto matemático) sí pueda recibir el apoyo de la intuición.

> El objetivo que nos hemos propuesto es entonces el de dar un fundamento seguro a las matemáticas. Nuestra intención es devolver a nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles, del que las paradojas de la teoría de conjuntos parecieron despojarla. Tenemos la firme convicción de que esto es realizable y que no significa ningún tipo de renuncia a sus partes constitutivas. El método adecuado para la realización de estos fines es, por supuesto, el método axiomático. (Hilbert, 1922, p. 41)

En 1917, cuando Hilbert retoma su trabajo sobre la fundamentación, lo hace sobre todo por las críticas que surgen contra las matemáticas no constructivas (las críticas intuicionistas). Él sostenía que no se puede abandonar todo el trabajo de tantos años, es importante dar una teoría de la demostración que garantice que las matemáticas no constructivas no generan contradicciones. "[...] mi teoría se propone como objetivo central conferir una seguridad definitiva al método matemático [...]."(Hilbert, 1926, p. 84)

Hilbert no sólo tenía como objetivo argumentar que todo problema matemático bien planteado tiene solución, también pretendía mostrar que las matemáticas no tenían problemas de consistencia. Así, tenemos de nuevo el requisito de compleción del sistema, para dar apoyo al axioma de solubilidad (la misma razón que tenía en relación a la filosofía de Paul du Bois-Reymond), pero se incluye un nuevo requisito; a saber, la prueba de la consistencia del sistema, para garantizar que el uso de principios lógicos no constructivos y de elementos ideales no origina contradicciones.

Es importante mencionar que, desde el punto de vista de Hilbert, el estudio de los fundamentos de la matemática, además de satisfacer las dos motivaciones expuestas arriba, requiere:

1. Ser conservativo, no revisionista. Queremos analizar evaluar y enriquecer el conocimiento matemático. El objetivo es recuperar la mayor cantidad de conocimiento matemático posible. “Nadie nunca podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creo para nosotros.” (Hilbert, 1926, p. 94)

2. Dar a la lógica y a los elementos ideales la misma certeza que tiene la teoría de números (que será su base firme).

1.3.3. Estructura del programa de Hilbert y el método axiomático.

Hilbert optó por el método axiomático usando además lenguajes formalizados[23] para expresar a las teorías matemáticas. Lo cual es una propuesta afín a su idea de prueba y acorde con su confianza en las matemáticas finitas[24] (no ponía en duda su consistencia); pues, los lenguajes formales se pueden analizar usando matemáticas si consideramos que las fórmulas y las pruebas son sucesiones finitas de símbolos. En palabras de Hilbert: “Es mi opinión que todas las dificultades a las que nos referimos se pueden superar y que nosotros podemos proporcionar una fundamentación rigurosa y completamente satisfactoria para la noción de número y, de hecho, por un método que yo llamaría axiomático.” (Hilbert, 1904, p. 131).[25]

Como vimos en el apartado anterior Hilbert tiene dos objetivos fundamentales al crear su programa de fundamentación de las matemáticas; a

[23]Hay que recordar que no todo sistema axiomático tiene que estar expresado en un lenguaje formalizado. El método axiomático fue propuesto y utilizado por primera vez en la antigua Grecia. El método tiene como objetivo lograr fundamentar el conocimiento en una base firme (los axiomas) y a partir de ella inferir el resto del conocimiento usando reglas que garanticen la preservación de verdad (las reglas de la lógica).

[24]Un poco más adelante profundizaré en la postura finitista de Hilbert detrás su programa, esto con el objetivo de mostrar que el finitismo epistemológico propuesto es ya una postura filosófica que no es inocua. Y en ese sentido, la postura de Hilbert no descansa en una visión puramente matemática.

[25]“It is my opinion that all the difficulties touched upon can be overcome and that we can provide a rigorous and completely satisfying foundation for the notion of number, and in fact by a method that I would call Axiomatic [. . .]”. La traducción es mía.

saber, probar el AS y probar la consistencia de las matemáticas, en especial, la consistencia de la teoría cantoriana de conjuntos. El programa tiene como base una concepción axiomática de las matemáticas en la que además se recurrirá a los lenguajes formales para expresar a las proposiciones matemáticas. Hilbert llamó a esta combinación "El método axiomático". "En mi opinión, la mejor manera de aclarar la naturaleza y el fundamento de esta fructíferas relaciones consiste en exponer el método general de investigación que parece imponerse cada vez más en las matemáticas modernas, el método axiomático." (Hilbert, 1917, p. 24.)

> [...] Hilbert creyó que esto se lograría fijando sus principios y conceptos básicos y estableciendo el rigor en las demostraciones, para después aducir su consistencia, es decir, presentar pruebas de su no contradicción como razón justificativa y salvaguarda de su libre albedrío. La axiomatización sería la herramienta y la consistencia su fundamento, estableciendo de este modo su posibilidad y legitimidad sin tener que invocar vínculo alguno con la realidad física o cualquier tipo de realidad conceptual. (Torres, 2001, p. 134).[26]

Es por esto que Hilbert propuso una idea inédita hasta entonces; tratar de resolver problemas de filosofía de las matemáticas desde adentro de la práctica matemática, sin adherirse a ninguna postura filosófica particular. Algo que no logró del todo pues, al fin y al cabo, terminó apoyándose en una postura finitista; que, entre otras cosas, implica una confianza en las matemáticas finitas y el análisis que podemos dar de los sistemas formales apoyándonos en este tipo de matemáticas.[27]

El primer problema que enfrentaba Hilbert eran las críticas de Brouwer respecto a la introducción de nociones no finitistas en las pruebas matemáticas; por ejemplo, la prueba por reducción al absurdo y las pruebas que utilizaban la noción de infinito. Hilbert creía que la introducción de estos elementos no era la causa de las antinomias, aunque sí estaba convencido de que las pruebas finitistas eran, por decirlo así, los paradigmas de las buenas pruebas matemáticas. Creía además que las matemáticas finitas tenían su origen en la intuición de los objetos matemáticos y que nociones como el infinito eran elementos indispensables para las pruebas, pero que, a diferencia las nociones finitistas, eran introducidas como ideas de razón que complementaban el pensamiento matemático. Esto lo llevo a crear una distinción entre nociones

[26]En este texto el Dr. Torres sugiere que Hilbert no retornó a temas de fundamentación hasta 1917 pues consideraba que no había peligro real en las propuestas de Brouwer que a nadie convencían. Justo en 1917 su opinión cambió cuando uno de sus discípulos Hermann Weyl cambió de bando y argumentó que el fundamento real del análisis matemático tendría que ser constructivista. (Torres, Op. cit., p. 99)

[27]Profundizaré en el finitismo hilbertiano y sus implicaciones filosóficas un poco más adelante.

descriptivas, que se aprenden por la intuición de los objetos matemáticos, y nociones ideales que son introducidas por la razón y que quedan fuera del ámbito de la percepción o de toda experiencia posible. La función de estas últimas es complementar a la matemática. Un ejemplo de estas nociones ideales es la noción de infinito. El infinito no tiene un referente real en el mundo físico; sin embargo, Hilbert no ve en ello razón alguna para excluirlo de nuestras concepciones matemáticas. Lo que es más, lo consideraba un instrumento indispensable para los razonamientos matemáticos. Esta distinción entre las nociones descriptivas e ideales lo lleva a hacer una distinción paralela entre enunciados matemáticos; aquellos que se verifican directamente y aquellos que requieren pruebas matemáticas. Los primeros tienen pruebas directas (pruebas finitas basadas en la intuición de los objetos matemáticos) y son aceptados incluso por los intuicionistas.[28] Los segundos son los que tendrá que justificar por medio de su teoría de la demostración.[29]

Hilbert trataba de fundamentar la consistencia de las matemáticas desde adentro de la misma disciplina. Para ello se apoyo en la noción de intuición; la cual, sin embargo, aplicó sólo a la intuición de objetos del conocimiento matemático, no entendiendo éstos como objetos ideales al estilo platónico, sino como los signos concretos con los que se realiza la matemática. Es decir, la intuición de objetos matemáticos era para él la intuición de los signos. Esta idea se encuentra de manera primitiva en Los fundamentos de la geometría en los que no se preocupa realmente por los objetos matemáticos en el sentido platónico, sino únicamente por los principios formales que le permiten construir la geometría del plano. Esto se hace evidente en el siguiente pasaje del texto:

> Pensemos tres diferentes clases de objetos. Llamaremos a los objetos del primer sistema puntos, y designémoslos con A, B, C, . . . ; llamemos a los objetos del segundo sistema rectas, y designémoslas con a, b, c,. . . ; a los objetos del tercer sistema llamémoslos planos, y designémoslos con α, β, γ, . . . [. . .] Supongamos que puntos, rectas y planos estén en ciertas relaciones mutuas que designaremos con las palabras: "estar en", "entre", "paralelo", "congruente",

[28]En este punto parece claro que Hilbert compartía con Paul du Bois-Reymond la certeza de que las representaciones provenientes de la intuición directa no podían ponerse en duda. Pero, la introducción de elementos ideales de la teoría requiere pruebas de que no generarán contradicciones.

[29]Los métodos finitos de demostración piden que para cada prueba se pueda dar un argumento con elementos finitos, por ejemplo, que si se quisiera demostrara que un conjunto de números tienen la propiedad P se tiene que proporcionar un método de un número finito de pasos que garanticé que cualquier número del conjunto tiene la propiedad P. De esta forma los finitistas pedían que no se haga un uso indiscriminado de tercero excluso y pruebas por reducción al absurdo, lo que Hilbert intento fue dar la misma certeza a las pruebas que utilizan conceptos no finitos.

> "continuo", cuya exacta y completa descripción se conseguirá por medio de los Axiomas de la Geometría. (Hilbert, 1899, p. 3)

Hilbert no da definiciones explícitas de los objetos de la geometría, sino definiciones implícitas dadas por los axiomas. Este es un punto en el que Hilbert cambió su posición entre el primer periodo y el segundo periodo de trabajo sobre los fundamentos de la matemática. En el primer periodo que va de 1890 a 1904, Hilbert parecía interesado en explicar qué eran los objetos matemáticos. Él sostenía que los axiomas daban una caracterización implícita de éstos. Y en algún momento llega a sostener que los objetos de la geometría pueden ser cualesquiera, siempre y cuando satisfagan los axiomas. Esta postura cambia para su segundo periodo de trabajo que se ubica entre 1917 y 1931. En este periodo no se concentra en cuestiones sobre la existencia y caracterización de los objetos matemáticos en el sentido platónico, sino que se concentra en las propiedades formales de los signos que representan a las proposiciones matemáticas.

Una vez que Hilbert centró su interés en las propiedades de los signos, necesitaba entonces formalizar los enunciados de la matemática de tal forma que sólo se mostrará la forma sin tomar en cuenta el contenido. Para ello usó el lenguaje de Russell y Whitehead que servía a la perfección para sus propósitos, aunque fue creado para otros. Con algunas pequeñas modificaciones utilizó este lenguaje y cumplió su objetivo de formalizar la matemática.

Primero definió un lenguaje formal numerable, tal como se hace en la actualidad, es decir, dando un vocabulario o conjunto de símbolos a lo más numerable y después definiendo de manera rigurosa qué sucesiones finitas de estos símbolos serían consideradas fórmulas. Una vez hecho esto, el plan continuaba con la formalización de los enunciados matemáticos. Y finalmente, daba un conjunto de reglas de transformación que se consideraban seguras, con las cuales se podían transformar unas fórmulas en otras. Es decir, nos dio reglas de cómo se puede operar con estos símbolos. Las reglas eran puramente combinatorias. La lógica de fondo es la lógica clásica de primer orden y será un elemento fijo en la teoría de Hilbert.[30] Las fórmulas que se tomarían como base serían los axiomas, los cuales debían poder ser distinguidos del resto de las fórmulas (es decir, se debía tener un método efectivo para decidir cuáles fórmulas eran axiomas). De esta forma Hilbert dio una teoría satisfactoria sobre las pruebas matemáticas confiriendo certeza a los procedimientos

[30] Hilbert eligió la lógica clásica por varias razones, por ejemplo, porque quería que su programa conservara todo el conocimiento matemático desarrollado hasta ese momento y para ello requería a la lógica clásica. Además, él creía que la lógica clásica describe de manera adecuada las relaciones lógicas entre proposiciones que hablan de objetos finitos. Aunque en principio podría ser otra la lógica elegida (ésta será una forma posible de realizar expansiones de nuestras pruebas, cambiando la lógica).

usados por la matemática, en especial a los métodos no constructivos. Hilbert creía haber logrado capturar la totalidad de la matemática.

Así, la intuición ya no tiene el mismo papel que tenía en las pruebas semiformales que precedieron a su sistema. La intuición ya no es el garante de la verdad, ni la guía de la demostración. "En otras palabras: si bien en una teoría formal la intuición ya no interviene como un agente que proporciona verdades y conceptos abstractos, no por ello se le ha eliminado. Desplazada a otro lugar, si se quiere más elemental, ahora interviene como un factor imprescindible en el manejo externo del formalismo, como un elemento que nos permite reconocer las componentes del sistema y asegurar que las reglas del juego no han sido quebrantadas." (Torres, 2001, p. 181)

Una vez que logró la formalización de la matemática, su objetivo fue mostrar que el sistema era consistente y completo. Trató de dar pruebas de consistencia usando una propiedad de las fórmulas matemáticas, la de ser homogéneas.[31] Su plan era mostrar que los axiomas tenían la propiedad, las reglas de inferencia la preservaban y las negaciones de fórmulas homogéneas no eran homogéneas. El plan recurría a métodos finitistas para probar que la matemática no estrictamente finitista era consistente, pero nunca pudo dar las pruebas de consistencia que deseaba.

Como ya se dijo, Hilbert esperaba mostrar también que los sistemas matemáticos eran completos; es decir, que a partir de los axiomas y de la teoría de la prueba se podía resolver cualquier problema matemático. Tenía claro que la prueba de estas dos propiedades se harían desde la metamatemática, esperaba que dado que las fórmulas eran finitas y los métodos de demostración también eran finitos pudiese dar una teoría que describiese perfectamente su comportamiento. Esto nunca lo logró.[32,33]

> Según Hilbert, el problema de los fundamentos de la matemática clásica quedaría resuelto al probar que está libre de contradicciones, es decir, demostrando su consistencia. Ésta era la principal razón por la cual se concentró en el estudio de la demostración matemática. Con este propósito fue que propuso convertir cada demostración en un arreglo estructurado de fórmulas que pudiera exhibirse en concreto y examinarse en todas sus partes, para lo cual

[31] Este método de prueba de consistencia fue esbozado por primera vez en su artículo de 1904 antes citado.

[32] Su plan tenía un último elemento, el cual consistía en que una vez que mostrara que su sistema axiomático era completo, diseñaría un algoritmo de decisión que le permitiría resolver cualquier problema matemático.

[33] Hubo algunos resultados que parecían mostrar que el programa podía completarse. Por ejemplo, Gödel en su tesis de doctorado probó que toda prueba semántica de validez, tenía un correlato sintáctico (Teorema de compleción de la lógica clásica de primer orden). Lo cual mostraba que, por lo menos en el caso de la lógica de primer orden, el hecho de que Hilbert sólo usase métodos sintácticos no mermaba el poder deductivo de sus sistemas.

> era necesaria la formalización. Dentro de este nuevo enfoque, el problema de la resolubilidad, planteado inicialmente con cierta vaguedad y más cercano a la especulación filosófica que a la matemática, se transformó en un tema de investigación formal. Ahora el estudio de la estructura deductiva de las teorías matemáticas pasaba por los siguientes conceptos: cálculo lógico (la misma noción que la de sistema formal en la lógica matemática), inferencia formal, prueba formal, consistencia y completud. Hilbert denominó esta empresa teoría de la demostración. Su principal objetivo era probar, con métodos finitistas, la consistencia de la matemática clásica. (Torres, 2007, p. 37-38)

Este planteamiento permite tener un análisis más detallado del problema de la solubilidad. El análisis se hace más manejable, pues ya no se pregunta en abstracto si existe o no una respuesta para un problema matemático dado, sin ninguna restricción. Este logro se debe a por lo menos tres factores. En primer lugar, se restringe la pregunta por la solubilidad de un problema matemático a un sistema matemático formalizado particular. En segundo lugar, se ofrece un criterio para saber si un problema está bien planteado o no, respecto del sistema en que será evaluado. El criterio consiste en verificar si la proposición relacionada con el problema puede ser formalizada adecuadamente en el lenguaje de la teoría (si la proposición puede ser formalizada adecuadamente, entonces el problema está bien planteado y puede ser evaluado en el sistema). En tercer lugar, nos da un criterio para saber si el sistema puede solucionar el problema. Una vez que se tiene la formalización de la proposición matemática involucrada en el problema, basta determinar si la fórmula es un teorema o no lo es en el sistema dado. Si es teorema (o su negación es teorema), el problema está resuelto; si ni él ni su negación son teoremas, el problema también está resuelto.[34]

Aunado a esto, se tiene que la posible solución al problema de la solubilidad tiene un camino claro por seguir. Lo que importa es mostrar que para cada problema matemático existe un sistema matemático (que recupera algún sistema informal de la matemática clásica) tal que la fórmula del sistema asociada con la proposición involucrada en el problema es teorema en él o la negación de la fórmula es un teorema. Así, hay dos elementos importantes para dar una prueba del axioma de solubilidad. En primer lugar, tenemos que garantizar que para toda proposición matemática existe un sistema formal (que recupera algún sistema informal de la matemática clásica) tal que la proposición relacionada al problema pueda ser expresada en el lenguaje del sistema. Este punto, de acuerdo a Hilbert ya está resuelto, pues contamos

[34] En el siguiente apartado analizaré el caso en el que ni la fórmula, ni su negación sean teoremas del sistema. Pero, puedo adelantar que incluso en ese caso, desde el punto de vista de Hilbert, el problema también tiene solución.

con los lenguajes de la lógica de primer orden. En segundo lugar, tenemos que garantiza que algunos de los sistemas formales matemáticos en los que se puede expresar la proposición lo tengan a él o a su negación como teorema. Así, una prueba del axioma de solubilidad se resume en probar la compleción de sistemas formales matemáticos suficientes como para recuperar toda la matemática clásica. Para hacer esta prueba se puede usar la maquinaria metamatemática que ofrece la teoría de la prueba. En este sentido, se ha logrado hacer un análisis de las pruebas desde la matemática misma. Se ha matematizado un problema que en principio era filosófico.

Así podemos resumir el programa de Hilbert en 4 puntos:

> 1) Formalizar la matemática clásica.
>
> 2) Demostrar, con base en la matemática finitista, que la formalización es consistente.
>
> 3) Demostrar, en caso de que así sea, que la formalización es sintácticamente completa.
>
> 4) Construir un algoritmo para determinar la validez de las fórmulas del cálculo de predicados. (Torres, 2001, p. 181)

1.3.4. ¿Qué significa que una proposición sea decidible desde el punto de vista del programa de Hilbert?

Una vez que se ha planteado el programa de Hilbert, sus motivaciones, sus elementos y qué función tienen cada uno de ellos, es importante clarificar qué significa resolver un problema matemático desde la propuesta de Hilbert. La razón de esta clarificación es que el conjunto de los problemas resueltos por una teoría matemática tiene una relación directa con el conjunto de proposiciones decidibles en él, pero está relación puede no ser intuitiva. Uno podría esperar que de hecho la extensión de estos conjuntos fuese la misma, pero Hilbert no está comprometido con una tesis tan fuerte.

La convicción de Hilbert sobre la solubilidad de todo problema matemático bien planteado no quiere decir que todo problema tenga una respuesta afirmativa o negativa sin más. Recordemos que ahora la proposición o las proposiciones involucradas en un problema matemático son expresadas en un lenguaje formal. Por simplicidad supondré que sólo existe una proposición relacionada con cada problema matemático. Cada proposición formalizada es analizada dentro del marco de una teoría matemática formal, que cuenta con un conjunto de axiomas y cuyos teoremas se extraen de estos axiomas usando lógica clásica de primer orden. Así, la evaluación de un problema matemático está acotada a un sistema formal en el cual será analizada la fórmula que expresa la proposición relacionada con el problema. La evaluación de una fórmula en un sistema formal dado puede arrojar tres resultados posibles: 1) la fórmula es teorema, 2) la negación de la fórmula es teorema y 3) ni la fórmula ni la negación de la fórmula son teoremas en el sistema. Si sucede 1) o 2), el problema está evidentemente resuelto. Pero, ¿qué pasa si sucede 3)? Existen por lo menos dos formas de evaluar la situación. Por un lado, podemos creer que el problema no puede ser resuelto; es decir, que no es resoluble por métodos puramente matemáticos. Hilbert no opta por esta interpretación. Por otro lado, podemos creer más bien que los axiomas adoptados no son suficientes para resolver el problema, pero tal vez otro conjunto de axiomas más fuerte puede resolverlo. En palabras de Carlos Torres:

> Obviamente, puede suceder que al tratar de resolver un problema, todos los intentos estén condenados al fracaso, no por falta de destreza o inventiva, sino porque las hipótesis adoptadas son insuficientes para decidir la cuestión. En este caso el problema aparecerá, visto desde la teoría a la que pertenece, como un reto insuperable. Hilbert propone en tal caso recurrir a un procedimiento en el que confía plenamente: probar que las hipótesis admitidas son insuficientes para zanjar la cuestión. En este último caso, la ?disolución? del problema se lograría en un segundo nivel, en el que el razonamiento no es acerca de los objetos de la teoría, sino acerca de la teoría misma. Así, de acuerdo con Hilbert, dado un problema matemático siempre es posible (a) resolverlo con los recursos disponibles en la teoría, o (b) demostrar que los axiomas y métodos de prueba admitidos en la teoría no son suficientes para decidir la cuestión, es decir, que todos los intentos por hallar una respuesta al interior del sistema están condenados al fracaso. (Torres, 2007, p. 34)

Esto quiere decir que dada la formalización de una proposición matemática, α, en un sistema formal dado, SF, el problema puede ser solucionado de dos formas:

A Resolviendo el problema. Esto quiere decir que o tenemos un prueba de que α es teorema en SF o tenemos un prueba de que $\neg\alpha$ es teorema en SF.

B Disolviendo el problema. Esto quiere decir que tenemos una prueba de que ni α ni $\neg\alpha$ son teoremas del sistema.

El tipo B de soluciones, las disoluciones de problemas, son en realidad resultados de estudios hecho desde la metateoría. Es decir, no son resultados que se puedan ofrecer dentro de la teoría; son resultados que se obtienen de un análisis del sistema como objeto de estudio. Las pruebas de este tipo son resultados metamatemáticos y muestran los límites de un sistema dado. Disolver el problema no quiere decir que debamos abandonar su estudio; lo único que indica es que debemos cambiar de sistema. Es momento de dar una definición de proposición indecidible en un sistema formal y contrastarlo con la solubilidad en ese mismo sistema.

Def. 1 *Sea un sistema formal A y sea α una fórmula del lenguaje de A. Decimos que α es una proposición indecidible respecto al sistema formal A sii $\nvdash_A \alpha$ y $\nvdash_A \neg\alpha$.*

Usando esta definición, podemos aclarar la relación entre las proposiciones que son decididas en el sistema y aquellas que son resueltas en el sistema. El conjunto de las primeras es un subconjunto del conjunto de las segundas. Si una proposición es decidida en el sistema (si ella o su negación son teoremas), entonces está resuelta. Pero, si una proposición no es decidida por el sistema y tenemos una prueba de su indecidibilidad, entonces también está resuelta en el sistema (aunque el sistema no haya emitido un veredicto sobre ella). Si nosotros logramos determinar el conjunto de las proposiciones tales que las fórmulas que las simbolizan en el sistema son teoremas, entonces podemos decir que todas las proposiciones expresables en el lenguaje del sistema están resueltas.

Existen desde la antigüedad muchos ejemplos de proposiciones indecidibles en un sistema dado. Por ejemplo, se puede mostrar que en la geometría euclidiana no se puede trisecar un ángulo, tampoco se puede mostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los cuatro primeros. Esto no es sorprendente. Tampoco es sorprendente que muchos de estos problemas irresolubles desde una teoría no representasen un problema fundamental. Pues, en la mayoría de los casos, si el problema se quería resolver, se optaba por fortalecer el sistema desde el cual sería analizado el problema; es decir, se añadían axiomas.[35] La novedad del punto de vista de Hilbert consistió en considerar que un problema estaba resuelto si se mostraba que no era decidible por el sistema desde que se analizaba. En esos casos, y si se quiere resolver el problema, lo único que se debe hacer es buscar un sistema formal más fuerte que lo pueda resolver, un sistema que sea consistente. En caso de tener una proposición indecidible en un sistema dado, una forma trivial de resolver el problema es introducir como axioma del sistema la fórmula relacionada con la proposición. Por supuesto, esto no será satisfactorio para muchos de nosotros. Un problema evidente de este método es que tenemos dos opciones, introducir como axioma a la fórmula o introducir como axioma a la negación

[35]Otra opción para fortalecer el sistema sería cambiar la lógica del sistema por una que nos permitiese obtener más consecuencias a partir de los axiomas; esta clase de opción no fue utilizada, o por lo menos yo no he encontrado ejemplos de ello.

de la fórmula. Dado que la fórmula es indecidible en el sistema, la introducción de ella o de su negación daría como resultado un sistema consistente.[36] En palabras de Gödel:

> Supuesta la consistencia de la matemática clásica, uno puede incluso ofrecer ejemplos de enunciados (del mismo tipo que los de Goldbach o Fermat) que son verdaderos en cuanto a su contenido, pero no son deducibles en el sistema formal de la matemática clásica. Por tanto, si añadimos la negación de un tal enunciado a los axiomas de la matemática clásica, obtenemos un sistema consistente, en el que es deducible un enunciado falso en cuanto a su contenido. (Gödel, 1931a, p. 91)

Además, el método no es prometedor si consideramos que uno de los objetivos de Hilbert es construir sistemas matemáticos completos.

Acabamos de ver que la extensión de las fórmulas decidibles en un sistema y la extensión de las fórmulas resueltas en un sistema no es en principio la misma. Sabemos además que existen sistemas matemáticos en los que de hecho las extensiones de estos conceptos son diferentes. Pero, en principio, no tenemos ningún prueba de que no pueda existir un sistema completo, uno en el que toda fórmula sea decidida. Uno de los objetivos de Hilbert era construir un sistema con estas características y así probaría el AS. Los trabajos de Gödel en torno a la incompleción de la aritmética afectaron fuertemente al programa de Hilbert. Pero antes de continuar con un estudio de estos resultados, creo pertinente aclarar algunos puntos relacionados con la postura finitista de Hilbert.

1.3.5. Hilbert y el finitismo.

El objetivo de esta sección es entender *grosso modo* cuáles son los presupuestos filosóficos detrás de la postura de Hilbert; en particular, su finitismo y mostrar con esto que el programa de Hilbert no es totalmente ajeno a la filosofía. Así, podremos ver que su análisis metamatemático descansa en una postura filosófica; de tal suerte que su programa aún puede ser rechazado por aquellos que no estén de acuerdo con el finitismo. O visto de otro modo, sus pruebas de proposiciones matemáticas dependen de la aceptación de una postura filosófica.[37]

[36] En este caso tenemos que el sistema original es incompleto (para la negación); es decir, ni la fórmula ni su negación son teoremas. Esto implica que el sistema es consistente, pues en lógica clásica de primer orden un sistema inconsistente tiene como teoremas a todas las fórmulas (por el principio de explosión). Ahora, como ni la fórmula ni su negación son teoremas, introducir a cualquiera de ellas no volverá al sistema inconsistente.

[37] Esto me servirá más adelante para justificar la inclusión de criterios filosóficos en la aceptación de un sistema matemático particular y sus posibles extensiones. La idea central

Hasta ahora, he hablado del interés de Hilbert porque los métodos utilizados en la construcción de los sistemas axiomáticos formales fuesen finitistas. Además, había aclarado que esto tenía por lo menos dos motivaciones. La primera tiene que ver con la creencia de Hilbert de que las pruebas en matemáticas se dan dentro de sistemas de representación, una idea que retomó de Paul du Bois-Reymond, y estos sistemas eran finitos. La segunda tiene que ver con salvaguardar a las matemáticas de toda posible contradicción. Hilbert tenía la firme convicción de que si restringía los métodos matemáticos a métodos finitistas, entonces sus sistemas estaría bien fundamentados, pues éstos no entrañarían ninguna contradicción. Hilbert tenía una fuerte confianza en que el finitismo estaba exento de contradicción. En palabras de Shapiro:

> La etapa final del programa de Hilbert es proporcionar pruebas de consistencia finitistas de las teorías matemáticas totalmente formalizadas. Es decir, con el fin de utilizar una teoría de las matemáticas ideales tenemos que formalizarla y luego mostrar, dentro de la aritmética finitista, que la teoría es consistente. Una vez que esto se logra para una teoría T, entonces hemos alcanzado la meta epistémica. Tenemos la confianza máxima de que el uso de T no nos llevará a la contradicción. Esto es todo lo que podemos pedir a una teoría matemática ideal. (Shapiro, 2000, p. 164-165)[38]

Sin embargo, no es claro que esta postura, el finitismo, no albergué una postura filosóficamente fuerte. En caso de ser así, el objetivo de Hilbert de lograr un estudio de las matemáticas desde las matemáticas mismas y que excluyese a otras disciplinas como la filosofía y la psicología no se llevaría a cabo de forma completa. Además, las demostraciones de las proposiciones matemáticas dadas en los sistemas formales axiomáticos a là Hilbert estarían supeditadas a la aceptación del finitismo como una postura filosóficamente aceptable. Todo esto depende de la caracterización concreta de finitismo. Es posible que en realidad la postura finitista de Hilbert fuese completamente inocua y con un contenido filosófico ínfimo. El problema es que la caracterización del finitismo ofrecida por Hilbert no es clara y ha causado una gran cantidad de debates en torno a ella. Por ejemplo, véase Tait (1981), Torres (2001), Zach (2001), Schirn y Niebergall (2003), Stendlund (2012), entre muchos otros.

---

es que la postura filosófica de fondo en la aceptación de una teoría también tendrá influencia en las posibles extensiones de la misma.

[38] "The final stage of Hilbert programme is to provide finitary consistency proofs of the fully formalized mathematical theories. That is, in order to use a theory of ideal mathematics we have to formalize it and then show, within finitary arithmetic, that the theory is consistent. Once this is accomplished for a theory T, then we have achieved the epistemic goal. We have maximal confidence that using T will not bring us to contradiction. This is all that we can ask for an ideal mathematical theory." La traducción es mía.

Hilbert en su artículo ?Sobre el infinito? ofrece una de las mejores caracterizaciones de su postura finitista, aunque no es muy clara. El primer hecho que Hilbert nos hace notar es que en el mundo físico no parece existir ningún correlato del infinito, pues nuestras mejores teorías científicas rechazan la existencia de los objetos infinitamente grandes o infinitamente pequeños. Así que, la intuición no puede proporcionarnos un acceso directo al infinito. Sin embargo, las matemáticas, en particular el análisis, toman como sus objetos de estudio colecciones infinitas de objetos; por ejemplo, los números reales. Esto representa un reto para la fundamentación de las matemáticas. Hilbert, siguiendo a Kant, defiende que se requiere comenzar el estudio de las matemáticas a partir de objetos presentes inmediatamente a la intuición y rechaza que se pueda ofrecer una reconstrucción en términos puramente lógicos. Propone entonces un estudio de las matemáticas que se centré en las sucesiones de símbolos mediante las cuales son expresadas.

> La existencia de algo dado en la representación, de ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como experiencia inmediata, previa a todo pensamiento, es una condición necesaria para la aplicación de las inferencias lógicas y el funcionamiento de las operaciones de este tipo.
>
> Es necesario entonces, si es que hemos de tener a nuestra disposición deducciones e inferencias lógicas confiables, que los objetos sean susceptibles de una visión global completa de todas sus partes y que su presencia, sus diferencias mutuas, su ordenación, su sucesión o su concatenación acompañe a los objetos, al mismo tiempo, como algo dado de manera inmediata a la intuición, como algo irreductible a cualquier otra cosa, como algo que ya no requiere ninguna reducción.
>
> Esta es la condición filosófica fundamental que, en mi opinión, resulta necesaria no sólo para las matemáticas, sino también para todo pensamiento, toda comprensión y toda comunicación científicos.
>
> En el caso particular de la matemática, el objeto preciso de nuestro examen lo constituyen los signos concretos mismos, cuya forma es, en consonancia con el punto de vista que hemos adoptado, inmediatamente clara y reconocible. (Hilbert, 1925, p. 95)[39]

[39]En un texto de 1927 titulado “The Foundations of Mathematics” (Die Grundlagen der Mathematik), Hilbert defiende la misma postura casi al pie de la letra, lo que muestra una constancia en su punto de vista a partir de este punto. “No more that any other science can mathematics be founded by logic alone; rather, as a condition for the use of logical inference and the performance of logical operations, something must already be given to us in our faculty of representation [in der Vorstellung], certain extralogical concrete objects that are intuitively [anschaulich] present as immediate experience prior to all thought. If logical inference is to be reliable, it is possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that neither can be reduced to anything else nor requires reduction. This

Después, Hilbert ofrece una reconstrucción de los sistemas matemáticos formales y explica como la construcción de estos sistemas respeta los principios finitistas. Es de notar que recurre para ello a elementos de la teoría de la recursión, siempre con cuidado de no incluir elementos ideales en dichos procesos, es decir, siempre trata de que todo proceso descanse en su postura finitista.

Así, Hilbert propone que el objeto de estudio de las matemáticas sean los signos usados en la teoría que son accesible de manera inmediata a la intuición. Pone como ejemplo de esta clase de objetos a los numerales de la forma ||||, que en este caso es el numeral que se puede abreviar como 4.

En este punto, se puede hacer notar que parece existir una tensión entre lo dicho por Hilbert y el tipo de estudio que él propone. En primer lugar, podemos hacer notar que si bien parece ser que el |||| se puede intuir directa y claramente, no es claro que pueda suceder lo mismo con ||||||||||||||||||||, en especial si se le compara con |||||||||||||||||||||| que son los numerales para 20 y 22. Este problema tiene que ver con nuestra capacidad para intuir con claridad las colecciones de — de longitud finita pero con una gran cantidad de elementos. En este caso, parece que el estudio adecuado de este fenómeno no sería matemático sino psicológico o fisiológico (tal como proponía Paul du Bois-Reymond). En segundo lugar, incluso si fuese posible percibir con claridad todas las secuencias de símbolos pertinentes, parece que más que las marcas concretas puestas sobre el papel, lo que interesa es la forma de éstas; de otra forma tendríamos dos objetos diferentes al poner |||| y ||||. Pero, si nuestro objeto de estudio fuesen las formas de las sucesiones de líneas, ¿qué clase de objetos son estas formas? Una respuesta es que serían objetos abstractos, pero esto no parece ser consistente con la postura de Hilbert. Finalmente, los métodos usados por Hilbert no se acotan a esta clase de objetos, sino que incluyen también procesos de construcción recursivos sobre esta clase de objetos. En este caso, es difícil imaginar a qué tipo de objeto que pueda ser intuido de manera inmediata y clara corresponderían estos procesos.

Al parecer, Hilbert concebía al finitismo como una mezcla de todos los puntos anteriores. La intuición directa de las líneas sobre el papel funcionaba como un primer elemento, pero al mismo tiempo consideraba las formas de estas líneas y los procesos con los cuales podía operarse sobre ellas (proceso finitos-recursivos). El principal problema con esto es que todos estos punto

is the basically philosophical position that I regard as requisite for mathematics and, in general, for all scientific thinking, understanding and communication. And in mathematics, in particular, what we consider is the concrete signs themselves, whose shape, according to the conception we have adopted, is immediately clear and recognizable". (Hilbert, 1927, p. 464-465) no parecen ser compatibles de inmediato.[40]

Como adelanté un poco antes, se han dado una gran cantidad de interpretaciones sobre el finitismo de Hilbert. Algunas han puesto un mayor énfasis en la percepción directa de los signos concretos y sus combinaciones. Un ejemplo es Carlos Torres quien nos dice: "Hilbert jamás ofreció una definición precisa de lo que es la matemática finitista. No obstante, por lo que se dice en sus escritos debemos entender que se trata de una teoría matemática de naturaleza puramente combinatoria, que trata con configuraciones de objetos finitos y discretos que se pueden representar de manera concreta, e inspeccionar en todas sus partes" (Torres, 2001, p. 144-145). Otros como W. W. Tait ponen un mayor énfasis en los procesos recursivos usados en la construcción de los sistemas formales matemáticos. "[...] Expondré y, al menos en líneas generales, defenderé una tesis que propuse hace algunos años, a saber, que el razonamiento finitista es esencialmente el razonamiento recursivo primitivo en el sentido de Skolem." (Tait, 1988, p. 524).[41,42]

Dado que el objetivo de esta sección no es hacer una reconstrucción exacta de la propuesta finitista de Hilbert, sino mostrar que no es filosóficamente inocua, creo que es suficiente con lo dicho hasta ahora. Es claro que la postura de Hilbert descansa en una postura filosófica que puede ser puesta en cuestión. En palabras de Carlos Torres: "[L]a justificación última de su proyecto la debió encontrar en el plano filosófico, donde hubo de aventurarse hasta precisar las intuiciones básicas sobre las que, considera, se apoya el conocimiento matemático." (Torres, 2001, p. 150). Esta vulnerabilidad del proyecto de Hilbert ha sido reconocido por muchos filósofos. Por ejemplo, Tait nos dice, después de defender que el razonamiento finitista debe entenderse como el razonamiento dado en términos de funciones recursivas primitivas:

> Sin embargo, esto no descarta la posibilidad de que la idea de número sea incoherente, que el demonio de Descartes esté trabajando. ¿Puede ser que pudiésemos construir correctamente una $f : 0 = 1$, por ejemplo, en aritmética recursiva primitiva? Sobre la base de nuestra comprensión de número, nosotros deberíamos decir que no. Pero esta comprensión es nuestra última instancia de apelación en el asunto. [...] Así, hay un sentido en el que la seguridad nos debe eludir siempre. (Tait, 1988, p. 546)[43]

[40] Para ver un estudio detallado sobre este punto, véase (Stenlund, 2012).

[41] "I shall state and, at least in outline, defend a thesis that I proposed some years ago, namely that finitist reasoning is essentially primitive recursive reasoning in the sense of Skolem." La traducción es mía.

[42] Véase (Schirn y Neibergall, 2003), en el que se sostiene que la postura de Tait puede ser cuestionada mediante una lectura cuidadosa de los textos de Hilbert.

[43] "Yet this does not rule out the possibility that the idea of Number is incoherent, that the Descartes's Demon is at work. Can it be that we could correctly construct an $f : 0 = 1$, say, in primitive recursive arithmetic? On the basis of our understanding of Number, we

Queda claro que la postura de Hilbert sí tiene una carga filosófica y que, en este sentido, su objetivo de realizar un análisis puramente matemático de las matemáticas no parece haberse logrado de manera completa. Creo pertinente resaltar que la noción de prueba de una proposición matemática ofrecida por Hilbert, no sólo depende del sistema matemático en el que se plantea el problema, sino en la postura filosófica de fondo que adoptemos y qué también justificado está el sistema matemático de acuerdo a tal postura. En el caso de Hilbert, hay que aceptar el finitismo (sea lo que sea que eso signifique).

Después de este pequeño paréntesis, que nos servirá más adelante, continuemos con la pregunta sobre si el programa de Hilbert es o no realizable (suponiendo la aceptación del finitismo).

1.4. Gödel y los teoremas de incompleción de la Aritmética.

Kurt Gödel fue un de los matemáticos más reconocido del siglo XX, en especial por sus trabajos en lógica matemática y teoría de conjuntos. Cursó sus estudios en la Universidad de Viena, justo cuando el programa de Hilbert estaba en uno de sus puntos de mayor desarrollo. Bajo la dirección de Hans Hahn, Gödel escribió en 1929 su tesis de doctorado, titulada "Sobre la compleción del cálculo de la lógica" ("Über die Vollständigkeit des Logikkalkülus"). En ella, mostró que el sistema de lógica de primer orden presentado en Principia Mathematica[44] era completo en el sentido de que toda fórmula universalmente válida era demostrable en el sistema. En este sentido, Gödel ofreció uno de los avances más significativos para el programa de Hilbert. Sin embargo, sólo un par de años después, mostró que si el sistema formal de la aritmética de Peano (PA) es consistente,[45] entonces es esencialmente incompleto y, algo todavía más fuerte, no puede probar su propia consistencia. Para muchos matemáticos, esto fue la prueba de que el programa de Hilbert era irrealizable.

would say not. But this understanding is our final court of appeal in the matter. [...] Thus there is this sense in which security must always elude us." La traducción es mía.

[44]El sistema no era propiamente un sistema de lógica de primer orden, pero el resultado se acotaba a fórmulas expresadas en primer orden.

[45]El supuesto original de Gödel era un poco más fuerte. El teorema original pedía que el sistema fuese omega-consistente, es decir, que si en el sistema son teoremas todas las fórmulas de la forma $\varphi(n)$, para todo n número natural, no sea teorema del sistema $\exists x \neg\varphi(x)$. La omega-consistencia implica la consistencia. El resultado más fuerte, que sólo pide consistencia, se debe a Rosser un alumno de Gödel.

La idea central de los teoremas de incompleción de la aritmética es mostrar que se pueden construir dos oraciones G_{PA} y $CONS(PA)$, tales que ninguna de ellas ni sus negaciones son demostrables en el sistema, suponiendo que el sistema es consistente. La primera de ellas, expresa, bajo cierta interpretación, que ella misma no es demostrable; la segunda, que el sistema PA es consistente. A continuación, daré un esbozo de la prueba de estas dos proposiciones, con la intención de mostrar que la estructura de la prueba es recursiva y que si bien no se puede decidir sobre ellas desde el sistema, sí se puede decidir sobre ellas reflexionando sobre su prueba de indecidibilidad en el sistema; es decir, se puede decidir sobre ellas realizando un análisis metateórico.

La prueba se realiza en dos partes. La primera consiste en mostrar que el predicado "x es demostrable en el sistema PA" es representable. La segunda es generar un método de autorreferencia para construir una fórmula que diga de ella misma que no es demostrable en el sistema.

1.4.1. Esbozo de la prueba del teorema de incompleción de PA de Gödel.

Como ya adelanté, la prueba de incompleción de la aritmética se puede dividir en dos partes, la primera consiste en mostrar que cierto predicado es representable en el sistema; la segunda, construir un mecanismo que nos permita lograr la autorreferencia. Por el momento, nos concentraremos en la primera de ellas.

La propiedad de la cual queremos mostrar que es representables es la de ser una fórmula demostrable en el sistema PA. Comencemos con clarificar la noción de representación de un conjunto. Trabajaremos por el momento con subconjuntos del conjunto de los números naturales.

Def. 2 *Sea A un subconjunto de los números naturales. Decimos que el conjunto A es definible sii existe una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de PA con x como única variable libre tal que es satisfecha por todos y sólo los elementos de A. Es decir, $a \in A$ sii $\varphi(a)$.*

Existen múltiples ejemplos de conjuntos definibles en el lenguaje de PA. Un ejemplo muy sencillo de verificar es el conjunto de los números pares. Una de las fórmulas que lo define es $\exists y(2y = x)$, esta fórmula tiene a x como su única variable libre, además es satisfecha por todos y sólo los números pares. Sin embargo, no es posible que todos los subconjuntos de los números naturales sean definibles; la prueba de esto es sencilla. Por el teorema de Cantor, el conjunto potencia de los números naturales es mayor en cardinalidad que el conjunto de los números naturales. Dado que la cantidad de fórmulas que tenemos es numerable (es decir, del tamaño de los naturales), hay más subconjuntos de números naturales que fórmulas disponibles para definirlos.

El siguiente paso es definir la noción de representabilidad de un conjunto A. Informalmente, podemos decir que un conjunto A es representable por una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de PA si $\varphi(x)$ define el conjunto A y además el sistema puede probar que efectivamente la fórmula define al conjunto A. Es decir, que PA tiene como teoremas a todas las fórmulas $\varphi(t)$, donde t es término que refiere a un número que pertenece al conjunto A, tenemos términos suficientes para referirnos a todos los números que pertenecen a A y ninguna fórmula de la forma $\varphi(t)$ es teorema, si t es un término que refiere a un número que no pertenezca al conjunto A.

Def. 3 *Un conjunto A de números naturales es representable sii una existe una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de PA que define al conjunto y además $\forall x(x \in A$ sii $\varphi(t_x)$ es teorema de PA), donde t_x es un término que refiere a x.*

De nuevo existen muchos ejemplos de conjuntos representables. Por ejemplo, ser el conjunto de los número pares es representable. Como consecuencia de que no todos los conjuntos de naturales sean definibles, tenemos que no todos los conjuntos de números naturales son representables.

El siguiente paso consiste en relacionar a las fórmulas del lenguaje de PA con conjuntos de números naturales. Esto se hace con dos fines; el primero de ellos es mostrar que algunas propiedades del sistema pueden expresarse dentro del sistema y el segundo es generar el mecanismo de autorreferencia.[46] La idea detrás de este procedimiento, que llamaremos "gödelización del lenguaje", es relacionar tres niveles de análisis; los objetos que conforman el conjunto de los números naturales y sus propiedades, el lenguaje que nos permite hablar de ellos y el análisis de este lenguaje (el metalenguaje). El primero de estos niveles está formado por el conjunto de los números naturales, sus subconjuntos, las propiedades que tienen estos objetos y sus relaciones. El segundo nivel es el sistema formal PA que nos permite hablar de los objetos del primer nivel y hacer demostraciones sobre sus propiedades y relaciones.[47] El tercer nivel es el metalenguaje; en este nivel se hace un

[46]Como se verá un poco más adelante, la autorreferencia se puede generar de otras formas.

[47]El sistema PA es un sistema formal que incluye un lenguaje formal y una teoría de la prueba. El sistema formal está constituido por un vocabulario (un conjunto de símbolos) y un conjunto de reglas recursivas que nos indica qué sucesiones de símbolos del vocabulario son fórmulas del sistema. La teoría de la prueba incluye un método efectivo (de nuevo recursivo) que permite determinar qué fórmulas del sistema son axiomas y un conjunto de

análisis del sistema PA y sus propiedades. Por ejemplo, en este nivel se pueden presentar pruebas sobre la corrección, consistencia o compleción de PA. La gödelización del lenguaje permite relacionar conjuntos de fórmulas del lenguaje con conjuntos de números naturales. Usando esta técnica podemos hablar de propiedades del sistema PA usando fórmulas de PA. Veamos cómo se logra esto.

El primer paso consiste en establecer una función f inyectiva del conjunto de las expresiones[48] del lenguaje de PA al conjunto de los números naturales, $f : EXP_{PA} \rightarrow \mathbb{N}$. Esto se puede hacer de muchas formas, la forma especifica en que se defina está función no es relevante para el esbozo de la prueba.[49] Una vez que tenemos f podemos hablar de las expresiones de PA como si fuesen números; es decir, podemos referirnos a una expresión α usando $f(\alpha)$ que es un número natural, llamaremos a $f(\alpha)$ el número de Gödel de la expresión α. Podemos entonces comenzar a hablar de conjuntos de expresiones de PA como conjuntos de números naturales. Una vez hecho esto podemos preguntarnos si algunos conjuntos de números naturales relacionados con conjuntos particulares de expresiones (usando la función f) son o no representables.

Gödel, usando teoría de la recursión, mostró que muchos conjuntos de números naturales relacionados con expresiones de PA eran representables. Esto fue posible pues muchos conjuntos de expresiones de PA pueden ser construidos o definidos usando métodos recursivos; es decir, definiendo un conjunto base y dando reglas recursivas para construir el resto de los elementos del conjunto de expresiones a definir. En particular, se puede mostrar que los siguiente conjuntos de expresiones son representables en el sistema: el conjunto de las fórmulas, el conjunto de los axiomas, el conjunto de las sucesiones de fórmulas, el conjunto de las sucesiones de fórmulas tales que toda fórmula es un axioma o resulta de la aplicación de reglas de inferencia a fórmulas que aparecen antes en la sucesión (el conjunto de las pruebas) y finalmente el conjunto de las fórmulas que son teoremas de PA.[50] El hecho de que este último conjunto sea representable es fundamental para las pruebas de los teoremas de incompleción de la aritmética.

---

reglas de inferencia que permiten obtener fórmulas del sistema a partir de otras fórmulas del sistema. La estructura del lenguaje y de las pruebas es recursiva; en el sentido de que ambos conjuntos, el de las fórmulas y el de los teoremas, son determinados a partir de un conjunto base y de reglas recursivas. Esto será muy relevante más adelante.

[48]El conjunto de las expresiones del lenguaje de PA, es el conjunto de la sucesiones finitas de los símbolos del lenguaje de PA.

[49]Ejemplos de cómo definir está función pueden verse en (Gödel, 1931) p. 156 y ss., (Smullyan, 1992) p. 20 y ss.

[50]Los detalles de las pruebas de la representabilidad de estos conjuntos pueden variar dependiendo de varios factores, por ejemplo, la función f que se eligió. Sin embargo, todas las pruebas usan teoría de la recursión para estas demostraciones.

Antes de continuar, me gustaría hacer una aclaración referente al mecanismo empleado en la prueba de representabilidad de estos conjuntos de números naturales. La aclaración que quiero hacer tiene que ver con los mecanismos recursivos detrás de las pruebas de representabilidad de los conjuntos. La idea central es que estas pruebas son posibles porque el conjunto de las fórmulas y el conjunto de los teoremas se definen mediante mecanismo recursivos; es decir, se parte de un conjunto base de elementos (los más simples del conjunto) y después se usan reglas recursivas para construir el resto de los elementos del conjunto. Son reglas tales que el resultado de aplicarlas a un elemento del conjunto genera otro elemento del conjunto y esto permite que, en principio, se pueda aplicar la regla a este nuevo elemento. Así, basta mostrar que el conjunto base es representable y que las reglas recursivas son tales que el conjunto generado por ellas sigue siendo representable. Esto permite que el resultado se pueda extender para cualquier sistema tal que el conjunto de sus fórmulas y el conjunto de sus teoremas sea generado por recursión (y tales que puedan expresar las nociones básicas de la aritmética que se emplean en la prueba).

Regresando a la prueba de los teoremas de incompleción, el hecho de que el conjunto de las fórmulas de PA que son teoremas sea representable, implica que existe una fórmula de PA, $Bew(x)$, con x como única variable libre tal que es satisfecha por todos y sólo aquellos números que son números de Gödel de fórmulas que son teoremas. Es decir:

Teorema 1 *Sea n un número natural. n satisface $Bew(x)$ sii $f(\alpha) = n$ y $\alpha \in TEO_PA$, es decir, n satisface el la fórmula $Bew(x)$ sii n es el número de Gödel de un teorema de PA.*

Con esto concluimos la primera parte de la prueba. Ahora tenemos que mostrar cuál es el mecanismo que permite lograr la autorreferencia. Gödel utilizó un mecanismo que tenía que ver con la famosa paradoja de Richard. La idea central de la paradoja de Richard es enlistar las expresiones de un lenguaje natural que expresen una propiedad aplicable a números naturales, para después definir la propiedad de ser richardiano como: x es richardiano sii x enlista una propiedad que no se aplica a x. la expresión “x es richardiano” entonces debía estar en la lista, pero eso genera una paradoja. Esta paradoja fue criticada por diversas razones; probablemente, la más fuerte es que ser una expresión del lenguaje natural que expresa un propiedad de números naturales no es algo que esté bien definido.

Sin embargo, Gödel sí tenía una forma clara de definir el conjunto de expresiones que hablasen sobre propiedades matemáticas; él disponía del lenguaje formal de PA. En realidad hay una discusión sobre este punto, la razón es que la maquinaria formal de que disponemos nos permite hablar de expresiones del lenguaje que definen conjuntos de números naturales y no es claro que las propiedades de número naturales sean reductibles a conjuntos, pero esta discusión no es relevante en este punto. Nuestra maquinaria formal nos permite generar una lista de las fórmulas del lenguaje de PA que tiene una única variable libre. A cada una de estas fórmulas la podemos relacionar con el conjunto de los números naturales que la satisfacen. Así, podemos generar una lista cómo la siguiente lista de todas las fórmulas con una variable libre:

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots.$

Esta lista incluye todas la fórmulas con una variable libre, incluso $\neg Bew(x)$, una fórmula que es satisfecha por todos y sólo los números de Gödel que no son teoremas del sistema. Ahora bien, consideremos el caso diagonal, es decir, cuando la variable x en $\neg Bew(x)$ es substituida por el número de Gödel de una fórmula que tenga la forma $\varphi_n(n)$, es decir, que sea una fórmula en la lista a la cual hemos saturado con el número natural que la numera. Ser el número de Gödel de este tipo de fórmulas es representable; esto quiere decir que en la lista existe una fórmula tal que $\varphi_k(n) \equiv \neg Bew(\#\varphi_n(n))$, es decir, existe una fórmula que es satisfecha por todos y sólo los números de Gödel de las fórmulas que tienen la forma $\varphi_n(n)$ y que no son demostrables. Un caso particular es cuando $n = k$, tenemos entonces:

$\varphi_k(k) \equiv \neg Bew(\#\varphi_k(k))$ que es nuestra fórmula G_{PA}.

Intuitivamente, $\varphi_k(k)$ equivale a la afirmación de que la fórmula con número de tal y tal no es demostrable, pero esa fórmula resulta ser ella misma. Suponiendo que el sistema es consistente, se puede mostrar que ni $\varphi_k(k)$, ni $\neg\varphi_k(k)$ puede ser teoremas. Pues, si $\varphi_k(k)$ es teorema, tenemos que $\neg Bew(\#\varphi_k(k))$ es teorema, entonces $\varphi_k(k)$ no es teorema. Pero, si $\neg\varphi_k(k)$ es teorema, entonces es teorema que $Bew(f(\varphi_k(k)))$, lo que implica que $\varphi_k(k)$ es teorema, contradiciendo el supuesto de que el sistema es consistente. $\varphi_k(k)$ es nuestra oración G_{PA}.

Esto muestra que el sistema es incompleto. Ahora bien, la prueba de que el sistema no puede demostrar su propia consistencia es muy similar a la que se acaba de presentar. La idea central de la prueba es que, intuitivamente, si podemos demostrar que una fórmula no es demostrable, entonces el sistema es consistente. Pues, en lógica clásica la inconsistencia implica la trivialidad; es decir, que si el sistema es inconsistente, entonces toda fórmula sería teorema del sistema.

Un ejemplo de una fórmula que nos gustaría que no fuese teorema del sistema PA es "$0 = 1$". Ahora bien, la fórmula que expresa que esta fórmula no es teorema es $\neg Bew(f(0 = 1))$, que será nuestra fórmula $CONS(PA)$.

Pero, si esta fórmula es teorema se genera una contradicción.

1.4.2. ¿Qué demuestran realmente los teoremas de incompleción?

Existen muchos mitos sobre los teoremas de incompleción de la aritmética de Gödel; en especial, sobre sus implicaciones. Suele suponerse que apelando a estos resultados se puede mostrar de inmediato que hay proposiciones que nunca podrán ser decididas, absolutamente indecidibles. Pero no es claro que ésta sea una de sus consecuencias.

Los teoremas afirman que para cualquier sistema matemático consistente recursivamente axiomatizable que pueda expresar las nociones básicas de la aritmética existen proposiciones indecidibles y una de ellas es la que expresa la consistencia del sistema. Esto implica que ningún sistema con las características antes descritas puede ser completo ni puede demostrar su propia consistencia. Ahora bien, en principio esto no muestra que las proposiciones indecidibles en el sistema no puedan ser decididas en otros sistemas más fuertes. Un ejemplo trivial de sistema más fuerte que decida sobre la proposición indecidible es aquel que resulta de agregar al sistema original la proposición indecidible (o su negación) como axioma. El nuevo sistema podrá decidir sobre la proposición que originalmente era indecidible, aunque de nuevo en este sistema se puede generar un proposición indecidible, ajustando la prueba original para incluir al número de Gödel del nuevo axioma dentro del conjunto de los números de Gödel de fórmulas que son axiomas y probar que este nuevo conjunto es representable. Así, lo que muestran los teoremas es que ningún sistema será completo, ni tampoco podrá demostrar su propia consistencia. Pero no demuestra que existan proposiciones que sea indecidibles en todo sistema posible. Gödel era consciente de que las proposiciones G_{PA} y $CONS(PA)$ no eran absolutamente indecidibles, sino indecidibles para un sistema particular, pero podían ser decididas por sistemas más fuertes. Hablando de la G_{PA}, Gödel llegó a afirmar: "Esa oración, sin embargo, no es en lo más mínimo absolutamente indecidible; más bien, siempre se puede pasar a los sistemas "superiores" en los cuales la oración en cuestión es decidible." (Gödel, *1931?, p. 35)[51]

¿Qué problemas genera la existencia de estas proposiciones indecidibles para el programa de Hilbert? En principio, la existencia de proposiciones indecidibles en un sistema dado, no es un problema para el programa. Recor-

[51] "That sentence is, however, not at all absolute undecidable; rather, one can always pass to "higher" systems in which the sentence in question is decidable." La traducción es mía.

demos que desde la propuesta hilbertiana, una forma de resolver un problema matemático es mostrar que la proposición asociada al problema es indecidible en un sistema dado. Así, si tenemos la prueba de que cierta proposición es indecidible en un sistema, ya tenemos una solución. Sin embargo, el hecho de que una de las proposiciones que es indecidible en el sistema es aquella que expresa que el sistema es consistente, sí representa un problema serio para la propuesta. Dado que Hilbert buscaba mostrar que la inclusión de elementos ideales y reglas de la lógica no constructivas en los sistemas matemáticos no generaba inconsistencias, y que esa prueba debía darse apelando sólo a herramientas de la matemática misma, el proyecto de Hilbert tal cual está planteado no puede ser completado.[52] Dar solución a esto problemas requiere de más elementos que los aceptados por Hilbert.

En este sentido, Gödel tenía una visión diferente sobre qué significa resolver un problema matemático, su visión incluye elementos que van más allá de la propuesta de Hilbert.[53] Gödel entendía la convicción sobre la solubilidad de todo problema matemático de una forma más general que Hilbert, quien sostenía que la solución debería ser dada desde dentro de un sistema axiomático formalizado (quería tener una solución interna a las matemáticas).

> Para cada hombre sin prejuicios, puede significar esto: Dada una proposición matemática arbitraria A existe una prueba, ya sea de A o de no-A, donde por "prueba" se entiende algo que parte de axiomas evidentes y procede por inferencias evidentes. (Gödel, *193?, p. 164)[54]

El problema sobre la solubilidad de toda proposición matemática bien planteada, puesta en estos términos, se aleja de la propuesta original de Hilbert, pues incluye elementos epistemológicos como evidencia dada a favor de los axiomas y de las inferencias utilizadas en las pruebas. La propuesta de Gödel introduce en la discusión elementos que implican que en el análisis

[52]Se puede, sin embargo, extender el programa para lograr las pruebas de consistencia deseadas. Un ejemplo, lo proporcionan los trabajos de Gentzen, quien usando un sistema lógico más fuerte logró dar pruebas de consistencia para PA. El problema es que las extensiones propuestas no parecen ajustarse a los estándares de aceptabilidad originales de Hilbert, pues incluyen la posibilidad de hacer inferencias que apelan a la estructura bien ordenada de los número naturales, un elemento que no es finitista. Véase, (Gentzen, 1936).

[53]Gödel tuvo diferentes posturas sobre el axioma de solubilidad. En sus escritos correspondientes a la primera parte de la década de los 30 del siglo XX sostuvo que había problemas matemáticos que eran absolutamente irresolubles. Pero, después de este periodo, su pensamiento cambió y sostuvo que el axioma de solubilidad era cierto.

[54]"For every unprejudiced man it can mean this: Given an arbitrary mathematical proposition A there exists a proof, either for A or for not-A, where by "proof" is meant something which starts from evident axioms and proceeds by evident inference." La traducción es mía.

metamatemático de las pruebas, no sólo se deben incluir elementos que pueden ser tratados desde las matemáticas mismas, sino elementos que permitan justificar la elección de axiomas y reglas de inferencia. Muy probablemente, estos elementos serán de corte filosófico. Esto va en contra de la propuesta de Hilbert, quien quería que el cuestionamiento sobre la evidencia de estos axiomas recayera sobre las versiones formalizadas de los mismos, sin apelar a un contenido particular. El único elemento de justificación externo es su confianza en el finitismo y únicamente incluía los elementos necesarios para el análisis de las pruebas, que eran vistas como sucesiones finitas de fórmulas. Gödel expuso esto de manera clara al afirmar que sus resultados no implicaban la falsedad del axioma de solubilidad, sino que implicaban una de las dos siguientes opciones:

> (1) Esto puede significar que el problema en su formulación original tiene una respuesta negativa, o (2) esto puede significar que a través de la transición de la evidencia al formalismo algo se perdió. (Gödel, *193?, p. 164)[55]

Para finales de la década de los 30, Gödel se inclinaba claramente por la segunda opción, sosteniendo que los elementos aportados por el formalismo para el análisis de las matemáticas eran insuficientes. En un primer momento, creyó que si bien existían proposiciones indecidibles en un sistema, existían métodos para decidir sobre ellas analizando las pruebas de su indecidibilidad. Está creencia cambio con los años, pero Gödel mantuvo su apoyo al axioma de solubilidad hasta el final de sus días.

Esto quiere decir que Gödel incluía en la evaluación sobre la solubilidad de una proposición matemática algo más que lo propuesto por Hilbert. No reducía la solubilidad de un problema a un análisis puramente formal, aunque no lo excluía. Desde su punto de vista, mostrar que una proposición α (o su negación) se derivan en un sistema formal dado no es suficiente para decidir sobre α. Él creía que además de esto, la derivación debía ser tal que comenzase con axiomas evidentes y cada paso de la reglas fuese generado por inferencias evidentes. La necesidad de ofrecer axiomas e inferencias evidentes involucra un elemento que no es puramente formal, pues la evidencia de un axioma o de una inferencia depende de un análisis filosófico de estos elementos y de un conjunto de criterios que nos sirvan como parámetro de evaluación. Esto incluye en el análisis metamatemático de la matemática elementos filosóficos.[56]

[55] "(1) It may mean that the problem in its original formulation has a negative answer, or (2) it may mean that through the transition from evidence to formalism something was lost." La traducción es mía.

[56] Como vimos antes, Hilbert también incluía elementos filosóficos en su análisis, el finitismo. Gödel creía que había que incluir más elementos filosóficos que permitiesen entender

A continuación, presentaré el mecanismo propuesto por Gödel para decidir sobre las proposiciones indecidibles involucradas en sus teoremas, dejando en claro: 1) que el mecanismo requiere la aceptación de elementos que van más allá del método formalista, pues requiere de un compromiso con la existencia de un modelo pretendido de la teoría, y 2) que sólo es aplicable a proposiciones tales que su indecidibilidad en el sistema se prueba apelando a mecanismo recursivos para la construcción de las fórmulas indecidibles.

1.4.3. ¿Cómo decidir sobre estos indecidibles?

Se han propuesto mecanismos que de forma más o menos sistemática nos permiten decidir sobre las proposiciones indecidibles que se generan usando procesos recursivos, como las oraciones involucradas en las pruebas de incompleción de la aritmética. Uno de los mecanismos más usuales es simplemente reflexionar sobre las pruebas mismas. Este mecanismo lo propuso Gödel mismo.

Las pruebas de Gödel muestran que ni la oración G_{PA} ni su negación puede ser decididas dentro del sistema, en el sentido de que ninguna de ellas es derivable suponiendo la consistencia del sistema. Como vimos antes, esto se logra construyendo de manera recursiva las oraciones para que una vez interpretadas expresen ciertas propiedades metateóricas. Si reflexionamos sobre el resultado de la prueba, podemos observar que, desde el punto de vista de la metateoría (un punto de vista externo) la oración G_{PA} es verdadera, pues afirma que ella misma no es derivable y, de hecho, no es derivable. En palabras de Gödel:

> De la observación de que [G_{PA}] dice de sí misma que no es deducible se sigue inmediatamente que [G_{PA}] es verdadera, pues [G_{PA}] no es deducible (ya que no es decidible). La sentencia indecidible en el sistema PM ha sido, pues finalmente decidida mediante consideraciones metamatemáticas" (Gödel, 1931, p. 57)
>
> Pero quiero subrayar una vez más que esta indecidibilidad se sostiene sólo con respecto a este sistema en particular, y aún más es cierto. La prueba de que la proposición es indecidible es realmente al mismo tiempo la decisión de la proposición, pero, por supuesto, no es expresable en el sistema dado. Así que la creencia en la decidibilidad de cada pregunta matemática no es sacudida por este resultado. (Gödel, *193?, p. 174)[57]

la noción de evidencia de los axiomas y de las inferencias lógicas (elementos que podían incluir su postura realista sobre los objetos de las matemáticas).

[57] "But I wish to stress again that this undecidability holds only with respect to this particular system, and still more is true. The proof that the proposition is undecidable is really at the same time a decision to the proposition, but, of course, is not expressible in the given system. So the belief in the decidability of every mathematical question is not

Es importante aclarar que esta prueba no es interna al sistema y que además supone que estamos interpretando el lenguaje en el modelo pretendido de la aritmética de Peano; es decir, que la interpretación correcta del lenguaje es el conjunto de los números naturales con sus relaciones usuales, este supuesto va más allá de los supuestos que el formalista admite. Elegir esta interpretación es de la mayor relevancia, puesto que bajo otras interpretaciones la oración G_{PA} puede ser falsa. Dado que la oración G_{PA} y su negación son independientes del sistema, tenemos como resultado que ambas oraciones generan expansiones del sistema consistentes (suponiendo que el sistema original es consistente). La idea central es que todo el proceso de construcción de la fórmula G_{PA} apelaba al conjunto de los números naturales; que la oración diga de sí misma que es indemostrable depende de que sea interpretada en ese modelo. Si apelamos a ese modelo, es claro que la oración dice efectivamente que es indemostrable en el sistema y, por ello mismo, es verdadera (en el modelo pretendido). Así, nuestra elección a favor de ella (sobre su negación) depende de que hayamos elegido esta interpretación, además de que usamos métodos recursivos para construirla, para así poder afirmar que ella expresa cierta proposición metateórica. El teorema de compleción de la lógica clásica de primer orden garantiza la existencia de un modelo de la teoría PA en el cual la oración $\neg G_{PA}$ es verdadera, pero lo que afirma esta oración interpretada en este modelo no es que ella misma sea indecidible, sino otra cosa (dependiendo del modelo).

Así, tenemos un mecanismo para elegir sobre esta clase de proporciones indecidibles, aquellas cuya prueba de indecidibilidad se da mediante la construcción recursiva de una fórmula que no puede ser demostrada suponiendo la consistencia del sistema. Sin embargo, el mecanismo no es una prueba tal como se había planteado desde el programa de Hilbert, pues incluye elementos metateóricos como la aceptación de un modelo pretendido para interpretar el lenguaje y métodos que no consisten puramente en la combinación de símbolos. Además, este mecanismo sólo es aplicable a proposiciones indecidibles tales que sus pruebas de indecidibilidad están dada por construcciones recursivas de una fórmula y mostrando que tal fórmula no puede ser la última fórmula de la prueba interna al sistema (de una prueba en el sentido de Hilbert). Esto implica que el mecanismo no será útil para decidir sobre proposiciones indecidibles tales que su prueba de indecidibilidad sea dada de otra forma, si es que tales proposiciones existen. Además, se ha abierto la puerta para incluir en el análisis de problemas de indecidibilidad elementos que no son puramente matemáticos.

---

shaken by this result." La traducción es mía.

1.5. Conclusiones del capítulo

Hasta este punto he presentado la postura de los hermanos du Bois-Reymond, la postura de Hilbert y su programa de fundamentación de las matemáticas y los teoremas de incompleción de la aritmética de Gödel. En el siguiente capítulo, presentaré las pruebas de independencia de la HC respecto a ZFC y una definición de proposición absolutamente indecidible respecto de un sistema particular. A partir de estos elementos obtengo las siguientes conclusiones:

(1) Las pruebas matemáticas que analizamos son sucesiones de fórmulas de un sistema dado, que parten de axiomas y tales que aquellas fórmulas de la sucesión que no son axiomas se obtienen por reglas de inferencia de una lógica bien determinada. Los sistemas que consideraremos son sistemas formales que tienen un lenguaje formal, un conjunto de axiomas, A, y una lógica, L, que sirve para derivar teoremas a partir del conjunto de axiomas A (La aceptación de estos sistemas depende de una postura filosófica de fondo, en el caso de Hilbert, la postura es el finitismo.).

(2) Las metamatemáticas desde un punto de vista hilbertiano son un estudio matemático de las pruebas matemáticas vistas como sucesiones de fórmulas de un sistema. Esta clase de estudio nos ayuda a determinar si una proposición determinada es o no teorema del sistema.

(3) Para Paul du Bois-Reymond, un problema matemático está resuelto sólo cuando todos los sistemas adecuados dan el mismo veredicto sobre el problema. Si hay dos sistemas adecuados que ofrecen resultados diferentes el problema es irresoluble.

(4) Para David Hilbert, un problema matemático está resuelto por un sistema si tenemos un prueba de que el sistema es consistente y la proposición matemática relacionada con el problema o bien es teorema del sistema o bien la negación de la proposición es teorema o bien tenemos una prueba de que la proposición es indecidible en el sistema.

(5) Hilbert no creía que todos los sistemas matemáticos tenían el mismo estatus. Para él, se tenían que ofrecer pruebas de que los sistemas en cuestión cubrían un conjunto mínimo de requisitos para mostrar que eran adecuados (que cumplieran con alguna clase de finitismo, que fuesen consistentes, etcétera.).

(6) Para considerar que tenemos una prueba concluyente de una proposición α no es suficiente que tengamos una prueba de α en un sistema

cualquiera. Por ejemplo, si nuestra prueba de α se da en un sistema que tiene como uno de sus axiomas a α misma, entonces la prueba en ese sistema no garantiza que consideremos que α está probada. Se requiere que el sistema además tenga otra clase de sustento, un sustento que muy posiblemente descanse en una postura filosófica.

(7) Tenemos una prueba adecuada de una proposición α, cuando exista una prueba de α en un sistema matemático y además el sistema cumple con una serie de criterios (formales e informales) que usamos para evaluar si los axiomas de sistema y la lógica de fondo son adecuados o no lo son. Esto incluye un elemento filosófico en el análisis metamatemático de las pruebas.

(8) Los teoremas de incompleción de Gödel muestran que en cualquiera de estos sistemas matemáticos, que sean recursivamente axiomatizables, en los cuales la lógica usada sea la lógica clásica y se puedan expresar las nociones básicas de la aritmética, existen proposiciones indecidibles (estos sistemas cumplían los requisitos impuestos por Hilbert).

(9) Las proposiciones indecidibles involucradas en las pruebas de incompleción de Gödel son de tal naturaleza que pueden ser decididas usando un razonamiento metateórico en el que se apela al modelo pretendido en cada caso (lo cual requiere de la aceptación de alguna versión, posiblemente débil, de realismo matemático).

Queda ahora pendiente la tarea de analizar algunas otras proposiciones indecidibles en matemáticas, como la Hipótesis del Continuo, para contrastarla con las oraciones indecidibles construidas en las pruebas de incompleción de Gödel. Esto, con el fin de analizar si existe un sólo tipo de proposición indecidible o no y, en caso de que exista más de un tipo de proposiciones indecidibles, determinar en qué sentido son diferentes unas de otras. Como veremos, sí existe una clase diferente de proposiciones indecidibles, algunas de ellas tales que no se puede decidir sobre ellas apelando a un modelo pretendido (un ejemplo de esta clase de proposiciones es la HC). Esto nos obligará a dar una definición de proposición absolutamente indecidible (relativa a un sistema), establecer una clasificación de las proposiciones indecidibles y analizar qué mecanismos se pueden ofrecer para decidir sobre ellas.

Capítulo 2

Proposiciones Absolutamente Indecidibles. La Hipótesis del Continuo y sus pruebas de independencia.

Debe observarse, no obstante, que, desde el punto de vista aquí adoptado, una prueba de la indecidibilidad de la conjetura de Cantor a partir de los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos (en oposición, por ejemplo, a la prueba de la trascendencia de p) de ningún modo resolvería el problema. Pues si se acepta que el significado de los signos primitivos de la teoría de conjuntos como [los he explicado] es correcto, entonces los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos describirían alguna realidad bien determinada en la cual la conjetura de Cantor debería ser cierta o falsa.

Kurt Gödel

2.1. Una pequeña introducción.

Hasta ahora he presentado y mostrado como se pueden construir un par de proposiciones indecidibles en el sistema PA, que cumple con los requisitos impuestos por Hilbert; a saber, G_{PA} y $CONS(PA)$. Además, mostré que suponiendo que se dispone de un modelo pretendido para PA, se puede decidir sobre estas oraciones mediante un análisis metateórico de las pruebas en el cual se apela, entre otras cosas, a la estructura recursiva de las mismas. Pero, el método presentado va más allá de los métodos aceptados desde el finitismo de Hilbert.

En este capítulo, presentaré un esquema de las pruebas de independencia de la HC respecto de la teoría de conjuntos Zermelo Fraenkel + Axioma de Elección (ZFC), que involucran la creación de modelos de la teoría de conjuntos ZFC. Una vez hecho esto, analizaré si se puede o no decidir sobre ella apelando a su modelo pretendido y al análisis de sus pruebas de independencia. Sostendré que, a diferencia de que pasaba con las oraciones G_{PA} y $CONS(PA)$, no es posible decidir sobre la HC reflexionando sobre las pruebas que muestran su indecidibilidad respecto a ZFC; se muestra así que existen diferentes tipos de proposiciones indecidibles. Esto me lleva a plantear la necesidad de hacer una clasificación de las proposiciones indecidibles. Para ello, analizaré las clasificaciones y las definiciones de proposiciones indecidibles ofrecidas en (Koellner, 2005), (van Atten y Kennedy, 2006) y (Clarke-Doane, 2012).[1] Concluiré que si bien cada una de ella aporta elementos útiles para una clasificación adecuada de las proposiciones indecidibles, todas son insatisfactorias debido a que su definición de proposición absolutamente indecidible no recupera todos los elementos relevantes involucrados en el fenómeno de la indecidibilidad. Propondré una definición propia de proposición absolutamente indecidible y argumentaré que es satisfactoria; por lo menos para analizar el problema del continuo y su indecidibilidad. Dicha definición contempla no sólo la parte formal de la teoría sino que incluye la posición filosófica detrás de la aceptación del sistema y criterios no formales para la aceptación de nuevos axiomas.

En capítulos posteriores, utilizaré esta definición para analizar si la HC es o no absolutamente indecidible desde ZFC, dada una postura filosófica particular y un conjunto de criterios de aceptación de nuevos axiomas.

2.2. La Hipótesis del Continuo y sus pruebas de independencia.

La Hipótesis del Continuo es una hipótesis planteada por Georg Cantor a finales del siglo XIX y tiene que ver con el tamaño (la cardinalidad) del conjunto de los números reales. El problema del continuo matemático está relacionado con la reconstrucción del continuo geométrico que se dio en el marco de la aritmetización del análisis matemático. El continuo fue reconstruido como el conjunto de los números reales. Los números reales eran identificados y construidos usando sucesiones infinitas de números racionales

[1] Me centraré en estas propuestas debido a que son algunas de las más actuales y recuperan, en buena medida,la postura de Kurt Gödel y Paul du Bois-Reymond, respectivamente.

(que a su vez se construían usando números naturales). En este sentido, los números reales pueden ser vistos como funciones de los números naturales a los números naturales. En este contexto, es usual identificar al conjunto de los números reales como el conjunto potencia del conjunto de los números naturales, $\wp(\mathbb{N})$, o bien con el conjunto de las funciones que tiene como dominio el conjunto de los naturales y codominio el número 2, $2^{\aleph_0}$.[2]

Cantor probó, en sus primeros trabajos, que el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales no eran equinuméricos, no tenían la misma cardinalidad.[3] En realidad, el resultado es más general, Cantor mostró que para cualquier conjunto A se cumple que tiene menos elementos que su conjunto potencia, $|A| < |\wp(A)|$.[4] Esto implica que a pesar de que ambos conjuntos tienen una cantidad infinita de elementos, uno es más grande que otro; a saber, el conjunto de los números reales tiene más elementos que el conjunto de los números naturales. El resultado de Cantor muestra que existen una cantidad infinita de conjuntos infinitos de diferente tamaño. Él mismo propuso una forma de ordenarlos usando números transfinitos (los $\aleph's$) que además tenían una estructura que permite comparar el tamaño de cualesquiera dos de ellos.[5] El tamaño del infinito más pequeño es

---

[2]Los números reales pueden ser presentados de diferentes formas. Una de las más usuales es presentarlos como sucesiones infinitas (de longitud ω) de números naturales. Usando algunas herramientas de teoría de conjuntos se puede demostrar que también pueden ser vistos como sucesiones infinitas de ceros y unos. Es justo en este sentido que un número real puede ser visto como una función de los números naturales al número 2. El conjunto de los números reales puede ser visto como el conjunto de todas las funciones de los números naturales al número 2. Este conjunto se denota como $2^{\aleph_0}$, donde $\aleph_0$ es la cardinalidad del conjunto de los números naturales. De igual forma, se puede mostrar que este conjunto tiene el mismo tamaño que el conjunto potencia de los números naturales, $\wp(\mathbb{N})$.

[3]Si queremos comparar la cantidad de objetos de dos conjuntos (si queremos saber cuál de los dos tiene más elementos) y estos conjuntos son finitos tenemos dos opciones. La primera consiste en contar los elementos de cada uno de los conjuntos y después determinar cuál de los dos es más grande. La segunda consiste en tratar de establecer una mapeo uno a uno entre los conjuntos; es decir, se busca establecer una función inyectiva de A a B. Si el mapeo no es posible, entonces el A tiene más elementos que B. Si el mapeo es posible, entonces A es menor o igual que B. Si el mapeo es además sobreyectivo (si la función es biyectiva), entonces ambos conjuntos tienen la misma cantidad de objetos. En el caso de que querramos comparar dos conjuntos infinitos, la primera estrategia no es aplicable. Esta es la razón de que en el caso de conjuntos infinitos, si queremos comparar sus tamaños tengamos que recurrir a funciones entre estos conjuntos.

[4]En este caso "$|A|$" denota la cardinalidad de A.

[5]El hecho de que existan una cantidad infinita de infinitos, no implica que todos estos infinitos sean comparables entre sí de acuerdo a su tamaño. Una forma de garantizarlo es establecer una norma de comparación. En este caso números transfinitos, y garantizar que para cualquier conjunto su cardinalidad corresponde con algún elemento de la norma de comparación. Para ello se requiere del axioma de elección (que es equivalente al teorema

el tamaño del conjunto de los números naturales y a partir de él se construye toda una jerarquía de infinitos de acuerdo a su tamaño. El problema del continuo consiste en saber cuál es el número transfinito que corresponde al tamaño del conjunto de los números reales.[6] La HC sostiene que el número transfinito que le corresponde al conjunto de los números reales es el inmediato siguiente al que le corresponde al conjunto de los números naturales. Por años, grandes matemáticos como Hilbert trataron de mostrar la HC sin lograrlo. Finalmente, gracias a los trabajos de Kurt Gödel (1938, 1939 y 1940) y Paul Cohen (1963 y 1964) se mostró que la HC era indecidible (independiente) desde la teoría de conjuntos estándar, Zermelo Fraenkel + Axioma de Elección (ZFC). El objetivo de esta sección es clarificar el significado de la Hipótesis del Continuo y presentar un esbozo de su prueba de independencia, con el objetivo de mostrar que la HC es una proposición matemática que es indecidible en ZFC y tal que no se puede decidir sobre ella reflexionando sobre su prueba de indecidibilidad. Para clarificar la HC, introduciré algunas nociones básicas de teoría de conjuntos.

2.2.1. La Hipótesis del Continuo.

En teoría de conjuntos, se han generado dos clases de números que nos permiten comparar conjuntos; a saber, los números ordinales y los números cardinales. La necesidad de los dos tipos de números se debe a que se quiere recuperar dos nociones involucradas en la comparación de conjuntos, una es el tamaño y la otra la estructura que los (bien) ordena.[7] Los números or-

---

del buen orden).

[6] Es importante remarcar que la pregunta por cuál de los $\aleph's$ es el cardinal del continuo requiere para tener sentido de la aceptación del axioma de elección. Sin la aceptación de este axioma, no tenemos ninguna garantía de que el cardinal del continuo sea un $\aleph_\alpha$, con α un ordinal. En el capítulo 5, veremos un par de ejemplos de teorías que rechaza el axioma de elección y en las cuales el cardinal del continuo no es ningún $\aleph_\alpha$; pues, de acuerdo a esas teorías, el conjunto de los números reales no es bien ordenable.

[7] Muchas veces no sólo nos interesa comparar dos conjuntos por la cantidad de elementos que tienen. En algunas ocasiones queremos comparar la forma en que los elementos de dos conjuntos pueden estar ordenados o estructurados. Existen muchos tipos de estructuras, algunas de ellas generan lo que conocemos como órdenes sobre la colección. Hay muchos tipos de órdenes posibles; por ejemplo, aquellos que son discretos, o densos, que tiene principio pero no fin, o que no tiene ni principio, ni fin. Nosotros nos ocuparemos principalmente de aquellos que generan un orden muy similar al orden de los números naturales, los llamados buenos órdenes. Intuitivamente un buen orden sobre un conjunto esta dado por un primer elemento del conjunto y está construido a partir de éste por la función sucesor (y la unión en el caso de los límites). En otras palabras, un buen orden sobre un conjunto es un orden lineal sobre el conjunto con primer elemento tal que todo subconjunto tiene un elemento mínimo. Para una definición precisa de buen orden véase

dinales nos permiten comparar dos conjuntos de acuerdo a la forma en la que están ordenados sus elementos, o dicho de manera más precisa, la forma que tiene un buen orden[8] sobre ellos. Los números cardinales nos permiten comparar dos conjuntos de acuerdo a la cantidad de elementos que tienen.[9] En el caso de los conjuntos finitos, los números ordinales y los números cardinales son los mismos; pues para cada conjunto finito existe una única forma de bien ordenarlo, salvo isomorfismo.[10] Pero, en el caso de conjuntos infinitos, estas dos clases de números no coinciden. Para cada número cardinal infinito existen infinitos ordinales. Esto se debe a que para cada conjunto infinito, existen muchas formas de bien ordenarlo; es decir, existen muchos buenos órdenes que se pueden definir sobre él (cada uno con diferente estructura). Para clarificar este punto, ofreceré a continuación una definición de los números ordinales y una definición de los números cardinales.

Def. 4 *Un conjunto α es un número ordinal sii α es un conjunto transitivo*[11] *y es bien ordenado por la relación de pertenencia, $\in$.*

Los conjuntos que cumplen con esta definición son llamados los números ordinales y sobre ellos puede definirse una relación de orden dada por la pertenencia.

Def. 5 *Llamaremos* OR *a la clase de todos los ordinales.*

Def. 6 *Dados dos números ordinales, α y β, $\alpha <_{OR} \beta$ sii $\alpha \in \beta$.*

Usando está definición puede verse que todos los ordinales pueden ser comparados y que de hecho la estructura que se forma sobre la clase de los números ordinales es la de un buen orden dado por la pertenencia.[12]

---

la siguiente nota.

[8]Un conjunto A es bien ordenado por una relación $R \subseteq A \times A$ sii R es antirreflexiva, transitiva y todo subconjunto B de A tiene un elemento mínimo de acuerdo a R.

[9]La comparación entre dos conjuntos A y B se da usando funciones entre estos conjuntos. Se dice que dos conjuntos tienen el mismo tamaño (la misma cardinalidad) sii existe una función biyectiva entre ellos. Si existe una función inyectiva de A a B, pero no existe una función biyectiva entre ellos, se dice que A es menor que B en cardinalidad.

[10]Es decir, que para cada n número natural, existe un único buen orden que bien ordena n elementos. Si bien, los elementos del conjunto pueden permutarse para que ocupen diferentes lugares en el orden, la forma de éste es única, es por ello, que se dice que el orden es único salvo isomorfismo.

[11]Un conjunto A es transitivo sii $\forall x(x \in A \supset x \subseteq A)$. Es decir, que un conjunto transitivo es tal que todo sus elementos son también sus subconjuntos.

[12]Los números ordinales no forman un conjunto, pues de hacerlo se generaría una contradicción. Supongamos que existe OR es un conjunto. La relación de orden sobre los

El primer elemento de la colección de los ordinales es el conjunto vacío, $\emptyset$, pues cumple por vacuidad todas la condiciones para ser un ordinal. A partir de él, se construyen todos los números ordinales finitos, usando la función sucesor, es decir, el sucesor de un número ordinal α será el conjunto que resulta de unir α con su unitario, es decir, $\alpha \cup \{\alpha\}$. La idea central es que un número ordinal es el conjunto de todos los números ordinales anteriores a él. El paso para llegar a los ordinales infinitos consiste en considerar el conjunto de todos los ordinales finitos y, generando su unión generalizada, el resultado es el primer cardinal infinito; lo llamáremos "ω".[13] Esto nos da dos clases de números ordinales, los sucesores y los límites. Los sucesores son los ordinales que se construyen usando la función sucesor y tienen como una de sus características que existe un ordinal que es aquel que está inmediatamente detrás de ellos. Los límites son aquellos que resultan de la unión de todos los ordinales anteriores. Una de sus características más notorias es que no tienen un elemento que sea el inmediato anterior. En este sentido, un ordinal límite pueden verse como el conjunto límite que se genera a partir de una sucesión infinita de todos los ordinales menores que él.

En el caso del primer ordinal límite, ω, también se le puede ver como el conjunto que tiene como elementos a todos los buenos ordenes posibles de conjuntos de menor tamaño que él; a saber, todos los buenos ordenes posibles sobre conjuntos finitos. Esta misma idea nos permite construir ordinales infinitos de diferente tamaño, que escalan en cardinalidad. Consideremos al conjunto que tiene como elementos a todos los ordinales finitos y a todos los buenos ordenes posibles definidos sobre conjuntos del tamaño de ω; es decir, al conjunto de todos los ordinales que son equipolentes con ω o menores que ω. Llamemos a este conjunto ω_1. Como ω_1 es un ordinal, si fuese del mismo tamaño que ω, entonces se pertenecería a sí mismo, generando una contradicción. Esto muestra que usando la idea de agrupar todos los buenos órdenes posibles dados sobre un conjunto infinito de un tamaño determinado o conjuntos de menor tamaño, podemos obtener un nuevo número ordinal de mayor tamaño. Se genera así una jerarquía creciente de ordinales que no tiene un elemento máximo. La jerarquía de los ordinales puede verse como

ordinales dada por la pertenencia generaría un buen orden sobre OR, además de que OR sería un conjunto transitivo, por lo que OR sería un ordinal. En consecuencia, OR sería miembro de OR, contradiciendo que la relación de orden sobre OR es antirreflexiva. Esta es la paradoja de Burali-Forti. La solución a este problema consiste en negar que exista un conjunto que tenga como miembros a todos y sólo los números ordinales. En este sentido, OR es una clase propia definida por una fórmula que recupera la definición de número ordinal, igualmente, el orden no sería una relación, sino un relacional definido sobre la clase de los ordinales.

[13] Se requiere del axioma de infinito para poder generar los ordinales infinitos.

un orden lineal de objetos que crece de forma indefinida.

$$0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, \omega,\, \omega+1,\, \omega+2,\, \ldots,\, \omega+\omega,\, \omega+\omega+1,\, \omega+\omega+2,\, \ldots,$$
$$\omega_1,\, \omega_1+1,\, \ldots,\, \omega_1+\omega,\, \ldots,\, \omega_2,\, \ldots,\, \omega_\omega,\, \ldots,\, \omega_{\omega_\omega},\, \ldots,\, \omega_{\omega_{\omega_\omega}},\, \ldots$$

Aprovechando que la clase OR está bien ordenada por la pertenencia, se puede mostrar un teorema de recursión y teorema de inducción, muy similar a los que se tienen en el caso de los números naturales. La idea central es que cada elemento de la clase de los ordinales se construye usando a los elementos previos usando funciones bien definidas. Entonces, para probar que todos los ordinales tienen cierta propiedad basta probar que el primero de ellos la tiene y que la propiedad se hereda a ordinales que se construyen usando las funciones. La idea detrás del teorema de la recursión es muy similar, pero se incluyen otras funciones posibles para poder definir conjuntos que no sean los ordinales, pero que sí tengan la misma estructura.

