



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

“GUÍA DE ONDAS ELÁSTICAS CON PERFIL TRANSVERSAL EVANESCENTE”

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:
FIS. NÉSTOR JORGE MIGUEL COTZOMI GUERRERO

TUTOR
DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES
INSTITUTO DE FÍSICA

COMITÉ TUTOR
DR. CARLOS IGNACIO MENDOZA RUIZ
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES
DR. HÉCTOR DOMÍNGUEZ CASTRO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

MÉXICO, D.F. AGOSTO 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Este trabajo es la culminación de una etapa de mi vida el cual tiene sus cimientos más sólidos en el esfuerzo de mis padres... Muchas gracias Rocío y Silvano.

Agradezco al Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes por su dirección tesis, su atención, su comprensión y por su confianza depositada en mí para la realización de esta tesis así como el haberme permitido ser parte de su grupo de trabajo. Me llevo muchas enseñanzas de su parte así como su amistad.

A mis amigos Fernando, Zulema y Memo por su amistad y ayuda brindada en la maestría. Y también para aquellos que ya no los veo tan seguido pero que para mí siempre serán muy importantes.

Quiero agradecer al Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz y al Dr. Héctor Domínguez Castro por su importante apoyo durante mis estudios en el Posgrado de Ciencia e Ingeniería de Materiales.

Hago también extensivo el agradecimiento a los miembros del jurado Dr. Marcos Ley Koo, Dra. Catherine García Reimbert, Dr. Octavio Manero Brito y Dr. Pablo Orlando Rendón Garrido por haber asumido la importante tarea de la corrección y perfeccionamiento de este trabajo.

A CONACYT por el apoyo brindando durante el tiempo que estuve en el Posgrado de Ciencia e Ingeniería de Materiales y también a la DGAPA por el apoyo económico otorgado para la realización de este trabajo a través del proyecto "Procesos ópticos y electroreológicos en elastómeros" PAPIIT IN11012-3, dirigido por el Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes.

Y por último, a la mejor universidad que existe en México: la Universidad Nacional Autónoma de México.

¡¡MÉXICO, PUMAS, UNIVERSIDAD!!

Índice general

Resumen	IV
Introducción	V
1. Medios elásticos	1
1.1. Teoría de elasticidad	1
1.1.1. Componentes del tensor de deformación	3
1.1.2. Tensor de esfuerzos	5
1.1.3. La termodinámica de la deformación	7
1.1.4. Ley de Hooke	10
1.1.5. Deformaciones homogéneas	12
2. Propagación de una onda elástica a través de un medio deformable	14
2.1. Ecuaciones de movimiento	14
2.2. Reflexión de una onda plana en una frontera plana	15
2.3. Ondas armónicas	18
2.3.1. Modos de Mindlin	20
2.4. Ondas con solución real	23
3. Guía de ondas elásticas	26
3.1. Formulación de condiciones de frontera	26
3.2. Análisis de la guía de ondas elásticas para una guía de ondas elásticas con una placa distinta en su interior	30
3.2.1. Espectros de frecuencia longitudinales	31
3.2.2. Espectros de frecuencia transversales	34
3.2.2.1. Importancia de las propiedades mecánicas para la obtención de una velocidad de grupo negativa	37
3.3. Velocidad de fase y de grupo	40
3.3.1. Velocidad de fase de las ondas longitudinales	40
3.3.1.1. Velocidad de grupo	41
3.3.2. Velocidad de fase de las ondas transversales	42
3.3.2.1. Velocidad de grupo	44

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
4. Conclusiones	48
A. Guías de ondas elásticas	50
B. Velocidad de Grupo	53
B.1. Ondas Longitudinales	53
B.2. Ondas transversales	53
C. Guía de ondas elásticas de distintos materiales	55
C.1. Guía de ondas PVC-Acero	55
C.2. Guía de ondas de Oro-PEBD y viceversa	59
Bibliografía	66

Resumen

La habilidad para controlar la propagación de ondas es de mucho interés en varias áreas de la física. Se han propuesto la construcción de materiales que exhiben increíbles propiedades (índice de refracción negativo, invisibilidad, velocidad de grupo negativa o efecto Doppler inverso), que no son observables en un medio común, conocidos como “Metamateriales” los cuales han mostrado un gran potencial en muchas disciplinas de la ciencia y la tecnología. De hecho, el interés de estos materiales se debe a la capacidad de manipulación de la luz así como de ondas elásticas que no están disponibles en la naturaleza. Dispositivos importantes debido a su característica son las guías de ondas electromagnéticas/elásticas ya que son muy adecuadas para transmitir señales debido a sus pocas pérdidas energéticas debidas al proceso de propagación. Una guía de ondas es una estructura física la cual actúa como un contenedor que confina las ondas electromagnéticas/elásticas en un espacio cerrado para propagarlas por medio de reflexiones en sus paredes internas que son consideradas perfectamente conductoras o dieléctricas. En este trabajo proponemos una guía de ondas elásticas, que en su interior hay una placa delgada de diferente material al empleado en la guía, con propiedades elásticas (módulo de Young, densidad y coeficiente de Poisson) radicalmente distintas, la intención de esto es cambiar el perfil de las ondas transversales oscilantes a evanescentes con el objetivo de comprobar que la guía puede transmitir cualquier onda elástica que incida sobre ésta con una longitud de onda superior al ancho de la guía. Los resultados de este estudio muestran que la guía de ondas propuesta se comporta como una absorbente acústico pasa altos ya que puede propagar cualquier longitud de onda relacionada a ondas longitudinales largas. Además, existe un intervalo de frecuencias en donde la energía (velocidad de grupo transversal) se transmitiría en dirección opuesta a la velocidad de fase en la guía de ondas elásticas. A esta propiedad se le conoce como velocidad de grupo negativa. Por lo tanto, la guía de ondas elásticas tiene el comportamiento de un metamaterial elástico y sus aplicaciones son en filtros mecánicos, aislantes de sonido y vibración, recolectores de energía elástica, por mencionar algunos.

Introducción

Un medio continuo (según George Gabriel Stokes) es un cuerpo material macroscópico cuyas propiedades físicas están bien definidas en cada uno de los puntos materiales que lo constituyen[1], entonces podemos considerar a cualquier objeto material como un medio continuo teniendo en cuenta ciertos aspectos. Estos medios continuos pueden sufrir transformaciones como resultado de la acción de agentes físicos por lo que éstos también son llamados *cuerpos deformables*. Entonces se ha clasificado a estos cuerpos en sólidos y fluidos, donde podemos citar algunas acciones que suceden en tales cuerpos como la transmisión del sonido en el aire, la propagación de ondas en un estanque de agua, la transmisión de movimientos sísmicos en la tierra o la transmisión de ondas de radio. Dentro de la clase de los sólidos, se encuentran todos aquellos cuerpos deformables que exhiben la tendencia a recobrar espontáneamente su forma original una vez que ha cesado la causa que provocó su deformación[1], conocidos como sólidos elásticos. Cabe entonces preguntarse ¿qué es lo que nos interesa de sólidos elásticos? Son el tipo más simple de un sólido deformable que existe y como tal es posible que pueda transmitir y propagar estímulos, es decir, la energía puede viajar por este material y transmitirse a distancia.

La deformación de un cuerpo puede ser descrita a través del vector \mathbf{u} llamado vector de desplazamiento, donde nos representa el cambio en la dirección, sentido y magnitud de cada punto del material al ser sometido a la acción de agentes físicos.

Si se consideran pequeñas a todas las deformaciones de un sólido elástico entonces los movimientos tomados en cuenta en la teoría de la elasticidad son pequeñas *oscilaciones elásticas* u *ondas elásticas* (éstas deforman al medio en cual viajan). Esencialmente una onda elástica se puede entender como dos ondas propagándose independientemente, donde a una se le llama onda longitudinal porque se desplaza en la dirección de propagación y a la otra se le conoce como onda transversal, cada una con distinta velocidad[2].

Lo que nos interesa estudiar son aquellos medios que presentan características peculiares. Se han propuesto la construcción de materiales que exhiben increíbles propiedades electromagnéticas, ópticas y mecánicas que no son observables en un medio común pero que son útiles para el diseño de dispositivos, conocidos como “Metamateriales”. En recientes años, los metamateriales han mostrado un gran potencial en muchas disciplinas de la ciencia y la tecnología. De hecho, el interés de estos materiales se debe a la capacidad de manipulación de la luz así como de ondas sonoras que no están disponibles en la naturaleza. En los metamateriales las ondas electromagnéticas se propagan de manera antiparalela al vector de Poynting, dando origen a muchos fenómenos peculiares[3], tales como refracción negativa[4, 5, 6], un efecto

Doppler inverso[7, 8, 9, 10], superlentes[11, 12], barreras antisísmicas[13], etc. Las superlentes se usarían para diseñar microscopios de alta resolución que permitan observar hasta cadenas de ADN. De hecho, ya se han fabricado las primeras superlentes con una resolución de 40 nanómetros, mejorando notablemente las imágenes de las lentes convencionales[14]. Algo más que asemeja a la ciencia ficción en el caso de la aplicación de metamateriales es el fenómeno de invisibilidad[14], esto pasa debido a que el índice de refracción del material resulta que es negativo y ha sido empleado sobretodo en la industria armamentista. Los metamateriales acústicos/elásticos[15] ofrecen una gran cantidad de aplicaciones, como por ejemplo filtros mecánicos, aislantes de sonido y vibración[16], guía de ondas[17] y recolectores de energía, por mencionar algunos.

Dentro de estos ejemplos se han realizado una gran cantidad de estudios de materiales enfocados a la absorción de ondas acústicas debido a la formación de estructuras, como por ejemplo se han empleado estructuras híbridas los cuales están hechas de membranas resonantes (DMRs, por sus siglas en inglés) formando dispositivos que con la incidencia de un frente de onda es posible la absorción y transformación a energía eléctrica de éstas[18]. El estudio de este tipo de membranas se han elaborado detalladamente en[18, 19, 20]. En estos estudios, donde emplean a las distintas membranas, están enfocados en modificar la impedancia acústica del medio haciendo que sirva como ente de absorción de las señales. La impedancia está definida como la razón entre la presión eficaz promediada sobre la superficie y la velocidad de volumen efectiva a través de dicha superficie[21] y es útil para describir la respuesta de silenciadores de automóviles, los conductos de aire acondicionado y los elementos pasivos de instrumentos de viento[22], entre otros dispositivos. Pero modificar el comportamiento de la impedancia acústica no es tan sencillo como se podría uno imaginar, las complicaciones surgen al tratar de medir ésta debido a la aparición de resonancias y/o singularidades, es importante mencionar las distintas técnicas de medición para la impedancia tales como montajes utilizando una presión y un transductor de velocidad de volumen o montajes usando dos transductores de presión o empleando varios transductores[21]. Y todavía más, volviendo al ejemplo de la investigación realizada a través de membranas se puede obtener resonancias híbridas lo cual se logra con una celda unitaria formada de un DMR, de una superficie reflectante y una capa sellada delgada de gas (hexafluoruro de azufre, SF_6). El gas y la superficie reflectante añaden impedancia extra a la DMR cambiando así su condición de resonancia[18]. La fabricación de estructuras a partir de DMRs con resonancias híbridas permitiría transformar energía acústica a energía eléctrica[23, 24] o absorción total a frecuencias múltiples[25], entre otras.

En la sociedad varios problemas surgen por la contaminación sonora con la que lidiamos cada día. El ruido no tiene que ser excesivamente alto para afectar lugares de trabajo, escuelas, calles o en casas, puede interactuar con otros factores e incrementar los riesgos en la salud. Hay materiales que sirven como atenuadores del sonido, el más sencillo de éstos es el recubrimiento de las paredes por un material absorbente de un conducto. Entre los materiales absorbentes encontramos lana de vidrio o de mineral, espuma de resena de melamina o espuma de poliuretano, etc. He aquí un problema para mostrar las aplicaciones de los metamateriales acústicos, científicos de la Universidad de Ciencia y Tecnología de Hong Kong desarrollaron paneles, hechos de celdas en donde cada una tiene una membrana elástica sujeta con un plástico

relativamente rígido, que atenúan el sonido en el intervalo de frecuencias 50-1000 Hz[26].

Otros estudios realizados no sólo se basan en estructuras ideales, científicos del Instituto de Tecnología de Pekin han propuesto metamateriales elásticos anisótropos, en particular de uno hecho de núcleos cilíndricos pesados revestidos con una capa elíptica de caucho incluidos en una matriz, enfatizando que mediante la modificación geométrica de la estructura es posible ajustar la anisotropía de las propiedades elásticas del dispositivo, en este caso de la densidad de masa[27].

Existen otras investigaciones donde se utilizan los metamateriales acústicos para conseguir características específicas, como por ejemplo la utilización de metamateriales elásticos activos (AEM, por sus siglas en inglés) ya que estos pueden superar limitaciones de otros metamateriales. El Dr. Simon Pope, de la Universidad de Sheffield, ha trabajado con metamateriales de este tipo, donde muestra con la ayuda de AEMs tener un dispositivo que tiene una respuesta estable con una banda de frecuencia negativa doble[28]. Se dice doble negativa porque los parámetros de densidad de masa y el módulo de elasticidad tiene valores negativos por lo que una onda transmitiría energía (con una velocidad de grupo) en la dirección opuesta a su velocidad de fase. En términos generales, esto significa que el pico de los pulsos se propagan hacia atrás, es decir, que en lugar de ir sumando fase, tiene una disminución de ésta. Sin embargo, el principal obstáculo que se interpone en el desarrollo de los metamateriales no es de índole teórica, sino práctica: como se ha comentado anteriormente, en la actualidad no existen las técnicas de fabricación adecuadas para la síntesis de metamateriales con las características requeridas para determinadas aplicaciones.

Con los diferentes trabajos mencionados anteriormente nos llevaron a pensar en cómo sería posible obtener un medio el cual cumpla con las características de un metamaterial pero sin tener que involucrar la impedancia acústica, estructuras o procesos de fabricación complejos, ¿habría la posibilidad de tener un sistema más sencillo para el cual su análisis sea más fácil de desarrollar?. Partiendo de la idea de un cambio en la fase de un medio, en este sentido dos distintos componentes, puede generar a un metamaterial[29, 30, 31].

Un material importante debido a su característica son las guías de ondas electromagnéticas/elásticas ya que son muy adecuadas para transmitir señales debido a su pocas pérdidas y generalmente son de sección transversal rectangular, circular o elíptica, además de que operan en un rango de frecuencia mayor a 1Ghz (microondas) en donde otro tipo de medios conductores (cables paralelos y coaxiales) se vuelven inoperables. El sistema actúa como un contenedor que conduce las ondas en un espacio cerrado, los campos electromagnéticos se propagan a través de la guía de onda por medio de reflexiones en sus paredes internas, que son consideradas perfectamente conductoras[32]. También se realizan distintos dispositivos en guías de onda, como acopladores direccionales, filtros, circuladores, transmisores y receptores de ondas de radio y otros. Actualmente, son especialmente importantes las guías de ondas dieléctricas trabajando a frecuencias de la luz visible e infrarroja, habitualmente llamadas fibra óptica, útiles para transportar información de banda ancha, sustituyendo a los cables coaxiales y enlaces de microondas en las redes telefónicas y, en general, las redes de datos.

En este trabajo proponemos una guía de ondas elásticas, que en su interior hay una placa delgada de otro material, con propiedades elásticas (módulo de Young, densidad y coeficiente

de Poisson) radicalmente distintas, con el propósito de cambiar el perfil espacial de las ondas transversales de oscilatoria a exponencial decayente pero con la propiedad, aún con esta característica, de que se pueden propagar ondas elásticas de una longitud de onda mayor comparada con la anchura de la guía y presentar propiedades de un metamaterial como la de tener una velocidad de grupo con valor “negativo” [33, 34, 35, 36]. Para el estudio de dicho fenómeno el trabajo se estructura de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presenta la base teórica necesaria para estudiar a un medio continuo. En la primera parte del capítulo haremos una revisión de la física y de las matemáticas de la teoría la elasticidad que tienen como objetivo llegar a la expresión del tensor de deformación. Por otro lado, en el segundo se abordará el tema relativo a la propagación de ondas elásticas a través de un medio deformable con el enfoque realizado por el Dr. Raymond D. Mindlin debido a su análisis de la reflexión de pares de ondas [37]. En el tercer capítulo, en la primera mitad se desarrolla las condiciones de frontera para la guía de ondas elástica que hemos propuesto y, tomando en consideración el desarrollo hecho por R. D. Mindlin, se obtuvieron para medios arbitrarios las relaciones de dispersión para las ondas elásticas (longitudinal y transversal, respectivamente) que se propagan en este sistema propuesto. Con ello se muestra que existe un intervalo de frecuencias para el que el vector de energía (velocidad de grupo transversal) es negativo, es decir, que se propaga de manera antiparalela al vector de fase en la guía de ondas elásticas. En la última sección del capítulo presentamos las velocidades de fase y grupo para las ondas longitudinales y transversales, respectivamente, junto con las gráficas que se obtienen al introducir valores del módulo de Young, densidad y constante de Poisson del hierro (Acero) y del policloruro de vinilo (PVC). Finalmente, en el capítulo de conclusiones se enlistan los puntos relevantes de esta tesis, así como algunas reflexiones y posibles extensiones del trabajo presentado. En particular, los resultados de nuestro estudio nos permite proponer guías de ondas acústicos con propiedades análogas a las guías de metamateriales a partir de guía de ondas elásticas con técnica de fabricación menos complejas. Cabe señalar que el desarrollo de la investigación fue basada en analogía con varios capítulos de los libros [2, 37] porque su estudio abarca la mayoría del fenómeno de los medios deformables elásticos y de la propagación de ondas elásticas.

Capítulo 1

Medios elásticos

1.1. Teoría de elasticidad

Un cuerpo deformable ordinario puede estar bajo la acción de fuerzas externas (ej. gravitacional, inercial, eléctrica o magnética) y debido a éstas surgen esfuerzos dentro del cuerpo. Si las fuerzas externas que producen la deformación no excede un cierto límite, la deformación desaparece con la eliminación de las fuerzas[38]. Por lo cual el cuerpo regresa a su tamaño y forma original después de que las fuerzas han dejado de actuar[39], esta propiedad es conocida como *elasticidad*.

Antes de iniciar el estudio de las deformaciones de un cuerpo deformable supondremos por simplicidad que éste es un medio continuo, homogéneo e isótropo. Entonces podemos describir la deformación del cuerpo a través de la siguiente manera, tenemos que las partículas del cuerpo pasan de un primer estado (equilibrio) a un segundo estado por un *desplazamiento*, donde el segundo estado es descrito como un “estado deformado”[39], entonces la posición de cada punto del cuerpo está definido por el vector $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ (con $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) y cuando hay deformación el vector es $\mathbf{r}'(x'_1, x'_2, x'_3)$, por lo tanto la distancia que se desplazo un punto del cuerpo está dada por la siguiente relación

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}, \quad (1.1)$$

donde el vector \mathbf{u} es llamado vector de desplazamiento (véase Fig. 1.1). Como vemos el vector de desplazamiento está dado en función de las coordenadas x_i por lo que la deformación del cuerpo es completamente determinada. Cada punto de este material desplazado lo expresamos de la siguiente manera

$$x'_i = x_i + u_i, \quad (1.2)$$

para simplificar la notación usamos el lenguaje de los índices con $i = 1, 2, 3$. Si consideramos dos puntos muy cercanos en el cuerpo tenemos que el radio vector que los une es dx_i , por lo que el radio vector es de la forma

$$dx'_i = dx_i + du_i(x_1, x_2, x_3), \quad (1.3)$$

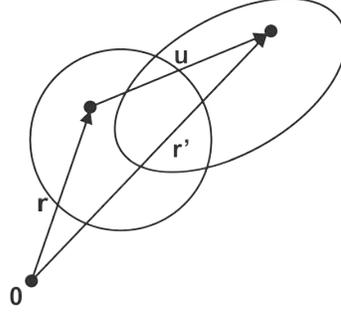


Figura 1.1: Al tomar en cuenta un punto del cuerpo éste cambia su posición debido a la aplicación de fuerzas externas.

o bien, aplicando la regla de la cadena llegamos a la expresión

$$dx'_i = \left| \delta_i^k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| dx_k, \quad (1.4)$$

los elementos dentro del valor absoluto implican el jacobiano de la transformación, la delta de Kronecker δ_i^k y la derivada parcial del vector de desplazamiento la cual representa los gradientes de éste donde son considerados pequeños comparados con la identidad, además de poder representarlo como

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \equiv \delta_i^k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}; \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

La distancia entre los puntos antes de la deformación se calcula mediante el teorema de Pitágoras $dl^2 = \delta^{ij} dx_i dx_j$, si el medio es sometido a fuerzas externas las distancias se ven afectadas y dicho cambio es representado como

$$dl'^2 = \delta^{kl} dx'_k dx'_l, \quad (1.6)$$

entonces si sustituimos la Ec.(1.4), la cual nos permite unir las diferenciales iniciales con las nuevas, en la Ec.(1.6) y con la agrupación de algunos términos obtenemos

$$dl'^2 = dl^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j + \delta^{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} dx_i dx_j, \quad (1.7)$$

como vemos la expresión para la distancia entre dos puntos para un cuerpo deformado implica tres términos donde el primero representa la distancia antes de la deformación, el segundo se muestra como la parte simétrica de los gradientes del vector de desplazamientos y el último es un término de segundo grado en los gradientes que puede ser despreciado puesto que estos mismos son aún más pequeños que los términos lineales[1], por lo tanto la relación lineal de la distancia en el cuerpo deformado es

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.8)$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.9)$$

donde u_{ij} es conocido como el tensor de deformación el cual es simétrico por construcción.

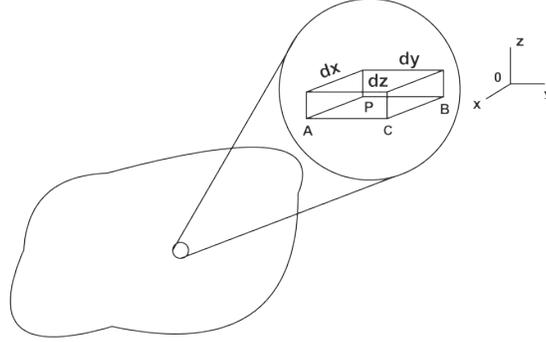


Figura 1.2: Una hipótesis importante para poder obtener una buena aproximación a un resultado confiable dentro del análisis de la deformación de medios es que éstos conservan sus propiedades físicas aún a escalas microscópicas.

1.1.1. Componentes del tensor de deformación

Veamos lo que significa la Ec.(1.9), el tensor de deformación es simétrico $u_{ij} = u_{ji}$ y como cualquier tensor simétrico y real éste puede ser diagonalizado. Esto quiere decir que, para cualquier punto dado, podemos escoger los ejes coordenados de tal manera que solo los componentes de la diagonal u_{11} , u_{22} y u_{33} del tensor u_{ij} sean distintos de cero[2]. Los desplazamientos pequeños de partículas de un cuerpo deformado serán resueltos a partir de las componentes u , v y w paralelos a los ejes coordenados x , y y z [38]. Sea un medio deformable (Fig. 1.2) del cual consideraremos un elemento diferencial $dx dy dz$. Tenemos que las componentes u , v y w representan el desplazamiento que sufre el punto P y además el desplazamiento de un punto A sobre el eje x está dado por

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (1.10)$$

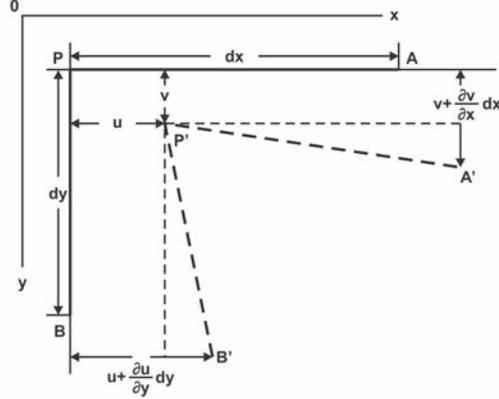
donde el aumento del elemento PA al ser alterado por la deformación es $\partial u / \partial x$, para los casos en las direcciones y y z tenemos las derivadas $\partial u / \partial y$ y $\partial u / \partial z$, respectivamente. Ahora consideremos que los puntos P , A y B se movieron en un cierto ángulo (Fig. 1.3), donde tomamos a u y v como los del punto P en las direcciones x y y . Además, el desplazamiento del punto A en la dirección x y del punto B en la dirección y están dados por $u + (\partial u / \partial y) dy$ y $v + (\partial v / \partial x) dx$, respectivamente, donde los términos $\partial u / \partial y$ y $\partial v / \partial x$ representan el cambio en el ángulo de los puntos con respecto a la posición original. Estos son conocidos como los *esfuerzos cortantes* entre los planos xz y yz , de la misma manera podemos determinar las deformaciones cortantes para los demás planos.

Ahora bien, la Ec.(1.8) es posible expresarla de otra forma haciendo uso del teorema de Pitágoras (sección 1.1)

$$dl'^2 = (\delta^{ij} + 2u_{ij}) dx_i dx_j, \quad (1.11)$$

si sustituimos los valores de $i, j = 1, 2, 3$ en la expresión anterior llegamos a

$$dl'^2 = (1 + 2u_{xx}) dx_1^2 + (1 + 2u_{yy}) dx_2^2 + (1 + 2u_{zz}) dx_3^2. \quad (1.12)$$


 Figura 1.3: Desplazamiento de los segmento PA y PB al aplicar una fuerza

En la Ec.(1.12) tenemos la suma de tres términos independientes, esto significa que la deformación en cualquier elemento de volumen puede ser considerada como deformaciones independientes en las direcciones perpendiculares, en este caso son los ejes principales del tensor de deformación[2]. Para entender mejor esto, tomemos un elemento diferencial de volumen dV de un cuerpo por lo que al deformar éste último tenemos que la nueva diferencial de volumen es dV' , la cual ésta vinculada con la diferencial original de la forma

$$dV' = JdV, \quad (1.13)$$

donde J representa el jacobiano de la transformación, dado por¹ $J = \frac{1}{3!} \delta_{abc} \frac{\partial x'_a}{\partial x_i} \frac{\partial x'_b}{\partial x_j} \frac{\partial x'_c}{\partial x_k}$, si sustituimos la Ec.(1.5), en la relación anterior la cual nos describe la deformación de un medio, entonces después de contraer los índices repetidos involucrados y de eliminar los terminos de orden superior al lineal se obtiene a primer orden

$$J = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_a} + \frac{\partial u_b}{\partial x_b} + \frac{\partial u_c}{\partial x_c} \right) = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (1.14)$$

Observemos la Ec.(1.14), de ésta se infiere que el término $\partial u_i / \partial x_i$ es la suma de los valores principales del tensor de deformación cuando $i = 1, 2, 3$, tal expresión es conocida como “traza”. Regresando a la Ec.(1.13), si sustituimos el valor del jacobiano encontrado (Ec.(1.14)) tenemos que el elemento diferencial de volumen, después de la deformación, cambia de acuerdo

$$T_r(\mathbf{u}) = u_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{dV' - dV}{dV}. \quad (1.15)$$

Por lo tanto, los cambios en el tamaño de un medio continuo pueden ser calculados por medio de la traza del tensor de deformación u_{ii} y las modificaciones de las formas de dicho medio son conocidas por medio de las componentes restantes.

¹Esta formula representa el determinante de cualquier matriz cuadrada de $N \times N$, en un espacio de dimensión N [1].

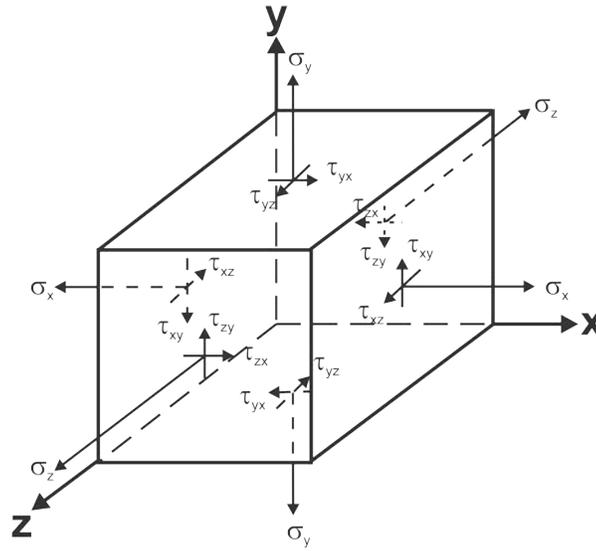


Figura 1.4: Porción de volumen de un cuerpo continuo sobre él actúa una fuerza, representada en las componentes del tensor de esfuerzos.

1.1.2. Tensor de esfuerzos

Cuando un cuerpo en equilibrio mecánico es sometido a fuerzas externas aparecen en su interior fuerzas internas que tienden a llevar al cuerpo a su estado de equilibrio. Estas fuerzas son llamadas *esfuerzos internos*, las cuales están relacionadas con las fuerzas de interacción entre las moléculas. La respuesta de un cuerpo a fuerzas externas es más sencillo estudiarla en dos categorías de fuerzas, *fuerzas volumétricas* y *fuerzas de superficie*. Las fuerzas volumétricas están asociadas a la masa del cuerpo y las fuerzas de superficie son el resultado del contacto físico entre dos cuerpos. Consideremos una fuerza aplicada a una porción de un cuerpo en tres dimensiones como se muestra en la Fig.(1.4), por lo que podemos suponer que tenemos las seis caras del cubo para definir las componentes del tensor de esfuerzos debido a la fuerza transmitida, entonces tenemos una matriz de 3×3 de la siguiente forma

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

σ_{ik} es conocido como el tensor de esfuerzos, los esfuerzos cortantes son denotados por el símbolo τ y los elementos de la diagonal σ son los esfuerzos normales al plano sobre el cual actúan.

