



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**DOS EXTENSIONES DEL TEOREMA DE
RICHARDSON EN DIGRÁFICAS COLOREADAS POR
ARISTAS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A:

RENATO ENRÍQUEZ MICHEL



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
2015**

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Enríquez

Michel

Renato

63 82 56 10

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

409012525

2. Datos del tutor

Dra.

Hortensia

Galeana

Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Dra.

María del Rocío

Sánchez

López

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Mucuy-Kak del Carmen

Guevara

Aguirre

5. Datos del sinodal 3

Mat.

Laura

Pastrana

Ramírez

6. Datos del sinodal 4

Mat.

Ilán Abraham

Goldfeder

Ortíz

7. Datos del trabajo escrito

Dos extensiones del Teorema de Richardson en digráficas coloreadas por aristas

60 pp.

2015

Agradecimientos

A mis padres, Renato y Josefina, por su gran apoyo durante toda mi vida.

A mi novia, Denia, por siempre haber creído en mí.

A la Dra. Hortensia Galeana, mi asesora de tesis, por su apoyo para culminar mis estudios.

A mis sinodales, Rocío, Mucuy, Laura e Ilán, por la paciencia que me tuvieron y por haberme ayudado a mejorar mi forma de escribir.

Al Twinky, por haberme acompañado tantas noches de desvelo haciendo este trabajo.

Índice

1. Preliminares	5
1.1. Conceptos básicos de gráficas simples y dirigidas	5
1.2. Caminos y trayectorias dirigidas	9
1.3. Conexidad en digráficas	14
1.4. Otras definiciones y resultados necesarios.	17
2. Núcleos	22
2.1. Núcleos en digráficas	22
2.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas	31
3. Dos extensiones del teorema de Richardson en digráficas coloradas por flechas	36
3.1. Una extensión del teorema de Richardson	36
3.2. Otra extensión del teorema de Richardson	45

Introducción

La teoría de núcleos en digráficas pertenece al área de las matemáticas de combinatoria. Se podría decir que inició en 1944 cuando John von Neumann y Oskar Morgenstern dieron la primera definición de núcleo en su libro “Theory of Games and Economic Behavior”. El concepto de núcleo lo definieron como “solución” para los juegos cooperativos de n jugadores.

Un núcleo de una digráfica D es un conjunto de vértices que cumple las siguientes condiciones:

- es independiente, es decir, no existe flecha entre ningún par de sus vértices,
- es absorbente, es decir, desde todo vértice que no pertenezca a él, existe una flecha hacia un vértice que sí pertenezca al núcleo.

Partiendo de esta definición se ha desarrollado la teoría de núcleos en digráficas, en la cual se intenta mostrar la existencia o no existencia de núcleos en las digráficas y si es posible, mostrar los vértices que los componen; sin embargo, aún no es posible saber si existe o no núcleo para un gran número de gráficas. Para cierto tipo de digráficas existen resultados que garantizan la existencia de un núcleo y en algunos casos muestran explícitamente dicho núcleo. Uno de estos resultados es el teorema de Richardson, el cual garantiza la existencia de un núcleo en toda digráfica que no tenga ciclos de longitud impar. Como se puede uno imaginar, dicho teorema garantiza la existencia de núcleo en un gran número de digráficas, por lo que dicho resultado es de los más importantes en la teoría de núcleos en digráficas. Dicho teorema fue formulado y demostrado en 1953.

En el presente trabajo se darán dos generalizaciones de dicho teorema, las cuales son en digráficas coloreadas por aristas dirigidas (flechas). El teorema de Richardson puede ser demostrado a partir de dichas generalizaciones; para ambas, es el caso particular de la digráfica que tiene todas sus flechas con colores distintos.

La primera generalización utiliza el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas. Una trayectoria monocromática en una digráfica D coloreada por flechas es una trayectoria cuyas flechas son del mismo color, de modo que un núcleo por trayectorias monocromáticas es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas. Para poder llegar al resultado es necesario definir una digráfica $\mathcal{C}_C(D)$, la digráfica de clases de color, cuyos vértices son los colores representados en las flechas de D . Existe una flecha entre dos vértices de $\mathcal{C}_C(D)$, $x_i, x_j \in V(\mathcal{C}_C(D))$, si y sólo si existen dos flechas $f = (u, v) \in F(D)$ y $g = (v, w) \in F(D)$ de color i y j , respectivamente. Entonces, ¿qué característica debe tener $\mathcal{C}_C(D)$ para que D tenga un núcleo por trayectorias monocromáticas? Dicha pregunta será contestada con la primera extensión del teorema de Richardson.

La segunda extensión utiliza el concepto de H -núcleo. Sean D una digráfica coloreada por flechas y H una digráfica, posiblemente con lazos. Diremos que D es H -coloreada si sus flechas tienen colores que están representados por vértices en H . Una H -trayectoria es una trayectoria en D cuyos colores de flechas forman una sucesión en H . Tenemos entonces que un H -núcleo es un conjunto de vértices

de D independiente y absorbente por H -trayectorias. Como los conjuntos de vértices de $\mathcal{C}_C(D)$ y H son “colores”, podemos notar que existe cierta similitud entre ambas digráficas. La pregunta es, ¿qué características debe tener H con respecto a $\mathcal{C}_C(D)$ para que D tenga un H -núcleo? Esta otra pregunta será respondida con la segunda extensión del teorema de Richardson.

Empezaré mi trabajo enunciando conceptos y resultados de la teoría de gráficas (tanto gráficas como digráficas) que serán útiles para llegar a los resultados principales. Posteriormente, en el capítulo dos, se revisarán conceptos y resultados pertenecientes a la teoría de núcleos en digráficas, empezando por núcleos en general y continuando con un tipo de núcleos en específico, como son los núcleos por trayectorias monocromáticas (este último concepto aplicable ya a digráficas coloreadas por aristas). Finalmente, el capítulo 3 se ocupará de las dos extensiones del teorema de Richardson, en digráficas coloreadas por flechas, la primera con núcleos por trayectorias y la segunda con H -núcleos.

1. Preliminares

Los conceptos generales de la teoría de gráficas pueden ser encontrados en [2] y [3]. En esta sección se expondrán conceptos que son importantes para el presente trabajo.

1.1. Conceptos básicos de gráficas simples y dirigidas

Una *gráfica* es una tripleta ordenada $(V(G), A(G), \psi_G)$ que consiste en un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices, un conjunto de aristas, $A(G)$, ajeno a $V(G)$, y una función de incidencia ψ_G que asocia cada arista con un par no ordenado (no necesariamente distinto) de vértices. Una gráfica es representada por un diagrama de puntos (vértices) junto con líneas (aristas) que unen algunos de dichos puntos. Si e es una arista y u y v son vértices tal que $\psi_G(e) = (u, v)$ se dice que e une a u y v y que *incide* tanto en u como en v . Los vértices u y v se dice que son *adyacentes*.

Cuando las aristas de una gráfica “tienen” dirección se les llama *aristas dirigidas* o *flechas* y la gráfica que contiene este tipo de aristas se denomina digráfica. Formalmente una *digráfica* o *gráfica dirigida* es una tripleta ordenada $(V(D), F(D), \psi_D)$ donde $V(D)$ es el conjunto de vértices de D , $F(D)$ es el conjunto de flechas de D y ψ_D es una función de incidencia que asocia cada flecha de D con un par ordenado de vértices de D . Si $a \in F(D)$ y u y v son vértices tal que $\psi_D(a) = (u, v)$ se dice que la flecha a incide desde u hacia v y los vértices u y v se dice que son adyacentes; podría pasar que $u = v$. En este caso, a dicha flecha se le denomina *lazo*; en esta sección de preliminares y en la primera parte de la siguiente, núcleos en digráficas, estaremos trabajando con digráficas sin lazos.

El *orden* de una gráfica (digráfica) es el número de vértices que tiene y lo representaremos como p . El *tamaño* de una gráfica (digráfica) es el número de aristas (flechas) que tiene y lo representaremos como q .

Sea D una digráfica; la *gráfica subyacente* de D , G_D , está definida como $V(G_D) = V(D)$, y u es adyacente a v si y sólo si $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$.

Un ejemplo de una digráfica y su gráfica subyacente está en la figura 1.1.



Figura 1.1

El *grado* de un vértice v en una gráfica G es el número de aristas que inciden en él y se expresa como $\delta_G(v)$. Para una digráfica tenemos algunas modificaciones en el concepto del grado de los vértices. Definimos $\delta_D^+(u)$ como el número de flechas que inciden desde u y se denomina como *exgrado*. Asimismo, definimos $\delta_D^-(u)$ como el número de flechas que inciden hacia u y se denomina como *ingrado*. Tenemos entonces que $\delta_D(u) = \delta_D^-(u) + \delta_D^+(u)$.

El conjunto de los vecinos exteriores de un vértice v se define como $\Gamma^+(v) = \{y \in V(D) \mid (v, y) \in F(D)\}$. La cardinalidad de dicho conjunto es el exgrado de v . El conjunto de los vecinos interiores de un vértice v se define como $\Gamma^-(v) = \{y \in V(D) \mid (y, v) \in F(D)\}$. La cardinalidad de dicho conjunto es el ingrado de v .

En la figura 1.2 tenemos que $\delta^+(a) = 1$, $\delta^-(a) = 0$, $\delta^+(b) = 1$, $\delta^-(b) = 1$, $\delta^+(c) = 1$, $\delta^-(c) = 2$, $\delta^+(d) = 3$, $\delta^-(d) = 0$, $\delta^+(e) = 1$, $\delta^-(e) = 1$, $\delta^+(f) = 0$, $\delta^-(f) = 3$. $\Gamma^+(e) = \{f\}$, $\Gamma^-(e) = \{b, d\}$.

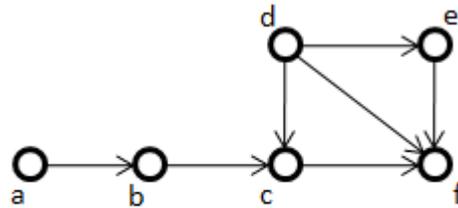


Figura 1.2

Una digráfica D' es una *subdigráfica* de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. Sean H y D digráficas. Utilizaremos la notación $H \subseteq D$ para indicar que H es subdigráfica de D . Se dice que D' es una *subdigráfica inducida* de

D si $V(D') \subseteq V(D)$ y para $\{u, v\} \subseteq V(D')$ se tiene que $(u, v) \in F(D')$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$. Se dice que D' es una *subdigráfica generadora* de D si $V(D') = V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. Sea $S \subseteq V(D)$. La subdigráfica inducida por S , denotada $D[S]$, tiene $V(D[S]) = S$ y $F(D[S]) = \{(u, v) \in F(D) \mid \{u, v\} \subseteq S\}$. (Véase la figura 1.3).

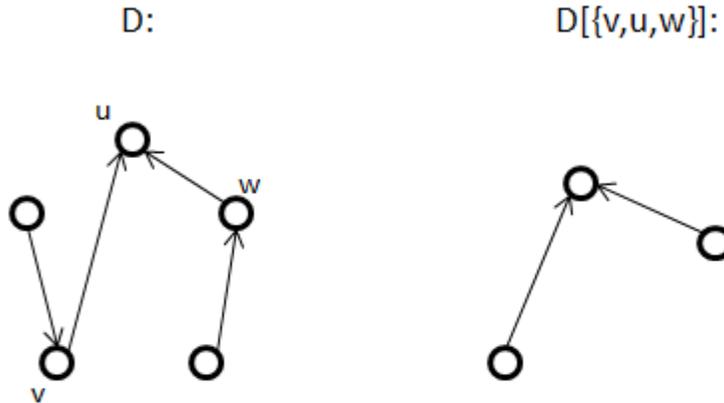


Figura 1.3

Para un subconjunto no vacío S de $V(D)$ y $v \in V(D)$, una flecha $(u, v) \in F(D)$ es llamada *Sv-flecha* siempre que $u \in S$. Análogamente una flecha $(v, u) \in F(D)$ es llamada *vS-flecha*. Para K y S dos conjuntos no vacíos de vértices de una digráfica D , una flecha $(u, v) \in F(D)$ es llamada una *KS-flecha* si $u \in K$ y $v \in S$.

El *complemento* de una digráfica D , denotado como D^C , es la digráfica tal que $V(D^C) = V(D)$ y $(u, v) \in F(D^C)$ si y sólo si $(u, v) \notin F(D)$.

La *unión* de dos digráficas D y H es la digráfica $D \cup H$ con conjunto de vértices $V(D \cup H) = V(D) \cup V(H)$ y conjunto de flechas $F(D \cup H) = F(D) \cup F(H)$.

Sea D una digráfica. Definimos la *digráfica de líneas* $L(D)$ de la digráfica D de la siguiente manera:

$$V(L(D)) = F(D),$$

$$F(L(D)) = \{((u, v), (w, z)) \mid v = w\} \text{ donde } u, v, w, z \in V(D).$$

En la figura 1.4 podemos ver una digráfica y su digráfica de líneas.

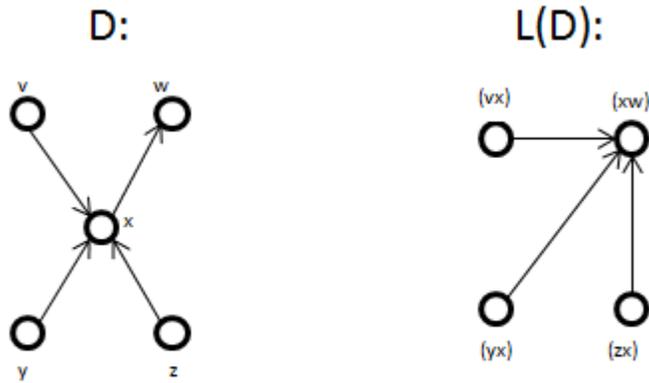


Figura 1.4

Una gráfica G es *bipartita* si su conjunto de vértices puede ser separado en dos conjuntos X y Y , tal que no exista arista entre ningún par de vértices de X y no exista arista entre ningún par de vértices de Y ; X, Y es llamada entonces una *bipartición* de G . El concepto de gráfica bipartita se extiende también para las digráficas.

Una digráfica D es *semicompleta* si para todo par de vértices $u, v \in V(D)$, $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$. Una digráfica es *completa* si en la definición pasada sustituimos el “o” por un “y”. Una flecha $(u, v) \in F(D)$ es *simétrica* si $(v, u) \in F(D)$. Diremos que $(u, v) \in F(D)$ es *asimétrica* si $(v, u) \notin F(D)$. Diremos que una digráfica es *simétrica* si todas sus flechas son simétricas. Diremos que una digráfica es *asimétrica* si todas sus flechas son asimétricas. Un *torneo* es una digráfica semicompleta y asimétrica.

Se dice que una digráfica D es *transitiva* si para cualesquiera vértices u, v, w tal que existan las flechas (u, v) y (v, w) , existe la flecha (u, w) . La digráfica de la figura 1.5 es transitiva.

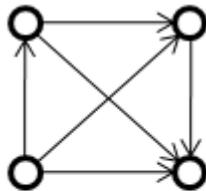


Figura 1.5

1.2. Caminos y trayectorias dirigidas

Un *camino* en una digráfica D es una sucesión de vértices $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Un *camino dirigido* es una sucesión de vértices $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$. En ambos casos la longitud de C es n y se denota como $l(C)$. Definimos asimismo la *distancia dirigida* entre dos vértices $d(u, v)$ como la longitud del camino dirigido más corto entre u y v . En el presente trabajo nos referiremos a la distancia dirigida como *distancia* a menos que se especifique lo contrario. Se utilizará la notación (u, C, v) para indicar que la sucesión de vértices de u a v es la del camino C .

Un *paseo* (*paseo dirigido*) es un camino (camino dirigido) en el que no se repiten flechas. Una *trayectoria* (*trayectoria dirigida*) es un camino (camino dirigido) en el que no se repiten vértices.

Un camino (camino dirigido) es *cerrado* si $u_0 = u_n$. Asimismo, un paseo (paseo dirigido) es cerrado si $u_0 = u_n$. Si un camino, paseo o trayectoria inicia en u y termina en v , tenemos un uv -camino, un uv -paseo o una uv -trayectoria, respectivamente. Un *ciclo* es un paseo tal que $u_0 = u_n$. Un *ciclo dirigido* es un paseo dirigido tal que $u_0 = u_n$.

En gráficas, un camino es una sucesión de vértices $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in A(D)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$. Los conceptos de paseo y trayectoria se desprenden del concepto de camino de la misma manera que para las digráficas.

Sea D una digráfica (gráfica); utilizaremos la notación $T \subseteq D$ para indicar que el camino T pertenece a D . La misma notación será utilizada para paseo, trayectoria, ciclo y sus correspondientes dirigidos.

La *concatenación* de dos caminos $C = (u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ y $T = (v = w_0, w_1, \dots, w_n)$ donde v es el mismo vértice para ambos caminos se define como $C \cup T = (u_0, u_1, \dots, v, w_1, \dots, w_n)$.

Veamos algunos resultados importantes que nos permitirán entender y trabajar mejor con los conceptos antes vistos.

Teorema 1.1.

Todo uv -camino dirigido contiene como subsucesión a una uv -trayectoria dirigida.

Demostración.

Se realizará por inducción sobre la longitud del camino.

Base de la inducción.

$l(C) = 0$. En este caso $C = (u = v)$, con lo que C es una trayectoria.