Teorema 2 ***(recursión sobre la clase de los ordinales)*** *Sea C una clase de ordinales y asumamos que $\emptyset \in C$, que $\forall\alpha(\alpha \in C \supset s(\alpha) \in C)$ y que si para todo ordinal límite α diferente del $\emptyset$ se cumple que $\forall\beta(\beta \in \alpha \supset \beta \in C) \supset \alpha \in C$. Entonces la clase C es la clase de todos los ordinales.*

Teorema 3 ***(recursión sobre los números ordinales)*** *"Sean a un conjunto, y G y H funcionales del universo. Entonces podemos definir un único funcional F tal que:*

1. *$dom(F) = OR$,*
2. *$F(0) = a$,*
3. *$F(s(\alpha)) = G(F(\alpha))$, y*
4. *$F(\gamma) = H(F \restriction \gamma)$, para todo ordinal límite γ." (Amor, 2011, p. 78)*

El teorema de la recursión sobre los ordinales nos permite definir una clase de objetos que es equipotente con la clase de los números ordinales, a partir de una función sobre el universo. Basta con dar el primer elemento y el resto de los objetos los construimos usando la función. Usando esto, podemos definir los números cardinales infinitos por recursión sobre los ordinales. El primer elemento será el conjunto ω y el resto lo construiremos usando la función que a cada ordinal le asigna el menor ordinal que es mayor en cardinalidad que él. La definición queda como sigue:

$\aleph_0 = \omega$

$\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1}$

$\aleph_\alpha = sup\{\omega_\beta \mid \omega_\beta < \omega_\alpha\}$ cuando α es un ordinal límite.

Llamaremos a los elementos de este conjunto de cardinales infinitos "alephs" y usaremos a los ordinales para indexarlos. Los alephs son una subclase de los números ordinales, a saber, aquellos que implican crecimiento en el tamaño del conjunto.[14] Esto nos permitiría en principio establecer un parámetro de comparación de acuerdo a su tamaño entre todos los conjuntos que pueden ser bien ordenados. Pero, si suponemos el axioma de elección (AC), todo conjunto es bien ordenable por alguna relación. Con este resultado, tenemos la garantía de que cualquier conjunto es comparable con algún aleph. Asumiendo este resultado el problema del continuo puede ser reducido a saber cuál es el aleph que le corresponde al conjunto de los números reales y la Hipótesis del Continuo (HC) puede ser puesta como $(|c| = \wp(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.[15]

Así mismo, se puede presentar una versión generalizada de esta hipótesis asumiendo que el conjunto potencia de un aleph particular, $\aleph_\alpha$, sólo escala un nivel en la jerarquía de los cardinales infinitos, es decir, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. A esta hipótesis se le conoce cómo la Hipótesis Generaliza del Continuo (HGC).

Como ya se adelantó, la HC es indecidible desde el sistema ZFC. La HGC también es indecidible desde el sistema. A continuación, presentaré el esbozo de las dos pruebas involucradas en estos resultados. La técnica detrás de estas pruebas no es la misma que en el caso de la oración G_{PA}, pues no se concentra en mostrar que no puede existir una prueba sintáctica de HC. La técnica consiste más bien en mostrar que se pueden construir un par de modelos de la teoría de conjuntos ZFC, tales que en uno de ellos la HC es verdadera y en otro la HC es falsa; lo cual muestra que ni HC ni $\neg$HC pueden ser deducidos de los axiomas de ZFC.

[14] Otra forma de entender el crecimiento de tamaño, es considerar que los números cardinales los conjuntos que resultan de agrupar todas la formas en las que se puede bien ordenar un conjunto del tamaño inmediato anterior. Esto cobra relevancia, pues a cada buen orden se puede ver como un subconjunto del conjunto original, pero no todos los subconjuntos posibles están considerados. El hecho de considerar sólo los buenos órdenes nos permite controlar perfectamente el ritmo de crecimiento del la colección que los agrupa, el crecimiento es el mínimo posible.

[15] Existen otras formas de plantear la Hipótesis del continuo que en los contextos usuales son completamente equivalentes, pero que sin el axioma de elección no lo serían. Otra forma, que será relevante en la discusión de los próximos capítulos es afirmando que no existe un subconjunto infinito del conjunto de los números reales que no sea ni numerable ni de la cardinalidad del continuo. Por ejemplo, existen teorías de conjuntos diferentes a ZFC en las que una de las versión es falsa y la otra verdadera. Estas versiones serán presentadas en el capítulo 5.

2.2.2. El universo constructible, L. ZFC es consistente con la HC.

En 1938, Kurt Gödel publicó un artículo en el que anunciaba una prueba de la consistencia relativa[16] de la HGC respecto a la teoría de conjuntos.[17] En el artículo presentaba las ideas centrales de la prueba, pero no fue sino hasta 1939 que presentó un artículo con los detalles de la misma y en 1940 ofreció una versión más desarrollada.[18] La idea central era construir un modelo de los axiomas típicos de la teoría de conjuntos que fuese además modelo de la HGC y del AC. El modelo consiste en una jerarquía acumulativa de conjuntos, tales que todos sus elementos sean constructibles a partir de fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos y elementos de los niveles previos (de conjuntos más simples). En palabras del propio Gödel:

> Este modelo, simplificado, consiste en todos los conjuntos "matemáticamente constructibles", donde el término "constructible" debe ser entendido en el sentido semiintuicionista que excluye procedimientos impredicativos. Esto significa que los conjuntos "constructibles" se definen como los conjuntos obtenibles mediante la jerarquía ramificada de los tipos de Russell si se extiende a órdenes transfinitos. La extensión a órdenes transfinitos tiene como consecuencia que el modelo satisfaga los axiomas impredicativos de la teoría de conjuntos, pues para órdenes suficientemente altos se puede probar un axioma de reducibilidad. (Gödel, 1938, p. 211).

[16]Una prueba de consistencia relativa de una proposición φ respecto de un sistema formal SF consiste en mostrar que suponiendo la consistencia de SF, el sistema que resulta de agregar a SF la proposición φ sigue siendo consistente. En general, no se ofrecen pruebas de consistencia que no sean relativas, pues la mayoría de los sistemas son afectados por el segundo teorema de incompleción de Gödel; es decir, no pueden mostrar su propia consistencia, a menos que sean inconsistentes.

[17]El artículo en el que Gödel anunciaba su prueba se titulaba "The consistency of the axiom of choice and the generalizad continuun-hypothesis", Gödel (1938). En él se mostraba que suponiendo que los axiomas típicos de la teoría de conjuntos sin el axioma de elección eran consistentes (Gödel usó en este artículo el sistema de von Neumann), entonces agregar al sistema el axioma de elección, la HGC y un par de proposiciones extras que hablan de propiedades de conjuntos de números reales, no generaba ninguna inconsistencia. Anunciaba además que, si bien la prueba sería presentada en el sistema de von Neumann, el resultado también valía para el sistema de Zermelo-Fraenkel y para el sistema de *Principia Mathematica*.

[18]En el artículo de 1939, titulado "Consistency-proof for the generalizad continuum-hypothesis", Gödel ofreció una prueba de consistencia relativa de la HGC y del AC respecto al sistema ZF. En 1940, ofreció una serie de conferencias en Princeton en las que presentó otra versión de la prueba pero ahora respecto del sistema de von Neumann. Como resultado de estas conferencia publicó el texto "The consistency of the axiom of choice and of the generalizad continuum hypothesis with the axioms of set theory". La idea detrás de ambas pruebas es esencialmente la misma. Optaré por presentar la versión del artículo de 1939, pues será más útil para el desarrollo del trabajo.

La prueba consiste entonces en construir un modelo de la teoría de conjuntos,[19] en este caso ZF, tal que en él tanto el AC como la HGC sean verdaderas. Por supuesto, la construcción del modelo supone que el sistema que es punto de partida, ZF, es consistente. La prueba se da en tres pasos. Se define la noción de conjunto constructible. Usando esta noción y otras herramientas de la teoría de modelos se construye el modelo-clase, L, de los conjuntos constructibles. Después se prueba que la oración "Todo conjunto es constructible" es verdadera en el modelo; es decir, se prueba que desde el modelo mismo todo conjunto es constructible. En adelante a esta afirmación se le conocerá como el axioma de constructibilidad y se le abrevia como $V = L$. Finalmente, se muestra que $V = L$ implica el AC y la HGC.

2.2.2.1. Sobre modelos, relativización y absolutez

Lo primero que debo aclarar es cuando se trabaja con modelos de la teoría de conjuntos estamos suponiendo que los axiomas de la teoría de conjuntos son consistentes. En adelante usaremos como referencia el sistema de Zermelo Fraenkel (ZF) expresado en el lenguaje de la lógica de primer orden. Dado que ZF está expresada en el lenguaje de la lógica de primer orden, la consistencia de la teoría supone que existen modelos de la teoría. Estamos suponiendo algo muy fuerte y es que en algún sentido la teoría de conjuntos es correcta, y usaremos este supuesto para mostrar que la HC es independiente de la teoría.

Ahora bien, considerando que se está trabajado con múltiples interpretaciones[20] de la teoría de conjuntos debo aclarar que dada una fórmula del lenguaje de TC su evaluación respecto a un modelo particular requiere que la fórmula sea interpretada en la estructura seleccionada. Dada una interpretación particular de la teoría de conjuntos $\langle M, E\rangle$, si se quiere evaluar si una fórmula de la teoría de conjuntos φ es satisfecha en la interpretación, primero se tiene que relativizarla a la estructura; es decir, lograr que en la

[19] Por un modelo de la teoría de conjuntos se entiende una estructura $\langle M, E\rangle$, donde M es una colección de objetos y E es una relación binaria que servirá para interpretar al predicado de pertenencia, $\in$, que es el único predicado no lógico del lenguaje de la teoría de conjuntos. M puede ser un conjunto o una clase propia. En el primer caso, M es un conjunto y E es una función (en sentido conjuntistas). En el segundo caso, el dominio es muy grande para ser un conjunto. En esos casos se habla de modelos-clase y $\langle M, E\rangle$ es una estructura en donde M es una clase propia y E es un relacional definido sobre el universo conjuntista. La mayoría de los modelos de la TC que se consideran son modelos-clase.

[20] Buscamos que estas interpretaciones de la teoría de conjuntos sean modelos de la teoría de conjuntos, pero no podemos suponer de ante mano que todos los axiomas de la teoría son verdaderos en la estructura seleccionada. Todas estas interpretaciones serán estructuras $\langle M, E\rangle$ como las antes descritas.

fórmula las apariciones de $\in$ se interpreten como E y los cuantificadores estén acotados a M.[21] Así, si se quiere saber si una fórmula φ es satisfecha en la estructura $\langle M, E\rangle$, se tiene que evaluar su relativización, $\varphi^{M,E}$. Esta fórmula relativizada expresa que φ vale desde el punto de vista de la interpretación $\langle M, E\rangle$.

Esta observación sobre la relativización de la fórmulas al modelo cobra relevancia cuando se considera que una proposición del lenguaje de la teoría de conjuntos puede ser verdadera, pero que una vez que se ha relativizado al modelo puede ser falsa (en la estructura $\langle M, E\rangle$). Por decirlo de otra forma, una oración puede ser verdadera desde un punto vista externo al modelo, pero falsa desde un punto de vista interno, o viceversa.[22] Esto se debe, en buena medida, a que una vez que se ha relativizado una fórmula, sus cuantificadores ya no corren sobre todos los conjuntos, pues sólo toman sus valores de los elementos de M. Esto quiere decir que si bien puede ser cierto que exista un objeto que cumple tal y cual característica, eso no implica que ese objeto este en M. O bien, si todos los objetos en M cumplen con tal y cual propiedad, de eso no se sigue que todos los objetos fuera de M también la cumplen.

La construcción de modelos de la teoría de conjuntos implica que se debe verificar que los axiomas y las fórmulas que se desea evaluar en el modelo (por ejemplo, la HC) estén relativizados al modelo. Uno de los supuestos es que los axiomas de la teoría de conjuntos se aplican al modelo, pero de esto no se sigue que dentro del modelo dichos axiomas también valgan. Es decir, cuando

---

[21] La relativización de una fórmula se puede dar de manera completamente formal usando recursión:

Def. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos y $\langle M, E\rangle$ un modelo. La relativización de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a $\langle M, E\rangle$, $\varphi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n)$, se define por recursión como sigue:

$$\begin{array}{rr} (x \in y)^{M,E} =^{def} xEy & (x = y)^{M,E} =^{def} x = y \\ (\neg\varphi)^{M,E} =^{def} \neg\varphi^{M,E} & (\varphi \wedge \psi)^{M,E} =^{def} \varphi^{M,E} \wedge \psi^{M,E} \\ (\varphi \vee \psi)^{M,E} =^{def} \varphi^{M,E} \vee \phi^{M,E} & (\varphi \supset \psi)^{M,E} =^{def} \varphi^{M,E} \supset \psi^{M,E} \\ (\varphi \equiv \psi)^{M,E} =^{def} \varphi^{M,E} \equiv \psi^{M,E} & (\exists x\varphi)^{M,E} =^{def} (\exists x \in M)\varphi^{M,E} \end{array}$$
$$(\forall x\varphi)^{M,E} = def(\forall x \in M)\varphi^{M,E}$$

[22] Veamos un ejemplo. Consideremos una estructura $\langle V_\omega, \in\rangle$, donde V_ω es el nivel ω de la jerarquía acumulativa de conjuntos. En esta estructura todos los conjuntos son finitos; es decir $\langle V_\omega, \in\rangle \models$ *"Todos los conjuntos son finitos"*. Pero desde un punto de vista externo *"Todos los conjunto son finitos" es una oración falsa.* Existen ejemplos todavía más significativos. Imaginemos que estamos evaluando en un modelo $\langle M, E\rangle$ una oración como *"A y B tienen la misma cardinalidad"*, donde A y B son elementos de M. Para que esta oración sea verdadera tiene que existir una función biyectiva entre A y B. Esta función es también un conjunto. Es posible que aunque esta función exista, no esté en M; es decir, $\langle M, E\rangle \not\models$ *"A y B tiene diferente cardinalidad"*, aunque de hecho A y B tengan la misma cardinalidad desde el punto de vista externo.

se construye una interpretación particular que se pretende usar como modelo de la teoría de conjuntos se asumen todos los axiomas de la teoría, pero no se puede garantizar que una vez interpretados en el modelo sigan valiendo. Por ejemplo, se puede garantizar que dado cualquier conjunto de elementos del dominio de la estructura, su conjunto potencia existe, pero no se puede garantizar que éste sea un elemento del dominio de la estructura. Esto implica que se debe ser muy cuidadoso en la construcción de estas estructuras.

Se han desarrollado diferentes técnicas que permiten garantizar que dada una fórmula que es verdadera, también es verdadera dentro cierta clase de modelos. Para poder abordar este problema con más precisión daré la definición de absolutez respecto de un modelo M.[23]

Def. 7 *Sea φ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos y sea $\langle M, E\rangle$ un modelo. Decimos que φ es $\langle M, E\rangle$-absoluta sii $\varphi \leftrightarrow \varphi^{M,E}$.*

Las fórmulas absolutas respecto a un modelo M son aquellas tales que son verdaderas en el modelo M sii son verdaderas fuera del modelo. Si se pueden generar mecanismos que nos garanticen que ciertas fórmulas son absolutas en un modelo M o en un clase de modelos, se podrían usar el conocimiento sobre ellas fuera del modelo para garantizar que valen dentro del modelo, o viceversa.[24] Esta clase de mecanismos se han desarrollado y son fundamentales en las pruebas de independencia de HC.

Por conveniencia, me limitaré a una clase particular de modelos; a saber, aquellos tales que M es una colección transitiva y la relación E se comporta

[23]Cuando se dice que una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos es verdadera se asume que es verdadera en el universo conjuntista. Esto es poco claro, a menos que asumamos que hay tal universo. El candidato más reconocido para ser el universo conjuntista es la jerarquía acumulativa de conjuntos, V, aunque no hay consenso sobre este punto. Profundizaré más este punto en el siguiente capítulo cuando discuta el teorema de cuasi-categoricidad de Zermelo. Por el momento, puedo asumir sin mayor problema que V es el universo conjuntista. La jerarquía acumulativa de conjuntos se define por recursión sobre los ordinales como sigue:
(1) $V_0 = \emptyset$,
(2) $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$,
(3) $V_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} V_\beta$ cuando α es límite.
(4) $V = \cup_{\alpha\in OR} V_\alpha$.

[24]Incluso podemos usar el resultado inverso; si una fórmula φ es absoluta sobre el modelo $\langle M, E\rangle$ y se demuestra que φ es verdadera en el modelo, entonces se puede garantiza que φ es verdadera. Por ejemplo, si existiese una fórmula absoluta para un modelo $\langle M, E\rangle$ que exprese la HC y se muestra que es verdadera en el modelo, entonces se tendría la garantía de que HC es verdadera. Desafortunadamente, la HC es muy compleja y las fórmulas que la expresan no son absolutas para los modelos más usuales.

como la $\in$, es decir, que la relación E sea extensional.[25] Todos los modelos con estas características son isomorfos a un modelo transitivo; es decir, un modelo en el que el dominio es una colección transitiva de conjuntos y la relación E es la pertenencia.[26] Además se puede probar que en estos modelos una gran cantidad de fórmulas son absolutas; a saber, todas las fórmulas Δ_0[27] son absolutas para los modelos transitivos. Intuitivamente las fórmulas Δ_0 son aquellas que no tienen cuantificadores no acotados.[28] Así que la restricción del modelo a la clase M no afecta el valor de verdad de la fórmula en estos casos, pues los modelos son demasiado parecidos al universo conjuntista. Un nota importante es que la mayoría de los axiomas de ZF son expresables usando fórmulas Δ_0. Esto hace mucho más sencillo trabajar con modelos transitivos y extensionales, pues probar que son modelos de ZF es mucho más sencillo.[29] Hechas estas aclaraciones, presentaré el universo constructible de Gödel, L.

2.2.2.2. Conjuntos definibles y construcción de L.

El universo constructible, L, es una jerarquía acumulativa de conjuntos, pero a diferencia de la jerarquía V, los niveles no se construyen usando la operación de potencia, sino más bien usando fórmulas del lenguaje que

---

[25]Una relación $E \subseteq M \times M$ extensional sobre M sii Eestá bien fundada sobre M y $\forall x, y \in M(\forall z \in M(zEx \equiv zEy) \supset x = y)$.

[26]Los modelos transitivos son favorecidos, pues tienen la estructura que se espera de un modelo adecuado de la teorías conjuntos, en el sentido de que sus objetos son conjuntos y la relación E es la pertenencia.

[27]Formalmente las fórmulas Δ_0 se definen por recursión como sigue:
Def. Sea α una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos. Decimos que α es Δ_0 sii cumple con alguna de las tres siguientes cláusulas.
(i) α no tiene cuantificadores,
(ii) α es de la forma $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \supset \psi)$ o $(\varphi \equiv \psi)$ y las fórmulas φ y ψ son fórmulas Δ_0,
(iii) α es de la forma $(\exists x \in y)\varphi$ o $(\forall x \in y)\varphi$ y la fórmula φ es Δ_0.

[28]La lista de las nociones de teoría de conjuntos que son expresables por una fórmula Δ_0 es amplia. Algunas de ellas son: “x es el conjunto par de w y z”, “x es el par ordenado de w y z”, “x es el conjunto vacío”, “x es subconjunto de y”, “x es un conjunto transitivo”, “x es ω”, “x es un número ordinal”, “x es un ordinal límite”, “x es un número natural”, “x es el producto cartesiano de Y y Z”, “x es el conjunto diferencia de Y y Z”, “x es la unión de Y y Z”, “x es la unión generalizada Y”, “x es una relación”, “x es una función”, “x es el dominio de Y”, “x es el rango de Y”, “$x = f(y)$”, etc.

Algunos ejemplos de conceptos conjuntistas que no pueden ser expresados por fórmulas Δ_0 son: “x es un cardinal”, “x es un cardinal sucesor”, “x es un cardinal límite”, etc. Esto cobrará relevancia, pues ser el cardinal del continuo en un modelo, no implica ser el cardinal del continuo. Así, la prueba de consistencia relativa que muestra que L es modelo de la HC, no muestra que la HC sea verdadera, sólo prueba que es consistente con ZFC.

[29]De hecho la prueba de que la jerarquía acumulativa de conjuntos, V, es modelo de ZFC utiliza que V es un modelo transitivo.

permiten construir conjuntos a partir de los objetos que ya se tienen, los conjuntos definibles. Comenzaré con la definición de conjunto definible sobre una estructura:

Def. 8 *Sea X un subconjunto de M. Decimos que X es definible sobre la estructura $\langle M, \in \rangle$ sii existe una fórmula, φ, del lenguaje de la teoría de conjuntos con n+1 variables libres y existen $a_1, \ldots, a_n$ elementos del conjunto M tales que $X = \{x \in M \mid \langle M, \in \rangle \models \varphi[x, a_1, \ldots, a_n]\}$.*[30]

Usando está definición se pueden definir conjuntos a partir de fórmulas del lenguaje y de una estructura formada por un conjunto y la relación de pertenencia. La construcción del modelo L se logra construyendo un modelo que sólo incluya conjuntos definibles en estratos previos. Dado un conjunto M, se define $def(M)$ como el conjunto de todos los subconjunto definibles de M en la estructura $\langle M, \in \rangle$. Observemos que $def(M)$ es un subconjunto de $\wp(M)$, y que M y $\emptyset$ son elementos de $def(M)$. Por lo que se sabe es posible que $def(M)$ sea igual a $\wp(M)$, aunque es poco probable que sea así (por lo menos desde un punto de vista realista).

Def. 9 *El modelo L se define por recursión sobre los ordinales como sigue.*
(i) $L_0 = \emptyset$,
(ii) $L_{\alpha+1} = def(L_\alpha)$,
(iii) $L_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} L_\beta$ si α es un ordinal límite,
(iv) $L = \cup_{\alpha \in OR} L_\alpha$.

A partir de la definición de L se puede ver con relativa facilidad que se trata de una jerarquía acumulativa de conjuntos, que puede ser un modelo-clase de ZF y que es transitivo y extensional. Además, todos los ordinales son elementos de L, pues son definibles a partir de fórmulas y todos los elementos que se requieren para su construcción son elementos de un nivel de la jerarquía L.

Para mostrar que L es modelo de ZF, se usa que es un modelo-clase transitivo y extensional y que la mayoría de los axiomas de ZF son expresables usando fórmulas que son Δ_0.[31] Una vez hecho esto, se puede observar que

[30] Esto quiere decir que X tiene como elementos a todos los $x \in M$ tales que la secuencia que comienza con ellos y continua con $a_1, \ldots, a_n$ satisface φ en $\langle M, \in \rangle$. La definición de satisfacción puede ser consultada en cualquier texto de lógica básica, puede verse (Jech, 2006, cap. 12).

[31] La prueba de que L es un modelo de ZF es, en realidad, un poco más complicada. Se tiene que probar para cada axioma σ de ZF relativizado a L, σ^L, que es verdadero en L. Se usa el hecho de que L es una clase transitiva y, por ello, toda fórmula Δ_0 es absoluta para L. Asumiendo esto, hay que verificar caso por caso. Pongamos algunos ejemplos:

desde el punto de vista externo, todos los elementos de L son constructibles, pero no hay garantía de que desde dentro del modelo todos los conjuntos sean constructibles. Para ello se debe mostrar que "x es constructible" es absoluto para L. Si se lograr probar esto, entonces se tiene la garantía que L puede mostrar que todos sus elementos son constructibles; es decir, que en L es verdadero que $V = L$.

Para realizar la prueba de absolutez de "x es constructible", se muestra que todo conjunto constructible se puede generar usando algunas operaciones básicas, que son llamadas las operaciones de Gödel. La idea central es mostrar que existen un conjunto de operaciones tales que cualquier conjunto constructible a partir de una clase transitiva M puede ser generado por medio de una iteración de las operaciones de Gödel.

Def. 10 *$Def(M) = cl(M \cup \{M\}) \cap \wp(M)$, donde $cl(X)$ denota la clausura del conjunto X bajo las operaciones de Gödel.*

Esto reduce la constructibilidad de un conjunto a poder ser generado por las operaciones de Gödel, todas ellas Δ_0. Esto implica que la colección generada a partir de ella es Δ_0. Esto a su vez implica que $Def(M)$ es Δ_0, si M es transitiva. Una vez que se logra este resultado se puede mostrar que "x es constructible" es absoluto para L y, una vez hecho esto, sólo resta probar que $V = L$ implica la HC.

Teorema 4 *"x es constructible" es absoluto para L.*

Dem.: *Sup. (x es constructible)^L $\leftrightarrow$*

$\exists\alpha \in L$ tal que $(x \in L_\alpha)^L \leftrightarrow$

$\exists\alpha(x \in L_\alpha)^L$, pues todos los ordinales están en $L \leftrightarrow$

$\exists\alpha(x \in L_\alpha)$, pues L_α se genera o bien a partir del conjunto del nivel previo usando las operaciones de Gödel, si α es un ordinal sucesor, o bien por la unión de los niveles anteriores, si α es un ordinal límite $\leftrightarrow$ x es constructible.

Extensionalidad: Dado que L es una clase transitiva, es extensional. Par: Dados $a, b \in L$, sea $c = \{a, b\}$. Sabemos que existe un α tal que $a, b \in L_\alpha$, Además, como $\{a, b\}$ es definible sobre L_α, tenemos que $c \in L_{\alpha+1}$ y como "$c = \{a, b\}$" es Δ_0, el axioma de par vale en L. Potencia: Dado un $X \in L$, sea $Y = \wp(X) \cap L$. Sabemos que existe un α tal que $Y \subseteq L_alpha$, Y es definible sobre L_α por una fórmula Δ_0 "$x \subseteq X$" y, por lo tanto $Y \in L$. Y es la potencia de X de acuerdo a L, es decir, $Y = \wp^L(X)$. Así, vale en L que "Y es el conjunto potencia de X". Y, como "$x \in Y$ sii $x \subseteq X$" es una fórmula Δ_0, el resultado vale para toda $x \in L$. La prueba completa puede verse en (Jech, 2003, p. 176 y ss.)

Este resultado implica que L es modelo del axioma de constructibilidad, $V = L$, pues "x es constructible" es absoluto para L y desde un punto de vista externo se sabe que todos los elementos de L son constructibles.

2.2.2.3. L es modelo de AC y HGC.

Una vez que se ha probado que L es modelo de $V = L$, sólo resta probar que $V = L$ implica que el AC y la HGC. Si se prueba eso, se obtiene la prueba de requerida.

La primera prueba, que en L vale el AC, se da mostrando que usando $V = L$ se puede definir un buen orden sobre los elementos de L. El buen orden apela a la forma en la que son construidos los objetos de cada nivel usando fórmulas del lenguaje. Se apela entre otras cosas al orden lexicográfico. Una vez hecho esto, podemos asegurar que todo elemento de L es bien ordenable, es decir, que vale el Teorema del Buen Orden. Pero, este teorema es equivalente al Axioma de Elección, por lo que L es modelo del AC.[32]

La prueba de que la HGC vale en L, y por tanto la HC vale en L, también consiste en mostrar que $V = L$ implica la HGC. La idea principal detrás de la prueba es que dado un cardinal κ, todos los subconjuntos definibles de κ se construyen en la jerarquía L antes de llegar al nivel $L_{\kappa+1}$.

Teorema 5 *$V = L \models HGC$.*
Dem.: *Sea ω_α un cardinal infinito y sea X un subconjunto constructible de ω_α. Se demuestra que existe un $\lambda < \omega_{\alpha+1}$ tal que $X \in L_\lambda$.[33] Esto prueba que $\wp(\omega_\alpha)^L \subseteq L_{\omega_{\alpha+1}}$. Como $|L_{\omega_{\alpha+1}}| = \aleph_{\alpha+1}$, se tiene que $|\wp(\omega_\alpha)^L| \leq \aleph_{\alpha+1}$. Pero, se sabía que $|\wp(\omega_\alpha)^L| > \aleph_\alpha$, entonces $|\wp(\omega_\alpha)^L| = \aleph_{\alpha+1}$, para todo α número ordinal. Por lo tanto, la HGC vale en L.*

Con esto, se obtiene la primera parte de la prueba de independencia de HC respecto a ZFC. Como L es un modelo de ZFC y también es modelo de HC, entonces no puede suceder que $\neg$HC sea teorema de ZFC, pues existe una interpretación tal que todos los axiomas de ZFC son verdaderos y $\neg$HC es falsa.

---

[32]No se dan los detalles de esta prueba, pues no son indispensables para los objetivos del trabajo. Los detalles se pueden ver en (Jech, 2006, p. 188 y ss.).

[33]La prueba de la existencia de λ requiere del lema de condensación. Dado que $X \in L$ y $X \subseteq \omega_\alpha$, se tiene que existe una ordinal límite $\delta > \omega_\alpha$, tal que $X \in L_\delta$. Sea M un submodelo elemental de L_δ tal que $\omega_\alpha \subseteq M$, $X \in M$ y $|M| = \aleph_\alpha$. Por el lema de condensación, el colapso transitivo de N de M es L_λ para algún $\lambda < \omega_{\alpha+1}$, pues $|N| = |\lambda| = \aleph_\alpha$. Como $\omega_\alpha \subseteq M$, el mapeo de colapso π es la identidad sobre ω_α y entonces $\pi(X) = X$. Por lo tanto, $X \in L_\lambda$. Todos los detalles de la prueba pueden verse en (Jech, 2003, p.188-191).

Una vez que Gödel presentó sus pruebas de consistencia relativa de la HGC y del AC respecto a ZF, también ofreció una serie de reflexiones sobre lo que este resultado implicaba. Para él, era claro que la prueba de consistencia no implicaba que debíamos aceptar ni HCG ni $V = L$ como proposiciones verdaderas de la teoría (o como axiomas). Para ello, tendríamos que ofrecer una justificación para aceptar estas proposiciones, una justificación filosófica que nos mostrase su adecuación respecto al universo conjuntista. Gödel tenía la convicción de que la HC era independiente del sistema ZFC y que su prueba de consistencia sólo era el primer paso para mostrar la independencia.

> Por último, la consistencia de la proposición A (que todo conjunto es constructible) es también de interés por derecho propio, especialmente porque es muy plausible que con A uno esté tratando con una proposición absolutamente indecidible, a partir de la cual la teoría de conjuntos se bifurca en dos diferentes sistemas, de forma similar a la geometría euclidiana y la no euclidiana. Como ya he dicho, sólo la primera mitad está probada, es decir, que el supuesto de que todo conjunto es constructible es consistente. Estoy plenamente convencido de que la hipótesis de que existen conjuntos no constructibles también es consistente. Una prueba de ello debería proporcionar la clave de la prueba de la independencia de la hipótesis del continuo de los otros axiomas de la teoría de conjuntos. Entonces, eso debería dar el resultado definitivo de que uno debe realmente estar contento con una prueba de la consistencia de la hipótesis del continuo, porque entonces lo que se ha demostrado es exactamente que no existe una prueba de la proposición misma. (Gödel, *1939b, p. 155).[34]

Como puede verse, Gödel en algún momento llegó a pensar que tal vez existían proposiciones que no fuesen decidibles por ningún sistema de axiomas bien justificado. Algunas de estás proposiciones eran la HC y el axioma de constructibilidad. Esta postura cambió y para 1947 cuando publicó su artículo "¿Qué es la hipótesis del continuo de Cantor?", Gödel tenía de nuevo la convicción de que se podría decidir sobre ellas. Lo que es claro a partir de esta cita es que Gödel estaba convencido que la HC no era decidible desde el sistema ZFC. Él mismo busco, sin éxito, una prueba de consistencia

[34] "Finally, the consistency of the proposition A (that every set is constructible) is also of interest in its own right, especially because it is very plausible that with A one is dealing with an absolutely indecidable proposition, on which set theory bifurcates into two different systems, similar to Euclidean and non-Euclidean geometry. As I said, only the first half is proved, namely, that the assumption that every set is constructible is consistent. I am fully convinced that the assumption that nonconstructible sets exist is also consistent. A proof of that would perhaps furnish the key to the proof of the independence of the continuum hypothesis from the other axioms of set theory. That would then yield the definitive result that one must really be content with a proof of the consistency of the continuum hypothesis, because then what would have been shown is exactly that a proof of the proposition itself does not exist." La traducción es mía.

relativa de ¬HC respecto de ZFC. A continuación presentaré la prueba de Cohen, que muestra que hay un modelo de ZFC tal que la HC es falsa en él. Se muestra así, la independencia de HC, respecto de ZFC, confirmando las sospechas de Gödel.[35]

2.2.3. *Forcing*: existe un modelo de ZFC tal que HC es falsa.

El método de *forcing* fue creado por Paul Cohen con el objetivo de dar pruebas de consistencia de conjuntos de oraciones (es especialmente útil para probar la consistencia de algunas oraciones con ZF), un caso particular en el que el método funciona es cuando se construye un modelo de ZFC+¬HC. Cohen presentó su método en un artículo en dos partes “The Independence of the Continuum Hypothesis”, publicados en 1963 y 1964. En estos textos, Cohen completó la prueba de la independencia de la HC mostrando que existe un modelo de ZFC en el que la HC es falsa.[36] Esto implica que HC no es teorema de ZFC, que junto con el resultado de Gödel expuesto en la sección anterior, muestra que ni HC ni ¬HC son teoremas de ZFC, HC es indecidible desde ZFC.[37]

El método de *forcing* consiste en construir un modelo de un conjunto de fórmulas a partir de otro modelo. El modelo original es modelo del conjunto de fórmulas que sirve como teoría base (aquella que sirve para plantear la consistencia relativa de la fórmulas); en nuestro caso, la teoría base será ZFC, aunque puede ser otra versión como NBG o un versión debilitada de ZFC. La idea central es usar el modelo original para describir de manera precisa cómo se construiría otro modelo en el cual el conjunto de fórmulas sean verdaderas. Esto es posible siempre y cuando el conjunto de fórmulas no sean incompatibles con la teoría base. Una vez que se tienen las instrucciones de construcción, se puede construir un nuevo modelo que hace verdaderas a las fórmulas de las que se quería probar su consistencia. En el caso particular de la prueba de independencia de la HC respecto a ZFC, la técnica consiste en partir de un modelo particular de ZFC[38] que sea estándar, transitivo y

[35] Gödel propuso un programa de búsqueda de nuevos axiomas que completasen los axiomas de la teoría de conjuntos, de tal suerte que se pudiera describir con mayor precisión el universo conjuntista (Gödel era un realista para los conjuntos). En el siguiente capítulo discutiremos con cierto detalle el programa de Gödel y su relación con su postura filosófica.

[36] En realidad, Cohen mostró mucho más; mostró que el axioma de elección es independiente de ZF, que el cardinal del continuo puede ser cualquiera con la excepción de aquellos que tienen cofinalidad numerable y otra serie de resultados relacionados.

[37] Si tenemos que ZFC$\cup\{\neg$HC$\}$ es consistente, entonces ZFC no implica HC. Usando el resultado de Gödel, tenemos que ni HC ni ¬HC son consecuencias lógicas de ZFC.

[38] En realidad, no se parte de un modelo de ZFC, sino de un modelo M de una cantidad

numerable,[39] en adelante modelo etn, para después describir, usando este modelo, cómo se debe construir otro modelo etn en el cual la HC sea falsa (o verdadera, esto también puede hacerse usando esta técnica). Usando esta descripción, se puede construir el modelo, la extensión genérica de modelo original.

Para lograr el objetivo, se usa un orden parcial $\mathbb{P} = (P, \leq)$ que debe ser miembro de modelo original, se define un filtro G con unas características muy particulares (un filtro genérico sobre el orden parcial) y usando estos elementos se definen nombres de todos los objetos que conformaran el nuevo modelo. El orden parcial $\mathbb{P}$ determinará el tipo de estructura que se obtiene. El filtro G sirve para interpretar los nombres y así construir el nuevo modelo. En general, el filtro G no pertenece al modelo M original. Esto permite que si construimos un modelo que lo contenga, este filtro podrá decodificar los nombres y construir un modelo que se comporte exactamente como queríamos. Para obtener diferentes modelos sólo tenemos que considerar diferentes órdenes parciales o bien diferentes filtros genéricos.[40] A continuación presentaré algunos detalles de la construcción de los modelos generados por *forcing*; en particular, hablaré del modelo que muestra la consistencia relati-

finita de axiomas de ZFC. La razón para no partir de un modelo de ZFC es que no se puede garantizar que exista tal modelo; pues si desde ZFC se puede construir ese modelo, entonces ZFC podría mostrar su propia consistencia, lo que es imposible debido al segundo teorema de incompleción de Gödel. Esto no resulta ser un problema grave, pues en las construcciones que se realizan dentro del modelo M para construir la extensión genérica del modelo $M[G]$ sólo se usa una cantidad finita de axiomas de ZFC. Así que es suficiente para la construcción de $M[G]$ que M sea modelo de la una cantidad finita de axiomas de ZFC (los que se van a usar). Es importante aclarar que esto no implica que la prueba de consistencia falle; es decir, considerar modelo de sólo una parte finita de ZFC no resta generalidad al resultado. La prueba muestra que suponiendo la consistencia de ZFC y usando una cantidad finita de axiomas de ZFC se puede probar la consistencia de ZFC+¬HC. Así, suponiendo que ZFC+¬HC es de hecho inconsistente, esto es suficiente para mostrar que ZFC mismo es inconsistente, veamos el porqué. Supongamos que $ZFC + \neg HC \vdash \Psi \wedge \neg\Psi$, esto quiere decir que existe una cantidad finita de axiomas de ZFC+¬HC, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tales que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \Psi \wedge \neg\Psi$. Entonces usando el método de *forcing* se puede probar desde ZFC que existe un modelo N tal que , $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son verdaderas en él, es decir, $ZFC \vdash \exists N(\varphi_1^N, \ldots, \varphi_m^N)$, pero entonces $ZFC \vdash \exists N(\Psi^N \wedge \neg\Psi^N)$, y ZFC sería inconsistente. Esto muestra que los modelo generados por *forcing* sí proporcionan pruebas de consistencia relativa.

[39]No es necesario usar esta clase de modelo como base para usar el método de *forcing*, algunos autores como John Bell y Thomas Jech usan como base del *forcing* el universo conjuntista, V. La razón de esto es evitar todas las aclaraciones y detalles metamatemáticos descritos en la nota anterior. Véase por ejemplo, (Jech, 2006, cap. 14) Por simplicidad, usaré la versión original que apela a modelo estándar transitivos y numerables.

[40]Cada filtro G generará una extensión genérica diferente. Sin embargo, se buscará que las fórmulas para las cuales se quiere forzar su verdad en la extensión genérica sean verdaderas en cualquier extensión genérica sin importar el filtro particular sobre el orden parcial que se elija, para ello se definirá el lenguaje de *forcing*.

va de la negación de HC respecto a ZFC. Para esto seguiré el texto (Kunen, 1980).

2.2.3.1. Nociones básicas de *Forcing.*

La construcción parte de un modelo etn M de ZFC (en realidad, M es modelo de una lista finita de axiomas de ZFC suficiente para hacer las pruebas) y un orden parcial $\mathbb{P} = (P, \leq, 1)$ tal que $\mathbb{P} \in M$,[41] es decir, un orden parcial con máximo que sea elemento de M (no es necesario que el orden parcial tenga elemento máximo, pero facilita las pruebas[42]). Se considera un filtro,[43] G, sobre $\mathbb{P}$, tal que intersecta a todos los conjuntos densos[44] en $\mathbb{P}$, esta clase de filtros se conoce como filtro $\mathbb{P}$-genéricos sobre M.[45] Dado un orden parcial $\mathbb{P} = (P, \leq, 1)$ en M, se puede probar que si M es numerable, entonces existen filtros $\mathbb{P}$-genéricos sobre M. Además, ser un conjunto denso es absoluto para modelos estándar, transitivos y numerables. Es importante resaltar que, en general, los filtros G $\mathbb{P}$-genéricos no pertenecen a M. Esto es importante porque justo construir el nuevo modelo requiere que G sea parte de él, de tal suerte que sirva para decodificar las instrucciones de construcción del nuevo modelo. El nuevo modelo es la extensión genérica de M y se denota $M[G]$.

Ahora, se pueden definir los nombres de los objetos de $M[G]$. Estos nombres serán funciones que permiten construir paso a paso cada objeto del nuevo modelo y son llamados $\mathbb{P}$-nombres pues el orden parcial elegido es fundamental en su construcción.

Def. 11 *τ es un $\mathbb{P}$-nombre sii τ es una relación y $\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau(\sigma$ es un $\mathbb{P}$-nombre y $p \in P)$.*

Los $\mathbb{P}$-nombres son funciones que tiene como dominio a la clase de los $\mathbb{P}$-nombres y como codominio a los elementos del orden parcial $\mathbb{P}$. Los $\mathbb{P}$-

[41] Un orden parcial con máximo, $\mathbb{P} = (P, \leq, 1)$, es una estructura compuesta por un conjunto P, una relación binaria, $\leq \subseteq P \times P$, que sea reflexiva, transitiva y antisimétrica, tal que existe un objeto, 1, tal que $\forall x(x \in P \supset x \leq 1)$.

[42] Es más conveniente usar ordenes parciales con máximo, pues, como se verá más adelante, si una fórmula es forzada por ese elemento máximo, entonces será verdadera en todas las extensiones genéricas sin importar el filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M que se haya elegido.

[43] Sea F un subconjunto de P. Decimos que F es un filtro sobre un orden parcial $\mathbb{P}$ sii 1) $1 \in F$, 2) si $x \in F$ y $z \in F$, entonces existe un $y \in F$ tal que $y \leq x$ y $y \leq z$, 3) si $x \in F$ y $x \leq y$, entonces $y \in F$.

[44] Un conjunto X es denso en $\mathbb{P}$ sii $\forall x(x \in P \supset \exists y(y \in D \wedge y \leq x)$. En este caso, sólo se considerarán los conjuntos densos en $\mathbb{P}$ que sean elementos de M.

[45] La definición formal de filtro $\mathbb{P}$-genérico es como sigue. Sea $\mathbb{P} = (P, \leq, 1)$ un orden parcial con máximo y sea G un subconjunto de P. Decimos que G es $\mathbb{P}$-genérico sii 1) G es un filtro sobre $\mathbb{P}$ y 2) $\forall D \supseteq P((D$ es denso $\wedge D \in M) \supset G \cap D \neq \emptyset)$.

nombres forman una clase propia de conjuntos, $V^{\mathbb{P}}$.[46] Los $\mathbb{P}$-nombres relevantes para la construcción de $M[G]$ son aquellos que son elementos de M. Ser un $\mathbb{P}$-nombre es absoluto para la clase de modelos con la que estamos trabajando. Así que si algo es un $\mathbb{P}$-nombre afuera del modelo, entonces si está en el modelo, también será un $\mathbb{P}$-nombre desde el punto de vista del modelo. El conjunto de los $\mathbb{P}$-nombres que están en el modelo se denota $M^{\mathbb{P}}$ y $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M$. $M^{\mathbb{P}}$ es un conjunto visto desde afuera del modelo, pero es una clase propia visto desde el interior del modelo. Los $\mathbb{P}$-nombres que son elementos de $M^{\mathbb{P}}$ proporcionan las instrucciones para la construcción de la extensión genérica, pero para usarlas se tiene que usar un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Así que, si G no está en M, las instrucciones no puedan ser decodificadas. Se puede presentar ahora el mecanismo de construcción de la extensión genérica. Para construir los objetos de $M[G]$, se utiliza la función $val(\tau, G)$, que dice cómo interpretar cada $\mathbb{P}$-nombre usando un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Def. 12 $val(\tau, G) = \{val(\sigma, G) \mid \exists p \in G(\langle \sigma, p\rangle \in \tau)\}$, *abreviamos* $val(\tau, G)$ *como* τ_G.

Una vez que tenemos los $\mathbb{P}$-nombres y el filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M, podemos construir la extensión genérica de M.

Def. 13 $M[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$, *es decir, el conjunto de los* $\mathbb{P}$*-nombres que están en* M *interpretados usando el filtro* G $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M.

Se puede probar que si M es un modelo estándar, transitivo y numerable de ZFC y $M[G]$ se construyó de acuerdo al procedimiento antes descrito, $M[G]$ es también un modelo estándar, transitivo y numerable de ZFC.

Puede verse que un si $\tau \in M^P$ y G_1 y G_2 son dos filtros $\mathbb{P}$-genéricos sobre M tales que $G_1 \neq G_2$, entonces es posible que $\tau_{G_1} \neq \tau_{G_2}$ (pues los elementos del orden parcial involucrados en la construcción de la interpretación de τ que están en cada filtro pueden ser diferentes). Si se quiere que la construcción de τ_G no dependa del filtro G que se elige, se puede definir una clase especial de $\mathbb{P}$-nombres tales que su interpretación no dependa del filtro G que se haya elegido. Estos $\mathbb{P}$-nombres son llamados "$\mathbb{P}$-nombres canónicos". La idea

[46] La clase $V^{\mathbb{P}}$ se puede definir formalmente por recursión como sigue. Primero se define el funcional $VP : OR \to V$.
1) $VP(\emptyset) = \emptyset$,
2) $VP(\alpha + 1) = \wp(VP(\alpha) \times P)$,
3) $VP(\alpha) = \cup_{\beta\in\alpha} VP(\beta)$ cuando α es un ordinal límite.
Definimos a la clase de los $\mathbb{P}$-nombres como $V^P = \cup_{\alpha\in OR} VP(\alpha)$. Todo $\mathbb{P}$-nombre es un elemento de $V^{\mathbb{P}}$.

central detrás de los $\mathbb{P}$-nombres canónicos es que el único elemento de $\mathbb{P}$ involucrado en la interpretación de los $\mathbb{P}$-nombres sea 1, el elemento máximo del orden parcial (que está en todos los filtros).

Def. 14 *Sea* $\mathbb{P} = (P, \leq, 1)$ *un orden parcial. Se define el* $\mathbb{P}$*-nombre canónico de* x*,* $\breve{x}$*, de manera recursiva como:* $\breve{x} = \{\langle \breve{y}, 1\rangle \mid y \in x\}$.

La relevancia de estos $\mathbb{P}$-nombres canónicos es que si $x \in M$, entonces $\breve{x} \in M$ y además $\breve{x}_G = x$, sin importar que filtro $\mathbb{P}$-genérico elegimos. Esto nos garantiza que $M \subseteq M[G]$. Esto implica que además los ordinales en M son los mismos que los ordinales de $M[G]$. Y usando los $\mathbb{P}$-nombres canónicos se puede garantizar que $G \in M[G]$, basta darle un nombre adecuado.

Def. 15 *Sea* $\Gamma = \{\langle \breve{p}, p\rangle \mid p \in P\}$.

En este caso, la interpretación de Γ si depende del filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M, para cada $p \in P$ $p \in G$ sii $p \in \Gamma_G$. Eso quiere decir que $G = \Gamma_G$. Por lo tanto, $G \in M[G]$.

Para probar que $M[G]$ es modelo de ZFC se define la noción de *forzar* y con ello el lenguaje de *forcing*.

2.2.3.2. El lenguaje de *Forcing*.

La idea intuitiva detrás del *forcing* es que un elemento p de P forza que un conjunto de $\mathbb{P}$-nombres $\tau_1, \ldots, \tau_m \in M^{\mathbb{P}}$ satisfagan a una fórmula con n variables libres $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ si para todo filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$, sucede que la fórmula $\varphi({\tau_1}_G, \ldots, {\tau_n}_G)$ es verdadera en $M[G]$. Es decir, se busca que $p \in G$ sea suficiente para que la fórmula $\varphi({\tau_1}_G, \ldots, {\tau_n}_G)$ valga en la extensión genérica $M[G]$.

Def. 16 *Sean* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula con n variables libres,* M *un modelo estándar, transitivo y numerable,* $\mathbb{P} = \langle P, \leq, 1\rangle$ *un orden parcial en* M*,* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ *y* $p \in P$*. Decimos que* p *forza que* $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$*,* $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$*, sii* $\forall G((G$ *es un filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M *y* $p \in G) \supset \varphi^{M[G]}({\tau_1}_G, \ldots, {\tau_n}_G))$.

La definición de forzar $(p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))$[47] está definida en el universo conjuntista y no en el modelo M. Esto quiere decir que no se tiene la certeza de poder usarla dentro del universo M. Afortunadamente, se puede definir

[47] La noción de forzar $\Vdash$ nos proporciona la posibilidad de dar un nueva teoría formal expresada en el lenguaje de la lógica de primer orden, en el cual el único predicado no lógico es la relación de pertenencia y las constantes son los elementos de $M^{\mathbb{P}}$.

una noción $p \Vdash^*_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$[48] tal que para toda φ, $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ sii $(p \Vdash^*_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1 1,\ldots,\tau_n))^M$. Lo que nos garantiza que $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ es equivalente a una fórmula relativizada al modelo M.

Usando estás nociones se puede probar el siguiente teorema que sirve como enlace entre el lenguaje de *forcing* y las oraciones que se cumplen en las extensiones genéricas de M.

Teorema 6 *Sean M un modelo estándar transitivo y numerable de ZFC, $\mathbb{P}$ un orden parcial en M, $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ una fórmula con n variables libres y τ_1,. . . ,$\tau_n \in V^{\mathbb{P}}$. Entonces se cumple:*
(1) Para todo $p \in P$, $p \Vdash \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ sii $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n))^M$, y
(2) Para todo filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $\varphi(\tau_{1_G},\ldots,\tau_{n_G})^{M[G]}$ sii $\exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n))$.

Este teorema permite mostrar que si en el modelo M existe un p tal que $p \Vdash^* \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ relativizado a M, es suficiente que ese $p \in G$ para que valga $\varphi(\tau_{1_G},\ldots,\tau_{n_G})^{M[G]}$.

Usando esto se puede mostrar que $M[G]$ es modelo de ZFC. No presentaré los detalles pero la idea central es aprovechar que $M[G]$ es un modelo estándar transitivo y numerable y los axiomas pueden expresarse como fórmulas del lenguaje de *forcing* y se muestra que son forzadas en cualquier extensión genérica de M.

Para completar la prueba falta mostrar que dado un modelo M estándar, transitivo y numerable de ZFC existe un orden parcial $\mathbb{P}$ y un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $M[G]$ es modelo de ¬HC.

2.2.3.3. CONS(ZFC) implica CONS(ZFC+¬HC).

La consistencia de ZFC + ¬HC se muestra construyendo una extensión genérica tal que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Para ello, se utiliza un orden parcial que tiene como elementos a todas la funciones finitas que tiene como dominio un subconjunto de $\omega_2 \times \omega$ y cuyo codominio es $\{0,1\}$ ordenadas por la relación de contención invertida. Como se está trabajando dentro de un modelo M etn ω_2 significa ω_2 de acuerdo a M; es decir, las funciones van de $\omega_2^M \times \omega$ a $\{0,1\}$. Así, el orden parcial será $\langle Fin(\omega_2^M \times \omega, 2), \supseteq, \emptyset\rangle$. Sea G un filtro $Fin(\omega_2^M \times \omega, 2)$-genérico sobre M, $\cup G$ es una función que tiene como dominio $\omega_2^M \times \omega$ y cuyo codominio es 2. Esta función $\cup G$[49] pertenece a $M[G]$ y usando este hecho se

[48]La definición formal de $\Vdash^*$ se da por recursión definiendo la relación en primer lugar para las fórmulas atómicas y después para el resto de las fórmulas.

[49]Para que este hecho en verdad sirva para nuestra prueba de consistencia relativa, tenemos que garantizar que $\omega_2^{M[G]}$ es efectivamente es $\aleph_2^{M[G]}$ pues la cardinalidades no son

puede probar el resultado esperado en $M[G]$. Se puede definir entonces para todo $\alpha < \omega_2$ una función $f_\alpha : \omega \to 2$ como sigue: $f_\alpha(n) = f(\alpha, n)$.

> Usando este hecho, se define una función $F : \aleph_2 \to 2^{\aleph_0}$ tal que $F(\alpha) = f_\alpha$.

Lo que muestra que $\aleph_2 \leq 2^{\aleph_0}$ en $M[G]$. Para mostrar que existe una $M[G]$ tal que $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$, se requiere un poco más de maquinaria formal. Para lo fines de este trabajo, no es necesario presentar estos detalles. Sin embargo, debo mencionar que el mismo método se puede usar para mostrar que $2^{\aleph_0} = \kappa$, donde κ es un cardinal infinito de cofinalidad no numerable.[50]

2.2.4. HC es indecidible desde ZFC.

La prueba de que la Hipótesis del Continuo es indecidible desde ZFC es de una naturaleza muy diferente a las pruebas de indecidibilidad involucradas en los teoremas de incompleción de Gödel. En este caso, para mostrar que la Hipótesis del continuo es independiente de ZFC se construyeron dos modelos, uno en el cual la HC es verdadera y otro en el cual la HC es falsa.

Ahora bien, parece claro que ninguno de los modelo de ZFC involucrados en las pruebas puede considerarse el modelo pretendido de la teoría de conjuntos (aunque es posible que alguno lo sea). Dado que no tenemos la certeza de que estos modelos sean el universo que la teoría de conjuntos quiere recuperar (si es que aceptamos el realismo), entonces no podemos usar estas pruebas para decidir sobre la verdad o la falsedad de la HC. Es decir, no podemos decidir sobre HC sólo reflexionando sobre las pruebas de su independencia de ZFC. Así, el método de decisión esbozado en el capítulo anterior no es aplicable en este caso.

Si queremos decidir sobre la HC, tendremos que buscar criterios de aceptabilidad para extensiones de ZFC que sean mucho más fuertes que los que requeríamos para decidir sobre G_{PA} o $CONS(PA)$. A continuación, presentaré una definición de proposición absolutamente indecidible desde un sistema que pretende mostrar de manera clara cuáles son los elementos involucrados en la modificación de los sistemas para poder decidir una proposición que es indecidible en el sistema base.

---

absolutas. Afortunadamente, se puede probar que si la construcción preserva cofinalidades, entonces preserva cardinalidades y con ello la prueba está completa.

[50] Esto se debe a que las construcciones involucradas en ordenes parciales de funciones finitas de $\kappa \times \omega$ en 2, en donde κ es cofinal con ω no preservan cofinalidades ni cardinalidades. Este punto es importante, pues sabemos que el cardinal del continuo no puede tener cofinalidad numerable.

2.3. Proposiciones absolutamente indecidibles.

El objetivo de esta sección es clarificar qué significa que una proposición sea absolutamente indecidible y qué significa que una proposición sea absolutamente indecidible desde un sistema matemático particular.

2.3.1. Proposiciones relativamente indecidibles y absolutamente indecidibles.

Comenzaré recordando la definición de indecidibilidad relativa a un sistema dado.

Def. 17 *Una proposición α es indecidible respecto de un sistema $\langle \Gamma, L\rangle$, donde Γ es un conjunto de axiomas y L es la lógica que se usa en el sistema, sii $\Gamma \nvdash_L \alpha$ y $\Gamma \nvdash_L \neg\alpha$.*

Esta definición establece cuándo una proposición es indecidible en un sistema determinado. Pero esto no es suficiente para establecer si una proposición es absolutamente indecidible, considerando que el hecho de que una proposición sea indecidible en un sistema determinado no implica que no exista otro sistema en el cuál sea decidible. Además, como se discutió en el capítulo pasado (en torno a la postura de Hilbert), para tener una prueba de una proposición matemática que sea adecuada, no es suficiente tener una prueba formal en un sistema dado, también es necesario que el sistema mismo esté bien justificado (bajo ciertos estándares que pueden variar dependiendo de la postura filosófica). Ahora bien, hablar de sistemas "bien justificados" es problemático por lo menos en dos sentidos. El primero de ellos es que no se tiene una idea clara de cuándo un sistema cumple con este requisito. El segundo consiste en que se incluyó en la decisión sobre si un problema matemático está o no resuelto a elementos que el tratamiento de Hilbert había excluido, elementos externos a la matemática involucrados en la justificación del sistema. En este sentido, hay que lidiar de nueva cuenta con cuestiones sobre cuál es la justificación de los axiomas y de la lógica de fondo. Cuestiones que involucran (o pueden involucrar) la elección de una postura filosófica particular.

Para clarificar un poco la cuestión, se puede analizar la justificación de un sistema en términos de si satisface o no un conjunto de criterios (que inevitablemente estarán asociados a una postura filosófica). Consideremos que un sistema está bien justificado si sus axiomas satisfacen un conjunto de criterios de aceptabilidad para axiomas, Φ, y la lógica usada satisface un conjunto de criterios para la aceptabilidad de una lógica, Ψ, siempre de acuerdo a un conjunto Π de normas para aplicar los criterios Φ y Ψ.[51] Así, se puede ofrecer una nueva noción de decidibilidad de una proposición que incluya los criterios desde los que evaluamos el sistema formal en el que la proposición α es analizada.

Def. 18 *Sea Γ un conjunto de axiomas, sea L una lógica, sea Φ un conjunto de criterios que sirven para evaluar al conjunto Γ de axiomas y determinar si son o no aceptables, sea Ψ un conjunto de criterios que sirven para evaluar y determinar si la lógica L es aceptable o no, sea Π un conjunto de normas para aplicar los criterios Φ y Ψ. Una proposición α está decidida respecto a $(\Gamma, L, \Phi, \Psi, \Pi)$ sii se cumple:*
(1) El conjunto Γ de axiomas está bien justificado respecto a Φ y la lógica L es aceptable de acuerdo a Ψ usando las normas de aplicación Π y
(2) $\Gamma \vdash_L \alpha$ o $\Gamma \vdash_L \neg\alpha$.[52]

Usando esta definición, se puede ver que lo que demuestran los teoremas de incompleción de Gödel es que si Φ, Ψ y Π son los propuestos por Hilbert, Γ son los axiomas de Peano y L es la lógica clásica, entonces existen proposiciones indecidibles respecto a $(\Gamma, L, \Phi, \Psi, \Pi)$. La propuesta de Gödel es modificar los Φ y Ψ de tal suerte que se puedan elegir nuevos axiomas que permitan solucionar algunos de los problemas que quedan abiertos desde el punto de vista de Hilbert. Pero, hay que remarcar que la ampliación de los criterios de aceptabilidad más allá de los límites del finitismo es un cambio en el enfoque filosófico que había elegido Hilbert y en este sentido es muy probable que él lo hubiese rechazado. A este respecto, podemos recordar que el mecanismo propuesto por Gödel para decidir sobre G_{PA} y $CONS(PA)$, requería de la aceptación de un modelo pretendido para la aritmética, algo que

[51] La necesidad de este conjunto Π de criterios de aplicación se da debido a que un mismo conjunto de criterios puede ser aplicado de muchas formas. Por ejemplo, puede suceder que uno de los criterios de aceptación para un axioma es que recupere ciertas intuiciones sobre algún concepto matemático que pretende ser capturado por los axiomas. Sin embargo, puede suceder que un candidato a axioma no cumple con este requisito, pero cumple con otros requisitos y muestra ser muy útil. En este caso, el conjunto Π puede ser muy estricto y rechazar el axioma propuesto o puede ser más permisivo y permitir que nuestro axioma sea incluido. En este sentido, puede haber más de un conjunto de axiomas y más de una lógica que cumplan con nuestros principios de aceptabilidad; es decir, los criterios de aceptabilidad no necesariamente determinan un solo sistema como aceptable y la función de los criterios Π es dar una guía que nos permita, por lo menos en principio, indicar como es que hemos de aplicar los criterios de aceptabilidad.

[52] Un problema extra que puede tener nuestra definición es que no determine una respuesta única sobre α. Se espera que los criterios sean lo suficientemente fuertes para impedir que tengamos dos sistemas $\langle \Gamma', L' \rangle$ y $\langle \Gamma'', L'' \rangle$ que sean adecuados respecto a (Φ, Ψ, Π) y que ofrezcan diferentes respuestas al problema; es decir, que uno tenga a α como teorema y otro tenga a $\neg\alpha$ como teorema.

claramente va más allá de los límites establecidos por una postura finitista, pero que es aceptable desde la postura filosófica defendida por Gödel.

Con todo, si se establece un mecanismo como el propuesto por Gödel y éste funciona para decidir sobre toda proposición indecidible para un sistema dado, entonces el costo sería relativamente menor. Basta que los criterios de aceptabilidad sean los más débiles posibles, pero que incluyan lo necesario para aplicar dicho mecanismo. Sin embargo, como el análisis de las pruebas de independencia de HC respecto de ZFC mostró, el mecanismo propuesto por Gödel no es aplicable de manera general. Así que esta estrategia no será de utilidad. Nos enfrentamos a una situación poco alentadora, de nueva cuenta para saber si una proposición es o no decidible en sentido absoluto, se debe apelar a una postura filosófica. Sucederá exactamente lo mismo si se quiere dar una definición de proposición absolutamente indecidible. Daré ahora una definición intuitiva de proposición absolutamente indecidible.

Def. 19 ***(def. intuitiva de proposición absolutamente indecidible)*** *Una proposición matemática α será absolutamente indecidible si y sólo si no existe un sistema axiomático bien justificado que tenga a α o a su negación como teoremas.*

Esta es la idea de proposición absolutamente indecidible presentada en textos como (Koellner, 2006) y (van Atten y Kennedy, 2007).[53]

> Una pregunta natural e intrigante es si existen enunciados matemáticos que son, en cierto sentido, absolutamente indecidible, es decir, indecidible en relación con cualquier conjunto de axiomas que estén justificados. (Koellner, 2006, p. 189)[54]

El problema, de nuevo, con esta definición intuitiva es que "bien justificado" no es una noción precisa e involucra elementos filosóficos que van mucho más allá de lo que los formalistas esperaban. Consideremos la siguiente definición.

Def. 20 *Una proposición α es absolutamente indecidible sii para cualquier triada de* (Φ, Ψ, Π) *si* Φ*,* Ψ *y* Π *son considerados filosóficamente adecuados*

[53]En el texto de van Atten y Kennedy, la idea central es ésta. Sin embargo, la noción de indecibilidad absoluta que presentan trata de enfocar el fenómeno de la indecidibilidad a partir de un sistema particular, es decir, ellos ofrecen una definición de indecidibilidad absoluta respecto de un sistema (ZFC). Esta clase de definición se trabajan con más detalle en la siguiente subsección.

[54]"A natural and intriguing question is whether there are mathematical statements that are in some sense absolutely undecidable, that is, undecidable relative to any set of axioms that are justi?ed." La traducción es mía.

para evaluar si un conjunto de axiomas y una lógica están bien justificados, se cumple que no existe ningún sistema $\langle \Gamma, L \rangle$ *que satisfaga los criterios* (Φ, Ψ, Π) *tal que* $\Gamma \vdash_L \alpha$ *o* $\Gamma \vdash_L \neg\alpha$*. Donde* Φ *es un conjunto de criterios para la aceptación axiomas,* Ψ *es un conjunto de criterios para la aceptación de una lógica* L *y* Π *es un conjunto de normas para la aplicación de* Φ *y* Ψ*.*

Usando esta definición es claro que la decisión sobre si una proposición matemática es o no absolutamente indecidible incluye no sólo elementos puramente matemáticos, sino elementos filosóficos. Dependiendo de la postura filosófica que se elija, una proposición puede o no ser absolutamente indecidible.[55] Por ejemplo, si se defiende una postura como el intuicionismo, muchas proposiciones serán absolutamente indecidibles, pues los sistemas que las decidan no estarían bien justificados. En este sentido, se han dejado atrás parte de los objetivos de Hilbert que eran mostrar que la solución de un problema particular se podía dar sin apelar más que a elementos de la matemática finitista.

La definición ofrecida es un tanto permisiva, toda vez que para decidir sobre una proposición determinada sólo se requiere que desde una postura filosófica particular y desde una triada (Φ, Ψ, Π) exista un sistema que decida sobre la proposición para considerarla resuelta. No todos están de acuerdo con está postura. Basta recordar la postura de Paul du Bois-Reymond. Su postura sobre los indecidibles en matemáticas se apoyaba justo en que elegir entre sistemas matemáticos cuya justificación dependía de la aceptación de una determinada postura filosófica era algo que iba más allá de las matemáticas y sus límites. De hecho, puesto en estos términos, su postura se puede replantear sosteniendo que un proposición matemática es decidible sii todos los sistemas generado por todos las triadas posibles (Φ, Ψ, Π) ofrecen el mismo veredicto sobre la proposición en cuestión. En este caso, la mayoría de las proposiciones que se han analizado en este trabajo, por ejemplo, G_{PA}, $CONS(PA)$ o HC serían absolutamente indecidibles. Esta postura es defendida actualmente por filósofos de las matemáticas como Justin Clarke-Doane.

La idea central de la propuesta de Clarke-Doane es que existen una gran cantidad de sistemas de axiomas que ofrecen respuesta diferentes a proble-

[55] Es posible que esta definición de proposición absolutamente indecidible no sea satisfactoria para todos, pues incluye una referencia a una postura filosófica que es la que nos ayudará a determinar una triada (Φ, Ψ, Π) es o no aceptable y en este sentido puede decirse que la definición no cumple con determinar cuáles son las proposiciones absolutamente indecidibles. A este respecto, se puede decir que la pregunta por la indecidibilidad absoluta de una proposición siempre depende de una postura filosófica, si se quiere que la definición sea independiente de toda posible justificación (que las incluya a todas), es claro que toda proposición sería absolutamente indecidible. Esto quedará un poco más claro más adelante.

mas abiertos como la HC. Es poco claro que exista un sistema que logre tener un apoyo último tal que permita solucionar el problema fuera de toda duda. Lo que es más, hasta el momento sólo se tienen una cantidad limitada de sistemas que abordan la cuestión y lo mejor sería considerar no sólo los sistemas alternativos que están ahora disponibles, sino todos los sistemas posibles. Ahora bien, el apoyo que puedan tener estos sistemas, dado por diferentes posturas filosóficas, no es concluyente y es por ello que proposiciones como la HC son absolutamente indecidibles.[56] En este sentido, la postura de Clarke-Doane es muy similar a la de du Bois-Reymond. Clarke-Doane va más allá, pues sostiene que si consideramos todos los sistemas posibles y todas las posturas que pueden estar involucradas en su aceptación o rechazo, no sólo proposiciones como la HC sería absolutamente indecidibles, sino que prácticamente toda proposición matemática lo sería.

> [L]a comprensión actual de la indecidibilidad absoluta hace que el argumento desde la indecidibilidad absoluta de HC a su indeterminación sea un caso especial de un estilo de argumentación que está avalada comúnmente fuera de la filosofía de las matemáticas. El problema con la comprensión actual de la indecidibilidad absoluta es que es falso que (b) los axiomas típicos no son absolutamente indecidible bajo el conocimiento actual. De hecho, (b) falla de una manera radical. (Clarke-Doane, 2012, p. 273)[57]

Si bien esta postura puede estar bien justificada, en mi opinión, en realidad muestra que la aceptación o rechazo de un sistema matemático incluye

[56]Clarke-Doane plantea el problema en términos un poco diferentes. Él pretende que la aceptabilidad o no de una proposición matemática sea evaluada sobre si existe o no un acuerdo entre todos los posibles agentes epistémicamente impecables respecto a la proposición a evaluar. Un agente es cognitivamente impecable respecto a α si es lógicamente omnisciente, competente respecto a los conceptos relevantes para α, perfectamente imaginativo, sincero, atento, etc. La idea es que un agente cognitivamente impecable respecto a α es un agente que hace lo mejor que teóricamente se puede hacer sobre α dada la evidencia actual. Así, una proposición α es absolutamente indecidible sii existe un desacuerdo sobre α entre dos agentes cognitivamente impecables respecto a α.

Clarke-Doane pretende eliminar el factor filosófico en el posible desacuerdo entre dos agentes cognitivamente impecables respecto a una proposición matemática determinada, pero no ofrece ninguna explicación sobre las razones del posible desacuerdo. En mi opinión, en la mayoría de los casos de desacuerdo sobre proposiciones matemáticas, es posible que exista un componente claramente filosófico. Muchas veces, el desacuerdo se debe a cuál es la postura filosófica elegida por los agentes involucrados.

[57]"[T]he present understanding of absolute undecidability makes the argument from the absolute undecidability of CH to its indeterminacy a special case of a style of argument that is commonly endorsed outside of the philosophy of mathematics. The problem with the present understanding of absolute undecidability is that it is false that (b) typical axioms are not absolutely undecidable under the present understanding. Indeed, (b) fails in a radical way." La traducción es mía.

elementos filosóficos. El requisito de pedir que una proposición matemática sea aceptada desde toda postura filosófica para considerarla decidida, parece ser demasiado fuerte. Además trivializaría el problema, pues todo problema matemático y, en general, toda proposición matemática serían absolutamente indecidibles.[58] Creo, además, que cuando se pregunta por la solubilidad de un problema o sobre la demostrabilidad de una proposición particular, se hace desde una perspectiva teórica particular que establece parámetros para evaluar las posibles respuestas. Esta es la razón por la que he elegido una posición un poco más permisiva. Así, para evaluar si una proposición es o no absolutamente indecidible primero se debe fijar cuál será nuestra postura filosófica.

2.3.2. Proposiciones absolutamente indecidibles desde un sistema particular.

En general, cuando se cuestiona si una proposición matemática es o no absolutamente indecidible, se hace después de haberla evaluado desde un sistema considerado adecuado de acuerdo a parámetros bien establecidos y resulta que dicha proposición es indecidible en ese sistema. Un ejemplo claro de esto es el Axioma de Constructibilidad, $V = L$, pues se propone como un candidato a ser una proposición absolutamente indecidible sólo después de que se estableció que era indecidible en ZFC.

Así, en general la pregunta sobre la indecidibilidad de una proposición no se hace en abstracto, sino que se hace desde un punto de referencia bien establecido. Esto implica que si bien la definición de proposición absolutamente indecidible ofrecida con anterioridad es adecuada, no es aplicable de forma directa para analizar casos en los que la proposición en cuestión ha sido analizada ya desde una perspectiva particular. Es por ello que se requiere establecer una noción de indecidibilidad absoluta (en sentido débil) de un proposición respecto de un sistema particular. Mark van Atten y Juliette Kennedy han dado una propuesta particular para el caso de proposiciones indecidibles en el caso de la teoría de conjuntos ZFC. "'Absolutamente indecidible' entonces significa: indecidible en ZFC y en cualquier serie de extensiones del mismo que resultan de la adición de enunciados vistos como verdaderos a partir de la prueba del teorema de incompleción." (van Atten y

[58]Algo muy similar sucedería si relajamos nuestros criterios y consideramos que una proposición matemática está demostrada si existe una prueba de ella en algún sistema matemático. Pues en este caso, toda proposición matemática sería demostrable. Es por ello que en la siguiente sección, discutiré una postura intermedia que considera la indecidibilidad de una proposición matemática desde un punto de partida dado por los trabajos previos sobre dicha proposición en una teoría matemática dada.

Kennedy, 2007, p. 314).[59] Si bien creo que está propuesta es suficiente para analizar el caso particular de una tradición filosófica (de hecho, la que me propongo analizar), también creo que no es adecuada en general, pues no considera muchos casos particulares de modificaciones posibles para el sistema original.

Cuando se está analizando una proposición particular en un sistema dado con el fin de establecer si dicha proposición es decidible, en general, tenemos razones para creer, por lo menos en un sentido débil, que el sistema es adecuado para evaluar la proposición en cuestión. Por ejemplo, cuando se trabaja en ZFC para tratar de responder el problema del continuo, de alguna forma se está suponiendo que analizar el problema desde ZFC es adecuado (tal vez porque se está suponiendo que ZFC es adecuado de acuerdo a ciertos criterios de aceptabilidad que permiten elegir entre distintas teoría de conjuntos). Si durante el proceso de evaluación se descubre que la proposición es indecidible (justo como en el caso de la HC), hay varias alternativas. Una es cambiar el sistema por otro completamente diferente, otra es abandonar el problema, otra es tratar de resolver el problema modificando el sistema original. Este es el caso que me interesa por el momento. Me concentraré en cómo sería posible resolver un problema modificando el sistema que originalmente no pudo resolverlo.

Para plantear que elementos son los relevantes en la modificación de un sistema dado con el fin de que éste resuelva un problema que sin modificaciones queda fuera de su alcance, primero hay que recordar qué significa que una proposición sea indecidible para un sistema formal. Supongamos que el sistema en cuestión tiene un conjunto de axiomas A y usa una lógica L y además satisface un conjunto de criterios de aceptabilidad para los axiomas y para la lógica (Φ, Ψ). En general, los criterios Φ y Ψ tiene una conexión; por ejemplo, si se busca una lógica que cumpla con modelar de forma adecuada los procesos inferenciales en contexto que excluyen la contradicción es posible que los criterios Φ incluyan un criterio que pida que los axiomas sean consistentes. Además, es posible que el mismo sistema (A, L) sea aceptado de acuerdo a criterios diferentes (Φ, Ψ) y (Φ', Ψ'). Cada uno de ellos, puede considerar aceptables los axiomas y la lógica del sistema por razones muy diferentes. Esto implica que las expansiones del sistema aceptables pueden variar dependiendo del los criterios de aceptación de los axiomas originales. Por ejemplo, si los criterios Ψ piden que la lógica cumpla con el principio de explosión y los criterios Ψ' no tiene tal requisito, entonces aceptaran diferen-

[59] "'[A]bsolutely undecidable' then means: undecidable in ZFC and in any series of extensions of it that result from adding statements seen to be true from the proof of the incompleteness theorem." La traducción es mía.

tes expansiones, aunque el sistema original sea aceptable para ambos. Así que para considerar las expansiones posibles hay que considerar los criterios de aceptabilidad originales.

Ahora bien, si se quiere modificar el sistema para aumentar su poder inferencial lo suficiente como para decidir sobre una proposición que antes quedaba fuera de su alcance, los elementos que se pueden modificar son el conjunto de axiomas y la lógica asociada al sistema. La modificación que parece más natural es aumentar los axiomas del sistema, justo como proponen van Atten y Kennedy.

Si se quiere incluir nuevos axiomas en el sistema original, se tiene que dar criterios para la aceptación de éstos. Estos criterios buscan ayudar a decidir entre diferentes candidatos para completar el sistema y dependen de los objetivos al incluir nuevos axiomas. En general, se busca que estos criterios sean compatibles con los criterios originales que ayudaron a elegir los axiomas del sistema. Estos criterios pueden ser de muchos tipos, algunos formales (como la consistencia) o informales (como la recuperación de alguna idea preteórica involucrada en la teoría), y pueden depender de nuestra lógica (como es el caso de la consistencia, si modificamos nuestra lógica el requisito de consistencia puede no ser un buen requisito).

Puede ser que la modificación no sólo busque incluir nuevos axiomas, tal vez puede pedir que se eliminen algunos axiomas del sistema original o sean sustituidos por algún otro principio (por ejemplo, se puede pedir que en un sistema de teoría de conjuntos se elimine algún axioma como potencia o elección y sea substituido por un axioma diferente). En consecuencia, se deben incluir un conjunto de criterios tales que permitan eliminar axiomas del sistema o reemplazarlos.

Otra modificación posible es el cambio de la lógica usada en el sistema. De nuevo se requerirán criterios para la modificación de la lógica. En general, este cambio puede modificar los resultados de aplicar los criterios para la modificación de los axiomas. Por ejemplo, si cambio una lógica por una con mayor poder inferencial, puede suceder que un conjunto de axiomas que no era inconsistente con la lógica original, con la nueva lógica lo sea. También puede suceder que el cambio de lógica implique que algún criterio ya no sea aplicable o requiera alguna modificación. Es por ello que en la modificación de un sistema es necesario considerar normas de aplicación de los tres tipos de criterios que regirán los posibles cambios en el sistema.

Una vez que se ha establecido cuáles son los elementos involucrados en la modificación de un sistema, se puede dar una definición de cuándo la modificación de un sistema, que por sí mismo no decide una proposición α, decide la cuestión.

Def. 21 *Sean Γ un conjunto de axiomas base, L la lógica del sistema original, Φ es un conjunto de criterios para la aceptación de los axiomas en Γ Ψ un conjunto de criterios para la aceptación de la lógica L, Φ' es un conjunto de criterios para la aceptación de nuevos axiomas que enriquezcan al conjunto Γ original, Φ'' es un conjunto de criterios para la eliminación de axiomas del conjunto Γ original, Ψ' un conjunto de criterios para cambiar la lógica L por una lógica L' y Π un conjunto de normas de aplicación de los criterios involucrados en la modificación del sistema que incluya además las posibles interacciones entre ellos. Una proposición α es decidible respecto a $(\Gamma, L\Phi, \Psi, \Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$ sii se cumplen las siguientes dos condiciones:*
1) Existe un sistema $\langle \Gamma', L' \rangle$ generado por $(\Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$ a partir de $(\langle \Gamma, L \rangle, \Phi, \Psi)$ tal que $\Gamma' \vdash_{L'} \alpha$ o $\Gamma' \vdash_{L'} \neg\alpha$ y
2) todo sistema $\langle \Gamma', L' \rangle$ generado por $(\Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$ a partir de $(\langle \Gamma, L \rangle, \Phi, \Psi)$ ofrece la misma respuesta.

Cuando se busca que un problema sea resuelto por una expansión de un sistema dado, se deben cumplir una serie de requisitos. En primer lugar, se debe garantizar que los criterios sean suficientes para garantizar que los sistemas generados estén bien justificados. En segundo lugar, se debe garantizar que por lo menos uno de ellos pueda resolver el problema; es decir, que tenga como teorema a α o a su negación. En tercer lugar, que todos los sistemas que deciden la cuestión ofrezcan los mismos resultados; de otra forma es claro que el problema no está resuelto, pues buscamos una respuesta única.

En este contexto, es perfectamente posible encontrar proposiciones que no puedan ser decididas nunca por ningún sistema que sea una modificación del original. Esto puede ser porque no existe ningún sistema de axiomas bien justificado que decida la cuestión o bien porque existen dos o más sistemas que deciden la cuestión de diferente forma. Podemos dar ahora una definición de proposición absolutamente indecidible respecto de un sistema $(\langle \Gamma, L \rangle, \Phi, \Psi)$.

Def. 22 *(proposición absolutamente indecidible respecto de un sistema) Una proposición α es absolutamente indecidible respecto a un sistema $(\langle \Gamma, L \rangle, \Phi, \Psi)$ sii para toda tétrada $(\Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$ que se considere adecuada (respecto de la postura filosófica que sirve para evaluar el sistema) no existe un sistema $\langle \Gamma', L' \rangle$ generado por $(\Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$ a partir de $(\langle \Gamma, L \rangle, \Phi, \Psi)$ tal que $\Gamma' \vdash_{L'} \alpha$ o $\Gamma' \vdash_{L'} \neg\alpha$.*[60]

[60] Algo que puede suceder es que existan dos modificaciones del sistema que sean adecuadas de acuerdo a los criterios establecidos y tales que decidan la cuestión en caminos diferentes. En ese caso, es posible que se considere que el problema todavía no ha sido resulto, pero todavía se tiene la opción de ser más restrictivos sobre nuestros criterios de aceptabilidad. O bien puede ser que la postura filosófica que ha sido elegida sea compatible con que exista más de una respuesta correcta y en ese caso el problema ya está resuelto.

Si bien creo que algunos no estarán de acuerdo en llamar a esto una definición de proposición absolutamente indecidible, pues incluye el sistema de partida, los criterios de aceptabilidad y una perspectiva filosófica particular desde la que se evalúa la adecuación del sistema, creo que sirve muy bien para clarificar el análisis de este fenómeno. En concreto creo que tiene las siguientes virtudes:

1. Incluye al conjunto original de axiomas, tal como se hace en el análisis de proposiciones indecidibles.

2. Establece la posibilidad de cambiar la lógica, algo que si bien no es muy explotado todavía, tiene gran potencial. Un ejemplo, que se presentará brevemente en el quinto capítulo es la propuesta de Hugh Woodin que incluye un cambio de lógica por una lógica más fuerte que define la consecuencia lógica en términos de invariancia bajo *forcing*.

3. Toma en cuenta el conjunto de criterios para la aceptación de nuevos axiomas que se usan para expandir el sistema y su compatibilidad con los criterios originales que sirvieron para seleccionar el sistema original.

4. Deja claro el papel de la filosofía en cuestiones de indecidibilidad. La filosofía puede ofrecer un análisis de los axiomas base, los criterios de aceptación para nuevos axiomas y la lógica que han de usarse para la evaluación de la proposición.

Para el caso particular que se está analizando en este trabajo, la indecidibilidad de HC respecto a ZFC, no es necesario involucrar todos los elementos antes mencionados, puesto que la lógica se mantiene fija y los criterios que se usan para aceptar los axiomas originales son compatibles y en algunos casos los mismo que los involucrados en la aceptación de nuevos axiomas, además de que sólo se busca incluir nuevos axiomas y no se contempla la posibilidad de eliminar axiomas.[61]

2.3.3. Clasificación de proposiciones indecidibles en ZFC.

Usando la definición de proposición indecidible respecto a un sistema, se puede ofrecer una clasificación de proposiciones indecidibles en el sistema

[61] En el quinto capítulo presentaré brevemente dos propuestas que implican la eliminación de axiomas de la teoría de conjuntos tradicional. Las propuestas están relacionadas con el axioma de determinación y los axiomas de simetría. En ambos casos, es necesario eliminar el axioma de elección.

ZFC.[62]

La idea central detrás de una clasificación de las proposiciones indecidibles respecto a un sistema es que cada una de ellas requiere de más o de menos elementos para poder decidir sobre ellas; es decir, aunque dos proposiciones sean indecidibles no necesariamente las modificaciones del sistema necesarias para decidir sobre ellas son de la misma complejidad. Por ejemplo, si se comparan proposiciones como G_{ZFC} y HC se puede observar que mientras que G_{ZFC} puede decidirse con criterios muy permisivos (como los propuestos por Gödel), HC requiere de un análisis y una modificación del sistema que es mucho más compleja. A este respecto, van Atten y Kennedy ofrecen una clasificación de las proposiciones indecidibles respecto a ZFC en cinco categorías, poniendo énfasis en aquellas proposiciones tales que se puede decidir sobre ellas reflexionando sobre su prueba y aquellas en las que este mecanismo no es suficiente. Su clasificación es como sigue:

> 1. Oraciones que son indecidibles en ZFC pero tales que su verdad puede ser vista (y decidida informalmente) al reflexionar sobre sus pruebas de indecidibilidad respecto a ZFC.
> 2. Oraciones que son indecidibles en ZFC, y tales que no se puede decidir informalmente sobre ellas reflexionando sobre sus pruebas de indecidibilidad.
> 3. Oraciones que son indecidibles en ZFC, pero que son decididas por una extensión evidente (o una serie de extensiones) de ZFC.
> 4. Oraciones que son indecidibles en ZFC, no son decidibles en ninguna extensión evidente de ZFC, pero pueden ser decididas por la razón humana.
> 5. Oraciones que son indecidibles en ZFC, no son decidibles en ninguna extensión de ZFC, y no pueden ser decididas por la razón humana. (van Atten y Kennedy, 2009, pp. 305-306)[63]

El problema con esta clasificación es que parece suponer que el proceso de decisión basado en el análisis de la pruebas es inocuo, pero como hemos

[62] Una estrategia similar se puede usar para clasificar proposiciones indecidibles en otros sistemas, incluso puede proponerse una clasificación general de las proposiciones indecidibles en cualquier sistema.

[63] "1. sentences that are undecidable in ZFC but seen to be true (and hence decided informally) by reflecting on the proof of their undecidability in ZFC.
2. sentences that are undecidable in ZFC, and are not decided informally by reflecting on the proof.
3. sentences that are undecidable in ZFC, but are decidable in an evident extension (or series of extensions) of ZFC.
4. sentences that are undecidable in ZFC, are not decidable in any evident extension of ZFC, but can be decided by human reason.
5. sentences that are undecidable in ZFC, are not decidable in any evident extension of ZFC, and cannot be decided by human reason" La traducción es mía.

visto también requiere que asumamos algunos criterios de aceptabilidad y una postura filosófica particular. Además, no considera la complejidad de las modificaciones que deberían hacerse a ZFC para decidir la proposición en cuestión.

Mi propuesta de clasificación consiste en clasificar a las proposiciones indecidibles en ZFC respecto a los conjuntos $(\Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$ que resulten suficientes para decidirlas. Una proposición es del tipo $(\Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$ sii es decidida por alguna expansión del sistema original adecuada de acuerdo a $(\Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$.

En general, no hay forma de comparar dos conjuntos de criterios $(\Phi', \Phi'', \Psi', \Pi)$ y $(\Phi'_1, \Phi''_1, \Psi'_1, \Pi_1)$, a menos que suceda que un conjunto de criterios es una expansión de otro, en este caso diremos que el conjunto que expande al otro es mayor. En caso de que un conjuntos de tétradas ordenadas de criterios sean comparables, elegiremos como el tipo de la proposición en cuestión el que sea menor. Considerando esto se puede ver que con esta técnica se genera un orden parcial de tétradas ordenadas de conjuntos de criterios, muchos de ellos incomparables. Este orden parcial proporcionará una clasificación de las proposiciones indecidibles de acuerdo a las tétradas ordenadas que permiten obtener sistemas que expandan ZFC y que decidan la cuestión. Es importante aclarar que una misma misma proposición indecidible en ZFC puede tener varios tipos, pero todos ellos serían incomparables entre sí. Esto, en general, no es un problema, puesto que cuando se quieren comparar dos proposiciones indecidibles respecto a la complejidad de los criterios necesarios para obtener una expansión del sistema que pueda decidir sobre ella, se hace pensando en un tipo particular de expansión (guiada por un tipo particular de criterios y extensiones de estos criterios).

La ventaja de esta clasificación es que no privilegia a ningún mecanismo particular para la solución de un problema y permite dejar en claro bajo que circunstancias la proposición en cuestión queda decidida. La desventaja evidente es que el orden parcial usado en la clasificación es tremendamente complejo.

2.3.4. El espacio de posibilidad de la indecidibilidad.

En la subsección anterior ofrecí una clasificación de las proposiciones indecidibles respecto a ZFC y sostuve que se podía ofrecer una clasificación general de las proposiciones indecidibles. Pero creo que se puede hacer algo todavía más fuerte y relevante, creo que se puede ofrecer una caracterización de todas las posibilidades relevantes para evaluar la indecidibilidad absoluta de una proposición matemática dada en un sistema particular. Es decir, creo que se puede ofrecer una caracterización del espacio de posibilidad de la indecidibilidad absoluta de una proposición matemática.

No es esencial para los fines de este trabajo ofrecer dicha caracterización, pero creo que puede ser de utilidad para comprender el fenómeno de la indecidibilidad desde un punto de vista más general. Además, creo que esto me permitirá clarificar algunos puntos filosóficamente relevantes que ofreceré en los siguientes capítulos.

Para comenzar, retomaré la definición de indecidibilidad absoluta de una proposición en un sistema matemático particular.

Def. *Una proposición α es absolutamente indecidible respecto a un sistema ($\langle\Gamma, L\rangle$,Φ,Ψ) sii para toda Φ',Φ'',Ψ',Π que se considere adecuada (respecto de la postura filosófica que sirve para evaluar el sistema) no existe un sistema $\Gamma', L'\rangle$ generado por (Φ',Φ'',Ψ',Π) a partir de ($\langle\Gamma, L\rangle$,Φ,Ψ) tal que $\Gamma' \vdash_{L'} \alpha$ o $\Gamma' \vdash_{L'} \neg\alpha$.*

La definición incluye como elementos relevantes para determinar la indecidibilidad absoluta de una proposición α 1) al sistema ($\langle\Gamma, L\rangle$,Φ,Ψ), 2) los criterios Φ',Φ'',Ψ',Π y 3) la postura filosófica de fondo que sirve para evaluar la adecuación tanto del sistema como de los criterios. Si se acepta esta definición, entonces la pregunta por la indecidibilidad absoluta de una determinada proposición matemática se hace desde una elección particular de estos tres elementos. Probablemente la única restricción es que el lenguaje del sistema elegido tenga a α como una de sus fórmulas, pero en principio no hay ninguna otra restricción para la elección de los tres elementos involucrados. Esto permite dibujar el espacio de posibilidad para la indecidibilidad de una proposición matemática dada. El espacio de posibilidad para la indecidibilidad de una proposición matemática dada está dado por todas las posibles elecciones de los tres elementos involucrados.

Así, por ejemplo, la evaluación de la indecidibilidad de la HC dependerá de la elección del sistema base, de los criterios de modificación del sistema y de la postura filosófica de fondo. Para cada elección habrá una respuesta posible.[64] Esto puede parecer desalentador, especialmente, porque parece que

[64]En el caso de la HC, se puede elegir ZFC como sistema de fondo recuperando los criterios de aceptabilidad dados por los creadores de la teoría de conjuntos, con los criterios de modificación dados por Gödel (que veremos en el siguiente capítulo) y eligiendo el realismo matemático como la postura filosófica de fondo. Pero hay otras opciones posibles. Por ejemplo, se puede elegir ZFC como sistema de fondo recuperando los criterios de aceptabilidad dados por los creadores de la teoría de conjuntos, con los criterios de modificación dados por Maddy (que veremos en el capítulo cuatro) y eligiendo el naturalismo como la postura filosófica de fondo. También se puede elegir ZFC como sistema de fondo recuperando los criterios de aceptabilidad dados por los creadores de la teoría de conjuntos, con los criterios de modificación dados por Freiling (que presentaré brevemente en el quinto capítulo) y eligiendo el realismo como la postura filosófica de fondo. Cada una

una elección particular de los elementos involucrados puede ser arbitraria. Sin embargo, creo, es el panorama más honesto y general que se puede ofrecer del fenómeno de la indecidibilidad.