Lo importante es encontrar los valores del tensor de esfuerzos en cada punto del cuerpo, tengamos en cuenta que los esfuerzos varían dependiendo del punto de un cuerpo que se esté analizando, pero consideremos el esfuerzo, distribuido de manera uniforme, en el centro de un elemento de volumen del cuerpo deformado (Fig. 1.5), representado como un vector aplicado al centro de cada cara de un elemento de volumen. Como solo usaremos las coordenadas x

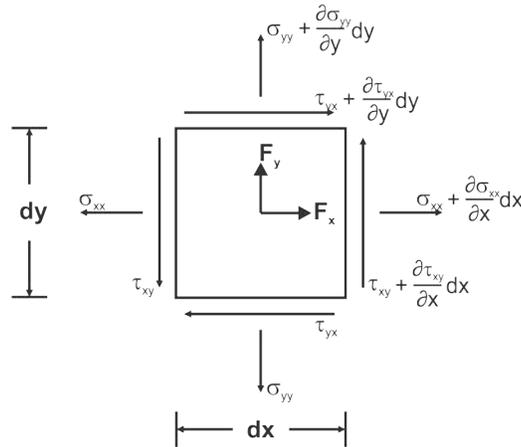


Figura 1.5: En esta imagen tenemos la cara de un elemento de cierto cuerpo que nos servirá para determinar las ecuaciones de equilibrio.

y y tenemos que suponer las siguientes condiciones: las componentes del tensor de esfuerzos correspondientes a la coordenada z son cero, las variables σ_x , σ_y , $\sigma_{xy} = \tau_{xy}$ y $\sigma_{yx} = \tau_{yx}$ son independientes de z , así como las fuerzas F_x y F_y . A estas condiciones se le conoce como *plano de esfuerzos* (Fig. 1.5). Debido a que el esfuerzo es uniforme en la cara del elemento entonces podemos decir que la suma de las fuerzas en el dirección x es igual a cero, entonces tenemos

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0. \quad (1.17)$$

De igual manera podemos encontrar la relación anterior para la dirección y o z según sea el caso. Es posible hacer una generalización de éstas ecuaciones considerando la parte de la coordenada z , por lo tanto la ecuación es

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + F_k = 0, \quad (1.18)$$

Esta ecuación (1.18), es conocida como la ecuación de equilibrio de un cuerpo las cuales nos permiten entender la variación de los esfuerzos de un punto a otro.

A continuación haremos un análisis parecido pero ahora partiendo de una porción del cuerpo. Consideremos un volumen finito, dV , de un medio continuo el cual está delimitado por una superficie cerrada, entonces las fuerzas aplicadas sobre éste las denotaremos como el vector de campo F_k , debemos tener en cuenta el esfuerzo sobre la superficie Γ de la porción el cual empleamos el siguiente término σ_{ik}^ι , donde ι representa un vector normal unitario hacia afuera de la superficie. Si la porción está en equilibrio entonces la suma de las fuerzas debe ser igual a cero, o bien

$$\int_V F_k dV + \int_\Gamma \sigma_{ik} \cdot \iota_i d\Gamma = 0. \quad (1.19)$$

donde ι_i es el vector normal a la superficie de área $d\Gamma$.

La Ec.(1.19) todavía podemos expresarla de diferente forma si al segundo término de la expresión le aplicamos el Teorema de Gauss[40], donde se transforman ambos términos en integrales de volumen que podemos juntar de un lado de la igualdad. Por tanto para que la integral de volumen resultante sea nula para cualquier volumen de control se debe cumplir que su integrando sea cero también, entonces llegamos a la ecuación de equilibrio de un cuerpo, Ec.(1.18), para un volumen finito. Si consideramos los momentos sobre la porción de cuerpo limitada por una superficie entonces tenemos el momento está definido por $M = F \times r$, donde r representa las coordenadas del punto donde se aplica la fuerza, por lo que el momento sobre la porción es la suma de los momentos generado por F_k así como el generado por los esfuerzos de superficie, entonces

$$M_i = \int_V \epsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_\Gamma \epsilon_{ijk} x_j \sigma'_{lk} d\Gamma = 0, \quad (1.20)$$

donde ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita², de esta manera el producto escalar lo pusimos en su representación indicial[40]. Con la ayuda del teorema de Gauss y desarrollando la divergencia de la expresión resultante obtenemos

$$M_i = \int \epsilon_{ijk} \left(x_j F_k + \sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV = 0. \quad (1.21)$$

Además de la Ec.(1.18) tenemos que $F_k = -\partial \sigma_{lk} / \partial x_l$, si sustituimos a F_k en la relación (1.21) nos queda que el momento de las fuerzas en la porción de un cuerpo continuo es

$$M_i = \int \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0, \quad (1.22)$$

y por tanto $\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$ lo cual es la contracción de dos tensores uno de los cuales es totalmente antisimétrico. Se sabe además que la contracción de dos tensores en donde uno es simétrico y el otro antisimétrico es siempre nula por lo que para que la ecuación anterior se satisfaga será necesario que σ_{jk} sea un tensor simétrico $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$.

1.1.3. La termodinámica de la deformación

Cuando deformamos un medio continuo este sufre un cambio en la energía interna del medio la cual podemos determinar a través de la primera ley de la termodinámica

$$dU = \delta Q - \delta W, \quad (1.23)$$

²La densidad tensorial de Levi-Civita para un determinante de matrices de 3×3 , se define como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} ; i, j, k = 1, 2, 3.$$

donde dU es variación de la energía interna del medio, δQ es calor que se transmite en el sistema, δW es el trabajo que realiza el sistema debido a las fuerzas externas. Además, debemos entender que el trabajo es la suma del trabajo realizado por las fuerzas volumétricas δW_V más el hecho por las fuerzas de superficie δW_Γ . Asimismo, tenemos que el trabajo efectuado por las fuerzas volumétricas para un elemento de volumen es $\delta W_V = F_i \cdot \delta u_i$ y la variación del trabajo debido a las fuerzas de superficie se obtiene por medio de la integral de $\delta W_\Gamma = (\sigma_{ik} \cdot \nu_i) \delta u_i$, por tanto el trabajo realizado por ambos tipos de fuerzas es

$$\int_V \delta W dV = \int_V F_i \cdot \delta u_i dV + \int_\Gamma (\sigma_{ik} \cdot \nu_i) \delta u_i d\Gamma, \quad (1.24)$$

aquí δu_i ($i = 1, 2, 3$) representa las variaciones infinitesimales en las componentes del vector de desplazamiento en cada punto del medio, si suponemos que el medio es infinito entonces no existe esfuerzo sobre una superficie muy lejana ($\sigma_{ik} = 0$), quedando la siguiente expresión

$$\int_V \delta W dV = \int_V F_i \cdot \delta u_i dV. \quad (1.25)$$

Por otro lado, de la Ec.(1.18) tenemos que $F_i = -\partial \sigma_{ik} / \partial x_k$, al sustituirla e integrando por partes obtenemos

$$\int_V \delta W dV = - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_k} dV \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (1.26)$$

Si en el segundo miembro invertimos el orden de las variaciones y las derivadas parciales entonces obtenemos las derivadas espaciales del vector de desplazamientos las cuales se pueden expresar en términos del tensor de deformaciones definido en la Ec.(1.9). Este tensor es el resultado de simetrizar el tensor derivada del vector de desplazamientos, por lo que aprovechando que tanto el tensor de deformaciones como el tensor de esfuerzos son ambos simétricos se obtiene lo siguiente

$$\int_V \delta W dV = - \int_V \sigma_{ik} \delta u_{ik} dV, \quad (1.27)$$

y por ende el trabajo infinitesimal por unidad de volumen está dado por

$$\delta W = -\sigma_{ik} du_{ik}. \quad (1.28)$$

Esta ecuación nos da el trabajo en términos del cambio del tensor de deformación. Es importante saber que si las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son muy pequeñas permiten que el cuerpo regrese a su estado de equilibrio (sin deformación), a este tipo de deformación se le conoce como “deformación elástica” si por el contrario la fuerza aplicada modifica al medio cuando éstas son retiradas tenemos una “deformación plástica”, porque aún cuando hemos retirado las fuerzas externas del cuerpo es posible decir que existen deformaciones residuales que no permiten al cuerpo regresar a su estado inicial.

Solo estudiaremos las deformaciones elásticas y suponiendo que la deformación ocurre muy lentamente que el cuerpo está en equilibrio termodinámico con el medio exterior en todo instante

entonces el proceso será termodinámicamente reversible[2]. Volviendo a la energía interna del medio continuo, suponemos que ocurre un proceso de deformación tal que para cada instante se mantiene el estado de equilibrio termodinámico del medio la primera ley de la termodinámica (Ec.(1.23)) nos dice que el calor está relacionado con la entropía del cuerpo según la segunda ley de la termodinámica a través de $dS = \delta Q/T$, para un proceso reversible, a partir de la Ec.(1.28) obtuvimos el trabajo realizado, entonces sustituyendo estas relaciones llegamos a

$$dU = TdS + \sigma_{ik}du_{ik}. \quad (1.29)$$

Introducimos la energía libre del cuerpo $F = U - TS$ donde U es la energía interna, S la entropía y T la temperatura, la diferencial de la energía libre es

$$dF = -SdT + \sigma_{ik}du_{ik}. \quad (1.30)$$

En este caso es importante hacer uso del potencial termodinámico G el cual toma en consideración los variables de la presión y del volumen, entonces la representación de éste es $G = F - pV$, el signo menos que afecta a las variables p y V es porque fuerzas externas comprimen al cuerpo, ya que estamos estudiando el caso de una compresión hidrostática, así que la diferencial de esta energía es

$$dG = -SdT - u_{ik}d\sigma_{ik}. \quad (1.31)$$

Las ecuaciones (1.29) y (1.30) nos permitirán determinar las componentes del tensor de esfuerzos σ_{ik} , por lo que

$$\sigma_{ik}du_{ik} = dU - TdS, \quad (1.32)$$

al principio mencionamos que solo nos enfocáramos en los procesos reversibles ya que estamos analizando el caso de un medio elástico que por definición conserva la energía que almacena y además supondremos que no hay disipación generada por algún otro mecanismo no mecánico entonces la entropía se mantiene constante³, al derivar la relación anterior tenemos que

$$\sigma_{ik} = -p \left(\frac{\partial V}{\partial u_{ik}} \right)_S - V \left(\frac{\partial p}{\partial u_{ik}} \right)_S, \quad (1.33)$$

la otra manera de determinar al tensor de esfuerzos sería de la relación $\sigma_{ik}du_{ik} = dF + SdT$, derivándola con respecto a u_{ik} y manteniendo a la temperatura constante llegamos a

$$\sigma_{ik} = -p \left(\frac{\partial V}{\partial u_{ik}} \right)_T - V \left(\frac{\partial p}{\partial u_{ik}} \right)_T, \quad (1.34)$$

por lo que

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial U}{\partial u_{ik}} \right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T, \quad (1.35)$$

que nos provee de las componentes del tensor de esfuerzos en términos de derivadas del tensor de deformaciones en procesos isotrópicos y procesos isotérmicos.

³Recordemos que dicho proceso no se ve afectado por fuerzas externas e internas manteniendo un equilibrio termodinámico donde las variables macroscópicas permanecen sin alteraciones

Si queremos complementariamente determinar los valores del tensor de deformación usamos el potencial termodinámico G para ello, entonces de la Ec.(1.31) despejamos a u_{ik} y derivamos con respecto de σ_{ik} y manteniendo a la temperatura constante

$$u_{ik} = - \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ik}} \right)_T. \quad (1.36)$$

Es decir, esta expresión nos permite encontrar la relación inversa a la Ec.(1.35) para procesos isotérmicos.

1.1.4. Ley de Hooke

En el caso más general la deformación de un medio continuo necesita ser descrita tanto por el tensor de deformaciones como por el tensor de esfuerzos, por lo que usaremos la energía libre F del cuerpo para encontrar la relación entre los tensores σ_{ik} y u_{ik} . Considerando a un cuerpo deformado, a temperatura constante, éste presenta un cambio en su energía libre la cual es representada por la Ec.(1.30) de ella es posible determinar las componentes del tensor de esfuerzos, es importante considerar que la energía F sea una función de u_{ik} *no lineal* ya que, si no fuera así ($F = au_{ik}$), significaría que al deformar al medio, $(\partial F / \partial u_{ik}) = a$, existiría una deformación residual (a) que no tiene lugar debido a que desde un principio hemos dicho que el medio es elástico. Como la temperatura no cambia durante el proceso la ecuación ahora es $dF = \sigma_{ik} du_{ik}$, entonces

$$F = \int \sigma_{ik} du_{ik} + F_0, \quad (1.37)$$

la energía es función de u_{ik} así que se pueden formar dos escalares independientes de segundo grado de la siguiente manera: un primer término es el cuadrado de la traza de u_{ik} y la suma de los cuadrados de todas las componentes de éste

$$F = \frac{\lambda}{2} (u_{ii})^2 + \mu (u_{ik})^2, \quad (1.38)$$

está es la expresión general para la energía libre de un cuerpo isotrópico deformado, se usaron estos dos términos independientes porque son invariantes ante rotaciones. No se tomó en cuenta términos de mayor grado porque la deformación del cuerpo es muy pequeña. λ y μ son dos constantes elásticas que caracterizan por completo el comportamiento elástico de un sólido isotrópico para pequeñas deformaciones conocidas como los *coeficientes de Lamé*. Cuando se aplican fuerzas sobre un medio, si no hay cambio en el volumen del cuerpo sólo se ve modificada su forma, a esta deformación se le conoce como *cizalladura pura*, por otro lado, si el medio cambia su volumen al sufrir una deformación a este proceso se le conoce como *compresión hidrostática*. Para continuar con el análisis separaremos del tensor de deformaciones su traza que como ya hemos comentado cuantifica las deformaciones que conllevan cambios de volumen isotrópicos. De esta forma si escribimos

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}, \quad (1.39)$$

entonces los términos entre paréntesis corresponden a un tensor sin traza y por tanto representa una cizalladura y el segundo a una compresión hidrostática puesto que su acción es isotrópica. Sustituyendo los términos mencionados anteriormente de la Ec.(1.39) en la Ec.(1.38) obtenemos que

$$F = \frac{\lambda}{2} \left((u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right)^2 + \mu \left((u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right)^2, \quad (1.40)$$

entonces desarrollando los binomios obtenemos un término relacionado a la compresión hidrostática y si, además, tomamos en cuenta que los índices repetidos son mudos se llega a

$$F = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right)^2 + \frac{1}{2}Ku_{ll}^2, \quad (1.41)$$

en donde utilizamos las propiedades de la delta de Kronecker $\delta_{lm}\delta_{lm} = \delta_{ll} = 3$ y $\delta_{lm}u_{lm} = u_{ll}$. Aquí $K = \lambda + (2/3)\mu$ la cual es conocida como el *módulo de compresibilidad (compresión hidrostática)*, así como μ que es llamado el *módulo de cizalladura o rigidez*. Es importante comentar que K y μ son positivos debido a que en el equilibrio termodinámico, como no actúan fuerzas sobre el cuerpo la Ec.(1.41) debe tener un mínimo cuando $u_{ik} = 0$, ya que en este caso el sólido no está deformado y en consecuencia no almacena energía elástica. Por tanto las constantes que multiplican a los términos de la Ec.(1.41) deben ser mayores a cero.

El propósito de lo realizado anteriormente fue para encontrar la relación entre σ_{ik} y u_{ik} que se conoce comúnmente como ecuación constitutiva del material involucrado y ésta se obtiene derivando la energía libre del cuerpo

$$dF = 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) du_{ik} + Ku_{ll}du_{ll}, \quad (1.42)$$

si expresamos la traza como $u_{ll} = \delta_{ik}u_{ik}$ entonces su derivada sería $du_{ll} = \delta_{ik}du_{ik}$ entonces sustituyendo la derivada en la Ec.(1.42) y derivando el resto de los términos se llega a el tensor de esfuerzos para un cuerpo isótropo y homogéneo

$$\sigma_{ik} = 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) + K\delta_{ik}u_{ll}. \quad (1.43)$$

Es posible determinar la expresión del tensor de deformación en función del tensor de esfuerzos solo tomando la suma de los elementos de la diagonal de la Ec.(1.43), entonces tenemos que $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$ así que $u_{ii} = \sigma_{ii}/3K$ y sustituyéndola en la Ec.(1.43) y despejando a u_{ik} llegamos al siguiente resultado

$$u_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll} \right). \quad (1.44)$$

Esto nos permite observar que el tensor de deformaciones es una función lineal del tensor de esfuerzos, que solo involucra dos constantes materiales K y μ , la cual se conoce como la *Ley de Hooke*. [2]

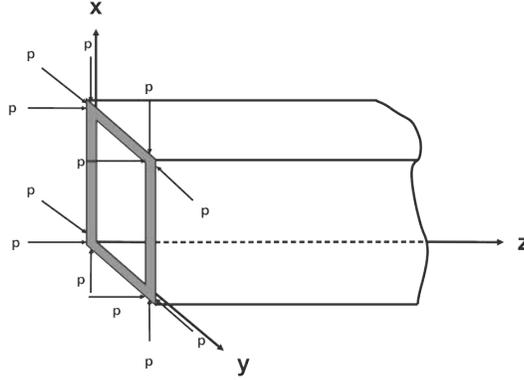


Figura 1.6: Varilla sujeta a presión en sus extremos de manera que se comprime en dirección del eje z , sus caras laterales no sufren deformación por tal motivo solo existe compresión unilateral.

1.1.5. Deformaciones homogéneas

Las deformaciones homogéneas son definidas como aquellas en las que el gradiente de deformación es constante para todas las partículas del cuerpo, es decir, todas las medidas de deformación son iguales para todos los puntos del cuerpo. Para entender la manera en que se presenta esta deformación veamos un ejemplo sencillo, sea una varilla a la cual se le aplican fuerzas en los extremos de ésta (Fig. 1.6), donde p representa la fuerza que actúa por unidad de área. No existe fuerza aplicada sobre la superficie de la varilla por lo que $\sigma_{ik}n_k = 0$.⁴

Si sólo vemos el caso para el eje z tenemos que la fuerza aplicada existe para $\sigma_{zz} = p$ ya que para los otros ejes el vector n_k es perpendicular al eje. Lo primero que haremos es determinar las componentes de la Ec.(1.44)

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) p. \quad (1.45)$$

La componente u_{zz} esta relacionada con el cambio de la longitud de la varilla y puede ser expresada de la siguiente forma

$$u_{zz} = \frac{p}{E}, \quad (1.46)$$

donde E es el *módulo de Young*. Éste es una constante elástica que caracteriza el comportamiento de una material la cual puede determinarse experimentalmente mediante la realización de un ensayo de tracción uniaxial y registrando los valores simultáneos de estrés y la deformación en el espécimen. En términos de módulo de compresibilidad y de cizalladura, el módulo de Young está representado como

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}. \quad (1.47)$$

⁴Las fuerzas externas aplicadas sobre la superficie de un cuerpo aparecen de las condiciones de contorno de las ecuaciones de equilibrio, donde $\sigma_{ik}n_k = P_i$ que debe satisfacerse en cada punto de la superficie de un cuerpo en equilibrio.[2]

Las componentes u_{xx} y u_{yy} representan las contracciones relativas transversales de la varilla, por lo que definimos al *coeficiente de Poisson* σ como menos el cociente entre la deformación transversal y la deformación longitudinal, es decir

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \quad (1.48)$$

luego entonces, después de sustituir las deformaciones obtenidas en la Ec.(1.45) el coeficiente de Poisson se expresa en términos de las constantes K y μ como

$$\sigma = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}. \quad (1.49)$$

Como comentamos anteriormente K y μ siempre son positivos, entonces si $K = 0 \Rightarrow \sigma = -1$ o si $\mu = 0 \Rightarrow \sigma = 1/2$, por tanto el valor de σ está limitado termodinámicamente al intervalo

$$-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}. \quad (1.50)$$

El valor de las deformaciones u_{xz} , u_{xy} y u_{yz} es cero debido a que el vector unitario n porque es perpendicular al eje z . Las ecuaciones (1.47) y (1.49) nos proporcionan el módulo de Young y del coeficiente de Poisson en términos de las constantes de compresibilidad y de cizalladura y es conveniente calcular sus relaciones inversas las cuales están dadas por

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \text{ y } \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (1.51)$$

Con todo lo anterior, el tensor de esfuerzos (Ec.(1.43)) y el tensor de deformaciones (Ec.(1.44)) también quedan expresados a partir del módulo de Young (E), la densidad (ρ) y el coeficiente de Poisson (σ). Consideremos de nuevo el sistema de la varilla sólida del ejemplo anterior pero ahora los costados de la varilla se restringen de tal forma que sus dimensiones permanecen fijas, es decir, $u_{xx} = 0$ y $u_{yy} = 0$. Si se aplica nuevamente fuerzas en los extremos a lo largo de la dirección z de la varilla. Ahora el tensor de esfuerzos tiene las siguientes componentes transversales

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{xx} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \delta_{xx} u_{zz} \right), \quad (1.52)$$

y la componente longitudinal

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}. \quad (1.53)$$

Por otro lado, la única componente del tensor de deformaciones distinta de cero es u_{zz} cuya expresión explícita es

$$u_{zz} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} p, \quad (1.54)$$

Esto nos lleva a lo siguiente tomemos a $\sigma_{zz} = p$ por consiguiente las tensiones transversales son

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma}{1-\sigma} p. \quad (1.55)$$

Como podemos ver en este caso la deformación de la barra ocurre solamente a lo largo del eje z y es por ende mayor que en el caso anterior cuando los costados permanecían libres. Esta deformación con sección transversal constreñida a permanecer fija está caracterizada por el módulo que resulta de dividir u_{zz} entre p y como se puede ver supera al módulo de Young.

Capítulo 2

Propagación de una onda elástica a través de un medio deformable

2.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento de Newton para un medio elástico se obtienen de igualar las deformaciones internas $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ con el producto de la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}_i$ y la masa por unidad de volumen (ρ)

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (2.1)$$

por lo que las ecuaciones de movimiento para un medio isótropo pueden escribirse en analogía con las ecuaciones de equilibrio

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mu\nabla^2\mathbf{u} + \left(K + \frac{\mu}{3}\right)\mathbf{grad}\,\text{div}\,\mathbf{u}, \quad (2.2)$$

si además definimos $c_l = \sqrt{\frac{3K+4\mu}{3\rho}}$ y $c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ como las velocidades de propagación *longitudinal* y *transversal*, respectivamente, entonces en términos de estas cantidades tenemos una ecuación más simple

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_l^2\nabla^2\mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2)\mathbf{grad}\,\text{div}\,\mathbf{u}, \quad (2.3)$$

en donde suponemos que la onda elástica plana viaja en un medio isótropo, entonces la deformación \mathbf{u} podemos representarla como la suma de dos ondas propagándose con diferentes velocidades[2]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (2.4)$$

en donde se debe cumplir que

$$\text{div}\,\mathbf{u}_t = 0 \text{ y } \mathbf{curl}\,\mathbf{u}_l = 0. \quad (2.5)$$

Esto quiere decir que \mathbf{u}_t no tiene relación con deformaciones que implique cambios en el volumen sólo toma en cuenta deformaciones transversales a la dirección de la onda. En el caso $\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_l = 0$ implica que la propagación es a lo largo de la misma dirección ya que aparece

compresiones y extensiones de volumen, como se puede ver claramente si se hace un desarrollo en ondas planas.

Si sustituimos la ecuación (2.4) en (2.3) obtenemos

$$\ddot{\mathbf{u}}_l + \ddot{\mathbf{u}}_t = c_t^2 \nabla^2 (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_l, \quad (2.6)$$

al aplicar la divergencia en ambos lados de la igualdad, sucede que

$$\operatorname{div} (\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \nabla^2 \mathbf{u}_l) = 0. \quad (2.7)$$

La divergencia de una cantidad es nula siempre que la cantidad en su interior provenga del rotacional de un vector. Es decir se pueda expresar en términos de un potencial vectorial sin embargo \mathbf{u}_l corresponde solo a campos escalares que se pueden obtener a partir de un potencial escalar según se puede inferir de la Ec.(2.5). De esta manera podemos excluir dichas contribuciones para la ecuación de \mathbf{u}_l y se llega a

$$\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \nabla^2 \mathbf{u}_l = 0. \quad (2.8)$$

La última ecuación (2.8) es la ecuación de onda vectorial que describe la propagación de una onda longitudinal a través de un medio elástico, si aplicamos el rotacional a la Ec.(2.6) obtendremos otra ecuación de onda relacionada a las ondas transversales, por lo que

$$\mathbf{curl} (\ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \nabla^2 \mathbf{u}_t) = 0. \quad (2.9)$$

Es bien conocido de teoría de potenciales que el rotacional de una cantidad es nula cuando se aplica sobre el gradiente de un escalar pero el gradiente de un escalar describe solamente a ondas longitudinales según se puede deducir de la Ec.(2.5)[41]. En consecuencia dicho término no debe de considerarse para describir la propagación de ondas transversales y obtenemos

$$\ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \nabla^2 \mathbf{u}_t = 0, \quad (2.10)$$

que complementariamente nos proporciona la ecuación dinámica para la onda transversal.

2.2. Reflexión de una onda plana en una frontera plana

Para continuar con la explicación de la propagación de una onda elástica a través de un medio continuo debemos tomar en consideración el hecho de que una onda elástica está conformada por una onda longitudinal y una transversal, si sólo hicieramos uso de alguna de éstas el análisis queda incompleto, este tratamiento lo aclararemos a continuación haciendo un proceso analítico semejante al realizado en el libro de Sommerfeld de cuerpos deformables[42]. Si consideramos una onda plana transversal que incide sobre la pared de un guía de ondas, la cual forma un ángulo β con el eje z y es polarizada en el eje x , Fig. 2.1, por lo que las componentes del vector de desplazamiento $\mathbf{u} = (u, v, w)$ diferentes de cero son u y w . Tal onda, en notación compleja, está dada de la siguiente manera[42]

$$(u_i, 0, w_i) = A (\cos \beta, 0, \sin \beta) e^{ik(x \sin \beta - z \cos \beta)} e^{-i\omega t}, \quad (2.11)$$

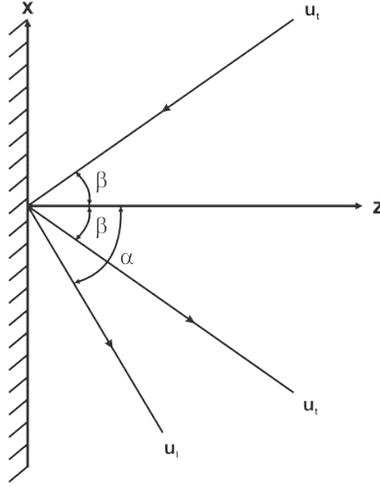


Figura 2.1: Al incidir una onda transversal plana sobre la superficie de un cuerpo rodeado de vacío se generan dos ondas planas, una onda transversal y una longitudinal, en la reflexión de está debido a la continuidad de la fase. Dado que la onda incidente es de la forma $\mathbf{u}_t = A_i \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, la onda reflejada es $\mathbf{u}_t = A_r \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ y la onda transmitida es $\mathbf{u}_t = A_t \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ por lo que en $z = 0$ es $A_i \exp[-i\omega t] + A_r \exp[-i\omega t] = A_t \exp[-i\omega t]$ para que esto se cumpla la fase debe ser continua en la interfase, lo cual se puede escribir como una ley de Snell entre los ángulos involucrados.

donde el sufijo i se refiere a la onda incidente y k es el número de onda, los planos de la fase constante ($x \sin \beta - z \cos \beta = \text{const}$) son normales a la dirección de propagación definidos por el ángulo β . Además, dado que estamos en el caso de una onda plana transversal incidente la ecuación que usamos es la Ec.(2.10) (sección 2.1), de modo que las ecuaciones diferenciales para el caso de la onda transversal plana son de una forma simple¹

$$\frac{\partial^2(u, 0, w)}{\partial t^2} = c_t^2 \nabla^2(u, 0, w), \quad (2.12)$$

con la velocidad de propagación como la razón entre la frecuencia y el número de onda $c_t^2 = \omega^2/k^2$, la relación (2.11) no satisface por completo las condiciones de frontera² que para este caso son $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ en $z = 0$ debido a que la frontera plana del medio no está sujeta a fuerzas. Para poder hacer que se cumplan las condiciones de frontera es necesario realizar la superposición de una onda transversal reflejada, con elementos u_r y w_r , como

$$(u_r, 0, w_r) = B(\cos \beta, 0, -\sin \beta) e^{ik(x \sin \beta + z \cos \beta)} e^{-i\omega t}, \quad (2.13)$$

por lo que la combinación de una onda incidente (Ec.(2.11)) junto con una onda reflejada (Ec.(2.13)), para ondas longitudinales y transversales, es

$$u = u_i + u_r, \quad w = w_i + w_r, \quad (2.14)$$

¹La divergencia de \mathbf{u} es cero por como se definió las componentes u_i y w_i

²Es importante tener en cuenta que los valores del número de onda y del ángulo de incidencia debe ser iguales tanto u_i como para w_i .

aplicando las condiciones a las relaciones anteriores tenemos lo siguiente, partiendo de la Ec.(1.43)

$$\sigma_{zz} = -2\mu(A + B) ik \cos \beta \sin \beta e^{ikx \sin \beta} = 0, \quad (2.15)$$

para $z = 0$. Ahora para σ_{zx} obtenemos lo siguiente

$$\sigma_{zx} = -\mu(A - B) ik (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) e^{ikx \sin \beta} = 0. \quad (2.16)$$

La última condición σ_{zy} se cumple ya que la divergencia de \mathbf{u} es igual a cero. Para que se cumplan las condiciones (2.15) y (2.16) es necesario que $A = -B$ y $A = B$ lo cual es una contradicción, si suponemos que el ángulo de incidencia es distinto al reflejado esto se vuelve peor de lo que tenemos pues introduciría una infinidad de condiciones contradictorias en lugar de dos, una diferente para cada valor x [42]. La única forma de solucionar esto sería pensar que al reflejarse la onda transversal genera dos ondas planas una transversal y otra longitudinal. Esta onda plana longitudinal es, en cierto modo, análoga a la transversal con k_l el número de onda para la onda longitudinal y α el ángulo de reflexión de ésta onda

$$(u_l, 0, w_l) = C (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) e^{ik_l(x \sin \alpha + z \cos \alpha)} e^{-i\omega t}. \quad (2.17)$$

Ya que trataremos a las ondas planas longitudinales es necesario analizarla la Ec.(2.8) donde $c_l^2 = \omega^2/k_l^2$ la cual representa la velocidad de propagación de una onda longitudinal (sección 2.1), ω es la misma para las tres ondas planas, de la razón entre las velocidades de propagación transversal y longitudinal definimos una variable adimensional $n = k_l/k = \sqrt{3\mu/(3K + 4\mu)}$ y con ángulos distintos $\alpha \neq \beta$, de hecho la onda longitudinal reflejada obedece a la ley de Snell $\sin \beta = n \sin \alpha$, porque la fase al pasar de un medio a otro permanece constante. Lo que vamos a hacer es primero calcular la divergencia para la onda longitudinal plana representada por la traza, entonces de la relación (2.17) obtenemos

$$u_l|_{z=0} = ik_l C e^{ik_l x \sin \alpha}. \quad (2.18)$$

Lo que haremos es determinar las condiciones de frontera a partir de las relaciones $u = u_i + u_r + u_l$ y $w = w_i + w_r + w_l$ comenzando por σ_{zz} , entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & -2\mu (Ae^{-ikz \cos \beta} + Be^{ikz \cos \beta}) ik \cos \beta \sin \beta e^{ikx \sin \beta} e^{-i\omega t} \\ & + (K - \frac{2}{3}\mu) ik_l \cos \beta \sin \beta C e^{ik_l z \cos \alpha} e^{ik_l x \sin \alpha} e^{-i\omega t} \\ & + 2\mu ik_l C \cos^2 \alpha e^{ik_l z \cos \alpha} e^{ik_l x \sin \alpha} e^{-i\omega t} = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

y para σ_{zx} tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} = & \mu (Ae^{-ikz \cos \beta} - Be^{ikz \cos \beta}) ik \sin^2 \beta e^{ikx \sin \beta} e^{-i\omega t} \\ & - \mu (Ae^{-ikz \cos \beta} - Be^{ikz \cos \beta}) ik \cos^2 \beta e^{ikx \sin \beta} e^{-i\omega t} \\ & + 2\mu ik_l \cos \alpha \sin \alpha C e^{ik_l z \cos \alpha} e^{ik_l x \sin \alpha} e^{-i\omega t} = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

en este caso es necesario que se cumpla la ley de refracción ya que ésta nos permitirá dar una solución al problema de la reflexión de una onda transversal plana. Y esto es sólo posible en el

caso de que las funciones exponenciales de x sean iguales. Al tomar $z = 0$ conseguimos reducir las expresiones (2.19) y (2.20) a

$$-2\mu k(A+B)\cos\beta\sin\beta + (2\mu\cos^2\alpha + K - \frac{2}{3}\mu)k_l C = 0, \quad (2.21)$$

$$-\mu k(A-B)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\mu k_l C \cos\alpha \sin\alpha = 0. \quad (2.22)$$

Dar solución a este sistema de ecuaciones nos permitiría analizar la reflexión de una onda transversal plana polarizada en el plano de incidencia, por tanto la única forma de solucionar este caso se debe tomar las fracciones de B/A y C/A porque la amplitud A es la que da origen a las otras dos, B y C . Para resolver el sistema de ecuaciones (Ec.(2.21) y Ec.(2.22)) lo que haremos es despejar a la amplitud C de la Ec.(2.22) con la intención de determinar la razón B/A , en primera instancia, sustituyendo la amplitud en la Ec.(2.21), además con la ayuda de la ley de Snell y algunas identidades trigonométricas obtenemos que

$$\frac{B}{A} = \frac{\cos^2 2\beta - n^2 \sin 2\beta \sin 2\alpha}{\cos^2 2\beta + n^2 \sin 2\beta \sin 2\alpha}, \quad (2.23)$$

donde $n = k_l/k$. Por último, solo dividimos la Ec.(2.22) entre A para calcular la razón C/A y con la sustitución de B/A , resulta que

$$\frac{C}{A} = \frac{n \sin 4\beta}{\cos^2 2\beta + n^2 \sin 2\beta \sin 2\alpha}. \quad (2.24)$$

Por lo tanto, en un proceso de reflexión de una onda transversal plana polarizada una onda longitudinal plana es generada en dicho proceso además de una onda transversal plana polarizada en el plano de incidencia, lo cual resuelve el problema de la reflexión de una onda transversal polarizada en el plano de incidencia[42].