$l(C) = 1$. En este caso $C = (u, v)$. Notemos que $u \neq v$ pues hay una flecha entre ellos y estamos trabajando con digráficas sin lazos. Por lo tanto, C es una uv -trayectoria dirigida.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que todo uv -camino dirigido de longitud menor a n contiene como subsucesión una uv -trayectoria dirigida.

Paso inductivo.

Sea $C = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ un camino dirigido de longitud n . Tenemos dos casos:

Caso 1. Si $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$.

Entonces C es una uv -trayectoria dirigida al no repetir vértices.

Caso 2. Existen u_i, u_j , con $i \neq j$, tales que $u_i = u_j$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. De modo que $C = (u = u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = v)$. Sea $C' = (u = u_0, u_1, \dots, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = v)$. Notemos que C' es un uv -camino dirigido de longitud menor a n . Por la hipótesis de inducción, C' contiene una uv -trayectoria dirigida T , con lo que $T \subseteq C' \subseteq C$ y por tanto C contiene una uv -trayectoria dirigida. ■

Teorema 1.2.

Todo camino dirigido cerrado contiene como subsucesión un ciclo dirigido.

Demostración.

La demostración se realizará por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado.

Base de la inducción.

$l(C) = 2$. En este caso $C = (u_0, u_1, u_0 = u_2)$. Tenemos que $u_0 \neq u_1$, pues $(u_0, u_1) \in F(D)$. Por lo tanto, C es un ciclo dirigido.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que todo camino dirigido cerrado de longitud menor a n contiene un ciclo dirigido.

Paso inductivo.

Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ un camino dirigido cerrado de longitud n . Nuevamente tenemos dos casos.

Caso 1. $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$, a excepción de $u_0 = u_n$.

Observemos que en este caso C es un ciclo dirigido.

Caso 2. Existen $i \neq j \neq n$ tal que $u_i = u_j$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. De modo que $C = (u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n = u_0)$. Tenemos dos caminos dirigidos cerrados, $C_1 = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j = u_i)$ y $C_2 = (u_0, u_1, \dots, u_i = u_j, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_n = u_0)$. Notemos que $l(C) = l(C_1) + l(C_2)$, con lo que $l(C_1) < n$ y $l(C_2) < n$. Por hipótesis de inducción, C_1 y C_2 contienen un camino dirigido cerrado, por lo que C contiene un ciclo dirigido. ■

A continuación se dará un algoritmo para encontrar una uv -trayectoria dirigida dado un uv -camino dirigido.

Algoritmo

Paso 1.

Encontrar en la digráfica D una sucesión de vértices (u_0, u_1, \dots, u_n) que forme un camino dirigido.

Paso 2.

Revisar sus vértices; si $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$ ir al paso 4. Si existen u_i, u_j con $i \neq j$ tal que $u_i = u_j$, ir al paso 3 (sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$).

Paso 3.

Eliminar los elementos $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}$ de la sucesión de vértices que forma el camino dirigido. Tenemos entonces una nueva sucesión. Ir al paso 2.

Paso 4.

Hemos terminado. Dicha sucesión de vértices es una trayectoria dirigida.

Un algoritmo para encontrar un ciclo dirigido a partir de un camino dirigido cerrado es el siguiente:

Algoritmo

Paso 1.

Encontrar en la digráfica D una sucesión de vértices $(u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ que forme un camino dirigido cerrado.

Paso 2.

Revisar sus vértices; si $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-1$ ir al paso 4. Si existen u_i, u_j con $i \neq j$, con $1 \leq i, j \leq n-1$ tal que $u_i = u_j$, ir al paso 3.

Paso 3.

Eliminar los elementos $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}$ de la sucesión de vértices que forma el camino dirigido cerrado. Tenemos entonces una nueva sucesión. Ir al paso 2.

Paso 4.

Hemos terminado. Dicha sucesión de vértices es un ciclo dirigido.

El siguiente resultado será fundamental a lo largo de la tesis.

Teorema 1.3.

Sea D una digráfica. Todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Demostración.

Se realizará por inducción sobre la longitud l del camino.

Base de la inducción.

$l(C) = 3$. Tenemos que $C = (u_0, u_1, u_2, u_3 = u_0)$ con $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$, $0 \leq i \leq 2$. Notemos que $u_0 \neq u_1$ pues $(u_0, u_1) \in F(D)$. Asimismo $u_1 \neq u_2$ y $u_2 \neq u_3$ pues $(u_1, u_2) \in F(D)$ y $(u_2, u_3) \in F(D)$. Como no se repiten vértices a excepción de $u_3 = u_0$, tenemos que C es un ciclo de longitud 3.

Hipótesis de inducción.

Suponemos que todo camino dirigido cerrado de longitud impar menor a $2n + 1$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Paso inductivo.

Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_{2n+1} = u_0)$ un camino dirigido cerrado de longitud $2n + 1$. Pueden suceder dos casos:

Caso 1. $u_i \neq u_j$ para toda $i \neq j$, con $1 \leq i, j \leq 2n$.

En este caso C es un ciclo dirigido de longitud impar.

Caso 2. Existe $i \neq j$ tal que $u_i = u_j$, con $1 \leq i, j \leq 2n$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Tenemos entonces los caminos dirigidos cerrados $C_1 = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_j = u_i)$ y $C_2 = (u_0, u_1, \dots, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_{2n}, u_{2n+1} = u_0)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que C_1 es impar. (Alguno y sólo uno de los dos caminos dirigidos cerrados C_1 o C_2 tiene que ser impar, ya que si ambos fueran de la misma paridad, C sería un camino dirigido cerrado de longitud par). Además, $l(C_1) < l(C) = 2n + 1$. Por hipótesis de inducción, C_1 contiene un ciclo dirigido de longitud impar, por lo que C contiene un ciclo dirigido de longitud impar. ■

Teorema 1.4.

Si D es una digráfica tal que para todo $z \in V(D)$, $\delta_D^+(z) \geq k \geq 1$, entonces D tiene una trayectoria dirigida de longitud mayor que o igual a k .

Demostración.

Consideremos una trayectoria dirigida de longitud máxima $T = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ con $l(T) = m$. Tenemos dos opciones:

Si $m \geq k$, entonces T es la trayectoria buscada.

Si $m < k$, consideremos u_m . Recordemos que $\delta_D^+(u_m) \geq k > m$. Solamente hay m puntos en T distintos de u_m y como $\delta_D^+(u_m) \geq k > m$, existe $w \notin V(T)$ tal que $(u_m, w) \in F(D)$; por lo tanto, $T' = T \cup (u_m, w)$ es una trayectoria dirigida con $l(T') > l(T)$ y esto no puede ser posible, con lo que $m \geq k$. ■

Observemos que el resultado de este teorema no se puede mejorar, ya que en la digráfica completa de $k + 1$ vértices, todo vértice tiene exgrado k y la trayectoria máxima tiene longitud k . El recíproco del teorema no se cumple ya que en la digráfica que consiste en una trayectoria dirigida de longitud m , todo vértice tiene exgrado a lo más 1.

De manera análoga, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.5.

Si D es una digráfica tal que para todo $z \in V(D)$, $\delta_D^-(z) \geq k \geq 1$, entonces D tiene una trayectoria dirigida de longitud mayor que o igual a k .

Demostración.

Consideremos una trayectoria dirigida de longitud máxima $T = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ con $l(T) = m$. Tenemos dos opciones:

Si $m \geq k$, entonces T es la trayectoria buscada.

Si $m < k$, consideremos u_0 . Recordemos que $\delta_D^-(u_0) \geq k > m$. Solamente hay m puntos en T distintos de u_0 y como $\delta_D^-(u_0) \geq k > m$, existe $w \notin V(T)$ tal que $(w, u_0) \in F(D)$; por lo tanto, $T' = (w, u_0) \cup T$ es una trayectoria dirigida con $l(T') > l(T)$ y esto no puede ser posible, con lo que $m \geq k$.

■

Observemos que el resultado de este teorema no se puede mejorar ya que en la digráfica completa de $k + 1$ vértices, todo vértice tiene ingrado k y la trayectoria máxima tiene longitud k . El recíproco del teorema no se cumple ya que en la digráfica que consiste en una trayectoria dirigida de longitud m , todo vértice tiene ingrado a lo más 1.

Del siguiente teorema se desprenderán corolarios que serán importantes en lo que resta de la tesis.

Teorema 1.6.

Si es D una digráfica tal que para todo $z \in V(D)$, $\delta_D^+(z) \geq k$, entonces D tiene un ciclo dirigido de longitud mayor o igual a $k + 1$.

Demostración.

Sea $T = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima. Por el teorema anterior, $m \geq k$. Consideremos u_m . Como T es de longitud máxima, se tiene que para cada $w \in V(D)$ tal que $(u_m, w) \in F(D)$, $w \in V(T)$; teniendo en cuenta esto y que el exgrado de todos los vértices de D es mayor o igual que k , tenemos que existe un conjunto $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\} \subseteq V(T)$ tal que $(u_m, u_{i_j}) \in F(D)$ para todo $1 \leq j \leq k$. Observemos que existe u_{i_r} , $i_r \leq m - k$, tal que $(u_m, u_{i_r}) \in F(D)$; por lo tanto, tenemos el ciclo $(u_m, u_{i_r}) \cup (u_{i_r}, T, u_m)$ que tiene longitud $m - i_r + 1 \geq m - (m - k) + 1 = k + 1$.

■

Tenemos los siguientes corolarios, donde el 1.9 tendrá especial importancia por lo que tendrá una demostración aparte.

Corolario 1.7.

Si D es una digráfica tal que para todo $z \in V(D)$, $\delta_D^+(z) \geq 1$, entonces D tiene un ciclo dirigido.

Corolario 1.8.

Si D es una digráfica tal que para todo $z \in V(D)$, $\delta_D^-(z) \geq 1$, entonces D tiene un ciclo dirigido.

Corolario 1.9.

Si D es una digráfica tal que no tiene ciclos dirigidos, entonces existe $z \in V(D)$ tal que $\delta_D^+(z) = 0$.

Demostración.

Sea $T = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ una trayectoria de longitud máxima en D . Como D no tiene ciclos dirigidos, $(u_n, u_j) \notin F(D)$ para toda $0 \leq j \leq n$. Asimismo, al ser T una trayectoria máxima, no existe $w \in V(D) \setminus V(T)$ tal que $(u_n, w) \in F(D)$, ya que si lo fuera, la trayectoria $T = T' \cup (u_n, w)$ sería de longitud mayor a la longitud de T . Entonces no hay flecha que salga de u_n , con lo que $\delta_D^+(u_n) = 0$.

■

1.3. Conexidad en digráficas

Continuaremos con conceptos y resultados sobre los diferentes tipos de conexidad en digráficas.

Una digráfica D es *débilmente conexa* si G_D es conexa.

Una digráfica D es *unilateralmente conexa* si y sólo si para todo $u, v \in V(D)$ al menos una de las dos siguientes propiedades se cumple:

- Existe un uv -camino dirigido.
- Existe un vu -camino dirigido.

Notemos que toda digráfica unilateralmente conexa es débilmente conexa.

Una digráfica D es *fuertemente conexa* si y sólo si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ se cumple que existe un uv -camino dirigido y que existe un vu -camino dirigido. Notemos que toda digráfica fuertemente conexa es unilateralmente conexa.

La figura 1.6 muestra digráficas con los diferentes tipos de conexidad. La digráfica D_1 es débilmente conexa, pero no unilateralmente conexa. La digráfica D_2 es unilateralmente conexa (por lo tanto débilmente conexa) pero no fuertemente conexa. La digráfica D_3 es fuertemente conexa (por lo tanto unilateralmente y débilmente conexa).

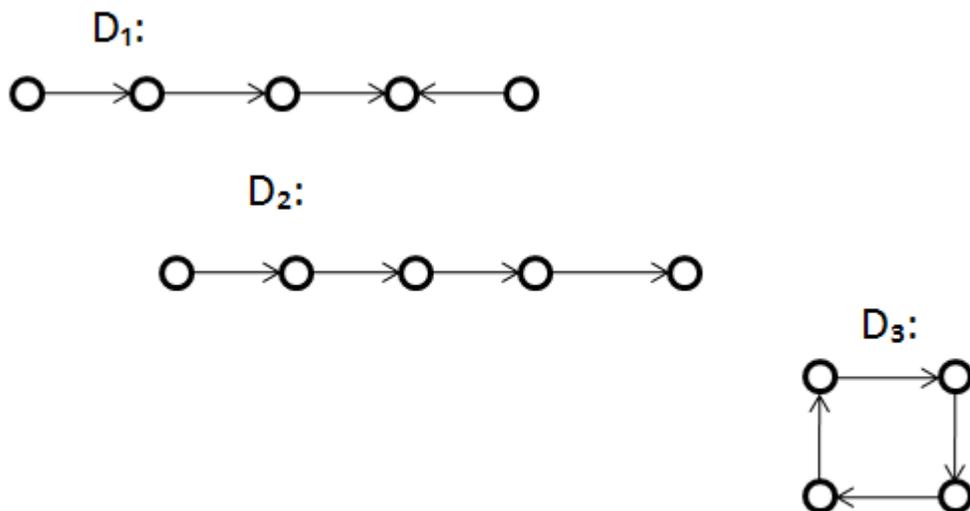


Figura 1.6

Teorema 1.10.

Una digráfica D es unilateralmente conexa si y sólo si existe un camino dirigido que pasa por todos los puntos de la digráfica.

Demostración.

Supongamos que D es una digráfica unilateralmente conexa. Sea C un camino dirigido en D que pase por el mayor número posible de puntos de D . Sea $C = (z_0, z_1, \dots, z_n)$. Si $V(C) = V(D)$, C es el camino buscado.

En otro caso existe $w \in V(D) \setminus V(C)$.

Si existe un camino dirigido C_0 de w a z_0 , entonces $C_0 \cup C$ es un camino dirigido que pasa por más puntos de D que C , lo cual no es posible. Entonces existe un camino dirigido de z_0 a w .

Si existe i tal que existe un camino dirigido de w a z_i , sea i_0 el primer vértice de C que cumple esta condición. Entonces existe C' , un camino dirigido de z_{i_0-1} a w , y C'' , un camino dirigido de w a z_{i_0} , por lo tanto $(z_0, C, z_{i_0-1}) \cup C' \cup C'' \cup (z_{i_0}, C, z_n)$ es un camino dirigido que pasa por más vértices de D que C . Esto tampoco es posible.

Si para todo i existe un $z_i w$ -camino dirigido, en particular existe C^* , un $z_n w$ -camino dirigido y entonces $C \cup C^*$ es un camino dirigido que pasa por más vértices de D que C , con lo que caemos de nueva cuenta en una contradicción.

Por lo tanto $V(C) = V(D)$.

Por otro lado, supongamos que existe un camino dirigido $C = (u_0, u_1, \dots, u)$ en D tal que $V(D) = V(C)$. Sean $u, v \in V(D)$, como $V(D) = V(C)$, $u = u_i$, $v = u_j$. Pueden pasar dos cosas:

Caso 1. $i < j$. En este caso (u, C, v) es un uv -camino dirigido.

Caso 2. $i > j$. En este caso (v, C, u) es un vu -camino dirigido.

De cualquier forma se cumple alguna de las condiciones para que D sea unilateralmente conexa. ■

Uno de los resultados más importantes de conexidad es el siguiente:

Teorema 1.11.

Una digráfica D es fuertemente conexa si y sólo si existe un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices.

Demostración.

Sea C un camino dirigido cerrado que pasa por el mayor número de puntos de D , $C = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$.

Si $V(C) = V(D)$, entonces C es el camino dirigido cerrado que buscamos.

Si existe $w \in V(D) \setminus V(C)$, tenemos que como D es fuertemente conexa, existe un u_0w -camino dirigido C_1 y un wu_0 -camino dirigido C_2 . Pero entonces $C \cup C_1 \cup C_2$ es un camino dirigido cerrado que pasa por más puntos de D que C y esto no es posible.

Por otro lado, supongamos que existe un camino dirigido cerrado $C = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ tal que $V(D) = V(C)$.

Sean $u, v \in V(D)$. Como $V(C) = V(D)$ existen i, j tales que $u = u_i, v = u_j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Tenemos que (u, C, v) es un uv -camino dirigido y $(v, C, u_0) \cup (u_0, C, u)$ es un vu -camino dirigido; por lo tanto D es fuertemente conexa. ■

Sea D una digráfica. Una *componente fuertemente conexa* de D es una subdigráfica fuertemente conexa máxima por contención con esa propiedad. Nos referiremos a ellas como las *componentes conexas*.

La *digráfica de condensación* de D , $C^*(D)$, está definida como sigue:

$V(C^*(D))$ son las componentes conexas, C_1, C_2, \dots, C_n de D .

$(C_i, C_j) \in F(C^*(D))$, $i \neq j$, si y sólo si existen $u \in C_i, v \in C_j$ tales que $(u, v) \in F(D)$.

Observemos una digráfica y su digráfica de condensación en la figura 1.7.