Esto implica que para realizar el análisis sobre la indecidibilidad de la HC que me interesa, debo hacer una elección particular de estos tres elementos. El primer paso está casi dado, pues he elegido al sistema ZFC como sistema de partida, aunque me falta establecer los criterios de aceptabilidad del sistema de los que voy a partir. Pero, aún falta establecer los criterios de modificación de ZFC y la postura filosófica de fondo.

En los siguientes dos capítulos exploraré diferentes posibilidades para la elección de criterios de modificación del sistema ZFC y de la postura filosófica de fondo. En particular, consideraré los criterios dados por Gödel y los dados por Maddy, que son muy similares, y sus respectivas posturas filosóficas, el realismo y el naturalismo. Para finalmente, optar por la combinación ofrecida por Maddy.[65]

2.4. Conclusiones del capítulo.

En este capítulo presenté las pruebas de independencia de la HC respecto a ZFC y una definición de proposición absolutamente indecidible respecto de un sistema particular. A partir de estos elementos puedo extraer las siguientes conclusiones:

(1) Las pruebas de independencia de la HC respecto a ZFC muestran que existen proposiciones indecidibles que no pueden ser decididas por un razonamiento metateórico similar al usado antes.

(2) Lo más adecuado es analizar la decidibilidad de una proposición matemática respecto a un sistema matemático particular y no desde un punto de vista completamente abstracto.

(3) Si se quiere decidir sobre una proposición indecidible, se debe modificar el sistema base en el que fue analizado. Esto requiere que se establezcan criterios para tal modificación, pues no sólo buscamos que el problema sea decido por un sistema, sino que el sistema este bien justificado. La

de estas combinaciones ofrecerá respuestas diferentes sobre la indecidibilidad de la HC.

[65]Esto no quiere decir que crea que la opción que elegiré es la única posible o la más adecuada a secas. Mi elección estará basada en un criterio más débil y que tiene que ver con una elección metodológica. Creo que la metodología de Maddy tiene muchas ventajas y es más acorde con el trabajo de los matemáticos, pero esto en ningún sentido demerita (o imposibilita) otras posibles posiciones filosóficas.

adecuación de estos criterios se evalúa desde una perspectiva filosófica particular.

(4) Para evaluar diferentes propuestas de solución para el problema del continuo requerimos fijar una postura filosófica desde la que evaluaremos las propuestas.

El plan de trabajo para los siguientes dos capítulos es fijar una postura filosófica, evaluar la pertinencia de resolver el problema, fijar los criterios de modificación del sistema ZFC y evaluar la aplicación de dichos criterios a las propuestas concretas presentadas hasta el momento desde la postura filosófica elegida. Para ello, presentaré: 1) El programa de Gödel de búsqueda de nuevos axiomas, su relación con su postura realista. 2) Las críticas de Solomon Feferman al programa de Gödel y un esbozo de su propuesta. 3) Las críticas de Penelope Maddy a Feferman, poniendo énfasis en el análisis que ella ofrece de las prácticas de la teoría de conjuntos. 4) La postura naturalista de Maddy y su crítica al realismo robusto. 5) Los criterios de aceptabilidad de nuevos axiomas que propone Maddy.

En el último capítulo ofreceré un análisis de la indecidibilidad absoluta de la HC desde ZFC con los criterios de aceptación dados por los creadores de la teoría de conjuntos, con los criterios de modificación del sistema ofrecidos por Maddy y tomando como postura filosófica de fondo el objetivismo producto de la metodología de la filosofía segunda.

Capítulo 3

El programa de Gödel.

Esta actitud negativa hacia la teoría de conjuntos de Cantor y hacia la matemática clásica, de la que es una generalización natural, no es de ningún modo, sin embargo, un resultado necesario de un examen detallado de sus fundamentos, sino únicamente una consecuencia de una cierta concepción filosófica de la naturaleza de las matemáticas [...]. Para quien considere que los objetos matemáticos existen independientemente de nuestras construcciones y de que tengamos individualmente una intuición de ellos y para quien exija únicamente que los conceptos generales matemáticos sean lo suficientemente claros como para que seamos capaces de reconocer su corrección y la verdad de los axiomas que les conciernen, existe, creo, una fundamentación satisfactoria de la teoría de conjuntos de Cantor en toda su amplitud y significado originales, a saber, la teoría axiomática de conjuntos [...]

Kurt Gödel

3.1. Después de las pruebas de independencia.

En capítulo anterior, presenté los resultados que prueban que la HC es una proposición indecidible desde la teoría de conjuntos ZFC (el resultado vale para la mayoría de las teorías comúnmente aceptadas). A partir del análisis de estas demostraciones concluí que la HC es una proposición indecidible sobre la que no se puede decidir reflexionando sobre la prueba que muestra su indecidibilidad.

La publicación de estos resultados causó diferentes reacciones entre los teóricos de conjuntos. Algunos de ellos, como Paul Cohen y Andrzej Mostowski, concluyeron a partir éstos que existen diferentes teorías de conjuntos (tal como existen diferentes geometrías); en algunas de ellas vale la HC y en otras no.[1] Algunos otros, como Kurt Gödel y Georg Kreisel, interpretaron los resultados como evidencia de que los axiomas de ZFC eran insuficientes para recuperar todas las intuiciones sobre los conjuntos y propusieron buscar de nuevos axiomas que complementasen la teoría original.

En particular, Kurt Gödel propuso un programa que tenía como objetivo la búsqueda de nuevos axiomas bien justificados que extendiesen la teoría de conjuntos estándar (y que decidiesen la HC). La propuesta de Gödel estaba relacionada con su postura filosófica. Él era un realista para la teoría de conjuntos y buscaba tener la mejor teoría de conjuntos posible; aquella que describiese de la manera más precisa y completa posible al universo de los conjuntos. No todos han estado de acuerdo con el programa de Gödel. Algunos, como Solomon Feferman, han sostenido que el programa carece de sustento y han propuesto versiones alternativas del programa. Algunos otros, como Penelope Maddy, han defendido el programa; pero, han criticado la postura realista gödeliana y han sostenido que es incompatible con el trabajo de los teóricos de conjuntos involucrados en la búsqueda de nuevos axiomas para ZFC.[2]

En este capítulo presentaré el programa de Gödel, su relación con el realismo matemático y las críticas de Solomon Feferman a este programa. El primer objetivo del capítulo es clarificar los puntos centrales del programa de búsqueda de nuevos axiomas y su justificación. Esto resulta de la mayor relevancia para los objetivos del trabajo, dado que es justo este programa el que inaugura la tradición que tiene como uno de sus fines resolver el problema del continuo mediante de la adopción de nuevos axiomas. El segundo objetivo es presentar las críticas de Feferman al programa; pues han sido muy influyentes en la discusión en torno a la búsqueda de nuevos axiomas y, de ser correctas, implican que la búsqueda de nuevos axiomas que extiendan

---

[1]Por ejemplo, Mostowski sostuvo sobre las pruebas de independencia de la HC que: “This shows that the incompleteness of set-theory is caused by other circumstances than the incompleteness of arithmetic. It is comparable rather to the incompleteness of group theory or of similar algebraic theories. These theories are incomplete because we formulated their axioms with the intention that they admit non-isomorphic models. In the case of set-theory we did not have this intentions but the results are just the same.

Models constructed by Gödel and Cohen are important not only for the purely formal reasons that they enable us to obtain independence proofs, but also because they show us various possibilities which are open to us when want to make more precise the intuitions underlying the notions of a set.” (Mostowski, 1964, p. 94).

[2]En el siguiente capítulo discutiré a detalle las críticas de Maddy a la postura filosófica de Gödel. Pero puedo adelantar que la crítica se centra en la metodología filosófica elegida por Gödel para construir su filosofía de las matemáticas (la metodología de la filosofía primera), pues de acuerdo a Maddy no respeta las prácticas matemáticas.

la teoría de conjuntos no está justificada. De acuerdo a Feferman, el programa de Gödel en su versión tradicional debe ser abandonado y la HC es absolutamente indecidible desde ZFC.[3]

3.2. El Programa de Gödel.

Esta sección está dividida en dos subsecciones. En la primera presentaré el programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas que completen la teoría de conjuntos y su relación con la posición realista de Gödel. Dicha postura está estrechamente relacionada con la creencia de Gödel sobre que el concepto de "conjunto de", que está detrás de la jerarquía acumulativa de conjuntos, es el concepto que permite obtener (sin ambigüedad) el universo conjuntista; es decir, es el que permite recuperar las intuiciones preteóricas sobre los conjuntos. Sin embargo, no es del todo claro que esto sea así. En una segunda subsección presentaré el teorema de cuasi-categoricidad de Zermelo para la teoría de conjuntos con urelementos expresada en el lenguaje de la lógica de segundo orden. Una vez hecho esto, haré algunas clarificaciones sobre la relación de la jerarquía acumulativa y el realismo en teoría de conjuntos.

3.2.1. Realismo gödeliano y la búsqueda de nuevos axiomas.

La filosofía de las matemáticas de Kurt Gödel comienza con la aceptación del realismo en matemáticas. El realismo es una postura matemática que puede ser entendida de múltiples formas. Por el momento, haré una distinción entre dos tipos de realismo; a saber, el realismo en ontología y el realismo en valor de verdad. Shapiro ha presentado esta clasificación de la siguiente forma.

> Incluso al nivel de los eslóganes, hay dos temas diferentes del realismo. El primero es que los objetos matemáticos existen de manera independiente

[3]Feferman sostiene que ZFC tiene como único objetivo ofrecer un marco teórico que sirva para fundamentar a las matemáticas clásicas, especialmente a las teorías matemáticas que pueden aplicarse en las ciencias empíricas. La aceptación de los axiomas de ZFC depende de qué tan bien puedan realizar este trabajo. Feferman sostiene que si bien ZFC es suficiente para este trabajo, no es necesaria; pues, existen otros sistemas matemáticos mucho más débiles que puede realizarlo sin ningún problema. Además, sostiene que debemos elegir esos sistemas sobre ZFC. Pero si se deben preferir sistemas más simples, la búsqueda de nuevos axiomas está completamente errada y debe ser abandonada. Tal abandono implica que no se puede decidir sobre la HC; pues para ello, es necesario recurrir a un sistema más fuerte que ZFC.

> de las mentes, los lenguajes, etc. Llamemos a éste realismo en ontología. El segundo tema es que los enunciados matemáticos tienen valores de verdad objetivos independientes de las mentes, los lenguajes, las convenciones, etc. Llamemos a éste realismo en valor de verdad. (Shapiro, 1997, p. 37) [4]

Se puede hacer una distinción entre el realismo en ontología, que se compromete con la existencia objetiva e independiente de los objetos matemáticos, y el realismo en valor de verdad, que sólo se compromete con que todos las proposiciones del sistema tienen un valor de verdad determinado, objetivo e independiente. Es común que una postura realista sea, al mismo tiempo, realista en ontología y realista en valor de verdad; pero, no hay nada que impida que una postura sea realista en un sentido y antirrealista en el otro.

Gödel era realista tanto en ontología como en valor de verdad. Él creía que los objetos matemáticos existen de manera independiente de los seres humanos y de sus intuiciones. En particular, creía que existe el universo o dominio de los conjuntos, lo que muestra que Gödel era un realista en ontología. Desde el punto de vista de Gödel, el objeto de estudio de la teoría de conjuntos es ese dominio de objetos independientes (el universo conjuntista). En este sentido, la teoría de conjuntos sería muy parecida a las teorías empíricas; sólo que esta teoría busca describir el universo de los conjuntos, sus objetos y sus relaciones, en lugar de preocuparse por los objetos del mundo físicos y sus relaciones. En consecuencia, cualquier proposición de la teoría de conjuntos, en tanto busca describir de manera correcta el universo conjuntista, tiene un único valor de verdad; determinado por el comportamiento de los objetos en este universo. Su postura también es realista en valor de verdad.[5] Es importante resaltar que la postura de Gödel es realista en valor de verdad debido a que él es realista en ontología; él se compromete con que existe un único universo conjuntista y el valor de verdad de las proposiciones de la teoría se establece respecto a este universo.

---

[4] "Even at the level of slogans, there are two different realist themes. The first is that mathematical objets exist independently of the minds, languages, and so on. Call this realism in ontology. The second theme is that mathematical statements have objective truth-values independent of the minds, languages, conventions, and so forth, of mathematicians. Call this realism in truth-value." La traducción es mía.

[5] La aceptación de una postura realista en ontología no implica de manera inmediata la aceptación de un realismo en valor de verdad. Para que la implicación se dé tiene que cumplirse un requisito extra; a saber, se requiere aceptar o bien que sólo existe un universo conjuntista que es el objeto de estudio de la teoría, o bien que existen varios universos conjuntistas que son objetos de estudio de la teoría, pero tales que todos son isomorfos. La postura de Gödel cumple con uno de estos requisitos, pues él cree que hay un universo conjuntista privilegiado. Sin embargo, existen otras posturas filosóficas que aceptan tanto el realismo en ontología como la existencia independiente de muchos universos conjuntistas no isomorfos y, por ello, no están comprometidas con el realismo en valor de verdad.

El realismo es un elemento muy relevante en la filosofía de Gödel; pues es el garante de la existencia de una respuesta concreta para todo problema de la teoría de conjuntos (y matemático en general). Cualquier proposición de la teoría de conjuntos es verdadera o falsa respecto al universo conjuntista; esto es así, incluso si los hechos matemáticos relevantes nunca llegan a ser conocidos por ningún ser humano. El problema es encontrar un método adecuado para acceder al hecho matemático que decide cada problema matemático concreto; el problema es epistémico.

El formalismo no ofrece elementos suficientes para proporcionar el acceso epistémico requerido; pues, su epistemología finitista es muy austera. Es por esto que, Gödel consideró que sus teoremas de incompleción de la aritmética, más que mostrar que hay límites para el conocimiento matemático, mostraban que el formalismo dejaba parte de la práctica matemática fuera, una parte relevante (véase sección 1.4.2 y ss.).

Gödel era plenamente consciente de que existen limitaciones humanas que pueden impedir que los matemáticos lleguen a tener un conocimiento perfecto del universo conjuntista. Pero, consideraba que las limitaciones epistemológicas impuestas por el finitismo de Hilbert eran demasiado restrictivas y no correspondía con las limitaciones reales de los seres humanos. Como prueba de esto se tiene el hecho de que un ser humano puede decidir sobre las proposiciones $CONS(PA)$ y G_{PA} reflexionando sobre sus pruebas de indecidibilidad respecto a PA (este método presupone la aceptación de un modelo pretendido para la teoría y, por ello, de una versión débil de realismo).[6]

> Esta actitud negativa hacia la teoría de conjuntos de Cantor y hacia la matemática clásica, de la que es una generalización natural, no es de ningún modo, sin embargo, un resultado necesario de un examen detallado de sus fundamentos, sino únicamente una consecuencia de una cierta concepción filosófica de la naturaleza de las matemáticas, que admite objetos matemáticos

[6]La posibilidad de decidir sobre algunas proposiciones apelando a métodos que salen del marco formalista no es suficiente para garantizar que no hay límites para el conocimiento matemático. Todavía es perfectamente posible que incluso aceptando el realismo gödeliano existan proposiciones absolutamente indecidibles desde un punto de vista humano. Sin embargo, hay que notar dos puntos. El primero, que ya discutió en el capítulo 1, es que la aceptación del realismo sí nos permite generar métodos que nos permitan sobrepasar los límites impuestos por el formalista; por ejemplo, el que apela a la reflexión sobre la prueba de indecidibilidad de G_{PA}. El segundo es que el problema de los límites de nuestro cocimiento matemático ahora sólo se centra en cuál es nuestro acceso epistémico al universo conjuntista. Sin la aceptación del realismo, es perfectamente posible que no podamos conocer el valor de verdad de una proposición matemática; debido a que, no habría un hecho que la haga verdadera o falsa. Con esto, no quiero decir que el realismo sea condición necesaria para que tenga sentido preguntarse por la solubilidad de un problema, pero si quiero decir que es una condición suficiente.

> sólo en la medida en que sean interpretables como nuestras propias construcciones o, al menos, sean completamente dados en una intuición matemática. Para quien considere que los objetos matemáticos existen independientemente de nuestras construcciones y de que tengamos individualmente una intuición de ellos y para quien exija únicamente que los conceptos generales matemáticos sean lo suficientemente claros como para que seamos capaces de reconocer su corrección y la verdad de los axiomas que les conciernen, existe, creo, una fundamentación satisfactoria de la teoría de conjuntos de Cantor en toda su amplitud y significado originales, a saber, la teoría axiomática de conjuntos interpretada al modo esbozado más adelante. (Gödel, 1947, p. 359-360)

La interpretación aludida por Gödel es la concepción iterativa de conjunto; ésta consiste en ver a los conjuntos como "conjuntos de" objetos que ya existían previamente. Desde esta perspectiva, los conjuntos son construidos a partir de los objetos más básicos mediante operaciones descritas por los axiomas. Desde su punto de vista, esta concepción tiene la virtud de nunca haber provocado antinomias. Gödel la tomó como base para desarrollar sus intuiciones sobre el concepto de conjunto y como una guía para acceder al universo conjuntista.[7]

La teoría de conjuntos desarrollada hasta ese momento (ZFC o sus equivalentes) es suficiente para reconstruir todas la pruebas de la matemática estándar; es decir, con ZFC se pueden reconstruir las pruebas más usuales de todas (o casi todas) las áreas de la matemática (Gödel cree que esto da un sustento lo suficientemente fuerte a los axiomas de ZFC). Sin embargo, quedan fuera de su alcance las pruebas que tienen que ver con la cardinalidad de ciertos conjuntos y algunos otros problemas que surgen dentro de la teoría de conjuntos vista como una teoría matemática; por ejemplo, si algunos conjuntos de números reales tienen tales y cuales propiedades o si vale el axioma de constructibilidad.

Desde le punto de vista de Gödel, una vez que hemos adoptado el uso de sistemas formales en matemáticas, y en particular en teoría de conjuntos, el problema de decidir sobre estas proposiciones recae por completo en la elección de los axiomas de la teoría de conjuntos.[8] El problema en torno a la

[7]El concepto de "conjunto de" fue tomado en como guía para la elección de nuevos axiomas para ZFC en (Gödel, 1947). La visión de Gödel cambio un poco en su (1964); pues, en esta nueva versión de su texto, el interés principal era garantizar que los axiomas fuesen correctos respecto a la jerarquía acumulativa de conjuntos. Las versiones son muy similares y los detalles no son muy relevantes. Basta saber que en cada caso, lo que se busca es que los nuevos axiomas sean verdaderos en el universo conjuntista.

[8]Es importante notar que para Gödel, aunque no lo indica explícitamente, la lógica usada en el sistema no es un elemento que pueda ser cuestionado o substituido con el fin de lograr decidir sobre las proposiciones indecidibles en teoría de conjuntos. Algunos

decidibilidad de una proposición matemática se resume en si es o no derivable en el sistema en el que es evaluada.

> Por ello su indecidibilidad a partir de los axiomas que hoy día aceptamos sólo puede significar que estos axiomas no entrañan una descripción completa de esta realidad. Esta creencia no es, de ningún modo, quimérica, pues es posible establecer medios para obtener la decisión de una pregunta que es indecidible a partir de los axiomas usuales. (Gödel, 1947, p. 362)

La prueba de indecidibilidad de la HC (y la existencia de algunas otras proposiciones indecidibles en ZFC) no es el fin del problema del continuo (ni de los problemas relacionados con las otras proposiciones indecidibles). Desde el punto de vista de Gödel, la existencia de esta clase de proposiciones sólo muestra que la teoría ZFC no ofrece una descripción completa del universo conjuntista. Y dado que el objetivo de la teoría es dar una descripción correcta y lo más completa posible de este universo, el teórico de conjuntos debe tratar de refinar y completar la teoría. Para ello, debe elegir nuevos axiomas (bien justificados) que permitan decidir sobre la HC y algunas otras proposiciones como $V = L$.[9]

La incompleción de la teoría ZFC no representa un problema grave para la teoría de conjuntos axiomática. Puesto que esta teoría no es un sistema acabado o cerrado en sí mismo. Más bien es un sistema que pretende recuperar nuestras intuiciones sobre la construcción de "conjuntos de" objetos. No parece haber ningún inconveniente en incluir nuevos procesos que nos permitan formar u obtener nuevos conjuntos, siempre y cuando estos procesos sean claros y estén bien justificados. Estos procesos quedaría establecidos en los nuevos axiomas de la teoría. Para decidir sobre una proposición indecidible desde ZFC, como la HC o $V = L$, sólo se necesita ofrecer nuevos axiomas que extiendan ZFC, justificarlos de manera adecuada y mostrar que el nuevo sistema implica o bien a la proposición en cuestión o bien a su negación. El problema de la indecidibilidad se resume a buscar nuevos axiomas bien justificados y, por ello, el problema se vuelve, en buena medida, un problema epistemológico.

Los mecanismos (epistémicos) de acceso al universo de la teoría de conjuntos que se acepten serán los que determinen las formas en que se pueden justificar los nuevos axiomas. El problema de la justificación es central en este punto. Se busca que los nuevos axiomas describan de forma adecuada

trabajos contemporáneos en el área apuntan justo a cambiar la lógica clásica de primer orden por una lógica más fuerte con el fin de completar el sistema. Véase (Woodin, 2000a y 2000b).

[9]Gödel creía que la HC era falsa e incluso ofrece algunos argumentos (no concluyentes) para sostener que era implausible que fuese verdadera.

al universo conjuntista; sin embargo, determinar si en realidad lo hacen es algo que requiere de mucho trabajo. Es necesario que los nuevos axiomas que extiendan la teoría original estén bien justificados (de acuerdo a ciertos estándares epistémicos) para que sean aceptados y puedan resolver problemas irresolubles desde la teoría original. Gödel ofrece dos vías de justificación; una dada por criterios internos y otra por criterios externos.

Una primera posible justificación para los nuevos axiomas, recupera la noción de "conjuntos de" y la idea gödeliana de que la jerarquía acumulativa de conjuntos es el universo conjuntista. La idea central detrás de este tipo de criterios es que un nuevo axioma está bien justificado si recupera la noción intuitiva de "conjunto de" o es claro que recupera alguna característica de la jerarquía acumulativa de conjuntos; en otras palabras, un axioma está bien justificado si es claro que recupera algún aspecto evidente de la naturaleza de los objetos de los que habla la teoría. A este tipo de justificaciones se les conoce como criterios internos para la aceptación de nuevos axiomas; pues, pretenden recuperar las características internas o intrínsecas de los conjuntos (buscan recuperar algunas intuiciones preteóricas sobre qué son los conjuntos).[10] Los axiomas que parecen candidatos naturales para construir extensiones de ZFC son los axiomas de cardinales grandes, por lo menos desde este tipo de justificación. Los axiomas de grandes cardinales afirman la existencia de cardinales infinitos muy grandes, tales que su existencia no puede ser demostrada desde ZFC (incluso, en algunos casos, ni siquiera se puede demostrar directamente que son consistente con ZFC). Lo más relevante respecto a estos axiomas de cardinales grandes es que extienden las posibles construcciones de "conjuntos de", recuperando la intuición que favorece a la jerarquía acumulativa como modelo pretendido de la teoría. Es importante resaltar que si bien Gödel creía que los axiomas de cardinales grandes eran el mejor camino para explorar posibles expansiones de ZFC, nada en su programa impedía buscar otra clase de axiomas, siempre y cuando se adecuasen a sus criterios de aceptabilidad.

> Estos axiomas también pueden formularse como sentencias que afirman la existencia de números cardinales muy grandes (es decir, de conjuntos que tienen estos números cardinales). El más simple de estos fuertes «axiomas de infinitud» afirma la existencia de números inaccesibles (en el sentido más débil o más fuerte) mayores que $\aleph_0$. (Gödel, 1947, p. 362)

Los criterios internos no son el único tipo de criterios considerado por Gödel para la justificación de nuevos axiomas. Él consideraba que es posible

[10] En el siguiente capítulo se analizará con mayor detalle cuáles son los criterios internos que pueden ser usados en la justificación de los nuevos axiomas. Como se verá, hay muchos; algunos relacionados con nuestra elección de la lógica clásica como lógica del sistema.

que los criterios internos propuestos por él (o incluso otros más fuertes) no fuesen suficientes para justificar adecuadamente algunos axiomas. En ese caso, aceptaba la posibilidad de considerar criterios externos. Estos criterios no tienen como objetivo recuperar ningún aspecto relevante de la naturaleza de los conjuntos vistos como objetos, ni ninguna intuición preteórica sobre dicha naturaleza. Los criterios externos evalúan los beneficios que se obtienen con la introducción de nuevos axiomas; si la teoría resulta muy beneficiada por la introducción de los axiomas, entonces se considera que hay buenas razones para aceptarlos. Para aplicarlos se requiere establecer cuántos problemas irresolubles en la teoría original son resueltos en la nueva teoría, cuáles son las nuevas conexiones que se establecen entre proposiciones de la teoría de conjuntos y proposiciones de otras teorías matemáticas, qué nuevos problemas que son planteados, etcétera.[11] Los criterios externos establecen que esta clase de resultados justifica (aunque de manera más débil) la aceptación de nuevos axiomas.

> Tenemos, sin embargo, y en segundo lugar, que, incluso prescindiendo de la necesidad intrínseca de algún nuevo axioma y hasta en el caso de que no hubiese una tal necesidad, es posible una decisión probable sobre su verdad también de otro modo, a saber, estudiando su «éxito» inductivamente. Éxito significa aquí fecundidad en consecuencias, en especial en consecuencias «verificables», es decir, en consecuencias demostrables sin el nuevo axioma, pero cuyas pruebas resulten mucho más fáciles de descubrir y desarrollar con ayuda del nuevo axioma, que además hace posible resumir muchas pruebas diferentes en una sola. [...] Pueden existir axiomas tan abundantes en sus consecuencias verificables que proporcionen tanta luz a un amplio campo y que ofrezcan métodos tan poderosos para resolver problemas (e incluso, en la medida de lo posible, para resolverlo constructivamente) que, sin que importe que sean o no intrínsecamente necesarios, deberían ser aceptados en el mismo sentido en que lo es cualquier teoría física bien establecida. (Gödel, 1947, p. 364).

En este punto, Gödel equipara el trabajo de los teóricos de conjuntos al de los científicos empíricos. En este sentido, acepta que los criterios externos pueden ser falibles; puesto que, son susceptibles a ofrecer una descripción inadecuada de la realidad independiente que es el objeto de estudio de la teoría.[12] Esto genera un problema de acceso epistémico; pues, no es claro

[11] En el siguiente capítulos, se dará una lista más o menos detalla de los criterios externos más usados por los teóricos de conjuntos. También se presentará una discusión sobre la pertinencia de usar criterios externos desde un punto de vista realista. Penelope Maddy ha criticado este punto; pues, considera que se genera un problema de acceso epistémico. Ella opta por aceptar los criterios externos pero rechazar el realismo gödeliano, los detalles de la discusión se presentarán más adelante.

[12] Este punto será de especial importancia cuando se discutan las críticas de Maddy al realismo gödeliano.

que podamos garantizar que los mecanismo usados para establecer el acceso epistémico sean adecuados. Este problema ocupó a Gödel durante años y lo acercó a la fenomenología. Un elemento de gran importancia en su propuesta epistemológica fue la intuición matemática. Sin embargo, esta noción no fue presentada por Gödel de manera clara y ha dado origen a muchas interpretaciones incompatibles.[13] En el siguiente capítulo, discutiré un poco más de detalle este punto.

A continuación presentaré un ejemplo de cómo fue que Gödel aplicó sus criterios de aceptabilidad en el caso del axioma que afirma que existen cardinales fuertemente inaccesibles.[14] El axioma recibe un apoyo de los criterios internos al ofrecer un nuevo mecanismo de construcción de "conjuntos de", pues su aceptación incluye nuevos conjuntos con características muy particulares (conjuntos cuya existencia no puede ser demostrada desde ZFC). Además, visto desde el punto de vista de los criterios externos, la teoría que se genera agregando a ZFC una proposición que afirme que no existen los cardinales fuertemente inaccesibles es una teoría que no ofrece nuevos resultados interesantes; pues, sólo establece que no existen conjuntos de cardinalidad inaccesible fuerte. Esta nueva teoría no soluciona otros problemas, no establece conexiones nuevas entre la teoría de conjuntos y otras disciplinas matemáticas, etcétera.[15] En contraste, la teoría que se genera al agregar el

[13]Por ejemplo, Maddy llegó a sostener que una forma de interpretar a la intuición matemática era equipararla a la percepción e incluso llegó a sostener que podía darse una explicación desde las ciencias cognitivas de cómo es que podemos percibir directamente conjuntos. Véase (Maddy, 1980).

[14]Def. Un cardinal κ es fuertemente inaccesible sii κ es un cardinal límite regular y fuerte.

Un cardinal κ es regular sii $cf(\kappa) = \kappa$; es decir, que no puede ser construido como el límite de un sucesión de longitud menor que κ de elementos menores que κ. Lo que implica que si κ es fuertemente inaccesible no puede ser construido usando la operación unión, ni el axioma de reemplazo.

Un cardinal κ es fuerte sii para cualquier ordinal α menor que κ, la potencia de α es menor que κ. Lo que implica que si κ es fuertemente inaccesible no puede ser construido mediante la operación de potencia.

Estas características de los cardinales fuertemente inaccesibles permiten mostrar que un nivel de la jerarquía acumulativa de conjuntos indexado por un cardinal fuertemente inaccesible es modelo de ZFC. Pero, como consecuencia del segundo teorema de incompleción, la teoría de conjuntos no puede mostrar su propia consistencia (so pena de ser inconsistente). Esto implica que la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles no puede ser demostrada desde ZFC, suponiendo su consistencia.

[15]El único problema resuelto en la nueva teoría y que estaba abierto en la teoría original es la pregunta por la existencia de los cardinales fuertemente inaccesibles, pero la solución es completamente *ad hoc*. Incluso se puede mostrar que las teorías ZFC y ZFC+"No hay cardinales fuertemente inaccesibles" son mutuamente interpretables, así que no hay una ganancia teórica real en adoptar esta clase de axioma.

axioma de cardinales fuertemente inaccesibles a ZFC ofrece resultados nuevos y atractivos para el teórico de conjuntos. Entre otras cosas, sirve para demostrar teoremas que antes eran indemostrables y que no hablan directamente de la existencia de cardinales de este tipo particular.

> En el caso del axioma de la existencia de números inaccesibles, por ejemplo (que se puede probar que es indecidible a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays, en el supuesto de que sea consistente con ellos) hay, matemáticamente, una notable asimetría entre el sistema que lo afirme y el que lo niegue. El último sistema (pero no el primero) tiene un modelo que se puede definir y del que se puede probar que es también un modelo del sistema original (no extendido). Esto significa que el primero es una extensión mucho más fuerte que el segundo. Un hecho muy relacionado es que la afirmación (pero no la negación) del axioma implica nuevos teoremas sobre números enteros (casos particulares de los cuales pueden verificarse por computación). [. . .] Resumiendo, sólo la afirmación proporciona una extensión «fructífera», mientras que la negación es estéril fuera de su limitado dominio. (Gödel, suplemento 1964, p. 426)

Podemos ahora, reconstruir el programa de Gödel y los argumentos que él usaba para defenderlo:

1. El universo conjuntista existe de manera independiente de nosotros y de nuestras intuiciones sobre él. El universo conjuntista es el descrito en la jerarquía acumulativa de conjuntos. (Realismo en ontología).

2. El valor de verdad de toda proposición matemática que describa al universo conjuntista está determinado. El universo conjuntista determina el valor de verdad de toda proposición de la teoría de conjuntos. (Realismo en Valor de Verdad).

3. La teoría de conjuntos tiene como objetivo principal describir de la manera más precisa posible el universo conjuntista, que es su objeto de estudio.

4. La teoría ZFC (la más desarrollada hasta ese momento) ha mostrado ser una herramienta muy útil en el estudio del universo conjuntista y su aplicabilidad para reconstruir pruebas matemáticas es incuestionable. Pero, resulta insuficiente para decidir sobre algunas proposiciones matemáticas, por ejemplo, HC, $V = L$, G_{ZFC}, $CONS(ZFC)$.

5. Algunas de las proposiciones que son indecidibles desde ZFC lo son como consecuencia de la herramienta misma que se está utilizado (el sistema ZFC y sus peculiaridades); por ejemplo, G_{ZFC} y $CONS(ZFC)$.

Sobre ellas se puede decidir reflexionando sobre sus pruebas de indecidibilidad. Pero, algunas de las proposiciones indecidibles desde ZFC lo son debido a que los axiomas de la teoría no son suficientes para describir el universo conjuntista con el detalle debido; por ejemplo, HC y $V = L$. En el caso de estas proposiciones, no se puede decidir sobre ellas reflexionando sobre su prueba de indecidibilidad.

6. Así, los axiomas de ZFC actuales resultan insuficientes para cumplir con su objetivo, la descripción precisa del universo conjuntista. Lo cual justifica la búsqueda de nuevos axiomas que completen el trabajo pendiente.

7. Dado que los nuevos axiomas buscan describir el universo conjuntista, su aceptación debe estar justificada por mecanismos que nos permitan garantizar (o por lo menos hacer plausible) que son buenas descripciones de éste. Los criterios de justificación para la aceptación de nuevos axiomas deben descansar en una base firme que nos garantice su verdad o por lo menos los hagan muy plausibles.

8. Gödel propone dos clases de criterios; los criterios internos y los criterios externos. Los criterios internos encuentran su justificación en la adopción de noción de conjunto como "conjunto de" y sirven para justificar la adopción de axiomas que nos permitan extender los procesos conjuntistas para la obtención de nuevos conjuntos a partir de conjuntos previamente dados. Los criterios externos ofrecen apoyo para un nuevo axioma apelando a los resultados y conexiones con otras áreas de la matemática que se obtienen gracias a su aceptación. En ambos casos, la intuición matemática tiene un papel relevante.

Antes de continuar con las críticas de Solomon Feferman al programa de Gödel y plantear su reformulación del programa para la búsqueda de nuevos axiomas, dedicaré una subsección a analizar si el concepto de "conjunto de" es o no lo suficientemente preciso para garantizar que la jerarquía acumulativa de conjuntos es el universo conjuntista.

3.2.2. El realismo, la jerarquía acumulativa de conjuntos y los teoremas de cuasi-categoricidad de ZFCU2.

Gödel creía que la noción de "conjunto de" era lo suficientemente precisa para recuperar nuestras intuiciones preteóricas sobre los conjuntos. Sin embargo, esto es poco claro a la luz de las pruebas de independencia y, en especial, a la luz de los modelos que él y Cohen construyeron para la teoría de conjuntos. Cada uno de los modelos generados en las pruebas parece ser compatible con la noción de "conjunto de", sin embargo, en cada modelo hay proposiciones que tienen valores de verdad diferentes; por ejemplo, la HC (los modelos no son isomorfos). Esta opinión fue común entre los teóricos de conjuntos a partir de la presentación de las pruebas de independencias. Por ejemplo, Mostowski llegó a afirmar:

> La prueba de Gödel contiene un resultado mucho más profundo que una mera prueba de consistencia. Él reconoció que la noción intuitiva de un conjunto es demasiado vaga para que podamos decidir si el axioma de elección y la hipótesis del continuo son verdaderas o falsas.(Mostowski, 1964, p. 89)[16]

Desde mi punto de vista, es claro que Gödel no está de acuerdo con el punto de vista de Mostowski. Sin embargo, el problema sobre la vaguedad de la noción intuitiva de conjunto, evidenciado por las pruebas de independencia, es que la noción de "conjunto de" no es capaz por sí misma de determinar un único modelo salvo isomorfismo; es decir, existen diferentes candidatos no isomorfos que parecen satisfacer los requisitos para ser el modelo de la teoría de conjuntos.[17] Esto llevó a muchos a creer que no había un único concepto de conjunto y que podían existir diversas teorías de conjuntos (incompatibles entre ellas) que con toda justicia fuesen llamadas teorías de conjuntos; cada una de ellas recuperaría una noción diferente de conjunto. El problema central sería entonces que incluso aceptando un realismo en ontología, al tener más de un universo conjuntista, no podríamos aceptar el realismo en valor de verdad. Con ello la justificación del programa de Gödel sería fuertemente socavada.

Algunos pensadores, como Georg Kreisel, no aceptaron que esta supuesta vaguedad de la noción de conjunto llevase de inmediato a una postura pluralista en teoría de conjuntos. Kreisel trató de clarificar la noción intuitiva de conjunto y ofrecer una respuesta que permitiese defender el realismo en teoría de conjuntos.

> Es probablemente cierto que la reacción precautoria se debió a esto: las clases presentada por sí mismas son una noción vaga, o, específicamente, una mezcla de nociones incluidas (i) los conjuntos finitos de las cosas (es decir,

[16] "[The Gödel's] proof contains a much deeper result than a mere proof of consistency. He recognized that the intuitive notion of a set is too vague to allow us to decide wheter the axiom of choice and the continuum hypothesis are true or false." La traducción es mía.

[17] De hecho, como se dijo en una nota al pie en el capítulo anterior, es posible que la jerarquía acumulativa de conjuntos sea de hecho el universo constructible de Gödel o, incluso, es posible que sea un modelo generado por *forcing* (en la versión que aplica el método sobre el universo).

> objetos sin miembros), o (ii) conjuntos de algo (como en las matemáticas, conjuntos de números, conjuntos de puntos), pero también (iii) las propiedades o intenciones que uno no tiene *a priori* acotados sobre las extensiones (que son muy comunes en el pensamiento común, pero no en matemáticas). (Kreisel, 1964, p. 143)[18]

Kreisel se apoyo en el trabajo de Zermelo y su análisis del jerarquía acumulativa; esto con el objetivo de clarificar la noción de “conjunto de”. La propuesta consiste en expresar los axiomas de la teoría de conjuntos en una lógica que les permitiese recuperar categoricidad;[19] es decir, una lógica cuyo lenguaje fuese lo suficientemente fuerte como para que algunas teorías tuviese un único modelo salvo-isomorfismo. La lógica elegida fue la lógica de segundo orden.[20]

Ernst Zermelo en un artículo de 1930 titulado “Sobre números límite y dominios de conjuntos: Nuevas investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos” (“Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre”) presentó la versión definitiva de su sistema axiomático para la teoría de conjuntos. Para lograr mayor generalidad, su sistema contenía urelementos (objetos que no son conjuntos), no tenía axioma de infinito (pero era compatible con él y con otros axiomas de cardinales grandes, nosotros asumiremos que el sistema tiene el axioma de infinito para facilitar el análisis), pero en todo lo demás era una versión de segundo orden de ZFC, por lo que se le conoce como ZFCU2. En el artículo establece una serie de teoremas sobre los modelos de ZFCU2. El resultado que me interesa recuperar establece que para cualesquiera dos modelos de la teoría de conjuntos con la misma base (conjunto de urelementos) o bien son isomorfos, o bien uno de los ellos es isomorfo a un segmento inicial (canónico) del otro indexado por un cardinal fuertemente inaccesible. Este resultado esta expresado en tres teoremas de isomorfismo. Para fines de este trabajo, lo más pertinente es presentar los dos primeros.

[18] “It is probably true to say that the reactionary caution was due to this: class presented itself as a vague notion, or, specifically, a mixture of notions incluiding (i) finite sets of individuals (i.e. objects without members), or (ii) sets of something (as in mathematics, sets of numbers, sets of points), but also (iii) properties or intensions where one has no a priori bound on the extension (which are very common in ordinary thought but not in mathematics).” La traducción es mía.

[19] En realidad, el trabajo de Zermelo logra mostrar la cuasi-categoricidad de la teoría de conjuntos en segundo orden. Este resultado es suficiente para lograr la clarificación requerida del concepto de “conjunto de”.

[20] La lógica de primer orden no puede generar teorías categóricas, esto es una consecuencia del teorema de Löwenheim-Skolem. Es por ello que un cambio de lógica fue necesario para lograr el resultado deseado.

> **Primer teorema de isomorfismo.** Dos dominios normales[21] con la misma característica[22] y bases equivalentes[23] son isomorfos, y de hecho el mapeo isomorfo de los dominios uno en el otro es determinado de manera única por el mapeo de sus bases.
>
> **Segundo teorema de isomorfismo.** Dados dos dominios normales con bases equivalentes y diferentes números límite π y π' siempre es el caso que uno es isomorfo a un segmento canónico[24] del otro. (Zermelo, 1930, p. 1228-1229)[25]

Este resultado garantiza que todos los modelos de la teoría de conjuntos (que se construyen a partir de conjunto vacío) están bien ordenados, de tal suerte que el más pequeño de ellos es justo la jerarquía acumulativa de conjuntos hasta un nivel indexado por el primer cardinal fuertemente inaccesible.[26] Lo único que hace diferentes a estos modelos es, por decirlo de algún modo, la altura; es decir, la clase de los ordinales que pueden ser definidos en el modelo.[27] Además, para cualesquiera dos modelos diferentes de la teoría de conjuntos construidos a partir del conjunto vacío, uno es un segmento inicial

[21]Aquí por dominio normal se entiende un modelo de la teoría de conjuntos ZFCU2.

[22]La característica π del modelo es el cardinal del conjunto de los ordinales que pertenecen al modelo, que visto desde el modelo sería la clase propia OR y se pide que sea un cardinal fuertemente inaccesible. A las características también se les conoce como números límite del modelo.

[23]La base del modelo es el conjunto de los urelementos. En caso de que la teoría de conjuntos no considere la existencia de urelementos, entonces todos los modelos tienen la misma base, a saber, el conjunto vacío. Este caso es de especial importancia, dado que es el estándar en la teoría de modelos de la teoría de conjuntos actual.

[24]Un segmento canónico es un segmento que puede el mismo ser modelo de la teoría de conjuntos.

[25]"First isomorphism theorem. Two normal domains with the same characteristic and equivanlent bases are isomorphic, and indeed the isomorphic mapping of the domains on to one another is uniquely determined by the mapping of their bases.

Second isomorphism theorem. Given two normal domains with equivalent bases and different boundary numbers π and π', it is always the case that one is isomorphic to a canonical segment of the other." La traducción es mía.

[26]El resultado no garantiza la unicidad de un modelo con una característica determinada, pues pueden existir muchos modelos isomorfos con la misma característica construidos a partir de un urelemento. Sin embargo, si aceptamos que el modelo pretendido de la teoría de conjuntos debe ser construido partiendo del conjunto vacío, el modelo sería único.

[27]Para ver todos los resultados y las pruebas, véase (Zermelo, 1930). Para un análisis detallado de la construcción de los modelos de la teoría de conjuntos a la luz de estos resultados puede verse el capítulo 3 de (Gutiérrez, 2011). Existen otros resultados sobre la categoricidad de la teoría de conjuntos, por ejemplo, en (McGee, 1997) y (Uzquiano, 2002), pero no es claro que sean compatibles con el principio de maximalidad y los principios de reflexión, que forman parte de los criterios internos para la aceptación de nuevos axiomas. Para una crítica a estos resultados véase (Rayo y Uzquiano, 2003), ellos muestran que el teorema de categoricidad de McGee es incompatible con algunos principios de reflexión.

del otro (los números característicos de ambos modelos son cardinales fuertemente inaccesibles). Este resultado, clarifica (o parece hacerlo) la noción intuitiva de "conjunto de" y además ofrece una justificación para tomar a la jerarquía acumulativa de conjuntos como el modelo pretendido (el universo) de la teoría de conjuntos.[28] Parece que estos resultados justifican la postura de Gödel y permiten terminar con el análisis de su programa.

Sin embargo, existe un problema con esta línea de razonamiento. La demostración de estos teoremas requiere la aceptación de la semántica estándar para la lógica de segundo orden y hay una fuerte discusión sobre si la aceptación de esta semántica no supone ya la aceptación de la existencia de un modelo pretendido para la teoría de conjuntos, de ser así, el argumento sería circular.

Veamos con un poco más de detalle esta crítica. Un modelo para una teoría expresada en el lenguaje de la lógica de segundo orden usando una semántica estándar es una tripleta $\langle D, \wp(D), I\rangle$, donde D es un conjunto que sirve para interpretar los cuantificadores de primer orden, la $\wp(D)$ sirve para interpretar los cuantificadores de segundo orden e I es una función interpretación para los términos no lógicos. Estas nociones semánticas suponen que los modelos de la teorías expresadas en el lenguaje de la lógica de segundo orden son del tamaño de un conjunto, lo cual no representa un problema mayor en el caso de la mayoría de las teorías; pero, puede ser tremendamente problemático en el caso de la teoría de conjuntos.

Si aceptamos que todos los modelos de la teoría de conjuntos con los que se va a trabajar son del tamaño de un conjunto, entonces ninguno de ellos puede ser realmente el modelo pretendido de la teoría de conjuntos; dado que, ninguno de ellos puede tener en su dominio a todos los conjuntos. Pues de ser así, existiría un conjunto de todos los conjuntos (lo que contradice un resultado de la teoría). Esto está relacionado con la ahora famosa paradoja de Orayen.[29] Sin embargo, esto no es un problema insalvable (en realidad, ni siquiera es un problema). Si bien Zermelo usa una semántica muy similar en sus teoremas, él nunca afirma que alguno de los modelos con los que el

---

[28]El hecho de tener muchos modelos no representa un problema serio para la propuesta. Esto se debe a que si una proposición es tal que sólo habla de una sección de la jerarquía acumulativa de conjuntos, entonces su verdad o falsedad estará determinada por esta sección y el hecho matemático que hace a la proposición verdadera o falsa no será modificado en otros modelos. Por ejemplo, la HC está completamente decidida en el modelo más pequeño, es decir, el hecho matemático que determina el valor de verdad de la HC ya está contemplado en ese modelo (el hecho aludido es la existencia o inexistencia de una función biyectiva entre el conjunto de números reales y el cardinal $\aleph_1$). Esto implica que el valor de verdad de la HC es el mismo en todos los modelos de la teoría de conjuntos.

[29]Para más detalles puede verse (Hurtado y Moretti, 2003) y (García de la Sienra, 2008).

trabaja sea el modelo pretendido de la teoría de conjuntos.[30] Cada uno de los modelos con los que trabaja Zermelo puede ser extendido[31] y ser visto como un conjunto con una estructura bien definida por la teoría de conjuntos, desde el punto de vista de los modelos más grandes que lo contienen. Todos los modelos de los que hablan los teoremas de cuasi-categoricidad son modelos del tamaño de un conjunto. Esto implica que, ninguno de los modelos de los que hablan los teoremas es el más grande de todos; ninguno es el modelo pretendido de la teoría de conjuntos. Estos teoremas no funcionan como evidencia directa a favor de la jerarquía acumulativa de conjuntos como modelo pretendido de la teoría de conjuntos. Para poder concluir que la jerarquía acumulativa es el modelo pretendido es necesario observar que si bien los modelos no recuperan la jerarquía completa, sí la recuperan por partes. Cada modelo descrito por los teoremas de cuasi-categoricidad recupera un segmento inicial de la jerarquía acumulativa, los teoremas garantizan que estos modelos se pueden bien ordenan; con lo que se genera una secuencia de modelos cuyo límite es la jerarquía acumulativa de conjuntos. Pero la existencia de este límite no puede ser probado desde la teoría misma; para obtener este resultado es necesario realizar un razonamiento metateórico sobre el comportamiento los modelos descritos por los teoremas de cuasi-categoricidad. Así, para establecer que la jerarquía acumulativa de conjuntos es el modelo pretendido de la teoría de conjuntos no sólo es necesario aceptar los teoremas de cuasi-categoricidad, sino que también es necesario hacer un razonamiento metateórico sobre estos. Este no es el problema que me interesa hacer notar, pues ni siquiera estoy seguro que sea un problema genuino.

El problema que me interesa hacer notar es que, sin asumir el realismo en teoría de conjuntos, no es claro a que conjunto de conjuntos se debe recurrir para interpretar los cuantificadores de segundo orden. Si bien cada modelo puede tomar como universo de discurso un conjunto con la cantidad necesaria de conjuntos para servir de modelo para la teoría de conjuntos, esta elección no determina cuál es la interpretación para los cuantificadores de segundo orden. En un modelo dado, los cuantificadores de segundo orden corren en el conjunto potencia del dominio del modelo, el problema consiste en que, sin asumir el realismo, no es claro qué conjunto es el conjunto poten-

[30]Zermelo no prueba que dichos modelos existen, pues mostrar su existencia es imposible debido al segundo teorema de incompleción de Gödel. Más bien, Zermelo asume su existencia y analiza sus propiedades matemáticas.

[31]En realidad desde ZFC no hay ninguna garantía ni de que los modelos existan, ni de que puedan ser extendidos. Para tener una prueba completamente rigurosa, es necesario asumir el axioma de los Universos de Grothendieck que afirma *grosso modo* que para cada conjunto a existe un universo de Grothendieck U que lo contiene (los universos de Grothendieck son conjuntos que pueden servir como modelos de la teoría ZFC).

cia del dominio. En principio, la semántica estándar asume que el conjunto potencia del dominio incluye *TODOS* los subconjuntos del dominio. Sin embargo, cada uno de los posibles modelos pretendidos de la teoría de conjuntos dará una interpretación diferente a ese *TODOS*. Por ejemplo, si se toma a L como el modelo pretendido de la teoría de conjuntos, entonces el conjunto potencia del dominio sería el conjunto cuyos miembros son todos y sólo los subconjuntos constructibles del dominio; algo similar se puede decir respecto a otros candidatos a ser el modelo pretendido de la teoría de conjuntos. Lo más problemático es que diferentes modelos pueden dar diferentes resultados. Así que, sin asumir de entrada que hay un modelo pretendido, no se puede garantizar la generalidad de los resultados. Para poder recurrir a los resultados, parece que se tiene que suponer de entrada que existe un modelo pretendido que determina cuál es el conjunto potencia del dominio. Puede entablarse una discusión muy compleja sobre este punto. Sin embargo, no lo haré; pues, no es el objetivo de este trabajo. Lo que puedo decir sin dar más detalles, es que si la crítica es correcta y hay un circularidad aquí, el resultado que nos permite asegurar que la jerarquía acumulativa de conjuntos es el modelo pretendido de la teoría de conjuntos, supone que aceptamos que hay un modelo pretendido (muy probablemente, la jerarquía acumulativa misma). Esto es un gran problema si queremos ofrecer una fundamentación última de la teoría de conjuntos. Pero, si lo que queremos es mostrar que suponiendo el realismo, es posible establecer de manera clara una noción de "conjunto de" que recupere nuestras intuiciones preteóricas, no parece haber problema con esta circularidad; pues, no se quiere ofrecer una justificación del realismo, sino una clarificación de éste.[32]

En la siguiente sección, discutiremos las criticas ofrecidas por Solomon Feferman al programa de Gödel; en particular, a su elección de los axiomas de cardinales grandes como el mejor camino para extender la teoría de conjuntos estándar.

3.3. Feferman y el programa de Gödel.

Solomon Feferman ha sido uno de más importantes estudiosos de la obra de Kurt Gödel; basta decir que es compilador y editor de sus obras completas. Sin embargo, también ha sido uno de los mayores críticos del programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas y su predilección por los axio-

[32]Para una discusión detallada sobre este punto puede verse (Shapiro, 1991, p. 203 y ss.)

mas de cardinales grandes.[33] A continuación presentaré sus críticas a dicho programa. Para lograr que la reconstrucción sea lo más clara posible, ofreceré primero su reconstrucción del programa de Gödel.[34]

3.3.1. El programa de Gödel de acuerdo a Feferman.

La reconstrucción de Feferman del programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas para ZFC contempla 6 puntos relevantes:[35]

1. Existen un modelo pretendido de la teoría de conjuntos; a saber, V, la jerarquía acumulativa de conjuntos. El universo V existe de manera independiente de nosotros, se asume el realismo para los objetos de la teoría de conjuntos. La jerarquía acumulativa consiste en una construcción iterativa transfinita usando operaciones de formación de conjuntos arbitrarios de los elementos de los niveles anteriores; estos procesos pueden incluir operaciones como la potencia. En este sentido, no hay compromiso con la aceptación del axioma de constructibilidad ($V = L$). (Realismo en ontología)

2. Las oraciones de la teoría de conjuntos tienen un valor de verdad determinado (su valor de verdad respecto a V). Todos los axiomas de ZFC son verdaderos en V. (Realismo en valor de verdad).

3. La HC tiene un valor de verdad determinado. Gödel creía que muy probablemente era falsa.

4. La HC es independiente de ZFC.[36]

5. Para determinar el cardinal de $2^{\aleph_0}$ en la escala de los alephs se requiere de axiomas adicionales para la teoría de conjuntos. Axiomas que expandan el sistema.

[33]Como se verá un poco más adelante, las críticas de Feferman se centran en la elección de los cardinales grandes como candidatos a nuevos axiomas y en los criterios de aceptación propuestos por Gödel. Feferman acepta el programa de búsqueda de nuevos axiomas; pero, usando criterios diferentes, lo que lo lleva a proponer otro tipo de axiomas.

[34]El programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas ha sido caracterizado de diversas formas. Por ejemplo, Peter Koellner pone un especial énfasis en la preferencia de Gödel por los axiomas de cardinales grandes y en el uso de criterios externos para la aceptación de nuevos axiomas. Cfr. (Koellner, 2009, p. 197 y ss.) Es por ello que considero importante ofrecer la reconstrucción dada por Feferman para tener una perspectiva más clara de su postura.

[35]Esta reconstrucción aparece en (Feferman, 1999, p. 104).

[36]Antes de la aparición de los resultados de Cohen, Gödel ya tenía la convicción de que la HC era falsa y que su prueba de consistencia relativa sólo serviría al final como una parte de la prueba de independencia respecto a ZFC.

6. Los nuevos axiomas pueden ser formulados y aceptados mediante un proceso directo de extensión del razonamiento informal que nos llevó a aceptar los axiomas de ZFC en primer lugar.[37]

Los nuevos axiomas que Gödel pretendía usar para extender el sistema ZFC eran los axiomas de cardinales grandes. Estos axiomas son independientes de la teoría si suponemos que la teoría es consistente; debido a que, implican la consistencia de ZFC. Feferman insiste en que la justificación de estos axiomas es interna y se apoya en la idea cantoriana de favorecer axiomas que maximicen el tamaño del universo conjuntista.[38]

> Una manera informal de justificar su existencia, y, de hecho, de cardinales infinitos en general, es por referencia al "Absoluto de Cantor": el universo de todos los conjuntos está más allá de ser capturado por cualquier condición de cierre en conjuntos; en su lugar, tal condición siempre se cierra en un conjunto. (Feferman, 1999, p. 105)[39]

Estos principios informales de maximalidad pueden formalizarse (por lo menos parcialmente) formulándolos como principios de reflexión, es decir, principios que afirmen que cualquier oración que sea satisfecha por un modelo clase también es satisfecha por un modelo del tamaño de un conjunto.[40]

---

[37]Se puede ver que la reconstrucción de Feferman del programa de Gödel difiere en algunos puntos con la que propuse en la sección anterior. Las diferencias más relevantes son, en mi opinión, el énfasis que da Feferman al papel de la HC como motivación para la búsqueda de nuevos axiomas, su énfasis en la apuesta por los axiomas de cardinales grandes, su omisión de los criterios externos como justificaciones posibles de los nuevos axiomas y su nula referencia a la posibilidad (aceptada por Gödel) de aceptar axiomas que no describiesen de manera adecuada el universo conjuntista. Retomaré estos puntos un poco más adelante en la discusión.

[38]Cantor no fue el único en apoyar el principio de maximalidad. Por ejemplo, Zermelo también fue un defensor de este principio. La idea central detrás del apoyo de Zermelo al principio de maximalidad es que si la teoría de conjuntos se presenta como un marco conceptual en el cual se pueden reconstruir todas las matemáticas, entonces se deben favores axiomas que nos garanticen que la teoría no tiene límites; pues de tenerlos existe la posibilidad de que existan teorías matemáticas que no puedan ser analizadas desde la teoría de conjuntos. Véase (Zermelo, 1930).

[39]"An informal way of justifying their existence, and, indeed, of infinite cardinals at all, is by reference to "Cantor's Absolute": the universe of all sets is beyond being captured by any closure condition on sets; instead, any such condition always closes off at a set." La traducción es mía.

[40]El principio de maximalidad y los principios de reflexión tendrán una importancia mayúscula, tanto en la aceptación de nuevos axiomas de cardinales grandes como en el análisis de problema del continuo. En el capítulo 5, presentaré un resultado limitativo que se debe a Peter Koellner y que muestra que no se puede justificar la aceptación de ningún axioma que solucione el problema del continuo apelando únicamente a los principios de reflexión.

La idea central es poder construir cardinales cada vez más grandes; incluso aquellos que sean incompatibles con el axioma de constructibilidad (por ejemplo, axiomas que afirman la existencia de cardinales medibles).[41]

Hasta aquí es claro que desde el punto de vista de Feferman, el programa de Gödel se concentra en tratar de resolver problemas que surgen dentro de la teoría de conjuntos y no es claro que estén conectados con otras ramas de las matemáticas. Además, considera que los criterios de aceptabilidad de nuevos axiomas son sólo (o son principalmente) los criterios internos.

3.3.2. Críticas de Feferman al programa de Gödel.

Solomon Feferman ha expuesto sus criticas al programa de Gödel en diversos artículos y libros. A continuación ofreceré una reconstrucción de sus principales críticas, tomando como punto de partida su artículo "Does mathematics needs new axiomas?" y la discusión que se dio a partir de su publicación con Penelope Maddy, John Steel y Harvey Friedman, recogida en (Feferman et al., 2000).

Las críticas de Feferman al programa de Gödel se centran en los siguientes puntos:

1) La necesidad de nuevos axiomas debe tener una justificación más solida que buscar decidir sobre proposiciones indecidibles en teoría de conjuntos. La necesidad de nuevos axiomas surge de la necesidad de resolver problemas matemáticos de interés general.

2) Las criterios de aceptabilidad de nuevos axiomas propuestos por Gödel son inadecuados.

3) El realismo no es una postura aceptable; además de que no implica por sí mismo la existencia de conjuntos infinitos. Lo que es más, no es importante demostrar la existencia de conjuntos infinitos (cardinales grandes), sino analizar si la aceptación de cardinales grandes aumenta o no el poder deductivo de la teoría de conjuntos.

4) El programa de Gödel excede, y por mucho, los objetivos originales del programa de Hilbert.

5) El programa de Gödel ha mostrado ser ineficaz para resolver problemas como el problema del continuo.

[41]En el capítulo 5 presentaré el resultado que muestra la incompatibilidad de la existencia de cardinales medibles y el axioma de constructibilidad

Para entender con claridad cada uno de estos puntos, comenzaré con el análisis de la pregunta ¿Las matemáticas necesitan nuevos axiomas?, tal como lo hace Feferman. Esta pregunta involucra conceptos que requieren clarificación. Por ejemplo, cuándo hablamos de matemáticas a qué nos referimos, a la totalidad de las matemáticas, sólo a una área de las matemáticas como la teoría de conjuntos o nos referimos a las matemáticas que son aplicables (las que tienen una relación directa con las ciencias empíricas). Tampoco queda del todo claro, en qué sentido se habla de necesidad de nuevos axiomas, para qué son necesarios y qué tipo de axiomas se requieren. Sin una clarificación adecuada, una primera respuesta podría ser simple y llanamente que las matemáticas no requieren nuevos axiomas. Al parecer la mayoría de los matemáticos no requieren nuevos axiomas para resolver los problemas abiertos en sus respectivas áreas, o por lo menos, no es claro que los requieran. Por supuesto, esta respuesta supone que la necesidad de nuevos axiomas debe ser analizada respecto a la práctica matemática más usual y las necesidades particulares de los matemáticos que se dedican al análisis, la geometría o el álgebra. Desde este punto de vista, es muy plausible que esta clase de matemáticos puedan continuar su práctica del día a día sin requerir que se incluyan nuevos axiomas en sus disciplinas. El problema, que inmediatamente se puede ver en esta respuesta, es que parece no considerar a los teóricos de conjuntos dentro de los matemáticos a considerar para decidir si se necesitan o no nuevos axiomas. Es poco plausible que una respuesta de esta naturaleza pueda ser aceptada sin más.

Feferman no defiende esta postura (que podría ser considerada un tanto acrítica). Desde su punto de vista, sí son necesario nuevos axiomas; pero, pide reflexionar con cuidado en qué casos se requieren y de qué clase de axiomas se trata.

> Parte de las múltiples ambigüedades que vemos en la cuestión principal radica en los distintos puntos de vista desde los que se podría ser considerada. Las diferencias más crudas son entre el punto de vista del matemático que no trabaja en campos relacionados con la lógica (en las que se cuentan, aproximadamente, el 99 % de todos los matemáticos), el del lógico matemático, y, finalmente, el del filósofo de las matemáticas. Incluso dentro de cada una de estas perspectivas es evidente que hay posiciones divergentes. Mi propia opinión es que la pregunta es esencialmente filosófica: Por supuesto que las matemáticas necesita nuevos axiomas - sabemos esto a partir de los teoremas de incompleción de Gödel - entonces las preguntas deben ser: ¿Cuáles? y ¿Por qué esos? (Feferman, 2000, p. 402)[42]

[42] "Part of the multiple ambiguities that we see in the leading question here lies in the various points of view from which it might be considered. The crudest differences are between the point of view of the working mathematician not in logic related fields (under which are counted, roughly, 99 % of all mathematicians), then that of the mathematical

Feferman busca dar un giro a la búsqueda de nuevos axiomas y propone criterios de aceptabilidad muy diferentes a los propuestos por Gödel. Para justificar este cambio, hace una clarificación sobre la naturaleza de los axiomas. Desde su punto de vista, los axiomas no son ni verdades autoevidentes ni puntos de partida arbitrarios; los axiomas (o la mayoría de ellos) busca describir las estructuras con las cuales los matemáticos han de enfrentarse en su trabajo diario. Visto así, los axiomas se parecen más a definiciones que a principios o postulados. Partiendo de esta concepción de axioma, propone clasificarlos en fundamentales y estructurales.

Los axiomas estructurales son definiciones que permiten caracterizar de manera adecuada una estructura o un grupo de estructuras que son el objeto de estudio de los matemáticos. Su función consiste en brindar un marco conceptual adecuado para definir operaciones, relaciones y líneas de razonamiento aceptables. Ejemplos de esta clase de axiomas se pueden encontrar en disciplinas como la teoría de grupos o la topología. Los axiomas de estas teorías permiten crear un marco para analizar diferentes estructuras; pero, no tienen interés en caracterizar que clase de objetos son los que pueden estar en un grupo. Más bien, estos axiomas afirman que para que una estructura sea un grupo sus objetos (que pueden ser de cualquier tipo) tienen que cumplir con estar en tales y cuales relaciones y que las operaciones definidas sobre ellos tienen que tener tales y cuales propiedades.

En contraste, los axiomas fundamentales tienen como función establecer y/o clarificar los conceptos fundamentales utilizados en matemáticas; por ejemplo, los conceptos de número, conjunto, función, etcétera. Esta clase de axiomas no tienen como función caracterizar estructuras, sino ofrecer un fundamento más fuerte a las matemáticas. Es por ello que, son poco usados en la práctica matemática usual; pues, no son requeridos para realizar procedimientos en la matemática cotidiana. Generalmente, estos axiomas buscan recuperar una teoría intuitiva previa a partir de la cual se busca obtener una nueva teoría formalizada.

> Los axiomas fundamentales corresponden a dichas partes básicas de nuestro objeto de estudio que casi no necesitan ninguna mención en absoluto en la práctica cotidiana, y muchos matemáticos pueden llevar a cabo su trabajo sin recurrir a ellos ni una sola vez. Algunos matemáticos incluso cuestionan si las matemáticas necesita en absoluto algún axioma de este tipo: para ellos, por así decirlo, las matemáticas son como las matemáticas se hacen. De

---

logician, and, finally, that of the philosopher of mathematics. Even within each of these perspectives there are obviously divergent positions. My own view is that the question is an essentially philosophical one: Of course mathematics needs new axioms ? we know that from Godel's incompleteness theorems-but then the questions must be: Which ones? and Why those?" La traducción es mía.

> acuerdo con este punto de vista, las matemáticas se justifican a sí mismas, y cualesquiera problemas fundacionales son locales y resueltos de acuerdo a la necesidad matemática, en vez de globales y resueltos de acuerdo con las doctrinas lógicas o filosóficas posiblemente dudosas. (Feferman et al., 2000, p. 403)[43]

Con esta clasificación de los axiomas en estructurales y fundamentales, la pregunta sobre la necesidad de nuevos axiomas puede ser contestada con mayor precisión. Desde el punto de vista Feferman, la mayoría de los matemáticos no requiere y no tiene un interés profundo en los axiomas fundacionales. De acuerdo a Feferman, la necesidad de nuevos axiomas debe restringirse a los axiomas estructurales que sirvan para solventar problemas matemáticos relacionados con la práctica matemática estándar, que entre otras características tienen la de ser aplicables en las ciencias empíricas.[44] Así, la búsqueda de nuevos axiomas se concentra en los axiomas estructurales y deja fuera los axiomas fundamentales.

En este punto se puede notar que Feferman se apoya en dos características diferentes que tienen las matemáticas cotidianas. La primera de ellas es que los axiomas que normalmente usan este tipo de matemáticas son axiomas estructurales. La segunda es que son matemáticas que aplicables (por lo menos en principio) a otras disciplinas, son herramientas indispensables para algunas ramas de las ciencias. Desde el punto de vista de Feferman, estas dos características parecen estar estrechamente ligadas.

A la luz de esta postura, ¿qué lugar puede tener la teoría de conjuntos? Feferman nos hace notar que una parte importante de la justificación de la teoría de conjuntos descansa en la supuesta necesidad que tenemos de fundamentar la práctica cotidiana del matemático común; aquellos que trabajan en los departamentos de matemáticas y que establecen aplicaciones en la ciencia empírica. Algunos lógicos y filósofos de la matemática han tratado de demostrar la necesidad de la teoría de conjuntos en la práctica matemáticas.

[43] "The foundational axioms correspond to such basic parts of our subject that they hardly need any mention at all in daily practice, and many mathematicians can carry on without calling on them even once. Some mathematicians even question whether mathematics needs any axioms at all of this type: for then, so to speak, mathematics is as mathematics does. According to this view, mathematics is self-justifying, and any foundational issues are local and resolved according to mathematical need, rather than global and resolved according to possibly dubious logical or philosophical doctrines." La traducción es mía.

[44] Aquí hay una reminiscencia del argumento de la indispensabilidad de Quine, que pretende mostrar que se debe aceptar la existencia de los objetos matemáticos, pero sólo de aquellos que son indispensables para nuestra mejor teoría sobre el mundo. En su argumento, Quine acepta la existencia de números, funciones e incluso conjuntos; pero deja fuera la parte más abstracta de la teoría de conjuntos. En el siguiente capítulo se analizará el argumento de la indispensabilidad con un poco más de profundidad.

> Algunos lógicos ahora van más lejos para reforzar esta impresión, dándole un apoyo teórico; su objetivo es demostrar que los grandes infinitos de Cantor son de hecho necesarios para las matemáticas [...] El uso necesario de la teoría de conjuntos más abstracta en las matemáticas de lo finito aún no se ha establecido. Por otra parte, se puede establecer una defensa de que la teoría de conjuntos más abstracta es prescindible en las matemáticas científicamente aplicables; es decir, en la parte de las matemáticas de todos los días que encuentra sus aplicaciones en las otras ciencias. Dicho en otros términos: el infinito en acto no es necesario para las matemáticas del mundo físico. (Feferman, 1998, p. 30)[45]

Así, parece que no hay una justificación adecuada para la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos; en tanto, estos axiomas no ayudarán a la práctica matemática cotidiana. Desde el punto de vista de Feferman, la teoría de conjuntos y sus axiomas tienen como función únicamente establecer un fundamento para las matemáticas. La teoría de conjuntos no es más que un marco de fundamentación y sus axiomas son fundamentales. Esta visión de la teoría de conjuntos es un elemento fundamental en las críticas de Feferman. Si se puede mostrar que los axiomas de la teoría de conjuntos (o algunos de ellos) son axiomas estructurales la crítica de Feferman se debilitaría.

Pero incluso, si se acepta que la búsqueda de nuevos axiomas para completar la teoría de conjuntos estuviese bien justificada tendríamos que notar algunas cosas. En primer lugar, el realismo en ontología defendido por Gödel no implica la existencia de conjuntos infinitos y, por ello, la aceptación de conjuntos infinitos requiere supuestos extras para el realista.[46] En segundo lugar, las oraciones que expresan la HC son ambiguas o esencialmente vagas; pues, sin la suposición del realismo, no hay ningún hecho matemático que las haga verdaderas o falsa.[47] En tercer lugar, incluso concediendo que el programa de Gödel arrojó resultados impresionantes en un principio, los

[45] "Some logicians would now go farther to bolster this impression by giving it a theoretical underpinning; their aim is to demonstrate that Cantor's higher infinities are in fact necessary for mathematics [...] [T]he necessary use of higher set theory in the mathematics of the finite has yet to be established. Furthermore, a case can be made that higher set theory is dispensable in scientifically applicable mathematics, that is, in that part of everyday mathematics which finds its applications in the other sciences. Put in other terms: the actual infinite is not required for the mathematics of the physical world." La traducción es mía.

[46] Si bien es cierto que el realismo en ontología no garantiza por sí mismo la existencia de conjuntos infinitos, el realismo en ontología más un compromiso con el principio de maximalidad sí implica la existencia de conjuntos infinitos. Por ejemplo, asumiendo el teorema de cuasi-categoricidad de Zermelo, podemos ver que el principio de maximalidad nos pide no detenernos en ningún punto de la jerarquía de modelos de la teoría de conjuntos y, con ello, obtenemos la existencia de conjuntos infinitos.

[47] Sobre este punto, podemos recordar la discusión de la sección anterior que busca

criterios de aceptación de nuevos axiomas han mostrado estar agotados y ser ineficaces para solucionar el problema del continuo. Esto se debe a que se ha probado que ningún de los axiomas de cardinales grandes puede decidir si la HC es verdadera o falsa.

> Pero lo más sorprendente es que, a pesar de todos estos avances, contrariamente a las esperanzas de Gödel, la hipótesis del continuo aún no está decidida por estos nuevos axiomas; ya que se ha demostrado que es independiente de todos los axiomas de infinito remotamente plausibles, entre ellos MC, que han sido considerado hasta ahora (suponiendo que su consistencia). Eso puede llevar a uno a poner en duda no sólo el programa de Gödel, sino también sus propias presunciones. ¿Es la HC un problema definido como Gödel y muchos teóricos de conjuntos actuales creen? ¿El continuo en sí mismo es una entidad matemática definida? Si sólo tiene existencia platónica, ¿cómo podemos acceder a sus propiedades? (Feferman, 1999, p. 107)[48]

En la opinión de Feferman, todos los ejemplos de proposiciones indecidibles relacionadas con la teoría de conjuntos más abstracta han sido de interés sólo de los metamatemáticos y no de los matemáticos. Ningún problema de interés genuinamente matemático se ha generado a raíz de estos trabajos. Considera incluso resultados de teoría descriptiva de conjuntos y su relación con la existencia de cardinales grandes.[49] Sin embargo, considera que apelar a estos resultados es pedir la cuestión; pues, estos resultados requieren que aceptemos que los grandes cardinales son consistentes con la teoría ZFC. Además de que ninguno de estos resultado tiene interés matemático real. En cualquier caso, si estos resultados son útiles o interesantes para los matemáticos, no es necesario comprometerse con la verdad de los axiomas de cardinales grandes, sino únicamente estudiar las relaciones inferenciales que surgen de suponer que estos axiomas son consistentes con la teoría de conjuntos estándar.

Si lo que se busca es generar más herramientas matemáticas para complementar la labor matemática que tiene conexión con las ciencias empíricas, entonces no son necesarios nuevos axiomas como los que pretendía usar

---

evitar la ambigüedad en las nociones conjuntistas involucradas apelando a los resultados de cuasi-categoricidad. Si la estrategia funciona, la ambigüedad es eliminada.

[48] "But the striking thing, despite all this progress, is that contrary to Gödel's hopes, the Continuum Hypothesis is still undecided by these further axioms, since it has been shown to be independent of all remotely plausible axioms of infinity, including MC, that have been considered so far (assuming their consistency). That may lead one to raise doubts not only about Gödel's program but also about its very presumptions. Is CH a definite problem as Gödel and many current set-theorists believe? Is the continuum itself a definite mathematical entity? If it has only Platonic existence, how can we access its properties?" La traducción es mía.

[49] La relación entre los nuevos axiomas de la teoría descriptiva de conjuntos y los axiomas de cardinales grandes se analizará en el quinto capítulo.

Gödel, ni es necesario responder a preguntas como ¿cuál es el cardinal del continuo?, o similares.

Para reforzar su punto, Feferman nos hace recordar que la teoría de conjuntos y la búsqueda de una prueba o una refutación para la HC se enmarca dentro de la tradición formalista de Hilbert. Ahora bien, para que el problema esté bien definido se tiene que mostrar que la teoría de conjuntos vista como un sistema axiomático formal es consistente y categórico, pero para lograr la categoricidad hay que abandonar el lenguaje de la lógica de primer orden y optar por un lenguaje de segundo orden. En este nuevo sistema se puede mostrar la cuasi-categoricidad de la teoría de conjuntos y demostrar que la HC tiene un valor de verdad determinado; pero no existe un prueba ni de la HC, ni de su negación. Puesto que la lógica de segundo orden no es completa y aunque sabemos que ZFC2 tiene como consecuencia lógica (semántica) a HC o a $\neg$HC, no puede darse una prueba ni de una ni de otra.[50]

Feferman propuso una serie de nuevos axiomas que buscaban minimizar la cantidad de proposiciones indecidibles del tipo que se generan en la demostración de los teoremas de incompleción de la aritmética de Gödel.

> Mi preocupación [...] es concentrarse en el examen de los axiomas que se supone que son "tan exactamente evidentes", como los ya aceptados. A la luz de esto se excluye, entre otros, los axiomas de cardinales "muy grandes" (compactos, medibles, etc), los axiomas de la determinación, los axiomas de la aleatoriedad, y los axiomas cuya única razón para ser aceptados radica en su "fecundidad" o en que sencillamente tienen propiedades análogas a las de $\aleph_0$. Aun con esta restricción, como veremos, hay mucho espacio para la reconsideración del programa de Gödel. (Feferman, 1996, p. 6)[51]

Los detalles de la propuesta pueden verse, por ejemplo, en (Feferman, 1991 y 1996). No detallaré la propuesta pues no será de utilidad para los fines del trabajo. A continuación presentaré una reconstrucción del argumento de Feferman.

1. Existen dos tipos de axiomas; a saber, los axiomas estructurales y los axiomas fundamentales.

[50] Los detalles de la prueba de la independencia deductiva de HC respecto a ZFC2 pueden verse en (Weston, 1977).

[51] "My concern in the rest of this paper is to concentrate on the consideration of axioms which are supposed to be "exactly as evident" as those already accepted. On the face of it this excludes, among others, axioms for "very large" cardinals (compact, measurable, etc.), axioms of determinacy, axioms of randomness, and axioms whose only grounds for accepting them lies in their "fruitfulness" or in their simply having properties analogous to those of $\aleph_0$. Even with this restriction, as we shall see, there is much room for reconsideration of Gödel's program." La traducción es mía.

2. Los axiomas estructurales describen las estructuras con las que trabajan los matemáticos y ayudan a definir el marco conceptual en que estos individuos trabajan.

3. Los axiomas fundacionales buscan clarificar la naturaleza de los objetos matemáticos.

4. La necesidad de los nuevos axiomas sólo está bien justificada si han de servir para la práctica cotidiana de los matemáticos; es decir, si sirven para decidir sobre proposiciones indecidibles desde los sistemas originales.

5. Por lo tanto, los únicos nuevos axiomas que estaría bien justificados son los axiomas estructurales. Los axiomas fundacionales no son buenos candidatos para ser nuevos axiomas; por lo menos, su necesidad no está bien justificada.[52]

Los axiomas que necesitan (o pueden necesitar) las matemáticas son aquellos que son necesarios para decidir sobre proposiciones indecidibles en las teorías matemáticas que usan normalmente los matemáticos, aquellas que son aplicables a la ciencia. Estos axiomas podría ayudar a definir con mayor precisión algunas estructuras matemáticas como la estructura de las números naturales con sus operaciones usuales.

3.3.3. Una respuesta a Feferman desde la filosofía de Gödel.

En esta sección, presentaré lo que podría ser una defensa dada por Gödel a los argumentos de Feferman. Usaré sólo elementos ya presentes en la postura de Gödel o que fueron expuestos al presentar el teorema de cuasi-categoricidad de la teoría de conjuntos ZFCU2. En primer lugar, me concentraré en analizar la crítica principal de Feferman referente a la aceptación de axiomas estructurales (y aplicables en la ciencia). En segundo lugar, enfrentaré algunas críticas menores como la ineficacia del programa hasta este momento. Concluiré que los argumentos de Feferman sólo implican que no hay necesidad de nuevos axiomas como los axiomas de cardinales grandes, si aceptamos que sólo se requieren nuevos axiomas para las matemáticas

[52] Feferman cree que no es necesario justificar los axiomas que ya son usados en la práctica matemática cotidiana. En el caso de la teoría de conjuntos, los axiomas de ZFC ya son aceptados, aunque sostiene que ni siquiera es necesario aceptar toda la teoría de conjuntos estándar para lograr dar una reconstrucción de las matemáticas que son de interés para la mayoría de los matemáticos.

aplicadas. Es decir, no es suficiente con restringir la aceptación a axiomas estructurales, se requiere que los axiomas sean estructurales y aplicables en la práctica científica.

3.3.3.1. ¿Los axiomas de la teoría de conjuntos son fundamentales o estructurales?

Comenzaré con el argumento de Feferman en contra de la aceptación de los axiomas de cardinales grandes. El argumento principal parte de una distinción entre axiomas fundamentales y axiomas estructurales y concluye que los únicos nuevos axiomas que podemos aceptar de manera justificada son los axiomas estructurales. La conclusión de este argumento no descarta, de manera inmediata, la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos; a menos que, se asuma que todos los axiomas de la teoría de conjuntos son fundamentales (algo que Feferman parece aceptar). Pero, si se puede argumentar que los axiomas de ZFC (o por lo menos algunos de ellos) y los axiomas de cardinales grandes son axiomas estructurales, entonces el argumento no sería útil para rechazar como nuevos axiomas a los axiomas de cardinales grandes. Eso es justo lo que haré a continuación.

Un punto confuso de la postura de Feferman es que no establece una clara distinción entre los axiomas estructurales y los axiomas que son útiles para los matemáticos que aplican su conocimiento a otras disciplinas científicas. Como trataré de mostrar un poco más adelante, no hay una justificación adecuada para creer, como hace Feferman, que los axiomas estructurales tengan como una de sus características el de establecer conexiones con la otras disciplinas científicas; que un axioma sea estructural no implica que sea útil para las matemáticas aplicadas.[53]

La teoría de conjuntos en sus orígenes fue una teoría que buscaba dar fundamentos a las matemáticas, pero esto no implica que la teoría de conjuntos sea una teoría cuyos axiomas son fundamentales.[54] Podría ser que

[53]Alguien podría decir que el hecho de que un axioma sea estructural no garantiza que sea un axioma que se aplique (ahora) en nuestras teorías científicas actuales, pero que los axiomas estructurales son aquellos que pueden ser aplicados, tal vez no ahora, pero sí en el futuro. Los axiomas estructurales son los axiomas que pueden llegar a ser aplicados. Sobre este punto, estoy de acuerdo. Pero dado que defenderé que los axiomas de la teoría de conjuntos son estructurales, entonces las criticas de Feferman no los afectarían. Esto será todavía más claro en el siguiente capítulo, cuando exponga el análisis de la distinción entre matemáticas puras y aplicadas ofrecido por Penelope Maddy.

[54]Si bien es cierto que la teoría de conjuntos tuvo (y tiene) como uno de sus objetivos principales ofrecer una fundamentación para las matemáticas, el tipo de fundamentación que se ofrece es muy diferente a la que Feferman parece tener en mente. La teoría de conjuntos busca ser un marco conceptual que sirva para representar a todas las matemáticas,

una teoría que ha mostrado ser útil para ofrecer fundamentos, también sea una teoría cuyos axiomas describan estructuras que son su objeto de estudio principal.[55] En caso de que la teoría de conjuntos tenga este doble papel, como teoría matemática con axiomas estructurales y como teoría marco para generar fundamentos, entonces sería inmune a las críticas de Feferman; por lo menos a aquellas que sólo apelan a la distinción entre axiomas fundamentales y axiomas estructurales. Si algunos de los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos son estructurales debería poder ser aceptados, por lo menos en principio.

Para clarificar este punto, hay que recordar la distinción entre axiomas fundamentales y axiomas estructurales y consideremos algunos ejemplos. De acuerdo con Feferman, un axioma estructural describe las estructuras con las que un matemático va a trabajar, define su campo de estudio. Por ejemplo, los axiomas del aritmética son axiomas estructurales, pues describen la estructura de los números naturales y las operaciones que se pueden realizar en dicha estructura.

En contraste, Feferman sostiene que los axiomas fundamentales son del tipo que explican la naturaleza de objetos matemáticos como los números, las funciones, etcétera. Veamos ahora un ejemplo de una axioma que es claramente un axioma fundamental. Tomaré el ejemplo de la teoría de Gottlob Frege.

Frege instauró uno de los programa de fundamentación más importantes de la historia de las matemáticas. Su objetivo era dar un fundamento de las matemáticas reduciéndolas a la lógica. Su trabajo se centraba claramente

---

sus objetos y las relaciones entre estos, con el fin de darles una presentación que permita establecer conexiones con otras teorías matemáticas y clarificar sus conceptos básicos. Pero, que uno de los objetivos de la teoría de conjuntos sea dar fundamentos a las matemáticas, no implica que estos fundamentos deban ser últimos, ni que estén completamente desconectados de las prácticas matemáticas. Profundizaré en este punto en el siguiente capítulo.

[55] El punto tratado aquí es delicado. Uno podría decir que las matemáticas no requieren de más fundamento que aquel que es dado por la comunidad que las practica de manera exitosa. Por ejemplo, si bien es cierto que durante años se busco dar un sustento más sólido al análisis matemático, eso no implicó que el análisis fuese una herramienta poco usada o poco confiable antes de que en el siglo XIX se le diera una forma más acabada y aceptable.

Pero incluso, aquellos que sean detractores de los fundamentos últimos de las matemáticas, pueden aceptar una clase de fundamento diferente. Otra forma de entender un proceso de fundamentación de una teoría es construir modelos de ella y establecer conexiones con otras áreas de las matemáticas. Por ejemplo, cuando se propone una teoría matemática nueva se busca dar modelos en los que la teoría sea verdadera y establecer conexiones con ramas de las matemáticas mejor establecidas. En este sentido, la geometría euclidiana puede ser vista como una teoría que ofreció fundamentos a otras geometrías; pues, sirvió para crear modelos de ellas y establecer vínculos con otras áreas de las matemáticas.

en establecer la naturaleza de los números y otros objetos matemáticos. Por ejemplo, es su definición del número de los objetos que cumplen con F[56] es:

> [E]l número que corresponde al concepto F, es la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto F". (Frege, 1884, p. 175)

Esta definición del número está claramente en la línea de los axiomas fundamentales y no en la línea de los axiomas estructurales. Dado que Frege trabajaba con la extensión de conceptos, tenía que dar un criterio de identidad entre extensiones, mismo que recupero en uno de los axiomas de su teoría; a saber, la Ley básica V. Esta ley (que funciona como axioma) sostiene que la extensión de dos conceptos es la misma si y sólo si para cualquier objeto el valor de verdad que se obtiene al saturar uno de los conceptos es el mismo que se obtiene al saturar el otro concepto. En forma simbólica se puede expresar como:

(V) $(\breve{\alpha}F\alpha = \breve{\alpha}G\alpha) \equiv (x)(Fx = Gx)$[57]

Se puede ver que este tipo de axioma cumple las características de axioma fundamental tal como los describe Feferman. No ayudan a especificar la estructura de los naturales, ni describen las operaciones entre los números naturales, en su lugar pretende establecer cuál es la naturaleza de los números naturales.

Usando estos ejemplos como referencia, preguntémonos a qué tipo de axioma se parecen más los axiomas de la teoría de conjuntos; en especial, los axiomas de grandes cardinales. Considerando, por ejemplo, el axioma de potencia se puede ver que este axioma no nos dice que clase de objetos son los conjuntos, ni los subconjuntos, más bien nos dice que dado un conjunto arbitrario existe un conjunto que contiene a todos los subconjuntos del conjunto original. Parece claro que este axioma cuenta como un axioma estructural y no como un axioma fundamental, pues ayuda a establecer la clase de estructuras que se pueden generar dentro de la teoría de conjuntos. Algo similar puede decirse de los axiomas de cardinales grandes. Estos axiomas afirman que existen cardinales que cumplen con ciertas propiedades.[58] Un ejemplo que ya he dado es el caso del axioma de los cardinales fuertemente

[56]Frege sostenía que era necesario apelar a un concepto para así determinar cuántos objetos había. Su ejemplo clásico es el siguiente: Imaginemos que tenemos un maso de cartas, si nos preguntamos cuántos objetos tenemos en frente, la pregunta tiene una respuesta ambigua. Esto se debe a que si individuamos los objetos bajo el concepto maso de cartas, entonces tendremos un objeto. Pero si individuamos a los objetos usando el concepto carta, tendremos ante nosotros 52 objetos.

[57]Véase, (Frege, 1893, §20).

[58]Además, si se considera que la teoría de conjuntos es una teoría que entre otras cosas pretende ser una teoría que estudia los buenos ordenes (es decir, que pretende ser una teoría matemática para los números ordinales y cardinales), entonces los axiomas de grandes

inaccesibles, que afirman que existen cardinales que son fuertes (no son alcanzados usando la operación de potencia) e inaccesibles (que son cardinales límites regulares, lo que implica que, no pueden construirse usando el axioma de reemplazo). Parece claro que esta clase de axiomas busca describir la estructura del universo conjuntista, la estructura que estudian los teóricos de conjuntos. De ser así, los axiomas de la teoría de conjuntos pueden ser considerados estructurales y, en este sentido, parecen ser inmunes a las críticas de Feferman.

Hay todavía un sentido en el cuál la teoría de conjuntos y sus axiomas pueden ser considerados fundamentales y tiene que ver con el uso que se les ha dado. Si se considera que la teoría de conjuntos es una teoría que tiene como único fin ofrecer un marco para la fundamentación de las matemáticas, entonces podría decirse que sus axiomas son, en algún sentido, fundamentales. De nuevo, parece que Feferman estaría dispuesto a sostener esta postura.

Imaginemos que se ofrece una reconstrucción de la aritmética de Peano desde la teoría de conjuntos y veamos si esto implica que los axiomas de la teoría de conjuntos deben ser considerados fundamentales. De hecho, ya hay reconstrucciones de PA en la teoría de conjuntos, en las cuales los números naturales son conjuntos que cumplen con ciertas restricciones. Por ejemplo, la reconstrucción de von Neumann sostiene que los números naturales son conjuntos transitivos bien ordenados por la pertenencia y tales que tienen un elemento máximo. Usando esta reconstrucción se pueden probar todos los resultados que la aritmética ha obtenido. La reconstrucción muestra que PA es una teoría consistente, suponiendo la consistencia de la teoría de conjuntos. Ahora bien, existen otras reconstrucciones por ejemplo la reconstrucción de Zermelo, en la cual los números naturales son conjuntos unitarios cuyo único elemento es el número natural inmediato anterior. De nuevo, esta reconstrucción permite recuperar todos los resultados previos. Probablemente éstas son las dos reconstrucciones más conocidas de los números naturales desde la teoría de conjuntos y ambas asignan a los números naturales diferentes conjuntos. Esto genera problemas bien conocidos, en especial si se cree que los números son nombres propios y tienen que referir a un único objeto. Dado que cada reconstrucción asigna diferentes referentes a los números, por ejemplo al número 2, surge la pregunta ¿cuál de los dos referentes posibles del número 2 es el efectivamente el número 2 (si es que alguno)?. El problema surge si se pretende que la fundamentación sea reduccionista, es decir, que pretenda mostrar que los números son conjuntos. Los detalles de esta discusión están claramente expuestos en (Benacerraf, 1965). Si bien esto

cardinales sirven para establecer la clase de estructuras que cumplen con ser buenos ordenes y qué clase de propiedades pueden establecerse sobre ellos.

puede ser un problema, sólo lo es si se cree que la teoría de conjuntos pretende establecer una fundamento último de PA; una clase de fundamento, que entre otras cosas, busca clarificar la naturaleza última de los números. Sin embargo, existe otra forma de entender la clase de fundamento que pretende dar la teoría de conjuntos a PA. Una forma clara de presentar el programa es pensando a la teoría de conjuntos como una disciplina matemática con el poder expresivo necesario para reconstruir en ella otras teorías, establecer vínculos entre ellas y proporcionarles modelos. La fundamentación no pretende ser reduccionista. Entendida de esta forma, el problema de las múltiples reconstrucciones de la teoría de conjuntos sería un pseudo-problema, pues no se busca que la teoría de conjuntos aclaré la naturaleza última de los objetos matemáticos; sino que se busca generar modelos de PA dentro de la teoría de conjuntos que permitan además establecer conexiones con otras ramas de las matemáticas.