2.3. Ondas armónicas

Como acabamos de mostrar una onda elástica está compuesta de dos ondas, conocidas como longitudinal y transversal, las cuales en presencia de fronteras tienden a propagarse de forma simultánea, Fig. 2.2 (sección 2.2). Cuando una de estas incide sobre una interface entre dos medios se genera una onda longitudinal y también una onda transversal[37] por lo que al querer empezar el estudio sobre la propagación de las ondas es necesario tomar en cuenta ambas para analizar de manera satisfactoria este fenómeno. Una manera de tratar, matemáticamente, la propagación de las ondas elásticas en un medio isotrópico fue propuesta por el físico francés Gabriel Lamé donde propuso que el vector de desplazamientos que da solución a la ecuación de movimiento (2.2) puede ser escrito como la suma de la divergencia de un potencial escalar φ y el rotacional de un potencial vectorial ψ de la siguiente forma

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \psi. \quad (2.25)$$

Ésta es una expresión parecida a la Ec.(2.4) donde se cumple que el rotacional de la divergencia del potencial escalar y la divergencia del rotacional del potencial vectorial son iguales a cero (Ec.(2.5)).

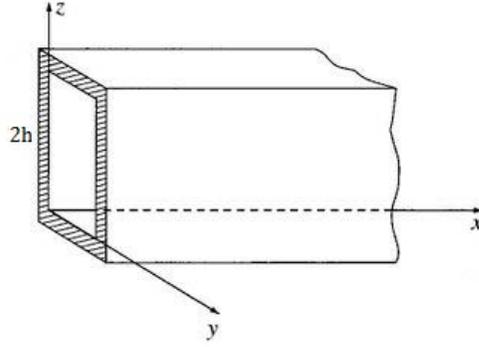


Figura 2.2: Guía de ondas de forma rectangular donde la propagación de las ondas elásticas es en la dirección x

Veamos el caso de la propagación de ondas elásticas a través de un medio, considerando solo al plano xz , entonces el potencial escalar φ está definido para las coordenadas x y z , por otro lado para que ψ sea perpendicular a la dirección de propagación se necesita que éste en la dirección y , con lo mencionado anteriormente se determinó el vector de desplazamientos como

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (2.26)$$

Ya conocemos el valor de las componentes del vector de desplazamiento \mathbf{u} de la Ec.(2.26) entonces calculamos a continuación la expresión explícita de los elementos del tensor de elongaciones (Ec.(1.9))

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \quad u_{zz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}, \quad u_{zx} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (2.27)$$

además la traza del tensor de deformaciones, en la representación de los potenciales escalar y vectorial, es

$$u_{ll} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (2.28)$$

Con estos valores de u_{ik} y u_{ll} es posible obtener los valores del tensor de esfuerzos, por lo que al sustituir estas ecuaciones (2.27 y 2.28) en la Ec.(1.43) obtenemos

$$\sigma_{xx} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + \left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \quad (2.29)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right) + \left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \quad (2.30)$$

$$\sigma_{zx} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \quad (2.31)$$

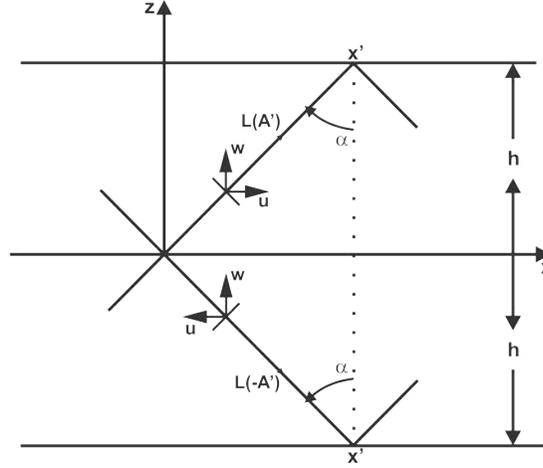


Figura 2.3: Dos placas elásticas infinitas juntas forman una guía de ondas donde tanto ondas longitudinales como ondas transversales se reflejan de la frontera a la frontera vecina, propagándose a lo largo de la dirección x . En el esquema se muestra el caso de ondas longitudinales simétricas y antisimétricas.

2.3.1. Modos de Mindlin

Ahora consideremos el caso de la propagación de las dos ondas, de igual amplitud y signo pero moviéndose en diferentes direcciones dentro de una guía de ondas elásticas formada por dos placas elásticas infinitas (Fig. 2.3) tales que satisfacen la ley de Snell. La suma de las ondas longitudinales está dada por la representación[37] siguiente

$$\varphi = A'e^{i\kappa_l(\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot z - c_l t)} + A'e^{i\kappa_l(\sin\alpha \cdot x - \cos\alpha \cdot z - c_l t)}, \quad (2.32)$$

y que después de hacer los cálculos necesarios es posible reducir a

$$\varphi = 2A'e^{i\kappa_l(x - ct)} \cos \eta_l z, \quad (2.33)$$

donde las variables $\kappa = \kappa_l \sin \alpha$, $c = c_l / \sin \alpha$ y $\omega = \kappa c$ representan el número de onda, la velocidad de fase de la onda y la frecuencia, respectivamente. Tenemos que η_l es el número de onda en la dirección z la cual se puede escribir en términos de la frecuencia ω , el número de onda κ y la velocidad de propagación c_l , es decir

$$\eta_l = (\kappa_l^2 - \kappa^2)^{1/2} = (-\kappa^2 + \omega^2/c_l^2)^{1/2}. \quad (2.34)$$

Aquí la Ec.(2.33) representa la parte simétrica de la onda longitudinal con respecto a la mitad del plano (Fig. 2.3), además es posible construir la parte antisimétrica de φ con solo cambiar el signo de la segunda onda[37] de la Ec(2.32) obteniendo

$$\varphi = 2A'ie^{i\kappa_l(x - ct)} \sin \eta_l z. \quad (2.35)$$

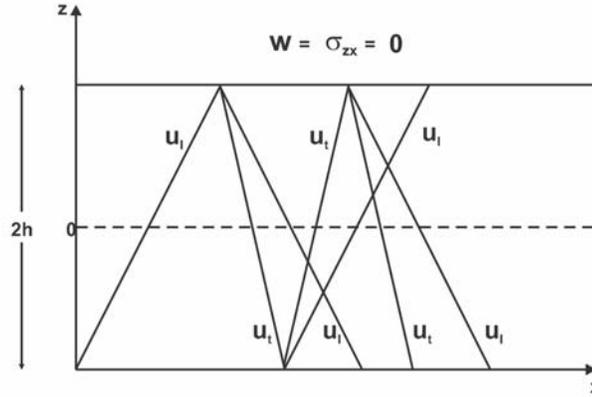


Figura 2.4: El esquema representa a una guía de ondas elásticas la cual se encuentra en el vacío por tal motivo suponemos que no existen pérdida de energía cuando sucede reflexión de las ondas longitudinales y transversales en el interior de la guía de ondas. Al incidir una de estas ondas sobre las paredes refleja una onda longitudinal y otra transversal, ésta es una característica de las ondas elásticas sobre un medio deformable.

Es posible representar las partes simétricas y antisimétricas en una ecuación de manera conjunta tanto para las ondas longitudinales como para las transversales, de la manera que propuso Mindlin[37], como

$$\varphi = f(z)e^{i\kappa(x-ct)}, \quad \psi = g(z)e^{i\kappa(x-ct)}, \quad (2.36)$$

donde $f(z) = A \sin \eta_t z + B \cos \eta_t z$ y $g(z) = C \sin \eta_t z + D \cos \eta_t z$ que contienen las partes simétricas y antisimétricas de las ondas incidentes. También para las ondas transversales tenemos que el número de onda es $\kappa = \kappa_t \sin \beta$, la velocidad de fase de la onda es $c = c_t / \sin \beta$ y el número de onda en la dirección z es

$$\eta_t = (\kappa_t^2 - \kappa^2)^{1/2} = (-\kappa^2 + \omega^2/c_t^2)^{1/2}. \quad (2.37)$$

A partir del formalismo expresado anteriormente es posible determinar las componentes u y w del vector de desplazamiento con la sustitución de las ecuaciones (2.36), entonces se tiene que

$$u = [i\kappa f(z) - g'(z)] e^{i\kappa(x-ct)}, \quad w = [f'(z) + i\kappa g'(z)] e^{i\kappa(x-ct)}. \quad (2.38)$$

Lo único que falta son los valores del tensor de deformación y con ellos tendremos la descripción de la propagación de ondas longitudinales y transversales a través de una placa infinita elástica, veáse Fig. 2.4. Por tanto, sustituimos φ y ψ en las ecuaciones (2.29), (2.30) y (2.31) se establece todas las componentes del tensor de esfuerzos, en donde la componente que da información de los esfuerzos internos debido a la propagación de las ondas elásticas es σ_{zx} con lo que obtenemos

$$\sigma_{zx} = \mu (2i\kappa f'(z) + (-\kappa^2 + \eta_t^2) g(z)) e^{i\kappa(x-ct)}. \quad (2.39)$$

Si la guía de ondas elásticas no está sujeta a fuerzas aplicadas en los bordes de ésta (es decir, están “*sueltos*”) lo cual equivale que los elementos del tensor de esfuerzos sean nulos (Fig. 2.4), entonces las condiciones de frontera son

$$w = \sigma_{zx} = 0, \quad \text{en } z = \pm h. \quad (2.40)$$

Al aplicar la condición en las ecuaciones (2.38) y (2.39) llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones homogéneas lineales, independientes de z y t , de la siguiente forma

$$\eta_l(A \cos \eta_l h + B \sin \eta_l h) + i\kappa(C \sin \eta_t h + D \cos \eta_t h) = 0, \quad (2.41)$$

$$\eta_l(A \cos \eta_l h - B \sin \eta_l h) + i\kappa(-C \sin \eta_t h + D \cos \eta_t h) = 0, \quad (2.42)$$

$$2i\eta_l\kappa(A \cos \eta_l h + B \sin \eta_l h) + (-\kappa^2 + \eta_t^2)(C \sin \eta_t h + D \cos \eta_t h) = 0, \quad (2.43)$$

$$2i\eta_l\kappa(A \cos \eta_l h - B \sin \eta_l h) + (-\kappa^2 + \eta_t^2)(-C \sin \eta_t h + D \cos \eta_t h) = 0. \quad (2.44)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones por medio del determinante del sistema conoceremos los modos de propagación de las ondas incidentes en el medio

$$\text{Det}(M) = 4\eta_l^2\kappa_t^4 \cos \eta_l h \cos \eta_t h \sin \eta_l h \sin \eta_t h. \quad (2.45)$$

La única solución no trivial de este sistema de ecuaciones surge de la condición de que el sistema sea singular, es decir que el determinante sea nulo, si $\kappa_t \neq 0$ tenemos las siguientes soluciones

$$\begin{Bmatrix} \cos \eta_l h \\ \sin \eta_l h \\ \cos \eta_t h \\ \sin \eta_t h \end{Bmatrix} = 0, \quad (2.46)$$

de donde es posible ver que el movimiento de las ondas, longitudinal y transversal, están desacoplados, así como determinar los modos de propagación (que representan a las partes simétrica y antisimétrica de las ondas antes mencionadas). Estos modos son útiles ya que de ellos conoceremos la velocidad de fase de cada onda así como la velocidad de grupo. Pero volvamos a nuestro asunto, los valores para que el determinante del sistema de ecuaciones sea cero deben ser

$$\eta_l = \frac{m\pi}{2h} \text{ y } \eta_t = \frac{n\pi}{2h}, \quad (2.47)$$

entonces resulta que tanto m como n determinan los modos de propagación. Igualamos las ecuaciones (2.34) y (2.47), en el caso de ondas longitudinales para determinar la expresión general del modo de propagación. Consideremos, además, la introducción de las variables $\omega_t = \pi c_t/2h$ y $\zeta = 2h\kappa/\pi$ que representan a la frecuencia de la onda transversal y al número de onda adimensional. Finalmente llegamos a una expresión de la forma

$$\Omega^2 = k^2 (m^2 + \zeta^2), \quad (2.48)$$

donde $\Omega = \omega/\omega_t$ es la frecuencia adimensional y $k = c_l/c_t$ es el cociente entra las velocidades de propagación. La Ec.(2.48) es llamada la *ecuación de frecuencia*. Con esta expresión se obtiene la velocidad de fase relacionada a las ondas longitudinales en forma general

$$C^2 = k^2 \left(\frac{m^2}{\zeta^2} + 1 \right), \quad (2.49)$$

con el valor de $C^2 = c^2/c_t^2$ adimensional, las ecuaciones (2.48) y (2.49) son también conocidas como relaciones de dispersión. Si se tiene en cuenta que las ondas elásticas son una onda longitudinal y una transversal tenemos que determinar las relaciones de dispersión para ésta última, por lo que de manera analoga a lo realizado para las ondas longitudinales se consiguen las expresiones

$$\Omega^2 = n^2 + \zeta^2, \quad C^2 = \frac{n^2}{\zeta^2} + 1. \quad (2.50)$$

Con los espectros de frecuencia Ω de las ecuaciones (2.48) y (2.50) se observa que tales expresiones son positivas y reales debido a este hecho el valor de ζ tendría que ser *real* (γ) o *imaginario* (δ) pero no *complejo*[37]. Estas relaciones de dispersión permiten saber las regiones del espectro en donde el sistema permite propagar señales y la forma en que las propaga. Si se consideran valores reales para ζ entonces la Ec.(2.48) representa una familia de hipérbolas y la Ec.(2.50) a una familia de hipérbolas equiláteras pero si el valor de ζ es imaginario entonces la Ec.(2.48) son elipses y la Ec.(2.50) son círculos, las gráficas de los espectros de frecuencia se presentan en la Fig. 2.5

2.4. Ondas con solución real

Ya hemos realizado el análisis de una guía de onda que propaga pero es necesario complementar este estudio con el caso en donde las soluciones de la ecuación de onda son exponenciales reales, el significado físico de éste es que las ondas incidentes va desvaneciéndose conforme recorre la guía de ondas.

Los potenciales φ y ψ sólo tendrán una modificación en la parte que representa a las amplitudes, lo que nos lleva a definir a $f(z) = A \sinh \eta_l z + B \cosh \eta_l z$ y $g(z) = C \sinh \eta_t z + D \cosh \eta_t z$. Por lo que vamos a usar el método anterior para poder conocer los modos de propagación para este caso, es el vector de desplazamientos tiene sus componentes definidas en la Ec.(2.38), además de tomar en cuenta a la componente σ_{zx} del tensor de deformación (Ec.(2.39)). Solo nos enfocaremos en la componente w y en σ_{zx} , entonces

$$w = [A\eta_l \cosh \eta_l z + B\eta_l \sinh \eta_l z + i\kappa(C \sinh \eta_t z + D \cosh \eta_t z)]e^{i\kappa(x-ct)}, \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} = & \mu(2i\eta_l\kappa(A \cosh \eta_l z + B \sinh \eta_l z)e^{i\kappa(x-ct)} \\ & - \mu(\kappa^2 + \eta_l^2)(C \sinh \eta_t z + D \cosh \eta_t z)e^{i\kappa(x-ct)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Si aplicamos la condición de frontera (Ec.(2.40)), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$A\eta_l \cosh \eta_l h + B\eta_l \sinh \eta_l h + i\kappa(C \sinh \eta_t h + D \cosh \eta_t h) = 0, \quad (2.53)$$

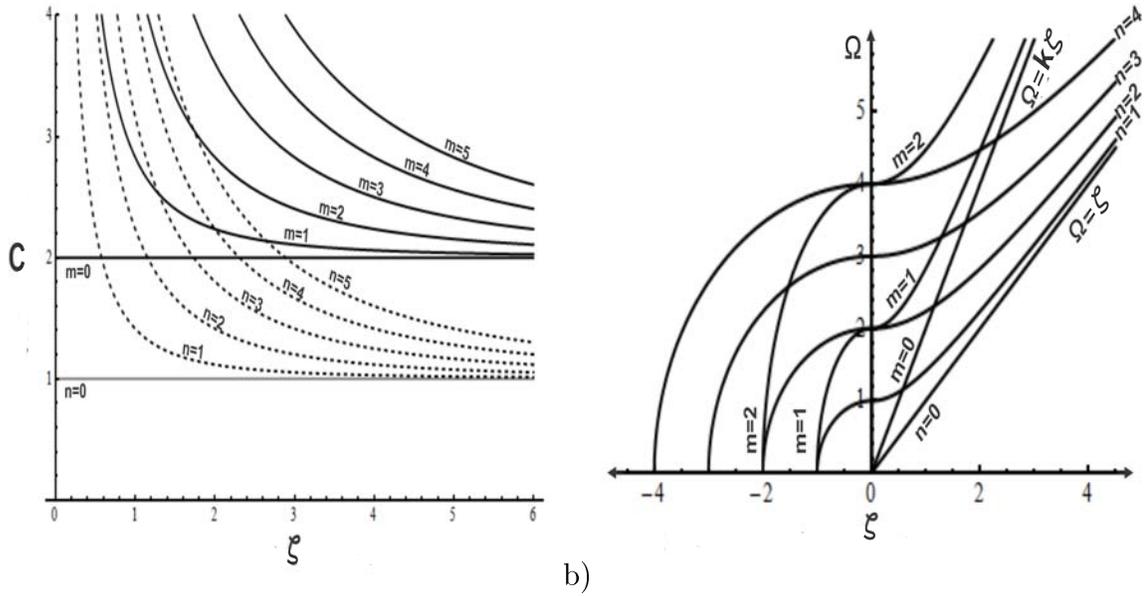


Figura 2.5: a) Gráfica de la *velocidad de fase* C (ecuaciones (2.49) y (2.50)); b) Gráfica del *espectro de frecuencias* Ω (ecuaciones (2.48) y (2.50)). Tanto m como n son los modos de propagación para las ondas longitudinales y las ondas transversales, respectivamente. En la figura (a) los valores de ζ se consideran reales y donde la velocidad de fase esta definida como $C = c/c_t$. En la figura (b) se han graficado las curvas de Ω cuando ζ es real (γ) o imaginario (δ), pero no complejo, tenemos en el lado izquierdo el caso de $\zeta = \delta$ lo que representa una familia de elipses para las ondas longitudinales y círculos para las ondas transversales, por lo que se tienen ondas estacionarias, por otra parte, en el lado derecho el valor de $\zeta = \gamma$ entonces se obtiene una familia de hipérbolas para ambas ondas. [37]

$$A\eta_l \cosh \eta_l h - B\eta_l \sinh \eta_l h + i\kappa(-C \sinh \eta_t h + D \cosh \eta_t h) = 0, \quad (2.54)$$

$$2i\eta_l \kappa(A \cosh \eta_l h + B \sinh \eta_l h) - (\kappa^2 + \eta_t^2)(C \sinh \eta_t h + D \cosh \eta_t h) = 0, \quad (2.55)$$

$$2i\eta_l \kappa(A \cosh \eta_l h - B \sinh \eta_l h) - (\kappa^2 + \eta_t^2)(-C \sinh \eta_t h + D \cosh \eta_t h) = 0, \quad (2.56)$$

La solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneas, de arriba, se obtiene del determinante de este sistema de ecuaciones al igualarlo a cero. Así pues, se llega a la ecuación trascendente para el caso donde las ondas elásticas presentan un perfil exponencial decayente, entonces

$$\text{Det}(M) = -4\eta_l^2 (-\kappa^2 + \eta_t^2)^2 \cosh \eta_l h \cosh \eta_t h \sinh \eta_l h \sinh \eta_t h. \quad (2.57)$$

Ahora bien, solo existe solución de la Ec.(2.57) cuando

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh \eta_l h \\ \sinh \eta_t h \end{array} \right\} = 0. \quad (2.58)$$

Es oportuno ahora obtener los modos de propagación para este caso, de la Ec.(2.57) podemos separar las ondas longitudinales y las trasversales para analizarlas así que para la parte

longitudinal el único modo se tiene cuando $\eta_l = 0 \Rightarrow -\kappa^2 + \omega^2/c_l^2 = 0$ del mismo modo que en la sección 2.3.1 entonces la relación mencionada la modificaremos de la siguiente manera, con la sustitución de las variables adimensionales $\zeta = \kappa h$, $k = c_l/c_t$, $\omega_t = c_t/h$ y $\Omega = \omega/\omega_t$ entonces el espectro de frecuencias y su velocidad de fase están dadas por

$$\Omega^2 = k^2 \zeta^2, C^2 = k^2. \quad (2.59)$$

Concluamos esto con la obtención de los espectros de frecuencias y la velocidad de fase de las ondas transversales

$$\Omega^2 = \zeta^2, \Omega^2 = 2\zeta^2, C^2 = \zeta^2 \text{ y } C^2 = 2. \quad (2.60)$$

De aquí en adelante solo nos enfocaremos en nuestra hipotética guía de ondas elásticas donde desarrollaremos la condición de frontera relacionada a la placa en el interior de ésta.

Capítulo 3

Guía de ondas elásticas

En los capítulos anteriores hablamos de la teoría necesaria para el desarrollo de la tesis. Recordemos brevemente lo que hemos planteado para el desarrollo de este trabajo: se trata de una guía de ondas elásticas rectangular la cual presenta una característica peculiar, es decir, la energía elástica (que viaja a lo largo de la velocidad de grupo) se transmite en dirección opuesta a la velocidad de fase debido a una placa muy delgada en el interior de la guía de ondas de muy distintas propiedades mecánicas a ésta. Proseguiremos el análisis del trabajo primero con la obtención de las condiciones de frontera para después encontrar los modos de propagación de los que será posible hallar las velocidades de fase y grupo con el propósito de mostrar las propiedades peculiares de la guía de ondas elásticas propuesta.

3.1. Formulación de condiciones de frontera

La guía de ondas elásticas que proponemos es de forma rectangular cuyo eje está en la dirección x , donde existe una placa (Fig. 3.1) la cual está caracterizada elásticamente por el módulo de compresibilidad (K), la densidad (ρ) y el módulo de cizalladura (μ), con ellas se determinan el valor de la velocidad longitudinal y la velocidad transversal. Pero antes que nada determinamos la condición de frontera para la placa tanto para la onda longitudinal como para la onda transversal.

Hemos analizado nuestro sistema propuesto representando a la placa extremadamente delgada de propiedades elásticas, radicalmente distintas, a través de una función delta de Dirac. En principio sería posible representar a la placa delgada a través de un medio de espesor finito y analizar el sistema completo como formado por la unión de tres medios homogéneos. Sin embargo dado que consideramos que la placa tiene un espesor mucho menor que la longitud de onda de la señal elástica propagante, debemos describir a la señal en el interior de la placa a través de una aproximación cuasiestática lo cual equivale a ignorar la dinámica de los campos elásticos en el interior de la placa y su efecto se reduce a modificar de manera abrupta las condiciones de frontera en su entorno. Por esta razón en este trabajo hemos decidido simplificar la representación de la placa extremadamente delgada en el sistema a través de una función delta para no ensombrecer el desarrollo de nuestro módulo y el análisis del resultado al utilizar

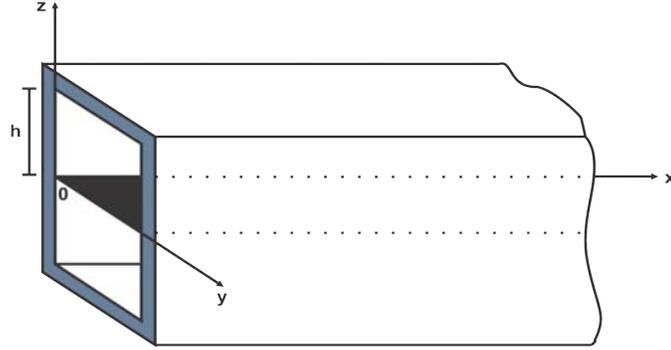


Figura 3.1: Guía de ondas elásticas propuesta.

un desarrollo más largo que no aporta información sustancial.