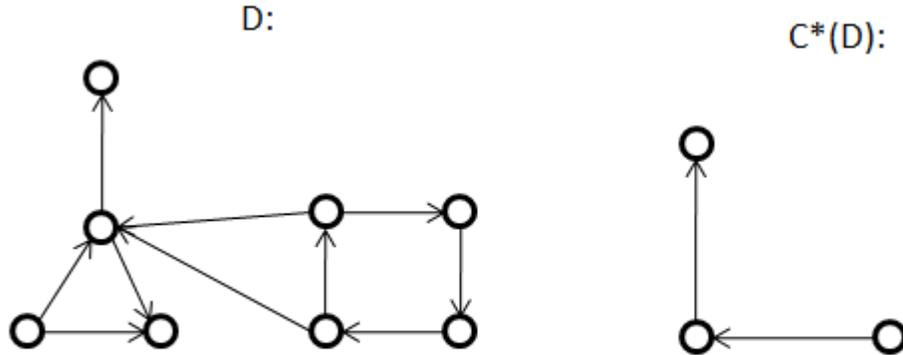


Figura 1.7

Una componente conexa inicial es aquella en la que en ninguno de sus vértices inciden flechas desde fuera de la componente. Una componente conexa terminal es aquella en la que ninguno de sus vértices tiene flecha hacia afuera de la componente.

Para finalizar esta subsección tenemos el siguiente resultado que se utilizará múltiples veces más adelante.

Teorema 1.12.

Para toda digráfica D , $C^*(D)$ no tiene ciclos dirigidos.

Demostración.

Supongamos que $C^*(D)$ tuviera un ciclo dirigido $C = (C_0, C_1, \dots, C_m = C_0)$. Sea $c_{i,j}$ el vértice j de la componente fuertemente conexa C_i . Sean $u_i \in C_i$ y $v_{i+1} \in C_{i+1}$, con lo que $(u_i, v_{i+1}) \in F(D)$, $0 \leq i \leq m - 1$. Sea $u_i = c_{i,k}$ y $v_{i+1} = c_{i+1,k}$. Como C_i es fuertemente conexa, existe $c_{i,j}c_{i,k}$ -camino dirigido para cualesquiera vértices en la componente fuertemente conexa C_i . Tenemos entonces que existen en D los caminos dirigidos $P_a = (v_a, \dots, u_a)$ que pasan por todos los vértices de la componente fuertemente conexa C_a , para toda $0 \leq a \leq m - 1$. En D , el camino dirigido cerrado $P = (P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{m-1} \cup v_m = v_0)$ pasa por todos los vértices de $C_0 \cup C_1, \dots, \cup C_{m-1}$, con lo que por el teorema 1.11, la digráfica $C_0 \cup C_1, \dots, \cup C_{m-1} = D$ es fuertemente conexa; sin embargo, esto no es posible al ser las C_i fuertemente conexas máximas por contención. ■

1.4. Otras definiciones y resultados necesarios.

En esta última subsección de la primera sección, se darán otros resultados importantes de digráficas que no tienen que ver con caminos y conexidad pero que serán utilizados en las partes posteriores de la tesis.

Decimos que una propiedad en una digráfica D es *hereditaria* si cualquier subdigráfica inducida de más de un vértice de D también tiene dicha propiedad.

Lema 1.13.

Si D es una digráfica transitiva y $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria dirigida de D , entonces existe una flecha desde x_0 hacia cualquier vértice x_i de la trayectoria con $1 \leq i \leq n$.

Demostración.

La haremos por inducción sobre la distancia en T de x_0 a x_i .

Base de la inducción.

$$d_T(x_0, x_i) = 1 \text{ o } d_T(x_0, x_i) = 2.$$

El caso en que $d_T(x_0, x_i) = 1$ es trivial, ya que $i = 1$ y existe flecha desde x_0 hacia x_1 . En el caso en que $d_T(x_0, x_i) = 2$, tenemos que $i = 2$ y, por la definición de digráfica transitiva tenemos que, como existe la flecha (x_0, x_1) y la flecha (x_1, x_2) , existe la flecha (x_0, x_2) .

Hipótesis de inducción.

Cuando $d_T(x_0, x_i)$ es menor que n , entonces $(x_0, x_i) \in F(D)$.

Paso inductivo.

Tenemos que $d_T(x, x_n) = n$ en la x_0x_n -trayectoria T . Asimismo, tenemos que $d_T(x_0, x_{n-1}) = n - 1$, con lo que por hipótesis de inducción $(x_0, x_{n-1}) \in F(D)$. Ya que se tiene que $(x_{n-1}, x_n) \in F(D)$, por la definición de digráfica transitiva, tenemos que $(x_0, x_n) \in F(D)$.

■

Lema 1.14.

Si D es una digráfica transitiva, entonces $C^*(D)$ es transitiva.

Demostración.

Sean X, Y, Z vértices de $C^*(D)$ (y por lo tanto componentes conexas de D) tales que $(X, Y), (Y, Z) \in F(C^*(D))$. Por la definición de $C^*(D)$ tenemos que existen vértices u, v, w, z de D tal que $u \in X, v \in Y, w \in Y, z \in Z$ y $(u, v), (w, z) \in F(D)$. Como v y w están en la misma componente conexas, existe una vw -trayectoria T en D . Tenemos entonces que existe en D la trayectoria $P = (u, v) \cup T \cup (w, z)$. Como D es transitiva y por el lema 1.13, se tiene que $(u, z) \in F(D)$. Al suceder esto, por la definición de $C^*(D)$ se tiene que $(X, Z) \in F(C^*(D))$, lo que nos dice que la gráfica $C^*(D)$ es transitiva.

■

Una digráfica D es *coloreada por flechas* cuando asignamos a sus flechas colores. Para una flecha (u, v) de D , denotamos por $c(u, v)$ al color de ésta. Si la digráfica utiliza m colores diremos que es m -coloreada.

En la figura 1.8, D es una digráfica coloreada por flechas con los colores azul, verde y rojo, con lo que D es 3-coloreada.

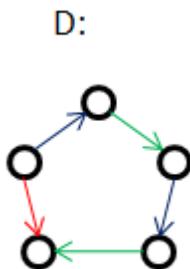


Figura 1.8

Una trayectoria es llamada *monocromática* si todas sus flechas tienen asignado el mismo color.

Lema 1.15.

Sea D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas. Si D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces $L(D)$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Demostración.

Demostraremos este lema por contrapositiva, es decir, demostraremos que si $L(D)$ tiene un ciclo dirigido de longitud impar, entonces D tiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo que es equivalente a demostrar el lema.

Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_{2n+1} = u_0)$ un ciclo dirigido de longitud impar en $L(D)$. Por la definición de $L(D)$ tenemos que existen vértices $x_i, x_{i+1} \in V(D)$, para todo $0 \leq i \leq 2n$, tal que u_i representa la flecha (x_i, x_{i+1}) de D . Tenemos

entonces en D el camino dirigido cerrado $C' = (x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_{2n+1} = x_0)$, que es de longitud impar. Por el teorema 1.3, C' contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

■

Un resultado clásico de la teoría de gráficas es el siguiente:

Teorema 1.16.

Una gráfica con $p \geq 2$ es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.

Demostración.

Supongamos que G es una gráfica bipartita con bipartición X, Y y sea $C = (v_0, v_1, \dots, v_k, v_0)$ un ciclo de G . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_0 \in X$. Entonces, como $(v_0, v_1) \in A(G)$ y G es bipartita, tenemos que $v_1 \in Y$. De igual manera, como $(v_1, v_2) \in A(G)$ y G es bipartita, tenemos que $v_2 \in X$. En general, $v_{2i} \in X$ y $v_{2i+1} \in Y$. Por lo tanto $k = 2i + 1$ para algún i , con lo que C es un ciclo par.

Por otro lado, sea G una gráfica sin ciclos de longitud impar. Basta hacer la prueba para gráficas conexas.

Sea u un vértice de G ; definiremos una partición de la siguiente manera:

$$X = \{x \in V(G) \mid d(u, x) \text{ es par}\},$$

$$Y = \{y \in V(G) \mid d(u, y) \text{ es impar}\}.$$

Los conjuntos anteriores forman una partición de los vértices de G ya que X y Y son diferentes del vacío; $X \neq \emptyset$ ya que $u \in X$ y, como G es conexas y con $p \geq 2$, tenemos que u tiene al menos un vértice adyacente, el cual estará en Y , con lo que $Y \neq \emptyset$. Asimismo, $X \cap Y = \emptyset$ ya que la distancia entre dos vértices es única. Finalmente, al ser G una gráfica conexas, recordemos por teoría de gráficas [2] que existe una trayectoria desde u hacia cualquier vértice de G , con lo que todos los vértices de G están en X o en Y .

Probemos que (X, Y) es una bipartición de G . Sean v y w dos vértices de X , P la uv -trayectoria más corta y Q la uw -trayectoria más corta. Denotemos como u_1 el último vértice en común de P y Q . Como P y Q son trayectorias mínimas, las uu_1 -secciones de las trayectorias P y Q también son de longitud mínima y por lo tanto tienen la misma longitud. Como P y Q son trayectorias de longitud par, las u_1v -secciones de P , a la que llamaremos $P_1 = (u_1, u_{p_2}, \dots, u_{p_n} = v)$ y u_1w de Q , a la que llamaremos $Q_1 = (u_1, u_{q_2}, \dots, u_{q_n} = w)$ deben tener la misma paridad, con lo que la vw -trayectoria $T = (v, u_{p_{n-1}}, \dots, u_1, u_{q_2}, \dots, w)$ es de longitud par. Si existiera una arista que incide tanto en v como en w , entonces $T' = T \cup (w, v)$ sería un ciclo de longitud impar, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto no hay vértices adyacentes en X ; de igual manera, no existen vértices adyacentes en Y .

El resultado anterior, con una pequeña adecuación para utilizarlo con digráficas, queda de la siguiente manera:

Teorema 1.17.

Si D es una digráfica fuertemente conexa y sin ciclos dirigidos impares, entonces D es bipartita.

Demostración.

Sean $x_0 \in V(D)$,

$V_1 = \{z \in V(D) \mid \text{existe } x_0z\text{-camino dirigido de longitud par}\}$,

$V_2 = \{z \in V(D) \mid \text{existe } x_0z\text{-camino dirigido de longitud impar}\}$.

Tenemos que $V(D) = V_1 \cup V_2$ pues D es fuertemente conexa. Veamos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Supongamos que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ por lo que existe $w \in V_1 \cap V_2$. Como $w \in V_1$, existe C_1 , un x_0w -camino dirigido de longitud par. Como $w \in V_2$, existe C_2 , un x_0w -camino dirigido de longitud impar. Como D es fuertemente conexa existe C_3 , un wx_0 -camino dirigido. Si la longitud de C_3 es par, entonces $C_2 \cup C_3$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar y por lo tanto contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual no es posible. Si la longitud de C_3 es impar, entonces $C_1 \cup C_3$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar que contiene un ciclo dirigido de longitud impar, con lo que se caería en una contradicción. Por lo tanto $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

$V_1 \neq \emptyset$ pues $x_0 \in V_1$ y $V_2 \neq \emptyset$ pues D es fuertemente conexa, con lo que $\delta_D^+(x_0) \geq 1$ y existe y tal que $(x_0, y) \in F(D)$, por lo que $y \in V_2$.

Veamos que V_i es independiente para $i = 1, 2$.

Supongamos que V_i no es independiente. Entonces, existen $x, y \in V_i$ tales que $(x, y) \in F(D)$.

Si $i = 1$, entonces se tiene que, como $x \in V_1$ existe C un x_0x -camino de longitud par, por lo tanto $C \cup (x, y)$ es un x_0y -camino dirigido de longitud impar, con lo que $y \in V_2$, pero entonces $y \in V_1 \cap V_2$, lo cual no es posible.

Si $i = 2$, análogamente al caso anterior se tiene una contradicción.

Por lo tanto, V_i es un conjunto independiente en D , con lo que D es bipartita. ■

2. Núcleos

En esta sección se expondrán resultados acerca de cierto tipo de conjuntos de vértices en las digráficas, de nombre núcleo, que tienen ciertas propiedades y cuyo estudio es la finalidad de la teoría de núcleos en digráficas. Posteriormente, haremos notar que para digráficas coloreadas por flechas, existe un conjunto de vértices con propiedades similares, de nombre núcleo por trayectorias monocromáticas y de igual manera, se expondrán conceptos y resultados importantes relacionados con este tipo de conjuntos.

2.1. Núcleos en digráficas

Un *núcleo* en una digráfica D es un conjunto de vértices $N \subseteq V(D)$ tal que,

i) N es independiente. Esto quiere decir que para todo $x, y \in N$ no existe flecha entre ellos.

ii) N es absorbente, es decir, para cada $x \in V(D) \setminus N$ existe una xN -flecha.

Este concepto fue presentado por primera vez en [15] por von Neumann y Morgenstern en el contexto de teoría de juegos como una solución para los juegos cooperativos de n jugadores.

El núcleo de la digráfica de la figura 2.1, por ejemplo, son los vértices de color negro.



Figura 2.1

El objetivo de la teoría de núcleos en digráficas es investigar la existencia o no existencia de los núcleos en distintas clases de digráficas y, si es posible, mostrar los vértices que los componen. Asimismo, con la teoría de núcleos se pueden modelar aplicaciones, con lo que la búsqueda de un núcleo en dichas digráficas es equivalente a buscar una solución a un problema planteado por dichas aplicaciones. En el trabajo de von Neumann y Morgenstern [16] se expusieron ciertos resultados que tienen que ver con la existencia de núcleos para cierto tipo de digráficas.

Teorema 2.1.

Sea D una digráfica transitiva y sin ciclos dirigidos. Entonces $N = \{z \in V(D) \mid \delta_D^+(z) = 0\}$ es el único núcleo de D .

Demostración.

Primero probaremos que N es núcleo.

i) N es independiente.

Sean $u, v \in N$, $u \neq v$. Supongamos, para hacer la prueba por contradicción, que existe flecha entre ellos. Sin pérdida de generalidad, digamos que la flecha va desde u hacia v . Sin embargo, de ser así, tendríamos que $\delta_D^+(u) > 0$, lo cual no es posible.

ii) N es absorbente.

Sea $u \in V(D) \setminus N$. Sea T una trayectoria de longitud máxima que empieza en u , $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_m)$. Tenemos que $\delta_D^+(u_m) = 0$ pues D no tiene ciclos dirigidos; por lo tanto, $u_m \in N$. Como D es transitiva, por el lema 1.13 tenemos que existe una flecha desde u hacia u_m .

Ahora probaremos que $N = \{z \in V(D) \mid \delta_D^+(z) = 0\}$ es el único núcleo de D . Supongamos que existe otro conjunto $N' \subseteq V(D)$ que sea un núcleo de D . Por definición de núcleo, y como N' es un núcleo, tenemos que $\{z \in V(D) \mid \delta_D^+(z) = 0\} \subseteq N'$, por lo tanto $N \subseteq N'$. Sea $z \in N'$. Si $z \notin N$, por definición de núcleo y siendo N un núcleo, existe $w \in N$ tal que $(z, w) \in F(D)$. Sin embargo, $z, w \in N'$ y como N' es independiente, esto no es posible. Por lo tanto, N es único.

■

Teorema 2.2.

Para cualquier digráfica D que es transitiva y fuertemente conexa su núcleo es cualquier vértice.

Demostración.

D es completa simétrica. Esto sucede ya que por ser D fuertemente conexa existe T_1 , una uv -trayectoria dirigida y T_2 , una vu -trayectoria dirigida. Entonces, como D es transitiva, por el lema 1.14 tenemos que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, u) \in F(D)$.

Sea $u \in V(D)$. Notemos que $\{u\}$ es independiente y por ser D completa, para todo $z \neq u$ existe flecha desde z hacia u , lo que significa que $\{u\}$ es absorbente; por lo tanto $\{u\}$ es núcleo de D .

■

Teorema 2.3.

Toda digráfica transitiva tiene al menos un núcleo.

Demostración.

Caso 1. Si D es fuertemente conexa y transitiva, entonces estamos en el caso del teorema anterior y su núcleo es cualquier vértice.

Caso 2. Si D no es fuertemente conexa, consideramos la digráfica de condensación $C^*(D)$. Por el teorema 1.12, $C^*(D)$ no tiene ciclos dirigidos con lo que tiene vértices de exgrado cero (dichos vértices son llamados las componentes terminales de D).

Sea $T = \{C \in V(C^*(D)) \mid C \text{ es terminal}\}$. Por cada $C \in T = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ elegimos $z_i \in V(C_i)$. Recuérdese que cada $C \in V(C^*(D))$ es una digráfica completa simétrica.

Afirmamos que $N = \{z_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ es un núcleo de D .

i) N es independiente. Supongamos que existen $z_i, z_j, z_i \neq z_j$, tales que $(z_i, z_j) \in F(D)$. Entonces existe una flecha desde C_i hacia C_j , con lo que $\delta_{C^*(D)}^+(C_i) > 0$ y esto no es posible ya que C_i es un vértice terminal.

ii) N es absorbente. Sea $w \in V(D) \setminus N$. Recordemos que si D es transitiva, entonces $C^*(D)$ es transitiva (lema 1.14). Sin pérdida de generalidad supongamos que $w \in C_w$. Como $C^*(D)$ no tiene ciclos dirigidos, existe una trayectoria desde C_w hacia algún C_i tal que $\delta_{C^*(D)}^+(C_i) = 0$. Tenemos entonces que existe una flecha desde C_w hacia C_i y existen $x \in C_w$ y $y \in C_i$ tales que $(x, y) \in F(D)$. Ya que C_w y C_i son completas simétricas tenemos que $(w, x) \in F(D)$ y $(y, z_i) \in F(D)$. Por lo tanto $P = (w, x, y, z_i)$ es una trayectoria dirigida y como D es transitiva, existe una flecha desde w hacia z_i , con lo que existe una wN -flecha en D .