Si este es el tipo de fundamento que ofrece la teoría de conjuntos a otras disciplinas matemáticas, entonces no es muy diferente al tipo de fundamento que ofrecen otras ramas de las matemáticas. Basta pensar en los modelos algebraicos de la geometría que se obtuvieron a partir de la creación de la geometría analítica o en los modelos de diferentes geometrías generadas dentro de la geometría euclidiana.

Si se considera que este tipo de fundamento es el único necesario e importante, se puede comprender la afirmación de Feferman sobre que ni siquiera se requiere toda la teoría de conjuntos para generar esta clase de fundamentos. En este sentido sería una afirmación correcta, se puede reconstruir toda la matemática en teorías mucho más débiles que la teoría de conjuntos.[59] Pero al mismo tiempo, hemos mostrado que este tipo de fundamentación no es propia de la teoría de conjuntos, se puede realizar desde otras disciplinas matemáticas.

Además, si se observa con cuidado el desarrollo de la teoría de conjuntos, es posible observar que sus practicantes no se han concentrado únicamente en proporcionar reconstrucciones de otras teorías dentro de su propio marco de trabajo. También han desarrollado un trabajo prominente en analizar conjuntos y sus propiedad conjuntistas. Por ejemplo, el conjunto de los núme-

[59]Si bien Feferman está en lo correcto al afirmar que no es necesaria la teoría de conjuntos ZFC para realizar los trabajos de fundamentación aquí referidos, no considera que el teórico de conjuntos no sólo piensa en las disciplinas matemáticas actuales y su desarrollo hasta este punto. Justo apelando al principio de maximalidad, podemos sostener que el teórico de conjuntos que pretende que la teoría de conjuntos pueda modelar toda teoría matemática posible, no estaría restringido por el desarrollo actual de las matemáticas. En este sentido, si nos comprometemos con el principio de maximalidad, ni las teorías propuestas por Feferman, ni ZFC, pueden hacer el trabajo completo de fundamentación.

ro reales, la clase de los buenos ordenes, los número ordinales y cardinales, las consecuencias del axioma de elección, etc. En este sentido, parece que la teoría de conjuntos es también una teoría matemática con objeto de estudio propio y cuyo trabajo no se reduce a ofrecer un fundamento a otras disciplinas matemáticas.

Si se quiere rechazar a la teoría de conjuntos debido a que puede realizar este trabajo, creo que también se deberían rechazar otras disciplinas. Algo que no sería muy aceptado por la comunidad matemática.

La última opción para comprender el rechazo de los axiomas de cardinales grandes, propuesto por Feferman, consiste en centrar los ataques en el hecho de que la teoría de conjuntos no es necesaria para las matemáticas aplicadas.

3.3.3.2. Sobre otras objeciones al programa de Gödel.

Feferman ofreció algunas otras de objeciones (menores) en contra de la teoría de conjuntos y del programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas para ella. Sostuvo que el realismo de Gödel no implica la existencia de conjuntos infinitos, que oraciones como la HC eran ambiguas, que el programa de Gödel supera por mucho los objetivos iniciales del programa de Hilbert y que el programa ha ofrecido pocos resultados.

Respecto a las dos primera críticas, ya había dicho que efectivamente el realismo por sí mismo no implica que existan conjuntos infinitos y que, a partir de las pruebas de independencia de la teoría de conjuntos, se cuestionó si había un modelo pretendido de la teoría de conjuntos y en caso de no ser así, muchos consideraban que proposiciones, como la HC, no eran lo suficientemente claras para ser decididas. Estos dos puntos se pueden solucionar si es que apelamos a los teoremas de cuasi-categoricidad de la teorías de conjuntos ZFCU2. Si se aceptan los resultados de Zermelo, podemos garantizar la existencia de modelos infinitos de la teoría de conjuntos, además de que todos los modelos de la teoría de conjuntos asignan el mismo valor de verdad para proposiciones como la HC. Si bien, la aceptación de estos resultados parece suponer el realismo en ontología para la teoría de conjuntos, estos resultados ofrecen una prueba de que el universo conjuntista implica la existencia de conjuntos infinitos y que proposiciones como HC no son ambiguas.

Respecto a que los límites del programa de Hilbert son ampliamente superados por el programa de Gödel, es completamente cierto. Pero esto no parece ser un problema si asumimos la postura filosófica de Gödel. Como ya he dicho en secciones anteriores, Gödel creía que el formalismo no recuperaba todos los aspectos relevantes de la práctica de los matemáticos.

Sobre el último punto, si bien es cierto que el programa de Gödel no ha ofrecido los resultados que se pretendían obtener, sí han obtenido resultados impresionantes en especial en teoría descriptiva de conjuntos.[60] Además, aunque los axiomas de grandes cardinales no pueden solucionar el problema del continuo, el programa no está comprometido sólo con la aceptación de axiomas de esta clase. El programa es compatible con la aceptación de nuevos axiomas de tipos completamente diferentes y es en principio posible que en un futuro cercano se propongan axiomas que resuelvan el problema del continuo. Justo el problema que me atañe en este trabajo es si a partir de los criterios tradicionales se puede o no ofrecer una justificación adecuada para axiomas lo suficientemente fuertes para decidir sobre la HC.

3.3.3.3. ¿Qué hacer con las teorías sin aplicación?

Aún queda la posibilidad de que se rechacen los axiomas de la teoría de conjuntos y los axiomas que pretenden completarla apelando a que no son aplicables, no son de utilidad para otras disciplinas científicas. Los axiomas de la teoría de conjuntos no son axiomas fundamentales, sino estructurales; aunque pueden servir para realizar trabajos de fundamentación de las matemáticas. Entonces, la única forma plausible de rechazarlos es mostrar que no son de utilidad para las prácticas científicas actuales. Existen por lo menos dos problemas con esta postura.

El primer problema obvio es que los matemáticos no están dispuestos a rechazar teorías matemáticas sólo porque no tienen una aplicación directa en nuestras mejores teorías científicas (empíricas). De hecho, existen muchos ejemplos de teorías matemáticas que no tuvieron aplicación por años y eso no hizo fuesen abandonadas; por ejemplo, las geometrías no euclidianas no fueron aplicables en el momento de su creación, lo mismo paso con muchas teorías algebraicas creadas en el siglo XIX.[61]

El segundo problema es que Feferman no nos ha mostrado de manera concluyente que la teoría de conjuntos (junto con los axiomas de grandes cardinales) no sean útiles para las otras disciplinas científicas. En este sentido, matemáticos como Harvey Friedman han sostenido que sí son aplicables y bajo los criterios de aplicabilidad en la ciencia deben ser aceptadas por la comunidad matemática.[62]

---

[60] Algunos de estos resultados serán presentados en los capítulos siguientes.

[61] Esto se verá con mayor detalle en el próximo capítulo.

[62] La postura de Friedman es mucho más compleja. Él sostiene que los axiomas de cardinales grandes, tal cual están planteados no deben ser aceptados y rechaza todo la evidencia a favor de ellos que se genera apelando a los resultados en teoría descriptiva de conjuntos; pues, considera que piden la cuestión. En su lugar, propone una nueva teoría que establezca conexiones entre teoría de conjuntos abstracta y otras ramas de la matemática. Esto se debe a que Friedman tiene una serie de criterios (mucho más estrictos) que debe cumplir un axioma para ser aceptado. Estos criterios incluyen que los axiomas deben

En el mejor de los casos, Feferman ha mostrado que si aceptamos la tesis de que sólo son relevantes las matemáticas aplicadas entonces debemos rechazar el programa de Gödel. Pero, la aceptación de esta tesis es tal discutida como la aceptación del realismo en matemáticas.

3.4. Conclusiones del capítulo.

En este capítulo presenté el programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas, su relación con el realismo y las críticas de Feferman al programa. De esto podemos concluir que:

(1) El programa de Gödel busca completar los axiomas de la teoría de conjuntos estándar con el objetivo de describir de la mejor manera posible el universo conjuntista. Su postura descansa en un realismo en ontología que, por sus características propias, implica también un realismo en valor de verdad.

(2) Gödel acepta dos clases de criterios para la aceptación de nuevos axiomas, los criterios internos y los criterios externos. Los criterios internos buscan recuperar la noción intuitiva de "conjuntos de" y los externos ofrecen como evidencia a favor de los nuevos axiomas su utilidad para la teoría. Esto no impide que Gödel tenga problemas de acceso epistémico al universo conjuntista.

(3) Para completar una defensa de los criterios internos y clarificar el realismo tanto en ontología como en valor de verdad, se puede recurrir a los teoremas de cuasi-categoricidad de Zermelo. Pero ello implica un círculo en la justificación, debido a que los teorema suponen el realismo para la teoría de conjuntos.

(4) Feferman critica el programa de Gödel apelando a 1) una diferencia entre axiomas fundamentales y axiomas estructurales, 2) no hay necesidad de nuevos axiomas para reconstruir a las matemáticas cotidianas, 3) las proposiciones como HC y $V = L$ son ambiguas, 4) el realismo no implica que existan conjuntos infinitos y 5) los axiomas de la teoría de conjuntos no son útiles para la ciencia empírica.

(5) Se presentaron argumentos en contra de todas, con la posible excepción de la quinta. En este sentido, todo parece indicar que si aceptamos que

ser completa y naturalmente matemáticos, debe ser concretos, deber ser accesibles, entre otros. Para los detalles, véase (Feferman et al. 2000). En cualquier caso, el programa de Friedman se aleja de los objetivos de este trabajo, por lo que no lo detallaré.

> sólo importan las matemáticas aplicadas, entonces debemos hacer caso a Feferman y abandonar el programa de Gödel. Pero si rechazamos esta postura, estamos en buena posición para continuar con el programa.

Hasta aquí parece que nos encontramos frente a un punto de quiebre y no es claro cómo decidir cuál de las dos posturas debe ser aceptada, si es que alguna. En el siguiente capítulo presentaré la posición de Penelope Maddy, con el fin de encontrar elementos para decidir entre estas dos posturas, o incluso una tercera. La postura de Maddy tiene el atractivo de ser naturalista y ofrecer criterios para decidir qué nuevos axiomas se deben aceptar, obtenidos mediante una reflexión cuidadosa de la práctica matemática.

Capítulo 4

La Filosofía Segunda de Maddy.

El término "naturalismo" se utiliza en una variedad de formas en la literatura filosófica, pero aquí espero desarrollar la pista que se nos dio [antes]: si nuestra explicación filosófica de las matemáticas entra en conflicto con la práctica matemática exitosa, es la filosofía la que debe ceder. Esta no es, en sí misma, una filosofía de la matemática; más bien, es una posición sobre las relaciones adecuadas entre la filosofía de las matemáticas y la práctica de las matemáticas. Sentimientos similares aparecen en los escritos de los muchos filósofos de las matemáticas que sostienen que el objetivo de la filosofía de las matemáticas es dar cuenta de las matemáticas tal como se practican, no recomendar la reforma. Utilizo el término "naturalismo", porque la posición que finalmente describo debe mucho al naturalismo de Quine, pero otro término apropiado sería "modestia filosófica".

Penelope Maddy

4.1. ¿Por qué Maddy?

En el capítulo anterior, comencé la búsqueda por una postura filosófica adecuada para evaluar si los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos están o no bien justificados.[1] Presenté un esbozo de la filosofía de las matemáticas de Gödel, me concentré en su postura realista y en su programa para la búsqueda de nuevos axiomas para ZFC. También presenté la postura filosófica de Feferman sobre la indecidibilidad, su crítica al programa de

[1]La postura filosófica de fondo es necesaria para evaluar la indecidibilidad absoluta de proposiciones de la teoría de conjuntos como la HC respecto de ZFC, pues, como mostré en el capítulo 2, la indecidibilidad absoluta de una proposición respecto a un sistema incluye como uno de sus elementos la posición filosófica desde la cuál se determina si las modificaciones al sistema original están o no bien justificadas.

Gödel y su reformulación del programa de búsqueda de nuevos axiomas para las matemáticas. Concluí que las posturas de Gödel y de Feferman sobre la aceptación de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos están en oposición y que dicha oposición se debe, en buena medida, a que Gödel apoya su postura en el realismo matemático, mientras que Feferman rechaza el realismo y adopta una postura que favorece a las matemáticas aplicadas.

Gödel acepta la necesidad de nuevos axiomas debido a que, desde su punto de vista, la teoría de conjuntos tiene como fin último describir de la manera más precisa posible el universo de los conjuntos. Feferman rechaza el programa de Gödel, pues desde su punto de vista, la teoría de conjuntos tiene como fin último ofrecer una teoría que sirva para fundamentar a las teorías matemáticas que tiene aplicaciones en las ciencias empíricas.

Para responder si la HC es o no una proposición absolutamente indecidible respecto a ZFC, es necesario elegir una postura filosófica (que puede ser la de Gödel, la de Feferman o alguna otra). Podría optar por el realismo gödeliano, debido a que la postura de Feferman decide de manera inmediata la pregunta original sobre la decibilidad de la HC. La razón es sencilla, si se acepta la postura de Feferman, la HC sería ambigua y absolutamente indecidible; lo que es más no tiene sentido buscar una respuesta para el problema del continuo. La propuesta de Feferman es abandonar por completo la búsqueda de nuevos axiomas que decidan la HC. En este sentido, parece que lo mejor para continuar con la investigación sería optar por la postura de Gödel. Sin embargo, esta respuesta sería muy *ad hoc*, pues no ofrecería ninguna razón ni justificación adecuada para optar por una postura y no por otra.[2]

Tanto la postura de Gödel como la de Feferman descansan en visiones filosóficas diferentes, generadas y defendidas de manera independiente del estudio concreto de la teoría de conjuntos en su estado actual de desarrollo. Es decir, tanto el realismo de Gödel como la preferencia por las matemáticas aplicadas de Feferman son posturas que no surgen del estudio del desarrollo actual de la teoría de conjuntos. Cada uno, una vez que ha adoptado una postura filosófica, propone un programa de trabajo para la teoría de conjuntos. En este sentido, la discusión es filosófica y se aleja de la forma en la cual se ha desarrollado la teoría de conjuntos hasta ahora.[3] Hay por lo menos dos

[2]También podría optar por la postura de Feferman pues ofrece una respuesta sencilla al problema, pero esto sería igualmente *ad hoc*.

[3]Si bien la postura de Gödel no se fundamente en la práctica matemática, sí considera los resultados que su ofrecen en la literatura. Su programa considera los desarrollos actuales en teoría de conjuntos y busca obtener una respuesta al problema del continuo apoyado en ellos y en algunos otros elementos. Como mostraré un poco más adelante, el problema fundamental con la postura de Gödel es que no puede ofrecer una justificación adecuada para garantizar que los nuevos resultados obtenidos por la teoría de conjuntos describan

opciones para tratar de decidir la cuestión. La primera consiste en establecer una discusión filosófica sobre el papel de las matemáticas en las ciencias, analizar si las matemáticas aplicadas tienen más relevancia que las matemáticas puras y si el realismo de Gödel es o no aceptable. Esta estrategia pone un énfasis mayor en la función de la filosofía para solucionar esta clase de conflictos y, en un sentido claro, la pone por encima de la matemática. La segunda opción es cambiar el tipo de análisis que se está realizando, poniendo más énfasis en las matemáticas y la forma en que se practican actualmente. Esta opción puede considerarse naturalista, en el sentido de que antes de ofrecer argumentos filosóficos para decidir cuál es la mejor postura de partida para analizar el problema, pretende analizar las prácticas matemáticas y, a partir de dicho análisis, elegir la mejor postura filosófica (se da preeminencia a las matemáticas sobre la filosofía). Optaré por la segunda opción. La razón es que esta postura incluye muchos elementos que son relevantes para la decisión de cuál es el mejor tipo de análisis y, por lo menos en principio, parece no prejuzgar la cuestión.[4]

El primer punto que abordaré es qué entenderé por naturalismo y qué metodología específica emplearé para analizar las prácticas matemáticas y, en general, científicas. En la actualidad, existen una gran cantidad de posturas y metodologías filosóficas que pretenden ser naturalistas. En palabras de Maddy:

> En estos días, a medida que más y más filósofos se cuentan a sí mismos como naturalistas, el término ha llegado a significar poco más que una vaga referencia a sentir simpatía con la ciencia. Para calificar como antinaturalista, un pensador contemporáneo tiene que insistir, por ejemplo, que la epistemología es una disciplina *a priori* sin nada que aprender de la psicología empírica o que las intuiciones metafísicas muestran que la mecánica cuántica es falsa. Hay aquellos que toman tales posiciones, por supuesto, pero agrupar a todos los demás bajo una rúbrica es claramente un diagnóstico demasiado crudo. (Maddy, 2007, p. 1)[5]

de manera correcta el universo conjuntista.

[4]Esta decisión es metodológica y no está exenta de críticas. Optar con un análisis filosófico previo al análisis de la práctica matemática no es ningún sentido una mala estrategia por sí misma. Pero, como espero mostrar a continuación, la estrategia naturalista tiene como virtud recuperar muchos aspectos relevantes de la práctica e incluirlos en el análisis filosófico. En este sentido, creo que la opción naturalista puede tener un impacto más directo en las matemáticas, pues su postura pretende recuperar y resolver cuestiones relevantes para el matemático que hace teoría de conjuntos y no sólo para el filósofo interesado en analizar estos fenómenos matemáticos.

[5]"These days, as more and more philosophers count themselves as naturalists, the term has come to mark little more than a vague science-friendliness. To qualify as unnaturalistic, a contemporary thinker has to insist, for example, that epistemology is an a priori discipline with nothing to learn from empirical psychology or that metaphysical intuitions show

Así que, al optar por un análisis naturalista de las matemáticas, primero es necesario clarificar qué se entiende por naturalismo. Hasta ahora sólo sé que quiero que mi reflexión filosófica sobre las matemáticas comience con un estudio de la práctica de las matemáticas, pero esto no es suficiente para determinar qué tipo de estudio debo realizar.

Una vez que he aceptado que la reflexión filosófica sobre las matemáticas (en particular, sobre la teoría de conjuntos) debe partir del análisis del trabajo de los matemáticos, me enfrento a preguntas como: ¿cuáles son las herramientas que debo usar en cada momento de mi investigación?, ¿cómo comienzo el análisis del trabajo de los matemáticos?, ¿cuál es la metodología que debo emplear en mi análisis?, una vez que tengo los resultado de mi análisis, ¿cuál es la metodología que debo seguir en mi reflexión filosófica sobre éstos?, etcétera. Existen muchas posibles respuestas a estas preguntas. Por ejemplo, podría adoptar una postura similar a la de W.V.O. Quine y tratar de ofrecer un análisis de las matemáticas usando las herramientas y metodologías de la mejor psicología disponible, la lógica clásica y las matemáticas mismas, usando estas herramientas podría estudiar a la teoría de conjuntos y los procesos que llevan a cabo sus practicantes. La idea detrás de la propuesta de Quine es elegir un conjunto de disciplinas que se usarán para realizar el análisis, la elección de estas disciplinas es previa al análisis mismo. Hay propuestas similares a la de Quine que eligen estudiar a la práctica matemática a la luz de otras disciplinas científicas (o conjuntos de ellas), disciplinas como la antropología, la sociología, la pedagogía, la lingüística, la neurociencia, etcétera. Las disciplinas elegidas proporcionan los métodos con los que se debe realizar el análisis. Sin embargo, todos estos estudios parecen claramente parciales, pues analizan a la matemática (y a la teoría de conjuntos) desde el punto de vista de otras disciplinas científicas elegidas previamente y sin ofrecer razones a favor de esta elección que emanen de la matemática misma. Parece que al optar por alguna de estas opciones sin recuperar elementos presentes en la práctica de los matemáticos (si la elección de las herramientas es previa al análisis), simplemente se ha cambiado la postura de partida del estudio. Se ha cambiado una postura filosófica por una postura científica, pero de nuevo no hay una justificación sobre la elección hecha. Creo que esto no representa un avance real en la solución del problema original.

Este punto es muy controvertido. Muchos podrían argumentar que sí hay una ganancia importante en cambiar la postura original de una filosófica a

---

quantum mechanics to be false. There are those who take such positions, of course, but to lump everybody else under one rubric is clearly too crude a diagnostic." La traducción es mía.

una científica. Algunos filósofos de las matemáticas (afines a la naturalización de la filosofía como la entiende Quine) pueden argumentar que los estudios de los fenómenos matemáticos que parten de alguna disciplina científica (por ejemplo, la psicología) están mejor fundamentados que los estudios que parten de una postura filosófica, pues sus resultados están apoyados en una tradición científica bien establecida (con mucha evidencia que la corrobora). Es posible que equiparen este caso con el de otros fenómenos que originalmente fueron tratados por la filosofía, para después ser tratados por una ciencia particular con resultados increíbles (por ejemplo, la estructura del espacio físico). Sin embargo, no es claro que estemos ante un caso análogo. Cuando un fenómeno es adoptado como objeto de estudio de una disciplina científica (o de varias), se asume implícita o explícitamente que las metodologías de esta(s) disciplina(s) son adecuadas para estudiarlo, incluso en algunos casos se asume que dichas metodologías agotan su estudio (estudian todos sus aspectos relevantes). Pero que una cierta metodología sea adecuada o no para estudiar un fenómeno no es algo que se decida *a priori*, en la mayoría de los casos requiere largos periodos de observación y análisis previo (guiado por principios preteóricos muy generales). Si elegimos de manera previa una disciplina científica para realizar el estudio de la práctica matemática, ¿cuál es el garante de que sus metodologías son adecuadas para el estudio de la práctica matemática? En mi opinión, no hay ningún garante y la decisión es arbitraria. Es por esto que sostengo que no hay ningún avance sustancial en el estudio de la práctica matemática al cambiar el punto de partida, de una postura filosófica a una teoría científica.[6]

La postura filosófica de Penelope Maddy puede ayudar mucho en este punto, puesto que pretende rescatar una versión del naturalismo que no favorezca a un tipo de análisis científico particular, sino que estudie los fenómenos matemáticos apelando a métodos científicos generales y respete en un sentido fuerte la práctica que se está analizando.[7]

Como ya dije, Maddy es consciente de que en la actualidad el término naturalista tiene un multitud de significados asociados y puede ser confuso usarlo. Es por ello que, ella prefiere usar el término Filosofía Segunda, que también expresa su predilección por realizar el análisis filosófico de una disciplina después del análisis de las prácticas que se dan en ella. Ella describe de

[6]Con esto no quiero decir que dichos estudios no puedan ser útiles o que sus resultados no sean relevantes, concedo esto. Sin embargo, creo que no son un punto de partida adecuado para realizar un análisis que nos sirva para hacer una reflexión filosófica adecuada de las prácticas matemáticas. Esto será más claro un poco más adelante.

[7]Una razón extra para elegir la postura filosófica de Maddy, es que ella es, además de una gran filósofa, una experta en teoría de conjuntos. Esto es muy relevante si es que queremos que nuestro análisis tenga como base la práctica de los teóricos de conjuntos.

manera general el trabajo de una practicante de esta filosofía segunda como sigue:

> Esta filósofa segunda se siente igualmente en su medio en la antropología, la astronomía, la biología, la botánica, la química, la lingüística, la neurociencia, la física, la fisiología, la psicología, la sociología, ... e incluso en las matemáticas, una vez que se da cuenta de que lo principal está en su continuo esfuerzo por comprender el mundo. [...] Utiliza lo que normalmente describimos en nuestros términos, duros pero respetuosos, como "métodos científicos", pero de nuevo sin ningún tipo de manera definitiva de caracterizar exactamente lo que implica el término. Simplemente comienza a partir de la percepción del sentido común y procede de allí a la observación sistemática, la experimentación activa, la formación de la teoría y las pruebas, trabajando todo el tiempo para evaluar, corregir y mejorar sus métodos tal como ella los utiliza. (Maddy, 2007, p. 2)[8]

En mi opinión, optar por un análisis como el propuesto por Maddy tiene la ventaja de no prejuzgar la cuestión, pues ofrece una clase de análisis que no asume una postura filosófica fuerte desde un principio, ni tiene predilección por usar los métodos de investigación de ninguna disciplina científica particular. Es por ello que he elegido optar por la metodología de la filosofía segunda para decidir cuál es la postura filosófica de fondo que usaré en la evaluación de las modificaciones de la teoría de conjuntos ZFC.

En este capítulo expondré la filosofía segunda de las matemáticas de Maddy. Pondré énfasis en la ontología y la epistemología de las matemáticas que surgen de su propuesta, sus argumentos contra la postura de Feferman, sus discrepancias con Gödel y los criterios de aceptabilidad para los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos (mismo que usaré en el siguiente capítulo para analizar la indecidibilidad de la HC respecto a ZFC).[9]

---

[8] "This Second Philosopher is equally at home in anthropology, astronomy, biology, botany, chemistry, linguistics, neuroscience, physics, physiology, psychology, sociology, ... and even mathematics, once she realizes how central it is to her ongoing effort to understand the world. [...] She uses what we typically describe with our rough and ready term ?scientific methods', but again without any definitive way of characterizing exactly what that term entails. She simply begins from commonsense perception and proceeds from there to systematic observation, active experimentation, theory formation and testing, working all the while to assess, correct, and improve her methods as she goes." La traducción es mía.

[9] Al final, no optaré ni por la postura filosófica de Gödel ni por la de Feferman. La postura filosófica de fondo que usaré para evaluar las modificaciones de ZFC será la que surge del análisis de las prácticas matemáticas de la teoría de conjuntos realizado con la metodología de la filosofía segunda.

4.2. Naturalismo a là Maddy: Filosofía Segunda.

Penelope Maddy es una de las filósofas de las matemáticas más reconocida en la actualidad, especialmente por su trabajo en filosofía de la teoría de conjuntos. Una de las grandes virtudes de Maddy, que está presente en todo su trabajo, es que tiene un vasto conocimiento técnico en teoría de conjuntos, conoce los métodos de investigación y las intuiciones que guían a gran parte de la comunidad teórico conjuntista cuyo trabajo es relevante para esta investigación.[10] Esto se debe a que fue miembro activo del grupo CABAL, dedicado a la investigación en el área de teoría de conjuntos.[11] Este grupo es el que, en buena medida, lleva a cabo la investigación de punta en el área. El excelente conocimiento que tiene Maddy de la teoría de conjuntos y sus prácticas le permitió enfrentar con ojos críticos las posturas filosóficas que se habían desarrollado hasta su momento, en torno a la teoría de conjuntos y fenómenos relacionados. Por ejemplo, el programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas.

Desde su punto de vista, la mayoría de las filosofías de la teoría de conjuntos propuestas hasta el momento o bien muestran un desconocimiento de aspectos muy relevantes de la práctica de los teóricos de conjuntos, o bien, en el peor de los casos, ni siquiera consideran a la práctica como un elemento relevante en el análisis filosófico de las matemáticas. En este sentido, las filosofías tradicionales no son adecuadas, pues no recuperan a cabalidad el fenómeno que pretenden estudiar. Ella atribuye esto a que el análisis filosófico tradicional no comienza con el estudio de las matemáticas, sino con una postura filosófica previamente aceptada que sirve después como base para el estudio de las matemáticas (por ejemplo, la postura de Gödel o la de Feferman). El problema central con esta metodología es que si las matemáticas no se adecuan a la postura filosófica elegida o bien son forzadas a adaptarse o bien hay una pretensión de corregidas. Ella llama a esta clase de estudios

[10] Un punto de discusión es quiénes deben ser considerados miembros de la comunidad teórico conjuntista. Existen muchas tradiciones y grupos de trabajo con metodologías y objetivos distintos. He optado por una aproximación conservadora en este punto y, por ello, me concentraré en la comunidad de teóricos de conjuntos que han tratado de desarrollar el programa de Gödel, que aceptan los axiomas de cardinales grandes, los criterios internos y externos para la aceptabilidad de nuevos axiomas y que todavía tienen interés en resolver el problema del continuo (dando una respuesta afirmativa o negativa).

[11] El grupo CABAL es un grupo de investigación en el área de teoría de conjuntos que tiene como sede las universidades UCLA, CALTECH, UC Irvine y UC Berkeley. En él han trabajado a lo largo de los años algunos de los personajes más emblemáticos de la teoría de conjuntos contemporánea como Donald A. Martin, Yiannis Moschovakis, John Steel, Alexander Kechris, Robert Solovay, Hugh Woodin, Matthew Foreman y Steve Jackson.

Filosofía Primera. La filosofía primera, más que una postura filosófica particular, es una metodología que da prioridad a la reflexión filosófica previa al análisis de los fenómenos matemáticos.

La propuesta de Maddy consiste en cambiar la metodología filosófica, más que cambiar propiamente la postura filosofía (el cambio de postura puede ser una consecuencia, pero no es el objetivo principal).[12] El objetivo de Maddy es realizar un estudio científico filosófico de la teoría de conjuntos. Para ello hay que comenzar con el estudio cuidadoso de las prácticas y la historia de las matemáticas. A partir de los resultados obtenidos de este estudio, se construye la postura filosófica del segundo filósofo.

Maddy propone abandonar la metodología de la filosofía primera. Desde su punto de vista, si se quiere ofrecer un análisis correcto de las matemáticas como disciplina, primero es necesario conocer las prácticas matemáticas, cuáles son sus objetivos, con qué objetos trabajan los matemáticos (si es que con alguno), qué tipo de pruebas utilizan, qué métodos son preferidos por los matemáticos, etcétera. Su propuesta es hacer Filosofía Segunda, es decir, que las reflexiones filosóficas tomen como punto de partida el análisis de la disciplina y no al revés. El estudio de las matemáticas propuesto se realizará desde la filosofía naturalizada. Pero a diferencia de otros como Quine, ella pretende que el estudio no esté prejuiciado por una postura filosófica particular ni por una preferencia previa por alguna disciplina científica y sus métodos. La filosofía segunda busca ser un estudio científico, guiado por nuestro interés de conocer el mundo. La metodología usada debe ser científica, esto no debe entenderse como una reducción del estudio filosófico de la matemáticas al estudio que pueda realizarse desde otras teorías científicas. Para Maddy, el estudio de la filosofía segunda debe comenzar con la observación del sentido común, irse refinando y gradualmente debe incluir más y más elementos de la ciencia, pero nunca se debe tratar de imponer los resultados obtenidos a las matemáticas. Las matemáticas y sus prácticas son el juez último del desarrollo, el trabajo y los resultados dados por la filosofía de las matemáticas.

Es importante remarcar que el estudio propuesto no debe confundirse con una postura que sostenga que la filosofía de las matemáticas correcta es aquella que los matemáticos acepten. No reduce el problema a generar un consenso entre la comunidad matemática. Pues si bien los matemáticos,

[12]Los resultados obtenidos por Maddy usando la metodología de la filosofía segunda serán muy similares a los de algunas posturas tradicionales. En particular, la ontología del filósofo segundo será muy similar a la de algunas propuestas tradicionales. Sin embargo, la justificación para la aceptación de dicha ontología es muy diferente a la ofrecida por la filosofía tradicional. Esto será muy relevante para la epistemología propuesta por el filósofo segundo.

los hombres de carne y hueso, son los que realizan el trabajo matemático, las prácticas matemáticas no depende por completo de sus elecciones. La práctica matemática es mucho más compleja, incluye el trabajo hecho por los matemáticos, pero también incluye la relación de los resultados que éstos ofrecen con otras ciencias, la satisfacción de ciertos objetivos de la teoría, etcétera. Incluso la práctica matemática puede incluir el estudio de hechos independientes (no necesariamente físicos).[13]

Es relevante señalar que los matemáticos no requieren tomar una postura filosófica particular para realizar su trabajo y, en general, no cuentan con el entrenamiento adecuado para realizar estudios de tipo filosófico (realizar un estudio filosófico de las matemáticas no es parte del trabajo del matemático). Cuando un matemático recibe su entrenamiento como un profesional de esta disciplina se le enseñan métodos de prueba, axiomas, problemas a resolver, resultados previos, etcétera; la comprensión, asimilación y reproducción de todos estos elementos necesarios en su práctica no requiere que ellos elijan una postura filosófica sobre la naturaleza de los objetos matemáticos ni sobre el tipo de acceso que tenemos a éstos (en caso de que existan). El matemático profesional puede hacer matemáticas (de forma muy exitosa) y al mismo tiempo mantenerse neutro sobre la filosofía de las matemáticas; el matemático no necesita pronunciarse a favor de ninguna postura filosófica particular para poder hacer su trabajo.

> Los matemáticos, después de todo, tienen sus matemáticas para hacer, y lo hacen espléndidamente. Disposicionalmente adaptados a un objetivo, el cual es que los teoremas enunciados sean demostrados de manera concluyente, ellos podrían preferir una postura filosófica sencilla y elegante, incluso si en última instancia es insatisfactoria, sobre una postura que exige la clase complejidades metafísicas y epistemológicas como las que requeriría el realismo en toda regla. Y no hace ninguna diferencia para su práctica, siempre y cuando el doble-pensar sea aceptable. (Maddy, 1990, p. 3)[14]

En términos del trabajo que el matemático realiza, la postura filosófica es irrelevante. En todo caso, el problema es para el filósofo, pues es para

[13]Maddy sostiene que la matemática estudia hechos matemáticos profundos, aquellos que están implícitos en sus prácticas. La existencia de estos hechos matemáticos profundos no nos compromete con una postura filosófica realista. Analizaré este punto un poco más adelante, pero puedo adelantar que creo que usar “hechos de la matemática profunda” es desafortunado y muy probablemente sea un resabio de la postura realista de Maddy.

[14]“Mathematicians, after all, have their mathematics to do, and they do it splendidly. Dispositionally suited to a subject in which precisely stated theorems are conclusively proved, they might be expected to prefer a simple and elegant, if ultimately unsatisfying, philosophical position to one that demands the sort of metaphysical and epistemological rough-and-tumble a full-blown realism would require. And it makes no difference to their practice, as long as double-think is acceptable.” La traducción es mía.

él que resulta inaceptable la postura ambigua del matemático. Así que la opinión del matemático sobre cuál es la postura filosófica más adecuada no es relevante para la segunda filosofía. Y esto es del todo deseable; los estudios que realiza el matemático tienen objetivos muy diferentes a los que realiza el filósofo segundo de las matemáticas. El matemático hace matemáticas, el filósofo segundo de las matemáticas estudia a la matemática como una disciplina que forma parte de nuestro cuerpo de conocimientos. La filosofía segunda de las matemáticas es una investigación científico-filosófica que tiene como su objeto de estudio a la matemática vista como disciplina.

Una vez que Maddy ha planteado cuál es la metodología que el filósofo segundo ha de seguir en su investigación, puede comenzar con sus estudios. El primer paso de la investigación filosófica sobre las matemáticas (y sobre la teoría de conjuntos) es conocer las prácticas de esta disciplina y sus peculiaridades. La primera parte de la investigación incluirá una explicitación y comprensión de los métodos de prueba utilizados, de los presupuestos que tiene la disciplina, de sus objetos de estudio, de sus objetivos, etcétera. Una vez hecho esto, el segundo filósofo puede cuestionar la corrección de estos métodos, estos supuestos, etcétera. Pero, incluso la evaluación sobre la corrección de los métodos y supuestos debe basarse en las herramientas misma usadas por estas disciplinas, justo como en el caso de otras ciencias.

> Desde la perspectiva de este naturalismo científico, un filósofo puede criticar la práctica científica, pero sólo por motivos científicos, tal como un científico podría hacerlo, por buenas razones científicas. Esto es suficiente para ratificar una apelación a la práctica científica en contextos filosóficos: porque la práctica científica sólo puede ser cuestionada por razones científicas, un conflicto entre la práctica científica y la filosofía debe ser resuelto mediante la revisión de la filosofía. Así, por ejemplo, si la práctica científica sostiene que p cuenta o no como evidencia para q, no estar de acuerdo por motivos filosóficos es una ofensa contra el naturalismo. (Maddy, 1993, p. 276)[15]

A lo largo de su carrera filosófica, Maddy ha realizado muchos estudios filosóficos de las matemáticas y de la lógica usando la metodología de la segunda filosofía.[16] A continuación recuperaré algunos de los resultados que

[15] "From the perspective of this scientific naturalism, a philosopher can criticize scientific practice, but only on scientific grounds, as a scientist might do, for good scientific reasons. This is enough to ratify an appeal to scientific practice in philosophical contexts: because scientific practice can only be questioned on scientific grounds, a conflict between scientific practice and philosophy must be resolved by revising the philosophy. So, for example, if scientific practice holds that p does or does not count as evidence for q, to disagree on philosophical grounds is an offense against naturalism." La traducción es mía.

[16] Al comienzo de su carrera profesional, Maddy realizó estudios que ella misma ha catalogado como estudios desde la filosofía primera. Por ejemplo, en su (1980) ella propone

ella ha dado a partir de sus estudios. Me concentraré en su análisis la distinción entre matemática aplicada y matemática pura (a la cual la teoría de conjuntos pertenece), su crítica al argumento de indispensabilidad de Quine, su propuesta en ontología (el realismo delgado, el arrealismo y el objetivismo) y los métodos propios de la teoría de conjuntos (que nos proporcionarán, entre otras cosas, los criterios internos y externos para la aceptación de nuevos axiomas para ZFC). Una vez hecho esto, presentaré sus argumentos en contra las posturas de Feferman y de Gödel y una crítica a Maddy, pues en mi opinión los resultados que ella obtiene son menos fuertes de que lo ella sugiere.

4.3. Filosofía Segunda de las matemáticas.

Como dije antes, Maddy considera que la reflexión filosófica sobre las matemáticas debe estar guiada por un estudio detallado de las prácticas matemáticas, su desarrollo histórico, sus métodos, etc. Para hacer filosofía de las matemáticas, es necesario conocer su historia, los métodos de prueba utilizados en cada periodo y en cada área de la matemática, etc. Es perfectamente posible que como resultado del análisis no se puedan obtener resultados que abarquen a toda la matemática, pero esto no resultaría ser un problema grave, pues las matemáticas son una disciplina muy compleja, que estudia diferentes clases de fenómenos, utiliza diversas herramientas para hacerlo y en diferentes momentos puede perseguir diferentes fines.[17]

---

una explicación de nuestro acceso cognitivo a los objetos matemáticos que va más allá de la práctica matemática, algo que no es necesario desde el punto de vista de la filosofía segunda. Sin embargo, su obra filosófica de los últimos 20 años ha sido guiada por la metodología naturalista que estamos analizando. Todos los resultados que presentaré en este capítulo pertenecen a este periodo naturalista o pueden ser fácilmente adaptados.

[17]A lo largo de la historia (e incluso en la actualidad) han existido diferentes tradiciones matemáticas que tienen diferentes nociones de prueba y/o diferentes estándares de rigor en la construcción de éstas. Para citar un caso famoso, se han cuestionado algunas de las demostraciones de la geometría plana ofrecidas por Euclides, pues de acuerdo a los estándares de rigor modernos no son adecuadas, aunque en su tiempo fueron consideradas impecables. Por ejemplo, la demostración de la proposición III del Libro I de Elementos supone que las circunferencias son líneas continuas y completas, algo que no está explícitamente expresado en los postulados de la teoría de Euclides.

Las discrepancias entre tradiciones pueden ser más radicales. Incluso han existido tradiciones matemáticas que no consideran relevantes las justificaciones o demostraciones de los métodos matemáticos que usan y sus interés se centran en la aplicabilidad de éstos en las ciencias empíricas. Como se verá un poco más adelante, Newton no tenía interés en ofrecer una presentación rigurosa de los métodos de prueba que usaba en sus pruebas y consideraba que el éxito de estos métodos al ser aplicados en física era suficiente para justificarlos, algo que otras tradiciones matemáticas consideraría simplemente inaceptable.

Veamos un ejemplo. En algún tiempo se creía que la geometría era una ciencia que estudiaba el espacio físico. En particular, se creía que la geometría euclidiana era la ciencia que describía la estructura del espacio físico. Los resultados ofrecidos por la geometría, desde esta perspectiva, son correctos si logran dar una descripción adecuada de dicho espacio. Pero esto no siempre ha sido así. De hecho, en la actualidad, la geometría es vista como una disciplina que estudia espacios abstractos. En este sentido, la aplicabilidad de los resultados geométricos de una geometría particular en la descripción del espacio físico ya no es considerada como un criterio de corrección de los resultados de dicha disciplina.

Lo que pretendo mostrar con este ejemplo es que las matemáticas engloban muchas comunidades matemáticas y por ello muchas prácticas[18] (a lo largo de la historia de esta disciplina han existido multitudes de prácticas matemáticas con características propias). Esto implica que los resultados que se obtienen al analizar una práctica matemática particular no se aplican, en general, a otras prácticas matemáticas (o por lo menos no hay una garantía de ello). Esto es relevante, puesto que es necesario acotar de manera adecuada el segmento de las matemáticas que se estudia y no tratar de extrapolar sin más estos resultados a toda la matemática. Esto no implica que no se pueda usar esta metodología para proponer y defender tesis más fuertes (tesis generales), pero hay que ser cuidadosos.

4.3.1. El argumento de la indispensabilidad visto desde la filosofía segunda.

Presentaré el análisis que realiza Maddy del argumento de la indispensabilidad por dos razones. La primera es que me servirá como un excelente ejemplo del tipo de análisis que puede realizar la filosofía segunda. La segunda es que este argumento es considerado una de las mejores defensas del realismo en matemáticas y, además, está relacionado con la postura que privilegia a las matemáticas aplicadas sobre las puras (pues, sólo considera como existentes los objetos matemáticos de las teorías que tiene aplicación en las ciencias empíricas). Comprender el análisis de Maddy de este argumento me ayudará a clarificar su postura sobre la aplicabilidad de la matemáticas y sus objeciones en contra de la propuesta de Feferman respecto al abandono de

Cabe mencionar que la postura de Newton no fue un caso aislado en su época, sino una práctica común.

[18] Incluso es posible dentro de una misma comunidad matemática existan divergencias considerables entre los métodos que usan diferentes miembros de la comunidad. Sin embargo, es posible encontrar elementos comunes que permitan realizar un estudio de las prácticas de dicha comunidad.

la búsqueda de nuevos axiomas para ZFC.

En esta sección, se presentarán: 1) El argumento de la indispensabilidad en la versión dada por Quine, 2) el análisis ofrecido por Maddy de la distinción entre matemática pura y aplicada y 3) las críticas de la filosofía segunda al argumento de la indispensabilidad.

4.3.1.1. El argumento de la indispensabilidad.

El argumento de la Indispensabilidad se atribuye a W.V.O. Quine y a Hilary Putnam, aquí me concentraré en la presentación dada por Quine. El argumento pretende mostrar que se debe aceptar la existencia de los objetos matemáticos que son indispensables para nuestras mejores teorías científicas. Muchos consideran que es uno de los mejores argumentos a favor del realismo en ontología disponibles en la actualidad. Este argumento se puede sintetizar de la siguiente forma:

1. Debemos estar comprometidos con la existencia de todas y sólo aquellas entidades que son indispensables para nuestras mejores teorías científicas. (Criterio de compromiso ontológico + holismo confirmacional)

2. Las entidades matemáticas (o una parte de ellas) son indispensables para nuestras mejores teorías científicas. (Tesis de indispensabilidad)

/ $\therefore$ Debemos estar comprometidos con la existencia de las entidades matemáticas (que son indispensables para la ciencia).[19]

El argumento en esta presentación es válido, así que la única forma de refutarlo es rechazando una o ambas premisas. Dado lo controvertidas que son las premisas, el defensor del argumento debe dar razones para sostener la verdad o plausibilidad de éstas, especialmente de la primera. En el caso de la segunda premisa, parece no requerir de mayor defensa, pues en general hay acuerdo en que es verdadera, aunque es una premisa empírica y requiere verificación. La evidencia a favor de la indispensabilidad consiste en mostrar que las matemáticas proporcionan herramientas a la ciencia que le permiten obtener resultados que no podrían obtenerse sin ellas.[20] Las ciencias utilizan el aparato teórico matemático para formular y justificar sus teorías. Por

[19] Algunos incluyen una premisa que aparece implícita y que es reflejo del pragmatismo quineano, a saber, que debemos tomar a nuestras mejores teorías científicas como verdaderas. Esto está estrechamente relacionado con su preferencia por las matemáticas aplicadas, pues Quine considera que tomamos como verdaderas las oraciones de nuestras mejores teorías sobre el mundo.

[20] Otra discusión interesante es cuáles son exactamente las matemáticas que son indispensables para la ciencia. Es posible que las matemáticas realmente indispensables sean

ejemplo, la física usa geometría diferencial, topología, etc.; la biología usa análisis matemático y estadística.[21]

La primera premisa del argumento de la indispensabilidad tiene su sustento en la postura naturalista de Quine,[22] que, probablemente, tiene como su mayor desarrollo en la epistemología naturalizada.[23] Presentaré una breve descripción de la postura de Quine, especialmente a su epistemología, su aceptación del holismo confirmacional y su criterio de compromiso ontológico.

Para Quine, la primera fuente de nuestro conocimiento es la información que recibimos mediante la estimulación de nuestras terminales nerviosas. Usando esta información y mediante procesos psicológicos más o menos bien definidos, generamos nuestro cuerpo de creencias sobre el mundo.[24] La epistemología naturalizada se encarga de estudiar este cuerpo de creencias, utilizando las mejores herramientas científicas disponibles. Para justificar la inclusión de herramientas científicas en la epistemología, Quine ofrece un análisis que pretende mostrar que la epistemología no tiene como objetivo

---

un subconjunto bastante modesto de todas las teorías matemáticas que han sido desarrolladas. No profundizaré en este punto.

[21]La indispensabilidad de las matemáticas no ha estado exenta de ataques, por ejemplo Hartry Field ha sostenido en (1980, pp. 41 y ss.) que se puede hacer ciencia sin necesidad de utilizar matemáticas. El proyecto de Field consiste en nominalizar la ciencia y mostrar que con esta versión nominalizada, se pueden obtener los mismos resultados que con la ciencia que incluye matemáticas, aunque usar a las matemáticas es más sencillo, es decir, que las matemáticas son pragmáticamente útiles pero no son indispensables. Field logró nominalizar a la física newtoniana (Véase, Field, 1980, pp. 61 y ss.), pero al costo se sostener que el espacio tiempo existe como una estructura en la realidad (sustancialismo) y que dicha estructura es isomorfa a $\mathbb{R}^3$ (lo que para muchos pone en duda el exitoso de su programa). Sin embargo, para que su estrategia funcione, tendría que lograr lo mismo con nuestras mejores teorías disponibles, pero no ha tenido muy buenos resultados. No me detendré más en este punto.

[22]Quine se presenta a sí mismo con un filósofo naturalista, pero al mismo tiempo pragmatista. Maddy tiene una fuerte influencia de la filosofía de Quine, especialmente de su naturalismo. Sin embargo, es claro que a pesar de que Maddy defiende el naturalismo, cree que la postura naturalista de Quine tiene problemas fuertes. De acuerdo a Maddy, Quine no se centra lo suficiente en el análisis de las prácticas científicas, en particular, de las matemáticas. Observar el contraste puede ser muy útil para comprender mejor la postura de la filosofía segunda.

[23]El proyecto de la epistemología naturalizada se ofrece como una alternativa al los proyectos fundacionistas en epistemología. La postura fundacionista tiene como una de sus características principales tratar de ofrecer una reconstrucción *a priori* de nuestro conocimiento, misma que servirá como un fundamento último. En contraste, Quine sostiene que las reconstrucciones de nuestro conocimiento no pueden ser *a priori* y en ellas debemos usar todas las herramientas científicas que tengamos a nuestra disposición y, con ello, abandona la idea ofrecer un fundamento último para nuestro conocimiento.

[24]Este cuerpo de creencias incluye tanto a nuestro conocimiento del sentido común como a nuestro conocimiento científico.

ofrecer un fundamento último de nuestro conocimiento. Para ello, distingue entre dos tipos de estudios epistemológicos posibles: uno conceptual y otro doctrinal.

El estudio conceptual consiste en explicar cómo se relacionan nuestras creencias con los datos que nos proporcionan nuestros sentidos; estos estudios buscan establecer conexiones entre conceptos y evidencia empírica. El estudio doctrinal pretende justificar nuestras creencias con base en los datos de los sentidos. La epistemología tradicional se concentra en los estudios doctrinales que buscan ofrecer una justificación última de nuestro conocimiento. Quine abandona los estudios doctrinales, pues considera que no tenemos un acceso directo al mundo, sólo tenemos nuestros datos de los sentidos (no hay garantía de que correspondan con la realidad). La epistemología naturalizada de Quine se concentra en los estudios conceptuales de nuestro cuerpo de creencias.

El estudio propuesto por Quine consiste en hacer una reconstrucción de nuestro sistema de creencias a partir de nuestra experiencia sensorial, la lógica, las matemáticas y nuestra mejor psicología. Este proceso de reconstrucción no es otra cosa que una traducción del cuerpo de creencias completo a un subconjunto de él más confiable. La función de la epistemología ya no es fundamentar el conocimiento, sino tratar de explicarlo.[25] Quine sostiene que en la reconstrucción de nuestro sistema de creencias podemos usar herramientas científicas que forman parte del propio sistema, herramientas que pueden provenir por ejemplo de la psicología (podemos recurrir a nuestras mejores teorías sobre el mundo). Él afirma que está autorizado a usar las mejores herramientas de las que dispone para generar una explicación, pues su estudio es conceptual no doctrinal. Los resultados ofrecidos por la epistemología naturalizada no tienen la pretensión de ser definitivos y se acepta que pueden ser mejorados usando herramientas más avanzadas (herramientas generadas por la misma ciencia). El estudio propuesto por Quine busca, entre otras cosas, establecer relaciones entre los conceptos usados en nuestras teorías científicas y las entidades con cuya existencia nuestras teorías están comprometidas (sin comprometerse con dar cuenta de la naturaleza de estos objetos). Por sí misma, la epistemología naturalizada no es suficiente para defender la primera premisa del argumento de la indispensabilidad. Son necesarios dos elementos más, el criterios de compromiso ontológico y el holismo

[25]Podemos ver que el objetivo de Quine es muy similar al de Maddy, a saber, explicar nuestro conocimiento, no justificarlo. Una diferencia que se puede observar de inmediato es que Quine tiene una predilección por usar herramientas de la lógica, de las matemáticas y de la psicología para realizar esta explicación; mientras que Maddy prefiere no decidir de antemano cuáles son las herramientas que usará en su análisis. Maddy cree que su estudio de las practicas de las matemáticas le servirá de guía para elegir las mejores herramientas científicas para su estudio filosófico.

confirmacional.

El holismo confirmacional,[26] también conocido como la tesis Quine-Duhem, es esencial para la defensa de Quine a la premisa 1 del argumento de la indispensabilidad. El holismo confirmacional es una tesis que sostiene que cada vez que ponemos a prueba nuestro conocimiento mediante un experimento (cada vez que contrastamos nuestras creencias con el mundo), lo que confirmamos o refutamos es el cuerpo entero de nuestras creencias (no hay confirmación de hipótesis aisladas).

Esta tesis es defendida por Quine a partir de su reconstrucción de la ciencia. Para él, la ciencia no es otra cosa que un conjunto de oraciones que describen el mundo. Durante el desarrollo de la ciencia, los científicos recopilan información sobre el mundo, buscan regularidades a partir de dicha información y proponen hipótesis que expliquen estas regularidades. Estas hipótesis tiene que ser puestas a prueba para mostrar su corrección o desecharlas. Las pruebas se dan mediante experimentos, en los cuales se usa la hipótesis propuesta para predecir un resultado observable. Pero, además de esta hipótesis, en el diseño del experimento se utilizan otros elementos de nuestra teoría sobre el mundo, oraciones que ya son parte de nuestras teorías científicas, oraciones de nuestras teorías matemáticas y lógicas e incluso oraciones que forman parte de nuestro sentido común. Esto implica que el resultado observable que se examina en el experimento no depende sólo de la hipótesis que queremos poner a prueba, sino de todos las oraciones utilizadas para la construcción del experimento (y todas oraciones de nuestro sistema de creencias que están relacionadas con éstas, que de acuerdo a Quine son todas).

En caso de que el resultado del experimento sea negativo, no tendremos una refutación inmediata de la hipótesis que queríamos contrastar. Lo que obtenemos como resultado es una inconsistencia en nuestro sistema de creencias. Esto se debe a que nuestra predicción de la forma ?sucederá p' depende de la hipótesis más nuestro cuerpo completo de creencias; pero, como resultado del experimento obtenemos la oración ?no sucede p', lo cual genera una

[26]Quine defendió dos clases de holismo, el holismo confirmacional y el holismo semántico, que no deben ser confundidos (aunque tiene una relación muy estrecha). El holismo semántico es una tesis semántica que defiende que la unidad mínima de significado es nuestro sistema completo de creencias. En palabras de Quine: "[...] nuestros enunciados acerca del mundo externo se someten como cuerpo total al tribunal de la experiencia sensible, y no individualmente. [...] Como ya hemos observado, la idea de definir un símbolo por el uso fue un progreso respecto del imposible empirismo de los términos individuales propios de Locke y Hume. Con Frege, el enunciado llegó a ser reconocido, en vez del término, como la unidad relevante para una crítica empirista. Lo que ahora afirmo es que nuestra red sigue siendo de mallas demasiado estrechas incluso cuando tomamos el enunciado entero como unidad. La unidad de significación empírica es el todo de la ciencia." (Quine, 1951, p. 239)

contradicción. Para recuperar la consistencia de nuestro sistema de creencias, la reacción más usual es rechazar la hipótesis. Pero, existen otras opciones. En realidad, podemos rechazar cualquier otro elemento que haya sido utilizado en el diseño del experimento. Pero, eliminar oraciones de nuestro sistema implica realizar ajustes mayores, pues cada oración están en relación con muchas otras (y estás a su vez con otras más). Quine sostiene que todas las oraciones de nuestro sistema de creencias están conectadas y por ello sostiene que el sistema completo es refutado y no sólo la hipótesis que quería ser contrastada (algo similar sucede cuando la hipótesis es corroborada)[27,28]. Esto afecta incluso a las matemáticas y a la lógica; ellas también reciben un sustento de la experiencia, aunque es muy indirecto.[29]

El único elemento que falta analizar para poder comprender la defensa de Quine a la primera premisa del argumento de la indispensabilidad es su criterio de compromiso ontológico. Este criterio pretende mostrar con claridad cuáles son los objetos con cuya existencia está comprometida una teoría. Dado que, de acuerdo a Quine, las teorías son conjuntos de oraciones, el criterio busca establecer un distinción entre las palabras que tiene un compromiso con la existencia de objetos y las que no. Uno de los objetivos del criterios es mostrar que la aparición de términos singulares en una oración, no nos compromete la existencia de un objeto que sea referente del término, no por lo menos en principio. Por ejemplo, la palabra "Unicornio" en el siguiente enunciado "Unicornio es un ser mitológico" parecen tener un compromiso con la existencia de un objeto parecido a un caballo pero con

---

[27]En principio, puede parecer que la postura de Quine tiene consecuencias demasiado fuertes, por ejemplo, que un resultado negativo en un experimento pueda obligarnos a rechazar una creencia del sentido común o de la lógica. Sin embargo, hay casos históricos que muestran que dichos cambios han sucedido. Por ejemplo, los resultados negativos en los cálculos de algunos fenómenos astronómicos nos llevaron a cambiar la creencia del sentido común sobre que el sol gira al rededor de la tierra.

[28]El hecho de que en principio podamos rechazar cualquier oración de nuestro sistema, no implica que cualquier modificación posible se pueda realizar sin más. La elección de la modificación que haremos para recuperar la consistencia de nuestro sistema de creencias está guiada por criterios pragmáticos. De acuerdo a Quine, algunas de las oraciones de nuestro sistema tienen relaciones más sólidas con el resto de las oraciones que otras y su modificación implicaría cambios mayores en nuestro sistema de creencias. Quine propone criterios de modificación como la simplicidad, la máxima de mutilación mínima, entre otros. La idea guía de estos principios es elegir la modificación que sea menos costosa en términos prácticos.

[29]Esto pone a las oraciones de las matemáticas y de la lógica al mismo nivel que las oraciones de la ciencia empírica. La aceptación de estos principios no se debe a criterios *a priori*, sino que reciben su sustento de la corroboración empírica, aunque de forma menos directa. Esto abre la puerta a que nuestras oraciones de la matemática y de la lógica puedan sean modificadas o abandonadas, aunque el costo de hacerlo, en la mayoría de los casos, es demasiado alto.

un cuerno en la frente. Sin embargo, Quine cuestiona esto. Si aceptamos la simple aparición de un término singular en una oración para asignar compromisos ontológicos comenzamos a tener problemas. Considérese el siguiente enunciado, "No existe el mayor número primo", si la simple aparición del término singular "el mayor número primo" nos compromete con su existencia, entonces la oración que afirma que no existe un mayor número primo, de hecho, está comprometida con la existencia de dicho número. La solución a este problema se da al analizar la estructura lógica de las oraciones. Por ejemplo, "No existe un mayor número primo" tiene la siguiente forma lógica: $\neg\exists x(Px \wedge \forall y(Py \supset y \leq x))$. Como puede verse, está oración no está comprometida con la existencia de ese número sino que afirma que no existe en el universo de interpretación un objeto que cumpla con las propiedades requeridas. Veamos un ejemplo positivo, "Hay átomos con un solo electrón", su forma lógica sería: $\exists x(Ax \wedge \exists y(Ey \wedge Txy \wedge \forall z((Tzy \wedge Ez) \supset z = y)))$, con la interpretación objetual del cuantificador, esta fórmula afirma la existencia en el dominio de interpretación de un objeto que tiene las propiedades tales y cuales. Se puede ver ahora que el criterio permite diferenciar las palabras con compromisos ontológicos de las que no los tienen y está dado por la interpretación de los cuantificadores. "Lo que decide la cuestión es la cuantificación '$(\exists x)(x = a)$'. Es el cuantificador existencial, no el a mismo, el que conlleva el importe existencial. Tal es justamente, por supuesto, el objetivo de la cuantificación existencial. [...] La variable ligada x recorre el universo, y la cuantificación existencial dice que al menos uno de los objetos del universo satisface la condición fijada." (Quine, 1974, p. 125) Así, los compromisos de existencia dados por un enunciado, son dados por los cuantificadores. Un enunciado cuantificado que se toma como verdadero (y cuyos cuantificadores se interpretan objetualmente) requiere para ser verdadero de la existencia de ciertos objetos en el universo, aporta compromisos ontológicos. Ahora se puede responder a las preguntas ¿cuándo una teoría tiene compromisos ontológicos? y ¿con qué objetos los tiene?

> Nuestra respuesta es: aquellos objetos que han de ser valores de variables para que la teoría sea verdadera. Desde luego una teoría puede, en este sentido, no requerir objetos en particular, y aún ni tolerar un universo de discurso vacío, ya que la teoría puede ser satisfecha igualmente por cualquiera de dos universos mutuamente excluyentes. (Quine, 1974, p. 126)

La defensa de la primera premisa del argumento de la indispensabilidad es como sigue. Gracias al holismo confirmacional, tenemos que admitir que la ciencia es una parte de nuestra teoría total del mundo y, en ese sentido, forma un continuo con el resto de nuestra creencias, incluidas nuestras creencias del sentido común, nuestras teorías matemáticas y nuestras creencias filosóficas. No podemos evaluar nuestras creencias por separado, nuestro cuerpo de creencias es un todo. Una vez que hemos aceptado esto, nos apoyamos en el naturalismo para afirmar que nuestras mejores teorías científicas deben ser consideradas como verdaderas (aunque no incuestionables), podemos apoyarnos en ellas para desarrollar nuestras teorías filosóficas. Pero si aceptamos que son verdaderas y dado el criterio de compromiso ontológico, no tenemos más opción que aceptar que tenemos un compromiso con la existencia de los objetos que dichas teorías presuponen. Es decir, debemos aceptar la premisa 1 del argumento de la indispensabilidad y con ellos la existencia de los objetos matemáticos con los cuales nuestra teorías científicas están comprometidos.

Hasta aquí la reconstrucción y defensa del argumento de la indispensabilidad. Veamos ahora las objeciones de Maddy a dicho argumento. Para dar una presentación más clara de sus críticas, primero presentaré su análisis de la distinción entre matemáticas puras y aplicadas.

4.3.1.2. Distinción entre matemáticas puras y matemáticas aplicadas.

Utilizado la metodología de la filosofía segunda, Maddy estudió la distinción entre las matemáticas puras y las matemáticas aplicadas.[30] Su análisis sobre este tópico fue presentado en diversos artículos y libros, pero se encuentra en su presentación más acabada en un artículo de 2008 titulado "How Applied Mathematics Became Pure".[31] En dicho trabajo, realiza un recuento histórico y filosófico de esta distinción.

> Mi objetivo aquí es explorar la relación entre las matemáticas puras y aplicadas y luego, en un momento dado, obtener algunas moralejas para ambas. En particular, espero demostrar que esta relación no ha sido estática, que el aumento histórico de la matemática pura ha coincidido con un cambio gradual en nuestra comprensión de cómo funcionan las matemáticas en la aplicación al mundo. (Maddy, 2008, p. 16)[32]

Para lograr su objetivo, Maddy observa el desarrollo histórico de la relación entre matemáticas y ciencias empíricas desde la antigua Grecia hasta la

[30]El estudio de la distinción es relevante no sólo porque clarifica la crítica de Maddy al argumento de la indispensabilidad, sino que también permite clarificar la naturaleza de las matemáticas de puras (a las que la teoría de conjuntos pertenece) y cuáles son sus criterios de corrección.

[31]El contenido de este artículo fue recuperado por Maddy en su libro *Defending the Axioms*.

[32]"My goal here is to explore the relationship between pure and applied mathematics and then, eventually, to draw a few morals for both. In particular, I hope to show that this relationship has not been static, that the historical rise of pure mathematics has coincided with a gradual shift in our understanding of how mathematics works in application to the world." La traducción es mía.

actualidad.[33] Como resultado de su análisis, sostiene que hay, por lo menos, tres momentos que corresponden a diferentes relaciones entre las matemáticas y las ciencias. El primero comprende desde la antigüedad hasta el renacimiento. El segundo corresponde al periodo que comienza con los desarrollos científicos del renacimiento, las grandes revoluciones científicas, y termina a principios del siglo XIX. El tercero periodo es desde mediados del siglo XIX hasta la actualidad.

La relación entre las matemáticas y las ciencias empíricas en la antigüedad era asimétrica. Las matemáticas eran consideradas el paradigma del conocimiento, su verdad no era puesta en duda. Ya sea desde un punto de vista platónico, que consideraba a las matemáticas como un estudio de las relaciones de la formas perfectas, o desde un punto de vista aristotélico, que las fundamentaba en el método axiomático. Las matemáticas eran consideradas la forma más acabada de conocimiento. Las ciencias empíricas eran consideradas inferiores y se consideraba que requerían una fundamentación para poder ser consideradas conocimiento. Incluso hubo intentos por dar fundamentos a las ciencias empíricas del mismo tipo que el que tenían las matemáticas; por ejemplo, reconstruyéndolas como teorías axiomáticas.

Esta relación se modificó con el desarrollo de los métodos experimentales durante el renacimiento. En este periodo, hubo una serie de críticas a las ciencias que se pretendía justificar de manera *a priori* y se favoreció la experimentación como método científico.[34] De acuerdo a Maddy, uno de los supuesto de algunos científicos de la época, como Galileo, era que el universo operaba de acuerdo a las leyes de las matemáticas. Se realizaban investigaciones para descubrir dichas leyes, mediante la observación de los fenómenos físicos (se buscaba dar descripciones completamente matemáticas para describir el movimiento y todas las fuerzas del mundo físico). En esta época se crearon teorías matemáticas que describían el mundo (su estructura matemática) y su corrección se evaluaba de acuerdo a qué tan bien lo lograban. Por ejemplo, se buscaba que la geometría fuese una descripción adecuada del espacio físico. Durante este periodo se desdibujo la frontera entre las matemáticas y las ciencias empíricas; pues no sólo se buscaba que las matemáticas fuesen aplicables en la ciencia, sino que también su adecuación servía como criterio de corrección de las teorías.

[33] El estudio de Maddy, no busca ser un recuento histórico perfecto, ni pretende sostener que todos los matemáticos de cada época concebían la relación de las matemáticas y las ciencias empíricas de la misma forma. El estudio busca ser general y, en la medida de la posible, establecer algunos puntos generales sobre dicha relación a lo largo de la historia.

[34] Por ejemplo, se abandonó la idea aristotélica que explicaba la caída de los cuerpos debido a que buscaban su lugar natural y se optó por una explicación de este fenómeno de acuerdo a leyes matemáticas que explicasen el comportamiento de los cuerpos.

Esta unión de las matemáticas y la ciencia empírica se ha disuelto en la actualidad. Ahora, las matemáticas no son evaluadas respecto a su adecuación al mundo. Si una teoría como la geometría euclidiana resulta ser una descripción inadecuada del espacio físico, como de hecho lo es, no por ello es considera incorrecta. Además, la ciencia experimental ha ganado una gran aceptación y es ahora el paradigma del conocimiento, mientras que las matemáticas son cuestionadas. Incluso algunos consideran que no hay conocimiento matemático o por lo menos que se requiere una justificación para él. Recordemos a Quine, quien sostiene que las matemáticas son justificadas por los resultados de los experimentos (los experimentos tales que en su diseño son usadas oraciones de las matemáticas). Es claro que se ha dado un cambio profundo en nuestra comprensión de la relación entre matemáticas y ciencias empíricas a lo largo del tiempo.

De acuerdo a la propuesta dada por Maddy, es conveniente analizar a detalle la separación entre matemáticas y ciencia. La razón es que a primera vista no es claro cuál es el estatus actual de las matemáticas; lo que genera preguntas como: ¿Podemos seguir justificando a las matemáticas de forma *a priori*?, ¿debemos evaluar a las teorías matemáticas de acuerdo a qué tan bien describen el mundo?, y si no es así, ¿cuáles son los parámetros de evaluación para las teorías? La propuesta de Maddy consiste en responder a estas preguntas mediante un análisis de la historia y de las prácticas matemáticas que se desarrollaron durante el periodo de la separación. Su estudio se concentra en los cambios históricos que se dieron durante este periodo, tratando de rastrear aquellos que fueron determinantes para que se diera dicha separación.

Maddy estudia tres fenómenos matemáticos que se dieron en esa época: 1) La introducción de cada vez más conceptos matemáticos sin necesidad de un correlato físico, como los número negativos, los números complejos o los grupos, 2) el desarrollo de las geometrías no-euclideanas y 3) la introducción de modelos continuos en la descripción de fenómenos físicos. A partir del estudio de estos casos, Maddy pretende esclarecer algunos puntos centrales en la relación que actualmente existe entre matemáticas y ciencia empírica.

Durante la época de las grandes revoluciones científicas, muchos de los conceptos matemáticos eran introducidos en la teoría debido a que se quería recuperar algún concepto preteórico con la finalidad de explicar y modelar fenómenos en el mundo físico. Sin embargo, a mediados del siglo XIX se comenzaron a introducir conceptos matemáticos que en principio no tenía un correlato físico. Algunos de estos conceptos fueron introducidos como generalizaciones de conceptos previamente aceptados. Un ejemplo son los espacios n-dimensionales. Para fines de la ciencia, parecía suficiente aceptar y trabajar en un espacio de 4 dimensiones (3 dimensiones espaciales y una temporal).

Sin embargo, pronto surgieron generalizaciones y se comenzó a trabajar en espacios de más dimensiones que no tenía como fin recuperar dimensiones físicas. Otro ejemplo es la introducción de los números complejos que surgieron para crear un dominio de objetos cerrado bajo la operación raíz cuadrada (en general, raíz de números pares). Es probable que el ejemplo más notable de la introducción de objetos y conceptos sin un correlato físico específico se diera en el campo del álgebra, disciplina que introdujo nociones que buscaban mayor generalidad en sus objetos de estudio. Lo anterior permitió crear estructuras algebraicas en donde las propiedades de las operaciones no correspondiesen con ninguna estructura física relevante en ese momento. Existen muchos otros ejemplos de esta clase de conceptos (introducidos sin tener una motivación física). Lo más relevante para el estudio es que estos conceptos pronto ganaron aceptación en la comunidad y su corrección no dependió de su aplicabilidad (no por lo menos en ese momento, aunque muchos de estos conceptos fueron aplicados posteriormente).

> Esto, entonces, es el primer hilo conductor de la historia de cómo las matemáticas llegaron a separarse de las ciencias naturales ? la búsqueda de diversos objetivos puramente matemáticos gradualmente dirigió a los matemáticos hacia nuevos estudios, no motivados por su aplicación inmediata al mundo ? pero de nuevo, creo que este es sólo una parte de la historia. (Maddy, 2008, p.19)[35]

El segundo caso analizado por Maddy es el surgimiento de las geometría no-euclidianas. Las geometrías no-euclidianas surgieron debido al intento de muchos matemáticos de dar una prueba del quinto postulado de Euclides (el postulado de las paralelas), pues consideraban que no tenía el mismo grado de evidencia que los otros cuatro postulados. Los intentos por demostrar el quinto postulado a partir de los cuatro primeros se remontan a la antigüedad, pero no fueron exitosos. La razón de esto es que el quinto postulado de Euclides es independiente de los otros cuatro. Para el siglo XIX, muchos matemáticos consideraban la posibilidad de que el quinto postulado fuese falso, por supuesto respecto al espacio físico. Incluso algunos de ellos, como Gauss, intentaron resolver el problema mediante la experimentación; es decir, hicieron experimentos para determinar si el espacio físico cumplía o no con el quinto postulado. Fue así como surgieron diferentes geometrías que sustituían el quinto postulado por otros principios, lo que generaba espacios muy distintos al euclidiano (por ejemplo, en algunos de ellos no había

[35] "This, then, is the first strand to the story of how mathematics came to separate from natural science ? the pursuit of various purely mathematical goals gradually led mathematicians to new studies not motivated by their immediate application to the world ? but again, I think this is only part of the story." La traducción es mía.

rectas paralelas). En particular, el alumno de Gauus, Bernhard Riemman, construyó (motivado por su maestro) una geometría en la cual la curvatura del espacio era variable, conocida ahora como geometría riemanniana. Esta geometría fue la que usó Albert Einstein en la formulación de la teoría de la relatividad. Una vez que la teoría fue aceptada, se estableció que la geometría riemanniana era la geometría que describía el espacio físico. Esto en principio, parecía refutar a la geometría euclidiana (y a las otras geometrías) y se hubiese esperado que fuese abandonada. Sin embargo, esto no sucedió.

> En su lugar, se distinguen el espacio físico del espacio matemático abstracto, o más bien, de una amplia gama de diferentes espacios matemáticos abstractos, y la geometría euclidiana fue vista como verdadera en algunos y falsa en otros de éstos. En ese punto, se hizo natural considerar a los matemáticos como proporcionando un almacén bien surtido de estructuras abstractas de la que el científico natural es libre de elegir lo que mejor se adapte a sus necesidades en la representación del mundo. Esto, entonces, es el segundo hilo conductor de la historia de cómo las matemáticas se alejaron de la ciencia. (Maddy, 2008, p. 20)[36]

El último caso analizado es la introducción hecha por Newton y otros matemáticos de descripciones matemáticas del movimiento físico que no pretendían ser una descripción de las causas últimas del movimiento, sino que sólo pretendían dar una descripción matemática del mismo. Muchas de las técnicas usadas no estaban bien fundamentadas, no por lo menos con los estándares de rigor que habían sido establecidos por la geometría griega. Por ejemplo, Newton creía que sus métodos no eran más que extensiones de la geometría sintética y no se preocupó mucho por ofrecer una fundamentación para las técnicas que usaban. Esto puede explicarse por la virtual identificación de matemáticas y ciencias. Si bien las matemáticas usadas por estos pensadores no estaban sustentadas por axiomas y razonamientos lógicos, se basaban en propiedades obvias de las figuras geométricas usadas y su corrección se establecía a partir de las descripciones físicas correctas que generaban. La metodología descrita se sustentaba en la aceptación de que las teorías matemáticas recuperaban la estructura matemática de la realidad y en que no era necesaria la intervención de teorías para explicar las causas ocultas de los fenómenos físicos.

[36] "Instead, they distinguished physical space from abstract mathematical space, or rather, from a full range of different abstract mathematical spaces, and Euclidean geometry was seen as true in some and false in others among these. At that point, it became natural to regard mathematicians as providing a well-stocked warehouse of abstract structures from which the natural scientist is free to select whichever tool best suits his needs in representing the world. This, then, is the second strand in the story of how mathematics pulled away from science." La traducción es mía.

Estos pensadores se concentraron en describir la estructura matemática del universo, en explicar el comportamiento los objetos físicos accesibles mediante la percepción y rechazaron la búsqueda de causas ocultas (o no perceptibles de los fenómenos, por ejemplo rechazaron la teoría atómica). Para describir la estructura del universo utilizaban ecuaciones diferenciales. Sus modelos matemáticos eran continuos.

Sin embargo, está visión pronto encontró un problema con el surgimiento de la química como un disciplina científica. La aparición de la teoría atómica de Dalton introdujo de nueva cuenta entidades no observables (en algún sentido causas ocultas), a saber, los átomos. Esta teoría estaba apoyada en mucha evidencia empírica y pronto gozo de gran aceptación entre la comunidad científica. A partir de esta teoría, se generaron teorías opuestas sobre el comportamiento del mundo físico. El resultado fue dos visiones de cómo concebir el trabajo científico. Una que sostenía que hay que buscar la estructura oculta de la realidad (los atomistas) y otra que sostenía que debemos explicar únicamente la estructura matemática que describe el comportamiento de los objetos observables.

La disputa se resolvió a favor de los atomistas gracias una serie de experimentos realizados por Jean Perrin en 1910. Con la confirmación de la teoría atómica la relación entre matemáticas y ciencia cambio. No era posible seguir suponiendo que las matemáticas simplemente describían la estructura matemática del universo observable, pues la confirmación de la teoría atómica mostró que dicha estructura no era suficiente para comprender los fenómenos físicos en su totalidad. Fue así como las matemáticas dejaron de considerarse una descripción literal de la estructura de la realidad y comenzaron a concebirse como modelos o idealizaciones. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales e integrales utilizadas ya no podía ser consideradas literalmente verdaderas, pues modelaban los fenómenos físicos como continuos y muchos de ellos no lo eran de acuerdo a la teoría atómica. Sin embargo, dichas ecuaciones eran de gran utilidad pues permitían realizar cálculos de manera sencilla y muy eficiente. Algunos cálculos necesarios para resolver problemas matemáticos relacionados con modelos no continuos requerían tal poder computacional que eran prohibitivos, mientras que los cálculos en modelos continuos eran sencillos y su aproximación con los resultados reales era muy buena.

> Pero el hecho es que las matemáticas se han desprendido de la ciencia; la reclamación real que hace el científico sobre el mundo es que probablemente, al menos aproximadamente, es similar en estructura al modelo matemático en ciertos aspectos y que las idealizaciones que participan son beneficiosas y benignas para los fines a la mano. (Maddy, 2008, p. 33)[37]

[37] "But the fact remains that mathematics has been peeled away from science; the actual

Así, los modelos matemáticos (continuos) dejaron de verse como descripciones exactas de la realidad y comenzaron a ser vistos como modelos o idealizaciones que no correspondía perfectamente, sino aproximadamente con la realidad, pero que tenían un gran valor práctico pues facilitaban los cálculos requeridos.

> Por paradójico que pueda parecer, ahora parece que incluso las matemáticas aplicadas son puras. [...] Una moraleja clara para nuestra comprensión de las matemáticas aplicadas es que, de hecho, no estamos descubriendo las estructuras matemáticas subyacentes dadas en el mundo; más bien, estamos construyendo modelos matemáticos abstractos y haciendo todo lo posible para hacer afirmaciones verdaderas acerca de las formas en que se corresponden o no con los hechos físicos. (Maddy, 2008, p. 33)[38]

Así, desde el punto de vista de Maddy, la distinción entre matemáticas puras y aplicadas ahora se ha difuminado. En la actualidad, todas las matemáticas son puras (en tanto sus objetos de estudio son estructuras abstractas) y su aplicabilidad depende de cuáles de las estructuras que ella provee son utilizadas por los científicos empíricos (los criterios de corrección de la teorías matemáticas ya no depende de su aplicabilidad), no hay nada en ellas mismas que las haga aplicadas. Desde este punto de vista, la fuente de confirmación para las teorías matemáticas provista por su aplicación en la ciencias no es adecuada. La preguntas sobre la corrección de las teorías y la naturaleza de los objetos que hablan no dependen de cuestiones puramente metafísicas relacionadas con un postura filosófica previa, ni con su aplicabilidad. Estas preguntas deberán ser resueltas desde el análisis de las prácticas matemáticas. La posición de Maddy respecto a la distinción entre matemáticas puras y aplicadas nos ayudará a comprender sus argumentos en contra de la postura de Feferman y de la Quine.

4.3.1.3. En contra del argumento de la indispensabilidad.

Las críticas de Maddy al argumento de indispensabilidad se centran en mostrar que la postura de Quine no es compatible con las prácticas científicas. Maddy presenta tres objeciones principales: 1) Los supuestos del argumento

---

claim the scientist makes about the world is that it is probably, at least approximately, similar in structure to the mathematical model in certain respects and that the idealizations involved are beneficial and benign for the purposes at hand." La traducción es mía.

[38] "Paradoxical as it may sound, it now appears that even applied mathematics is pure. [...] One clear moral for our understanding of mathematics in application is that we are not in fact uncovering the underlying mathematical structures realized in the world; rather, we are constructing abstract mathematical models and trying our best to make true assertions about the ways in which they do and do not correspond to the physical facts." La traducción es mía.

de la indispensabilidad no son compatibles con las prácticas matemáticas, 2) los supuestos del argumento de la indispensabilidad no son compatibles con las prácticas de las ciencias empíricas y 3) el argumento de la indispensabilidad no da cuenta del trabajo sobre proposiciones indecidibles.

La primera crítica de Maddy a la postura de Quine es que no se recuperan las particularidades de la práctica matemática. Su critica pretende mostrar que el holismo confirmacional no es compatible con el trabajo del matemático y que la distinción entre entidades matemáticas con las que estamos comprometidos y con las que no, no corresponde a ninguna distinción que esté presente en la práctica.

El análisis de Quine no hace distinción entre las prácticas de las ciencias empíricas y las prácticas en matemáticas. La postura de Quine pretende ser general e incluir dentro de su análisis a todas las disciplinas científicas, pero al hacerlo no recupera las particularidades de cada una de ellas. Él pone a todas disciplinas al mismo nivel, por lo menos en cuanto a su confirmación. Esto es de lo más relevante en el caso de las matemáticas, puesto que la matemática como disciplina científica difiere notablemente en sus métodos y objetivos de las disciplinas empíricas; por ejemplo, los experimentos son esenciales en disciplinas como la física o la química, pero, en matemáticas no tienen un papel relevante. Parece que el análisis de Quine recupera elementos relevantes para otras disciplinas, pero no para la matemática. Este problema es claro en su defensa del argumento de la indispensabilidad, que se vuelve aún más patente al considerar la separación entre las matemáticas y las ciencias empíricas que analicé en la sección anterior.

Quine es consciente de esto, pero no resulta un problema grave desde su punto de vista, pues él defiende el holismo confirmacional. Si el holismo confirmacional es el caso, entonces aunque los experimentos no son relevantes en la práctica matemática, sí juegan un papel relevante en nuestra reconstrucción de las matemáticas, pues las oraciones de las matemáticas son confirmadas por los experimentos de las ciencias que las utilizan (aunque de forma muy indirecta). La postura de Quine sostiene que las oraciones de la matemática que son aplicables en las ciencias empíricas son aquellas que son confirmadas experimentalmente y por ello estamos comprometidos con la existencia de las entidades que en ellas están supuestas. Pero, aquellas oraciones de las matemáticas que no son usadas en la práctica de las ciencias empíricas no pueden ser defendidas de esta forma, y por ello todas las matemáticas no aplicadas carecerían por completo de sustento.[39] "El apoyo del argumento

[39]Esto puede ser problemático desde un punto de vista histórico., sobre todo si consideramos que algunas de las teorías matemáticas más exitosas en la actualidad, como la geometría reimanniana, no fueron aplicables en la ciencia durante años. Según el criterio de Quine, los objetos supuestos en estas teorías no existían durante ese periodo (en tanto

simple de la indispensabilidad se extiende a las entidades matemáticas que de hecho son empleadas en la ciencia, y sólo un poco más allá."[40] (Maddy, 1992, 278) Las entidades que no son útiles para la práctica del científico empírico no son defendidas por el argumento de Quine, a pesar de que ellas sean aceptadas por los matemáticos.

El argumento de la indispensabilidad da un soporte diferente a las entidades matemáticas del que se da dentro de la práctica matemática; es decir, sostiene que sólo existen las entidades matemáticas supuestas en las matemáticas aplicadas, pero esto no corresponde con la práctica del matemático. Esto genera un conflicto entre el análisis filosófico de Quine y el análisis naturalista de Maddy. Maddy sostiene que en este caso se debe preferir el naturalismo, que respeta la práctica, sobre la filosofía de Quine. Es claro que el naturalismo que defiende Maddy (la filosofía segunda) es más fuerte que el que defiende Quine. Ella pretende que la última palabra sobre las aclaraciones conceptuales la tenga el matemático y no el filósofo. Si quieres saber qué objetos matemáticos existen, observa sus prácticas.

> Desde el punto de vista del naturalismo en la ciencia, la parte aplicada de las matemáticas se admite como parte de la ciencia, como un tablón legítimo en el barco de Neurath; las matemáticas no aplicadas son ignoradas como no científicas. Pero incluso para las matemáticas aplicadas hay un choque con la práctica. Los matemáticos creen que los teoremas de la teoría de números y el análisis no en la medida en que son útiles en las aplicaciones, pero en la medida en que son comprobables a partir de los axiomas apropiados. (Maddy, 1992, p.279)[41]

Maddy nos hace observar que los matemáticos no aceptan o rechazan proposiciones matemáticas usando como criterio su aplicabilidad en las teorías

---

no eran parte de nuestra ontología). Un quineano puede objetar que no es problema grave para la postura de Quine, puesto que él sólo quiere ofrecer la mejor reconstrucción posible del estado actual de nuestro conocimiento y nunca se compromete con que no sea perfectible. Sin embargo, no es claro que este criterio sea compatible con la forma en la que los matemáticos trabajan, pues parece que ellos no hacen una distinción entre los objetos que existen (pues las oraciones que están comprometidas con su existencia son aplicables en la ciencia empírica) y los objetos inexistentes o ficticios (aquellos que pertenecen a las matemáticas que no son aplicables). Esta distinción parece no corresponder con ningún elemento de la práctica matemática.

[40] "The support of the simple indispensability argument extends to mathematical entities actually employed in science, and only a bit beyond." La traducción es mía.

[41] "From the point of view of science-only naturalism, the applied part of mathematics is admitted as a part of science, as a legitimate plank in Neurath's boat; unapplied mathematics is ignored as unscientific. But even for applied mathematics there is a clash with practice. Mathematicians believe the theorems of number theory and analysis not to the extent that they are useful in applications but insofar as they are provable from the appropriate axioms." La traducción es mía.

empíricas. Los criterios matemáticos para la aceptación de teoremas tienen que ver más bien con las pruebas matemáticas que se dan de ellos, las reglas de la lógica que se aceptan, los axiomas que son usados y qué tan apropiados son éstos. Recordemos que, de acuerdo a Maddy, a partir del siglo XIX las matemáticas buscan ofrecer una gama amplia de estructuras abstractas. Las matemáticas, que tienen como objeto de estudio estructuras abstractas, no necesariamente son aplicables en la ciencia empírica y los criterios de corrección de la matemáticas ya no están ligados a su aplicabilidad (sobre este punto, el ejemplo de las múltiples geometrías es muy iluminador). Por estas razones, desde el punto de vista de Maddy, la postura de Quine, en especial, el holismo confirmacional es incompatible con la práctica matemática.

La segunda crítica de Maddy sostiene que la postura de Quine describe de manera inadecuada la práctica de las ciencias empíricas, pues tanto el holismo confirmacional como la suposición de que siempre se toma a las oraciones de la ciencia como verdaderas son incompatibles con la práctica científica.

Maddy nos hace notar que el científico empírico no interpreta los resultados de sus experimentos de acuerdo el holismo confirmacional. El holismo confirmacional implica que no hay experimentos cruciales, debido a que nunca se refuta una sola oración, sino el cuerpo completo de nuestras creencias. Sin embargo, algunos científicos han hecho experimentos que resultan cruciales para elegir una hipótesis sobre otra, por ejemplo, el experimento que favoreció a la teoría de la relatividad sobre la newtoniana. Es posible que desde un punto de vista completamente abstracto y suponiendo el holismo confirmacional, no haya experimentos cruciales, pues los resultados confirmarían o refutarían a la teoría completa. Sin embargo, en las prácticas científicas particulares existen criterios que sirven para elegir una interpretación particular de los resultados que permiten que los experimentos sean cruciales (por lo menos, relativos a un contexto particular).

Aunado a esto, ella sostiene que, en ocasiones, los científicos empíricos usan la matemática sin comprometerse con que su aplicación dé como resultado enunciados verdaderos.

> Pero tal vez una mirada más cercana a las teorías particulares revelará que el papel real de las matemáticas de las que nos ocupamos cae siempre dentro de los elementos verdaderos en lugar de los elementos meramente útiles; quizá los argumentos indispensabilidad puede ser revivido en este camino. Por desgracia, una mirada a cualquier texto de física de primer año va a defraudar esta idea. Sus páginas están llenas de aplicaciones de las matemáticas que se entienden explícitamente como no literalmente verdaderas: por ejemplo, el análisis de las ondas de agua supone que el agua sea infinitamente profunda o el tratamiento de la materia como continua en la dinámica de fluidos o la representación de la energía como una cantidad que varía continuamente. Observe que esta matemática simplemente útil sigue siendo indispensable;

> sin estos (falsos) supuestos, la teoría se convierte en inviable. (Maddy, 1992, p. 81)[42]

Este ejemplo corresponde al cambio, analizado por Maddy, del papel de las matemáticas en la ciencia. De acuerdo al análisis ofrecido por Maddy, los modelos matemáticos no se toman como descripciones perfectas de la realidad, sino como buenas aproximaciones o representaciones de la realidad (recordemos el tercer punto de la sección anterior). Si aceptamos esto, la aplicación de las matemáticas no presupone la verdad de todas la oraciones involucradas en los experimentos. Se muestra así que la postura de Quine es incompatible incluso con la práctica del científico empírico.

Su tercera crítica se refiere a los enunciados indecidibles en matemáticas como la Hipótesis del Continuo. Ella afirma que el argumento de la indispensabilidad, al sólo dar apoyo a la parte de las matemáticas que es aplicable, no puede tratar casos de enunciados indecidibles que no tienen que ver con las aplicaciones y que generalmente se estudian por métodos puramente intrateóricos. Por ejemplo, la búsqueda de nuevos axiomas para resolver la HC no se puede resolver apelando a las aplicaciones empíricas generadas (pues no existen tales aplicaciones). La elección de nuevos axiomas o siquiera el intento de buscarlos no tiene que ver con su uso en las ciencias empíricas.

Este último punto puede ser tomado como una petición de principio en contra de Quine, pues él y otros defienden que la búsqueda de nuevos axiomas no es una empresa científica bien establecida. Sin embargo, Maddy puede argumentar que existe una comunidad de matemáticos que trabajan y seguirán trabajando en estos temas y no hay razón alguna para demeritar su trabajo únicamente porque no se ajusta a nuestra reconstrucción filosófica de su disciplina. De cualquier forma, esta última crítica no será para nosotros de mucha utilidad en contra de los argumentos de Feferman y Quine, puesto que ellos sostienen que los problemas relacionados con proposiciones indecidibles deben ser abandonados.[43]

[42] "But perhaps a closer look at particular theories will reveal that the actual role of the mathematics we care about always falls within the true elements rather than the merely useful elements; perhaps the indispensability arguments can be revived in this way. Alas, a glance at any freshman physics text will disappoint this notion. Its pages are littered with applications of mathematics that are expressly under-stood not to be literally true: e.g., the analysis of water waves by assuming the water to be infinitely deep or the treatment of matter as continuous in fluid dynamics or the representation of energy as a continuously varying quantity. Notice that this merely useful mathematics is still indispensable; without these (false) assumptions, the theory becomes unworkable." La traducción es mía.

[43] Si bien este tipo de evidencia puede ser útil para argumentar en contra de la postura de Feferman, puede ser tomada como una petición de principio. No podemos usarla directamente como evidencia a favor de la búsqueda de nuevos axiomas. La estrategia argumentativa que tomaré será un poco diferente, pues lo que trataré de mostrar es que las

4.4. Filosofía Segunda de la Teoría de Conjuntos.

En esta sección, presentaré la filosofía segunda de la teoría de conjuntos. Siguiendo la metodología de la filosofía segunda, lo primero que tengo que hacer es conocer las prácticas y la historia de la disciplina para después ofrecer un análisis filosófico de ella.