Sea la ecuación diferencial de onda (Ec.(2.8)) que gobierna la onda longitudinal y donde la velocidad de propagación c_l con la cual una onda longitudinal viaja a través de un medio elástico se define a partir K , μ y ρ (sección 2.1). Lo que haremos es introducir las propiedades de la placa (K , ρ y μ) en las características generales de la guía de ondas elásticas junto con la variable adimensional $\xi = z/h$, donde h es la mitad del grosor de la guía, de la siguiente manera

$$K = K_0 + \frac{\Delta K h_p \delta(\xi)}{h}, \quad \rho = \rho_0 + \frac{\Delta \rho h_p \delta(\xi)}{h}, \quad \mu = \mu_0 + \frac{\Delta \mu h_p \delta(\xi)}{h}, \quad (3.1)$$

donde h_p es la mitad del ancho de la placa, $\delta(z)$ es la función delta de Dirac¹, las constantes con subíndice cero pertenecen al material con mayor porcentaje en la guía de ondas, además, Δ representa la diferencia entre los valores del módulo de compresibilidad, densidad y módulo de cizalladura de los materiales usados para la guía de ondas elástica. La constante h_p es la mitad del grosor de la placa y tiene la característica de que es dos órdenes de magnitud más pequeña que la mitad del grosor (h) de toda la guía de ondas elásticas. Continuado con el desarrollo, hemos tomado el potencial escalar φ (Ec.(2.36)) desarrollado por R. Mindlin el cual corresponde a una onda plana monocromática propagándose a lo largo de la dirección x , en donde $f(z) = f(\xi h)$ representa la amplitud transversal de las ondas longitudinales, κ el número de onda y c la velocidad de fase de la onda en la dirección de propagación con el fin de determinar los modos de propagación que presenta la guía de ondas elásticas que estamos analizando. Entrando de lleno a nuestro estudio lo primero que haremos es sustituir las ecuaciones (3.1) en c_l con lo que obtendremos la velocidad de propagación de las ondas longitudinales y donde las propiedades mecánicas de los materiales usados en la guía de ondas

¹La función delta de Dirac tiene la siguiente propiedad

$$\delta(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

estarán presentes en todo el desarrollo de la teoría. Ahora, partiendo de la Ec.(2.8) vamos agrupando términos, así pues

$$\begin{aligned}
 & [3\rho_0\omega^2 - (3K_0 + 4\mu_0)\kappa^2] f(\xi h) + \frac{(3\Delta K + 4\Delta\mu)h_p\delta(\xi)}{h^3} \frac{\partial^2 f(\xi h)}{\partial \xi^2} \\
 & + \frac{3K_0 + 4\mu_0}{h^2} \frac{\partial^2 f(\xi h)}{\partial \xi^2} + \frac{(3\Delta\rho\omega^2 - (3\Delta K + 4\Delta\mu)\kappa^2)h_p\delta(\xi)f(\xi h)}{h} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Lo siguiente es integrar la Ec.(3.3) de $-\xi$ a $+\xi$, puesto que ese límite de integración hace referencia al ancho de la guía de ondas elástica. Para resolver las integrales de cada factor es necesario tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- La función $f(\xi h)$ es continua, es decir $f(\xi h)|_{\xi=0^+} = f(\xi h)|_{\xi=0^-}$
- Para toda función continua se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon = f(0)$.
- Teorema Fundamental del Cálculo “si f es una función continua en $[a, b]$ entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ donde $a \leq x \leq b$ es derivable y verifica $F'(x) = f(x)$ para toda x del intervalo”.

no olvidemos que este desarrollo se lleva a cabo para determinar la condición de frontera de la placa dentro de la guía de ondas por lo que aplicamos el límite cuando $\xi \rightarrow 0$, entonces el resultado de estas consideraciones es

$$\left. \frac{3K_0 + 4\mu_0}{h^2} \frac{\partial f(\xi h)}{\partial \xi} \right|_{0^-}^{0^+} + \frac{(3\Delta K + 4\Delta\mu)h_p}{h^3} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial \xi^2} + \frac{(3\Delta\rho\omega^2 - (3\Delta K + 4\Delta\mu)\kappa^2)h_p}{h} f(0) = 0. \tag{3.4}$$

Regresemos a la Ec.(3.3), si nos enfocamos en la región fuera de la placa central los términos ΔK , $\Delta\rho$ y $\Delta\mu$ son cero y, además, como $f(0^+) = f(0^-)$ es continua se cumple que $(\partial^2 f(0^+)/\partial \xi^2) = (\partial^2 f(0^-)/\partial \xi^2)$ también es continua entonces se puede conocer el valor de la segunda derivada en el centro de la guía de ondas

$$\frac{\partial^2 f(0)}{\partial \xi^2} = -\frac{(3\rho_0\omega^2 - (3K_0 + 4\mu_0)\kappa^2)h^2 f(0)}{3K_0 + 4\mu_0}, \tag{3.5}$$

sustituyendo la Ec.(3.5) en la Ec.(3.4) ya tenemos determinada la condición de frontera relacionada a la placa en el interior de la guía de ondas para el caso de las ondas longitudinales

$$\left. \frac{\partial f(\xi h)}{\partial \xi} \right|_{0^-}^{0^+} = -\alpha_l \omega^2 h h_p f(0). \tag{3.6}$$

La constante $\alpha_l = \alpha_l [s^2/m^2]$ depende de las propiedades mecánicas de los materiales empleados en la guía de ondas elásticas que proponemos, la expresión explícita de ésta constante se encuentra en el Apéndice (A). En el capítulo anterior hemos desarrollado las operaciones cuando no hay propagación de ondas transversales pero sin tomar en cuenta a la placa. Esta vez utilizaremos la función $f(\xi h)$ de dicho caso pero con ciertas modificaciones para que cumplan con la condición de frontera obtenida.

Sea $f(\xi h) = A \sinh |\eta_l h \xi| + B \cosh(\eta_l h \xi) + C \sinh(\eta_l h \xi)$, entonces al sustituirla en la condición de frontera obtenida², Ec.(3.6), es posible definir una constante adimensional p_l que contiene las propiedades mecánicas de los materiales. Por lo tanto, se modifica la expresión de $f(\xi h)$ para que sólo contenga dos amplitudes

$$f(\xi h) = C_1 (p_l \sinh |\eta_l h \xi| + \cosh(\eta_l h \xi)) + D_1 \sinh(\eta_l h \xi), \quad (3.8)$$

con

$$p_l = \frac{A}{B} = -\frac{\alpha_l \omega^2 h_p}{2\eta_l}. \quad (3.9)$$

Tenemos que para el caso de las ondas transversales haremos operaciones similares a las realizadas para las ondas longitudinales con la única diferencia de la velocidad de propagación, así que a partir de la ecuación de onda (Ec.(2.10)) para la parte transversal utilizamos el potencial vectorial ψ (Ec.(2.36)) donde $g(z) = g(\xi h)$, por otra parte sustituimos la propiedades mecánicas (3.1) en la velocidad de propagación c_t , con todo esto tenemos que la Ec.(2.10) es de la siguiente forma

$$(\rho_0 \omega^2 - \mu_0 \kappa^2) g(\xi h) + \frac{\Delta \mu h_p \delta(\xi)}{h^3} \frac{\partial^2 g(\xi h)}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0}{h^2} \frac{\partial^2 g(\xi h)}{\partial \xi^2} + \frac{(\Delta \rho \omega^2 - \Delta \mu \kappa^2) h_p \delta(\xi) g(\xi h)}{h} = 0. \quad (3.10)$$

En seguida integramos la expresión de $-\xi$ a $+\xi$ para después aplicar el límite cuando $\xi \rightarrow 0$ ya que de esta manera obtenemos la condición de frontera para la placa delgada que relaciona a las ondas transversales que se propagan a sus costados. La función $g(\xi h)$, que representa la amplitud transversal, es continua y como en el caso para las ondas longitudinales hacemos uso del teorema Fundamental del Cálculo así como de la propiedad de la delta de Dirac mencionada anteriormente, con lo cual obtenemos

$$\left. \frac{\mu_0}{h^2} \frac{\partial g(\xi h)}{\partial \xi} \right|_{0^-}^{0^+} + \frac{\Delta \mu h_p}{h^3} \frac{\partial^2 g(0)}{\partial \xi^2} + \frac{(\Delta \rho \omega^2 - \Delta \mu \kappa^2) h_p}{h} g(0) = 0. \quad (3.11)$$

Volvamos a la expresión de la ecuación de onda (3.10), si estamos alejados de la placa la ecuación y como $g(\xi h)$ también es continua tenemos que la segunda derivada también lo es, por ello

$$\frac{\partial^2 g(0)}{\partial \xi^2} = -\frac{(\rho_0 \omega^2 - \mu_0 \kappa^2) h^2 g(0)}{\mu_0}. \quad (3.12)$$

Por lo tanto, con la sustitución de la Ec.(3.12) en Ec.(3.11) obtenemos la condición de frontera de la placa para las ondas transversales

$$\left. \frac{\partial g(\xi h)}{\partial \xi} \right|_{0^-}^{0^+} = -\alpha_t \omega^2 h h_p g(0). \quad (3.13)$$

²a la derivada del valor absoluto se le conoce como la función signo, $\frac{d|x|}{dx} = \text{sgn}(x)$ y se define por

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

La expresión de $\alpha_t = \alpha_t [s^2/m^2]$ también está definida en términos de las propiedades mecánicas de los materiales empleados en la guía de ondas elásticas que proponemos y puede ser consultada en el Apéndice (A). Para que la función $g(\xi h)$ cumpla con la condición de frontera (3.13) necesitamos que sea de la forma $g(\xi h) = D \sinh |\eta_t h \xi| + E \cosh(\eta_t h \xi) + F \sinh(\eta_t h \xi)$. Por tanto al sustituir $g(\xi h)$ obtenemos otra constante adimensional p_t (con las propiedades mecánicas de cada material) para modificar la función

$$g(\xi h) = C_2 (p_t \sinh |\eta_t h \xi| + \cosh(\eta_t h \xi)) + D_2 \sinh(\eta_t h \xi), \quad (3.14)$$

con

$$p_t = \frac{D}{E} = -\frac{\alpha_t \omega^2 h_p}{2\eta_t}. \quad (3.15)$$

La introducción del parámetro p_t simplifica a $g(\xi h)$ porque en lugar de tener tres amplitudes desconocidas ahora solo hay dos de éstas haciendo más fácil la solución del problema.

3.2. Análisis de la guía de ondas elásticas para una guía de ondas elásticas con una placa distinta en su interior

Se sustituyen las funciones (3.8) y (3.14) en Ec.(2.26) y en Ec.(2.31) para conocer la componente w del vector de desplazamiento y σ_{zx} del tensor de esfuerzos, respectivamente. Tomando la variable adimensional $\xi = z/h$ junto con la aplicación de la condición de frontera (2.40) llegamos al siguientes sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} & \eta_l (C_1 (p_l \cosh |\eta_l h| + \sinh(\eta_l h)) + D_1 \cosh(\eta_l h)) \\ & + i\kappa (C_2 (p_t \sinh |\eta_t h| + \cosh(\eta_t h)) + D_2 \sinh(\eta_t h)) = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \eta_l (-C_1 (p_l \cosh |\eta_l h| + \sinh(\eta_l h)) + D_1 \cosh(\eta_l h)) \\ & + i\kappa (C_2 (p_t \sinh |\eta_t h| + \cosh(\eta_t h)) - D_2 \sinh(\eta_t h)) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & 2i\kappa\eta_l (C_1 (p_l \cosh |\eta_l h| + \sinh(\eta_l h)) + D_1 \cosh(\eta_l h)) \\ & - (\kappa^2 + \eta_t^2) (C_2 [p_t \sinh |\eta_t h| + \cosh(\eta_t h)] + D_2 \sinh(\eta_t h)) = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & 2i\kappa\eta_l (-C_1 (p_l \cosh |\eta_l h| + \sinh(\eta_l h)) + D_1 \cosh(\eta_l h)) \\ & - (\kappa^2 + \eta_t^2) (C_2 [p_t \sinh |\eta_t h| + \cosh(\eta_t h)] - D_2 \sinh(\eta_t h)) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Y por lo tanto la ecuación trascendente del sistema de ecuaciones M está dado por

$$Det[M] = -4\eta_l^2 (-\kappa^2 + \eta_t^2)^2 \cosh(\eta_l h) \sinh(\eta_t h) \varepsilon_l \varepsilon_t, \quad (3.20)$$

donde

$$\varepsilon_l = p_l \cosh |\eta_l h| + \sinh(\eta_l h), \quad \varepsilon_t = p_t \sinh |\eta_t h| + \cosh(\eta_t h). \quad (3.21)$$

Las constantes p_l y p_t dependen de K , ρ y μ de los materiales con los cuales está hecha la guía de ondas, así pues, cuando no existe la placa dentro de la guía las constantes son cero y entonces llegamos a la ecuación trascendente donde no hay propagación de ondas con perfil transversal

evanescente (Ec.(2.57)) lo cual muestra la consistencia de nuestro desarrollo sin embargo los modos con perfil transversal oscilatorio siguen persistiendo. Tanto η_l como η_t regresan a las expresiones donde no se toma en cuenta al otro medio debido a la condición de frontera que estamos aplicando. Volvamos a la Ec.(3.20) la cual presenta las partes longitudinal y transversal de la onda elástica que incide sobre la guía que estamos analizando, por la forma en como se expresa la ecuación es posible agrupar los términos que contengan información de cada onda, de tal forma que, para determinar los modos de propagación para las ondas longitudinales y transversales solo tenemos que igualar la Ec.(3.20) a cero, o bien, cuando

$$\eta_l \varepsilon_l \cosh(\eta_l h) = 0, \quad (3.22)$$

$$(-\kappa^2 + \eta_t^2) \varepsilon_t \sinh(\eta_t h) = 0. \quad (3.23)$$

3.2.1. Espectros de frecuencia longitudinales

Los modos de propagación de las ondas longitudinales se determinarán de la Ec.(3.22), no existe pérdida de información por hacer esto de esta manera ya que las partes que representan a cada onda (longitudinal y transversal) se factorizan y quedan como el producto de dos expresiones, luego entonces, con la sustitución del término de ε_l en la Ec.(3.22), la expresión que debemos resolver para encontrar los modos de propagación es

$$\eta_l (p_l + \tanh(\eta_l h)) = 0. \quad (3.24)$$

Ahora veamos, se definió el valor η_l en la Ec.(2.34) el cual representa el número de onda en la dirección transversal a la dirección de propagación por lo que obtendremos el primer espectro de frecuencias (modo de propagación) al igualarlo a cero entonces $-\kappa^2 + \omega^2/c_l^2 = 0$. Lo que haremos es usar las variables adimensionales Ω y ζ (sección 2.3.1) con el propósito de tener la representación de los modos a través de ellas, para esto seguiremos el procedimiento desarrollado en el capítulo (2), entonces multiplicando a η_l^2 por $c_l^2 h^2/c_t^2$ e introduciendo las variables $\zeta = \kappa h$, $\omega_t = c_t/h$ y $k = c_l/c_t$, además de $\Omega = \omega/\omega_t$, obtenemos el modo $\Omega_l^2 = k^2 \zeta^2$. Esto concuerda con el espectro de frecuencias cuando no existe un medio distinto en características al de la guía de ondas elásticas.

Continuando con la segunda parte, es decir, $p_l + \tanh(\eta_l h) = 0$, haciendo la sustitución del valor de p_l (Ec.(3.9)) y η_l nos queda expresión en donde aparecen las propiedades mecánicas de los materiales y la mitad del ancho de la placa (h_p), si suponemos que $\kappa^2 \approx \omega^2/c_l^2$ nos permite hacer el desarrollo en serie de Taylor para la $\tanh(\eta_l h)$, así que $\tanh\left(h\sqrt{-\kappa^2 + \omega^2/c_l^2}\right) = h\sqrt{-\kappa^2 + \omega^2/c_l^2} - \frac{h^3}{3}(-\kappa^2 + \omega^2/c_l^2)^{3/2} + \dots$ se llega a

$$-\alpha_l \omega^2 h_p + 2h \left(-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_l^2}\right) - \frac{2h^3}{3} \left(-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_l^2}\right)^2 = 0, \quad (3.25)$$

para definir parámetros adimensionales, multiplicamos la Ec.(3.25) por $-3c_l^4 h/2c_t^4$ además de sustituir las variables ζ , ω_t y k . Es más, un punto esencial de este análisis se encuentra

en la definición de otra constante adimensional β_l que contendrá los valores del módulo de compresibilidad, la densidad y el módulo de cizalladura de los materiales utilizados ya que tal constante siempre controlará la forma de los modos de propagación de las ondas longitudinales. Tenemos que $\beta_l = \alpha_l c_l^2$ y junto con Ω obtenemos la expresión

$$\Omega^4 + \left(\frac{3h_p\beta_l}{2h} - 2\zeta^2 - 3 \right) k^2\Omega^2 + (\zeta^2 + 3) k^4\zeta^2 = 0. \quad (3.26)$$

Es fácil encontrar las raíces de la Ec.(3.26) a través de la formula general para ecuaciones de segundo grado $q = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. Por lo tanto los espectros de frecuencia para las ondas elásticas longitudinales son

$$\Omega_{l_{1\pm,2\pm}}^2 = k^2 \left(-\frac{3h_p\beta_l}{4h} + \zeta^2 + \frac{3}{2} \pm \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h} - 2 \right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}} \right) \text{ y } \Omega_{l_3}^2 = k^2\zeta^2. \quad (3.27)$$

En la Ec.(3.27) el subíndice 1 esta relacionado con los modos de propagación positivos y el subíndice 2 con los negativos. A continuación calcularemos estas relaciones de dispersión para el caso específico de dos materiales con propiedades elásticas radicalmente distintas.

Viene la parte más importante del análisis hecho anteriormente, ya hemos definido a β_l y k para conocer sus valores es necesario escoger los materiales de los que estará hecha la guía de ondas elásticas³. Los materiales que vamos a usar en este trabajo son el Acero AISI M2 ya que es un material de menor costo para la fabricación de herramientas además de que puede ser mejorado mediante tratamientos que modifiquen sus características superficiales, y el policloruro de vinilo (PVC) debido a que es uno de los más baratos, versátiles y usados polímeros por su carácter multifacético como la fabricación de paneles estructurales ligeros, tapicería para automóviles o en un uso doméstico. No existen muchos trabajos donde se reporten las propiedades mecánicas K y μ de los materiales entonces lo que haremos es determinar sus valores por medio del modulo de Young y la constante de Poisson (tabla 3.1)⁴. Como se advierte hemos encontrado 6 relaciones para el espectro de frecuencias longitudinal empezaremos por considerar solo la parte positiva⁵ de estas relaciones porque los espectros de frecuencias (Ec.(3.27)) son funciones pares de la frecuencia, así pues, lo que analizaremos son los modos $\Omega_{l_{1+}}$ y $\Omega_{l_{1-}}$ dados por

$$\Omega_{l_{1\pm}} = k \sqrt{\left(-\frac{3h_p\beta_l}{4h} + \zeta^2 + \frac{3}{2} \pm \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h} - 2 \right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}} \right)}, \quad (3.28)$$

así que en la Fig. 3.2, con $h = 0.05m$ y $h_p = 0.00075m$ se muestran las graficas de los espectros de frecuencia longitudinal (Ec.(3.28)) con los valores de la tabla 3.1 que están presentes en β_l y que es igual a -0.150157 . Para $\Omega_{l_{1+}}$ se observa un comportamiento similiar al que existe en una guía de ondas elásticas ordinaria, en donde además presenta una frecuencia de corte $\Omega_c = 3.08747$.

³ α_l depende de los valores de K_0 , ρ_0 , μ_0 , K_1 , ρ_1 y μ_1 (veáse apéndice A)

⁴En la sección (1.1.5) se muestra la dependencia de K y μ (Ec.(1.51)) de los constantes E y σ

⁵El espectro de frecuencias $\Omega_{l_{2\pm}} = -\Omega_{l_{1\pm}}$.

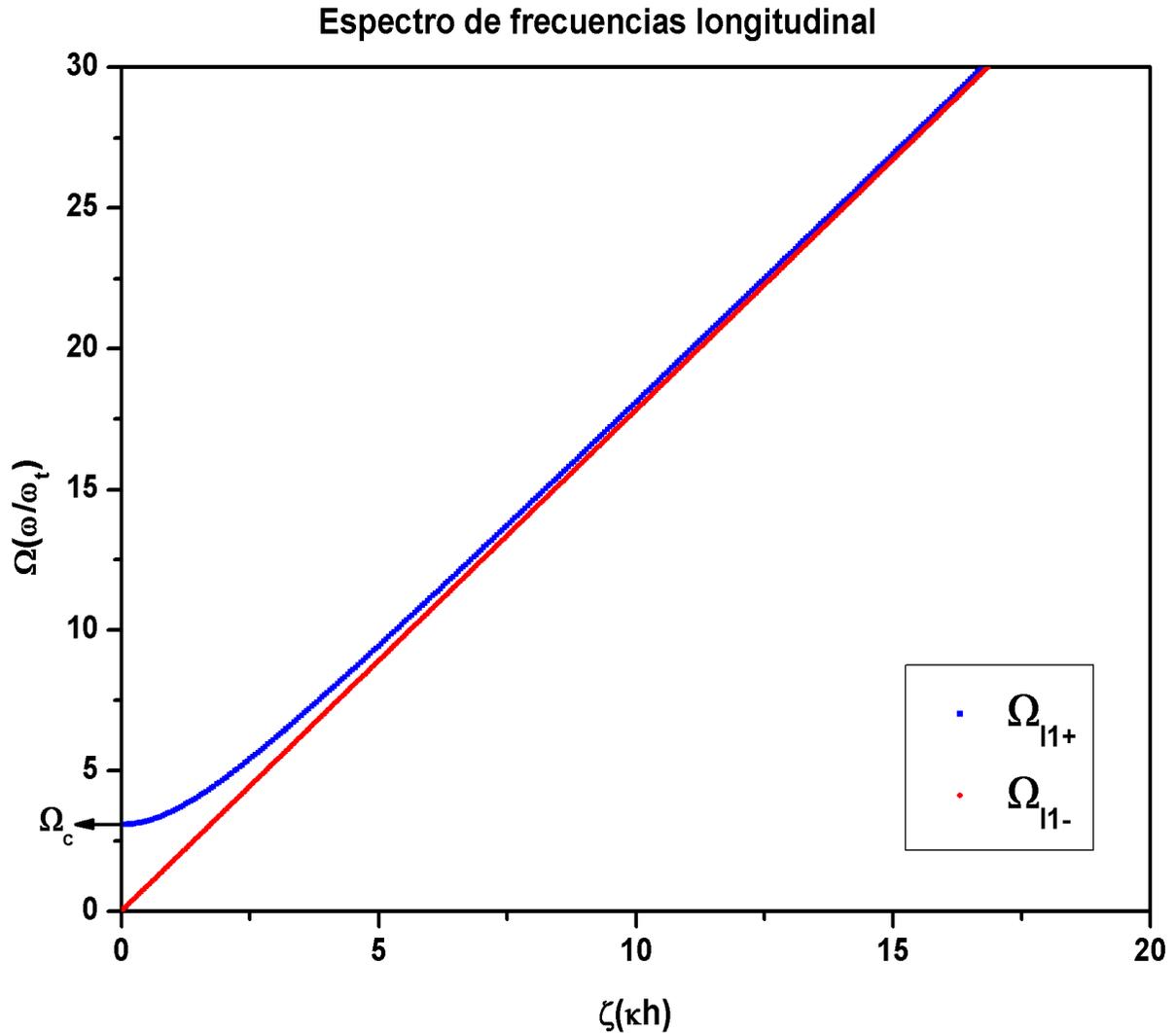


Figura 3.2: Gráfica de espectro de frecuencias Ω_{l1+} y Ω_{l1-} (Ec.(3.28)) para ondas longitudinales que se propagan a través de una guía de ondas elásticas hecha de acero AISI M2 que tiene en su interior una placa delgada de PVC. Ω y ζ son variables adimensionales las cuales están relacionadas con la frecuencia $\omega_t = c_t/h$ y el número de onda $\kappa = \kappa_l \sin \alpha$, respectivamente. Estas variables adimensionales dependen del grosor de la guía de ondas elásticas (h) para que se encuentren bien definidas. El primer espectro de frecuencias Ω_{l1+} es parecido a los que se obtienen para una guía de ondas elásticas común con una frecuencia de corte Ω_c a partir de la cual se comienzan a propagar las ondas longitudinales, su valor es de 3.08747 y se calcula a partir de $\Omega_{c1+} = k\sqrt{3(1 - h_p\beta_l/2h)}$, donde $k = 1.78155$ es la razón entre las velocidades de propagación c_l y c_t , $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_l = -0.150157$. Los valores de las propiedades mecánicas del acero y del policloruro de vinilo usadas fueron: Acero AISI M2 ($E_0 = 208.5 \times 10^9 kg/ms^2$, $\rho_0 = 7852 kg/m^3$, $\sigma_0 = 0.27$) y PVC ($E_1 = 2.14 \times 10^9 kg/ms^2$, $\rho_1 = 1300 kg/m^3$, $\sigma_1 = 0.38$). El segundo espectro de frecuencias Ω_{l1-} tiene una frecuencia de corte igual a cero, esto significa que para este modo de propagación la guía de ondas se comporta como un absorbente acústico ya que cualquier longitud de onda se transmite a través de la guía, como se observa es una una función creciente que va tomando valores muy cercanos a los obtenidos de Ω_{l1+} .

	Módulo de Young (E) [$\frac{kg}{m \cdot s^2}$]	Densidad (ρ) [$\frac{kg}{m^3}$]	Coefficiente de Poisson (σ)
Acero (AISI M2)	208.1×10^9	7852	0.27
PVC	2.14×10^9	1300	0.38

Tabla 3.1: Características del Acero y del Policloruro de vinilo (PVC). Se usó la aleación AISI M2 y el PVC flexible como materiales con los cuales formamos la guía de ondas donde el PVC es el material del que está hecha la placa[43, 44].

Si nos fijamos en Ω_{l_1-} tenemos que la frecuencia de corte comienza en el valor cero lo cual significa que la guía de ondas no está limitada para ciertas longitudes de onda bajas teniendo por resultado la transmisión de longitudes de onda mayores al ancho de la guía de ondas. Las ondas sonoras son un tipo de onda longitudinal que se transmite en un medio elástico por medio de variaciones locales de presión o densidad provocando que cada molécula transmita la vibración a las que se encuentren en su vecindad, provocando un movimiento en cadena. Podemos afirmar que la guía propuesta se comporta como un “*absorbente acústico*” porque cualquier longitud de onda puede propagarse en la guía. En lo referente a una guía de ondas elásticas ordinaria la conducta de la propagación de las ondas longitudinales en nuestro medio es similar. Partiendo de la relación de dispersión $\Omega_{l_{3+}} = k\zeta$, como la frecuencia es directamente proporcional al número de onda, se concluye que la velocidad de fase y la velocidad de grupo para las ondas longitudinales es la misma.

La frecuencia de corte para el espectro de frecuencias $\Omega_{l_{1+}}$ se conoce a partir de la siguiente relación $\Omega_{c_{1+}} = k\sqrt{3(1 - h_p\beta_l/2h)}$ y por tanto el valor máximo de $\beta_l = 2h/h_p$. En lo que toca al espectro de frecuencias $\Omega_{l_{1-}}$ su frecuencia de corte sería $\Omega_{c_{1-}} = 0$. Desde luego, la revisión estaría incompleta si no tomamos en cuenta el caso donde las propiedades mecánicas de los materiales utilizados fueran similares, es decir, el límite cuando β_l tiende a cero, entonces

$$\lim_{\beta_l \rightarrow 0} \Omega_{l_{1+}} = k\sqrt{\zeta^2 + 3} \text{ y } \lim_{\beta_l \rightarrow 0} \Omega_{l_{1-}} = k\zeta. \quad (3.29)$$

Si observamos las expresiones anteriores son parecidas a las de la Ec.(2.48) cuando los potenciales usados (Ec.(2.36)) tienen forma periódica en la parte transversal que en este caso $f(\xi h) = C_1(p_l \sinh |\eta_l h \xi| + \cosh(\eta_l h \xi)) + D_1 \sinh(\eta_l h \xi)$ y $g(\xi h) = C_2(p_t \sinh |\eta_t h \xi| + \cosh(\eta_t h \xi)) + D_2 \sinh(\eta_t h \xi)$.