De esta manera se cumplen las condiciones para que N sea un núcleo. ■

Teorema 2.4.

Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces D tiene un núcleo.

Demostración.

Como D no tiene ciclos dirigidos, por el corolario 1.9 tenemos que existe un conjunto $N_0 = \{z \in V(D) \mid \delta_D^+(z) = 0\}$ diferente del vacío y, por lo tanto, existe también un conjunto $F_0 = \{z \in V(D) \mid \text{existe } zN_0\text{-flecha en } D\}$. Sea $D_1 = D \setminus (N_0 \cup F_0)$. Como la propiedad de no tener ciclos dirigidos es hereditaria, tenemos que D_1 no tiene ciclos dirigidos. Definimos $N_1 = \{z \in V(D) \mid \delta_{D_1}^+(z) = 0\}$ y $F_1 = \{z \in V(D_1) \mid \text{existe } zN_1\text{-flecha en } D_1\}$. Sea $D_2 = D_1 \setminus (N_1 \cup F_1)$. Tenemos entonces que D_2 tampoco tiene ciclos dirigidos. Entonces definimos $N_2 = \{z \in V(D_2) \mid \delta_{D_2}^+(z) = 0\}$ y $F_2 = \{z \in V(D_2) \mid \text{existe } zN_2\text{-flecha en } D_2\}$. Continuamos de esta manera y definimos $D_i = D_{i-1} \setminus (N_{i-1} \cup F_{i-1})$, $N_i = \{z \in V(D_i) \mid \delta_{D_i}^+(z) = 0\}$ y $F_i = \{z \in V(D_i) \mid \text{existe } zN_i\text{-flecha en } D_i\}$. Como D es finita podemos continuar así hasta el primer n tal que $D_n = \emptyset$.

Afirmamos que $\cup_{j=0}^n N_j$ es un núcleo de D .

i) $\cup_{j=0}^n N_j$ es independiente. Tenemos que cada N_i es independiente en D_i al ser todos sus vértices de exgrado cero en D_i . Como D_i es subdigráfica de D , N_i es independiente en D . Entre los N_i no existen flecha. Si existiera flecha de x a y con $x \in N_i, y \in N_j, j > i$, entonces $x \in F_j$, lo cual no es posible. Tampoco puede suceder que exista flecha desde y hacia x , por la manera en que se desarrolló la construcción.

ii) $\cup_{j=0}^n N_j$ es absorbente. Sea $B_i = D_i \setminus D_{i+1}$, con $i \in \{0, \dots, n-2\}$. Notemos que $\{V(B_0), V(B_1), \dots, V(B_{n-1})\}$ es una partición de $V(D)$. Cada N_i es un conjunto de vértices absorbente de cada B_i , por como se desarrolló la construcción, así que $\cup_{j=0}^n N_j$ es un conjunto absorbente de $V(D)$.

Tenemos que se cumplen entonces las condiciones para que $\cup_{j=0}^n N_j$ sea un núcleo.

■

En general, es difícil encontrar núcleos en una digráfica y no hay muchos resultados que digan algo sobre la existencia de dicho tipo de conjuntos en la mayoría de las digráficas. Sin embargo, si debilitamos las condiciones necesarias para que un conjunto de vértices sea un núcleo, nos encontramos con conjuntos de vértices que son más fáciles de encontrar. Dichos conjuntos incluso pueden ayudar a encontrar núcleos en otros tipos de digráficas.

A uno de estos conjuntos de vértices Chvátal y Lovász definieron como cuasinúcleo en 1974. Asimismo, demostraron que toda digráfica tiene un cuasinúcleo [4].

Sea D una digráfica. Un *cuasinúcleo* de D es un conjunto $Q \subseteq V(D)$, $Q \neq \emptyset$, tal que

- i) Q es independiente.
- ii) Para cada $z \in V(D) \setminus Q$, existe $y \in Q$ y una zy -trayectoria dirigida de longitud menor o igual a dos.

Notemos que todo núcleo es cuasinúcleo, pero no al revés. Un ejemplo de un cuasinúcleo que no es núcleo es el vértice v de la figura 2.2.

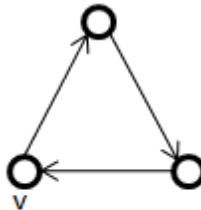


Figura 2.2

Teorema 2.5.

Toda digráfica tiene al menos un cuasinúcleo.

Demostración.

Haremos la demostración por inducción sobre $p = |V(D)|$.

Base de la inducción.

Se puede observar que para $p \in \{1, 2, 3\}$ en todas las digráficas posibles hay un cuasinúcleo.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que toda digráfica D' con $|V(D')| < p$ tiene un cuasinúcleo.

Paso inductivo.

Sea D una digráfica tal que $|V(D)| = p$. Sea $x \in V(D)$. Definimos $D' = D - (\{x\} \cup \{z \in V(D) \mid (z, x) \in F(D)\})$. Si $D' = \emptyset$, entonces $\{x\}$ es un cuasinúcleo. Si $D' \neq \emptyset$, entonces $|V(D')| = p' < p$. Por hipótesis de inducción, D' tiene un cuasinúcleo Q' . Notemos que no hay flechas de Q' a x , por definición de D' . Véase la figura 2.3. Tenemos dos opciones:

Caso 1. Existe flecha de x a Q' en D .

Entonces Q' es un cuasinúcleo de D , ya que es cuasinúcleo de D' y los vértices de $V(D) \setminus V(D')$ están a distancia dos de Q' , a excepción de x , que está a distancia uno, con lo que todos los vértices de D están a distancia menor a dos de Q' .

Caso 2. No existe flecha de x a Q' .

Tenemos que $Q' \cup \{x\}$ es independiente y, por como se definió $Q' \cup \{x\}$, cumple la segunda condición para ser un cuasinúcleo, ya que Q' es cuasinúcleo de D' y los vértices de $V(D) \setminus V(D')$ que no son x están a distancia menor a dos de $Q' \cup \{x\}$.

■

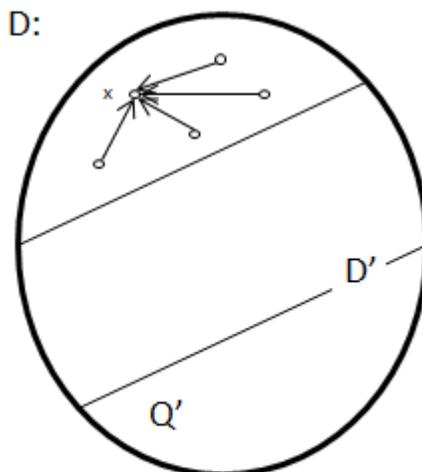


Figura 2.3

A otro conjunto de vértices con condiciones similares a la de núcleo, pero debilitadas, Neumann-Lara le llamó seminúcleo (1971). Asimismo, enunció teoremas importantes que tienen que ver con este tipo de conjuntos [16], los cuales serán presentados a continuación.

Sea D una digráfica. Un *seminúcleo* $S \subseteq V(D)$ es un conjunto tal que:

- i) S es independiente.

ii) Para cada $z \in V(D) \setminus S$, si existe Sz -flecha, entonces existe zS -flecha.

En la figura 2.4 podemos observar que el conjunto de vértices $\{u, w\}$ es un seminúcleo, sin embargo dicha digráfica no posee núcleo.

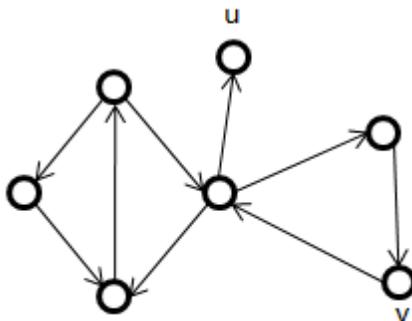


Figura 2.4

Teorema 2.6.

Sean D una digráfica, $S \subseteq V(D)$ un seminúcleo no vacío de D , $B = \{z \in V(D) \setminus S \mid \text{no existe una } zS\text{-flecha}\}$ y S' un seminúcleo de $D[B]$. Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D .

Demostración.

i) $S \cup S'$ es independiente.

S es independiente por definición de seminúcleo. S' es independiente en D porque S' es independiente en $D[B]$ y $D[B]$ es una subdigráfica inducida de D . No hay $S'S$ -flechas por definición de B , teniendo en cuenta que $S' \subseteq B$. Finalmente, veamos que no hay SS' -flechas. Supongamos que existen $u \in S$, $v \in S'$ tales que $(u, v) \in F(D)$. Como S es seminúcleo de D , existe una vS -flecha, lo cual no es posible pues $v \in B$.

ii) Para cada $w \in V(D) \setminus S$, si existe $(S \cup S')w$ -flecha, entonces existe $w(S \cup S')$ -flecha. Véase la figura 2.5.

Supongamos que existe una $(S \cup S')w$ -flecha en D para algún $w \in V(D) \setminus (S \cup S')$. Tenemos dos opciones:

a) la $(S \cup S')w$ -flecha parte de S , es decir, existe una Sw -flecha en D . Como S es seminúcleo de D , existe una wS -flecha y por lo tanto una $w(S \cup S')$ -flecha o

b) la $(S \cup S')w$ -flecha sale de S' , es decir, existe una $S'w$ -flecha. Sea $(y, w) \in F(D)$ tal que $y \in S'$. Si $w \in V(D) \setminus B$, por la definición de B existe una wS -flecha en D . Si $w \in B \setminus S'$, como S' es seminúcleo de $D[B]$, existe una wS' -flecha. De cualquier modo existe una $w(S \cup S')$ -flecha.

■

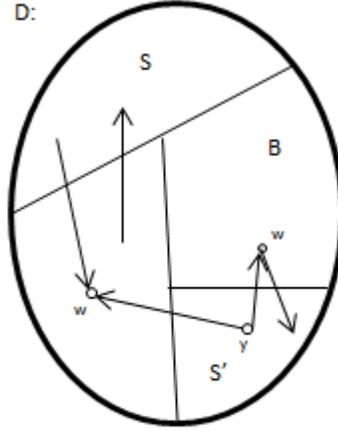


Figura 2.5

Los siguientes dos teoremas relacionan el concepto de seminúcleo con el de núcleo.

Teorema 2.7.

Sean D una digráfica y S un seminúcleo no vacío de D . Sea $B = \{z \in V(D) \setminus S \mid \text{no existe } zS\text{-flecha}\}$. Si N' es un núcleo de $D[B]$, entonces $S \cup N'$ es un núcleo de D .

Demostración.

i) $S \cup N'$ es independiente.

S es independiente, N' es independiente pues es independiente en $D[B]$ y $D[B]$ es una subgráfica inducida. No hay $V(D[B])S$ -flechas por definición de B ; en particular, no hay $N'S$ -flechas. Tampoco hay SN' -flechas. Supongamos que existe una SN' -flecha. Sea (s, w) tal flecha con $s \in S$, $w \in N'$. Como S es seminúcleo de D , se sigue que existe una wS -flecha, pero esto no es posible ya que $w \in B$.

ii) $S \cup N'$ es absorbente.

Notemos que $V(D) \setminus (S \cup N') = (B \setminus N') \cup (V(D) \setminus (B \cup S))$. Por definición, para cada $z \in V(D) \setminus (B \cup S)$ existe una zS -flecha en D y, como N' es un núcleo de $D[B]$, para cada $z \in B \setminus N'$ existe una zN' -flecha.

■

El siguiente teorema tendrá especial importancia para la prueba de los resultados principales de la tesis.

Teorema 2.8.

Sea D una digráfica tal que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío. Entonces D tiene núcleo.

Demostración.

Observemos que D tiene un seminúcleo no vacío. Sea S un seminúcleo máximo por contención. Tenemos dos opciones:

Caso 1. Para toda $z \in V(D) \setminus S$ existe una zS -flecha.

En este caso S es un núcleo.

Caso 2. Existe $z \in V(D) \setminus S$ tal que no existe zS -flecha.

Sea $B = \{z \in V(D) \setminus S \mid \text{no existe } zS\text{-flecha}\}$. $D[B]$ tiene un seminúcleo no vacío S' . Por el teorema 2.6, $S \cup S'$ es un seminúcleo; $S \cup S'$ contiene propiamente a S , lo cual no puede ser posible al ser S un seminúcleo máximo por contención. Por lo tanto, S es un núcleo.

■

Este último resultado nos hace ver que para digráficas con propiedades hereditarias (ser transitiva, no tener ciclos dirigidos, etc.) basta con probar que tienen seminúcleo no vacío para concluir que tienen núcleo; por ejemplo:

Teorema 2.9.

Sea D una digráfica. Si G_D es bipartita, entonces D tiene un núcleo.

Demostración.

Como ser bipartita es una propiedad hereditaria, por la observación anterior basta con ver que D tiene un seminúcleo no vacío para demostrar que tiene núcleo.

Sean V_1, V_2 la partición de $V(G_D)$ que hace ser a G_D bipartita. Tenemos dos opciones:

Caso 1. Existe $x_0 \in V(D)$ con $\delta_D^+(x_0) = 0$.

Entonces $\{x_0\}$ es un seminúcleo no vacío de D .

Caso 2. Para todo $z \in V(D)$, $\delta_D^+(z) \geq 1$.

En este caso V_1 (respectivamente V_2) es seminúcleo de D . Por ser V_1 un conjunto de la bipartición es independiente; asimismo, al haber al menos una flecha desde cada vértice de V_1 y por ser G_D bipartita, dicha flecha irá a algún vértice de V_2 , que a su vez, tendrá a sus exvecinos en V_1 , con lo que se cumple la segunda condición para que un conjunto sea un seminúcleo.

■

Notemos que una digráfica D es bipartita si y sólo si su gráfica subyacente G_D lo es, tomando los mismos conjuntos de vértices para la bipartición. Teniendo en cuenta entonces el teorema 1.16, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.10.

Sea D una digráfica. Si D no tiene ciclos de longitud impar, entonces D tiene un núcleo.

Finalmente, tenemos uno de los resultados más importantes de la teoría de núcleos en digráficas como lo es el teorema de Richardson, el cual es fundamental en la presente tesis, ya que se puede desprender de cualquiera de las dos

extensiones que serán presentadas. Originalmente la demostración del teorema de Richardson era más complicada y extensa, pero utilizando el concepto de seminúcleo, Víctor Neumann-Lara dio una demostración mucho más sencilla que es la que presentaré a continuación.

Teorema 2.11. (Richardson) [18]

Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D tiene un núcleo.

Demostración.

Notemos que ya que D no tiene ciclos dirigidos impares, si H es subdigráfica inducida de D , entonces H no tiene ciclos dirigidos de longitud impar. Haciendo uso del resultado del teorema 2.8, basta demostrar que D tiene un seminúcleo no vacío para ver que D tiene un núcleo.

Tenemos dos casos:

Caso 1. D es fuertemente conexa.

D es bipartita (por el teorema 1.17), por lo que tiene núcleo (por el teorema 2.10) y éste es un seminúcleo no vacío.

Caso 2. D no es fuertemente conexa.

Sea H una componente fuertemente conexa terminal. Como H es fuertemente conexa y sin ciclos de longitud impar, con lo que estaríamos en el caso 1, y H entonces tiene un seminúcleo no vacío S , con lo que S es un seminúcleo no vacío de D .

■

2.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas

El concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas es un concepto similar al de núcleo previamente visto, que aplica para digráficas con sus flechas coloreadas.

Un conjunto de vértices $N \subseteq V(D)$ es un *núcleo por trayectorias monocromáticas* si cumple que:

i) N es independiente por trayectorias monocromáticas, es decir, que para todo $x, y \in N$ no existe trayectoria monocromática dirigida entre ellos.

ii) N es absorbente por trayectorias monocromáticas, es decir, que para cada $x \in V(D) \setminus N$ existe una xN -trayectoria monocromática dirigida.

Un núcleo por trayectorias monocromáticas de la digráfica de la figura 3.1, por ejemplo, son los vértices de color negro.



Figura 2.6

El estudio de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas por aristas empieza con el teorema de Sands, Sauer y Woodrow, probado en [20], que asegura que toda digráfica monocromática o 2-coloreada por flechas (a partir de ahora al decir digráfica coloreada será coloreada por flechas a menos que se especifique lo contrario) tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Este teorema fue pensado para digráficas infinitas; sin embargo, en el presente trabajo solo lo utilizaremos con su caso finito, con lo que se enunciará de esa forma.

Condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas por aristas han sido obtenidas, sobre todo en torneos [6,7,8,9,13,21,22]. Resultados más generales para otro tipo de digráficas son los que encontraremos en esta sección [10].

Definición

Sea D una digráfica m -coloreada. La *digráfica de clases de color* de D denotada como $\mathcal{C}_C(D)$ es definida como sigue:

$V(\mathcal{C}_C(D)) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m\}$ donde \mathcal{C}_i es la subdigráfica de D cuyas flechas son las flechas de D de color i y sus vértices son los vértices de D en los que inciden flechas de color i ; la digráfica \mathcal{C}_i es llamada *digráfica de clase-color i* de D .

Por otro lado, $(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \in A(\mathcal{C}_C(D))$ si y sólo si existen dos flechas $f = (u, v) \in A(D)$ y $g = (v, w) \in F(D)$ de color i y j , respectivamente.