En los capítulos previos (especialmente en el capítulo 2), ya he dado pasos en esta dirección, pues presenté las pruebas de independencia de la HC respecto a ZFC, los teoremas de incompleción (que también se aplican a la teoría de conjuntos) y el teorema de cuasi-categoricidad de ZFCU2. Con lo que introduje algunos elementos de sus prácticas cotidianas, por ejemplo, el tipo de pruebas que usa, sus axiomas, la lógica de fondo (la lógica clásica), algunas limitaciones deductivas del sistema, sus objetos, su modelo pretendido (la jerarquía acumulativa de conjuntos) y algunos problemas abiertos en esta disciplina. Sin embargo, no he presentado con claridad sus objetivos, ni he hecho un análisis de su historia. Estos elementos los retomaré del análisis de Maddy.

En el texto *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, Maddy ofrece su propio análisis de la teoría de conjuntos aplicando el método de la segunda filosofía.[44] A continuación, daré una breve reconstrucción de algunos de los puntos centrales de su postura, poniendo énfasis en los objetivos de la teoría de conjuntos, la ontología de la teoría y los criterios propuestos para la aceptación de nuevos axiomas.

La teoría de conjuntos surge como disciplina a finales del siglo XIX, con los trabajos de Cantor y Dedekind. Justo en esa época se dio la separación entre la ciencia y las matemáticas, con lo cual se posibilitó la existencia de matemáticas puras, cuyo criterios de corrección van más allá de su aplicabilidad en las ciencias. La teoría de conjuntos surgió como una disciplina que no tenía aplicaciones directas en la ciencia y cuya corrección fue puesta en duda debido a las paradojas que surgieron en sus primeras formulaciones

prácticas matemáticas son incompatibles con el diagnostico hecho por Feferman respecto al estado actual de las matemáticas. Una vez hecho esto, argumentaré que la decisión de buscar nuevos axiomas para la teoría de conjuntos corresponde a los teóricos conjuntos y no al filósofo.

[44]Usaré también los dos artículos clásicos de Maddy sobre axiomas de la teoría de conjuntos, a saber, *Believing the Axioms I* y *II*. Estos textos corresponden a un periodo en el que Maddy trabaja con los métodos de la filosofía primera. Sin embargo, los resultados que obtuvo pueden ser recuperados sin mayor problema, pues consisten en un listado de las criterios de aceptación para los axiomas de la teoría de conjuntos que son usados normalmente por los teóricos de conjuntos.

(paradojas como la Cantor, Burali-Forti y Russell). Fue por ello que algunos matemáticos buscaron fundamentarla con ayuda del método axiomático, la primera versión de la teoría axiomática fue presentada por Zermelo en 1904.[45] Con la presentación axiomatizada de la teoría de conjuntos se pretendía ofrecer una fundamentación de la teoría, pero es claro que dicha fundamentación no dependía en absoluto de su aplicabilidad directa en las ciencias empíricas. En este sentido, podemos decir que la teoría de conjuntos nació como parte de las matemáticas puras.

Maddy comienza su estudio con el análisis de algunos episodios relevantes de la práctica de los teóricos de conjuntos. Ella ofrece un análisis más o menos detallados de cuatro sucesos en la teoría de conjuntos, a partir del cual ella obtiene los elementos necesarios para reconstruir su postura (o parte de ella).[46] Los episodios analizados son: 1) La introducción de los conjuntos hecha por Cantor, 2) la introducción de los conjuntos hecha por Dedekind, 3) la defensa de Zermelo de los axiomas de su teoría (en especial, del axioma de elección) y 4) el caso de la noción de determinación y su introducción en la teoría de conjuntos descriptiva.[47] A continuación mencionaré algunos puntos relevantes recuperados por Maddy.

El trabajo de Cantor en teoría de conjuntos comenzó cuando estudiaba la representación de series trigonométricas. En su búsqueda por obtener una generalización de resultados previos, Cantor introdujo nociones como el conjunto derivada de un conjunto dado (el conjuntos de los puntos límites del conjunto original). La innovación del trabajo de Cantor fue justo la introducción de objetos y métodos conjuntistas en el análisis de un problema del análisis matemático. Su objetivo al introducir conjuntos (una nueva clase de entidades matemáticas) fue obtener un marco más general para realizar representaciones (la construcción de una teoría que le permitiese crear modelos más precisos para fenómenos del análisis matemático).

La historia de la introducción de la teoría de conjuntos por parte de De-

[45]La primera versión de la teoría de conjuntos axiomática de Zermelo fue presentada en 1904. Zermelo dio una nueva versión en 1908. Pero fue hasta 1930 que Zermelo presentó la versión acabada de la teoría de conjuntos ZFC (aunque en una versión que es expresada en el lenguaje de la lógica de segundo orden). Existen muchas otras versiones axiomáticas de la teoría de conjuntos, me concentraré en esta versión, pues es la que es retomada por la tradición que pretendemos analizar.

[46]Maddy se concentra en analizar el desarrollo de algunas posturas en teoría de conjuntos. Sin embargo, es claro que su análisis no es exhaustivo, pues se concentra en la tradición que culmina con los trabajos del grupo CABAL.

[47]En este capítulo, sólo ofreceré algunos puntos relevantes sobre los axiomas de determinación y su relación con la teoría de conjuntos descriptiva, lo suficiente para presentar los resultados obtenidos por Maddy. En el siguiente capítulo daré más detalles sobre estos axiomas y su relación con la aceptación de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos.

dekind es en algunos aspectos similar a la de Cantor. El objetivo original de los trabajos de Dedekind era solucionar algunos problemas de representación en álgebra. Existían algunos objetos que eran construidos mediante algoritmos particulares (mediante representaciones particulares), el problema con esto consistían en que se cuestionaba si estos objetos dependían o no de las representaciones particulares usadas para su construcción; de ser así, el estatus de estos objetos podía ser puesto en duda. Dedekind introdujo la noción de conjuntos arbitrarios de objetos y mediante métodos y operaciones de conjuntos mostró que los objetos construidos no dependían de la representación particular bajo la que son presentados. Esto le permitió, entre otras cosas, dar su definición de continuidad y de números reales usando cortaduras. Además, fue el comienzo de su trabajo en teoría de números (naturales), estudio realizado desde el punto de vista de la teoría de conjuntos. Parte de la innovación en este caso, fue la introducción de métodos no constructivos en el análisis de fenómenos matemáticos.

> En todos estos casos, nos encontramos con Dedekind introduciendo conjuntos al servicio de objetivos matemáticos explícitos: una representación libre del álgebra abstracta no constructiva; una caracterización rigurosa de continuidad que sirva de fundamento para el análisis y un estudio más general de estructuras continuas; una caracterización rigurosa de los números naturales y la fundamentación resultante de la aritmética. (Maddy, 2011, p. 45)[48]

Zermelo fue alumno de Hilbert y llevo su programa de formalización de las matemáticas a la teoría de conjuntos; en 1904 ofreció su primera versión del sistema axiomático para la teoría de conjuntos (dio su versión definitiva en 1930). Algunos de los axiomas propuestos por Zermelo fueron rechazados por algunos matemáticos importantes de la época, como Poincaré. El axioma de elección fue el que generó más controversia. Fue por ello que Zermelo presentó una serie de razones que justificaban la aceptación de los axiomas de su teoría axiomática de conjuntos. De acuerdo a Maddy, la defensa que él ofreció muestra que uno de los objetivos de la axiomatización de la teoría es salvar a la teoría de la antinomias (y evitar las contradicciones). Además, los criterios que él usó para justificar los axiomas de su teoría eran de dos tipos, el primero es su autoevidencia y el segundo su uso extendido en la comunidad matemática. Axiomas como el axioma de elección pueden ser defendidos debido que son necesarios para la práctica matemática (en este

[48] "In all these cases, we find Dedekind introducing sets in the service of explicit mathematical goals: a representation-free, non-constructive abstract algebra; a rigorous characterization of continuity to serve as a foundation for analysis and a more general study of continuous structures; a rigorous characterization of the natural numbers and resulting foundation for arithmetic." La traducción es mía.

caso, para la obtención de resultados matemáticos que de otra forma sería imposible obtener). Algo muy similar a lo que sería dicho por Gödel años después.

La noción de determinación cobró relevancia en teoría de conjuntos descriptiva a mediados de siglo XX. El trabajo de los teóricos de la determinación buscaba resolver algunos problemas abiertos de la teoría de conjuntos y del análisis matemático (por ejemplo, qué conjuntos de números reales son Lesbegue-medibles). La idea central detrás de la determinación es que se puede definir un juego en un conjuntos de números reales (un juego entre dos oponentes). El conjunto está determinado si existe una estrategia ganadora para algunos de los jugadores. Que un conjunto esté determinado implica que tiene algunas otras propiedades como ser Lesbegue-medible o cumplir con la propiedad del subconjunto perfecto, que son relevantes en los estudios de la teoría descriptiva de conjuntos. Esta relación permitió replantear algunos de los problemas en la teoría descriptiva de conjuntos y ofrecer nuevas perspectivas útiles para su resolución. Se sabe que algunos conjuntos están determinados; sin embargo, asumir que todos los conjuntos están determinados implica la negación del axioma de elección (que ahora es comúnmente aceptado). Se han propuesto distintos axiomas de determinación (que no entren en conflicto con el axioma de elección), el más fuerte sostiene que todos los conjuntos constructibles de números reales están determinados, $AD^{L(\mathbb{R})}$. La evidencia a favor de este axioma es mucha. Genera una teoría de conjuntos descriptiva muy bien estructurada (considerada más útil para los matemáticos que algunas otras teorías), además de que se pueden recuperar resultados previos usando la noción de determinación. Además, los axiomas de determinación están estrechamente relacionados con los axiomas de grandes cardinales (que tiene un soporte fuerte e independiente).[49]

A partir del análisis de estos cuatro casos, se puede establecer cuáles son los objetivos de la teoría de conjuntos, por lo menos desde las tradiciones analizadas. El objetivo original de la teoría de conjuntos no era generar aplicaciones novedosas, sino construir un marco teórico para la creación de modelos de diferentes disciplinas matemáticas, modelos que al ser construidos a partir de la misma teoría pudiesen establecer conexiones entre distintas disciplinas. Se busca clarificar nociones de gran importancia en matemáticas, como la noción de número, función, órdenes, etc., mediante la reconstrucción de estos objetos o conceptos mediante las técnicas de la teoría de conjuntos. Por decirlo de algún modo, la teoría de conjuntos busco ser una *lingua franca*, por lo menos para las teorías matemáticas.[50] Los trabajos de Zermelo seguían

[49]En el siguiente capítulo presentaré algunos de los detalles técnicos de esta discusión. Por el momento, lo dicho hasta ahora es suficiente para presentar la postura de Maddy.

[50]Existe otro posible objetivo de la teoría de conjuntos, a saber, ofrecer una fundamen-

una línea similar, pero incluyeron la necesidad de mostrar que la teoría de conjuntos era consistente y no generaba antinomias. A partir de entonces, la consistencia es considerada un requisito para las extensiones de la teoría de conjuntos, pues se busca evitar paradojas. En palabras de Maddy:

> En el siglo transcurrido desde el primer esfuerzo de Zermelo, teoría de conjuntos ha consolidado su papel como el telón de fondo de la matemática clásica. Las preguntas de la forma - ¿existe una estructura o un objeto matemático como este? - son contestadas por la búsqueda de una instancia o un sustituto dentro de la jerarquía de la teoría de conjuntos. Las preguntas de la forma - ¿pueden tal y tal ser demostrada o refutada? - son respondidas por la investigación de lo que sigue o no sigue de los axiomas de la teoría de conjuntos. Esto no quiere decir que la teoría de conjuntos nos muestre lo que los números o funciones realmente son; toda lo que la teoría de conjuntos necesita mostrar es que ciertos conjuntos pueden hacer todos los trabajos matemáticos requeridos a los números o a las funciones. Tampoco sirve para afirmar que estamos de alguna manera más seguros de la coherencia de ZFC que, por ejemplo, de la Aritmética de Peano, o que todas las matemáticas podría o debería hacerse exclusivamente utilizando métodos de teoría de conjuntos. Lo que la teoría de conjuntos hace es proporcionar un espacio generoso y unificado a la que todas las cuestiones locales sobre coherencia y pruebas pueden ser referidas. De esta manera, la teoría de conjuntos nos proporciona una única herramienta que puede dar significado explícito a las preguntas de la existencia y coherencia; hacer que los conceptos y estructuras previamente poco claras se vuelvan precisas; identificar supuestos fundamentales perfectamente generales que se desempeñan de muchas formas diferentes en distintas áreas; facilitar interconexiones entre ramas dispares de las matemáticas ahora todos representados de manera uniforme; formular y responder preguntas de demostrabilidad y refutabilidad; abrir la puerta a nuevas hipótesis fuertes para resolver preguntas abiertas antiguas; etcétera. En este sentido filosóficamente modesto pero matemáticamente rico, se puede decir que la teoría de conjuntos fundamenta a las matemáticas puras contemporáneas. (Maddy, 2011, p. 33-34)[51]

---

tación última de las matemáticas, pero este punto dependía de que tan bien se pudiese fundamentar a la teoría de conjuntos misma. Además, de acuerdo a Maddy, no parece haber evidencia clara a favor de esta postura, no por lo menos si se apela al estudio de los primeros trabajos en teoría de conjuntos.

[51] "In the century since Zermelo's first effort, set theory has solidified its role as the backdrop for classical mathematics. Questions of the form? is there a structure or a mathematical object like this??are answered by finding an instance or a surrogate within the set-theoretic hierarchy. Questions of the form?can such-and-such be proved or disproved?? are answered by investigating what follows or doesn't follow from the axioms of set theory. This isn't to say that set theory shows us what numbers or functions really are; all set theory need claim is that certain sets can do all the mathematical jobs required of numbers or functions. It also isn't to claim that we're somehow more certain of the coherence of ZFC than, say, that of Peano Arithmetic, or that all mathematics could or should be done using exclusively set-theoretic methods. What set theory does is provide a generous,

Si la teoría de conjuntos busca ser una teoría que en principio pueda proveer al matemático de las herramientas suficientes para la construcción de las estructuras abstractas necesarias para clarificar sus nociones básicas y comprender sus objetos, entonces debe ser lo suficientemente flexible para recuperar por lo menos todos los objetos y estructuras de la matemática clásica. Esto lo hace sin mayor problema. La axiomatización de Zermelo, ZFC, tiene el poder suficiente para reconstruir la totalidad de la matemática clásica (aritmética, álgebra, topología, geometría, etc.). Sin embargo, esto no es suficiente.

> Más bien, la teoría de conjuntos como ciencia debe desarrollarse de la forma más general posible, y luego las investigaciones comparativas de los modelos individuales se pueden abordar como un problema particular. (Zermelo, 1930, p. 1232)[52]

La teoría de conjuntos para lograr su objetivo de ser un marco unificador debe en principio ser capaz de reconstruir no sólo las matemáticas clásicas, sino toda matemática futura (tal vez incluso, toda matemática posible). Esto impone un principio de maximalidad a la teoría. La teoría de conjuntos debe buscar ser lo más general posible y en principio debe optar por principios que le permitan maximizar la cantidad de modelos que puede reconstruir. El principio de maximalidad implica la búsqueda de nuevos axiomas que nos permitan incrementar el poder de la teoría de conjuntos; esto es, que nos permitan generar más modelos.

Pero el objetivo original de la teoría de conjuntos no es el único que tiene actualmente. Del análisis de los trabajos de los teóricos de la determinación, se puede extraer un nuevo objetivo, a saber, la resolución de problemas abiertos tanto en teoría de conjuntos como en otras ramas de la matemáticas, especialmente en teoría descriptiva de conjuntos y en análisis. Entre otras cosas, se busca dar una caracterización lo más completa posible de los conjuntos de números reales (qué propiedades tienen). La búsqueda de nuevos

---

unified arena to which all local questions of coherence and proof can be referred. In this way, set theory furnishes us with a single tool that can give explicit meaning to questions of existence and coherence; make previously unclear concepts and structures precise; identify perfectly general fundamental assumptions that play out in many different guises in different fields; facilitate interconnections between disparate branches of mathematics now all uniformly represented; formulate and answer questions of provability and refutability; open the door to new strong hypotheses to settle old open questions; and so on. In this philosophically modest but mathematically rich sense, set theory can be said to found contemporary pure mathematics." La traducción es mía.

[52] "Rather, set theory as a science must be develop in the fullest generality, and then the comparative investigations of individual modelscan be undertaken as a particular problem." La traducción es mía.

axiomas estará guiada por las prácticas de las comunidades matemáticas que se ocupen de estudiar la teoría de conjuntos y sus posibles extensiones.

La teoría de conjuntos pertenece a las matemáticas puras, pero esto no implica que sus resultados sean evaluados desde un punto de vista puramente interno a la teoría. Los criterios de corrección son, en su mayoría, criterios externos que involucran no sólo a la teoría de conjuntos, sino a otras disciplinas y las aplicaciones que tiene la TC en ellas. Con esto no se quiere decir los criterios sean independientes de las prácticas en teoría de conjuntos, pues estas prácticas incluyen la búsqueda de relaciones con otras teorías matemáticas, la obtención de resultados interesantes, la resolución de problemas abiertos, etcétera.

El filósofo segundo, una vez que conoce los objetivos y los métodos de la teoría de conjuntos, puede cuestionarlos y preguntarse por su corrección. Pero, para realizar esta tarea usará los métodos y las herramientas que usaría un científico en una de sus investigaciones.

Ahora que conocemos los métodos de prueba, los axiomas, la lógica de fondo, los objetivos y los objetos con los que trabaja la teoría de conjuntos, contamos con los elementos necesarios para ofrecer una evaluación filosófica de ellos.

4.4.1. Realismo robusto vs. Realismo delgado.

El siguiente punto que presentaré es el análisis de la naturaleza de los objetos matemáticos desde el punto de vista de la filosofía segunda, es decir, la ontología segunda de las matemáticas. Maddy hace una distinción entre dos clases de posturas filosóficas, respecto a la ontología de las matemáticas. La primera será el realismo robusto y corresponde con las posturas tradiciones en filosofía de las matemáticas (la ontología generada a partir de la metodología de la filosofía primera). La segunda es la postura que surge del análisis del filósofo segundo. Esta segunda postura es compatible con dos ontologías posibles, el realismo delgado y el arrealismo. En esta sección me concentraré en caracterizar al realismo robusto y al realismo delgado (para facilitar la exposición, hablaremos del arrealismo un poco más adelante).

Podemos adelantar que la ontología propuesta por la filosofía segunda será (o puede ser) insatisfactoria para la mayoría de los filósofos de las matemáticas tradicionales. Esto se debe a que en muchos sentidos la propuesta es trivial, pues considera que la ontología de la teoría de conjuntos está completamente dada por las prácticas matemáticas y no busca ser complementada por ninguna postura que vaya más allá de lo dado por las prácticas mismas. Si bien esto puede ser considerado insuficiente, es completamente compatible con la metodología de la filosofía segunda.[53]

4.4.1.1. Realismo Robusto.

Comenzaré caracterizando la postura del filósofo tradicional, llamada por Maddy *Realismo Robusto.* El realismo robusto más que una postura específica engloba muchas propuestas generadas a partir de la metodología de la filosofía primera. Para comprender el realismo robusto, es útil retomar la postura filosófica de Gödel respecto a la ontología de la teoría de conjuntos.

Gödel creía que la teoría de conjuntos tenía como objetivo describir con la mayor precisión posible una realidad independiente de los seres humanos, el universo conjuntista. Esta realidad independiente contiene a los objetos de los que habla la teoría y corresponde a la jerarquía acumulativa de conjuntos. Las oraciones de la teoría de conjuntos describen esa realidad independiente y su valor de verdad se determina respecto a ésta. Por ejemplo, la verdad de la Hipótesis del Continuo depende de cuál es el cardinal del continuo en este universo conjuntista. La postura de Gödel es claramente realista y está construida de acuerdo a la metodología del filósofo primero; es decir, no tiene como soporte principal el análisis de las prácticas matemáticas del teórico de conjuntos (aunque no las excluye del todo), sino que más bien, está construida a partir de una postura filosófica previa (primero la filosofía, después la práctica matemática).[54]

Existen otras posiciones similares a la de Gödel, pues surgen a partir de una metodología similar, aunque los detalles varían. Por ejemplo, Stewart Shapiro sostiene que existen estructuras matemáticas independientemente de nosotros. Las estructuras matemáticas en la teoría de Shapiro no son estructuras algebraico-relacionales, como puede parecer en un principio. Para él, las estructuras matemáticas son estructuras abstractas parecidas a los universales, las estructuras algebraico-relaciones son sólo instancias de las estructuras matemáticas. Las estructuras matemáticas existen de manera independiente de nosotros y no es condición de posibilidad para su existencia contar con instancias. Es por ello que, la posición de Shapiro es conocida como Estructuralismo *Ante Rem.*[55] La naturaleza de las estructuras matemáticas que propone Shapiro se debe a que quiere responder a problemas clásicos

[53]Como veremos más adelante, la metodología de la filosofía segunda no determina del todo la ontología de la teoría de conjuntos. El análisis de la teoría de conjuntos arrojara que hay dos posibles ontologías compatibles con la teoría, el realismo delgado y el arrealismo. Esto llevará a Maddy a sostener que lo que realmente importa es defender el objetivismo.

[54]Esto no quiere decir que Gödel no considerase en absoluto la práctica matemática en su postura. Sin embargo, la motivación principal de su búsqueda por nuevos axiomas era su creencia en el universo conjuntista, que era completamente independiente.

[55]Véase (Shapiro 1997), especialmente el capítulo 3.

en filosofía de las matemáticas como el problema de Julio César planteado por Frege[56] y el problema de la referencia de los números planteado por Benacerraf.[57,58] Las estructuras matemáticas son el objeto de estudio de las teorías matemáticas, incluyendo a la teoría de conjuntos. El objetivo de la teoría de conjuntos es estudiar la estructura que le corresponde. En este sentido, la verdad de oraciones como la HC depende de la estructura que estudia la teoría de conjuntos.

Estas posturas tienen en común que ofrecen una ontología para las matemáticas que no está apoyada o no proviene de estudio de las prácticas matemáticas (incluso si es compatible con ellas). Están sustentadas en una postura filosófica previa que proporciona los elementos indispensables para ofrecer una propuesta ontológica y, en el mejor de los casos, proponen en un segundo momento una explicación de los prácticas matemáticas y los fenómenos relacionados con ésta.

> La idea básica aquí ? que la legitimidad de CH se defiende apelando a algún tipo de realidad objetiva en la que ésta ya es verdadera o falsa ? puede concretarse de diferentes maneras: la realidad objetiva podría ser la jerarquía acumulativa de conjuntos (como en Gödel [1964]), la estructura de la teoría de conjuntos (como en Shapiro [1997]), el concepto de conjunto (como en Gödel [1951]), algunos hechos puramente modal (como en Hellman [1989]), y , sin duda, hay otras posibilidades. Una analogía puede o no puede ser trazada entre la realidad de teoría de conjuntos descrita por la teoría de conjuntos y la realidad física descrita por la ciencia natural (como en Gödel

[56]El problema de Julio César consiste en que debemos mostrar que la identidad "2 = Julio César" es falsa. De acuerdo a Frege, la identidad está bien construida, pero sería un problema serio que llegue a ser verdadera. De acuerdo a Frege, una buena filosofía de las matemáticas debe poder mostrar que la identidad es falsa.

[57]El problema de la referencia de los términos numéricos es planteado por Benacerraf en su (1965). El problema consiste en determinar si hay una reconstrucción conjuntista de los números naturales que deba ser privilegiada y, en consecuencia, proporcione la referencia de los términos numéricos para los números naturales. Benacerraf concluye que no existe ninguna reconstrucción privilegiada y en consecuencia los números no pueden ser conjuntos (su argumento continua hasta mostrar que los números no pueden ser objetos).

[58]Puede observarse que tanto el problema de Julio César como el problema de Benacerraf suponen una postura particular en filosofía del lenguaje, a saber, que los términos numéricos refieren a objetos y que se comportan como nombres propios (por lo que la referencia debe ser un único objeto). Desde el punto de vista de la filosofía segunda, ninguno de los dos sería un problema real para la filosofía de las matemáticas. En el caso del problema de Julio César, el filósofo segundo puede argumentar que desde la práctica matemática se puede establecer que la oración "2 = Julio César" es claramente falsa, pues Julio César no es un objeto del cual se hable en la teoría, la pregunta simplemente no tiene lugar. En cuanto al problema de Benacerraf, el filósofo segundo puede argumentar que la teoría de conjuntos no pretende mostrar la naturaleza última de los objetos matemáticos, su objetivo es sólo obtener representaciones adecuadas de los objetos.

> [1944], [1964], o mi [1990]). Voy a llamar a las posiciones metafísicas de este tipo general 'realismo robusto'. (Maddy, 2011, p. 56-57)[59]

Esta clase de realismo cree que la teoría de conjuntos tiene como objetivo principal describir y analizar objetos matemáticos y sus relaciones (sin importar exactamente cuáles sean dichos objetos, pues cada postura postula diferentes objetos o hechos matemáticos) que existen de forma independiente de la práctica matemática.

Un problema inmediato que enfrentarán todas estas posturas será explicar cómo es que los seres humanos pueden tener conocimiento matemático. Pues al postular la existencia de objetos y hechos independientes de la práctica matemática como objetos de estudio de esta disciplina deben dar cuenta de cómo es que tenemos acceso a ellos.[60] Ellos enfrentan el dilema de Benacerraf.[61]

4.4.1.2. La práctica matemática y el realismo delgado.

En contraste con el filósofo tradicional (el realista robusto), el filósofo segundo ofrece como razón suficiente para aceptar la existencia de objetos matemáticos el que estos son requeridos por las prácticas matemáticas con las que están relacionados. Por supuesto, para poder obtener una ontología de una teoría matemática es necesario primero conocer las prácticas matemáticas relacionadas con ella. Una vez hecho esto, podemos proceder a dar una propuesta ontológica.

---

[59]"The basic idea here ? that the legitimacy of CH is to be defended by appeal to some sort of objective reality in which it is either true or false ? this basic idea can be fleshed out in a number of different ways: the objective reality might be the cumulative hierarchy of sets (as in Gödel [1964]), a set-theoretic structure (as in Shapiro [1997]), the concept of set (as in Gödel [1951]), some purely modal facts (as in Hellman [1989]), and there are doubtless other possibilities. An analogy may or may not be drawn between the set-theoretic reality described by set theory and the physical reality described by natural science (as in Gödel [1944], [1964], or my [1990]). Let me call metaphysical positions of this general type ?Robust Realism'." La traducción es mía.

[60]Por ejemplo, Gödel apela a la intuición matemática como vía de acceso a los objetos del universo conjuntista. Shapiro recurre a mecanismos como la abstracción lingüística, el reconocimiento de patrones y las definiciones implícitas.

[61]El dilema de Benacerraf fue presentado originalmente en (Benacerraf, 1973). Benacerraf sostiene que nuestra mejor epistemología (la teoría causal del conocimiento) es incompatible con nuestra mejor ontología de las matemáticas (que supone que los objetos matemáticos son objetos abstractos con los cuales no tenemos contacto causal). Así que nos encontramos ante un dilema, o rechazamos nuestra mejor epistemología o rechazamos nuestra mejor ontología. En la actualidad la teoría causal del conocimiento no cuenta con una gran aceptación. Sin embargo, el problema sigue afectando a la mayoría de las propuestas epistemológicas contemporáneas, pues tienen que explicar cómo es que tenemos acceso a los objetos y los hechos matemáticos de los que hablan nuestras teorías.

> Recordemos que el Segundo Filósofo se enfrenta a dos tipos de preguntas acerca de la teoría de conjuntos: en primer lugar, ¿cuáles son sus métodos propios? en segundo lugar, ¿qué tipo de actividad es la teoría de conjuntos?, ¿cuál es su objeto de estudio?, y ¿por qué estos son sus métodos propios? Estas preguntas no son estrictamente matemáticas; ella las plantea en su calidad de un científico empírico que examina una práctica humana particularmente destacada. (Maddy, 2011, p. 61)[62]

Para generar una ontología segunda para la teoría de conjuntos es necesario recuperar las razones que los teóricos de conjuntos tenían para incluir a los conjuntos como parte de las entidades matemáticas con las que trabajaban. Como vimos antes, Cantor y Dedekind tenían razones muy concretas para aceptar la existencia de conjuntos, a saber, que la introducción de estos objetos les permite lograr representaciones más generales y sólidas de resultados matemáticos de su interés.

El realismo delgado es una clase de realismo que se caracteriza por aceptar la existencia de los objetos matemáticos que son introducidos en la práctica matemática, sin pedir mayor justificación para su existencia. La evidencia que el realismo delgado considera pertinente para la aceptación de la existencia de los objetos matemáticos es sólo aquella que es utilizada por los matemáticos que introducen dichos objetos. Por ejemplo, en el caso de la introducción de los conjuntos hecha por Cantor la evidencia a favor de su existencia es su utilidad para lograr los objetivos matemáticos que tenían, a saber, la posibilidad de generar representaciones más generales y bien fundamentadas de progresiones trigonométricas.

Esto puede parecer una propuesta muy débil, parece que éstas no son razones suficientes o adecuadas para la aceptación de la existencia de objetos como los conjuntos, en especial desde el punto de vista de la filosofía primera. Sin embargo, de acuerdo a la metodología de la filosofía segunda, no se requiere ninguna otra justificación, pues la práctica matemática es el juez último, no la filosofía. Dado que los matemáticos no requieren mayor evidencia para la aceptación de los conjuntos, no hay razón para pedir evidencia extra-matemática (filosófica o de otro tipo) para aceptar su existencia. El filósofo primero no puede tomar la misma evidencia como suficiente para la aceptación de la existencia de los objetos matemáticos, en particular de los conjuntos.

[62] "Recall that the Second Philosopher faces two types of questions about set theory: first, what are its proper methods? second, what sort of activity is set theory, what is its subject matter, and why are these the proper methods? These aren't strictly mathematical questions; she poses them in her capacity as an empirical scientist examining a particularly salient human practice." La traducción es mía.

El realista robusto requiere más evidencia que el filósofo segundo para aceptar la existencia de ciertos objetos matemáticos. Pero no sólo eso, requiere evidencia de una naturaleza diferente, puesto que necesita justificar la existencia de los objetos sin apelar a la función que desempeñan en la teoría y en las prácticas del matemático. Apelar a su función en la teoría no garantiza en absoluto la existencia estos objetos, no hay ninguna conexión entre utilidad para la teoría y la existencia independiente, no por lo menos de manera evidente.[63] Esto podría explicar las disputas sobre la existencia de objetos matemáticos en algunas tradiciones filosóficas, pues se busca ofrecer evidencia de su existencia que va más allá de las prácticas matemáticas.

Esta necesidad de evidencia extra-matemática que tienen los realistas robustos (como Gödel) es en buena medida la razón de nuestra elección de la filosofía segunda como marco teórico para analizar el problema del continuo. Pues, si aceptamos la postura realista de Gödel, no es en absoluto claro cómo es que los criterios externos son realmente útiles como evidencia a favor de la aceptación de nuevos axiomas; no hay ninguna garantía de que este tipo de evidencia ofrezca buenas razones para creer que los nuevos axiomas son correctos respecto al universo conjuntista (salvo una especie de milagro). Más adelante, profundizaremos en este punto.

A diferencias del realista robusto, el filósofo segundo no requiere de evidencia extra para postular la existencia de objetos matemáticos, pues pretende recuperar una ontología y una epistemología de la práctica científica que está estudiando. La ontología segunda es ingenua, pues acepta como existentes los objetos que la práctica acepte.

> Esto es exactamente lo que nuestras investigaciones filosóficas segundas nos han llevado a esperar: una versión de realismo que realmente explica la naturaleza del lenguaje y la práctica de la teoría de conjuntos, que respeta la estructura real de las justificaciones de la teoría de conjuntos. (Maddy, 2011, p. 61)[64]

[63]En este punto, la situación que enfrenta el realista robusto es muy similar a la que experimenta un científico empírico cuando postula la existencia de una nueva clase de objetos para dar cuenta de un fenómeno problemático. El científico tiene que ofrecer evidencia a favor de la existencia de los objetos que postula, evidencia experimental. El hecho de que postular la nueva clase de entidades resulte de gran utilidad para la teoría, no garantiza su existencia. Es posible que la gran utilidad del supuesto haga que muchos científicos se inclinen por aceptar la existencia de esta clase de entidades, pero siempre se requiere evidencia extra para lograr la completa aceptación. El problema para el realista robusto es que mientras no explique cómo es que tiene acceso a los objetos matemáticos, no cuenta con elementos para dar la clase evidencia que los científicos empíricos, en principio, sí pueden ofrecer mediante la experimentación.

[64]“This is exactly what our second-philosophical investigations have led us to hope for: a version of realism that genuinely accounts for the nature of set-theoretic language and

4.4.1.3. Epistemología delgada.

Hasta ahora, el método de la filosofía segunda me ha permitido 1) dar razones para considerar a la teoría de conjuntos una disciplina con objetivos y metodología propias y 2) generar una ontología delgada, que considera como evidencia suficiente para aceptar la existencia de los objetos de la teoría de conjuntos su función en la teoría. Sin embargo, es todavía necesario dar cuenta del conocimiento matemático y establecer las diferencias (y posibles ventajas) respecto de las propuestas dadas por las posturas tradicionales.

> Para este punto, [la filósofa segunda] ha respondido a las preguntas del primer tipo - los métodos de la teoría de conjuntos reales que está catalogado son los métodos propios, tanto racionales como autónomos - y ella ha dado un primer paso en las cuestiones del segundo tipo: ella llegó a la conclusión de que existen conjuntos, que la teoría de conjuntos es un cuerpo de verdades acerca de ellos, y que los métodos de la teoría de conjuntos son guías confiables en esta investigación. Ella enfrenta ahora el reto de explicar lo que hace que estos métodos sean fiables, de lo que debe ser los conjuntos para que esto sea así. Dadas las circunstancias, la filósofa segunda está naturalmente inclinada a considerar la hipótesis más simple que da cuenta de los datos: los conjuntos son justo el tipo de cosas que describe la teoría de conjuntos; esto es todo lo que hay para ellos; para preguntas acerca de conjuntos, la teoría de conjuntos es la única autoridad competente. (Maddy, 2011, p. 61)[65]

Como veremos a continuación, la epistemología segunda también parecerá trivial pues, de nuevo, estará determinada por la práctica matemática. A la pregunta, ¿cómo adquirimos conocimiento matemático?, el filósofo segundo responde que lo hacemos justo cómo lo hacen los matemáticos, haciendo demostraciones (haciendo lo que los matemáticos hacen).

Consideremos con cuidado la situación en la que se encuentra el filósofo segundo respecto a la filósofo primero (en especial, los que aceptan una ontología similar a la de Gödel). Ambos aceptan la existencia de los conjuntos como objetos que existen de manera independiente, no son causales ni espacio-temporales. De igual forma, creen que el valor de verdad de las

practice, that respects the actual structure of set-theoretic justifications." La traducción es mía.

[65] "To this point, she has answered questions of the first type ? the actual set-theoretic methods she's cataloged are the proper methods, both rational and autonomous ? and she's made a start on questions of the second type: she's concluded that sets exist, that set theory is a body of truths about them, and that set-theoretic methods are reliable guides in this inquiry. She's now faced with the challenge of explaining what makes these methods reliable, of what sets must be like for this to be so. Under the circumstances, the Second Philosopher is naturally inclined to entertain the simplest hypothesis that accounts for the data: sets just are the sort of thing set theory describes; this is all there is to them; for questions about sets, set theory is the only relevant authority." La traducción es mía.

oraciones de la teoría de conjuntos depende de dicho objetos y sus relaciones. Por ejemplo, ambos creen que la HC tiene un valor de verdad determinado, a pesar de ser independiente de ZFC. El valor de verdad de la HC depende del conjunto de los números reales y su relación con otros conjuntos, en particular, con cuál de los alephs es biyectable. Por un momento, parecería que ambas posiciones han colapsado, pues han llegado a las mismas conclusiones (aunque lo han hecho por razones muy diferentes). Es por ello que hay que ser muy cuidadosos en este punto. Recordemos que el realismo delgado ha llegado a conclusiones muy similares a las del realismo robusto sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, pero lo hace a través de su investigación sobre la práctica matemática. Este punto es crucial, pues este tipo de investigación no sólo influye en la ontología, sino también en la forma en la que se explica el conocimiento.

El realista robusto postula la existencia de los conjuntos sin apelar a la práctica matemática. Los conjuntos son objetos abstractos, no son causales ni espacio-temporales. Esto lo obliga a dar una explicación del tipo de acceso que tenemos a dichos objetos. El tipo de explicación dada debe explicar cómo es que los seres humanos podemos acceder a este tipo de entidades independientemente de nuestras prácticas. El realista delgado no tiene está clase de problemas.

Siguiendo el método de la filosofía segunda, el realista delgado buscará una explicación del conocimiento matemático en la práctica de los matemáticos y considerará que en la práctica misma se deben encontrar elementos suficientes para generar una epistemología; pues, después de todo, los matemáticos son los que generan está clase de conocimiento. Al analizar cómo es que los matemáticos generan su conocimiento, el realista delgado pronto se da cuenta que ellos toman como principal fuente de conocimiento la existencia de pruebas matemáticas, pruebas que se generan a partir de un conjunto de axiomas de la teoría particular que están trabajando y de una lógica que han elegido para obtener las consecuencias de dichos axiomas. En el caso de los teóricos de conjuntos, los axiomas elegidos son los axiomas de ZFC (o alguna versión equivalente) y la lógica es la lógica clásica. Una vez que el filósofo segundo ha llegado a estos resultados puede concluir que lo único necesario para conocer el valor de verdad de una proposición de la teoría de conjuntos es mostrar que se puede generar una demostración de ella a partir de los axiomas de ZFC usando la lógica clásica. Nada más es necesario.

> [R]ecordemos cómo Gödel apela al realismo robusto para justificar su afirmación de que HC tiene un valor de verdad determinado, a pesar de su independencia de ZFC. ¿Cómo será la visión de nuestro nuevo realista en el caso de HC? Su análisis es simple: 'HC o no-HC' es un teorema, establecido por sus mejores métodos como un hecho acerca de V; por lo tanto, HC

> es verdadera o falsa allí. Para el realista robusto, esta apelación a la lógica clásica no es suficiente; para él, sin la garantía de que la lógica rastrea la metafísica, queda abierta la posibilidad de que este teorema sea incorrecto. En contraste, el realista delgado sostiene que los métodos de la teoría de conjuntos son la avenida fiable a los hechos acerca de los conjuntos, no es necesaria ni posible una garantía externa. Así que el diagnóstico fundamental es el siguiente: el realista robusto requiere un evidencia no trivial de la fiabilidad de los métodos de la teoría de conjuntos, una evidencia que va más allá de lo que la teoría de conjuntos nos dice; para el realista delgado, la teoría de conjuntos en sí te da toda la historia; la fiabilidad de sus métodos es un hecho claro acerca de lo que los conjuntos son. (Maddy, 2011, p. 62)[66]

Para el filósofo segundo, que en la lógica que se usa en teoría de conjuntos valga el principio de tercio excluso es suficiente evidencia para sostener que toda oración de la teoría es verdadera o falsa. Esto no implica que dada cualquier oración exista una prueba de ella o de su negación, el filósofo segundo es consciente de que existen oraciones indecidibles en la teoría de conjuntos. El principio del tercio excluso sólo implica que la oración dada es o verdadera o falsa en el universo de los conjuntos, no que nosotros tengamos una forma de conocer su valor de verdad. Para conocer el valor de verdad de una oración de la teoría de conjuntos tenemos que dar una prueba de ella o de su negación, conocemos verdades de la teoría de conjuntos haciendo demostraciones.

Es importante remarcar que el filósofo segundo no sostiene simplemente que debamos aceptar todo teorema sin más. Lo que él sostiene es que la matemática misma tiene criterios de corrección y aceptación de resultados, criterios que han sido propuestos, evaluados y perfeccionados durante el desarrollo de la disciplina. Los axiomas y la lógica que se usa para extraer consecuencias de ellos han pasado por un largo proceso de desarrollo y los teóricos de conjuntos tienen buenas razones para aceptarlos, respaldadas en su práctica.[67]

[66] "As a start, recall how Gödel appeals to Robust Realism to justify his claim that CH has a determinate truth value, despite its independence from ZFC. How will our new realist view the case of CH? Her analysis is simpler: ?CH or not-CH' is a theorem, established by her best methods as a fact about V; therefore CH is either true or false there. For the Robust Realist, this appeal to classical logic isn't enough; for him, without a guarantee that the logic tracks the metaphysics, the possibility remains open that this theorem is incorrect. In contrast, the Thin Realist holds the set-theoretic methods are the reliable avenue to the facts about sets, that no external guarantee is necessary or possible. So the fundamental diagnostic is this: the Robust Realist requires a non-trivial account of the reliability of set-theoretic methods, an account that goes beyond what set theory tells us; for the Thin Realist, set theory itself gives the whole story; the reliability of its methods is a plain fact about what sets are." La traducción es mía.

[67] Maddy sostiene que incluso los axiomas más aceptado de la teoría de conjuntos ZFC requieren de una justificación. Ninguno de ellos puede ser aceptado sin ofrecer un respaldo

Siguiendo la línea de argumentación anterior, se puede decir que los métodos de la teoría de conjuntos no son infalibles, pueden existir errores en la teoría y tal vez en algunos casos los resultados obtenidos tendrán que ser revisados, modificados o incluso rechazados. Si bien el filósofo segundo considera suficiente evidencia la obtenida por métodos puramente matemáticos, esto no quiere decir que los consideré infalibles, sólo sostiene que la práctica matemática tiene suficientes herramientas para justificar sus resultados, evaluarlos y corregirlos, en caso de ser necesario. Sostener que las teorías matemáticas y sus métodos son infalibles sería una afirmación demasiado fuerte y en contra de la metodología científica del filósofo segundo.

Esta falibilidad del conocimiento científico parece generar un reto escéptico para la epistemología del segundo filósofo. Sin embargo, no es así. Para clarificar este punto se puede hacer una distinción entre dos tipos de retos escépticos, uno global que pone en duda todo nuestro conocimiento sobre la teoría de conjuntos y uno local que sostiene la posibilidad de errores puntuales en la teoría.

El escepticismo global respecto a nuestro conocimiento en teoría de conjuntos consiste en sostener que es posible que sistemáticamente estemos equivocados respecto a nuestras creencias sobre el universo conjuntista, nuestras creencias sobre sus objetos y sobre las relaciones que existen entre ellos. Esta clase de escepticismo sostiene que el acceso que tenemos al universo conjuntista no es fiable; es decir, que es posible que, incluso sabiendo todo lo que sabemos de los métodos y resultados de la teoría de conjuntos, en realidad los conjuntos no existan o bien que sean entidades muy diferentes a lo que creemos y sus relaciones sean muy diferentes a las expresadas en nuestros resultados. El reto escéptico global consiste en desafiarnos a mostrar que nuestro supuesto conocimiento está basado en un método que nos garantice que nuestras creencias sobre los conjuntos corresponden con el comportamiento del universo conjuntista.

Puede verse que esta clase de reto escéptico es en apariencia muy similar al reto escéptico cartesiano respecto a nuestro conocimiento sobre el mundo externo. El escéptico sobre el mundo externo puede usar diferentes estrategias para cuestionarnos sobre nuestra certeza en la existencia del mundo externo o, en caso de aceptar la existencia del mundo externo, sobre si nuestras creencias lo describen de forma adecuada o están sistemáticamente equivocadas. Responder al reto escéptico sobre el mundo exterior parece ser imposible, pues:

---

para su verdad. En (Maddy, 1988a), ella ofrece una justificación de todos los axiomas de ZFC que recupera el trabajo en los teóricos de conjuntos. Algo muy similar se hace en el caso de la lógica. Véase (Maddy, 2007), en especial el capítulo 3, y (Maddy, 2014).

1. No tenemos garantía de que no exista una fuente diferente del mundo externo que genere nuestras supuestas percepciones de objetos externos a nosotros (un demonio maligno o algo similar, es perfectamente posible que seamos cerebros en una cubeta).

2. Incluso si los objetos del mundo externo existen, no contamos con una garantía de que nuestras creencias corresponden con lo que son por sí mismos estos objetos. Es posible que los objetos sean completamente distintos a como creemos que son.

Esto se debe a que aceptamos que los objetos del mundo externo (en caso de existir) son completamente independientes de nosotros, su existencia no depende de nosotros, la forma en la cuál nosotros tenemos acceso a ellos tampoco es relevante para su existencia ni para su naturaleza y para conocerlos requerimos tener acceso a ellos.[68] Afortunadamente para el filósofo segundo, su situación no es completamente paralela en el caso de la teoría de conjuntos; pues de acuerdo a él, si bien los conjuntos son independientes de nosotros, las razones que tenemos para aceptar su existencia depende por completo de los métodos y los objetivos de la teoría de conjuntos que aceptamos y no requerimos tener un acceso directo a ellos para tener conocimiento sobre ellos. Así, el filósofo segundo puede dar cuenta del reto escéptico global, no dando una respuesta, sino rechazando la pregunta inicial sobre cuál es nuestra garantía de que nuestros métodos nos dan certeza sobre la existencia de los conjuntos o (en caso de existir) certeza de que nuestras creencias corresponden con su naturaleza.

> Creo que la respuesta de la realista delgada a esta pregunta es que no podría suceder algo así, lo que sugeriría que sostener que la teoría de conjuntos podrían disfrutar de todas sus virtudes y los conjuntos sigan sin existir o sean radicalmente diferentes de lo que parecen ser, es una falta de comprensión de la naturaleza de la teoría de conjuntos y su objeto de estudio. Recordemos el credo de la realista delgada: los conjuntos son las cosas de las que la teoría de conjuntos habla. Aunque la teoría de conjuntos no nos dicen ahora el tamaño del continuo, y, por lo que sabemos, podría nunca darnos la solución de esta cuestión, todavía, lo que se necesita para montar un desafío escéptico [global] es mucho más radical que esto: tendría que ser posible algo similar a un demonio maligno que haga que prácticamente todo lo que la teoría de

[68]No todos están de acuerdo con esta conclusión respecto a la imposibilidad de responder el reto del escéptico sobre el mundo externo. Por ejemplo, un idealista trascendental, como Kant, sostendrá que los objetos del mundo externo en tanto fenómenos si dependen en alguna medida de nosotros y por ello tenemos la garantía de que, por lo menos en parte, nuestro conocimiento sobre ellos es confiable. Sin embargo, esta propuesta no explica como son dichos objetos como cosas en sí o siquiera si existen como tales. Para una discusión detallada sobre el escepticismo del mundo externo véase (Stroud, 1984).

> conjuntos nos dice acerca de los conjuntos esté mal. No que sus supuestos teoremas son falaces o sus análisis de los beneficios matemáticas de conjuntos se distorsionan, tampoco que toda esta manera de hacer las cosas no es fiable. Pero, para la realista delgada, los conjuntos son sencillamente el tipo de cosas que podemos estudiar de estas maneras. Desde este punto de vista, no hay espacio para una brecha epistemológica radical entre los conjuntos y los métodos teórico-conjuntistas; el desafío escéptico aquí, a diferencia del caso del mundo externo, está simplemente mal presentado. (Maddy, 2011, p. 75)[69]

Hasta aquí parece que el segundo filósofo a vencido al escéptico global sobre los conjuntos. El realista robusto (el filósofo primero) no se encuentra en la misma posición, pues él no puede recurrir a la misma clase de evidencia que nuestro realista delgado. Como ya habíamos remarcado, el realista robusto llega a conclusiones similares a las del realista delgado en cuanto a la naturaleza de los conjuntos; son objetos no causales, no espacio-temporales e independientes de nosotros, sin embargo, llega a estas conclusiones de una forma muy diferente a la del realista delgado. Él postula la existencia del universo conjuntista sin apelar a la práctica matemática y por ello debe dar una explicación más substancial que justifique la existencia de los conjuntos y de cuenta de nuestro acceso a estos objetos. Dado que la relación entre la teoría de conjuntos y el universo conjuntista no está bien establecida, el realista robusto se encuentra en una situación muy similar a la que nos encontramos cuando queremos probar la existencia del mundo externo. Para el realista robusto, el universo conjuntista y nuestro acceso a él no está ligado en principio a nuestras prácticas matemáticas (a nuestros métodos y objetivos). En este sentido, el sí es susceptible al reto escéptico global para el caso de los conjuntos.

El reto escéptico local es menos fuerte y se centra en cuestionar la fabilidad de algunos resultados particulares de la teoría de conjuntos, pero acepta que dichos objetos existen y que los métodos usados por los teóricos

[69] "I think the Thin Realist's answer to this question is that it couldn't, that to suggest that set theory could enjoy all these virtues and sets still not exist or be radically different than they seem is to misunderstand the nature of set theory and its subject matter. Recall the Thin Realist's credo: sets are the things set theory tells us about. Though set theory doesn't now tell us the size of the continuum, and, for all we know, may never get around to settling that question, still, what's needed to mount a skeptical challenge is far more radical than this: there has to be the Evil Demon-like possibility that virtually everything set theory tells us about sets is wrong. Not that its purported theorems are fallacious or its analyses of the mathematical benefits of sets are distorted, rather that this whole way of doing things is unreliable. But for the Thin Realist, sets simply are the sort of things we can find out about in these ways. From this point of view, there is no room for a radical epistemological gap between sets and set-theoretic methods; the skeptical challenge here, unlike the case of the external world, is simply ill-formed." La traducción es mía.

de conjuntos son adecuados y corresponden con los objetivos de la teorías. Ante esta clase de escéptico el filósofo segundo es más humilde y afirma que es posible que existan errores en los resultados, pero confía en que la comunidad de teóricos de conjuntos pueda resolverlos, tal como sucede en otras ciencias.

Puede verse ahora la ventaja que tiene el filósofo segundo sobre el realista robusto respecto a la epistemología de la teoría de conjuntos y, en particular, para el análisis de la solución del problema del continuo (que es el objetivo de este trabajo). La propuesta del filósofo segundo explica cómo es que la evidencia que ofrecen los teóricos de conjuntos está bien justificada y es pertinente para los problemas que trata de resolver. En particular, la evidencia a favor de la aceptación de nuevos axiomas (sus criterios de aceptación) tendrá un soporte sólido que el realista robusto no puede ofrecer. Pues, por más que los resultados a los que se apelen puedan ser muy similares, el realista robusto siempre tiene que dar evidencia extra que justifique (o por lo menos haga plausible) que los nuevos axiomas describen de manera adecuada el universo conjuntista. El problema más grave para el realista robusto es que en algunos casos (aunque no en todos) parece imposible dar esta clase de evidencia. Por ejemplo, en el caso de la HC no parece (no por lo menos hasta ahora) que pueda existir evidencia contundente de que el cardinal del continuo deba ser algún cardinal en específico (no del tipo de evidencia de la que requiere el realista robusto), entre otras razones porque no tenemos una idea perfectamente bien establecida que nos indique cuál es la naturaleza del conjunto de los números reales y cómo elegir entre diferentes conjuntos que compiten por ser considerados el conjunto de los números reales. El filósofo segundo no tiene esta clase de problemas.

4.4.2. Arrealismo y objetivismo.

Hasta ahora, y por fines prácticos, he dicho que el análisis de las prácticas matemáticas hecho por el filósofo segundo nos lleva a sostener la propuesta del realismo delgado. Pero, como ya adelanté, esto no es así. Si bien el realismo delgado es una ontología de la teoría de conjuntos que obtiene sus resultados usando la metodología de la filosofía segunda, ésta no es la única postura que puede surgir a partir de esta metodología. Existe otra propuesta filosófica que se apoya en la metodología de la filosofía segunda, acepta todos los resultados obtenidos a partir del análisis de las prácticas del teórico de conjuntos (para las preguntas del primer tipo, cuáles son los métodos de la teoría, sus objetivos, etcétera), pero que ofrece una evaluación filosófica diferente de estos resultados (responde de manera diferente a las preguntas del segundo tipo, sobre la evaluación filosófica de los métodos de la teoría, sus objetivos, etcétera). Esta posición es conocida como arrealismo.

A continuación, ofreceré una breve caracterización del arrealismo, una comparación entre el realismo delgado y el arrealismo y, finalmente, una serie de reflexiones sobre las implicaciones de la existencia de estas dos propuestas compatibles con la metodología de la filosofía segunda pero incompatibles entre ellas.

4.4.2.1. Arrealismo y la segunda filosofía.

El arrealismo es una postura en ontología de las matemáticas que sostiene que no existen los objetos matemáticos y que las oraciones de la matemática no son verdaderas. La evidencia que usa para afirmar esto es que, de acuerdo con su estudio filosófico de las prácticas matemáticas, no es necesario aceptar la existencia de los objetos matemáticos, además de que se puede dar cuenta de todos los fenómenos relacionados con la práctica matemática sin tomar como verdaderas a las oraciones de esta disciplina (por sus resultados es muy parecido al ficcionalismo o al nominalismo).

El arrealista es un filósofo segundo, usa la misma metodología científico-filosófica que el realista delgado (el método de la filosofía segunda). Al igual que éste, el arrealista comienza su investigación estudiando las prácticas del teórico de conjuntos, establece cuáles son los métodos que usa la teoría de conjuntos, cuáles son sus objetivos, a qué tipo de pruebas recurre, cuáles son sus criterios de corrección de las mismas, etc. Hasta este punto, los resultados del estudio del arrealista no difieren en absoluto de los resultados obtenidos por el realista delgado. Ambos, aceptan la misma reconstrucción de las posturas de Cantor, Dedekind, Zermelo y los defensores de los axiomas de determinación. Ambos comprenden y conocen igualmente bien las pruebas de independencia dentro de la teoría de conjuntos y aceptan que la búsqueda de una solución para el problema del continuo es legítima. La discrepancia en sus resultados no corresponde a esta parte de la investigación, el desacuerdo surge cuando el arrealista analiza la corrección de estos métodos y su sustento (cuándo responde al segundo tipo de preguntas que se plantea el filósofo segundo). Partiendo del mismo tipo de análisis que el realista delgado, el arrealista no encuentra ninguna razón fuerte para comprometerse con la verdad de oraciones de la teoría de conjuntos ni con la existencia de los conjuntos, aunque acepta que la teorías de conjuntos, sus objetivos, sus metodologías y sus prácticas son el arbitro último de su investigación.

> Como filósofa segunda no vería ninguna razón para pensar que existen conjuntos o que las afirmaciones de la teoría de conjuntos son verdaderas ? los métodos bien desarrollados de la teoría de conjuntos para confirmar la existencia y la verdad, no están en juego aquí ? aunque ella considera a la teoría

> de conjuntos, y a la matemática pura con ella, como una empresa de éxito espectacular, diferente de cualquier otra. Llamemos a esta posición arrealista. (Maddy, 2011, p. 89)[70]

Es importante remarcar que el arrealista no cuestiona los resultados obtenidos por la teoría de conjuntos, incluso aquellos que sostienen la existencia de ciertos conjuntos particulares. Por ejemplo, si el arrealista analiza una prueba que recurre al principio del mínimo ordinal (o algún resultado que muestre que debe existir un conjunto con tales y cuales características determinadas) para poder mostrar un resultado más general, su conclusión no será que el resultado es incorrecto (acepta que la filosofía no debe pretender corregir a la práctica matemática). Más bien, el arrealista acepta el resultado, pero sostiene que esto no lo compromete a aceptar la existencia de los conjuntos, pues cree que el puede dar cuenta de (esto es, explicar) estos resultados sin apelar a la existencia objetiva e independiente los conjuntos. El arrealista puede pensar, que después de todo, lo que él quiere es explicar la práctica matemática usando una metodológica científica, pero esto no implica, en principio, que esta explicación deba incluir una ontología realista.

El arrealista al analizar la misma evidencia que el realista delgado, sólo encuentra evidencia suficiente para establecer que la teoría de conjuntos está guiada por una serie de objetivos particulares (los mismos que encontró el realista delgado) como aumentar nuestro poder para generar representaciones matemáticas, generar una marco conceptual común entre diferentes disciplinas matemáticas, e incluso resolver el problema del continuo. Él cree que todo lo que hace la teoría de conjuntos es cumplir con dichos objetivos y de acuerdo con su visión, para cumplirlos no es necesario que los conjuntos existan, ni que las oraciones de la teoría sean verdaderas. Pues, sin importar si las oraciones de la teoría de conjuntos son verdaderas o falsas y si los conjuntos existen o no, la teoría de conjuntos ha logrado cumplir con sus objetivos. Por ejemplo, ser una teoría marco para la representación de fenómenos matemáticos (nunca se requiere como condición para aplicar sus metodologías que existan los conjuntos o que los axiomas sean verdaderos, los procesos pueden realizarse sin estos supuestos).[71] Como puede verse, la disputa entre el realista delgado y el arrealista no es a nivel metodológico (ambos son

[70] "Such a Second Philosopher would see no reason to think that sets exist or that set-theoretic claims are true ? her well-developed methods of confirming existence and truth aren't even in play here ? but she does regard set theory, and pure mathematics with it, as a spectacularly successful enterprise, unlike any other. Let's call this position Arealism." La traducción es mía.

[71] Esto puede resultar un poco confuso. Pero consideremos por un momento el siguiente escenario posible. Imaginemos que de alguna forma (sin importar cuál), el día de mañana se prueba, sin lugar a duda, que los conjuntos no existen y que todas las oraciones de la teoría de conjuntos son falsas. Esto podría llevarnos a abandonar a la teoría de conjuntos.

filósofos segundos), tiene que ver más bien con la forma en que cada uno interpreta la evidencia de la que disponen (la evidencia que es exactamente la misma en ambos casos).

De acuerdo a los objetivos que hemos planteado, una de las funciones de la matemática pura es proveer a la ciencia de una dotación de estructuras abstractas suficiente para que el científico empírico pueda elegir la más conveniente para modelar o representar los fenómenos propios de su disciplina. Un requisito es que la estructura elegida se asemeje lo suficiente a la estructura del fenómeno a modelar, pero no se pide que la semejanza sea perfecta, es suficiente que sea aproximada.

> El matemático aplicado trabaja para entender las idealizaciones, simplificaciones y aproximaciones relacionadas con estos despliegues de sus estructuras abstractas; él se esfuerza lo mejor que puede para mostrar cómo y por qué un determinado modelo se asemeja al mundo lo suficiente para alcanzar los objetivos concretos a la mano. En todo esto, el científico nunca afirma la existencia del modelo abstracto; él simplemente sostiene que el mundo es como el modelo en algunos aspectos, en otros no. Para ello, el modelo sólo necesita estar bien descrito, al igual que uno podría iluminar una situación social dada comparándola con una situación imaginaria o mitológica, resaltando las similitudes y diferencias (Maddy, 2011, p. 90)[72]

Incluso, se puede dar cuenta de la aplicabilidad de la matemáticas en las ciencias sin suponer su verdad.

Es posible que a partir de las conclusiones ofrecidas por el arrealista, nosotros lo identifiquemos como un nominalista (o alguna otra posición similar como el ficcionalismo), pues ciertamente sus conclusiones son muy similares. Ambos creen que no tienen razones para creen en la existencia de los

---

Sin embargo, reflexionando un momento, podemos darnos cuenta que todos los resultados obtenidos hasta ahora, todas las aplicaciones exitosas de los métodos de la teoría de conjuntos que han sido llevados a cabo en la historia, no serían abandonados sin más. Incluso si los conjuntos no existen, es todavía posible usar sus métodos, pues han mostrado ser útiles. Creo que este caso sería muy similar al caso de la geometría euclidiana y su abandono como la ciencia que describe correctamente la estructura del espacio. Incluso ahora, que sabemos que sus oraciones son literalmente falsas (si se interpretan como hablando del espacio físico), sus métodos siguen siendo utilizados para describir el espacio físico, pues resultan útiles.

[72] "The applied mathematician labors to understand the idealizations, simplifications and approximations involved in these deployments of his abstract structures; he strives as best he can to show how and why a given model resembles the world closely enough for the particular purposes at hand. In all this, the scientist never asserts the existence of the abstract model; he simply holds that the world is like the model is some respects, not in others. For this, the model need only be well-described, just as one might illuminate a given social situation by comparing it to a imaginary or mythological one, marking the similarities and dissimilarities." La traducción es mía.

objetos matemáticos, ni en la verdad de las oraciones de la matemática, y rechazan ambas. Sin embargo, existe una diferencia fundamental (la misma que existía entre el realista robusto y el realista delgado), el arrealista y el nominalista llegan a estas conclusiones por caminos muy distintos, sus metodologías filosóficas son diferentes. El arrealista usa la metodología de la filosofía segunda; el nominalista, la metodología de la filosofía primera. El nominalista comienza su investigación tomando como punto de partida posturas filosóficas independientes de la práctica matemática, cree que el estatus de los objetos abstractos es problemático y ponen en duda la existencia del conocimiento matemático.

Tanto las investigaciones del realista delgado como las del arrealista están llevadas a cabo de manera cuidadosa, toman la misma evidencia y, sin embargo, llegan a conclusiones radicalmente opuestas respecto de la existencia de los conjuntos y el valor de verdad de las oraciones de la teoría que habla sobre ellos.

4.4.2.2. Objetivismo y la ontología de las matemáticas.

La discrepancia entre el realismo delgado y el arrealismo respecto a la ontología de las matemáticas puede poner en cuestión la corrección de estas investigaciones de la práctica matemática realizada desde la filosofía segunda y, es por ello, que es necesario hacer una comparación cuidados entre ambas posturas y sus resultados. Por ejemplo, después relatar los detalles de las investigaciones del realista delgado y del arrealista y las explicaciones de cómo es que cada uno de ellos llega a sus propias conclusiones, algunos podrían estar tentados a sostener que una de las dos historias es más adecuada de acuerdo a la metodología de la filosofía segunda.

Algunos podrían creer que la investigación del realista delgado es más fiel a la metodología de la filosofía segunda que la investigación del arrealista, en tanto no da preferencia a las ciencias empíricas sobre la matemática. Pues, el realista delgado considera que todas estas disciplinas gozan de un estatus similar, todas ellas han mostrado ser útiles, ser fructíferas para sus propios fines y están igualmente bien establecidas. Así que, si las evidencias dadas por los científicos empíricos para aceptar la existencia de los objetos de sus teorías son consideradas como evidencias suficiente, entonces las evidencias matemáticas también son suficientes para aceptar la existencia de objetos matemáticos.

Algunos otros podrían pensar que el arrealista es un mejor filósofo segundo que el realista delgado, en tanto el arrealista busca dar cuenta de los fenómenos involucrados en la práctica matemática sin suponer que para hacerlo tiene que tomar como literalmente verdaderas sus oraciones y aceptar la existencias de los objetos que la teoría pretende describir. De hecho, después de realizar su investigación, está convencido que no se requiere ninguna de las dos cosas.

Afortunadamente, un análisis cuidado muestra que esto no es así, ninguna de las dos posturas es privilegiada, ambas posturas son igualmente adecuadas de acuerdo a la metodología que comparten. Lo que es más, como resultado de la comparación cuidadosa de ambas posturas, podremos concluir que sus discrepancias sólo reafirman los resultados ya obtenidos en los estudios del filósofo segundo.

> Después de todo, la realista delgada sostiene que los conjuntos existen y que la teoría de conjuntos es un cuerpo teórico de verdades, y la arrealista niega ambas cosas. Pero a pesar de sus desacuerdos sobre la verdad y la existencia, la realista delgada y la arrealista son indistinguibles en el nivel del método. [. . .] Este acuerdo metodológico refleja un vínculo metafísico más profundo: los hechos objetivos que subyacen en estas dos posiciones son exactamente los mismos [. . .]. Para la realista delgada, los conjuntos son las cosas que marcan estos contornos; los métodos de teoría de conjuntos están diseñados para rastrearlos. Para la arrealista, estos mismos contornos son lo que motivan y guían su elaboración de la teoría de conjuntos; [. . .]. Para ambas posiciones, el desarrollo de la teoría de conjuntos responde a una realidad objetiva - y de hecho a la misma realidad objetiva. (Maddy, 2011, p. 116)[73]

Es claro que el objeto de estudio del filósofo segundo de la teoría de conjuntos son las prácticas matemáticas concretas de la teoría de conjuntos. Las prácticas matemáticas incluyen una gran cantidad de fenómenos de diferente naturaleza; por ejemplo, la elaboración de pruebas, las justificación de los axiomas, la elección la lógica de fondo, la aplicación de los resultados de la teoría en otras disciplinas, la satisfacción de ciertos objetivos, etcétera. (esto son los contornos de los que habla Maddy, son los hechos profundos de las matemáticas). El realista delgado cree que la existencia de estos fenómenos es suficiente para aceptar la existencia de los objetos matemáticos, pues los objetos matemáticos son elementos constitutivos de dichos fenómenos. El arrealista se concentra en el estudio de los contornos, de los fenómenos

[73]After all, the Thin Realist holds that sets exist and set theory is a body of truths, and the Arealist denies both. But despite their disagreements over truth and existence, the Thin Realist and the Arealist are indistinguishable at the level of method. [...] This methodological agreement reflects a deeper metaphysical bond: the objective facts that underlie these two positions are exactly the same [...]. For the Thin Realist, sets are the things that mark these contours; set-theoretic methods are designed to track them. For the Arealist, these same contours are what motivate and guide her elaboration of the theory of sets; [...]. For both positions, the development of set theory responds to an objective reality ? and indeed to the very same objective reality. La traducción es mía.

matemáticos, y no creen que su existencia requiera la aceptación de una ontología que contenga objetos matemáticos.

La discrepancia entre ambas posturas es sólo respecto a la interpretación de la evidencia, al diferente peso que se da a un elemento de la evidencia u otro, pero no hay un hecho objetivo que nos permita establecer desde la metodología de la filosofía segunda que una posición es más adecuada o mejor que la otra. No existe ninguna evidencia disponible que permita establecer que las prácticas matemáticas de la teoría de conjuntos nos comprometa con la existencia de los conjuntos, ni con la verdad de la oraciones. Pero, tampoco existe ninguna evidencia disponible que indique que no es así. En este sentido, hay una subdeterminación de la evidencia; pues, tanto el realismo delgado como el arrealismo son posturas filosóficas que dan cuenta de forma igualmente adecuada de toda la evidencia de la que puede disponer el filósofo segundo (obtenida de su análisis de la práctica de la teoría de conjuntos). Ambas posturas dan cuenta de los fenómenos matemáticos estudiados, los hechos objetivos de la matemática profunda.

> Si el realismo delgado y el arrealismo son descripciones igualmente precisas de la naturaleza de las matemáticas puras desde el punto de vista de la filosofía segunda, y sólo son dos formas alternativas de expresar la misma descripción de los hechos objetivos que subyacen en la práctica matemática, entonces tenemos aquí una forma de objetividad en las matemáticas que no depende de la existencia de los objetos matemáticos o la verdad de los enunciados matemáticos, o incluso en la no-existencia de los objetos matemáticos o el rechazo de las demandas matemáticas. Esta forma de la objetividad es, como se podría decir, post-metafísica. A pesar de que no se trata de verdades sobre una ontología matemática, esto implica una serie de hechos como el tipo de cosas que más o menos se expresa diciendo que el concepto de grupo abre un montón de matemáticas profundas. (Maddy, 2011, p. 116)[74]

Esto muestra que los estudios filosóficos segundos se concentran en los hechos objetivos de las prácticas matemáticas, más que en las propuestas ontológicas concretas que surjan de estos hechos. Esto no quiere decir que las propuestas ontológicas segundas no sean relevantes, pero sí que pasan a un segundo plano. Con esto en mente, pasemos al último punto de nuestro análisis de la teoría conjuntos desde la filosofía segunda de Maddy; los criterios

[74] "If Thin Realism and Arealism are equally accurate, second-philosophical descriptions of the nature of pure mathematics, just alternative ways of expressing the very same account of the objective facts that underlie mathematical practice, then we have here a form of objectivity in mathematics that doesn't depend on the existence of mathematical objects or the truth of mathematical statements, or even on the non-existence of mathematical objects or the rejection of mathematical claims. This form of objectivity is, as you might say, post-metaphysical. Though it doesn't involve truths about a mathematical ontology, it does involve an array of facts like the sort of thing we roughly express by saying that the concept of group opens up a lot of deep mathematics." La traducción es mía.

de justificación de los axiomas de la teoría de conjuntos, sin preocuparnos ya sobre si los conjuntos existen o no, ni sobre si las oraciones de la teoría son verdaderas o falsas.

4.4.3. Criterios para la aceptación de nuevos axiomas. Criterios internos vs. Criterios externos.

En esta sección, expondré los criterios de aceptación para los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos que, de acuerdo a los estudios del filósofo segundo, pueden extraerse de la práctica matemática. No me concentraré en exponer los detalles de su aplicación en casos concretos de nuevos axiomas; eso lo haré en el siguiente capítulo.

Siguiendo el método de la filosofía segunda, Maddy sostiene que de acuerdo a nuestro análisis de las prácticas de la teoría de conjuntos podemos observar que el problema de la justificación de nuestras pruebas y de nuestros teoremas radica en determinar qué tipo de evidencia es considerada como adecuada por los teóricos de conjuntos.

> El problema central de la filosofía de las ciencias naturales es cuándo y por qué los tipos de hechos científicos citados como evidencia son realmente evidencia. Lo mismo es cierto en el caso de las matemáticas. Históricamente, los filósofos han prestado considerable atención a la cuestión de cuándo y por qué diversas formas de inferencia lógica preservan verdad. La pregunta análoga de cuándo y por qué se justifica la asunción de diversos axiomas ha recibido menos atención, quizás porque continúan vivas versiones de la visión de la "auto-evidencia", y tal vez a causa de un complaciente si-entoncismo. Por las razones que sean, ha habido poca atención a la comprensión y clasificación de los tipos de hechos que citan los científicos matemáticos, y mucho menos a la cuestión filosófica de cuándo y por qué esos hechos constituyen evidencia. (Maddy, 1988a, p. 481)[75]

Como ya he dicho, Maddy se concentrará en el análisis de las prácticas del grupo CABAL y de los teóricos de conjuntos con prácticas similares. De su estudio, ella pretende extraer los criterios que determinen cuándo y por

[75] "The central problem in the philosophy of natural science is when and why the sorts of facts scientists cite as evidence really are evidence. The same is true in the case of mathematics. Historically, philosophers have given considerable attention to the question of when and why various forms of logical inference are truth-preserving. The companion question of when and why the assumption of various axioms is justified has received less attention, perhaps because versions of the "self-evidence" view live on, and perhaps because of a complacent if-thenism. For whatever reasons, there has been little attention to the understanding and classification of the sorts of facts mathematical scientists cite, let alone to the philosophical question of when and why those facts constitute evidence." La traducción es mía.

qué ciertos hechos (o resultados de la práctica matemática) cuentan como evidencia adecuada a favor de un determinado axioma.

Los criterios que ella obtiene de su análisis son muy parecidos a los propuestos por Gödel a lo largo de su obra, especialmente, en sus (1947) y (1964).[76] La diferencia crucial entre la propuesta de Gödel y la del filósofo segundo no está en los criterios propuestos, sino en la metodología usada para justificarlos. En el caso de Gödel, los criterios buscan mostrar que los nuevos axiomas describen de manera adecuada el universo conjuntista, pero no es claro cómo es que dichos criterios logran su objetivo. Desde el punto de vista del filósofo segundo, la justificación de los criterios es clara (pues los criterios emanan de la exitosa práctica de los teóricos de conjuntos).

En ambos casos, los criterios son clasificados en dos grandes grupos, criterios internos y criterios externos. Recordemos la propuesta de Gödel, él ofrece criterios para la aceptación de nuevos axiomas que complemente ZFC, unos internos que pretenden recuperar la noción preteórica de conjunto y la naturaleza acumulativa del universo conjuntista.

> En primer lugar, los axiomas de la teoría de conjuntos no constituyen en modo alguno un sistema cerrado en sí mismo, sino que, al contrario, el verdadero concepto de conjunto en el que están fundados sugiere su extensión mediante nuevos axiomas que afirman la existencia de aún más posteriores iteraciones de la operación "conjunto de". [...] Estos axiomas muestran con claridad no sólo que el sistema de la teoría de conjuntos tal y como hoy en día se usa es incompleto, sino que puede ser complementado sin arbitrariedad mediante nuevos axiomas que únicamente despliegan el contenido del concepto de conjuntos antes explicado. (Gödel, 1947, p. 362-363)

Este tipo de evidencia es considerada como interna debido a que se depende del concepto de conjunto y de la naturaleza del universo conjuntista (la jerarquía acumulativa de conjuntos). Gödel es consciente de que esto puede no ser suficiente para justificar todos los axiomas posibles; pues, puede ser que algunos axiomas que describan de manera correcta el universo conjuntista no sean una consecuencia directa del concepto de conjunto. Es por ello que propone una segunda clase de criterio, los criterios externos.

> Tenemos, sin embargo, y en segundo lugar, que, incluso prescindiendo de la necesidad intrínseca de algún nuevo axioma y hasta en el caso de que no hubiese una tal necesidad, es posible una decisión probable sobre su verdad

[76] Los criterios externos en ambos casos son los mismos. La diferencia en los criterios radica en los criterios internos. Las diferencias principales son: 1) Gödel apela a la intuición matemática como un criterio interno, mientras que el filósofo segundo no lo hace. 2) Los criterios internos propuestos por el segundo filósofo están más desarrollados, pues considera desarrollos en teoría de conjuntos que no existían en la época de Gödel.

> también de otro modo, a saber, estudiando su «éxito» inductivamente. Éxito significa aquí fecundidad en consecuencias, en especial en consecuencias «verificables», es decir, en consecuencias demostrables sin el nuevo axioma, pero cuyas pruebas resulten mucho más fáciles de descubrir y desarrollar con ayuda del nuevo axioma, que además hace posible resumir muchas pruebas diferentes en una sola. [...] Pueden existir axiomas tan abundantes en sus consecuencias verificables que proporcionen tanta luz a un amplio campo y que ofrezcan métodos tan poderosos para resolver problemas (e incluso, en la medida de lo posible, para resolverlo constructivamente) que, sin que importe que sean o no intrínsecamente necesarios, deberían ser aceptados en el mismo sentido en que lo es cualquier teoría física bien establecida. (Gödel, 1947, p. 364).

A continuación, presentaré con un poco más de detalle los dos tipos de criterios y clarificaremos la justificación de los mismos desde el punto de vista del segundo filósofo y del realista tipo Gödel.

4.4.3.1. Criterios internos, objetivos de la teoría de conjuntos y la jerarquía acumulativa de conjuntos.

Maddy, nos hace notar que, en general, cuando se habla de criterios internos para determinar cuándo y por qué un cierto hecho matemático es considerado evidencia a favor de un axioma, se dicen cosas como que el axioma es intuitivo o autoevidente, el axioma explicita el significado de la palabra "conjunto", el axioma emana del concepto mismo de conjunto o cosas similares. Sin embargo, desde el punto de vista de la filosofía segunda es necesario clarificar todas estas aseveraciones, pues su aceptación depende de que tan bien describan la práctica de los teóricos de conjuntos.

Podemos observar que los criterios internos propuestos se establecen sólo apelando a la naturaleza de los objetos de la teoría de conjuntos, de acuerdo a lo que los conjuntos son. De acuerdo a la metodología de la filosofía segunda, los conjuntos son justo esos objetos de que la teoría de conjuntos habla, a los cuales aplica sus métodos y con los cuales cumple sus objetivos. La filosofía segunda no está comprometida con ninguna concepción previa de lo que los conjuntos deben ser, ni sobre cuál es su naturaleza.

Como resultado de sus estudios, el filósofo segundo ha concluido que los conjuntos son los objetos que pertenecen a la jerarquía acumulativa de conjuntos, con los cuales se pueden realizar las operaciones descritas por la teoría y se busca cumplir con los objetivos de la teoría.

> En estos días, creo que la idea más común es la mencionado en último lugar - implícito en el concepto de conjunto - y que el concepto pretendido de conjunto es la concepción iterativa. Esta bien conocida imagen del universo de teoría de conjuntos fue introducido por Zermelo ([1930]), y posteriormente

> entró en el tejido de la teoría de conjuntos pedagogía y la práctica. (Maddy, 2011, p. 124)[77]

La jerarquía acumulativa de conjuntos es tomada como el universo conjuntista del que habla la teoría (incluso si no nos comprometemos con su existencia, tal como hace el arrealista). Así que estamos autorizados a considerar como evidencia interna a favor de un axioma, aquella que recupere el comportamiento y la naturaleza de este universo conjuntista. La jerarquía acumulativa de conjuntos presenta una visión muy particular de los conjuntos, los conjuntos son entidades que agrupan en un todo a los objetos que se encuentran en niveles inferiores de la jerarquía, algo muy similar a la idea de Gödel de "conjuntos de". Como podemos ver, se recuperan las ideas de Gödel sobre los criterios internos, pero por una vía muy diferente.

El filósofo segundo todavía puede apelar a un elemento extra en su justificación de los criterios internos y es que, como ya hemos visto, en teoría de conjuntos los objetivos que se persiguen son tan relevantes como los métodos que son usados. En nuestro recuento previo, establecimos que existían por lo menos 3 objetivos que se persiguen en la presentación actual de la teoría de conjuntos: 1) Servir como un marco general, una lingua franca, para la representación de diferentes objetos y teorías matemáticas (Cantor y Dedekind), 2) garantizar la consistencia del sistema y evitar las paradojas (Zermelo) y 3) resolver de una forma estructurada y conexa con otras disciplinas matemáticas problemas abiertos en la teoría de conjuntos, especialmente, el problema del continuo (teóricos de la determinación). Cada uno de estos objetivos, nos guía en la adopción de una clase particular de criterio interno para la elección de nuevos axiomas. Pero no sólo eso, algunos de los objetivos de la teoría de conjuntos también nos llevan a aceptar criterios externos, profundizaré en este punto en la siguiente sección.

El primer objetivo pide generar el marco matemático más general posible para la construcción de modelos o representaciones de objetos matemáticos de otras teorías y sus relaciones. Como ya he dicho, esto implica que debemos aceptar un principio de maximalidad, es decir, elegir la teoría que nos permita tener la mayor cantidad de modelos y objetos posibles. Debemos aceptar axiomas que nos proporcionen objetos que no es posible construir sin su ayuda, como por ejemplo, los axiomas de grandes cardinales.

Existen quienes creen (yo entre ellos) que este principio de maximalidad puede ser recuperado por lo menos parcialmente por principios de reflexión.

[77] "These days, I think that the most common idea is the last-mentioned ? implicit in the concept of set ? and that the concept of set intended is the iterative conception. This well-known picture of the set-theoretic universe was introduced by Zermelo ([1930]) and subsequently entered into the fabric of set-theoretic pedagogy and practice." La traducción es mía.

La idea central detrás de los principios de reflexión es recuperar modelos o interpretaciones posibles que no son demasiado grandes o complejas para ser conjuntos (desde el punto de vista de la teoría que busca ser enriquecida). Por ejemplo, si existe un clase-modelo de la teoría de conjuntos, su estructura es tal que se asemeja a la de un cardinal fuertemente inaccesible. Sin embargo, desde ZFC no se puede probar que existen esta clase de cardinales, de acuerdo al principio de maximalidad sería deseable incluir esta clase de objetos en la teoría. A la idea detrás de este razonamiento le corresponde un principio de reflexión que sostiene que la existencia de esa clase-modelo es suficiente para afirmar que existe un modelo del tamaño de un conjunto con una estructura muy similar (la estructura de un cardinal fuertemente inaccesible), lo que implica la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles. Veremos a detalle estos principios de reflexión en el siguiente capítulo.

Del segundo objetivo de la teoría de conjuntos en su presentación actual, podemos extraer un requisito (tal vez muy básico); los nuevos axiomas deben preservar la consistencia del sistema y no deben general paradojas. Pues, de acuerdo a nuestro análisis de trabajo de Zermelo, uno de sus objetivos al realizar la axiomatización de la teoría de conjuntos fue dar una fundamentación de la teoría que excluyera esta clase de problemas.[78]

Finalmente, el tercer objetivo es resolver problemas abiertos en la teoría de conjuntos, especialmente aquellos relacionados con la naturaleza del continuo matemático. El requisito es que la solución a estos problemas provenga de los métodos de la teoría de conjuntos, establezca conexiones fuertes con la otras áreas de la matemática y sea compatible con la naturaleza de los conjuntos emanada de la teoría. Puede verse que este objetivo introduce una justificación para la utilización de criterios externos, pero no sólo eso, también nos ayuda a introducir nuevos criterios internos (aunque en un segundo momento).

Para cumplir este objetivo, es necesario realizar mucho trabajo matemático, tal como lo hacen los teóricos de la determinación (y muchos otros) en la actualidad. Esto teóricos establecen resultados que cumplen los criterios externos (que se verá a continuación), pero al hacerlo también determinan de manera más precisa la naturaleza de los conjuntos (pues gracias a sus resultados, conocemos más sobre los conjuntos, sobre su comportamiento e

[78]El requisito de consistencia depende no sólo de nuestro deseo de evitar paradojas u otra clase de problemas en la fundamentación de la teoría de conjuntos, sino también de nuestra elección de la lógica clásica como la lógica de fondo de la teoría de conjuntos. Pues, si por ejemplo hubiésemos elegido una lógica tolerante a la contradicción (que cancele el principio de explosión), podríamos aceptar axioma contradictorios siempre y cuando no generen problemas de paradojas o similares (o bien, puedan ser resueltos usando recursos lógicos).

incluso podemos establecer nuevos objetivos para la teoría de conjuntos). Por ejemplo, una vez que se han dado buena razones para aceptar un axioma de determinación particular, podemos asumir que los conjuntos son objetos que se comportan de tal o cual forma (como dice el nuevo axioma que han de comportarse). En particular, si un conjunto de números reales está determinado cumple con propiedades como la del subconjunto perfecto que tiene implicaciones en la naturaleza de estos conjuntos, las nuevas características de estos conjuntos son deseables desde la concepción de conjunto que hemos adoptado (los detalles se darán en el siguiente capítulo). Es posible entonces, que tomemos como un criterio interno la aceptación de los axiomas de determinación más fuertes posibles que no entren en contradicción con el resto de la teoría.

El mecanismo detrás de estos nuevos criterios internos descansa en el hecho de que con el avance logrado por los resultados obtenidos en la teoría, se establecen nuevos objetivos para la teoría de conjuntos. Por ejemplo, generar los modelos internos más complejos posibles o lograr que la mayor cantidad de oraciones de la teoría de conjuntos cumplan con que su valor de verdad sea invariante bajo *forcing*, es decir, que las oraciones no cambien su valor de verdad en modelos construidos usando la técnica de *forcing*. Por supuesto, estos nuevos objetivos deben estar justificados en la práctica matemática y es posible que en la actualidad muchos de ellos aún no lo estén. Pero aquellos objetivos que sí estén justificados, pueden generar nuevos criterios internos para la elección de nuevos axiomas. Estos nuevos criterios son llamados por Maddy "reglas de oro" (*rules of thumb*) y dependen de los resultados obtenidos en la práctica matemática (en muchos casos, dependen de los resultados de aplicaciones exitosas de criterios externos).[79]

Esta última clase de criterios internos son una extensión de los propuestos por Gödel, pues para su justificación se requiere de un desarrollo en teoría de conjuntos que no existían en su época.

[79] Por esta razón Maddy, no clasifica a las reglas de oro ni como criterios internos ni como criterios externos. Sin embargo, creo que al estar relacionados con nuevos objetivos de la teoría de conjuntos y con la naturaleza del universo conjuntista que surge a partir de ellos, podemos llamarlos criterios internos. Dicho de otra forma, estos criterios surgen a partir del descubrimiento de nuevos hechos de la matemática profunda y tratan de recuperar estos hechos con nuevos axiomas (recuperan la naturaleza de los conjuntos), y, por ello, son criterios internos.

4.4.3.2. Criterios externos, su relación con el realismo y con la práctica matemática.

Los criterios externos pueden ser justificados apelando a los objetivos de la teoría de conjuntos. Pero, no es la única clase de evidencia a su favor que se puede dar. Quizá, la evidencia más sólida sobre la adecuación de esta clase de criterios sea histórica. El uso de criterios externos para la aceptación de nuevos axiomas ha sido recurrente durante el desarrollo de la teoría de conjuntos. Un ejemplo notable es la historia de la aceptación del axioma de elección.

El axioma de elección (AC) fue propuesto originalmente por Zermelo en (1904). El AC desempeñaba un papel importante en la axiomatización propuesta por Zermelo, pues era necesario para demostrar el Teorema del Buen Orden, que sostiene que todo conjunto es bien ordenable.[80] Sin embargo, no fue aceptado por una gran cantidad de teóricos de conjuntos, debido, en buena medida, a que postulaba la existencia de funciones sin mostrar explícitamente su comportamiento. Ante este escenario, Zermelo intento justificarlo usando diferentes mecanismos, incluso llegó a sostener que era un principio lógico que no podía ser puesto en duda.

> El "axioma de elección" no está expresamente formulado aquí, ya que tiene un carácter diferente al de los otros axiomas y no puede servir en la delimitación de los dominios. Sin embargo, toda nuestra investigación lo asume como un principio lógico general; en consecuencia, se da por sentado en lo que sigue que todo conjunto puede ser bien ordenado.(Zermelo, 1930, p. 1220)[81]

Sin embargo, esta clase última clase de justificación no fue considerada como suficiente para aceptar el axioma de elección. Su aceptación provino de su utilidad, incluso necesidad, para demostrar resultados matemáticos aceptados por la mayoría de los matemáticos. Su justificación fue externa.

> [L]a primera justificación extrínseca para un axioma de teoría de conjuntos fue la defensa de Zermelo para el axioma de elección, en función de su eficacia para resolver problemas de la teoría de conjuntos y del análisis. Zermelo mismo enumera siete de estos problemas, pero el avance posterior ha descubierto muchos, muchos más. Para los versados en teoría de conjuntos es suficiente contemplar la teoría de cardenales transfinitos sin el axioma de elección -

---

[80] El axioma de elección no sólo es necesario para demostrar el teorema del buen orden, sino que es equivalente a él.

[81] "The 'axiom of choice' is not expressly formulated here, since it has a different character from that the other axioms and cannot serve in the delimitation for the domains. However, our whole investigation assumes it as a general logical principle; consequently it is taken for granted in what follows that every set is capable of being well-ordered." La traducción es mía.

> para empezar, no tienen por qué ser linealmente ordenados - para observar el tipo de dificultades que surgen en un contexto sin axioma de elección. El axioma de elección es ahora de muchas formas fundamental en el análisis, la topología, el álgebra, y otras ramas de la matemática. (Maddy, 2011, p. 127)[82]

Los criterios externos no son ajenos a la práctica matemática, están estrechamente ligados a ella. El filósofo segundo puede interpretar estos resultados como un ejemplo de hechos de la matemática profunda, aquella que expresa las características particulares de las prácticas matemáticas. Así que, no necesita más para aceptar el uso de esta clase de criterios.

El realista robusto (Gödel) no se encuentra en la misma posición. Él tiene que dar cuenta de cómo es que los criterios externos pueden ayudarlo en su búsqueda de la mejor descripción posible del universo conjuntista. El problema de nuevo es de acceso epistémico. El realista robusto tiene que explicar cómo es que tiene acceso a los objetos del universo conjuntista y tiene que ofrecer una justificación de sus axiomas apelando a dicho acceso, se enfrenta al reto del escepticismo. Esto no sólo afecta a los realistas robustos que buscan generar conocimiento certero sobre el universo conjuntista. Incluso Gödel que admite la posibilidad del error en la teoría de conjuntos, pues considera que la teoría de conjuntos es una disciplina parecida a la física, pero con un objeto de estudio diferente, tiene que ofrecer una explicación sobre el tipo de acceso que tiene a ese universo matemático. El desafío al que se enfrentan los realistas robustos es global, pues no se ponen en duda resultados particulares de su teoría, sino la teoría misma y su justificación.

Gödel opta por apelar a la intuición matemática como la vía de acceso requerida. Curiosamente, la intuición matemática es un criterio interno y es el mecanismo que le permite establecer contacto (de algún tipo) con los conjuntos. Han existido diferentes interpretaciones sobre qué entendía Gödel por intuición matemática, por ejemplo, Maddy creía que era alguna clase de mecanismo cognitivo parecido a la percepción, véase (Maddy, 1980). No hay un consenso sobre cual es la mejor interpretación de la intuición matemática propuesta por Gödel, pero, al parecer la interpretación más apegada al pensamiento de Gödel, es que la intuición es fenomenológica (en el sentido de

[82] "[T]he first extrinsic justification for a set-theoretic axiom was Zermelo's case for the Axiom of Choice, based on its effectiveness for solving problems in set theory and analysis. Zermelo himself lists seven such problems, but subsequent progress has uncovered many, many more. Those versed in set theory need only contemplate the theory of transfinite cardinals without Choice ? to begin with, they needn't be linearly ordered?for a taste of the kinds of difficulties that arise in a Choice-less context. Choice in its many forms is now fundamental in analysis, topology, algebra, and other branches of the subject." La traducción es mía.

Husserl). Por ejemplo, van Atten y Keneddy ofrecen el siguiente análisis de una fragmento de la obra de Gödel.