3.2.2. Espectros de frecuencia transversales

Solo nos falta obtener los espectros de frecuencia de las ondas transversales de nuestra guía de ondas elásticas a partir de la Ec.(3.23), entonces tomando el valor de p_t y reorganizando la ecuación nos da por resultado

$$\eta_t (-\kappa^2 + \eta_t^2) \sinh(\eta_t h) (-\alpha_t \omega^2 h_p \tanh |\eta_t h| + 2\eta_t) = 0. \quad (3.30)$$

El primer espectro de frecuencias (modo de propagación) se consigue de igualar η_t a cero, primero multiplicamos por h^2 a η_t , después con la sustitución de las variables $\zeta = \kappa h$ y $\omega_t = c_t/h$ tenemos que el espectro de frecuencias para las ondas elásticas transversales es $\Omega_t^2 = \zeta^2$ con $\Omega = \omega/\omega_t$. Ahora nos enfocaremos en el término $-\kappa^2 + \eta_t^2 = 0$ con la sustitución de η_t y multiplicandola por h^2 , de nueva cuenta se sustituyen las variables adimensionales ζ , ω_t y Ω , así pues, el segundo espectro de frecuencias para las ondas elásticas transversales es $\Omega_t^2 = 2\zeta^2$. Ya solo nos falta el término $-\alpha_t\omega^2 h \tanh|\eta_t h| + 2\eta_t = 0$, luego entonces cambiamos la forma de la $\tanh|\eta_t h|$ a exponencial y después la desarrollaremos para $\eta_t h \ll 1$ en serie de Taylor de la siguiente manera $\tanh|\eta_t h| = 1 - 2e^{-2|\eta_t h|} + 2e^{-4|\eta_t h|} - \dots$, pero como no es posible factorizar la variable η_t de la serie suponemos entonces que la $\tanh|\eta_t h| \approx 1$, por lo que la expresión nos queda

$$-\alpha_t\omega^2 h_p + 2\left(-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (3.31)$$

pasamos del otro lado de la igualdad a $\alpha_t\omega^2 h_p$ y elevamos al cuadrado ambos lados, luego multiplicamos por $h^4/\alpha_t^2 c_t^4 h_p^2$ la Ec.(3.31), entonces tenemos volvemos hacer una sustitución de las variables ζ , ω_t y Ω junto con la introducción de una nueva constante adimensional $\beta_t = \alpha_t c_t^2$, con lo cual obtenemos una ecuación cuadrática que es posible resolver por medio de la formula general para la obtención de raíces

$$\Omega^4 - \frac{4h^2}{h_p^2\beta_t^2}\Omega^2 + \frac{4h^2}{h_p^2\beta_t^2}\zeta^2 = 0. \quad (3.32)$$

Teniendo presente que la ecuación anterior es válida para los potenciales φ y ψ (Ec.(2.36)) en donde $f(\xi h) = C_1(p_l \sinh|\eta_l h\xi| + \cosh(\eta_l h\xi)) + D_1 \sinh(\eta_l h\xi)$ y $g(\xi h) = C_2(p_t \sinh|\eta_t h\xi| + \cosh(\eta_t h\xi)) + D_2 \sinh(\eta_t h\xi)$. Por lo tanto los espectros de frecuencia para las ondas transversales son

$$\Omega_{t_{1\pm,2\pm}}^2 = \frac{2h^2}{h_p^2\beta_t^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{h_p^2\beta_t^2\zeta^2}{h^2}}\right), \quad \Omega_{t_3}^2 = \zeta^2, \quad \Omega_{t_4}^2 = 2\zeta^2. \quad (3.33)$$

Como en el caso de los espectros de frecuencias longitudinales el subíndice 1 de Ω_t está relacionado con los modos de propagación positivos y el subíndice 2 con los negativos. De manera análoga a lo realizado en la sección (3.2.1), tomaremos solo la parte positiva ya que las funciones de la Ec.(3.33) son pares de manera que al sustituir los valores del AISI M2 y del PVC (tabla 3.1) en β_t (veáse apéndice A para aclaración) tenemos que las relaciones

$$\Omega_{t_{1\pm}} = \frac{\sqrt{2}h}{h_p|\beta_t|} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{h_p\beta_t\zeta}{h}\right)^2}}, \quad (3.34)$$

son graficadas juntas (Fig. 3.3). Se observa que, para esta guía de ondas elásticas, existe una región de frecuencias en donde sólo es permitida la propagación de las ondas transversales, que en este caso la región se encuentra entre los valores $[0, 854.158]$, donde la frecuencia de corte es $\Omega_c = 854.158$. A esta región de frecuencias se le conoce como filtro “*pasa bajos*” porque solo permite conducir ondas de frecuencia baja. Ya se han realizado diferentes dispositivos

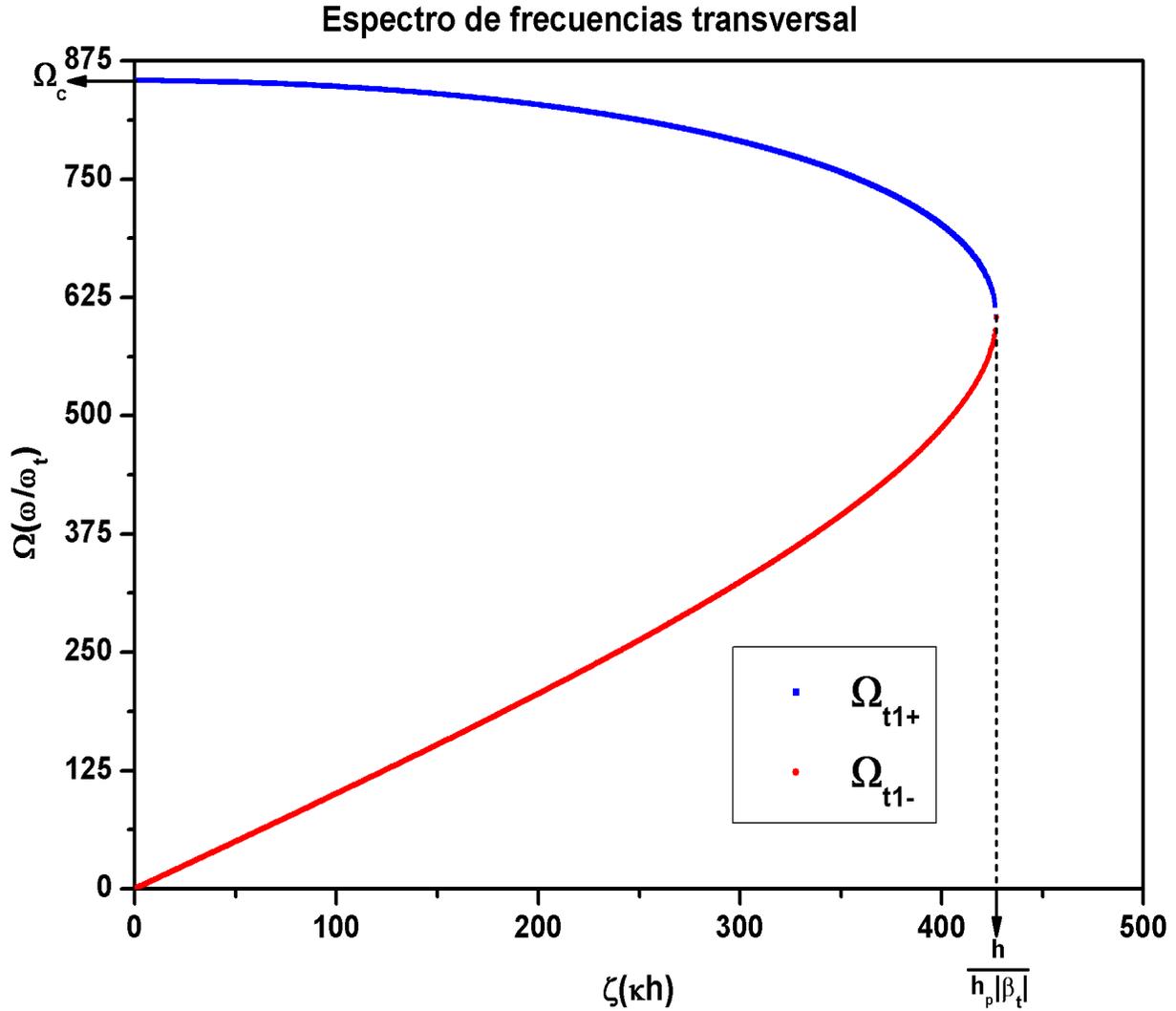


Figura 3.3: Gráfica del espectro de frecuencias $\Omega_{t_{1+}}$ y $\Omega_{t_{1-}}$ (Ec.(3.34)) para las ondas transversales que se propagan en una guía de ondas elásticas hecha de acero AISI M2 con una placa delgada de PVC en su interior. Ω y ζ son variables adimensionales las cuales están relacionadas con la frecuencia $\omega_t = c_t/h$ y el número de onda $\kappa = \kappa_t \sin \beta$, respectivamente. Estas variables adimensionales dependen del grosor de la guía de ondas elásticas (h) para que se encuentren bien definidas. Se tomaron los siguientes cantidades $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = -0.156099$. Las propiedades mecánicas del acero AISI M2 usadas son $E_0 = 208.1 \times 10^9 kg/ms^2$, $\rho_0 = 7852 kg/ms^2$, $\sigma = 0.27$ y del PVC son $E_1 = 2.14 \times 10^9 kg/ms^2$, $\rho_1 = 1300 kg/ms^2$, $\sigma_1 = 0.38$. Estas cantidades definen a la variable adimensional β_t . El rango de frecuencias, entre valores de $[0, 854.158]$, es la región del espectro de frecuencias donde solo se propagan las ondas transversales, en la guía de ondas elásticas propuesta, con $\Omega_c = 2h/h_p|\beta_t|$. Del espectro de frecuencias $\Omega_{t_{1+}}$ es posible observar que la velocidad de grupo transversal $d\Omega/d\zeta$ es negativa ya que la pendiente de la recta tangente para los valores de ζ entre 0 y $h/h_p|\beta_t|$ es decreciente. El valor de $\zeta = h/h_p|\beta_t|$ es el número de onda máximo con el que una onda elástica se propaga en la guía y en ese punto la velocidad de grupo es cero lo que significaría que no hay movimiento de las ondas transversales, o bien, al estar cerca del valor de tal frecuencia es posible “detener” la señal o tener ondas ralentizadas. El espectro de frecuencias $\Omega_{t_{1-}}$ nos muestra que ondas transversales con longitud de onda mayor comparada con el grosor de la guía son propagadas.

que permiten controlar las regiones de frecuencias más adecuadas para ciertas aplicaciones con la ayuda de los metamateriales[45, 46, 47]. Analizando por partes tenemos que en la región $[0, 603.981]$ la velocidad de grupo es positiva entonces nuestra guía mantiene un comportamiento similar al de una guía de ondas simple. Si pasamos ahora a los valores de frecuencia cercanos a $\Omega = 603.981$ tenemos que en ese punto la velocidad de grupo tiene el valor de cero lo que significaría que no hay movimiento de las ondas transversales. O bien, al estar cerca del valor de la frecuencia 603.981 es posible “detener” la señal o tener ondas ralentizadas. Y finalmente, para valores de frecuencia entre $[603.981, 854.158]$ encontramos que la velocidad de grupo es negativa esto quiere decir que la energía se transmite en dirección opuesta a la velocidad de fase. El significado físico es que al propagarse la onda transversal, en la guía de ondas elásticas propuesta, en lugar de ir sumando fase va restándola como ocurre en los metamateriales[48, 49, 50]. Así, pues, la guía de ondas elásticas que proponemos presenta la característica de un metamaterial elástico. Las aplicaciones posibles de un metamaterial elástico van desde la fabricación de superlentes elásticas, por el hecho de superar el límite de difracción, generando imágenes de superior resolución al poder recoger las ondas evanescentes (éstas llevan parte de la información del objeto observado pero que un aparato de detección no alcanza a introducir las en su análisis) recabando la mayor información del medio estudiado[12]. También en dispositivos antisísmicos, donde el metamaterial elástico, en lugar de ser parte de un edificio o casa, éste sea una barrera a prueba de terremotos alrededor de la construcción que desea protegerse[13] y esto sucede porque reduce la amplitud de la onda sísmica exponencialmente. Es importante subrayar que la curva de la Fig. 3.3 resulta de la unión de los espectros de frecuencias transversal obtenidos teniendo como límite $\zeta = h/h_p |\beta_t|$. Los otros espectros de frecuencias de la Ec.(3.33) son lineales de tal manera que se asemejan a los encontrados en una guía de onda común pero es posible darse una idea de su forma viendo la Fig. 2.5b cuando se consideran valores reales para ζ .

Veamos el caso cuando las propiedades mecánicas ($E_0, \rho_0, \sigma_0, E_1, \rho_1, \sigma_1$) de los materiales empleados son similares, que matemáticamente lo podemos definir como límite cuando $\beta_t \rightarrow 0$ por lo que para Ω_{t_1+} el límite diverge, en cambio

$$\lim_{\beta_t \rightarrow 0} \Omega_{t_1-} \approx \zeta, \quad (3.35)$$

llegando a la expresión para una guía de ondas común (lineal).

3.2.2.1. Importancia de las propiedades mecánicas para la obtención de una velocidad de grupo negativa

Todo indica que la diferencia que aparece entre los materiales empleados en esta guía de ondas elásticas es el factor determinante para conseguir la característica de una velocidad de grupo negativa. Por ello es necesario un estudio más detallado sobre la influencia del valor de β_t porque en él encontramos las propiedades mecánicas de los materiales.

Veamos la Ec.(3.33), podemos realizar un cambio de variable con la finalidad de simplificarla para un análisis más claro, por consiguiente, sea $W = \Omega^2$ y $Z = \zeta^2$ entonces tenemos la siguiente

expresión

$$W = \frac{2h^2}{h_p^2\beta_t^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{h_p\beta_t}{h}\right)^2 Z} \right), \quad (3.36)$$

de ella sólo tomaremos la parte positiva, vamos a despejar a Z porque esta representa al número de onda, entonces tenemos que

$$Z = W - \left(\frac{h_p\beta_t}{2h}\right)^2 W^2. \quad (3.37)$$

La función $Z(W)$ es de forma cuadrática, para tener una visión más clara de ésta esbozaremos su gráfica a partir de la primera derivada para conocer el o los puntos de inflexión así como de la segunda derivada para los máximos o mínimos que pueda presentar. Resulta que existe un punto de inflexión cuando $W = 2h^2/h_p^2\beta_t^2$ y como $(d^2Z/dW^2) < 0$ entonces es un máximo, además, al igualar a cero la Ec.(3.37) se obtienen dos raíces para los valores 0 y $(2h/h_p\beta_t)^2$ (Fig. 3.4).

De lo anterior se desprende que para cualesquiera materiales usado en la guía de ondas elásticas existe una región en el espectro de frecuencias en $[0, (2h/h_p\beta_t)^2]$ conocida como filtro pasa bajos donde la frecuencia de corte para las frecuencias altas $(2h/h_p\beta_t)^2$. Al tomar el valor de $W = (\sqrt{2}h/h_p\beta_t)^2$ el número de onda correspondiente es $Z = (h/h_p\beta_t)^2$ como consecuencia tenemos que en dicha frecuencia la velocidad de grupo es igual a cero, esto quiere decir, las ondas transversales son ralentizadas. Además, en $[(\sqrt{2}h/h_p\beta_t)^2, (2h/h_p\beta_t)^2]$ las ondas transversales tendrán una velocidad de grupo negativa. De manera análoga se hace el análisis para el espectro de frecuencias Ω_{t_1-} (Ec.(3.34)).

Esto confirma la gráfica que obtuvimos en la sección (3.2.2), ahora bien, $Z = \zeta^2$ y $\beta_t = \alpha_t c_t^2$ de esto podemos determinar cuál es el valor crítico de α_t que conlleva a propiedades no vistas en la naturaleza ($d\omega/d\kappa < 0$), así que

$$|\alpha_t| = \frac{\lambda_t}{2\pi c_t^2 h_p}, \quad (3.38)$$

dado que $\zeta = \kappa h$ y como κ representa la número de onda, en este caso transversal, usamos $\kappa = 2\pi/\lambda_t$. Es necesario comentar que tanto α_l como α_t tienen unidades de $[s^2/m^2]$.

En resumen, la cantidad crítica para que una guía de ondas elásticas, como la que proponemos, presente una velocidad de grupo negativa está sujeta a la longitud de onda transversal por lo tanto si λ_t es igual al ancho de la placa hecha de otro material no existe propagación de las ondas transversales.

Hemos dedicado un par de secciones para tratar de mostrar que la guía de ondas elástica propuesta de acero y PVC propaga a las ondas elásticas como una guía de ondas común pero con la diferencia de que nuestra guía de ondas puede, teóricamente, propagar longitudes de ondas muy grandes y junto con ello presentar un velocidad de grupo negativa. Prosiguiendo con el tema veamos en la siguiente sección cuál es la forma de la velocidad de fase y grupo para cada onda con el propósito de corroborar lo que hemos dicho anteriormente.

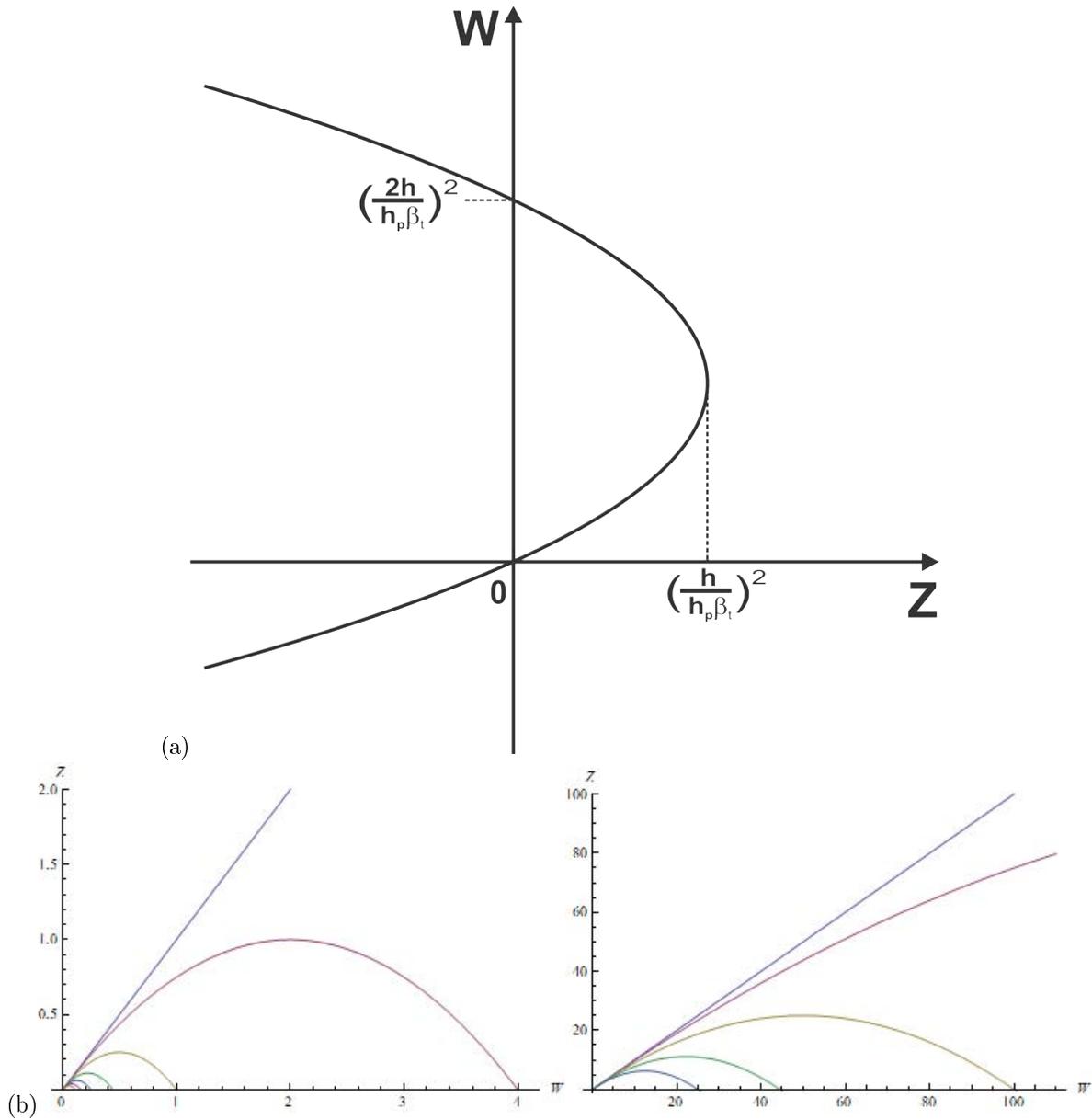


Figura 3.4: Gráfica de W vs $Z(W)$. Tanto W como Z son variables adimensionales ya que $W = \Omega^2$ y $Z = \zeta^2$. (a) Muestra la representación de la Ec.(3.37) de forma general, por lo que al emplear dos materiales concluimos que hay un número de onda máximo para $Z = h^2/h_p^2\beta_t^2$ en donde la velocidad de grupo transversal es cero, o bien, en una vecindad cercana a $W = 2h^2/h_p^2\beta_t^2$ la velocidad de grupo va disminuyendo teniendo, como consecuencia, ondas transversales ralentizadas. (b) Cada gráfica presenta las curvas de Ec.(3.37) para diferentes valores de β_t , entonces si la diferencia entre las propiedades mecánicas de los materiales va siendo grande la región donde la velocidad de grupo es negativa va disminuyendo, por el contrario, si la diferencia es pequeña la región de frecuencia es mayor pero cuando las propiedades son similares la Ec.(3.37) tiende a $Z = W$. La cantidad crítica de β_t para que una guía de ondas elásticas, como la que proponemos, presente una velocidad de grupo negativa está sujeta a la longitud de onda transversal por lo tanto si λ_t es igual al ancho de la placa hecha de otro material entonces no existe propagación de las ondas transversales.

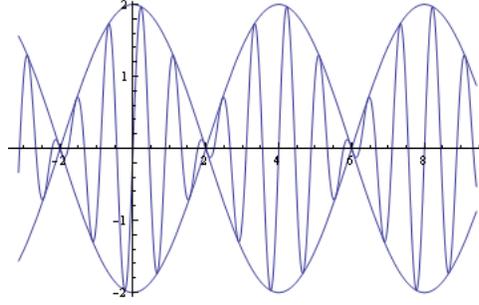


Figura 3.5: Tren de ondas.

3.3. Velocidad de fase y de grupo

El movimiento de un grupo de ondas puede considerarse como un tren de onda sinusoidal (Fig. 3.5) con frecuencia central y número de onda, mientras que el paquete varía lentamente en el espacio y en el tiempo. De esto, aparecen dos conceptos importantes para describir el movimiento del grupo de ondas: la *velocidad de fase* y la *velocidad de grupo*. La velocidad de fase es la velocidad aparente de una fase determinada de onda, por ejemplo, su cresta o punto de máxima intensidad y es paralela a la dirección de propagación. En el caso de ondas progresivas de tipo armónico, con una frecuencia angular bien definida, la velocidad de fase se determina a partir de la expresión $v_f = \omega/\kappa$. La velocidad de grupo es aquella con la que se propagan las señales de información de cualquier tipo, o bien, es la velocidad con la que se propaga la energía. La velocidad de grupo está definida por la relación $v_g = d\omega/d\kappa$. Se sabe que la velocidad de fase siempre es igual o mayor a la velocidad de grupo, como ejemplo, en una guía de onda las velocidades de grupo y de fase tienen el mismo valor en el espacio libre. Desde el punto de vista de la dinámica, la velocidad de grupo tiene una trascendencia física, el ritmo del transporte de energía, que lo hace más importante que la velocidad de fase. En este trabajo, hemos definido a las variables $C = c/c_t = \Omega/\zeta$ [37] y $C_g = d\Omega/d\zeta$ como la velocidad de fase y la velocidad de grupo, respectivamente.

3.3.1. Velocidad de fase de las ondas longitudinales

Como dijimos en la sección 3.2 para estudiar los casos por separado de las ondas longitudinales y transversales utilizando un análisis matemático similar al realizado por Mindlin [37]. La velocidad de fase es obtenida de la Ec.(3.22), entonces en primera instancia tomando η_l igual a cero la multiplicamos por $c_l^2 h^2 / c_t^2$ con el objetivo de adimensionalizar la expresión resultante y con la sustitución de los términos $\zeta = \kappa h$, $C = c/c_t$, $k = c_l/c_t$ y $\omega = \kappa c$, nos queda que la velocidad de fase para el caso de $\eta_l = 0$ es

$$C_{l3}^2 = k^2. \quad (3.39)$$

Como hemos dicho arriba, la Ec.(3.39) representa la *relación del número de onda de velocidad de fase* para las ondas longitudinales que se propagan en la guía con una placa, en su interior,

de diferentes propiedades. La velocidad de fase obtenida nos dice que la guía de ondas elásticas propuesta se comporta también como una guía de ondas común. Obtendremos otra relación para la velocidad de fase a partir de la Ec.(3.25), entonces conocemos el valor de la frecuencias ω por lo que al sustituirla en dicha ecuación y multiplicandola por $-3c_l^4 h/2c_t^4$ podemos expresarla en términos de parámetros adimensionales para que el análisis de la expresión que se obtenga sea más simple. De nueva cuenta sustituimos las variables ζ , C , k y aquí vuelve a presentarse las propiedades mecánicas de los materiales las cuales están representadas por la variable adimensional $\beta_l = \alpha_l c_t^2$ nos queda un ecuación cuadrática

$$C^4 + \left(\frac{3\beta_l h_p}{2h\zeta^2} - \frac{3}{\zeta^2} - 2 \right) k^2 C^2 + \left(\frac{3}{\zeta^2} + 1 \right) k^4 = 0, \quad (3.40)$$

que se puede resolver con la formula general para ecuaciones de segundo grado, por lo que las raíces de la Ec.(3.40) se obtiene para $C_{l_{1\pm}}^2$. Por otro lado, podemos encontrar la ecuación que relaciona el espectro de frecuencia con la velocidad de fase para las ondas longitudinales multiplicando la ecuación por ζ^2 , como se hizo en la sección 2.3.1.

Tenemos que una primera velocidad de fase es $C_{l_{3+}} = k$, donde k es la razón de las velocidades de propagación de las ondas elásticas c_l y c_t definidas por los valores E_0 , ρ_0 y σ_0 (los valores se presentan en la Tabla 3.1 para el acero AISI M2). Las otras velocidades de fase longitudinal que analizamos son

$$C_{l_{1\pm}} = \sqrt{\frac{k^2}{\zeta^2} \left(-\frac{3h_p\beta_l}{4h} + \zeta^2 + \frac{3}{2} \pm \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h} - 2 \right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}} \right)}. \quad (3.41)$$

La representación gráfica de las velocidades de fase (Ec.(3.41)) se muestra en la Fig. 3.6a donde mantenemos las mismas condiciones y materiales, que consideramos en las secciones anteriores, de los materiales (Acero (AISI M2)-PVC) usados para la guía de ondas elásticas, donde $\beta_l = \alpha_l c_t^2 = -0.150157$ y $k = 1.78155$. Al considerar el limite cuando $\beta_l \rightarrow 0$ de la velocidad de fase tenemos que $C_{l_{1+}} = \sqrt{k^2(3 + \zeta^2)/\zeta^2}$ y $C_{l_{1-}} = k$. Con este análisis se ha mostrado, una vez más, que la guía de ondas elásticas propuesta en este trabajo se comportaría como una guía común (lineal) si las propiedades mecánicas de los materiales usados fueran del mismo orden de magnitud. La velocidad de fase $C_{l_{1+}}$ diverge al tener valores pequeños de ζ y tiende a la constante k conforme aumenta el número de onda. En cambio, la velocidad de fase $C_{l_{1-}}$ presenta una singularidad cuando ζ es igual a cero, pero la cual es removible dado que si se toman valores cercanos a cero la velocidad de fase tiende a k . Entonces todas las ondas longitudinales que se propagan en la guía de ondas elásticas tienen una velocidad de fase constante.

3.3.1.1. Velocidad de grupo

Como sabemos la velocidad de grupo está dada por la derivada de la frecuencia con respecto del número de onda, $C_{gl} = d\Omega_l/d\zeta$, calcularemos de esta forma la velocidad de grupo para las ondas longitudinales. Lo primero que haremos es obtener la velocidad de grupo para el espectro de frecuencia $\Omega_{l_{3+}}$ (Ec.(3.27)), así que tenemos

$$C_{gl_{3+}} = k, \quad (3.42)$$

la ecuación anterior está relacionada con el espectro de frecuencias longitudinal $\Omega^2 = k^2\zeta^2$ para la parte positiva por como hemos definido a la constante k y a la variable adimensional ζ . Siguiendo con las operaciones para obtener la velocidad de grupo, derivando la Ec.(3.27) con respecto a ζ tenemos que

$$C_{gl_{1\pm,2\pm}} = \frac{\frac{k^2\zeta}{h} \left(h\sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h}-2\right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}} \mp h_p\beta_l \right)}{\Omega_{1\pm,2\pm} \sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h}-2\right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}}}, \quad (3.43)$$

donde $\beta_l = -0.150157$. De tal manera que hemos graficado (Fig. 3.6b) las ecuaciones

$$C_{gl_{1\pm}} = \frac{\frac{k^2\zeta}{h} \left(h\sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h}-2\right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}} \mp h_p\beta_l \right)}{\Omega_{1\pm} \sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h}-2\right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}}}, \quad (3.44)$$

junto con $C_{gl_{3+}} = 1.78155$. Como se observa en la Fig 3.6b las velocidades de grupo (Ec.(3.44)) están acotadas por el valor $k = 1.78155$. Tenemos que la velocidad de fase longitudinal ($C_{l_{3+}}$) y la velocidad de grupo longitudinal ($C_{gl_{3+}}$) son iguales⁶ para el espectro de frecuencias (modo de propagación) $\Omega_{l_{1-}}$. Si los materiales usados son de similares propiedades mecánicas entonces aplicamos el límite cuando β_l tiende a cero, por lo que

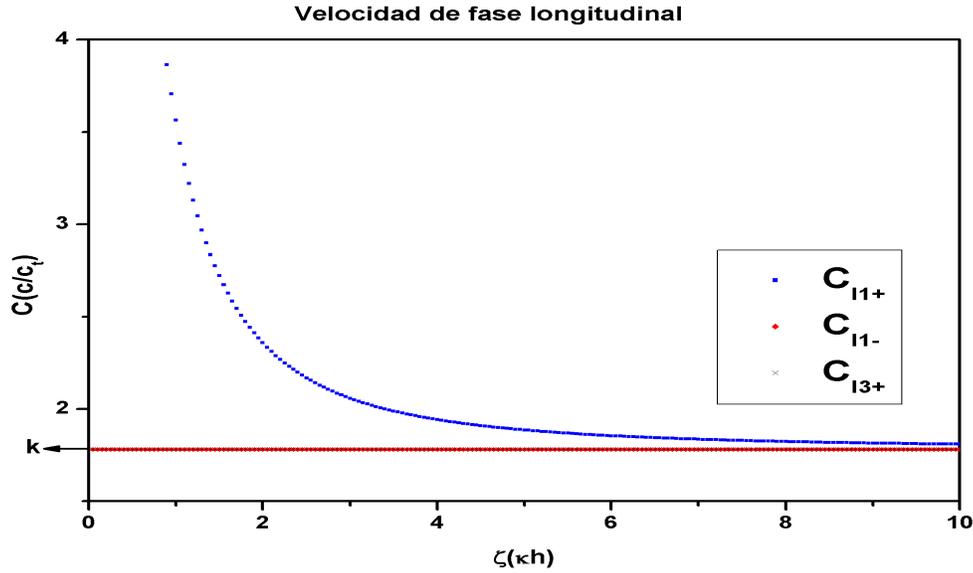
$$\lim_{\beta_l \rightarrow 0} C_{gl_{1+}} \approx \frac{k\zeta}{\sqrt{\zeta^2+3}} \text{ y } \lim_{\beta_l \rightarrow 0} C_{gl_{1-}} \approx k. \quad (3.45)$$

3.3.2. Velocidad de fase de las ondas transversales

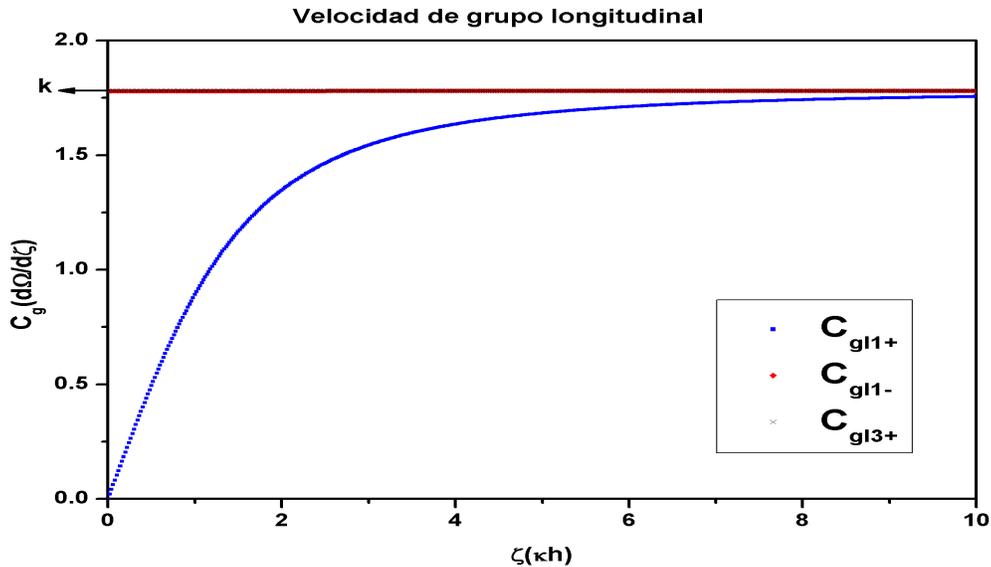
Si queremos conocer las velocidades de fase para las ondas transversales comenzamos con la parte de $\eta_t = \sqrt{-\kappa^2 + (\omega^2/c_t^2)} = 0$ en la cual haremos la sustitución de $\omega = \kappa c$, entonces si $C = c/c_t$ obtenemos que una primera velocidad de fase es $C_{t_1}^2 = 1$. Luego, de la Ec.(3.30) tenemos que el término relación $-2\kappa^2 + \omega^2/c_t^2 = 0$ llegamos a otra velocidad de fase donde $C_{t_2}^2 = 2$ al hacer la sustitución de $\omega = \kappa c$.