Notemos que $\mathcal{C}_C(D)$ puede tener vértices aislados (uno que tiene tanto in-grado como ex-grado cero) y lazos.

Un ejemplo de una digráfica D y su digráfica de clases de color está en la figura 2.7.

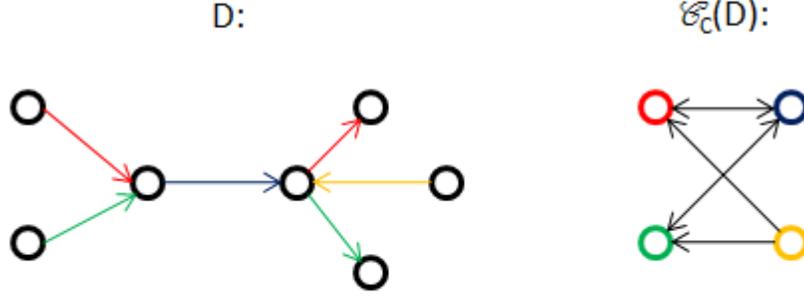


Figura 2.7

El siguiente resultado relaciona el tipo de conexidad de una digráfica con su digráfica de clases de color.

Lema 2.12.

Sea D una digráfica m -coloreada. Si D es una digráfica fuertemente conexa, entonces $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica fuertemente conexa.

Demostración.

Si $|V(\mathcal{C}_C(D))| = 1$ tenemos la digráfica que consiste de un solo vértice; dicha digráfica es fuertemente conexa. Sean entonces, $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$ dos vértices diferentes de $\mathcal{C}_C(D)$, $f = (u, v) \in A(\mathcal{C}_i)$ y $g = (z, w) \in A(\mathcal{C}_j)$. Si $v = z$ entonces $(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j)$ es una $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ -trayectoria dirigida en $\mathcal{C}_C(D)$. Si $v \neq z$ entonces, al ser D una digráfica fuertemente conexa, tenemos que existe una vz -trayectoria dirigida en D . Sea $T = (v = u_1, u_2, \dots, u_{n-1} = z)$ dicha trayectoria y $P = (u_0 = u, v) \cup T \cup (u_{n-1} = z, u_n = w)$, es decir, $P = (u_0 = u, u_1 = v, u_2, u_3, \dots, u_{n-1} = z, u_n = w)$. Sean $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$ los vértices en donde un cambio de color ocurre. Entonces el camino P tiene k cambios de color y $(u, T, u_{i_1}) \subseteq \mathcal{C}_i$, $(u_{i_1}, T, u_{i_2}) \subseteq \mathcal{C}_{r_2}$, $(u_{i_2}, T, u_{i_3}) \subseteq \mathcal{C}_{r_3}, \dots, (u_{i_{k-1}}, T, u_{i_k}) \subseteq \mathcal{C}_{r_k}$, $(u_{i_k}, P, w) \subseteq \mathcal{C}_j$ para algún $\{r_2, \dots, r_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$. Claramente tenemos que $\mathcal{P} = (\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_{r_2}, \mathcal{C}_{r_3}, \dots, \mathcal{C}_{r_k}, \mathcal{C}_j)$ es un $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ -camino dirigido en $\mathcal{C}_C(D)$. Por lo tanto existe una $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ -trayectoria dirigida en $\mathcal{C}_C(D)$. ■

Lema 2.13.

Sea D una digráfica m -coloreada con clases de color $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$ tal que no exista flecha alguna entre los vértices \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 de la digráfica de clases de color.

Además, sea \hat{D} la digráfica $(m-1)$ -coloreada obtenida de D asignando el color 1 a las flechas de D coloreadas con el color 2.

Entonces, para cualesquiera $u, v \in V(D) = V(\hat{D})$, existe una uv -trayectoria monocromática dirigida en D si y sólo si existe una uv -trayectoria monocromática dirigida en \hat{D} .

Demostración.

Notemos que la digráfica \hat{D} es la misma que D , excepto por la coloración de sus flechas. Recuerde que las flechas de \mathcal{C}_2 en D están coloreadas con el color 1 en \hat{D} ; las clases de color de \hat{D} son $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \dots, \mathcal{C}'_{m-1}$, donde $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}'_j = \mathcal{C}_{j+1}$.

Supongamos que existe una uv -trayectoria monocromática dirigida contenida en D y sea P dicha trayectoria. Entonces $P \subseteq \mathcal{C}_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$; para $i \in \{3, 4, \dots, m\}$ tenemos que $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}'_{i-1}$ y para $i \in \{1, 2\}$ tenemos que $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}'_1$, con lo que $P \subseteq \mathcal{C}'_j$ para alguna $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, lo que quiere decir que P es una uv -trayectoria monocromática dirigida en \hat{D} .

Ahora supongamos que T es una uv -trayectoria monocromática dirigida en \hat{D} . Por lo tanto $T \subseteq \mathcal{C}'_j$ para algún $j \in \{1, \dots, m-1\}$. Cuando $j \in \{2, \dots, m-1\}$ tenemos que $\mathcal{C}'_j = \mathcal{C}_{j+1}$ y T es una trayectoria monocromática dirigida en D . Por lo tanto, supongamos $T \subseteq \mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$; cuando $T \subseteq \mathcal{C}_1$ o $T \subseteq \mathcal{C}_2$ tenemos que T es una uv -trayectoria monocromática dirigida en D . Por lo tanto, $T \subseteq \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, $T \not\subseteq \mathcal{C}_1$ y $T \not\subseteq \mathcal{C}_2$; sin pérdida de generalidad, supongamos que T empieza en \mathcal{C}_1 . Sea $T = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ y $g = (u_i, u_{i+1})$ la primera flecha de T que pertenezca a \mathcal{C}_2 ; de esta manera, $f = (u_{i-1}, u_i) \in A(\mathcal{C}_1)$ y, por como definimos $\mathcal{C}_C(D)$, tendríamos que $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in A(\mathcal{C}_C(D))$, lo cual nos llevaría a una contradicción. Por lo tanto, T es una uv -trayectoria monocromática dirigida en D . ■

Del lema anterior se desprende el siguiente corolario.

Corolario 2.14.

Sea D una digráfica m -coloreada y \hat{D} la digráfica $(m-1)$ -coloreada obtenida de D de la misma manera que en la hipótesis del lema 2.13. Un conjunto $N \subseteq V(D) = V(\hat{D})$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas en D si y sólo si es un núcleo por trayectorias monocromáticas en \hat{D} .

Uno de los resultados más importantes dentro del estudio de los núcleos por trayectorias monocromáticas es el siguiente:

Teorema 2.15. (Sands, Sauer y Woodrow) [20]

Sea D una digráfica 1-coloreada (monocromática) o una digráfica 2-coloreada con un número finito de vértices; entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Teorema 2.16.

Sea D una digráfica m -coloreada. Si $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica bipartita, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Haremos la demostración por inducción sobre $|V(\mathcal{C}_C(D))|$, es decir, sobre m .

Base de la inducción.

Para $m = 1$ o $m = 2$, el resultado es el del teorema 2.15.

Hipótesis de inducción.

Si D' es una digráfica $(m-1)$ -coloreada tal que $\mathcal{C}_C(D')$ es bipartita, entonces D' tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas, para $m \geq 3$.

Paso inductivo.

Sea D una digráfica m -coloreada tal que $\mathcal{C}_C(D)$ es bipartita. Sean V_1, V_2 los conjuntos de vértices de dicha bipartición. Como $m \geq 3$, $m = |V(\mathcal{C}_C(D))|$ tenemos que $|V_1| \geq 2$ o $|V_2| \geq 2$; sin pérdida de generalidad, supongamos que $|V_1| \geq 2$ y sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in V_1$. Consideremos \hat{D} como la digráfica $(m-1)$ -coloreada obtenida desde D como en la hipótesis del lema 2.13. Notemos que $\mathcal{C}_C(\hat{D})$ es la digráfica obtenida desde $\mathcal{C}_C(D)$ identificando (haciendo el mismo vértice) los vértices \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 . Como $\mathcal{C}_C(D)$ es bipartita, entonces $\mathcal{C}_C(\hat{D})$ también lo es. De la hipótesis de inducción se sigue que \hat{D} tiene núcleo por trayectorias monocromáticas; sea N dicho núcleo. Por lo tanto, por el corolario 2.14, tenemos que N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D .

■

De esta manera, si estudiamos las condiciones en una digráfica D que impliquen que $\mathcal{C}_C(D)$ es bipartita, tendremos que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Una de esas condiciones las da el siguiente teorema.

Teorema 2.17.

Sea D una digráfica m -coloreada fuertemente conexa. Si D satisface las siguientes dos condiciones:

- (a) Cada camino dirigido cerrado en D tiene un número par de cambios de color.
- (b) Cada camino dirigido que empiece y termine en flechas del mismo color tiene un número par de cambios de color.

Entonces cada ciclo dirigido en $\mathcal{C}_C(D)$ tiene longitud par.

Demostración.

Véase la figura 2.8.

Supongamos, por contradicción, que existe un ciclo de longitud impar $C = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{2n}, \mathcal{C}_0)$ en $\mathcal{C}_C(D)$ donde i es el color asociado a \mathcal{C}_i . Por la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ tenemos que existen flechas en D , $f_i = (x_i, y_i)$, $f'_i = (x'_i, y'_i)$ ambas de color i para $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ tal que $y'_i = x_{i+1}$, $y'_{2n} = x_0$. (Tengamos en cuenta que podría suceder que $f_i = f'_i$ o que $y_i = x'_i$). Esto significa que $f'_0 = (x'_0, y'_0)$ es de color 0 y $f_1 = (y'_0 = x_1, y_1)$ es de color 1; $f'_1 = (x'_1, y'_1)$ es de color 1 y $f_2 = (y'_1 = x_2, y_2)$ es de color 2; en general $f'_i = (x'_i, y'_i)$ es de color i y $f_{i+1} = (y'_i = x_{i+1}, y_{i+1})$ es de color $i + 1$; $f'_{2n} = (x'_{2n}, y'_{2n})$ es de

color $2n$ y $f_0 = (y'_{2n} = x_0, y_0)$ es de color 0. Como D es fuertemente conexa existe una trayectoria dirigida T_i desde y_i hacia x'_i para cada $i \in \{0, 1, \dots, 2n\}$. Entonces tenemos las trayectorias dirigidas $W_i = (x_i, y_i) \cup T_i \cup (x'_i, y'_i)$ que empiezan en f_i y acaban en f'_i ; como f_i y f'_i están coloreadas por el mismo color, tenemos por hipótesis que W_i tiene un número par de cambios de color. Consideremos entonces el camino cerrado dirigido $W = \cup_{i=0}^{2n} W_i$; dicho camino cerrado dirigido tiene los cambios de color de cada W_i además de los x_i , para cada $i \in \{0, 1, \dots, 2n\}$. Por lo tanto el número de cambios de color de W es impar lo que nos hace caer en una contradicción. ■

En la figura 2.8 tenemos un ejemplo si la longitud de C fuera 5, con $C =$ (verde, rojo, azul, amarillo, café). Los cambios de color de x_i son los vértices sombreados.

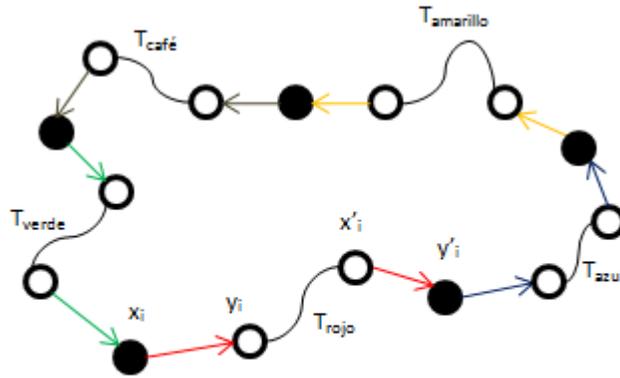


Figura 2.8

Finalmente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.18.

Sea D una digráfica m -coloreada y fuertemente conexa. Si D satisface las siguientes dos condiciones:

- (a) Cada camino dirigido cerrado en D tiene un número par de cambios de color.
- (b) Cada camino dirigido que empiece y termine con flechas del mismo color tiene un número par de cambios de color.

Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Por el teorema 2.17 tenemos que cada ciclo dirigido de $\mathcal{C}_C(D)$ es de longitud par. Por el lema 2.12 tenemos que $\mathcal{C}_C(D)$ es fuertemente conexa. Por el teorema 1.17 tenemos que $\mathcal{C}_C(D)$ es bipartita. Por lo tanto, por el teorema 2.16 podemos concluir que D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

3. Dos extensiones del teorema de Richardson en digráficas coloreadas por flechas

En esta sección se darán los resultados principales de la tesis, es decir, dos extensiones del teorema 2.11. Ambas son en digráficas coloreadas por flechas. La primera tiene que ver con núcleos por trayectorias monocromáticas y la segunda con H -núcleos. En esta última sección escribiremos camino, trayectoria y ciclo en vez de camino dirigido, trayectoria dirigida y ciclo dirigido, respectivamente.

3.1. Una extensión del teorema de Richardson

Siguiendo con las trayectorias monocromáticas tenemos la primera extensión del teorema de Richardson, pero antes se dará una definición necesaria para probar dicha extensión.

Sea D una digráfica coloreada por flechas. La *cerradura por trayectorias monocromáticas* de D , $\mathfrak{C}(D)$ se define como sigue:

$$V(\mathfrak{C}(D)) = V(D),$$

$$F(\mathfrak{C}(D)) = \{(u, v) \mid \text{existe trayectoria monocromática de } u \text{ hacia } v\}.$$

En la figura 3.1 podemos ver una digráfica D y su cerradura por trayectorias monocromáticas.

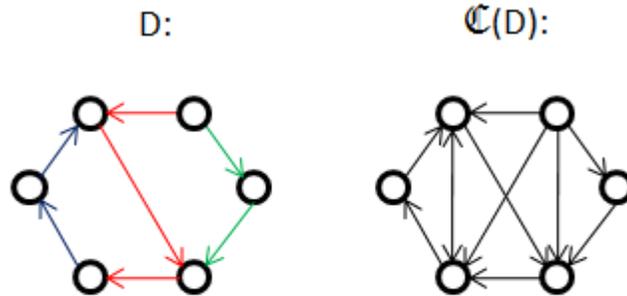


Figura 3.1

Normalmente, la cerradura por trayectorias monocromáticas de una digráfica D coloreada por flechas no utiliza colores en sus flechas; sin embargo, podemos asignar un color a sus flechas dejando los colores de las flechas de D y asignando el color de la trayectoria monocromática entre dos vértices u y v a la nueva flecha (u, v) .

Notemos que para cualquier digráfica coloreada por flechas se cumple que $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)) = \mathfrak{C}(D)$.

Recordemos asimismo la definición de la digráfica de clases de color $\mathcal{C}_C(D)$.

$V(\mathcal{C}_C(D)) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m\}$ donde \mathcal{C}_i es la subdigráfica de D cuyas flechas son las flechas de D de color i y sus vértices son los vértices de D en los que inciden flechas de color i ; la digráfica \mathcal{C}_i es llamada *digráfica de clase-color i* de D .

$(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \in A(\mathcal{C}_C(D))$ si y sólo si existen dos flechas $f = (u, v) \in A(D)$ y $g = (v, w) \in F(D)$ de color i y j , respectivamente.

Teorema 3.1. [19]

Sean D una digráfica m -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ su digráfica de clases de color. Si $\mathcal{C}_C(D)$ no tiene ciclos de longitud impar, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Se hará por inducción sobre m .

Base de la inducción.

Para $m = 1$ y $m = 2$ se sigue el resultado directamente del teorema 2.15.

Hipótesis de inducción.

Si D' es una digráfica m' -coloreada con $m' < m$ tal que $\mathcal{C}_C(D')$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D' tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Paso inductivo.

Sea D una digráfica m -coloreada tal que $\mathcal{C}_C(D)$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Consideremos dos casos sobre $\mathcal{C}_C(D)$.

Caso 1.

$\mathcal{C}_C(D)$ es fuertemente conexas.

En este caso, al ser $\mathcal{C}_C(D)$ fuertemente conexas y no tener ciclos dirigidos de longitud impar, se tiene que $\mathcal{C}_C(D)$ es bipartita (teorema 1.17), con lo que por el teorema 2.16, D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Caso 2.

$\mathcal{C}_C(D)$ no es fuertemente conexas.

Sean G una componente fuertemente conexas terminal de $\mathcal{C}_C(D)$, $\{V_1 = V(\mathcal{C}_C(D)) \setminus V(G), V_2 = V(G)\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ y H la subdigráfica generadora de D tal que $F(H) = \{(x, y) \in F(D) \mid c(x, y) \in V_2\}$. Para demostrar que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas consideremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1

$\mathcal{C}_C(H)$ no tiene ciclos de longitud impar.

Como $H \subseteq D$, se tiene que $\mathcal{C}_C(H) \subseteq \mathcal{C}_C(D)$ y como $\mathcal{C}_C(D)$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces $\mathcal{C}_C(H)$ tampoco los tiene.

Puesto que H es una digráfica $|V_2|$ -coloreada, con $|V_2| < m$, tenemos por la hipótesis de inducción que H tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Sea N_1 dicho núcleo. Si N_1 es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D , entonces N_1 es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D , ya que también es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas al tener H los mismos vértices que D . Por lo tanto, supongamos que N_1 no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D . Véase la figura 3.2.