> La comparación de intuición (abstracta) y la percepción (sensible) en este pasaje muestra que para Gödel utiliza intuición en un sentido técnico, y como tal es tan decisiva como los intuicionistas pretendía que los fuese. Él no está hablando de la intuición como (meramente) un hecho psicológico aquí. Aún así, Gödel permite errores, incluso en intuiciones, pero eso se debe a que la intuición no es un asunto de todo o nada. Viene en grados. Y en última instancia, la existencia sigue estando vinculada a la intuición (ideal), por el principio básico del idealismo trascendental. (van Atten y Keneddy, 2009, p. 333)[83]

Independientemente de cuál sea la mejor interpretación del concepto de intuición matemática, podemos ver que la función que pretende satisfacer es la de dar acceso al universo conjuntista, pues sin dicho acceso el realista robusto no podría responder el reto escéptico. El caso de Gödel, resulta menos problemático que el de otros pensadores, pues él no busca que su teoría sea completamente certera, acepta que puede ser perfectible. Sin embargo, el acceso que da la intuición matemática resulta insuficiente para la justificación de axiomas muy complejos, pues en el mejor de los casos nos daría acceso a los aspectos más básicos del universo conjuntista.

Para finalizar la sección, trataré de clarificar la noción de criterio externo. Los criterios externos presentan razones a favor de un axioma que apelan a su utilidad y fecundidad dentro de la teoría y fuera de ella, la utilidad y la fecundidad de acuerdo a los objetivos que tiene la teoría. La idea central es que puede tomar como evidencia a favor de un nuevo axioma los posibles resultados generados por él.

> Los criterios externos toman la forma: queremos a esta teoría matemática particular para hacer tal y tal cosa; utilizando el método de tal y tal es una forma eficaz de lograr tal y tal; por tanto, es razonable para nosotros usar el método tal y tal. (Maddy, 2000, p. 416-417)[84]

[83] "The comparison of (abstract) intuition to (sense) perception in this passage shows that Gödel means intuition in a technical sense, and as such it is just as decisive as the intuitionists intend it to be. He is not talking about intuition as (merely) a psychological fact here. Still, Gödel allows for mistakes even in intuitions, but that is because intuition is not an all-or-nothing affair. It comes in degrees. And ultimately, existence remains tied to (ideal) intuition, by the basic principle of transcendental idealism." La traducción es mía.

[84] "These take the form: we want this particular mathematical theory to do such-and-such; using method so-and-so is an effective way of achieving such-and-such; therefore, it's reasonable for us to use method so-and-so." La traducción es mía.

Un problema con esta caracterización es que incluye una gran cantidad de fenómenos, que puede cambiar fácilmente con el desarrollo de la disciplina. A continuación, presentaremos una clasificación ofrecida por Maddy que incluye 7 tipos generales de criterios externos[85]:

1. El axioma tiene consecuencias verificables (tales que en su verificación puede ser hecha apelando a otros axiomas de la teoría).
2. Ofrece nuevos y poderosos métodos de prueba para resolver problemas abiertos.
3. Simplifica y sistematiza a la teoría.
4. Implica conjeturas previas.
5. Implica resultados naturales (naturales de acuerdo a las prácticas de la teoría de conjuntos).
6. Establece conexiones interteóricas fuertes.
7. Provee nuevas luces para viejos problemas.

Veremos en estos criterios en la práctica en el siguiente capítulo.

4.4.3.3. ¿Cómo debemos aplicar estos criterios?

En el capítulo 2 ofrecí una definición de proposición absolutamente indecidible respecto a un sistema. En la definición, no sólo se requería contar con los criterios para la aceptación de nuevos axiomas, sino con un conjunto de normas para aplicar dichos criterios. La función de las normas era indicar si la satisfacción de algún criterio (o algún conjunto de criterios) son necesarios o suficientes para la aceptación de un nuevo axioma.

En nuestro estudio concreto sobre la aceptación de nuevos axiomas para ZFC, contamos con criterios internos y criterios externos, pero es necesario establecer las normas que nos guiarán en su aplicación.

Entre los filósofos de las matemáticas, es común la idea de que los criterios internos son más relevantes que los criterios externos . Puesto que los criterios internos recuperan la naturaleza de los objetos de la teoría de conjuntos, mientras que los criterios externos se basan en la utilidad y fecundidad de los axiomas. Se cree que los criterios externos ofrecen más certeza que los externos. Incluso, hay quienes creen que los criterios internos son los únicos que nos proveen de evidencia adecuada para la aceptación de nuevos

[85]Véase, (Maddy, 1990, p. 145 y ss.)

axiomas, pues los criterios externos no ofrecen realmente ninguna evidencia certera para la aceptación de nuevos axiomas (por ejemplo, Feferman). Como veremos esto no es así, no por lo menos desde el punto de vista de la filosofía segunda.

Es muy probable que aquellos filósofos que prefieren a los criterios internos sobre los criterios externos consideren que el objetivo de la teoría de conjuntos es proveernos de una teoría certera que explique el comportamiento del universo conjuntista, que sean realistas robustos o algo similar. Pero de acuerdo a la metodología de la filosofía segunda, la decisión debe descansar en un análisis de las prácticas matemáticas.

> Cualesquiera que sean los atractivos de esta especie de gran teoría fundamental, creo que es evidente que los teóricos establecidos hoy en día no están en el negocio de tratar de proporcionar una teoría como ésta. [...]. El objetivo de la axiomatización de la teoría de conjuntos era eliminar estas incertidumbres ontológicas, para proporcionar un marco ontológico único para la matemática clásica. Obviamente la teoría de conjuntos no proporciona una fundamentación en ciertas verdades, ni proporciona, dados los teoremas de incompleción de Gödel, lo MacLane llama "una manta de seguridad" contra el riesgo de incoherencia, pero a pesar de estos deficiencias epistémicas, todavía juega un papel unificador profundo, coloca a todas las estructuras matemáticas juntas en un solo escenario y codifica los supuestos fundamentales de las pruebas matemáticas. No hay duda del valor matemático de una fundación en este sentido. (Maddy, 2011, p. 133)[86]

Pero si el objetivo de lograr una certeza absoluta no corresponde con la práctica del teórico conjuntista, entonces el rechazo de los criterios externos por considerarlos menos certeros no se sostiene. La preferencia por unos criterios sobre otros no puede basarse en la búsqueda de certeza, este es un requisito que corresponde con estudios de la filosofía primera. Para saber cómo se deben aplican estos criterios debemos observar cómo de hecho se ha hecho a lo largo de la historia de la teoría de conjuntos.

Cuando se observa el uso de estos criterios en la práctica del teórico de conjuntos, se puede observar que la preferencia es completamente inversa a la

[86]'Whatever the attractions of this strong sort of foundational theory, I think it's clear that set theorists today are not in the business of trying to provide one. [...]. The goal of the axiomatization of set theory was to remove these ontological uncertainties, to provide a single ontological framework for classical mathematics. Obviously set theory doesn't provide a foundation in certain truths, nor does it provide, given Gödel's incompleteness theorems, what MacLane calls ?a security blanket' (MacLane [1986], p. 406) against the risk of inconsistency, but despite these epistemic shortcomings, it still plays a profound unifying role, bringing all mathematical structures together in a single arena and codifying the fundamental assumptions of mathematical proof. There's no doubting the mathematical value of a foundation in this sense." La traducción es mía.

que esperan los filósofos tradicionales. Pues si bien la satisfacción de algunos criterios internos son considerados como necesaria para la adopción de nuevos axiomas, en la mayoría de los casos la decisión de aceptar un nuevo axioma tiene que ver con su utilidad para cumplir con los objetivos de la teoría de conjuntos.

> Lo que es sorprendente es que todas estas formas de proceder perfectamente razonables, de hecho, están fundamentadas en su promesa de llevar a cabo más de nuestros objetivos matemáticos, al descubrimiento de los conceptos y teorías más fructíferos, a la producción de más matemáticas profundas. En última instancia, nuestro objetivo es obtener teorías consistentes, maneras eficaces de organizar y extender nuestro pensamiento matemático, heurísticas útiles para generar nuevas hipótesis productivas, y así sucesivamente; las consideraciones internas son valiosas, pero sólo en la medida en que se relacionan con estas recompensas externas. Esto sugiere que la importancia de las consideraciones internas es meramente instrumental, que la fuerza fundamental de justificación es toda externa. Esto arroja serias dudas sobre la opinión común de que las justificaciones internas son la gran aristocracia y justificaciones externas son los primos pobres. La verdad puede ser la inversa! (Maddy, 2011, p. 136)[87]

Con esto, no se quiere decir que sólo importan los criterios externos. Más bien que, en la mayoría de los casos, la decisión final se toma con base en los resultados positivos para el cumplimiento de los objetivos de la teoría que se generan a partir de la adopción de nuevo axioma.

Algunos de los criterios internos establecen condiciones necesarias para la aceptación de nuevos axiomas. El caso más claro, es el requisito que el nuevo axioma sea consistente con el resto de la teoría. De acuerdo, al criterio interno de preservación de consistencia no pueden ser aceptados nuevos axiomas que sean lógicamente incompatibles con los axiomas ya establecidos. Sin embargo, podemos observar que este criterio interno más que dar buenas razones para aceptar un nuevo axioma, acota el conjunto de axiomas que en principio son aceptables. Para ver esto con claridad consideremos al caso de proposiciones que son indecidibles desde ZFC, por ejemplo, $V = L$. Dado que, suponiendo

[87] "What's striking is that all these perfectly reasonable ways of proceeding are in fact grounded in their promise of leading to the realization of more of our mathematical goals, to the discovery of more fruitful concepts and theories, to the production of more deep mathematics. Ultimately we aim for consistent theories, for effective ways of organizing and extending our mathematical thinking, for useful heuristics for generating productive new hypotheses, and so on; intrinsic considerations are valuable, but only insofar as they correlate with these extrinsic payoffs. This suggests that the importance of intrinsic considerations is merely instrumental, that the fundamental justificatory force is all extrinsic. This casts serious doubt on the common opinion that intrinsic justifications are the grand aristocracy and extrinsic justifications the poor cousins. The truth may well be the reverse!" La traducción es mía.

la consistencia de ZFC, los sistemas $ZFC + V = L$ y $ZFC + V \neq L$ son ambos consistentes, el criterio no es de ayuda para decidir sobre la adopción de un axioma u otro.

Otros criterios internos como el principio de maximalidad, si ofrecen una justificación suficiente para la adopción de nuevos axiomas, pero de una clase muy particular, a saber, axiomas que nos garanticen el incremento en los poderes de representación de la teoría. Es decir, principios como el de maximalidad sólo nos permiten justificar la adopción de axiomas que nos permitan tener más objetos en nuestro dominio de conjuntos y con esto la posibilidad de generar más modelos que sirvan para representar más teorías matemáticas. Es por esto, que son tremendamente útiles para defender axiomas como los axiomas de cardinales grandes. Sin embargo, no son suficientes para justificar la aceptación de axiomas que no incluyan más estructura para la teoría de conjuntos; por ejemplo, axiomas que pretendan describir el comportamiento de algunos conjuntos particulares como el conjuntos de los números reales.

En cuanto a la última clase de criterios internos, las reglas de oro, es claro que dependen de los resultados obtenidos por los practicantes de la disciplina. Así que, ni siquiera podemos preguntarnos si por sí mismo son suficientes para la justificación de nuevos axiomas, pues ellos nunca trabajan solos. Así que podemos afirma que:

> Lo que importa, lo que realmente importa, es la fecundidad y la promesa de las matemáticas mismas. (Maddy, 2011, p. 137).[88]

Pero si lo dicho hasta ahora es correcto, si en la mayoría de los casos de elección de nuevos axiomas los criterios externos son los decisivos, ¿cómo es que debemos aplicarlos? Esta pregunta es difícil de contestar, pues no existe una única forma de aplicarlos. Ninguno de ellos establece por sí mismo condiciones necesarias o suficientes para aceptar nuevos axiomas. Tampoco es necesario que un nuevo axioma satisfaga todos los criterios externos (a algún subconjunto particular) para ser aceptado, ni la satisfacción de todos (o algún subconjunto particular) es suficiente para aceptarlo. La situación es la siguiente, cada vez que se presenta un nuevo candidato para ser considerado un axioma de la teoría de conjuntos, se hace un análisis de su utilidad y fecundidad como parte de la teoría, se establece cuáles son los criterios externos que satisface y la decisión sobre su aceptación se hace con base en un análisis global de los resultados, muchas veces es necesario comparar el axioma propuesto con otros axiomas que ofrecen resultados similares. Al final, se eligen los axiomas que resultan ser más adecuados para lograr los

[88] "What does matter, all that really matters, is the fruitfulness and promise of the mathematics itself." La traducción es mía.

objetivos de la teoría, pero es perfectamente posible que la elección no sea la más afortunada o que no se logre un consenso sobre cuál de los axiomas que compiten sea el mejor. También es posible que en algunos casos los criterios externos no sean útiles para decidir entre diferentes axiomas que compiten para complementar la teoría de conjuntos, sobre todo en casos en los que los nuevos axiomas describen un sector tan específico de la teoría de conjuntos que no satisfacen ningún criterio externo o satisfacen muy pocos y de forma no muy clara. En el siguiente capítulo, argumentaré que la mayoría de los axiomas que deciden la HC son de esta clase; es decir, que su aceptación no puede establecerse a partir de criterios externos.

Una última aclaración que debo hacer antes de concluir esta sección es que, desde el punto de vista de la filosofía segunda, los criterios de aceptación de axiomas no sólo son aplicables a los nuevos axiomas, sino a todos los axiomas de la teoría de conjuntos. Es decir, en tanto no se asume que los axiomas tradicionales de ZFC cuentan con una justificación previa a su función en la práctica de los teóricos de conjuntos, ellos también requieren de una justificación.

Normalmente, se piensa que los axiomas de ZFC tienen un estatus epistemológico privilegiado. En algún sentido, se cree que estos axiomas son tan claros y evidentes que no requieren de una justificación para ser aceptados. Sin embargo, esto es un claro error. Casi todos ellos han sido puestos en duda por algún matemático respetable. Muchos matemáticos, como el mismo Gödel, han sostenido que los axiomas de ZFC son consecuencias claras de nuestro concepto preteórico de conjunto o de la concepción iterativa de conjunto (algo similar a las justificación internas). En general, las justificaciones externas han sido dejadas de lado; por ejemplo, sus consecuencias, sus conexiones con otras áreas de las matemáticas o de la ciencia. Lo más extraño es que las justificaciones más comunes en otras áreas del conocimiento son justo externas y no internas. Un ejemplo claro de lo erróneo de esta postura es la historia que se desarrollo entorno al axioma de elección. Los detalles de estas justificaciones serán presentados en el siguiente capítulo.

4.4.4. La jerarquía acumulativa como modelo pretendido de ZFC y el pluralismo del filósofo segundo.

Hay un punto que no he tratado con el debido cuidado y es la adopción hecha por el filósofo segundo de la jerarquía acumulativa de conjuntos como universo conjuntista. Maddy afirma que de su análisis de la práctica matemática se puede concluir que el universo conjuntista es la jerarquía acumulativa de conjuntos. En sus palabras:

> Una vez más, por 'V' me refiero al universo de los conjuntos que la teoría de conjuntos está investigando, el que aprendimos, en el marco de dicha investigación, toma la forma de niveles V_α, uno para cada ordinal α. Aquí estoy presuponiendo que el filosófico segundo de la teoría de conjuntos se mueve por diferentes consideraciones matemáticas, de manera visible el deseo de la teoría de conjuntos para servir como fundamento [como *lingua franca*], para buscar una teoría unificada de este único universo V. (Maddy, 2011, p. 63) [89]

De acuerdo al metodología de la filosofía segunda, la elección de la jerarquía acumulativa de conjuntos debe estar sustentada en la práctica de los teóricos de conjuntos. Sin embargo, la evidencia que ofrece Maddy para este punto es un poco pobre. Con esto no quiero decir que la elección no este justificada, simplemente falta un poco de desarrollo. En mi opinión, la elección es la correcta si se analiza para práctica de la tradición matemática a la que Maddy pertenece, la cual acepta los axiomas de ZFC e incluso algunas extensiones (en particular, acepta el axioma de elección, el axioma de buena fundación, el axioma de reemplazo y el axioma de los cardinales fuertemente inaccesibles).

Como vimos en el capítulo 2, la jerarquía acumulativa de conjuntos es un universo conjuntista generado (o descrito) por una serie de operaciones como la potencia y la unión. Este universo conjuntista esta estratificado, se puede dividir por niveles indexados por los números ordinales. Ahora bien, no parece a simple vista que haya nada en la práctica de los teóricos de conjuntos que nos garantice que la jerarquía acumulativa de conjuntos deba ser considerada el universo conjuntista que se pretende recuperar en la teoría de conjuntos, pues parece que puede haber algunos candidatos igual de buenos para ser el universo de los conjuntos.

Partamos de los objetivos que guiaron a Cantor y Dedekind en la introducción de los conjuntos como objetos matemáticos. Como ya hemos dicho en más de una ocasión, ellos buscaban generar representaciones que les permitiesen generalizar algunos resultados y presentarlos de una forma clara y precisa. Incluso si de esto extraemos la idea defendida por Maddy, y en mi opinión correcta, de que la teoría de conjuntos busca ser un marco unificador, una *lingua franca*, para relacionar diferentes teorías matemáticas, esto no es suficiente para elegir a la jerarquía acumulativa de conjuntos como el

[89] "Again, by ?V' I mean the universe of sets that set theory is investigating, which we learn, in the course of that investigation, takes the form of stages V_α, one for each ordinal α. Here I'm presupposing that the second-philosophical set theorist is moved by various mathematical considerations, conspicuously the desire for set theory to serve as a foundation , to seek a unified theory of this single universe V." La traducción es mía.

universo conjuntista.[90] La razón es más o menos simple, existen teorías alternativas como la teoría de los conjuntos no bien fundados que rechazan el axioma de buena fundación, pero que son suficientes para cumplir todos los objetivos de la teoría de conjuntos (en ellas se pueden reconstruir todas las matemáticas, se evitan las antinomias y se puede continuar la investigación para resolver problemas abiertos). La teoría de conjuntos no bien fundada parece poder cumplir con todos los objetivos planteados por Cantor y Dedekind, sin embargo, implica la existencia de objetos que no pertenecen a la jerarquía acumulativa de conjuntos.[91] Lo cual puede servir como evidencia en contra de la elección de Maddy. Maddy tendría que ofrecer razones a favor de la elección de ZFC sobre otras opciones, pero esto no lo ha hecho.

Veamos otra objeción. Por un momento, concedamos a Maddy que hay buena razones para elegir ZFC sobre otras teorías que cumplen igual de bien los objetivos de la teoría de conjuntos. Considerando ZFC como una teoría expresada en el lenguaje de la lógica de primer orden tendremos el problema de la existencia de múltiples modelos de ZFC que son incompatibles (este problema ya lo analizamos en el capítulo anterior). Esto implica que no podemos estar seguros de que la jerarquía acumulativa sea el universo de la teoría de conjuntos. Ante este problema podemos recurrir a la misma estrategia que dimos en el capítulo anterior, apelar a los teoremas de cuasi-categoricidad de ZFC2. Usando esto teoremas podemos garantizar que todo modelo de la teoría de conjuntos es isomorfo a un segmento inicial de la jerarquía acumulativa de conjuntos (indexado por un cardinal fuertemente inaccesible). Con este resultado podemos tener la certeza de que la jerarquía acumulativa de conjuntos sí es el universo de los conjuntos (los detalles fueron presentados en el capítulo 3). Sin embargo, esto tiene un costo, a saber, la aceptación de una teoría de conjuntos en particular que incluye axiomas como buena fundación, elección, reemplazo (en segundo orden), etcétera. Este costo no es prohibitivo, pero no todos los teóricos de conjuntos están dispuestos a pagarlo. Muchos teóricos de conjuntos rechazan uno varios de estos axiomas y las prácticas matemáticas en la que éstos están justificados. No hay una única tradición o comunidad matemática de teóricos de conjuntos que comparta los mismos métodos y esté de acuerdo en todos estos resultado.

[90]Asimismo, creo que incluso si apelamos a justificación más filosóficas como la idea preteórica de "conjuntos de" usada por Gödel, ésta nos aporte por sí misma elementos suficientes para justificar la adopción de la jerarquía acumulativa de conjuntos como el modelo pretendido de la teoría de conjuntos (el universo conjuntista). Esto lo discutí con detalle en el capítulo anterior.

[91]La teoría de conjuntos no bien fundados incluso cumple con algunos de los objetivos de Zermelo, pues ofrece una salvaguarda ante las paradojas similar a ZFC. Incluso se puede mostrar que las teorías son equiconsistentes, son mutuamente interpretables.

El grupo CABAL (en su mayoría) acepta este tipo de propuestas y el análisis ofrecido por Maddy es correcto en el caso de la práctica de este grupo (o por lo menos de la mayoría de sus miembros). Sin embargo, es claro que no existe un consenso general al respecto entre todos los teóricos de conjuntos. El análisis de Maddy tiene menos alcance de lo que ella esperaría. Maddy es parcialmente consciente de esto.

> También vale la pena repetir que los juicios de profundidad matemática no son subjetivos: Yo podría ser aficionado de un cierto tipo de teoremas matemáticos, pero mi preferencia idiosincrásica no guía a algunos significados conceptuales o axiomáticos hacia la meta de las matemáticas profundas o fructíferas o eficaces; para el caso, toda la comunidad matemática podría ser ciega a las virtudes de un método determinado o estar enamorada de una búsqueda meramente de moda sin cambiar los hechos subyacentes de lo qué es y lo qué no es matemáticamente importante. Esto es lo que ancla nuestros diferentes objetivos matemáticos locales. [...] La clave aquí es que la fecundidad matemática no se define como "lo que nos permite cumplir con nuestros objetivos", con independencia de cuáles podrían ser; más bien, nuestros objetivos matemáticos sólo son propios en la medida en satisfacerlos fomenta nuestra comprensión de las tensiones subyacentes de fecundidad matemática. En otras palabras, las metas son responsables ante los hechos de profundidad matemática, y no al revés. Nuestros intereses influirán en qué áreas de la matemática encontramos más atractivas o irresistibles, así como nuestro interés influencia que las partes de las ciencias naturales que están más ansiosos por llevar a cabo, pero ninguna cantidad de parcialidad o negligencia de nosotros puede hacer una línea de matemáticas fructífera si no lo es, o inútil si lo es. (Maddy, 2011, p. 81-82)[92]

Coincido con la evaluación de Maddy. Creo que en la mayoría de los casos, si bien nuestras inclinaciones particulares pueden intervenir en el desarrollo de las investigaciones en nuestras áreas de investigación, tarde o temprano

[92] "It also bears repeating that judgments of mathematical depth are not subjective: I might be fond of a certain sort of mathematical theorem, but my idiosyncratic preference doesn't make some conceptual or axiomatic means toward that goal into deep or fruitful or effective mathematics; for that matter, the entire mathematical community could be blind to the virtues of a certain method or enamored of a merely fashionable pursuit without changing the underlying facts of which is and which isn't mathematically important. This is what anchors our various local mathematical goals. [...] The key here is that mathematical fruitfulness isn't defined as ?that which allows us to meet our goals', irrespective of what these might be; rather, our mathematical goals are only proper insofar as satisfying them furthers our grasp of the underlying strains of mathematical fruitfulness. In other words, the goals are answerable to the facts of mathematical depth, not the other way 'round. Our interests will influence which areas of mathematics we find most attractive or compelling, just as our interests influence which parts of natural science we're most eager to pursue, but no amount of partiality or neglect from us can make a line of mathematics fruitful if it isn't, or fruitless if it is.". La traducción es mía.

serán irrelevantes para nuestra disciplina. Incluso si toda la comunidad a la que pertenecemos se inclina por objetivos que en cierto sentido son ilegítimos, tarde o temprano tendrá que corregir el rumbo. Sin embargo, creo que esto no implica que exista una sola forma de encontrar desarrollar una investigación, puede haber más de una colección de “hechos de la matemática profunda” incompatibles entre sí y tales que todos ellos recuperen nuestros objetivos iniciales.

Como la misma Maddy nos hizo notar, las matemáticas son actualmente una disciplina pura. Los estándares de corrección no tienen que ver con su aplicabilidad en las ciencias empíricas. Cada rama de las matemáticas establece sus propios criterios de corrección para sus desarrollos. Provee de estructuras abstractas que pueden ser o no utilizadas por los científicos de otras áreas (incluidos los matemáticos). Concedo que hay casos en los que se abandonan metodología o proyectos de investigación en matemáticas por diferentes razones, pero no creo que en el escenario que la misma Maddy nos presenta exista una única profundidad matemática a la cual responder. En el mejor de los casos tenemos una serie de tradiciones matemáticas que siguen una serie de principios común (tal vez muy vagos) que pueden ofrecer conexiones entre diferentes disciplinas, que a su vez sirvan como criterios de corrección. En este sentido, cada una de ellas tendría sus propios hechos de profundidad matemáticas a los cuales responder. Me parece perfectamente posible que existan tradiciones (internamente bien justificadas) que respondan a principios completamente opuestos (por ejemplo, los matemáticos clásicos y los matemáticos inconsistentes). Creo que todas las tradiciones ? incluso con criterios, objetivos y metodologías completamente dispares e incompatibles ? deben ser tomadas con la misma seriedad por parte del filósofo segundo.

Pero, incluso si el punto anterior no es aceptado y hay razones para preferir algunas tradiciones sobre otras, Maddy tampoco logra su objetivo de establecer a la jerarquía acumulativa de conjuntos como el universo de los conjuntos. La razón ya fue mencionada, existe más de una teoría que parece cumplir con todos los requisitos de fecundidad, profundidad, etc. impuestos por Maddy. Con esto, quiero decir que los requisitos para defender los teoremas de cuasi-categoricidad son tan específicos que hay una gran cantidad de teorías que los rechazan y sin embargo parecen lograr todos los objetivos esperados. Esto abre de nuevo la puerta al reto escéptico global.

> Observe también que nuestra conclusión sobre el escepticismo radical se refuerza. Cualquier justificación extrínseca particular puede no alcanzará su objetivo, por razones que van desde un simple error en qué se sigue de qué, hasta un profundo malentendido sobre los verdaderos valores matemáticos en juego. Podemos no estar seguros sobre si un postulado la teoría de conjuntos

dada dará sus frutos o no, y por lo tanto, no estar seguros acerca de si es o no existe, pero si lo hace, ya no hay lugar a dudas; podemos tener dudas de si estamos llegando a la teoría de conjuntos más profunda y fructífera, y por lo tanto, podemos tener dudas de si nuestro candidato axioma es cierto o no, pero si estamos teniendo éxito, no hay más lugar para dudar de que estamos aprendiendo acerca de conjuntos. Esto es lo que vence a una preocupación de estilo demonio maligno: el demonio podría de alguna manera inducir en mí todas las experiencias que tendría si hubiera un mundo externo sin que exista realmente un mundo así, pero él no me puede presentar un postulado la teoría de conjuntos que hace un trabajo máximamente eficiente de rastreo de fecundidad matemática y que éste no exista, porque el postulado sólo es el tipo de cosa que hace este tipo de trabajo.

Así que hay una realidad objetiva subyacente al realismo delgado bien documentada, lo que yo he estado llamando libremente los hechos de profundidad matemática. La naturaleza fundamental de conjuntos (y tal vez de todos los objetos matemáticos) es servir como un medio para aprovechar tan bien; esto es simplemente lo que son. Y ya que los métodos de teoría de conjuntos están ellos mismos sintonizados en la detección de estos mismos contornos, son perfectamente adecuados para hablarnos acerca de los conjuntos; que se encuentran más allá del alcance del escepticismo, incluso del más radical. Esto, en mi opinión, es la núcleo central del realismo delgado. (Maddy, 2011, p. 83)[93]

Esta cita nos ayuda a clarificar la crítica a Maddy. En mi opinión, Maddy está en lo correcto respecto a la naturaleza de los fenómenos matemáticos y los criterios de corrección que están dados por los hechos matemáticos profundos. Sin embargo, ella misma hace notar que estos hechos matemáticos

[93] "Notice also that our conclusion about radical skepticism is reinforced. Any particular extrinsic justification may fail to meet its mark, for reasons ranging from a straightforward error in what follows from what to a deep misconception about the true mathematical values in play. We can be uncertain whether or not a given set-theoretic posit will pay off, and therefore uncertain about whether or not it exists, but if it does pay off, there's no longer any room for doubt; we can be uncertain that we're getting at the deepest and most fruitful theory of sets, and therefore uncertain about whether or not our axiom candidate is true, but if we are succeeding, there's no further room to doubt that we're learning about sets. This is what defeats an Evil Demon-style concern: the Demon might somehow induce in me all the experiences I'd have if there were an external world without there actually being such a world, but he can't present a set-theoretic posit that does a maximally-efficient job of tracking mathematical fruitfulness and yet doesn't exist?because the posit just is the sort of thing that does this sort of job.

So there is a well-documented objective reality underlying Thin Realism, what I've been loosely calling the facts of mathematical depth. The fundamental nature of sets (and perhaps all mathematical objects) is to serve as means for tapping into that well; this is simply what they are. And since set-theoretic methods are themselves tuned to detecting these same contours, they're perfectly suited to telling us about sets; they lie beyond the reach of even the most radical skepticism. This, I suggest, is the core insight of Thin Realism." La traducción es mía.

profundos depende de que tan exitosa y fructífera resulta ser una teoría. El punto central de la crítica es que estos criterios dependen de los objetivos de la tradición en la cual se esta trabajando, es decir, que tan exitosa y fructífera es una teoría es algo que depende de los objetivos que se quieran lograr. Esto no quiere decir que los objetivos sean suficientes, pero si marcan el camino a seguir. En el caso de la teoría de conjuntos, existe más de una propuesta que es exitosa y fructífera respecto de los objetivos iniciales y en este caso parece que no existen los hechos profundos que nos ayuden a elegir entre alguna de las alternativas (parece que aquí hay otro caso de subdeterminación). Si esto es así, entonces el escéptico global nos ha derrotado. Afortunadamente, hay una solución medianamente sencilla, a saber, enriquecer los objetivos y acotar la tradición que vamos a analizar. Esto puede parecer muy *ad hoc*, pero creo que es lo más honesto que podemos hacer. Creo que la única forma de vencer al escéptico en este punto es incluir objetivos como revelar la estructura de los conjuntos de un tipo particular (por ejemplo, los bien fundados, tal como hace la mayoría de los teóricos de conjuntos) e incluir las metodologías que se generan a partir de esta clase adiciones.

Esto no es un gran problema si estamos dispuestos a aceptar que los resultados de nuestro análisis sólo explica a una pequeña tradición entre muchas posibles. Éste es justo el camino que yo he elegido, sólo pretendo analizar las prácticas matemáticas de los miembros del grupo CABAL y teóricos de conjuntos afines.

Y si bien este es el camino que yo tomaré en la presente discusión, quiero insistir en que la postura de Maddy desemboca en un pluralismo en filosofía de las matemáticas. En tanto las prácticas matemáticas son las que establecen los criterios de corrección de la filosofía de las matemáticas y existen una gran cantidad de comunidades matemáticas con diferentes prácticas, es en principio posible que cada una de ella generé una filosofía de las matemáticas diferente. Si seguimos la metodología de la filosofía segunda, entonces el pluralismo en matemáticas desemboca en el pluralismo en filosofía de las matemáticas. Incluso si somos restrictivos respecto a lo que consideramos matemáticas y excluimos teorías poco convencionales como las matemáticas inconsistentes, tenemos que aceptar un pluralismo en matemáticas, en el sentido, que una misma disciplina puede ser estudiada por comunidades matemáticas con diferentes metodología, objetivos, etcétera. No soy el único filósofo que tiene está opinión, recientemente encontré que Michèle Friend ha apuntado el mismo problema en la filosofía de Maddy.

> Maddy debería ser mucho más pluralista de lo que admite, con base en que los matemáticos son pluralistas. Si ella está dispuesta a considerar más que los datos observa con algunos teóricos de conjuntos, entonces su contribución "nativa" a las matemáticas apoya el pluralismo en su tratamiento de

> la verdad por plausibilidad. Además, ella es libre de expresar, o incluso dar representación formal a, muchas aspiraciones, adoptadas por todo tipo de diferentes matemáticos. Ahora puede discutir, y dar definiciones formales de 'plausibilidad' tal como han sido aceptadas por, digamos, constructivistas o teóricos de las categorías, o las personas que estudian teorías de conjuntos no bien fundadas, y así sucesivamente. Es decir, ella o sus seguidores, debe asumir su desafío de ampliar el programa naturalista matemático a otras teorías de las matemáticas y otras actitudes filosóficas en poder de los matemáticos. (Friend, 2014,pp. 48-49)[94]

Si mi crítica es correcta, la filosofía de Maddy tiene un alcance muy pobre, sólo es un análisis correcto de las prácticas de una comunidad muy limitada. Su postura filosófica en general no puede ser aplicada a toda la teoría de conjuntos. Creo que ella no estaría muy convencida de esto y trataría de apelar a los hechos de la matemática profunda. Si bien creo que ella tiene derecho a hacer este movimiento, mi respuesta sería simple y llanamente que los hechos de la matemática profunda a los que ella puede apelar son sólo los hechos de la matemática profunda de la comunidad teórico conjuntista que ella está analizando. Lo que es más, creo que el término "hechos de la matemática profunda" sólo muestra un resabio de su antigua postura realista; pues de acuerdo a todo lo que ella sostiene, estos hechos no son más que los hechos de la práctica matemática que ella está estudiando. Creo que llamarlos "hechos" es un exceso, pero no me preocupa demasiado pues es sólo una cuestión terminológica.

Algunos podrían sostener en este punto que entonces hay buenas razones para cambiar el enfoque de la investigación y optar por otra postura filosófica, pero en mi opinión es posible continuar por la misma vía que Maddy; el único precio de esto es admitir que el estudio realizado tendrá un alcance muy limitado, pero este es un costo muy pequeño para alguien que acepta una versión medianamente radical del pluralismo (como es mi caso). Por decirlo de otra forma, soy consciente del problema, pero estoy dispuesto a morder la bala.

[94] "Maddy should be much more of a pluralist than she concedes, on the grounds that mathematicians are pluralist. If she is willing to consider more than the data she observes with some set theorists, then her ?native' contribution to mathematics supports pluralism in her trading of truth for plausibility. Moreover, she is free to express, or even give formal representation to, many aspirations, held by all sorts of different mathematicians. She can now discuss, and give formal definitions of ?plausibility' as it would be received by, say, constructivists, or category theorists, or people who study non-well-founded set theories, and so on. That is, she, or her followers, should take up her challenge to widen the mathematical naturalist programme to other theories of mathematics and other philosophical attitudes held by mathematicians." La traducción es mía.

4.5. Críticas a Feferman.

Después de la exposición del método de la filosofía segunda dado en este capítulo, cuento con todos los elementos necesarios para presentar las objeciones de Maddy a las críticas de Feferman al programa de Gödel y a la aceptación de cardinales grandes. La cual tal vez sea obvia para este momento.[95]

Recordemos el argumento de Feferman en contra del programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos:

1. Existen dos tipos de axiomas, a saber, los axiomas estructurales y los axiomas fundamentales. Los axiomas estructurales describen las estructuras con las que trabajan los matemáticos y ayudan a definir el marco conceptual en que se realiza este trabajo. Los axiomas fundacionales buscan clarificar la naturaleza de los objetos matemáticos.

2. La necesidad de los nuevos axiomas sólo está bien justificada si han de servir para la práctica cotidiana de los matemáticos, es decir, si sirven para decidir sobre proposiciones indecidibles desde los sistemas originales.

3. Los únicos nuevos axiomas que estarían bien justificados son los axiomas estructurales. Los axiomas fundacionales no son buenos candidatos para ser nuevos axiomas. Por lo menos su necesidad no está bien justificada.

4. Sólo es relevante la matemática aplicada. Los axiomas que necesitan (o pueden necesitar) las matemáticas son aquellos que son necesarios para decidir sobre proposiciones indecidibles en las teorías matemáticas (hechas por matemáticos) aplicables a la ciencia. Estos axiomas podrían ayudar a definir con mayor precisión algunas estructuras matemáticas como la estructura de las números naturales con sus operaciones usuales.

5. Los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos, como los axiomas de los cardinales grandes, son fundacionales. No sirven para la matemática aplicada.

[95] Las críticas de Maddy a Feferman están expuestas en diversos textos, en los cuales pone mayor o menor énfasis en algunos puntos. La reconstrucción que se ofrecerá toma como base lo dicho en (Feferman et al, 2000) y (Maddy, 2011), pero incluirá algunos elementos que están expuestos con mayor detalle en otros textos. La mayoría de los puntos relevantes ya han sido explicados a detalle en este capítulo.

6. La justificación de los nuevos axiomas debe basarse en criterios internos, los criterios externos son inadecuados.

7. La HC es una proposición indecidible que surge en un contexto irrelevante para la práctica de los matemáticos aplicados.

8. La única forma de justificar la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos es apelar al realismo matemático, pero el realismo matemático no es compatible con el uso de criterios externos para la aceptación de nuevos axiomas.

9. Los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos requieren apelar a criterios externos para su justificación.
   Por lo tanto, no está justificada la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos ni la aceptación de nuevos axiomas para ella; en particular, los axiomas de cardinales grandes no están bien justificados.

Las criticas de Maddy se concentran en explicitar, analizar y cuestionar los supuestos filosóficos detrás la postura de Feferman y mostrar que no se pueden sostener desde un análisis de la práctica matemática. Ella concede que si aceptamos que la necesidad de nuevos axiomas depende de las necesidades de la matemática aplicada a la ciencia, la postura de Feferman es la más adecuada.

> [E]stamos de acuerdo en que las matemáticas no necesita nuevos axiomas para sus usos prácticos en la ciencia actual, y que es probable que necesite muchos menos axiomas de lo que ya tiene para sus usos estrictamente formales de la ciencia actual. (Feferman et al., 2000, p. 413)[96]

El objetivo central de Maddy es mostrar que es un error guiar la búsqueda de nuevos axiomas y justificarlos sólo apelando a las necesidades de los matemáticos cuya investigación tiene una conexión directa con el resto de la ciencia.

Para lograr su objetivo, presenta criticas a los elementos a los que Feferman apela para defender su postura. Ella identifica, como elementos relevantes en la postura de Feferman, el argumento de la indispensabilidad de Quine, la distinción entre axiomas fundamentales y axiomas estructurales, la preferencia por lo criterios internos sobre los criterios externos, el platonismo como justificación para la búsqueda de nuevos axiomas y la relevancia dada a la Hipótesis del Continuo en la búsqueda de nuevos axiomas.

---

[96] "[W]e agree that mathematics doesn't need new axioms for its practical uses in current science, and that it probably needs far fewer axioms than it already has for its strictly formal uses in current science." La traducción es mía.

Sobre la distinción entre axiomas fundamentales y axiomas estructurales, Maddy afirma que no se sostiene en la práctica matemática. Pero, incluso si es posible establecer tal distinción, ella sostiene que los axiomas de la teoría de conjuntos no serían fundamentales, sino estructurales. Maddy insiste en que la teoría de conjuntos no tiene como objetivo ofrecer una fundamentación de las matemáticas en sentido tradicional, nunca ha buscado mostrar la naturaleza de los objetos matemáticos.

> De hecho, creo que la diferencia radica bastante cerca de la superficie. Mi propia opinión es que la teoría de conjuntos busca brindar un espacio unificado en el que se puedan encontrar sustitutos teórico-conjuntistas para todos los objetos de la matemática clásica y se puedan probar todos teoremas clásicos acerca de estos objetos. Este tipo de fundación brinda las diferentes estructuras de las matemáticas en un solo nivel, en el que pueden ser contrastados y comparados; que proporciona una respuesta uniforme a los interrogantes sobre de la existencia matemática y las pruebas matemáticas. Confío en que no hay desacuerdo en que estos servicios son matemáticamente valiosos. Pero, una fundamentación de la teoría de conjuntos en este sentido no hace dos de las cosas que los pensadores anteriores habían esperado: no revelan qué son realmente las entidades matemática, en algún sentido metafísico profundo; y, más al punto para nuestros propósitos actuales, que no proporcionan un fundamento epistémico; no nos muestran la forma de derivar las distintas verdades de las matemáticas mediante pasos transparentes, a partir de verdades absolutamente ciertas. Me parece a mí que el desarrollo de las matemáticas nos ha obligado a abandonar este objetivo, aunque sea de mala gana. (Feferman et al., 2000, p. 418)[97]

Así que en el mejor de los casos para Feferman, la distinción entre axiomas fundamentales y axiomas estructurales es inútil para objetar a los axiomas de la teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos es, en este sentido, una rama más de las matemáticas con objetivos, métodos y prácticas propias. Si se apela a la utilidad de los nuevos axiomas para la práctica matemática, entonces los nuevos axiomas para la teoría de conjuntos están en la misma

[97] "In fact, I think that difference lies fairly close to the surface. My own understanding is that set theory seeks to provide a unified arena in which set theoretic surrogates for all classical mathematical objects can be found and the classical theorems about these objects can be proved. This sort of foundation brings the various structures of mathematics onto one stage, where they can be contrasted and compared; it provides a uniform answer to questions of mathematical existence and proof. I trust there is no disagreement that these services are mathematically valuable. But set theoretic foundations in this sense do not do two of the things that earlier thinkers had hoped for: they do not reveal what mathematical entities really are, in some deep metaphysical sense; and, more to the point for our present purposes, they do not provide an epistemic foundation; they do not show us how to derive the various truths of mathematics by transparent steps from absolutely certain truths. This goal, it seems to me, is one that the development of mathematics has forced us, however reluctantly, to abandon." La traducción es mía.

posición que los nuevos axiomas para otras teorías matemáticas. La teoría de conjuntos pertenece por derecho propio a las disciplinas matemáticas bien establecidas.

Todavía Feferman puede recurrir a que la teoría de conjuntos, si bien es una disciplina matemática, no pertenece a las disciplinas de las matemáticas aplicadas. A este respecto, Maddy puede argumentar que como ella ha mostrado la distinción entre matemáticas aplicadas y matemáticas puras no es algo que dependa de la naturaleza de las disciplinas matemáticas. Recordemos que Maddy sostiene que una de la funciones de matemática contemporánea es proveer a la ciencia de una dotación suficiente de estructuras abstractas que sirvan para necesidades del científico empírico, pero que los criterios de corrección de las teorías matemáticas no incluyen su aplicabilidad. Así, en algún sentido todas las matemáticas son puras. Apelar a la aplicabilidad no es entonces una opción de la que pueda disponer Feferman. Incluso si quiere apelar al argumento de la indispensabilidad, Maddy puede mostrar que dicho argumento es incompatible con la práctica de los matemáticos.

Feferman todavía puede argumentar que la búsqueda de nuevos axiomas no está lo suficientemente bien motivada. Él podría conceder que la teoría de conjuntos no se encuentra en tal mala posición como él creía, pero que incluso así es necesario ofrecer una justificación de la búsqueda de nuevos axiomas, como en el caso de cualquier otra disciplina (el trabajo científico busca resolver problemas, no satisfacer caprichos de una persona o de un grupo). Pero de acuerdo a él, la única razón plausible para justificar su búsqueda es la aceptación del realismo en matemáticas, pero la aceptación del platonismo no puede ser una justificación adecuada para tal búsqueda, pues a lo más ofrece un incentivo filosófico, pero no matemático (no científico).

> Ahora quizás no encuentro al platonismo tan repugnante como lo hace Feferman. Pero estoy de acuerdo con él en la demanda operativa: que el platonismo no puede justificar la práctica de la teoría de conjuntos, en particular, la práctica de buscar nuevos axiomas para decidir la HC. Donde no estoy de acuerdo con Feferman es en el supuesto implícito de que el platonismo es la única justificación posible para esta práctica de la teoría de conjuntos, y por lo tanto, que cualquier fallo del platonismo deja sin justificación a la práctica. (Feferman et al., 2000, p. 415)[98]

Maddy insiste entonces que el análisis de las prácticas de la teoría de conjuntos muestra que existe una justificación para la búsqueda de nuevos

[98] "Now perhaps I don't find Platonism as repugnant as Feferman does, but I do agree with him on the operative claim: that Platonism cannot justify the practice of set theory, in particular, the practice of seeking new axioms to settle the CH. Where I disagree with Feferman is in the implicit assumption that Platonism is the only possible justification for this set theoretic practice, and thus, that any failure of Platonism leaves the practice unjustified." La traducción es mía.

axiomas para la teoría de conjuntos, una justificación dada por los objetivos de la teoría de conjuntos tal como ella los ha expuesto y que no depende de la aceptación del platonismo, sino de la forma en la que se hace teoría de conjuntos. Además insiste, si bien esa justificación puede ser cuestionada y evaluada, la evaluación debe ser hecha desde los parámetros establecidos por la práctica matemática misma y, en esos términos, la búsqueda está perfectamente justificada.

La búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos está estrechamente relacionada con la satisfacción de sus objetivos y los criterios externos son esenciales para lograr este trabajo. La práctica de los teóricos de conjuntos privilegia a los criterios externos sobre los internos.

Se puede ver que Maddy no sólo no acepta las conclusiones de Feferman, sino que considera que prácticamente todos las premisas de su argumento son incorrectas. Observemos que para obtener estos resultados, fue necesario cambiar nuestra metodología filosófica. La mayoría de los resultados se obtiene a partir de la adopción del método de la filosofía segunda. Así, es claro que el filósofo segundo sí está justificado en aceptar la búsqueda de nuevos axiomas como una empresa legítima para la teoría de conjuntos.

4.6. Conclusiones del capítulo.

Para concluir este capítulo podemos remarcar los siguientes puntos:

(1) La postura de Maddy se diferencia de otras posturas por su metodología, más que por sus resultados.

(2) La metodología de la filosofía segunda toma como punto de partida el análisis y comprensión de las prácticas matemáticas y, a partir de ellas, establece criterios para realizar un análisis filosófico de las mismas. El arbitro último es la práctica matemática misma.

(3) La filosofía segunda obtiene de su análisis de las prácticas matemáticas (en especial de la teoría de conjuntos) las siguientes conclusiones:

   * La práctica matemática no establece una distinción tajante entre matemáticas aplicadas y matemáticas puras.
   * La corrección de la teoría se establece de acuerdo a criterios dados por la práctica matemática.
   * El argumento de la indispensabilidad es incompatible con la práctica matemática contemporánea.

  * Hay dos ontologías compatibles con la práctica de los teóricos de conjuntos (el realismo delgado y el arrealismo) y al final lo que importa son los hechos de la matemática profunda (los hechos de la práctica matemática), lo que desemboca en una postura objetivista.
  * Ninguna de estás posiciones tiene problemas de acceso epistémico.
  * El realista robusto tiene problemas epistémicos, pues debe dar cuenta de qué tipo de acceso epistémico tiene hacia los objetos matemáticos.
  * La búsqueda de nuevos axiomas está bien justificada.
  * Existen dos clases de criterios para la aceptación de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos, a saber, los criterios internos y los criterios externos y ambos están igualmente bien justificados.
  * Los criterios externos son más útiles que los internos para la aceptación de nuevos axiomas. Su uso está plenamente justificado de acuerdo a la metodología de la filosofía segunda, pero no de acuerdo a la metodología de la filosofía primera.
  * El realista tradicional debe solucionar el problema del acceso epistémico para poder utilizar los criterios externos.

(4) El análisis de Maddy está más acotado de lo que ella esperaría y sólo cubre a las prácticas matemáticas del grupo CABAL y otros afines. No puede ser considerado un estudio que abarque todas las prácticas de los teóricos de conjuntos.

Este capítulo tenía como objetivo elegir una postura filosófica para analizar el problema de la indecidibilidad absoluta de la HC desde ZFC. El objetivo se ha cumplido. La postura elegida es el objetivismo. Además se presentaron los criterios de modificación del sistemas ZFC y los criterios necesarios para aplicarlos. Todos los ingredientes necesarios para aplicar la definición de proposición absolutamente indecidible respecto a un sistema están dados. En el próximo capítulo, me concentraré en el análisis del problema del continuo con estas herramientas.

Capítulo 5

¿Podemos decidir sobre la HC? Algunos resultado limitativos.

La compleción empírica de la aritmética, junto con un evidente fracaso de la compleción de la teoría de conjuntos ha llevado a algunos a especular que el fenómeno de la independencia es fundamental, en particular, que el problema del continuo es inherentemente vago y sin solución. Es desde este punto de vista una cuestión que es fundamentalmente carente de significado, de forma análoga a preguntar: "¿Cuál es el color de π?". [...] Aquí sostengo que hay una solución: hay axiomas para la teoría de números de segundo orden que proporcionan una teoría tan canónica como lo es la teoría de números. Estos relativamente nuevos axiomas proporcionan información a la teoría de números de segundo orden que trascienden los proporcionados por incluso ZFC. ¿Pueden estos axiomas extenderse a conjuntos más complejos con el fin de resolver el problema del continuo?

Hugh Woodin

5.1. Desde dónde se hace la pregunta sobre la decidibilidad de la HC.

De acuerdo a la definición dada en el capítulo dos de proposición absolutamente indecidible, para evaluar si la HC es o no absolutamente indecidible, es necesario elegir tres parámetros, la teoría matemática base, el conjunto de criterios para modificar el sistema original y un posición filosófica que sirve para evaluar la adecuación de los criterios.

Al finalizar el capítulo anterior, estos elementos ya estaban dados. La teoría matemática base es ZFC. Los criterios son aquellos que se extrajeron del análisis del trabajo de los teóricos de conjuntos afines a las metodologías del grupo CABAL, estos criterios se pueden dividir en internos y externos. Finalmente, la posición filosófica elegida para evaluar la corrección de estos criterios y de los resultados que a partir de ellos se obtengan es el objetivismo de Maddy.

Los criterios elegidos describen las prácticas y los métodos de prueba de los matemáticos interesados en solucionar el problema del continuo y que adoptaron el programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas para ZFC. Los criterios que usaré fueron propuestos por Gödel y fueron ampliados por los estudios de Maddy.

Ahora bien, como expliqué en el capítulo anterior la posición filosófica de Gödel era insuficiente para justificar el uso de esta clase de criterios, en especial de los criterios externos. La razón es que, de acuerdo al realismo gödeliano, el objetivo de la teoría de conjuntos es ofrecer la descripción más completa y adecuada del universo conjuntista (que existe de manera independiente a los seres humanos y sus prácticas matemáticas). Para que los criterios externos sean adecuados, el realista gödeliano debe ofrecer una explicación del tipo de acceso epistémico que tiene a los conjuntos, de otra forma no existe ninguna garantía de que estos criterios describan de manera fiel al universo conjuntista (o que siquiera lo describan de alguna forma). Gödel creía que el acceso podía ser explicado apelando a la intuición matemática, pero como vimos esto era problemático.

La elección del objetivismo de Maddy se justifica en que de acuerdo a esta postura los criterios internos y externos son adecuados para justificar la aceptación de nuestros nuevos axiomas. Ahora bien, no es necesario elegir el objetivismo como postura filosófica de fondo, sería igual de útil elegir al realismo delgado o al arrealismo, en tanto ambas posturas consideran adecuados los criterios ofrecidos, pues ambas posturas son construidas de acuerdo a la metodología de la filosofía segunda (que respeta la práctica matemática).

Una vez que he dado los parámetros necesarios para aplicar la definición de proposición absolutamente indecidible, sólo falta analizar cuál es la situación de la HC. En este capítulo ofreceré dicho análisis. Comenzaré mostrando ejemplos de la aplicación de los criterios de justificación dados. En primer lugar presentaré una breve descripción del tipo de justificación o evidencia a favor que se puede dar a los axiomas clásicos de ZFC. Después analizaré cómo se aplican estos criterios en el caso de los axiomas de cardinales grandes y algunos axiomas nuevos de la teoría de descriptiva de conjuntos. Finalmente, evaluaré el caso de la HC y concluiré que es absolutamente indecidible, pues tanto los criterios internos como los externos son insuficientes para justificar la aceptación de axiomas lo suficientemente fuertes para solucionar el problema del continuo. Me apoyaré en algunos resultados que muestran que los principios de reflexión (criterios internos) son demasiado débiles o son inconsistentes, que la HC no puede ser decidida por ningún axioma de cardinales grandes (criterios internos) y que la HC no aporta ningún elemento nuevo para el estudio de los subconjuntos de los números reales (criterios externos). Con todo, ofreceré una breve reflexión que muestra que el trabajo que se está realizando actualmente en teoría de conjuntos puede fortalecer lo suficiente los criterios internos como para resolver el problema del continuo, pero este trabajo todavía está en proceso y por ahora resulta insuficiente.

5.2. Justificación de los axiomas usuales de ZFC.

Como ya adelanté en el capítulo anterior, desde la metodología de la filosofía segunda, sería un error considerar que los axiomas de ZFC no necesitan una justificación. No pueden ser considerados autoevidentes, su aceptación fue resultado de un largo proceso. Maddy misma ofrece una justificación de estos axiomas en su (1988a).

> Voy a comenzar con los bien conocidos axiomas de la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel, no tanto porque yo o los miembros del grupo Cabal tengamos nada particularmente nuevo que decir sobre ellos, pero más bien porque quiero contrarrestar la impresión de que estos axiomas disfrutan de una estatuto epistemológico preferido no compartido por los nuevos candidatos a axiomas. Esta visión errónea es alentada por textos de teoría de conjuntos que comienzan con "derivaciones" de ZFC desde la concepción iterativa, para a continuación, realizar más discusiones autocontenidas de los pros y los contras de otros candidatos a axioma que se presentan. La sugerencia es que los axiomas de ZFC se siguen directamente del concepto de conjunto, que son de alguna manera "intrínsecos" a él (obvios, evidentes por sí mismos), mientras que otros candidatos a axioma sólo son apoyados por evidencia más débil, justificaciones "extrínsecas" (pragmáticas, heurísticas), expresadas en términos de sus consecuencias, o conexiones interteóricas, o poder explicativo, por ejemplo. (Maddy, 1988a, p. 482)[1]

[1] "I will start with the well-known axioms of Zermelo-Fraenkel set theory, not so much because I or the members of the Cabal have anything particularly new to say about them, but more because I want to counteract the impression that these axioms enjoy a preferred epistemological status not shared by new axiom candidates. This erroneous view is encouraged by set theory texts that begin with "derivations" of ZFC from the iterative conception, then give more self-conscious discussions of the pros and cons of further axiom candidates as they arise. The suggestion is that the axioms of ZFC follow directly from the concept of set, that they are somehow "intrinsic" to it (obvious, self-evident), while other axiom candidates are only supported by weaker, "extrinsic" (pragmatic, heuristic) justifications, stated in terms of their consequences, or intertheoretic connections, or explanatory power, for example." La traducción es mía.

Comparto el punto de vista de Maddy y del filósofo segundo, estos axiomas requiere una justificación, al igual que los nuevos. Creo que esto es suficiente motivación para presentar su defensa (además de mostrar cómo se aplican los criterios de aceptación de axiomas que expuse en el capítulo anterior). Pero, tengo otra motivación para hacerlo, creo que la defensa que se puede ofrecer de estos axiomas desde la propuesta de la filosofía segunda, también me ayudará a reafirmar que las justificaciones obtenidas sólo son aceptables para una comunidad matemática pequeña y no para todos los teóricos de conjuntos. Como ya adelante, no considero que esto sea un problema, pero quiero insistir en este punto.

A continuación analizaré algunos casos interesantes de justificación de estos axiomas, no presentaré una defensa de todos los axiomas, pues creo que en algunos casos las defensas son tan similares que su presentación no aporta mucho a este trabajo. Me apoyaré en el trabajo de Maddy, pero no me restringiré a él.

5.2.1. Axioma de Extensionalidad.

El axioma de extensionalidad afirma que dos conjuntos que tienen exactamente los mismos elementos son en realidad el mismo conjunto.

Axioma de Extensionalidad: $\forall A \forall B (\forall x (x \in A \equiv x \in B) \supset A = B)$

Este axioma afirma que es suficiente para que dos conjuntos sean de hecho el mismo, que tengan exactamente los mismos elementos. Establece que lo único que es relevante para los conjuntos son sus miembros, así que la relación de pertenencia es el único predicado relevante para describir la naturaleza puramente conjuntistica de estos objetos. El axioma de extensionalidad es definicional, establece cuál es la naturaleza de los conjuntos, son objetos puramente extensionales. Esto puede ser muy útil, pues por lo menos en principio, es más fácil trabajar con objetos extensionales que trabajar con objetos intensionales, como conceptos o propiedades.[2]

El axioma de extensionalidad describe la clase de objetos con los que trabaja el teórico de conjuntos en su práctica estándar y, en este sentido, existe evidencia interna a su favor. Sin embargo, no es el único tipo de evidencia que se puede ofrecer, también existe evidencia externa.

[2]Por ejemplo, si se trabaja con conceptos puede suceder que dos conceptos sean aplicables a exactamente los mismos objetos y, sin embargo, en tanto entidades intensionales serían diferentes. Esto puede parecer una ventaja en principio, pero su tratamiento puede ser tremendamente complicado, pues se requiere de una explicación sobre qué es aquello que los hace diferentes (pero que no corresponda con los objetos a los que son aplicables).

Este axioma es además tremendamente útil porque da un criterio de identidad entre conjuntos, es decir, da las condiciones necesarias y suficientes para saber cuando dos conjuntos son el mismo. Si se revisa con cuidado casi cualquier prueba en teoría de conjuntos, el axioma de extensionalidad está presente. Dado que establecer la igualdad entre dos objetos es algo de la mayor relevancia en matemáticas, la función del axioma de extensionalidad es igual de relevante. Sin él no sería posible establecer las reconstrucciones de los objetos y resultados de otras teorías que requieren establecer igualdad entre dos objetos (que es uno de los objetivos de la teoría de conjuntos), por ejemplo, no se podría establecer que en la reconstrucción conjuntista de los números naturales el resultado de una suma es un número particular.[3]

Además, he dicho que se prefiere trabajar con objetos extensionales. De acuerdo al axioma de extensionalidad, los conjuntos son esta clase de objetos. Sin embargo, alguien de manera justificada podría requerir trabajar con objetos intensionales. En el capítulo anterior se estableció que uno de los objetivos de la teoría de conjuntos es ser un teoría marco en la cual se pudiesen ofrecer reconstrucciones de los objetos de toda teoría matemática (posible). Así, si esto requiere crear modelos de objetos intensionales, entonces la teoría debe ser lo suficientemente poderosa para hacerlo.[4] Afortunadamente, la teoría de conjuntos puede ofrecer reconstrucciones de objetos intensionales, que no requiere incluir en la naturaleza de los conjuntos la intensionalidad. Por ejemplo, para distinguir entre dos predicados que tienen la misma extensión se puede elegir pintar de colores a los objetos[5] o realizar otro tipo de operación que cumpla con los objetivos de la reconstrucción.[6]

[3]Esto no quiere decir que el axioma de extensionalidad sea indispensable para lograr estos resultados, es en principio posible optar por otro axioma que lo substituya, pero ese nuevo axioma tiene que proporcionar un criterio de identidad entre conjuntos. La sustitución es posible, pues el axioma de extensionalidad es independiente del resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, los detalles de la prueba pueden verse en (Abian y LaMacchia, 1978). Sin embargo, muy probablemente la sustitución cambiaría la concepción de conjunto de la teoría.

[4]Es importante recordar que no se pretende ofrecer una reducción de los objetos intensionales a los objetos de la teoría de conjuntos (que son todos extensionales), sino que se busca ofrecer una reconstrucción de esta clase de objetos que pueda explicar el comportamiento de los mismos.

[5]Por pintar de colores me refiero a la operación de substituir cada objeto del conjunto por un par ordenado, en el cual el primer elemento sea el objeto original y el segundo objeto sea un conjunto arbitrario. Así, si se pinta de diferentes colores a un conjunto dado, se puede diferenciar a la extensión de un predicado de la extensión de otro predicado y con ello diferenciar a los predicados.

[6]Esta reducción de los fenómenos intensionales a fenómenos extensionales es muy similar a la que se realiza cuando se adopta una semántica de mundos posibles para la lógica modal. Los fenómenos modales son intensionales, pero la semántica de mundos posibles

Esta evidencia es externa, en tanto muestra que el axioma de extensionalidad es útil para reconstruir y explicar de manera exitosa teorías intensionales en un marco puramente extensional (la teoría de conjuntos).[7] En general, la evidencia a favor de los axiomas es tanto interna como externa. Además, la evidencia externa no depende de la concepción de conjuntos que adoptemos, depende de lo útil que resulte el sistema en el que el axioma está inserto.

5.2.2. Axioma de Par.

El axioma de par afirma que dados dos objetos de la teoría de conjuntos, existe un conjunto que los tiene a ellos como únicos miembros.

Axioma de Par: $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \equiv (w = x \vee w = y))$

La naturaleza de este axioma difiere de la del axioma de extensionalidad, pues su función es posibilitar la construcción de nuevos conjuntos (o visto desde otro punto de vista, garantizar la existencia de cierto tipo de conjuntos). Esta función puede parecer menor, sin embargo, hay que recordar cuál es la función de esta clase de axioma en la teoría de conjuntos ZFC.

Zermelo propuso su sistema de axiomas para evitar problemas de paradojas y contradicciones en la teoría de conjuntos, para lograr su objetivo incluyo una serie de axiomas que permiten construir (o garantizar la existencia) de ciertos conjuntos que sirven para construir modelos de otras teoría matemáticas.

Hay dos ideas centrales relacionadas con la elección de esta clase de axiomas. La primera es que las paradojas se debían a que la teoría de conjuntos aceptaba (o postulaba) la existencia de objetos demasiado grandes para ser conjuntos; la segunda, que la idea intuitiva de conjunto es la concepción iterativa y que los axioma deben estar justificados con base en ésta.

Para contrarrestar posibles problemas de tamaño, se optó por elegir axiomas que postulaban la existencia de conjuntos tales que su tamaño era relativamente modesto respecto de los objetos con los que eran construidos (o que los conformaban). Esta propuesta es conocida como la limitación de tamaño.[8] Es claro que el axioma de par cumple perfectamente con esto, pues,

puede dar cuenta de ellos apelando a elementos puramente extensionales.

[7] Por supuesto, esta evidencia supone que los fenómenos intensionales pueden ser reconstruidos usando las herramientas de la teoría de conjuntos. En caso de no ser, si existen fenómenos intensionales que no pueden ser reconstruidos dentro de la teoría de conjuntos, entonces habría buenas razones para rechazar el axioma de extensionalidad, pues impediría cumplir con los objetivos de la teoría de conjuntos.

[8] Aquellos que atribuían las paradojas a la aceptación de objetos demasiado grandes, consideraban que algunas paradojas como la de Burali-Forti, se debían a que la colección de todos los ordinales, si bien cumple en principio con todo lo necesario para ser ella

dado que la cardinalidad de cualquier conjunto generado por el axioma de par es 2, el incremento de tamaño es mínimo.

No todos han pensado que el problema de las paradojas se debe a la aceptación de objetos demasiado grandes. Algunos creen que el problema se debió a que las pruebas no estaban apoyadas en la noción preteórica de conjunto, que como se dijo en el capítulo anterior se emparento con la noción iterativa de conjunto y, por ello, se asumió que el modelo pretendido de la teoría de conjuntos es la jerarquía acumulativa de conjuntos.[9] Es claro que si se acepta esta visión, el axioma de par estaría justificado por criterios internos, se desprendería de la naturaleza de los conjuntos. Además, estaría sustentado por evidencia externa pues ayudaría en la construcción de objetos útiles para establecer conexiones y resultados interesantes (aunque no es indispensable) y su aceptación no parece ser en ningún sentido problemática. Algo similar se puede decir de otros axiomas como el axioma de unión, por lo que no me preocuparé por dar una justificación detalla de ellos, excepto en los casos en los que exista otra evidencia relevante.

5.2.3. Axioma de Separación.

El axioma de separación es en realidad un esquema de axioma, cada una de sus instancias afirma que dado un conjunto A y un fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de la teoría de conjuntos donde x es una variable libre, existe un conjunto que contiene a todos los elementos de A que satisfacen la fórmula $\varphi(x)$.

Axioma de Separación: $\forall x \exists y \forall z(z \in y \equiv (z \in x \wedge \varphi(z)))$

Este axioma permite construir (o postular la existencia) de conjuntos cuyos miembros son ya miembros de otro conjunto y que pueden ser seleccionados usando una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos. Su relevancia puede apreciarse mejor si se compara con el axioma de comprehensión irrestricta.

---

misma un ordinal (un conjunto), era demasiado grande para serlo. De hecho, la colección de todos los ordinales se puede poner en relación uno a uno con la colección de todos los conjuntos. Esto llevo a considerar que cualquier colección que tuviese el mismo tamaño del universo era demasiado grande para ser un conjunto. Incluso John von Neumann propuso un axioma de limitación de tamaño que sostenía que cualquier colección que pudiera ser biyectable (por un funcional) con el universo conjuntista era una clase propia, pues era demasiado grande para ser un conjunto. Este axioma implica el axioma de elección, el axioma de unión y los esquemas de axioma de separación y reemplazo.

[9] Esto puede resultar problemático, considerando que no es suficiente aceptar la concepción iterativa de conjunto para adoptar a la jerarquía acumulativa de conjuntos como el modelo pretendido de la teoría. Sin embargo, en el caso del axioma de par este punto no es relevante, así que dejaré la discusión de este punto para más adelante.

Esquema de Comprehensión Irrestricta: $\exists x \forall y(y \in x \equiv \varphi(y))$

Este esquema de axioma fue utilizado en la teoría intuitiva de conjuntos y a él se deben algunas paradojas. Este principio afirma que para cualquier propiedad,[10] existe un conjunto que tiene como elementos a todos y sólo los objetos que tienen la propiedad. Si la propiedad es la de no pertenecerse a sí mismo, se genera la paradoja de Russell. Si la propiedad es la de ser un ordinal, se genera la paradoja de Burali-Forti. Etcétera. La idea detrás del axioma de separación es recuperar la idea intuitiva de detrás del axioma de comprehensión irrestricta sin generar paradojas. Desde el punto de vista de los defensores de la limitación de tamaño, es suficiente pedir que la existencia previa del conjunto del que se han de separar los conjuntos para garantizar que el tamaño del conjunto generado es aceptable. Desde el punto de vista de los defensores de la jerarquía acumulativa, la existencia del conjunto está garantizada, pues el conjunto generado ya está presente en el mismo nivel que el original (o incluso puede estar en un nivel inferior). De acuerdo a Maddy, la recuperación de la idea intuitiva del axioma de comprehensión irrestricta que se hace en el axioma de separación nos da una guía para la aceptación de nuevos axiomas, en teoría de conjuntos siempre se quiere el principio más fuerte posible que no genere contradicciones o paradojas. Ella llama a esta regla de oro "Un paso antes del desastre".

> El axioma de separación es en muchos sentidos el más característicos de los axiomas de Zermelo. Él se ve a sí mismo como dándonos tanto del esquema de comprehensión ingenua como sea posible sin inconsistencia. Aquí vemos el surgimiento de otra regla de oro: un paso atrás del desastre. La idea es que nuestros principios de generación de conjuntos deben ser lo más fuertes posibles, cerca de la contradicción. Si un principio natural conduce a la contradicción, esta regla de oro recomienda que lo debilitemos lo suficiente como para bloquear la contradicción. (Maddy, 1988a, p. 485)[11]

Maddy no considera a las reglas de oro ni como criterios internos ni como criterios externos. Sin embargo, creo que puede ser considerados como criterios internos; en tanto recuperan (o están apoyadas en) la naturaleza de los

[10] Para algunos la noción de propiedad es muy ambigua, Zermelo solucionó este problema al establecer como parámetro no una propiedad, sino una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con una variable libre, tal como esta expresado en el esquema de axioma de separación.

[11] "The Axiom of Separation is in many ways the most characteristic of Zermelo's axioms. Here he sees himself as giving us as much of the naive comprehension scheme as possible without inconsistency. We see here the emergence of another rule of thumb: one step back from disaster. The idea here is that our principles of set generation should be as strong as possible short of contradiction. If a natural principle leads to contradiction, this rule of thumb recommends that we weaken it just enough to block the contradiction." La traducción es mía.

conjuntos. Como he dicho antes, los criterios internos están justificados en tanto recuperan la naturaleza de los objetos de la teoría de conjuntos o los objetivos que persigue la teoría; los criterios externos recuperan las consecuencias de los nuevos axiomas, las conexiones con otras teorías, los nuevos problemas que abren, etcétera. Se puede creer que los criterios externos son aquellos que requieren apelar a los resultados para su justificación; mientras que, los criterios internos no se apoyan en ellos. Sin embargo esto no es así. Los criterios internos también se pueden apoyar en los resultados, siempre que estos resultados muestren que el axioma clarifica la naturaleza del universo conjuntista o ayuda a cumplir con alguno de los objetivos de la teoría. Es en este sentido que creo que las reglas de oro pueden ser consideradas criterios internos; pues, se apoyan en la naturaleza los conjuntos y/o se apoyan en los objetivos de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, la regla de oro un paso antes del desastre recupera, en mi opinión, el objetivo de generar un marco de reconstrucción de teorías matemáticas lo más general posible, tan general que la adición de cualquier otro elemento lo volvería inconsistente. Creo que la indecisión de Maddy, se debe en buena medida a que las reglas de oro sólo funcionan cuando son apoyadas por resultados de la teoría de conjuntos, y esto parecería vincularlas más con los criterios externos que con los internos. Sin embargo, creo que su justificación depende de manera clara en cómo es que entendamos naturaleza de las prácticas, las metodologías, los objetivos y los objetos de la teoría de conjuntos; es por ello que afirmo que deben ser considerados como criterios internos, pues pretender justificar axiomas de acuerdo a la naturaleza de la teoría de conjuntos y no por sus resultados.

Algo que quiero mencionar antes de concluir esta sección es que la defensa del axioma de separación, que se basa en la concepción iterativa de conjunto, puede generar algunos inconvenientes. La noción iterativa de conjunto es una entre varias nociones de conjunto que están en competencia. Como dije en el tercer capítulo, la idea de çonjuuntos de"no es suficiente por sí misma para sostener que el modelo pretendido de la teoría de conjuntos es la jerarquía acumulativa, para ello es necesario aceptar los teoremas de cuasi-categoricidad de Zermelo y con ello una visión muy particular de la teoría de conjuntos. Para evitar comprometerse con esta visión particular, se podría argumentar que no es necesario sostener que el modelo pretendido de la teoría de conjuntos es la jerarquía acumulativa y ofrecer una argumentación diferente para justificar el axioma de separación. Se podría decir que dado que los objetos del nuevo conjunto ya están en el conjunto del que son separados, no hay en principio nada que impida que se forme el nuevo conjunto. Sin embargo, no es claro que esto sea así. Si bien es cierto que ya se tienen los elementos que conforman al conjunto, no es claro que esto sea suficiente para conformar al conjunto, parece posible que no podamos construir el conjunto a pesar de tener todos sus elementos, especialmente cuando se trata de un conjunto infinito. Podría suceder que no sea posible construir ese objeto por otras razones, justo como pasa en el caso de la clase de los ordinales, tenemos sus objetos, pero no podemos construir el conjunto. Aceptar que el modelo pretendido de la teoría de conjuntos es la jerarquía acumulativa es lo que nos garantiza que dicho conjunto existe. En este sentido, puedo decir que el axioma de separación obtiene su evidencia interna (del tipo que se apoya en la concepción iterativa de conjunto) gracias a que se ha aceptado otra serie de axiomas (los que permiten mostrar los teoremas de cuasi-categoricidad), su justificación depende de ello. Esto mismo sucederá con la evidencia interna de otros axiomas, la evidencia interna que dependa de la aceptación de la concepción iterativa de conjunto. Este argumento no afecta a la evidencia interna dada por la concepción de limitación de tamaño, pero como se verá la limitación de tamaño es muy restrictiva para justificar axiomas más fuertes. Por otro lado, su justificación externa parece ser más sólida, dado que permite realizar operaciones útiles.

5.2.4. Axioma de Infinito.

El axioma de infinito es independiente del resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, esto implica que sin asumirlo es imposible mostrar que existen conjuntos infinitos. Ahora bien, el axioma de infinito no asume directamente la existencia de conjuntos infinitos, más bien postula la existencia de un conjunto inductivo (que es infinito). Un conjunto es inductivo si tiene como elemento al conjunto vacío[12] y si para cualquier objeto que sea su miembro, también contiene a su sucesor.

Axioma de Infinito: $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \supset y \cup \{y\} \in x))$

La forma del axioma es importante para su justificación. El hecho de no postular directamente la existencia de conjuntos infinitos, sino de conjuntos inductivos ayuda mucho a poder justificarlo usando una regla de oro conocida como *finitismo cantoriano*. La idea central detrás de esta regla de oro es que los conjuntos infinitos tiene que ser muy semejantes a los conjuntos finitos.

> Hallet, en su estudio histórico del pensamiento cantoriano, consagra la perspectiva de Cantor en una regla de oro llamado finitismo cantoriano: los conjuntos infinitos son como los finitos. (Esto fue mencionado anteriormente en

[12]En teorías de conjuntos que acepten la existencia de urelementos, es posible sustituir el requerimiento de que el conjunto vacío sea miembro por el de que un urelemento sea miembro del conjunto. La función en ambos casos es tener un primer elemento, para evitar que el conjunto vacío sea inductivo.

> relación con la creencia de Cantor en el principio del buen orden.) La regla y sus aplicaciones se justifican en términos de sus consecuencias. (Maddy, 1988a, p. 486)[13]

El axioma de infinito tal como está formulado explota la idea de que los conjuntos inductivos son muy parecidos a algunos conjuntos finitos, aquellos que tienen al conjunto vacío y contienen n sucesores de este conjunto. Lo que es más, un conjuntos inductivo (el mínimo) puede verse como el conjunto que es el límite de una serie de conjuntos finitos de la forma antes descrita. Se da apoyo al axioma, pues tal como está formulado, se puede explotar la semejanza entre el conjunto que postula y algunos conjuntos finitos.

De nueva cuenta, quiero resaltar que la regla de oro *finitismo cantoriano* trata de recuperar una característica de la universo conjuntista, y por ello puede ser considerado como un criterio interno. La idea central detrás de esta regla es que el universo conjuntista es más o menos uniforme, cada segmento de este universo se asemeja al resto. Esta misma idea está detrás del rechazo de anormalidades, es decir, de conjuntos tales que sólo ellos tengan una característica particular. Como veremos este tipo de evidencia puede ayudarnos a justificar la existencia de algunos cardinales grandes.

Es importante hacer notar que la concepción de limitación de tamaño no es muy útil para defender a este axioma. Si bien, en principio la existencia de conjuntos inductivos no parece implicar la existencia de objetos demasiado grandes, tampoco hay evidencia clara de que no sea así.

La concepción iterativa de conjuntos tampoco es útil en este caso. La razón es que no hay nada en la jerarquía que nos comprometa con la existencia de niveles que contengan conjuntos infinitos. Lo que es más, los teoremas de cuasi-categoricidad de ZFCU2 de Zermelo muestran que el segmento inicial de la jerarquía acumulativa de conjuntos hasta el nivel V_ω es modelo de ZFC menos el axioma de infinito. Lo que muestra que no hay nada en la jerarquía misma que nos dé evidencia ni a favor ni en contra de este axioma. La mejor evidencia interna directa a favor de este axioma tiene que ver con el principio de maximalidad, pues aceptar la existencia del infinito permite a la teoría de conjuntos generar una inmensa cantidad de modelos nuevos.

La evidencia externa a favor de este conjunto es que es indispensable para la construcción de modelos infinitos, como los que son necesarios para modelar la mayoría de las teoría matemáticas interesantes. Sin el axioma de

[13] "Hallet, in his historical study of Cantorian thought, enshrines Cantor's perspective into a rule of thumb called Cantorian finitism: infinite sets are like finite ones. (This was mentioned above in connection with Cantor's belief in the well-ordering principle.) The rule and its applications are justified in terms of their consequences." La traducción es mía.

infinito, simplemente no sería posible reconstruir a las teorías matemáticas que utilicen una cantidad infinita de objetos, lo cual incluye la aritmética, el análisis y la geometría. Esto hace que la aceptación de axioma de infinito sea necesaria para cumplir con los objetivos más básicos de la teoría de conjuntos. La evidencia externa a favor de este axioma es tremendamente fuerte.

5.2.5. Axioma de Elección.

La aceptación del axioma de elección ha sido tema de muchas investigaciones, tanto matemáticas como filosóficas, pues desde que fue propuesto ha sido puesto en duda. Incluso fue rechazado por muchos teóricos de conjuntos y matemáticos, como Poincaré (todavía existen muchos matemáticos que son reticentes a aceptarlo). El axioma afirma que para todo conjunto de conjuntos no vacíos existe una función de elección, es decir, una función que va del conjunto original a la unión generalizada del mismo, tal que para cada elemento del conjunto original, la función le asigna un objeto que le pertenece.

Axioma de Elección: $\forall A\, \exists f : A \to \cup A\, \forall x((x \in A \wedge x \neq \emptyset) \supset f(x) \in x)$

Muchos consideran que la característica más problemática del axioma de elección es que postula la existencia de una función, sin presentarla explícitamente. Para aquellos que consideran que una función expresa un procedimiento que relaciona unos objetos con otros, la idea de postular la existencia de una función sin dar un procedimiento es inaceptable.

Sin embargo, se puede ofrecer diversas justificaciones para este axioma, tanto internas como externas. Desde el punto de vista de limitación de tamaño, postular la existencia de una función de elección no es problemático, pues la función vista como conjunto tiene una cardinalidad similar a la de los conjuntos involucrados en ella. Lo que es más, el axioma de la limitación de tamaño de von Neumann implica el axioma de elección.

Desde el punto de vista de la concepción iterativa de conjuntos, la justificación del axioma puede darse vía el realismo. Si aceptamos que la concepción iterativa implica la aceptación de la jerarquía acumulativa de conjuntos como modelo pretendido de la teoría, entonces existe una garantía de que existe una función (vista como conjunto) en un nivel bien determinado de la jerarquía acumulativa de conjuntos, de hecho en el nivel inmediato superior al primer nivel en el que aparece el conjunto original. Como dijimos esto depende de la aceptación de una visión muy particular respecto a la naturaleza de los conjuntos.

Sin embargo, esta evidencia no fue suficiente para que el axioma haya sido aceptado por la comunidad matemática. El evidencia más contundente a su favor está dada por la enorme cantidad de proposiciones de las matemáticas que son equivalentes a él o tales que el axioma es necesario para demostrarlas. Pronto fue evidente que el rechazo del axioma de elección implicaría realizar una serie de reformas en la matemática que serían prohibitivas. Por ejemplo, el axioma de elección es equivalente al lema de Zorn, al teorema del buen orden, la existencia de una base para todo espacio vectorial, el teorema de Tychonoff (el producto de espacios compactos es compacto), etcétera. Además, el axioma de elección es necesario para demostrar resultados en áreas de la matemática como el análisis; por ejemplo, el teorema de Hahn-Banach, el teorema de la categoría de Baire sobre espacios métricos completos, etcétera.

5.2.6. Axioma de Buena Fundación.

El axioma de buena fundación fue introducido por von Neumann en 1925, no formaba parte de los axiomas originales del sistema de Zermelo, aunque éste lo adoptó como axioma en su versión final de ZFC. Este axioma afirma que todo conjunto no vacío tiene como elemento un conjunto con el que es disyunto (no comparte ningún elemento).

Axioma de Buena Fundación: $\forall A(A \neq \emptyset \supset \exists x(x \in A \wedge x \cap A = \emptyset))$

El axioma de buena fundación implica que no pueden existir $\in$-secuencias infinitas descendientes. Lo que a su vez garantiza que todo conjunto está bien fundado y que ningún conjunto es miembro de sí mismo. Con lo que se impone una restricción a los objetos que pueden ser considerados conjuntos. Sobre este último punto se puede decir que los conjuntos extraños (tales que pueden ser miembros de sí mismos) no son necesarios para modelar ninguna rama de las matemáticas, pero tampoco parece haber ninguna razón clara para negar que existan. Existen conjuntos, como los ordinales, que por su propia estructura son conjuntos bien fundados, sin embargo, no parece haber ninguna razón obvia para sostener que todos los conjuntos deban tener una estructura como ésta.

Además, el axioma de buena fundación no es necesario para reconstruir ninguna estructura matemática, pues en caso de necesitar de una estructura bien fundada el trabajo de reconstrucción se puede realizar apelando a conjuntos como los ordinales. La única evidencia a favor de este axioma es que nos permite tener una concepción generalizada de conjunto que es muy clara. Este es el axioma que está detrás de la concepción iterativa de conjunto, es necesario para demostrar los teoremas de cuasi-categoricidad de Zermelo y permite generar nociones muy útiles para hacer teoría de modelos de la teoría de conjuntos de manera muy sencilla y estructurada, por ejemplo, la noción de rango. Esto permite obtener resultados como el teorema del colapso de Mostowski y algunos otros, que a su vez posibilitan usar técnicas de construcción de modelos necesarias para la obtención de modelos internos y de modelos generados por *forcing*. Sin embargo, utilizando axiomas alternativos es posible generar técnicas de construcción de modelos muy similares a las antes mencionadas. El axioma de buena fundación es muy útil a nivel práctico, pero no parece en ningún sentido necesario.

Sin embargo, es uno de los axiomas más importantes para garantizar que la jerarquía acumulativa de conjuntos es el modelo pretendido de la teoría de conjuntos y en buena medida es el que nos proporciona una base firme para poder aplicar criterios internos para el resto de los axiomas.

5.2.7. Una breve reflexión filosófica sobre los axiomas de ZFC.

Las defensas internas de los axiomas basadas en los principios de limitación de tamaño sólo pueden justificar la adopción de algunos axiomas, pero no de todos ellos. En concreto, sirve para defender los axiomas de separación, de reemplazo, de elección, de unión, de potencia, de par y de vacío, pero no es suficiente para defender ni el axioma de infinito, ni los axiomas de cardinales grandes, tampoco es útil para defender el axioma de buena fundación ni el axioma de extensionalidad.

La concepción iterativa de conjuntos puede ofrecer una justificación para la mayoría de los axiomas, sin embargo, para poder ser aplicada requiere de nuestra aceptación del axioma de reemplazo en segundo orden y del axioma de buena fundación que por sí mismos no tiene mucho apoyo, salvo que nos permiten generar una visión unificada de la naturaleza de los conjuntos. Tampoco sirve para justificar la adopción de los axiomas de infinito.

La justificación del axioma de infinito (y del axioma de elección) se debe en buena medida al papel que juegan en la teoría de conjuntos, su principal justificación es externa. El tipo de justificación interna que se puede ofrecer para ellos es que están apoyados en el principio de maximalidad.

Si bien las reglas de oro requieren para su aplicación de apelar a los resultados de la teoría, están justificadas en la naturaleza de los objetos de la teoría de conjuntos y del universo conjuntista. Así, creo que lo más adecuado es considerarlas criterios internos. Más adelante argumentaré que apelar a las reglas de oro es la única esperanza que queda para decidir el problema del continuo, pues ni los criterios externos, ni los criterios internos tradicionales son suficientes para lograr este objetivo.

Puede verse ahora que para poder aplicar los criterios internos de justificación de los axiomas de ZFC relacionados con el concepción iterativa de conjunto, es necesario adoptar un serie de axiomas y una visión muy particular sobre la naturaleza de los conjuntos. Al seguir este camino, nuestros resultados estarán acotados a la tradición matemática que ha optado por él. Maddy, de quien tomamos la metodología filosófica usada en este trabajo, es consiente de esta limitante. En sus propias palabras:

> En particular, me centraré en las opiniones del seminario Cabal, cuyo trabajo se centra en supuestos de la determinación y de los grandes cardinales. En el camino, especialmente en las primeras secciones, se mencionarán de las opiniones de los filósofos y teóricos establecidos fuera del grupo, e incluso opuesta a la misma, pero mi objetivo final es un retrato de la orientación general que guía el trabajo del grupo Cabal. (Maddy, 1988a, p. 482)[14]

5.3. Cardinales grandes y Determinación.

En esta sección presentaré algunos axiomas de cardinales grandes, algunos axiomas de determinación (que pertenecen a la teoría descriptiva de conjuntos) y las justificaciones más usuales para aceptarlos, que incluyen las interconexiones entre ellos. La presentación será esquemática y no profundizaré mucho en los detalles. La razón es que los detalles no serán de mucha ayuda para comprender la situación de la HC.

Primero presentaré algunos axiomas de cardinales grandes y las justificaciones internas que se pueden ofrecer de ellos. Después presentaré algunos axiomas propuestos para la teoría descriptiva de conjuntos y cuáles son sus justificaciones internas más socorridas en la literatura. Finalmente, presentaré las interconexiones que hay entre ellos y cómo es que estas interconexiones ofrecen una justificación externa para ambos tipos de axiomas. Uno de los grandes problemas de la HC es que ni ella ni su negación tienen interconexiones fuertes con los axiomas analizados en esta sección.

[14] "In particular, I will concentrate on the views of the Cabal seminar, whose work centers on determinacy and large cardinal assumptions. Along the way, especially in the early sections, the views of philosophers and set theorists outside the group, and even opposed to it, will be mentioned, but my ultimate goal is a portrait of the general approach that guides the Cabal's work." La traducción es mía.

5.3.1. Axiomas de grandes cardinales.

En esta sección presentaré la definición de algunos cardinales grandes y algunas justificaciones para los axiomas que afirman su existencia. No presentaré todos los grandes cardinales, pues hacerlo implicaría un trabajo enorme, que además no serviría por los fines de este trabajo. Me concentraré en los primeros cardinales grandes, los inaccesibles, los de Mahlo, los débilmente compactos, etcétera. Después presentaré el método de inmersiones elementales del universo en modelos clase transitivos y cómo es que este método impone límites a los grandes cardinales.

El tipo de justificaciones en los que me concentraré en esta sección son las dadas por algunos criterios internos, daré algunas las justificaciones externas de estos axiomas en una sección posterior después de dar algunas nociones básicas de teoría descriptiva de conjuntos.

Algo notable respecto a los grandes cardinales es que forman una jerarquía, en el sentido que pueden ser ordenados y para cada cardinal más fuerte resulta ser también del tipo más débil. Por ejemplo, un cardinal de Mahlo, también es un cardinal inaccesible. Un cardinal medible, también es un cardinal débilmente compacto, de Mahlo e inaccesible. Etcétera.

5.3.1.1. Cardinales fuertemente inaccesibles.

La primera clase de grandes cardinales con los que trabajaré son cardinales fuertemente inaccesibles, que ya definí en el capítulo 2. Sin embargo, presentaré nuevamente su definición y algunos resultados relacionados con ellos. Estos cardinales son lo primeros de los grandes cardinales y cualquier otro cardinal grande también es un cardinal fuertemente inaccesible. La noción central detrás de esta clase de cardinales es la cofinalidad.

Def. 23 *Sean α y β dos ordinales límite, decimos que α* es cofinal con *β sii existe una sucesión creciente de longitud α de ordinales β_γ menores que β, $\langle \beta_1, \ldots, \beta_\gamma, \ldots \rangle$ con $\gamma \in \alpha$, tal que el límite de la sucesión es β.*

Def. 24 *Sea α un ordinal límite infinito. Decimos que la $cf(\alpha)$ es el mínimo ordinal que es cofinal con α.*

Puede verse que para cualquier ordinal límite α, $cf(\alpha) \leq \alpha$. La cofinalidad nos permite clasificar a los ordinales límite en dos grupos, de acuerdo a su cofinalidad.

Def. 25 *Un ordinal límite α es* regular *sii $cf(\alpha) = \alpha$. De otra forma, el cardinal es singular.*

Se puede mostrar que todos los cardinales sucesores son regulares y que ω es regular. Dados estos resultados se tiene que todo cardinal singular, debe ser un un cardinal límite. Desde ZFC no se puede probar que exista un cardinal límite regular mayor que ω.

Def. 26 *Un cardinal κ es* inaccesible *sii es un cardinal no numerable, regular y límite.*

Si además ese cardinal cumple con ser fuerte,[15] tenemos un cardinal fuertemente inaccesible:

Def. 27 *Un cardinal κ es* fuertemente inaccesible *sii es un cardinal no numerable, fuerte, regular y límite.*

Suponiendo la consistencia de ZFC, es imposible probar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles desde el sistema mismo, puesto que su existencia implica la consistencia de ZFC. Se puede probar que V_κ, con κ un cardinal fuertemente inaccesible, es un modelo de ZFC.[16] Así que, por el segundo teorema de incompleción, si ZFC puede probar la existencia de un cardinal fuertemente inaccesible, entonces ZFC es inconsistente.

La evidencia a favor de esta clase de axiomas es mucha. Por el momento, sólo hablaré de aquella que tiene que ver con el principio de maximalidad y con una idea intuitiva de los axiomas de reflexión.

El *principio de maximalidad* sostiene que es mejor aceptar axiomas que permiten obtener más estructuras que aquellos que no aportan ninguna estructura nueva. Así, al elegir entre dos axiomas, uno que afirme la existencia de un cardinal fuertemente inaccesible y otro que afirme que no existen, el primero nos permite obtener nuevas estructuras, mientras que el segundo no lo hace. Así que hay buenas razones para elegir el primero. (Todos los axiomas de grandes cardinales obtienen apoyo de este principio, así que no lo mencionaré en adelante.)