Lo que importa observar es los espectros de frecuencias $\Omega_{t_{1\pm}}$ (Ec.(3.34)) porque de ella es posible determinar la velocidad de grupo transversal y así constatar que la onda transversal transmitiría energía en dirección antiparalela a la velocidad de fase, o lo que significaría que las ondas transversales presentan una velocidad de grupo “*negativa*”, pero eso lo estaremos analizando en la siguiente sección. Empezamos con la sustitución de $\omega = \kappa c$ en la Ec.(3.31), así que solo la multiplicamos por $h^4/\alpha_t^2 c_t^4$ para introducir parámetros adimensionales y teniendo en cuenta que C , $\zeta = \kappa h$, y $\beta_t = \alpha_t c_t^2$, llegamos a

⁶Tal característica sucede cuando el material se encuentra en el vacío



(a) Si el valor del número de onda ζ es cercano a cero la relación $C_{l_{1+}}$ (Ec.(3.41)) diverge, en cambio, al ir incrementando su valor, ésta converge hacia la constante $k = C_{l_{3+}}$, manteniendo una similitud con respecto a la propagación de ondas elásticas a través de un medio elástico isótropo (veáse Fig. 2.5). Por otra parte, la velocidad de fase $C_{l_{1-}}$ (Ec.(3.41)) para valores de ζ pequeños ya es muy parecida a la constante k aunque los valores de la velocidad empiezan por debajo ésta.



(b) Las expresiones $C_{gl_{1+}}$, $C_{gl_{1-}}$ y $C_{gl_{3+}}$ están relacionadas con la derivada de los espectros de frecuencias $\Omega_{l_{1+}}$ y $\Omega_{l_{1-}}$ (Ec.(3.28)) y $\Omega_{l_{3+}} = k\zeta$, respectivamente. Cuando las valores del número de onda ζ son grandes la velocidad de grupo longitudinal $C_{gl_{1+}}$ tienden al valor de k como en el caso de ondas armónicas (sección 2.3.1) en una guía de ondas elásticas[37]. La velocidad de grupo $C_{t_{1-}}$ es parecida a la razón de las velocidades de propagación k para cualquier valor de ζ excepto en cero porque tenemos una singularidad pero que es removible.

Figura 3.6: Gráfica de las velocidades de fase $C_{l_{1+}}$, $C_{l_{1-}}$, $C_{l_{3+}}$ y de grupo $C_{gl_{1+}}$, $C_{gl_{1-}}$, $C_{gl_{3+}}$ para ondas longitudinales en la guía de ondas elásticas de Acero(AISI M2)-PVC. Las variables ζ y C son adimensionales que representan al número de onda y a la velocidad de fase, respectivamente. El parámetro k es adimensional y se obtiene de la división entre las velocidades de propagación c_l y c_t que para este caso es de 1.78155.

$$C^4 - \frac{4h^2}{h_p^2 \beta_t^2 \zeta^2} C^2 + \frac{4h^2}{h_p^2 \beta_t^2 \zeta^2} = 0, \quad (3.46)$$

como vemos la ecuación anterior puede ser obtenida de la división de la Ec.(3.32) entre el número de onda ζ y si tomamos el caso límite donde las propiedades son similares llegamos a expresiones para cuando no tenemos la placa en el interior de la guía de ondas,

$$\lim_{\beta_t \rightarrow 0} \left[C^4 - \frac{4h^2}{h_p^2 \beta_t^2 \zeta^2} C^2 + \frac{4h^2}{h_p^2 \beta_t^2 \zeta^2} \right] \approx -C^2 + 1, \quad (3.47)$$

$$C^2 = 1. \quad (3.48)$$

Para determinar los puntos donde Ec.(3.46) es cero usamos la fórmula general para obtener las raíces de ecuaciones de segundo grado, entonces

$$C_{t_{1\pm, 2\pm}}^2 = \frac{2h^2}{h_p^2 \beta_t^2 \zeta^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{h_p \beta_t \zeta}{h} \right)^2} \right). \quad (3.49)$$

En la Fig.(3.7a) se muestran las velocidades de fase transversal que obtuvimos

$$C_{t_{1\pm}} = \frac{\sqrt{2}h}{h_p |\beta_t \zeta|} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{h_p \beta_t \zeta}{h} \right)^2}}. \quad (3.50)$$

Habría que decir también que las velocidades de fase de arriba en $\zeta = h/h_p |\beta_t|$ siempre tendrán el valor de $\sqrt{2}$ no importa los materiales utilizados para la construcción de la guía de ondas elásticas que proponemos. Consideremos ahora el límite de las velocidades de fase transversal cuando $\beta_t \rightarrow 0$, concluyendo que la velocidad de fase $C_{t_{1+}}$ diverge y para $C_{t_{1-}}$ tenemos que

$$\lim_{\beta_t \rightarrow 0} C_{t_{1-}} \approx \frac{h}{2}. \quad (3.51)$$

3.3.2.1. Velocidad de grupo

La velocidad de grupo, $C_{gt} = d\Omega_t/d\zeta$, de las ondas transversales son determinadas de los espectros de frecuencias de las ecuaciones (3.33) y (3.34), así que éstas son

$$C_{gt} = \frac{d\Omega_{t_{1\pm, 2\pm}}}{d\zeta} = \mp \frac{\zeta}{\Omega_{t_{1\pm, 2\pm}} \sqrt{1 - \left(\frac{h_p \beta_t \zeta}{h} \right)^2}}, \quad (3.52)$$

$$C_{gt_3} = \pm 1, \quad C_{gt_4} = \pm \sqrt{2}. \quad (3.53)$$

Sabemos que el significado físico de la velocidad de grupo está relacionado con el ritmo del transporte de la energía lo cual la hace más importante que la velocidad de fase. En la gráfica (Fig. 3.7b) se muestra la velocidad de grupo transversal para la relación de dispersión $\Omega_{t_{1+}}$

$$C_{gt_{1+}} = - \frac{\zeta}{\Omega_{t_{1+}} \sqrt{1 - \left(\frac{h_p \beta_t \zeta}{h} \right)^2}}, \quad (3.54)$$

esto es la parte esencial que hemos buscado ya que la velocidad de grupo transversal para este caso es negativa teniendo como cota el valor de $h/h_p|\beta_t|$ (con $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$, $\beta_t = -0.156099$) y para valores mayores a éste tenemos números imaginarios lo que significa que se tienen ondas estacionarias. Se comprueba de este modo que la energía (velocidad de grupo) es antiparalelo al vector de fase con el simple hecho de introducir un material en una guía de ondas de distintas características a ésta. Se debe hacer constar el hecho de que Ω_{t_+} es positiva pero al derivarla con respecto a ζ la expresión resultante es negativa. La velocidad de grupo de la Fig.3.7b, de la relación de dispersión Ω_{t_1-} , se observa positiva tal como habíamos dicho en la sección 3.2.2

$$C_{gt_1-} = \frac{\zeta}{\Omega_{t_1-} \sqrt{1 - \left(\frac{h_p \beta_t \zeta}{h}\right)^2}}. \quad (3.55)$$

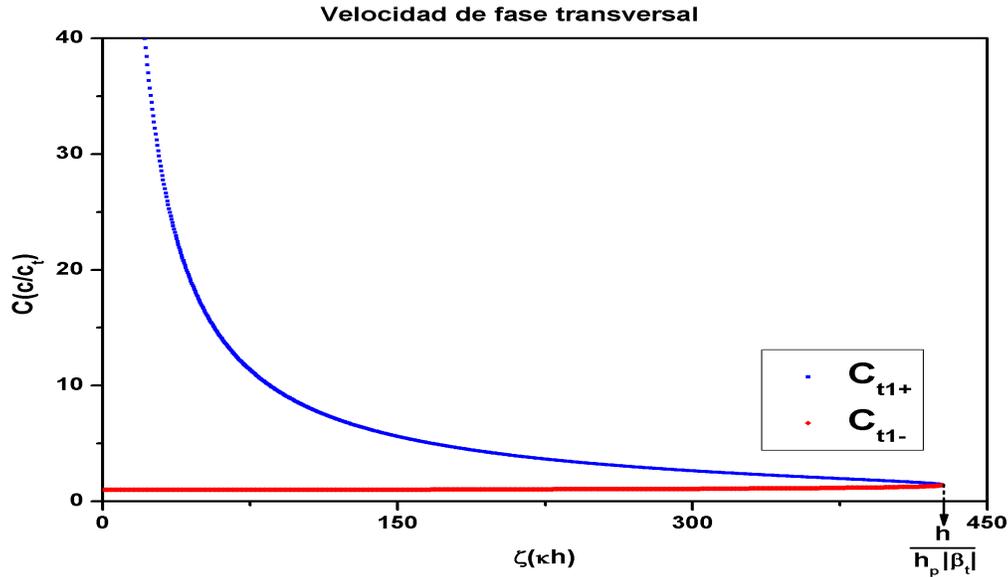
En las gráficas para la velocidad de grupo transversal existe un límite dado por $h/h_p|\beta_t| = 427.079$, ya que después de este valor la guía de ondas elástica de Acero-PVC no propaga energía.

Es significativa la importancia que tiene el haber tomado al acero y PVC debido a sus características mecánicas, con la diferencia entre sus módulos de elasticidad (E) obtenemos un perfil transversal evanescente para la guía de ondas elástica entonces, en principio, solo se propagan ondas a partir de una frecuencia de corte y no puede transmitir señales más allá de una cierta distancia pero vemos, con todo lo realizado anteriormente, las propiedades de la guía cambian. A causa de ello la guía de ondas elástica es capaz de propagar longitudes de onda mayores comparadas con el grosor de la guía que es un comportamiento contrario al de un modo de una guía ordinaria (Fig 3.3), las longitudes de onda se encontrarían en el rango de microondas y radiofrecuencias.

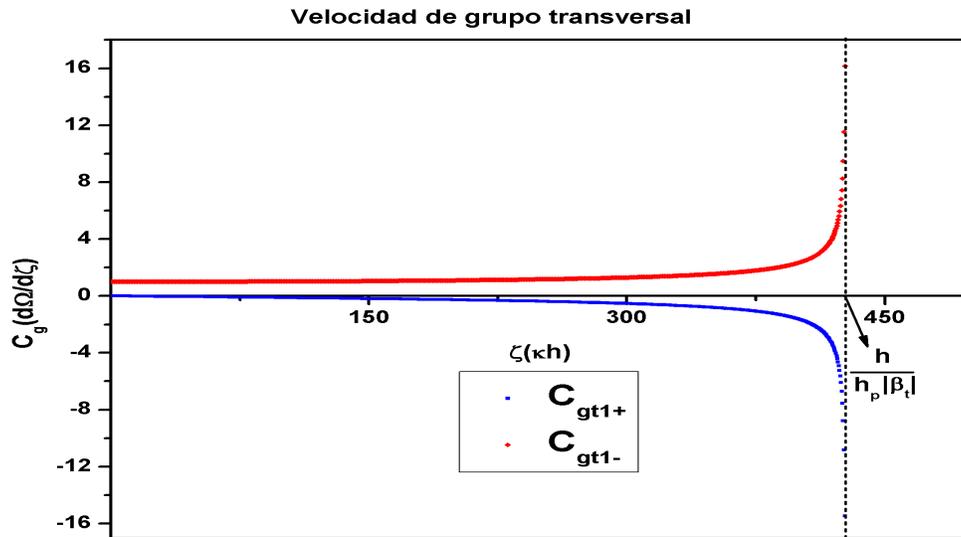
Antes de pasar adelante conviene señalar que también se realizó el estudio de una guía de ondas elásticas donde el material principal con el que está hecha la guía es PVC y la placa delgada en su interior es de acero, para también saber el comportamiento de la velocidad de grupo, alcanzando resultados parecidos a los obtenidos anteriormente pero para regiones más pequeñas. Las gráficas de los espectros de frecuencias, velocidades de fase y de grupo se encuentran en el apéndice C.

Se debe agregar que no sólo se tomaron en cuenta al acero y al PVC como posibles materiales para nuestra guía de ondas elásticas sino también escogimos dos materiales más, estos son el oro y el polietileno de baja densidad (PEBD) y donde volvemos a encontrar que la velocidad de grupo es negativa en el caso de las ondas transversales, las gráficas de espectros de frecuencias, velocidades de fase y grupo están en el apéndice C.

El propósito de emplear materiales con marcada diferencia con respecto al modulo de Young es para conseguir el perfil transversal evanescente ya que con materiales con módulos de similar magnitud no es posible alcanzarlo y por tal razón el análisis se sujeta al de una guía de ondas hecha de un único material lo cual no tendría mucho interés porque existe una gran cantidad de estudios sobre guías de ondas. Es posible verlo al aplicar el límite a la velocidad de grupo C_{gt_1-} (Ec.(3.55)) cuando $\beta_t \rightarrow 0$ donde el resultado es una constante, esto es, $\lim_{\beta_t \rightarrow 0} C_{gt_1-} \approx 1$.



(a) Las velocidades de fase $C_{t_{1+}}$ y $C_{t_{1-}}$ (Ec.(3.50)) presentan un límite en el valor de $\zeta = h/h_p|\beta_t|$ con $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = -0.156099$, no así cuando el valor de ζ es muy pequeño ya que ambas velocidades de fase transversal divergen. El valor de la velocidad de fase para $\zeta = h/h_p|\beta_t|$ es $\sqrt{2}$ sin importar los materiales usados para la guía de ondas elásticas.



(b) En el intervalo $(0, h/h_p|\beta_t|)$, donde $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = -0.156099$, vemos que aparece una velocidad de grupo transversal negativa relacionada con el espectro de frecuencias $\Omega_{t_{1+}}$. Si $\zeta = h/h_p|\beta_t|$ tanto $C_{gt_{1+}}$ (Ec.(3.54)) como $C_{gt_{1-}}$ (Ec.(3.55)) no están determinadas, después de tal valor la velocidad de grupo toma valores imaginarios y por tanto no existiría propagación de energía.

Figura 3.7: Gráfica de las velocidades de fase $C_{t_{1+}}$, $C_{t_{1-}}$ y de grupo $C_{gt_{1+}}$ y $C_{gt_{1-}}$ para ondas transversales en la guía de ondas elásticas de Acero-PVC. Las variables ζ , C y C_g son adimensionales que representan al número de onda, a la velocidad de fase y a la velocidad de grupo, respectivamente. Debemos tener claro que la cantidad de β_t se obtiene al introducir las propiedades mecánicas del acero AISI M2 y del PVC (Tabla 3.1) en α_t y c_t .

Con la introducción de los valores de la tabla C.1 en los espectros de frecuencia, velocidades de fase y de grupo desarrolladas en este capítulo son cualitativamente parecidas con las que mostramos en las figuras (3.2), (3.3), (3.6a), (3.7a), (3.6b) y (3.7b) que se pueden ver en el apéndice C.

Capítulo 4

Conclusiones

Desarrollamos un modelo para una guía de ondas elástica constituida por un medio isotrópico y homogéneo en el cual se inserta una placa plana delgada de dos órdenes de magnitud menor comparada con el grosor de la guía cuyas propiedades elásticas son radicalmente distintas (modulo de Young, densidad y constante de Poisson) con respecto al material del cual está constituida la guía de ondas propuesta. La presencia de esta placa plana origina condiciones de frontera peculiares que se manifiestan como cambios abruptos en las elongaciones y dan lugar a posibles soluciones cuyo perfil transversal espacial es evanescente. De esta manera se obtuvieron para propiedades elásticas arbitrarias las relaciones de dispersión para las ondas elásticas (longitudinal y transversal, respectivamente) que se propagan en este sistema propuesto. Para ejemplificar nuestro modelos consideramos un par de parejas de materiales particulares para efectuar cálculos numéricos.

Los modos de propagación de perfil transversal evanescente que hallamos nos permiten verificar en primera instancia que para las ondas longitudinales los espectros de frecuencia son parecidos a las que se presentan cuando no hay otro medio en el interior de la guía. En un primer modo se obtiene una frecuencia de corte que en primera es similar a una guía de ondas elásticas normal (lineal) y para otro modo se cubre todo el espectro de frecuencias de las ondas longitudinal sin exhibir frecuencias de corte así que puede transmitir cualquier señal (longitud de onda) que incida sobre la guía. Podemos afirmar que la guía propuesta se comporta como un “*absorbente acústico*” para cualquier onda elástica que se propaga en la guía. También se observó que las velocidades de fase y grupo son iguales para uno de los espectros de frecuencias longitudinales. Resulta, pues, que los modos de propagación para las ondas transversales muestran intervalos donde éstos están limitados por un valor determinado del número de onda en el cual las propiedades mecánicas de los materiales tienen influencia. Es decir, sólo cuando la pareja de materiales, usados en la construcción de la guía de ondas, mantienen una diferencia con respecto a sus valores de sus módulos de Young de tres órdenes de magnitud se conserva la forma de la estructura de bandas.

Por otro lado si los valores de sus propiedades elásticas de ambos materiales son del mismo orden de magnitud los espectros de frecuencias, las velocidades de fase y grupo serían análogas a las de una guía construida a partir de un solo material. Esto debido a que las ecuaciones

que gobierna a los modos con perfil transversal exponencial decayente no tiene solución. Sin embargo, las ecuaciones que corresponden a los modos con perfil oscilante siempre tienen solución.

Los resultados de este estudio muestran que existe un intervalo de frecuencias para el que la energía elástica la cual viaja en la dirección de la velocidad de grupo (velocidad de grupo transversal) se transmitiría en dirección opuesta a la velocidad de fase en la guía de ondas elásticas. A esta propiedad se le conoce como velocidad de grupo negativa. Esta característica peculiar para nuestra guía de ondas elástica, aquí propuesta, es similar a la presentada por algunas guías de onda formadas con metamateriales elásticos. Un ejemplo de la ventaja de un metamaterial elástico que tiene sobre uno común es en la aplicación de lentes ya que estos obtienen imágenes de gran resolución superando el límite de difracción. Cabe señalar que existen en la literatura científica multitud de materiales microestructurados elaborados cuyo comportamiento macrosocópico medio o efectivo da lugar a metamateriales. Sin embargo, el principal obstáculo que se interpone en el desarrollo de los metamateriales es la escasa existencia de procesos de fabricación adecuadas para la síntesis de metamateriales.

En nuestro caso hemos propuesto una guía de ondas elástica cuya estructura es mucho más simple, sin embargo logra proporcionar algunas de las características connotadas para una guía de metamaterial. Los resultados de nuestro estudio nos permite proponer guías de ondas acústicos con propiedades análogas a las guías de metamateriales a partir de guía de ondas elásticas con técnica de fabricación menos complejas. Este tipo de guías de onda elásticas tiene aplicaciones en áreas como sismología o ultrasonografía, también en programas militares.

Mostramos además que esta guía de ondas cuenta con modos que propagan señales cuya longitud de onda es mucho más grande que la dimensión característica de la guía de ondas y que de hecho no permite conducir señales de longitud de onda corta constituyéndose de ésta forma como un filtro pasa bajos. Este comportamiento es contrastante con el de una guía de ondas común pero es similar al que muestran algunas guía hechas en base a metamateriales.

Finalmente, los modos evanescentes de esta guía reducen su velocidad de grupo en la medida que su longitud de onda se escoge más larga dando lugar a propagación de señales extremadamente lenta.

Apéndice A

Guías de ondas elásticas

La importancia de la ecuación diferencial de onda es que nos proporciona información de como la onda longitudinal (en este caso) se propaga en un medio, por ello la guía de ondas elásticas que estamos estudiando también es tratada a través de la ecuación diferencial de onda

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde c_l está determinada a través de las propiedades del medio (K , ρ , μ) por $c_l = \sqrt{(3K + 4\mu)/3\rho}$ entonces si la guía de ondas elásticas tiene una placa en su interior la cual tiene diferentes propiedades (K_1 , ρ_1 , μ_1) con los valores de las propiedades mecánicas son definidas en la Ec.(3.1) para la guía propuesta, donde $\Delta K = K_0 - K_1$, $\Delta\rho = \rho_0 - \rho_1$ y $\Delta\mu = \mu_0 - \mu_1$. Es más, las cantidades del módulo de compresibilidad (K), de la densidad (ρ) y del módulo de cizalladura (μ) de los materiales empleados en la fabricación de la guía de ondas elásticas pueden tener cualquier valor, así que al c_l junto con el potencial $\varphi = f(\xi h) \exp[i\kappa(x - ct)]$ en la ecuación diferencial de onda ahora es de la forma

$$\begin{aligned} & [3\rho_0\omega^2 - (3K_0 + 4\mu_0)\kappa^2] f(\xi h) + \frac{(3\Delta K + 4\Delta\mu)h_p\delta(\xi)}{h^3} \frac{\partial^2 f(\xi h)}{\partial \xi^2} \\ & + \frac{3K_0 + 4\mu_0}{h^2} \frac{\partial^2 f(\xi h)}{\partial \xi^2} + \frac{(3\Delta\rho\omega^2 - (3\Delta K + 4\Delta\mu)\kappa^2)h_p\delta(\xi)f(\xi h)}{h} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Nuestro desarrollo teórico es correcto porque cuando las diferencias ΔK , $\Delta\rho$ y $\Delta\mu$ son casi nulas, es decir, los materiales empleados tienen propiedades mecánicas del mismo orden de magnitud, la ecuación anterior representa la ecuación diferencial de onda de una guía de ondas común. Lo siguiente que hicimos fue integrar la Ec.(A.2) desde $-\xi$ a $+\xi$ ya que es distancia es el ancho de la guía de ondas elásticas. Ha llegado el momento para aplicar el límite cuando $\xi \rightarrow 0$ con el propósito de determinar la condición de frontera de la placa en el interior de la guía de ondas. Continuando análisis, conviene subrayar que la función $f(\xi h)$ es continua en el espacio de la guía de ondas que estudiamos, es decir $f(\xi h)|_{\xi^+} = f(\xi h)|_{\xi^-}$, lo cierto es que “*si f es una función continua en $[a, b]$ entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ donde $a \leq x \leq b$ es derivable y verifica $F'(x) = f(x)$ para toda x del intervalo*” (Teorema fundamental del cálculo) con esto podemos ir reduciendo términos de la expresión que estamos tratando. Si consideramos ahora

una de las propiedades de la delta de Dirac: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon = f(0)$, entonces tenemos

$$\frac{3K_0+4\mu_0}{h^2} \frac{\partial f(\xi h)}{\partial \xi} \Big|_{0^-}^{0^+} + \frac{(3\Delta K+4\Delta\mu)h_p}{h^3} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial \xi^2} + \frac{(3\Delta\rho\omega^2-(3\Delta K+4\Delta\mu)\kappa^2)h_p f(0)}{h} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Prosiguiendo con el análisis volvamos a la Ec.(A.2), entonces si consideramos la parte alejada de la placa tenemos un comportamiento de una guía de ondas lineal, es decir,

$$(3\rho_0\omega^2 - (3K_0 + 4\mu_0)\kappa^2) f(\xi h) + \frac{3K_0+4\mu_0}{h^2} \frac{\partial^2 f(\xi h)}{\partial \xi^2} = 0, \quad (\text{A.4})$$

y como se dijo antes la función $f(\xi h)$ es continua, o sea, $f(0^+) = f(0^-)$ por lo tanto se cumple que la segunda derivada también lo es $(\partial^2 f(0^+)/\partial \xi^2) = (\partial^2 f(0^-)/\partial \xi^2)$, entonces al evaluar la segunda derivada en cero tenemos

$$\frac{\partial^2 f(0)}{\partial \xi^2} = -\frac{(3\rho_0\omega^2 - (3K_0 + 4\mu_0)\kappa^2)h^2 f(0)}{3K_0 + 4\mu_0}. \quad (\text{A.5})$$

Con la sustitución de la segunda derivada en la Ec.(A.3) se determina la condición de frontera de la placa

$$\frac{\partial f(\xi h)}{\partial \xi} \Big|_{0^+} - \frac{\partial f(\xi h)}{\partial \xi} \Big|_{0^-} = -\alpha_l \omega^2 h h_p f(0), \quad (\text{A.6})$$

donde $\alpha_l = \alpha_l [K_0, \rho_0, \mu_0, K_1, \rho_1, \mu_1]$

$$\alpha_l = \frac{3((3K_0+4\mu_0)\Delta\rho - \rho_0(3\Delta K+4\Delta\mu))}{(3K_0+4\mu_0)^2}. \quad (\text{A.7})$$

Para el caso de las ondas transversales, la velocidad de propagación es $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$, tenemos que hacer lo mismo que lo realizado para las ondas longitudinales, al sustituirla junto con el potencial $\psi = g(\xi h) \exp[i\kappa(x - ct)]$, donde $g(\xi h)$ es continua, en la ecuación diferencial de onda

$$\frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = 0, \quad (\text{A.8})$$

se tiene

$$\begin{aligned} & (\rho_0\omega^2 - \mu_0\kappa^2) g(\xi h) + \frac{\Delta\mu h_p \delta(\xi)}{h^3} \frac{\partial^2 g(\xi h)}{\partial \xi^2} \\ & + \frac{\mu_0}{h^2} \frac{\partial^2 g(\xi h)}{\partial \xi^2} + \frac{(\Delta\rho\omega^2 - \Delta\mu\kappa^2)h_p \delta(\xi)g(\xi h)}{h} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

se puede hacer esto ya que el módulo de Young, la densidad y el módulo de cizalladura pueden tener cualquier valor. Después integramos la Ec.(A.9) desde $-\xi$ a $+\xi$ y se le aplica el límite cuando $\xi \rightarrow 0$ para determinar la condición de frontera de la placa relacionada con las ondas transversales. Con la propiedad de la delta de Dirac para una función continua de $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon = g(0)$ junto con el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\frac{\mu_0}{h^2} \frac{\partial g(\xi h)}{\partial \xi^2} \Big|_{0^-}^{0^+} + \frac{\Delta\mu h_p}{h^3} \frac{\partial^2 g(0)}{\partial \xi^2} + \frac{(\Delta\rho\omega^2 - \Delta\mu\kappa^2)h_p g(0)}{h} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Como en el caso de las ondas longitudinales al estar fuera de la placa tenemos el comportamiento de una guía de ondas lineal, por lo que la Ec.(A.9) es ahora

$$(\rho_0\omega^2 - \mu_0\kappa^2)g(\xi h) + \frac{\mu_0}{h^2}\frac{\partial^2 g(\xi h)}{\partial \xi^2} = 0, \quad (\text{A.11})$$

donde la segunda derivada $(\partial^2 g(0^+)/\partial \xi^2) = (\partial^2 g(0^-)/\partial \xi^2)$ es continua porque $g(\xi h)$ se definió así, entonces podemos despejar a $\partial^2 g(\xi h)/\partial \xi^2$ de la ecuación anterior evaluada en cero

$$\frac{\partial^2 g(0)}{\partial \xi^2} = -\frac{(\rho_0\omega^2 - \mu_0\kappa^2)h^2 g(0)}{\mu_0}. \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto, la condición de frontera de la placa relacionada a las ondas transversales, al sustituir la segunda derivada en la Ec.(A.10), es

$$\left. \frac{\partial g(\xi h)}{\partial \xi} \right|_{0^+} - \left. \frac{\partial g(\xi h)}{\partial \xi} \right|_{0^-} = -\alpha_t \omega^2 h h_p g(0), \quad (\text{A.13})$$

con $\alpha_t = \alpha_t [K_0, \rho_0, \mu_0, K_1, \rho_1, \mu_1]$

$$\alpha_t = \frac{\mu_0 \Delta \rho - \rho_0 \Delta \mu}{\mu_0^2}. \quad (\text{A.14})$$

Apéndice B

Velocidad de Grupo

B.1. Ondas Longitudinales

Los espectros de frecuencias para la ondas longitudinales están determinadas en la Ec.(3.27). Se observa que la velocidad de grupo para el espectro $\Omega_{l_{3+}}$ es constante $C_{gl_{3+}} = k$. Consideremos ahora los espectros $\Omega_{l_{1\pm}}$ al derivarlo con respecto a ζ se llega a lo siguiente

$$\frac{d\Omega_{l_{1\pm}}}{d\zeta} = k \left[\frac{\zeta \left(1 \mp \frac{h_p\beta_l}{h} \left(\left(\frac{h_p\beta_l}{h} - 2 \right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\sqrt{-\frac{3h_p\beta_l}{4h} + \zeta^2 + \frac{3}{2} \pm \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h} - 2 \right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}}}} \right], \quad (\text{B.1})$$

después multiplicando arriba y abajo por el radical del denominador se tiene

$$\frac{d\Omega_{l_{1\pm}}}{d\zeta} = k\zeta \left[\frac{1 \mp \frac{h_p\beta_l}{h} \left(\left(\frac{h_p\beta_l}{h} - 2 \right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h} \right)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{\Omega_{l_{1\pm}}}{k}} \right], \quad (\text{B.2})$$