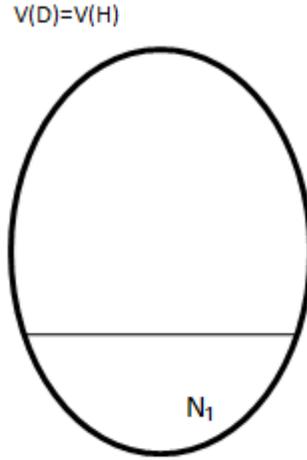


Figura 3.2

Consideremos la siguiente notación a lo largo de lo que resta de la prueba: Sean $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Escribiremos $u \rightsquigarrow_{mono} v$ si existe una uv -trayectoria monocromática en D ; $u \rightsquigarrow_i v$ si existe una uv -trayectoria monocromática de color i en D ; $u \nrightarrow_{mono} v$ será la negación de $u \rightsquigarrow_{mono} v$; $u \nrightarrow_i v$ será la negación de $u \rightsquigarrow_i v$.

Afirmación 2

Si $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V(\mathcal{C}_C(D))$ y para algún $\{u, v\} \subseteq N_1$, con $u \neq v$, entonces $i \in V_1$.

Como N_1 es independiente por trayectorias monocromáticas en H , de la construcción de H se tiene que $i \in V_1$.

Afirmación 3

Si $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V_1$ y para algún $\{u, v\} \subseteq N_1$, entonces $w \nrightarrow_j u$ para cada $j \in V_2$ y para cada $w \in V(H) \setminus N_1$.

Supongamos, por contradicción, que existen $\{u, v\} \subseteq N_1$ y $w \in V(H) \setminus N_1$ tal que $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V_1$ y $w \rightsquigarrow_j u$ para algún $j \in V_2$. Véase la figura 3.3.

Como $w \rightsquigarrow_j u$ para algún $j \in V_2$, se tiene que existe $w_1 \in V(D)$ tal que $c(w_1, u) = j$. Asimismo, como $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V_1$, se tiene que existe $v_1 \in V(D)$ tal que $c(u, v_1) = i$. Por la manera como fue construida la digráfica de clases de color, se tiene que $(j, i) \in F(\mathcal{C}_C(D))$, con lo que existe una V_2V_1 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, lo cual contradice que G sea una componente fuertemente conexas terminal de $\mathcal{C}_C(D)$.

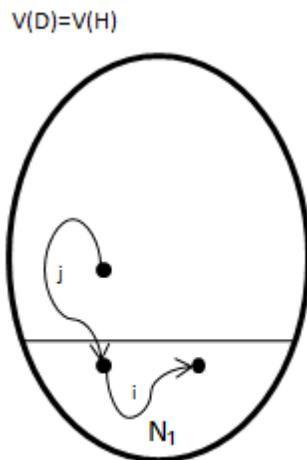


Figura 3.3

Afirmación 4

$V(H) \setminus N_1 \neq \emptyset$.

Como $V_2 \neq \emptyset$, tenemos por como fue construida H , que existen vértices $u, v \in V(H)$ tales que existe una flecha de color $j \in V_2$ entre ellos; esto significa que $V(H)$ no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en H , con lo que $V(H) \neq N_1$.

Consideremos el conjunto $T = \{z \in N_1 \mid \text{existe } k \in N_1 \setminus \{z\} \text{ tal que } z \rightsquigarrow_j k \text{ para algún } j \in V_1\}$.

Notemos que $T \neq \emptyset$ debido a que N_1 no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Sea $N_2 = N_1 \setminus T$. Véase la figura 3.4.

$$V(D)=V(H)$$

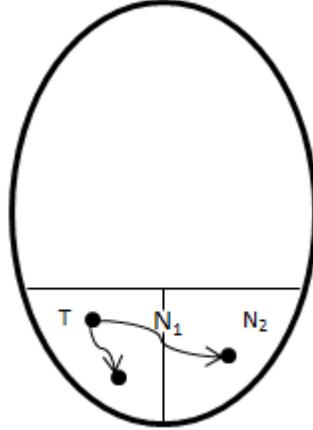


Figura 3.4

Afirmación 5

$N_2 \neq \emptyset$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $N_2 = \emptyset$. Como $V(H) \setminus N_1 \neq \emptyset$ y N_1 es núcleo por trayectorias monocromáticas de H , se tiene que existen $h \in V(H) \setminus N_1$ y $w \in N_1$ tales que $h \rightsquigarrow_j w$ para algún $j \in V_2$. Por otro lado, puesto que $N_2 = \emptyset$, tenemos, por la definición de T , que para $w \in N_1$ existe $k \in N_1 \setminus \{w\}$ tal que $w \rightsquigarrow_i k$ para algún $i \in V_1$, lo cual contradice la afirmación 3.

Afirmación 6

N_2 es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Como $N_2 \subseteq N_1$ y N_1 es independiente por trayectorias monocromáticas en H , se sigue de la construcción de H que $u \rightarrow_j v$ para cada $j \in V_2$ y para cada $\{u, v\} \subseteq N_2$. Por otro lado, de la definición de T , se tiene que $x \rightarrow_i y$ para cada $i \in V_1$ y para cada $\{x, y\} \subseteq N_2$. Por lo tanto N_2 es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Afirmación 7

Para cada $w \in V(H) \setminus N_1$ existe $h \in N_2$ tal que $w \rightsquigarrow_{mono} h$.

Sea $w \in V(H) \setminus N_1$. Como N_1 es un núcleo por trayectorias monocromáticas de H , se tiene que existe $h \in N_1$ tal que $w \rightsquigarrow_j h$ para algún $j \in V_2$. Si $h \in T$ tendríamos, por la definición de T , que existe un vértice $v \in N_1$ tal que existe una hv -trayectoria monocromática de color $i \in V_1$. Esto no puede ser posible ya que estaría contradiciendo el resultado de la afirmación 3, con lo que se tiene que $h \notin T$ y por lo tanto $h \in N_2$.

Si $t \rightsquigarrow_{mono} N_2$ para cada $t \in T$, entonces de las afirmaciones 6 y 7 se tiene que N_2 es un núcleo por trayectorias monocromáticas en D . Por lo tanto supongamos que existe $t' \in T$ tal que $t' \not\rightarrow_{mono} N_2$.

Sea $T' = \{t' \in T \mid t' \not\rightarrow_{mono} N_2\}$. Véase la figura 3.5.

$V(D)=V(H)$

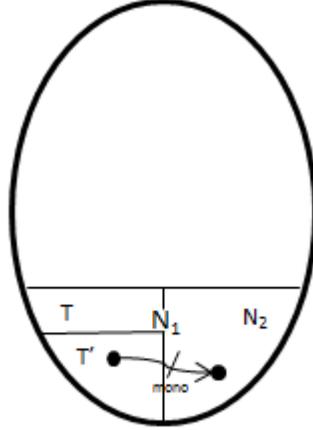


Figura 3.5

Consideremos la digráfica $\mathfrak{C}(D)[T']$ (la subdigráfica de $\mathfrak{C}(D)$ inducida por los vértices de T').

Tenemos entonces las siguientes afirmaciones sobre $\mathfrak{C}(D)[T']$.

Afirmación 8

$\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T'])$ no tiene ciclos de longitud impar.

Como $\mathfrak{C}(D)[T'] \subseteq \mathfrak{C}(D)$, se tiene que $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T']) \subseteq \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$, lo que implica que $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T']) \subseteq \mathcal{C}_C(D)$, ya que $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)) = \mathcal{C}_C(D)$. Como por hipótesis $\mathcal{C}_C(D)$ no tiene ciclos de longitud impar, entonces $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T'])$ tampoco los contiene.

Afirmación 9

$c_{\mathfrak{C}(D)}(x, y) \in V_1$ para cada $(x, y) \in F(\mathfrak{C}(D)[T'])$.

Haciendo la demostración por contradicción, supongamos que existe $(x, y) \in F(\mathfrak{C}(D)[T']) \subseteq F(\mathfrak{C}(D))$ tal que $c_{\mathfrak{C}(D)}(x, y) \in V_2$. Sea entonces la flecha (x, y) de $\mathfrak{C}(D)$ de color k , con $k \in V_2$. De la definición de cerradura se tiene que existe una xy -trayectoria monocromática de color k en D . Sea P dicha trayectoria. De la definición de H , se tiene que $P \subseteq H$, pero entonces tendríamos que N_1 no es independiente por trayectorias monocromáticas en H , ya que $\{x, y\} \subseteq T' \subseteq N_1$, lo cual no es posible.

Como $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T'])$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, por la afirmación 8 y además, ya que $\mathfrak{C}(D)[T']$ es una digráfica m' -coloreada con $m' \leq$

$|V_1| < m$, tenemos por hipótesis de inducción que $\mathfrak{C}(D)[T']$ tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Sea N_3 dicho núcleo.

Afirmación 10

N_3 es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Haciendo la demostración por contradicción, supongamos que existen $u, v \in N_3$ con $u \neq v$ tal que $u \rightsquigarrow_{mono} v$. Como $u \rightsquigarrow_{mono} v$, tenemos por la definición de cerradura, que $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Como $\{u, v\} \subseteq N_3 \subseteq T'$, se tiene que $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D)[T'])$, lo cual contradice que N_3 es independiente por trayectorias monocromáticas en $\mathfrak{C}(D)[T']$.

Afirmación 11

Para cada $z \in T' \setminus N_3$ existe $h \in N_3$ tal que $z \rightsquigarrow_{mono} h$.

Sea $z \in T' \setminus N_3$. Como $z \in V(\mathfrak{C}(D)[T']) \setminus N_3$ y N_3 es núcleo por trayectorias monocromáticas de $\mathfrak{C}(D)[T']$, tenemos que existe $h \in N_3$ tal que existe una zh -trayectoria monocromática en $\mathfrak{C}(D)[T']$. Sea P dicha trayectoria. Como $\mathfrak{C}(D)[T'] \subseteq \mathfrak{C}(D)$, tenemos que $P \subseteq \mathfrak{C}(D)$, lo que por definición de cerradura, implica que $(z, h) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Como $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)) = \mathfrak{C}(D)$, tenemos que $(z, h) \in F(\mathfrak{C}(D))$, lo que por definición implica que existe una zh -trayectoria monocromática en D . Véase la figura 3.6.

$V(D)=V(H)$

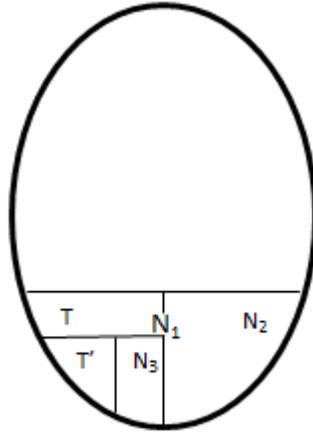


Figura 3.6

Afirmación 12

$N = N_2 \cup N_3$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D . Véase la figura 3.7.

a) N es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Teorema de Richardson.

Si D una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D tiene un núcleo.

Demostración.

Sean D' la digráfica q -coloreada obtenida al asignar un color distinto a cada flecha de D , $L(D')$ su digráfica de líneas y $\mathfrak{C}(D')$ su cerradura.

Notemos que $\mathcal{C}_C(D') = L(D')$. Por otro lado, como $L(D')$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar (lema 1.15) se tiene que $\mathcal{C}_C(D')$ no tiene ciclos de longitud impar. Entonces, por el teorema 3.1, tenemos que D' tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Esto implica que $\mathfrak{C}(D') = D'$ tiene núcleo. Por lo tanto, D tiene un núcleo.

■

3.2. Otra extensión del teorema de Richardson

La última generalización del teorema de Richardson tiene que ver también con digráficas coloreadas por flechas y con otro tipo de núcleo, distinto al núcleo por trayectorias monocromáticas: El H -núcleo. Para comenzar a hablar al respecto, necesitaremos algunas definiciones más.

Sean D una digráfica coloreada por flechas y H una digráfica, posiblemente con lazos. Diremos que D es H -coloreada si sus flechas tienen colores que están representados por vértices en H . Notemos que puede haber “colores” de vértices en H que no aparezcan en las flechas de D . Un camino (trayectoria) W en D es un H -camino (H -trayectoria) si y sólo si los colores consecutivos de las aristas de W forman un camino en H . En la figura 3.8 D es una digráfica H -coloreada. El camino $C = (v_2, v_3, v_4, v_5)$ es un H -camino en D ya que $(azul, rojo, azul)$ es un camino en H ; sin embargo, $C' = (v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ no es un H -camino, ya que $(azul, rojo, azul, verde)$ no es un camino en H .

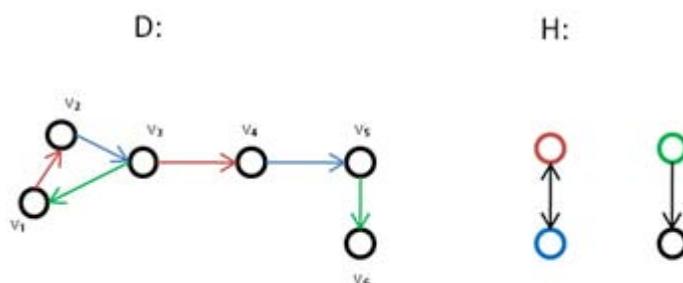


Figura 3.8

Notemos que un camino de longitud uno en D es un H -camino, ya que un vértice es un camino en H .

Linek y Sands en [14] fueron los primeros en trabajar con el concepto de H -camino. Después otros autores consideraron y ampliaron su trabajo como Reid [17], Arpin y Linek [1] y Delgado-Escalante y Galeana-Sánchez [5].

Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es H -absorbente por caminos si para cada $x \in V(D) \setminus S$ existe un H -camino desde x hacia algún vértice de S . Un conjunto $I \subseteq V(D)$ es H -independiente por caminos si no existe H -camino entre dos vértices distintos de I [5].

Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es llamado H -núcleo por caminos si N es H -absorbente por caminos y H -independiente por caminos. En la figura 3.9, D es una digráfica H -coloreada y el conjunto $N = \{v, w\}$ es un conjunto de vértices H -absorbente por caminos ya que desde cada vértice de D que no pertenece a N existe un H -camino desde dicho vértice hacia alguno de los de N . Asimismo,

mo, N es un conjunto H -independiente por caminos, ya que no existe H -camino alguno entre sus vértices. Por lo tanto, N es un H -núcleo por caminos.

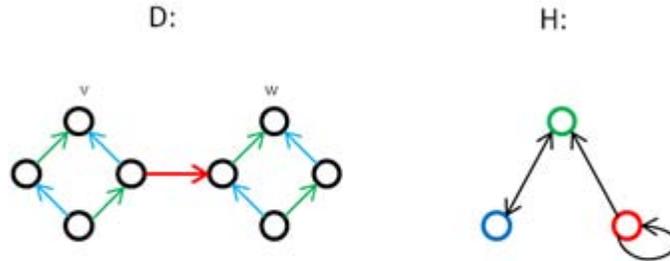


Figura 3.9

Notemos que la existencia de un H -camino entre dos vértices no garantiza la existencia de una H -trayectoria entre dichos vértices; además, notemos que la concatenación de dos H -trayectorias, no siempre forma una H -trayectoria. En la figura 3.10 existe un H -camino entre v_1 y v_8 , a saber, el camino: $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_4, v_7, v_8)$. Sin embargo, C no es una H -trayectoria y no existe una H -trayectoria entre v_1 y v_8 ; aunque $T = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8)$ es una trayectoria, no es una H -trayectoria, ya que la sucesión $(azul, azul)$ no está presente en H . Notemos que T es la única v_1v_8 -trayectoria en D . Asimismo, aunque $T_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $T_2 = (v_4, v_7, v_8)$ son H -trayectorias, la concatenación de T_1 y T_2 que resulta ser T , no es una H -trayectoria, como ya hemos visto.

Por estas razones, Arpin y Linek prefirieron trabajar con H -caminos en vez de H -trayectorias.

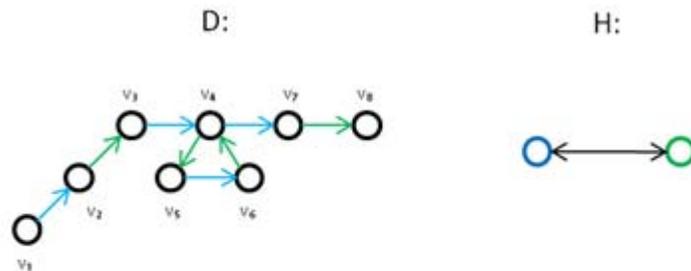


Figura 3.10

Delgado-Escalante y Galeana-Sánchez [5] usaron el trabajo de Arpin y Linek para introducir el concepto de H -núcleo por trayectorias, al que llamaremos de ahora en adelante H -núcleo.

Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un H -núcleo si:

-Para cada par de vértices distintos en N , no existe una H -trayectoria entre ellos.

-Para cada vértice $u \in V(D) \setminus N$, existe una H -trayectoria en D desde u hacia N .

El concepto de H -núcleo generaliza el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas ya que un H -núcleo es un núcleo por trayectorias monocromáticas cuando todas las flechas de H son todos los lazos posibles. Aunque los conceptos de H -núcleo por caminos y H -núcleo son distintos, en algunos casos, un H -núcleo por caminos es un H -núcleo. En la figura 3.10, $N = \{v_8\}$ es un H -núcleo por caminos, pero no es un H -núcleo por trayectorias; en la figura 3.9, $N = \{v, w\}$ es tanto H -núcleo por caminos, como H -núcleo por trayectorias.