Otro argumento a favor del axioma de cardinales fuertemente inaccesibles tiene que ver con un *principio de exhaustividad*. La idea central de este principio es que ZFC no ofrece una descripción exhaustiva del universo de los conjuntos y que suponer que cualquier objeto que no pueda ser construido

[15]**Def.** Un cardinal κ es *fuerte* sii para todo $\lambda < \kappa$ sucede que $2^\gamma < \kappa$.

[16]$(V_\kappa, \in)$ es una clase transitiva. Por los resultados dados en el capítulo 2, esto es suficiente para que esta estructura sea modelo de muchos axiomas de ZFC. El hecho de que κ sea fuerte garantiza que la estructura es modelo para el axioma de potencia y que κ sea regular implica que la estructura es modelo del axioma de reemplazo.

con las operaciones descritas por ZFC no existe es un error. Por lo que deben existir ordinales y cardinales que sean construidos por otros mecanismos, pero esos cardinales nuevos sería inaccesibles.

También se puede ofrecer una defensa apelando al *principio de uniformidad*. Este principio sostiene que lo que sucede en niveles inferiores del universo conjuntista debe repetirse en niveles superiores (es una versión del *finitismo cantoriano*). Ahora bien, si quitamos la restricción impuesta a los cardinales inaccesibles, de ser no numerables, ω sería un cardinal fuertemente inaccesible (también lo sería el conjunto vacío). De hecho, Zermelo en su (1930) no impuso está restricción. En este caso, el principio de uniformidad sostiene que, dado que ω cumple con lo requerido, deben existir otros cardinales que también lo cumplan.

Finalmente, se puede ofrecer una defensa de este axioma apelando a los principios de reflexión. Los *principios de reflexión* sostienen, *grosso modo*, que si algo es verdadero en el universo (es una propiedad que le adscribimos al universo), entonces debe existir algún nivel de la jerarquía acumulativa que también lo cumpla (que también tenga la propiedad). En este caso, sostenemos que el universo conjuntista es cerrado bajo todas las operaciones descritas por ZFC, entonces debe existir un nivel V_κ que también sea cerrado bajo estas operaciones, pero en ese caso κ sería un cardinal fuertemente inaccesible.

5.3.1.2. Cardinales de Mahlo

Los cardinales de Mahlo puede recibir una defensa muy similar a la de los cardinales fuertemente inaccesibles, así que sólo daré algunos detalles de su defensa y me concentraré en dar su definición y algunos resultados interesantes.

Para dar la definición de un cardinal de Mahlo, es necesario primero definir un conjunto estacionario sobre S. Y, a su vez es necesario definir primero los conjuntos cerrados no acotados.[17]

Def. 28 *Sea X un conjunto de ordinales y sea $\alpha > 0$ un ordinal límite, decimos que α es un* punto límite *en X sii $sup(X \cap \alpha) = \alpha$.*

Def. 29 *Sea κ un cardinal regular no numerable. Un subconjunto C de κ es* cerrado no acotado *de κ sii C es un subconjunto de κ, C no es acotado en κ y C contiene a todos sus puntos límite menores que κ.*

Def. 30 *Un subconjunto S de κ es* estacionario *sii para todo subconjunto C cerrado no acotado de κ se cumple que $S \cap C \neq \emptyset$.*

[17]La mayoría de la definiciones las recupero de (Jech, 2003).

Def. 31 *Un cardinal inaccesible κ es un* cardinal de Mahlo *sii el conjunto de todos los cardinales regulares menores que κ es un conjunto estacionario.*

Existe una prueba de que todo cardinal de Mahlo es un cardinal inaccesible, así que su existencia supone la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles. Y por tanto, el axioma que afirma su existencia implica el axioma que afirma la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles.

Las defensas que pueden darse de este axioma son muy similares a las dadas en el caso del axioma de cardinales grandes. Sólo mencionaré que la uniformidad también se aplica en este caso, pues si eliminamos la restricción de impide considerar conjuntos numerables como candidatos a ser cardinales de Mahlo, entonces ω sería un cardinal de Mahlo.

Esto es interesante, pues deja ver que algunos cardinales grandes pueden ser vistos como generalización de propiedades de ω que pretende capturar cardinales no numerables. En el caso de los fuertemente inaccesibles, generalizaban la propiedad de ser cerrados bajo las operaciones descritas por ZFC. En el caso de los cardinales de Mahlo, generalizaban propiedades sobre los conjuntos estacionarios que existen sobre ω.[18] Y como se verá a continuación, los cardinales débilmente compactos generalizan propiedades sobre las particiones de conjuntos infinitos.

5.3.1.3. Cardinales débilmente compactos, de Ramsey y de Erdös.

Los cardinales débilmente compactos son cardinales que surgen a partir de los trabajos en combinatoria infinita. Cuando tenemos un conjunto finito sus propiedades combinatorias pueden ser definidas de forma más o menos sencilla. Por ejemplo, si nuestro conjunto finito es de cardinalidad 15 y hacemos una partición de él 3 pedazos, podemos garantizar que por lo menos uno de ellos tiene cardinalidad igual o mayor a 5. Si tratamos de extrapolar estos resultados para conjuntos de cardinalidad infinita, pueden trivializarse un poco. Esto se debe a que dado un conjunto infinito de cardinalidad κ, si consideramos una partición de este conjunto de cardinalidad menor a κ, existe por lo menos un elemento de la partición de cardinalidad κ. Es por esto que la combinatoria infinita no trabaja directamente con particiones de conjuntos infinitos, sino que trabaja con particiones de subconjuntos del conjunto potencia del conjunto original y la propiedad que se desea obtener de las particiones es la homogeneidad de ciertos subconjuntos de conjunto original.

[18] Los conjuntos estacionarios sobre ω son todos los subconjuntos de ω no acotados. Esto se debe a que no existen puntos límites en ω.

Def. 32 *Sea A un conjunto cualquiera y n un número natural.* $[A]^n = \{X \subseteq A \mid |X| = n\}$

Def. 33 *Sea $\{X_i | i \in I\}$ una partición de $[A]^n$. Decimos que un conjunto $H \subseteq A$ es* homogéneo *sii existe un $i \in I$ tal que $[H]^n \subseteq X_i$.*

La combinatoria infinita se ocupa de estudiar, entre otras cosas, la cardinalidad de los conjuntos homogéneos para ciertas particiones.

Def. 34 *Sea κ y λ cardinales infinitos, n un número natural y m un cardinal (finito o infinito).* $\kappa \to (\lambda)^n_m$

Quiere decir que para toda partición de cardinalidad m de $[\kappa]^n$, existe un conjunto homogéneo de cardinalidad λ. Si m es igual a 2, suele omitirse en la presentación. Un resultado de Ramsey muestra que para toda partición de $[\omega]^n$ en un número finito de pedazos existe un conjunto homogéneo de cardinal $\aleph_0$.

Teorema 7 ***(Ramsey)*** $\omega \to (\omega)^n_k$*, con k un número natural.*

El teorema implica que en particular, $\omega \to (\omega)^2$. Pero no se puede probar ni refutar desde ZFC que exista otro cardinal infinito κ que cumpla con $\kappa \to (\kappa)^2$. Los cardinales débilmente compactos son aquellos que cumple con esta propiedad combinatoria.

Def. 35 ***(Cardinal débilmente compacto)*** *Un cardinal no numerable κ es* débilmente compacto *sii cumple con $\kappa \to (\kappa)^2$. (Jech, 2003, p. 113)*

Se pueden definir algunos otros cardinales infinitos usando técnicas similares, por ejemplo, los cardinales de Ramsey y los cardinales de Erdös. Lo único necesario es ofrecer generalizaciones o extensiones de las nociones involucradas.

Def. 36 *Sea κ un cardinal infinito.* $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [\kappa]^n$.

Esta definición ofrece una generalización de los conjuntos sobre los que se puede definir las particiones. Usando la misma idea que está detrás de los cardinales débilmente compactos, podemos definir los cardinales de Ramsey.

Def. 37 *Sea κ un cardinal infinito. Decimos que κ es un* cardinal de Ramsey *sii $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}$. (Jech, 2003, p. 121)*

Puede verse a partir de la definición que todo cardinal de Ramsey es un cardinal débilmente compacto. Además, es de notar que de nueva cuenta, si eliminamos las restricciones, ω sería un cardinal de Ramsey. Los cardinales de Erdös puede definirse de forma muy similar.

Def. 38 *Sea α un ordinal límite. El* cardinal de Erdös $\kappa(\alpha)$ *es el mínimo cardinal κ tal que $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}$. (Jech, 2003, p. 302)*

5.3.1.4. Cardinales Medibles.

Los cardinales medibles tendrá una gran relevancia para discusión posterior, debido a que su existencia implica la negación del axioma de constructibilidad. La idea central detrás de esta clase de cardinales es la medida que se puede definir sobre un conjunto.

Def. 39 *Medida sobre un conjunto S. Sea S un conjunto infinito. Una medida (no-trivial σ-aditiva probabilística) sobre S es una función μ del conjunto $\wp(S)$ al intervalo [0,1], tal que:*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(S) = 1$;
(ii) Si $X \subseteq Y$, entonces $\mu(X) \leq \mu(Y)$;
(iii) Para todo $a \in S$, $\mu(\{a\}) = 0$ (no trivialidad);
(iv) Si los conjuntos X_n, con n en los naturales, es una colección de subconjuntos de S que son disyuntos 2 a 2, entonces $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$. ($\sigma$-aditividad).

Una medida también se puede definir sobre una álgebra de conjuntos σ-completa. Esto es de especial importancia puesto que el álgebra generada por todos los subconjuntos de los números reales que son invariantes bajo traslación (en general bajo transformaciones rígidas para espacios de más dimensiones) tiene una medida, la medida Lesbegue. Esta medida puede asignar valor a muchos subconjuntos de los reales, pero no a todos.[19] La pregunta que surge de manera natural es si existe una medida como la medida Lesbegue, pero que asigne un valor a todos los conjuntos de los reales. En general, podemos preguntar si existen conjuntos tales que se puedan definir medidas no-triviales σ-aditivas sobre todo su conjunto potencia. Si aceptamos que esto es posible para cardinales no numerables, entonces podemos aceptar la existencia de cardinales medibles. La pregunta sobre la existencia de una medida se plantea en términos de los filtros[20] que se pueden definir sobre un conjunto determinado y sus propiedades.

[19]Se puede probar que existen conjuntos que no son Lesbegue medibles. La existencia de esta clase de conjuntos está relacionada con el axioma de elección y una de sus manifestaciones más extrañas es la paradoja de Banach-Tarski. Dicha paradoja consiste en dar una partición finita para una esfera de radio 1 y mediante transformaciones rígidas aplicadas a los elementos de la partición obtener dos esferas de radio 1 completamente densas. Esto es posible debido a que la partición contiene elementos que no son invariantes bajo transformaciones rígidas y por tanto no son Lesbegue medibles.

[20]**Def.** Un filtro F sobre un subconjunto no vacío S es un subconjunto de la potencia de S ($F \subseteq \wp(S)$) tal que:
(i) $S \in F$ y $\emptyset \notin F$;
(ii) si $X \in F$ y $Y \in F$, entonces $X \cap Y \in F$;
(iii) si $X, Y \subseteq S$, $X \in F$ y $X \subseteq Y$, entonces $Y \in F$.

Def. 40 *Sea κ un cardinal no numerable. Decimos que κ es un* cardinal medible *sii existe un ultrafiltro*[21] *U no principal κ-completo*[22] *sobre κ. (lo que garantiza que exista una medida sobre κ).*

Usando ideas similares se pueden definir otra clase de cardinales grandes. En general, se busca generalizar propiedades de los filtros definibles sobre cierta clase de conjuntos. Por ejemplo, si establecemos que la κ-compleción de un conjunto medible se preserva para algún ultrafiltro que lo extienda tenemos los cardinales fuertemente compactos.

Def. 41 *Sea κ un cardinal no numerable. Decimos que κ es* fuertemente compacto *sii para todo conjunto S se cumple que todo filtro κ-completo sobre S se puede extender a un ultrafiltro κ-completo sobre S.*

Si además consideramos medidas que pueden ser definidas sobre subconjuntos del conjunto potencia de una cardinalidad determinada y definimos una noción de medida más precisa podemos obtener los cardinales supercompactos.

Def. 42 *Sea κ un cardinal no numerable. Sea A un conjunto cualquiera tal que $|A| \geq \kappa$. $\wp_\kappa(A) = \{x \subseteq A \mid |x| \leq \kappa\}$.*

Def. 43 *Sea F el filtro sobre $\wp_\kappa(A)$ generado por los conjuntos de la forma $\hat{P} = \{Q \in \wp_\kappa(A) \mid P \subseteq Q\}$. F es κ-completo y si κ es fuertemente compacto, puede extenderse a un ultrafiltro U κ-completo sobre $\wp_\kappa(A)$. Un ultrafiltro U κ-completo sobre $\wp_\kappa(A)$ que extienda a F es llamado una* medida fina.

Def. 44 *Una medida fina U sobre $\wp_\kappa(A)$ es* normal *sii siempre que $f : \wp_\kappa(A) \to A$ es tal que $f(x) \in x$, para todo x en algún conjunto de $\wp_\kappa(A)$, sucede que f es constante en algún conjunto en U.*

Def. 45 *Un cardinal no numerable κ es* supercompacto *sii para todo A tal que $|A| \geq \kappa$ existe una medida normal sobre $\wp_\kappa(A)$.*

En 1961, el teórico de conjuntos Dana Scott mostró que la existencia de cardinales medibles implicaba la falsedad del axioma de constructibilidad. Lo que lo colocó en el centro de la discusión, pues aceptarlo implicaba rechazar el axioma de constructibilidad.

Teorema 8 ***(Scott)*** *Si existe un cardinal medible, entonces $V \neq L$.*

[21]**Def.** Un filtro U sobre un conjunto S es un *ultrafiltro* sii $\forall X \subseteq S(X \in U \vee S - X \in U)$.

[22]**Def.** Un filtro F sobre S es κ-completo sii para toda familia $\{X_\alpha | \alpha \in \kappa\}$ de subconjuntos de S, si para toda $\alpha \in \kappa$ $X_\alpha \in F$, entonces $\bigcap_{\alpha=0}^{\kappa} X_\alpha \in F$.

Hasta aquí he presentado los cardinales grandes que no son tan grandes y que se definieron originalmente usando elementos relacionados directamente con algunas otras áreas de la matemática o que buscaban generalizar propiedades de conjuntos como . Existen otra clase de grandes cardinales que se definen en términos de inmersiones elementales del universo en alguna clase transitiva.

5.3.1.5. Cardinales realmente grandes.

Muchos de los cardinales que he presentado hasta ahora son considerados *pequeños grandes cardinales*, pues son consistentes con el axioma $V = L$. Los axiomas de grandes cardinales, que no son consistentes con $V = L$, postulan la existencia de los llamados *grandes grandes cardinales* (*large large cardinals*) y se les suele presentar apelando a inmersiones elementales no triviales del universo en modelos clase transitivos.

Ya he presentado algunos de estos grandes grandes cardinales, como los medibles, los fuertemente compactos y los supercompactos, pero lo hice sin apelar a la noción de inmersión elemental. A continuación, presentaré algunos otros grades grandes cardinales usando dicha noción. Mi interés principal es ofrecer una breve mirada al tipo de construcciones usadas para definir esta clase de cardinales, además de presentar los cardinales de Woodin que tiene una relevancia notable en las discusiones actuales.

Def. 46 ***(Submodelo)*** *Sea un modelo* $\mathcal{A} = (A, P^A, \ldots, F^A, \ldots, c^A, \ldots)$ *de un lenguaje L. Un submodelo de* $\mathcal{A}$ *es una estructura* $\mathcal{B} = (B, P^A \cap B^n, \ldots, F^A \restriction B^n, \ldots, c^A, \ldots)$*, donde* $B \subseteq A$ *tal que contiene a todas las interpretaciones de la constantes, las relaciones son cerradas en* B *y las funciones están restringidas a* B*.*

Def. 47 ***(Submodelo elemetal)*** *Un submodelo* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{A}$ *es un submodelo elemental,* $\mathcal{B} < \mathcal{A}$*, sii para toda fórmula* φ *y para cualesquiera* $a_1, \ldots, a_n \in B$ *se cumple que:*

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

Def. 48 ***(Inmersión)*** *Una inmersión de* $\mathcal{B}$ *en* $\mathcal{A}$ *es un isomorfismo entre* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C} < \mathcal{A}$*. La inmersión es elemental si* $\mathcal{C}$ *es un submodelo elemental de* $\mathcal{A}$*.*

La inmersiones que son útiles para definir grandes cardinales son aquellas que se establecen entre el universo y un modelo-clase transitivo, $j : V \to M$. Que las inmersiones no sean triviales quiere decir que j no es la identidad. Esto quiere decir que existe un mínimo ordinal α tal que $j(\alpha) > \alpha$. Este ordinal es conocido como *el punto crítico de j* y se le denota como $crit(j)$. Para cada inmersión elemental no trivial $j : V \to M$, el $crit(j)$ es el gran cardinal con el que está asociada. Todos los puntos críticos de cualquier inmersión elemental no trivial son cardinales medibles, así que la existencia de dichas inmersiones supone la existencia de todos los grandes cardinales menores que el primer cardinal medible, es decir, los *pequeños grandes cardinales.* A continuación daré algunas definiciones de grandes grandes cardinales.

Def. 49 *Un cardinal κ es* extendible *sii para todo $\alpha > \kappa$ existe un ordinal β y una inmersión elemental $j : V_\alpha \to V_\beta$ cuyo punto crítico es κ. (Jech, 2003, p. 379)*

Def. 50 *Un cardinal κ es* enorme *(*huge*) sii existe una inmersión elemental $j : V \to M$ cuyo punto crítico es κ y tal que $M^{j(\kappa)} \subseteq M$, es decir, que toda secuencia $\langle a_\alpha \mid \alpha < j(\kappa)\rangle$ de elementos de M es elemento de M. (Jech, 2003, p. 380)*

Def. 51 *Un cardinal κ es un* cardinal fuerte *(*strong cardinal*) sii para todo conjunto x existe una inmersión elemental $j : V \to M$ cuyo punto crítico es κ y tal que $x \in M$. (Jech, 2003, p. 381)*

Def. 52 *Un cardinal δ es un* cardinal de Woodin *sii para todo $A \subseteq V_\delta$ existen cardinales arbitrariamente grandes $\kappa < \delta$ tales que para todo $\lambda < \delta$ existe una inmersión elemental $j : V \to M$ cuyo punto crítico es κ y tal que $j(\kappa) > \lambda$, $V_\lambda \subseteq M$ y $A \cap V_\lambda = j(A) \cap V_\lambda$. (Jech, 2003, p. 384)*

Finalmente quiero mencionar que la técnica de generar grandes cardinales usando inmersiones elementales tiene un límite, pues postular que existe una inmersión elemental no trivial del universo en el universo genera contradicciones. Kunen demostró en 1971 que no es posible generar inmersiones elementales del universo en el universo.

Teorema 9 ***(Kunen)*** *Si existe una inmersión elemental de $j : V \to M$, entonces $M \neq V$.*

Esto impone límites a la construcción de grandes cardinales vía inmersiones elementales, pero esto no representa un problema si se considera la regla de oro un paso antes del desastre. Justo lo que se busca es generar los resultados más fuertes posibles tales que al ser extendidos se llegue a la contradicción.

5.3.1.6. Una pequeña reflexión filosófica sobre los cardinales grandes.

Los axiomas de grandes cardinales fueron la vía que Gödel considero originalmente para lograr resolver problemas como el problema del continuo. El desarrollo en esta área de la teoría de conjuntos ha sido increíble en los últimos 50 años, sin embargo todavía no gozan de una aceptación unánime entre los teóricos de conjuntos. A pesar de ello tiene un buen apoyo mediante criterios internos, todos ellos son defendibles en términos del principio de maximalidad, de la regla de oro *un paso antes del desastre*, de la uniformidad, etcétera. Incluso algunos de ellos son claramente defendibles apelando a principios de reflexión.[23] Todo esto sin contar la evidencia a su favor proporcionada por los criterios externos que no hemos presentado todavía.

En mi opinión, los axiomas de grandes cardinales tiene el sustento suficiente para ser aceptados por la comunidad, en tanto son necesarios para satisfacer los objetivos originales de la teoría de conjuntos, especialmente para cumplir el objetivo de generar un teoría general para la reconstrucción de todas las estructuras matemáticas posibles. Sin embargo, para el problema que me ocupa en este trabajo no será del todo útiles, debido a que si bien nos permiten diversificar las estructuras que podemos construir en teoría de conjuntos, no parecen afectar directamente el comportamiento del cardinal del conjunto de los reales. La idea central detrás de esta afirmación es que el problema del continuo se define en términos de la existencia de un conjunto de números reales que se encuentra en la parte inicial de la jerarquía acumulativa de conjuntos y si aceptamos el teorema de cuasi-categoricidad de Zermelo, y he dicho que tenemos buenas razones para hacerlo, entonces el comportamiento de la parte inicial de la jerarquía acumulativa no se modifica al modificar la altura de la misma. Más adelante, presentaré el teorema de Solovay que da un sustento más sólido a esta afirmación.

5.3.2. Axiomas de determinación.

Los axiomas de determinación surgen en el marco de la teoría descriptiva de conjuntos. La teoría descriptiva de conjuntos es una teoría matemática que se ocupa de estudiar las propiedades de conjuntos de puntos, es decir, estudia de los conjuntos de números reales. Esta teoría no tiene interés en estudiar toda las propiedades de esta clase de conjuntos, en realidad sus estudios se centran en analizar un conjunto de propiedades más o menos bien

[23] Como se verá un poco más adelante, los principios de reflexión sólo pueden servir como evidencia para los cardinales más pequeños que los cardinales de Erdös, el resultado de debe a Koellner.

determinados, por ejemplo, si dichos conjuntos son medibles, si cumplen con la propiedad de Baire y si tiene la propiedad del conjunto perfecto. A continuación hablaré un poco de dichas propiedades y de los resultados clásicos en teoría de conjuntos descriptivos (resultados que pueden establecerse desde ZFC). Una vez hecho, presentaré la definición de determinación de un juego definido sobre un conjunto, diferentes axiomas propuestos para la determinación, cuáles son sus implicaciones en teoría descriptiva de conjuntos y su relación con los axiomas de cardinales grandes.

Al final lo que espero poder mostrar es que la evidencia externa que se puede establecer entre los axiomas de determinación y los axiomas de cardinales grandes ofrece un buen sustento para ambos, dada la posición filosófica que hemos elegido. Sin embargo, mostraré que todos estos resultados no nos ofrecen un avance real respecto al problema del continuo, en tanto, los resultados sólo ofrecen una solución para decidir sobre proposiciones indecidibles de una complejidad menor que la de la HC.

5.3.2.1. Algunas propiedades interesantes de los subconjuntos de los números reales.

En esta sección me interesa presentar una serie de propiedades que son importantes dentro de la teoría descriptiva de conjuntos, a saber, la medida, la propiedad del subconjunto perfecto y la propiedad de Baire.

5.3.2.1.1. Conjuntos perfectos y el Teorema de Cantor-Bendixon.

Cantor en sus primeros trabajos en teoría de conjuntos, trabajaba con representaciones de series geométricas. En estos trabajos una de las nociones centrales que se pretendía reconstruir con la maquinaria de la teoría de conjuntos era noción de derivada. Este concepto se puede reconstruir conjuntisticamente apelando a sucesiones infinitas de puntos de números reales y mediante ellos definir puntos límites y puntos aislados de un conjuntos (aquel que no es el límite de ninguna sucesión no trivial de elementos del conjunto). La derivada de un conjunto se define como el conjunto de los puntos límites del conjunto original. Este nuevo conjunto (el conjunto derivada) tiene a su vez puntos límites y puntos aislados, lo que permite definir la segunda derivada del conjunto original. Este procedimiento se puede repetir hasta que sucedan una de dos cosas, que todos los puntos sean aislados y la nueva derivada sea el conjunto vacío o bien que tengamos un conjunto no vacío cuyos puntos sean todos puntos límites, así que la nueva derivada es el mismo conjunto. Cuando sucede la segunda opción tenemos un conjunto que tiene la propiedad de que él es su propia derivada, no es afectado por está operación. Formalmente lo podemos definir como:

Def. 53 ***(Conjuntos perfectos)*** *Un subconjunto de los números reales A es una subconjunto perfecto sii es un conjunto cerrado no vacío sin puntos aislados.*

Cantor mostró un interés por esta clase de conjuntos pues mostró que ellos cumplían una propiedad muy interesante y, que por lo menos en principio, parecía arrojar luz sobre el problema del continuo.

Teorema 10 ***(Cantor)*** *Todo subconjunto perfecto tiene la cardinalidad del continuo. (Jech,2003, p. 40)*

Así, los conjuntos perfectos de los reales no podían generar un contraejemplo de para la HC, puesto que todo subconjunto perfecto es infinito y tiene la cardinalidad del continuo. Esta vía de razonamiento se fortaleció todavía más cuando el mismo Cantor probó que una clase de subconjuntos de los reales contiene como un subconjunto perfecto, lo que implica que tienen la cardinalidad del continuo.

Teorema 11 ***(Cantor - Bendixon)*** *Si F es un conjunto no numerable cerrado de números reales, entonces $F = P \cup S$, donde P es un conjunto perfecto y S es un conjunto a lo más contable.*

Los conjuntos cerrados no pueden ofrecer un contraejemplo a la HC, puesto que o bien son numerable o bien son no numerables y contienen un subconjunto perfecto, lo que implica que tienen la cardinalidad del continuo.

Corolario. Si F es un conjunto cerrado de número reales, entonces $|F| \leq \aleph_0$ o $|F| = 2^{\aleph_0}$.

Esto no implica que no exista algún conjunto que pueda ser contraejemplo a la HC, pero este conjunto no será un conjunto cerrado (o abierto) de reales. Sabemos que el axioma de elección implica que existe un conjunto no numerable que no contiene un subconjunto perfecto. Esto implica que apelando a la propiedad del subconjunto perfecto no puede darse una respuesta al problema del continuo, pero sí se puede aproximar una solución. Esto se logra definiendo clasificaciones sobre los conjuntos de reales (jerarquías de Borel, de los conjuntos proyectivos y de los conjuntos definibles) y tratar de mostrar que todas ellas tienen la propiedad del subconjunto perfecto, es decir, que si son no numerables, entonces contienen un subconjunto perfecto.

Finalmente es importante resaltar que esta propiedad no es de interés sólo por su posible relación con el problema del continuo, pues más bien su estudio está motivado por las propiedad de los conjuntos que se utilizan en la reconstrucción del análisis y en la topología.

5.3.2.1.2. Propiedad de Baire y Teorema de la Categoría de Baire.

La segunda propiedad relevante en la teoría de conjuntos descriptiva es la propiedad de Baire, la cual explica cuál es la relación entre los conjuntos densos, los conjuntos no densos en ningún lugar y los conjuntos abiertos. Comenzaré con algunas definiciones previas.

Def. 54 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que D es* denso en los reales *sii $\forall x, y \in \mathbb{R}(x < y \supset \exists z \in D\ x < z < y)$.*

Def. 55 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que D es* denso en ningún lugar *sii $int(\mathbb{R} - D) = \emptyset$, es decir, si el interior de su complemento es vacío.*

Def. 56 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que D es* exiguo *(*meanger*) sii es la unión de una cantidad numerable de conjuntos densos en ningún lugar.*

Def. 57 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que D tiene* la propiedad de Baire *sii existe un conjunto A abierto en $\mathbb{R}$ tal que $A \Delta D = B$, donde es un conjunto exiguo (si el conjunto es casi abierto).*

Este resultado extiende algunas de las propiedades de los conjuntos abiertos a conjuntos que difieren de los abiertos en a lo más un conjunto exiguo. En particular se muestra que la intersección numerable de conjuntos densos es densa.

Teorema 12 ***(Categoria de Baire)*** *Si $D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots$ con $n \in \mathbb{N}$, son conjuntos densos abiertos de los reales, entonces la intersección $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}$. (Jech, 2003, p. 41)*

Este resultado se puede generalizar a todos los conjuntos que cumplan con la propiedad de Baire. De nuevo, esta propiedad tiene un interés independiente de su posible función en la resolución del problema del continuo.[24]

[24] La propiedad de Baire será muy relevante en la discusión posterior, debido a que una modificación de ella, a saber, la propiedad *de Baire universalmente*, permitirá establecer resultados sobre invariacia bajo *forcing*.

5.3.2.1.3. Conjuntos Lesbegue medibles.

Ya he definido una medida sobre un conjunto, ahora definiré una medida Lebesgue. Hay dos formas de hacerlo, ambas son equivalentes. Por el momento sólo daré una de ellas.

Def. 58 ***(Medida Lesbegue sobre un conjunto*** S***)*** *Sea* S *un conjunto infinito. Una* medida Lesbegue sobre S *es una función* μ *del conjunto* $\wp(S)$ *al intervalo [0,1], tal que:*

(I) $\mu(\emptyset) = 0$ *y* $\mu(S) = 1$*;*

(II) *Si* $X \subseteq Y$*, entonces* $\mu(X) \leq \mu(Y)$*;*

(III) *Para todo* $a \in S$*,* $\mu(\{A\}) = 0$*;*

(IV) *Si los conjuntos* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *con* n *en los naturales, es una colección de subconjuntos de* S *que son disyuntos 2 a 2, entonces* $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$*.*

(V) *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que preserve distancias. Para todo* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *si* $Y = f(X)$*, entonces* $\mu(X) = \mu(Y)$*.*

Se sabe que no todos los conjuntos de los reales son Lesbegue medibles (el resultado de debe a Vitali), la prueba requiere del axioma de elección. Pero también se sabe que los conjuntos abiertos y cerrados sí son Lesbegue medibles. De nueva cuenta, se espera generalizar la propiedad de ser Lesbegue medibles a otros conjuntos con propiedades más complejas.

5.3.2.2. Resultados desde ZFC.

Como dije un poco más arriba las tres propiedades principales de las que se ocupan la teoría descriptiva de conjuntos (propiedad del subconjunto perfecto, propiedad de Baire y propiedad de la medida de Lesbegue) las tienen los conjuntos abiertos y cerrados de números reales. Para poder generalizar estos resultados es necesario definir nuevas jerarquías de conjuntos, a saber, los conjuntos Borel, Proyectivos y definibles.

5.3.2.2.1. Conjuntos Borel, Analíticos y Proyectivos.

Comenzaré con los conjuntos Borel que se definen a partir de los conjuntos cerrados y abierto aplicando intersecciones y uniones numerables. Los conjuntos Borel son aquellos que pertenecen al mínimo conjunto que contiene a los cerrados y a los abiertos y es cerrado bajo complementos, uniones e intersecciones numerables.

Def. 59 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. A es un* conjunto Borel *sii pertenece a la menor σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos de reales. (Jech, 2003, p. 48)*

Los conjuntos Borel pueden ordenarse en una jerarquía, de acuerdo a la cantidad de operaciones que se deben aplicar a los conjuntos abiertos para construirlos.

Def. 60 *Para todo $\alpha < \omega_1$ definimos las colecciones σ^0_α, Π^0_α y Δ^0_α de subconjuntos de los números reales como sigue:*

Σ^0_1 *= La colección de todos los conjuntos abiertos de reales.*

Π^0_1 *= La colección de todos los conjuntos cerrados de reales.*

Σ^0_α *= La colección de todos los conjuntos de forma $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, donde $A_n \in \Pi^0_\beta$ para algún $\beta < \alpha$.*

Π^0_α *= La colección de todos los conjuntos de forma $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, donde $A_n \in \Sigma^0_\beta$ para algún $\beta < \alpha$.*
= La colección de todos complementos de los conjuntos Σ^0_α.

$\Delta^0_\alpha = \Sigma^0_\alpha \cap \Pi^0_\alpha$.

La siguiente jerarquía es la de los conjuntos proyectivos e incluye a los conjuntos analíticos. La idea central detrás de esta jerarquía es cerrar a los conjuntos abiertos bajo completo, uniones e intersecciones numerables, inversa de funciones continuas y proyecciones.

Def. 61 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. A es* un conjunto analítico *sii existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f[\mathbb{R}] = A$. (Jech, 2003, p. 142)*

Se puede demostrar que todo conjunto Borel es la imagen del los reales bajo un función continua, es decir, todo conjunto Borel es analítico. Sin embargo, existen otros conjuntos que no son conjuntos Borel y que también son la imagen del conjunto de los números reales bajo una función continua, por lo que, no todo conjunto analítico es Borel. Los conjuntos analíticos son la base de la jerarquía de los conjuntos proyectivos, ahora basta definir la proyección de un conjunto para construir esta jerarquía.

Def. 62 *La* proyección de un conjunto *$S \subseteq X \times Y$ en X es el conjunto $P = \{x \in X \mid \exists y \langle x, y\rangle \in S\}$.*

Jerarquía de conjuntos proyectivos.

Def. 63 *Para todo $n \geq 1$, definimos las colecciones Σ^1_n, Π^1_n y Δ^1_n de subconjuntos de los reales como sigue:*

Σ^1_1 = *La colección de todos los conjuntos analíticos.*

Π^1_1 = *La colección de todos los complementos de conjuntos analíticos.*

Σ^1_{n+1} = *La colección de las proyecciones de todos los conjuntos Π^1_n en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

Π^1_n = *La colección de todos los complementos de conjuntos Σ^1_n.*

$\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$.

De nueva cuenta, todos los conjuntos analíticos son proyectivos, pero no todos los conjuntos proyectivos son analíticos.

5.3.2.2.2. Conjuntos Definibles.

Esta jerarquía es un poco diferente a los dos que he presentado con anterioridad. Esto se debe a que la definibilidad de un conjunto es relativa a un modelo, mientras que ser un conjunto Borel o un conjunto proyectivo es algo que se puede definir con independencia de los modelos.

Def. 64 *Un conjunto de números reales A es definible en un modelo $\langle M, E\rangle$ sii existe una fórmula φ del lenguaje de la teoría de conjuntos y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in M$ tales que $A = \{x \in M \mid \langle M, E\rangle \models \varphi[x, r_1, r_2, \ldots, r_n]\}$.*

Así, puede suceder que un conjunto sea definible en un modelo, pero no sea definible en otros. Debido a esto la jerarquía de los conjuntos definibles, conocida como la jerarquía de Lévy, está relativizada a un modelo.

La jerarquía de Lévy es una jerarquía de conceptos definibles relativos a un modelo (o una clase de modelos, por ejemplo, los modelos transitivos). Se sirve de la siguiente clasificación de fórmulas, pero no es una definición sintáctica.

Una fórmula φ es Σ_0 sii todos sus cuantificadores están acotados.

Una fórmula φ es Π_0 sii todos sus cuantificadores están acotados.

Una fórmula φ es Σ_{n+1} sii es de la forma $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \psi$, donde ψ es una fórmula Π_n.

Una fórmula φ es Π_{n+1} sii es de la forma $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \psi$, donde ψ es una fórmula Σ_n.

Def. 65 *Una propiedad P (de la teoría de conjuntos) es Σ_n en $\langle M, E\rangle$ sii es definible en $\langle M, E\rangle$ por una fórmula Σ_n.*

Para saber si una propiedad es Σ_n es necesario realizar una prueba en la teoría de conjuntos, a saber, es necesario demostrar que la propiedad es definible por una fórmula Σ_n en el modelo. Que una propiedad sea Σ_n en un modelo $\langle M, E\rangle$ es una propiedad que no sólo depende de la estructura de la fórmula, también depende de la estructura de modelo.

Def. 66 *Una propiedad P es Δ_n sii es Π_n y Σ_n.*

Uno de los axiomas que consideraré un poco más adelante, se ocupa de los conjuntos definibles en el mínimo modelo interno que contiene a todos los número reales y de ellos predica que están determinados.

5.3.2.2.3. Algunos resultados interesantes.

Una vez que hemos definido las jerarquía de conjuntos que estudiaremos, podemos preguntarnos cuáles miembros de estas jerarquías tiene la propiedad de Baire, la propiedad del subconjunto perfecto y la propiedad de ser Lesbegue medibles.

Sorpresivamente, o tal vez no tanto, ZFC por sí mismo no tiene el poder suficiente para determinar qué conjuntos tienen qué propiedades. Desde ZFC se puede probar que todos los conjuntos Borel tienen las tres propiedades, el resultado se puede extender a los conjuntos analíticos, los más básicos de la jerarquía de los conjuntos proyectivos (estos resultados se deben a Suslin y Luzin).

Teorema 13 ***(Suslin y Luzin)***

(I) *Todo conjunto analítico de números reales son Lesbegue medibles.*

(II) *Todo conjunto analítico de números reales tiene la propiedad de Baire.*

(III) *Todo conjunto analítico no numerable de números reales contiene un subconjunto perfecto. (Jech, 2003, p. 150)*[25]

[25] "Theorem 11.18.
(i) Every analytic set of reals is Lebesgue measurable.
(ii) Every analytic set has the Baire property.
(iii) Every uncountable analytic set contains a perfect subset." La traducción es mía.

Pero desde ZFC no es posible determinar si conjuntos más complejos en la jerarquía de los proyectivos tiene o no las tres propiedades. De hecho los enunciados que afirmaban que los conjuntos proyectivos tenían estás propiedades fueron considerados por mucho tiempo candidatos serios a ser proposiciones absolutamente indecidibles.[26] Pero como diré a continuación esto ha cambiado drásticamente en las últimas décadas, en especial con la aparición de los axiomas de determinación.

5.3.2.3. Nuevos axiomas para la teoría descriptiva de conjuntos

Los nuevos axiomas de la teoría descriptiva de conjuntos explotan la noción de determinación de conjuntos de reales. La idea central de este nuevo tratamiento consiste en que si un conjunto está determinado entonces cumple con todas las propiedades de interés para el teórico clásico, ser Lesbegue-medibles, tiene la propiedad del subconjunto perfecto y la propiedad de Baire (aunque el resultado no es inmediato, se requiere hacer pruebas para mostrar que de la determinación de un conjunto se sigue que tiene dichas propiedades).

El trabajo comienza definiendo un juego sobre un conjunto de números reales (en este caso los números reales son vistos como funciones de los naturales en los naturales, es decir, sucesiones de números naturales de longitud ω).[27]

Def. 67 *Sea $X \subseteq {}^{\omega}\omega$, $X \neq \emptyset$. Asociamos con X el siguiente juego:*

1	a_0		a_2		a_4		$\dots$
2		a_1		a_3		a_5	$\dots$

Donde para todo a_n, $n \in \omega$. El jugador 1 juega a_0, luego el jugador 2 juega $a_1, \dots$

Sea $a = \langle a_n | n \in \omega \rangle$. El jugador 1 gana sii $a \in X$. El jugador 2 gana sii $a \notin X$. Se denota la juego como $G(X)$.

Una vez que el juego está definido es natural cuestionar sobre si hay estrategias ganadoras por lo menos en el caso de algunos conjunto (estrategias que al seguirla garantice que algunos de los dos jugadores ganen). La noción de estrategia y estrategia ganadora se pueden definir formalmente como sigue.

[26] Por ejemplo, véase (van Atten y Kenedy, 2009) y (Koellner, 2009).

[27] Tomo las definiciones de (Kechris, 1994), aunque hago algunas modificaciones para facilitar la presentación. Cfr. p. 137 y ss.

Def. 68 *Una estrategia para el jugador 1 es una función* $\varphi : \omega^{<\omega} \to \omega$ *tal que* $a_0 = \varphi(\emptyset)$, $a_2 = \varphi(\langle a_1 \rangle)$, $a_4 = \varphi(\langle a_1, a_3 \rangle)$, $\ldots$ *cuando el jugador 2 tira* a_1, a_3, $\ldots$

Def. 69 *Una estrategia* φ *es ganadora para jugador 1 en* $G(X)$ *sii para todas las jugadas posibles* $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ *en las que el jugador 1 siga la estrategia* φ, $a \in X$.

Def. 70 *Una estrategia* φ *es ganadora para jugador 2 en* $G(X)$ *sii para todas las jugadas posibles* $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ *en las que el jugador 2 siga la estrategia* φ, $a \notin X$.

Una vez hecho esto se puede definir cuando un juego sobre un conjunto está determinado, intuitivamente, un juego está determinado cuando algunos de los jugadores puede seguir una estrategia que con toda seguridad lo llevará a la victoria.

Def. 71 *Un juego* $G(X)$ *está determinado sii existe una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.*

Dado que el juego $G(X)$ está definido por X un subconjunto de los números reales, podemos decir simplemente que el conjunto X está determinado. Se puede probar que si todo conjunto Borel está determinado cumple con las propiedades de Cantor-Bendixon, de la categoría de Baire y es Lesbegue-medible. Esto es un gran avance, sobre todo a luz del siguiente resultado.

Teorema 14 ***(Martin)*** *Todo conjunto Borel está determinado.*

Dado que todos los conjuntos Borel están determinados, el problema sobre si los conjuntos Borel tienen o no las tres propiedades se reduce a si están o no determinados. Lo que recupera los resultados previamente obtenidos, pero mediante la noción de determinación.

Sin embargo, esta estrategia tiene sus límites, pues no es posible probar desde ZFC que los conjuntos proyectivos está determinados (o que no lo están) y algo similar sucede con los conjuntos definibles de números reales. Esto llevó a muchos teóricos de conjuntos a postular como axiomas que distintos tipos de conjuntos están determinados, estos axiomas son conocidos como los axiomas de determinación.

5.3.2.3.1. Axioma de determinación (AD).

El axioma más fuerte que puede postularse es que todos los conjuntos de reales están determinados. Este axioma es conocido como el axioma de determinación. **Axioma de determinación (AD):** Para todo $A \subseteq \omega^\omega$, $G(A)$ está determinado.

Este axioma tiene implicaciones muy fuertes para la teoría de conjuntos descriptivos. El AD implica que todo conjunto de números reales es Lesbegue-medible, tiene la propiedad Baire y cumple con Cantor-Bendixon. Desafortunadamente el AD no es compatible con el Axioma de Elección (AC).

Teorema 15 *Suponiendo el axioma de elección, existe una $A \subseteq \omega^\omega$ tal que $G(A)$ no está determinado. (Vease Jech, p. 628)*

Lo que implica que el AD implica la $\neg$AC. Asumiendo que el AC tiene una aceptación generalizada en la comunidad matemática, eso implica que debemos rechazar el AD, pues de otra forma el sistema sería inconsistente. Ahora bien, siguiendo la regla de oro *un paso antes del desastre* podemos preguntarnos si podemos defender axiomas de determinación más débiles que sean compatibles con el AC. Ésta es la estrategia que se explorará a continuación.

5.3.2.3.2. Axioma de la determinación proyectiva (PD).

Dado que desde ZFC se puede probar que los conjuntos Borel están determinados, un primer axioma posible (y que surge de manera casi natural) consiste en afirmar que los conjuntos proyectivos están determinados.

Axioma de la Determinación Proyectiva (PD): Todo conjunto proyectivo está determinado.

Este axioma es independiente de ZFC y por ello requiere de una justificación. Su utilidad se muestra de inmediato, pues PD implica que todos los conjuntos proyectivos tienen la propiedad de Baire, la propiedad del subconjunto perfecto y son Lesbegue medibles. Pero deja abierta la posibilidad de que muchos otros conjuntos no tengan estas propiedades.

5.3.2.3.3. AD$^{L(\mathbb{R})}$

El axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$ afirma que todos los conjuntos de reales en $L(\mathbb{R})$ están determinados, pero todos los conjuntos de reales en $L(\mathbb{R})$ son exactamente los conjuntos de reales que son definibles, pues $L(\mathbb{R})$ es el mínimo modelo interno que contiene a todos los números reales.

Se define el mínimo modelo interno que contiene a todos los elementos de un conjunto dado A, se conoce como $L(A)$. Esto no interesa debido a $L(\mathbb{R})$que es el mínimo modelo interno que contiene a todos los números reales, así que también contiene a todos los conjuntos definibles de reales, que son nuestro objeto de interés.

Def. 72 *Sea A un conjunto. La clausura transitiva de A, $TC(A)$, es la intersección de todos los conjuntos transitivos que contengan a A. Es decir, $TC(A) = \bigcap\{X \mid A \subseteq X \wedge X \text{ es un conjunto transitivo}\}$.*

Def. 73 ***Modelo L(A)*** *Sea $T = TC(\{A\})$. La definición es por recursión sobre los ordinales.*

$L_0(A) = T$,

$L_{\alpha+1}(A) = def(L_\alpha(A))$,

$L_\alpha(A) = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta(A)$ *Si α es un ordinal límite y $\beta < \alpha$,*

$L(A) = \bigcup_{\alpha \in ORD} L_\alpha(A)$.

La clase transitiva $L(A)$ es un mínimo modelo interno de ZF que contiene a A.

Una vez que sabemos qué objeto es $L(\mathbb{R})$ y cuáles son sus elementos, podemos presentar el axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$.

$\boldsymbol{AD^{L(\mathbb{R})}}$**:** Todos los subconjuntos de reales que pertenecen a $L(\mathbb{R})$ están determinados. (Jech, 2003, p. 628)

Este axioma implica que todos los conjuntos de reales definibles en modelos transitivos tiene la propiedad de Baire, la propiedad del subconjunto perfecto y son Lesbegue medibles. Lo que nos da el mapa completo que la Teoría Descriptiva de Conjuntos que se estaba buscando.

5.3.2.3.4. Justificación interna de los axiomas de determinación.

La evidencia interna a favor de estos axiomas tiene que ver con el tipo de estructura que genera sobre los conjuntos de números reales. La primera evidencia interna a favor de los axiomas de determinación es que son consistentes la teoría de base, ZFC.[28] La segunda evidencia interna está dada

[28]La consistencia no se puede probar directamente, como se verá un poco más adelante, la consistencia de los axiomas de determinación con ZFC requiere suponer la existencia de algunos cardinales grandes.

por la descripción de las propiedades de los conjuntos de las jerarquías antes descritas. Hay que recordar que los axiomas de determinación nos garantizan que estos conjuntos definibles de reales cumplen con la propiedad de Baire, la propiedad del subconjuntos perfecto y son Lesbegue medibles. La última evidencia interna tiene que ver con una propiedad estructural de estos conjuntos de la que no he hablado, a saber, la propiedad de ser uniformables.

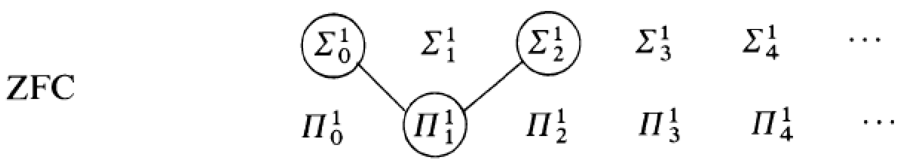
Def. 74 *Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Decimos que A* uniformiza *B sii*

1. *$A \subseteq B$ y*
2. *para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $\langle x, y\rangle \in B$ sii existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $\langle x, y\rangle \in A$.*

El axioma de elección garantiza que todo conjunto es uniformizable por otro conjunto, pues A funciona como un conjunto que muestra una función de elección sobre los pares ordenados de B. La uniformización se vuelve una propiedad interesante cuando se imponen ciertos requisitos sobre los conjuntos de reales que se analizan, por ejemplo la de que los conjuntos que uniformizan sean definibles.

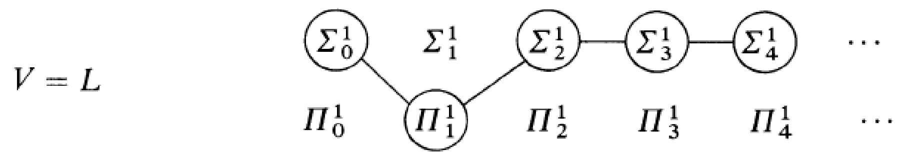
Def. 75 *Un conjunto de números reales Γ tiene la propiedad de la uniformización, $Unif(\Gamma)$, sii todo todo subconjunto del plano que está contenido en Γ es uniformable por un conjunto que también está contenido en Γ.*

El caso que es de nuestro interés es cuando la restricción se aplica a los conjuntos definibles. Desde ZFC se puede probar que ciertos conjuntos de los primeros niveles de la jerarquía son uniformables y otros no lo son, pero no se puede establecer que sucede con los demás conjuntos. Desde ZFC se puede probar que los conjuntos abiertos, los complementos de los conjuntos analíticos y las proyecciones de estos últimos son uniformables. Pero también se puede probar que no todos los conjuntos cerrados, ni los analíticos, ni los completos de estos últimos son uniformables. Esto genera una imagen similar la siguiente:[29]



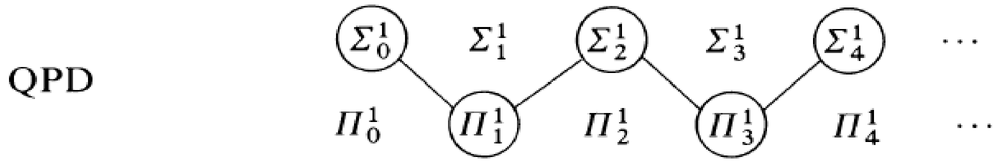
[29]Esta imagen las siguientes son extraídas del texto de (Maddy, 1988b).

Desde ZFC no es posible determinar como continua esta secuencia. Pero, si se asume el axioma de constructibilidad ($V = L$) se puede mostrar que todos los conjuntos Σ^1_n (con $n > 1$) tienen la propiedad de la uniformización, mientras que los conjuntos Π^1_n (con $n > 1$) en general no la tienen. Esto se puede presentar gráficamente de la siguiente forma:



Para muchos, la imagen generada muestra la poca naturalidad del resultado. Parece muy extraño que todos los conjuntos Σ^1_n (con $n \neq 1$) sean uniformables. Mientras que sólo los conjuntos Π^1_1 tengan está propiedad. Por lo menos en principio, este hecho parece extraño y se requiere una explicación. Algunos como filósofos como Penelope Maddy consideran que esto puede ser presentado como evidencia en contra de $V = L$.

Lo que es de interés para fines de la justificación de los axiomas de determinación, es que ellos implican un estructura radicalmente diferente de los conjuntos uniformables. Desde ZFC se puede probar que si los conjuntos Π^1_n son uniformables, entonces los conjuntos Σ^1_{n+1} son uniformables. Además, se puede probar desde ZFC que si los conjuntos Δ^1_n están determinados, entonces si los conjuntos Σ^1_n son uniformables, entonces Π^1_{n+1} también son uniformables. Así que asumiendo el axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$ tenemos que la estructura que es en zigzag, lo que para muchos es más natural.[30]



Este resultado muestra que los axiomas de determinación son incompatibles con el axioma de constructibilidad, lo cual quedará más claro con los resultados que se presentarán en las siguientes secciones.[31]

[30]QDP es el axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$.

[31]Si bien esta clase de argumento se presenta como evidencia a favor de los axiomas de determinación, en mi opinión es una evidencia muy débil. No encuentro una razón clara para sostener que una estructura es más natural que la otra, además que el requerimiento de una explicación es igualmente aplicable a ambas posturas. Creo que la mejor evidencia de los axiomas de determinación está dada por sus consecuencias y sus relaciones con los axiomas de cardinales grandes.

5.3.3. Justificación externa de los axiomas de cardinales grandes y de los axiomas de determinación.

Como ya dije, tanto los axiomas de cardinales grandes, como los axiomas de determinación requieren de una justificación. Hasta ahora he dado una justificación de ellos que apela a los criterios internos, pero no he usado los criterios externos para apoyarlos. A continuación ofreceré una justificación externa de los dos tipos que axiomas, que se basará en las fuertes relaciones interteóricas que estos tienen.

Para ello, presentaré la jerarquía de interpretabilidad que surge del trabajo de Per Lindström, que me servirá para clarificar las relaciones entre los axiomas de grandes cardinales y los axiomas de determinación (además, de servirme posteriormente para analizar el caso de la HC).

5.3.3.1. Jerarquía de la interpretabilidad.

Si una proposición φ es independiente de una teoría T, sabemos que las teoría $T + \varphi$ y $T + \neg\varphi$ son ambas consistentes, pero esto no quiere decir que ambas extensiones tengan el mismo sustento desde el punto de la teoría T. Es posible que desde el punto de vista de la teoría T sea posible interpretar alguna de las dos extensiones posibles (o ambas) de tal forma que esa teoría sea correcta, es decir, que desde la teoría T exista una forma de interpretar las fórmulas de alguna de las dos extensiones de tal forma que la teoría misma pueda construir un modelo de la extensión. Esto requiere más que simplemente la consistencia de relativa de la extensión T respecto a T, pues es posible que T misma no tenga los recursos suficientes para interpretar la extensión y construir un modelo de ella. Por ejemplo, si consideramos ZF-Infinito, una extensión posible es ZF, pero desde ZF-infinito no es posible generar una interpretación de ZF. Lo que muestra que ZF tiene más recursos que ZF-Infinito desde el punto de vista de las teorías que puede interpretar.

La idea central detrás de la jerarquía de interpretabilidad de Lindström es ofrecer una herramienta que nos permita clasificar las teorías considerando qué teorías pueden interpretar a otras teorías.

> Sean S y S' dos teorías arbitrarías. S' es interpretable en S si, más o menos, los conceptos primitivos y el rango de las variables de S' son definibles en S de tal forma que todo teorema de S' de convierta en un teorema de S. Si además todo no-teorema de S' es transformado en un no-teorema de S, entonces S' es fielmente interpretable en S. (Lindström, 1997, p. 75)[32]

[32] "Let S and S' be arbitrary theories. S' is interpretable in S if, roughly speaking, the primitive concepts and the range of the variables of S' are definable in S in such a way as to tum every theorem of S' into a theorem of S. If, in addition every nontheorem of S' is

Intuitivamente una teoría S puede interpretar a otra teoría S' si se pueden traducir las fórmulas de S' al lenguaje de S de tal forma que las traducciones preserven la estructura de las fórmulas de la teoría original y además la traducción de los teoremas de S' son fórmulas del lenguaje de S que también son teoremas (de S). Lo que prueba de algún modo que hay un forma de interpretar la teoría S' desde S de tal suerte que resulte una teoría correcta, la teoría S puede proveer un modelo de la teoría S'.

Esto es de gran utilidad en especial si se considera el caso de proposiciones indecidibles desde una teoría dada. Antes de profundizar en este punto, daré la definición formal de interpretabilidad y para ello es necesario primero dar la definición de traducción (tomo la definición dada por Lindström, misma que está pensada para lenguajes de la aritmética, pero que puede modificarse fácilmente para otros lenguajes).

Def. 76 *Sean S y S' dos teorías arbitrarias. Una traducción (del lenguaje de S' en el lenguaje de S) es una función t del conjunto de las fórmulas (de S') en el conjunto de las fórmulas (de S) para la cual hay fórmulas $\eta_0(x)$, $\eta_s(x,y)$, $\eta_+(x,y,z)$, $\eta_\times(x,y,z)$ y una fórmulas $\mu_t(x)$ tales que satisface las siguientes condiciones para todas las fórmulas φ, ψ, $\xi(x)$:*

$$t(x=y) := x=y,$$
$$t(x=0) := \eta_0(x),$$
$$t(Sx=y) := \eta_s(x,y),$$
$$t(x+y=z) := \eta_+(x,y,z),$$
$$t(x\times y=z) := \eta_\times(x,y,z),$$
$$t(\neg\varphi) := \neg t(\varphi),$$
$$t(\varphi\wedge\psi) := t(\varphi)\wedge t(\psi),$$
$$t(\exists x\xi(x)) := \exists x(\mu_t(x)\wedge t(\xi(x))).$$

(donde x, y, z son variables arbitrarias). Se asume que $\forall$ y las conectivas $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ son definibles en términos de $\exists$, $\neg$, $\wedge$. Nótese que t, sobre las fórmulas para las cuales está definida por las condiciones anteriores, está determinada únicamente por los valores de las fórmulas atómicas[33] junto con las fórmula $\mu_t(x)$.[34] (Lindström, 1997, p.75)[35]

transformed into a nontheorem of S, then S' is faithfully interpretable in S." La traducción es mía.

[33]La definición se puede adaptar para lenguajes con un conjunto diferente de fórmulas atómicas.

[34]La fórmula $\mu_t(x)$ nos ayuda a determinar el dominio de interpretación de la teoría S' como un subconjunto del dominio de objetos de S.

[35]"Let S and S' be arbitrary theories. By a translation (of the language of S' into the language of S) we understand a function t on the set of formulas (of S') into the set of formulas (of S) for which there are formulas $\eta_0(x)$, $\eta_s(x,y)$, $\eta_+(x,y,z)$, $\eta_\times(x,y,z)$ and a

Para tener una modificación para otros lenguajes, lo único que tenemos que hacer es adaptar la definición para que para cada fórmula atómica $\gamma(x)$ del lenguaje de S' exista un fórmula $\eta_\gamma(x)$ tal que $t(\gamma(x)) := \eta_\gamma(x)$. Una traducción así definida, nos permite recuperar la teoría original en términos estructurales. La traducciones de las oraciones de S' tienen aproximadamente la misma estructura que las oraciones originales, la única diferencia es que ahora la estructura de las oraciones está expresada en el lenguaje de S. Pero esto no es suficiente para decir que la teoría S' es interpretable en S, pues bien podría ser que desde el punto de vista de S las oraciones que son teoremas en S' sean consideradas incorrectas (es decir, que no sean teoremas de S). Dicho de una forma menos precisa, pero más entendible, es posible que la teoría S tenga las herramientas para entender la teoría S', pero que no pueda mostrar que hay un modelo de ella. Así, para que una teoría S pueda interpretar a otra S' hay que pedir que las oraciones de S' sean traducibles en el sentido antes descrito, pero hay que pedir que la traducción preserve los teoremas de S'.

Def. 77 *Una traducción t es* una interpretación *sii*

$$S \vdash \exists x \mu_t(x),^{36}$$
$$S \vdash \exists x(\mu_t(x) \wedge \forall y(\mu_t(y) \rightarrow (\eta_0(y) \leftrightarrow y = x))),^{37}$$
$$S \vdash \forall x(\mu_t(x) \rightarrow \exists y(\mu_t(y) \wedge \forall z(\mu_t(z) \rightarrow (\eta_s(z) \leftrightarrow z = y)))),$$

---

formula φ, ψ such that t satisfies the following conditions for all formulas φ, ψ, $\xi(x)$:

$$t(x = y) := x = y,$$
$$t(x = 0) := \eta_0(x),$$
$$t(Sx = y) := \eta_s(x, y),$$
$$t(x + y = z) := \eta_+(x, y, z),$$
$$t(x \times y = z) := \eta_\times(x, y, z),$$
$$t(\neg\varphi) := \neg t(\varphi),$$
$$t(\varphi \wedge \psi) := t(\varphi) \wedge t(\psi),$$
$$t(\exists x \xi(x)) := \exists x(\mu_t(x) \wedge t(\xi(x))).$$

(Here x, y, z are arbitrary variables.) We assume that $\forall$ and the connectives $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ are defined in terms of $\exists$, $\neg$, $\wedge$. Note that t, on the formulas for which it is defined by the above conditions, is uniquely determined by its values on atomic formulas together with the formula $\mu_t(x)$." La traducción es mía.

[36] Esta condición garantiza que el subconjunto del dominio de S que servirá como dominio de la traducción de S' no es vacío.

[37] Para las versiones extendidas, esta condición debe cumplirse para todas las constantes del lenguaje de S'.

> $S \vdash \ \forall xy((\mu_t(x) \wedge \mu_t(y)) \rightarrow \exists z(\mu_t(z) \wedge \forall u(\mu_t(u) \rightarrow (\eta_*(x,y,u) \leftrightarrow u = z)))), * = +, \times.$[38]
>
> Entonces, t es una interpretación en S sii $S \vdash t(\varphi)$ para todo enunciado φ lógicamente válido. t es una interpretación de S' en S, $t : S' \leq S$, sii $S \vdash t(\varphi)$ para todo φ tal que $S' \vdash \varphi$. S' es interpretable en S, $S' \leq S$, si existe una interpretación de S' en S. $S' < S$ significa que $S' \leq S \not\leq S'$. (Lindström, 1997, p.75)[39]

Que una teoría S' sea interpretable en una teoría S significa que desde el punto de vista de S hay una forma de entender los teoremas de S' de tal forma que también sean teoremas de S (que se puede construir un modelo de S' desde el punto de vista de S). Que una teoría S' sea interpretable en una teoría S, implica que si S es consistente, entonces también será consistente S'. Siguiendo estas líneas de razonamiento podemos observar que si una teoría S' no es interpretable desde una teoría S, entonces desde el punto de vista de S no hay forma de entender a la teoría S' de tal suerte que lo que afirman sus teoremas en conjunto sea el caso (desde S no se puede afirmar que la teoría S' sea consistente).

Por ejemplo, si consideramos la teoría PA y la teoría $PA + CONS(PA)$ sabemos (por un análisis metateórico) que ambas teoría son equiconsistentes. Sin embargo, no existe una interpretación de $PA + CONS(PA)$ desde PA, aunque PA si es interpretable desde $PA + CONS(PA)$, es decir, $PA < PA + CONS(PA)$. Por otro lado, PA y $PA + \neg CONS(PA)$ son mutuamente interpretables. Así, $PA + CONS(PA)$ escala en la jerarquía de interpretabilidad respecto a PA, pero $PA + \neg CONS(PA)$ no lo hace.

Definamos ahora la jerarquía de interpretabilidad. Se impondrán ciertas condiciones para facilitar el manejo de la jerarquía (para el caso de la teoría de conjuntos). Las teorías que pertenecen a dicha jerarquía cumplen con 3 condiciones: 1) son expresables en el lenguaje de la teoría de conjuntos, 2)

---

[38] Para las versiones extendidas, esta condición debe cumplirse para todas las funciones de cualquier aridad que sean parte del lenguaje de S'.

[39] "The translation t is *an interpretation in* S iff

$S \vdash \ \exists x \mu_t(x),$

$S \vdash \ \exists x(\mu_t(x) \wedge \forall y(\mu_t(y) \rightarrow (\eta_0(y) \leftrightarrow y = x))),$

$S \vdash \ \forall x(\mu_t(x) \rightarrow \exists y(\mu_t(y) \wedge \forall z(\mu_t(z) \rightarrow (\eta_s(z) \leftrightarrow z = y)))),$

$S \vdash \ \forall xy((\mu_t(x) \wedge \mu_t(y)) \rightarrow \exists z(\mu_t(z) \wedge \forall u(\mu_t(u) \rightarrow (\eta_*(x,y,u) \leftrightarrow u = z)))), * = +, \times.$

Thus, t is an interpretation in S iff $S \vdash t(\varphi)$ for every logically valid sentence φ. t is an interpretation of S' in S, $t : S' \leq S$, iff $S \vdash t(\varphi)$ for every φ such that $S' \vdash \varphi$. S' is interpretable in S, $S' \leq S$, if there is an interpretation of S' in S. $S' < S$ means that $S' \leq S \not\leq S'$." La traducción es mía.

contienen como parte de su teoría ZFC-Infinito,[40] 3) son Σ^0_1-correctas.[41] La jerarquía de interpretabilidad consiste en las teoría antes descritas ordenadas por la relación $\leq$ definida más arriba. La estructura de esta jerarquía puede estudiarse con más o menos buen detalle, lo único necesario es estudiar la relación $\leq$.

> Para comenzar con esto, hay una útil caracterización de la relación de orden. Escribamos $T_1 \subseteq_{\Pi^0_1} T_2$ para indicar que todo Π^0_1-enunciado demostrable en T_1 también es demostrable en T_2. Un resultado central en la teoría de la interpretabilidad es que (concediendo nuestras suposiciones para la simplificación) $T_1 \leq T_2$ sii $T_1 \subseteq_{\Pi^0_1} T_2$. Se sigue de nuestra caracterización y del segundo teorema de incompleción que para toda teoría T la teoría $T{+}Con(T)$ es estrictamente más fuerte que T, es decir, $T < T + Con(T)$. Más todavía, del teorema de la compleción de la aritmetización se sigue que la teoría $T + \neg Con(T)$ es interpretable en T , es decir, $T \equiv T + \neg Con(T)$. (Koellner, 2010a)[42]

Si una fórmula φ es independiente de la teoría T, entonces podemos agregar dicha fórmula o su negación a la teoría T, con lo que generaríamos dos teoría nuevas $T{+}\varphi$ y $T{+}\neg\varphi$. Esto genera tres escenarios posibles en términos de la jerarquía de la interpretabilidad.

(1) Ninguna teoría genera un ascenso en la jerarquía. Esto sucede cuando $T \equiv T + \varphi$ y $T \equiv T + \neg\varphi$. Cuando sucede esto, la fórmula φ es llamada una *oración Orey.*

(2) Sólo una de las dos teoría generadas asciende en la jerarquía. Esto sucede cuando o bien $T < T{+}\varphi$ y $T \equiv T{+}\neg\varphi$, o bien $T < T{+}\neg\varphi$ y $T \equiv T{+}\varphi$.

(3) Ambas teoría generan un ascenso en la jerarquía. Esto sucede cuando $T < T + \varphi$ y $T < T + \neg\varphi$.

---

[40]ZFC-Infinito es una teoría que es mutuamente interpretable con la PA, por lo que el requisito es que contenga por lo menos la teoría de la aritmética de Peano.

[41]Dado que las oraciones Σ^0_1 son aquellas que sólo tienen cuantificadores existenciales no acotados (pero no tienen cuantificadores universales no acotados), el requisito puede entenderse como que la teoría a considerar no afirman que existen objetos que de hecho no existen.

[42]"To begin with, there is a useful characterization of the relation. Let us write $T_1 \subseteq_{\Pi^0_1} T_2$ to indicate that every Π^0_1-statement provable in T_1 is also provable in T_2. A central result in the theory of interpretability is that (granting our simplifying assumptions) $T_1 \leq T_2$ iff $T_1 \subseteq_{\Pi^0_1} T_2$. It follows from this characterization and the second incompleteness theorem that for any theory T the theory $T + Con(T)$ is strictly stronger than T, that is, $T < T + Con(T)$. Moreover, it follows from the arithmetized completeness theorem that the theory $T + \neg Con(T)$ is interpretable in T , hence, $T \equiv T + \neg Con(T)$." La traducción es mía.

Lindström demostró que existen ejemplos de los tres casos. Un ejemplo del primer tipo de fórmula es la HC respecto a ZFC, puesto que ZFC $\equiv$ ZFC+HC y ZFC $\equiv$ ZFC+$\neg$HC. Un ejemplo del segundo tipo está dado por los axiomas de cardinales grandes, por ejemplo, ZFC $<$ ZFC+"Existe un cardinal fuertemente inaccesible" y ZFC $\equiv$ ZFC+$\neg$"Existe un cardinal fuertemente inaccesible". Si bien hay ejemplos del tercer tipo de oraciones, ninguno es un ejemplo que haya sido dado por una teoría matemática, son ejemplos dados a partir de la teoría de la interpretabilidad y algunos los consideran poco naturales.

La jerarquía de la interpretabilidad es tremendamente útil en el caso de la teoría de conjuntos, en especial si se considera que los cardinales grandes nos dan una norma de comparación. Esto se debe a que los cardinales grandes generan un conjunto bien ordenado y podemos comparar extensiones de la teoría de conjuntos respecto a su mutua interpretabilidad con grandes cardinales. Es decir, podemos comparar la fortaleza de dos extensiones de la teoría de conjuntos considerando con que teoría de cardinales grandes es mutuamente interpretable.

> Los axiomas de cardinales grandes presentados más arriba están naturalmente bien ordenados en términos de su fortaleza. Esto proporciona un camino natural para escalar en la jerarquía de la interpretabilidad. En la base, comenzamos con la teoría ZFC-Infinito, después escalamos a ZFC y continuamos hacia arriba mediante teorías de la forma ZFC+Φ con Φ alguno de los diferentes axiomas de cardinales grandes. Nótese que para cualesquiera dos axiomas de cardinales grandes Φ y Ψ, si Ψ es más fuerte que Φ entonces Ψ implica que existe un modelo estándar de Φ y entonces tenemos una interpretación natural de ZFC+Φ en ZFC+Ψ. (Koellner, 2010a)[43]

Así la jerarquía de interpretabilidad nos puede ayudar a establecer la fortaleza de una extensión de la teoría de conjuntos en términos de qué cardinales grandes son necesarios (o suficientes) para establecer la consistencia de la teoría.[44]

> Los axioma de cardinales grandes actúan como intermediarios en la comparación de teorías provenientes de dominios conceptualmente distintos. Para recordar cómo esto funciona: Dadas ZFC+φ y ZFC+ψ se encuentran dos

[43] "The large cardinal axioms discussed above are naturally well-ordered in terms of strength. This provides a natural way of climbing the hierarchy of interpretability. At the base we start with the theory ZFC?Infinity and then we climb to ZFC and up through ZFC+Φ for various large cardinal axioms Φ. Notice that for two large cardinal axioms Φ and Ψ, if Ψ is stronger than Φ then Ψ implies that there is a standard model of Φ and so we have a natural interpretation of ZFC+Φ in ZFC+Ψ." La traducción es mía.

[44] Pueden verse más detalles sobre este punto en el texto (Koellner, 2010a), especialmente en las secciones segunda y cuarta.

> axiomas de cardinales grandes Φ y Ψ tales que (usando los métodos de los modelos internos y los modelos externos) ZFC+φ y ZFC+Φ son mutuamente interpretables y ZFC+ψ y ZFC+Ψ son mutuamente interpretables. Se pueden comparar ZFC+φ y ZFC+ψ (en términos de la interpretabilidad) mediante la natural relación de interpretabilidad entre ZFC+Φ y ZFC+Ψ. (Koellner, 2010a)[45]

Usaremos este hecho para establecer de forma clara las relaciones interteóricas entre diferentes axiomas de determinación y los axiomas de grandes cardinales.

5.3.3.2. Interconexiones teóricas.

En esta sección presentaré algunos resultados que establecen relaciones interteóricas entre los axiomas de determinación y los axiomas de grandes cardinales, que pueden ser fácilmente interpretables en términos de la jerarquía de la interpretabilidad tal como se presentó en la sección anterior.

La primera relación entre los axiomas de cardinales grandes y los axiomas de determinación surgió a partir del trabajo de Martin a finales de la década de los 1960's y los años posteriores. Él mostró que asumiendo la existencia de una cardinal medible, se puede mostrar que todos los conjuntos $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ de números reales están determinados, es decir, que todos los conjuntos analíticos están determinados. En 1980, Martin obtuvo un resultado aún más fuerte. Suponiendo que existe una inmersión elemental iterable no trivial $j : V_\lambda \to V_\lambda$, entonces todos los conjuntos $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ de números reales están determinados.[46] Estos resultados fueron sorprendentes, pero nada comparado el siguiente resultado de Martin y Steel.

Teorema 16 ***(Martin y Steel)*** *Si hay una cantidad infinita de cardinales de Woodin, entonces vale PD.*

En términos de la jerarquía de la interpretabilidad, el teorema muestra que ZFC+$PD \leq$ ZFC+"Hay una cantidad infinita de cardinales de Woodin". Así que si tenemos buenas razones para aceptar la existencia de los cardinales

[45] "[T]he large cardinal axioms act as intermediaries in comparing theories from conceptually distinct domains. For recall how this works: Given ZFC+φ and ZFC+ψ one finds large cardinal axioms Φ and Ψ such that (using the methods of inner and outer models) ZFC+φ and ZFC+Φ are mutually interpretable and ZFC+ψ and ZFC+Ψ are mutually interpretable. One then compares ZFC+φ and ZFC+ψ (in terms of interpretability) by mediating through the natural interpretability relationship between ZFC+Φ and ZFC+Ψ." La traducción es mía.

[46] Estos resultados y los que son presentados a continuación pueden verse en (Koellner, 2004, p. 204 y ss).

de Woodin (y otros cardinales más grandes), también tenemos buenas razones para aceptar el axioma de determinación proyectiva. El siguiente teorema de Woodin amplía la conexión de los cardinales grandes y los axiomas de determinación.

Teorema 17 ***(Woodin)*** *Si hay una cantidad infinita de cardinales de Woodin y un cardinal medible sobre todos ellos, entonces vale $AD^{L(\mathbb{R})}$.*

Este teorema establece una conexión fuerte entre los cardinales grandes y el axioma de determinación más fuerte que habíamos considerado (y que era consistente con el AC). Esto establece la relación más fuerte posible entre los axiomas de determinación que estamos considerando y los axiomas de grandes cardinales, pero en un sólo sentido. Todavía es posible que los axiomas de grandes cardinales no sean interpretables en la teoría que resulta de agregar a ZFC el axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$. Pero dicha posibilidad es cancelada por el siguiente resultado de Woodin.

Teorema 18 ***(Woodin)*** *Si vale $AD^{L(\mathbb{R})}$, entonces hay un modelos interno N de ZFC + "Hay ω cardinales de Woodin".*

Este resultado establece la conexión completa entre los axiomas de determinación y los axiomas de grandes cardinales. ZFC+$AD^{L(\mathbb{R})}$ es mutuamente interpretable con ZFC + "Hay ω cardinales de Woodin y un cardinal medible sobre todos ellos". Así que tenemos buenas razones para aceptar los axiomas de determinación si aceptamos los axiomas de grandes cardinales (en especial, los cardinales de Woodin), y viceversa. Este método de justificación de estos axiomas es externo y se apoya en los resultados obtenidos.

Estos resultados son suficientes para los objetivos de este trabajo, pero hay algunos otros teoremas que dan aún más fuerza a las conexiones interteóricas entre estos cardinales. El primero de ellos muestra que los cardinales de Woodin están conectados no sólo son los axiomas de determinación que son consistentes con el axioma de elección, sino que la conexión se extiende a AD:

Teorema 19 ***(Woodin)*** *Los siguientes enunciados son equiconsistentes:*

(I) ZFC + "Hay una cantidad infinita de cardinales de Woodin".

(II) ZF + AD. (Jech, 2003, p. 642)[47]

[47] "Theorem 33.27 (Woodin). The following are equiconsistent :

(I) ZFC + "There exist infinitely many Woodin cardinals."

(II) ZF + AD."

La traducción es mía.

Así que si decidimos abandonar el axioma de elección, la conexión interteórica de los cardinales de Woodin alcanzaría al axioma de determinación.

5.3.3.3. Reflexión filosófica sobre estos resultados.

En las secciones previas, he dado argumentos a favor de la aceptación tanto de los axiomas de cardinales grandes como de los axiomas de determinación, usando criterios internos y externos. Sin embargo, creo que los axiomas de cardinales grandes tienen un soporte más sólido que los axiomas de determinación. Si bien es cierto que los axiomas de determinación dan una idea clara y precisa del comportamiento de los conjuntos de reales, en términos de la TDC, también es cierto que no tenemos ideas preteóricas lo suficientemente sólidas para considerar que la descripción ofrecida por estos axiomas es correcta (o siquiera la esperada). No parece haber nada en los objetivos de la teoría de conjuntos, ni el objetivos de las teoría de conjuntos descriptiva que nos ofrezca una guía clara para creer que el comportamiento de los conjuntos de reales debe ser esto o aquel.

Afortunadamente, los axiomas de cardinales grandes sí cuentan con un apoyo un poco más sólido, a saber, los principios de maximalidad, exhaustividad, etcétera (que están justificados en última instancia en la noción iterativa de conjunto y en los objetivos de la teoría de conjuntos). Este apoyo es transmitido a los axiomas de determinación, debido a las relaciones interteóricas que existen entre ambos tipos de axiomas. Si bien el apoyo es mutuo y muy fuerte, en mi opinión los axiomas de determinación son los que más beneficiados son por estás conexiones (en términos de su justificación).

Para concluir con esta sección, quiero hacer notar que los axiomas de determinación y los axiomas de cardinales grandes explican de manera exhaustiva el comportamiento de los conjuntos que son de interés para la teoría descriptiva de conjuntos. Sin embargo, esto no es de demasiada ayuda para resolver el problema del continuo.

5.4. El caso de la Hipótesis del continuo.

Regresemos ahora a nuestro objeto de interés principal, la Hipótesis del Continuo. La HC es una oración del lenguaje de la aritmética de tercer orden y es expresable por una fórmula Σ^2_1, pues afirma la existencia de una cierta función que biyecta al conjunto de los números naturales con $\aleph_1$. Ahora bien, es importante mencionar que existen tres formas de presentar la HC. Si bien todas las versiones de la HC son equivalentes desde el punto de vista de ZFC, me será útil presentarlas, pues un poco más adelante analizaré la propuesta de Chris Frieling que entre otras cosas rechaza el axioma de elección. Desde el punto de vista de la teoría de Frieling, las tres versiones de la HC no son equivalentes y, de hecho, una de ellas será verdadera y dos serán falsas. Algo similar pasa si aceptamos el axioma de determinación y rechazamos el axioma de elección.

5.4.1. Tres versiones de la HC.

Existen tres versiones de la HC, generalmente no se establece la diferencia entre ellas debido a que son equivalentes desde el punto de vista de ZFC.

5.4.1.1. Versión interpolante.

La primera es la versión interpolante. Esta versión afirma que no existe un subconjunto de los número reales de cardinalidad infinita, tal que su cardinalidad sea intermedia entre el cardinal de los números reales y el cardinal de los números naturales.

HC Interpolante: $\neg\exists X \subseteq \mathbb{R}\ \aleph_0 < |X| < |\mathbb{R}|$.

Esta versión es especialmente útil para establecer conexiones entre la HC y algunos resultados de la teoría descriptiva de conjuntos, pues (como expliqué en las secciones anteriores) algunos resultados muestran que ciertos subconjuntos infinitos de números naturales son tales que su cardinalidad es $\aleph_0$ o es la cardinalidad del continuo, es decir, ellos cumplen con la versión de la interpolación de la HC.

5.4.1.2. Versión del buen orden.

La segunda versión de la HC se ocupa de los buenos ordenes que se pueden definir sobre subconjuntos de los números reales. Esta versión afirma que todos los buenos ordenes que se pueden definir sobre subconjuntos de los números reales son estrictamente menores a ω_2.

HC Buen Orden: $\forall X \subseteq \mathbb{R}\ \forall R \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \forall\alpha \in ORD\ ((X,R) \cong (\alpha,\in) \supset \alpha < \omega_2)$.

Esta versión de la HC es equivalente dos versiones, sólo si aceptamos el axioma de elección. La razón es que sin el axioma de elección no tenemos la garantía de que los subconjuntos de los números reales sea bien ordenables. Algo similar sucede con la siguiente versión de la HC.

5.4.1.3. Versión de la biyección.

La última versión de la HC se concentra en las funciones que existen entre el cardinal del continuo y los alephs. La versión se puede presentar de dos formas. La primera afirma que existe una biyección entre el conjunto de los números reales y el cardinal $\aleph_1$. La segunda afirma que no existe un función sobreyectiva entre el conjunto de los números reales y el cardinal $\aleph_2$.

HC Biyección 1: $\exists f : \mathbb{R} \to \aleph_1 \forall \alpha \in \aleph_1 \exists! r \in \mathbb{R}\ f(r) = \alpha$.

HC Biyección 2: $\neg \exists f : \mathbb{R} \to \aleph_2 \forall \alpha \in \aleph_2 \exists r \in \mathbb{R}\ f(r) = \alpha$.

Esta versión supone el axioma de elección, puesto que de otra forma no hay garantía de que el cardinal del continuo sea algún , ni que exista una forma de biyectar el conjuntos de los números reales con alguno de ellos.

5.4.1.4. Diferentes versiones de la HC y el axioma de determinación.

Como ya adelante, las tres versiones de la HC no son equivalentes en algunos sistemas diferentes a ZFC. Por ejemplo, si aceptamos el axioma de determinación la HC es falsa en su versión de biyección con $\aleph_1$, pero verdadera en la versión interpolante. Esto se debe a que el AD implica la negación del AC. Así que no hay garantía de que el conjunto de los números reales sea bien ordenable (de hecho, se puede probar que no es bien ordenable) y, por tanto, tampoco hay garantía de que sea biyectable con $\aleph_1$.

Dado que el AD implica que todos subconjuntos de números reales tienen la propiedad del subconjunto perfecto, esto implica que todos los subconjuntos infinitos del conjuntos de los números reales tienen la cardinalidad del continuo o tienen cardinalidad $\aleph_0$. por lo que vale la versión interpolante. Y si existiese una biyección entre el conjunto de los números reales y $\aleph_1$, entonces se podría construir un buen orden sobre el conjunto de los números reales y, en consecuencia, también se podría construir un subconjunto de los reales que no estaría determinado, generando una contradicción.

5.4.2. Evidencias en contra y a favor.

En esta sección presentaré algunos de los argumentos que tradicionalmente se han presentado a favor y en contra de la HC (y de la HGC) y que fueron recopilados por Maddy en su (1988a). Esta sección tiene como principal objetivo mostrar que estos argumentos y evidencias no son conclusivos y que si bien pueden ayudar a arrojar alguna luz sobre el problema del continuo, en la mayoría de los casos no aportan evidencia contundente ni a favor ni en contra de la HC.

5.4.2.1. Evidencia en contra.

Comenzaré presentando los argumentos que pretenden ofrecer evidencia en contra de la HC y de la HGC (algunos ya han sido esbozados en capítulos anteriores).

5.4.2.1.1. Consecuencias contraintuitivas.

Como ya dije en el capítulo tres, Gödel tenía la firme creencia de que la HC del continuo era falsa y que la prueba de su independencia sólo mostraba la necesidad de buscar más axiomas para completar la teoría de conjuntos.

> En [1947/64], Gödel argumenta que la HC es falsa debido a que tiene "consecuencias altamente implausibles" (p. 479) (Maddy, 1988a, p. 495)[48]

Sin embargo, Gödel no pudo nunca formular de manera completamente clara algunas de sus objeciones y, en cualquier caso, se puede afirmar que $\neg$HC puede tener también consecuencias contraintuitivas.[49]

5.4.2.1.2. La HC es restrictiva.

Este argumento en contra de la HC pretende mostrar que es muy restrictiva debido a que es verdadera en el universo constructible de Gödel, L, y en opinión de muchas personas este modelo interno mínimo de ZFC es demasiado pobre como para ser considerado el universo de los conjuntos, V. Nosotros podemos reforzar esta idea apelando al resultado de Scott citado más arriba y que muestra que si aceptamos la existencia de cardinales medibles, entonces el axioma de constructibilidad es falso. Dado que he dicho que tenemos buenas razones para aceptar los cardinales medibles, en mi opinión también tenemos buenas razones para rechazar $V = L$. Sin embargo, esto no implica que la conexión entre la HC y el universo L sea muy estrecha, es perfectamente posible que HC sea verdadera en modelos que si sean candidatos plausibles a ser el universo conjuntista. Además, Maddy nos hace notar que algunos principios que consideramos maximizadores, en lugar de restrictivos, también valen en L. Así, que el defensor de este argumento tiene que explicar porque este no puede ser el caso de HC, es decir, que también sea un principio maximizador.

[48] "Gödel's counterintuitive consequences. In [1947/64], Gödel argues that CH is false because it has certain 'highly implausible consequences' (p. 479)." La traducción es mía.

[49] Creo algunas de las proposiciones que son consecuencia de HC y de $\neg$HC (si no es que todas) difícilmente pueden ser apoyadas por nuestras intuiciones y la razón es simple, creo que a diferencia de la teoría de números, la teoría de los números reales no está apoyada de manera clara por intuiciones preteóricas fuertes.

> Como mencione antes, quizá algunas de las razones por las que HC es considerada restrictiva es porque es verdadera en L. Si esta línea de argumentación tiene alguna fuerza, debe primero enfrentar un difícil reto, a saber, que el Axioma de Elección, generalmente considerado por sí mismo como un principio maximizador, también es verdadero en L. (Maddy, 1988a, p. 497)[50]

Maddy ofrece un argumento que muestra que al igual que en el caso del AC, L es modelo de HC no por una característica propia de ésta, sino por la forma tan restrictiva de realizar la construcción de este modelo. La construcción de L se realiza por fases y cada fase permite la construcción de un número muy limitado y controlado de nuevos conjuntos (tal como expliqué en el capítulo 2), así que no es de extrañarse que el tamaño del conjuntos de los reales crezca muy poco, ni que se pueda generar un buen orden sobre todos los conjuntos de L (hecho se usa en la prueba de que $L \models AC$).

> La HC es verdadera en L porque todos los subconjuntos constructibles de ω aparecen en L_{ω_1}, y L_{ω_1} tiene una cardinalidad pequeña. Pero, ¿por qué es una cardinalidad pequeña? Porque el limitado método de formación de subconjuntos en L sólo admite a lo más un nuevo elemento por cada fórmula y cada secuencia finita de parámetros. Entonces, la HC es verdadera en L porque la formación de subconjuntos está artificialmente restringida, no porque alguna otra condición patológica en L le este robando su fuerza maximizadora. (Maddy, 1988a, p. 495)[51]

Esto muestra que el hecho de que $L \models HC$ no implica mucho sobre la naturaleza misma de HC y, por tanto, tampoco sirve como un argumento sólido en su contra.

5.4.2.1.3. El axioma del conjunto potencia es más fuerte que el axioma de reemplazo.

Este argumento se debe a Paul Cohen, quien fue el creador del método de *forcing* y abiertamente defiende una postura formalista en filosofía de las matemáticas. Él consideraba que las pruebas de independencia mostraban que

[50] "CH is restrictive (against). As mentioned earlier, perhaps some of the reason CH is felt to be restrictive is because it is true in L. If this line of thought is to have any force, it must first meet a difficult challenge, namely that the Axiom of Choice, generally regarded as a maximizing principle in itself, is also true in L." La traducción es mía.

[51] "CH is true in L because all the constructible subsets of ω appear in L_{ω_1}, and L_{ω_1} has small cardinality. But why is that cardinality small? Because the limited procedure of subset formation in L only allows at most one new element for every formula and finite sequence of parameters. Thus CH is true in L because the formation of subsets is artificially restricted, not because some other pathological condition in L is robbing it of its maximizing force." La traducción es mía.

se podían construir teorías de conjuntos alternativas que extendieran ZFC y consideraba que el valor de verdad de la HC era relativo al modelo en el que era interpretada la teoría. Sin embargo, consideraba que era importante reflexionar sobre el tipo de operaciones que eran utilizadas para generar los conjuntos involucrados en la HC. Por un lado están los cardinales que son generados mediante el axioma de remplazo y por otro lado está el conjunto de los números reales que es generado mediante el axioma del conjunto potencia. En opinión de Cohen, el axioma de reemplazo es un axioma tal que genera conjuntos de forma ordenada y controlada. Los $\aleph's$ son conjuntos generados por la operación sucesor y mecanismo igualmente inocuos. En contraste, para Cohen el axioma del conjunto potencia genera conjuntos cuyo tamaño es inmenso y es poco probable que los cardinales y otro conjuntos generados mediante el axioma de reemplazo puedan nunca alcanzar el tamaño de los conjuntos generados por el axioma del conjunto potencia. En sus propia palabras:

> Ahora $\aleph_1$ es el conjunto de todos los ordinales contables y esto es meramente un camino espacial y simple de generar cardinales grandes. El conjuntos C [el conjunto de los reales] es, en contraste, generado por un principio totalmente nuevo y poderoso, llamado el Axioma del Conjunto Potencia. Es poco razonable esperar que cualquier descripción de un cardinal grande cuyo objetivo es incrementar ese cardinal a partir de ideas derivadas del axioma de Reemplazo puedan nunca alcanzar C. Entonces C es más grande que $\aleph_n$, $\aleph_\omega$, $\aleph_\alpha$, donde $\alpha = \aleph_\omega$, etc. Este punto de vista considera a C como un conjunto increíblemente rico, dado a nosotros por un audaz nuevo axioma, el cual nunca puede ser alcanzado por ningún proceso de construcción paso a paso. Quizá futuras generaciones verán el problema con mayor claridad y lo expresen ellos mismo con más elocuencia. (Cohen, 1966, p. 151)[52]

El argumento presentado por Cohen puede, en un principio, parecer atractivo, especialmente considerando que el axioma del conjunto potencia es considerado problemático debido justo a que al ser aplicado a conjuntos infinitos genera conjuntos de mayor cardinalidad, aunque no sabemos exactamente cuál sea su cardinalidad. El problema claro con el argumento de Cohen es que se basa en una intuición básica acerca del contraste entre el axioma de

[52] "Now $\aleph_1$ is the set of countable ordinals and this is merely a special and the simplest way of generating a higher cardinal. The set C is, in contrast, generated by a totally new and more powerful principle, namely the Power Set Axiom. It is unreasonable to expect that any description of a larger cardinal which attempts to build up that cardinal from ideas deriving from the Replacement Axiom can ever reach C. Thus C is greater than $\aleph_n$, $\aleph_\omega$, $\aleph_\alpha$, where $\alpha = \aleph_\omega$, etc. This point of view regards C as an incredibly rich set given to us by a bold new axiom, which can never be approached by any piecemeal process of construction. Perhaps later generations will see the problem more clearly and express themselves more eloquently." La traducción es mía.

reemplazo y el axioma del conjunto potencia; pues, justo el problema del continuo consiste en determinar qué tanto crecen los conjuntos infinitos al aplicarles el axioma del conjuntos potencia. Por lo que sabemos es perfectamente posible que el axioma del conjunto potencia no genere conjuntos de cardinal desmesuradamente grade, por ejemplo, si la Hipótesis Generalizada del Continuo es cierta, entonces el crecimiento es el mínimo posible.