Finalmente pasamos el radical restante al denominador y sumamos para obtener

$$C_g = \frac{k^2\zeta}{h} \left[\frac{h \sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h} - 2 \right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}} \mp h_p\beta_l}{\Omega_{l_{1\pm}} \sqrt{\left(\frac{h_p\beta_l}{h} - 2 \right)^2 - \frac{8h_p\beta_l\zeta^2}{3h}}} \right]. \quad (\text{B.3})$$

B.2. Ondas transversales

Las Ecs.(3.33) determinan los espectros de frecuencia para las ondas transversales. De los últimos espectros de frecuencias se ve que la velocidad de grupo es constante $C_g = \pm 1$ y

$C_g = \pm\sqrt{2}$, pero del primer espectro se obtiene

$$\frac{d\Omega_{t_{1\pm}}}{d\zeta} = \frac{\mp \frac{\sqrt{2}h_p\beta_t\zeta}{h} \left(1 - \frac{h_p^2\beta_t^2\zeta^2}{h^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{h_p^2\beta_t^2\zeta^2}{h^2}}}}, \quad (\text{B.4})$$

que simplificando

$$\frac{d\Omega_{t_{1\pm}}}{d\zeta} = \frac{\mp \frac{\sqrt{2}h_p\beta_t\zeta}{h}}{2\sqrt{1 - \frac{h_p^2\beta_t^2\zeta^2}{h^2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{h_p^2\beta_t^2\zeta^2}{h^2}}}}, \quad (\text{B.5})$$

que se puede simplificar insertando además el valor de $\Omega_{t_{1\pm}}$

$$C_g = \frac{\mp\zeta}{\Omega_{t_{1\pm}} \sqrt{1 - \frac{h_p^2\beta_t^2\zeta^2}{h^2}}}. \quad (\text{B.6})$$

Apéndice C

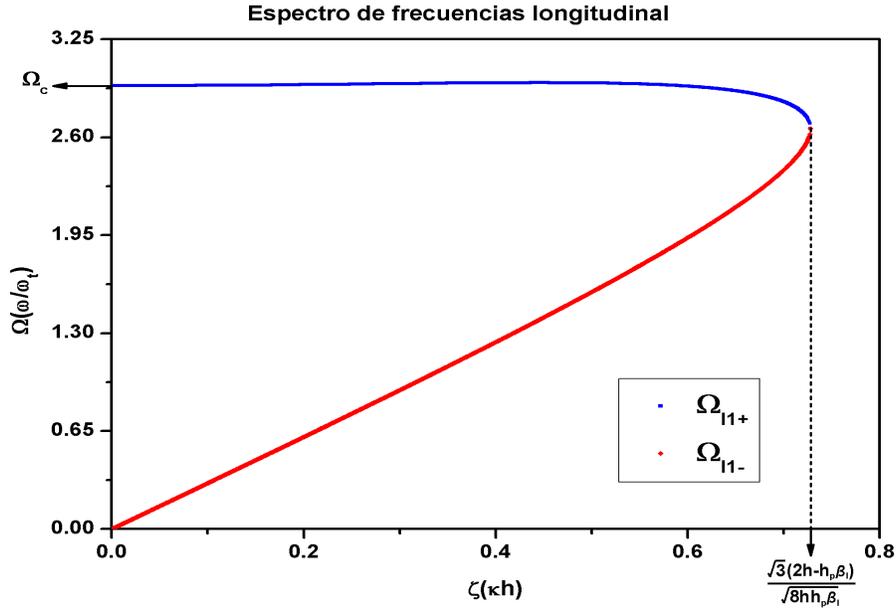
Guía de ondas elásticas de distintos materiales

C.1. Guía de ondas PVC-Acero

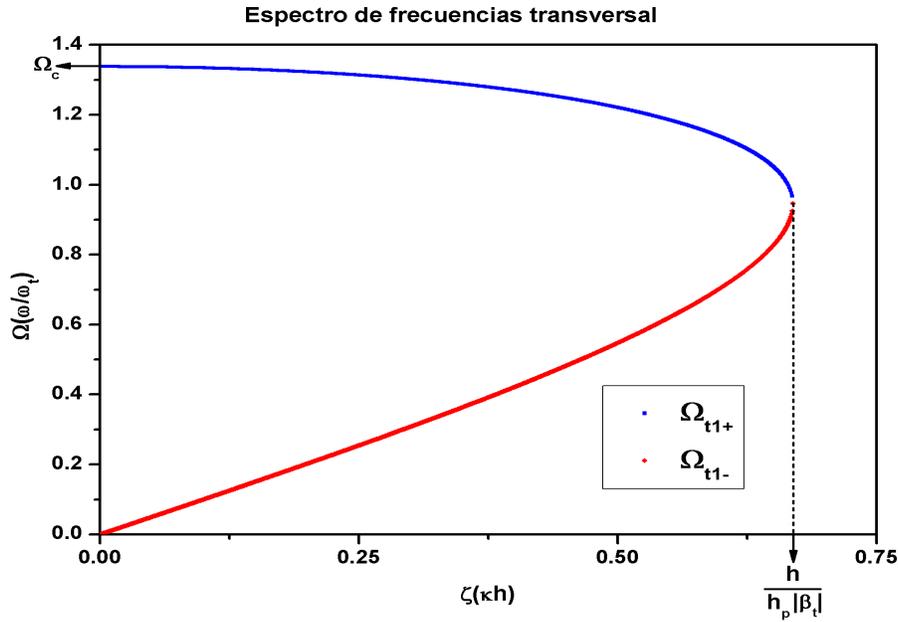
Las propiedades mecánicas utilizadas se muestran en la tabla 3.1 de donde las constantes E_0 , ρ_0 y σ_0 están relacionadas al policloruro de vinilo y E_1 , ρ_1 , σ_1 con el acero AISI M2. El cambio de los materiales hace que los modos de las ondas longitudinales sean muy parecidos a los relacionados con las ondas transversales (Fig.3.3) por la diferencia entre los valores de E , ρ y σ de cada material. Esta peculiaridad es interesante para su estudio ya que su significado aún se sigue analizando por tal motivo dejaremos esto para futuros trabajos.

En la Fig. C.1a se graficaron las ecuaciones mencionadas para las ondas longitudinales donde vemos que existe una frecuencia de corte relacionada a $\Omega_{l_{1+}}$ donde el valor, de esta constante adimensional, es $\Omega_c = 2.94215$. Al comparar los espectros de frecuencia longitudinal obtenidos para una guía de ondas elásticas hecha de policloruro de vinilo y con una placa de acero en su interior con los de la Fig. 3.2 son diferentes ya que para el valor de $\zeta = \sqrt{(3/2)(h/h_p\beta_l - 1)}$ donde $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_l = 58.871$ el modo $\Omega_{l_{1+}}$ es positivo llegando a una máximo y un mínimo para $\zeta = \sqrt{3}(2h - h_p\beta_l)/\sqrt{8hh_p\beta_l}$ así como una frecuencia de corte menor que la de la guía de ondas de Acero-PVC¹. Por otro lado, hemos graficado los espectros de frecuencias transversal $\Omega_{t_{1+}}$ y $\Omega_{t_{1-}}$ (Fig. C.1b) porque tienen un límite dado por el valor de $h/h_p |\beta_t|$ para $\beta_t = 99.6256$, así que la región de frecuencias que se observa es llamada “*filtro pasa bajos*”. La región está determinada en $[0, 1.33834]$ para valores $0 \leq \zeta \leq h/h_p |\beta_t|$. Tenemos que las velocidades de fase $C_{l_{1\pm}}$ (Ec.(3.41)) tienen el mismo valor cuando $\zeta = \sqrt{3}(2h - h_p\beta_l)/\sqrt{8hh_p\beta_l}$ (Fig. C.2a). En cambio, las velocidades de fase transversal $C_{t_{1\pm}}$ (Ec.(3.50)) llegan al valor de $\sqrt{2}$ para el número de onda $\zeta = h/h_p |\beta_t|$ (Fig. C.2a). Ahora bien, la velocidad de grupo longitudinal $C_{gl_{1+}}$ (Ec.(3.44)) (Fig. C.2b) tiene una región donde la velocidad es negativa, el comportamiento de la expresión no dista mucho en la forma, más no en cantidad, de lo que se encontró en la Fig. 3.7b, de igual forma pasa con las velocidades de grupo transversal $C_{gt_{1+}}$ y $C_{gt_{1-}}$ (Fig. C.3).

¹La frecuencia de corte para la guía de ondas elásticas de Acero-PVC es $\Omega_c = 3.08747$.

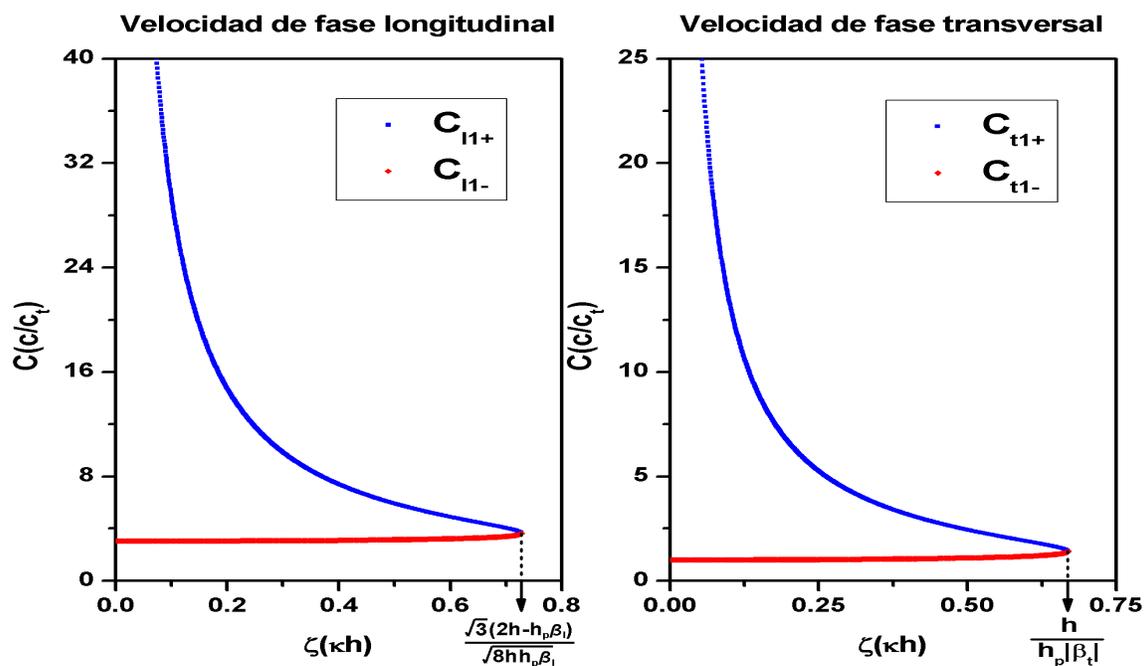


(a) Espectros de frecuencias longitudinales $\Omega_{l_{1\pm}}$. Las ecuaciones que definen a los espectros de frecuencias se muestran en la Ec.(3.28) con una frecuencia de corte $\Omega_c = 2.94215$.

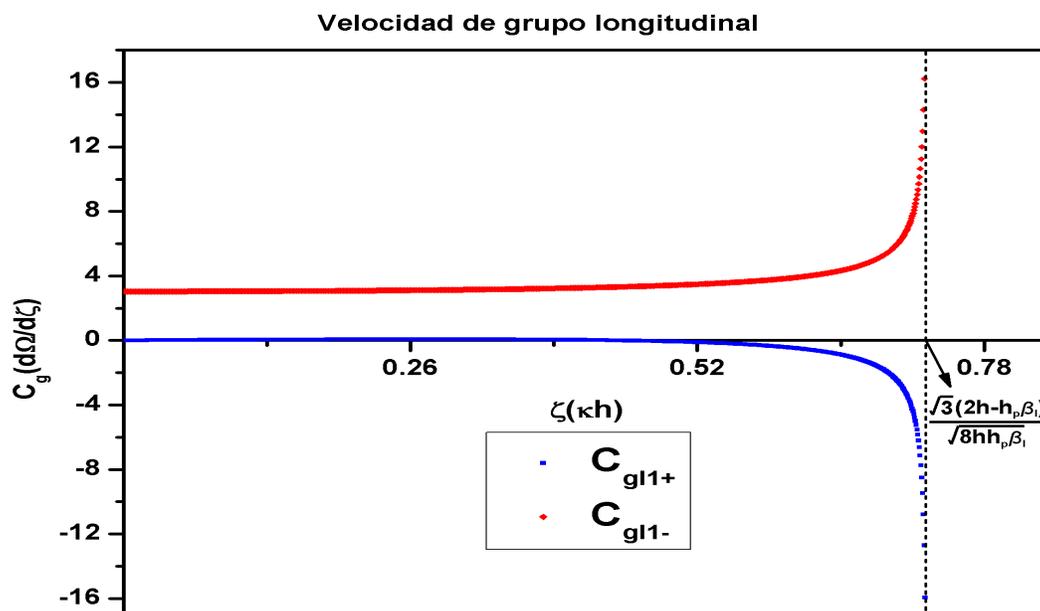


(b) Espectros de frecuencias transversales $\Omega_{t_{1\pm}}$. Las ecuaciones que definen a los espectros de frecuencias se muestran en la Ec.(3.34) con una frecuencia de corte $\Omega_c = 1.33834$. Si se toman valores del número de onda adimensional ζ entre $[0, h/h_p|\beta_t|]$, donde $\beta_t = 99.6256$, resulta una región de frecuencias $[0, 1.33834]$ llamada filtro pasa bajos.

Figura C.1: Gráficas de los espectros de frecuencia longitudinales (a) y transversales (b) para una guía de ondas elásticas PVC-Acero(AISI M2). Los valores que fueron utilizados para la representación grafica de los espectros de frecuencia Ω aparecen en la tabla 3.1. Los parámetros Ω y ζ , como ya se ha mencionado en las diferentes figuras de esta tesis, son adimensionales.



(a) Velocidad de fase longitudinal y transversal. Las velocidades de fase $C_{l_{1\pm}}$ están en la sección 3.3.1 (Ec.(3.41)) donde $\beta_l = 58.871$. Las velocidades de fase $C_{t_{1\pm}}$ están en la sección 3.3.2 (Ec.(3.50)) donde $\beta_t = 99.6256$.



(b) Velocidad de grupo longitudinal. Las velocidades de grupo $C_{gl_{1\pm}}$ están en la sección 3.3.1.1 (Ec. (3.44)).

Figura C.2: Gráficas de las velocidades de fase y grupo de las ondas longitudinales y transversales de una guía de ondas elásticas de PVC-Acero (veáse la tabla 3.1). Las variables C , C_g y ζ representan a la velocidad de fase, velocidad de grupo, número de onda, respectivamente, son adimensionales. (b) La velocidad de grupo longitudinal es negativa para el modo $C_{gl_{1+}}$ esto sucede cuando ζ está entre 0.44618 y 0.72786.

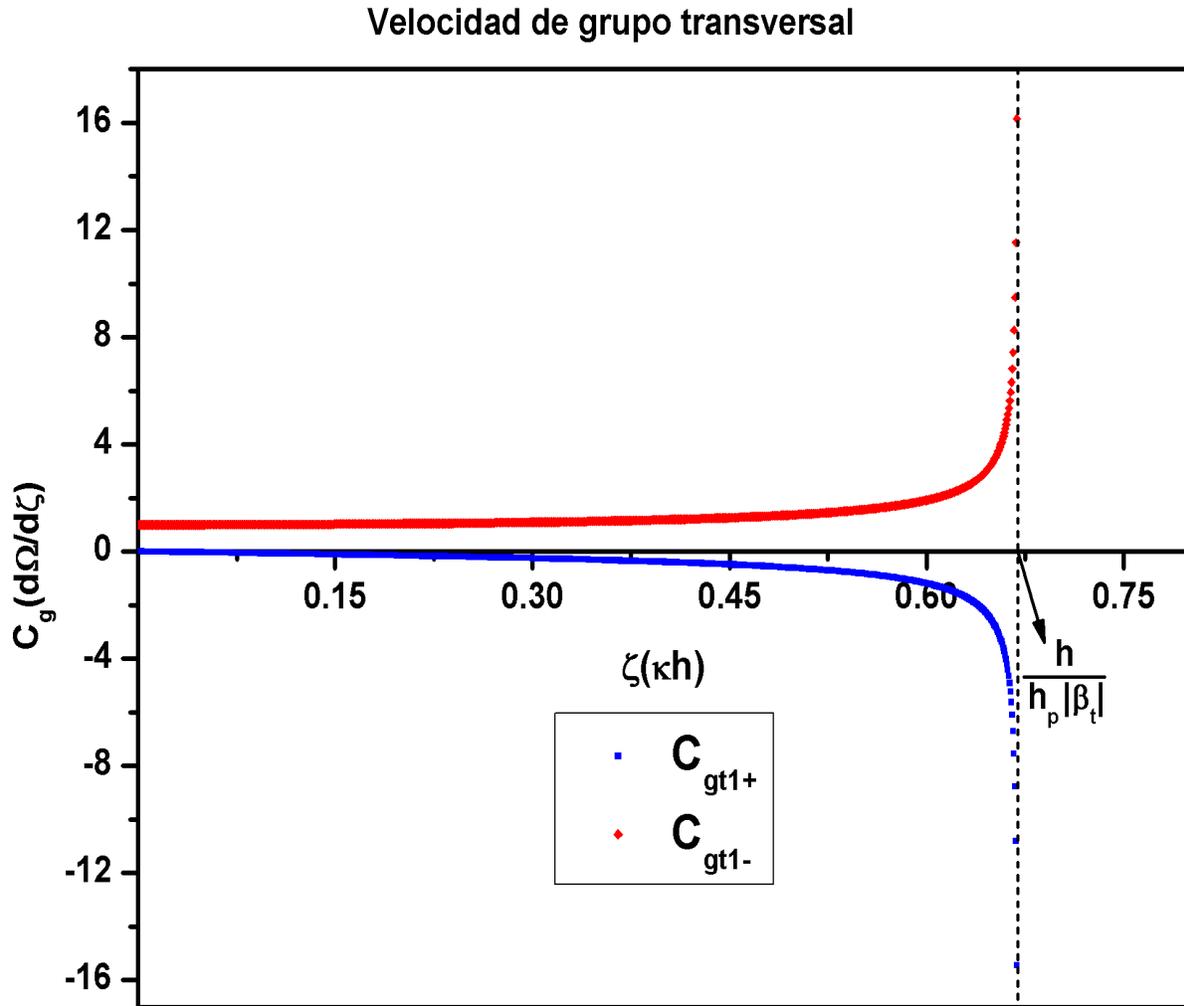


Figura C.3: Gráficas de las velocidades de grupo transversales $C_{gt_{1\pm}}$ (Ec.(3.54) y Ec.(3.55), respectivamente) para la guía de ondas elástica de PVC-Acero(AISI M2). En la gráfica se comprueba que la velocidad de grupo $C_{gt_{1+}}$ es negativa en el intervalo de $[0, h/h_p|\beta_t|]$ que en un principio se puede observar en la Fig. C.1b, donde $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = 99.6256$. Para valores de ζ mayores a $h/h_p|\beta_t|$ la velocidad de grupo es imaginaria por lo tanto ya no existe propagación de ondas transversales. El valor de la velocidad de grupo para $h/h_p|\beta_t|$ está indeterminado en ambos los espectros $\Omega_{t_{1\pm}}$.

C.2. Guía de ondas de Oro-PEBD y viceversa

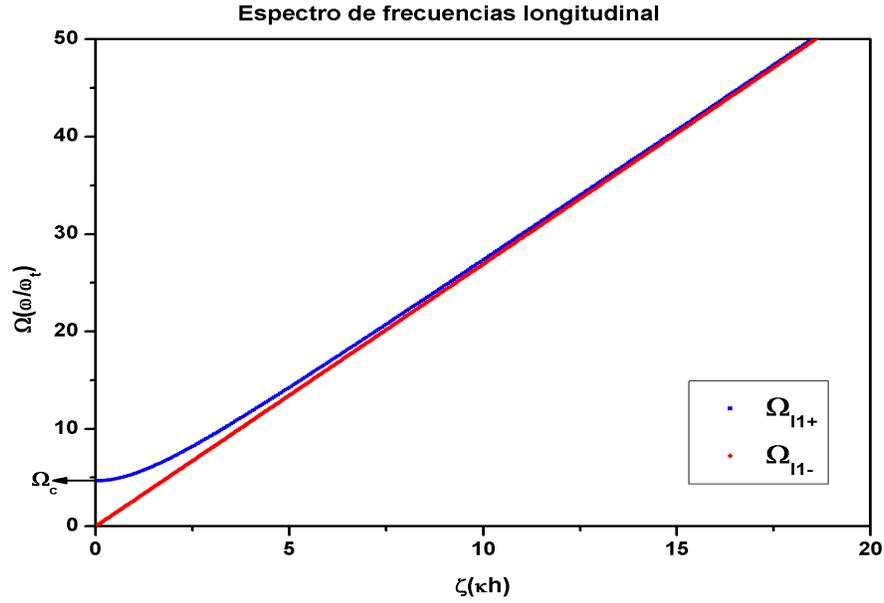
Se muestran las gráficas que se obtienen a partir de las expresiones de espectros de frecuencias (Ec.(3.27)), velocidades de fase (ecuaciones $C_{11} = k = 2.69258$, (3.41) y (3.50)) y de grupo (ecuaciones (3.44), (3.54) y (3.55)) con la sustitución de los valores de la tabla siguiente

	Módulo de Young (E) $\frac{kg}{m \cdot s^2}$	Densidad (ρ) $\frac{kg}{m^3}$	Coefficiente de Poisson (σ)
Oro	78.5×10^9	19300	0.42
PEBD	0.1×10^9	920	0.38

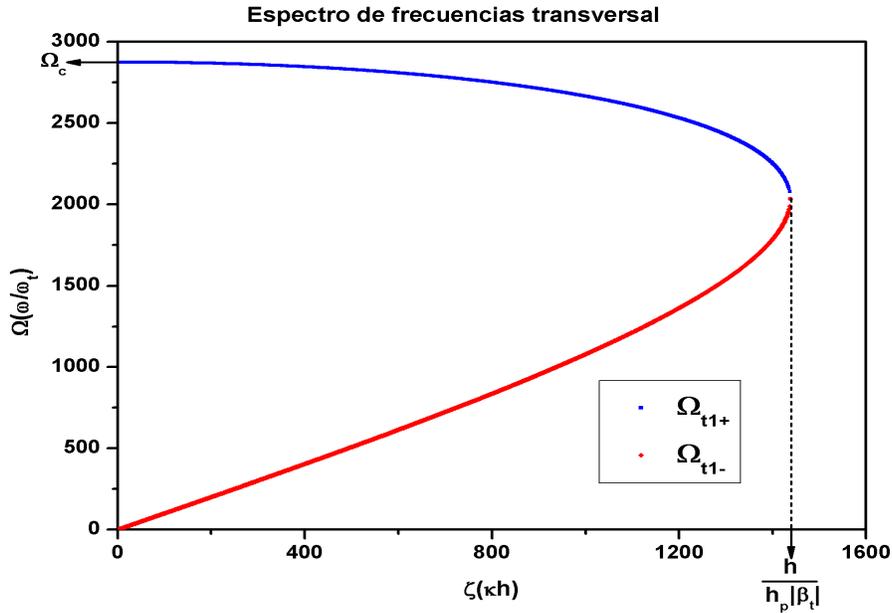
Tabla C.1: Características del Oro y del Polietileno de baja densidad (PEBD)[51, 52].

Tomando en consideración que las constantes E_0 , ρ_0 y σ_0 pertenecen al oro y las E_1 , ρ_1 , σ_1 al polietileno de baja densidad (PEBD). Podemos ahora percatarnos que la frecuencia de corte es mayor si la comparamos con la frecuencia de corte para la guía de ondas elásticas de Acero-PVC, $\Omega_c = 4.66451$ y en relación con las ondas transversales la frecuencia de corte es $\Omega_c = 2876.19$. No existe diferencia cualitativa entre las gráficas de la guía de ondas elásticas de Oro-PEBD con las de la guía de Acero-PVC. Los espectros de frecuencias longitudinal se muestran en la Fig. C.4a y para los espectros de frecuencias transversal en la Fig. C.4b, las velocidades de fase longitudinal y transversal en la Fig. C.5a y las velocidades de grupo longitudinal y transversal en las figuras C.5b y C.6, respectivamente. La región de frecuencias está entre los valores $[0, 2876.19]$ para números de onda entre $0 \leq \zeta \leq h/h_p |\beta_t|$ con $\beta_t = -0.0463576$.

De igual forma se hizo un intercambio en los valores E_0 , ρ_0 , σ_0 y E_1 , ρ_1 , σ_1 (tabla C.1) del oro y PEBD, respectivamente. La constante adimensional $\beta_t = 1049.52$ es muy grande lo que hace que los espectros de frecuencias $\Omega_{l_{1\pm}}$ (Ec.(3.28)) sólo tengan solución cuando el número de onda es cero esto debido a las diferencias entre las propiedades mecánicas de los materiales. Un punto importante sería conocer cuál es la diferencia máxima de los materiales empleados para conseguir las características de una guía de ondas elástica simple aunque tal análisis lo hemos dejado a consideración de otras personas interesadas en el tema. Con respecto a las ondas transversales, las gráficas (figuras C.7, C.8 y C.9) son cualitativamente similares comparadas con las figuras correspondientes a la guía de ondas elásticas hecha de Oro y PEBD donde la frecuencia de corte es de $\Omega_c = 0.169468$. La región de frecuencias es, todavía más pequeña que la obtenida en la guía de PVC-Acero, $[0, 0.169468]$ para números de onda entre $0 \leq \zeta \leq h/h_p |\beta_t|$ donde $\beta_t = 786.775$.

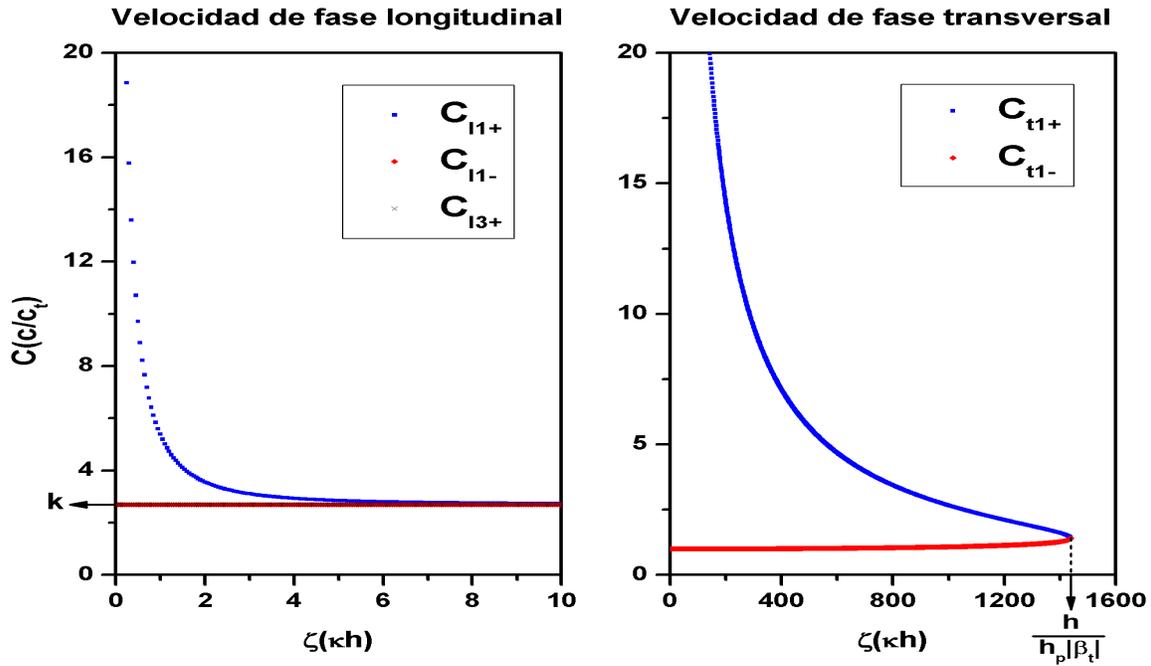


(a) Espectros de frecuencias longitudinal $\Omega_{t_{1\pm}}$. Las ecuaciones que definen a los espectros de frecuencias están en la Ec.(3.28) con una frecuencia de corte $\Omega_c = 4.66451$.

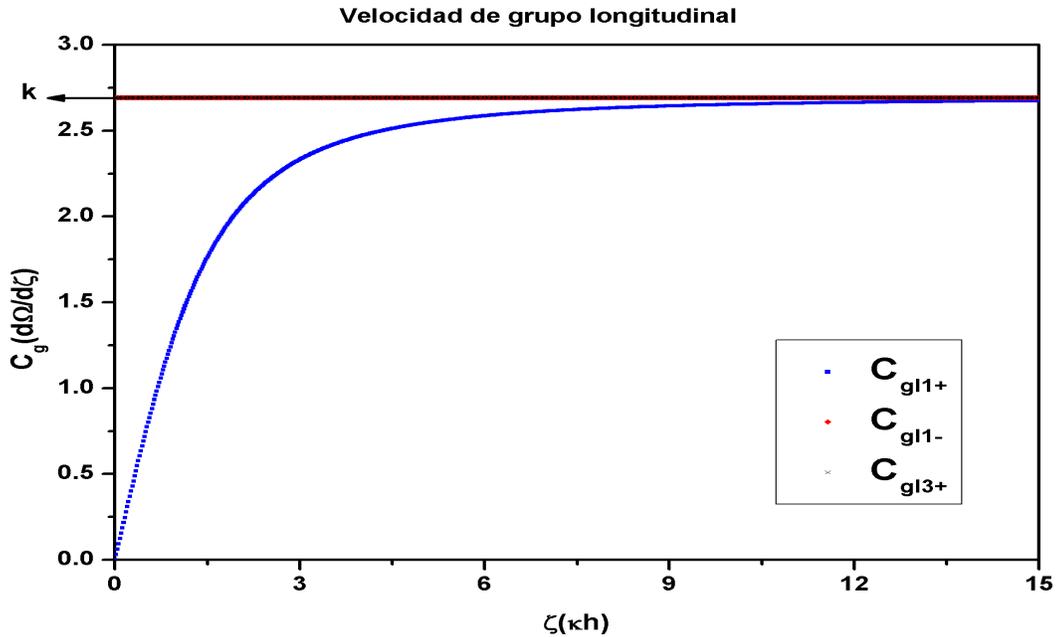


(b) Espectros de frecuencias transversales $\Omega_{t_{1\pm}}$. Las ecuaciones que definen a los espectros de frecuencias están en la Ec.(3.34) con una frecuencia de corte $\Omega_c = 2876.19$. Si se toman valores del número de onda adimensional ζ entre $[0, h/h_p|\beta_t|]$, donde $\beta_t = -0.0463576$, resulta una región de frecuencias $[0, 2876.19]$ llamada filtro pasa bajos.