Sea D una digráfica H -coloreada. Definimos la H -cerradura de D , $\mathfrak{C}_H(D)$, de la siguiente manera:

$$V(\mathfrak{C}_H(D)) = V(D),$$

$$F(\mathfrak{C}_H(D)) = \{(x, y) \mid \text{existe una } H\text{-trayectoria desde } x \text{ hacia } y \text{ en } D\}.$$

Evidentemente D tiene un H -núcleo si y sólo si $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene un núcleo.

En la figura 3.11 podemos observar una digráfica D , H -coloreada y su H -cerradura $\mathfrak{C}_H(D)$.

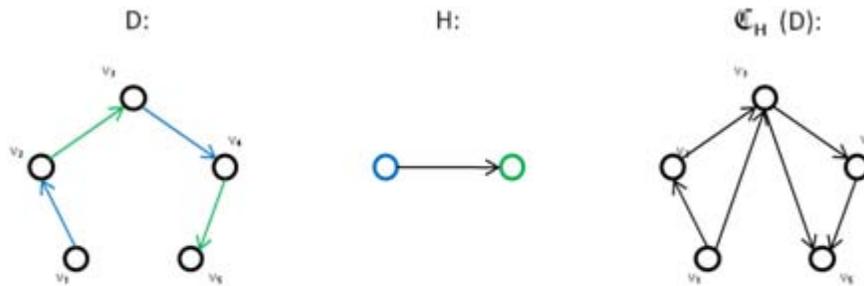


Figura 3.11

Los siguientes teoremas serán útiles para probar el resultado principal de esta subsección [11].

El teorema 3.2 se probó originalmente para digráficas infinitas, pero para el presente trabajo es suficiente dar una prueba para digráficas finitas.

Teorema 3.2.

Sean H una digráfica, D una digráfica conexa H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases de color de D . Si $\mathcal{C}_C(D)$ es subdigráfica de H , entonces D tiene un H -núcleo.

Demostración.

Observemos que por la definición de $\mathcal{C}_C(D)$, la definición de H -trayectoria y el hecho de que $\mathcal{C}_C(D) \subseteq H$, toda trayectoria en D es una H -trayectoria. Notemos que un conjunto $S \subseteq V(D)$ con la propiedad de que exista una trayectoria desde cualquier vértice de D fuera de S hacia algún vértice de S y, con la propiedad de que no existe trayectoria entre vértices de S , sería un H -núcleo de D . Probemos entonces que para toda gráfica finita existe un conjunto con las características de S . Nos referiremos a los conjuntos que cumplan las características de S como núcleos por trayectorias.

Caso 1. D es fuertemente conexa.

Si D es fuertemente conexa, $N = \{v\}$, para cualquier $v \in V(D)$, es un núcleo por trayectorias, ya que por la propiedad de ser fuertemente conexa existen trayectorias desde todos los vértices de D hacia v .

Caso 2. D no es fuertemente conexa.

Se hará la prueba por inducción sobre $|V(D)|$.

Base de la inducción.

$|V(D)| = 2$.

D es una trayectoria de dos vértices. Sea v el vértice con exgrado 0 y u el vértice con exgrado 1. Entonces $N = \{v\}$ es un núcleo por trayectorias ya que existe una uv -trayectoria.

Hipótesis de inducción.

Para toda digráfica D' con menos de n vértices, existe un conjunto S tal que S es un núcleo por trayectorias de D' .

Paso inductivo.

Sean D una digráfica con $|V(D)| = n$, C_t una componente conexa terminal de D y D' una subdigráfica de D inducida por los vértices de $V(D) \setminus V(C_t)$. Como $|V(D')| < n$ existe un conjunto N' que por la hipótesis de inducción es núcleo por trayectorias. Sea v un vértice cualquiera de C_t .

Si no existe trayectoria entre N' y $V(C_t)$, $N = N' \cup \{v\}$ es un conjunto en el que no existen trayectorias entre sus vértices y, como existe trayectoria desde cualquier vértice de $V(C_t)$ hacia v , existe una trayectoria desde cualquier vértice fuera de N , hacia algún vértice de N .

Si existen trayectorias entre N' y $V(C_t)$, sea $P = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq N'$ el conjunto de vértices que tiene trayectorias hacia $V(C_t)$ y P' el conjunto de vértices de $V(D') \setminus N'$ tal que existe una trayectoria de P' hacia P . Entonces $N = (N' \setminus P) \cup \{v\}$ es un núcleo por trayectorias.

Claramente no existen trayectorias entre los vértices de N . Además, existe una trayectoria desde cada uno de los vértices de $V(C_t) \setminus \{v\}$ hacia v . Los vértices de P' tienen una trayectoria hacia $V(C_t)$, por como está definido P y, como C_t es

fuertemente conexa, existe una trayectoria desde estos vértices hacia v . Entonces todos los vértices que no pertenecen a N tienen una trayectoria hacia N , ya que los vértices de $V(D') \setminus (N' \cup P')$ tienen una trayectoria hacia $N' \setminus P \subseteq N$. Véase la figura 3.12.

■

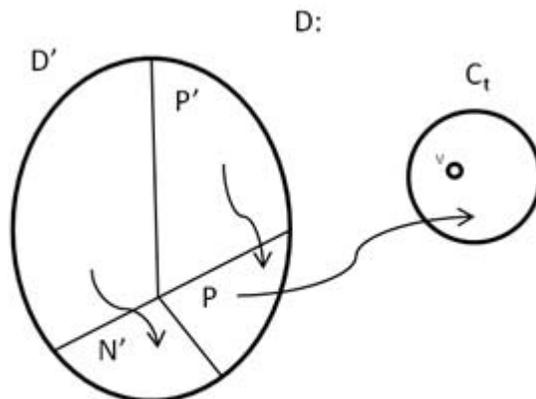


Figura 3.12

El siguiente resultado nos dará una construcción que será útil para probar la segunda extensión del teorema de Richardson.

Teorema 3.3.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases de color de D . Supongamos que existen conjuntos V_1, V_2 que forman una bipartición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que:

1. $\mathcal{C}_C(D)[V_i]$ es una subdigráfica de $H[V_i]$ para cada $i \in \{1, 2\}$.
2. Si $(u, v) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ para algún $u \in V_i$ y para algún $v \in V_j$, con $i \neq j$, entonces $(u, v) \notin F(H)$.

Entonces D tiene H -núcleo.

Demostración.

Para demostrar el teorema consideremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1

Sea $i \in \{1, 2\}$. Si W es un camino en D tal que $c(u, v) \in V_i$ para cada $(u, v) \in F(W)$, entonces W es un H -camino.

Por la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ tenemos que colores consecutivos de flechas en W , forman un camino en $\mathcal{C}_C(D)$. Sea P dicho camino. Por otro lado, como $c(u, v) \in V_i$ para cada $(u, v) \in F(W)$, entonces $P \subseteq \mathcal{C}_C(D)[V_i]$. Como $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i] \subseteq H$, entonces P es un camino en H , con lo que W es un H -camino.

Afirmación 2

Cada H -camino en D utiliza en sus flechas solamente los colores de V_1 o solamente los colores de V_2 .

Sea P un H -camino en D . Haciendo la demostración por contradicción, supongamos que existen dos flechas consecutivas de P , (u, v) y (v, w) , tales que $c(u, v) \in V_1$ y $c(v, w) \in V_2$, o $c(u, v) \in V_2$ y $c(v, w) \in V_1$. Como P es un H -camino en D , tenemos que $(c(u, v), c(v, w)) \in F(H)$. Por otro lado, como $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$, por la definición de $\mathcal{C}_C(D)$, tenemos que $(c(u, v), c(v, w)) \in F(\mathcal{C}_C(D))$, contradiciendo la condición 2 de las hipótesis del teorema. Por lo tanto, P es un camino que utiliza solamente los colores de V_1 o solamente los colores de V_2 .

Afirmación 3

Sea $i \in \{1, 2\}$. Cada H -camino que utiliza solamente los colores de V_i en D contiene una H -trayectoria que utiliza solamente los colores de V_i .

Sea $P = (w_0, w_1, \dots, w_m)$ un H -camino que utiliza solamente los colores de V_i en D . Como P es un w_0w_m -camino, entonces P contiene una w_0w_m -trayectoria. Sea $T = (u_0 = w_0, u_1, \dots, u_k = w_m)$. Probemos que T es una H -trayectoria. Como $c(w_r, w_{r+1}) \in V_i$ para $r \in \{0, \dots, m-1\}$ y $T \subseteq P$, tenemos que $c(u_l, u_{l+1}) \in V_i$ para cada $l \in \{0, \dots, k-1\}$. Por otro lado, como $\{(u_l, u_{l+1}) \mid l \in \{0, \dots, k-1\}\} \subseteq F(D)$, por la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ tenemos que $T' = (c(u_0, u_1), \dots, c(u_{k-1}, u_k))$ es un camino en $\mathcal{C}_C(D)$, en particular es un camino en $\mathcal{C}_C(D)[V_i]$. Como $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i] \subseteq H$, entonces $T' \subseteq H$. Por lo tanto, T es una H -trayectoria que utiliza solamente los colores de V_i .

Consideremos la digráfica $H' = (\{1, 2\}, \{(1, 1), (2, 2)\})$. Definimos una digráfica D' , H' -coloreada de la siguiente manera: $V(D') = V(D)$, $F(D') = F(D)$ y $c_{D'}(u, v) = i$ si y sólo si $c(u, v) \in V_i$, donde $c_{D'}(u, v)$ es el color de la flecha (u, v) en D' .

Afirmación 4

T es una H' -trayectoria de u a v en D' si y sólo si es una H -trayectoria de u a v en D .

Sea $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ una H' -trayectoria de u a v en D' . Por como se definió H' , tenemos que T es monocromática de color i , para $i \in \{1, 2\}$. Notemos que T es también una trayectoria en D . Como $c_{D'}(x_{j-1}, x_j) = i$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos por como fue construida D' , que $c(x_{j-1}, x_j) \in V_i$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, por la afirmación 1 se sigue que T es una H -trayectoria de u a v en D .

Por otro lado, sea $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_m = v)$ una H -trayectoria de u a v en D . Como no existen flechas de un V_i al otro en H y P es una trayectoria H -coloreada, tenemos que P utiliza solamente los colores de V_i para algún $i \in \{1, 2\}$. Notemos que P es también una trayectoria en D' . Como $c(x_{j-1}, x_j) \in V_i$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, se sigue por como fue construida D' , que $c_{D'}(x_{j-1}, x_j) = i$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto, por como se definió H' , se tiene que P es una H' -trayectoria de u a v .

Como D' es una digráfica H' -coloreada y H' tiene 2 vértices, entonces D' es 2-coloreada, con lo que por el teorema 2.15, tenemos que tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Sea N dicho núcleo. Observemos que cada H' -trayectoria es una trayectoria monocromática, con lo que por la afirmación 4, podemos decir que N es un H -núcleo de D . ■

Para pasar al resultado principal, necesitaremos nuevas definiciones:

Sea H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, $W = (v_0, \dots, v_n)$ un camino en $\mathcal{C}_C(D)$ y $e_i = (v_i, v_{i+1})$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Sea $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ un subconjunto de $\{0, \dots, n-1\}$ tal que para $1 \leq s \leq n-1$, $e_s \in F(H^C)$ si y sólo si $s \in I$; entonces diremos que k es la H^C -longitud de W , denotada por $l_{H^C}(W)$. Análogamente, si $I' = \{j_1, \dots, j_r\}$ es un subconjunto de $\{0, \dots, n-1\}$ tal que para $1 \leq s \leq n$, $e_s \in F(H)$ si y sólo si $s \in I'$; entonces diremos que r es la H -longitud de W , denotada como $l_H(W)$. Entonces tenemos que $n = k + r$, con lo que la longitud de W es $l_{H^C}(W) + l_H(W)$. Por ejemplo, en la figura 3.13 el camino $W = (\text{azul}, \text{rojo}, \text{azul}, \text{rojo}, \text{azul}, \text{rojo}, \text{azul})$ de $\mathcal{C}_C(D)$ tiene $l_H(W) = 3$ y $l_{H^C}(W) = 3$.

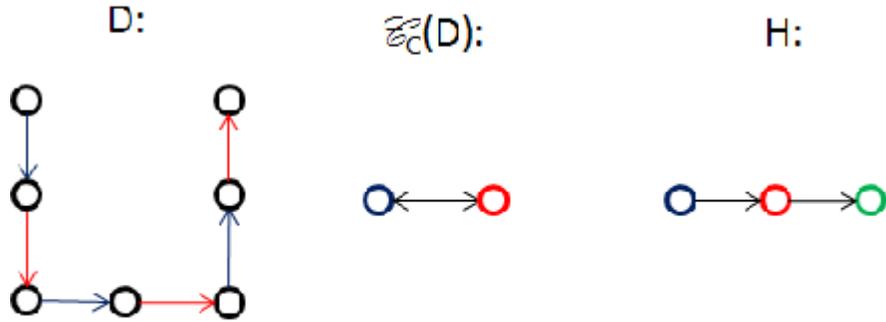


Figura 3.13

Teorema 3.4.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ su digráfica de clases de color. Cada camino cerrado de H^C -longitud impar en $\mathcal{C}_C(D)$ contiene un ciclo de H^C -longitud impar.

Demostración.

Sea W un camino cerrado de H^C -longitud impar en $\mathcal{C}_C(D)$. Haremos la demostración por inducción sobre la longitud de W .

Base de la inducción.

Si $l(W) = 1$, tenemos un lazo, entonces W ya es un ciclo de H^C -longitud impar.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que la afirmación se cumple para cada camino cerrado en $\mathcal{C}_C(D)$ de H^C -longitud impar y menor a $n + 1$.

Paso inductivo.

Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$ un camino cerrado en $\mathcal{C}_C(D)$ de H^C -longitud impar y longitud $n + 1$. Si $v_i \neq v_j$ para cada $i \neq j$, entonces W ya es un ciclo de H^C -longitud impar. Supongamos entonces que existen i y j , con $i \neq j$ tal que $v_i = v_j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$.

Consideremos los siguientes caminos cerrados: $W_1 = (v_0, W, v_i = v_j) \cup (v_j, W, v_0)$ y $W_2 = (v_i, W, v_j = v_i)$. Como $l_{H^C}(W)$ es impar y $l_{H^C}(W_1) + l_{H^C}(W_2) = l_{H^C}(W)$, entonces alguno debe ser de H^C -longitud impar, digamos W_1 . Como la longitud de W_1 es menor que $n + 1$, por la hipótesis de inducción tenemos que W_1 contiene un ciclo de H^C -longitud impar, que también está contenido en W .

■

Como en un ciclo no se repiten vértices a excepción del primero, decir que un ciclo de $\mathcal{C}_C(D)$ tiene un número par de flechas en H^C es equivalente a decir que tiene H^C -longitud par.

Con relación al teorema 3.3 y teniendo en cuenta la definición de $\mathfrak{C}_H(D)$ se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.5.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases de color de D . Supongamos que existen conjuntos V_1, V_2 que forman una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que:

1. $\mathcal{C}_C(D)[V_i]$ es una subdigráfica de $H[V_i]$ para cada $i \in \{1, 2\}$.
2. Si $(u, v) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ para algún $u \in V_i$ y para algún $v \in V_j$, con $i \neq j$, entonces $(u, v) \notin F(H)$.

Entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo.

Pasemos al teorema principal de esta sección:

Teorema 3.6. [12]

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ su digráfica de clases de color con $\mathcal{C}_C(D)$ fuertemente conexa. Si cada ciclo de $\mathcal{C}_C(D)$ tiene un número par de flechas en H^C , entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo.

Demostración.

Si $\mathcal{C}_C(D)$ es una subdigráfica de H tenemos que $\mathfrak{C}_H(D)$ es una digráfica transitiva, ya que todas las trayectorias de D son H -trayectorias y la cerradura de una digráfica es una digráfica transitiva. Entonces por el teorema 2.3, $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene un núcleo. Supongamos entonces que $\mathcal{C}_C(D)$ no es una subdigráfica de H .

Sea $x_0 \in V(\mathcal{C}_C(D))$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$V_0 = \{k \in V(\mathcal{C}_C(D)) \mid \text{existe un } x_0\text{-camino en } \mathcal{C}_C(D) \text{ con } H^C\text{-longitud par}\}$.

$V_1 = \{w \in V(\mathcal{C}_C(D)) \mid \text{existe un } x_0w\text{-camino en } \mathcal{C}_C(D) \text{ con } H^C\text{-longitud impar}\}.$

Veamos que se cumplen las siguientes afirmaciones que nos servirán para crear una construcción como la del teorema 3.3.

Afirmación 1

(V_0, V_1) es una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$.

1. $V(\mathcal{C}_C(D)) = V_0 \cup V_1$.

Como $\mathcal{C}_C(D)$ es fuertemente conexa, existe trayectoria de x_0 a todos los vértices de $\mathcal{C}_C(D)$, con lo que $V(\mathcal{C}_C(D)) = V_0 \cup V_1$.