Quiero hacer notar que el argumento de Cohen en caso de ser correcto implicaría no sólo que la HC es falsa, sino que el cardinal del continuo debe ser por lo menos el primer cardinal fuertemente inaccesible, que es el primer cardinal que no puede ser generado por las operaciones usuales y el axioma de reemplazo.[53]

5.4.2.1.4. Finitismo en contra de HGC.

Este argumento parte una interpretación particular de la regla de oro *finitismo cantoriano*. Como dije un poco antes, esta regla de oro afirma que los conjuntos infinitos deben ser muy similares a los conjuntos finitos. En este caso se trata de extrapolar a los conjuntos infinitos las propiedades de la operación exponenciación cuando es aplicada a los números finitos.

> Aquí el argumento depende de una analogía con los números finitos, donde $n + 1 = 2^n$ es verdadera sólo para el 0 y el 1. Esto para algunos constituye un argumento en contra de la HGC, no es en contra del caso particular de la HC. (Maddy, 1988a, p. 499)[54]

Una observación cuidadosa del argumento nos permite ver que la analogía que pretende ser usada no es del todo afortunada. En primer lugar, existen dos tipos de números transfinitos, a saber, los números ordinales y los números cardinales. Cada uno de ellos tiene una operación de exponenciación y no es claro el porqué la propiedad que se quiere extrapolar debe ser aplicada a los números cardinales y no a los números ordinales, dado que en ninguno de los dos casos se cumple con lo requerido. En segundo, lugar no es claro porque se recurre al número dos para definir la exponenciación, en algunas reconstrucciones del conjunto de los números reales no se consideran

[53]Una intuición similar a la de Cohen puede sostener que el axioma del conjunto potencia no necesariamente genera conjuntos desmesuradamente grandes, pero si muy complejos, tan complejos que no pueden ser bien ordenados. En este caso, el defensor de esta postura puede argumentar que hay buenas razones para abandonar el axioma de elección y sostener que la HC es falsa en su versión biyectiva, aunque puede ser verdadera en su versión interpolante. Chris Freiling defiende una postura similar.

[54]"Here the argument depends on analogy with the finite numbers, where $n + 1 = 2^n$ is true only for 0 and 1. This is felt by some to constitute an argument against the GCH, if not against the particular case of the CH." La traducción es mía.

las funciones de ω en 2, sino las funciones de ω en ω. En tercer lugar, no es claro si la operación sucesor en los números finitos y la operación sucesor en los cardinales infinitos sean equiparables, pues los incrementos de tamaño en ambas son de naturalezas muy distintas.

Si bien creo que el finitismo cantoriano puede ser un buen criterio para la aceptación de nuevos axiomas, no es una regla que pueda ser aplicada de forma tan específica, pues primero tendríamos que encontrar una justificación de como relacionar una parte específica de los conjuntos infinitos con una parte específica de los conjuntos finitos. Esto es más patente si consideramos el uso que se le ha dado a esta regla de oro en la justificación de otros axiomas. En general, esta regla de oro sirve para extrapolar propiedades que cumplen todos los conjuntos finitos a todos los conjuntos infinitos.

5.4.2.1.5. Identidad extravagante en contra de HGC.

El argumento de la identidad extravagante es otro argumento que recurre a una aplicación de la regla de oro del *finitismo cantoriano* y usa la misma evidencia que en el caso anterior, así que se le aplican las misma críticas que ya he dado. El argumento en palabras de Maddy:

> Este argumento depende de los mismo hechos que el argumento finitista, pero los usa de una forma diferente. Notemos que si la HGC fuese verdadera, entonces $\aleph_0$ podría definirse como aquel cardinal tal que la HGC es falsa antes de él y es verdadera después de él (excepto por el 0 y el 1). Pero esta identidad podría parecer "accidental", como la identidad entre "humano" y "bípedo implume". Mientras que el universo físico puede ser demasiado pobre para falsear tales identidades accidentales, el universo de la teoría de conjuntos podrías ser lo suficientemente rico para descartarlas. Por lo tanto, la HGC es falsa. [...] Por supuesto esta línea de argumentación muestra considerables dificultades para explicar qué significa "accidental", y cómo esta identidad particular puede verse como teniendo tal propiedad. (Maddy, 1988a, p. 499)[55]

5.4.2.1.6. El balance delicado.

[55] "This argument depends on the same facts as the finitism argument, but it uses them in a different way. Notice that if the GCH were true, then $\aleph_0$ could be defined as that cardinal before which GCH is false and after which it is true (excepting 0 and 1, of course). But this identity would seem "accidental", like the identity between "human" and "featherless biped". While the physical universe might be too impoverished to falsify such accidental identities, the set-theoretic universe should be rich enough to rule them out. Therefore, GCH is false. [...] Of course this line of argument faces considerable difficulties in explaining what is meant by "accidental", and how this particular identity can be seen to have that property." La traducción es mía.

Este argumento fue presentado por Wang en su (1974), aunque él no es un defensor del argumento. El argumento consiste en sostener que si $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ entonces existiría un balance delicado entre el conjuntos de los números reales y el conjuntos de los ordinales de cardinalidad $\aleph_0$. Aunque no es claro a que se refiere ese delicado equilibrio lo mismo pasaría si $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ para cualquier $\alpha \in ORD$, en tanto el equilibrio sería delicado entre los números reales y los ordinales de cardinalidad $\aleph_\alpha$.

5.4.2.1.7. Frieling y los axiomas de simetría.

En 1986, Chris Freiling presentó una alternativa para abordar el problema. La estrategia de Freiling fue diseñar un experimento mental para mostrar que la HC es falsa, usando únicamente los recursos de ZFC y algunas intuiciones sobre procesos estocásticos y principios de simetría, que desde su punto de vista no se podían someter a duda.

El experimento mental es como sigue. Imaginemos que estamos jugando a tirar dardos, la peculiaridad de nuestro juego es que el blanco es el intervalo [0,1]. Esto significa que cada uno de nuestros tiros selecciona un número real que pertenezca al intervalo [0,1], es como suponer que nuestro dardo tiene una punta infinitamente delgada. Puede parecer un poco antiintuitivo pensar en lanzar dardos a la línea de los reales, pero parece que podemos concederlo, después de todo parece que todo el tiempo cuando hablamos de conjuntos infinitos nos permitimos hacer generalizaciones de procesos finitos al campo de lo infinito. El experimento consiste en tirar dos dardos a la línea de los reales pero garantizando que las tiradas sea 1) al azar, 2) independientes y 3) simétricas.

Aclaremos que se quiere decir con cada uno de esos requisitos.

Al azar: Cualesquiera dos intervalos del mismo tamaño tiene la misma posibilidad de ser alcanzados por un dardo. Es decir, que dado un subconjunto A del intervalo [0,1] la $Pr(x \in A) = \mu(A)$, donde μ es una medida Lesbegue.

Independencia: Si dos tiradas son independientes ninguna afecta a la otra. Es decir, si A y B son subconjuntos de [0,1], entonces $Pr(x \in A \mid x \in B) = Pr(x \in A)$ y $Pr(x \in B \mid x \in A) = Pr(x \in B)$.

Simetría: Dado que las dos tiradas son al azar e independientes, se puede suponer sin problemas que cualquiera de ellas fue la primera.

Frieling utiliza este este experimento para justificar sus axiomas de simetría. El más simple de ellos $A_{\aleph_0}$ sostiene que para cualquier función f del conjunto de los números reales al conjunto de todos los subconjuntos numerables de los reales, existen un par de números reales x_1 y x_2 tales que ninguno cae en la imagen del otro baja la función f. Tal como sucedería si la situación de su experimento mental puede cumplirse.

Axioma $A_{\aleph_0}$: $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\aleph_0} \exists x_1 x_2 \in \mathbb{R}(x_1 \notin f(x_2) \wedge x_2 \notin f(x_1))$

Frieling muestra que $A_{\aleph_0}$ es equivalente $\neg$HC. Con lo que parecería mostrar que la HC es falsa. Sin embargo, esto sólo se logra en apariencia, pues en el fondo el experimento mental está suponiendo que la negación de la HC.[56] Esto puede verse con mayor claridad si se considera un axioma de simetría más fuerte propuesto por Frieling.

Axioma $A_{<2^{\aleph_0}}$: $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{<2^{\aleph_0}} \exists x_1 x_2 \in \mathbb{R}(x_1 \notin f(x_2) \wedge x_2 \notin f(x_1))$

Este axioma de simetría implica la negación del axioma de elección, así que en el fondo nos dice que el cardinal del continuo no es un $\aleph$. Es interesante notar que de acuerdo a los axiomas de simetría la HC es verdadera en su versión interpolante y falsa en las otras dos versiones. Si bien esta propuesta puede ser interesante, no profundizaré más en ella, pues al igual que en el caso de AD, implica el abandono del axioma de elección (algo que no es aceptado por la tradición matemática que estoy estudiando).

5.4.2.2. Evidencia a favor.

Como espero haber mostrado los argumentos en contra de la HC son muy débiles y no pueden ser tomados como conclusivos. En esta sección presentaré los argumentos a favor de la HC y espero mostrar que no son mucho mejores que los argumentos en contra.

5.4.2.2.1. Resultados parciales.

Este argumento se apoya en la evidencia generada por los resultados en la teoría descriptiva de conjuntos. Como dije arriba, si un conjunto de números reales tiene la propiedad del subconjunto perfecto, entonces no puede ser un contraejemplo para la HC. Desde ZFC se puede mostrar que todos los conjuntos Borel y los analíticos cumple con está propiedad. La esperanza de muchos es que este tipo de evidencia se pueda generalizar hasta mostrar que la HC es verdadera. Sin embargo, como hemos dicho antes desde ZFC estos resultados no pueden extenderse para conjuntos de números reales de una complejidad mayor.

[56]Para profundizar en la discusión véase (Brown, 2008, cap. 11) que incluye una versión alternativa del argumento. También véase (Bartha, 2011) que incluye un argumento fuerte en contra de estos experimentos mentales, aunque creo que su crítica no es del todo afortunada pues no alcanza a ver que Frieling propone la eliminación del axioma de elección.

Pero incluso si aceptamos extensiones de ZFC que atribuyan a conjuntos de números reales cada vez más complejos, la evidencia ofrecida por estos resultados es claramente insuficiente para aceptar la HC. Supongamos por un momento que aceptamos el axioma de determinación más fuerte que es consistente con el axioma de elección, a saber, $AD^{L(\mathbb{R})}$ y por tanto que tenemos todos los resultados que dimos con algún detalle en las secciones anteriores. Apelando a estos resultado podemos tener la certeza de que ningún conjunto definible puede ser un contraejemplo para la HC. Sin embargo, esto no implica que todos los conjuntos de números reales tengan estás propiedades. De hecho, el axioma de elección implica que existen conjuntos de números reales no numerables que no tienen la propiedad del subconjunto perfecto y en consecuencia pueden ser posibles contra ejemplos para la HC. Así que aunque los avances en teoría de conjuntos descriptivos son impresionantes no son útiles para presentar un caso a favor de la HC.[57]

5.4.2.2.2. La efectividad de HGC.

Este argumento considera como evidencia a favor de la HGC los resultados que nos ofrece en aritmética cardinal. La idea central es que si asumimos la HGC tenemos una descripción completa del funcionamiento de la operación exponenciación cardinal.

Este argumento puede ser atacado por lo menos de dos formas. La primera forma apela que el hecho de que se dé una descripción completa y sencilla del funcionamiento de la exponenciación cardinal no implica que dicha descripción sea correcta. La segunda es que pueden existir otras posibles respuestas que ofrezcan una descripción completa del funcionamiento de esta operación y que sean compatibles con la negación de la HGC.

5.4.2.2.3. Una reflexión sobre los argumentos que recurren a consecuencia de la HC.

Muchos de los argumentos a favor y en contra de la HC (y de la HGC) recurren a implicaciones tanto de HC como de su negación. Un esquema general de estos argumentos puede ser el siguiente.

1. ZFC+HC (o ZFC+¬HC) implican que φ.

[57] Un poco más adelante, argumentaré que estos resultados de hecho ayudan a mostrar que la HC es absolutamente indecidible, en tanto muestran que los axiomas de determinación ofrecen ya una descripción completa de la aritmética de segundo orden. Por lo que ni la HC ni su negación tienen implicaciones relevantes en dicha teoría y por ello mismo el problema del continuo no puede ser decidido apelando a criterios externos.

2. φ es plausible, o natural, o cumple nuestras expectativas.

/ $\therefore$ Debemos aceptar HC (o $\neg$HC).

Creo que hay buenas razones para desechar todos los argumentos que tengan esta forma.

Para que estos argumentos sean en principio razonables, φ debe ser una oración indecidible desde ZFC, de otra forma no podría servir como evidencia ni a favor ni en contra de HC. Tampoco debe suceder que tanto HC como $\neg$HC tengan como consecuencia a φ, pues, de nueva cuenta, esto no podría ser evidencia adecuada para argumentar por un caso o por otro. Así que φ debe ser consecuencia de ZFC+HC, pero no ser consecuencia de ZFC+$\neg$HC (o viceversa).

El problema principal es entonces que φ es una oración tal que está en una situación muy similar a la HC, respecto a nuestras intuiciones sobre su verdad, naturalidad, etcétera. Al ser φ una proposición indecidible respecto a ZFC, ella misma necesita una justificación para ser aceptada. La justificación debe ser dada ya sea por criterios internos o por criterios externos. Hay dos casos posibles, a saber, que φ sí sea justificable en términos de estos criterios o bien que no lo sea.

Si φ no es justificable por medio de criterios internos o externos, entonces no sirve como evidencia a favor o en contra de HC, pues tiene un estatus igualmente dudoso. Por ejemplo, el comportamiento uniforme de la exponenciación cardinal que se obtiene al aceptar la HGC es algo tan cuestionado como la HGC, así que difícilmente este resultado puede servir como evidencia sólida a favor de ésta.

Si φ sí es justificable apelando a nuestros criterios, entonces sí puede ofrecer evidencia sólida a favor de HC (o de su negación). Sin embargo, ninguno de los casos presentes en la literatura cumple con este requisito.[58] Y en todo caso, si φ fuese justificable, esto ofrecería una forma de justificar directamente a la HC (o a $\neg$HC).

Es por esto que en mi opinión, las pruebas de este estilo no son útiles y el mejor camino para argumentar respecto a la HC es buscar su justificación directa de ella (o algún axioma que la implique) apelando a los criterios internos y externos.

[58]Como mostraré a continuación, esto se debe a que los criterios internos y externos disponibles para la tradición que estoy analizando no son suficientes para resolver el problema del continuo.

5.4.3. Resultados limitativos, criterios de aceptación de nuevos axiomas y las indecidibilidad absoluta de la HC.

En esta sección presentaré cuatro resultados de la teoría de conjuntos que imponen límites a los criterios de justificación y aceptación de nuevos axiomas para ZFC. Cada uno de ellos muestra que ciertos criterios internos y/o externos no son suficientes para justificar la aceptación de la HC (o de axiomas más fuertes que la impliquen). Una vez presentadas estos resultados podré argumentar que los criterios elegidos para la justificación de nuevos axiomas que extiendan ZFC no son suficientes para decidir la HC y, por tanto, la HC es absolutamente indecidible desde el punto de vista de la tradición matemática que fue objeto de nuestro estudio. También ofreceré un pequeño diagnóstico sobre la posibilidad de ampliar los criterios de justificación de nuevos axiomas que decidan el problema del continuo.

5.4.3.1. Primer resultado limitativo. Los principios de reflexión no deciden la HC.

Los principios de reflexión afirman que si algo es verdadero respecto al universo conjuntista (V), entonces debe ser verdadero en algún nivel de la jerarquía acumulativa de conjuntos.[59] Para ser más precisos, un principio de reflexión afirma que si una fórmula $\varphi(A)$ es verdadera en V, entonces debe existir un ordinal α tal que en V_α sea verdadera la fórmula relativizada a este nivel.

$$V \models \varphi(A) \ \rightarrow \ \exists \alpha \in ORD(V_\alpha \models \ \varphi^\alpha(A^\alpha))$$

Para poder clarificar estos principios es necesario definir el lenguaje de la teoría (que no será exactamente el lenguaje de la teoría de conjuntos, sino una extensión de él) y definir con precisión la relativización de las fórmulas a un nivel de la jerarquía acumulativa de conjuntos.

El lenguaje de la teoría es una extensión del lenguaje usual de la teoría de conjuntos, pero con dos tipos de variables. Las variables de primer orden $x, y, \ldots$ servirán para referirse a los objetos de V_α. Habrá además variables de orden superior $X^{(m)},\ Y^{(m)},\ \ldots$ con m un número natural; estas variables servirán corren sobre los objetos de $V_{\alpha+(m-1)}$.[60]

La relativización es como sigue.

[59]Sigo aquí la postura de Peter Koellner ofrecida en su (2009a).

[60]En realidad las variables corren sobre una copia isomorfica de $V_{\alpha+(m-1)}$ para evitar problemas de distinción entre conjuntos y clases propias (desde el punto de vista del modelo). Los detalles no son relevantes para presentar el resultado.

- Si $A^{(2)}$ es una parámetro de segundo orden sobre V_α, entonces la relativización de $A^{(2)}$ a V_β es $A \cap V_\beta$, y se escribe $A^{(2),\beta}$.

- Si $A^{(m+1)}$ con $m > 1$ es un parámetro de orden $m + 1$ definido sobre V_α, entonces la relativización de $A^{(m+1)}$ a V_β es el conjunto de las relativizaciones de los parámetros $B^{(m)}$ de orden m que le pertenecen a $A^{(m+1)}$, es decir, $A^{(m+1),\beta} = \{B^{(m),\beta} \mid B^{(m)} \in A^{(m+1)}\}$.

- La relativización de un fórmula φ de orden superior al nivel V_β de la jerarquía acumulativa de conjuntos se obtiene al interpretar las variables de primer orden corriendo sobre los elementos de V_β y a las variables de orden m, con $m > 1$, corriendo sobre los elementos de $V_{\beta+(m-1)}$.

Usando estas especificaciones podemos definir una jerarquía de principios de reflexión, cuyos niveles estarán definidos dependiendo del orden que admitimos para los parámetros de las fórmulas a relativizar. La utilidad de estos principios es que si agregamos un principio de reflexión que admita parámetros de orden m y una propiedad P puede ser definida por una fórmula φ que requiera a lo más parámetros de orden m, entonces si desde el punto de vista del universo V es cierto que existen colecciones que cumplan con tener la propiedad P (incluso si dichas colecciones no son conjuntos), entonces $\exists\alpha \in ORD\ V_\alpha$ tal que contiene un objeto que tiene la propiedad P. A continuación presentaré un par de ejemplos de la aplicación de los principios de reflexión en la justificación de axiomas de la teoría de conjuntos.

El primer ejemplo es la justificación del axioma de infinito. Si tomamos como punto de partida la teoría ZFC-infinito, no podemos mostrar que existen conjuntos infinitos. Sin embargo, sí sabemos que existen una cantidad infinita de conjuntos, a saber la clase de todos los números naturales, aunque no estamos seguros de si forman o no un conjunto, llamemos a esta clase N. La clase N además de ser infinita es tal que se puede definir un buen orden sobre sus elementos (tiene la forma del ordinal ω). Sabemos que ser una clase conformada por una cantidad infinita de elementos es una propiedad expresable por una fórmula de segundo orden, llamemos a dicha fórmula $\omega(x)$. Usando esta información podemos mostrar que $V \models \omega(N)$, pues en el universo conjuntista es cierto que la clase de los números naturales tiene una cantidad infinita de elementos. Si asumimos los principios de reflexión de segundo orden y como $\omega(x)$ es una fórmula de segundo orden, entonces podemos demostrar que $\exists\alpha \in ORD(V_\alpha \models \omega^\alpha(N^\alpha))$, es decir, existe por lo menos un conjunto infinito en V. Lo que muestra que el axioma de infinito es verdadero en el universo conjuntista, suponiendo que vale los principios de reflexión en segundo orden.

El segundo ejemplo es la justificación del axioma de cardinales fuertemente inaccesibles. Este ejemplo es muy similar al anterior. Como he dicho, desde ZFC no se puede probar la existencia de estos cardinales, pero la situación cambia si agregamos a la teoría principios de reflexión en segundo orden. Una consecuencia del axioma de cuasi-categoricidad de Zermelo para la teoría de conjuntos es que la clase de los ordinales en cualquier modelo de la teoría de conjuntos tiene la cardinalidad de un inaccesible fuerte y no sólo eso, cumple con todos los requisitos para ser un cardinal fuertemente inaccesible salvo que no es un conjunto, es una clase propia desde el punto de vista del modelo. Si consideramos ya no modelos sino el universo V, entonces la clase de los ordinales tiene todas las propiedades para ser un cardinal fuertemente inaccesible, salvo que es demasiado grande para ser un conjunto. Llamemos Ω a la clase de todos los ordinales del universo V. Ser de la forma de un cardinal fuertemente inaccesible se puede caracterizar por una fórmula de segundo orden, llamemos a esa fórmula $\varphi(x)$. Así, tenemos que $V \models \varphi(\Omega)$, es decir, la clase propia de los ordinales de V tiene la forma de un cardinal fuertemente inaccesible. Si agregamos los principios de reflexión en segundo orden, entonces tenemos que $\exists\alpha \in ORD(V_\alpha \models \varphi^\alpha(\Omega^\alpha))$, es decir, que existe un conjunto en V_α que se comporta como la clase de los ordinales (relativizada a V_α) y que es un cardinal fuertemente inaccesible. Usando estos principios se pueden justificar una gran cantidad de cardinales grandes.

> Este principio produce cardinales inaccesibles, cardinales Mahlo, cardinales débilmente compactos y más. Uno puede continuar aumentando ordenes hasta el infinito (manteniendo los parámetros de segundo orden) para obtener los llamados cardenales indescriptibles. Estos principios agotan los cardinales previstos en el tiempo de Gödel. (Koellner, 2009a, p. 201)[61]

Sin embargo, como nos hace notar el propio Koellner, el principal problema que enfrentan los principios de reflexión es dar cuenta de los cuantificadores de orden superior cuando son interpretados corriendo sobre el universo. La razón es que no es claro cuáles serían los objetos que sirven para interpretar los cuantificadores de segundo orden, pues en muchos casos se está hablando de clases propias. Koellner sitúa la discusión entre dos posibles posturas respecto a la naturaleza del universo conjuntista, el actualismo y el potencialismo.

Por un lado, el actualismo sostiene que el universo conjuntista es una totalidad acabada. Desde este punto de vista es muy complicado ofrecer

[61] "This principle yields inaccessible cardinals, Mahlo cardinals, weakly compact cardinals and more. One can continue up the higher-orders into the transfinite (while keeping the parameters of second-order) to obtain the so-called indescribable cardinals. These principles exhaust those envisaged in Gödel's time." La traducción es mía.

una explicación satisfactoria para la interpretación de los cuantificadores de segundo orden, puesto que las colecciones que servirían para interpretarlos cuantifican sobre clases propias. Por otra lado, el potencialismo niega que el universo conjuntista sea una totalidad acabada. En este sentido, podría ofrecer una explicación satisfactoria de los principios de reflexión. Sin embargo, dado que el universo conjuntista no está acabado, los principios de reflexión terminaría hablando ya no del universo V, sino de un nivel V_α del universo conjuntista. Es por esto mismo que la justificación de los principios de reflexión sería complicada. Koellner opta por usar la teoría de Tait que puede evitar está clase de problemas.[62]

La teoría de Tait se apoya en lo que el llama *el principio cantoriano*, este principios sostiene que so un segmento inicial de los ordinales A es un conjunto ($A \subseteq \Omega$), entonces existe un ordinal $S(A)$ que es el supremo del conjunto ($S(A) \in \Omega$). Este principio implica la existencia de ω, suponiendo que hemos aceptado que los ordinales finitos conforman un conjunto. El problema es justo que la noción de conjunto no es lo suficientemente clara para que este principio sea útil en general.

> Por esta razón Tait sustituye el principio con una jerarquía de principios cantorianos relativizados. Para una condición dada C (llamado una condición de existencia) tal principio afirma que si un segmento inicial $A \subseteq \Omega_C$ satisface C entonces tiene un supremo $S(A) \in \Omega_C$. De ello se sigue (a partir de que los ordinales son bien fundados) que Ω_C no satisface la condición C. (Koellner, 2009a, p. 209)[63]

El problema con este principio es que es demasiado general. La justificación de un principio depende en gran medida de la condición C que de haya

[62] No estoy de acuerdo con Koellner sobre este punto. La posición potencialista puede estar motivada por diferentes razones, una de ellas es el teorema de cuasi-categoricidad de Zermelo. Desde el punto de vista de Zermelo, la teoría de conjuntos es una teoría esencialmente inacabada, pues su pretención es ofrecer un marco para reconstruir todas las teorías matemáticas y es requiere de ella una enorme flexibilidad. El teorema de cuasi-categoricidad muestra que todos los modelos de la teoría de conjuntos ZFC2 son bien ordenable y para cualesquiera dos de ellos, o son isomorfos, o uno es isomorfo a un segmento inicial del otro. Usando este resulto se puede motivar un potencialismo que busque el crecimiento indefinido del universo conjunitsta en tamaño y complejidad, lo cual en mi opinión puede ofrecer una justificación fuerte a los principios de reflexión. No continuaré por esta vía de razonamiento, pues no ofrece un resultado útil para el problema del continuo. Si bien los principios de reflexión puede ser justificados por este camino, esto no afecta al cardinal del continuo, pues la HC tiene el mismo valor de verdad en todos los modelos.

[63] "For this reason Tait replaces the principle with a hierarchy of Relativized Cantorian Principles. For a given condition C (called an existence condition) such a principle asserts that if an initial segment $A \subseteq \Omega_C$ satisfies C then it has a strict upper bound $S(A) \in \Omega_C$. It follows (from the well-foundedness of the ordinals) that Ω_C does not satisfy the condition C." La traducción es mía.

elegido. Dado que en principio la condición C puede ser cualquiera, parece que existe el riesgo de que estos principios sean inconsistentes y es por ello que requieren de una justificación. Koellner mostró que de hecho muchos de ellos son inconsistentes y el resto son tan débiles que no implican un avance significativo respecto al problema de la indecidibilidad. El primer paso es mostrar que los principios de reflexión de tercer orden son inconsistentes.

Sea $A^{(3)} = \{\{\xi|\xi < \alpha\}^{(2)}|\alpha \in \omega\}^{(3)}$ y sea $\varphi(A^{(3)})$ la fórmula que expresa que todos los elementos de $A^{(3)}$ están acotados. $V \models \varphi(A^{(3)})$, pues es cierto que todos los elementos están acotados, pero para todo $\alpha \in \Omega$ $V_\alpha \not\models \varphi(A^{(3)})$. Lo que muestra que aceptar este principio de reflexión generaría una inconsistencia.

Ante esta situación, Tait ofreció una definición alternativa de principios de reflexión para parámetros de orden superior, los $\Gamma_n^{(m)}$-principios de reflexión. Estos principios sólo son aplicables a fórmulas que no tengan negaciones para oraciones que relacionan parámetros de orden mayor a 2 con igualdades o con la relación de pertenencia, estas fórmulas son llamadas positivas.

Def. 78 *Una fórmula del lenguaje de los ordenes finitos es llamada positiva sii es construida a partir aplicaciones de los operadores $\wedge$, $\vee$, $\forall$ y $\exists$ a fórmulas atómicas de la forma $x = y$, $x \neq y$, $x \in y$, $x \notin y$, $X \in Y^{(2)}$, $X \notin Y^{(2)}$, $X^{(m)} = X'^{(m)}$ y $X^{(m)} \in Y^{(m+1)}$, donde $m \geq 2$.*

Usando las fórmulas positivas, Tait define sus nuevos principios de reflexión. La idea detrás es obtener los principios de reflexión para fórmulas de orden superior lo más fuerte posibles que no generen inconsistencias.

Def. 79 *Para toda $0 < n < \omega$, $\Gamma_n^{(2)}$ es el conjunto de fórmulas de la forma $\forall X_1^{(2)}\exists Y_1^{(k_1)} \dots \forall X_n^{(2)}\exists Y_n^{(k_n)}\varphi(X_1^{(2)}, Y_1^{(k_1)}, \dots, X_n^{(2)}, Y_n^{(k_n)}, A^{(l_1)}, \dots, A^{(l_{n'})})$, donde φ es una fórmula positiva que no contiene cuantificadores de orden superior y k_1, ..., k_n, l_1, ..., $l_{n'}$ son números naturales.*

Def. 80 *Para toda $0 < n < \omega$, un $\Gamma_n^{(2)}$-principio de reflexión afirma para una fórmula $\varphi \in \Gamma_n^{(2)}$ que si $V \models \varphi$, entonces existe $\delta \in \Omega$ tal que $V_\delta \models \varphi^\delta$.*

Estos nuevos principios resultaron ser consistentes. Koellner mostró que si existe un cardinal de Erdös, $\kappa = \kappa(\omega)$, entonces existe un $\delta < \kappa$ tal que V_δ satisface todos los $\Gamma_n^{(2)}$-principios de reflexión. Este resultado muestra que estos principios no generaban contradicciones y lograba el objetivo de justificar una cantidad importante de principios de reflexión. Sin embargo, también muestra que estos principios sólo pueden ayudar a decidir (en el mejor de los casos), oraciones indecidibles cuya complejidad sea menor que la una oración que afirma la existencia de una cardinal de Erdös.

El siguiente paso es considerar principios de reflexión de orden mayor a 2 construidos de la misma forma. Para ello, sólo es necesario ajustar las definiciones para incluir parámetros de orden mayor a 2. Así se pueden obtener los $\Gamma_n^{(m)}$-principio de reflexión con $m > 2$. Desafortunadamente, Koellner probó que los $\Gamma_n^{(3)}$-principios de reflexión son inconsistentes.[64]

> [Estos resultados] muestran que los principios de reflexión que hemos considerado puede clasificarse en dos tipos:
>
> (1) Débiles: $\Gamma_n^{(2)}$-principios de reflexión, para $n < \omega$.
>
> (2) Inconsistentes: $\Gamma_n^{(m)}$-principios de reflexión, para $m > 2$ y $n \geq 1$.
>
> Toda vez que $\Gamma_n^{(3)}$ se obtiene directamente a partir de $\bigcup_{n<\omega} \Gamma_n^{(2)}$, la clasificación es exhaustiva y tenemos entonces el teorema de la dicotomía: Los principios de reflexión o son débiles o son inconsistentes.(Koellner, 2009a, p. 214)[65]

Estos resultados muestran que el uso de los principios de reflexión como medio de justificación de nuevos axiomas es mucho más limitado de lo que se pensaba, pues sólo serviría para justificar axiomas de cardinales grandes menores de los cardinales de Erdös. Además, para filósofos como Koellner que creen que los principios de reflexión agotan los criterios internos, mostrarían que los criterios internos no son suficientes para justificar la mayoría de los nuevos axiomas propuestos para la teoría de conjuntos. Incluso Koellner llega a afirmar:

> Estos resultados pueden ser usados para proporcionar una reconstrucción racional de la primera visión de Gödel sobre la "indecidibilidad absoluta" de $V = L$, PD y HC. La idea es que si tenemos una concepción de la teoría de conjuntos que sólo admita justificaciones internas y si se piensa que éstas están agotadas por los principios de reflexión, entonces los resultados presentados ofrecen una justificación a favor de la afirmación de que estos enunciados son realmente "absolutamente indecidibles". Afortunadamente, las justificaciones externas tienen un largo camino por recorrer y pienso que uno puede ofrecer una justificación externa sólida a favor de $V \neq L$ y PD. Por

[64]Los detalles técnicos de las demostraciones pueden consultarse en (Koellner, 2009a).

[65]'The results of the previous two sections show that the reflection principles we have considered can be divided into two classes:
(1) Weak: $\Gamma_n^{(2)}$-reflection, for $n < \omega$.
(2) Inconsistent: $\Gamma_n^{(m)}$-reflection, for $m > 2$ and $n \geq 1$.
Since $\Gamma_n^{(3)}$ comes directly after $\bigcup_{n<\omega} \Gamma_n^{(2)}$, this classification is exhaustive and we have a dichotomy theorem: Reflection principles are either weak or inconsistent.". La traducción es mía.

> supuesto, si HC es "absolutamente indecidible" es una cuestión más delicada. (Koellner, 2009a, p. 218)[66]

En mi opinión, los resultados de Koellner muestran sólo que los principios de reflexión no pueden ser usados para justificar todos los nuevos axiomas para la teoría de conjuntos. Esto incluye sólo a aquellos que puedan ser expresados por oraciones de segundo orden. En cuanto a los axiomas de cardinales grandes sólo pueden justificarse vía principios de reflexión axiomas más débiles que el axioma que afirma la existencia de un cardinal de Erdös. Los principios de reflexión no son suficientemente fuertes para decidir sobre el axioma de constructibilidad, ni sobre la HC.

Pero, a diferencia de Koellner, no creo que los criterios internos se agoten en los principios de reflexión. Como ya he dicho antes, los criterios internos incluyen muchos otros principios y reglas de oro, que son suficientes para justificar los axiomas de cardinales grandes. En todo caso, el resultado me es útil en este momento para mostrar que los axiomas de reflexión no son suficientes para resolver el problema del continuo.

5.4.3.2. Segundo resultado limitativo. La HC es independiente de todos los axiomas de cardinales grandes.

El segundo resultado limitativo que presento es muy conocido por los teóricos de conjuntos, pues fue presentado por Lévy y Solovay hace casi 50 años, en 1967. El resultado mostró que la creencia de Gödel sobre que los axiomas de cardinales grandes podrían resolver el problema del continuo era equivocada. Usando el método de *forcing* estos autores demostraron que incluso asumiendo todos los axiomas de cardinales grandes es posible generar dos extensiones genéricas tales que el valor de verdad de la HC es verdadero en una y falso en otra, lo que muestra que los axiomas de cardinales grandes no deciden el valor de verdad de la HC.

Teorema 20 ***(Lévy-Solovay)***

(1) Ninguno de los axiomas de cardinales grandes decide la HC.

[66] "[T]hese results can be used to provide a rational reconstruction of Gödel's early view to the effect that $V = L$, PU, and CH are ??absolutely undecidable". The idea is that if one has a conception of set theory which admits only intrinsic justifications and if one thinks that these are exhausted by reflection principles then the above results make a case for the claim that these statements really are "absolutely undecidable". Fortunately, extrinsic justifications go a long way and I think that one can make a strong extrinsic case for $V \neq L$ and PU. Whether CH is ??absolutely undecidable" is, of course, a more delicate question." La traducción es mía.

> (2) *Sea A uno de los axiomas de cardinales grandes, y supongamos que $V \neq L$. Entonces existen dos extensiones genéricas de V, M y N, tales que satisfacen A, pero que nos son equivalentes respecto a las Σ^2_1-fórmulas. (Feferman et al, 2000, p. 430)*[67]

Como había dicho antes, los axiomas de cardinales grandes tienen una justificación muy fuerte dada por el principio de maximalidad. El resultado muestra que esta justificación no podrá ser transmitida a axiomas que decidan el problema del continuo por esta vía. Sin embargo, en principio todavía sería posible que el principio de maximalidad ofrezca una justificación a algún axioma que resuelva el problema del continuo. Pero como veremos a continuación esto tampoco sucede.

5.4.3.3. Tercer resultado limitativo. La HC es una oración Orey.

Las oraciones Orey para una teoría son aquellas tales que ni ellas ni su negación al ser agregadas a la teoría original generan un incremento en el poder interpretativo de la teoría original, es decir, que no escalan en la jerarquía de interpretabilidad de Lindström.

> Ejemplos naturales del segundo tipo de independencia son provisto por el método dual de modelos internos y externos. Por ejemplo, estos métodos muestran que las teorías ZFC+HC y ZFC+¬HC son mutuamente interpretables con ZFC, es decir, que las tres teorías cae en el mismo nivel de la jerarquía. En otras palabras, HC es una oración Orey respecto a ZFC. (Koellner, 2010a, p. 9)[68]

El hecho de que la HC sea una oración Orey muestra que ella misma no aporta nada respecto al poder interpretativo de la teoría. Es decir, su verdad o falsedad no implican nada sobre las teorías que pueden ser interpretadas desde ZFC, no aporta elementos que permitan interpretar teorías matemáticas. En este sentido ni la HC ni su negación pueden recibir apoyo directo del principio de maximalidad. Tampoco puede recibir apoyo de principios como la exhaustividad, la uniformidad, ni de reglas de oro como el finitismo cantoriano o un paso antes del desastre, toda vez que ni HC ni ¬HC

[67] "THEOREM (Lévy-Solovay).
(1) None of the current large cardinal axioms decides CH.
(2) Let be one of the current large cardinal axioms, and suppose $V \neq L$. Then there are set generic extensions M and N of V which satisfy A, but are not Σ^2_1-equivalent." La traducción es mía.

[68] "Natural examples of the second kind of independence are provided by the dual method of inner and outer models. For example, these methods show that the theories ZFC+CH and ZFC+¬CH are mutually interpretable with ZFC, that is, all three theories lie in the same degree. In other words, CH is an Orey sentence with respect to ZFC." La traducción es mía.

incrementan las posibilidades interpretativas de la teoría de conjuntos. Esto muestra que los criterios internos, que establecen a partir del objetivo de la teoría de conjuntos de ser un marco general para interpretar y relacionar teorías matemáticas, no pueden ofrecernos elementos para justificar axiomas que resuelvan el problema del continuo.

5.4.3.4. Cuarto resultado limitativo. La HC no aporta resultados nuevos al análisis matemático.

El cuarto y último resultado limitativo que presentaré pretende mostrar que la HC tampoco tiene implicaciones interesantes en otras ramas de las matemáticas, o por lo menos no en áreas de las matemáticas usuales.

La idea central detrás de este resultado es que el axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$ es "efectivamente completo" respecto a la teoría de conjuntos descriptiva, es decir, que toda "buena" teoría para los conjuntos descriptivos lo implica y $AD^{L(\mathbb{R})}$ nos da una imagen completa de la estructura de estos conjuntos. En otras palabras, $AD^{L(\mathbb{R})}$ nos da toda la información pertinente sobre los conjuntos definibles de números reales. Para comprender este resultado es necesario presentar algunas definiciones y teoremas relacionados con la método de *forcing* y sobre los *oráculos de la verdad*. El cuarto y último resultado limitativo que presentaré pretende mostrar que la HC tampoco tiene implicaciones interesantes en otras ramas de las matemáticas, o por lo menos no en áreas de las matemáticas usuales. En el capítulo 2, presenté una breve descripción del método de *forcing*. Este método permite construir modelos de la teoría de conjuntos a partir de un modelo base, un orden parcial y filtro genérico. El método nos permite construir modelos en los cuáles ciertas oraciones de la teoría pueden cambiar de valor de verdad, por ejemplo, la HC y el AC. Sin embargo, existen oraciones cuyo valor de verdad no puede ser modificado usando esta técnica, por ejemplo, las fórmulas cerradas sin cuantificadores. A las oraciones cuyo valor de verdad no puede ser modificado por medio del *forcing* se les conoce como "Oráculos de la verdad", o se dice que son "absolutas genéricamente". Existen algunos resultados que muestran que algunas oraciones son "oráculos de la verdad".

Teorema 21 ***(Shoenfield)*** *Supongamos que φ es una Σ^1_2-fórmula, $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro V-genérico. Entonces, $V \models \varphi$ sii $V[G] \models \varphi$.*

Este resultado incluye a una gran cantidad de fórmulas, pero todavía permite que el valor de verdad de fórmulas de una complejidad mayor pueda ser modificado usando *forcing*. Sin embargo, puede suceder que bajo asunciones más fuertes se pueda convertir a una cantidad mayor de oraciones en *oráculos de la verdad*; de ser así, podríamos lograr que todas las oraciones de una teoría sean inmunes a variaciones de valores de verdad usando *forcing*. Si se logra que todas las oraciones de una teoría sean *oráculos de la verdad*, todas su oraciones tendría el mismo valor de verdad en todos los modelos generados por *forcing*; logrando así que para toda oración, orden parcial y filtro V-genérico se tenga que $M \models \varphi$ sii $M[G] \models \varphi$. De ser así, la simple consistencia de una oración nos mostraría su verdad; un resultado muy fuerte.

El axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$ resulta importante en este contexto debido a que asumiendo la existencia de una clase propia de cardinales de Woodin se puede mostrar que la si algo vale en $L(\mathbb{R})$ vale en todas las extensiones genéricas que se generen a partir de este modelo.

Teorema 22 ***(Woodin)*** *Supongamos que existe una clase propia de cardinales Woodin, que φ es una oración, $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro V-genérico. Entonces, $L(\mathbb{R}) \models \varphi$ sii $L(\mathbb{R})[G] \models \varphi$.*

Este resultado muestra que, bajo la suposición de la existencia de una clase propia de cardinales de Woodin, la teoría del modelo $L(\mathbb{R})$ se vuelve absoluta genéricamente, el valor de verdad de sus oraciones no puede ser modificado mediante la técnica de *forcing*. El resultado se puede extender si se apela a los conjuntos que son *Universally Baire*.

Def. 81 *Sea Ω un espacio de Hausdorff compacto. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es* Universally Baire *sii para toda función continua $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ la preimagen de A bajo F, $F^{-1}[A]$, tiene la propiedad de Baire en Ω; es decir, que existe un conjunto abierto $O \subseteq \Omega$ tal que $F^{-1}[A]\Delta O$ es exiguo.*

La relevancia de los conjuntos *de Baire universalmente* es que, bajo la asunción de la existencia de una clase propia de cardinales de Woodin, todos los conjuntos de números reales en $L(\mathbb{R})$ tienen esta propiedad. Que los conjuntos de números reales en $L(\mathbb{R})$ sean *de Baire universalmente* es lo que permite obtener la prueba de invariancia bajo *forcing*.

Considerando la totalidad de los conjuntos que son *de Baire universalmente*, podemos extender estos resultados. Llamemos Γ^∞ a la colección de todos los conjuntos de reales que sean *de Baire universalmente*. Para presentar la extensión de los resultados de invariancia bajo *forcing* es necesario presentar una última definición.

Def. 82 *Supongamos que κ es un cardinal infinito. $H(\kappa)$ denota al conjunto de todos los conjuntos cuya cerradura transitiva tiene cardinalidad menor que κ.*

Los conjuntos de la $H(\kappa)$ serán de gran importancia pues algunos de ellos tienen una estructura muy parecida a la estructura del aritmética. El conjunto $H(\omega)$ está relacionado con la estructura $\langle\mathbb{N},+,\cdot\rangle$, pues $H(\omega)=V_\omega$; por ellos mismo se usa como modelo de la aritmética de primer orden. El conjunto $H(\omega_1)$ se relaciona con la aritmética de segundo orden (el análisis matemático), pues su estructura de es $H(\omega_1)$ es en esencia la misma que $\langle\wp(\mathbb{N}),\mathbb{N},+,\cdot,\in\rangle$. Muchos oraciones de las teorías de estas estructuras son indecidibles desde ZFC. Sin embargo, bajo ciertos supuestos podemos minimizar mucho el conjunto de las oraciones indecidibles.

Teorema 23 ***(Woodin)*** *Supongamos que existe una clase propia de cardinales de Woodin, $A\in\Gamma^\infty$ y $G\subseteq\mathbb{P}$ es un filtro V-genérico. Entonces, $\langle H(\omega_1),\in,A\rangle^V\prec\langle H(\omega_1)^{V[G]},\in,A_G\rangle$.*

Teorema 24 ***(Woodin)*** *Supongamos que existe una clase propia de cardinales de Woodin, sea φ una oración de la forma $\exists A\in\Gamma^\infty\ (H(\omega_1),\in,A)\models\psi$ y $G\subseteq\mathbb{P}$ es un filtro V-genérico. Entonces, $V\models\varphi$ sii $V[G]\models\varphi$.*

Estos teoremas nos muestra que, bajo el supuesto de la existencia una clase propia de cardinales de Woodin, las oraciones de la teoría de $H(\omega_1)$ tiene la propiedad de absolutez genérica respecto a los conjuntos *de Baire universalmente*, es decir, tenemos que las oraciones Σ_1^2 tiene la propiedad de (Γ^∞) absolutez genérica. Así, tenemos una teoría que congela la teoría para los conjuntos definible, congela teoría para $L(\mathbb{R})$. Para extender los resultados más allá de los conjuntos reales presentes en $L(\mathbb{R})$ debemos definir la fórmulas *absolutamente* Δ_1^2.

Def. 83 *Llamaremos a un conjunto* absolutamente Δ_1^2 *sii existen fórmulas Σ_1^2 que definan sus conjuntos complementarios en todas las extensiones genéricas.*

Las fórmulas *absolutamente* Δ_1^2 son un subconjuntos de las fórmulas Δ_1^2 del modelo $L(\mathbb{R})$; pues se pide no sólo que sea Δ_1^2 en el modelo, sino que lo sean en todas las extensiones genéricas del modelo. Este conjunto de fórmulas son *de Baire universalmente*, bajo asunciones cardinales.

Teorema 25 ***(Woodin)*** *Supongamos que existe una clase propia de cardinales de Woodin. Entonces, todos los conjuntos* absolutamente Δ_1^2 *son* de Baire universalmente.

La HC, a pesar de ser una fórmula Σ_1^2, no es una oración Δ_1^2 y, en este sentido, los resultados sobre invariancia bajo *forcing* presentados aquí no la alcanza; pero sí alcanzan a fórmulas de una complejidad menor a la suya.

> Este es un sentido preciso en el cual la HC fue una desafortunada elección de prueba para el programa de cardinales grandes ? los axiomas de cardinales grandes efectivamente resuelven todas las preguntas de complejidad estrictamente menor que la HC. (Koellner, 2009, p. 207)[69]

Hasta ahora he presentado resultados que muestran que hay por lo menos una teoría congela la teoría de $L(\mathbb{R})$, pero es en principio posible que existan otras teorías que congelen la estructura y que nos ofrezcan resultados diferentes respecto a ella, es decir, que les asignen diferente valor de verdad a las oración de la teoría. Afortunadamente, Woodin mostró que esto no es posible, por lo menos respecto a las oraciones que hablan de los conjuntos definibles.

Teorema 26 ***(Woodin)*** *Supongamos que existe una clase propia de cardinales fuertemente inaccesibles y que la teoría de $L(\mathbb{R})$ es absoluta genéricamente. Entonces, vale $AD^{L(\mathbb{R})}$.*

Finalmente, puedo definir que se considera una "buena" teoría para la teoría de conjuntos descriptiva.

Def. 84 *Diremos que una teoría es buena sii implica que todas las oraciones de la teoría de $L(\mathbb{R})$ son absolutas genéricamente, es decir, si son invariantes bajo* forcing.

Retomando los resultados anteriores podemos ver que hay por lo menos una *buena* teoría y, además, toda buena teoría implica $AD^{L(\mathbb{R})}$. Es en este sentido que afirmo que este axioma nos da una imagen completa de los conjuntos estudiados por la teoría descriptiva de conjuntos.[70] En palabras de Woodin:

> Los únicos ejemplos conocidos de problemas irresolubles sobre los conjuntos proyectivos, en el contexto del axioma de determinación proyectiva, son análogos a los bien conocidos ejemplos de los problemas irresolubles en teoría de números: las oraciones de Gödel y las oraciones de consistencia. (Woodin, 2001a, p. 575)[71]

[69] "This is one precise sense in which CH was an unfortunate choice of a test case for the program for large cardinals?large cardinal axioms effectively settle all questions of complexity strictly below (in the above sense) that of CH." La traducción es mía.

[70] Esta presentación ofrece una justificación más detalla de la idea presentada un poco más arriba, respecto a que el axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$ nos ofrece una imagen completa de los conjuntos definibles respecto a las propiedades que son relevantes para la teoría descriptiva de conjuntos.

[71] "The only known examples of unsolvable problems about the projective sets, in the context of Projective Determinacy, are analogous to the known examples of unsolvable problems in number theory: Gödel sentences and consistency statements." La traducción es mía.

En el caso de la HC todos estos resultados más que alentadores, muestran que la HC no tiene implicaciones en la teoría descriptiva de conjuntos, pues el trabajo completo lo hace $AD^{L(\mathbb{R})}$. Además, es posible demostrar que HC no implica $AD^{L(\mathbb{R})}$; basta recordar el siguiente teorema de Gödel.

Teorema 27 ***(Gödel)*** *Asumamos ZFC+V = L. Entonces existen conjuntos Σ^1_2 que no tienen la propiedad de Baire y no son Lesbegue medibles, además existen conjuntos Π^1_1 que no tienen la propiedad del subconjunto perfecto.*

Este resultado, muestra que existe un modelo, L, en el cual vale HC, pero no vale $AD^{L(\mathbb{R})}$. Y por tanto, ZFC+HC$\not\models AD^{L(\mathbb{R})}$. Falta mostrar que ¬HC tampoco implica $AD^{L(\mathbb{R})}$. Pero esto se obtiene gracias al siguiente teorema.

Teorema 28 ***(Harrington)*** *Existe un modelo de ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_{17}$ + existe una relación Π^1_2 que bien ordena a los reales cuyo rango es $\aleph_{17}$.*

Que exista un buen orden proyectivo sobre los reales, implica la negación de $AD^{L(\mathbb{R})}$. Así que, el modelo descrito por Harrington muestra que ZFC+¬HC$\not\models AD^{L(\mathbb{R})}$.

Como puede verse ahora, no hay forma de ofrecer una justificación de axiomas que decidan la HC apelando a criterios externos, pues la HC no tiene implicaciones relevantes para el resto de las matemáticas usuales.

5.4.3.5. La HC es absolutamente indecidible.

Considerando los resultados presentados en las cuatro secciones precedentes y los criterios (tanto internos como externos) para la aceptación de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos que obtuve del análisis de la práctica de los teóricos de conjuntos afines al grupo CABAL, puedo afirmar que la HC es "absolutamente indecidible" desde ZFC.

Como resultado de mis estudios sobre los criterios internos y los criterios externos, concluí que los criterios internos estaban sustentados en los objetivos y las prácticas de los teóricos de conjuntos. Respecto a los criterios internos, los primeros tres resultados limitativos muestran que la HC no puede ser decidida por axiomas que se justifiquen usando principios de reflexión, ni apelando a cardinales grandes, ni principios como el principios de maximalidad. En general, la HC no puede ser decidida por axiomas que se justifiquen en criterios internos que apelen al objetivo de generar el marco más general posible para reconstruir teorías matemáticas.

Todavía es posible, en principio, apelar a criterios internos que se justifiquen en la naturaleza de los conjuntos, en la noción iterativa de conjunto y en la jerarquía acumulativa de conjuntos como modelo pretendido de la teoría. Sin embargo, hasta el momento estos criterios internos no nos ofrecen una visión lo suficientemente clara de la naturaleza de los conjuntos como para justificar un axioma que implique a HC o a su negación.

Respecto a los criterios externos, que buscan la relación de estos resultados con otras áreas de las matemáticas, el último resultado muestra que la HC no ofrece resultados relevantes para otras áreas de la matemática; pues incluso, no tiene una influencia directa respecto al comportamiento de los conjuntos de reales en las propiedades más usuales que la teoría de conjuntos descriptivos estudia. El axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$ nos ofrece una visión completa de comportamiento de los conjuntos de números reales $L(\mathbb{R})$, respecto a las propiedades que son de interés para un teórico descriptivo de conjuntos. Así que este axioma hace todo el trabajo que es necesario. Los resultados también muestran que la invariancia bajo *forcing* no puede extenderse hasta alcanzar a la HC bajo supuestos que puedan justificarse usando los criterios que hemos aceptado.

Pero si los criterios de aceptación dados no son suficientes, entonces no es posible justificar la aceptación de axiomas que decidan el problema del continuo desde la tradición que escogí estudiar. La HC es "absolutamente indecidible".

5.4.3.6. ¿Hay alguna esperanza?

¿Es posible aún resolver el problema del continuo? Esta pregunta surge de manera natural después de la presentación de estos resultados. En mi opinión, la respuesta es sí.

El estudio que he realizado tomó como punto de partida los trabajos de un grupo de matemáticos muy específicos, una comunidad matemática. Sería un error de mi parte sostener que las prácticas de esta comunidad son estáticas, es decir, que no se modifican con el tiempo. Como tal, una comunidad matemática está en constante transformación, sus métodos, objetivos y, en general, su práctica matemática son modificados y revisados continuamente. En este sentido, el análisis que yo he ofrecido sólo muestra que hasta el momento la HC es "absolutamente indecidible" desde la tradición analizada, pero es perfectamente posible que en un un tiempo la comunidad cambié los suficiente (en este caso, modifiqué sus criterios de aceptación de nuevos axiomas) para que sea posible decidir el problema del continuo.

En esta línea de pensamiento debo mencionar por lo menos dos proyectos que se están desarrollando actualmente y que pueden ofrecer resultados a futuro, a saber, la Ω-Lógica de Woodin y el programa de modelos internos maximales.

La Ω-Lógica de Woodin es un programa que bien podría definirse como el intento de generar una lógica para los cardinales grandes. La idea central es definir una noción de consecuencia lógica en términos de invariancia bajo *forcing*.

Def. 85 *Supongamos que existe una clase propia de cardinales fuertemente inaccesibles, T es una teoría y φ es una oración (ambas en el lenguaje de la teoría de conjuntos). $T \models_\Omega \varphi$ sii para todo orden parcial $\mathbb{P}$, todo $\alpha \in OR$, y todo $G \in \mathbb{P}$ filtro V-genérico se cumple que si $V[G]_\alpha \models T$, entonces $V[G]_\alpha \models \varphi$.*

Def. 86 *Cuando $T \models_\Omega \varphi$ decimos que φ es Ω_T-válido, cuando $T \not\models_\Omega \neg\varphi$ decimos que φ es Ω_T-satisfacible.*

Def. 87 *Sea Γ un conjunto de fórmulas, decimos que una teoría T es Ω-completa para Γ sii para toda $\varphi \in \Gamma$ o sucede que $T \models_\omega \varphi$ o sucede que $T \models_\Omega \neg\varphi$. $\Gamma(M)$ abrevia el conjunto de las fórmulas de la forma "$M \models \varphi$".*

En secciones pasadas ya se ha hablado de invariancia bajo *forcing*, por ejemplo respecto a $L(\mathbb{R})$; si es posible extender estos resultados se podría generar una teoría que congele todas las oraciones del lenguaje de la teoría de conjuntos, o por lo menos de un subconjunto que contenga a la HC. Woodin a planteado tal extensión en los siguientes términos:

La conjetura HC: Supongamos que existe una clase propia de cardinales de Woodin. Entonces:

(1) Existe un axioma A tal que es Ω_{ZFC}-satisfacible y $ZFC + A$ es Ω-completo para $\Gamma(H(\omega_2))$.

(2) Cualquier axioma A que cumpla con (1) cumple que $ZFC + A \models_\Omega$ "$H(\omega_2) \models \neg HC$".

La conjetura HC pretende establecer un análogo con los resultados obtenidos respecto a $\Gamma(L(\mathbb{R}))$, es decir, sostiene que existe una "buena" teoría para la estructura $H(\omega_2)$[72] y que todas las buenas teorías para esta estructura implican la negación de la HC. Sin embargo, no se ha probado esta conjetura y para hacerlo es necesario probar previamente otra conjetura conocida como

[72] Tampoco hay un acuerdo sobre que estructura es la que debe evaluarse para resolver el problema del continuo. Dado que la HC es una oración de la aritmética de tercer orden seria natural pensar que la estructura a analizar debe ser $\langle \wp(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$ o alguna estructura equivalente, el problema es que $H(\omega_2)$ no tiene una estructura equivalente y ni siquiera con mutuamente interpretables (a menos que la HC sea verdadera).

la Ω *Conjetura Fuerte*, algo que también es una tarea pendiente. Un resultado alarmante para este programa es que si la Ω *Conjetura Fuerte* es falsa, entonces existen teorías alternativas T_1 y T_2 tales que ambas son Ω-completas para $H(\omega_2)$ y que asignan diferente valor de verdad a la HC (este resultado se debe a Koellner y Woodin).

Además de lo antes dicho, todavía no hay elementos suficientes para decidir si los criterios internos pueden incluir alguno que considere a los principios del programa de la Ω-Lógica como suficientemente justificados. Por ejemplo, que la invariancia bajo *forcing* sea considerado un criterios definitivo para la aceptación de un nuevo axioma, o que la búsqueda de una lógica para los cardinales grandes se convierta en un objetivo de la teoría de conjuntos. La esperanza, en este sentido, es que el avance en la investigación clarifique la naturaleza de los conjuntos y que está clarificación muestre que la invariancia bajo *forcing* es una característica que debe ser tomada en cuenta. Este cambio incrementaría los criterios internos apoyados en la naturaleza de los conjuntos, que como dije en la sección anterior son los únicos que quedan abiertos a la luz de los resultados presentados.

El programa alternativo a la Ω-Lógica consiste en generar modelos internos maximales en el sentido de que puedan incluir a todos los cardinales grandes. Ya he hablado de los modelos internos. En el segundo capítulo presenté la construcción del modelo L, el modelo interno más pequeño. Un poco más arriba definí los modelos internos de la forma $L(A)$ dado un conjunto A, que es el mínimo modelo interno que contiene al conjunto A. Incluso muchos de los resultados presentados en este capítulo hablan del modelo $L(\mathbb{R})$. Existen otras formas de generar modelos internos casa vez más grandes (los detalles no son relevantes en este momento).

En general, se considera que los modelos internos difícilmente pueden ser considerados el modelo pretendido de la teoría de conjuntos. Pero cabe preguntar, ¿qué sería necesario para que un modelo interno pueda ser considerado el modelo de la teoría de conjuntos? Una respuesta posible es que contenga a todos los objetos de la teoría; en particular, a todos los cardinales grandes. Sin embargo, cumplir con este requisito no es nada sencillo; pues, $V = L$ es incompatible la existencia de cardinales medibles y en este sentido crear modelos internos que tengan entre sus miembros a cardinales grandes puede ser una tarea muy complicada. Sin embargo, gracias a un resultado de Woodin hay esperanzas de generar modelos internos maximales; es decir, modelos internos que puedan acomodar a todos los cardinales grandes en alguno de sus niveles. Algunos consideran que si se puede generar un modelo interno maximal, este modelo puede ser considerado el modelo pretendido de la teoría. La respuesta al problema del continuo se podría responder analizando dicho modelo.

Sin embargo, existe un gran problema que este programa debe enfrentar. Si existe más de un modelo interno maximal y la HC tiene diferente valor de verdad en diferentes modelos maximales, entonces este programa no será de utilidad para resolver el problema del continuo. Desafortunadamente, esto es justo lo que sucede. Es posible generar modelos internos maximales que asignen un valor de verdad diferente a la HC. De nuevo, la situación no parece ser muy favorecedora para resolver el problema del continuo. Además, de nueva cuenta, no existen criterios internos que puedan favorecer la adopción del programa de modelos internos para extender la teoría de conjuntos. Aquí también es necesario que el avance en la investigación clarifique más naturaleza de los conjuntos, lo suficiente para exista un principio que apoye esta vía de investigación.

En mi opinión, es posible que en el futuro el avance en la investigación permita favorecer algún tipo de método de prueba sobre otro, de tal suerte que la práctica matemática pueda sustentar la adopción de criterios internos basados en la naturaleza de los conjuntos lo suficientemente sólidos para decidir el problema del continuo. Pero esto es una cuestión abierta.

5.4.4. Un breve reflexión filosófica sobre la HC.

La HC es una proposición que ha despertado un profundo interés en la comunidad teórico conjuntista y ha sido motor de muchas investigaciones a lo largo de los años, que todavía no obtienen resultados concluyentes. Existen otras proposiciones de la teoría de conjuntos y de la teoría de números que han sido demostradas con un buen grado de aceptación. ¿Qué es lo que hace que la HC sea tan complicada de demostrar o de refutar?

En mi opinión, el problema del continuo es tan complicado de resolver por dos razones principales. La primera de ellas es que a diferencia de las oraciones indecidibles en aritmética, no tenemos una idea preteórica lo suficientemente clara de la estructura de la que habla. La segunda es que expresa una propiedad del los conjuntos de números reales que no tiene una aplicación directa en el resto de las matemáticas, ni siquiera en ramas tan cercanas como la teoría descriptiva de conjuntos.

Respecto a la primera razón, considero que tenemos una idea preteórica clara de la estructura de los números naturales, lo suficientemente robusta como para identificar el modelo pretendido de la aritmética. Usando está información podemos decidir, por reflexión metateórica, sobre oraciones como las de Gödel. En un sentido más o menos claro, nuestra concepción preteórica de la estructura de los números naturales es recuperada por los axiomas de Peano (si se quiere en segundo orden). Esto no pasa en el caso de la estructura del conjunto de los números reales. El uso de los números reales implicó importantes desarrollos en matemáticas, pero los usos más comunes no ofrecen una idea preteórica lo suficientemente precisa de la estructura que tienen. Es por esto que al enfrentarnos a diferentes modelos de los números naturales no podemos decidir cuál es el que recupera correctamente nuestras intuiciones, pues, en realidad, ambos lo hacen, nuestras intuiciones son compatibles con ambas. Usando cualquiera de los modelos alternativos que compiten por ser el conjunto de los números naturales podemos recuperar todos los usos que motivaron la creación de estos objetos.

Respecto a la segunda razón, los usos más comunes del los números naturales tienen que ver con aplicaciones en cálculo y otras áreas de las matemáticas. Ninguno de ellos involucra la cardinalidad del conjunto de los números reales, más allá de que es mayor que la cardinalidad de los números naturales. Incluso si consideramos el estudio de la teoría de conjuntos descriptiva, las propiedades de los conjuntos de números reales que esta teoría considera relevantes no tienen una relación directa con la cardinalidad del conjunto completo. La teoría de conjuntos descriptiva se encarga de estudiar propiedades estructurales de los conjuntos de reales, propiedades que pueden tener una aplicación en matemáticas, la cardinalidad no es una de ella. En otras palabras, la cardinalidad del conjunto de los números reales no parece ser de interés matemático, no por lo menos en la aplicación. Además, la cardinalidad del continuo no tiene una influencia directa en el poder de la teoría de conjuntos para reconstruir otras teorías matemáticas.

Si bien la HC ha servido para motivar una gran cantidad de investigación, no es por sí misma una proposición matemática de gran interés.

5.5. Conclusiones del capítulo.

En este capítulo completé el análisis de la HC y su indecidibilidad respecto a la tradición matemática generada a partir de los trabajos del grupo CABAL.

(1) Mostré que usando los criterios internos y externos que se pueden extraer de la práctica matemática de este grupo se puede justificar la aceptación de los axiomas tradicionales de ZFC. Pero, también mostré que estos axiomas pueden ser rechazados por razones que pueden ser consideradas legítimas en otras tradiciones matemáticas.

(2) Presenté los axiomas de cardinales grandes y los axiomas de determinación. Además mostré que ambos grupos de axiomas pueden obtener un buen sustento mediante los criterios internos y externos. En el caso de los axiomas de cardinales grandes el apoyo otorgado por los criterios

internos es muy fuerte, mucho más que en el caso de los axiomas de determinación. En especial, el principio de maximalidad, que está motivado en uno de los objetivos centrales de la teoría de conjuntos, ofrece un apoyo tremendamente fuerte a los axiomas de cardinales grandes; pues estos permiten reconstruir muchas más estructuras dentro de la teoría de conjuntos. Las justificaciones externas de estos conjuntos se establecieron mediante las interconexiones teóricas que existen entre ellos.

(3) Presenté cuatro resultados que llame limitativos, con la intención de mostrar que la HC es "absolutamente indecidible" desde ZFC, de acuerdo a la tradición analizada. El primer resultado muestra que los principios de reflexión no son suficientemente fuertes para justificar a la HC, ni a un axioma que la implique. El segundo resultado muestra que la HC no puede ser decidida por los axiomas de cardinales grandes. El tercer resultado muestra que la HC no puede ser decidida apelando al principios de maximalidad. Con estos tres primeros resultados, se elimina el posible sustento de los criterios internos que pueda recibir la HC o un axioma que la decida apelando a principios internos justificados en el objetivo de generar el marco de interpretación de teorías matemáticas lo más general posible. El último resultado limitativo que presenté muestra que el axioma $AD^{L(\mathbb{R})}$ es "efectivamente completo" para la estructura de los conjuntos que son de interés para la teoría de conjuntos descriptiva, lo que implica que la HC no tiene implicaciones en esta área de las matemáticas (ni en otras áreas comunes de las matemáticas). Esto elimina el apoyo de los criterios externos para la solución del problema del continuo. Así que concluí que la HC es "absolutamente indecidible". Existe la posibilidad de que la HC puede ser decidida por axiomas justificados en criterios internos que se apoyen en la naturaleza de los conjuntos. Sin embargo, los criterios de este tipo no son suficientemente fuertes por el momento para ser de utilidad.

(4) Con todo, existen formas de resolver el problema del continuo, pero para ellos es necesario ampliar el conjuntos de los criterios internos y externos para la aceptación de nuevos axiomas. Esto sólo es posible con el avance de la investigación en el área y con la modificación de la prácticas matemáticas de la comunidad.

(5) Finalmente, señalé dos programas que pueden obtener resultados interesantes a largo plazo, la Ω-Lógica de Woodin y el programa de modelos internos maximales. Sin embargo, el estado actual de la cuestión no permite establecer resultados definitivos. Además, es necesario que el avance

de la investigación clarifique la naturaleza de los conjuntos para incluir nuevos criterios internos.

Conclusiones

En este trabajo de investigación he estudiado la indecidibilidad de la Hipótesis del Continuo respecto a la teoría de conjuntos estándar ZFC. Si bien al comienzo de mi investigación pretendía obtener una respuesta más contundente sobre si la HC era o no absolutamente indecidible, con el paso del tiempo me di cuenta que este objetivo era extremadamente pretencioso. Lo era por varias razones. En primer lugar, porque los desarrollos matemáticos más actuales eran todavía insuficientes. En segundo lugar, porque la HC es una proposición matemática que pertenece a la teoría de conjuntos y existen muchas teorías de conjuntos alternativas. En tercer lugar, porque el fenómeno de la indecidibilidad absoluta no es puramente matemático, pues incluye criterios de modificación de las teorías originales y justificaciones para sostener estos criterios que incluyen entre otros, elementos filosóficos. Al final de la investigación me convencí de que la respuesta sobre la indecidibilidad absoluta de la HC tenía que estar acotada a una tradición matemática particular, por lo que los resultados que obtuve fueron realmente limitados, aunque en mi opinión eso no les resta valor, sólo alcance.

Como primer paso de la investigación, analicé la noción de prueba ofrecida por David Hilbert y la contraste con la noción ofrecida por los hermanos du Bois-Reymond, que son agnósticos. Como resultado obtuve que si bien la noción de prueba en Hilbert es la noción tradicional en matemáticas, a saber, una prueba es una cadena finita de fórmulas que parte de axiomas y continua usando reglas de inferencia, la postura de Hilbert descansa en la aceptación del finitismo como garante de la corrección de las pruebas. Así que, incluso la postura de Hilbert tiene elementos filosóficos de fondo; su estudio no es puramente matemático como él hubiera deseado.

Después presenté las pruebas de incompleción de la aritmética ofrecidas por Kurt Gödel, que muestran que si nos acotamos a los estándares de prueba aceptados por la filosofía de Hilbert, existen proposiciones indecidibles en matemáticas. Mostré además que existían diversos tipos de proposiciones indecidibles y que las modificaciones de los sistemas matemáticos necesarios para minimizar este tipo de proposiciones requieren la elección de una postura filosófica. Fue en este punto que di mi definición general de proposición absolutamente indecidible. La definición incluye una postura filosófica de fondo, una teoría base, las razones por las cuáles se acepto la teoría base, criterios de modificación del conjunto de axiomas, criterios de modificación de la lógica y criterios de aplicación. Esto implicaba que en realidad las proposiciones "absolutamente indecidibles" sólo lo eran para una elección particular de estos elementos, así que el resultado es mucho más limitado de lo esperado.

Para evaluar la indecidibilidad absoluta de la HC, presenté sus pruebas de independencia respecto a ZFC y mostré como es que no se puede decidir sobre ella apelando a reflexiones metateóricas como en el caso de otras proposiciones indecidibles. Así que me vi en la necesidad de elegir la posición filosófica de fondo y los criterios de modificación para ZFC que usaría en mi investigación. A esto dediqué los capítulos 3 y 4.

Exploré la postura filosófica de Gödel sobre la HC, que sin duda es una de las más influyentes en la literatura especializada. Me concentré en su postura realista y su programa de búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos que pudieran ofrecernos una imagen más acabada del universo conjuntista. Recuperé su distinción de los criterios para justificar la aceptación de nuevos axiomas, su postura sobre que la noción intuitiva de conjunto es la de "conjunto de" y su preferencia por la jerarquía acumulativa de conjuntos como modelo pretendido de la teoría de conjuntos. También presenté la postura de Solomon Feferman sobre el programa de Gödel y sus razones para abandonarlo. Al final pude observar que la discrepancia de los autores se debía a que sus posturas se apoyaban en diferentes fundamentos filosóficos. Gödel creía que el universo conjuntista existía y era independiente de nosotros; el objetivo de la teoría de conjuntos era ofrecer la descripción más precisa posible de dicho universo. Feferman no estaba comprometido con el realismo y en su opinión las matemáticas realmente relevantes eran las matemáticas aplicadas, por lo que no era necesario buscar nuevos axiomas para ZFC, pues esta teoría es suficiente para reconstruir todas las matemáticas aplicadas. Encontré que ambas posturas resultaban problemáticas para el estudio del problema del continuo. En particular, la postura de Gödel tenía problemas para justificar el acceso epistémico que tenemos al universo de los conjuntos.

En el cuarto capítulo exploré una tercera alternativa, la filosofía segunda de Penelope Maddy. Esta filosofía pretende ser naturalista y propone que los estudios filosóficos de las matemáticas deben adecuarse a las prácticas matemáticas y no al revés. La postura de Maddy ofrece la ventaja de poder justificar el uso de criterios internos y externos para la aceptación de nuevos axiomas, además de recuperar muchos elementos de la práctica matemática. La ontología que se obtiene de sus estudios es muy ingenua, pero recupera todos los elementos de las prácticas matemáticas. Algo muy similar sucede con su epistemología. También ofrece una justificación de porque las matemáticas no aplicadas deben ser respetadas y de la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos. Esto permite recurrir a los resultados de los teóricos de conjuntos para estudiar el problema del continuo, lo que favorece el uso de criterios externos para justificar nuevos axiomas. Sin embargo, el costo es grande. Dado que la filosofía segunda de las matemáticas parte del estudio de una comunidad matemática particular, todos los resultados se restringen a esa tradición, no son generales. La postura de Maddy desemboca en un pluralismo en filosofía de las matemáticas. En el caso de esta investigación se restringe a los estudios realizados por el grupo CABAL y los teóricos de conjuntos que son afines al grupo.

En el último capítulo me concentré en estudiar el problema del continuo utilizando como filosofía de fondo el objetivismo de Maddy y recuperando los resultados ofrecidos por los teóricos de conjuntos de la tradición matemática que elegí. De acuerdo a mi análisis, si bien es posible ofrecer una justificación adecuada para la adopción de muchos nuevos axiomas, ninguno de ellos es lo suficientemente fuerte para resolver el problema del continuo. La idea central detrás de esta afirmación es que los objetivos y las prácticas de los teóricos de conjuntos nos permiten adoptar ciertos criterios que justifican la aceptación de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos. Los objetivos considerados eran: 1) crear el marco más general posible para la reconstrucción de estructuras matemáticas, 2) evitar las paradojas y las antinomias y 3) resolver problemas abiertos. Otras fuentes de aceptación de criterios es que se apoyen en la naturaleza de los objetos de la teoría de conjuntos y establecer conexiones entre diferentes ramas de las matemáticas.

Desafortunadamente, la HC no puede ser decida por criterios apoyados por ninguna de estas fuentes. Para mostrarlo usé una serie de resultados que llamé limitativos (todos ellos conocidos en la literatura especializada). El primero de ellos muestra que los principios de reflexión justificados en los objetivos de la teoría y en la naturaleza del universo conjuntista, no son lo suficientemente fuertes para resolver el problema del continuo. El segundo muestra que los axiomas de los cardinales grandes también eran insuficientes. El tercero muestra que la HC no es útil para generar nuevas estructuras. Con lo que se eliminan los objetivos de la teoría como fuente de justificación. El último resultado muestra que la HC no tiene implicaciones relevantes en la teoría descriptiva de conjuntos (y el análisis matemático), pues el axioma es "efectivamente completo" para esta teoría. La única posibilidad de obtener criterios los suficientemente fuertes como para resolver el problema del continuo es que dichos criterios se justifiquen en la naturaleza de los conjuntos; sin embargo, la naturaleza de los conjuntos y del universo conjuntista todavía no es los suficientemente clara como para aportar dichos criterios. Es por esto que concluí que la HC es absolutamente indecidible desde el punto de vista de la tradición que estudié.

Con todo, dejo abierta la posibilidad de que en un futuro la comunidad matemática pueda obtener desarrollos suficientes para clarificar la naturaleza del universo conjuntista y pueda resolver el problema del continuo.

Los resultados obtenidos en esta investigación pueden parecer decepcionantes; en tanto, dejan sin resolver el problema del continuo, presentan a la HC como una proposición absolutamente indecidible respecto a la tradición analizada y, al mismo tiempo, dejan abierta la posibilidad de que esto cambie. Sin embargo, creo que estos resultados abren la puerta a investigaciones posteriores por lo menos en dos sentidos. El primero de ellos tiene que ver con la tradición específica que estudié. Creo que es posible realizar un rastreo durante los próximos años de los trabajos de este grupo, buscando la clarificación de la naturaleza del universo conjuntista. En particular, creo que será tremendamente útil seguir de cerca los trabajos sobre invariancia bajo *forcing* y la creación de modelos internos maximales que en un corto plazo pueden ofrecer suficientes elementos para resolver el problema del continuo, aunque es muy pronto para afirmarlo. El segundo de ellos consiste en realizar estudios de otras tradiciones matemáticas utilizando las herramientas dadas por la filosofía segunda, en especial creo que puede ser muy provecho usar estas herramientas para estudiar otras tradiciones en teoría de conjuntos; por ejemplo, podrían realizarse esta clase de estudios a los defensores de los axiomas de determinación, a los defensores de los axiomas de simetría o, incluso, a teoría de conjuntos mucho más alejadas de ZFC. El camino está abierto para continuar explorando diferentes tradiciones matemáticas.

Bibliografía

1. Abian, A y S. LaMacchia (1978). "On the Consistency and Independence of Some Set-Theoretical Axioms", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XIX(1) (January), pp. 155-158.

2. Bartha, P. (2011). "Symmetry and the Brown-Freiling Refutation of the Continuum Hypothesis". *Symmetry*, 3, pp. 636-652.

3. Benacerraf, P. (1965). "What numbers could not be" en Benacerraf y Putnam (1983), pp. 272-294.

4. ____________ (1973). "Mathematical Truth" en Benacerraf y Putnam (1983), pp. 403-420.

5. Benacerraf, P. y H. Putnam (comp.) (1983). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (segunda edición) (p. 600). Cambridge: Cambridge University Press.

6. Brouwer, L.E.J. (1912). "Intuitionism and Formalism" ("Intuitionisme en Formalisme") (tr. A. Dresden) en Benacerraf y Putnam (1983), pp. 77-89.

7. ____________. (1949). "Consciousness, Philosophy, and Mathematics" en Benacerraf y Putnam (1983), pp. 90-96.

8. Brown, J. R. (2008). *Philosophy of Mathematics* (2da. Ed.) (p. 245). Nueva York: Routledge.

9. Clarke-Doane, J. (2012). "What is absolute undecidibility?", *Noús*, 47(3), pp. 467?481.

10. Cohen, P. (1963). "The Independence of the Continuum Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 50(6), pp. 1143-1148.

11. ______. (1964). "The Independence of the Continuum Hypothesis II", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 51(1), pp. 105-110.

12. ______. (1966). *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (p. 154). Nueva York: W. A. Benjamin, Inc.

13. Du Bois-Reymond, E. (1874). "The Limits of our Knowledge of Nature" ("Über die Grenzen des Naturerkennens"). *Popular Science Monthly*, 1874(5), pp. 17-32.

14. Euclides (1992). *Elementos* (tr. García Bacca) (p. 219). México D.F.: UNAM.

15. Ewald, W. (Ed.) (1996). *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foudations of Mathematics* (p. 709). New York: Clarendon Press - Oxford University Press.

16. Feferman, S. (1991). "Reflecting on Incompleteness". *The Journal of Symbolic Logic*, 56(1), pp. 1?49.

17. ________. (1996). "Gödel's program for new axioms: why, where, how and what?" en Hájek (1996), pp. 3-22.

18. ________. (1998). *In the Light of Logic* (p. 340). Oxford: Oxford University Press.

19. ________. (1999). "Does Mathematics Need New Axioms?" *The American Mathematical Monthly*, 106(2), pp. 99?111.

20. ________. (2006). "Are There Absolutely Unsolvable Problems? Gödel's Dichotomy". *Philosophia Mathematica*, 14(2), pp. 134?152.

21. Feferman, S., Friedman, H. M., Maddy, P., y Steel, J. R. (2000). "Does Mathematics Need New Axioms?" *The Bulletin of Symbolic Logic*, 6(4), pp. 401?446.

22. Feferman, S., Parsons, C., y Simpson, S. (2009). *Kurt Gödel: Essays in his Centennial* (p. 373). Cambridge: Cambridge University Press.

23. Field, H. (1980). *Science Without Numbers* (p. 130) Oxford: Basil Blackwell Publisher.

24. Frege, G. (1884). "Los Fundamentos de la Aritmética" (Die Grundlagen der Arithmetik) en Frege (1972), pp. 107-208.

25. ______. (1893). *The Basic Laws of Arithmetic* (Grundgesetze der Arithmetik) (tr. M. Furth) (p. 144). Los Angeles: University of California Press.

26. ______. (1974). *Conceptografía - Los Fundamentos de la Aritmética - Otros Estudios Filosóficos* (tr. Hugo Padilla) (p. 270). México D.F.: UNAM-IIFs.

27. Freiling, C. (1986). "Axioms of Symmetry: Throwing Darts at the Real Number Line". *The Journal of Symbolic Logic*, 51(1), pp. 190-200.

28. Friend, M. (2014). *Pluralismin Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics* (p. 291). Nueva York: Springer.

29. García de la Sienra, A. (comp.) (2008). *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (p. 240). México D.F.: IIFs-UNAM.

30. Gödel, K. (1931). "On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I" ("Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I") en Kurt Gödel (1986), pp. 144-195.

31. ______. (1931a). "Sobre proposiciones formalmente indecidibles en Principia Mathematica y sistemas afines" en Kurt Gödel (1981), pp. 53-89.

32. ______. (1931b). "Discusión sobre los fundamentos de las matemáticas" en Kurt Gödel (1981), pp. 90?94.

33. ______. (1938). "The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12), 556-557.

34. ______. (1939). "Consistency proof of the generalized continuum-hypothesis" en Gödel (1990), pp. 28-32.

35. ______. (*193?). "Undecible Diaphantine Propositions" en Kurt Gödel (1995), pp. 164-175.

36. ______. (1940). *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory* (p. 72). Princeton: Princeton University Press.

37. ______. (1947a). "What is Cantor's Continuum Problem?". *The American Mathematical Monthly*, 54(9), 515 ? 525.

38. ________. (1947b). "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?" en Kurt Gödel (1981) pp. 340?362.

39. ________. (1981). *Obras Completas* (tr. Jesús Mosterín) (p. 469). Madrid: Alianza Editorial.

40. ________. (1986). *Collected Works I: Publications 1929-1936* (ed. Solomon Feferman) (p. 474).Nueva York: Oxford University Press.

41. ________. (1990). *Collected Works II: Publications 1938-1974* (ed. Solomon Feferman) (p. 407).Nueva York: Oxford University Press.

42. ________. (1995). *Collected Works III: Unpublished essays and lectures* (ed. Solomon Feferman) (p. 532).Nueva York: Oxford University Press.

43. Gutiérrez, C. (2011) *Estructuralismo, Teoría de Conjuntos y Teoremas de Categoricidad* (p. 120). Tesis de maestría.

44. Hájek, P. (ed.) (1996) *Gödel '96: Logical foundations of mathematics, computer science and physics - Kurt Gödel's legacy, Brno, Czech Republic, August 1996, proceedings* (p. 322). Berlin: Springer-Verlag.

45. Hilbert, D. (1899) *Fundamentos de la Geometría* (tr. David García Bacca) en Euclides (1992), pp. 1-41.

46. ________. (1900) "Los problemas de las Matemáticas" (Mathematische Probleme) en *Bulletin of the American Mathematical Society* 8 (1902), pp. 437-479.

47. ________. (1904) "Foudations of Logic and Arithmetic" (Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik") en Jean van Heijenoort (1977), pp. 129-138.

48. ________. (1917) "El pensamiento axiomático" ("Axiomatisches Denken") en Hilbert (1993), pp. 23-36.

49. ________. (1922) "La nueva fundamentación de las matemáticas" ("Neubegründung der Mathematik") en Hilbert (1993), pp. 37-62.

50. ________. (1923) "Los fundamentos lógicos de las matemáticas" ("Die logischen Grundlagen der Mathematik") en Hilbert (1993), pp. 63-82.

51. ________. (1925) "Sobre el Infinito" (Über das Unenliche) en Hilbert (1993), pp. 83-122.

52. ________. (1927) “The Foundations of Mathematics” (“Die Grundlagen der Mathematik”) en Jean van Heijenoort (1977), (pp. 464-479.

53. ________. (1930) “Natural Philosophy and Logic” (“Naturerkennen und Logia”) en Vinniokv (1999), pp. 42-46.

54. ________. (1993) *Los fundamentos de las matemáticas* (tr. Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura) (p. 123). México D.F.: UNAM.

55. Hurtado, G. y A. Moretti (comps.) (2003). *La paradoja de Orayen* (p.108). Buenos Aires: Eudeba.

56. Jech, T. (2003). *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded.* (p. 769). Berlin: Springer-Verlag.

57. Kanamori, A. (2009). *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings* (2da. ed.) (p. 536). Berlin: Springer-Verlag.

58. Kechris, A. (1994). *Classical Descriptive Set Theory* (p. 402). Nueva York: Springer-Verlag.

59. Koellner, P. (2003). *The Search for New Axioms*, Tesis de Doctorado.

60. __________. (2006). “On the question of absolute undecidability”. *Philosophia Mathematica*, 14(2), pp. 153-188.

61. __________. (2009). “On the question of absolute undecidability” en Feferman (2009), pp. 189-225.

62. __________. (2009a). “On Reflection Principles”. *Annals of Pure and Applied Logic*, 157, pp. 206-219.

63. __________. (2010). “Strong Logics of First and Second Order”. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 16(1), pp. 1-36.

64. __________. (2010a). “Independence and Large Cardinals”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

65. __________. (2013). “Large Cardinals and Determinancy”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

66. __________. (2013a). “The Continuum Hypothesis”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

67. __________. (20??). “Feferman on the Indefiniteness of CH”.

68. Koellner, P. y H. Woodin (2009). "Incompatible W-Complete Theories". *Journal of Symbolic Logic*, 74(4), pp. 1155-1170.

69. Kreisel, G. (1964). "Informal Rigour and Completeness Proofs" en Lakatos (Ed.) (1967), pp. 138-171.

70. Kunen, K. (1980). *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs* (p. 315). Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

71. Lakatos, I. (Ed.) (1967). *Problems in the Philosophy of Mathematics* (p. 241). Amsterdam: North Holland Publishing Company.

72. Lévy, A y R. Solovay (1967). "Measurable cardinals and the continuum hypothesis". *Israel Journal of Mathematics*, 5(4), pp. 234-248.

73. Lindström, P. (1997). *Aspects of Incompleteness* (p. 133). Berlín: Springer-Verlag.

74. Lindström, S. (ed.) (2009). *Logicism, Intuitionism and Formalism: What Has Become of Them?* (p. 512). Dordrecht: Springer Science+Business Media.

75. Link, G. (2006). De Gruyter Series in Logic and Its Aplications 6: One Hundred Years of Russell's Paradox (p. 622). Berlín: Walter de Gruyter.

76. Maddy, P. (1980). "Perception and Mathematical Intuition". *Philosophical Review*, 89(2), pp. 163?196.

77. ________ (1988a). "Believing the Axioms. I". *The Journal of Symbolic Logic*, 53(2), pp. 481?511.

78. ________ (1988b). "Believing the Axioms. II". *The Journal of Symbolic Logic*, 53(3), pp. 736?764.

79. ________ (1990). *Realism in Mathematics* (p. 204). Nueva York: Oxford University Press.

80. ________ (1992). "Indispensability and Practice". *The Jornual of Philosophy*, 84(6), pp. 275-289.

81. ________ (1998). *Naturalism in Mathematics* (p. 254). Nueva York: Oxford University Press.

82. ________ (2007). *Second Philosophy: A Naturalistic Method* (p. 448). Oxford: Oxford University Press.

83. ________ (2011). *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory* (p. 150). Oxford: Oxford University Press.

84. ________ (2014). *The Logical Must: Wittgenstein on Logic* (p. 135). Nueva York: Oxford University Press.

85. McCarty, D.C. (2005). "Problems and Riddles: Hilbert and du Bois-Reymonds". *Synthese*, 147, pp. 63?79.

86. ____________ (2006). "David Hilbert and Paul du Bois-Reymond: Limits and Ideals" en Link (2006), pp. 517-532.

87. McGee, V. (1997). "How We Learn Mathematical Language". *Philosophical Review*, 106(1), pp. 35?68.

88. Moschovakis, Y. N. (1980). Descriptive set theory (p. 637). Nueva York: North-Holland Publishing Company.

89. Mostowski, A. (1964). "Recent Results in Set Theory" en Lakatos (Ed.) (1967), pp. 84-96.

90. Quine, W.V.O. (1951). "Dos dogmas del Empirismo" (Two Dogmas of Empiricism) (tr. Manuel Sacristán) en Valdés, L. (comp.) (1999), pp. 220-243.

91. ___________. (1974). *La relatividad ontológica y otros ensayos* (tr. Manuel Garrido y Joseph Blasco) (p. 206), Madrid, Technos.

92. Rayo, A. y Uzquiano, G. (2003). "A Puzzle for Structuralism" (p. 19). Manuscrito no publicado.

93. Smullyan, Raymond (1992). *Gödel's Incompleteness Theorems* (p. 139). Nueva York: Oxford University Press.

94. Schirn, M y K. Niebergall (2003). "What finitism could not be". *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 35(105), pp. 43-68.

95. Shapiro, S. (1991) *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic* (p. 277). New York: Oxford University Press.

96. ________. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (p. 279). New York: Oxford University Press.

97. ________. (2000). *Thinking about Mathematics* (p. 328). New York: Oxford University Press.

98. Stendlund, S. (2012). "Different senses of finitude: An inquiry into Hilbert's finitism". *Synthese*, vol. 185, pp. 335-363.

99. Stroud, B. (1984). *The Significance of Philosophical Scepticism* (p. 277). Oxford: Oxford University Press.

100. Tait, W. W. (1981). "Finitism". *Journal of Philosophy*, 78(9), pp. 524-546.

101. Torres, C. (2001) *Elementos para una critica matemática de la razón filosófica: la filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel*. Tesis de Doctorado.

102. ________ (2007). "¿Ignoramus et ignorabimus?". *Anuario de Filosofía*, vol 1., pp. 33-49.

103. Uzquiano, G. (2002). "Categoricity theorems and conceptions of set". *Journal of Philosophical Logic*, (September 2001), pp. 181?196.

104. Valdés, L. (comp.) (1999). *La búsqueda del significado* (p. 717). Madrid: Technos.

105. van Atten, M., y Kennedy, J. (2009). "Gödel's Modernism: On Set-Theoretic Incompleteness, Revisited" en Lindström (2009), pp. 303-356.

106. van Heijenoort, J. (ed.) (1977) *From Frege to Gödel* (p. 660). London: Harvard University Press.

107. Vickers, P. (2013). *Understanding Inconsistent Science* (p. 273). Oxford: Oxford University Press.

108. Vinnikov, V. (1999) "We shall know: Hilbert's apology" en *The Mathematical Intelligencer*, 21(1), pp. 42-46.

109. Weston, T. S. (1977). "The Continuum Hypothesis is Inpendent of Second-Order ZF". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVIII(3), pp. 499-503.

110. Woodin, W. H. (2001a). "The Continuum Hypothesis, part I". *Order A Journal On The Theory Of Ordered Sets And Its Applications*, 48(6), pp. 568?576.

111. ____________. (2001b). "The Continuum Hypothesis , Part II". *Order A Journal On The Theory Of Ordered Sets And Its Applications*, 48(2), pp. 681?690.

112. Zach, R. (2001). *Hilbert's Finitism: Historical, Philosophical and Metamathematical Perspectives*. Tesis de doctorado.

113. Zermelo, E. F. F. (1930). "On Boudary Numbers and Domains of Sets: New Investigations in the Foudations of Set Theory" en W. Ewald (Ed.) (1996), pp. 1219?1233.