Figura C.4: Gráficas de los espectros de frecuencias longitudinal (a) y transversal (b) para la guía de ondas elásticas de Oro-PEBD. Los valores utilizados están en la tabla C.1 donde los valores E_0 , ρ_0 , σ_0 representan al oro y E_1 , ρ_1 , σ_1 al polietileno de densidad baja.



(a) Velocidad de fase longitudinal ($C_{l_{1\pm}}$, $C_{l_{3+}}$) y velocidad de fase transversal ($C_{t_{1\pm}}$). Las velocidades de fase $C_{l_{1\pm}}$ están en la sección 3.3.1 (Ec.(3.41)) además $C_{l_{3+}} = k = 2.69258$. Las velocidades de fase $C_{t_{1\pm}}$ están en la sección 3.3.2 (Ec.(3.50)) donde $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = -0.0463576$.



(b) Velocidad de grupo longitudinal ($C_{gl_{1\pm}}$, $C_{gl_{3+}}$). Las velocidades de grupo $C_{gl_{1\pm}}$ están en la sección 3.3.1.1 (Ec.(3.44)) por lo que al tomar valores grandes del número de onda ζ tales velocidades tienden al cantidad de $C_{gl_{3+}} = k = 2.69258$.

Figura C.5: Gráficas (a) velocidad de fase longitudinal y trasnversal; (b) velocidad de grupo longitudinal, para la guía de ondas elásticas de Oro-PEBD.

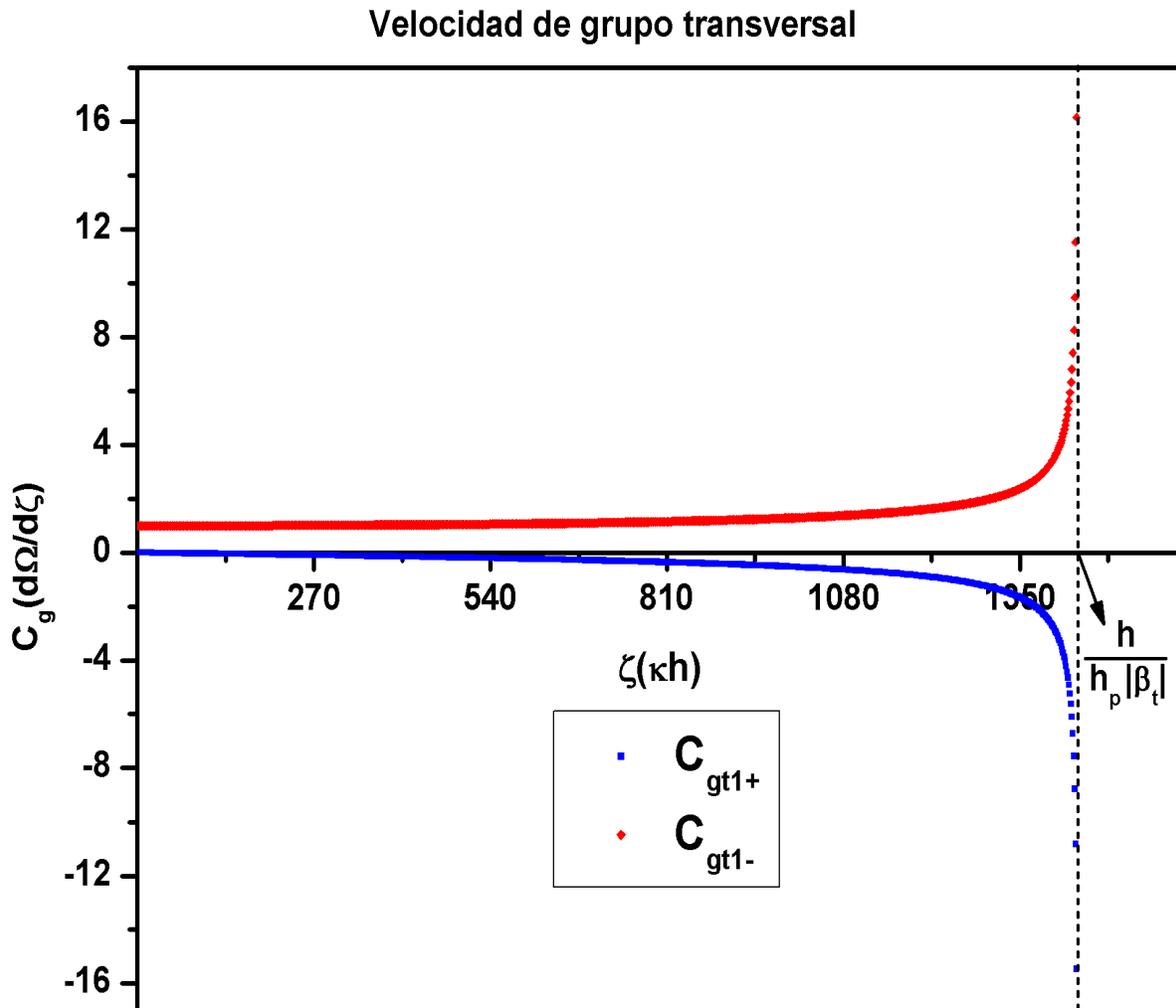


Figura C.6: Gráfica de las velocidades de grupo transversal $C_{gt_{1\pm}}$ (Ec.(3.54) y Ec.(3.55), respectivamente) para una guía de ondas elásticas de Oro-PEBD. En la gráfica se comprueba que la velocidad de grupo $C_{gt_{1+}}$ es negativa en el intervalo de $[0, h/h_p|\beta_t|]$ que en un principio se puede observar en la Fig. C.4bb, donde $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = -0.0463576$. Para valores de ζ mayores a $h/h_p|\beta_t|$ la velocidad de grupo es imaginaria por lo tanto ya no existe propagación de ondas transversales. El valor de la velocidad de grupo para $h/h_p|\beta_t|$ diverge tanto para $C_{gt_{1+}}$ como para $C_{gt_{1-}}$.

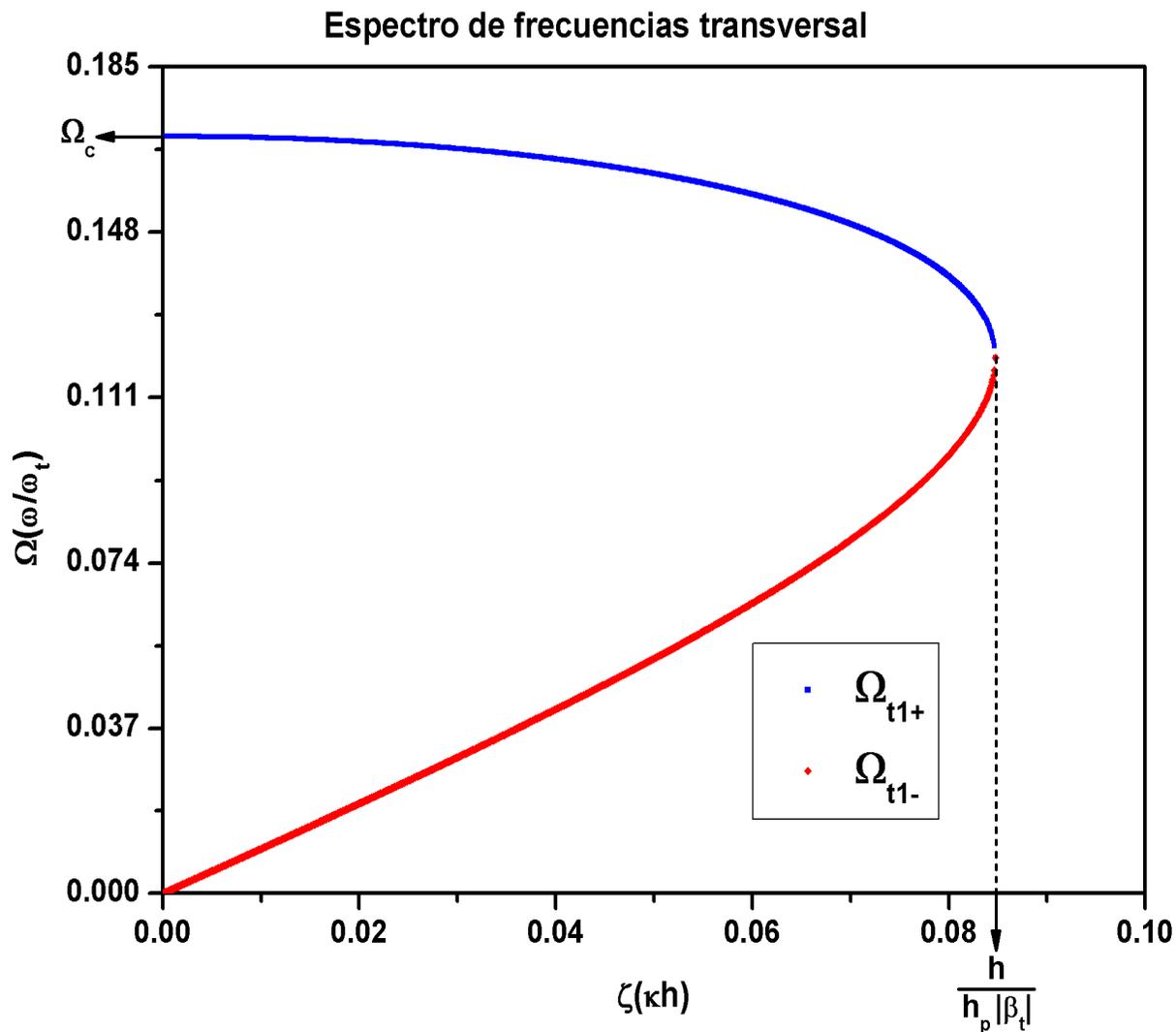


Figura C.7: Gráfica de los espectros de frecuencias transversales $\Omega_{t_{1\pm}}$ (Ec.(3.34)) para la guía de ondas elástica hecha de PEBD-Oro. Los valores utilizados están en la tabla C.1 donde los valores E_0 , ρ_0 , σ_0 representan al polietileno de baja densidad y E_1 , ρ_1 , σ_1 al oro. El espectro de frecuencias $\Omega_{t_{1+}}$ presenta una frecuencia de corte $\Omega_c = 0.169468$. Si se toman valores del número de onda adimensional ζ entre $[0, h/h_p|\beta_t|]$, donde $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = 786.775$, resulta una región de frecuencias $[0, 0.169468]$ llamada filtro pasa bajos.

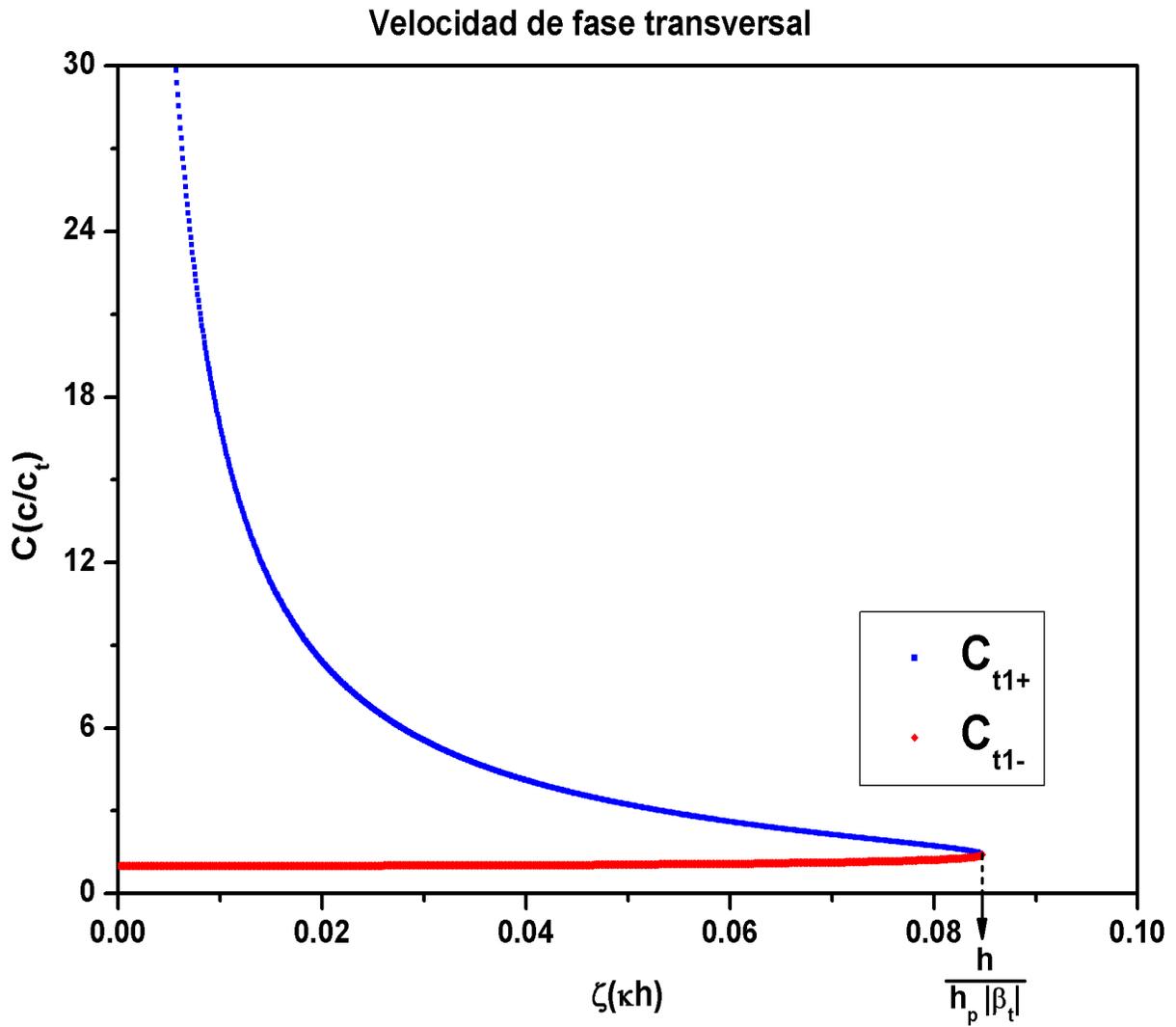


Figura C.8: Gráfica de las velocidades de fase trasnversal para la guía de ondas elásticas de PEBD-Oro. Las velocidades de fase $C_{t_{1\pm}}$ están en la sección 3.3.2 (Ec. (3.50)) donde $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = 786.775$.

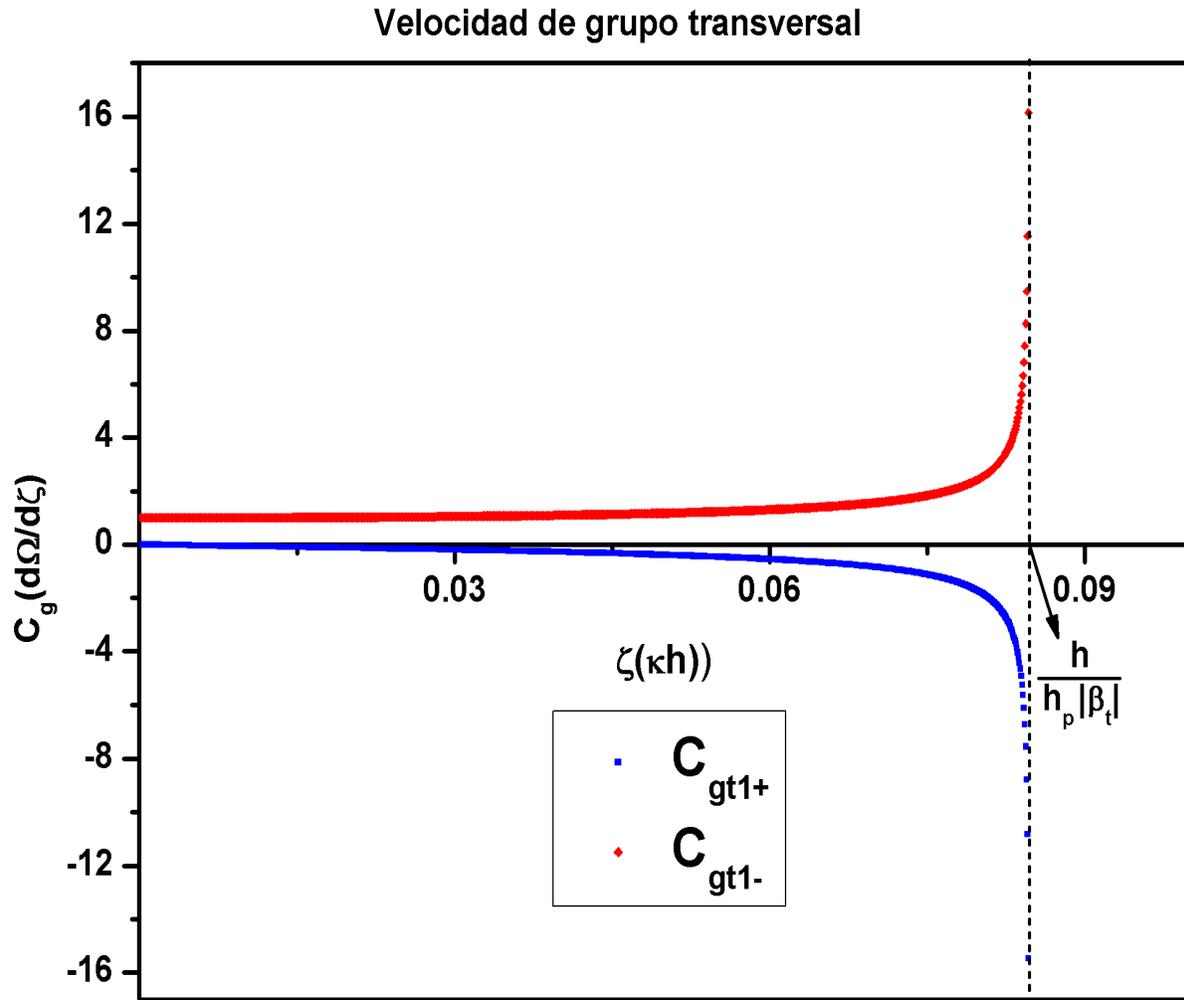


Figura C.9: Gráfica de las velocidades de grupo transversal $C_{gt_{1\pm}}$ (Ec. (3.54)), para la guía de ondas elásticas de PEBD-Oro. En la gráfica se comprueba que la velocidad de grupo $C_{gt_{1+}}$ es negativa en el intervalo de $[0, h/h_p|\beta_t|]$ que en un principio se puede observar en la Fig. C.4b, donde $h = 0.05m$, $h_p = 0.00075m$ y $\beta_t = 786.775$. Para valores de ζ mayores a $h/h_p|\beta_t|$ la velocidad de grupo es imaginaria por lo tanto ya no existe propagación de ondas transversales. El valor de la velocidad de grupo para $h/h_p|\beta_t|$ diverge tanto para $C_{gt_{1+}}$ como para $C_{gt_{1-}}$.

Bibliografía

- [1] Viniegra H., F. “Mecanica de los Cuerpos Deformables”, UNAM, Facultad de Ciencias, (2011).
- [2] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. “Theory of Elasticity”, Institute of physical problems, U.S.S.R. Academic of sciences, Pergamon Press Ltd., Great Britain, 2nd. edition, (1970).
- [3] Veselago, V. G. “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ” , Sov. Phys. Uspekhi, (1968).
- [4] Shiwei Zhou, Scott Townsend, Yi Min Xie, Xiaodong Huang, Jianhu Shen and Qing Li. “Design of fishnet metamaterials with broadband negative refractive index in the visible spectrum”, *Optics Letters* 39, 2415-2418 (2014).
- [5] Shuang Zhang, Yong-Shik Park, Jensen Li, Xinchao Lu, Weili Zhang and Xiang Zhang. “Negative refractive index in chiral metamaterials”, *Physical Review Letters* 102, 023901 (2009).
- [6] Jason Valentine, Shuang Zhang, Thomas Zentgraf, Erick Ulin-Avila, Dentcho A. Genov, Guy Bartal and Xiang Zhang. “Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index”, *Nature* 455, 376-379 (2008).
- [7] Jiabi Chen , Yan Wang, Baohua Jia, Tao Geng, Xiangping Li, Lie Feng, Wei Qian , Bingming Liang , Xuanxiong Zhang , Min Gu³ and Songlin Zhuang. “Observation of the inverse Doppler effect in negative-index materials at optical frequencies”, *Nature Photonics* 5, 239-242 (2011).
- [8] Sam Hyeon Lee, Choon Mahn Park, Yong Mun Seo, Zhi Guo Wang, Chul Koo Kim. “Reverse Doppler effect of sound”, *Condensed Matter-O.*, (2009).
- [9] Hailu Luo, Shuangchun Wen, Weixing Shu, Zhixiang Tang, Yanhong Zou and Dianyuan Fan. “Rotational Doppler effect in left-handed materials”, *Physical Review A* 78, 033805 (2008).
- [10] Daniel D. Stancil, Benjamin E. Henty, Ahmet G. Cepni and J. P. Van’t Hof. “Observation of an inverse Doppler shift from left-handed dipolar spin waves”, *Physical Review B* 74, 060404(R) (2006).

- [11] Mahmoud Addouche, Mohammed A. Al-Lethawe, Abdelkrim Choujaa, and Abdelkrim Khelif. “Superlensing effect for surface acoustic waves in a pillar-based phononic crystal with negative refractive index”, *Applied Physics Letters* 105, 023501 (2014).
- [12] Zhang, Shu. “Acoustic metamaterial design and applications”, (Doctoral dissertation), University of Illinois at Urbana-Champaign, (2010).
- [13] Kim, Sang-Hoon, and Mukunda P. Das. “Seismic waveguide of metamaterials”, *Modern Physics Letters B* 26, 17 (2012).
- [14] <http://www.comoves.unam.mx/numeros/articulo/124/invisibilidad-a-la-vista>.
- [15] Lee Fok, Muralidhar Ambati and Xiang Zhang. “Acoustic metamaterials”, *MRS Bulletin* 33, 931-934 (2008).
- [16] Pai, P. Frank. “Metamaterial-based broadband elastic wave absorber”, *Journal of intelligent materials systems and structures* 21, 517-528 (2010).
- [17] A. Bazán, M. Torres, F. R. Montero de Espinosa, R. Quintero-Torres and J. L. Aragón. “Conformal mapping of ultrasonic crystals: Confining ultrasound and cochlearlike waveguiding”, *Applied Physics Letters* 90, 094101 (2007).
- [18] Guancong Ma, Min Yang, Songwen Xiao, Zhiyu Yang and Ping Sheng. “Acoustic metasurface with hybrid resonances”, *Nature Materials* 13, 873-878 (2014).
- [19] Min Yang, Guancong Ma, Zhiyu Yang and Ping Sheng. “Coupled membranes with doubly negative mass density and bulk modulus”, *Physical Review Letters* 110, 134301 (2013).
- [20] Min Yang, Guancong Ma, Ying Wu, Zhiyu Yang and Ping Sheng. “Homogenization scheme for acoustic metamaterials”, *Physical Review B* 69, 064309 (2014).
- [21] Dalmont, J.-P. “Acoustic impedance measurement, Part I: A review”, *Journal of Sound and Vibration* 243(3), 427-439 (2001).
- [22] Paul Dickens, John Smith and Joe Wolfe. “Improved precision in measurements of acoustic impedance spectra using resonance-free calibration loads and controlled error distribution”, *Acoustical Society of America* 121(3), 1471-1481 (2007).3
- [23] Fa Lin, Xie WenYan, Tian Yong, Zhao MeiShan, Ma Li and Dong DaQun. “Effects of electric-acoustic and acoustic-electric conversions of transducers on acoustic logging signal”, *Chinese Science Bulletin* 57(11), 1246-1260 (2011).
- [24] Victor M.Yakovenko. “Novel method for photovoltaic energy conversion using surface acoustic waves in piezo electric semiconductors”, *Physica B* 407, 1969-1972 (2012).
- [25] Scheuren, J. “Handbook of Engineering Acoustics”,*Springer*, 165-214 (2013).

- [26] Z. Yang, H. M. Dai, N. H. Chan, G. C. Ma, and Ping Sheng. “Acoustic metamaterials panels for sound attenuation in the 50-1000 Hz regime”. *Applied Physics Letters* 96, 041906 (2010).
- [27] A.P. Liu, R. Zhub, X.N. Liu, G.K. Hua and G.L. Huangb. “Multi-displacement microstructure continuum modeling of anisotropic elastic metamaterials”. *Wave Motion* 49, 411-426 (2012).
- [28] S. A. Pope, H. Laalej and S. Daley. “Performance and stability analysis of active elastic metamaterials with a tunable double negative response”. *Smart Mater. Struct.* 21, 125021 (2012).
- [29] Nanfang Yu, Patrice Genevet, Mikhail A. Kats, Francesco Aieta, Jean-Philippe Tetienne, Federico Capasso, Zeno Gaburro. “Lighting propagation with phase discontinuities: Generalized laws of reflection and refraction”, *Science* 334, 333-337 (2011).
- [30] Xingjie Ni, Naresh K. Emani, Alexander V. Kildishev, Alexandra Boltasseva, Vladimir M. Shalaev. “Broadband light bending with plasmonic nanoantennas”, *Science* 335, 427 (2012).
- [31] Alexander V. Kildishev, Alexandra Boltasseva, Vladimir M. Shalaev. “Planar photonics with metasurfaces”, *Science* 339, 1232009-1 (2013).
- [32] Lorrain, P. “Electromagnetic Fields and Wave: Including Electric Circuits”, W. H. Freeman and Company, New York.
- [33] Philip L. Marston. Comment on “Anomalous wave propagation in a one-dimensional acoustic metamaterial having simultaneously negative mass density and Young’s modulus”. *J. Acoust. Soc. Am.* 135 (3), 1031-1033 (2014).
- [34] T. Peets, D. Kartofelev, K. Tamm and J. Engelbrecht. “Waves in microstructured solids and negative group velocity”, *EPL* 103, 16001 (2013).
- [35] A.A. Maznev and A.G. Every. “Existence of backward propagating acoustic waves in supported layers”, *Wave Motion* 48, 401-407 (2011).
- [36] Katsuo Negishi. “Existence of negative group velocities in Lamb waves”, *Japanese Journal of Applied Physics* 26, 171-173 (1987).
- [37] Miklowitz, J. “The theory of elastic waves and waveguides”, North-Holland Publishing Company, Netherlands, (1980).
- [38] Timoshenko, S. P. “Theory of Elasticity”, Stanford University, 3rd. edition, McGraw-Hill, (1987).
- [39] Love, A. E. H. “A treatise on the mathematical theory of elasticity”, Dover Publications, New York, (1944).

- [40] Chou, P. C. and Pagano, N. J. "Elasticity: Tensor, Dyadic, and Engineering approaches", Dover Publications, Inc., New York, (1992).
- [41] Arfken, George B. "Mathematical methods for physicists", Academic press, 2013.
- [42] Sommerfeld, A. "Mechanics of deformable bodies: Lectures on theoretical physics", translated from the second German edition by G. Kuerti, Harvard University, Academic Press, New York and London, (1964).
- [43] Meza, J. M., et al. "Using the ultrasound and instrumented indentation techniques to measure the elastic modulus of engineering materials" *Revista de Metalurgia* 44 (1), 52-65 (2008).
- [44] Orozco, J. "Aplicación de criterios de sostenibilidad en instalaciones. Taller 31: Materiales para una arquitectura sostenible".
- [45] D. Gupta, P. Gupta, P. Chitransh and P.K. Singhal. "Design and analysis of low pass microwave filter using metamaterial ground structure", *Signal Processing and Integrated Networks (SPIN), 2014 International Conference on* , 388-392 (2014).
- [46] Zhihua Zhu, Xueqian Zhang, Jianqiang Gu, R. Singh, Zhen Tian, Jiaguang Han and Weili Zhang, "A Metamaterial-Based Terahertz Low-Pass Filter With Low Insertion Loss and Sharp Rejection", *Terahertz Science and Technology, IEEE Transactions on* 3, 832-837 (2013).
- [47] S. Suganthi, S. Raghavan and D. Kumar. "Study of performance improvement of the design of compact SRR embedded microstrip low pass filter", *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings*, 783-788 (2012).
- [48] Engheta, N. and Ziolkowski, R. W. "Metamaterials: Physics and engineering explorations", IEEE Press, Piscataway, NJ (2006).
- [49] Cotzomi Guerrero, N. J. M. "Homogenización de un cristal fotónico quiral", (Tesis de licenciatura), Universidad Nacional Autónoma de México, (2012).
- [50] Simovski, Constantin R. and Belov, Pavel A. and Atrashchenko, Alexander V. and Kivshar, Yuri S. "Wire Metamaterials: Physics and Applications", *Advanced Materials* 24, 4229-4248 (2012).
- [51] <http://www.iscsl.it/pdf.asp>
- [52] <http://www.goodfellow.com/S/Oro.html>