2. $V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

$V_0 \neq \emptyset$ ya que $x_0 \in V_0$. Probemos que $V_1 \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{C}_C(D)$ no es una subdigráfica de H , tenemos que existe $(u, v) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ tal que $(u, v) \notin F(H)$. Si $u \in V_1$, entonces $V_1 \neq \emptyset$; entonces supongamos que $u \in V_0$, con lo que existe un x_0u -camino de H^C -longitud par en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos W , lo que implica que $W \cup (u, v)$ es un x_0v -camino de H^C -longitud impar en $\mathcal{C}_C(D)$, con lo que $v \in V_1$. Por lo tanto $V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

3. $V_0 \cap V_1 = \emptyset$.

Haciendo la demostración por contradicción, supongamos que existe $w \in V_0 \cap V_1$. Sean W_0 un x_0w -camino con H^C -longitud par, W_1 un x_0w -camino con H^C -longitud impar y W_2 un wx_0 -camino. Como $W_0 \cup W_2$ es un camino cerrado con $l_{H^C}(W_0 \cup W_2) = l_{H^C}(W_0) + l_{H^C}(W_2)$, tenemos que $l_{H^C}(W_2)$ es par, ya que si no lo fuera, $l_{H^C}(W_0 \cup W_2)$ sería impar y por el teorema 3.4, tendríamos que habría un ciclo de H^C -longitud impar contenido en $W_0 \cup W_2$ y, por lo tanto, contenido en $\mathcal{C}_C(D)$ lo que contradice la hipótesis del teorema que estamos demostrando. Entonces, tenemos que $W_1 \cup W_2$ es un camino cerrado de H^C -longitud impar, pero de nuevo por el teorema 3.4 tenemos que contiene entonces un ciclo de H^C -longitud impar, lo que no es posible.

Por lo tanto $V_0 \cap V_1 = \emptyset$.

Afirmación 2

$\mathcal{C}_C(D)[V_j]$ es una subdigráfica de $H[V_j]$ para cada $j \in \{0, 1\}$.

$\mathcal{C}_C(D)[V_0] \subseteq H[V_0]$.

Como $\mathcal{C}_C(D)[V_0]$ y $H[V_0]$ tienen los mismos vértices, solamente tenemos que probar que $F(\mathcal{C}_C(D)[V_0]) \subseteq F(H[V_0])$. Sea $(u, v) \in F(\mathcal{C}_C(D)[V_0])$. Si $x_0 = u$, entonces $(u, v) \in F(H)$, ya que si no sucediera esto, (u, v) sería un x_0v -camino de H^C -longitud impar, lo que implica que v pertenecería a V_1 , pero $v \in V_0$ y $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. Supongamos que $x_0 \neq u$ y sea W un x_0u -camino con H^C -longitud par. Entonces $W \cup (u, v)$ es un x_0v -camino con $l_{H^C}(W \cup (u, v)) = l_{H^C}(W) + l_{H^C}((u, v))$. Como $v \in V_0$, $W \cup (u, v)$ tiene H^C -longitud par con lo que $(u, v) \in F(H)$.

$\mathcal{C}_C(D)[V_1] \subseteq H[V_1]$.

Análogamente, se tiene dicho resultado para el conjunto V_1 .

Afirmación 3

Si $(u, v) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ para algún $u \in V_i$ y $v \in V_j$, con $i \neq j$ y $i, j \in \{0, 1\}$, entonces $(u, v) \notin F(H)$.

Sea (u, v) flecha de $\mathcal{C}_C(D)$ como en la afirmación 3.

Sin pérdida de generalidad, $u \in V_0$ y $v \in V_1$, sea entonces W un x_0u -camino de H^C -longitud par. Tenemos que $W \cup (u, v)$ es un x_0v -camino con $l_{H^C}(W \cup (u, v)) = l_{H^C}(W) + l_{H^C}((u, v))$. Como $v \in V_1$, $W \cup (u, v)$ tiene H^C -longitud impar, por lo que $l_{H^C}(u, v)$ es impar y no mayor de uno, con lo que $l_{H^C}(u, v) = 1$, es decir, $(u, v) \in F(H^C)$ y $(u, v) \notin F(H)$.

De las tres afirmaciones, tenemos que se cumplen las hipótesis del teorema 3.5, con lo que podemos concluir que $\mathfrak{C}_H(D)$ es un digráfica con núcleo. ■

Como un núcleo en $\mathfrak{C}_H(D)$ es un H -núcleo en D , el teorema anterior puede reescribirse de la siguiente manera:

Corolario 3.7.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases de color de D con $\mathcal{C}_C(D)$ fuertemente conexa. Si cada ciclo de $\mathcal{C}_C(D)$ tiene un número par de flechas en H^C , entonces D tiene un H -núcleo.

Podemos extender el resultado del teorema 3.6 a digráficas cuya digráfica de clases de color no sea fuertemente conexa, pero antes necesitaremos unos resultados que nos serán útiles.

Teorema 3.8.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathfrak{C}_H(D)$ su H -cerradura. Supongamos que existen conjuntos V_1, V_2 que forman una partición no trivial de los vértices de D , tal que:

1. $\mathfrak{C}_H(D[V_i])$ es una digráfica núcleo-perfecta para cada $i \in \{1, 2\}$.
2. $\Gamma_D^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset$.

Entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo.

Demostración.

Por el teorema 2.8, para demostrar que $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo, hay que demostrar que cada subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene un seminúcleo no vacío. Notemos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1

Sea $\{u, v\} \subseteq V_i$, para algún $i \in \{1, 2\}$. Si existe un uv -camino en D , digamos W , entonces W está contenido en $D[V_i]$.

Si $\{u, v\} \in V_2$, evidentemente $W \subseteq D[V_2]$ ya que no existen flechas desde V_2 hacia V_1 , con lo que no existen vértices de V_1 que pertenezcan a W y $W \subseteq V_2$.

Si $\{u, v\} \in V_1$, entonces puede existir una trayectoria que empieza en V_1 y continúe hacia V_2 , pero dicha trayectoria no puede regresar a tener vértices de V_1 , por la condición 2 de las hipótesis del teorema, con lo que dicha trayectoria

no puede ser W , ya que el último vértice de W pertenece a V_1 . Por lo tanto $W \subseteq V_1$.

Afirmación 2

$$\Gamma_{\mathfrak{C}_H(D)}^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset.$$

Como no existen flechas desde V_2 hacia V_1 , no puede haber una trayectoria que inicie en V_2 y termine en V_1 , con lo que no puede haber una H -trayectoria que inicie en V_2 y termine en V_1 . Por la definición de $\mathfrak{C}_H(D)$, tenemos entonces que $\Gamma_{\mathfrak{C}_H(D)}^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset$.

Afirmación 3

$$\mathfrak{C}_H(D[V_i]) = \mathfrak{C}_H(D)[V_i] \text{ para cada } i \in \{1, 2\}.$$

Evidentemente $\mathfrak{C}_H(D[V_i]) \subseteq \mathfrak{C}_H(D)[V_i]$. Por otro lado, aunque existan flechas de $\mathfrak{C}_H(D)$ que no pertenezcan a $\mathfrak{C}_H(D[V_i])$ para cada $i \in \{1, 2\}$, dichas flechas son las que van de V_1 hacia V_2 , por lo que $\mathfrak{C}_H(D)[V_i] \subseteq \mathfrak{C}_H(D[V_i])$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

Afirmación 4

Sea $i \in \{1, 2\}$. Si $I \subseteq V(\mathfrak{C}_H(D[V_i]))$ es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}_H(D[V_i])$, entonces I es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}_H(D)$.

Como el conjunto $I \subseteq V_i$ no contiene vértices de V_j , $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$, y además por la afirmación 3, la independencia se conserva en $\mathfrak{C}_H(D)[V_i] \subseteq \mathfrak{C}_H(D)$.

Sea G una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}_H(D)$. Si G es una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}_H(D)[V_i]$ para algún $i \in \{1, 2\}$, entonces G tiene un núcleo, que es un seminúcleo no vacío de G . Por otro lado, si G es una digráfica inducida que utilice vértices tanto de V_1 como de V_2 , observemos que cualquier núcleo de $\mathfrak{C}_H(D)[V(G) \cap V_2]$ es un seminúcleo no vacío de G , ya que $\mathfrak{C}_H(D)[V(G) \cap V_2]$ es una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}_H(D)[V_2]$ y no puede haber flechas desde V_2 hacia $V(G) \setminus V_2$, con lo que se cumple la segunda condición para ser seminúcleo (la primera se cumple al ser independiente).

Por lo tanto, por el teorema 2.8 tenemos que $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo. ■

Corolario 3.9.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y D_1, \dots, D_w sus componentes fuertemente conexas. Si $\mathfrak{C}_H(D_i)$ tiene núcleo para cada $i \in \{1, \dots, w\}$, entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo.

Demostración.

Haremos la demostración por inducción sobre el número de componentes fuertemente conexas de D .

Base de la inducción.

Si $w = 1$, entonces tenemos por la hipótesis del mismo corolario que $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo.

Hipótesis de inducción.

Si D' es una digráfica H -coloreada con componentes fuertemente conexas $D'_1, D'_2, \dots, D'_{w-1}$ tal que $\mathfrak{C}_H(D'_i)$ tiene núcleo para cada $i \in \{1, \dots, w-1\}$, entonces $\mathfrak{C}_H(D')$ tiene núcleo.

Paso inductivo.

Sea D una digráfica H -coloreada con componentes fuertemente conexas D_1, D_2, \dots, D_w tal que $\mathfrak{C}_H(D_i)$ tiene núcleo para cada $i \in \{1, \dots, w\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que D_1 es una componente fuertemente conexa inicial de D . Consideremos la digráfica generada por los vértices de D que no pertenecen a D_1 , $D[V(D) \setminus V(D_1)]$.

Como D_2, \dots, D_w son componentes fuertemente conexas de $D[V(D) \setminus V(D_1)]$ y $\mathfrak{C}_H(D_i)$ tiene núcleo para cada $i \in \{2, \dots, w\}$, se sigue de la hipótesis de inducción que $\mathfrak{C}_H(D[V(D) \setminus V(D_1)])$ tiene núcleo.

Sea $V_1 = V(D_1)$ y $V_2 = V(D) \setminus V(D_1)$. Notemos que los conjuntos V_1 y V_2 son una partición de $V(D)$ tal que:

1. $\mathfrak{C}_H(D[V_i])$ es una digráfica que tiene un núcleo para cada $i \in \{1, 2\}$.
2. $\Gamma_D^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset$.

Por lo tanto, por el teorema 3.8 tenemos que $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo. ■

Utilizando estos últimos resultados, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.10.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ su digráfica de clases de color. Si cada ciclo de $\mathcal{C}_C(D)$ tiene un número par de flechas en H^C , entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo.

Demostración.

En el caso de que $\mathcal{C}_C(D)$ sea fuertemente conexa, tenemos el caso del teorema 3.6. Supongamos entonces que $\mathcal{C}_C(D)$ no es fuertemente conexa. Sean D_1, \dots, D_w las componentes fuertemente conexas de $\mathcal{C}_C(D)$. Como D_i no tiene ciclos de H^C -longitud impar para cada $i \in \{1, \dots, w\}$ tenemos por el teorema 3.6 que $\mathfrak{C}_H(D_i)$ tiene núcleo para $i \in \{1, \dots, w\}$. Por lo tanto, tenemos las hipótesis del corolario 3.9, con lo que $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo. ■

Corolario 3.11.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ su digráfica de clases de color. Si cada ciclo de $\mathcal{C}_C(D)$ tiene un número par de flechas en H^C , entonces D tiene H -núcleo.

Tenemos entonces nuevamente el teorema de Richardson (teorema 2.11) y ahora lo demostraremos como consecuencia del corolario 3.11.

Teorema de Richardson.

Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D tiene un núcleo.

Demostración.

Sea D' la digráfica q -coloreada obtenida de D al asignar un color distinto a cada flecha de D . Sean asimismo, $L(D')$ su digráfica de líneas y $\mathfrak{C}(D')$ su cerradura. Probaremos que D' tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas (que será también núcleo de D).

Notemos que D' es una digráfica H -coloreada con $H = \{(1, \dots, q)\}, \{(i, i) \mid i \in \{1, \dots, q\}\}$.

Como $\mathcal{C}_C(D') = L(D')$ y $L(D')$ no tiene ciclos de longitud impar (lema 1.15) se tiene que $\mathcal{C}_C(D')$ no tiene ciclos de longitud impar. Por otro lado, tenemos que $\mathcal{C}_C(D)$ es una subdigráfica de H^C (digráfica completa sin lazos) y por lo tanto, $\mathcal{C}_C(D')$ no tiene ciclos con H^C -longitud impar. Por lo tanto, por el corolario 3.11 tenemos que D' tiene un H -núcleo, digamos K . Recordemos que cuando H es una digráfica en la que sus flechas son todos los lazos posibles, un H -núcleo es un núcleo por trayectorias monocromáticas, con lo que K es núcleo por trayectorias monocromáticas. Como $\mathfrak{C}(D') = D'$, tenemos que K es núcleo de D' y por lo tanto núcleo de D .

■

Conclusión

El teorema de Richardson tiene suma importancia en la teoría de núcleos en digráficas; los resultados presentados en esta tesis le dan forma al teorema de Richardson de manera más general, en digráficas coloreadas por flechas, para después ver que dicho teorema es un caso particular de cada una de dichas generalizaciones.

En la introducción se plantearon dos preguntas, cuyas respuestas pueden ser dadas a manera de conclusión. La primera era:

¿Qué característica debe tener $\mathcal{C}_C(D)$ para garantizar que D tenga un núcleo por trayectorias monocromáticas?

La respuesta es que $\mathcal{C}_C(D)$ no debe tener ciclos de longitud impar. El teorema de Richardson se desprende del caso en que la digráfica D tiene todas sus flechas coloreadas por colores distintos.

La segunda pregunta era:

¿Qué características debe tener H con respecto a $\mathcal{C}_C(D)$ para garantizar que D tenga un H -núcleo?

La respuesta es que cada ciclo de $\mathcal{C}_C(D)$ no debe tener un número impar de flechas en H^C . El teorema de Richardson se desprende del caso en que la digráfica D tiene todas sus flechas coloreadas por colores distintos.

Aunque queda mucho por investigar en un campo como la teoría de núcleos, podemos observar que la no existencia de estructuras (ciclos, flechas de otras digráficas en los ciclos) impares tiene mucho que ver con la existencia de distintos tipos de núcleos, lo que nos sirve para seguir avanzando en descubrir finalmente qué tipos de digráficas son las que tienen núcleo y qué tipo las que no.

Bibliografía

- [1] Arpin, P., Linek, V.: Reachability problems in edge-colored digraphs. *Discrete Math.* 307, 2276-2289 (2007).
- [2] Berge, C.: *Graphs*, North Holland Mathematical Library, The Netherlands, (1989).
- [3] Bondy, J.A., Murty, U.S.R.: *Graph Theory with Applications*, North Holland, New York, (1976).
- [4] Chvátal, V., Lovász, L.: Every directed graph has a semi-kernel, *Lecture Notes in Math.* 411, 175 (1974).
- [5] Delgado-Escalante, P., Galeana-Sánchez, H.: Restricted domination in arc-colored digraphs. *AKCE Int. J. Comb.*1, 95-104 (2014)
- [6] Galeana-Sánchez, H.: On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments. *Discrete Math.* 156, 103-112 (1996).
- [7] Galeana-Sánchez, H.: Kernels in edge-coloured digraphs. *Discrete Math.* 184, 87-99 (1998).
- [8] Galeana-Sánchez, H., Rojas-Monroy, R.: A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments. *Discrete Math.* 282, 275-276 (2004).
- [9] Galeana-Sánchez H., Rojas-Monroy, R.: On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments. *Discrete Math.* 285, 313-318 (2004).
- [10] Galeana-Sánchez, H.: Kernels by monochromatic paths and the color-class digraph. *Discuss. Math. Graph Theory* 31, 273-281 (2011).
- [11] Galeana-Sánchez, H., Sánchez-López, R.: H-kernels in infinite digraphs. *Graphs Combin.* 29 (4), 913-920 (2013).
- [12] Galeana-Sánchez, H. Sánchez-López, R.: An extension of Richardson's theorem in m-colored digraphs. *Graphs Combin.* 31(4), 1029-1041 (2015).
- [13] Hahn, G., Ille P., Woodrow, R.: Absorbing sets in arc-coloured tournaments. *Discrete Math.* 283, 93-99 (2004).
- [14] Linek, V., Sands, B.: A note on paths in edge-colored tournaments. *Ars Combin.* 44, 225-228 (1996).
- [15] von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton (1944).
- [16] Neumann Lara, V.: Seminúcleos de una digráfica. *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México* 11, 55-62 (1971).
- [17] Reid, K.B.: Monotone reachability in arc-colored tournaments. *Congr. Numer.* 146, 131-141 (2000).

[18] Richardson, M.: Solutions of irreflexive relations. *Ann. Math.* 58 (2), 573 (1953).

[19] Sánchez-López, Rocío.: H- trayectorias y H-caminos en digráficas H-coloreadas. Tesis para optar por el grado de Doctora en Ciencias. México D.F., Universidad Nacional Autónoma de México, (2013), 159 pp.

[20] Sands, B., Sauer, N., Woodrow, R.: On monochromatic paths in edge coloured digraphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 33, 271-275 (1982).

[21] Włoch, I.: On imp-sets and kernels by monochromatic paths in duplication. *Ars Combin.*, 83, 93-99 (2007).

[22] Włoch, I.: On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs. *Cent. Eur. J. Math.*, 6(4), 537-542 (2008).